

T-309  
M  
DES

1149  
88

*Vista de*  
DO



**FACULTAD DE INGENIERIA U N A M**  
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

BIBLIOTECA DE CONSIDERACIONES DE  
INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS  
AGOSTO 1968  
SUPERIORES DE LA FACULTAD DE  
INGENIERIA

# COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO

## DISEÑO A FLEXOCOMPRESION

ROBERTO MELI PIRALLA  
DISEÑO A FLEXOCOMPRESION

**T E S I S**

Que para obtener el grado de  
**MAESTRO EN INGENIERIA (Estructuras)**

presento a

**ROBERTO MELI PIRALLA**



México, D.F. 1968

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

T UNAM  
1968  
MEL  
12

98

RESUMEN

NOTACION

1.	INTRODUCCION	1
2.	DISEÑO PLASTICO DE MIEMBROS EN FLEXOCOMPRESION	3
2.1	<u>Aspectos generales</u>	3
2.2	<u>Hipótesis para diseño por flexocompresión</u>	3
2.3	<u>Diagramas de interacción</u>	5
2.4	<u>Consideraciones para el cálculo de los diagramas</u>	6
2.5	<u>Programas para computadora</u>	8
3.	DIAGRAMAS DE INTERACCION PARA CARGA AXIAL Y FLEXION EN UNA DIRECCION PRINCIPAL	9
3.1	<u>Secciones rectangulares. Idealización</u>	9
3.2	<u>Secciones rectangulares. Cálculo de los puntos de los diagramas</u>	9
3.3	<u>Secciones rectangulares. Programa para computadora</u>	11
3.4	<u>Secciones circulares. Idealización</u>	12
3.5	<u>Secciones circulares. Cálculo de los diagramas</u>	12

3.6	<u>Comparación de resultados</u>	13
4.	CARGA AXIAL Y FLEXION EN DOS DIRECCIONES	14
4.1	<u>Planteamiento del problema</u>	14
4.2	<u>Procedimiento para el cálculo de los elementos mecánicos resultantes e idealización del refuerzo</u>	15
4.3	<u>Refuerzo concentrado en las esquinas</u>	16
4.4	<u>Refuerzo distribuido uniformemente</u>	17
4.5	<u>Reducción a dos dimensiones de la superficie de falla</u>	18
4.6	<u>Programación para computadora</u>	19
4.7	<u>Efecto de la relación b/t</u>	20
4.8	<u>Presentación para el diseño</u>	21
5.	EJEMPLOS DE APLICACION	24
5.1	<u>Flexión en una dirección</u>	24
5.2	<u>Flexión en dos direcciones</u>	27
6.	RECONOCIMIENTO	31
7.	REFERENCIAS	31
	FIGURAS	33
	APENDICE A	55
	APENDICE B	95

## RESUMEN

Se presentan diagramas de interacción para el dimensionamiento de columnas de concreto, basados en las hipótesis de diseño plástico del Reglamento de construcciones para el Distrito Federal.

En la primera parte del trabajo se obtienen diagramas para secciones circulares y rectangulares con carga axial y flexión en una dirección principal. Para las secciones rectangulares se consideran los casos de refuerzo concentrado en las esquinas y uniformemente distribuido en las cuatro caras.

En la segunda parte se estudian secciones cuadradas y rec-tangulares sujetas a carga axial y a un momento de dirección cualquiera, considerando las mismas distribuciones de acero del caso anterior. Se presentan gráficas correctivas para diferentes relaciones de lados de la sección.

Los diagramas han sido obtenidos en forma adimensional por medio de programas de computadora, que se describen en el texto y que pueden ser usados para resolver otros casos particulares no considerados en este trabajo.

En la parte final se encuentran algunos ejemplos de aplicación para diseño.

#### ABSTRACT

In order to provide aids for use of the ultimate strength criteria according to Mexico City Building Code, charts for design of concrete columns have been prepared.

Equations based on usual ultimate strength assumptions are derived and computer programs to solve many general cases are presented in this report.

In the first part, circular and rectangular sections, loaded with eccentricity only in one direction, are considered. In the second part, loads with eccentricities in both directions are considered for squared sections and corrective graphs for rectangular sections are included.

Two examples illustrate the use of the design charts.

## NOTACION

$A_C$	área de la sección de concreto
$A_S$	área del acero de refuerzo
$A_{SE}$	área del acero extremo (perpendicular al plano de momentos)
$A_{SL}$	área del acero lateral (paralelo al plano de momentos)
$b$	ancho de la sección
$b_C$	brazo de palanca de la resultante del concreto
$b_I$	brazo de palanca de la resultante del acero inferior (de tensión)
$b_S$	brazo de palanca de la resultante del acero superior (de compresión)
$b_{xc}$	brazo de palanca en la dirección $x$ de la resultante del concreto
$b_{x1}, b_{x2}, b_{x3}, b_{x4}$	brazos de palanca de las resultantes del refuerzo localizado en los puntos 1, 2, 3 y 4 respectivamente, en la dirección $x$
$b_{yc}$	brazo de palanca en la dirección $y$ de la resultante del concreto
$b_{y1}, b_{y2}, b_{y3}, b_{y4}$	brazos de palanca de las resultantes del refuerzo localizado en los puntos 1, 2, 3 y 4 respectivamente, en la dirección $y$
$C_C$	resultante de la fuerza normal en el concreto
$C_S$	resultante de compresión de la zona de acero con deformación menor a la de fluencia
$C_{Sy}$	resultante de la fuerza de compresión en la zona de acero con deformación variable de cero a $\epsilon_y$
$C_Y$	resultante de la fuerza de la zona de acero fluyendo en compresión
$c_v$	coeficiente de variación de la resistencia en compresión de cilindros de concreto
$d$	peralte efectivo de la sección ( $t-r$ )

e	brazo de la fuerza exterior con respecto al centro de la sección
$F_A$	resultante de la fuerza normal del acero (secciones circulares)
$F_I$	resultante de la fuerza normal del acero extremo inferior
$F_L$	resultante de la fuerza normal del acero lateral
$F_S$	resultante de la fuerza normal del acero extremo superior
$f_A$	esfuerzo en el acero (secciones circulares)
$f_I$	esfuerzo en el acero extremo inferior
$f_S$	esfuerzo en el acero extremo superior
$f_y$	esfuerzo de fluencia del acero
$f'_c$	resistencia del concreto en compresión
$f''_c$	esfuerzo del bloque equivalente de concreto en compresión
h	altura de la sección perpendicularmente al eje neutro
$K = P_u/bt f''_c$	
k	coeficiente que define la profundidad del eje neutro como kd o kh
$k_{IC}$	coeficiente que define la profundidad del eje neutro que corresponde a una deformación $\epsilon_y$ , de compresión, en el acero inferior
$k_{IT}$	coeficiente que define la profundidad del eje neutro que corresponde a una deformación $-\epsilon_y$ , de tensión, en el acero inferior
$k_{SC}$	coeficiente que define la profundidad del eje neutro que corresponde a una deformación $\epsilon_y$ , de compresión, en el acero superior
$k_{ST}$	coeficiente que define la profundidad del eje neutro que corresponde a una deformación $-\epsilon_y$ , de tensión, en el acero superior
$k_{1C}, k_{2C}, k_{3C}, k_{4C}$	definen profundidades del eje neutro que provocan deformaciones $\epsilon_y$ en los puntos 1, 2, 3 y 4 respectivamente
$k_{1T}, k_{2T}, k_{3T}, k_{4T}$	definen profundidades del eje neutro que provocan deformaciones $-\epsilon_y$ en los puntos 1, 2, 3 y 4 respectivamente

$k_5, k_6, k_7$  definen profundidades límite del eje neutro para la aplicación de las distintas fórmulas para el cálculo de las resultantes del concreto

$l$  perímetro del acero tubular

$M_A$  momento de la resultante total del acero (secciones circulares)

$M_C$  momento de la resultante del concreto

$M_I$  momento de la resultante del acero lateral

$M_L$  momento de la resultante del acero lateral

$M_S$  momento de la resultante del acero superior

$M_{CS}, M_{CSY}, M_{CY}, M_{TS}, M_{TSY}, M_{TY}$  momentos de las resultantes  $C_S, C_{SY}, C_Y, T_S, T_{SY}$  y  $T_Y$  respectivamente

$M_{TSY}, M_{TY}$

$M_{XCS}, M_{XCSY}, M_{XCY}, M_{XTS}, M_{XTSY}, M_{XTY}$  momentos en la dirección  $x$  de las resultantes  $C_S, C_{SY}, C_Y, T_S, T_{SY}$  y  $T_Y$  respectivamente

$M_{XTSY}, M_{XTY}$

$M_{YCS}, M_{YCSY}, M_{YCY}, M_{YTS}, M_{YTSY}, M_{YTY}$  momentos en la dirección  $y$  de las resultantes  $C_S, C_{SY}, C_Y, T_S$  y  $T_Y$  respectivamente

$M_{YTSY}, M_{YTY}$

$M_{X1}, M_{X2}, M_{X3}, M_{X4}$  momentos en la dirección  $x$  de las varillas localizadas en los puntos 1, 2, 3 y 4 respectivamente

$M_{Y1}, M_{Y2}, M_{Y3}, M_{Y4}$  momentos en la dirección  $y$  de las varillas localizadas en los puntos 1, 2, 3 y 4 respectivamente

$M_u$  momento flexionante de falla

$P_u$  carga axial de falla

$p$  porcentaje de acero ( $A_S/bt$ )

$q = q_E + q_1$

$q_E$  porcentaje mecánico del acero extremo  $A_{SE} f_y / bt f'_c$

- $q_L$  porcentaje mecánico de acero lateral  $A_{SL} f_y / b t f_c''$
- $R_x = M_x / b^2 t f_c''$
- $R_y = M_y / b t^2 f_c''$
- $T_S$  resultante de tensión de la zona de esfuerzo con deformación menor a la de fluencia
- $T_{SY}$  resultante de tensión de la zona de refuerzo con deformación variable linealmente de cero a  $\epsilon_y$
- $T_Y$  resultante de la zona de refuerzo fluyendo en tensión
- $X$  lado en la dirección  $x$  del triángulo de concreto en compresión
- $X_1, X_2$  lados en la dirección  $x$  del trapecio de concreto en compresión
- $Y$  lado en la dirección  $y$  del triángulo de concreto en compresión
- $Y_1, Y_2$  lados en la dirección  $y$  del trapecio de concreto en compresión
- $\epsilon_A$  deformación en el acero (secciones circulares)
- $\epsilon_{cu}$  deformación que causa el aplastamiento del concreto en compresión
- $\epsilon_I$  deformación del acero inferior
- $\epsilon_S$  deformación del acero superior
- $\epsilon_{su}$  deformación de rotura en tensión del acero
- $\epsilon_Y$  deformación de fluencia del acero
- $\theta_1$  ángulo que define la profundidad del eje neutro
- $\theta_2$  ángulo que define la profundidad del bloque de concreto en compresión
- $\theta_3$  ángulo que define la profundidad de la fibra del acero con deformación  $\epsilon_y$
- $\theta_4$  ángulo que define la profundidad de la fibra de acero con deformación  $\epsilon_y$
- $\mu = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y}$

## 1. INTRODUCCION

Al ser adoptados en la reciente edición del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal<sup>1</sup> los criterios plásticos para el dimensionamiento de elementos de concreto, se presentó la necesidad de proporcionar al calculista algunas herramientas que le facilitasen seguir las recomendaciones de dicho Reglamento.

Con este fin se elaboraron, para el presente trabajo, gráficas para el dimensionamiento de columnas o, en general, de secciones sujetas a flexocompresión; para esto se recurrió a la elaboración de diagramas de interacción carga axial-momento flexionante porque son de fácil aplicación y proporcionan una idea completa del comportamiento de la sección bajo la carga.

Para la obtención de los diagramas se plantean las ecuaciones de equilibrio interno de la sección, según las hipótesis del artículo 240.VI de la ref 1; estas no pueden resolverse para un caso general, pero puede obtenerse un número indefinido de soluciones para casos particulares por medio de los cuales se determina la forma del diagrama con

la precisión que se quiera.

Este procedimiento para definir los diagramas requiere un volumen extraordinario de trabajo, que hizo necesaria la formulación de programas de computadora para obtener todos los resultados en un tiempo de producción muy reducido.

Los diagramas de interacción obtenidos han sido ya publicados por separado<sup>2</sup> y utilizados en la práctica; cuatro de ellos son para secciones circulares, ocho para secciones rectangulares con momento en una dirección principal y treinta y dos para secciones rectangulares con momento en dos direcciones principales.

Las variables que se consideran son: porcentaje, distribución y recubrimiento del refuerzo y además, para momento en dos direcciones, la relación de lados de la sección. Las otras variables se eliminan al presentar los diagramas en forma adimensional.

Se incluye en los diagramas la zona de flexotensión, que usualmente no se presenta, porque se considera que, además de tener utilidad para algunos casos particulares, da una idea más completa del comportamiento de la sección.

Los programas de computadora desarrollados permiten resolver un gran número de casos particulares; sin embargo, se ha considerado que para su utilización práctica, y para facilitar su manejo, debía llegarse a un mínimo de gráficas. Sobre las secciones rectangulares con momento en dos direcciones se obtuvieron gráficas correctivas para la relación de lados que permiten usar únicamente los diagramas para secciones cuadradas en cualquier caso. El número total de diagramas se reduce así a 28.

## 2. DISEÑO PLÁSTICO DE MIEMBROS EN FLEXOCOMPRESIÓN

### 2.1 Aspectos generales

En los últimos años, los criterios de diseño plástico han ido afirmándose en la práctica del cálculo estructural y en los reglamentos oficiales. La ventaja principal de estos métodos de diseño es que permiten predecir la resistencia de un miembro, o una sección, a la falla, y usar un factor de seguridad apropiado para la posibilidad de que esta falla ocurra.

Los pasos básicos que deben seguirse en el diseño plástico son: cálculo de las cargas de trabajo, obtención de los elementos mecánicos de diseño, dimensionamiento de las secciones, y revisión del comportamiento bajo cargas de trabajo.

### 2.2 Hipótesis para diseño por flexocompresión

Para poder establecer un método general de diseño para piezas sujetas a cualquier combinación de carga axial y momento flexionante, se plantearon las hipótesis siguientes:

a) Las secciones transversales planas antes de la deformación, permanecen planas después de que esta ocurre. Esta hipótesis permite conocer la deformación de las fibras a cualquier altura de la sección si se fijan dos puntos de deformación conocida, y se apega suficientemente a la realidad en distancias no muy pequeñas.

b) El concreto no resiste tensiones. En realidad el concreto tiene cierta resistencia a la tensión, pero para fines prácticos no influye en la capacidad de secciones con cantidades normales de refuerzo.

c) Se conocen las características esfuerzo-deformación del acero. En este trabajo se supone un comportamiento elastoplástico del acero, para

el cual los esfuerzos son directamente proporcionales a las deformaciones hasta una deformación máxima  $\epsilon_y$ , y después permanecen constantes. Con esta idealización se desprecia la zona de endurecimiento del acero. Si se tomara en cuenta esa zona, se obtendrían resistencias mucho mayores en algunos casos; sin embargo, se considera que las deformaciones en la zona de endurecimiento son de tal magnitud que la pieza se vuelve inservible antes de alcanzar esa capacidad.

d) Se conocen las características esfuerzo-deformación del concreto. Para la relación esfuerzo-deformación del concreto en flexocompresión, han sido propuestas curvas muy diferentes; además son muchas las variables que influyen en las características de esta curva, de las cuales las principales son el tamaño y la forma de la sección, el gradiente de esfuerzos y la duración de la carga.

Aunque las distintas idealizaciones de la curva esfuerzo-deformación difieran grandemente en su forma (triangular, rectangular, trapezoidal, parabólica, etc.), todas llevan a resultados aproximadamente iguales en cuanto a la magnitud y posición de la resultante de los esfuerzos de compresión del concreto.

Para los propósitos de este trabajo se usará la idealización adoptada en la ref 1 (ver inciso 2.4).

e) La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta. Esta hipótesis es necesaria para establecer la igualdad de deformaciones en el acero y el concreto para las mismas distancias al eje neutro. Se apega mucho a la realidad para concreto reforzado con varillas corrugadas. Para concreto presforzado se usan diferentes factores de compatibilidad entre las dos deformaciones.

f) Una sección falla si el concreto, en alguna fibra, alcanza una

deformación de compresión máxima  $\epsilon_{cu}$ . Esta hipótesis, que se consideró válida tanto para flexocompresión como para flexotensión, implica que el acero puede deformarse indefinidamente en tensión sin romperse. Una teoría más apegada a la realidad debería considerar dos posibilidades de falla, la de aplastamiento del concreto y la de rotura del acero en tensión al alcanzar una deformación máxima  $\epsilon_{su}$ .

Sin embargo, para los aceros normalmente usados como refuerzo, el valor de  $\epsilon_{su}$  es por lo menos 30 veces mayor que  $\epsilon_{cu}$ , y la posibilidad de que se alcance  $\epsilon_{su}$  corresponde a casos muy particulares en la zona de flexotensión.

### 2.3 Diagramas de interacción

Un diagrama de interacción para flexión y carga axial es la representación gráfica de todas las combinaciones de carga axial y momento flexionante en una dirección principal, que causan la falla de una sección.

Para un material elástico cualquiera, con una resistencia a compresión  $f'_c$  y a tensión  $f'_t$ , a partir de la fórmula de la escuadría, se obtiene el diagrama de la fig 1 a.

El diagrama de la figura no es aplicable al concreto reforzado, por tratarse de un material no elástico y heterogéneo. En este caso las combinaciones  $P_u$  y  $M_u$  de falla se obtienen a partir de un análisis plástico de la sección, basado en las hipótesis del inciso anterior.

La fig 1 b representa una sección rectangular con acero distribuido simétricamente. En ella aparece la distribución de deformaciones para una carga axial aplicada excéntricamente; las ecuaciones de equilibrio serán

$$\sum F_i - P_u = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_i - P_u \cdot e = 0 \quad (2)$$

Estas ecuaciones tienen como incógnitas la profundidad del eje neutro y la excentricidad de la carga axial.

La solución de este sistema de ecuaciones para un caso general es imposible, ya que se trata de ecuaciones no lineales que contienen términos que pueden tomar diferentes valores en intervalos distintos. Whitney<sup>3</sup> simplificó el problema suponiendo que, al ocurrir la falla, el acero de compresión siempre se encuentra fluyendo, y encontró tres fórmulas para definir diferentes etapas de comportamiento.

En este trabajo se procedió de una manera indirecta, fijando diferentes profundidades del eje neutro y encontrando la fuerza y el momento resultantes.

#### 2.4 Consideraciones para el cálculo de los diagramas

a) Esfuerzos en el concreto. De acuerdo con la ref 1, se consideró que, cuando alguna fibra del concreto en compresión alcanza la deformación  $\epsilon_{cu}$ , la distribución de esfuerzos en el concreto es uniforme en una zona equivalente de compresión cuya profundidad es 0.8 veces la del eje neutro.

Para encontrar el valor del esfuerzo del rectángulo equivalente,  $f_c''$ , se parte de  $f_c'$ , resistencia teórica en compresión del concreto, la cual debe reducirse para tomar en cuenta el coeficiente de variación de la resistencia,  $c_v$ , obteniendo así:

$$f_c^* = (1 - c_v) f_c'$$

$f_c''$  se obtiene a partir de  $f_c^*$  según las reglas siguientes:

$$f_c'' = 0.85 f_c^* ; \text{ si } f_c^* \leq 280 \text{ kg/cm}^2$$

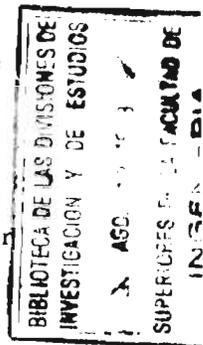
$$f_c'' = (1.05 - f_c^*/1400) f_c^* ; \text{ si } f_c^* > 280 \text{ kg/cm}^2$$

Las ecuaciones y las gráficas obtenidas están en función de  $f_c''$  considerando que este valor ya ha sido calculado a partir de  $f_c'$ . Para criterios que consideren otros valores del esfuerzo del rectángulo equivalente, se hará la reducción correspondiente en cada caso.

b) Adimensionamiento. Para hacer totalmente generales las fórmulas empleadas, estas se plantearon en forma adimensional, lo cual se logró dividiendo las longitudes entre el lado mayor  $t$  de la sección (diámetro  $D$  para secciones circulares), las áreas entre  $bt$  (o  $D^2$  para circulares), las fuerzas entre  $bt f_c''$  (o  $D^2 f_c''$ ), los brazos de palanca entre el lado en la dirección de la excentricidad y las deformaciones unitarias entre  $\epsilon_y$ .

Esta última relación introdujo la variable  $\epsilon_{cu} / \epsilon_y$ ; la  $\epsilon_{cu}$  ha sido fijada en la ref 1 como 0.003; sin embargo, se trata de un valor que puede tener variaciones muy grandes, dependiendo principalmente de la duración de la carga, del confinamiento del concreto y del gradiente de esfuerzos en la sección. La otra cantidad,  $\epsilon_y$ , para los aceros normalmente usados, varía entre 0.0012 y 0.002; esta diferencia es menor de la que se puede esperar en  $\epsilon_{cu}$ , para la cual se han registrado valores desde 0.0015 hasta mayores de 0.006. Por lo tanto no parece justificado el uso de una relación  $\epsilon_{cu} / \epsilon_y$  diferente para acero tipo estructural y para grado duro.

Se encontró que para grandes variaciones de  $\mu = \epsilon_{cu} / \epsilon_y$  corresponden pequeños cambios en los elementos mecánicos resultantes, lo que se puede comprobar con los diagramas de interacción de las figs 2, 3



y 4 que presentan casos extremos para  $\mu = 1.5$  y 5, para una sección muy reforzada y con mucho recubrimiento ( $d/t = 0.8$ ), que es el caso en que la relación influye mayormente. Como se ve, las diferencias son pequeñas comparadas con la gran diferencia entre las variables y tienen cierta importancia solo en una zona reducida. En ningún caso los errores llegan al 20 por ciento y hay que señalar que se consideraron casos extremos. Para  $d/t = 0.85$  la diferencia máxima es del 10 por ciento aproximadamente.

Por esta razón, aunque tanto las fórmulas como los programas están en función de la relación  $\mu$ , las gráficas de diseño se han obtenido considerando esta relación constante e igual a dos.

### 2.5 Programas para computadora

El procedimiento que se sigue para la obtención de las gráficas tiene características comunes para todos los casos, y consiste en suponer la profundidad e inclinación del eje neutro y encontrar las resultantes parciales del concreto y del acero en función de la cantidad, distribución y recubrimiento del acero y de  $\mu$  que deben proporcionarse como datos del problema.

Para los casos de flexión en una dirección principal, la inclinación del eje neutro es conocida y no interviene en las fórmulas. La profundidad del eje neutro se hace variar desde valores muy pequeños hasta un valor máximo que produce la condición de momento nulo, con un número de intervalos que permita definir completamente el diagrama. Para flexión biaxial se varían tanto la profundidad como la inclinación del eje neutro ajustándolos por tanteos hasta obtener el punto deseado, según el tipo de problema.

El funcionamiento de cada programa se explica someramente en los capítulos siguientes. Los diagramas de flujo y los listados de los programas se presentan en el apéndice B.

### 3. DIAGRAMAS DE INTERACCION PARA CARGA AXIAL Y FLEXION EN UNA DIRECCION PRINCIPAL

#### 3.1 Secciones rectangulares. Idealización

En la fig 5 a se muestra la idealización del refuerzo de la sección. Se hicieron las consideraciones siguientes:

El refuerzo está formado por dos partes, una situada en las caras perpendiculares al plano de momentos (acero extremo,  $A_{SE}$ ) y otra paralela a ese plano (acero lateral,  $A_{SL}$ ).

El acero extremo está distribuido en igual cantidad en las dos caras opuestas (acero superior y acero inferior).

El recubrimiento es igual en las dos caras extremas.

El acero lateral está distribuido uniformemente a lo largo del peralte de la sección en una barra de sección constante y de área equivalente.

Se establece además la siguiente convención de signos:

Fuerzas de compresión positivas.

Momento positivo en la dirección positiva del eje y.

Deformaciones de compresión positivas.

La separación del refuerzo real de una sección en acero extremo y acero lateral no es muy evidente en muchos casos. En el inciso 5.1 se definen algunos criterios.

#### 3.2 Secciones rectangulares. Cálculo de los puntos de los diagramas

La secuela de cálculo de los distintos diagramas se presen

ta solo esquemáticamente en este capítulo; la deducción detallada de las fórmulas se encuentra en el apéndice A.

Los diagramas se construyen a partir del cálculo de un cierto número de puntos siguiendo el método general expuesto en el inciso 2.3.

Se fija una deformación  $\epsilon_{cu}$  en la fibra superior extrema de la sección de concreto y, para una profundidad dada del eje neutro ( $kd$ ), se tiene definida la distribución de deformaciones.

