

UNIVERSIDAD

1987
01/14/87
27

T-477
H
DES
C/1

80 kg

VIBRACIONES EN LOSAS

RECOMENDACIONES PARA REGLAMENTO

HUMBERTO CONTRERAS TELLA

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

División de Estudios Superiores
de la Facultad de Ingeniería

U N A M



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VIBRACIONES

1987
01149
27

T-477
H
DES
G1

80
1 x 8

VIBRACIONES EN LOSAS

RECOMENDACIONES PARA REGLAMENTO

HUMBERTO CONTRERAS TELLA

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

División de Estudios Superiores
de la Facultad de Ingeniería

UNAM

CONTENIDO

PREFACIO	i
INTRODUCCION	1
1. VIBRACIONES EN PLACAS	
1.1 Descripción del problema	2
1.2 Modelos matemáticos	2
1.3 Métodos de solución	8
2. EXCITACIONES PRODUCIDAS POR HUMANOS	
2.1 Importancia y causas	14
2.2 Características de las excitaciones	19
2.3 Aplicación de la excitación a losas	22
2.4 Función de distribución de amplitudes máximas	27
3. ANALISIS ESTADISTICO Y OPTIMACION	
3.1 Diseño del experimento	28
3.2 Resultados estadísticos de la encuesta	29
3.3 Optimización costo-beneficio	29
4. RECOMENDACIONES PARA REGLAMENTO	
4.1 Antecedentes	35
4.2 Recomendaciones	36
4.3 Conclusiones	36
APENDICE A: Estudio numérico de la ecuación dinámica de placas	38
APENDICE B: Formato de la encuesta	42
APENDICE C: Rigidez equivalente en flexión para losas de concreto	45
APENDICE D: Deformaciones dinámicas	48
APENDICE E: Medida de la respuesta humana a vibraciones	51
APENDICE F: Referencias	53

INTRODUCCION

El objeto principal de esta tesis es el estudio de las vibraciones en losas de concreto, producidas y percibidas por seres humanos.

Al juzgar la vibración en casas y edificios, el criterio es usualmente el de comodidad; así que, aun cuando las magnitudes de vibración pueden ser bajas, el límite de molestia humana en este sentido puede no diferir mucho del límite de percepción. Así vibraciones que se consideran despreciables o aceptables en otras situaciones, por ejemplo vehículos en movimiento, pueden ser una seria molestia en edificios. La molestia se puede interpretar como distracción o interferencia en el descanso o en alguna actividad crítica, o más comúnmente, miedo de daño a la estructura o a la construcción del edificio. Podemos fijar tres criterios de exposición humana a un medio vibratorio (1):

- a. Conservación de la tranquilidad o comodidad.
- b. Conservación de la eficiencia y seguridad en el trabajo.
- c. Conservación de la salud.

En este escrito nos limitaremos al estudio de los dos primeros criterios.

1. VIBRACIONES EN PLACAS

1.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Considérese un edificio cualquiera. Las losas de concreto que forman sus elementos de piso pueden tener diversas condiciones de apoyo; en la literatura se encuentran soluciones cerradas para algunas condiciones de apoyo especiales y por tanto el problema general de vibraciones en losas de concreto requiere del uso de soluciones aproximadas. Aquí usaremos el método de Rayleigh-Ritz generalizado a elementos finitos y un método de rigidez equivalente a partir de deflexiones elásticas.

En el análisis debemos considerar los efectos del amortiguamiento, y la excitación será transitoria y aleatoria con leyes que más adelante estableceremos.

1.2 MODELOS MATEMATICOS

Dentro de la teoría clásica de placas, consideremos el rango elástico lineal; sea el espesor h de la placa, pequeño con respecto a las otras dimensiones, tomemos el plano $x-y$ como el plano medio y supongamos que las deformaciones en la dirección z son pequeñas con respecto a h . Entonces, al vibrar la placa las normales a su plano medio permanecen normales a la superficie media deformada.

Llamemos v a la deformación de la placa en el sentido del eje z ; E y ν a los módulos de Young y Poisson respectivamente.

Para obtener la energía potencial acumulada en la placa se establecen las relaciones de esfuerzo y deformación. Al sustituirlas en la expresión para la energía de deformación dan

$$dU = \frac{Eh^3}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy dz \quad (1.1)$$

donde $D = Eh^3 / \{12(1-\nu^2)\}$ es la rigidez a flexión de la placa; integrando en el volumen de la placa,

$$U = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (1.2)$$

La energía cinética de una placa vibrando transversalmente es

$$T = \frac{\rho h}{2} \iint_A \dot{v}^2 dx dy \quad (1.3)$$

donde ρh es la masa por unidad de área.

En una placa rectangular simplemente apoyada en los bordes, las deformaciones pueden tomarse como la doble serie que satisface las condiciones de frontera

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (1.4)$$

en donde los coeficientes ϕ_{mn} son funciones del tiempo.

La expresión para la energía potencial queda

$$U = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (1.5)$$

y la energía cinética,

$$T = \frac{\rho hab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\phi}_{mn}^2 \quad (1.6)$$

Tomando la primera variación del término v_{mn}

$$\delta v_{mn} = \delta \phi_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (1.7)$$

llegamos a la ecuación diferencial dinámica para vibraciones libres de placas rectangulares,

4

$$\rho h \ddot{\phi}_{mn} + \pi^4 D \phi_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = 0 \quad (1.8)$$

Su solución es

$$\phi_{mn} = C_1 \cos p t + C_2 \sin p t \quad (1.9)$$

con

$$p = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (1.10)$$

y de esta fórmula se pueden calcular las frecuencias de vibración de las placas simplemente apoyadas. Hemos incluido este desarrollo de una solución cerrada para calibrar posteriormente nuestros métodos aproximados.

El método del elemento finito resuelve la ecuación dinámica diferencial discretizada del sistema (3)

$$|M| \ddot{\{x\}} + |C| \dot{\{x\}} + |K| \{x\} = \{E(t)\} \quad (1.11)$$

en donde $|M|$, $|C|$ y $|K|$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente y P es la excitación a que está sujeto el sistema. Con las condiciones de borde adecuadas este es un problema de valores en la frontera; el método es de aplicación general y la ecuación se integra numéricamente paso a paso o se puede aplicar análisis modal. No trataremos los detalles de éste método pues se encuentra ampliamente analizado en las refs 4-7.

En general al resolver el problema de vibraciones en losas de concreto usaremos el método aproximado de rigidez equivalente que aquí presentamos. Sea el sistema dinámico de un grado de libertad representado por

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = p(t)$$

con m masa del sistema, c amortiguamiento viscoso, k rigidez y $E(t)$ excitación transitoria en el instante t .

El método propuesto consiste en reducir el problema dinámico a uno con un grado de libertad. El resultado diferirá del exacto en un valor ϵ que llamaremos error. Intentaremos que la esperanza de ϵ sea nula, de manera

$$\epsilon \stackrel{d}{=} D(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (1.13)$$

donde $D(\cdot)$ = distribución de probabilidad definida por sus dos primeros momentos.

La ecuación de movimiento de una placa se reducirá entonces a la forma

$$m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + k^* Z(t) = p^*(t) \quad (1.14)$$

donde $Z(t)$ es una coordenada generalizada

$$v(x, y, t) = \psi(x, y) Z(t) \quad (1.15)$$

Para una placa simplemente apoyada, adoptaremos la función de aproximación

$$\psi(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (1.16)$$

aun cuando puede usarse cualquier otra forma congruente con las condiciones de apoyo. Así, para una placa empotrada en sus cuatro bordes, podemos escoger la función

$$\psi(x, y) = (x^2 - a^2/4)^2 (y^2 - b^2/4)^2 \quad (1.17)$$

que satisface las condiciones de frontera

$$v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = \pm a/2 \quad (1.18)$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm b/2$$

Para una placa rectangular de dimensiones a en la dirección del eje x y b en dirección de y .

A partir de estas expresiones se pueden obtener los parámetros del sistema de un grado de libertad (8): la masa generalizada

$$m^* = \int_A m(x, y) \{\psi(x, y)\}^2 dA \quad (1.19)$$

el amortiguamiento generalizado

$$c^* = \int_A c(x, y) \{\psi(x, y)\}^2 dA \quad (1.20)$$

la rigidez generalizada

$$k^* = D \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right| \right\} dA \quad (1.21)$$

y la fuerza generalizada

$$p^* = \int_A p(x,y) \psi(x,y) dA \quad (1.22)$$

con $p(x,y)$ = carga distribuida en la placa.

En dinámica de placas no se encuentran soluciones generales sencillas para losas continuas ya que el análisis se complica por las condiciones de frontera que varían en función del estado instantáneo de todos los paneles; en estas condiciones se han usado con éxito los métodos del elemento finito (5) y de la faja finita (9,10).

Para evitar dificultades analíticas reduciremos el problema de vibraciones en placas a un solo grado de libertad. Proponemos la siguiente función de aproximación que considera un empotramiento elástico con apoyo perfecto en los bordes:

$$\psi(x,y) = \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \cos \frac{\theta x}{a} \cos \frac{\theta y}{b} \quad (1.23)$$

donde θ es un parámetro de calibración. Para valuarlo igualaremos la frecuencia natural de vibración de nuestro modelo con el valor medio de los valores de la primera frecuencia de vibración en el rango y tipo de losas de interés.

TABLA 1.1 Frecuencia natural $\omega_1^A = \{\omega_1 \ell^2 \sqrt{(\rho h/D)}\}$ para varias condiciones de frontera y continuidad.

Continuidad	Frontera	Frecuencias adimensionales		
		S-S	E-E	E-S
2x2	S-S	19.74	23.66	20.83
	E-E	23.67	27.11	24.60
	E-S	20.82	24.61	21.86
3x3	S-S	19.74	21.62	20.24
	E-E	21.64	23.39	22.10
	E-S	20.24	22.08	20.72
4x1	S-S	19.74	20.82	20.02

S: simplemente apoyada

E: empotrada

En la tabla 1.1 se citan los resultados de la primera frecuencia adimensional de placas continuas con diversas condiciones de apoyo. Estos valores los consideramos representativos y están extractados de los calculados en la ref 10.

Llamemos ω_1^A a la frecuencia natural adimensional; de la tabla 1.1 calculamos su media

$$E\{\omega_1 \ell^2 \sqrt{(\rho h/D)}\} = \omega_1^A = 22.3$$

desviación estándar

$$\omega(\omega_1^A) = 2.3 \quad (1.24)$$

y coeficiente de variación

$$V(\omega_1^A) = 2.3/22.2 = 0.1$$

siendo ω_1^A variable aleatoria; de la ec 1.13

$$\begin{aligned} \omega_1^A &= \bar{\omega}_1^A + \epsilon, & \epsilon &\stackrel{d}{=} D(0,5) \\ &\rightarrow \omega_1^A &= 22.3 + \epsilon \end{aligned} \quad (1.25)$$

La distribución de probabilidad D definida en la ec 1.13 la consideramos en el sentido de una aproximación de segundos momentos.

Con este valor de $\bar{\omega}_1^A$ resolviendo la ecuación que se obtiene de sustituir la ec 1.23 en las 1.19 y 1.21 y con

$$\bar{\omega}_1^A = \sqrt{(k^*/m^*)} \quad (1.26)$$

el parámetro en la ec 1.23 es $\theta = 2.11$ y las ecs 1.19 y 1.20 toman la forma

$$m^* = 8.212 \times 10^{-4} \rho h a^5 b^5 \quad (1.27)$$

$$c^* = 8.212 \times 10^{-4} a^5 b^5 c \quad (1.28)$$

la rigidez generalizada es difícil de resolver analíticamente,

$$k^* = D \int_A \left\{ (\nabla^2 \psi)^2 + 2(1-\nu) \left| \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right| \right\} dA \quad (1.29)$$

la integramos numéricamente en el apéndice A para distintas relaciones a/b. La ec 1.22 se transforma en

$$p^* = 1.824 \times 10^{-2} \int_A p(x,y,t) dA \quad (1.30)$$

donde p es en general función del tiempo y del punto (x,y) de la placa; por ejemplo considerando p constante en toda la placa,

$$p^* = 1.824 \times 10^{-2} a b p(t) \quad (1.31)$$

[†] Apéndice A

En este caso la ec 1.14 se puede escribir como

$$\ddot{Z}(t) + 2\xi\omega_1\dot{Z}(t) + \omega_1^2 Z(t) = \frac{22.22}{a^{1/2} b^{1/2} h} p(t) \quad (1.32)$$

siendo ξ el coeficiente de amortiguamiento crítico y ω_1 la frecuencia natural.

