

3057

UNAM  
OSGRADO



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

ANALISIS TERMODINAMICO DE MODELOS  
COSMOLOGICOS INHOMOGENEOS

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS QUIMICAS  
(FISICOQUIMICA)

P R E S E N T A :  
Q. RUBEN DAVID ZARATE REYES

MEXICO, D.F.,

2001.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado:

Presidente	Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky
Primer Vocal	Dr. Alfredo Macías Álvarez
Secretario	Dr. Luis Alberto Vicente Hinestroza
Primer Suplente	Dr. Tonatiuh Matos Chassin
Segundo Suplente	Dr. Emilio Orgaz Baqué

Sitio donde se desarrolló el tema:

Instituto de Ciencias Nucleares  
UNAM

*Rubén Zárate*

Q. Rubén David Zárate Reyes  
Sustentante



Dr. Hernando Quevedo Cubillos  
Asesor

# Índice General

1	INTRODUCCIÓN	1
2	TERMODINÁMICA	8
2.1	Termodinámica clásica	8
2.2	Termodinámica Relativista	13
2.3	Termodinámica Irreversible	20
3	EL MODELO COSMOLÓGICO STANDARD	30
3.1	La métrica de Robertson-Walker	32
3.2	Dinámica cósmica: Modelos de Friedmann	40
3.2.1	Modelos estáticos	42
3.2.2	Modelos vacíos	43
3.2.3	Modelos no vacíos con $\Lambda = 0$	44
3.2.4	Modelos no vacíos con $\Lambda \neq 0$	46
4	MODELOS COSMOLÓGICOS INHOMOGÉNEOS	49
4.1	Los Universos de Szekeres	50
4.1.1	Subfamilia $\beta' = 0$	51
4.1.2	Subfamilia $\beta' \neq 0$	52
4.1.3	Propiedades comunes a las 2 subfamilias	54
4.1.4	Propiedades de la subfamilia $\beta' = 0$	55
4.1.5	Propiedades de la subfamilia $\beta' \neq 0$	56
4.1.6	Propiedades físicas de la familia	58
4.1.7	Espaciotiempo de Szafron con $\beta' = 0$ (simetría esférica)	59
4.1.8	Generalizaciones de subcasos de la subfamilia $\beta' = 0$	62
4.1.9	Soluciones de la familia $\beta' \neq 0$ con simetría $G_3/S_2$	65
4.1.10	Otros casos del spaciotiempo de Szafron con $\beta' \neq 0$	67

4.1.11	Generalizaciones electromagnéticas a la subfamilia $\beta' \neq 0$ . . . . .	68
4.1.12	Generalizaciones de las soluciones de la subfamilia $\beta' \neq 0$ con viscosidad . . . . .	71
4.1.13	Descripción de la formación de vacíos . . . . .	72
4.1.14	Descripción de la formación de estructuras . . . . .	73
4.1.15	Influencia de las inhomogeneidades en la distribución de materia sobre la radiación de fondo . . . . .	74
4.2	Los Universos de Stephani . . . . .	75
4.2.1	Definición y propiedades generales . . . . .	76
4.2.2	Soluciones tipo D . . . . .	77
4.2.3	Modelos de Barnes con simetría hiperbólica . . . . .	78
4.2.4	Modelos de Barnes con simetría plana . . . . .	79
4.2.5	Modelos de Kustaanheimo-Qvist . . . . .	80
4.2.6	Soluciones conformalmente planas . . . . .	81
4.2.7	Solución de Stephani con simetría esférica . . . . .	83
4.2.8	Generalización electromagnética de los espaciotiempos KQ . . . . .	83
4.2.9	Generalización de los modelos de Stephani con flujo de calor . . . . .	85
<b>5</b>	<b>MEZCLAS DE FLUIDOS</b> . . . . .	<b>87</b>
5.1	Termodinámica clásica de mezclas de fluidos . . . . .	87
5.2	El esquema termodinámico . . . . .	96
5.3	Termodinámica del fluido perfecto irrotacional . . . . .	100
5.4	Modelos cosmológicos interpretados como mezclas . . . . .	104
5.4.1	Esquema termodinámico para una mezcla . . . . .	104
5.5	Universos de Szekeres . . . . .	108
5.5.1	Soluciones de Szekeres clase I ( $\beta' \neq 0$ ) . . . . .	109
5.5.2	Soluciones de Szekeres clase II ( $\beta' = 0$ ) . . . . .	114
5.6	Universos de Stephani . . . . .	118
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES</b> . . . . .	<b>124</b>

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

El movimiento siempre ha llamado la atención del hombre. Para su comprensión, éste debió desarrollar los conceptos de espacio y tiempo. El concepto de espacio era, de alguna forma, natural; pues era en el espacio donde se desarrollaban todos los fenómenos, desde las formas más sencillas de movimiento, hasta la existencia misma del hombre. Servía, pues, de escenario para todos los eventos. La invención del concepto de tiempo, sin embargo, fue necesaria para describir la gran cantidad de cambios que suceden en los sistemas (físicos, químicos, biológicos...) que rodean al hombre, y el orden en el que se presentan.

En la Física newtoniana, el tiempo es un parámetro que nos ayuda en la descripción del movimiento. Con él, la descripción del movimiento es tan simple como puede ser: a cada posición de un cuerpo en el espacio, durante su movimiento, le corresponde una asignación en el tiempo. Además de hacer simple la descripción del movimiento, en la Física newtoniana el tiempo goza de una cualidad especial, pues es absoluto. Esto quiere decir que, todos los

observadores le asocian al intervalo de tiempo transcurrido entre cada par de eventos, la misma duración. Sin embargo, ya el mismo Newton sabía que dos eventos que ocurrían "en un mismo lugar" para un observador, para otro podrían ocurrir en "dos lugares distintos", por lo que la distancia espacial que separa a dos eventos no es absoluta. Esa era una de las diferencias entre las propiedades del tiempo y el espacio. En particular, Newton no encontró un espacio absoluto, con respecto al cual debían medirse todas las aceleraciones, pues, según él, interactuaba con todas las partículas, resistiéndose a que éstas se aceleraran; y lo identificó, arbitrariamente, con el sistema de referencia del centro de masa del sistema solar.

En la Teoría Especial de la Relatividad, los conceptos de espacio y tiempo, por sí solos, pierden el significado que se les había conferido en la Física newtoniana. Ni el tiempo es absoluto, ni existe un sistema de referencia preferido, con respecto al cual medir aceleraciones. En su lugar, aparece el concepto nuevo de espaciotiempo, introducido por Hermann Minkowski en 1908, sin el cual, la interpretación de las transformaciones de Lorentz no es natural. En esta teoría se hace patente la importancia de los sistemas de referencia, en particular, son los sistemas de referencia inerciales quienes jugarán un papel decisivo, pues es en ellos que la descripción de los fenómenos físicos es particularmente sencilla. Además, se hace hincapié en que todas las leyes de la Física deberán tener la misma forma en cada sistema de referencia inercial. Sin embargo, la Teoría Especial de la Relatividad debe excluir el estudio de sistemas en los que están presentes campos gravitacionales, pues

la presencia de estos impide la existencia de sistemas de referencia inerciales globales.

La Teoría General de la Relatividad de Einstein es la teoría relativista de la gravitación. En ella se incorporan, a los conceptos desarrollados en la Teoría Especial de la Relatividad, la presencia de los campos gravitacionales y sus efectos; por lo que podemos decir que la segunda es un caso particular de la primera. En la Teoría General de la Relatividad cobra vital importancia la estructura geométrica del espaciotiempo, y es, de hecho, el estudio de esta estructura geométrica lo que permite el desarrollo y comprensión de los profundos conceptos físicos de esta teoría.

El desarrollo de la Teoría General de la Relatividad tiene, como elemento más importante, la deducción de las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional:

$$\mathbb{G} = \kappa \mathbb{T} \tag{1.0.1}$$

donde  $\mathbb{G}$  es el tensor de Einstein, cuyas componentes son

$$G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R \tag{1.0.2}$$

$g^{ab}$  son las componentes del tensor métrico del espaciotiempo, y  $R^{ab}$  son las componentes del tensor de Ricci, obtenido de la contracción del tensor de curvatura de Riemann:



$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \quad (1.0.3)$$

y  $R$  es el escalar de curvatura, obtenido, a su vez, de la contracción del tensor de Ricci:

$$R = R_{\alpha}^{\alpha} \quad (1.0.4)$$

Es claro, pues, que el tensor de Einstein contiene información geométrica del espaciotiempo. Por otro lado,  $\kappa$  es una constante y  $\mathbb{T}$  es el tensor de energía-momento del contenido material y energético del sistema. Dicho contenido se modela, usualmente, con un fluido perfecto, en tal caso sus componentes son

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu} \quad (1.0.5)$$

donde  $u^{\mu}$  son las componentes del cuadrivector de velocidad del fluido,  $\rho$  es su densidad de masa-energía y  $p$  es su presión. La información que contiene el tensor de energía-momento es, precisamente, la de los flujos de energía y momento en el fluido. Así pues, estamos considerando, en este caso, que el fluido perfecto es la fuente del campo gravitacional. Decimos que el fluido, con su masa y energía, genera la curvatura del espaciotiempo, y que esta curvatura del espaciotiempo, a su vez, determina el movimiento del fluido. Esto quiere decir que los campos gravitacionales, en la Teoría General de la Relatividad, están incluidos dentro de la estructura geométrica del espaciotiempo. En

la Teoría Especial de la Relatividad, la ausencia de campos gravitacionales implica que siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas en el que el espaciotiempo es globalmente plano.

La Teoría General de la Relatividad de Einstein encuentra su más grande e importante aplicación en la Cosmología Relativista, que es el estudio de modelos relativistas del Universo; pues siendo ésta una teoría de la estructura geométrica del espaciotiempo, nos deja en posición de hacer un estudio de la dinámica del Universo (que está regida básicamente por las interacciones gravitacionales) como una sola entidad.

Como es notorio de las ecuaciones de campo, en nuestro estudio de la dinámica del Universo están comprometidos dos aspectos: el geométrico, que involucra la caracterización del espaciotiempo, y el termodinámico, que involucra la parte fenomenológica. Esto quiere decir que cuando estudiamos modelos cosmológicos en el marco de la Relatividad General, debemos tener cuidado de exigir que la evolución que las ecuaciones de campo le dicten a nuestro fluido, sea compatible con la evolución que las leyes de la Termodinámica le exigen al mismo.

Es bien sabido que el advenimiento de la Relatividad provocó cambios en la forma de escribir y entender las leyes de la Física. Resulta interesante que la Termodinámica no ha sido, hasta este momento, sometida a tal proceso con éxito. De hecho, quienes se han preocupado por este problema se han preguntado qué y cómo, de ser necesario, debe modificarse para lograr una Termodinámica Relativista. Hasta el momento, en la literatura no se ha

llegado a un consenso, y hay más de una propuesta; de hecho, se tienen dudas tan fundamentales como qué cantidad o cantidades deben considerarse como invariantes. Ninguna de estas preguntas tiene, aún, respuesta definitiva. En Cosmología, la práctica usual es considerar válidas todas las relaciones entre las variables termodinámicas que aparecen en la Termodinámica clásica, asumiendo que no es necesario hacer cambio alguno.

Otro punto que llama nuestra atención sobre el uso de la Termodinámica radica en el hecho de que sus relaciones, formalmente, son válidas para sistemas que se encuentran en estado de equilibrio, es decir, cuyas propiedades son independientes del tiempo. En el caso de la Cosmología, el sistema estudiado es el Universo, y uno de nuestros principales intereses consiste, precisamente, en la predicción de la evolución del mismo. Es decir, difícilmente podríamos pensar que el sistema se encuentra en uno de sus estados de equilibrio, en el sentido convencional.

En esta tesis desarrollamos el análisis termodinámico de los modelos cosmológicos que gozan de mayor generalidad, interpretando las soluciones exactas inhomogéneas a las ecuaciones de campo de Einstein como una mezcla de fluidos perfectos, con el objetivo de estudiar cuáles son las restricciones que la Termodinámica impone a las métricas que definen dichos modelos. Para tal efecto, generalizamos el esquema termodinámico de Coll y Ferrando a mezclas de fluidos, y estudiamos si el definir bien las variables termodinámicas impone alguna simetría sobre las soluciones. Nuestro resultado es que podemos definir bien todas las variables termodinámicas sin que esto implique la

aparición de simetrías, sin embargo, exigir la satisfacción de la condición de producción de entropía, asociada con el proceso de mezclado de los fluidos, reduce a los modelos a los tipo FRW.

## Capítulo 2

# TERMODINÁMICA

### 2.1 Termodinámica clásica

Una de las tareas principales de los científicos consiste en describir los fenómenos naturales, y el primer contacto que estos tienen con la naturaleza (y el más importante) se lleva a cabo a nivel macroscópico. El papel de la Termodinámica es precisamente el estudio de las propiedades macroscópicas de los sistemas, y de las relaciones existentes entre las mismas. Estas propiedades están sujetas a regularidades de carácter universal, y las sutiles relaciones que encontramos entre propiedades aparentemente desligadas, nos hacen ver que las implicaciones de la teoría son de gran alcance.

La Termodinámica parte del supuesto de que los sistemas macroscópicos se pueden caracterizar de forma simple, pues a pesar de que estos sistemas están constituidos por muchas partículas, y esto implica mucha información involucrada, la información relevante a nivel macroscópico es muy poca, por lo que la descripción buscada se logra con un número pequeño de variables

macroscópicas. Además, la Termodinámica es una teoría que describe sistemas independientes del tiempo, pues su principal interés son los estados "estáticos" de los sistemas macroscópicos. Gracias a la simplicidad tanto de la descripción como de los estados de los sistemas que son de interés para la Termodinámica, ésta resulta de gran generalidad, pues es aplicable a sistemas con todo tipo de propiedades mecánicas, eléctricas, magnéticas y térmicas; siendo éstas últimas de gran importancia.

Para la Termodinámica, así como para el resto de la Física y la ciencia en general, la conservación de la energía ha sido de gran significación. De hecho, uno de los primeros pasos dados en el desarrollo de la teoría es la consideración de la existencia de una función bien definida, útil en la descripción de los sistemas macroscópicos, llamada energía interna y sujeta al principio de conservación. Dado el carácter fenomenológico de la teoría, históricamente, este paso se dió a través de numerosos experimentos desarrollados a lo largo de 250 años.

Otro paso importante en el desarrollo de la teoría fue el reconocer que los sistemas macroscópicos alcanzan estados muy simples, los cuales son independientes de la historia de los sistemas. Estos estados se caracterizan porque las propiedades del sistema quedan determinadas por factores intrínsecos y no por influencias externas, y es el principal objetivo de la Termodinámica realizar su descripción.

A pesar de que la Termodinámica nace como una ciencia esencialmente fenomenológica, el análisis crítico de un gran número de resultados a lo largo

de los años nos permite ahora considerarla como una teoría sólida y bien establecida. Una de las formas más convenientes en que se puede estudiar es la postuladora. Aquí consideramos los postulados con los que se puede presentar la teoría de forma muy resumida (Callen).

**Postulado I.** Existen estados particulares, llamados de equilibrio, de los sistemas simples, que se caracterizan con la energía interna, el volumen y el número de partículas.

Resulta entonces importante, determinar si un sistema se encuentra o no en alguno de sus estados de equilibrio. El aplicar el formalismo de la Termodinámica a sistemas fuera de equilibrio lleva a inconsistencias y contradicciones entre las predicciones de la teoría y los resultados experimentales. Ésta puede ser una guía para detectar estados de no equilibrio.

**Postulado II.** Existe una función de los parámetros extensivos, llamada entropía, definida para todos los estados de equilibrio, y con la propiedad de que, los valores que toman los parámetros extensivos al retirar una restricción interna del sistema, la maximizan sobre el conjunto de estados de equilibrio accesibles al sistema.

Entonces, podemos enunciar el problema fundamental de la Termodinámica como la determinación del estado de equilibrio que alcanza un sistema macroscópico cuando a éste se le retiran restricciones internas. Es pues, la entropía, de primordial importancia, pues, en principio, de conocerla, nuestro problema está resuelto. En otras palabras, la relación funcional entre la entropía y los parámetros extensivos es la relación fundamental de la teoría, ya que contiene la información termodinámica completa.

Postulado III. La entropía de un sistema compuesto es aditiva sobre los subsistemas constituyentes. Es una función continua, diferenciable y monótonamente creciente de la energía interna.

Si aplicamos la aditividad de la entropía a subsistemas espacialmente separados, nos percatamos de que debe ser una función homogénea de primer orden de los parámetros extensivos.

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N) \quad (2.1.1)$$

Además, el que sea monótonamente creciente implica

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} > 0 \quad (2.1.2)$$

que podemos considerar como la definición de la temperatura como una función siempre positiva. La continuidad y diferenciability implican que podemos tener una formulación energética de la Termodinámica, equivalente a la formulación entrópica

$$S = S(U, V, N) \quad (2.1.3)$$

$$U = U(S, V, N) \quad (2.1.4)$$

Postulado IV. La entropía de todo sistema es cero en el estado para el cual  $\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} = 0$ .

Entonces,  $S = 0$  para el estado en que  $T = 0$ ; la entropía tiene un único cero definido. El resto del cuerpo de la teoría puede prescindir de este postulado.



Sus implicaciones, claramente, se hacen presentes a bajas temperaturas, en las vecindades de  $T = 0$ . La asignación de este valor absoluto para la entropía tiene su mayor significación en la interpretación de la Mecánica Estadística. Sus alcances más importantes son, por un lado, en Termoquímica y sobre los coeficientes de respuesta, por el otro, pues cuando  $T \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $C_P \rightarrow 0$ ,  $C_V \rightarrow 0$ , etc. Además, ya que asegura que la isoterma  $T = 0$ , es también, la isentropa (adiabata)  $S = 0$ , implica que ningún proceso cuasiestático adiabático que inicie a temperatura  $T \neq 0$  puede llevar a un sistema a  $T = 0$ .

A partir del conocimiento de la relación fundamental de un sistema,  $S = S(U, V, N)$ , obtenible, en principio, a través de la medición experimental de los coeficientes de respuesta, uno puede deducir todas las ecuaciones de estado del mismo, es decir, encontrar la dependencia de las variables intensivas como funciones de las variables extensivas. Además, con los postulados uno determina la condición de equilibrio termodinámico, en términos del equilibrio térmico, el equilibrio mecánico, el equilibrio químico, el equilibrio de fases, etcétera y las condiciones de estabilidad de un sistema, que se reflejan como restricciones sobre los coeficientes de respuesta del mismo

$$C_P \geq C_V \geq 0 \quad (2.1.5)$$

$$\kappa_T \geq \kappa_S \geq 0 \quad (2.1.6)$$

## 2.2 Termodinámica Relativista

Quando un sistema físico se encuentra en movimiento relativo con respecto a nosotros, surge la pregunta de cómo debemos transformar las cantidades y ecuaciones con las que describimos al sistema y a los fenómenos que en él se llevan a cabo. La Teoría de la Relatividad Especial establece que si los sistemas de referencia en cuestión son inerciales, la forma adecuada de realizar dichas transformaciones es por medio de las transformaciones de Lorentz. Es bien sabido que dichas transformaciones, junto con la Teoría de la Relatividad misma, modificaron de manera fundamental la forma en que se entendían las leyes de la Física.

Es de nuestro interés, entonces, preguntar cuál es el efecto del movimiento relativo sobre las leyes de la Termodinámica y sobre las variables con las que describimos a un sistema termodinámico, y más aún, cómo se ve modificada la teoría de la Termodinámica cuando consideramos la presencia de campos gravitacionales.

Podemos decir que la primera aportación de la Teoría de la Relatividad a la Termodinámica se realizó a través de la ecuación

$$E = mc^2 \tag{2.2.1}$$

pues ella nos permite considerar procesos termodinámicos en los que los cambios de energía del sistema se realizan a través de cambios de la masa del mismo, y por lo tanto nos posibilita a determinar la condición de equili-

brio de procesos tales como la transformación de materia y antimateria en radiación electromagnética. Sin embargo; lo que podemos decir acerca de la Termodinámica de sistemas en movimiento o en campos gravitacionales, es todavía de carácter especulativo.