A partir de las deformaciones se calculan los esfuerzos, y con estos las resultantes parciales de fuerzas y momentos, que son:

a) Resultantes del concreto ( $C_c$  y  $M_c$ ). Se obtienen a partir del bloque rectangular de esfuerzos, inciso 2.4. Hay que distinguir dos casos; si  $kd$  es menor que 1.25 veces el peralte total ( $t$ ), el bloque equivalente tiene una altura de  $0.8 kd$ ; si  $kd$  es mayor que  $1.25 t$ , toda la sección está trabajando a un esfuerzo constante  $f'_c$ .

b) Resultantes del acero superior ( $F_s$ ,  $M_s$ ). Se distinguen tres casos, acero fluyendo en compresión, fluyendo en tensión o con esfuerzo menor que el de fluencia.

c) Resultantes del acero inferior ( $F_I$ ,  $M_I$ ). Se distinguen los mismos tres casos que para el acero superior.

d) Resultantes del acero lateral ( $F_L$ ,  $M_L$ ). El acero lateral está idealizado como una barra vertical de área equivalente. En esta barra se pueden presentar varias distribuciones de esfuerzos que se aprecian en la fig 5 c.

En cada caso la resultante se calcula como la suma de valores parciales correspondientes a zonas de esfuerzo determinadas. Se distinguen seis zonas:

- a) Zona de esfuerzo constante de fluencia en compresión. Sus resultantes se llaman  $C_y$  y  $M_{cy}$
- b) Zona de esfuerzo de compresión variable linealmente de cero a  $f_y$ . Las resultantes se definen como  $C_{sy}$  y  $M_{csy}$
- c) Zona de esfuerzo de compresión variable linealmente de cero a  $f_s \leq f_y$ . Las resultantes son  $C_s$  y  $M_{cs}$
- d) Zona de esfuerzo de tensión variable linealmente de cero a  $f_s \leq f_y$ . Las resultantes son  $T_s$  y  $M_{ts}$
- e) Zona de esfuerzo de tensión variable linealmente de cero a  $f_y$ . Las resultantes son  $T_{sy}$  y  $M_{tsy}$
- f) Zona de esfuerzo constante de fluencia en tensión. Las resultantes son  $T_y$  y  $M_{Ty}$

Las resultantes antes mencionadas se valúan mediante fórmulas generales y la resultante total se encuentra sumando las resultantes parciales que intervienen para cada caso, que dependen de la profundidad del eje neutro.

### 3.3 Secciones rectangulares. Programa para computadora

Los datos que se deben proporcionar son  $q$ ,  $d/t$ ,  $R$  (relación entre el área de acero lateral y extremo) y  $N$ , que define el número de puntos necesarios para construir el diagrama.

Leídos los datos, se toma un valor inicial de  $k$  igual a  $1.25/N$  y se calculan las resultantes parciales escogiendo las fórmulas correspondientes a partir del valor de  $k$ . Sumando todas las contribuciones parciales se obtienen los valores de fuerza y momento resultantes.

El programa pasa en seguida a calcular las coordenadas de otro punto incrementando el valor de  $k$  en  $1.25/N$ , y así sucesivamente

hasta el valor  $k = 1.25$ ; entre este valor y el que corresponde al caso de momento nulo se consideran tres puntos adicionales porque en este intervalo estos son muy cercanos entre sí para incrementos apreciables de  $k$ .

Para la obtención de los diagramas con fines de diseño se usó  $N = 40$ , en donde  $q$  varía de 0.1 a 1.0 en intervalos de 0.1 y para  $d/t$  se fijaron los valores de 0.80, 0.85, 0.90 y 0.95. Para  $R$  solo se usaron los valores de 0 y 1.0 que define los casos límite de acero solamente en dos caras y acero distribuido en partes iguales en cuatro caras.

Las figs 6 y 7 muestran ejemplos de diagramas de este tipo en la forma en que se han presentado, con fines de diseño.

#### 3.4 Secciones circulares. Idealización

Si el acero se encuentra uniformemente distribuido sobre el perímetro de una circunferencia, el refuerzo se puede idealizar como un anillo de igual área y de diámetro medio igual al diámetro de la circunferencia definida para los centros de las varillas (fig 8).

La sección de concreto puede tener forma circular o cuadrada. Este último caso, que se incluyó en el programa, es muy poco frecuente, por lo cual no se llegó a la producción de diagramas para su cálculo.

#### 3.5 Secciones circulares. Cálculo de los diagramas

Siguiendo un procedimiento similar al de las secciones rectangulares se calculan separadamente las resultantes del concreto y el acero.

a) Resultantes del concreto ( $C_c$  y  $M_c$ ). Si la sección es cuadrada se usan las fórmulas obtenidas para las secciones rectangulares.

Si la sección es circular, las fórmulas se obtienen con el mismo criterio, por integración del diagrama de esfuerzos.

b) Resultantes del acero ( $F_s$  y  $M_s$ ). Las fórmulas que se deducen en el apéndice han sido ya presentadas con ligeras variantes por Everard y Cohen<sup>4</sup>. Se considera que la formulación que se utiliza en este trabajo es más general, ya que cubre todas las combinaciones posibles de fuerza y momento.

Los valores de las profundidades del eje neutro se expresan en función del ángulo con que se corta el acero de refuerzo a esa profundidad. Se distinguen tres zonas: fluencia en tensión, fluencia en compresión y zona con esfuerzo menor al de fluencia.

El hecho de que el acero tenga una distribución continua y representable por medio de funciones sencillas, permite efectuar integraciones y llegar a ecuaciones generales para el cálculo de las resultantes.

El programa para computadora, apéndice B, es muy similar al correspondiente a secciones rectangulares. Para la producción de gráficas para diseño se usaron los mismos intervalos para las variables.

La fig 9 presenta un ejemplo de los diagramas de interacción obtenidos.

### 3.6 Comparación de resultados

Los diagramas obtenidos han sido comparados con los de otros autores. Con respecto a los presentados por Whitney<sup>3</sup> se tienen resultados muy semejantes para secciones rectangulares con discrepancias un poco mayores en la zona superior del diagrama, que Whitney consideró recta. Existen diferencias mucho más importantes en los diagramas para secciones circulares, debido a que Whitney consideró una sección rectangular equivalente a la circular y concentró el acero en una sola posi-

ción; los errores son máximos en la zona cercana al punto de carga axial nula, llegando a ser del orden de 20 por ciento.

Para secciones rectangulares Whitney presenta únicamente el caso de acero concentrado en las caras extremas sin acero lateral.

Recientemente han sido publicados diagramas de interacción obtenidos por Everard y Cohen<sup>4</sup>, con criterios muy parecidos a los usados en este trabajo. Las diferencias en los resultados son debidas a que en los diagramas de Everard se consideró otra forma del rectángulo equivalente de concreto, descontándose el área de concreto desplazada por el acero y se incluyó un factor de seguridad en los elementos mecánicos de los diagramas. Una desventaja de esos diagramas es que se plantean en función de  $f'_c$  y  $f_y$ , lo que obliga a utilizar un gran número de gráficas para valores redondeados en unidades inglesas de estas variables.

#### 4. CARGA AXIAL Y FLEXIÓN EN DOS DIRECCIONES

##### 4.1 Planteamiento del problema

Los conceptos de diagrama de interacción para carga axial y momento en una dirección principal son aplicables incluso en el caso en que la carga tenga excentricidad con respecto a los dos ejes principales de la sección.

En este caso, el diagrama resulta ser una superficie de falla en tres dimensiones, de tal modo que todos los puntos sobre esta superficie corresponden a posibles combinaciones de carga axial y momento en cada una de las dos direcciones principales que causan la falla de la sección. En la fig 10 se aprecia la forma de una superficie típica de falla.

Esta representación en tres dimensiones es muy práctica

para entender el problema, pero no lo es para los fines del diseño; para esto es necesario representar dos dimensiones por medio de cortes de la superficie original.

Para llegar a la forma más apropiada de simplificación hay que estudiar la superficie en tres dimensiones de la cual ya conocemos las trazas sobre los planos  $P - M_x$  y  $P - M_y$  que son los diagramas de interacción para momento en una dirección.

Con objeto de definir mejor la superficie de interacción, se obtuvieron fórmulas para el cálculo de los elementos mecánicos que originan la falla de la sección, a partir de una posición dada del eje neutro. En esta forma se calcularon puntos al azar sobre la superficie y posteriormente se elaboraron programas para encontrar cortes horizontales y verticales de la misma. Únicamente se consideraron secciones rectangulares con acero distribuido simétricamente con respecto a los dos ejes principales.

Además de las variables que intervienen en el caso de flexión en una dirección debe también tomarse en cuenta la relación  $b/t$ , que resulta más compleja y cuyo efecto se discutirá en el inciso 4.7.

#### 4.2 Procedimiento para el cálculo de los elementos mecánicos resultantes e idealización del refuerzo

Una vez definidas las características de una sección se pueden encontrar los elementos mecánicos resistentes  $P$ ,  $M_x$  y  $M_y$ , calculando deformaciones y esfuerzos en forma similar a la que se hizo para flexión en una dirección para una profundidad e inclinación dadas del eje neutro. No es posible, sin embargo, establecer ninguna relación a priori entre la inclinación del eje neutro y la relación  $M_x/M_y$  que resulta.

Se consideraron dos distribuciones del refuerzo: en la primera, todo el acero se concentra en las esquinas en partes iguales con el mismo recubrimiento en las dos direcciones; en la segunda, se considera un tubo rectangular de área equivalente, de espesor constante y con igual recubrimiento en las dos direcciones.

Inicialmente se obtuvieron las fórmulas para calcular las resultantes de fuerza y momentos a partir de una posición determinada del eje neutro para los dos casos de distribución de acero, y se prepararon programas de computadora que permitieron calcular puntos sobre la superficie de interacción dando como dato la posición del eje neutro. Estos programas sirvieron de núcleos para otros posteriores, más elaborados, y para proporcionar una idea inicial de la forma de la superficie.

#### 4.3 Refuerzo concentrado en las esquinas

El procedimiento de cálculo es del mismo tipo que se usó para momentos en una sola dirección. La suposición de un eje neutro que forme un ángulo,  $\theta$ , con el lado corto de la sección, implica resultantes de fuerzas que tienen momento con respecto a los dos ejes principales de la sección. Suponiendo una deformación de aplastamiento en la fibra de concreto más alejada en compresión (fig 11), se definen otras deformaciones en cualquier punto de la sección y se pueden calcular las resultantes del acero y del concreto. En el apéndice A se presentan detalladamente las fórmulas para el cálculo. Por ser más fácil de representar se supone el eje neutro siempre horizontal y la sección, girada en ángulo  $\theta$ . La profundidad del eje neutro se define como su distancia de la esquina más alejada en compresión. Bastará considerar valores de  $\theta$  entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , ya que el acero está simétricamente distribuido.

A partir de las distancias entre el eje neutro y cada uno de los puntos de concentración del refuerzo ( $y_i$ ), se calculan, las deformaciones y esfuerzos en las varillas. Para comparar la deformación de cada varilla con la de fluencia, se encuentran profundidades límite del eje neutro de la misma forma que se hizo en el caso de flexión en una dirección. La resultante de fuerza se calcula al multiplicar el esfuerzo obtenido por una cuarta parte del área total de acero. Los momentos se obtienen multiplicando la fuerza por el brazo de palanca en dirección  $x$  o  $y$ .

Las resultantes del concreto se calculan con fórmulas derivadas de las que obtuvieron originalmente Mattock, Kriz y Hognestad<sup>5</sup>. Se distinguen cinco casos a partir de la posición del eje neutro y en cada uno se tienen distintas fórmulas para las resultantes. Para cada caso existe un rango de aplicación determinado por valores límite de la profundidad del eje neutro.

#### 4.4 Refuerzo distribuido uniformemente

Se supuso que todo el acero está distribuido en una sección tubular de espesor constante y de recubrimiento igual en las dos direcciones.

El procedimiento de cálculo es del mismo tipo que el usado en el inciso anterior; las fórmulas para las resultantes del concreto no cambian, mientras que las fórmulas para las resultantes del acero se complican notablemente, y conviene considerar por separado las resultantes de cada una de las barras que forman el tubo (fig 12). Para ellas se distinguen los seis casos mencionados en el inciso 3.2 respecto al acero lateral. Las fórmulas que se usan varían en función de la inclinación del eje neutro, distinguiéndose dos tipos para barras, sea en dirección  $x$  o  $y$ .

Las resultantes de fuerza y momento de cada barra se calculan sumando las contribuciones de las zonas de esfuerzo que intervienen en cada caso dependiendo de la posición del eje neutro.

#### 4.5 Reducción a dos dimensiones de la superficie de falla

Para estudiar la forma de la superficie de interacción y representar los resultados en dos dimensiones, existen dos procedimientos.

El primero es efectuar cortes horizontales de la superficie, es decir, obtener curvas de igual carga axial de falla para distintas combinaciones de momentos en cada una de las dos direcciones principales.

La otra representación en dos dimensiones se logra por medio de cortes verticales de la superficie, es decir, diagramas de interacción para una relación fija entre los dos momentos  $M_x$  y  $M_y$ .

Para estudiar la influencia de las variables y escoger las gráficas más apropiadas para diseño se obtuvieron las dos simplificaciones mencionadas por medio de programas de computadora elaborados para ambos tipos de distribución del acero.

En los cortes horizontales obtenidos para una sección dada (fig 13), se aprecia que las curvas varían sensiblemente en su forma para distintos valores de las cargas axiales de falla. Cuando estas son muy grandes, la presencia de momentos iguales en dos direcciones no reduce la capacidad con respecto al caso en que solo existe momento en una dirección.

Para cargas axiales menores, existe reducción de capacidad solo para relaciones entre los dos momentos cercanas a uno; a medida que

va disminuyendo la carga de falla, la zona de influencia aumenta hasta que para cargas pequeñas el efecto de los dos momentos se suma prácticamente y el momento resistente de una sección con una relación  $M_x/M_y = 1$  es aproximadamente la mitad del de una sección con  $M_x/M_y = 0$  para la misma carga axial de falla.

La segunda simplificación lleva a diagramas de interacción para valores dados de  $M_x/M_y$ , que, como se ve en las figs 14 y 15, no difieren, en su forma, de los ya conocidos para el caso de flexión en una dirección.

#### 4.6 Programación para computadora

Se obtuvieron inicialmente programas para el cálculo de puntos al azar sobre la superficie de falla. El funcionamiento de estos es similar al de los programas para flexión en una dirección. Se hace variar la profundidad del eje neutro para una inclinación fija del mismo. No existe una relación constante entre  $M_x/M_y$  y la inclinación del eje neutro.

Los programas obtenidos para acero concentrado y distribuido se encuentran en el apéndice B.

Con el fin de obtener las dos reducciones de la superficie de falla a las dos dimensiones mencionadas en el párrafo anterior, se modificaron los programas base para el cálculo de los puntos buscando la convergencia hacia valores dados de  $P_u$  o de la relación  $M_x/M_y$ , respectivamente.

Para el primer caso se mantiene fija una inclinación del eje neutro y se varía la profundidad por medio de interpolaciones sucesivas hasta obtener el valor deseado de  $P_u$ . En seguida se aumenta la inclinación y se repite la operación anterior.

Para el segundo caso, se mantiene fija la profundidad del eje neutro y se varía la inclinación hasta que converja a la relación  $M_x/M_y$  deseada.

#### 4.7 Efecto de la relación b/t

Además de las variables que influyen en el comportamiento de una sección sujeta a carga axial y a flexión en una dirección, debe tomarse en cuenta, para flexión en dos direcciones, la relación b/t.

En el caso de flexión en una sola dirección, los valores de b y t desaparecen en las fórmulas cuando estas se hacen adimensionales.

Por el contrario se puede ver que, para flexocompresión biaxial, en las fórmulas del apéndice A, subsiste el valor b/t. Esto representa un inconveniente muy grande en cuanto a la presentación de gráficas para diseño, ya que ocasiona un juego de gráficas para cada valor de b/t que se desee incluir.

Para tratar de eliminar esta variable de las gráficas de diseño, se estudió detalladamente su influencia.

Como se demuestra en la fig 16, si el recubrimiento en cada dirección es proporcional al lado en la dirección correspondiente, los diagramas que se obtienen son idénticos para cualquier valor de b/t.

La demostración se basa en el hecho de que, para cada posición del eje neutro en una sección cuadrada, existe una posición homóloga en la sección rectangular para la cual se obtienen los mismos valores adimensionales de las resultantes.

Sin embargo, este no es el caso común, ya que usualmente el recubrimiento constante en las dos direcciones, se encontraron diagramas para valores de b/t desde 0.25 hasta 4 y se compararon entre sí. Se notó

que la diferencia entre los diagramas para distintos  $b/t$  dependía principalmente de los valores de  $d/t$  y la influencia de  $b/t$  es proporcional al recubrimiento y el porcentaje de acero.

Las figs 17 y 18 muestran diagramas de interacción para distintos valores de la variable mencionada y para valores constantes de la relación del recubrimiento al lado menor. Para los dos tipos de refuerzo considerados, los valores sobre los diagramas que corresponden a sección rectangular son mayores que los correspondientes a sección cuadrada. En las gráficas las diferencias máximas son del orden del 20 por ciento para acero en las esquinas y del 14 por ciento para acero uniforme. El caso presentado es el más desfavorable; para  $r/b = 0.15$ , las diferencias máximas se reducen a la mitad.

De lo anterior se deduce que, excepto en los casos de secciones con acero en las esquinas, y recubrimientos y porcentajes grandes del mismo, si se usan los diagramas para secciones cuadradas para el cálculo de secciones rectangulares (con relaciones  $b/t$  comprendidas entre 0.25 y 4.0), se cometen errores del lado de la seguridad que son de orden de magnitud no mayor de los involucrados en las hipótesis iniciales.

#### 4.8 Presentación para el diseño

La presentación para diseño más adecuada es la del uso de diagramas de interacción para distintas relaciones de momentos adimensionales en las dos direcciones,  $R_x/R_y$ , que permitiesen cubrir cualquier valor de esta variable por medio de una interpolación lineal.

A partir de que los cortes horizontales de la superficie de falla son simétricos con respecto a una bisectriz correspondiente a  $R_x/R_y = 1$  (fig 13), se puede incluir cualquier caso en el intervalo

$$0 \leq \frac{R_x}{R_y} \leq 1$$

si se escoge  $R_x$  como el menor de los dos momentos adimensionales. Se aprecia además que si se usan los dos segmentos que unen los puntos para  $R_x/R_y$  iguales respectivamente a 0, 0.5 y 1.0 para representar un corte horizontal cualquiera de la superficie de interacción, el error cometido es siempre muy pequeño y del lado de la seguridad. Se obtuvieron así diagramas para las relaciones  $R_x/R_y = 0.5$  y 1.0 que, junto con los diagramas para flexión en una dirección, cubren los casos para flexión en una dirección cualquiera, para secciones cuadradas, con un error mínimo y con un tipo de gráfica que es ya familiar a la mayoría de los calculistas. Los diagramas de interacción obtenidos cubren los mismos rangos e intervalos de las variables que se utilizaron para flexión en una dirección principal.

Para la solución de secciones no cuadradas se proponen los dos métodos siguientes.

a) Utilizar un grupo de 16 gráficas adicionales correspondientes a la relación  $b/t = 1/3$ , resolviendo los casos intermedios por medio de interpolación lineal.

Los diagramas hasta aquí mencionados han sido ya publicados<sup>2</sup>, utilizados en la práctica y comprobados con los resultados de 57 columnas ensayadas por distintos autores<sup>6</sup>.

La relación promedio entre la carga máxima calculada y experimental fue de 1.09, y el coeficiente de variación del 10 por ciento.

El inconveniente mayor de estos diagramas es que requieren en general un buen número de interpolaciones para situar cada caso particular; esto, además de resultar incómodo, hace perder precisión.

Otro inconveniente en el uso de estas gráficas es que no pueden usarse para  $b/t > 1$  ya que la extrapolación no es válida.

El caso de  $b/t > 1$  puede presentarse, aunque no muy frecuentemente, ya que  $b$  no siempre es el menor de los lados sino el lado en la dirección del momento adimensional menor, puesto que la relación  $R_x/R_y$  siempre debe ser menor que uno.

b) Otra forma de tomar en cuenta la relación  $b/t$  consiste en el uso de gráficas correctivas para encontrar un factor que afecte al momento flexionante y permita usar en todos los casos los diagramas para secciones cuadradas.

En los diagramas de interacción de las figs 17 y 18 se puede apreciar que la relación entre el momento en una sección rectangular cualquiera y el momento en una sección cuadrada, para la misma carga, se mantiene aproximadamente constante para cualquier valor de la carga axial.

Se encontró esta relación de momentos para cada caso promediando los valores correspondientes a  $K = 0, 0.5$  y  $1.0$ .

Para esto fue necesario elaborar un programa adicional de computadora que además de encontrar puntos con una relación  $R_x/R_y$  fija, buscara, por tanteos, puntos para un valor dado de la carga axial de falla,  $K$ .

Se obtuvo así un coeficiente correctivo promedio para los rangos de las variables consideradas en los diagramas y para valores de  $b/t$  entre  $0.25$  y  $4$ .

En las figs 19 a 22 se muestran las gráficas obtenidas que permiten calcular un valor ficticio del momento flexionante con el cual se puede entrar a las gráficas para secciones cuadradas correspondientes al mismo valor de la relación de recubrimiento al lado menor que la sec-

ción rectangular considerada.

En estas gráficas se aprecia que para valores de  $r/b$  menores que 0.10 los factores correctivos son despreciables y que, solo para grandes valores de recubrimiento asociados a considerables cantidades de refuerzo esos factores son dignos de tomarse en cuenta.

Este segundo método se considera más completo y sencillo que el anterior y será el que se utilice en la presentación final de los diagramas para diseño.

En los ejemplos del siguiente capítulo se indican algunos criterios para la utilización práctica de los diagramas y se ponen en evidencia algunos inconvenientes que pueden presentarse.

## 5. EJEMPLOS DE APLICACION

### 5.1 Flexión en una dirección

Diseñar una columna corta con las características siguientes:

Sección rectangular de 30 x 50 cm

Concreto de  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$

Acero grado duro de  $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

Carga axial de trabajo,  $P = 100 \text{ ton}$

Momento flexionante de trabajo,  $M = 22 \text{ ton-m}$

a) Determinación de las cargas de diseño. Suponiendo que las cargas de trabajo consignadas sean la combinación más desfavorable para la sección y que sean debidas a efectos de cargas muertas y vivas, de acuerdo con el artículo 240.II de la ref 1, el factor de carga será 1.1. Además, si la sección fallara por compresión antes de la fluencia del acero, las cargas axiales se deberán multiplicar por 1.2. Por la relación carga-

momento y por las características de la sección, no parece que este tipo de falla vaya a ocurrir, por lo que se tomará únicamente el factor 1.1 para las cargas axiales, revisando después el tipo de falla que ocurre.

$$P_u = 100 \times 1.1 = 110 \text{ ton}$$

$$M_u = 20 \times 1.1 = 24.2 \text{ ton-m}$$

b) Dimensiones de diseño. Según el artículo 240.III (ref 1) hay que reducir en 2 cm las dimensiones de proyecto.

$$b^* = 28 \text{ cm} \quad t^* = 48 \text{ cm}$$

c) Resistencia de diseño. Según el artículo 240.IV (ref 1) la resistencia del concreto de diseño será, por tratarse de cargas accidentales,

$$f_c^* = (1 - c_v) f_c'$$

Si se tiene la seguridad de que el concreto empleado será mezclado mecánicamente y proporcionado por peso, se puede usar  $c_v = 0.15$

$$f_c^* = 0.85 \times 250 = 212 \text{ kg/cm}^2$$

La resistencia del acero de diseño será, por tratarse de acero grado duro y para cargas accidentales

$$f_y^* = 0.9 f_y = 3600 \text{ kg/cm}^2$$

d) Recubrimiento. El recubrimiento libre deberá ser igual al diámetro de las varillas. Si se usa varilla # 8

$$r = 2.5 + 1.25 = 4 \text{ cm}$$

e) Datos para el uso de los diagramas

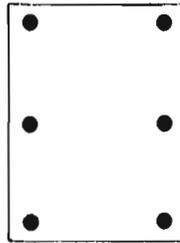
$$d/t = 46/50 = 0.9$$

$$f_c'' = 0.8 f_c^* = 170 \text{ kg/cm}^2$$

$$K = \frac{P_u}{b t f_c''} = \frac{110\,000}{20 \times 48 \times 170} = 0.48$$

$$R = \frac{M_u}{b t^2 f_c''} = \frac{2420000}{20 \times 48^2 \times 170} = 0.223$$

Tomando en cuenta que el momento actúa en una sola dirección, la manera más efectiva de distribuir el refuerzo será colocarlo solamente en las caras extremas. Sin embargo, debido a la apreciable longitud del lado largo, no es conveniente dejar sin refuerzo las caras laterales, por lo cual resulta conveniente la distribución de refuerzo siguiente.



f) Comentarios sobre la distribución del refuerzo. No es fácil determinar la relación  $A_{SL}/A_{SE}$  que deba usarse de hecho, si se considera al acero intermedio como acero lateral, se tendría  $A_{SL}/A_{SE} = 1/3$ ; esta suposición resultaría poco conservadora para la zona inferior del diagrama (cargas axiales medias y bajas); para cargas altas de compresión la distribución del acero tiene poca influencia en la resistencia. La distribución considerada resulta poco conservadora ya que el acero, que en realidad se encuentra en el centro de la sección, se está considerando distribuido a lo largo del peralte, lo cual implica esfuerzos promedio en general más altos y brazo de palanca mayor con respecto al centro de la sección. Una suposición más conservadora, y que da resultados muy aceptables prácticamente en cualquier zona del diagrama de interacción,

es la de considerar  $A_{SL}/A_{SE} = 1$ .