En general con $E^* = E^*(x, y, t) = p^*(x, y, t)/m^*$ se tiene la ecuación dinámica de la losa con un grado de libertad

$$\ddot{Z}(t) + 2\xi\omega_1\dot{Z}(t) + \omega_1^2 Z(t) = E^* \quad (1.33)$$

1.3 METODOS DE SOLUCION

El problema es hallar la respuesta a una excitación dada en un sistema lineal. Antes de considerar excitación aleatoria veamos los métodos que describen la respuesta de un sistema a excitación determinista (11). Dado que el problema es lineal se aplica el principio de superposición y se puede reducir el problema a una entrada y una salida



Para resolverlo se pueden seguir al menos tres métodos:

1. Análisis clásico de entrada-salida en el dominio del tiempo.
2. Análisis clásico de entrada-salida en el dominio de la frecuencia.
3. Análisis en el dominio del tiempo con modelos de espacio de estados.

Los dos primeros son versiones de una misma idea y análogos a los métodos de filtrado. La solución por los métodos 1 y 2 se resume en los siguientes pasos

- a) Elegir una familia elemental de entrada, que sea fácil de encontrar y cuya combinación lineal pueda expresar la función de la excitación; de preferencia funciones ortogonales para simplificar la solución.
- b) Encontrar las funciones elementales de salida.
- c) Expresar la excitación como combinación lineal de las funciones elementales de entrada; la respuesta deseada es la misma combinación lineal de las correspondientes funciones elementales de salida.

En el dominio del tiempo la función elemental de entrada puede ser la delta de Dirac

$$\delta_t(\tau) = \delta(t-\tau) \quad (1.34)$$

La función elemental de salida es entonces la respuesta $h_t(\tau)$.

Si expresamos la excitación como

$$x_\tau(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t) x(t) dt \quad (1.35)$$

la respuesta asociada es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\tau(t) x_\tau d\tau \quad (1.36)$$

donde x_τ es la transformada generalizada de Fourier de $x(t)$.

En el dominio de la frecuencia la función elemental de entrada es la exponencial compleja

$$g_\omega(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \text{sen } \omega t \quad (1.37)$$

con función elemental de salida de la forma

$$H_\omega g_\omega(t) = H(\omega) e^{i\omega t} \quad (1.38)$$

Para una ω dada, $H(\omega)$ es una constante compleja; como función compleja de ω es la función de transferencia del sistema. La descomposición de la excitación es

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} X_\omega d\omega \quad (1.39)$$

La función de salida $y(t)$ es por tanto

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} X_\omega d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Y(\omega) d\omega \quad (1.40)$$

siendo $Y(\omega) = H(\omega) X_\omega$ la descomposición en frecuencias de $y(t)$. $H(\omega)$ y $h(t)$ forman un par de Fourier (12) igual que $X_\omega = X(\omega)$ y $x(t)$.

Antes de pasar a la teoría estocástica de filtrado lineal, consideremos la respuesta de un oscilador con un grado de libertad para el cual la ecuación diferencial de entrada-salida es

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_1 \dot{y}(t) + \omega_1^2 y(t) = x(t) \quad (1.41)$$

La solución homogénea es

$$y_h(t) = J \exp(-\xi\omega_1 + i\omega_1\sqrt{1-\xi^2})t \quad (1.42)$$

con J = constante compleja arbitraria. La solución particular de la ec 1.41 para $x(t) = \exp(i\omega t)$ es

$$y_p(t) = H(\omega)e^{i\omega t} \quad (1.43)$$

donde

$$H(\omega) = (\omega_1^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_1\omega)^{-1} \quad (1.44)$$

es la función de transferencia del sistema.

Suponiendo conocidas las condiciones iniciales $y(t)$, $\dot{y}(t)$ en $t=t_0$, se encuentra que la respuesta es (13)

$$y(t) = J \exp(-\xi\omega_1 + i\omega_1\sqrt{1-\xi^2})t + \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)X(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \quad (1.45)$$

J se calcula a partir de las condiciones iniciales.

Cuando $x(t)$ es un proceso aleatorio se debe diferenciar entre varios casos: $x(t)$ estacionario periódico, estacionario aperiódico, pseudoestacionario y no estacionario. Se demuestra que los resultados para $x(t)$ estacionario se acercan a los de una entrada determinista, en tanto que se requiere de una teoría más general para manejar los casos transitorios (13). Un proceso pseudoestacionario es aquel que con una transformación se convierte en estacionario.

Sea

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{in\omega_1 t} \quad ; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.46)$$

una función aleatoria periódica estacionaria con media cero. $\{X_n\}$ es la secuencia de variables complejas aleatorias no correlacionadas; si $x(t)$ es real, $X_{-n} = X_n^*$.

Las correspondientes funciones de densidad espectral media de potencia y de autocovariancia periódica de $x(t)$ son

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{|X_n|^2\} \delta(\omega - n\omega_1) \quad (1.47)$$

$$B_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{|X_n|^2\} e^{in\omega_1\tau} \quad (1.48)$$

En particular,

$$\sigma_x^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{|X_n|^2\} \quad (1.49)$$

La salida de un sistema lineal invariante en el tiempo con función de transferencia $H(\omega)$ es también estacionaria y periódica con período T . Por tanto se puede representar como una serie aleatoria de Fourier

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n H(n\omega_1) e^{in\omega_1 t} \quad (1.50)$$

o sea $\{Y_n\} = X_n H(n\omega_1)$. Por tanto las funciones de densidad espectral media de potencia y de autocovariancia de la respuesta son

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{|Y_n|^2\} \delta(\omega - n\omega_1) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (1.51)$$

$$B_{yy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{|Y_n|^2\} e^{in\omega_1\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{|X_n|^2\} |H(n\omega_1)|^2 e^{in\omega_1\tau} \quad (1.52)$$

y la variancia,

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{|X_n|^2\} |H(n\omega_1)|^2 \quad (1.53)$$

En caso de respuesta transitoria a una excitación pseudoestacionaria o transitoria se puede hacer uso de la función generalizada de densidad espectral media de potencia (14) que se define como la doble transformada de Fourier de la función de autocovariancia $B_{zz}(t_1, t_2)$

$$S_{zz}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} B_{zz}(t_1, t_2) e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2 \quad (1.54)$$

con su transformada inversa

$$B_{zz}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} S_{zz}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (1.55)$$

en donde t_1 y t_2 son dos valores del tiempo.

La función generalizada de densidad espectral media de potencia de la respuesta $y(t)$,

$$S_{yy}(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1) H^*(\omega_2) S_{xx}(\omega_1, \omega_2) \quad (1.56)$$

que es la relación básica excitación-respuesta en el dominio de la frecuencia para procesos no estacionarios.

Existe una dificultad operacional al utilizar la densidad espectral generalizada para caracterizar procesos de entrada-salida, que proviene del difícil cálculo de la siguiente doble convolución

$$B_{yy}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega_1, \omega_2) H(\omega_1) H^*(\omega_2) e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (1.57)$$

para simplificarlo se han ideado caracterizaciones espectrales alternas (15,16) que no trataremos aquí.

En el caso particular de la respuesta a una excitación $x(t)$ transitoria de ruido blanco, consideremos la ec 1.41; en t el estado del sistema puede ser representado por

$$z_1(t) = y(t) \quad (1.58)$$

$$z_2(t) = \dot{z}_1(t) = \dot{y}(t)$$

Podemos escribir la ec 1.41 en términos de z_1 y z_2 como un sistema de dos ecuaciones de orden uno:

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t) \quad (1.59)$$

$$\dot{z}_2(t) = -2\xi\omega_1 z_2(t) - \omega_1^2 z_1(t) + x(t)$$

o sea en forma matricial

$$z(t) = Az(t) + Bx(t) \quad (1.60)$$

en donde

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix}; A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -2\xi\omega_1 \end{vmatrix}; B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

El concepto se puede extender a ecuaciones diferenciales de orden n .

Podemos considerar la ec 1.60 en un estado inicial de segundos momentos con valor medio y matriz de covariancia Σ_0 dados por

$$\bar{z}(t_0) = z_0 \quad ; \quad (\text{la barra superior denota esperanza})$$

$$\Sigma_z(t_0) = \Sigma_0$$

y la excitación $x(t)$ con valor medio y función de covariancia tal que se pueda representar como

$$\bar{x}(t) \quad ; \quad B_{xx}(t_1, t_2) = \Gamma(t_1)\delta(t_1 - t_2) \quad (1.62)$$

Con estas condiciones iniciales, el desarrollo en el tiempo del valor medio del estado (estado medio) y de la matriz de covariancia del estado se rigen por las siguientes ecuaciones diferenciales (17)

$$\dot{\bar{z}}(t) = A\underline{z}(t) + B\underline{x}(t) \quad (1.63)$$

$$\dot{\Sigma}_z(t) = A\underline{\Sigma}_z(t) + \underline{\Sigma}_z(t)A^T + B\underline{\Gamma}(t)B^T$$

La función de amplitud de entrada $\Sigma(t)$ en general varía lentamente en el tiempo y puede ser aproximada por una constante en cada paso de la integración numérica que usualmente se emplea para resolver el problema por este método.

2. EXCITACIONES PRODUCIDAS POR HUMANOS

2.1 IMPORTANCIA Y CAUSAS

Los edificios pueden ser puestos en vibración por diversos tipos de fuerzas, las que dividimos en continuas o transitorias. Fuentes externas incluyen el tránsito, vibración transmitida por el suelo, actividad industrial cercana, sismo y viento. Las causas internas pueden incluir la maquinaria dentro del mismo edificio, pasos y otras excitaciones causadas por la actividad humana en general.

Repetimos que el criterio para juzgar vibraciones en edificios es usualmente el de comodidad. Los límites de percepción y de molestia son casi iguales (en el rango de 0.001 a 0.01g, según la ref 1). Estos problemas de vibraciones generalmente están asociados a ruido causado por la misma fuente y por tanto deben tratarse como parte del mismo medio ambiente.

Estudios realizados en el tema cubren una gran variedad de movimientos, vibraciones simples en frecuencias desde muy baja hasta muy alta, aceleraciones de impulso y aun "sacudida" (derivada de la aceleración con respecto al tiempo; en inglés, "jerk").

La propiocepción (que forma parte del mecanismo de kinestesis, que son los medios por los cuales el individuo conoce las posiciones y movimientos corporales) al integrar las sensaciones corporales da el "equilibrio" del individuo lo que le permite percibir las vibraciones, a las cuales el cuerpo humano es muy sensible (18).

Como resultado de esta sensibilidad y por su falta de experiencia las personas sobrestiman la intensidad de la vibración. Los efectos reales que producen las vibraciones en el cuerpo humano incluyen cambios en el ritmo cardíaco, presión arterial, rapidez de los reflejos y aun en la agudeza visual; fatiga, náuseas y mareos y aún la muerte. Existen enfermedades asociadas con ambientes en que existen máquinas vibratorias.

Se han realizado muchas pruebas para determinar efectos de vibraciones en humanos, el estudio clásico de Reiher y Meister (19) consistió en exponer a 10 personas de 20 a 37 años de edad a frecuencias de 3 a 70 ciclos por segundo con amplitudes de 0.01 mm a 10 mm en una mesa de pruebas y en varias posiciones, la fig 2.1 muestra los resultados para personas de pie o sentadas. Las intensidades mostradas van desde "no perceptibles" hasta "muy molestas", sin embargo esta escala no es la única que se utiliza.

Goldman (20) con menos niveles de sensibilidad obtiene las curvas de resultados que muestra la fig 2.2 y en forma diferente la fig 2.3 en la cual se observa la forma complicada de las curvas que refleja la naturaleza de las reacciones. Otros investigadores (21) han propuesto el uso de unidades de vibración "VIBRARS", "PAL" (utilizado en las especificaciones DIN[†]4150), escalas sísmicas, etc.

Wiss y Parmelee en una publicación reciente (22) comparan resultados obtenidos con excitación servocontrolada con los de Reiher y Meister; en las figs 2.4 a 2.7 se muestran las curvas de respuesta que relacionan las variables FA =frecuencia en Hz x amplitud en mm, ξ =relación de amortiguamiento y R, número arbitrario asignado a cada nivel de sensibilidad en la siguiente forma:

Nivel de Respuesta	R	Clasificación de vibración
	1	Imperceptible
	2	Ligeramente perceptible
	3	Normalmente perceptible
	4	Fuertemente perceptible
	5	Severa

La ecuación de predicción para vibraciones amortiguadas similares a las producidas por un pie al caminar, ajustada con mínimos cuadrados, es

$$R = 2.156 \left(\frac{FA}{\xi^{0.217}} \right)^{0.265} \quad (2.1)$$

para el caso de excitación armónica sin amortiguar, de la misma ref 22, se obtiene

$$R = 3.138(FA)^{0.24} \quad (2.2)$$

estas ecuaciones se comparan en el trabajo mencionado con los resultados experimentales y muestran buena correlación. El coeficiente de variación es 10.1% para la ec 2.1.