Sean  $\theta(\gamma)$  y  $f(\gamma)$ , con  $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ , funciones desconocidas, tales que; si  $dQ_o$  es la cantidad de calor que dos sistemas termodinámicos intercambian en el sistema de referencia inercial  $I_o$  en el que ambos están en reposo, entonces en el sistema de referencia inercial  $I$ , en movimiento relativo a  $I_o$  con velocidad  $v$ , la cantidad de calor intercambiada entre los dos sistemas,  $dQ$  estará dada por

$$dQ = f(\gamma) dQ_o \quad (2.2.2)$$

Si  $v \rightarrow 0$ ,  $\gamma \rightarrow 1$  y entonces  $f(1) = 1$ . Además, supongamos que la segunda ley de la Termodinámica para procesos cuasiestáticos,  $T_o dS_o = dQ_o$  en  $I_o$ , en  $I$  tiene la forma

$$T dS = \theta(\gamma) dQ \quad (2.2.3)$$

con  $\theta(1) = 1$ . Asumiendo la invariancia de  $P$  y  $S$

$$P = P_o \quad (2.2.4)$$

$$S = S_o \quad (2.2.5)$$

aceptada por la mayoría de los autores, y considerando las transformaciones

$$V = \frac{V_o}{\gamma} \quad (2.2.6)$$

$$dE_o = \gamma (dE - \bar{v} \cdot d\bar{p}) \quad (2.2.7)$$

tenemos que

$$TdS = \theta dQ = \theta f dQ_o = \theta f (dE_o - PdV_o) = \theta f \gamma (dE - \bar{v} \cdot d\bar{p} + PdV) \quad (2.2.8)$$

y además

$$TdS = \theta f dQ_o = \theta f T_o dS_o \quad (2.2.9)$$

lo que implica que

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E, \bar{p}} = \theta f \gamma \frac{P}{T} \quad (2.2.10)$$

$$T = \theta f T_o \quad (2.2.11)$$

Sabiendo que  $\left( \frac{\partial S_o}{\partial V_o} \right)_{E_o} = \frac{P_o}{T_o}$ , ¿qué funciones deben ser  $\theta$  y  $f$ ? La respuesta a esta pregunta, a lo largo de los años no ha sido única, y en la literatura uno puede encontrar, entre otras, las siguientes propuestas:

1) La Termodinámica debe ser invariante en forma, por lo que

$$\theta(\gamma) = 1 \quad (2.2.12)$$

$$\gamma\theta(\gamma) f(\gamma) = 1 \quad (2.2.13)$$

$$f(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \quad (2.2.14)$$

y esto implica que

$$T = \frac{T_0}{\gamma} \leq T_0 \quad (2.2.15)$$

entonces, un cuerpo en movimiento se ve más frío que en el sistema de referencia en el que se encuentra en reposo.

ii) La segunda ley de la Termodinámica debe ser invariante y  $f(\gamma) = \gamma$ , por lo que

$$\theta(\gamma) = 1 \quad (2.2.16)$$

y entonces

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E, \mathcal{P}} = \gamma^2 \frac{P}{T} \quad (2.2.17)$$

algunas relaciones termodinámicas cambian y

$$T = \gamma T_0 \geq T_0 \quad (2.2.18)$$

un cuerpo en movimiento se ve más caliente que en el sistema de referencia en el que se encuentra en reposo.

iii) La temperatura,  $T$ , es invariante, por lo que

$$\theta(\gamma) f(\gamma) = 1 \quad (2.2.19)$$

$$\theta f(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \quad (2.2.20)$$

$$\theta(\gamma) = \gamma \quad (2.2.21)$$

y algunas relaciones, como la segunda ley, se ven modificadas al cambiar de sistema de referencia.

En el área de la Relatividad General se ha discutido el concepto de equilibrio térmico. Para estudiar los efectos de un campo gravitacional, sean  $\phi_2$  y  $\phi_1$  ( $\phi_2 > \phi_1$ ) el potencial gravitacional a un nivel alto y a uno bajo, respectivamente. Además,  $R$  será un reservorio, siempre a la temperatura  $T_2$  del nivel alto e inicialmente en reposo ahí. En el nivel alto cede una cantidad de calor  $Q_2$ , y desciende al nivel bajo, que se encuentra a la temperatura  $T_1$ . Tal proceso (el descenso), no provoca cambios en la entropía de  $R$ , si lo realizamos cuasiestáticamente y de manera adiabática. Ahora, queremos regresar a  $R$  a su estado térmico original, cediéndole la cantidad de calor  $Q_1$  para que recupere la entropía perdida anteriormente. Para lograr todo esto, nos las arreglamos para que una máquina de Carnot trabaje cuasi-

estáticamente entre el nivel bajo y R. Como no hay cambio de la entropía en este proceso

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} \quad (2.2.22)$$

Por supuesto, la máquina desarrolla trabajo, que, como usualmente, está dado por

$$Q_1 - Q_2 \quad (2.2.23)$$

El sistema completo se regresa a su estado original, elevando el reservorio R, que se encuentra ya en su estado térmico original, hasta el nivel alto. Resulta que la eficiencia del ciclo está dada por

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{\phi_2 - \phi_1}{c^2} \frac{T_2}{T_1} \quad (2.2.24)$$

De aquí, nos damos cuenta que el nivel alto corresponde al reservorio caliente, pues así obtenemos la eficiencia para el ciclo de Carnot usual, en ausencia de campo gravitacional ( $\phi_2 = \phi_1$ ). Este resultado nos ayudará a establecer una definición de equilibrio térmico, pues si consideramos que el equilibrio térmico está dado por la uniformidad de  $T$  en el sistema, nuestro resultado carecerá de sentido. Pero si el equilibrio térmico significa que una máquina de Carnot, trabajando entre dos regiones del sistema no produce trabajo mecánico, es decir,  $\eta = 0$ , entonces  $T_2 \neq T_1$ , y de hecho

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{c^2} \quad (2.2.25)$$

que implica  $T_1 = T_2$  sólo si  $\phi_2 = \phi_1$ . Como parece razonable, se adopta ésta como definición de equilibrio térmico. Para

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad (2.2.26)$$

podemos escribir

$$T_1 \left( 1 + \frac{\phi_1}{c^2} \right) = T_2 \left( 1 + \frac{\phi_2}{c^2} \right) \quad (2.2.27)$$

Así, el equilibrio térmico en una región implica que, para campos gravitacionales pequeños y estacionarios

$$T_o = f(\bar{r}) T(\bar{r}) \quad (2.2.28)$$

es independiente de  $\bar{r}$  en la región, y

$$f(\bar{r}) = 1 + \frac{\phi(\bar{r})}{c^2} \quad (2.2.29)$$

Esta relación la obtuvo, por primera vez, R. C. Tolman,  $T_o$  es la llamada temperatura local que debe ser uniforme en el equilibrio. En contraste,  $T$  es la temperatura medida experimentalmente. En ausencia del campo gravitacional,  $T = T_o$ .

En ninguna de las consideraciones anteriormente expuestas existe consenso explícito. Entre los diversos autores, hay quienes opinan que cualquiera



de las propuestas es admisible, otros se apegan a alguna de ellas y hay hasta quienes claman que no hay necesidad de preguntarse acerca de estas modificaciones, tanto en el ámbito de la Relatividad Especial como en el de la Relatividad General, pues, aseguran, todas las leyes y ecuaciones de la Termodinámica son las mismas tanto en el espaciotiempo plano como curvo, iguales a aquellas de la Termodinámica clásica no relativista, excepto por la consideración de las modificaciones que involucra la ecuación  $E = mc^2$ . La razón de esta aseveración, dicen, es que las ecuaciones están formuladas de manera escalar, ligando variables termodinámicas que uno mide en el sistema de referencia en el que el sistema termodinámico se encuentra en reposo.

## 2.3 Termodinámica Irreversible

A pesar del éxito y gran utilidad de la Termodinámica clásica (Termostática) en la caracterización de los estados de equilibrio de los sistemas, debemos reconocer que el principal interés de los científicos se centra en el estudio de los procesos que se realizan en los sistemas, más que en los estados de equilibrio que estos pueden alcanzar. Aunque la Termodinámica clásica es capaz de analizar los efectos globales de un proceso realizado en un sistema, a partir de la información de los estados inicial y final del sistema, es incapaz, por ejemplo, de decirnos con que velocidad se llevan a cabo los cambios en el sistema, es decir, cual es la velocidad de los procesos. La extensión de la Termodinámica clásica que hace referencia a la velocidad de los procesos es la teoría de la Termodinámica irreversible, su objetivo es englobar en un

sólo esquema el tratamiento fenomenológico de los procesos irreversibles y proveer un marco general para la descripción macroscópica de los mismos.

Las primeras consideraciones de carácter termodinámico en el análisis de procesos irreversibles las realizó W. Thomson en 1854, al estudiar varios fenómenos termoelectrónicos. A finales del siglo XIX y principios del XX, varios científicos intentaron formular expresiones para la rapidez de cambio de la entropía local en sistemas no uniformes, partiendo de la segunda ley de la Termodinámica, y de las leyes de conservación macroscópicas. Así, lograron relacionar la irreversibilidad con la no uniformidad de los sistemas. En 1931, Lars Onsager establece sus famosas relaciones de reciprocidad, que se cumplen para los coeficientes de las distintas leyes fenomenológicas lineales que describen a los procesos irreversibles. En los 1940's, Meixner y Prigogine implementaron una teoría fenomenológica consistente de los procesos irreversibles, que incorpora el teorema de reciprocidad de Onsager y el cálculo explícito de la fuente de entropía para cierto número de situaciones físicas.

Para abordar el problema de la descripción de los procesos irreversibles, empezaremos por introducir dos conceptos nuevos: uno para referirnos a la "fuerza" que provoca el proceso en cuestión y otro para describir la respuesta a esta fuerza. Consideremos un sistema compuesto por 2 subsistemas. Un parámetro extensivo tendrá los valores  $X_{1k}$  y  $X_{2k}$  respectivamente, y la condición de cerradura implicará

$$X_{1k} + X_{2k} = X_k \quad (2.3.1)$$

donde  $X_k$  es una constante. Si no existen restricciones sobre  $X_{1k}$  y  $X_{2k}$ , los valores que toman en el equilibrio quedan determinados cuando

$$\Psi_k \equiv \left( \frac{\partial S}{\partial X_{1k}} \right)_{X_k} = \left( \frac{\partial(S_1 + S_2)}{\partial X_{1k}} \right)_{X_k} = \frac{\partial S_1}{\partial X_{1k}} - \frac{\partial S_2}{\partial X_{2k}} = F_{1k} - F_{2k} \quad (2.3.2)$$

vale cero. Es decir, si  $\Psi_k$  vale cero, el sistema está en equilibrio; de otra forma, ocurrirá un proceso irreversible, que llevará al sistema a un estado de equilibrio. A  $\Psi_k$  se le llama afinidad, y actúa como una fuerza generalizada, responsable de que el proceso se lleve a cabo.  $F_k$  es el parámetro intensivo conjugado al parámetro extensivo  $X_k$ . Si  $X_k$  fuera  $U$ , la afinidad sería

$$\Psi_k = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \quad (2.3.3)$$

Si  $\Delta T = 0$  ( $\Psi_k = 0$ ), el sistema está en equilibrio térmico; de lo contrario, la diferencia del inverso de la temperatura actuará como una fuerza que provocará un flujo de calor entre los subsistemas.

Además, caracterizaremos la respuesta a la fuerza aplicada con la velocidad de cambio del parámetro extensivo  $X_k$ , y la llamaremos el flujo  $J_k$

$$J_k \equiv \frac{dX_k}{dt} \quad (2.3.4)$$

De esta forma, el flujo es cero si la afinidad es cero, y una afinidad distinta de cero implica un flujo distinto de cero. Es la relación entre los flujos y afinidades la que caracteriza la velocidad con que se llevan a cabo los procesos irreversibles.

Ahora consideraremos la producción de entropía

$$\frac{dS}{dt} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial X_k} \frac{dX_k}{dt} \quad (2.3.5)$$

$$\dot{S} = \sum_k \Psi_k J_k \quad (2.3.6)$$

Así, la velocidad de producción de entropía es la suma de los productos de cada flujo con su afinidad asociada.

Ahora extenderemos la definición de afinidad a sistemas continuos. Para ello nos valdremos de la ecuación de la producción de entropía. Si hay flujo de calor de un subsistema homogéneo a otro a través de una pared diatérmica, la fuerza generalizada es  $\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$ , pero si fluye calor a lo largo de una barra de metal de manera continua, es difícil aplicar la definición previa de afinidad. Sin embargo, podemos calcular la velocidad de producción de entropía, e identificar la afinidad.

Consideremos un sistema en el que hay flujos de materia y energía, provocados por las fuerzas apropiadas. Escogemos a las componentes de los vectores de densidad de corriente de energía y materia,  $\bar{J}_u$  y  $\bar{J}_k$  respectivamente, como flujos. De esta forma, tenemos 3 flujos de energía;  $J_{ux}$ ,  $J_{uy}$  y  $J_{uz}$  asociados con  $U$ . Similarmente, las componentes de la densidad de corriente del k-ésimo componente químico,  $J_{kx}$ ,  $J_{ky}$  y  $J_{kz}$  jugarán el papel de flujos. Estos vectores describen el flujo de energía y de la cantidad de materia del k-ésimo componente químico, por unidad de área y unidad de tiempo.

Ahora, para escribir la expresión de la producción de entropía, necesitamos definir qué es la entropía de un sistema fuera de equilibrio. Lo que haremos será considerar elementos de volumen infinitesimales, a cada uno de los cuales le asignaremos una entropía local, cuya dependencia de las variables extensivas será la misma que para la entropía en equilibrio. Ésta es la llamada "hipótesis de equilibrio local". Entonces

$$dS = \sum_k F_k dX_k \quad (2.3.7)$$

o considerando todas las cantidades por unidad de volumen

$$ds = \sum_k F_k dx_k \quad (2.3.8)$$

tenemos que una definición razonable de densidad de corriente de entropía,  $\bar{J}_s$ , es

$$\bar{J}_s = \sum_k F_k \bar{J}_k \quad (2.3.9)$$

donde la magnitud de  $\bar{J}_s$  es la cantidad de entropía transportada a través de la unidad de área por unidad de tiempo. La velocidad de producción local de entropía es igual a la entropía que abandona la región, más la velocidad del incremento de la entropía dentro de la región. Si  $\dot{s}$  denota la velocidad de producción de entropía por unidad de volumen y  $\frac{\partial s}{\partial t}$  denota el incremento en la entropía por unidad de volumen, entonces

$$s = \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J}_s \quad (2.3.10)$$

Si los parámetros extensivos considerados se conservan, como la energía, y, en ausencia de reacciones químicas, los distintos números de moles, se cumplen las ecuaciones de continuidad

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J}_k = 0 \quad (2.3.11)$$

y tendremos que

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sum_k F_k \frac{\partial x_k}{\partial t} \quad (2.3.12)$$

por lo que

$$s = \sum_k \nabla F_k \cdot \bar{J}_k \quad (2.3.13)$$

expresión en la que reconocemos a  $\nabla F_k$  como la afinidad del sistema continuo. Así, por ejemplo, la afinidad asociada con  $J_{uz}$ ,  $\Psi_{uz}$ , es  $(\nabla(\frac{z}{T}))_z$  y la afinidad asociada con  $J_{kz}$ ,  $\Psi_{kz}$ , es  $(\nabla(-\frac{\mu_k}{T}))_z$ .

Entre los sistemas cuya descripción es más sencilla, se encuentran aquellos en los que los flujos a cada instante dependen sólo de los valores de las afinidades en ese instante. Son los sistemas puramente resistivos, y se caracterizan por no tener "memoria". Entonces, para un sistema puramente resistivo, cada flujo local depende sólo de las afinidades locales instantáneas y de los parámetros intensivos locales

$$j_k = \check{J}_k(\Psi_u, \Psi_1, \dots, \Psi_j, F_u, F_1, \dots, F_j) \quad (2.3.14)$$

Así, la densidad de corriente local del número de moles del k-ésimo componente depende del gradiente del inverso de la temperatura, los gradientes de  $-\frac{\mu_i}{T}$  para cada componente, de la temperatura local, la presión, etc. Es decir, aunque cada flujo depende fuertemente de su afinidad conjugada, tiene dependencia también del resto de las afinidades. Es precisamente esta dependencia la causante de algunos de los fenómenos más interesantes en el campo de la irreversibilidad.

Cada flujo  $\check{J}_k$  se hace cero conforme las afinidades se hacen cero, por lo que podemos escribir

$$J_k = \sum_j L_{jk} \Psi_j + \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j L_{ijk} \Psi_i \Psi_j + \dots \quad (2.3.15)$$

donde

$$L_{jk} = \frac{\partial J_k}{\partial \Psi_j} \quad (2.3.16)$$

$$L_{ijk} = \frac{\partial^2 J_k}{\partial \Psi_i \partial \Psi_j} \quad (2.3.17)$$

Las funciones  $L_{jk}$  se llaman coeficientes cinéticos y dependen de los parámetros intensivos locales

$$L_{jk} = L_{jk}(F_u, F_1, \dots) \quad (2.3.18)$$

las funciones  $L_{jk}$  son los coeficientes cinéticos de segundo orden, también dependen de los parámetros intensivos locales, y así, podemos considerar coeficientes de cualquier orden mayor. En presencia de un campo magnético externo  $\bar{B}$ , escribiremos simplemente  $L_{jk} = L_{jk}(\bar{B})$ . El teorema de Onsager establece que

$$L_{jk} = L_{kj}(-\bar{B}) \quad (2.3.19)$$

es decir, el valor de el coeficiente cinético  $L_{jk}$  medido en un campo magnético externo  $\bar{B}$  es idéntico al valor de  $L_{kj}$  medido en el campo magnético  $-\bar{B}$ . En otras palabras, existe una simetría entre los efectos lineales de la  $j$ -ésima afinidad y el  $k$ -ésimo flujo, y el efecto lineal de la  $k$ -ésima afinidad y el  $j$ -ésimo flujo, cuando estos efectos se miden en campos magnéticos opuestos.

Cuando las afinidades son tan pequeñas que todos los términos cuadráticos y de orden superior pueden ser despreciados, podemos describir un proceso puramente resistivo lineal con las ecuaciones aproximadas

$$J_k = \sum_j L_{jk} \Psi_j \quad (2.3.20)$$

Es claro que para el análisis de este tipo de procesos, el teorema de Onsager es una herramienta particularmente poderosa. Por esta razón, usualmente se trata con sistemas que se alejan poco del equilibrio, pues las afinidades que se miden en el laboratorio son muy pequeñas en el sentido de nuestra aproximación, por lo que encontramos que muchos de los procesos de interés,



son lineales. Por ejemplo, el flujo de energía en un conductor térmico es proporcional al gradiente de temperatura

$$\bar{J}_u = -\kappa \nabla T \quad (2.3.21)$$

donde  $\kappa$  es la conductividad térmica del cuerpo. Podemos escribir lo mismo de la forma

$$J_{ux} = \kappa T^2 \left( \nabla \left( \frac{1}{T} \right) \right)_x \quad (2.3.22)$$

y similarmente para el resto de las componentes. Así, nos damos cuenta de que  $\kappa T^2$  es el coeficiente cinético. La ausencia de términos de mayor orden en la ley fenomenológica indica que los gradientes de temperatura comunmente utilizados son pequeños.

La ley de Ohm de conducción eléctrica y la ley de Fick de difusión son más ejemplos de leyes fenomenológicas en los que se hace patente que para los valores comunes de las afinidades, en estos procesos los términos de orden mayor son despreciables. Sin embargo, el alcance de dichas leyes está limitado a sistemas que no se alejan mucho de la condición de equilibrio, y hemos de señalar que fuera del régimen lineal, estas consideraciones, que forman parte de la Termodinámica Irreversible Lineal, dejan de ser válidas. Actualmente se desarrolla el campo de la Termodinámica Irreversible Extendida, en el que se pretende dar cuenta de los fenómenos que ocurren en sistemas lejos de la condición de equilibrio, por lo que la caracterización de los mismos es,

## Capítulo 3

# EL MODELO COSMOLÓGICO STANDARD

La tarea principal de la Cosmología es la descripción del Universo, dando cuenta de la gravedad como el agente causante de su evolución. Para ello, la Relatividad General aporta el marco de estudio más adecuado. Además de tener un marco de estudio, es muy importante tener en cuenta la información astronómica observacional, es decir, como vemos que “es el Universo”. Lo primero que notamos es que la distribución de galaxias es muy semejante en todas partes, y que todas las direcciones son equivalentes, es decir: pensamos que no ocupamos un lugar privilegiado en el Universo. Esta filosofía está contenida en el Principio Cosmológico, que establece que el Universo es, a gran escala ( $10^8$  años luz), homogéneo e isotrópico. Claro está, esta hipótesis de trabajo no contradice la presencia de las inhomogeneidades a escalas más pequeñas, de las que somos testigos.

Y si “observamos” con más detalle, nos percatamos de que, en buena

aproximación, todas las galaxias se alejan de la nuestra de manera radial, con una velocidad de recesión que es proporcional a la distancia entre nosotros y la galaxia en cuestión. Esta característica de nuestro Universo se descubrió al analizar los espectros de la luz que nos llega de otras galaxias. Resulta que estos espectros sufren un corrimiento al rojo (efecto Doppler) que se puede entender con la ley de expansión de Hubble:

$$v = Hr \tag{3.0.1}$$

es decir, mientras mayor es la distancia ( $r$ ) entre una galaxia y nosotros, con mayor velocidad ( $v$ ) se aleja de nosotros, y, por lo tanto, con mayor corrimiento al rojo recibimos la luz que la galaxia emite.  $H$  es la constante de Hubble, es independiente de la distancia y la dirección de la galaxia, pero puede depender del tiempo. Aunque la visión cosmogónica reinante afirmaba que el Universo debía ser estático, las ecuaciones de campo de Einstein contemplaban la posibilidad de un Universo en expansión. Sobre el origen de esta expansión, se supone que alguna vez el Universo consistió de un solo punto (singularidad), de densidad infinita, y fue una gran explosión (Big Bang) la causante de que se expandiera. De todos estos hechos da cuenta el Modelo Cosmológico Standard, en el que además se predice la presencia de una radiación electromagnética "de fondo" en la región del espectro correspondiente a las microondas, que por cierto, apoya de manera contundente nuestra idea de la isotropía del Universo; pues esta radiación es isotrópica hasta 1 parte en  $10^5$ ; y se puede incorporar en él el proceso de nucleosíntesis,

con el cual se pretende explicar la composición química del Universo. Es este modelo, hasta hoy, el más aceptado, ya que describe una buena parte de las características de nuestro Universo, sin embargo; existen algunos problemas cuya solución ha planteado la necesidad de modelos más elaborados, de los cuales, un ejemplo es la Cosmología Inflacionaria.