Pueden recomendarse dos alternativas para considerar el acero intermedio. Si su cantidad es muy baja puede despreciarse y no tomarlo en cuenta al calcular el valor de  $q$  utilizando los diagramas para  $A_{SL}/A_{SE} = 0$ ; en cualquier otro caso calcúlese  $q$  con el acero total y úsen se los diagramas para  $A_{SL}/A_{SE} = 1$ .

g) Uso de los diagramas. En el diagrama referente a  $A_{SL}/A_{SE} = 1$ , y  $d/t = 0.9$  (fig. 7), para los valores de  $K$  y  $R$ , obtenemos  $q = 0.36$ , por lo tanto,

$$A_S = q \cdot b \cdot t \cdot \frac{f_c}{f_y} = 0.36 \times 28 \times 48 \times \frac{212}{3600} = 28.5 \text{ cm}^2$$

El armado puede ser como el del croquis anterior considerando  $A_S = 6 \text{ //} 8$ .

## 5.2 Flexión en dos direcciones

Diseñar una columna corta con las mismas características de sección y materiales de la del ejemplo anterior y para las combinaciones de carga siguientes

### 1. Cargas muertas

$$P_u = 160 \text{ ton}, M_{ux} = 11 \text{ ton-m}, M_{uy} = 15 \text{ ton-m}$$

### 2. Cargas muertas y sismo en dirección 'y'

$$P_u = 120 \text{ ton}, M_{ux} = 7 \text{ ton-m}, M_{uy} = 25 \text{ ton-m}$$

### 3. Cargas muertas y sismo en dirección 'x'

$$P_u = 120 \text{ ton}, M_{ux} = 15 \text{ ton-m}, M_{uy} = 12 \text{ ton-m}$$

a) Esfuerzos de diseño. Para las condiciones de carga 2 y 3 los esfuerzos serán los mismos del ejemplo anterior

$$f_c^* = 212 \text{ kg/cm}^2, f_c'' = 170 \text{ kg/cm}^2, f_y^* = 3600 \text{ kg/cm}^2$$

Para la condición 1 los esfuerzos serán

$$f_c^* = 0.9 (1 - C_v) f_c' = 0.9 \times 212 = 191 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y^* = 0.8 f_y = 3200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.8 f_c^* = 153 \text{ kg/cm}^2$$

b) Datos de diseño

$$d/t = 0.9, b/t = 0.6$$

Condición 1

$$K = \frac{160\ 000}{28 \times 48 \times 153} = 0.780$$

$$R_x = \frac{11\ 000\ 000}{28^2 \times 48 \times 153} = 0.191$$

$$R_y = \frac{15\ 000\ 000}{28 \times 48^2 \times 153} = 0.152$$

Condición 2

$$K = \frac{120\ 000}{28 \times 48 \times 153} = 0.526$$

$$R_x = \frac{7\ 000\ 000}{28^2 \times 48 \times 170} = 0.110$$

$$R_y = \frac{25\ 000\ 000}{28 \times 48^2 \times 170} = 0.228$$

Condición 3

$$K = 0.526$$

$$R_x = 0.225$$

$$R_y = 0.109$$

c) Uso de los diagramas

## Condición 1

Para esta condición se tiene  $R_x/R_y > 1$  que no está cubierto por los diagramas presentados. Será necesario considerar como  $R_x$  el menor de los dos momentos adimensionales e invertir así la relación  $b/t$

$$R_x/R_y = \frac{0.152}{0.191} = 0.80; \quad b/t = 1.67; \quad \frac{\text{recubrimiento}}{\text{lado menor}} = \frac{4}{30} = 0.15$$

$$d/t = \frac{26}{30} = 0.85$$

Entrando a la gráfica para sección cuadrada, acero uniforme,  $d/t = 0.85$ ,  $R_x/R_y = 0.5$

Para  $K = 0.78$ ,  $R_y = 0.191$ , se obtiene  $q = 0.56$

Para  $R_x/R_y = 1.0$ , se obtiene  $q = 0.86$

Interpolando para  $R_x/R_y = 0.8$

$$q = 0.56 + 3/5 (0.30) = 0.74$$

Con objeto de tomar en cuenta la relación  $b/t$  se recurre a la gráfica correctiva de la fig 21 y para  $b/t = 1.67$ ,  $q = 0.73$ , se obtiene un factor de 1.05 para  $R_x/R_y = 1$  y de 1.02 para  $R_x/R_y = 0.5$ . En ambos casos el factor es bastante bajo y puede despreciarse; para una solución más rigurosa, convendrá repetir el cálculo de 'q' para un valor de  $R_y = 0.191/1.05 = 0.183$ . Se obtiene entonces  $q = 0.70$ .

## Condición 2

$$R_x/R_y = 0.50 \quad b/t = 0.60$$

$$K = 0.526 \quad R_y = 0.228$$

Considerando acero uniforme,  $d/t = 0.90$ ,  $R_x/R_y = 0.50$ , se obtiene  $q = 0.62$ .

También en este caso puede ignorarse la corrección referente a la relación  $b/t$ .

Condición 3

$$d/t = 0.85 \quad R_x/R_y = 0.5$$

$$K = 0.526 \quad R_y = 0.225;$$

se obtiene  $q = 0.69$ .

d) Determinación del refuerzo

Condición 1

$$A_s = 0.74 \times 28 \times 48 \times 153/3200 = 48 \text{ cm}^2$$

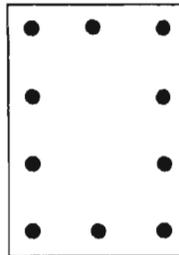
Condición 2

$$A_s = 0.62 \times 28 \times 48 \times 170/3600 = 39.5 \text{ cm}^2$$

Condición 3

$$A_s = 0.69 \times 28 \times 48 \times 170/3600 = 44 \text{ cm}^2$$

Una posible distribución del refuerzo es la siguiente



$$A_s = 10 \# 8$$

e) Comentarios sobre la distribución del refuerzo. Es difícil definir la posición real del eje neutro para una condición de carga dada, así como, por consiguiente, un criterio para la interpolación entre las dos distribuciones de refuerzo consideradas en los diagramas. De nuevo, es aconsejable considerar las dos posibilidades mencionadas para el caso de flexión en una dirección; una es suponer todo el acero distribuido uniformemente, y otra, calcular el valor de  $q$  tomando en cuenta solamente el acero próximo a las esquinas, utilizando las gráficas correspondientes a este caso.

## 6. RECONOCIMIENTO

Este trabajo fue realizado en la Sección de Estructuras del Instituto de Ingeniería de la UNAM, bajo la dirección de Roger Díaz de Cossío, al tiempo que el autor disfrutaba de una beca de la Fundación Ingeniería, A. C.

Los programas de computadora fueron procesados en el Centro de Cálculo Electrónico de la UNAM, a cuyo personal se reconoce su valiosa colaboración.

En su parte inicial, este trabajo fue realizado en colaboración con Oscar González Cuevas.

Se agradecen a Juan Casillas, Luis Esteva y Emilio Rosenblueth, Profesores Investigadores del Instituto, sus críticas y consejos.

## 7. REFERENCIAS

1. "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal". México, D. F. (1966)
2. "Gráficas para el dimensionamiento plástico de elementos de concreto reforzado", Instituto de Ingeniería (1965)
3. C. S. Whitney y E. Cohen, "Guide for ultimate strength design of reinforced concrete", Journal ACI, Proc. Vol. 53 (nov 1956)
4. N. K. Everard y E. Cohen, "Ultimate strength design of reinforced concrete columns", ACI, Publicación SP-7 (1964)
5. L. B. Mattock, L. B. Kriz y E. Hognestad, "Rectangular concrete stress distribution in ultimate strength design", Journal ACI, Proc. Vol. 57 (feb 1961)
6. R. Díaz de Cossío, "Dimensionamiento de elementos cortos de concreto sujetos a flexión biaxial", Revista IMCYC, Vol. 4, N° 20 (may-jun 1966)



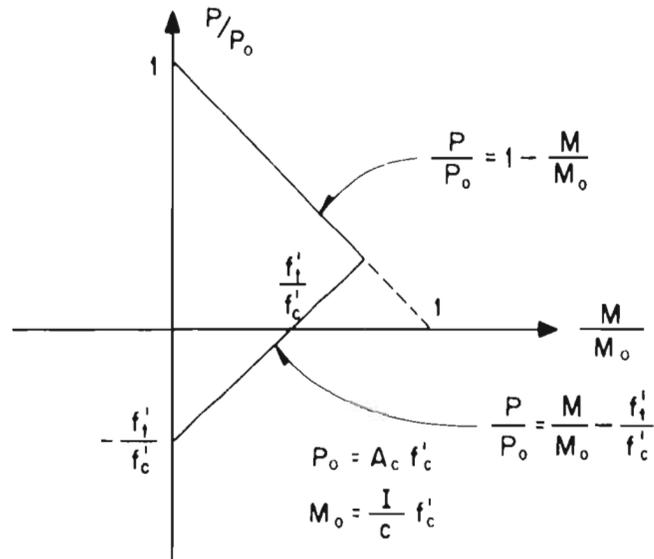
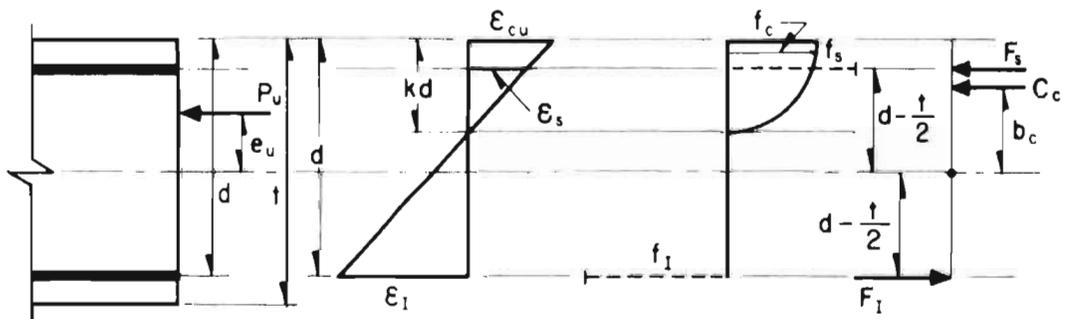


FIG 1a. DIAGRAMA DE INTERACCION FLEXION - CARGA AXIAL PARA MATERIAL ELASTICO



$$F_s + C_c - F_I - P_u = 0$$

$$C_c \times b_c + (F_s + F_I) \left( d - \frac{t}{2} \right) - P_u \times e_u = 0$$

FIG 1b. ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA UNA SECCION DE CONCRETO SUJETA A FLEXION Y CARGA AXIAL

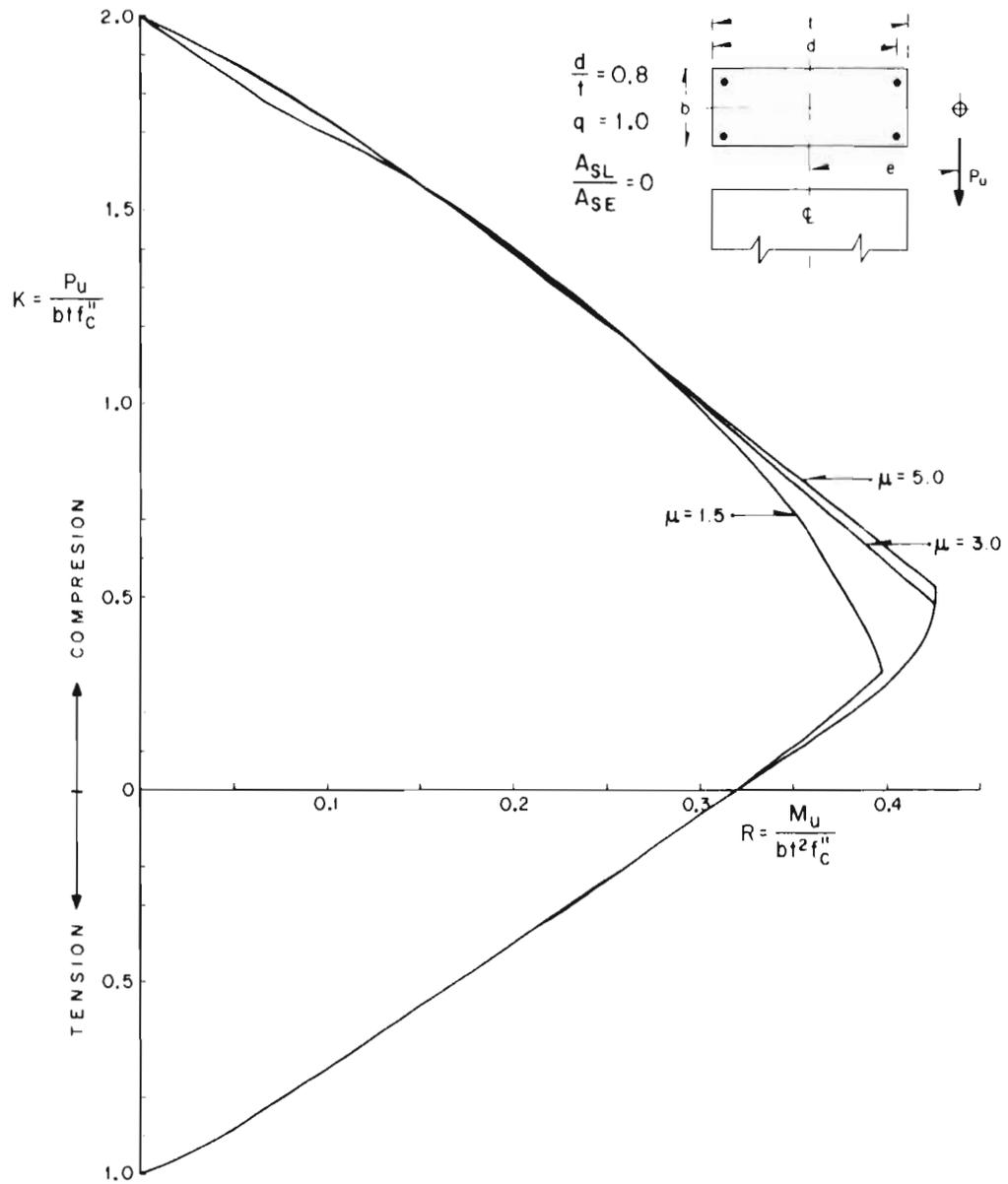


FIG 2. VARIACION DE LOS DIAGRAMAS DE INTERACCION CON LA RELACION  $\mu = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y}$ . SECCION RECTANGULAR

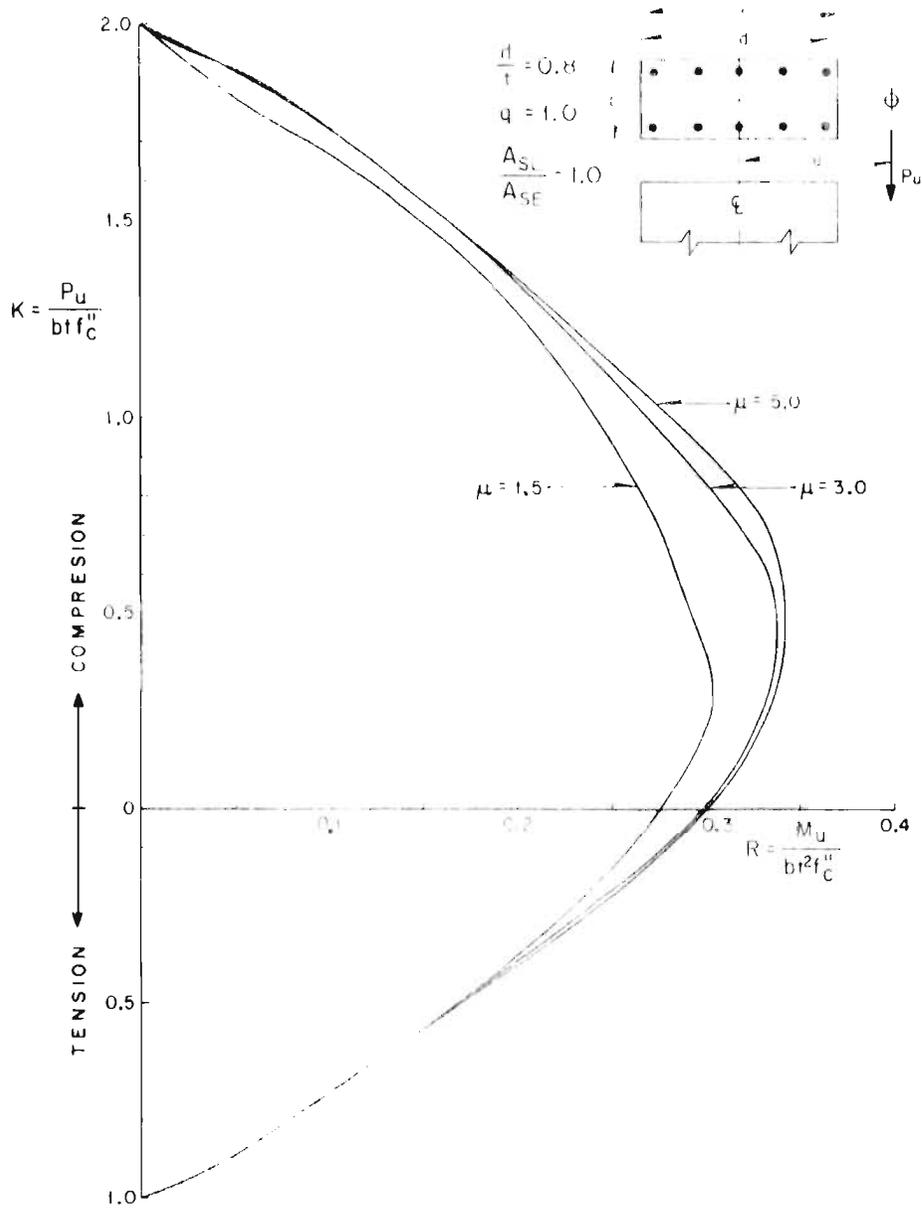


FIG 3. VARIACION DE LOS DIAGRAMAS DE INTERACCION CON LA RELACION  $\mu = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y}$ . SECCION RECTANGULAR

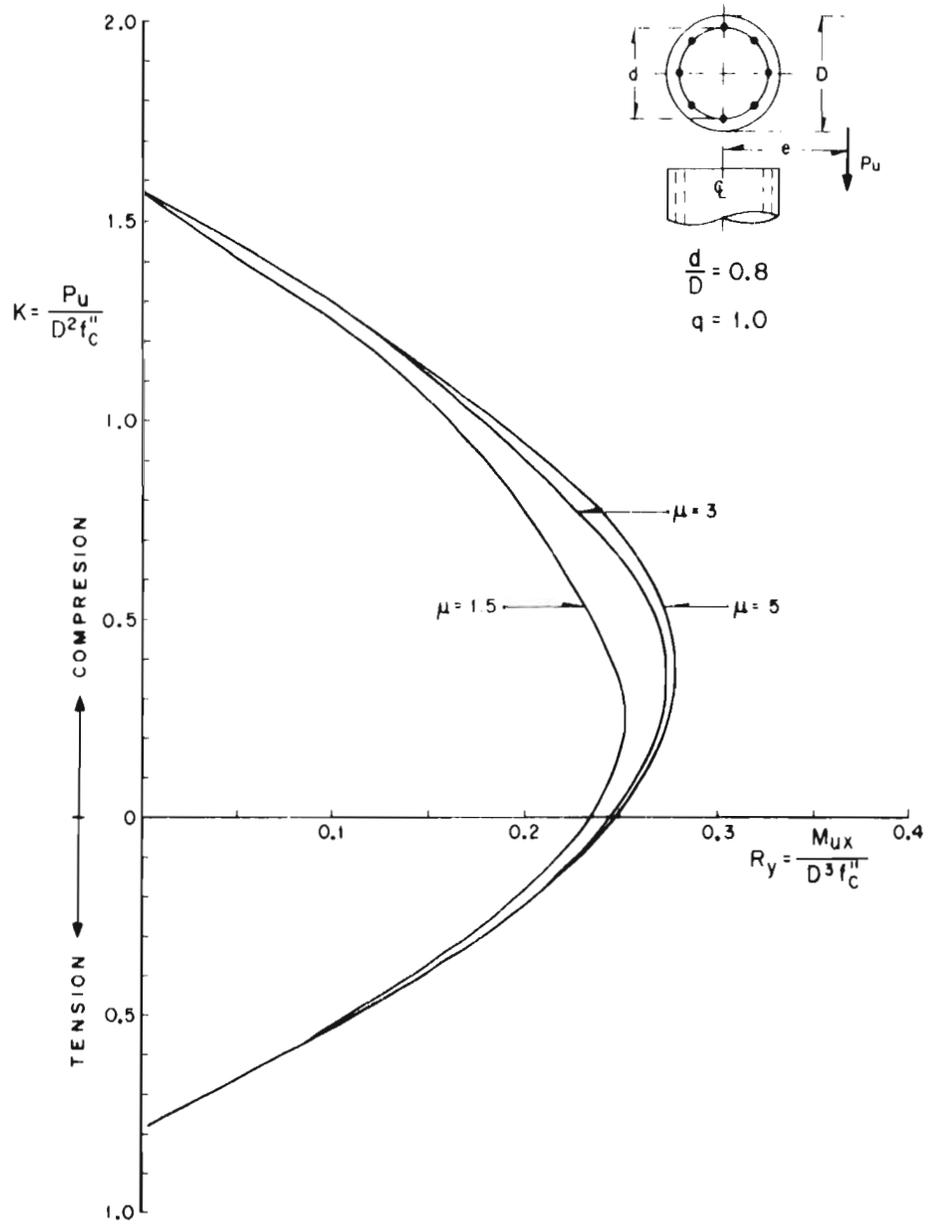
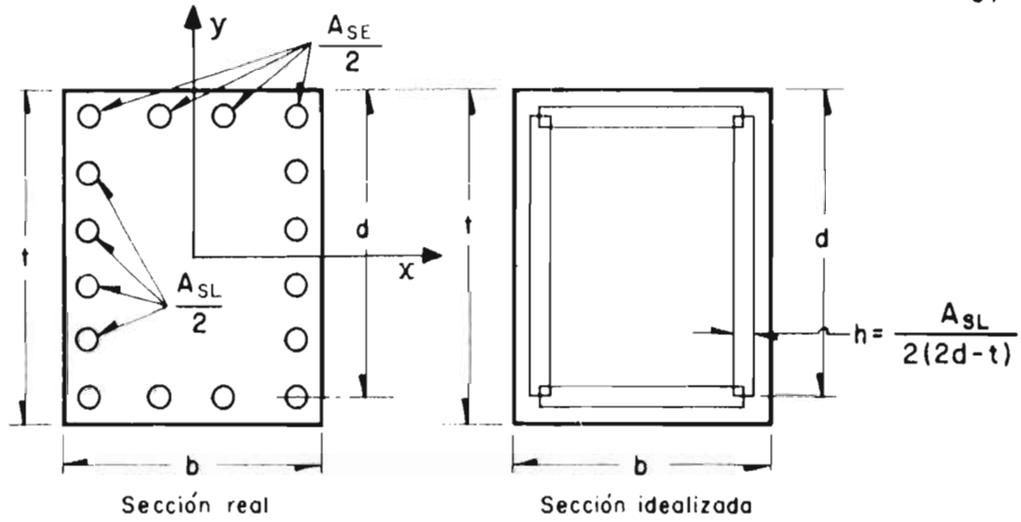
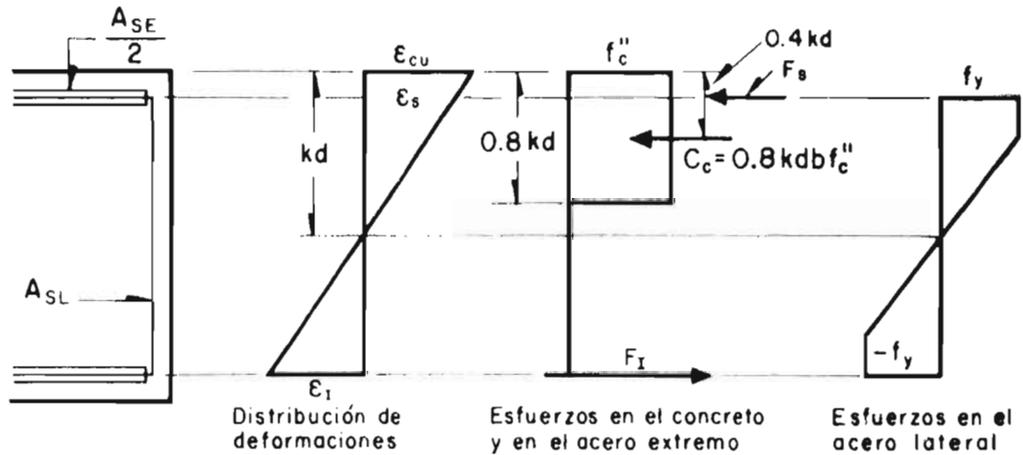