[†]Deutsche Industrie Normen (Especificaciones de Alemania Occidental)

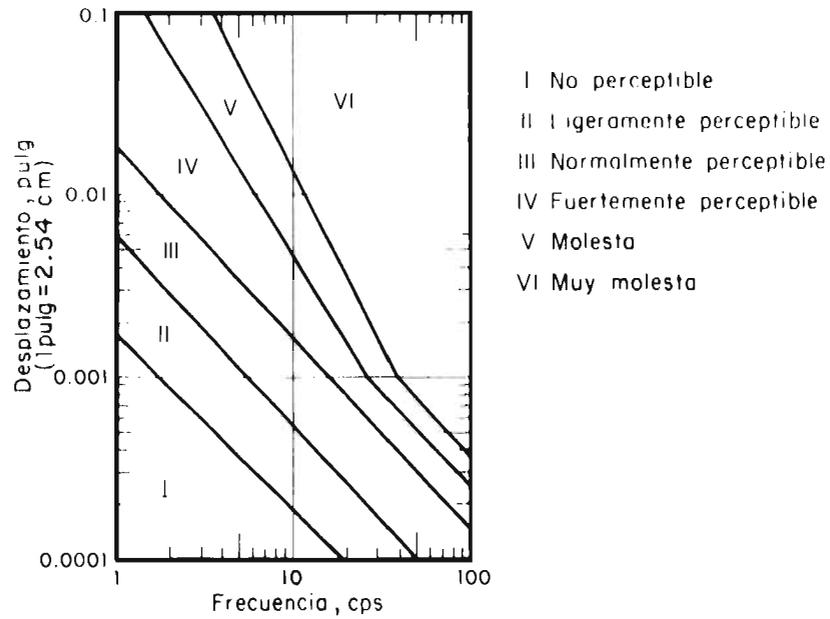


Fig 2.1 Respuesta humana a vibración estacionaria, vibración vertical. Según Reiher y Meister

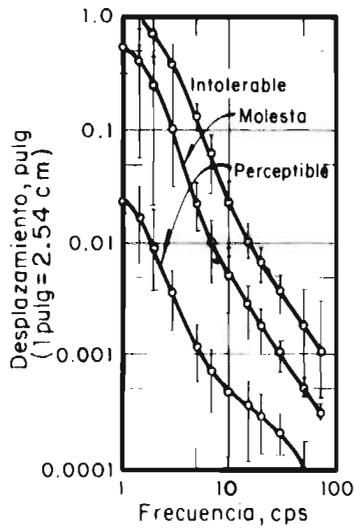


Fig 2.2. Respuesta subjetiva del cuerpo humano a vibraciones. Según Goldman

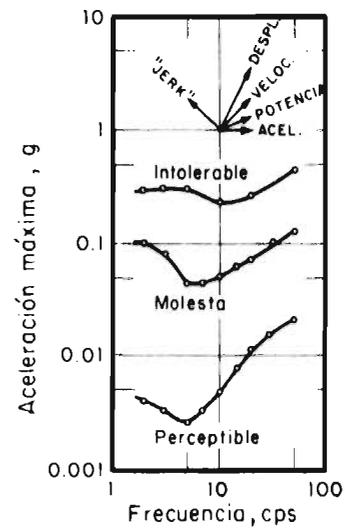


Fig 2.3. Respuesta subjetiva del cuerpo humano a aceleraciones. Según Goldman

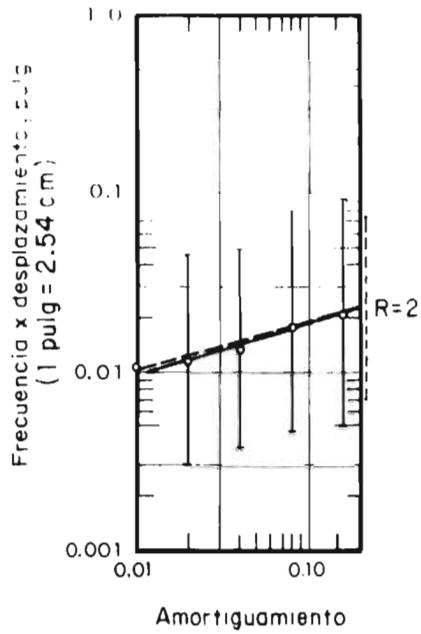


Fig 2.4 Vibraciones ligeramente perceptibles

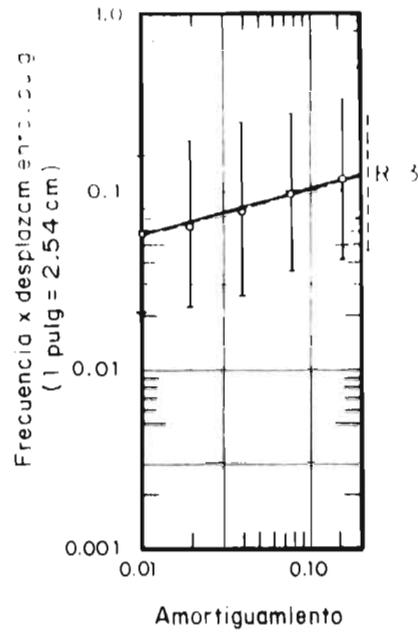


Fig 2.5 Vibraciones normalmente perceptibles

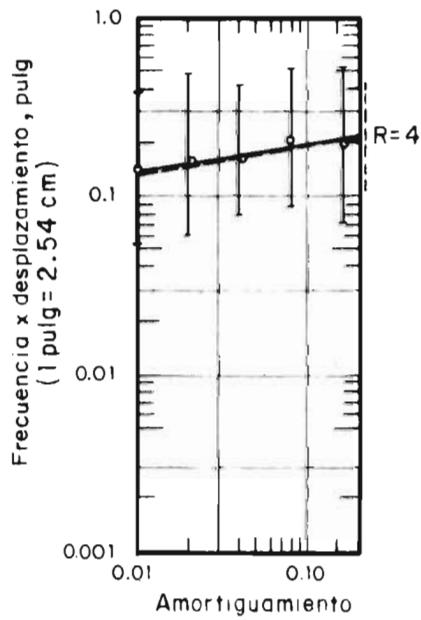


Fig 2.6 Vibraciones fuertemente perceptibles

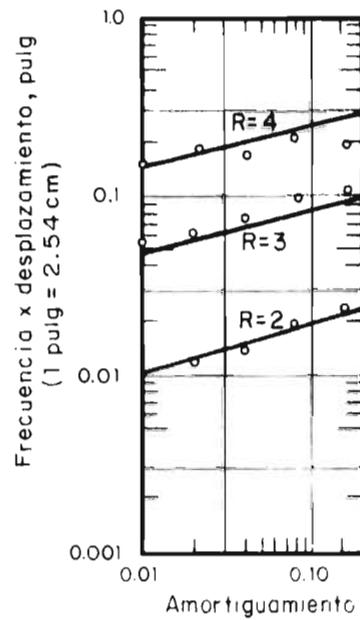


Fig 2.7 Curvas del modelo matemático

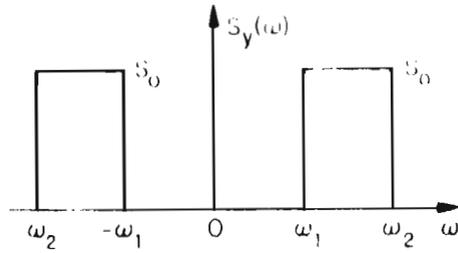


Fig 2.8 Densidad espectral de un proceso de banda ancha limitada

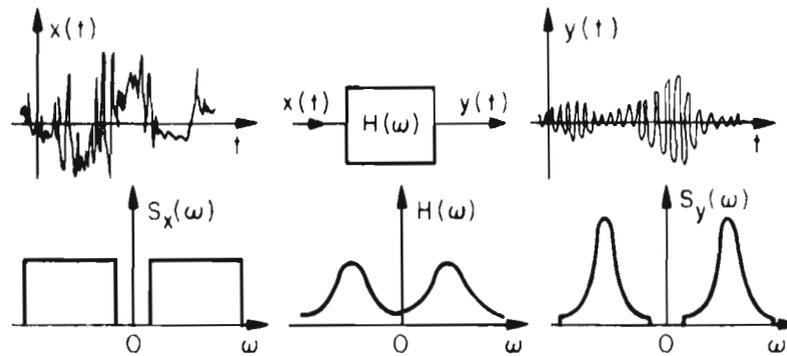


Fig 2.9 Respuesta en banda ñgosta de un sistema excitado en banda ancha

En cuanto a las excitaciones producidas por personas se han medido coeficientes de impacto (23) ajustándose con una distribución logarítmico-normal con valor medio $\bar{I}=2.6$ y $\text{Var}(I)=4.4$

Para los casos particulares estudiados, las mediciones del coeficiente de impacto incluyen las siguientes actividades:

Coeficiente de impacto I	Actividad
3.0	Grupos de personas bailando rítmicamente en las habitaciones destinadas a recepción, en el día de máxima carga.
3.9	Brincos normales de hombre.
1.7	Sentarse y pararse de una silla.

Para el caso correspondiente a bailes se ha observado (23) que el 60% conversan o están sentados mientras que el 40% restante baila.

2.2 CARACTERISTICAS DE LAS EXCITACIONES

Las excitaciones de interés producidas por personas son:

- A. Al caminar en forma normal.
- B. Al brincar, moverse, sentarse o pararse.
- C. En bailes y reuniones sociales.

De estas necesitamos conocer en qué zona actúan, intensidad, tiempo inicial y duración, frecuencia, etc.

Consideremos dos modelos de excitación; el primero que llamaremos excitación normal y que corresponde a los casos A y B, el segundo la excitación extraordinaria que es el caso C. En ambos modelos proponemos procesos gaussianos de banda ancha.

Un sistema excitado por ruido de banda ancha con media cero se esquematiza en la fig 2.8; para este proceso la función de autocorrelación es (13)

$$R(\tau) = 2S_0 (\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau) / \tau \quad (2.3)$$

y el valor medio cuadrático

$$R(0) = 2S_0 (\omega_2 - \omega_1) \quad (2.4)$$

es finito, siendo S_0 la intensidad de la densidad espectral.

La respuesta $y(t)$ será un proceso aleatorio con espectro como se muestra en la fig 2.9, con densidad espectral

$$S_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{S_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi\omega_n^2\omega^2} & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & |\omega| \text{ fuera de ese intervalo} \end{cases} \quad (2.5)$$

El valor medio cuadrático de la respuesta es

$$E\{y^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega) d\omega \quad (2.6)$$

en la ref 13 se da una solución cerrada para esta integral, obtenida a partir de una expansión en fracciones parciales,

$$E\{y^2\} = \frac{\pi}{2} \frac{S_0}{\xi\omega_n^3} \{T(\omega_2/\omega_n) - T(\omega_1/\omega_n)\} \quad (2.7)$$

donde

$$T(W) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{2\xi W}{1-W^2} + \frac{\xi}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{1+W^2+2W\sqrt{1-\xi^2}}{1+W^2-2W\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.8)$$

Para este proceso la función de densidad de probabilidad de la envolvente de los máximos locales que sobrepasan un nivel α , es

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma_y^2} \exp(-\alpha^2/2\sigma_y^2) \quad 0 \leq \alpha < \infty \quad (2.9)$$

que es la distribución de Rayleigh, y como la media del proceso es cero:

$$\sigma_y^2 = E\{y^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega) d\omega \quad (2.10)$$

Observando la ec 2.5 los parámetros de la excitación que hemos escogido como modelo son $\Xi = \{S_0, \omega_1, \omega_2\}$.

Las frecuencias de corte inferior ω_1 y de corte superior ω_2 se eligen para que incluyan las frecuencias de excitación del sistema; para los casos en consideración tomaremos:

	Frecuencias (rad/s)		Períodos (s)	
	ω_1	ω_2	T_1	T_2
Excitación normal, caso 1	3	630	2.1	0.01
Excitación extraordinaria, caso 2	3	16	2.1	0.4

Usaremos los datos obtenidos en la ref 21 en el primer caso de carga; la esperanza de la carga viva debida a personas en unidades de habitación y en oficinas es 100 kg/m^2 en áreas de recepción y trabajo y la desviación estándar es $400/\sqrt{A_1}$, donde A_1 es el área de influencia.