### 3.1 La métrica de Robertson-Walker

Vamos a considerar el siguiente problema: si pensamos que el Universo es homogéneo e isotrópico, ¿cómo escribimos la métrica más general para un Universo con esas características?. Para empezar, notemos que cuando hablamos de homogeneidad e isotropía, necesariamente nos referimos a un instante dado, ¿cómo, entonces, hacemos matemáticamente precisa la noción de un "instante dado"?. Para lograrlo tendremos que hacer lo siguiente: consideremos hipersuperficies (tridimensionales) tipo espacio, que constituyan una foliación del espaciotiempo, es decir; que llenen el espaciotiempo sin intersecarse. Supondremos que todas las galaxias se encuentran sobre estas hipersuperficies, y pediremos que, para cada galaxia, la hipersuperficie de simultaneidad en su sistema de Lorentz local coincida, localmente, con la hipersuperficie global. Así, la cuadrivelocidad  $u^\mu$  de cada galaxia es ortogonal a las hipersuperficies de la foliación; y si parametrizamos a las hipersuperficies con el parámetro  $\tau$ ,  $\tau$  será por definición el tiempo cósmico, que coincidirá con el tiempo propio de cada galaxia. Entonces, a un instante dado le corresponderá una de las hipersuperficies de la foliación.

Otro enfoque al mismo problema es el de Weyl, quien consideró que las líneas de mundo de las galaxias son geodésicas en el espaciotiempo, divergentes de algún punto pasado, y que forman una congruencia, es decir: llenan el espaciotiempo sin intersectarse (excepto, posiblemente, en puntos singulares). Asumió, además, que existen hipersuperficies tipo espacio, ortogonales a las geodésicas. Escogiendo un parámetro  $t$  tal que a cada hipersuperficie le corresponda un valor de  $t = \text{constante}$ , que será el tiempo propio a lo largo de cada geodésica, tendremos nuestro tiempo cósmico. Además introducimos coordenadas espaciales  $(x^1, x^2, x^3)$  comóviles con las galaxias, de tal forma que para cada geodésica las  $x^i$  son constantes. En estas circunstancias podemos escribir la métrica de la siguiente manera:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - h_{ij} dx^i dx^j \quad (3.1.1)$$

por lo que la métrica espacial en cada una de las hipersuperficies tendrá la forma

$$d\sigma^2 = h_{ij} dx^i dx^j \quad (3.1.2)$$

La pregunta ahora es ¿cuál es la dependencia en el tiempo de las  $h_{ij}$ ? La dependencia será tal que se cumpla la exigencia de que nuestro Universo sea isotrópico. Dado que éste se encuentra en expansión, y estamos considerando que todas las direcciones son equivalentes, deducimos que la dependencia se dará a través de un factor común; pues de no ser así, la expansión no se

daría con la misma rapidez en todas direcciones, lo que constituiría una contradicción a la exigencia de isotropía. Esto quiere decir que podemos escribir nuestra métrica así:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3.1.3)$$

donde

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3.1.4)$$

es la métrica de un espacio tridimensional homogéneo e isotrópico, siendo las  $\gamma_{ij}$  funciones de las coordenadas espaciales únicamente; y  $R(t)$  es el llamado factor de escala. Se puede demostrar que para este espacio la curvatura es constante y el tensor de Riemann se puede escribir como

$$R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \quad (3.1.5)$$

donde  $k$  es una constante. Se puede verificar que la métrica espacial  $d\sigma^2$  es consistente con el tensor de Riemann presentado si las  $\gamma_{ij}$  tienen la forma tal que podamos escribir

$$d\sigma^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{(1 + \frac{1}{2}kr^2)^2} \quad (3.1.6)$$

con

$$r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (3.1.7)$$

Así, en coordenadas cartesianas

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{1}{4}k(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2} \quad (3.1.8)$$

y en coordenadas esféricas

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)}{\left(1 + \frac{1}{4}kr'^2\right)^2} \quad (3.1.9)$$

Haciendo el cambio de variable

$$r = \frac{r'}{1 + \frac{1}{4}kr'^2} \quad (3.1.10)$$

podemos escribir la métrica de Robertson-Walker en su forma standard:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right] \quad (3.1.11)$$

La constante  $k$  puede tomar los valores  $\pm 1$  y  $0$ , dando lugar en cada caso a 1 métrica espacial distinta.

**Caso  $k = 1$ .**

Este caso corresponde a un Universo con curvatura espacial positiva y volumen finito. Sea  $r = \text{sen}\psi$ , entonces

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[ d\psi^2 - \text{sen}^2\psi(d\theta^2 - \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right] \quad (3.1.12)$$

Pongamos atención en la métrica espacial

$$d\sigma^2 = R^2(t) [d\psi^2 + \text{sen}^2\psi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)] \quad (3.1.13)$$

para un  $t = \text{constante}$  dado,  $R$  será una constante. Si embebemos el espacio tridimensional descrito por la métrica anterior en un espacio euclidiano cuadridimensional, cuyas coordenadas sean  $(w, x, y, z)$ , donde la métrica es

$$dl^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.1.14)$$

y haciendo la transformación

$$w = R\cos\psi \quad (3.1.15)$$

$$x = R\text{sen}\psi\text{sen}\theta\cos\varphi \quad (3.1.16)$$

$$y = R\text{sen}\psi\text{sen}\theta\text{sen}\varphi \quad (3.1.17)$$

$$z = R\text{sen}\psi\cos\theta \quad (3.1.18)$$

se cumple que

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (3.1.19)$$

es decir, la métrica espacial corresponde a la 3-esfera, que es un espacio homogéneo e isotrópico.



Consideremos ahora la superficie bidimensional dada por  $t = \text{constante}$  y  $\psi = \psi_0 = \text{constante}$ , descrita por

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{sen}^2 \psi_0 \quad (3.1.20)$$

Es claro que corresponde a una 2-esfera, cuya área es

$$A = 4\pi R^2 \text{sen}^2 \psi_0 \quad (3.1.21)$$

donde  $\psi_0$  puede tomar los valores entre 0 y  $\pi$ . Conforme  $\psi_0$  varía de 0 a  $\pi$ ,  $A$  se incrementa hasta llegar a un valor máximo cuando  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ , valor a partir del cual  $A$  disminuye hasta llegar a 0 cuando  $\psi_0 = \pi$ . El volumen de esta esfera es

$$V = 2\pi^2 R^3 \quad (3.1.22)$$

Caso  $k = 0$ .

Este caso corresponde a un Universo con curvatura espacial cero y volumen infinito;

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) [dr^2 - r^2(d\theta^2 - \text{sen}^2 \theta d\varphi^2)] \quad (3.1.23)$$

en donde la métrica espacial

$$d\sigma^2 = R^2(t) [dr^2 - r^2(d\theta^2 - \text{sen}^2 \theta d\varphi^2)] \quad (3.1.24)$$

para un  $t = \text{constante}$  dado, es claramente la métrica de un espacio euclidiano tridimensional, ya que haciendo el cambio de variables

$$x = R\psi \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \quad (3.1.25)$$

$$y = R\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad (3.1.26)$$

$$z = R\psi \cos\theta \quad (3.1.27)$$

se cumple que

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.1.28)$$

y para  $t = \text{constante}$  y  $\psi = \text{constante} = \psi_0$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \psi_0^2 \quad (3.1.29)$$

que es una 2-esfera, cuya área está dada por

$$A = 4\pi R^2 \psi_0^2 \quad (3.1.30)$$

Es claro que conforme  $\psi_0$  aumenta, el área y el volumen de la esfera aumentan monótonamente.

Caso  $k = -1$ .

Este caso corresponde a un Universo con curvatura espacial negativa y volumen infinito. A diferencia de los casos anteriores, el espacio descrito por la parte espacial de la métrica no puede ser embebido en un espacio euclidiano cuadridimensional, sin embargo, si es posible embeberlo en un espacio de Minkowski (pseudoeuclidiano) cuadridimensional, pues si hacemos la transformación

$$w = R \cosh \psi \tag{3.1.31}$$

$$x = R \sinh \psi \sin \theta \cos \varphi \tag{3.1.32}$$

$$y = R \sinh \psi \sin \theta \sin \varphi \tag{3.1.33}$$

$$z = R \sinh \psi \cos \theta \tag{3.1.34}$$

nos percatamos de que estamos hablando de la hipersuperficie tipo espacio

$$w^2 - y^2 + z^2 - x^2 = -R^2 \tag{3.1.35}$$

que es la pseudoesfera tridimensional, cuya métrica es

$$ds^2 = dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{3.1.36}$$

Nuevamente, considerando  $\dot{t} = \text{constante}$  y  $\dot{\psi} = \text{constante} = \dot{\psi}_0$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{senh}^2 \psi_0, \quad (3.1.37)$$

que es una 2-esfera, cuya área es

$$A = 4\pi R^2 \text{senh}^2 \psi_0 \quad (3.1.38)$$

y que claramente, al igual que el volumen, se incrementa monótonamente conforme  $\psi_0$  lo hace.

## 3.2 Dinámica cósmica: Modelos de Friedmann

La forma más general de escribir las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional es

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{\dot{t}}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.2.1)$$

Aquí hemos considerado el término de la constante cosmológica,  $\Lambda$ , que antes no habíamos incluido. Originalmente, Einstein lo introdujo para permitir la existencia de soluciones cosmológicas que representaran Universos estáticos. Actualmente, sin embargo, se considera que este término le confiere a las ecuaciones de campo mayor generalidad, independientemente de que se le considere una contribución de la geometría o una contribución de la fuente del campo gravitacional.

Las ecuaciones de campo deben ser satisfechas tanto por el tensor métrico como por el tensor de energía-momento. En Cosmología, sin embargo; restringimos a la métrica de manera considerable mediante argumentos de simetría. Tal es el caso de nuestro estudio, pues la métrica de Robertson-Walker, aplicable a todo universo homogéneo e isotrópico, depende de tan sólo 2 parámetros libres,  $R(t)$  y  $k$ . Además, las ecuaciones de campo impondrán restricciones sobre ellos.

Vamos a considerar que el contenido material del universo constituye un polvo, cuyo tensor de energía-momento está dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (3.2.2)$$

Considerando, además, que  $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$  y  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ , entonces tendremos  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho c^2, 0, 0, 0)$ . Utilizando las ecuaciones de campo, llegamos a las 2 relaciones siguientes

$$\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \Lambda = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \quad (3.2.4)$$

Con estas 2 ecuaciones es posible demostrar que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{8\pi G\rho R^3}{3c^2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{8\pi G\rho R^3}{3c^2} = C \quad (3.2.5)$$

y así, podemos escribir

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{\Lambda R^2 c^2}{3} - kc^2 \quad (3.2.6)$$

que es la ecuación diferencial de Friedmann, y representa las restricciones sobre los modelos del universo con la métrica de Robertson-Walker, cuyo contenido material sea un polvo, es decir, con ella modelamos los universos homogéneos e isotrópicos cuya materia es polvo. Cada modelo quedará totalmente determinado al elegir los valores para  $C$ ,  $\Lambda$ ,  $k$ , un valor inicial  $R(t_0)$  y el signo de  $\dot{R}(t_0)$ . Además, notamos que  $R = 0$  es un punto singular de la ecuación de Friedmann, por lo que ninguna solución regular  $R = R(t)$  puede pasar por  $R = 0$ , lo que significa que todas las soluciones regulares o son enteramente positivas o enteramente negativas. Nosotros, aquí consideraremos sólo los casos  $R \geq 0$  y  $\rho \geq 0$ . Otro punto importante que debemos notar es que la ecuación de Friedmann es invariante ante los cambios  $t \rightarrow -t$  y  $t \rightarrow t + \text{constante}$ . Esto implica que para cada solución que representa a un universo en expansión, existe una solución que representa un universo en contracción, y que el tiempo es homogéneo, lo que nos permitirá escoger  $R = 0$  cuando  $t = 0$ .

### 3.2.1 Modelos estáticos

En este tipo de modelos  $\dot{R} = 0$ , condición que puede satisfacerse sólo si

$$\frac{k}{R^2} = \Lambda = 4\pi G\rho \quad (3.2.7)$$

lo que claramente implica que  $\rho = \text{constante}$ , además, como  $\rho > 0$ , necesariamente  $k = 1$ . Este modelo da lugar al Universo de Einstein, el primer modelo del universo propuesto a raíz de la Relatividad General. Como ya vimos, la métrica espacial da lugar a la 3-esfera. Este modelo fue abandonado al ser descubierta la expansión del Universo.

El otro único caso posible es en el que  $\Lambda = k = \rho = 0$  y  $R = \text{constante}$ ; por lo que la métrica fácilmente se puede transformar en la de Minkowski. En este modelo un polvo de prueba estático llena de manera homogénea un sistema de referencia inercial infinito.

### 3.2.2 Modelos vacíos

El escoger  $\rho = 0$  implica que podemos escribir la ecuación de Friedmann de la siguiente forma

$$t = \int \left( \frac{1}{3} \Lambda R^2 - k \right)^{1/2} dR \quad (3.2.8)$$

con las siguientes soluciones:

i)  $\Lambda = 0, k = 0, R = \text{constante}$ . Este modelo corresponde al universo vacío y estático anteriormente descrito, en el que el espaciotiempo es el de Minkowski.

ii)  $\Lambda = 0, k = -1, R = ct$ . Este modelo corresponde al universo de Milne, en el que el espaciotiempo es el de Minkowski, y en un evento de "creación", un número infinito de partículas de prueba ( $\text{masa} = 0, \text{volumen} = 0$ ) es lanzado radialmente en todas direcciones y con todas las velocidades posibles.

iii)  $\Lambda > 0, k = 0, R = \exp(t/|3/\Lambda|^{1/2})$ . Este modelo corresponde al universo de de Sitter, cuyo espaciotiempo, precisamente, es el de de Sitter. Aunque no es muy realista, pues es vacío, es el límite al que deben tender todos los modelos que se expanden indefinidamente y con  $\Lambda > 0$ .

iv)  $\Lambda > 0, k = 1, R = |3/\Lambda|^{1/2} \cosh(t/|3/\Lambda|^{1/2})$ . Este modelo tiene por espaciotiempo al de de Sitter, y es el análogo al modelo estático i), pues es estático por un instante. Las partículas de prueba se aproximan hasta una distancia mínima, para separarse indefinidamente debido a la repulsión  $\Lambda$ .

v)  $\Lambda > 0, k = -1, R = |3/\Lambda|^{1/2} \sinh(t/|3/\Lambda|^{1/2})$ . Este modelo tiene por espaciotiempo al de de Sitter, y es el análogo al modelo ii) de Milne. Consiste de un polvo de prueba que forma una bola en expansión, cuya frontera es un frente de luz. Aquí la causa de la expansión es la repulsión  $\Lambda$ .

vi)  $\Lambda < 0, k = -1, R = |3/\Lambda|^{1/2} \sin(t/|3/\Lambda|^{1/2})$ . Este modelo tiene por espaciotiempo al anti-de Sitter, y también es análogo al de Milne. La bola de polvo de prueba, en este modelo, se expande "frenada" por la atracción  $\Lambda$ , hasta detenerse y recolapsar.

### 3.2.3 Modelos no vacíos con $\Lambda = 0$

El escoger  $\Lambda = 0$  y un valor para  $C$ , nos deja con 3 tipos diferentes de ecuación de Friedmann, una por cada valor de  $k$ .

Caso  $k = 0$ .

Es un caso muy simple, pues



$$R = \left(\frac{9}{4}C\right)^{1/3} t^{2/3} \quad (3.2.9)$$

El modelo corresponde al universo de Einstein-de Sitter, que se expande indefinidamente.

•Caso  $k = 1$ .

La solución en este caso se escribe de la siguiente manera

$$t = C \left[ \text{sen}^{-1} \sqrt{R/C} - \sqrt{R/C - (R/C)^2} \right] \quad (3.2.10)$$

y se puede parametrizar como

$$R = C(1 - \cos\psi)/2 \quad t = C(\psi - \text{sen}\psi)/2 \quad (3.2.11)$$

que claramente corresponde a la parametrización de una cicloide. Este es el universo de Friedmann-Einstein, y tiene un comportamiento oscilatorio, pues se expande y recolapsa una y otra vez.

•Caso  $k = -1$ .

La solución en este caso se escribe de la siguiente manera

$$t = C \left[ \sqrt{R/C + (R/C)^2} - \text{senh}^{-1} \sqrt{R/C} \right] \quad (3.2.12)$$

sin embargo, el comportamiento cualitativo de este modelo se ve más claramente si analizamos de manera directa la ecuación que lo describe:

$$\dot{R} = \sqrt{C/R + 1} \quad (3.2.13)$$

Es claro que  $\dot{R}$  decrece desde infinito y tiende a la unidad. Para  $t$  grande, este modelo es muy parecido al de Milne.

### 3.2.4 Modelos no vacíos con $\Lambda \neq 0$

Cuando permitimos que  $\Lambda$  tome valores arbitrarios, la variedad de modelos posibles se incrementa de manera considerable. Ahora, podremos obtener las soluciones cualitativas a la ecuación diferencial de Friedmann considerando las curvas de nivel

$$n(R, \Lambda) = \text{constante}$$

de la función

$$n(R, \Lambda) \equiv \frac{C}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3} = \dot{R}^2 - k \quad (3.2.14)$$

para algún valor fijo de  $C > 0$ , en el plano  $(R, \Lambda)$ . En otras palabras, si consideramos la gráfica de  $\Lambda$  contra  $R$ , donde

$$\Lambda = \frac{3(nR - C)}{R^3} \quad (3.2.15)$$

y permitiendo que  $n$  tome toda una serie de valores. Estas curvas tienen una de 2 formas características, dependiendo de que  $n \leq 0$  o  $n > 0$ . En el primer caso se encuentran totalmente por debajo del eje  $R$ , pero se aproximan a

él monotónicamente. En el segundo caso, cruzan el eje  $R$  (en  $R = C/n$ ), alcanzan un máximo y decrecen, acercándose asintóticamente al eje  $R$ .

El conjunto de puntos para el cual  $\ddot{R} = 0$  está determinado por la relación

$$\ddot{R} = -\frac{C}{2R^2} + \frac{\Lambda R}{3} = 0 \quad \left( \Rightarrow \Lambda = \frac{3C}{2R^3} \right) \quad (3.2.16)$$

y coincide con los máximos de todas las curvas de nivel, además de separar el plano en 2 secciones, por arriba de la curva  $\ddot{R} > 0$ , y por debajo de la misma  $\ddot{R} < 0$ .

Además, cada modelo de Friedmann está caracterizado por un valor particular  $\Lambda = \text{constante}$ . Entonces, obtenemos nuestra solución al escoger un punto del plano y avanzar horizontalmente, los valores de las curvas de nivel (de  $n$ ) nos proporcionan  $\dot{R}^2$  (una vez que escogimos  $k$ ), y por tanto; la pendiente de la curva solución.

Si empezamos en  $R = 0$  y  $\Lambda < 0$ , necesariamente obtenemos un universo oscilante. Nuestra solución  $\dot{R}(t)$  empieza con un valor infinito de  $\dot{R}$ , el cual decrece hasta llegar a cero, cambia de signo, por lo que  $R$  disminuye hasta llegar nuevamente a  $R = 0$ .

Si empezamos en  $R = 0$  y  $\Lambda > 0$  y escogemos  $k = 0$  o  $k = -1$ , entonces  $\dot{R}$  decrece inicialmente, desde su valor infinito inicial hasta un valor mínimo (en  $\ddot{R} = 0$ ), y después se incrementa nuevamente. Este es un universo inflexional o de Lemaitre.

Si escogemos  $k = 1$  y  $\Lambda > 0$ , existe una mayor gama de posibilidades de modelos. Si empezamos en  $R = 0$  tenemos universos inflexionales si

$\Lambda > \frac{4}{9C^2}$  y universos oscilantes si  $\Lambda < \frac{4}{9C^2}$ . Si  $\Lambda = \frac{4}{9C^2}$ , entonces tenemos un universo con Big Bang que se aproxima asintóticamente al universo estático de Einstein.

## Capítulo 4

# MODELOS COSMOLÓGICOS INHOMOGÉNEOS

Como mencionamos en el capítulo anterior, las observaciones astronómicas revelan que el Universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas. Esto permite que, como primera aproximación, los modelos de Friedmann, Lemaitre, Robertson y Walker (FLRW), resulten adecuados para describir las propiedades del Universo a esas escalas, es decir; la Cosmología toma como primera aproximación un punto de vista de gran escala, considerando la presencia de estructuras en el Universo como perturbaciones en un fondo suave a gran escala.

Sin embargo; es natural querer ir más allá de una primera aproximación. De este deseo han surgido generalizaciones a los modelos FLRW. Estas generalizaciones son soluciones exactas inhomogéneas, que pretenden describir la dinámica de la condensación de materia en estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias, regiones vacías, fluctuaciones en la temperatura asociada a la

radiación de fondo, y la posibilidad de que se presenten efectos físicos no considerados en los modelos FLRW, como la expansión de las órbitas de los planetas, la prevención de la singularidad de Big Bang, prevención del recollapso, etc. Es decir, la motivación principal para proponer y estudiar estos modelos son todos los detalles finos que los modelos FLRW pasan por alto, y cuyo entendimiento y descripción enriquecerían nuestra visión del Universo. En este capítulo presentamos un resumen del trabajo que se ha desarrollado con este objetivo.