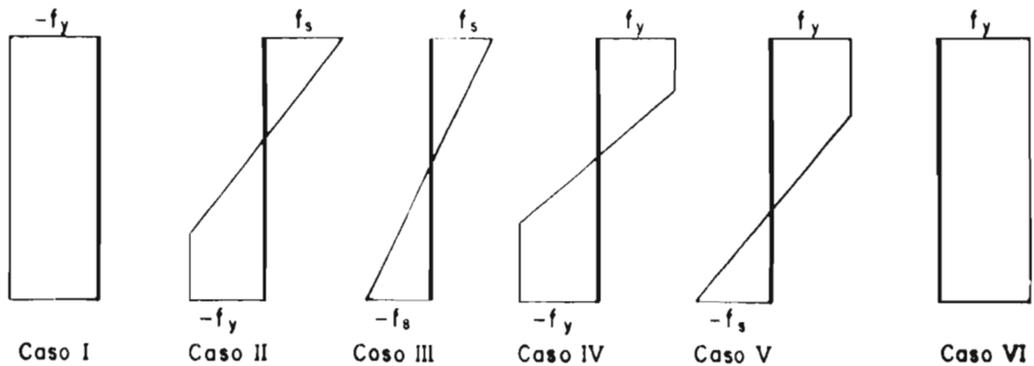
FIG 4. VARIACION DE LOS DIAGRAMAS DE INTERACCION CON LA RELACION  $\mu = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y}$ . SECCION CIRCULAR



a) Idealización del refuerzo

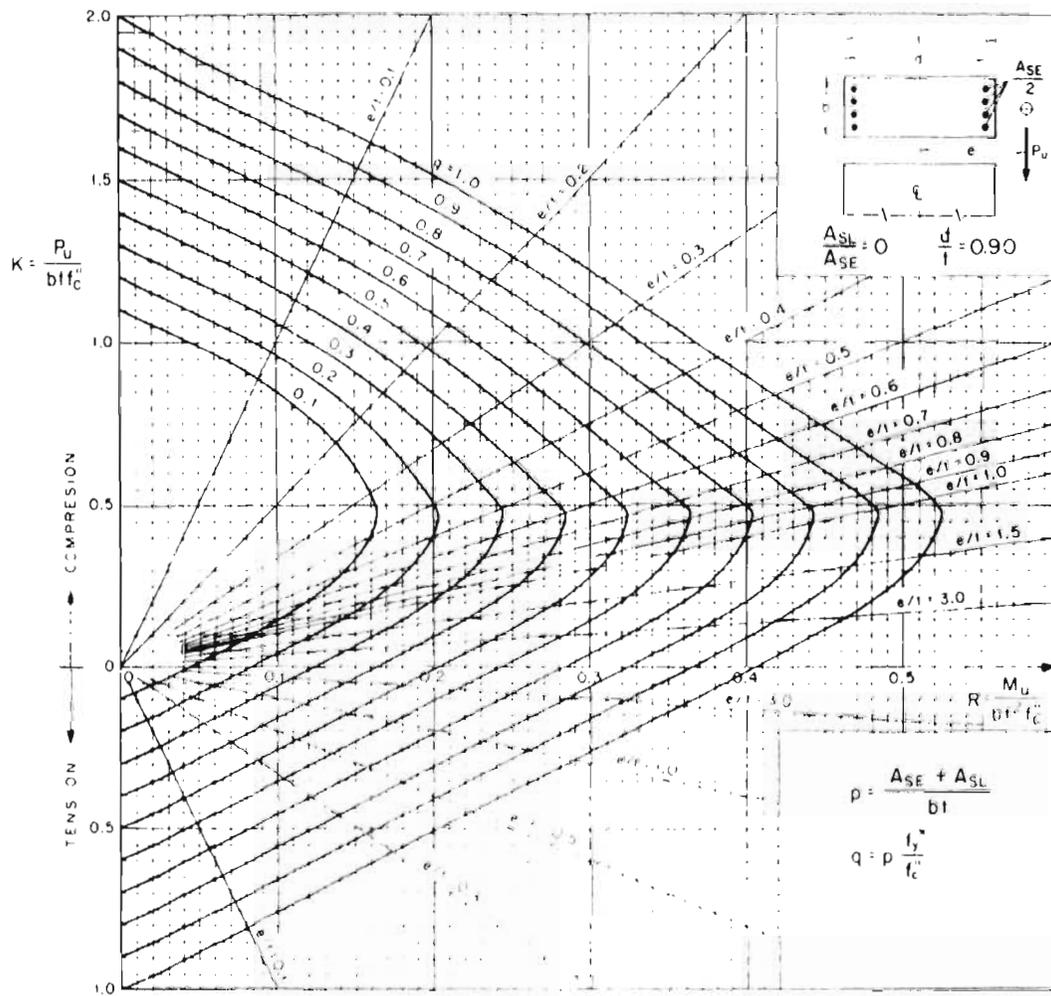


b) Distribución de esfuerzos



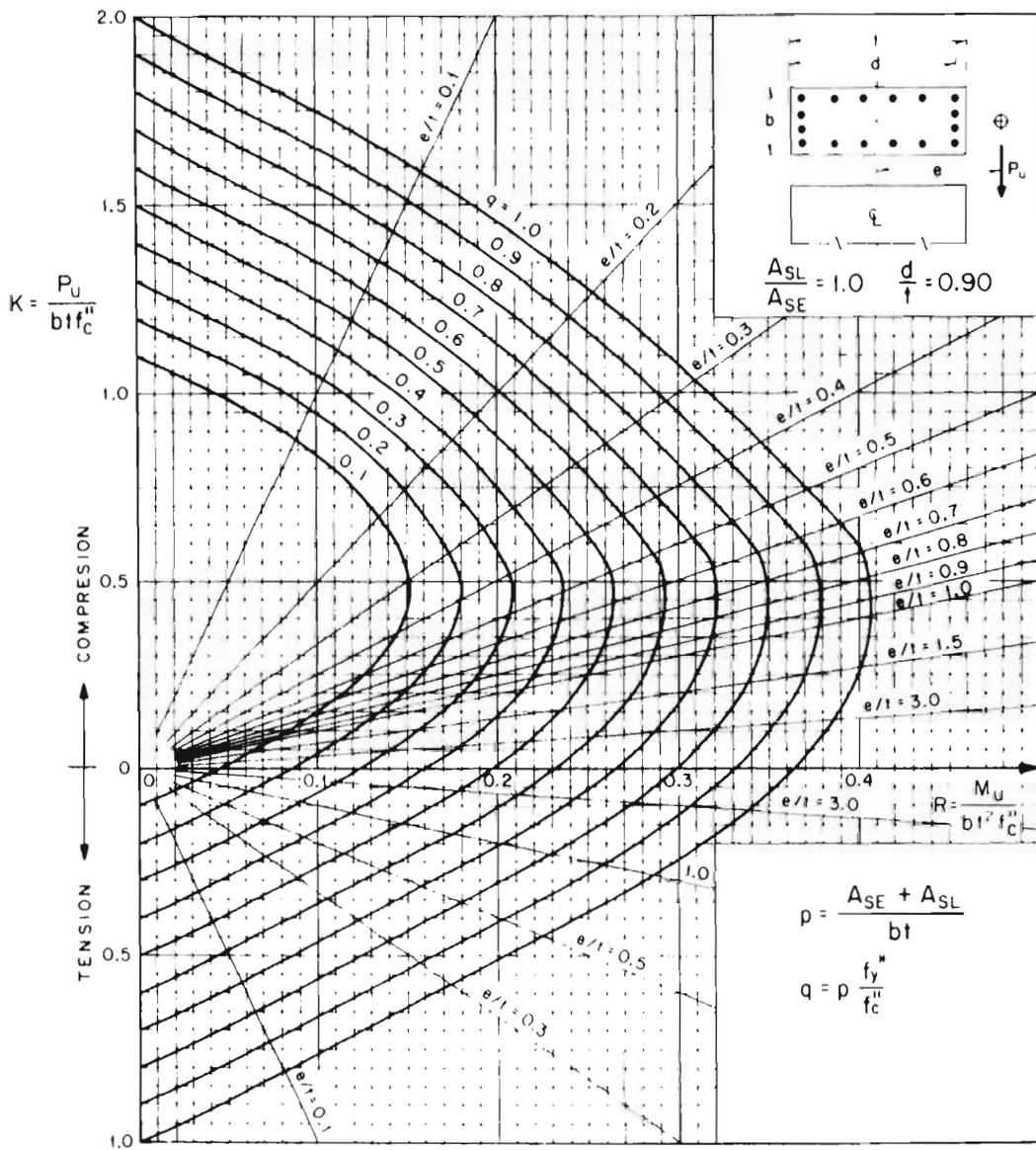
c) Posibles distribuciones de esfuerzos en el acero lateral

FIG 5. FLEXION EN UNA DIRECCION. SECCION RECTANGULAR



$f_c = 0.85 f_c'$  si  $f_c' = 280 \text{ kg/cm}^2$  o  $1015 \text{ kg/cm}^2$  si  $f_c' = 280 \text{ kg/cm}^2$   
 $M_u$ : Momento flexionante de folla  
 $P_u$ : Carga axial de folla

FIG 6. DIAGRAMA DE INTERACCION PARA FLEXOCOMPRESION, SECCION RECTANGULAR

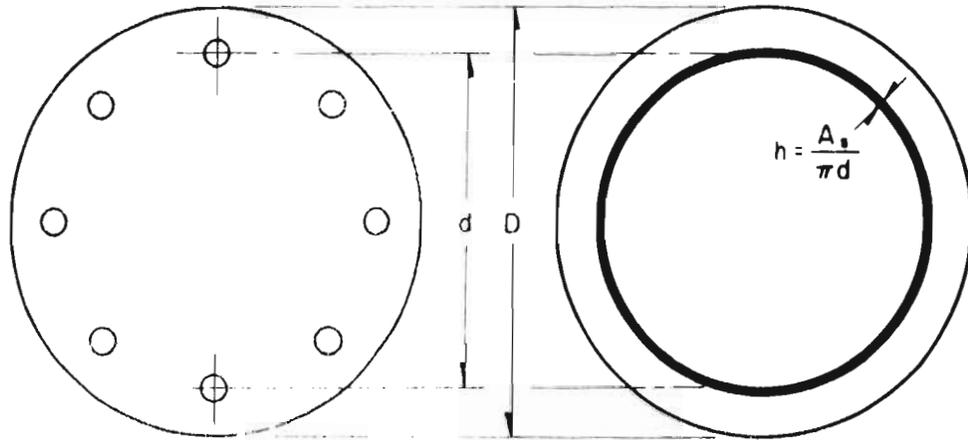


$f_c'' = 0.85 f_c^*$  si  $f_c^* \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f_c'' = (1.05 \cdot \frac{f_c^*}{1400}) f_c^*$  si  $f_c^* > 280 \text{ kg/cm}^2$

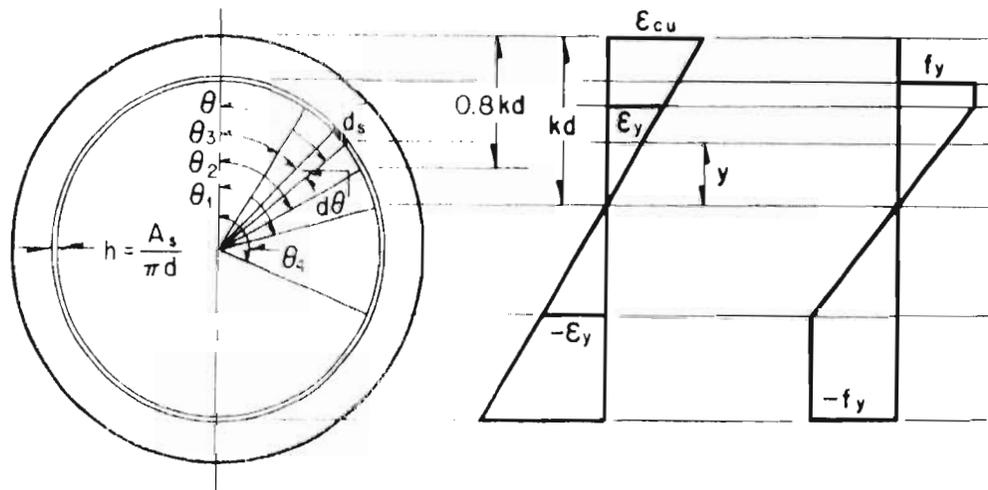
$M_u$  = Momento flexionante de falla

$P_u$  = Carga axial de falla

FIG 7. DIAGRAMA DE INTERACCION PARA FLEXOCOMPRESION. SECCION RECTANGULAR

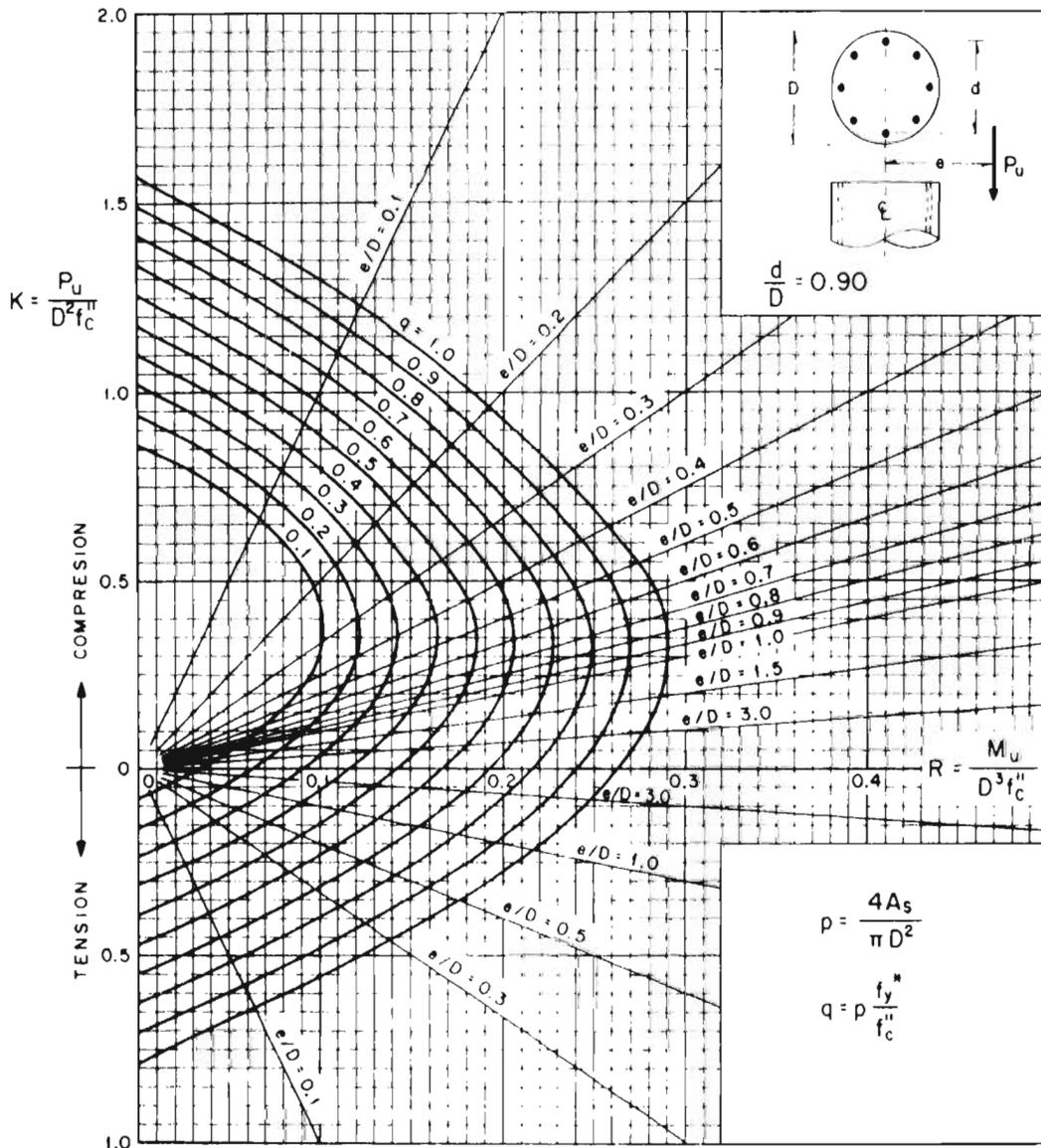


a) Idealización del refuerzo



b) Distribución de deformaciones y esfuerzos en el acero

FIG 8. SECCION CIRCULAR



$A_s$  = Area total de refuerzo

$M_u$  = Momento flexionante de falla

$P_u$  = Carga axial de falla

$f_c'' = 0.85 f_c^*$  si  $f_c^* \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f_c'' = (1.05 \frac{f_c^*}{1400}) f_c^*$  si  $f_c^* > 280 \text{ kg/cm}^2$

FIG 9. DIAGRAMA DE INTERACCION, SECCION CIRCULAR

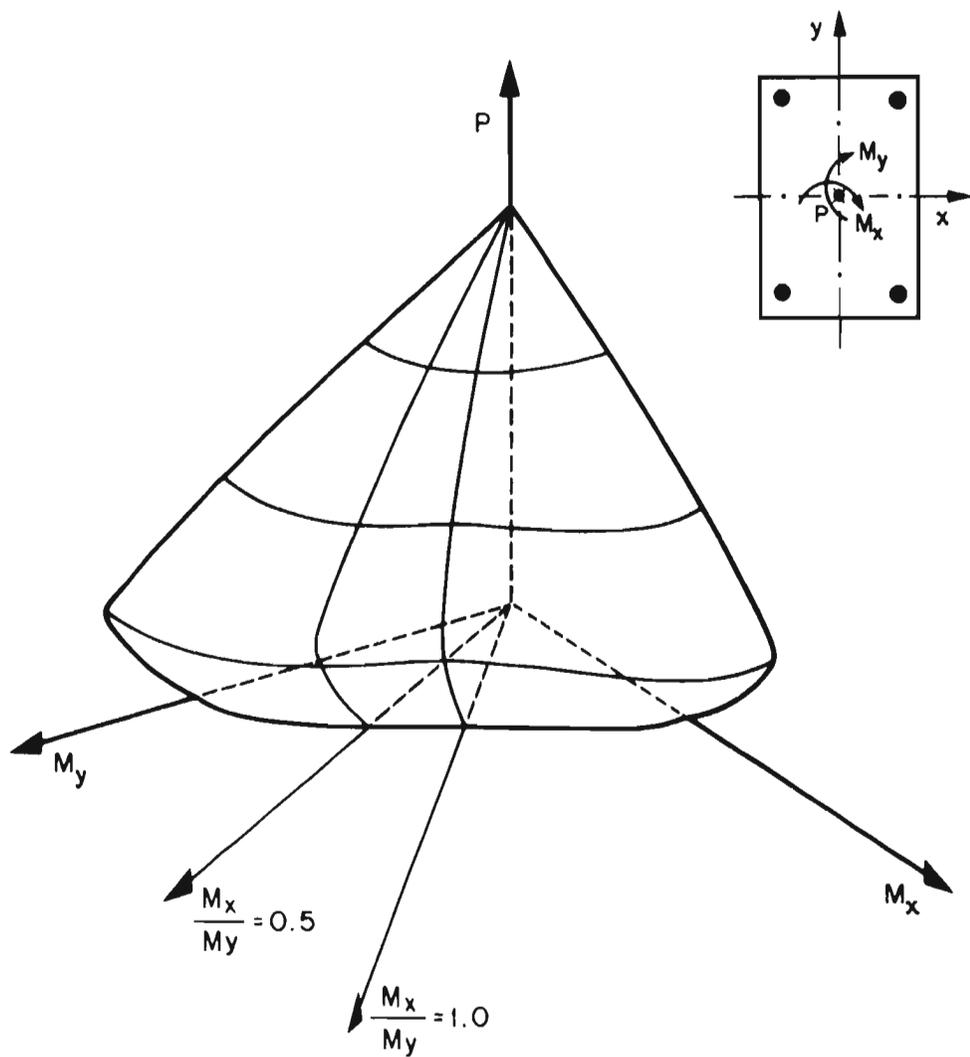
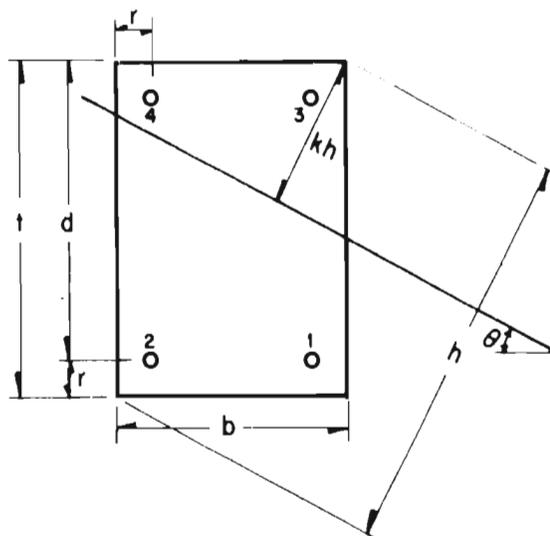
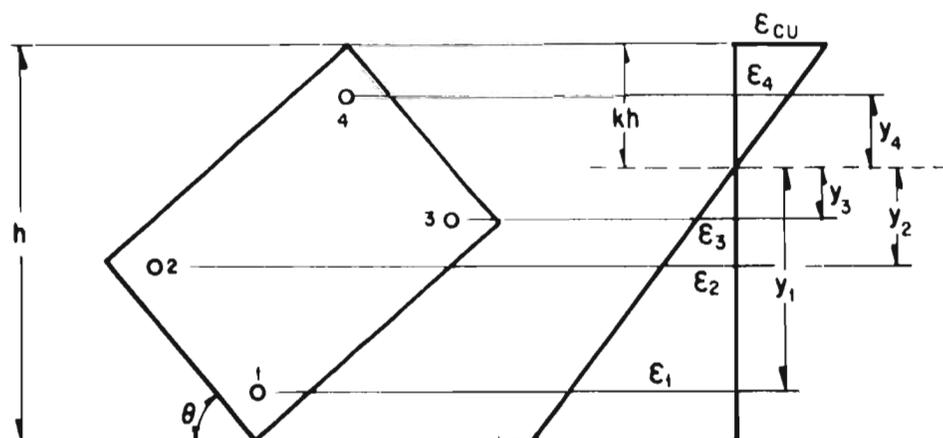