En el caso de carga extraordinaria el modelo de carga viva que tomamos de las ref 24 y 25 tiene los siguientes parámetros:

Carga media de una sola celda	$m_Q = 65.7 \text{ kg}$
Número medio de cargas por celda	$m_R = 5$
Variación de una sola carga	$\sigma_Q^2 = 184.7 \text{ kg}$
Variación del número de cargas por celda	$\sigma_R^2 = 4$
Período de recurrencia para carga extraordinaria	$T_e = 1 \text{ año}$

Número medio de celdas de carga en función del área de influencia A_1

$$9 \text{ m}^2 \leq A_1 < 40 \text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad \lambda_m = 0.184 A_1^{0.92} +$$

$$40 \text{ m}^2 < A_1 \quad \rightarrow \quad \lambda_m = \sqrt{(A_1 - 15.3)/0.84}$$

De la ref 26 tomamos estas relaciones que nos serán útiles:

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - m_X^2 \quad \rightarrow \quad E\{X^2\} = \sigma_X^2 + m_X^2 \quad (2.11)$$

$$E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{XY}^2 = m_X^2 \sigma_Y^2 + m_Y^2 \sigma_X^2 + \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \quad (2.13)$$

Para los valores estadísticos que se proponen, en el caso de carga normal, con las ecs 2.12 y 2.13 calculamos la esperanza y la desviación estándar

$$m_1 = 260 \text{ kg/m}^2 \quad (2.14)$$

$$\sigma_1 = 210 + 1340/A_1, \text{ kg/m}^2$$

si consideramos m_1 como parte del peso de la losa, la media del proceso será cero; entonces la desviación estándar es

$$\sigma_1^* = 1340/A_1, \text{ kg/m}^2 \quad (2.15)$$

†Ajuste por mínimos cuadrados de los datos de la ref 25.

En carga extraordinaria para el intervalo $9 \leq A_1 \leq 40 \text{ m}^2$,

$$m_2 = m_Q \cdot m_R \cdot m_I \cdot \lambda_m = 65.7 \times 5 \times 2.6 \times 0.184 A_1^{0.92} = 157 A_1^{0.92} \quad (2.16)$$

aplicando la ec 2.13 iterativamente,

$$\sigma_2 = 156 A_1^{0.92} \quad (2.17)$$

Si la media de la carga es cero, es decir con $m_Q = 0$,

$$\sigma_2^* = 727 A_1^{0.92} \quad (2.18)$$

Consideremos ahora $A_1 < 40 \text{ m}^2$; el valor medio de la carga por metro cuadrado es

$$m_2 = m_Q \cdot m_R \cdot m_I \cdot \lambda_m = 932 \sqrt{(A_1 - 15.3)} \quad (2.19)$$

y en este intervalo la desviación estándar para la carga extraordinaria es

$$\sigma_2 = 931 \sqrt{(A_1 - 15.3)} \quad (2.20)$$

Para el caso en que $m_Q = 0$ o sea para un proceso con media cero,

$$\sigma_2^* = 267 \sqrt{(A_1 - 15.3)} \quad (2.21)$$

A_1 es el área de acción de la carga de interés (27) que en este caso es el área del tablero de la losa: $A_1 = ab$, donde a, b son el ancho y el largo del tablero respectivamente.

2.3 APLICACION DE LA EXCITACION A LOSAS

La excitación que hemos definido en el inciso anterior es una fuerza distribuida equivalente; la respuesta que deseamos obtener son desplazamientos o amplitudes en un proceso estacionario gaussiano. Para simplificar el análisis de la losa consideramos que el valor medio de la carga es cero; la carga media la asignamos como parte del peso de la losa; en estas condiciones los parámetros $\Xi_i^* = \{S_{oi}^*, \omega_{1i}, \omega_{2i}\}$, $i = 1, 2$ = casos de carga; son

$$\Xi_1^* = \{1425/(ab)^2, 3, 630\}$$

$$\Xi_2^* = \{78(ab)^{1.84}, 3, 16\} \quad 9 \text{ m}^2 \leq ab \leq 40 \text{ m}^2 \quad (2.22)$$

$$\Xi_2^* = \{2740(ab - 15.3), 3, 16\} \quad ab > 40 \text{ m}^2$$

La respuesta $y(t)$ tendrá también media cero.

Estamos tomando la excitación como fuerza; debemos convertirla a aceleración para obtener $y(t)$ como desplazamiento relativo con respecto a los apoyos. De la segunda ley de Newton, $f = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = f/m$ que es aceleración como E^* en la ec 1.33, con unidades: $H(\omega)$ $\{cm^{-2}\}$, E^* $\{cm \cdot s^{-2}\}$ y Z $\{cm\}$.

Como hipótesis simplificatoria, consideramos la masa generalizada del sistema constante en el área; la ec 1.19 se simplifica a

$$m^* = m \int_A \psi^2 dA \quad (2.23)$$

con la aproximación de segundos momentos dada por la ec A.13

$$m^* = 8.46 \times 10^{-4} (ab)^4 m \quad (2.24)$$

en donde m es la masa del sistema que incluye los efectos de peso propio y de carga viva CV. Sin considerar la incertidumbre en m el valor del coeficiente de variación de la ec 2.24 es 10%; este valor se obtuvo de aplicar la ec A.14.

La masa del sistema es una variable aleatoria; le asignamos por conveniencia la distribución normal (29), con parámetros calculados con la ayuda de la relación

$$m = (\rho h + CV/g) ab \quad (2.25)$$

Con $\rho = (2.4 \text{ ton}/m^3)/g$, g la aceleración de la gravedad y a , b deterministas. El peralte de la losa se tomará con distribución normal como en la ref 29 Para dimensiones en centímetros sus estadísticas son:

$$\bar{h} = h_n + 0.6 \quad (2.26)$$

$$\sigma_h = 0.9$$

en donde h_n es el peralte nominal de la losa conforme a los planos de construcción.

Hemos aceptado en el caso de carga normal los valores estadísticos de la ref 28:

$$\bar{CV} = 100 \text{ kg}/m^2 \quad (2.27)$$

$$\sigma_{CV} = 400/\sqrt{A_1} \quad A_1 = ab$$

Para estos valores con las ecs 2.26 y 2.27 sumando las medias y usando la ec 2.25 obtenemos el valor medio de la masa del sistema en condición de carga normal:

$$\bar{m}_1 = (2.45 \times 10^{-3} h_n + 1.17 \times 10^{-1}) ab \quad (2.28)$$

la desviación estándar de la masa del sistema en esta condición de carga es la raíz cuadrada de la suma de las variancias de las variables aleatorias, que suponemos independientes:

$$\sigma_{m_1} = (4.85 \times 10^{-4} h_n^2 + 1.66 \times 10^{-1} / ab)^{1/2} ab \quad (2.29)$$

Los parámetros de la masa generalizada del sistema se obtienen aplicando las ecs 2.12 y 2.13:

$$\bar{m}_1^* = (2.07 \times 10^{-5} h_n + 9.86 \times 10^{-5}) (ab)^5 \quad (2.30)$$

$$\sigma_{m_1}^* = (3.55 \times 10^{-10} h_n^2 + 4.10 \times 10^{-11} h_n + 8.37 \times 10^{-13} + 1.20 \times 10^{-7} / ab)^{1/2} (ab)^5$$

en unidades $\{kg \cdot cm^{-1} \cdot s^2\}$; para a, b en metros y h_n en centímetros.

Carga viva extraordinaria. De las ecs 2.15 y 2.17 y aplicando la ec 2.25 obtenemos en el intervalo $9 \text{ m}^2 \leq ab \leq 40 \text{ m}^2$

$$\bar{m}_2 = \{2.45 \times 10^{-2} h_n + 1.60 \times 10^{-1} (ab)^{0.92} + 1.47 \times 10^{-2}\} ab \quad (2.31)$$

$$\sigma_2 = \{4.85 \times 10^{-4} + 2.56 \times 10^{-2} (ab)^{1.84}\}^{1/2} ab$$

y para $ab > 40 \text{ m}^2$,

$$\bar{m}_2 = \{2.45 \times 10^{-2} h_n + 9.50 \times 10^{-1} / (ab - 15.3) + 1.47 \times 10^{-2}\} ab \quad (2.32)$$

$$\sigma_2 = \{4.85 \times 10^{-4} + 9.01 \times 10^{-1} (ab - 15.3)\}^{1/2} ab$$

Para esta carga extraordinaria, considerando ρ , h y g como en el caso anterior, en forma similar obtenemos para el intervalo $(9 \text{ m}^2, 40 \text{ m}^2)$

$$\bar{m}_2^* = \{2.07 \times 10^{-5} h_n + 1.35 \times 10^{-4} (ab)^{0.92} + 1.24 \times 10^{-5}\} (ab)^5 \quad (2.33)$$

cuando $ab > 40 \text{ m}^2$,

$$\bar{m}_2^* = (2.07 \times 10^{-5} h_n + 8.04 \times 10^{-4} \sqrt{(ab-15.3)} + 1.24 \times 10^{-5})(ab)^5 \quad (2.34)$$

La desviación estándar para ambos intervalos es:

$$\sigma_2^* = (7.54 \times 10^{-7} \sigma_2^2 + 7.16 \times 10^{-9} \bar{m}_2^2)^{1/2} (ab)^4 \quad (2.35)$$

con \bar{m}_2 y σ_2 de las ecs 2.31 y 2.32 y en las mismas unidades de la ec 2.30.

El amortiguamiento c y el coeficiente de amortiguamiento crítico ξ se relacionan de la siguiente manera:

$$c/m = c^*/m^* = 2\xi\omega_n \quad (2.36)$$

Se ha observado que el coeficiente de amortiguamiento crítico depende poco de la frecuencia o amplitud de vibración para amortiguamiento del tipo histerético (36). Las mediciones experimentales del coeficiente de amortiguamiento en estructuras de concreto se han efectuado principalmente en edificios (30 a 35); de la ref 35 tomamos las estadísticas calculadas para el coeficiente de amortiguamiento crítico en edificios de concreto sujetos a vibraciones:

	Deformaciones		
	pequeñas	grandes	
$\bar{\xi}$	4.26%	6.63%	(2.37)
σ_{ξ}	3.23%	17.99%	
v_{ξ}	1.52%	1.28%	

en donde v es el tercer momento central dividido entre el cubo de la desviación estándar, que llamaremos coeficiente de asimetría ("skewness" en inglés). Usaremos estos parámetros para el problema de vibración en losas.

El histograma de estos valores del coeficiente de amortiguamiento se ajusta a distribuciones del tipo log-normal o gamma, que son asimétricas con respecto a la media; por tanto usaremos el coeficiente de asimetría en una aproximación de terceros momentos (37), conservando el ajuste.

De esta misma ref 37, para variables estocásticamente independientes, la media se puede calcular con la relación

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{z}_1}{z} \frac{\bar{z}_2}{z} \dots \frac{\bar{z}_n}{z} \quad (2.38)$$

y el coeficiente de variación en las mismas condiciones

$$V_Z \doteq \{(1 + V_{Z_1}^2)(1 + V_{Z_2}^2) \cdots (1 + V_{Z_n}^2) - 1\}^{1/2} \quad (2.39)$$

donde \doteq significa igual salvo términos de orden superior, \bar{Z}_i y V_{Z_i} la esperanza y el coeficiente de variación calculados como si la variable Z_i fuese la única aleatoria, con todas las demás iguales a sus valores esperados y $z = Z(\text{esperanzas de las } n \text{ variables aleatorias})$.

En el caso de datos con coeficiente de esviamiento cero o cuando no exista información al respecto, usaremos las ecs A.13 y A.14.

Con los datos de la ec 2.37 para el coeficiente de amortiguamiento obtenemos que dentro de la aproximación de terceros momentos el valor medio es

$$Z \doteq \frac{Z(\bar{\xi} + 2\sigma_\xi) + 4Z(\bar{\xi} - \sigma_\xi/2)}{5} \quad (2.40)$$

y la desviación estándar

$$\sigma_Z \doteq 0.4\{Z(\bar{\xi} + 2\sigma_\xi) - Z(\bar{\xi} - \sigma_\xi/2)\} \quad (2.41)$$

En el apéndice C se obtiene la rigidez D^* equivalente en flexión para losas de concreto, considerando el efecto del refuerzo y en cierta forma el agrietamiento. Si llamamos D_g al módulo de rigidez en flexión de la sección llena,

$$D_g = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.42)$$

en el Distrito Federal el reglamento de construcciones establece el valor del módulo de elasticidad del concreto: $E = 10000\sqrt{f'_c}$, así para un valor del módulo de Poisson, $\nu = 0.2$

$$D_g = 868h^3 \cdot \sqrt{f'_c} \quad (2.43)$$

en donde h es el peralte de la losa y f'_c la resistencia nominal del concreto.