## 4.1 Los Universos de Szekeres

Esta familia de soluciones se obtiene al considerar coordenadas en las que la métrica se escribe en la siguiente forma

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\alpha} dz^2 - e^{2\beta} (dx^2 - dy^2) \quad (4.1.1)$$

con  $\alpha = \alpha(t, x, y, z)$  y  $\beta = \beta(t, x, y, z)$ , funciones que deben ser determinadas a partir de las ecuaciones de campo. Además, se considera que la fuente del campo gravitacional es un fluido perfecto, aunque existen generalizaciones. Las coordenadas en las que está escrita la métrica son comóviles, por lo que  $u^\mu = \delta^\mu_t$ , lo que implica que  $\dot{u}^\mu = 0$  y  $p = p(t)$ .

La primera solución perteneciente a esta familia la estudió Lemaitre en 1933, al considerar un modelo con constante cosmológica y simetría esférica, cuya fuente del campo gravitacional era un polvo. Szekeres resolvió en 1975 las ecuaciones de Einstein para esta métrica, considerando un polvo y que

$\lambda = 0$ . Szafron generalizó este resultado en 1977 al caso  $p \neq 0$ . Esta familia, para su estudio, debe dividirse en 2 casos,  $\beta' = 0$  y  $\beta' \neq 0$ , donde  $\beta' = \frac{\partial \beta}{\partial z}$ .

#### 4.1.1 Subfamilia $\beta' = 0$

Para este caso, la solución está dada por

$$e^{\beta} = \frac{\Phi}{1 + \frac{1}{4}k(x^2 + y^2)} \quad (4.1.2)$$

y

$$e^{\alpha} = \lambda + \Phi \Sigma \quad (4.1.3)$$

donde  $\Phi = \Phi(t)$ ,  $k$  es una constante arbitraria,  $\lambda = \lambda(t, z)$ ,  $\Sigma$  está determinada por

$$\Sigma = \frac{\frac{1}{2}U(x^2 + y^2) + V_1x + V_2y + 2W}{1 + \frac{1}{4}k(x^2 + y^2)} \quad (4.1.4)$$

con  $U = U(z)$ ,  $V_1 = V_1(z)$ ,  $V_2 = V_2(z)$ ,  $W = W(z)$ , funciones arbitrarias,  $\Phi$  está determinada por

$$\frac{2\Phi_{,tt}}{\Phi} + \frac{\Phi_{,t}^2}{\Phi^2} + \kappa p + \frac{k}{\Phi^2} = 0 \quad (4.1.5)$$

y  $\lambda$  está determinada por

$$\lambda_{,tt}\Phi - \lambda_{,t}\Phi_{,t} + \lambda\Phi_{,tt} - \lambda\Phi_{,t}\kappa p = U - kW \quad (4.1.6)$$

y ambas ecuaciones pueden resolverse una vez que se ha escogido  $p = p(t)$ .

La densidad de materia está dada por

$$\kappa\varepsilon = 2\left(\frac{\lambda\Phi_{,tt}}{\Phi} - \lambda_{,tt}\right)e^{-\alpha} - \frac{3\Phi_{,t}^2}{\Phi^2} + \frac{3k}{\Phi^2} \quad (4.1.7)$$

Esta familia de espaciotiempos no tiene, en general, simetrías. Sin embargo, si  $U = kW$  y  $V_1 = V_2 = 0$ , adquiere simetría esférica, plana o hiperbólica, dependiendo de que  $k > 0$ ,  $k = 0$  ó  $k < 0$ . Además, una característica generalmente presente es que las superficies  $\{t = \text{constante}, z = \text{constante}\}$  son superficies de curvatura constante, proporcional a  $k$ . Es importante señalar que esta subfamilia contiene a todos los modelos FLRW, pues estos resultan cuando  $\lambda = 0$  y  $U = -kW$ .

~

#### 4.1.2 Subfamilia $\beta^i \neq 0$

Para este caso, las ecuaciones de Einstein implican

$$e^{\beta} = \Phi e^{\nu} \quad (4.1.8)$$

y

$$e^{\alpha} = h e^{-\nu} (e^{\beta^i})_{,i} \quad (4.1.9)$$

con  $\Phi = \Phi(t, z)$ ,  $\nu = \nu(x, y, z)$ ,  $h = h(z)$  y

$$e^{-\nu} = A(x^2 + y^2) + 2B_1x + 2B_2y + C \quad (4.1.10)$$

~



donde  $A = A(z)$ ,  $B_1 = B_1(z)$ ,  $B_2 = B_2(z)$ ,  $C = C(z)$  y  $h(z)$  son funciones arbitrarias,  $\Phi$  está definida por

$$\frac{2\Phi_{,tt}}{\Phi} - \frac{\Phi_{,t}^2}{\Phi^2} + \kappa p + \frac{k}{\Phi^2} = 0 \quad (4.1.11)$$

donde  $p = p(t)$  es una función arbitraria y  $k = k(z)$  debe cumplir

$$AC - B_1^2 - B_2^2 = \frac{1}{4}(h^{-2} + k) \quad (4.1.12)$$

La ecuación que define a  $\Phi$  puede ser integrada una vez que se ha especificado a  $p(t)$ . La coordenada  $z$  puede ser transformada,  $z = f(z')$ , y podemos utilizar esta libertad para darle a  $h(z)$  la forma que deseemos. Szafron escogió a  $z$  de tal forma que  $h(z) = 1$ , pero esta elección es inconveniente para considerar el límite FLRW, por lo que la dejaremos sin especificar.

Esta subfamilia, al igual que la anterior, carece de simetrías, sin embargo; adquiere un grupo tridimensional de simetría cuando  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  y  $C$  son constantes. Aquí, el signo de  $AC - B_1^2 - B_2^2$  tiene las mismas consecuencias que el signo de  $k$  tiene en la subfamilia  $\beta' = 0$ , pero como son funciones, para un espacio  $t = \text{constante}$ , no todas las superficies  $z = \text{constante}$  tienen la misma geometría. Para esta subfamilia, el límite FLRW resulta cuando

$$x = 2 \tan(\theta/2) \cos \varphi \quad (4.1.13)$$

$$y = 2 \tan(\theta/2) \sin \varphi \quad (4.1.14)$$

$$z = r \tag{4.1.15}$$

$$\Phi = rK(t) \tag{4.1.16}$$

$$B_1 = B_2 = 0 \tag{4.1.17}$$

$$C = 4A = 1 \tag{4.1.18}$$

$$k = k_0 r^2 \tag{4.1.19}$$

donde  $k_0$  es una constante.

### 4.1.3 Propiedades comunes a las 2 subfamilias

- i) La carencia de simetrías, en general.
- ii) La existencia de superficies  $t = \text{constante}$ .  $z = \text{constante}$  de curvatura constante.
- iii) El fluido que genera el campo gravitacional tiene rotación y aceleración iguales a cero.
- iv) La expansión y el esfuerzo son distintos a cero.
- v) Los espacios  $t = \text{constante}$  son conformalmente planos.
- vi) La parte magnética del tensor de Weyl es nula.

#### 4.1.4 Propiedades de la subfamilia $\beta' = 0$

Cuando  $\kappa p = -\Lambda = \text{constante}$ , la ecuación que determina a  $\Phi$  se integra para dar

$$\Phi_{,t}^2 = -k + \frac{2M}{\Phi} + \frac{\Lambda\Phi^2}{3} \quad (4.1.20)$$

y la que determina a  $\lambda$  se integra para dar

$$\lambda_{,t}\Phi\Phi_{,t} + \frac{\lambda M}{\Phi} - \frac{1}{3}\Lambda\lambda\Phi^2 = (U + kW)\Phi + X \quad (4.1.21)$$

donde  $M$  es una constante arbitraria y  $X = X(z)$  es una función arbitraria.

Así,

$$\lambda = \left(-k + \frac{2M}{\Phi} + \frac{\Lambda\Phi^2}{3}\right)^{1/2} \left\{ \int \frac{(U + kW)\Phi + X}{\Phi\left(-k + \frac{2M}{\Phi} + \frac{1}{3}\Lambda\Phi^2\right)^{3/2}} d\Phi + Y \right\} \quad (4.1.22)$$

con  $Y = Y(z)$ , otra función arbitraria.

Con  $\Lambda \neq 0$ , las soluciones para  $\Phi$  involucran funciones elípticas, cada solución contendrá una nueva constante arbitraria, la cual definirá el momento inicial de evolución. Este momento inicial de evolución puede involucrar o no una singularidad tipo Big Bang, ya que si  $\Lambda$  es positiva y tiene un valor suficientemente grande, no se presentaría la singularidad. Por otro lado, cuando la singularidad se presenta, es necesariamente simultánea para todos los observadores (según el tiempo comóvil). Además, cuando se presenta una singularidad de densidad infinita, ocurre donde  $e^{\alpha} = 0$ .

La ecuación para  $\Phi$  es idéntica a la de Friedmann, y así lo son sus soluciones. La solución para  $\lambda$  tiene una función arbitraria más,  $Y$ , pero se puede especificar una de entre el conjunto  $\{U, V_1, V_2, W, X, Y\}$  mediante la elección de la coordenada  $z$ . Así, la solución general contiene 2 constantes arbitrarias y 5 funciones (de  $z$ ) arbitrarias.

Barrow y Stein-Schabes resolvieron ambas ecuaciones para el caso  $\Lambda \neq 0$ ,  $k = 0$ , la solución tiende asintóticamente al espaciotiempo de de Sitter. Cuando escogemos  $\Lambda = 0$ , las ecuaciones para  $\Phi$  y  $\lambda$  tienen soluciones elementales, que definen a la subfamilia  $\mathcal{B}' = 0$  de las soluciones de Szekeres. Las soluciones para  $\Phi$  son las de la ecuación de Friedmann. Dadas  $\Phi$  y  $\Lambda = 0$ , la ecuación para  $\lambda$  se puede integrar.

Bonnor y Tomimura estudiaron la evolución de cada posible caso y encontraron que dependiendo de los casos particulares, la métrica o la densidad de materia pueden o no aproximarse a la homogeneidad, cuando nos aproximamos a la singularidad inicial, o hacia el infinito temporal o una singularidad final. Es de recalcar el comportamiento asintótico independiente de la expansión y la densidad de materia. Los distintos casos presentan inhomogeneidades que crecen y decaen.

#### 4.1.5 Propiedades de la subfamilia $\mathcal{B}' \neq 0$

Cuando  $\kappa\rho = -\Lambda = \text{constante}$ , la ecuación que determina a  $\Phi$  se integra para dar

$$\Phi_{,t}^2 = -k + \frac{2M}{\Phi} - \frac{1}{3}\Lambda\Phi^2 \quad (4.1.23)$$

con la diferencia de que ahora  $\Phi = \Phi(t, z)$ ,  $k = k(z)$  y  $M = M(z)$ . Con  $\Lambda \neq 0$ , las soluciones de la ecuación para  $\Phi$  involucran funciones elípticas. Covarrubias ha demostrado como obtener las soluciones de de Sitter, Lemaitre-Tolman, Eardley-Liang-Sachs, el Universo estático de Einstein y la solución de Schwarzschild, con sus contrapartes plana e hiperbólica, a partir de esta ecuación. Cada una de las soluciones a la misma tendrá una función de  $z$  extra, arbitraria, denotada por  $t_o(z)$ . El instante  $t = t_o(z)$  define el momento inicial de evolución, y con  $\Lambda = 0$ , es necesariamente una singularidad, correspondiendo a  $\Phi = 0$ , y corresponde al Big Bang en el límite FLRW. Se le conoce en la literatura como el instante del Bang. Sin embargo, cuando  $t_{o,z} \neq 0$  (en general), el instante en el que se presenta la singularidad depende de la posición, es decir, no es simultáneo.

Una singularidad adicional puede estar presente donde  $(e^{\beta})_{,z} = 0$ . En el límite LT, ésta es una singularidad tipo shell-crossing, en la que distintas partículas de polvo chocan y permanecen unidas.

La ecuación para  $\Phi$  es formalmente idéntica a la de Friedmann, pero con  $k$  y  $M$  como funciones de  $z$ , por lo que distintas superficies  $z = \text{constante}$  evolucionan de manera independiente a las otras. Esto favorece la riqueza de posibles efectos físicos. Sus soluciones cuando  $\Lambda = 0$  pueden ser expresadas en términos de funciones elementales, son estrictamente análogas a las de la ecuación de Friedmann y definen los modelos de Szekeres con  $\beta' \neq 0$ .

#### 4.1.6 Propiedades físicas de la familia

Szekeres investigó el subcaso  $AC - B_1^2 - B_2^2 > 0$ , en el que las superficies  $\{t = \text{constante}, z = \text{constante}\}$  son esferas. El autor encontró que se presenta el colapso a una singularidad (Big Crunch) en  $\Phi = 0$  o en  $(e^\beta)_{,z} = 0$ , que representa la singularidad tipo shell-crossing. Encontró además que la primera es inevitable en cada línea de flujo y que la segunda, si existe, podría ocurrir antes que el Big Crunch. Covarrubias encontró las condiciones en las que la solución con  $\beta' \neq 0$  y  $AC - B_1^2 - B_2^2 > 0$  es una pequeña perturbación a la métrica de Minkowski.

Cuando  $AC - B_1^2 - B_2^2 > 0$  las funciones arbitrarias se pueden redefinir de tal manera que

$$AC - B_1^2 - B_2^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow h^{-2} = 1 - k \quad (4.1.24)$$

y realizando la transformación de coordenadas

$$x + iy = e^{i\psi} \cot(\theta'/2) \quad (4.1.25)$$

$$z = r \quad (4.1.26)$$

$$x' = r \operatorname{sen} \theta' \cos \psi' \quad (4.1.27)$$

$$y' = r \operatorname{sen} \theta' \operatorname{sen} \psi' \quad (4.1.28)$$

$$z' = r \cos \theta' \quad (4.1.29)$$

podemos escribir la densidad de materia como

$$\kappa \varepsilon = \frac{(2M/\bar{P}^3)_{,r}}{(\Phi/\bar{P})^2(\Phi/\bar{P})_{,r}} \quad (4.1.30)$$

donde

$$r\bar{P} = (A - C)z' + 2B_1x' + 2B_2y' + r(A + C) \quad (4.1.31)$$

lo que permite separar la densidad de materia en una parte esféricamente simétrica, dependiente sólo de  $t$  y  $r$ , y un  $\Delta\varepsilon$ , que se puede escoger de tal forma que la hipersuperficie  $\Delta\varepsilon = 0$  contenga al punto  $r = 0$ . Tal separación es única, y el  $\Delta\varepsilon$  es una contribución tipo dipolo a la densidad de materia.

#### 4.1.7 Espaciotiempo de Szafron con $\beta' = 0$ (simetría esférica)

El límite esféricamente simétrico “natural” resulta de los spaciotiempos de Szafron con  $\beta' = 0$  cuando  $k = 1$ , pues las esferas  $\{t = \text{constante}, z = \text{constante}\}$  son concéntricas, de tal forma que son órbitas del grupo  $\mathcal{O}(3)$ , y el grupo se convierte en un grupo de isometrías para el spaciotiempo, pues se puede ver que cuando  $k = 1$ , las esferas  $\{t = \text{constante}, z = \text{constante}\}$  son órbitas de un grupo de isometrías cuando  $V_1 = V_2 = 0$  y  $U = W$ , pues la métrica se simplifica a

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\alpha} dr^2 - \Phi^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \quad (4.1.32)$$

Este límite fue considerado primeramente por Korkina y Martinenko, aunque ya en 1938, Datt había considerado 3 soluciones para polvo, esféricamente simétricas, con  $\Lambda = 0$

$$ds^2 = dt^2 - \lambda^2 dr^2 - \Phi^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \quad (4.1.33)$$

Éste es un límite natural esféricamente simétrico a las soluciones de Szekeres con  $\beta' = 0$ . El límite  $\varepsilon = 0$  de la solución de Datt es una solución de vacío:

$$ds^2 = \left(\frac{2M}{\Phi} - 1\right)^{-1} d\Phi^2 - Y^2 \left(\frac{2M}{\Phi} - 1\right) dr^2 - \Phi^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \quad (4.1.34)$$

que podemos reconocer como la métrica de Schwarzschild dentro del horizonte. El artículo de Datt tiene importancia histórica, pero podríamos pensar que fue publicado con demasiada antelación a sus posibles lectores, pues en ese entonces aún no se acostumbraban a los modelos FLRW, mucho menos estaban listos para sus generalizaciones.

Ruban interpretó esta solución de Datt así: es una bola de polvo que explota de una singularidad al tiempo  $t = t_o$  ( $\Phi = 0$ ), se expande hasta que  $\Phi = 2M$ ,  $t = t_o + M\pi$  y se colapsa al tiempo  $t = t_o + 2M\pi$ . En el momento de máxima expansión, la bola de polvo llena toda la esfera de Schwarzschild.

La solución para polvo, con simetría plana, la estudió Ellis en 1967. Cuando  $p = \Lambda = 0 = k$ , podemos ver que las superficies  $\{t = \text{constante}\}$ ,



$z = \text{constante}$ ) de las soluciones de Szekeres con  $\mathcal{P} = 0$  son planos. Si además  $U = V_1 = V_2 = 0$  y reparametrizamos  $\lambda$  de tal forma que  $W = 0$  (sin pérdida de generalidad), se puede escribir la métrica

$$ds^2 = dt^2 - \lambda^2 dz^2 - t^{4/3}(dx^2 + dy^2) \quad (4.1.35)$$

$$\lambda = \left( t + \frac{Y}{X} \right) / t^{1/3} \quad (4.1.36)$$

donde se escaló a  $\Phi$  de tal manera que  $M = 2/9$  y se transformó a  $z$

$$z' = \frac{2}{3} \int X dz \quad (4.1.37)$$

asumiendo  $X \neq 0 \neq M$ . Cuando  $X = 0$  tenemos el límite vacío, cuando  $M = 0$  tenemos el límite estático. La densidad de materia es

$$\kappa \varepsilon = 2t^{-1} \left( t + \frac{Y}{X} \right)^{-2} \quad (4.1.38)$$

En el límite  $Y = 0$  se obtiene el modelo FLRW plano con polvo.

Tomimura encontró que  $Y/X$  mide el contraste de la densidad,  $\frac{\rho_s}{\rho}$ , que es infinito en el Big Bang, pero tiende a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ ; así, el modelo se aproxima al límite FLRW plano (con polvo) en el futuro asintótico.

Pollock y Caderni interpretaron los modelos de Szafron como una mezcla de radiación homogénea y un polvo inhomogéneo (1980).

Lima y Tiomno interpretaron a la fuente como una mezcla de polvo inhomogéneo y un fluido perfecto homogéneo (1988).

#### 4.1.8 Generalizaciones de subcasos de la subfamilia $\beta' = 0$

Goode generalizó la subfamilia  $\beta' = 0$  de las soluciones de Szafron, considerando el flujo de calor distinto a cero. Asumió la misma forma de la métrica que la de las soluciones de Szafron, y además: 1)  $\beta'_{,tx} = \beta'_{,ty} = 0$  2) las superficies  $\{t = \text{constante}, z = \text{constante}\}$  tienen curvatura constante.

Para un fluido perfecto, estas condiciones se siguen de las ecuaciones de Einstein, pero no es así al incluir el flujo de calor. Resulta, de hecho, que para el caso  $\beta' \neq 0$ , las condiciones anteriores implican ausencia del flujo de calor, por lo que sólo la subfamilia  $\beta' = 0$  permite tal generalización.

La solución es

$$ds^2 = dt^2 - S^2(e^{2\nu}(dx^2 + dy^2) + H^2 dz^2) \quad (4.1.39)$$

con

$$e^{-\nu} = 1 + \frac{1}{4}k(x^2 + y^2) \quad (4.1.40)$$

$$\tilde{H} = e^\nu (A - BQ) + F \quad (4.1.41)$$

$$A = a(x^2 + y^2) + bx + cy \quad (4.1.42)$$

$$B = h_1(x^2 - y^2) + h_2x + h_3y \quad (4.1.43)$$

$$Q = \int S^3 dt \quad (4.1.44)$$

donde  $k = 0, \pm 1$ ,  $S = S(t)$ ,  $H = H(x, y, z, t)$ ,  $\nu = \nu(x, y)$ ,  $A = A(x, y, z)$ ,  $B = B(x, y, z)$ ,  $Q = Q(t)$ ,  $F = F(t, z)$ ,  $a = a(z)$ ,  $b = b(z)$ ,  $c = c(z)$ ,  $h_1 = h_1(z)$ ,  $h_2 = h_2(z)$ ,  $h_3 = h_3(z)$ ; y  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  son funciones arbitrarias.  $S$  está determinada por

$$\frac{2S_{,t}}{S} + \frac{S_{,t}^2}{S^2} + \frac{k}{S^2} + \kappa p = 0 \quad (4.1.45)$$

y  $F$  por

$$F_{,t} + \frac{3S_{,t}F_{,t}}{S} - \frac{kF}{S^2} = \frac{2(h_1Q + a)}{S^2} \quad (4.1.46)$$

además, las componentes del vector flujo de calor son

$$q_1 = \frac{e^{2\nu}(2h_1x + h_2(1 - \frac{1}{2}k(x^2 - y^2)) - \frac{1}{2}kh_3xy)}{S^3H} \quad (4.1.47)$$

$$q_2 = \frac{e^{2\nu}(2h_1y + h_3(1 + \frac{1}{2}k(x^2 - y^2)) - \frac{1}{2}kh_2xy)}{S^3H} \quad (4.1.48)$$

y la densidad de materia está dada por

$$\kappa \rho = 3\left(\frac{S_{,t}^2}{S^2} + \frac{k}{S^2}\right) - \frac{2(H_{,t} + 2H_{,t}S_{,t}/S)}{H} \quad (4.1.49)$$

Tal como en el caso  $q^\alpha = 0$ , las hipersuperficies  $t = \text{constante}$  son conformalmente planas, sólo que con  $q^\alpha \neq 0$ , la parte magnética del tensor de Weyl es

distinta de cero. Goode encontró que la presencia de flujo de calor hace que la singularidad inicial sea más anisotrópica.