FIG 10. SUPERFICIE TIPICA DE FALLA PARA CARGA AXIAL Y MOMENTO EN UNA DIRECCION CUALQUIERA



a) Idealización del refuerzo en las esquinas



b) Coordenadas y deformaciones de las varillas

FIG 11. FLEXOCOMPRESION BIAIXIAL.ACERO EN LAS ESQUINAS

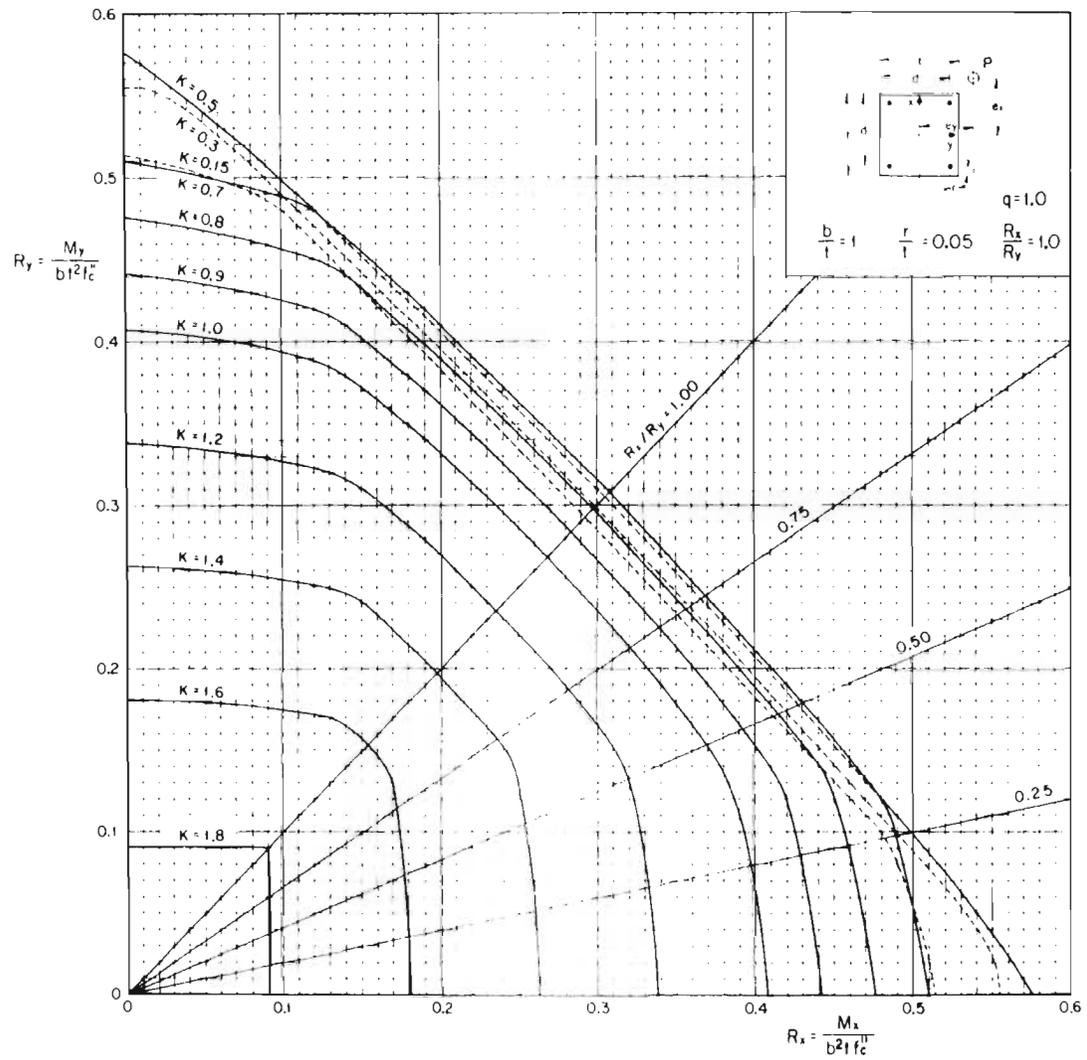
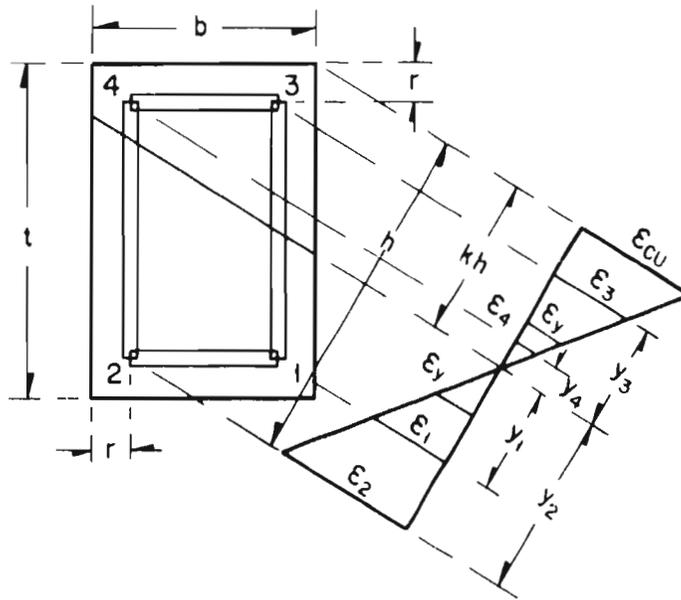
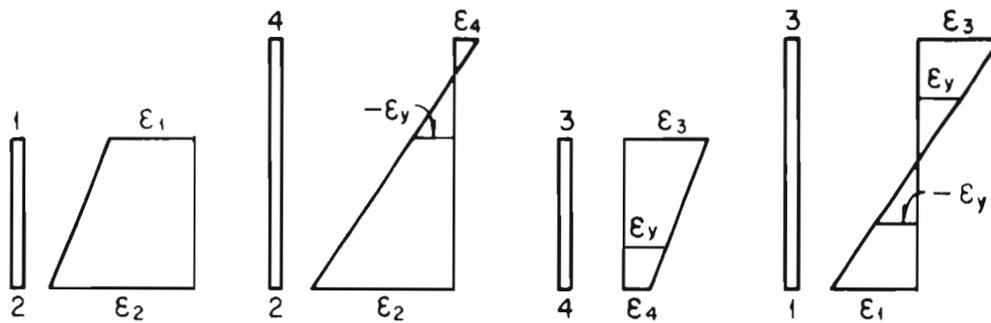


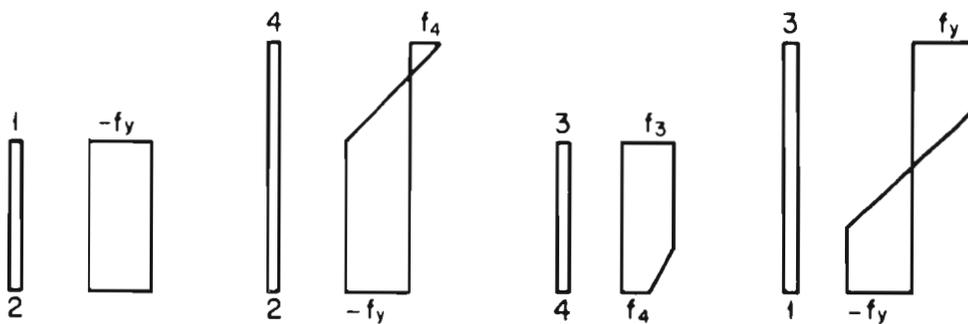
FIG 13. SECCIONES HORIZONTALES DE UNA SUPERFICIE DE INTERACCION PARA CARGA AXIAL Y FLEXION EN DOS DIRECCIONES



a) Distribución de deformaciones en la sección

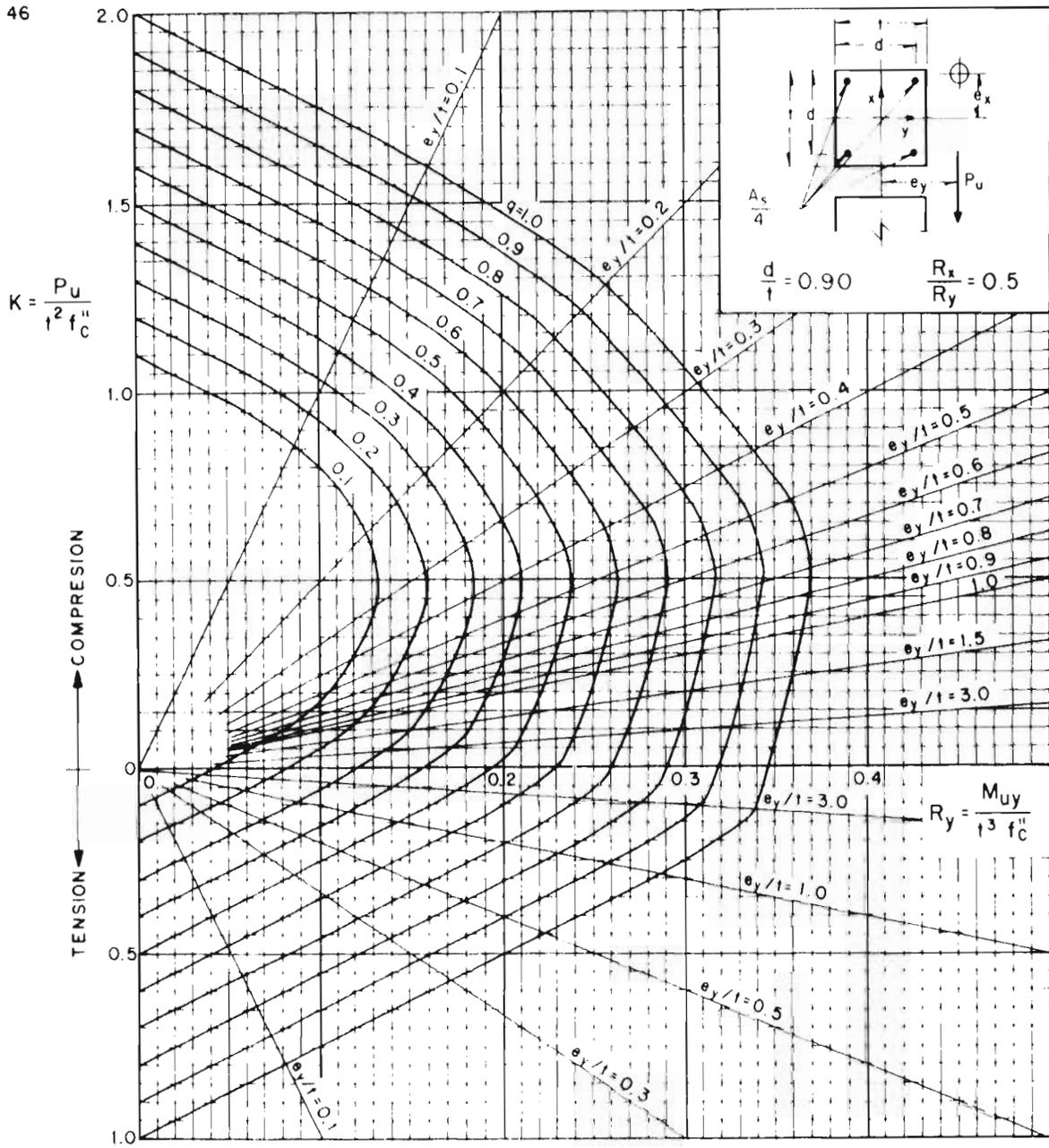


b) Deformaciones de las barras



c) Esfuerzos en las barras

FIG 12. FLEXOCOMPRESION BIAxIAL. ACERO UNIFORME



$$f_c'' = 0.85 f_c^* \text{ si } f_c^* \leq 280 \text{ kg/cm}^2; f_c'' = (1.05 - \frac{f_c^*}{1400}) f_c^* \text{ si } f_c^* > 280 \text{ kg/cm}^2$$

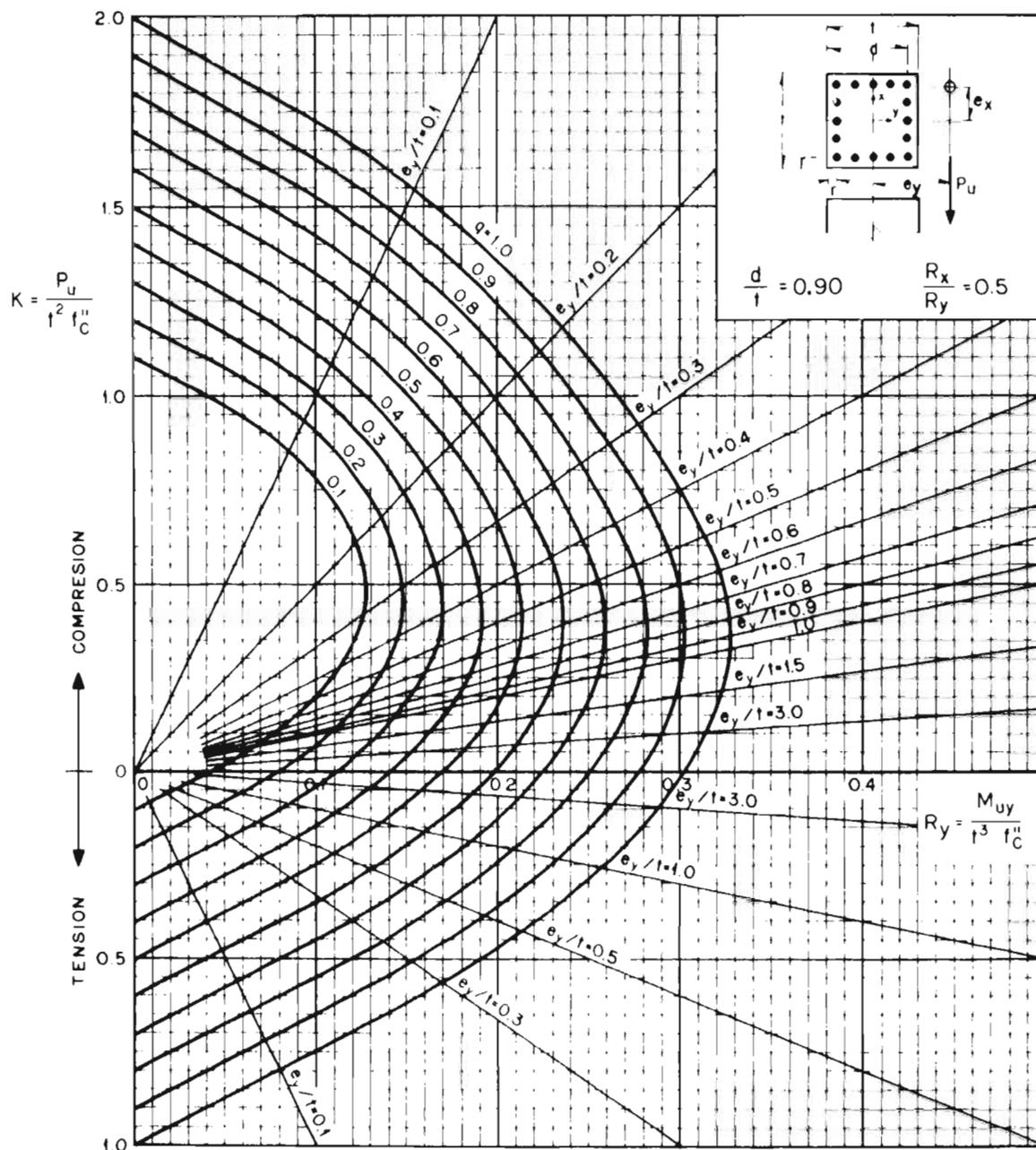
$P_u$  = Carga axial de falla

$M_{uy}$  = Momento flexionante de falla en dirección y

$M_{ux}$  = Momento flexionante de falla en dirección x

$$R_x = \frac{M_{ux}}{t^3 f_c''} \quad A_s = \text{Area total de acero} \quad q = \frac{A_s}{t^2} \frac{f_y}{f_c''}$$

FIG 14. DIAGRAMA DE INTERACCION PARA FLEXOCOMPRESION BIAIXIAL. ACERO EN LAS ESQUINAS



$$f_c'' = 0.85 f_c^* \text{ si } f_c^* \leq 280 \text{ kg/cm}^2; f_c'' = (105 - \frac{f_c^*}{1400}) f_c^* \text{ si } f_c^* > 280 \text{ kg/cm}^2$$

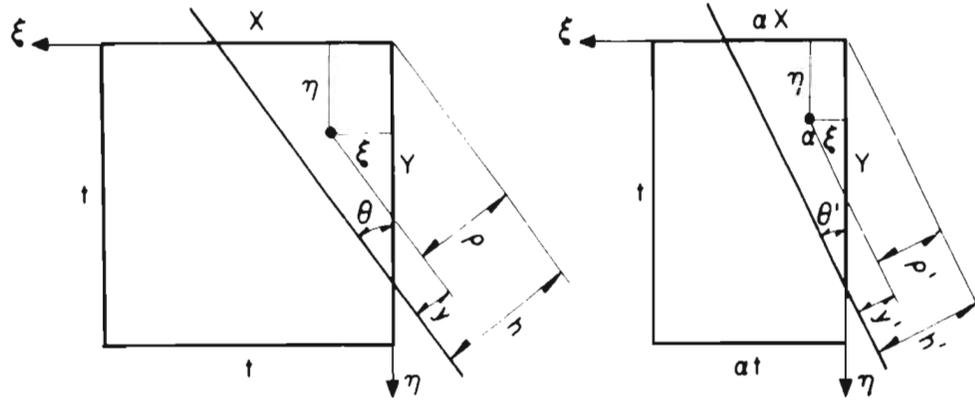
$P_u$  = Carga axial de falla

$M_{uy}$  = Momento flexionante de falla en dirección y

$M_{ux}$  = Momento flexionante de falla en dirección x

$$R_x = \frac{M_{ux}}{t^3 f_c''} \quad A_s = \text{Area total de acero} \quad q = \frac{A_s}{t^2} \frac{f_y^*}{f_c''}$$

FIG 15. DIAGRAMA DE INTERACCION PARA FLEXOCOMPRESION BIAIXIAL.  
ACERO UNIFORME



$\epsilon_s$  = Deformación en el punto  $(\xi, \eta)$

$$\epsilon_s = (y/h)\epsilon$$

$$h = X \cos \theta, \tan \theta = X/Y$$

$$\rho = \xi \cos \theta + \eta \operatorname{sen} \theta$$

$$y = h - \rho = X \cos \theta - \xi \cos \theta - \eta \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{y}{h} = 1 - \frac{\xi}{X} - \frac{\eta}{X} \tan \theta$$

$$\epsilon_s = 1 - \frac{\xi}{X} - \frac{\eta}{Y}$$

$\epsilon'_s$  = Deformación en el punto  $(\alpha\xi, \eta)$

$$\epsilon'_s = (y'/h')\epsilon$$

$$h' = \alpha X \cos \theta', \tan \theta' = (\alpha X)/Y$$

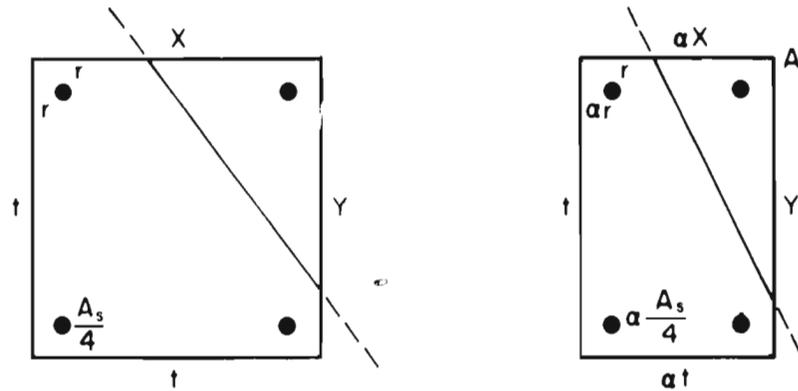
$$\rho' = \alpha\xi \cos \theta' + \eta \operatorname{sen} \theta'$$

$$y' = \alpha X \cos \theta' - \alpha\xi \cos \theta' - \eta \operatorname{sen} \theta'$$

$$\frac{y'}{h'} = 1 - \frac{\xi}{X} - \frac{\eta}{\alpha X} \tan \theta'$$

$$\epsilon'_s = 1 - \frac{\xi}{X} - \frac{\eta}{Y} = \epsilon_s$$

a) Posición del eje neutro para igual deformación en puntos homólogos



$$P_u = \frac{0.8XY}{2} f'_c + \sum \left( \frac{A_s f_i}{4} \right)$$

$$\frac{P_u}{t^2 f'_c} = 0.4 \frac{XY}{t^2} + \sum \left( \frac{q}{4} \frac{f_i}{f_y} \right)$$

$$b'y = by$$

$$P'_u = \frac{0.8\alpha XY}{2} + \sum \left( \frac{\alpha A_s}{4} f_i \right)$$

$$\frac{P'_u}{\alpha t^2 f'_c} = 0.4 \frac{XY}{t^2} + \sum \left( \frac{q}{4} f_i \right)$$