De acuerdo con las hipótesis del apéndice C, usaremos la rigidez en flexión D^* , de la relación

$$D^* = \min(D_g, D_e) \quad (2.44)$$

la rigidez equivalente que se deduce en el apéndice C.

$$D_e = 2 \times 10^7 \frac{f_c^2 h^3}{M_{\max}} + d^2 \left\{ \sqrt{f_c} - 2 \times 10^{11} \frac{f_c^2 h^6}{M_{\max}} \right\} \left\{ 180d + 53 \left(\frac{200}{\sqrt{f_c}} - 1 \right) A_{s\text{pral}} \right\} \quad (2.45)$$

donde M_{\max} es el momento máximo en la losa en el estado en que se miden las deformaciones, $A_{s\text{pral}}$ es el refuerzo al centro del claro en la dirección del claro corto, d el peralte efectivo de la losa y h , f_c' tienen los significados usuales.

2.4 FUNCION DE DISTRIBUCION DE AMPLITUDES MAXIMAS

En procesos gaussianos como los que estamos estudiando la distribución de probabilidad de los máximos es la de Rayleigh, con función de densidad de probabilidad dada por la ec 2.9 y función acumulativa de probabilidad

$$F(\alpha) = 1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_y^2}} \quad (2.46)$$

Sustituyendo en la ec 2.6 los valores obtenidos en el inciso anterior y con un criterio de aproximación de segundos o terceros momentos, podemos calcular $E\{y^2\}$, que es igual a la variancia, ya que la media vale cero, o sea, de la ec 2.11,

$$E\{y^2\} = \sigma_y^2 + 0 = \sigma_y^2 \quad (2.47)$$

3. ANALISIS ESTADISTICO Y OPTIMACION

3.1 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

Se planeó un experimento de muestreo para obtener datos relacionando la respuesta humana ante vibraciones en losas con el costo adicional que están dispuestos a pagar los interesados con el fin de evitar estas molestias.

La población dentro de la que se escoge la muestra son todos los usuarios de casas y edificios en el área de aplicación del reglamento de construcción del Distrito Federal; para efectos prácticos la consideramos infinita.

Como instrumento de medida utilizamos un cuestionario que se distribuyó por correo o personalmente. En el apéndice B presentamos este cuestionario en su forma final.

Probamos el cuestionario en una encuesta piloto con investigadores del Instituto de Ingeniería de la UNAM. Con base en los resultados se modificó el formato simplificándolo y cambiando algunas preguntas.

El tamaño n de la muestra depende del grado de precisión que se desee alcanzar y de la incertidumbre en las respuestas; en una población infinita (38),

$$n = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_p^2} \quad (3.1)$$

para σ_m = variancia unitaria en unidad de muestreo y σ_p = variancia que se desea alcanzar en los resultados.

Consideramos adecuado para los fines de este experimento reducir el grado de incertidumbre en un factor de 10, o sea $n = 100$.

Al planear el experimento consideramos necesario establecer dos estratos de muestreo: usuarios y técnicos conocedores de la materia. Sin embargo las respuestas de la encuesta fueron generalmente desde el punto de vista del usuario (aun en cuestionarios contestados por ingenieros proyectistas).

3.2 RESULTADOS ESTADISTICOS DE LA ENCUESTA

Los resultados de la encuesta nos resultan útiles desde el punto de vista de la estimación del porcentaje adicional sobre el costo total de la obra que los interesados estarían dispuestos a pagar, ya sea en un aumento en el costo de construcción o como renta adicional.

Se enviaron 235 formularios de encuesta y se recibió un total de 113 respuestas de las cuales se desecharon 26 por considerarse no representativas.

De las 87 respuestas aceptadas se obtuvieron los siguientes resultados relacionando el nivel de respuesta subjetivo de la intensidad de vibración en losas con el costo adicional sobre el valor total del inmueble.

Nivel de Respuesta,	R	Costo adicional, c_a	
		Media	Desviación estándar
Imperceptible	1	no se obtuvo información	
Ligeramente perceptible	2	0	
Francoamente perceptible	3	6.9%	6.4%
Fuertemente perceptible	4	11.5%	5.7%
Severa	5	no se obtuvo información	

3.3 OPTIMACION COSTO-BENEFICIO

La solución óptima es la que maximiza la utilidad. Como una medida escalar de la utilidad tomamos la función de objetivo dada por

$$Z = C + D \quad (3.2)$$

en donde C y D son respectivamente las esperanzas del valor presente del costo inicial (incorporando la posible variación de la esperanza del valor presente de los beneficios) y pérdidas por ingreso a estados límite. En cierto sentido Z representa el costo total de la obra, el cual se desea hacer mínimo.

Los distintos niveles de respuesta R nos dan la medida del ingreso a estados límite; para hacer accesible el cálculo, ajustemos funciones continuas que relacionen el costo adicional c_a en por ciento con el nivel de respuesta R; estas son:

$$c_a = 0 \quad R \leq 2 \quad (3.3)$$

$$c_a = 6.90(R - 2)^{0.737} \quad 2 \leq R \leq 5$$

y la relación inversa

$$R = 0.0727c_a^{1.357} + 2 \quad 0 \leq c_a \leq 15.5\% \quad (3.4)$$

En la ec 3.4 se puede emplear aproximación de segundos momentos; para ello tomaremos la desviación estándar del costo adicional c_a igual a 6% constante; así se tiene

$$R = 0.0727\{(c_a + 6)^{1.357} + (c_a - 6)^{1.357}\}/2 + 2 \quad (3.5)$$

Aplicando la ec 3.3 a los resultados que da la ec 3.5:

Nivel de respuesta,	R	Aproximación de segundos momentos para el costo adicional, \bar{c}_a
Imperceptible	1	0
Ligeramente perceptible	2	3.8%
Francoamente perceptible	3	7.9%
Fuertemente perceptible	4	12.1%
Severa	5	15.9%

Las funciones de regresión que ajustan en forma continua el nivel de respuesta R con la aproximación de segundos momentos para el costo adicional \bar{c}_a son

$$\bar{c}_a = 3.82(R - 1)^{1.04} \quad 1 \leq R \leq 5 \quad (3.6)$$

y

$$R = 0.275\bar{c}_a^{0.963} + 1 \quad 0 \leq \bar{c}_a \leq 16\% \quad (3.7)$$

Observamos que los exponentes de las ecs 3.7 y 3.8 son muy cercanos a la unidad y con poca pérdida de precisión linearizamos estas expresiones; entonces tenemos

$$\bar{c}_a = 4(R - 1) \quad 1 \leq R \leq 5 \quad (3.8)$$

y

$$R = 0.25\bar{c}_a + 1 \quad 0 \leq \bar{c}_a \leq 16\% \quad (3.9)$$

El valor presente de la esperanza de las pérdidas por ingreso a estados límites para el caso de ocurrencia de eventos como en un proceso de Poisson con parámetro λ y aceptando el modelo exponencial de conversión a valores presentes $\exp(-\gamma t)$ para γ = tasa de actualización y t = tiempo, estará dado por

$$D = \int_0^{\infty} A_1 e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} dt = \frac{A_1 \lambda}{\lambda + \gamma} \quad (3.10)$$

para A_1 independiente de t , A_1 = esperanza del costo de las pérdidas, o sea

$$A_1 = \bar{c}_a = 4(R - 1) \quad (3.11)$$

en donde

$$D = \frac{4(R - 1)\lambda}{\lambda + \gamma} \quad (3.12)$$

Del modelo que hemos tomado para las cargas vivas normal y extraordinarias, $\lambda = 1$; tomaremos como representativo el valor $\gamma = 6\%$; la ec 3.12 queda entonces como

$$D = \frac{4(R - 1)}{1.06} = 3.774(R - 1) \quad (3.13)$$

Para representar el costo inicial C consideremos una relación lineal con un valor constante C_0 y un costo adicional que varíe en función de los conceptos que modifiquen la propensión de la losa a vibrar. Estos son el área y colocación del acero de refuerzo y el peralte de la losa para ancho y largo constantes; en el apéndice C se comprueba que para una variación del área de acero dentro de límites prácticos la variación en la rigidez en flexión es despreciable o sea que la influencia del área de acero es pequeña. Tomaremos como variable a optimar el peralte h de la losa; entonces la esperanza del costo se puede escribir como

$$C = C_0 + c_1 h \quad h > 0 \quad (3.14)$$

en donde para efectos prácticos c_1 es una constante y su valor depende de los costos de construcción; de un estudio limitado obtuvimos los siguientes valores extremos

$$c_{1\min} = 0.22 + 1.5 \times 10^{-4} f'_c \quad (3.15)$$

$$c_{1\max} = 0.35 + 2.5 \times 10^{-4} f'_c$$

en porciento del costo total de la obra.

La función objetivo a minimizar es

$$Z_0 = C_0 + c_1 h + 3.774(R - 1) \quad (3.16)$$

la cual normalizada, sustituyendo los valores de las ecs 3.15 y eliminando los términos constantes es

$$Z_1 = (1 + 0.0007 f'_c) h + 17.2R \quad (3.17)$$

$$Z_2 = (1 + 0.0007 f'_c) h + 10.8R$$

La ec 2.1 nos da el valor de R; con una aproximación de terceros momentos para los valores del amortiguamiento, se obtiene

$$R = 1.23(WA)^{0.265} \quad (3.18)$$

en donde $W = \bar{\omega}$ y $A = \sqrt{E\{y^2\}}$. Así las ecs 3.17 se transforman en

$$Z_1 = (1 + 0.0007 f'_c) h + 21.2(\bar{\omega} \sqrt{E\{y^2\}})^{0.265} \quad (3.19)$$

$$Z_2 = (1 + 0.0007 f'_c) h + 13.3(\bar{\omega} \sqrt{E\{y^2\}})^{0.265}$$

La optimización de las funciones objetivo establecidas en las ecs 3.19 se realizó con un procedimiento de búsqueda ordenada ya que las restricciones del peralte máximo y de las dimensiones nominales posibles del peralte limitan la elección y por tanto se necesita estudiar un número limitado de casos.

En la fig 3.1 se muestra el peralte óptimo obtenido de minimizar las ecs 3.19 en función de $(a+b)/^3\sqrt{f'_c}$; en esta figura se aprecia que la posición de los puntos óptimos define una línea recta, así ajustamos la siguiente expresión:

$$h_{\text{óptimo}} = h_o = \theta(a + b)/^3\sqrt{f'_c} \quad (3.20)$$

en donde θ es un parámetro que valuamos estudiando 48 casos variando las dimensiones de la losa de 3 x 3 a 6 x 12 m y f'_c de 100 a 300 kg/cm² en las ecs 3.19. La media y el coeficiente de variación del parámetro son

$$\theta = 6.66$$

$$V_\theta = 10.2\% \text{ (como una medida del ajuste de la ec 3.20)} \quad (3.21)$$