Tomimura y Waga consideraron generalizaciones de la subfamilia  $\beta' = 0$  de las soluciones de Szafron, para el caso en que está presente un campo electromagnético, para el cual, tanto el campo eléctrico como el magnético son ambos tangentes a las líneas de la coordenada  $z$ . Asumieron que la fuente es una mezcla de polvo inhomogéneo y radiación homogénea, con densidad dada por

$$\kappa \varepsilon_r = 3c^2 e^{-3\beta} \quad (4.1.50)$$

con  $\beta = \beta(t)$  y  $c = \text{constante}$ . Al asumir esto, se obtienen 3 tipos de soluciones: 1) el modelo FLRW plano, 2) un modelo estático, 3) un modelo cuyo espaciotiempo tiene simetría plana. Uno de los efectos de la presencia del campo magnético es el de hacer que la singularidad inicial sea más isotrópica.

Lima y Nobre hicieron las mismas consideraciones que Tomimura y Waga, para un fluido perfecto descrito por la ecuación de estado

$$p = 3(\gamma - 1)\beta_r^2 \quad (4.1.51)$$

Encontraron que para  $\gamma < \frac{4}{3}$  el campo magnético evitará el que se presente la singularidad de Big Bang y el modelo evolucionará al modelo FLRW, y para  $\gamma > \frac{4}{3}$  la singularidad de Big Bang está presente y las anisotropías sobreviven aún en el futuro asintótico.

Motta y Tomimura encontraron 4 clases de soluciones con viscosidad que generalizan ciertos subcasos de la subfamilia de soluciones de Szafron con  $\beta' = 0$ . En el límite  $\sigma = 0$ , todas las soluciones reproducen el modelo FLRW plano con ecuaciones de estado definidas.

Roy y Tiwari consideraron métricas con simetría plana para soluciones tipo Szafron (ambas subfamilias), para un fluido viscoso. En el límite  $\xi = \eta = 0$ , una de sus soluciones reproduce el caso de simetría plana de la subfamilia con  $\beta' = 0$ .

#### 4.1.9 Soluciones de la familia $\beta' \neq 0$ con simetría $G_3/S_2$

Ellis encontró el conjunto más general de soluciones con grupo de simetría tridimensional actuando sobre órbitas bidimensionales. Son soluciones para polvo con constante cosmológica. Consideraremos su caso en el que  $\kappa p = -\Lambda$  y las superficies  $\{t = \text{constante}, z = \text{constante}\}$  son órbitas de simetría de los espaciotiempos de Szafron. Las soluciones están dadas por

$$ds^2 = dt^2 - (\varepsilon + 2E)^{-1} R_\mp^2 dr^2 - R^2(d\theta^2 + f^2 d\varphi^2) \quad (4.1.52)$$

donde, si

$$\varepsilon = 1 \text{ y } f = \text{sen}\theta \quad (4.1.53)$$

tenemos simetría esférica, si

$$\varepsilon = 0 \text{ y } f = \theta \quad (4.1.54)$$

tenemos simetría plana, y si

$$\varepsilon = -1 \text{ y } f = \sinh\theta \quad (4.1.55)$$

tenemos simetría hiperbólica.  $E = E(r)$  es una función arbitraria,  $R = R(t, r)$  y está determinada por

$$R_t^2 = 2E + \frac{2M}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 \quad (4.1.56)$$

con  $M = M(r)$ , otra función arbitraria. La densidad de materia se expresa como

$$\kappa\varepsilon = \frac{2M_r}{R^2 R_r} \quad (4.1.57)$$

El límite FLRW requiere que  $R$  sea separable en  $R = f(r)S(t)$ , y la coordenada  $r$  puede escogerse de tal forma que

$$R = rS \quad (4.1.58)$$

así, el límite FLRW se obtiene cuando

$$-\frac{2E}{r^2} = \kappa = \text{constante} \quad (4.1.59)$$

y

$$\frac{M}{r^3} = M_0 = \text{constante} \quad (4.1.60)$$

Sólo el caso  $\varepsilon = 1$  permite los 3 límites FLRW, pues con  $\varepsilon = 0$  y  $\varepsilon = -1$ ,  $k < 0$ . Las soluciones de Ellis resultan de la métrica de Szafron cuando  $(e^\nu)_{,z} = 0$  y  $\kappa p = -\Lambda$ . El caso de simetría plana,  $\varepsilon = 0$ , con  $\Lambda = 0$ , es el límite de simetría plana de las soluciones de Szekeres con  $\beta' \neq 0$ .

Tomimura demostró que el contraste de densidad,  $\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}$ , tiende a un valor fijo, distinto de cero, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además, señaló que la solución con  $M < 0$  y  $\Lambda = 0$  tiene densidad de materia negativa en todos lugares a cada instante, por lo que no es un modelo cosmológico razonable.

El límite de simetría esférica fue primeramente deducido por Lemaitre en 1933, y llamado modelo de Tolman, quien lo discutió en 1934. Lemaitre contempló este modelo para considerar el desarrollo de condensaciones en un fondo FLRW.

Tolman en 1934 discutió las propiedades de las soluciones con  $\varepsilon = 1$ . Observó que las funciones arbitrarias del modelo permiten escoger una distribución arbitraria de la densidad de materia inicial y una velocidad inicial, y que el modelo contiene al Universo estático de Einstein. Su resultado más importante es la demostración de que los modelos de Einstein y FLRW son inestables ante el crecimiento de inhomogeneidades.

#### 4.1.10 Otros casos del espaciotiempo de Szafron con $\beta' \neq 0$

Dodson consideró la métrica

$$ds^2 = dt^2 - R^2 e^{-\lambda r} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.1.61)$$

que reproduce el modelo FLRW plano cuando  $\lambda = 0$ . Encontró y discutió la solución a las ecuaciones de Einstein con un fluido cuya presión es anisotrópica.

Bona, Stela y Palou estudiaron el subcaso de las soluciones de Szafron con  $\beta' \neq 0$  en el que los espacios  $t = \text{constante}$  son planos. Esto sucede cuando  $k(z) = 0$  y la métrica puede ser parametrizada de tal forma que  $h(z) = 1$  y

$$\Phi = (C_1 + C_2 f)^{2/3} f_{,t}^{-1/3} \quad (4.1.62)$$

$$\kappa p = \frac{2f_{,ttt}}{3f_{,t}} - \left( \frac{f_{,tt}}{f_{,t}} \right)^2 \quad (4.1.63)$$

donde  $C_1 = C_1(z)$ ,  $C_2 = C_2(z)$  y  $f = f(t)$ . Esta solución reproduce el modelo FLRW plano más general cuando  $C_1 C_{2,z} - C_{1,z} C_2 = 0$ .

Sussman investigó el subcaso de Bona, Stela y Palou, bajo la óptica de una mezcla de 2 fluidos, un fluido perfecto homogéneo con  $p = (\gamma - 1)\varepsilon$ , cuya dinámica se asume idéntica a la del modelo FLRW con la misma ecuación de estado, y un poivo inhomogéneo.

#### 4.1.11 Generalizaciones electromagnéticas a la subfamilia $\beta' \neq 0$

Todas las clases de soluciones tienen una ecuación madre encontrada por Bronnikov y Pavlov, quienes consideraron las ecuaciones de Einstein-Maxwell



para un poivo cargado, asumiendo que tanto el tensor métrico como el de campo electromagnético tienen un grupo de isometrías  $G_3/S_2$ , considerando además la posibilidad de que  $\Lambda \neq 0$ . La métrica es

$$ds^2 = e^\gamma dt^2 - e^\alpha dr^2 - R^2(d\theta^2 + S_k^2 d\varphi^2) \quad (4.1.64)$$

con  $\gamma = \gamma(t, r)$ ,  $\alpha = \alpha(t, r)$  y  $R = R(t, r)$ , que son funciones que hay que determinar a partir de las ecuaciones de Einstein-Maxwell; y  $S_k = \text{sen}\theta$ ,  $\theta$ ,  $\text{senh}\theta$  para permitir las simetrías esférica, plana e hiperbólica, respectivamente. Las ecuaciones de Einstein-Maxwell son

$$e^{-\alpha/2} R_{,r} = \Gamma - \frac{QQ_{,N}}{R} \quad (4.1.65)$$

$$e^{-\alpha/2} \gamma_{,r} = \frac{2QQ_{,N}}{R^2} \quad (4.1.66)$$

$$e^{-\gamma} R_{,t}^2 = 2E + \frac{2M}{R} + \frac{Q^2(Q_{,N}^2 - 1)}{R^2} - \frac{\Lambda R^2}{3} \quad (4.1.67)$$

$$2E = \Gamma^2 - \varepsilon \quad (4.1.68)$$

la primera define a  $\varepsilon^0$ , donde  $\Gamma = \Gamma(r)$ ,  $Q = Q(r)$  y  $N = N(r)$  son funciones arbitrarias y

$$Q_{,N} = \frac{dQ}{dN} = \frac{dQ/dr}{dN/dr} \quad (4.1.69)$$

además  $\varepsilon = 1, 0, -1$  para permitir las simetrías esférica, plana o hiperbólica, respectivamente, y  $c^2 Q_e(r_o)/G^{1/2}$  ( $c^2 Q_m(r_o)/G^{1/2}$ ) es la carga total eléctrica (magnética) contenida dentro de la superficie  $r = r_o$ . Las densidades de carga están dadas por

$$\frac{4\pi G^{1/2} \rho_e}{c^2} = \frac{Q_{e,r} e^{-\alpha/2}}{R^2} \quad (4.1.70)$$

$$\frac{4\pi G^{1/2} \rho_m}{c^2} = \frac{Q_{m,r} e^{-\alpha/2}}{R^2}$$

y la densidad de energía

$$\kappa\varepsilon = \frac{2N_r e^{-\alpha/2}}{R^2} \quad (4.1.71)$$

Las funciones  $\Gamma$ ,  $N$ ,  $M$  y  $Q$  deben cumplir la relación

$$\Gamma N_{,r} = (M - QQ_{,N}\Gamma)_{,r} \quad (4.1.72)$$

Debido a la presencia del campo electromagnético, el polvo se mueve con aceleración  $\dot{u}^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{-\alpha}\gamma_{,r}\delta_1^\mu$ . Sólo en el caso de simetría esférica ( $\varepsilon = 1$ ) se admiten 3 tipos de modelos: el recolapsante o "elíptico", cuando  $E < 0$ , el ligado o "parabólico", cuando  $E = 0$  y el que siempre se expande o "hiperbólico", cuando  $E > 0$ . En el límite de campo electromagnético cero y  $Q = 0$ , se reproduce la solución de Ellis.

Bronnikov demostró que los modelos con  $Q = \text{constante}$  necesariamente desarrollan singularidades tipo shell-crossing, observación que más tarde fue

generalizada por Ori. Shikin analizó el caso  $Q_m = 0$  con  $Q_s = \text{constante}$ , y observó que cuando  $R_r = 0$ ,  $Q \neq 0$  y  $M > 0$ ,  $R$  jamás asume el valor de cero, es decir, la carga eléctrica evita la existencia de la singularidad de Big Bang.

#### 4.1.12 Generalizaciones de las soluciones de la subfamilia $\beta' \neq 0$ con viscosidad

Ray y Singh encontraron 6 soluciones con viscosidad de bulto y corte, relacionadas con las soluciones de Szafron con  $\beta' \neq 0$ . Uno de sus casos es un conjunto de métricas con simetría  $G_3/S_2$ :

$$ds^2 = dt^2 - (\varepsilon + Kr^2)^{-1} R_r^2 dr^2 - R^2(d\theta^2 + f^2 d\varphi^2) \quad (4.1.73)$$

$K$  es una constante y  $R$  está determinada por

$$\frac{2R_{,tt}}{R} + \frac{R_{,t}^2}{R^2} - \frac{Kr^2}{R^2} + \frac{4\kappa\eta R_{,t}}{R} = 2i \quad (4.1.74)$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad de corte,  $i = i(t)$  es una función arbitraria, y en el límite de viscosidad cero,  $2i$  pasa a ser  $-\kappa p$ . La densidad de materia y la presión tienen las siguientes expresiones

$$\kappa\varepsilon = \frac{R_{,r}R_{,t}^2 + 2RR_{,t}R_{,tt} - 2KrR - Kr^2R_{,r}}{R^2R_r} \quad (4.1.75)$$

$$\kappa p = -2i + \kappa \left( \zeta + \frac{4}{3}\eta \right) \left( \frac{2R_{,t}}{R} + \frac{R_{,tr}}{R_r} \right) \quad (4.1.76)$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de viscosidad de bulk. Así, la presencia de la viscosidad es la responsable de que la presión sea inhomogénea. En el límite  $\zeta = \eta = 0$  se obtiene el caso de las soluciones de Szafron con simetría  $G_3/S_2$ , y si además  $\kappa p = -\Lambda$ , se obtienen las soluciones de Ellis. Los 3 modelos FLRW están contenidos en estos modelos en toda su generalidad.

#### 4.1.13 Descripción de la formación de vacíos

Las primeras predicciones de la formación de vacíos en Universos inhomogéneos las realizaron, independientemente, en 1934, Tolman y Sen. En 1947, Bondi discutió la formación de vacíos, sus causas y consecuencias.

Este tipo de consideraciones se retomaron en los 70's. Occhionero, Vignato y Vittorio, en 1978 utilizaron el modelo LT con  $\Lambda = 0$  para describir la formación de máximos y mínimos en la densidad de materia, partiendo de una distribución de materia con densidad espacialmente homogénea pero con una distribución de energía inhomogénea. Demostraron, además, que el contraste de densidad se acentúa con el tiempo.

Henriksen y de Robertis, en 1980, estudiaron la evolución de un modelo LT, considerando condensaciones en el momento inicial, pero permitiendo rarefacciones alrededor de las mismas. Encontraron que las regiones de menor densidad se propagan hacia afuera, precedidas por una onda de densidad. Además, señalaron que los máximos y mínimos de la densidad de materia, en general, no son comóviles con el polvo, sino que se propagan a través de las líneas de flujo en forma de ondas de densidad.

Sato, en 1982, consideró perturbaciones linealizadas del modelo FLRW plano y sugirió que la distribución de materia observada en el Universo bien podría haber resultado de la expansión de vacíos.

#### 4.1.14 Descripción de la formación de estructuras

Así como se ha tratado de describir la formación de vacíos, ha habido intentos de describir la formación de galaxias, cúmulos de galaxias y otras estructuras. Lemaitre, en 1933, es el primero en tratar de describir la formación de galaxias. Utilizando la métrica

$$ds^2 = A^2(-dw^2 + 2dw dy) + C^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \quad (4.1.77)$$

donde  $A = A(\eta)$ ,  $C = C(w, y)$ ,  $\eta = w - y$  y

$$A = \frac{A_0}{1+z} \quad (4.1.78)$$

$$C = \int W dy \quad (4.1.79)$$

donde  $z = z(\eta)$  es el corrimiento hacia el rojo y  $W = W(y)$  es una función arbitraria. Considerando que  $m_d = 0$  y  $A \neq 0$ , demostró que la distribución inicial de masa podría escogerse de tal forma que la región finita de tamaño comóvil  $r_0$  alrededor del centro colapse, mientras que la región  $r > r_0$  se expanda por siempre. Señaló que esta inestabilidad local da un posible mecanismo de formación de galaxias.

En un siguiente trabajo, Lemaitre, en 1934, describió como en un modelo de Universo inhomogéneo existen zonas de recolapso esparcidas en un fondo que se expande, y que es FLRW.

En 1934, Tolman y Sen, independientemente, llegan a la conclusión de que el Universo estático de Einstein y los modelos FLRW son inestables ante la formación de galaxias.

En 1956, Bonnor es el primero en realizar una predicción cuantitativa acerca de la formación de galaxias, utilizando el modelo LT.

En 1964, Novikov utilizó una configuración similar a la de Bonnor, para describir la formación de cuasares y el mecanismo a través del cual estos emiten energía.

Kantowski, en 1969, argumentó que el modelo LT sería apropiado para describir variaciones en la densidad de cúmulos grandes de galaxias.

Moffat y Tatarski, en 1992, aplicaron el modelo LT con  $E = 0$  para describir la formación de estructura en el Universo.

#### 4.1.15 Influencia de las inhomogeneidades en la distribución de materia sobre la radiación de fondo

Raine y Thomas, en 1981, fueron los primeros en considerar este problema utilizando el modelo LT. Estudiaron lo que le sucede a la radiación de fondo cuando atraviesa una zona de condensación, siendo emitida y recibida en regiones tipo FLRW.

Paczynski y Piran, en 1996, utilizaron el modelo LT para calcular el

momento dipolar y cuadrupolar de la anisotropía en la radiación de fondo.

En 1992, Panek realizó un estudio similar al de Raine y Thomas, considerando 3 tipos de inhomogeneidades en el camino de los rayos de luz: 1) vacíos 2) grandes atractores 3) cúmulos de galaxias. Estudió los efectos de estas anisotropías en la radiación de fondo. Encontró que los fotones que atraviesan vacíos son recibidos con un corrimiento al rojo mayor que los que no atraviesan vacíos, y por lo tanto, con una temperatura asociada menor. Calculó que este efecto podría causar un descenso en la temperatura dado por  $\Delta T/T = 3 \times 10^{-7}$ . El efecto de los grandes atractores también es de provocar un mayor corrimiento al rojo de los fotones, pues deben viajar en contra de un potencial mayor que aquel al que entraron, pues el atractor evoluciona aumentando su masa. Este efecto provocaría que  $\Delta T/T = 2 \times 10^{-6}$ . Los efectos de un cúmulo de galaxias, se reflejarían, cuantitativamente, como un descenso en la temperatura del orden  $\Delta T/T = 10^{-6} - 6 \times 10^{-6}$ .

## 4.2 Los Universos de Stephani

Los Universos de Stephani son una familia de métricas que comprende la solución más general conformalmente plana cuando la fuente es un fluido perfecto irrotacional. Estas soluciones, que, en general, carecen de simetrías, generalizan los espaciotiempos FLRW (el caso particular de cuadiaceleración nula) y podrían ser interesantes como modelos cosmológicos inhomogéneos y anisotrópicos simples.

### 4.2.1 Definición y propiedades generales

Definición invariante: colección de todas las soluciones con fluido perfecto para las cuales  $\sigma = \omega = 0 \neq \theta$ . En coordenadas comóviles, la métrica se puede escribir

$$ds^2 = D^2 dt^2 - V^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.2.1)$$

donde  $D = FV_{,t}/V$ ,  $F = F(t)$  es una función arbitraria y  $V = V(t, x, y, z)$ .

La forma de  $V$  está determinada por

$$\frac{W_{,tt}}{W^2} = f \quad (4.2.2)$$

con  $f = f(u)$ , una función arbitraria más.  $u$  está relacionada de manera sencilla con  $x, y$  y  $z$ ; y  $W = W(t, x, y, z)$  está relacionada con  $V$  de manera sencilla. Los casos particulares los trataremos más adelante.

El tensor de Weyl es proporcional a  $f$ , si  $f = 0$ , el espaciotiempo es conformalmente plano.

$F$  está relacionada con  $u_{,a}^a$  mediante

$$\Theta = \frac{3}{F} \quad (4.2.3)$$

así, para esta familia de soluciones, en coordenadas comóviles,  $\Theta = \Theta(t)$ . Las soluciones se pueden dividir en 2 familias: una es tipo Petrov D, la otra es conformalmente plana. Las soluciones tipo D tienen simetría  $G_3/S_2$ , las conformalmente planas, no tienen, en general, simetrías.



Esta familia de soluciones tienen una propiedad desagradable cuando se les considera como modelos cosmológicos: cuando se hace  $p = 0$  se obtiene un modelo tipo FLRW, cuando se propone que  $p = p(\epsilon)$  se obtiene un modelo tipo FLRW, o el de Wyman o el de Collins-Wainwright. Además de esas 2 ecuaciones de estado, hasta el momento nadie ha propuesto una ecuación de estado relevante. Poco es conocido aún, pues, acerca de las aplicaciones de esta solución a modelos cosmológicos.

La primera solución de esta familia fue encontrada por McVittie en 1933. Es una superposición de las métricas de FLRW y la solución de Schwarzschild. En el mismo año, Dingle redujo las ecuaciones de Einstein para una métrica con simetría esférica de la forma de Stephani a una ecuación diferencial equivalente a la que presentamos para  $W$ . El caso conformalmente plano fue totalmente resuelto por Stephani en 1967 y la familia completa fue derivada por Barnes en 1973; consiste de las clases de Stephani, KQ y las contrapartes de KQ con simetría plana e hiperbólica. Barnes demostró que esta familia cubre a todas las soluciones con fluido perfecto para las que  $\sigma = \omega = 0 \neq \theta$ . Además, consideró soluciones estáticas con  $\sigma = \omega = 0$ . Krasinski estudió las clases tipo D. Maiti probó que una solución con fluido perfecto para el cual  $\sigma = \omega = 0 \neq \theta$  debe tener simetría plana, esférica o hiperbólica.