$$b'x = abx$$

b) Resultantes de las dos secciones

FIG 16. ELIMINACION DE LA VARIABLE  $b/t$  EN SECCIONES RECTANGULARES CON RECUBRIMIENTOS PROPORCIONALES A LOS LADOS

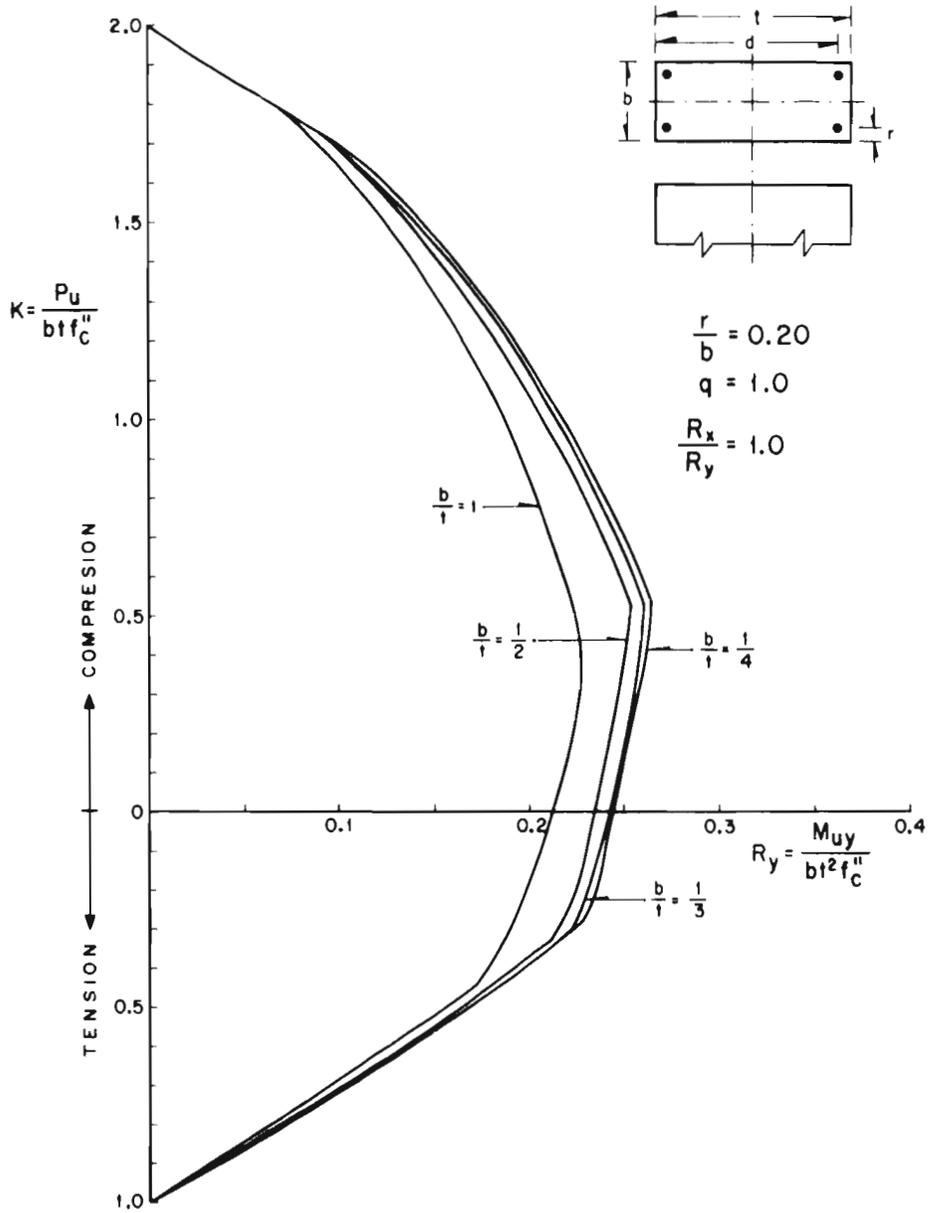


FIG 17. EFECTO DE LA VARIABLE  $\frac{b}{t}$  EN LOS DIAGRAMAS DE INTERACCION. ACERO EN LAS ESQUINAS

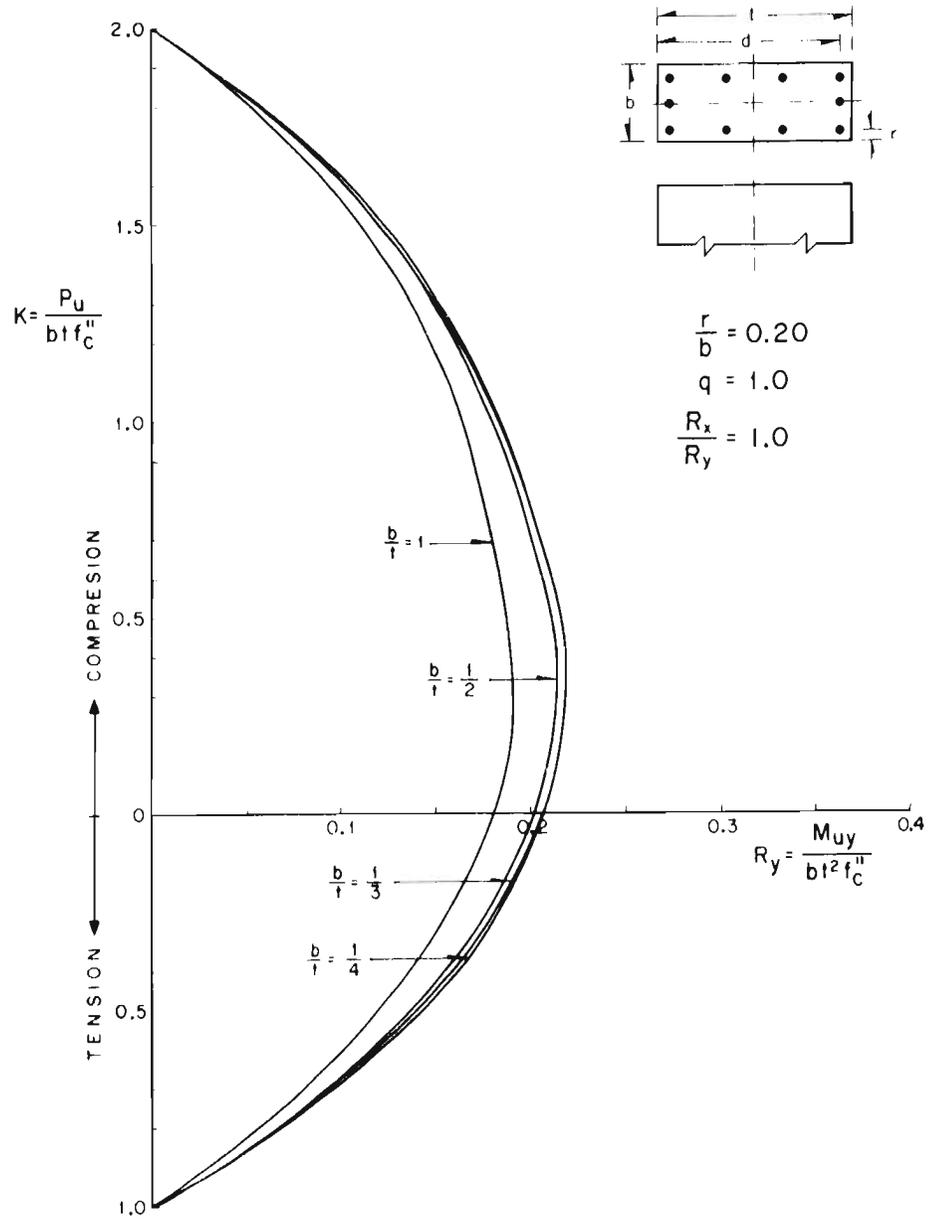


FIG 18. EFECTO DE LA VARIABLE  $\frac{b}{t}$  EN LOS DIAGRAMAS DE INTERACCION. ACERO TUBULAR

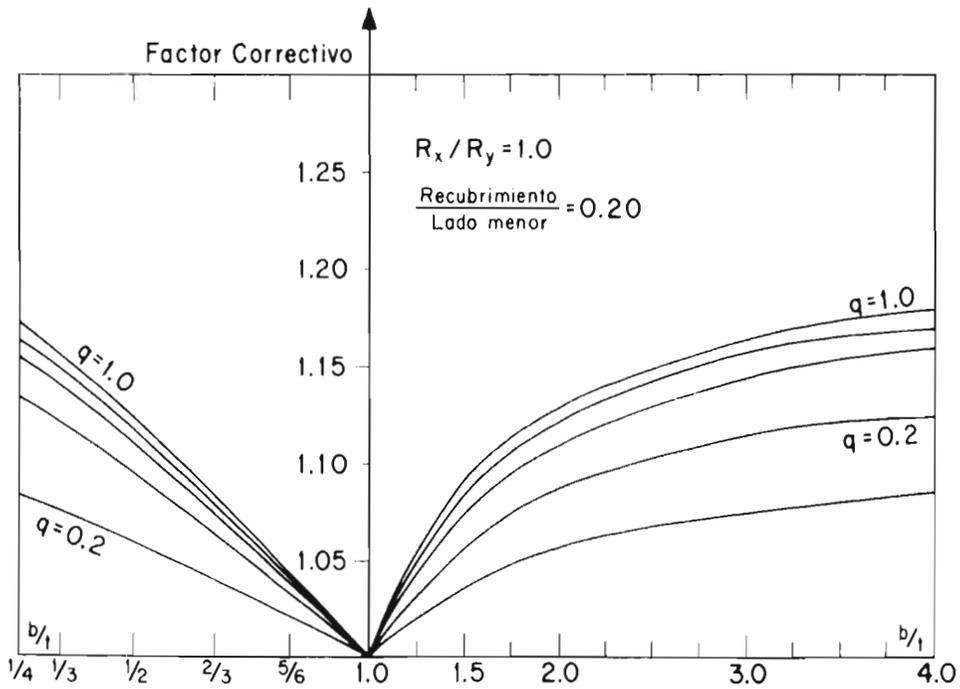
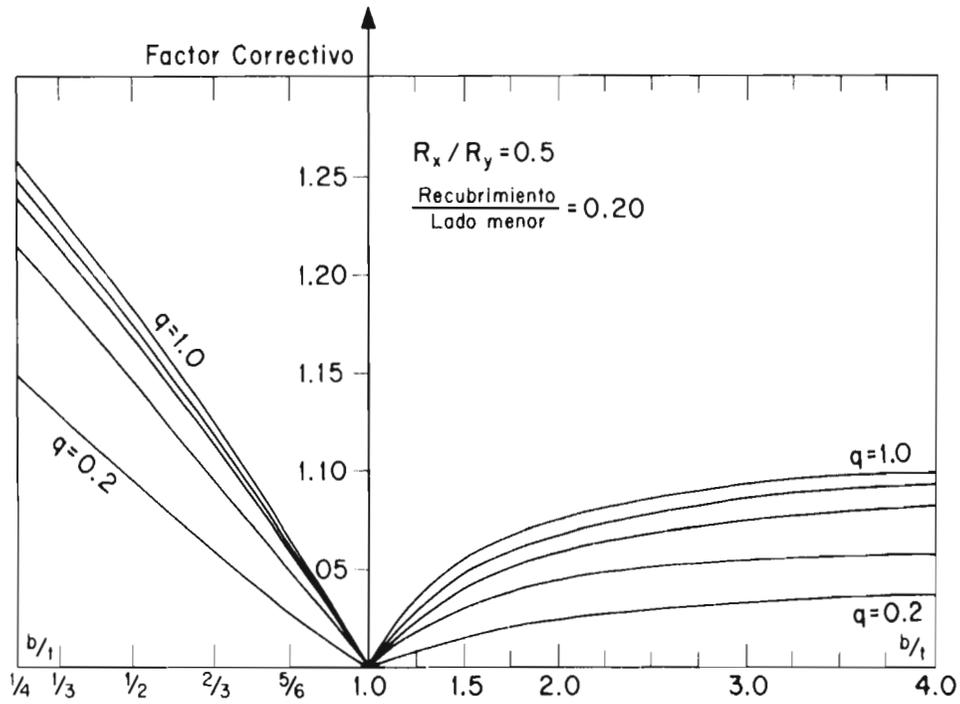


FIG 19. FACTORES CORRECTIVOS DE MOMENTOS PARA SECCIONES RECTANGULARES. ACERO EN LAS ESQUINAS.

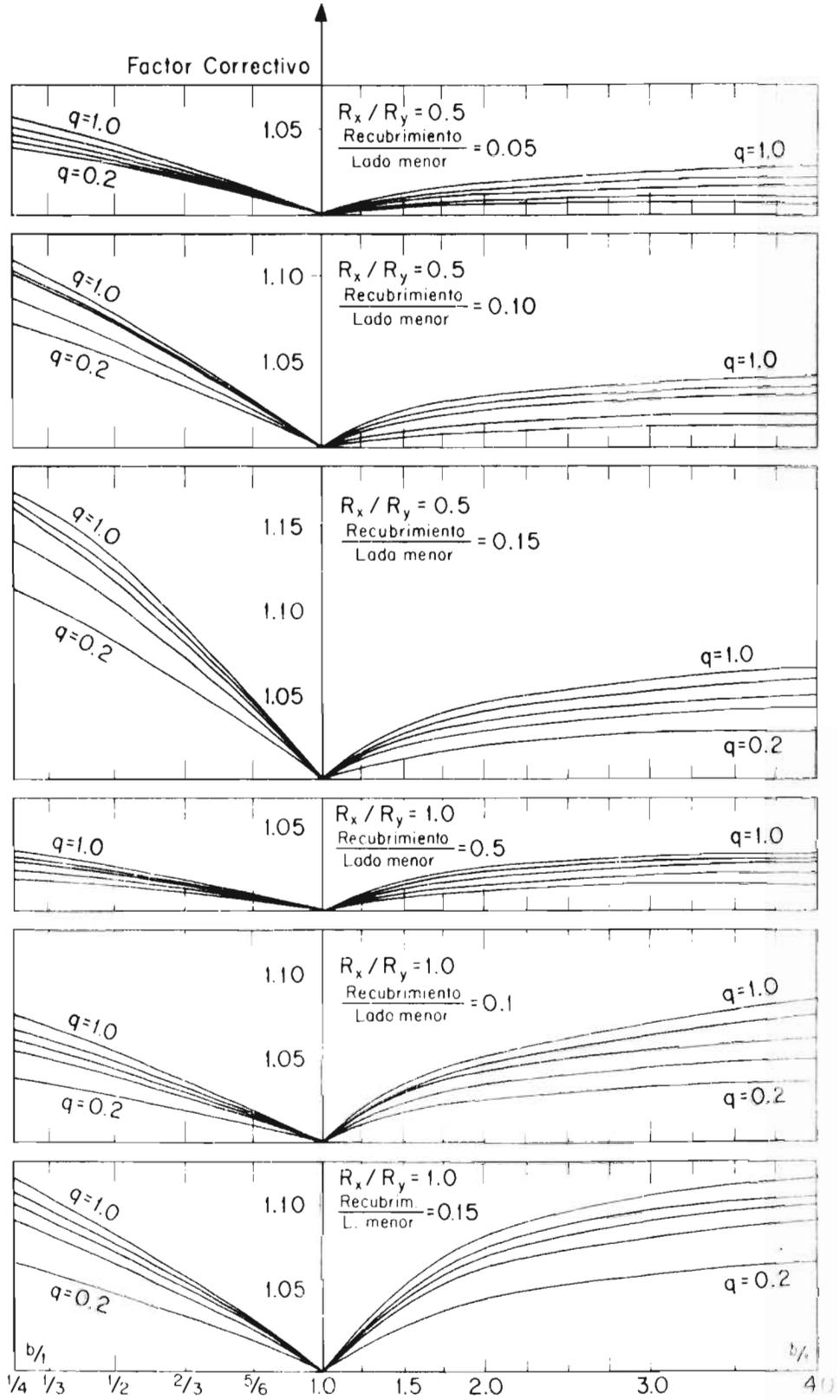


FIG 20. FACTORES CORRECTIVOS DE MOMENTOS PARA SECCIONES RECTANGULARES. ACERO EN LAS ESQUINAS.

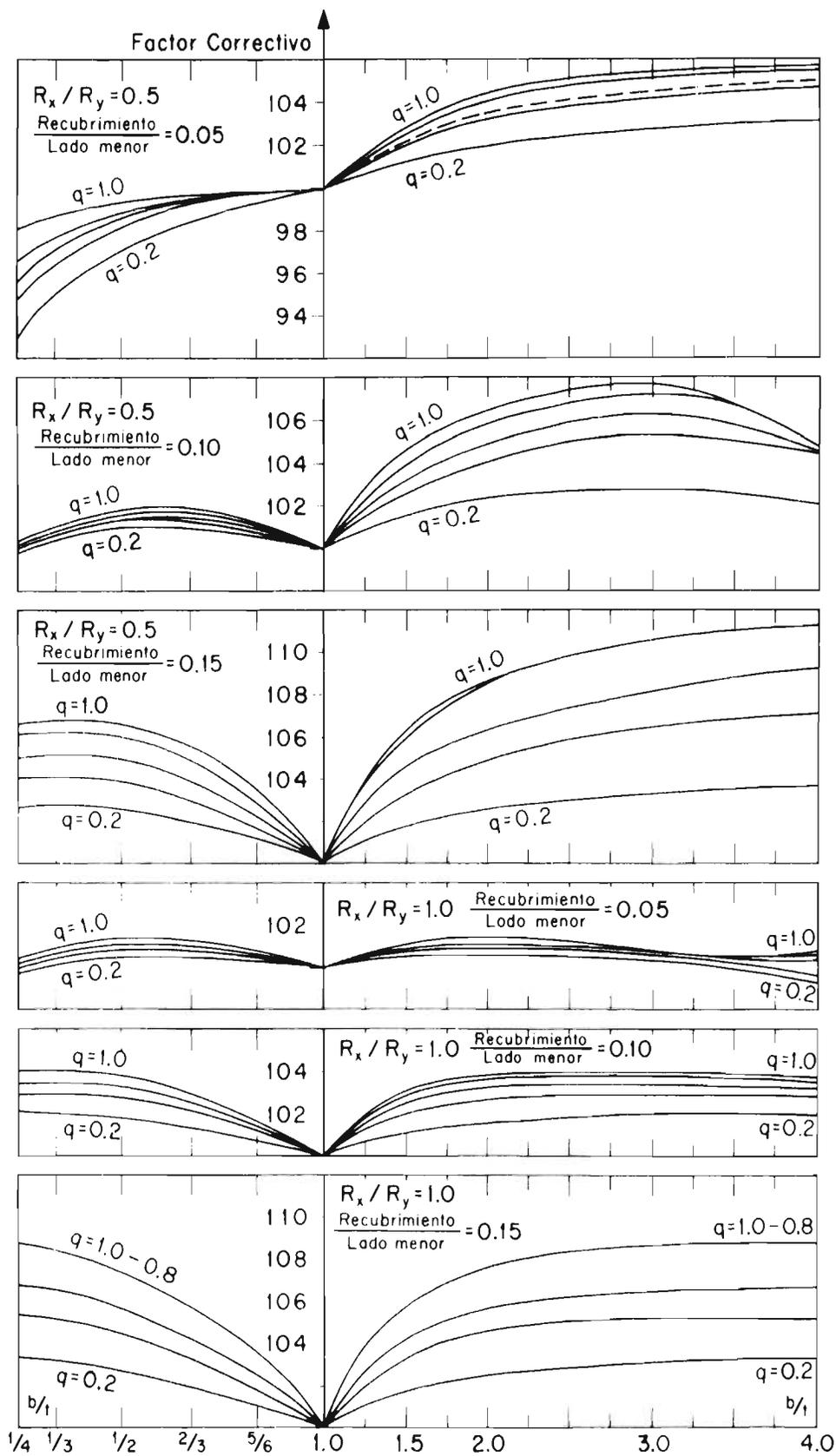


FIG 21. FACTORES CORRECTIVOS DE MOMENTOS PARA SECCIONES RECTANGULARES ACERO UNIFORME

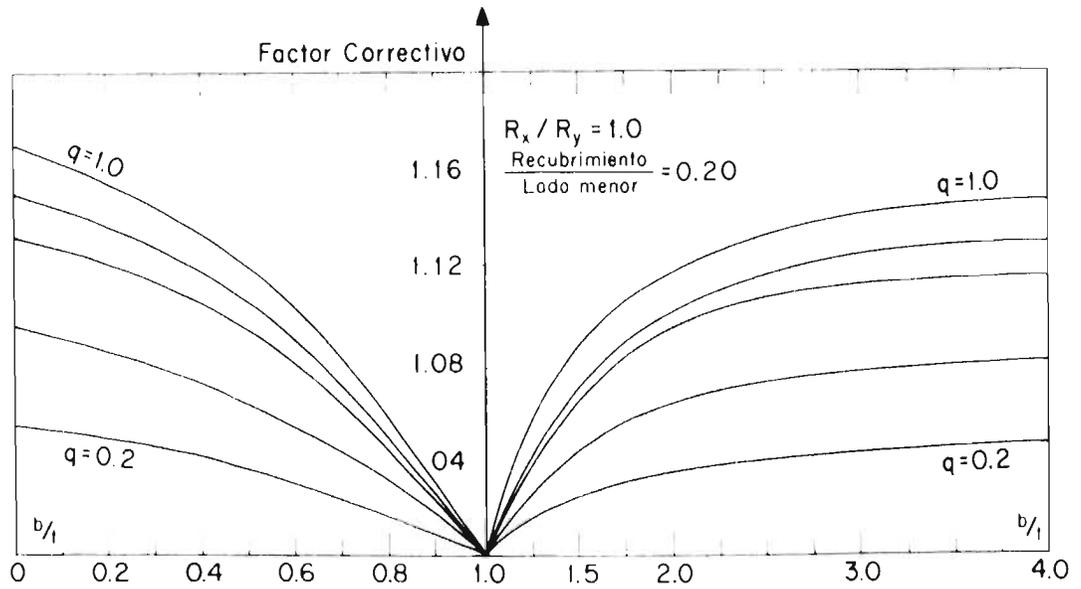
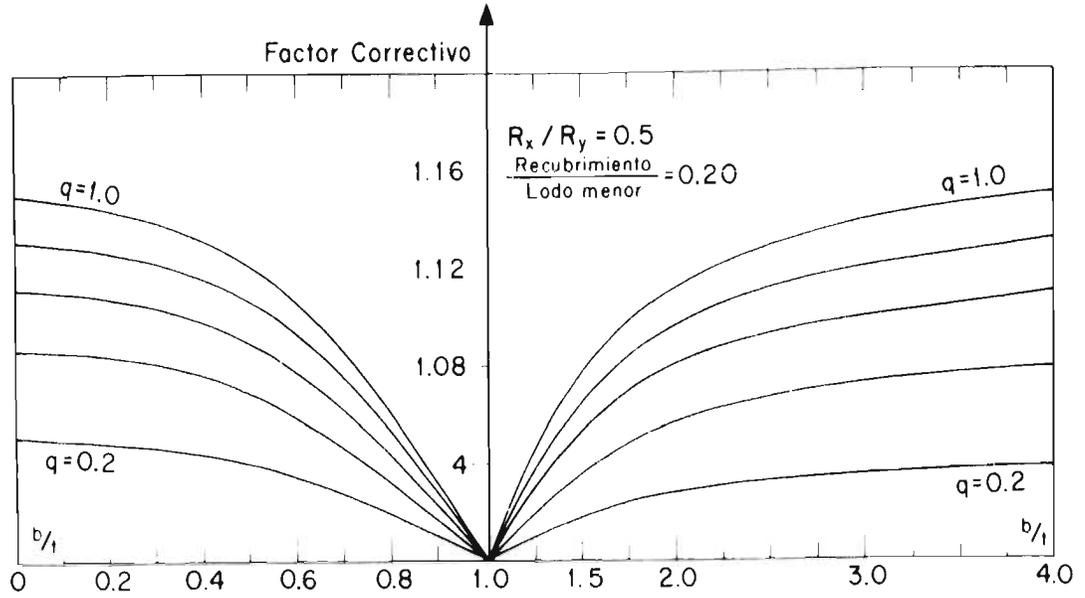
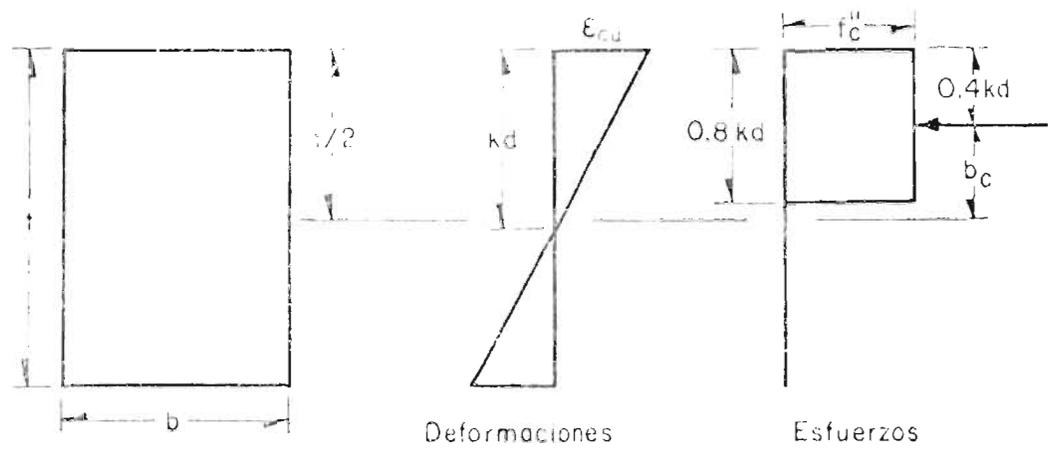


FIG 22. FACTORES CORRECTIVOS DE MOMENTOS PARA SECCIONES RECTANGULARES. ACERO UNIFORME

**A P E N D I C E     A**

**Deducción de las Ecuaciones**



a) Si  $kd \leq 1.25 t$

$$C'_c = 0.8 k d b f_c''$$

$$C_c = \frac{C'_c}{b t f_c''} = 0.8 k \frac{d}{t}$$

$$M'_c = C'_c b_c = 0.8 k d b f_c'' \left( \frac{t}{2} - 0.4 k d \right)$$

$$M_c = \frac{M'_c}{b t^2 f_c''} = 0.8 k \frac{d}{t} \left( 0.5 - 0.4 k \frac{d}{t} \right)$$

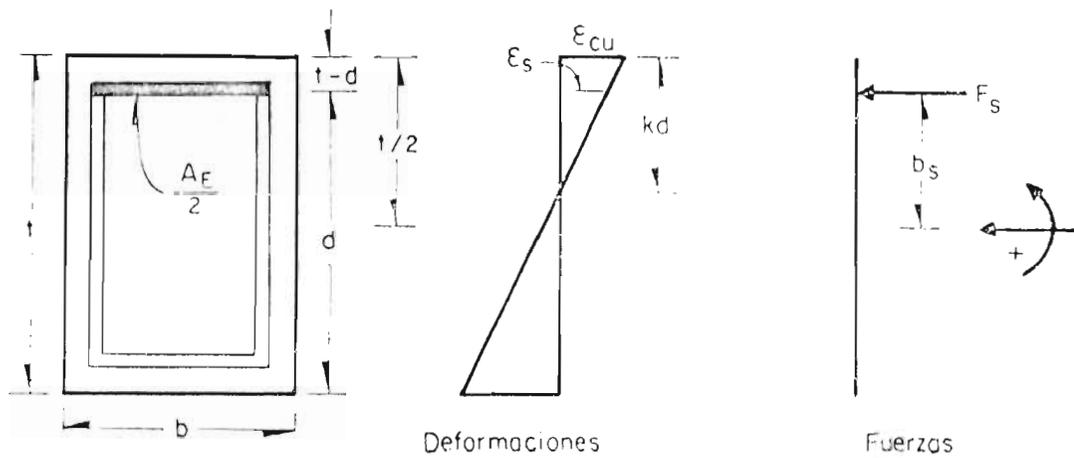
b) Si  $kd \geq 1.25 t$

$$C'_c = b t f_c''$$

$$C_c = 1$$

$$M_c = 0$$

A1. SECCION RECTANGULAR.  
FLEXION EN UNA DIRECCION.  
RESULTANTES DEL CONCRETO.



a) Si  $\epsilon_s > \epsilon_y$  ; o sea :  $k > k_{sc}$

$$f_s = f_y$$

$$F_s' = \frac{A_E}{2} f_y ; F_s = \frac{A_E}{2 b t f_c'} f_y ; q_E = \frac{A_E f_y}{b t f_c'}$$

$$F_s = \frac{q_E}{2}$$

b) Si  $\epsilon_s < -\epsilon_y$  ; o sea :  $k < k_{ST}$

$$f_s = -f_y$$

$$F_s = -\frac{q_E}{2}$$

c) Si  $-\epsilon_y < \epsilon_s < \epsilon_y$  o sea  $k_{ST} < k < k_{sc}$

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_{cu}} = \frac{kd - (t-d)}{kd} ; \epsilon_s = \frac{d/t(1+k)-1}{kd/t} \mu \epsilon_y$$

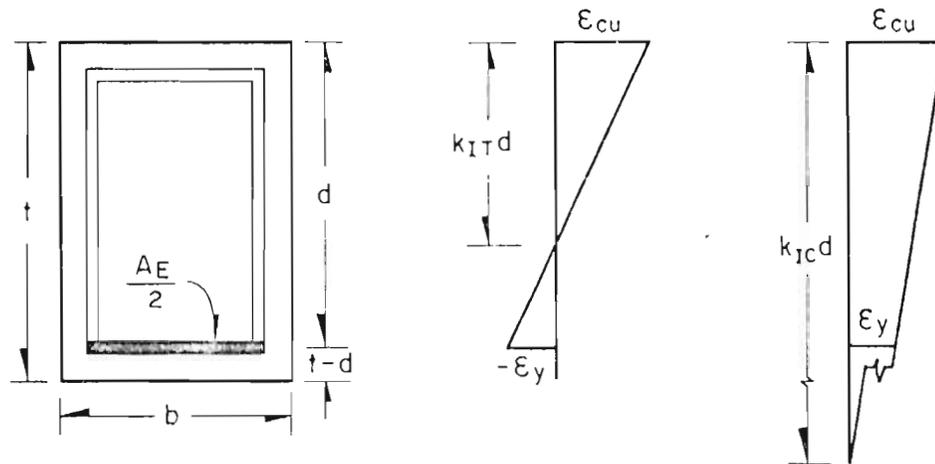
$$f_s = \frac{d/t(1+k)-1}{kd/t} \mu f_y ; F_s = \frac{q_E}{2} \frac{d/t(1+k)}{kd/t} \mu$$

d) En todos los casos

$$M_s = F_s \times b_s ;$$

$$b_s' = d - \frac{t}{2} ; b_s = \frac{d}{t} - 0.5$$

A3. SECCION RECTANGULAR.  
FLEXION EN UNA DIRECCION.  
ACERO SUPERIOR.  
RESULTANTES.