Este resultado nos permite afirmar que el valor óptimo del peralte de la losa en función de las vibraciones producidas por un evento esporádico de carga extraordinaria como los que aquí modelamos es poco sensible a las variaciones de las relaciones de costos y por tanto el peralte óptimo h_o se puede aproximar con la siguiente fórmula

$$h_o = 7.33(a + b)/^3\sqrt{f'_c} \quad (3.22)$$

la cual mejora el ajuste de la curva para valores altos de $(a+b)/^3\sqrt{f'_c}$

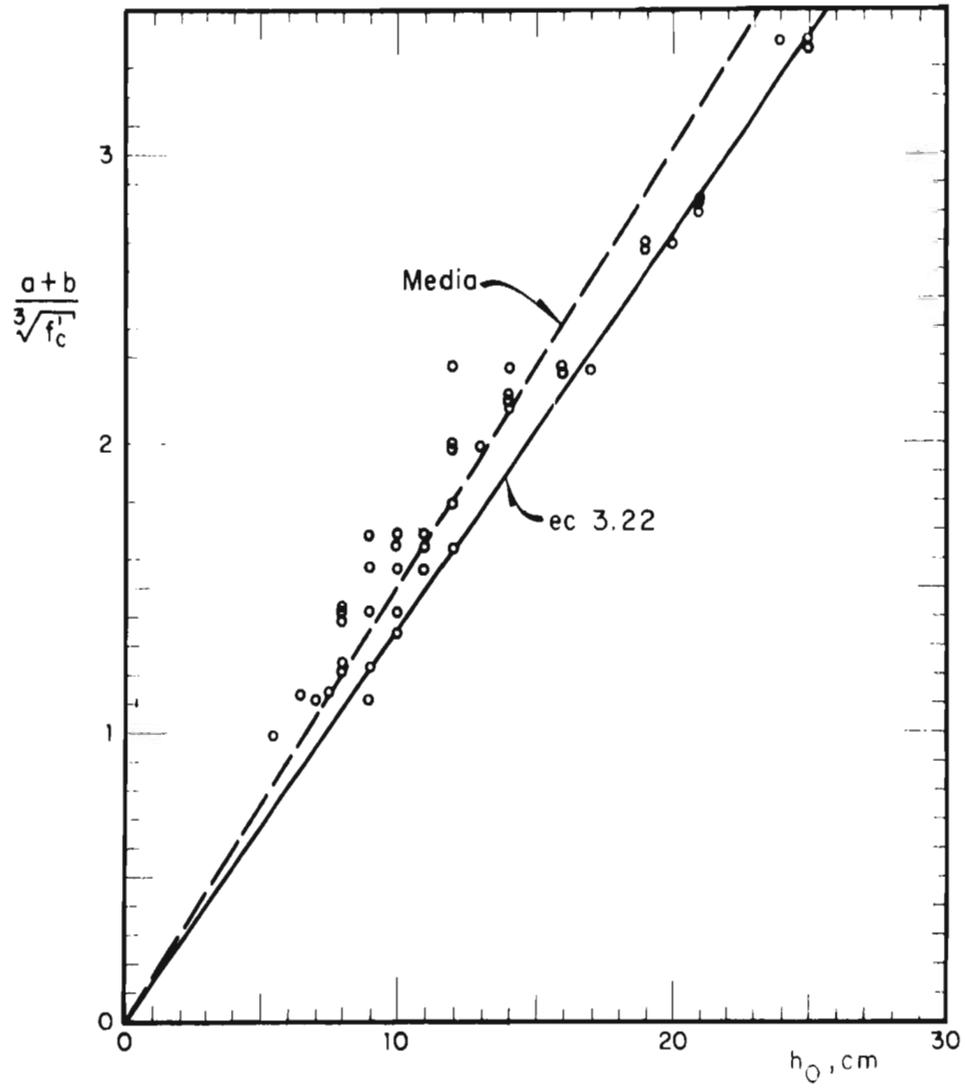


Fig 3.1. Peralte óptimo para vibraciones en losas

4. RECOMENDACIONES PARA REGLAMENTO

4.1 ANTECEDENTES

Revisando los reglamentos de construcción y códigos en vigor en distintos países se encontró que existen recomendaciones para limitar la exposición de personas a vibraciones producidas por vehículos o maquinaria; tal es el caso del documento ISO/TC 108/WG 7 (Secretariat-19)39, junio 1970 (ISO=International Organization for Standardization) que es una guía para la valuación de la exposición humana a vibraciones en todo el cuerpo. En el mismo caso se encuentran estudios realizados por los militares para obtener límites de tolerancia y de control en aviones y vehículos de reingreso a la atmósfera.

En los códigos aplicables a la construcción, especialmente en el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal de la República Mexicana (1966), no se encontró mención alguna con respecto a este problema de vibraciones en losas de concreto y menos aun alguna recomendación tendiente a evitarlas o a conocerlas.

La naturaleza del problema de reacción humana a vibraciones hace que su estudio sea difícil y una recomendación general aplicable al reglamento entraña una aplicación universal lo cual hace más difícil aun el problema.

4.2 RECOMENDACIONES

Se propone sea agregado al Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal un párrafo que diga:

"En los casos en que por su ubicación y tamaño un local pueda ser usado para realizar reuniones o fiestas, el peralte mínimo de la losa de piso deberá ser

$$\text{peralte mínimo} = 3.67(\text{perímetro del tablero en metros})/\sqrt[3]{f'_c}$$

La limitación que dispone el párrafo anterior es aplicable a losas con perímetro entre 10 y 36 metros y para resistencias del concreto f'_c comprendidas entre 100 y 300 kg/cm². Las losas con perímetro mayor de 36 metros deberán calcularse dinámicamente para evitar vibraciones y molestias excesivas".

Esta recomendación del peralte óptimo como el mínimo deseable se basa en los siguientes razonamientos:

Si por alguna otra consideración se escoge un peralte mayor, la optimización en el concepto de vibraciones tal y como la hemos realizado, resulta inaplicable al no haber tomado en cuenta esa restricción que motivó el escoger un peralte mayor.

Generalmente el diseñador tomará el peralte mínimo que le permitan sus restricciones; así, si esta recomendación resulta ser mayor que el peralte determinado por otros conceptos la losa será óptima en el sentido de vibraciones.

Para losas con perímetro mayor de 12 m las deformaciones dinámicas pueden ser considerables sobre todo si se producen agrietamientos y con el peralte óptimo tenemos una alta probabilidad de que esto no suceda.

4.3 CONCLUSIONES

Hemos encontrado una expresión sencilla que nos relaciona el perímetro de una losa y la resistencia nominal del concreto con el peralte óptimo. Con este resultado propusimos una adición al Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal que puede ser también incluida en otros reglamentos.

Del estudio estocástico de vibraciones en losas podemos resumir algunas consideraciones de importancia.

Es necesario realizar estudios experimentales para determinar estadísticamente las deformaciones estáticas y dinámicas en distintos tipos de losas de concreto reforzado, tomando en consideración el problema de agrietamiento tanto estático como dinámico.

De estos experimentos se podría determinar la rigidez flexionante de las losas y su comportamiento conforme a las teorías de placas o en un sentido amplio tratarse como un problema de identificación de sistemas.

Los estudios experimentales propuestos deberán extenderse a las cargas dinámicas con el fin de encontrar espectros de diseño.

La encuesta que sirvió para relacionar los efectos subjetivos de la vibración en losas con el costo debe extenderse a los efectos de la reacción humana a deformaciones dinámicas y grietas en plafones.

En el estudio de optimización se observó que en losas de claro 6 x 12 m el peralte óptimo corresponde a valores de $R \approx 4$ o sea vibraciones fuertemente perceptibles. Cabe, que cuando el perímetro sea mayor de 36 m, el diseñador estudie y optimice soluciones alternas como vigas secundarias o losas nervuradas "cambiando de Universo" (43).

Las funciones de aproximación utilizadas para la elástica de la losa consideran apoyo perfecto en el perímetro de la losa o tablero (no se permiten desplazamientos verticales). Esto significa que no se ha tomado en cuenta la flexibilidad de los apoyos, especialmente de las vigas cuando no haya muros de carga. Tampoco se consideró el acortamiento diferencial de las columnas al ser sometidas a carga axial.

APENDICE A

ESTUDIO NUMERICO DE LA ECUACION DINAMICA DE PLACAS

Necesitamos conocer los valores del parámetro ν que aparece en la ec 1.23; si hacemos $p = \theta$, desarrollando tendremos

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = & x^2 y^2 \cos(px/a) \cos(py/b) - (a^2 y^2 / 4) \cos(px/a) \cos(py/b) \\ & - (b^2 x^2 / 4) \cos(px/a) \cos(py/b) \\ & + (a^2 b^2 / 16) \cos(px/a) \cos(py/b) \quad (A.1)\end{aligned}$$

Separando variables podemos expresar en forma cerrada las siguientes integrales

$$\begin{aligned}\int_A \psi dA = & A(a)A(b) - (a^2/4)C(a)A(b) - (b^2/4)A(a)C(b) \\ & + (a^2 b^2 / 16)C(a)C(b) \quad (A.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_A \psi^2 dA = & B(a)B(b) - (a^2/2)A(a)B(b) - (b^2/2)B(a)A(b) + (a^2 b^2 / 4)A(a)A(b) \\ & - (a^4 b^2 / 32)C(a)A(b) + (a^4 / 16)C(a)B(b) + (b^4 / 16)B(a)C(b) \\ & - (a^2 b^4 / 32)A(a)C(b) + (a^4 b^4 / 256)C(a)C(b)\end{aligned}$$

donde

$$A(\tau) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \zeta^2 \cos^2(p\zeta/\tau) d\zeta = \frac{\tau^3}{24} \left(1 + \frac{3\text{sen}p}{p} + \frac{6\text{cosp}}{p^2} - \frac{6\text{sen}p}{p^3} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$B(\tau) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \zeta^4 \cos^2(p\zeta/\tau) d\zeta = \frac{\tau^5}{160} \left\{ 1 + \frac{1}{p} \left[\text{sen}p \left(5 - \frac{60}{p^2} + \frac{120}{p^4} \right) + \text{cosp} \left(\frac{20}{p} - \frac{120}{p^3} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.5})$$

$$C(\tau) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos^2(p\zeta/\tau) d\zeta = \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{\text{sen}p}{p} \right) \quad (\text{A.6})$$

Con las ecs A.2 a A.6 podemos valuar las ecs 1.19, 1.20 y 1.22, o sea

$$m^* = \rho h \int_A \psi^2 dA$$

$$c^* = c \int_A \psi^2 dA \quad (\text{A.7})$$

$$p^* = p(x, y) \int_A \psi dA$$

Para valuar la ec 1.21, con las derivadas parciales de la función de aproximación

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (y^2 - b^2/4) \cos(py/b) \left\{ \cos(px/a) \left(2 + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2 x^2}{a^2} \right) - \frac{4px}{a} \text{sen}(px/a) \right\} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = (x^2 - a^2/4) \cos(px/a) \left\{ \cos(py/b) \left(2 + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2 y^2}{b^2} \right) - \frac{4py}{b} \text{sen}(py/b) \right\} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \left\{ 2x \cos(px/a) + \left(\frac{pa}{4} - \frac{px^2}{a} \right) \text{sen}(px/a) \right\} \left\{ 2y \cos(py/b) + \left(\frac{pb}{4} - \frac{py^2}{b} \right) \text{sen}(py/b) \right\} \quad (\text{A.10})$$

se sustituyen en la expresión para k^* que, con integración numérica, nos permite resolver en p la expresión:

$$k^*/m^* - \omega_1^{*2} = 0 \quad (\text{A.11})$$

en donde ω_1^* es la frecuencia adimensional de la ec 1.25.

Al utilizar la media de la frecuencia adimensional en la ec A.11 se obtiene $p = 2.11$.

Haremos uso de una aproximación de segundos momentos; de la ref 40, para una función de la forma:

$$Y = Y(Z) \quad (\text{A.12})$$

se obtienen los valores de la media \bar{Y} y del coeficiente de variación $V(Y)$, salvo términos de orden superior, con las expresiones

$$\bar{Y} = \frac{Y(Z + \sigma(Z)) + Y(Z - \sigma(Z))}{2} \quad (\text{A.13})$$

$$V(Y) = \left| \frac{Y(\bar{Z} + \sigma(Z)) - Y(\bar{Z} - \sigma(Z))}{2Y(\bar{Z})} \right| \quad (\text{A.14})$$

donde σ es la desviación estandar, $\dot{=}$ significa igual salvo términos de orden superior, la testa representa valor medio y $V(x) = \sigma(x)/\bar{x}$.

Aplicando las ecs A.13 y A.14 con los valores de la ec 1.25 a la ec A.11 llegamos a

$$k^*/m^* - 400.0 = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$k^*/m^* - 605.2 = 0$$

resolviéndolas numéricamente se obtiene el promedio de segundos momentos del parámetro $p = 1.99$, que difiere 6% del valor de p calculado con el valor medio de la frecuencia adimensional. El coeficiente de variación es 18%.

La variación en el módulo de Poisson no afecta los resultados. Se calcularon las raíces de las ecs A.15 para $\nu = 0.15, 0.20, 0.25$ con resultados idénticos para p hasta la sexta cifra decimal.

Para el cálculo de los valores del peralte óptimo se usaron funciones aproximadas que se ajustaron a los datos obtenidos con la solución numérica de las ecuaciones íntegro-diferenciales.

Para la frecuencia de vibración del sistema usamos tres expresiones:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2 &= \frac{D}{\rho h} (10.9x^2 + 486.1x^{-4}) / a^4 \\ \omega_+^2 &= \bar{\omega}^2 + \sigma_\omega = \frac{D}{\rho h} (34.4x + 566.5x^{-4}) / a^4 \\ \omega_-^2 &= \bar{\omega}^2 - \sigma_\omega = \frac{D}{\rho h} (0.965x^4 + 392.5x^{-4}) / a^4 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

donde $x = b/a$, a, b dimensiones menor y mayor del tablero de la losa y $D/\rho h$ como se vio en el capítulo 1. La precisión lograda con este ajuste es de $\pm 2\%$ de error en el intervalo $1 \leq x \leq 2$.