#### 4.2.2 Soluciones tipo D

Krasinski encontró las coordenadas para representar a los modelos tipo D. En ellas, las funciones  $W$  y  $V$  se relacionan mediante

$$V = (z + b)W \quad (4.2.4)$$

con  $W = W(t, u)$ ,  $b$  es una constante arbitraria y  $u$  está definida por

$$u = \frac{x^2 + y^2 - z^2 - a}{2(z - b)} \quad (4.2.5)$$

y  $a$  es otra constante arbitraria. Estas soluciones tienen grupos de simetría tridimensionales actuando sobre órbitas bidimensionales. La simetría es esférica cuando  $a < b^2$ , plana si  $a = b^2$  e hiperbólica si  $a > b^2$ .

### 4.2.3 Modelos de Barnes con simetría hiperbólica

Para este caso existe una representación más simple, en la que

$$u = \frac{x}{y} \quad (4.2.6)$$

y

$$V = yW \quad (4.2.7)$$

con  $W = W(t, u)$ . En esta representación, la densidad de materia y la presión están dadas por

$$\kappa\varepsilon = \frac{3}{F^2} + 2(u^2 + 1) fW^3 + 6uW W_{,u} - 3(u^2 + 1) W_{,u}^2 - 3W^2 \quad (4.2.8)$$

$$\kappa p = y^2 W^2 \quad (4.2.9)$$

Estos modelos descubiertos por Barnes en 1973, reproducen los modelos de FLRW abierto y plano en toda su generalidad. Collins y Wainwright demostraron en 1983 que no existe otro subcaso para el que  $p = p(\varepsilon)$  que no sea FLRW.

#### 4.2.4 Modelos de Barnes con simetría plana

En este caso existen coordenadas en las que

$$u = z \quad (4.2.10)$$

y

$$V = W \quad (4.2.11)$$

con  $W = W(t, z)$ . La densidad de materia y la presión se dan a continuación

$$\kappa\varepsilon = \frac{3}{F^2} + 2fV^3 - 3V_{,z}^2 \quad (4.2.12)$$

$$\kappa p = -\frac{3}{F^2} + V_{,z}^2 - \frac{2F_{,t}}{F^2 D} - \frac{2FV_{,z}}{DV} (VV_{,tz} - V_{,z}V_{,z,t}) \quad (4.2.13)$$

Estos modelos reproducen los modelos FLRW abierto y plano en toda su generalidad, en el límite  $\dot{u}^c = 0$ . Cuando  $p = p(\varepsilon)$ , los modelos se reducen al caso FLRW o a la métrica primeramente identificada por Collins y Wainwright en 1983. Para este último caso,  $F = \text{constante}$  y  $V = azv$ , con  $a$  una constante arbitraria,  $v = v(X)$  y  $X = azt$ . Además,  $v$  está determinada por

$$X^2 v_{,XX} + 2Xv_{,X} = Bv^2 \quad (4.2.14)$$

donde  $B$  es una constante arbitraria. En el límite en el que la densidad de materia es espacialmente homogénea, la solución de Collins-Wainwright se reduce a la de de Sitter.

#### 4.2.5 Modelos de Kustaanheimo-Qvist

Estos son los modelos de Barnes con simetría esférica, para los que existen coordenadas en las que

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \equiv r^2 \quad (4.2.15)$$

y

$$V = W \quad (4.2.16)$$

de tal forma que

$$ds^2 = D^2 dt^2 - V^{-2} (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (4.2.17)$$

Las expresiones para la densidad de materia y presión son

$$\kappa \epsilon = \frac{3}{F^2} + 8ufV^3 - 12V\dot{V}_{,u} - 12u\dot{V}_{,u}^2 \quad (4.2.18)$$

$$\kappa p = -\frac{3}{F^2} - 4V_{,u} + 4uV_{,u}^2 - \frac{2F_{,t}}{F^2 D} + \frac{4F}{D} \left(1 - \frac{2uV_{,u}}{V}\right) (VV_{,tu} - V_{,t}V_{,u}) \quad (4.2.19)$$

Las ecuaciones de Einstein para este caso fueron tratadas por primera vez por Kustaanheimo y Qvist en 1948. Hasta el día de hoy existen sólo resultados parciales que involucran casos específicos de  $f$ .

Stephani en 1983 estudió cuándo la ecuación diferencial de  $W$  puede ser integrada en términos de cuadraturas. Su resultado fue que puede ser integrada a una ecuación de primer orden cuando  $f = u^n$  o  $f = e^u$  o  $f = (u + \alpha)^n(u + \beta)^{-n-5}$ , con  $n$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  constantes arbitrarias. Además, la ecuación puede ser resuelta por cuadraturas cuando  $f = (ax^2 + bx + c)^{-5/2}$  o  $f = u^{-15/7}$ , con  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes arbitrarias.

Raychaudhuri en 1952 estudió la métrica de la familia como una perturbación de modelos FLRW. Encontró que siempre que el Universo se encuentre en expansión,  $(\frac{1}{V})_{,t} > 0$ , el gradiente espacial de la densidad de materia decrecerá, pero el contraste de la misma se incrementará.

#### 4.2.6 Soluciones conformalmente planas

Stephani encontró en 1967 la solución conformalmente plana más general con fluido perfecto. En coordenadas comóviles se expresa

$$ds^2 = D^2 dt^2 - V^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.2.20)$$

con  $D = \frac{F V_{,t}}{V}$  y  $\gamma$  dada por

$$V = R^{-1} \left\{ 1 + \frac{1}{4} k [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \right\} \quad (4.2.21)$$

$F = F(t)$ ,  $R = R(t)$ ,  $k = k(t)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  son funciones arbitrarias. La densidad de materia y la presión están dadas por

$$\kappa \varepsilon = 3C^2 \quad (4.2.22)$$

$$\kappa p = -3C^2 + 2 \frac{V C C_{,t}}{V_{,t}} \quad (4.2.23)$$

con  $C = C(t)$ , determinada por

$$k = R^2 \left( C^2 - \frac{1}{F^2} \right) \quad (4.2.24)$$

y el escalar de expansión es  $\Theta = 3/F$ . Los modelos FLRW resultan cuando  $k$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  y  $z_0$  son constantes. Esta solución no tiene, en general, simetrías. Las hipersuperficies  $t = \text{constante}$  en este espaciotiempo son homogéneas e isotrópicas, pero se acomodan de tal forma que la distancia entre ellas es distinta a lo largo de las distintas líneas de la coordenada  $t$ , por lo que el espaciotiempo no hereda simetría alguna.

En la solución de Stephani, la función  $k$  se convierte en el índice de curvatura en el límite FLRW, pero depende de  $t$ , lo que hace interesante pensar en la evolución de un modelo en el que  $k$  pueda cambiar de signo.

En 1983, Krasinski señaló que en este modelo, cuando  $C = \text{constante}$ , la solución de Stephani se reduce a la de de Sitter. Dabrowski, en 1993, realizó el estudio de la geometría de la variedad de Stephani, para los subcasos de simetría esférica.

#### 4.2.7 Solución de Stephani con simetría esférica

El límite de simetría esférica de la solución de Stephani es al mismo tiempo el límite conformalmente plano de la solución de Kustaanheimo-Qvist. El primero en derivar la solución fue Wyman, en 1946, y Kustaanheimo y Qvist reportaron su solución en 1948. En 1955, Raychaudhuri utilizó la solución para describir la formación de inhomogeneidades, en un fondo FLRW. Gupta, en 1959, encontró que la solución puede describir oscilaciones del medio.

#### 4.2.8 Generalización electromagnética de los espacio-tiempos KQ

Las generalizaciones son soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell con simetría esférica, en las que la fuente es un fluido cargado irrotacional y sin viscosidad. La métrica en coordenadas isotrópicas es la misma que para el espaciotiempo KQ

$$ds^2 = D^2 dt^2 - V^{-2} (dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta + d\varphi^2)) \quad (4.2.25)$$

con  $D = FV_e/V$ , pero ahora  $V$  debe cumplir

$$V_{,uu} = fV^2 + hV^3 \quad (4.2.26)$$

donde  $u = r^2$  y  $f$  y  $h$  son funciones arbitrarias de  $u$ . La única componente del campo electromagnético distinta a cero es  $F_{01} = -F_{10} = -FEV_{,t}$ , con  $E^2 = 2r^2h$ , por lo que, cuando  $h = 0 = E$ , el campo electromagnético es nulo y se obtiene la clase de soluciones de KQ. Si  $Er^2 = E_o = \text{constante}$ , la densidad de carga y la corriente son cero, pero si  $E_o \neq 0$ , el campo electromagnético será distinto a cero. Este es el caso en el que una carga está presente en el centro y el fluido se mueve en su campo eléctrico.

Sussman, en 1987, consideró el caso cuando

$$f = n^{-5/2} \quad (4.2.27)$$

$$h = an^{-3} \quad (4.2.28)$$

$$n \equiv au^2 + bu + c \quad (4.2.29)$$

con  $n = n(u)$ , y  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  constantes arbitrarias. Investigó la solución general y clasificó todos los casos publicados. Él consideró la métrica en la forma

$$ds^2 = \left(\frac{3V_{,t}}{\Theta V}\right)^2 dt^2 - V^{-2}(dr^2 + f^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)) \quad (4.2.30)$$



con  $f = \{r, \text{sen}r, \text{sen}r\}$ . Entre sus resultados (1988) discute los posibles tipos de singularidades presentes. Además estudió la geometría global de los espaciotiempos.

#### 4.2.9 Generalización de los modelos de Stephani con flujo de calor

Tal como las soluciones para fluido perfecto, éstas se dividen en los tipos D de Petrov (todas con simetría esférica) y las conformalmente planas. La clase de soluciones más general con simetría esférica fue encontrada por Strobel en 1968. Además de la simetría esférica, Strobel consideró ausencia de viscosidad. La métrica es, en coordenadas comóviles

$$ds^2 = D^2 dt^2 - V^{-2}(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)) \quad (4.2.31)$$

con  $\frac{D_{,ttt}}{D} + \frac{2D_{,t}V_{,tt}}{DV} - \frac{V_{,ttt}}{V} = 0$ ,  $u = r^2$  y el vector de flujo de calor tiene sólo componente radial

$$q_r = \frac{4rV^2}{\kappa} \left( \frac{-V_{,t}}{DV} \right)_{,r} \quad (4.2.32)$$

Banerjee, Dutta Choudhury y Bhui, en 1986 encontraron la solución conformalmente plana más general, con métrica en coordenadas comóviles

$$ds^2 = D^2 dt^2 - V^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.2.33)$$

con  $V = B(x^2 + y^2 + z^2) + B_1x + B_2y + B_3z + B_4$ ,  $D = W_j V$ , donde

$$W = A(x^2 + y^2 + z^2) + A_1x + A_2y + A_3z + A_4 \quad (4.2.34)$$

y  $B = B(t)$ ,  $B_1 = B_1(t)$ ,  $B_2 = B_2(t)$ ,  $B_3 = B_3(t)$ ,  $B_4 = B_4(t)$ ,  $A = A(t)$ ,  $A_1 = A_1(t)$ ,  $A_2 = A_2(t)$ ,  $A_3 = A_3(t)$  y  $A_4 = A_4(t)$  son funciones arbitrarias.

El vector de flujo de calor es

$$\kappa q_i = 2V^2 \left( \frac{V_i t}{W} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad q_0 = 0 \quad (4.2.35)$$

y en el límite  $q^i = 0$  se obtiene la solución general de Stephani.

Sussman, en 1993 generalizó la familia de soluciones de Stephani, considerando una clase de soluciones cuya fuente es un fluido con conducción de calor y viscosidad.

# Capítulo 5

## MEZCLAS DE FLUIDOS

### 5.1 Termodinámica clásica de mezclas de fluidos

Cuando estudiamos un sistema desde el punto de vista de la Termodinámica, resulta de fundamental importancia considerar el intercambio de energía que éste tiene con sus alrededores. La ecuación de Gibbs indica las posibles contribuciones a dicho intercambio. Para un sistema cerrado, constituido por un fluido simple monocomponente, dicha ecuación toma la forma

$$dU = TdS - pdV \quad (5.1.1)$$

donde el primer término da cuenta del posible intercambio de calor y el segundo término corresponde al posible intercambio de trabajo.

En este capítulo interpretaremos a los modelos cosmológicos inhomogéneos y anisotrópicos como mezclas de fluidos. Cada elemento de fluido de dicha mezcla es, por tanto, capaz de intercambiar energía mediante el intercambio

de materia, lo que en general, provocará una variación en la composición del elemento de fluido en consideración. A continuación discutiremos la termodinámica básica necesaria para dicha interpretación.

Prestaremos atención primeramente a la dependencia de los potenciales termodinámicos en el número de partículas. De las definiciones de los potenciales termodinámicos

$$H = U + pV \quad (5.1.2)$$

$$A = U - TS \quad (5.1.3)$$

$$G = H - TS \quad (5.1.4)$$

y de la aditividad de la energía y de la entropía, concluimos que los potenciales termodinámicos también son cantidades aditivas. Desde el punto de vista matemático, la aditividad de los potenciales implica que son funciones homogéneas de primer grado en las variables extensivas. Así, para sistemas monocomponentes tenemos que

$$U = Nf(S/N, V/N) \quad (5.1.5)$$

$$H = Nf(S/N, p) \quad (5.1.6)$$

$$A = Nf(V/N, T) \quad (5.1.7)$$

$$G = Nf(T, p) \quad (5.1.8)$$

donde  $N$  es el número de partículas. La aditividad de la energía implica que el cambio en la energía de un sistema debido al intercambio de materia con sus alrededores, debe ser proporcional a la cantidad de materia intercambiada. En forma diferencial

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \quad (5.1.9)$$

donde

$$\mu = \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S, V} \quad (5.1.10)$$

es el potencial químico. Para los potenciales termodinámicos se cumple entonces que

$$dH = TdS - Vdp + \mu dN \quad (5.1.11)$$

$$dA = -SdT - pdV + \mu dN$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN \quad (5.1.12)$$

donde  $\mu$  es la misma función (el potencial químico) pero expresada en términos de las variables de las que depende el potencial termodinámico correspondiente. Podemos notar que

$$\mu = \left( \frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,p} = f(T,p) \quad (5.1.13)$$

o  $G = \mu N$ , es decir, el potencial químico de un sistema monocomponente es, simplemente, su energía libre de Gibbs por partícula, una función de la temperatura y de la presión, pero no del número de partículas

$$d\mu = -sdT + vdp \quad (5.1.14)$$

con  $s = S/N$  y  $v = V/N$ . La anterior se conoce como ecuación de Gibbs-Duhem.

El potencial químico del sistema es una variable intensiva. Cuando éste se encuentra en equilibrio, el potencial químico tiene un valor uniforme a lo largo del mismo. Por lo tanto, así como un gradiente de temperatura provoca la aparición de un flujo de calor, un gradiente de potencial químico provoca la aparición de un flujo de materia. Las partículas fluirán de las regiones de mayor potencial químico a aquellas donde éste es menor. Este flujo de materia desaparece cuando el potencial químico se ha uniformizado; así como desaparece el flujo de calor entre las distintas partes de un sistema cuya temperatura es uniforme.

Para generalizar lo dicho a sistemas constituidos por más de un tipo de

partícula (mezclas), sólo debemos recordar que las cantidades aditivas son funciones homogéneas de primer grado en todas las variables extensivas, lo que incluye a los números de partículas de los distintos componentes del sistema. Así, en vez de introducir un potencial químico para el sistema, definiremos un potencial químico por componente, de tal manera que las variaciones diferenciales de los potenciales termodinámicos toman la forma

$$dU = TdS - pdV + \sum \mu_i dN_i \quad (5.1.15)$$

$$dH = TdS + Vdp + \sum \mu_i dN_i \quad (5.1.16)$$

$$dA = -SdT - pdV - \sum \mu_i dN_i \quad (5.1.17)$$

$$dG = -SdT + Vdp + \sum \mu_i dN_i \quad (5.1.18)$$

de donde podemos concluir que es posible expresar a los potenciales químicos de los distintos componentes en función de la temperatura, la presión y las concentraciones o composición del sistema. Además, utilizando el teorema de Euler, tenemos

$$G = \sum \mu_i N_i \quad (5.1.19)$$

que podemos considerar como una generalización de  $G = \mu N$ . Nuestro siguiente objetivo es escribir la ecuación de Gibbs para la mezcla de flui-

dos en términos de las densidades, pues es de carácter local la información termodinámica que requerimos para trabajar con las ecuaciones de campo. Primero deduciremos la ecuación para un fluido monocomponente, y entonces encontraremos su generalización. Aplicando el teorema de Euler a la ecuación de Gibbs obtenemos

$$U = TS - pV + \mu N \quad (5.1.20)$$

y si consideramos la ecuación para la energía por partícula

$$\frac{U}{N} = T \frac{S}{N} - p \frac{V}{N} + \mu \quad (5.1.21)$$

podemos escribir

$$\frac{u}{n} = Ts - p \frac{v}{n} + \mu \quad (5.1.22)$$

donde hemos considerado

$$\rho = \frac{U}{V} \quad (5.1.23)$$

$$n = \frac{N}{V} \quad (5.1.24)$$

$$s = \frac{S}{N} \quad (5.1.25)$$

Diferenciando



$$d\left(\frac{U}{n}\right) = Tds + sdT - pd\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}dp + d\mu \quad (5.1.26)$$

de donde reconocemos

$$d\left(\frac{U}{n}\right) = Tds - pd\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.1.27)$$

$$d\mu = -sdT + \frac{1}{n}dp \quad (5.1.28)$$

que son las ecuaciones de Gibbs y de Gibbs-Duhem, respectivamente, en términos de densidades. Sin pérdida de generalidad, consideraremos el caso que nos interesa, el de una mezcla binaria. Para una mezcla binaria, al aplicar el teorema de Euler a la ecuación de Gibbs obtenemos

$$U = TS - pV + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 \quad (5.1.29)$$

donde  $\mu_1$ ,  $N_1$  y  $\mu_2$ ,  $N_2$  son, respectivamente, el potencial químico y el número de partículas de los componentes 1 y 2. Si el número total de partículas en el elemento de fluido es  $N$ , entonces tendremos

$$N_1 + N_2 = N \quad (5.1.30)$$

$$\frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = 1 \quad (5.1.31)$$

y definiendo las concentraciones

$$\frac{N_1}{N} = c \quad (5.1.32)$$

$$\frac{N_2}{N} = c_2 \quad (5.1.33)$$

es claro que

$$c + c_2 = 1 \quad (5.1.34)$$

lo que significa que la composición de una mezcla binaria queda determinada por un sólo parámetro, una de las concentraciones, pues

$$dc = -dc_2 \quad (5.1.35)$$

el cambio de una de ellas determina el cambio de la otra. Para obtener la ecuación de Gibbs en términos de las densidades, consideraremos nuevamente la energía por partícula. Utilizando la ecuación de Euler

$$\frac{U}{N} \frac{V}{V} = T \frac{S}{N} - p \frac{V}{N} + \mu_1 \frac{N_1}{N} + \mu_2 \frac{N_2}{N} \quad (5.1.36)$$

tenemos, haciendo uso de las definiciones que hemos introducido ya, que

$$\frac{\rho}{n} = T s - p \frac{v}{n} + \mu_1 c + \mu_2 c_2 \quad (5.1.37)$$

y diferenciando

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) = Tds + sdT - pd\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}dp + \mu_1 dc + cd\mu_1 + \mu_2 dc_2 + c_2 d\mu_2 \quad (5.1.38)$$

de donde reconocemos que

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) = Tds - pd\left(\frac{1}{n}\right) + \mu_1 dc + \mu_2 dc_2 \quad (5.1.39)$$

es la ecuación de Gibbs para la mezcla, en términos de las densidades, y

$$cd\mu_1 + c_2 d\mu_2 = -sdT + \frac{1}{n}dp \quad (5.1.40)$$

es la generalización de la ecuación de Gibbs-Duhem para una mezcla binaria, en términos de las densidades. Recordando que la composición de la mezcla queda descrita con una de las concentraciones, podemos escribir:

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) = Tds - pd\left(\frac{1}{n}\right) + (\mu_1 - \mu_2) dc \quad (5.1.41)$$

o, introduciendo  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ , que llamaremos "potencial químico" de la mezcla

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) = Tds - pd\left(\frac{1}{n}\right) + \mu dc \quad (5.1.42)$$

obtenemos la ecuación con la que trabajaremos. En ella notamos que el último de sus términos se encarga de describir los efectos del cambio de composición en el elemento de fluido. Cabe señalar que, como se ve de la ecuación 5.1.42, la termodinámica de la mezcla no depende de los valores individuales

de los potenciales químicos de los componentes, sino, exclusivamente de la diferencia de los mismos. Esto, en virtud de la ecuación de Gibbs-Duhem, que implica que para una mezcla, uno de los potenciales químicos queda determinado al fijar aquellos del resto de los componentes. Es decir, aunque para una mezcla binaria en 1 fase tenemos 4 ecuaciones de estado,  $T$ ,  $p$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , con las que caracterizaríamos completamente al sistema, en realidad, dadas 3 de ellas, con la ecuación de Gibbs-Duhem encontramos la cuarta. En otras palabras, el estado termodinámico de la mezcla binaria en 1 fase, queda completamente especificado al determinar 3 de las variables con las que se le describe.

La ecuación 5.1.42 establece la relación que satisfacen las densidades de las variables termodinámicas, y es válida para evaluar el cambio de energía por partícula entre 2 estados de equilibrio del sistema, conectados a través de un proceso cuasiestático.