- a) Profundidad del eje neutro para fluencia en tensión

$$\frac{k_{IT}d}{d - k_{IT}d} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y} = \mu$$

$$k_{IT} = \mu(1 - k_{IT})$$

$$k_{IT}(1 + \mu) = \mu$$

$$k_{IT} = \frac{\mu}{1 + \mu}$$

- b) Profundidad del eje neutro para fluencia en compresión

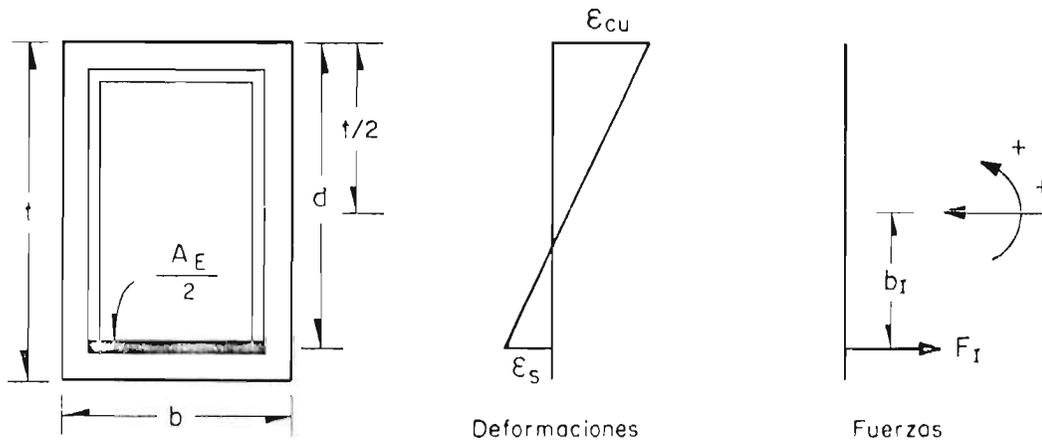
$$\frac{k_{IC}d}{k_{IC}d - d} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y} = \mu$$

$$k_{IC} = \mu(k_{IC} - 1)$$

$$k_{IC}(1 - \mu) = -\mu$$

$$k_{IC} = \frac{\mu}{\mu - 1}$$

A 4. SECCION RECTANGULAR.  
 FLEXION EN UNA DIRECCION.  
 ACERO INFERIOR.  
 POSICIONES LIMITE DEL EJE NEUTRO.



a) Si  $\epsilon_I < -\epsilon_y$  o sea  $k < k_{IT}$

$$f_I = -f_y$$

$$F_I' = \frac{A_E}{2} f_y \quad F_I = \frac{A_F}{2 b t f_c'} f_y;$$

$$F_I = -\frac{q_E}{2}$$

b) Si  $\epsilon_s > \epsilon_y$ ; o sea  $k > k_{IC}$

$$f_I = f_y$$

$$F_I = \frac{q_E}{2}$$

c) Si  $-\epsilon_y < \epsilon_I < \epsilon_y$ ; o sea  $k_{IT} < k < k_{IC}$

$$-\frac{\epsilon_I}{\epsilon_{cu}} = \frac{d-kd}{kd} = \frac{1-k}{k}$$

$$-\epsilon_I = \frac{1-k}{k} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y} \epsilon_y; \quad f_I = \frac{k-1}{k} \mu f_y$$

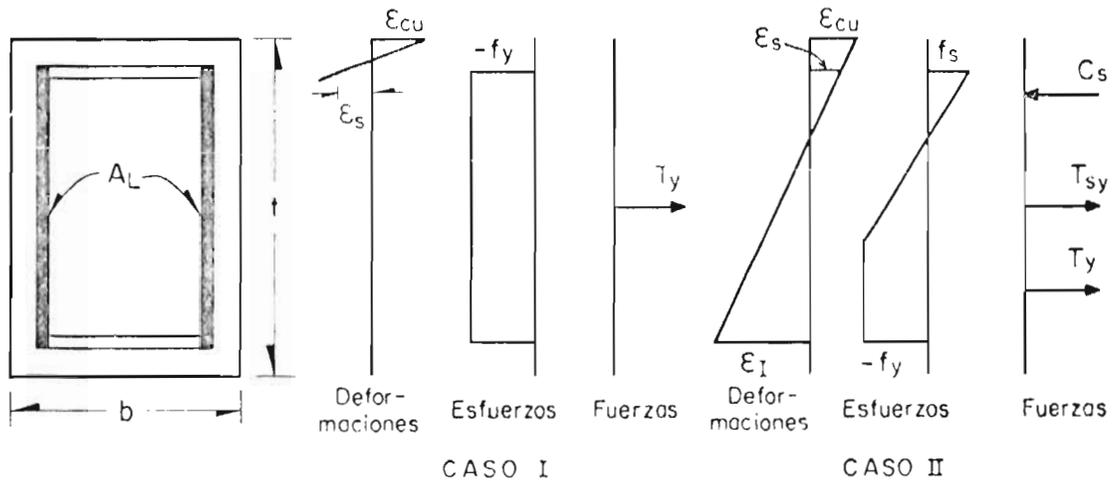
$$F_I = \frac{q_E}{2} \left( \frac{k-1}{k} \right) \mu$$

d) En todos los casos

$$M_I = F_I \times b_I;$$

$$b_I = \frac{t}{2} - d; \quad b_I = 0.5 - \frac{d}{t}$$

A5. SECCION RECTANGULAR.  
FLEXION EN UNA DIRECCION.  
ACERO INFERIOR.  
RESULTANTES.



## CASO I

Ocurre si

$$\epsilon_s < -\epsilon_y$$

$$k < k_{ST}$$

$$F_L = T_y$$

$$M_L = M_{Ty} = 0$$

## CASO II

Ocurre si

$$-\epsilon_y < \epsilon_s < \epsilon_y$$

$$\epsilon_I < -\epsilon_y$$

O sea

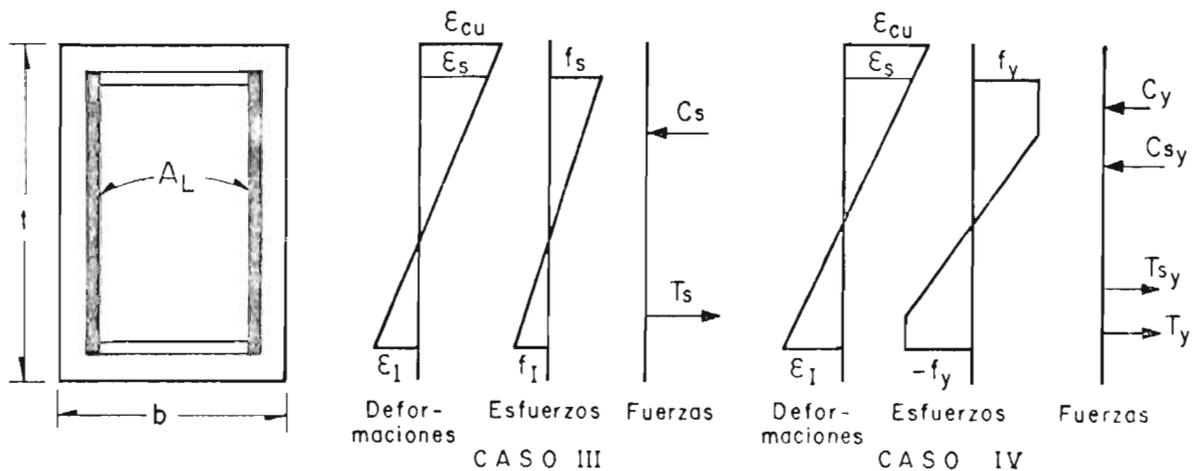
$$k_{SC} < k < k_{IT}$$

$$F_L = C_s + T_{sy} + T_y$$

$$M_L = M_{Cs} + M_{Tsy} + M_{Ty}$$

Para los valores de  $T_y$ ,  $M_{Ty}$ ,  $C_s$ ,  $T_{sy}$ ,  $T_y$ ,  $M_{Cs}$ ,  $M_{Tsy}$ ,  $M_{Ty}$  véanse las figuras A 9 a A 14

A 6. SECCION RECTANGULAR.  
FLEXION EN UNA DIRECCION.  
ACERO LATERAL.  
CASOS I y II.



## CASO III

Ocorre

$$\text{Si } -\epsilon_y < \epsilon_s < \epsilon_y$$

$$-\epsilon_y < \epsilon_1 < \epsilon_y$$

$$\text{O sea } k_{IT} < k < k_{IC}$$

$$k_{sT} < k < k_{sc}$$

$$F_L = C_s + T_s$$

$$M_L = M_{Cs} + M_{Ts}$$

## CASO IV

Ocorre

$$\text{Si } \epsilon_s > \epsilon_y$$

$$\epsilon_1 < -\epsilon_y$$

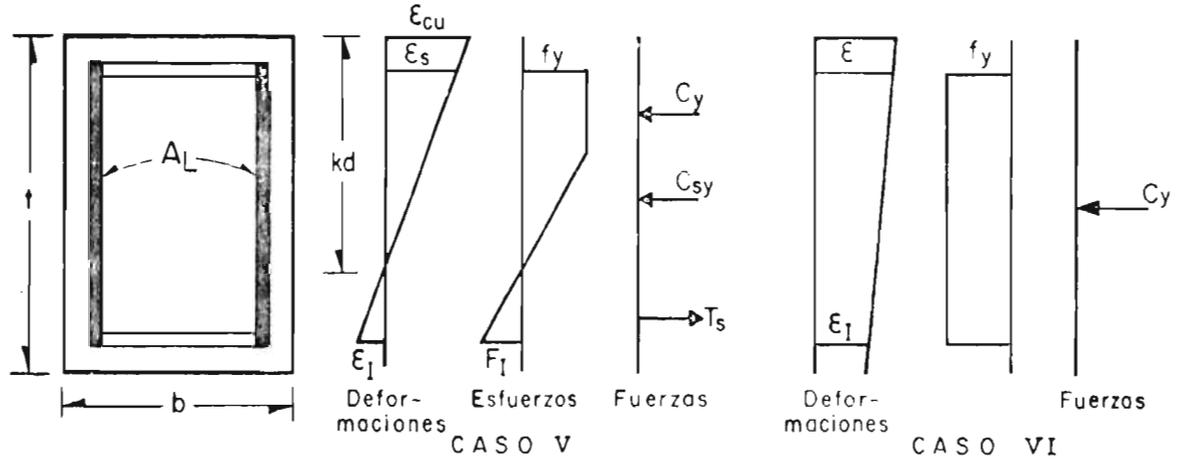
$$\text{O sea } k_{sc} > k < k_{IT}$$

$$F_L = C_y + C_{sy} + T_y + T_{sy}$$

$$M_L = M_{Cy} + M_{Csy} + M_{Ty} + M_{Tsy}$$

Para los valores de  $C_s, C_{sy}, C_y, T_s, T_{sy}, T_y, M_{Cs}, M_{Csy}, M_{Cy}, M_{Ts}, M_{Tsy}, M_{Ty}$  véanse las figuras A9. a A14.

A7. SECCIONES RECTANGULARES.  
 FLEXION EN UNA DIRECCION.  
 ACERO LATERAL.  
 CASOS III y IV.

**CASO V**

Ocurre si

$$\epsilon_s > \epsilon_y$$

$$\epsilon_y < \epsilon_I < \epsilon_y$$

$$\text{O sea } k > k_{sc}$$

$$k_{IT} < k < k_{IC}$$

$$F_L = C_y + C_{sy} + T_s$$

$$M_L = M_{cy} + M_{csy} + M_{Ts}$$

**CASO VI**

Ocurre si

$$\epsilon_I > \epsilon_y$$

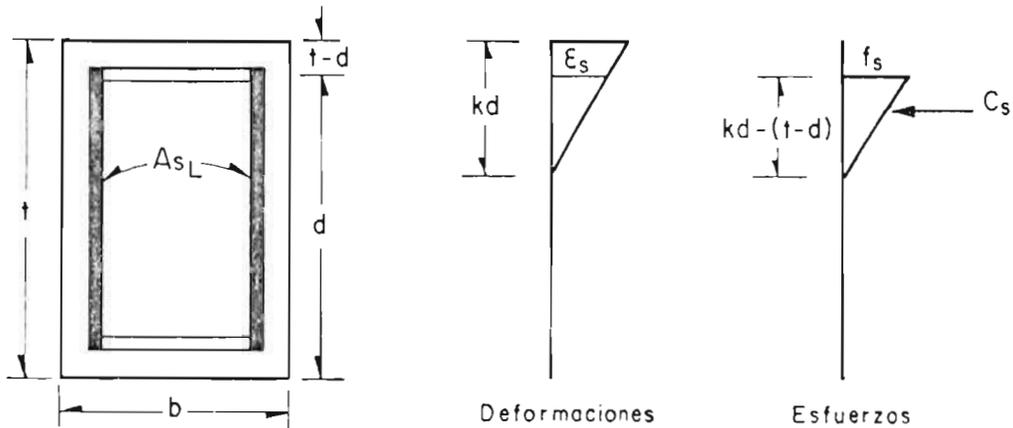
$$\text{O sea } k > k_{IC}$$

$$F_L = C_y$$

$$M_L = M_{cy} = 0$$

Para los valores  $C_y, C_{sy}, T_s, M_{cy}, M_{csy}, M_{Ts}$  véanse las figuras A9. a A14.

**A8. SECCIONES RECTANGULARES.****FLEXION EN UNA DIRECCION.****ACERO LATERAL.****CASOS V y VI.**



$$f_s = \frac{d/t(1+k)-1}{kd/t} \mu f_y$$

( ver fig. A. 3 )

$$C'_s = \frac{f_s}{2} \frac{kd-(t-d)}{(2d-t)} A_{sL}$$

$$C'_s = \frac{(d/t+kd/t-1)(kd-t+d)\mu f}{2kd/t(2d-t)} A_{sL} = \frac{(d/t+kd/t-1)^2 \mu f_y}{2kd/t(2d/t-1)} A_{sL}$$

$$C_s = q_L \frac{(d/t+kd/t-1)^2}{2kd/t(2d-t)} \mu$$

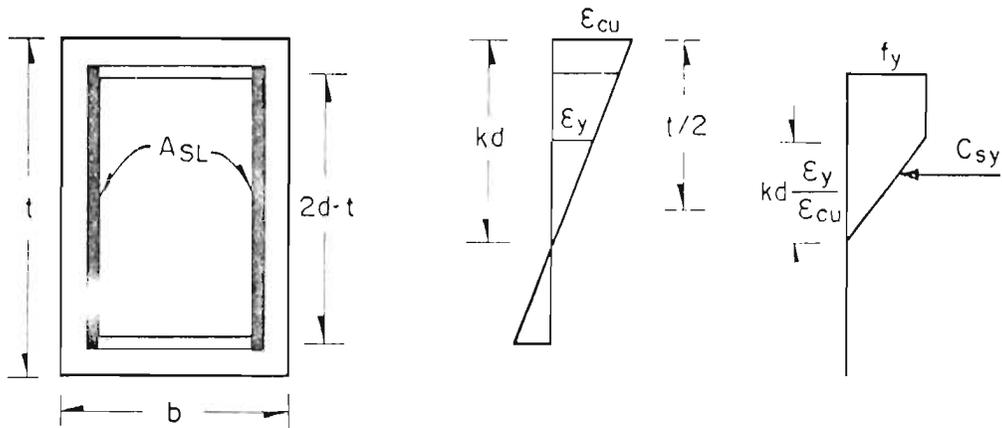
$$M'_{cs} = C_s \left( \frac{t}{2} - (t-d) - \frac{kd-(t-d)}{3} \right) = C_s \left( \frac{t}{2} - t + d - \frac{kd}{3} + \frac{t}{3} - \frac{d}{3} \right)$$

$$M'_{cs} = C'_s \left( \frac{2}{3}d - \frac{t}{6} - \frac{kd}{3} \right)$$

$$M_{cs} = \frac{M'_{cs}}{t} = C_s \left( \frac{2}{3} \frac{d}{t} - \frac{1}{6} + \frac{k}{3} \frac{d}{t} \right)$$

A9. SECCION RECTANGULAR.  
FLEXION EN UNA DIRECCION.  
ACERO LATERAL.

RESULTANTES PARCIALES (1)  $C_s$ ,  $M_{cs}$ .



$$C'_{sy} = \frac{f_y}{2} \frac{\frac{kd}{\mu}}{(2d-t)} A_{SL}$$

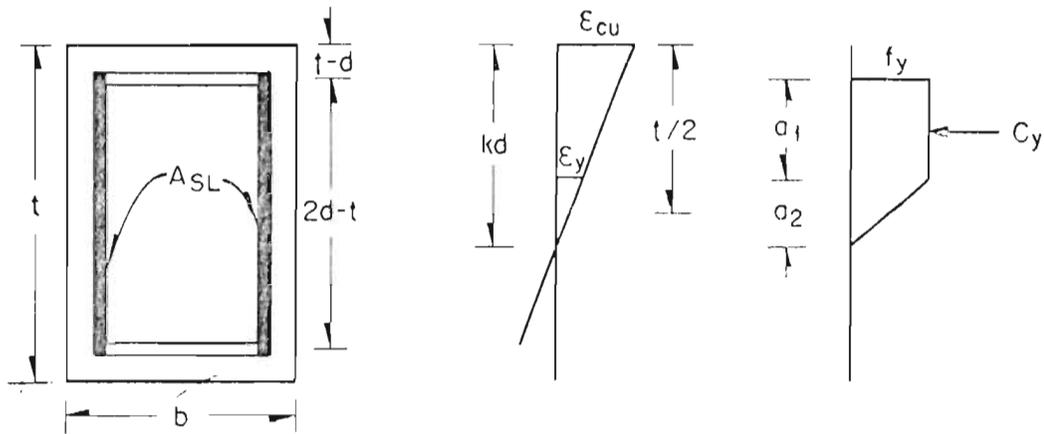
$$C'_{sy} = \frac{kdf_y}{2\mu(2d-t)} A_{SL}$$

$$C_{sy} = \frac{C'_{sy}}{btf'_c} = \frac{kd/t}{2\mu(2d/t-1)} q_L$$

$$M'_{csy} = C_{sy} \left( \frac{t}{2} - kd + \frac{2}{3} \frac{kd}{\mu} \right)$$

$$M_{csy} = C_{sy} \left( \frac{1}{2} - \frac{kd}{t} + \frac{2}{3} \frac{kd/t}{\mu} \right)$$

A10. SECCION RECTANGULAR.  
 FLEXION EN UNA DIRECCION.  
 ACERO LATERAL.  
 RESULTANTES PARCIALES (2)  $C_{sy}, M_{csy}$ .



$$C'_y = f_y \frac{a_1}{(2d-t)} A_{SL}$$

$$a_1 = kd - a_2 - (t-d)$$

$$a_2 = \frac{kd}{\mu}$$

( fig A 10)

$$a_1 = \left( kd - \frac{kd}{\mu} - t + d \right)$$

$$C'_y = \left( kd - \frac{kd}{\mu} - t + d \right) \frac{A_{SL} f_y}{(2d-t)}$$

$$C_y = \frac{C'_y}{b t f_c} = \frac{a_L}{(2d/t-1)} \left( kd/t - \frac{kd/t}{\mu} + \frac{d}{t} - 1 \right)$$

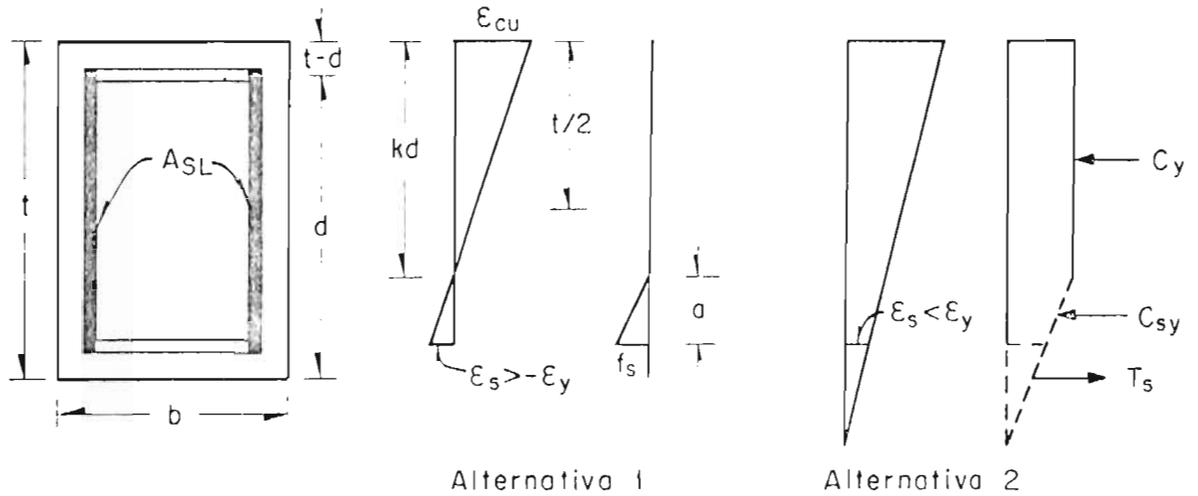
$$M'_{cy} = C_y \left( \frac{t}{2} - (t-d) - \frac{a_1}{2} \right)$$

$$M'_{cy} = C_y \left( d - \frac{t}{2} - \frac{kd}{2} + \frac{kd}{2\mu} + \frac{t}{2} - \frac{d}{2} \right)$$

$$M'_{cy} = \frac{C_y}{2} \left( d - kd + \frac{kd}{\mu} \right)$$

$$M_{cy} = \frac{C_y}{2} \frac{d}{t} \left( 1 - k + \frac{k}{\mu} \right)$$

A11. SECCION RECTANGULAR.  
 FLEXION EN UNA DIRECCION.  
 ACERO LATERAL.  
 RESULTANTES PARCIALES (3)  $C_y, M_{cy}$ .



$$T'_s = \frac{f_s}{2} \frac{a}{(2d-t)} A_{SL}$$

$$f_s = \frac{k-1}{k} \mu f_y \quad (\text{ver fig A 5.})$$

$$\frac{a}{-\epsilon_s} = \frac{kd}{\epsilon_{CU}}$$

$$a = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{CU}} kd = \frac{k-1}{k} kd$$

$$T'_s = \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \frac{kd}{(2d-t)} \frac{\mu}{2} f_y A_{SL}$$

$$T_s = \frac{T'_s}{b t f_c} = \frac{q_L}{2} \frac{(k-1)^2 d/t}{k(2d/t-1)} \mu$$

$$M_{TS} = T_s \left( \frac{2}{3} a - \frac{t}{2} \right)$$

$$M'_{TS} = T_s \left( \frac{2}{3} kd - \frac{2}{3} d \frac{t}{2} \right)$$

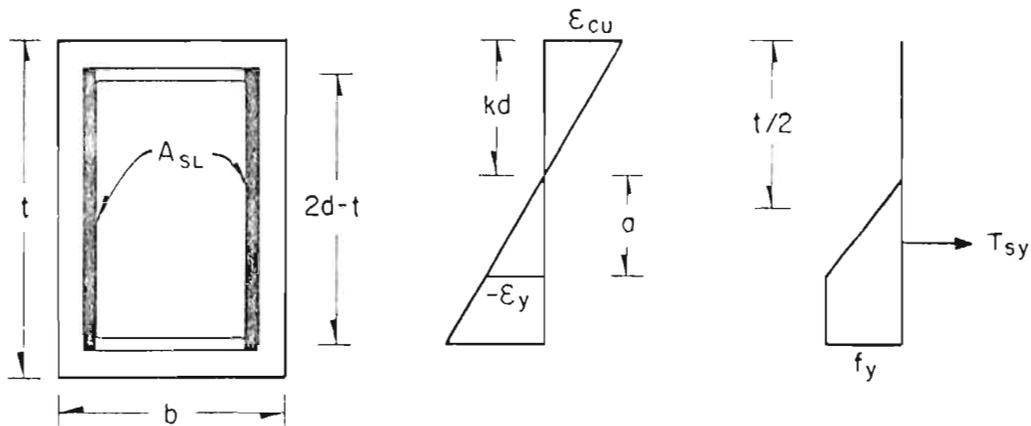
$$M_{TS} = T_s \left( \frac{2}{3} \frac{kd}{t} - \frac{2}{3} \frac{d}{t} - \frac{1}{2} \right)$$

A12. SECCION RECTANGULAR.