Otra expresión útil es la que relaciona la función de aproximación con la curva de la elástica de la losa; sea

$$c_1 = c_1 \frac{p_0}{D^* a^2 b^2 (a^{-2} + b^{-2})^2} = \frac{p_0 \delta}{k^*} \quad (\text{A. 17})$$

donde

$$c_1 = -0.1187x^2 + 0.4076x - 0.2245$$

La ecuación de la elástica para la función de aproximación usada y con la aproximación de segundos momentos es

$$v_1 = c_1 \frac{p_0}{D^*} \frac{(x^2 - a^2/4)(y^2 - b^2/4) \cos(1.99x/a) \cos(1.99y/b)}{a^2 b^2 (a^{-2} + b^{-2})^2} \quad (\text{A. 18})$$

En forma enteramente análoga se encontraron fórmulas para k^* , ω y momentos flexionantes.

APENDICE B

FORMATO DE LA ENCUESTA

ENCUESTA SOBRE VIBRACIONES EN LOSAS

El Instituto de Ingeniería de la UNAM, solicita de usted muy atentamente conteste este cuestionario que tiene por objeto establecer bases para un estudio de vibraciones en losas. Los resultados obtenidos se procesarán estadísticamente y por tanto son anónimos, es decir, NO es necesario que usted anote su nombre.

Favor de marcar con una cruz (x) el lugar correspondiente a su respuesta y escribir las observaciones necesarias.

1. Ocupación.

EMPLEADO () OBRERO () TRABAJA POR SU CUENTA ()
OTRO () Especifique:

2. Antes de haber recibido este cuestionario ha notado o tenido noticias de vibraciones en losas.

NO () SI ()

3. Indique su actividad o relación principal con el problema de vibraciones en losas en los que tenga o haya tenido experiencia.

USUARIO O INQUILINO () CONSTRUCTOR ()
PROYECTISTA () PROPIETARIO O ADMINISTRADOR ()

4. Sensibilidad personal en relación con algunos tipos de vibraciones.

	SI	NO	CUALES
¿Sufre usted molestias al viajar debido al movimiento?			
¿Percibe los temblores o vibraciones leves? (que otros sí sienten)			
¿Le molestan los ruidos fuertes?			

5. Si usted sabe o conoce de alguna(s) medición(es) o investigación(es) que trat (n) con vibraciones en losas, por favor descríbala(s).

BIBLIOGRAFIA o fuente de información:

MEDICIONES REALIZADAS (de ser posible incluya la amplitud del desplazamiento máximo y la frecuencia o período de vibración)

6. En los casos que haya conocido de vibraciones en losas, por favor responda en la siguiente tabla, para cada uno de ellos:

		CASO	1	2	3	4	5
U S O	Habitación						
	Oficina						
	Hospital						
	Comercio						
	Industria						
	Otro						
A C T I V I D A D	Descanso						
	Intelectual						
	de Precisión						
	Baile suave						
	Baile violento						
	Concentración excesiva de personas						
Otra							
V I B R A C I O N	Ligeramente perceptible						
	Normalmente perceptible						
	Fuertemente perceptible						
	Severa						
L O S A	Dimensiones: Ancho						
	Largo						
	Peralte						
T I P O	Tipo de piso:						
	Pulido						
	Mosaico						
	Alfombra Parquet						
Concreto:							
f'_c en kg/cm ²							
Armado: varillas ó con separación							
C O S T O	Nada						
	1%						
	2%						
	3 a 5%						
	5 a 10%						
	más del 10%						
*	¿Cuanto estarían usted o los interesados, dispuestos a pagar en un supuesto costo adicional, ya sea de renta o de costo de construcción sobre el precio actual total, para evitar estas vibraciones?						

Agradeceremos sus comentarios y opiniones adicionales (al reverso de la hoja) acerca del problema de vibraciones en losas que no esten tratados en esta encuesta y al mismo tiempo, aprovechamos la oportunidad para manifestarle que apreciamos la atención que se ha servido dar a la presente.

APENDICE C

RIGIDEZ EQUIVALENTE EN FLEXION PARA LOSAS DE CONCRETO

En una placa anisotrópica la ecuación diferencial de equilibrio toma la forma (41),

$$D_x \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = q \quad (C.1)$$

En el caso particular de una losa de concreto armada en dos direcciones, los módulos de rigidez en flexión en las direcciones x,y son

$$D_x = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} \{ I_{cx} + (n - 1) I_{sx} \}$$
$$D_y = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} \{ I_{cy} + (n - 1) I_{sy} \} \quad (C.2)$$

$$H = \sqrt{D_x D_y}$$

con E_c , E_s módulos de Young del concreto y del acero, ν_c como el módulo de Poisson del concreto, I_{cx} el momento de inercia de la losa e I_{sx} el del refuerzo con respecto al eje neutro en la sección x =constante y en la sección y =constante los correspondientes I_{cy} , I_{sy} .

Para simplificar estas expresiones se aprovecha que el brazo de palanca y la profundidad de la zona de compresión varían poco en las losas que nos interesan. Así tomamos valores medios para el cálculo de los momentos de inercia,

$$\begin{aligned} I_{cx} &= I_{cy} = 0.064d^3 \\ I_{sx} &\approx 0.36d^2 A_{sy} \\ I_{sy} &\approx 0.36d^2 A_{sx} \end{aligned} \quad (C.3)$$

para un ancho de losa de un metro, el peralte efectivo d y A_{sx} , A_{sy} áreas de acero de refuerzo por unidad de ancho en las direcciones x , y respectivamente. Consideraremos como refuerzo principal el colocado en la dirección de las x .

La rigidez en flexión D^* que aquí proponemos debe ser compatible con la ec 1.2, con ecuación diferencial

$$\nabla^4 v = q/D^* \quad (C.4)$$

y esto implica que

$$D_x \approx D_y \approx D^* \quad (C.5)$$

El Instituto Americano del Concreto (42) propone que para considerar el agrietamiento se haga uso de la siguiente fórmula para el momento de inercia I_e de la sección agrietada

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_{max}}\right)^3 I_g + \left\{1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_{max}}\right)^3\right\} I_{cr} \quad (C.6)$$

donde

$$M_{cr} = f_r I_g / Y_t$$

$$f_r = 1.5 \sqrt{f'_c}$$

$$I_g = bh^3/12$$

$$I_{cr} = 1.43d^3 + \left(\frac{200}{\sqrt{f'_c}} - 1\right) 0.423A_s d^2 \quad (C.7)$$

con Y_t = distancia del centroide al punto a tensión más alejado, A_s = área de acero y M_{max} = momento máximo en la zona de interés.

Efectuando sustituciones y asignando valores,

$$I_e = 1.30 \times 10^5 \frac{f'_c{}^{3/2} h^9}{M_{max}^3} + \left(1 - 2 \times 10^4 \frac{f'_c{}^{3/2} h^6}{M_{max}^3}\right) \left\{1.43d + \left(\frac{200}{\sqrt{f'_c}} - 1\right) 0.423A_s d^2\right\} \quad (C.8)$$

De la definición de rigidez en flexión en placas

$$D = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu)} = \frac{bh^3}{12} \frac{E_c}{b(1-\nu)} = I_e \frac{E_c}{100(1-\nu)} = 100 I_e \sqrt{f'_c} \quad (C.9)$$

para $b = 100$ cm y $E_c = 10000 \sqrt{f'_c}$

Sustituyendo la ec C.7 en la ec C.6 obtenemos la rigidez equivalente para losas de concreto con refuerzo de acero

$$D_e = 2 \times 10^7 \frac{f'_c{}^2 h^9}{M_{\max}^3} + (\sqrt{f'_c} - 2 \times 10^4 \frac{f'_c{}^2 h^6}{M_{\max}^3}) \{180d + 53(\frac{200}{\sqrt{f'_c}} - 1) A_s\} d^2 \quad (C.10)$$

En la ec C.10 consideramos únicamente el área de acero A_s en la dirección del eje corto ya que se observó que el área de acero en la dirección del eje largo no modifica apreciablemente la rigidez. La cantidad de acero de refuerzo no es muy importante para la rigidez de la sección; si se aumenta o disminuye tres veces en su valor la rigidez D_e calculada con la ec C.10 varía en menos de 10%.

En la misma ref 42 se establece que deberá usarse la menor de D_e y D_c , que es la rigidez a flexión de la sección completa de concreto sin considerar el acero

$$D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu)} = 1000 h^3 \sqrt{f'_c} \quad (C.11)$$

La rigidez a flexión equivalente será entonces:

$$D^* = \min(D_e, D_c) \quad (C.12)$$

En el caso $D_e < D_c$ consideramos que la losa ha sufrido agrietamiento.

APENDICE D

DEFORMACIONES DINAMICAS

Consideremos dos valores para las deformaciones dinámicas de las losas excitadas por la carga extraordinaria: la raíz cuadrada de $E\{y^2\}$ y la flecha máxima para una probabilidad de excedencia del 5% en la distribución de Rayleigh.

En la fig D.1 se encuentran graficados los valores de $\sqrt{E\{y^2\}}$ contra $(a+b)^6/(h^2\sqrt{f_c}')$; observamos que es posible un buen ajuste con una función lineal; sea

$$\bar{y} = \sqrt{E\{y^2\}} = \frac{(a+b)^6}{\theta h^2\sqrt{f_c}'} \quad (D.1)$$

Los valores de las estadísticas del parámetro θ son:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= 2110 \\ V_{\theta} &= 22.5\% \end{aligned} \quad (D.2)$$

Por comodidad, sea $\theta = 2000$; la ec D.1 queda

$$\bar{y} = \frac{(a+b)^6}{h^2\sqrt{f_c}'} \cdot 5 \times 10^{-4} \quad (D.3)$$

Con la función de probabilidad acumulada de Rayleigh dada por la ec 2.46 para un valor de excedencia de 5%, el desplazamiento α es

$$\alpha = 2.45\sigma_y \quad (D.4)$$

en donde $\sigma_y = \sqrt{E\{y^2\}} = \bar{y}$; considerando las ecs D.1 y D.2,

$$\alpha = \frac{(a + b)^6}{860h^2\sqrt{f'_c}} \quad (D.5)$$

Las ecuaciones anteriores nos dan idea de los desplazamientos dinámicos esperados en una losa excitada por el modelo de carga que llamamos extraordinaria. Se consideró únicamente la respuesta de losas no agrietadas.

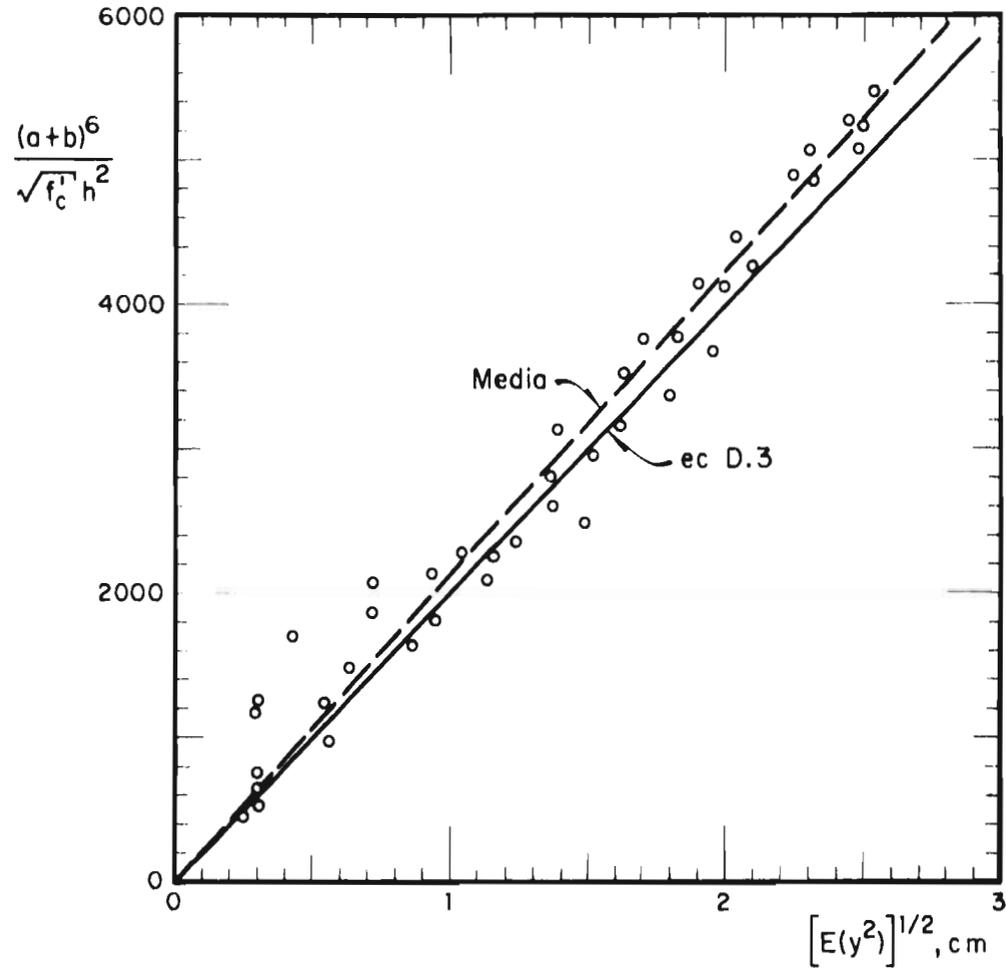


Fig D.1. Deformaciones dinámicas en losas. Ajuste de la ec D.3 con puntos calculados

APENDICE E

MEDIDA DE LA RESPUESTA HUMANA A VIBRACIONES

Hemos adoptado la convención de representar la respuesta humana a vibraciones en losas con la variable R; dentro del intervalo (0, 5) la hemos valuado con la ec 2.1.