## 5.2 El esquema termodinámico

Como hemos dicho antes, el interés en estudiar los universos de Stephani y las soluciones de Szekeres, radica en que son las soluciones exactas que no tienen simetrías en general, pero que contienen en cierto límite geométrico al modelo FRW. Sin embargo, estas soluciones no admiten una ecuación de estado barotrópica (salvo en el caso límite FRW), y por lo tanto, se les considera sin carácter físico. Cabe mencionar que, por otro lado, existen consideraciones que apoyan la idea de que las ecuaciones de estado barotrópicas son

demasiado restrictivas', pues desde el punto de vista termodinámico, en general, considerar una ecuación de estado que depende de un sólo parámetro tiene implicaciones muy fuertes para el resto de las ecuaciones de estado con las que se describe al sistema. ¿Cómo establecer ecuaciones de estado no barotrópicas razonables? Coll y Ferrando<sup>2</sup> investigaron las condiciones para la consistencia entre las ecuaciones termodinámicas y las ecuaciones de campo de Einstein, derivando de manera rigurosa lo que llamaron "esquema termodinámico". Se dice que una solución exacta de las ecuaciones de Einstein, con fluido perfecto, admite un esquema termodinámico si satisface las condiciones de integrabilidad de la ecuación de Gibbs. Resulta que si existe una ecuación de estado, no necesariamente barotrópica, las condiciones de integrabilidad para la ecuación de Gibbs se satisfacen y viceversa. Presentamos ahora dicho esquema termodinámico para el fluido perfecto monocomponente en el que se conserva el número de partículas. Para tal fluido, el tensor de energía-momento es

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta} \quad (5.2.1)$$

y satisface la ley de conservación:  $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$  que implica las identidades de Bianchi contraídas

$$\dot{\rho} + (\rho - p)\Theta = 0 \quad (5.2.2)$$

$$h_a^s \rho_{,s} + (\rho + p) \dot{u}_a = 0 \quad (5.2.3)$$

donde  $\Theta = u_a^\alpha$  es la expansión y  $h_a^s = \delta_a^s + u_a u^s$  es el tensor de proyección.

La conservación del número de partículas, dada por

$$(nu^a)_{;a} = 0 \quad (5.2.4)$$

implica para el fluido perfecto monocomponente que la producción de entropía sea nula y que las líneas de flujo sean a entropía constante

$$(nsu^a)_{;a} = 0 \quad (5.2.5)$$

donde, en ambas ecuaciones  $n$  es la densidad del número de partículas y  $s$  la entropía por partícula. La ecuación de Gibbs puede escribirse como la 1-forma

$$\omega = ds = \frac{1}{T} \left[ d \left( \frac{\rho}{n} \right) + p d \left( \frac{1}{n} \right) \right] \quad (5.2.6)$$

en la que  $d$  denota a la derivada exterior. Las condiciones necesaria y suficiente para la integrabilidad de la ecuación de Gibbs, sujetas al cumplimiento de las leyes de conservación, son las condiciones que Col y Ferrando denotan como admisión de un esquema termodinámico. Estos autores demostraron que un fluido perfecto admite un esquema termodinámico si y sólo si existe una función escalar  $F = F(\rho, p)$  que satisfaga

$$\Theta = F \quad (5.2.7)$$

condición que se cumple si y sólo si, a su vez, se cumple la restricción

$$\left( \dot{p} d\dot{p} - \dot{p} d\dot{p} \right) \wedge dp \wedge dp = 0 \quad (5.2.8)$$

Para llegar a este resultado, Coll y Ferrando plantearon lo que llaman la teoría de Rainich del "fluido perfecto termodinámico". En analogía al trabajo original de Rainich, en el que se pregunta cuáles son las condiciones necesarias y suficientes sobre el tensor métrico de una región del espaciotiempo, tales que aseguren que, dadas las ecuaciones de Maxwell para el vacío y el tensor de energía-momento para el campo electromagnético, se satisfagan las ecuaciones de campo de Einstein; Coll y Ferrando se preguntaron cuáles deben ser las condiciones sobre el tensor métrico para que, dadas las ecuaciones que definen a un medio y el tensor de energía-momento del mismo, se satisfagan las ecuaciones de campo de Einstein, siendo el medio un fluido perfecto.

Aquí queremos señalar algo que nos parece muy importante. Creemos que la analogía que establecen Coll y Ferrando entre los casos del campo electromagnético y el fluido perfecto no es completa por 2 razones. La primera tiene que ver con la forma de las ecuaciones que describen a cada uno de los medios: las ecuaciones de Maxwell forman parte de una teoría relativista, y no así la ecuación de Gibbs. La segunda tiene que ver con el carácter de las ecuaciones con las que se describe a cada uno de los medios: las ecuaciones de Maxwell

tienen la información de cómo evoluciona el campo electromagnético, es decir, involucran la dinámica del campo, sin embargo; para caracterizar al fluido perfecto, Coll y Ferrando utilizan la ecuación de conservación de la energía, la ecuación de conservación de partículas y la relación de Gibbs. Ninguna de estas ecuaciones determina, desde el punto de vista termodinámico, cuál debe ser la evolución del fluido perfecto, pues ésta queda determinada por la segunda ley de la Termodinámica.

### 5.3 Termodinámica del fluido perfecto irrotacional

Ahora presentaremos algunos resultados básicos que serán de utilidad para entender y desarrollar nuestro objetivo principal: estudiar los modelos cosmológicos inhomogéneos y anisotrópicos interpretándolos como mezclas de fluidos, bajo el esquema termodinámico desarrollado por Coll y Ferrando.

Consideremos que el contenido del universo es un fluido perfecto irrotacional. En este caso, la cuadrivelocidad del mismo es ortogonal a la hipersuperficie tridimensional tipo espacio, y existen coordenadas locales comóviles  $(t, x^i)$ , de tal forma que podemos escribir así

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (5.3.1)$$

$$u^a = N^{-1} \delta_t^a \quad (5.3.2)$$



$$\dot{u}_i = (\ln N)_{,a} \delta_i^a \quad (5.3.3)$$

$$h_{\alpha\beta} = g_{ij} \delta_\alpha^i \delta_\beta^j \quad (5.3.4)$$

a la métrica, la 4-velocidad, la 4-aceleración y el tensor de proyección, respectivamente.  $N$  y  $g_{ij}$  son, en general, funciones de todas las coordenadas  $(t, x^i)$ . En esta representación, las identidades de Bianchi y las leyes de conservación toman la forma

$$\rho_{,i} + (\rho + p)(\ln \sqrt{\Delta})_{,i} = 0 \quad (5.3.5)$$

$$p_{,i} - (\rho + p)(\ln N)_{,i} = 0 \quad (5.3.6)$$

$$n = \frac{f(x^i)}{\sqrt{\Delta}} \quad (5.3.7)$$

$$s = s(x^i) \quad (5.3.8)$$

con  $\Delta \equiv \det(g_{ij})$  y  $f(x^i)$  una función arbitraria de las coordenadas. Estas relaciones implican que, en general, las variables termodinámicas dependerán tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo, por lo que tendremos que asumir la hipótesis de equilibrio local, propia de la Termodinámica Irreversible Lineal, que supone que para un sistema fuera de equilibrio, cuyas

propiedades termodinámicas no son uniformes y varían con el tiempo, son válidas localmente todas las relaciones de equilibrio, y que son éstas las que determinan cómo se relacionan las variaciones temporales de las variables termodinámicas así como sus gradientes. Teniendo esto en mente, asociemos a nuestro sistema de referencia comóvil la base de 1-formas  $(dt, dx^i)$ . En esta base, la relación de Gibbs queda expresada como

$$\omega = s_{,i} dx^i = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\rho}{n} \right)_{,i} + p \left( \frac{1}{n} \right)_{,i} \right] dx^i \quad (5.3.9)$$

Una condición de integrabilidad suficiente para esta 1-forma es

$$d\omega = W_{ii} \frac{dt \wedge dx^i}{nT} + W_{ij} \frac{dx^i \wedge dx^j}{nT} = 0 \quad (5.3.10)$$

$$W_{ii} = (\rho + p) \left( \frac{n_{,i} T_{,i}}{nT} - \dot{u}_i \frac{n_{,i}}{n} \right) - \left( \rho_{,i} \frac{T_{,i}}{T} + p_{,i} \frac{n_{,i}}{n} \right) \quad (5.3.11)$$

$$W_{ij} = \frac{T_{,i} \rho_{,j}}{T} - (\rho + p) \left( \frac{T_{,i} + T \dot{u}_i}{T} \right) \frac{n_{,j}}{n} \quad (5.3.12)$$

y la condición necesaria y suficiente está dada por

$$d\omega \wedge \omega = X_{ij} \frac{dt \wedge dx^i \wedge dx^j}{n^3 T^2} + X_{ijk} \frac{dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k}{n^3 T^2} = 0 \quad (5.3.13)$$

$$X_{ij} = \rho_{,i} p_{,j} - \rho_{,j} p_{,i} \quad (5.3.14)$$

$$Y_{ijk} = -\rho_{,i} p_{,j} n_{,k} \quad (5.3.15)$$

Utilizando esta 1-forma y sus condiciones de integrabilidad, Quevedo y Sussman<sup>3,4</sup> examinaron la consistencia de la termodinámica de un fluido perfecto monocomponente, irrotacional y no isentrópico, que conserva el número de partículas y es la fuente del campo de los universos de Stephani y de Szekeres. En un trabajo posterior, Krasinski, Quevedo y Sussman<sup>5</sup> investigan las restricciones impuestas por la relación de Gibbs sobre los universos de Stephani y las soluciones de Szekeres. Utilizando la 1-forma

$$\omega = T ds = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.3.16)$$

y su condición de integrabilidad necesaria y suficiente,  $d\omega \wedge \omega = 0$ , escrita en la forma equivalente

$$d\rho \wedge dp \wedge dn = 0 \quad (5.3.17)$$

llegaron a los siguientes resultados: los universos de Stephani y las soluciones clase I de Szekeres admiten un esquema termodinámico si y sólo si se imponen simetrías sobre ambos modelos, específicamente, si se reducen al caso de simetría esférica o al caso FRW. Para las soluciones de Szekeres clase II encontraron el subcaso más general sin simetrías y que satisface las condiciones impuestas por la ecuación de Gibbs. Sin embargo, este subcaso genera un conjunto de variables termodinámicas que no se transforma en

el correspondiente en el límite FRW. Estos autores notan que aunque una solución admita un esquema termodinámico, las variables termodinámicas que describen al fluido pueden tener un comportamiento no aceptable desde el punto de vista físico, y señalan como posible causa la necesidad de una termodinámica generalizada, compatible con el esquema de la relatividad.

En las siguientes secciones generalizaremos el esquema termodinámico desarrollado por Coll y Ferrando a mezclas de fluidos, y lo aplicaremos a los universos de Szekeres y Stephani, con el objetivo de estudiar las restricciones que son impuestas sobre las métricas que definen a dichos modelos.

## 5.4 Modelos cosmológicos interpretados como mezclas

### 5.4.1 Esquema termodinámico para una mezcla

Ahora consideraremos que la fuente es un fluido perfecto constituido por una mezcla binaria de fluidos perfectos. El tensor de energía-momento está dado por

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta} \quad (5.4.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad de materia-energía total,  $p$  es la presión de la mezcla y  $u^\alpha$  es la cuadrivelocidad asociada con el movimiento macroscópico del fluido. Como antes, este tensor satisface la ley de conservación  $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ , que implica las identidades de Bianchi contraídas

$$\dot{\rho} - (\rho + p)\Theta = 0 \quad (5.4.2)$$

$$h_{\alpha}^2 p_{,s} + (\rho + p) \dot{u}_{\alpha} = 0 \quad (5.4.3)$$

y exigiremos que el fluido conserve el número total de partículas

$$\langle nu^{\alpha} \rangle_{, \alpha} = 0 \quad (5.4.4)$$

donde  $n$  ahora representa la densidad del número total de partículas. Como hemos visto, la ecuación de Gibbs para la mezcla estará dada por la 1-forma

$$\omega = ds = \frac{1}{T} \left[ d \left( \frac{\rho}{n} \right) + p d \left( \frac{1}{n} \right) - \mu dc \right] \quad (5.4.5)$$

por lo que ahora se cumple que

$$\frac{ds}{dt} = - \frac{\mu}{T} \frac{dc}{dt} \quad (5.4.6)$$

En general, la producción de entropía será distinta a cero, pues el intercambio de materia producto de las inhomogeneidades en la composición de la mezcla involucrará una entropía de mezclado, dada por la ecuación 5.4.6. Así, la entropía por partícula,  $s$ , dependerá tanto de la posición como del tiempo, por lo que la ecuación de Gibbs, expresada en términos de la base de 1-formas  $(dt, dx^i)$  asociada al sistema comóvil es

$$\omega = s_{, \alpha} dx^{\alpha} = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\rho}{n} \right)_{, \alpha} + p \left( \frac{1}{n} \right)_{, \alpha} - \mu c_{, \alpha} \right] dx^{\alpha} \quad (5.4.7)$$

Este hecho representa la principal diferencia con el estudio del caso de un fluido, pues como es claro, hemos introducido una irreversibilidad en el sistema.

Será, pues, de fundamental importancia en la determinación de las restricciones a las que debemos someter a los modelos, al estudiar la compatibilidad de las ecuaciones termodinámicas con las ecuaciones de campo.

Nosotros expresaremos la ecuación de Gibbs con la 1-forma

$$\Omega = Tds = d\left(\frac{p}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right) - \mu dc \quad (5.4.8)$$

Una condición suficiente para la integrabilidad de ésta es  $d\Omega = 0$ ,

$$d\Omega = -\frac{dp \wedge dn}{n^2} - d\mu \wedge dc = 0 \quad (5.4.9)$$

cuyas componentes son

$$d\Omega = Y_{tt} dt \wedge dx^i + Y_{ij} dx^i \wedge dx^j = 0 \quad (5.4.10)$$

$$Y_{tt} = -\frac{1}{n^2} p_{,i} n_{,i} - \mu_{,i} c_{,i} \quad (5.4.11)$$

$$Y_{ij} = -\frac{1}{n^2} p_{,i} n_{,j} - \mu_{,i} c_{,j} \quad (5.4.12)$$

y la condición de integrabilidad necesaria y suficiente para la misma es  $d\Omega \wedge \Omega = 0$ .

$$d\Omega \wedge \Omega = \left[ -\frac{dp \wedge dn}{n^2} - d\mu \wedge dc \right] \wedge Tds \quad (5.4.13)$$

cuyas componentes son

$$d\Omega \wedge \Omega = Z_{tij} dt \wedge dx^i \wedge dx^j + Z_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = 0 \quad (5.4.14)$$

$$Z_{tij} = p_{,i} n_{,j} \left( \frac{\mu}{n^2} c_{,j} - \frac{1}{n^3} \rho_{,j} \right) + \mu_{,i} c_{,j} \left( \frac{\rho + p}{n^2} n_{,j} - \frac{1}{n} \rho_{,j} \right) \quad (5.4.15)$$

$$Z_{ijk} = p_{,i} n_{,j} \left( \frac{\mu}{n^2} c_{,k} - \frac{1}{n^3} \rho_{,k} \right) + \mu_{,i} c_{,j} \left( \frac{\rho + p}{n^2} n_{,k} - \frac{1}{n} \rho_{,k} \right) \quad (5.4.16)$$

en donde hemos hecho uso de la relación de Gibbs. Estas componentes las podemos escribir en la forma reducida

$$Z_{tij} = -T \left( \frac{1}{n^2} p_{,i} n_{,j} + \mu_{,i} c_{,j} \right) s_{,j} \quad (5.4.17)$$

$$Z_{ijk} = -T \left( \frac{1}{n^2} p_{,i} n_{,j} + \mu_{,i} c_{,j} \right) s_{,k} \quad (5.4.18)$$

utilizando directamente la ecuación 5.4.13.

Para desarrollar nuestro análisis, centraremos la atención en la condición necesaria y suficiente, ecuación 5.4.13, sin tomar en cuenta la condición suficiente, ecuación 5.4.9, pues esta condición es equivalente a pedir la existencia de una "función calor", algo que no solamente no es necesario, sino que lleva a conclusiones físicamente inaceptables sobre las propiedades del fluido, por ejemplo, el coeficiente de expansión térmica sería siempre nulo.

Además, queremos mostrar que nuestro esquema termodinámico incluye como caso especial el de un fluido. Para ver esto, tan sólo es necesario notar que dicho límite se logra pidiendo que  $\mu = 0$  y  $\epsilon = 1$ . Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 5.4.15 y 5.4.16, obtenemos

$$Z_{ij} = -\frac{1}{n^3} p_{,i} n_{,j} \rho_{,j} \quad (5.4.19)$$

$$Z_{ijk} = -\frac{1}{n^3} p_{,i} n_{,j} \rho_{,k} \quad (5.4.20)$$

que son las componentes de la 3-forma

$$-\frac{dp \wedge dn \wedge d\rho}{n^3} = 0 \quad (5.4.21)$$

y que es equivalente a la condición utilizada por Krasinski, Quevedo y Sussman, ecuación 5.3.17.

En las siguientes secciones realizaremos los análisis concretos de los modelos, utilizando las ecuaciones 5.4.17 y 5.4.18.

## 5.5 Universos de Szekeres

Las soluciones de Szekeres tienen como fuente un fluido perfecto irrotacional y geodésico, de tal modo que  $\dot{u}_i = 0$ , por lo que, en nuestro sistema de referencia comóvil local,  $N_i = 0$  y  $p = p(t)$ . Sin pérdida de generalidad escogemos  $N = 1$ , de tal forma que  $u^\alpha = \delta_t^\alpha$  y todas las derivadas convectivas serán simplemente, derivadas con respecto al tiempo coordinado



( $\dot{X} = X_t$  para toda función  $X$ ).

### 5.5.1 Soluciones de Szekeres clase I ( $\beta' \neq 0$ )

Para esta clase de soluciones, la parte espacial de la métrica está dada por

$$g_{ij} dx^i dx^j = e^{2\alpha} dz^2 + e^{2\beta} (dx^2 + dy^2) \quad (5.5.1)$$

$$e^\beta = \frac{\Phi(t, z)}{S(x, y, z)} \quad (5.5.2)$$

$$e^\alpha = hS(e^\beta)_{,z} \quad (5.5.3)$$

$$S = A(x^2 + y^2) + 2B_1x + 2B_2y + C \quad (5.5.4)$$

donde  $h(z)$ ,  $A(z)$ ,  $B_1(z)$ ,  $B_2(z)$  y  $C(z)$  son funciones arbitrarias. La función  $\Phi(t, z)$  está determinada por la ecuación

$$p = -\frac{2\Phi\Phi_{,tt} + \Phi_{,t}^2 + k}{\Phi^2} \quad (5.5.5)$$

donde  $k(z)$  es una función que debe satisfacer la relación

$$AC - B_1^2 - B_2^2 = \frac{1}{4} [h^{-2} + k] \quad (5.5.6)$$

Las densidades de energía y de partículas correspondientes a esta métrica son

$$\rho = \frac{k}{\Phi^2} E e^{-\alpha} + 3 \frac{\Phi_{,t}^2 + k}{\Phi^2} \quad (5.5.7)$$

$$n = f e^{-\alpha - 2\beta} \quad (5.5.8)$$

respectivamente, donde  $f$  es una función arbitraria de las coordenadas espaciales, y  $E(t, z)$  está definida por

$$E = \Phi (\Phi_{,t}^2 + k)_{,z} - 2\Phi_{,z} (\Phi_{,t}^2 + k) \quad (5.5.9)$$

El límite FRW para esta solución se obtiene cuando  $\Phi = zR(t)$  y  $k = k_0 z^2$ , con  $k_0$  constante.

Fijemos nuestra atención en la condición de integrabilidad  $Z_{ijk} = 0$ , ecuación 5.4.18. Como el fluido que estamos considerando es geodésico,  $p_i = 0$ , por lo que la condición se reduce a

$$Z_{ijk} = -\mu_{[i} c_{j]s,k} = 0 \quad (5.5.10)$$

que es equivalente a la ecuación

$$\nabla\mu \times \nabla c \cdot \nabla s = 0 \quad (5.5.11)$$

que a su vez implica que podemos representar a  $\nabla s$  como una combinación lineal de  $\nabla c$  y  $\nabla\mu$

$$\nabla s = a\nabla\mu + b\nabla c \quad (5.5.12)$$

con  $a$  y  $b$  funciones arbitrarias, dependientes de todas las coordenadas  $(t, x^i)$  en general. Las componentes espaciales de la 1-forma para la ecuación de Gibbs se escriben

$$s_i = \frac{1}{T} \left( \frac{\rho + p}{n} \right)_{,i} - \frac{\mu}{T} c_{,i} \quad (5.5.13)$$

por lo que si hacemos las identificaciones

$$a = \frac{1}{T} \quad (5.5.14)$$

$$b = -\frac{\mu}{T} \quad (5.5.15)$$

entonces resulta que

$$\mu_{,i} = \left( \frac{\rho + p}{n} \right)_{,i} \quad (5.5.16)$$

que podemos integrar como

$$\mu = \frac{\rho + p}{n} \quad (5.5.17)$$

Despejando de la parte espacial de la 1-forma de Gibbs

$$T s_i + \mu c_{,i} = \left( \frac{\rho + p}{n} \right)_{,i} \quad (5.5.18)$$

e introduciendo el potencial químico

$$T s_i + \left( \frac{\rho + p}{n} \right) c_{,i} = \left( \frac{\rho + p}{n} \right)_{,i} \quad (5.5.19)$$

estamos en condiciones de identificar a  $s$ , la entropía por partícula del fluido,  $T$ , la temperatura del mismo y  $c$ , la variable con la que caracterizamos su composición. Para ello, calculamos el gradiente del potencial químico y buscamos en la expresión resultante un término en el que un gradiente multiplique al potencial químico, y un término que sea el producto de una función multiplicada por un gradiente. De las expresiones para  $\rho$ ,  $p$  y  $n$  tenemos

$$\mu = \left[ \frac{\hbar F e^{-\alpha} + 2(\Phi_{,t}^2 + k) - 2\Phi\Phi_{,tt}}{\Phi^2} \right] \frac{e^{\alpha+2\beta}}{f} \quad (5.5.20)$$

resultando que

$$c = \ln \frac{c_0}{n} \quad (5.5.21)$$

$$T = \frac{T_0}{n} \quad (5.5.22)$$

$$s = \frac{\rho - p}{T_0} = \frac{\mu}{T} \quad (5.5.23)$$

donde  $T_0$  y  $c_0$  son funciones exclusivamente del tiempo.

La componente temporal  $Z_{ttj} = 0$  de la condición de integrabilidad, ecuación 5.4.17, implica la relación

$$\frac{1}{n^2} \pi_{[t} p_{,t} s_{,j]} + c_{,t} \mu_{,t} s_{,j]} = 0 \quad (5.5.24)$$

que para un fluido geodésico ( $p_{,j} = 0$ ) es equivalente a la ecuación

$$\frac{p_{,t}}{n^2} \nabla_S \times \nabla n + c_{,t} \nabla_\mu \times \nabla s + s_{,t} \nabla_C \times \nabla \mu + \mu_{,t} \nabla_S \times \nabla c = 0 \quad (5.5.25)$$

y que se puede reducir a la siguiente relación utilizando la ecuación de Gibbs

$$\frac{p_{,t}}{n} \nabla_S \times \left( \frac{\nabla n}{n} + \nabla c \right) = 0 \quad (5.5.26)$$

Tal relación se satisface trivialmente, pues de la ecuación 5.5.21 vemos que

$$\nabla c = -\nabla \ln n \quad (5.5.27)$$

Además, se debe satisfacer la condición de producción de entropía

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\mu}{T} \frac{dc}{dt} \quad (5.5.28)$$

Sustituyendo en ella las variables termodinámicas involucradas, ecuaciones 5.5.17, 5.5.21 y 5.5.23, encontramos que la implicación más importante que dicha condición tiene sobre las variables físicas y las funciones que definen a la métrica, es que la densidad de energía  $\rho$ , la entropía por partícula  $s$  y la expansión  $\Theta$  sean uniformes, es decir, funciones exclusivamente del tiempo. Tal restricción reduce a los modelos a los tipo FRW. Además, la función  $e^{\alpha+2\beta}$  debe ser separable como el producto de una función del tiempo y una de la posición. Tal separación se puede realizar sólo si existe una función de la coordenada  $z$ ,  $Z(z)$ , en términos de la cual se pueda expresar a las funciones  $k$  y  $\Phi$  como  $k = k_0 Z^2$  y  $\Phi = RZ$ , con  $k_0$  constante y  $R$  una función del

tiempo. Aprovechando la libertad que tenemos para escoger a la coordenada  $z$ , podemos hacer la transformación  $z \rightarrow Z$ , de tal forma que es claro que la condición reduce a la métrica del espaciotiempo a aquella de los modelos cosmológicos FRW.

### 5.5.2 Soluciones de Szekeres clase II ( $\beta' = 0$ )

La métrica para estas soluciones tiene la misma forma que la clase I,

$$g_{ij}dx^i dx^j = e^{2\alpha} dz^2 - e^{2\beta} (dx^2 + dy^2) \quad (5.5.29)$$

pero

$$e^\beta = \frac{\Phi(t)}{1 + \frac{1}{4}k(x^2 + y^2)}, \quad (5.5.30)$$

$$e^\alpha = \lambda(t, z) + S e^\beta \quad (5.5.31)$$

$$S = \frac{1}{2}U(x^2 + y^2) - V_1 x + V_2 y + 2W \quad (5.5.32)$$

de tal forma que

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0 \quad (5.5.33)$$

y donde  $U(z)$ ,  $V_1(z)$ ,  $V_2(z)$  y  $W(z)$  son funciones arbitrarias y  $k$  es una constante arbitraria. Asociadas a esta métrica, corresponden las siguientes variables de estado

$$p = -\frac{2\Phi\Phi_{,tt} + \Phi_{,t}^2 - k}{\Phi^2} \quad (5.5.34)$$

$$\rho = 2E(t, z)e^{-\alpha} + 3\frac{\Phi_{,t}^2 - k}{\Phi^2} \quad (5.5.35)$$

con

$$E = \frac{\lambda\Phi_{,tt}}{\Phi} - \lambda_{,tt} \equiv \frac{\lambda_{,t}\Phi_{,t}}{\Phi} - \frac{\lambda(\Phi_{,t}^2 - k)}{\Phi^2} - \frac{U + kW}{\Phi} \quad (5.5.36)$$

La función  $\lambda(t, z)$  está determinada por la ecuación

$$\Phi\lambda_{,tt} + \Phi_{,t}\lambda_{,t} - \left( \frac{\Phi\Phi_{,tt} + \Phi_{,t}^2 + k}{\Phi} \right) \lambda = U + kW \quad (5.5.37)$$

y la densidad de partículas toma la forma

$$n = fe^{-\alpha-2\beta} \quad (5.5.38)$$

donde  $f$  es una función arbitraria de las coordenadas. El límite FRW para esta solución se obtiene cuando  $\lambda = 0$  y  $U = -kW$ .

El análisis termodinámico de estos universos se realiza de la misma forma que en el caso anterior. La condición de integrabilidad  $Z_{ijk} = 0$ , ecuación 5.4.18, implica para fluidos geodésicos, que los gradientes de las variables termodinámicas han de satisfacer la relación 5.5.11, por lo que podemos expresar a  $\nabla s$  como una combinación lineal de  $\nabla e$  y  $\nabla \mu$ , realizar las identificaciones 5.5.14, 5.5.15 y 5.5.17, y encontrar el resto de las variables de estado con-

siderando que éstas deben cumplir la relación 5.5.19. Dadas las expresiones para  $\rho$ ,  $p$  y  $n$ , tenemos

$$\mu = \left[ 2Ee^{-\alpha} + 2\frac{\Phi^2 + k}{\Phi^2} - 2\frac{\Phi_{,tt}}{\Phi} \right] \frac{e^{\alpha+2\beta}}{f} \quad (5.5.39)$$

$$c = \ln \frac{c_0}{n} \quad (5.5.40)$$

$$T = \frac{T_0}{n} \quad (5.5.41)$$

$$s = \frac{\rho + p}{T_0} = \frac{\mu}{T} \quad (5.5.42)$$

donde  $T_0$  y  $c_0$  son funciones exclusivamente del tiempo.

La componente temporal  $Z_{tt} = 0$  de la condición de integrabilidad, ecuación 5.4.17, nuevamente implica la relación 5.5.24, que para un fluido geodésico es equivalente a la ecuación 5.5.25, y que se puede reducir a la relación 5.5.26, utilizando la ecuación de Gibbs. Como hemos visto, de la definición de  $c$ , tal relación se satisface trivialmente

La condición de producción de entropía

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\mu}{T} \frac{dc}{dt} \quad (5.5.43)$$

impone para las variables físicas nuevamente que  $\rho$ ,  $s$  y  $\Theta$  sean uniformes; es decir, reduce a los modelos a aquellos del tipo FRW; además, para las funciones que definen a la métrica se debe cumplir que  $U = \delta W$ ,  $V_1 = V_2 = 0$ .



y que  $e^{\alpha}$  y  $\lambda$  se puedan separar como productos de la forma  $f(\tilde{t})g(x^i)$ . Esto se logra si i)  $\lambda = 0$ ,  $k = 0$  y tenemos los modelos FRW planos, o si ii)  $\lambda \propto \Phi$ , y tenemos los modelos FRW en general.

Hemos desarrollado el análisis termodinámico de los universos de Szekeres, interpretándolos como mezclas de fluidos perfectos. Para tal efecto, planteamos el esquema termodinámico de la mezcla. Como resultado del mismo, encontramos muy natural plantear la ecuación de estado

$$\mu = \frac{\rho + p}{n} \quad (5.5.44)$$

en la que el potencial químico de la mezcla queda determinado por la densidad de energía, la presión y la densidad de partículas. Como habíamos discutido antes, no son  $\mu_1$  y  $\mu_2$  por separado quienes determinan las propiedades del fluido, sino  $\mu$ . A esta variable entonces le debemos exigir que no sólo determine el cambio de composición, sino el flujo de materia (con composición uniforme). Fijándonos en la 1-forma de Gibbs

$$ds = \frac{1}{T} d\left(\frac{\rho}{n}\right) + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\mu}{T} dc \quad (5.5.45)$$

$$ds = \frac{1}{nT} d\rho - \frac{\rho + p}{n^2 T} dn - \frac{\mu}{T} dc \quad (5.5.46)$$

$$ds = \frac{1}{nT} d\rho - \frac{\mu}{nT} dn - \frac{\mu}{T} dc \quad (5.5.47)$$

resulta que nuestro  $\mu$  cumple con los requisitos físicos tal como lo hemos

definido. Además resulta que, si la mezcla obedece dicha ecuación de estado, los modelos admiten un esquema termodinámico que no restringe de manera alguna a la métrica. Es decir, definir bien a las variables termodinámicas con las que hacemos la descripción del fluido no involucra en este caso una incompatibilidad con las métricas inhomogéneas, este resultado en contraposición al de Krasinski et al para el caso de un fluido, pues estos autores encontraron que es imposible que el fluido admita un esquema termodinámico (para las soluciones clase I) si la métrica no se ve restringida a una con simetrías. Sin embargo, cuando nos preocupamos por la evolución temporal de la mezcla, desde el punto de vista termodinámico, y exigimos que se satisfaga la condición de producción de entropía, ambos modelos se reducen a los más simétricos, los tipo FRW. Resulta pues, ésta, una restricción muy severa.

## 5.6 Universos de Stephani

Los universos de Stephani comprenden la solución conformalmente plana más general con un fluido perfecto irrotacional como fuente. Estas soluciones no admiten, en general, isometrías y generalizan los espaciotiempos de FRW. Para este tipo de soluciones, existen coordenadas comóviles locales en las que podemos escribir a la métrica como

$$ds^2 = D^2 dt^2 - V^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5.6.1)$$

$$D = \frac{FV_t}{V} \quad (5.6.2)$$

$$V = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{4} k [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2] \right\} \quad (5.6.3)$$

donde  $F(t)$ ,  $R(t)$ ,  $k(t)$ ,  $x_o(t)$ ,  $y_o(t)$  y  $z_o(t)$  son funciones arbitrarias. La 4-velocidad del fluido está dada por  $u^\alpha = D^{-1} \delta_o^\alpha$  y las variables de estado para esta métrica son

$$\rho = 3C^2 \quad (5.6.4)$$

$$p = -3C^2 + 2 \frac{VCC_t}{V_t} \quad (5.6.5)$$

$$n = fV^3 \quad (5.6.6)$$

donde  $f$  es una función de las coordenadas y la función  $C(t)$  está definida a través de la relación

$$k = R^2 \left[ C^2 - \frac{1}{F^2} \right] \quad (5.6.7)$$

El límite FRW para esta solución se obtiene cuando  $k_o$ ,  $x_o$ ,  $y_o$  y  $z_o$  son todas constantes.

Para desarrollar el análisis termodinámico de estos modelos, fijemos nuestra atención en la condición de integrabilidad  $Z_{j,k} = 0$ , ecuación 5.4.18. La relación que implica sobre las variables termodinámicas es

$$\left( \frac{1}{n^2} \nabla p \times \nabla n - \nabla \mu \times \nabla c \right) \cdot \nabla s = 0 \quad (5.6.8)$$

La forma en la que procederemos es la siguiente. Considerando que el sistema termodinámico que estudiamos es el mismo, una mezcla de fluidos perfectos, proponemos que sus propiedades están caracterizadas por la misma ecuación de estado

$$\mu = \frac{\rho + p}{n} \quad (5.6.9)$$

como encontramos para los universos de Szekeres. Una vez hecho esto, encontramos que la relación 5.6.8 se convierte, al sustituir el potencial químico, y utilizando la relación de Gibbs, en la siguiente

$$\left( \frac{\nabla n}{n} + \nabla c \right) \times \nabla p \cdot \nabla s = 0 \quad (5.6.10)$$

la cual se satisface idénticamente, pues de la parte espacial de la 1-forma de Gibbs

$$s_{,i} = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\rho}{n} \right)_{,i} + p \left( \frac{1}{n} \right)_{,i} - \mu c_{,i} \right] \quad (5.6.11)$$

$$s_{,i} = \frac{1}{T} \left[ -\frac{\rho + p}{n^2} n_{,i} - \mu c_{,i} \right] \quad (5.6.12)$$

pues el fluido de esta solución tiene densidad de energía uniforme,  $\rho_{,i} = 0$  y

$$s_{,i} = -\frac{\mu}{T} \left[ \frac{n_{,i}}{n} + c_{,i} \right] \quad (5.6.13)$$

entonces vemos que el gradiente de  $s$ , la entropía por partícula, es paralelo al vector

$$\frac{\nabla n}{n} + \nabla c \quad (5.6.14)$$

por lo que, si definimos a la entropía por partícula, como en el caso de los universos de Szekeres, a través de la relación

$$s = \frac{\mu}{T} \quad (5.6.15)$$

el gradiente de la composición deberá satisfacer la ecuación

$$c_{,i} = \left( \ln \frac{1}{ns} \right)_{,i} \quad (5.6.16)$$

Integrando la ecuación para  $c$  tenemos

$$c = \ln \frac{c_0}{ns} \quad (5.6.17)$$

dónde  $c_0$  es una función exclusivamente del tiempo.

La componente temporal  $Z_{0j} = 0$ , ecuación 5.4.17, de la condición de integrabilidad, para un fluido con densidad de energía uniforme se reduce, utilizando la expresión para el potencial químico y la ecuación de Gibbs, a la relación:

$$\frac{\rho_{,i}}{\bar{\rho}^2} \nabla p \times \left( \frac{\nabla n}{n} + \nabla c \right) = 0 \quad (5.6.18)$$

sin embargo, los gradientes de  $n$  y  $c$  son arbitrarios, por la arbitrariedad de  $f$ , por lo tanto, para cumplir con esta restricción es necesario que se cumpla

una de las siguientes condiciones: i) que  $\nabla p = 0$ , lo que implica que  $\frac{V_i}{V}$  sea independiente de las coordenadas espaciales, reduciendo la métrica a la de los modelos tipo FRW; ii) que la entropía por partícula sea uniforme,  $s = s(t)$ , pues

$$\frac{\nabla n}{n} + \nabla c = -\frac{\nabla s}{s} \quad (5.6.19)$$

ya que

$$\nabla c = \nabla \left( \ln \frac{c_0}{ns} \right) \quad (5.6.20)$$

Con nuestra definición de  $s$ , podemos lograr esto escogiendo una temperatura de la forma

$$T = \frac{T_0}{fV^2V_i} \quad (5.6.21)$$

donde  $T_0$  es una función del tiempo, pues

$$s = \frac{\mu}{T} = \frac{2CC_i}{fV^2V_iT} \quad (5.6.22)$$

Además, las variables que hemos definido deben satisfacer la condición de producción de entropía

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\mu}{T} \frac{dc}{dt} \quad (5.6.23)$$

que se satisface sólo si  $\frac{V_i}{V}$  es independiente de las coordenadas espaciales, lo que reduce la métrica a la de los modelos FRW.

Así pues, hemos encontrado que, utilizando la ecuación de estado de la mezcla con la que describimos al sistema, dada por 5.6.9, podemos definir variables termodinámicas que no necesariamente impliquen que la métrica de los universos de Stephani adquiera simetrías. Sin embargo, al exigir que se cumpla la condición de producción de entropía, es necesario que la métrica se reduzca a aquella de los modelos FRW, tal como en el caso de los universos de Szekeres, y a diferencia del caso de un fluido, en el que, como encuentran Krasinski et al, para definir bien tales variables, es necesario que la métrica adquiera un grupo de simetría.

## Capítulo 6

# CONCLUSIONES

En este trabajo hemos desarrollado el análisis termodinámico de los modelos cosmológicos inhomogéneos más generales, interpretándolos como mezclas de fluidos. Para ello, generalizamos el esquema termodinámico desarrollado por Coll y Ferrando, para el caso de un fluido perfecto compuesto por 2 componentes distintos. Entre las diferencias que aparecen, destacan i) que para la descripción del fluido debemos incorporar las variables conjugadas  $(\mu, c)$  que dan cuenta del proceso de mezclado, y ii) la posibilidad de que los modelos involucren producción de entropía distinta de cero. Nuestra generalización incluye el caso de un fluido monocomponente cuando  $\mu = 0$  y  $c = 1$ . En el desarrollo del análisis, resalta la identificación de la ecuación de estado para la mezcla. Tal ecuación de estado permite que nuestro fluido admita un esquema termodinámico sin que sea necesario que las métricas adquieran simetrías, además de que es susceptible de interpretación física. Este resultado contrasta con lo encontrado por Krasinski et al<sup>5</sup> para un fluido monocomponente en los casos de los universos de Stephani y las soluciones



de Szekeres clase I, en los que el definir bien las variables termodinámicas implica necesariamente que la métrica adquiriera alguna simetría. Sin embargo, cuando exigimos que se cumpla la condición de producción de entropía, en todos los casos la métrica ha de reducirse a aquella de los modelos FRW. Esto, a diferencia de lo encontrado en [5], pues para el caso de un fluido monocomponente, aunque el esquema termodinámico involucra que las métricas adquirieran simetrías, no necesariamente éstas se reducen a las más simétricas, las de los modelos FRW. Sobre esto, podemos decir lo siguiente: aunque introducimos un grado de libertad adicional, pues el estado de la mezcla se determina con 3 parámetros, esta libertad queda acotada al escoger la ecuación de estado

$$\mu = \frac{\rho + p}{n}$$

pues  $\rho$  y  $p$  quedan determinadas por las ecuaciones de campo, y la conservación de partículas determina la forma de  $n$ . Además, debemos recordar que en el caso de un fluido perfecto monocomponente, la condición de producción de entropía nula está dada en la componente temporal de la identidad de Bianchi, y no involucra una relación adicional entre las variables termodinámicas como en el caso de la mezcla.

Sobre nuestros resultados queremos mencionar algo que parece patente: el que sea precisamente la producción de entropía la restricción severa, que reduce a las métricas consideradas a la de los modelos FRW, indica cierta incompatibilidad entre los modelos cosmológicos inhomogéneos y la Ter-

modinámica, en el siguiente sentido: la segunda ley de la Termodinámica para sistemas fuera de equilibrio (no uniformes), implica la aparición de procesos que producen entropía (en nuestro caso, el proceso de mezclado) y cuyo papel es desvanecer las inhomogeneidades. Esto nos invita a considerar seriamente, la exploración de una Termodinámica relativista, pues los tientos que se han hecho en ese campo, indican la posibilidad de que un sistema alcance estados de equilibrio en los que las variables termodinámicas no han de ser uniformes.

## REFERENCIAS

- [1] Collins, C. B., 1985, *J. Math. Phys.* **26**, 2009.
- [2] Coll, B. and J. J. Ferrando, 1989, *J. Math. Phys.* **30**, 2918.
- [3] Quevedo, H. and R. A. Sussman, 1995, *J. Math. Phys.* **36**, 1365.
- [4] Quevedo, H. and R. A. Sussman, 1995, *Class. Quantum Grav.* **12**, 859.
- [5] Krasinski, A., H. Quevedo and R. A. Sussman, 1997, *J. Math. Phys.* **38**, 2602.

## BIBLIOGRAFÍA

Callen, H. B., 1985, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Second Edition. John Wiley and Sons.

Choquet-Bruhat, Y., C. De Witt-Morette and M. Dillard-Bleick, 1982, *Analysis, Manifolds and Physics*, Revised edition, North-Holland.

García-Colín Scherer, L., 1989, *Termodinámica de Procesos Irreversibles*, Universidad Autónoma Metropolitana, México.

de Groot, S. R. and P. Mazur, 1984, *Non-equilibrium Thermodynamics*, Corrected republication, Dover.

Haase, R., 1990, *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Corrected republication, Dover.

Hughston, L. P. and K. P. Tod, 1990, *An Introduction to General Relativity*, London Mathematical Society Student Texts.

Islam, J. N., 1992, *An Introduction to Mathematical Cosmology*, Cambridge University Press.

Krasinski, A., 1993, *Physics in an inhomogeneous universe (a review)*. Polish Scientific Research Committee and Department of Applied Mathematics, University of Capetown, South Africa.

Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, 1989, *The Classical Theory of Fields*, Fourth Revised English Edition. Pergamon Press.

Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, 1993, *Fluid Mechanics*, Corrected Second Edition, Pergamon Press.

Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, 1993, *Statistical Physics Part I*, Corrected Third Edition, Pergamon Press.

Landsberg, P. T., 1990, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Corrected republication, Dover.

Misner, C. W., K. S. Thorne and J. A. Wheeler, 1973, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company.

Rindler, W., 1986, *Essential Relativity*, Revised Second Edition, Springer-Verlag.

Ryan, M. P., Jr and L. C. Shepley, 1975, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton Series in Physics.

Schutz, B., 1988, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press.

Schutz, B., 1993, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press.

Tolman, R. C., 1987, *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, Republication, Dover.

Weinberg, S., 1972, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons.

Yourgrau, W., A. van der Merwe and G. Raw, 1982, *Treatise on Irreversible and Statistical Thermophysics*, Corrected republication, Dover.