En la fig E.1 hemos graficado los valores de R contra $\sqrt{(a+b) \cdot 6\sqrt{(f_c^2 h)}}$ haciendo uso de los resultados para la respuesta con el modelo de carga que llamamos extraordinaria o caso 2. Observamos que es posible el ajuste con una línea recta,

$$R = \theta \sqrt{(a + b) \cdot 6\sqrt{(f_c^2 h)}} \quad (E.1)$$

Los valores estadísticos del parámetro θ obtenidos de los cálculos con nuestro modelo matemático son:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= 0.224 \\ V_{\theta} &= 13.4\% \text{ (como una medida del ajuste de la ec E.1)} \end{aligned} \quad (E.2)$$

y podemos escribir la ec E.1 como

$$R = 0.224 \sqrt{(a + b) \cdot 6\sqrt{(f_c^2 h)}} \quad (E.3)$$

esta ecuación nos permite conocer en forma sencilla la respuesta humana a vibraciones en losas sujetas a carga dinámica producida por bailes.

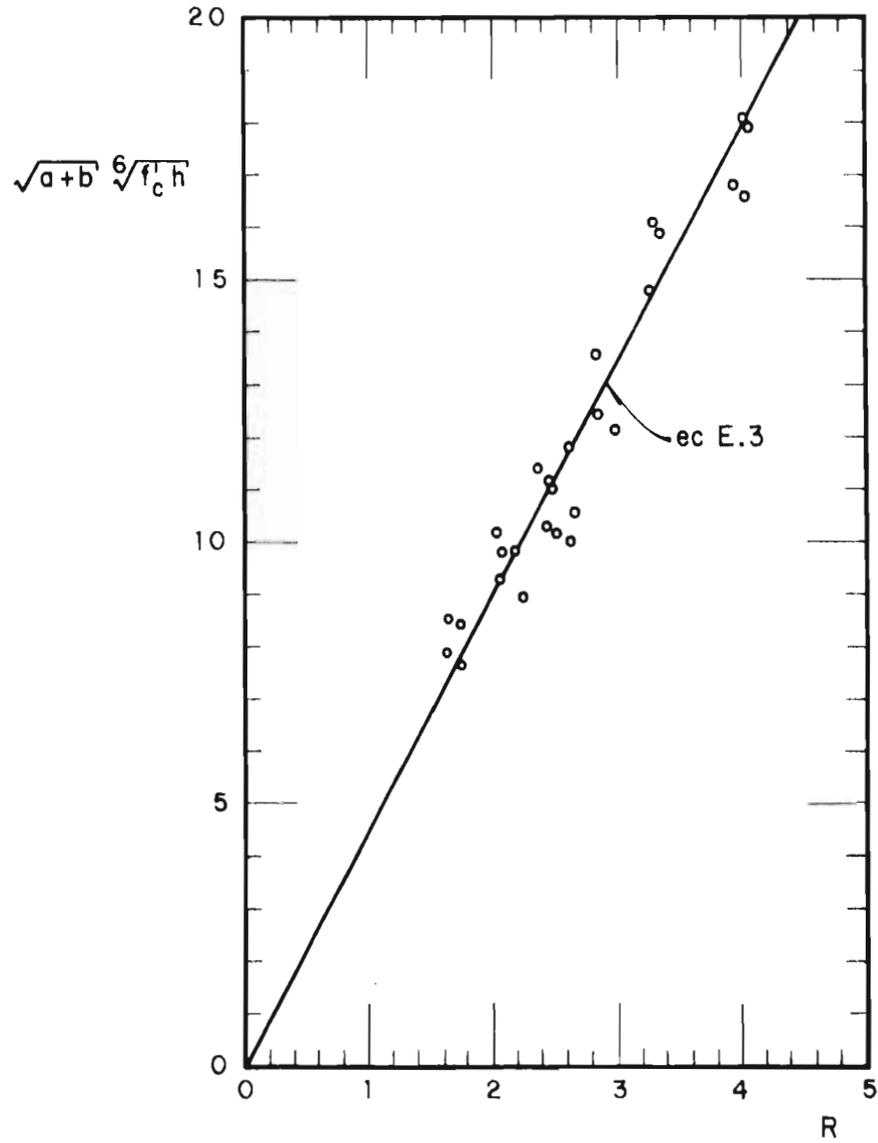


Fig E.1 Respuesta humana a vibraciones en losas. Ajuste de la ec E.3 con puntos calculados

APENDICE F

REFERENCIAS

- (1) Guignard, J C y Guignard, E, "Human response to vibration", ISVR Memorandum No. 373, Univ of Southampton, Inglaterra, 1969.
- (2) Timoshenko, S, Young, D H y Weaver, W, Jr, *Vibration problems in engineering*", 4a ed, John Wiley & Sons, Inc, 1974.
- (3) Newmark, N M y Rosenblueth, E, *Fundamentals of earthquake engineering*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- (4) Przemieniecki, J S, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, Inc, 1968.
- (5) Zienkiewicz, O C, *The finite element method in engineering science*, 2a ed, McGraw-Hill, Inc, 1971.
- (6) Huebner, K H, *The finite element method for engineers*, John Wiley & Sons, Inc, 1975.
- (7) Strang, G y Fix, G J, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N J, 1973.
- (8) Clough, R W y Penzien, J, *Dynamics of structures*, McGraw-Hill, Inc, 1975.
- (9) Cheung, Y K y Cheung, M S, "Flexural vibration of rectangular and other polygonal plates", *Int Engng Mech Div, ASCE*, 98, EM4, 1971, 398-410.

- (10) Wu, C I y Cheung Y K, "Frequency analysis of rectangular plates continuous in one or two directions", *Int of Earthquake Engng and Struct Dyn*, 3, jul-sep 1974, 3-14.
- (11) Biggs, J M, *Introduction to structural dynamics*, McGraw-Hill, Inc, 1964.
- (12) Churchill, R V, *Operational mathematics*, 3a ed, McGraw-Hill Kogakusha Ltd, Tokio, 1972.
- (13) Newland, D E, *Random vibrations and spectral analysis*, Longman Group Ltd, Londres, 1975.
- (14) Crandall, S H y Mark, W D, *Random vibration in mechanical systems*, Academic Press, Inc, 1963.
- (15) Roberts, J B, "The covariance response of linear systems to non-stationary random excitation", *Int of Sound and Vibr*, 14, 3, 1971, 385-400.
- (16) Hammond, J K, "On the response of single and multidegree of freedom systems to non-stationary random excitation", *Int of Sound and Vibr*, 7, 3, 1968, 393-416.
- (17) Veneziano, D, "Apuntes de la clase de Estimación Estadística", Div de Est Sup de la Fac de Ing, UNAM, abr 1974.
- (18) Geldard, F A, "The perception of mechanical vibration" *Int of General Psychology*, 22, 1940, 281-289.
- (19) Reiher, H, y Meister, F J, "Sensitiveness of the human body to vibrations", *Forschung*, VDI-Berlin, 2, 11, 1931, 381-386. (traducido del Alemán al Inglés por Kearns, C M, USAF Air Material Command, Translation F-TS-616-RE, 1946).
- (20) Goldman, D E A, "A review of subjective responses to vibratory motion of the human body in the frequency range 1 to 70 cps", Naval Medical Research Institute, Report NM-004-001, Washington, 1948.
- (21) Wright, D T, y Green, R, "Human sensitivity to vibration", Report No. 7, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, 1959.
- (22) Wiss, J F y Parmelee, R A, "Human perception of transient vibrations", *Int Struct Div*, ASCE, 100, ST4, abr 1974, 773-787.
- (23) Jauffred, F J, "Carga viva en unidades de habitación y oficina en el Distrito Federal" Publicación 3, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1960.
- (24) Peir, J-C y Cornell, C A, "Spatial and temporal variability of live loads", *Int of the Struct Div*, ASCE, 99, ST5, may 1973, 903-922.
- (25) McGuire R K y Cornell C A, "Live load effects in office buildings", *Int of the Struct Div*, ASCE, 100, ST7, jul 1974, 1351-1366.

- (26) Benjamin, J R y Cornell, C A, *Probability, statistics, and decision for civil engineers*, McGraw Hill Co., N Y, 1970.
- (27) Rosenblueth, E y Esteva, L, "Reliability basis for some Mexican codes", *Probabilistic Design of Reinforced Concrete Buildings*, ACI Publication SP-31, 1972.
- (28) Cornell, C A, "A probability based structural code", ACI 1968 Fall Convention (Memphis), nov 1968.
- (29) Johnson, A I, *Strength, safety and economical dimensions of structures*, National Swedish Building Research, D7: 1971, Estocolmo, Suecia, 1971.
- (30) Hudson, D E, "Dynamic tests of full-scale structures", ASCE/EMD Specialty Conference, Dynamic response of structures, Univ de California, mar 1976.
- (31) Hart, G C y Yao, J T P, "System identification in Structural dynamics", ASCE/EMD Specialty Conference, Dynamic response of structures, Univ de California, mar 1976.
- (32) Kircher, C A y Hareh, C S, "Ambient vibration of six similar high-rise apartment buildings: Comparison of the dynamic properties", ASCE/EMD Specialty Conference, Dynamic response of structures, Univ de California, mar 1976.
- (33) Chang, F K, "Psychophysiological aspects of man-structure interaction", State of Art Report No. 6, Lehigh Conference on Tall Buildings, TC1, Preprints, 1971, 165-181.
- (34) Kircher, C A, "Determination of the dynamic characteristics of full scale structures by the application of Fourier analysis", Report No. 20, The John A. Blume Earthquake Engrng Center, Univ de Stanford, nov 1975.
- (35) Haviland, R, "A study of the uncertainties in the fundamental traslational periods and damping values for real buildings", MIT Publication R76-12, Massachusetts, 1976.
- (36) Rosenblueth, E y Herrera, I, "On a kind of hysteretic damping", *Jnl of the Engrng Mech Div*, ASCE, EM4, agosto 1964, 37-48.
- (37) Rosenblueth, E, "Point estimates for probability moments", *Proc Nat Academy of Science, USA*, 72, 10, oct 1975, 3812-3814.
- (38) Cochran, W G, *Sampling techniques*, John Wiley & Sons, Inc, N Y, 1963.
- (39) Rosenblueth, E, "Random walk around optimum design", presentado en "Workshop on Loads", Marlboro, Mass, jun 1976.

- (40) Rosenblueth, E, "Resistencia óptima de estructuras con estados límites en cascada ante perturbaciones esporádicas", *Ingeniería Sísmica*, 12, ene-abr 1974, 25-76.
- (41) Timoshenko, S P y Woinowsky-Krieger, S, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, Tokio, 1959.
- (42) American Concrete Institute, "Reglamento de las construcciones de concreto reforzado, ACI 318-71", traducción del Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, A.C., México, 1974.
- (43) Contreras, H y Rosenblueth, E, "Economía de la Calidad en la Ingeniería Civil", Memorias del IV Congreso Nacional de Control de Calidad, Monterrey. N L, oct 1976, 49-72.

! ! ! ! !