FLEXION EN UNA DIRECCION.

ACERO LATERAL.

RESULTANTES PARCIALES (4)  $T_s$ ,  $M_{TS}$ .



$$T'_{sy} = -\frac{f_y}{2} \frac{a}{(2d-t)} A_{sL}$$

$$\frac{a}{\epsilon_y} = \frac{kd}{\epsilon_{cu}}$$

$$a = \frac{kd}{\mu}$$

$$T'_{sy} = -\frac{f_y}{2} \frac{kd}{\mu} \frac{A_{sL}}{2d-t}$$

$$T_{sy} = -\frac{q_L}{2} \frac{kd/t}{\mu(2d/t-1)}$$

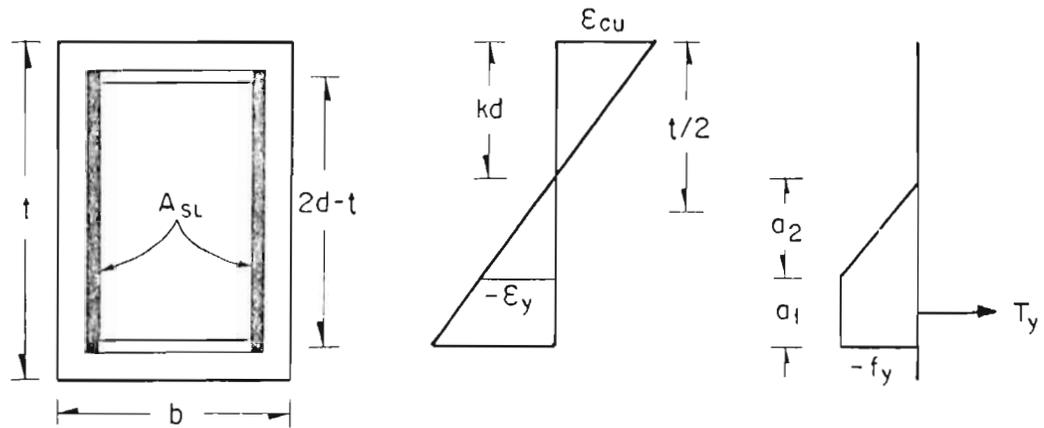
$$M'_{Tsy} = T_{sy} \left( \frac{2}{3} a - \frac{t}{2} + kd \right)$$

$$M'_{Tsy} = T_{sy} \left( \frac{2}{3} \frac{kd}{\mu} - \frac{t}{2} + kd \right)$$

$$M_{Tsy} = T_{sy} \left( \frac{2}{3} \frac{kd/t}{\mu} + \frac{kd}{t} - \frac{1}{2} \right)$$

A13. SECCION RECTANGULAR.  
FLEXION EN UNA DIRECCION.  
ACERO LATERAL.

RESULTANTES PARCIALES (5)  $T_{sy}, M_{Tsy}$ .



$$T'_y = -f_y \frac{a_1 A_{SL}}{2d-t}$$

$$a_1 = d - kd - a_2$$

$$a_1 = d - kd - \frac{kd}{\mu}$$

$$T'_y = f_y \left( kd + \frac{kd}{\mu} - d \right) \frac{A_{SL}}{2d-t}$$

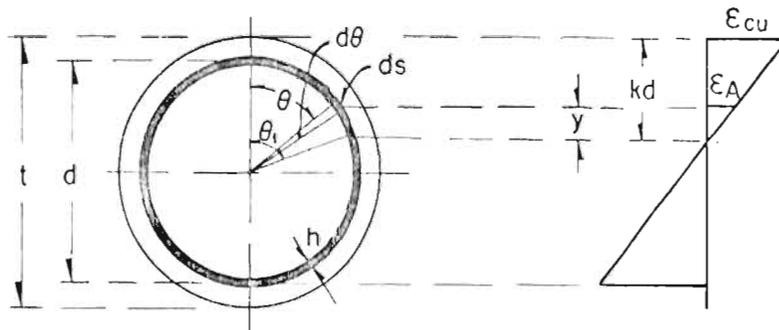
$$T_y = \frac{q_L}{2d/t-1} \left( \frac{kd}{t} + \frac{kd/t}{\mu} - \frac{d}{t} \right)$$

$$M'_{Ty} = -T_y \left( d - \frac{a_1}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

$$M'_{Ty} = T_y \left( \frac{t}{2} - d - \frac{kd}{2} - \frac{kd}{2\mu} + \frac{d}{2} \right)$$

$$M_{Ty} = \frac{T_y}{2} \left( 1 - \frac{kd}{t} - \frac{kd/t}{\mu} - \frac{d}{t} \right)$$

A14. SECCION RECTANGULAR.  
 FLEXION EN UNA DIRECCION.  
 ACERO LATERAL.  
 RESULTANTES PARCIALES (6)  $T_y, M_{Ty}$ .



$$h = \frac{A_s}{\pi d}$$

$$d_s = \frac{d}{2} d\theta$$

$$d A_s = h d s = \frac{A_s}{2 \pi} d\theta$$

$$k d = \frac{t}{2} - \frac{d}{2} \cos \theta_1$$

$$y = k d - \left( \frac{t}{2} - \frac{d}{2} \cos \theta \right) = \frac{d}{2} (\cos \theta - \cos \theta_1)$$

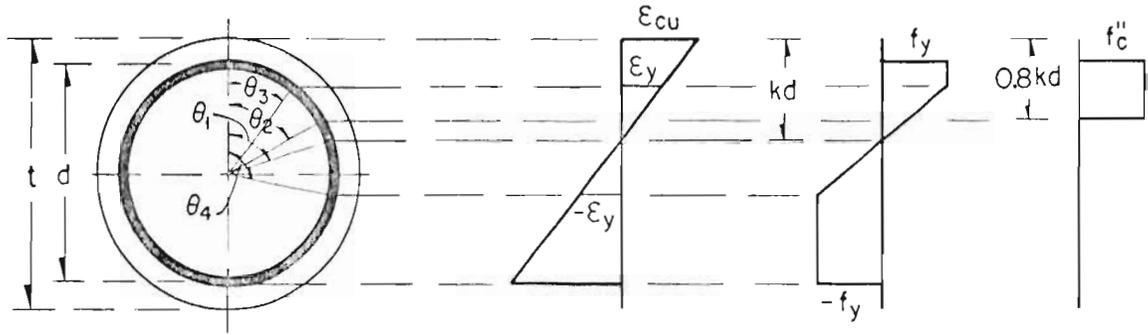
$$\frac{\epsilon_A}{\epsilon_{cu}} = \frac{y}{k d}$$

$$\epsilon_A = \frac{y}{k d} \epsilon_{cu} = \frac{\frac{d}{2} (\cos \theta - \cos \theta_1)}{k d} \epsilon_{cu}$$

$$\epsilon_A = \frac{\cos \theta - \cos \theta_1}{2 k} \epsilon_{cu}$$

$$f_A = \frac{\cos \theta - \cos \theta_1}{2 k} f_y \mu_{s1} - \epsilon_y < \epsilon_A < \epsilon_y$$

A15. SECCION CIRCULAR.  
ESFUERZOS EN EL ACERO.



a) Profundidad del eje neutro

$$kd = \frac{t}{2} - \frac{d}{2} \cos \theta_1$$

$$\theta_1 = \text{ang} \cos \left( \frac{1 - 2kd/t}{d/t} \right) \leq \pi$$

b) Profundidad del bloque de concreto en compresión

$$0.8 kd = \frac{t}{2} \left( 1 - \frac{d}{2} \cos \theta_2 \right)$$

$$\theta_2 = \text{ang} \cos \left( \frac{1 - 1.6 kd/t}{d/t} \right) \leq \pi$$

c) Profundidad de la deformación de fluencia en compresión

$$\frac{t}{2} - \frac{d}{2} \cos \theta_3 = kd \frac{\epsilon_{cu} - \epsilon_y}{\epsilon_{cu}}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{1}{d/t} + 2k \left( \frac{1 - \mu}{\mu} \right)$$

$$\theta_3 = \text{ang} \cos \left( \frac{1}{d/t} + 2k \left( \frac{1 - \mu}{\mu} \right) \right) \leq \pi$$

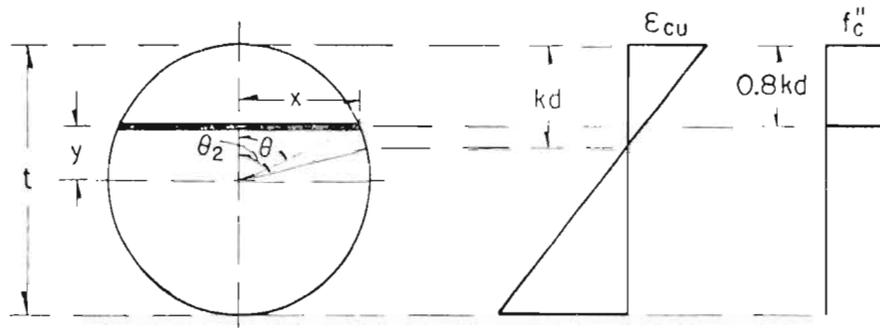
d) Profundidad de la deformación de fluencia en tensión

$$\frac{t}{2} - \frac{d}{2} \cos \theta_4 = \frac{\epsilon_{cu} + \epsilon_y}{\epsilon_{cu}} kd$$

$$\cos \theta_4 = \frac{1}{d/t} - \frac{1 + \mu}{\mu} 2k$$

$$\theta_4 = \text{ang} \cos \left( \frac{1}{d/t} - 2k \frac{1 + \mu}{\mu} \right) \leq \pi$$

A16. SECCION CIRCULAR.  
VALORES CRITICOS DE LA.  
PROFUNDIDAD DEL EJE NEUTRO.



$$F'_c = \int_y^{t/2} f'_c 2x dy$$

$$x = \frac{t}{2} \sin \theta$$

$$y = \frac{t}{2} \cos \theta; \quad dy = -\frac{t}{2} \sin \theta d\theta$$

$$F'_c = -\frac{t^2}{2} f'_c \int_{\theta_2}^0 \sin^2 \theta d\theta$$

$$F'_c = \frac{t^2 f'_c}{4} (\theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_2)$$

$$F_c = \frac{1}{4} (\theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_2)$$

$$M'_c = f'_c \int_y^{t/2} 2xy dy$$

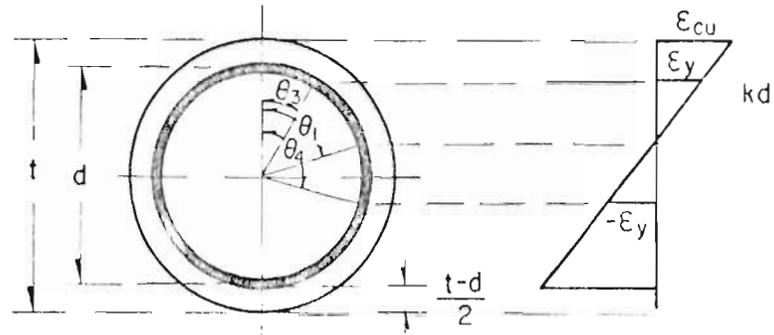
$$M'_c = -\frac{f'_c}{4} t^3 \int_{\theta_2}^0 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

$$M'_c = \frac{f'_c t^3}{12} \sin^3 \theta_2$$

$$M_c = \frac{\sin^3 \theta_2}{12}$$

A17. SECCION CIRCULAR.

RESULTANTES DEL CONCRETO.



$$\frac{F'_A}{2} = f_y \int_0^{\theta_3} d A_s - f_y \int_{\theta_4}^{\pi} d A_s + \int_{\theta_3}^{\theta_4} f_s d A_s$$

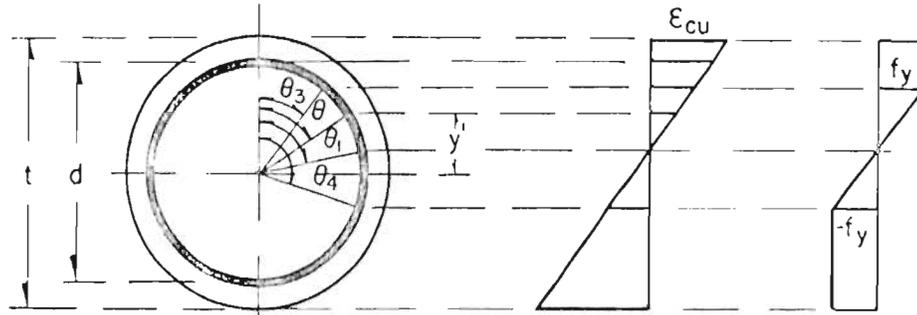
$$\frac{F'_A}{2} = f_y \left[ \int_0^{\theta_3} \frac{A_s}{2\pi} d\theta - \int_{\theta_4}^{\pi} \frac{A_s}{2\pi} d\theta \right] + \int_{\theta_3}^{\theta_4} \left( \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1}{2k} f_y \mu \frac{A_s}{2\pi} \right) d\theta$$

$$\frac{F'_A}{2} = f_y \frac{A_s}{2\pi} (\theta_3 + \theta_4 - \pi) + \frac{A_s f_y \mu}{4\pi k} \left[ \int_{\theta_3}^{\theta_4} \cos \theta d\theta - \cos \theta_1 \int_{\theta_3}^{\theta_4} d\theta \right]$$

$$\frac{F'_A}{2} = f_y \frac{A_s}{2\pi} (\theta_3 + \theta_4 - \pi) + \frac{A_s f_y \mu}{4\pi k} \left[ \sin \theta_4 - \sin \theta_3 - \cos \theta_1 (\theta_4 - \theta_3) \right]$$

$$\frac{F'_A}{t^2 f'_c} = \frac{q}{\pi} \left[ \theta_3 + \theta_4 - \pi + \frac{\mu}{2k} (\sin \theta_4 - \sin \theta_3 - \cos \theta_1 (\theta_4 - \theta_3)) \right]$$

A18. SECCION CIRCULAR.  
RESULTANTE DE FUERZA  
EN EL ACERO.



$$\frac{M'_A}{2} = f_y \int_0^{\theta_3} y' d A_s + \int_{\theta_3}^{\theta_4} y' f_s d A_s - f_y \int_{\theta_4}^{\pi} y' d A_s$$

$$y = \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$\frac{M'_A}{2} = f_y \int_0^{\theta_3} \cos \theta \frac{A_s}{2\pi} \frac{d}{2} d\theta - f_y \int_{\theta_4}^{\pi} \cos \theta \frac{A_s}{4\pi} d\theta + \int_{\theta_3}^{\theta_4} (\cos \theta - \cos \theta_1) \cos \theta \frac{f_y \mu A_s d}{8\pi k} d\theta$$

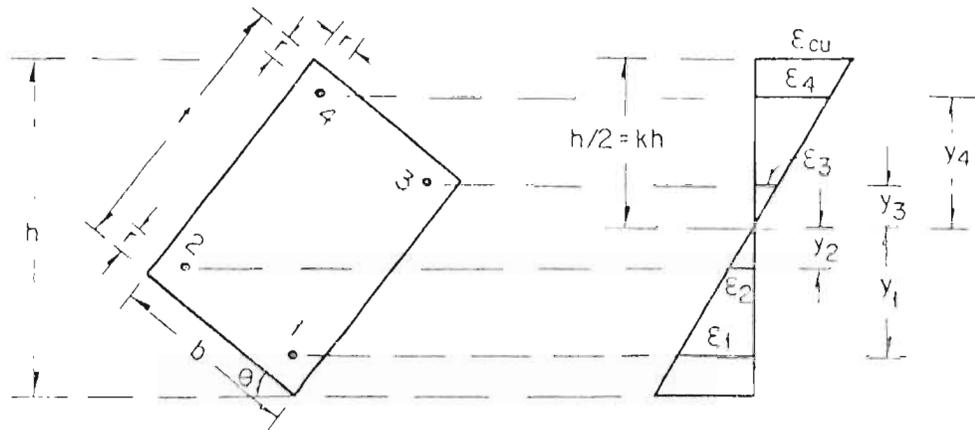
$$\frac{M'_A}{2} = \frac{f_y A_s d}{4\pi} \left\{ \sin \theta_3 + \sin \theta_4 + \frac{\mu}{2k} \left[ \frac{\sin \theta_4 \cos \theta_4 - \sin \theta_3 \cos \theta_3}{2} + \frac{\theta_4 - \theta_3}{2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \cos \theta_1 (\sin \theta_4 - \sin \theta_3) \right] \right\}$$

$$M_A = \frac{q d / t}{2\pi} \left\{ \sin \theta_3 + \sin \theta_4 + \frac{\mu}{2k} \left[ \frac{\sin \theta_4 \cos \theta_4 - \sin \theta_3 \cos \theta_3}{2} + \frac{\theta_4 - \theta_3}{2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \cos \theta_1 (\sin \theta_4 - \sin \theta_3) \right] \right\}$$

A19. SECCION CIRCULAR.  
RESULTANTE DEL MOMENTO  
EN EL ACERO.



$$h = b \sin \theta + t \cos \theta \quad y_1 \text{ Positiva hacia arriba}$$

$$y_1 = -h + kh + r \sin \theta + r \cos \theta$$

$$y_2 = -h + kh + b \sin \theta + r \cos \theta - r \sin \theta$$

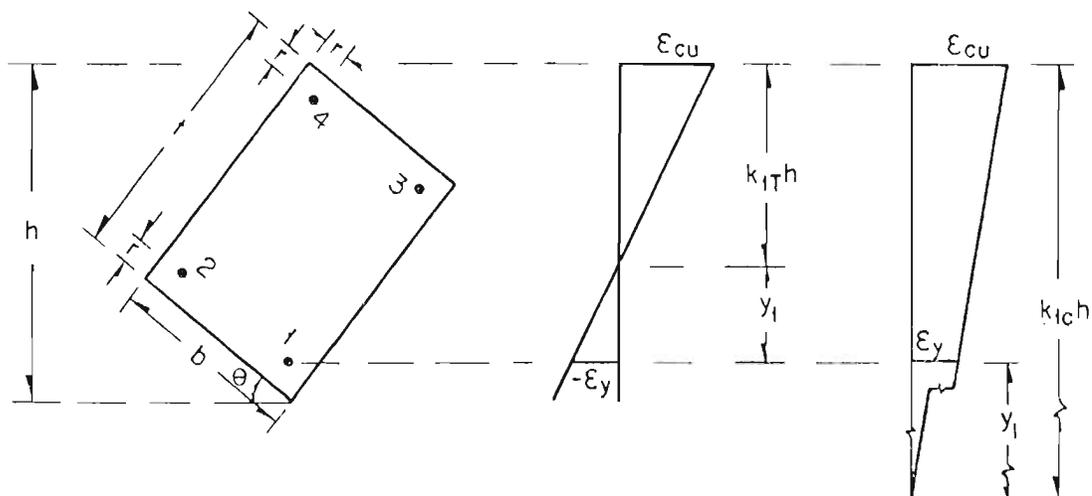
$$y_3 = kh - b \sin \theta - r \cos \theta + r \sin \theta$$

$$y_4 = kh - r \cos \theta - r \sin \theta$$

$$\epsilon_1 = \frac{y_1}{kh} \epsilon_{cu}$$

$$f_1 = \left( \frac{\mu}{kh} y_1 f_y \right) \leq f_y$$

A20. FLEXION BIAXIAL.  
ACERO EN LAS ESCUINAS.  
DEFORMACIONES EN EL ACERO.



Profundidad del eje neutro para fluencia en compresión

$$\frac{k_{1c} h}{y_t} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y}$$

$$k_{1c} h = \mu (-h + k_{1c} h + r \sin \theta + r \cos \theta)$$

$$k_{1c} (1 - \mu) h = \mu (-b \sin \theta - t \cos \theta + r \sin \theta + r \cos \theta)$$

$$k_{1c} = \frac{\mu}{(1 - \mu) h} \left[ (r - b) \sin \theta + (r - t) \cos \theta \right]$$

Profundidad para fluencia en tensión

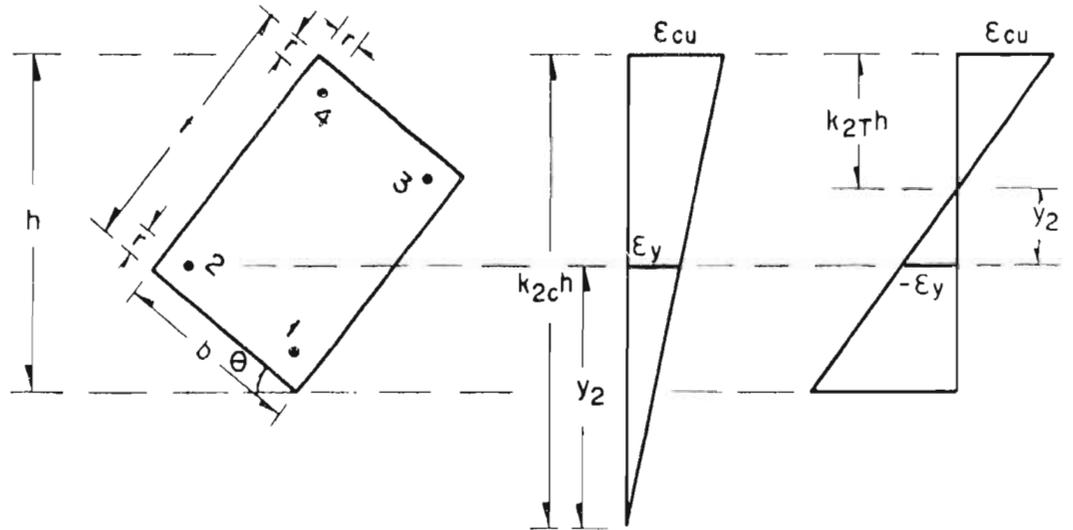
$$\frac{k_{1T} h}{y_t} = \frac{\epsilon_{cu}}{-\epsilon_y}$$

$$k_{1T} h = -\mu (-h + k_{1T} h + r \sin \theta + r \cos \theta)$$

$$k_{1T} h (1 + \mu) = -\mu (-b \sin \theta - t \cos \theta + r \sin \theta + r \cos \theta)$$

$$k_{1T} = \frac{\mu}{(1 + \mu) h} \left[ (b - r) \sin \theta + (t - r) \cos \theta \right]$$

A21. FLEXION BIAXIAL.  
ACERO EN LAS ESQUINAS.  
PROFUNDIDADES LIMITE DEL EJE NEUTRO.  
REFUERZO 1.



Fluencia en compresión

$$\frac{k_{2C} h}{y_2} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y}$$

$$k_{2C} h = \mu (k_{2C} h - b \operatorname{sen} \theta - t \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta)$$

$$k_{2C} = \frac{\mu}{(1-\mu) h} \left[ (r-t) \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \right]$$

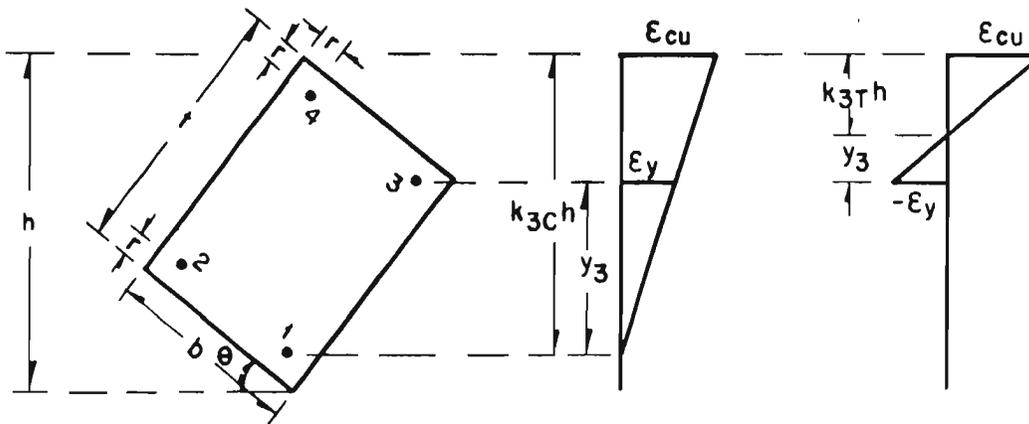
Fluencia en tensión

$$\frac{k_{2T} h}{y_2} = \frac{\epsilon_{cu}}{-\epsilon_y}$$

$$k_{2T} h = -\mu (k_{2T} h - t \cos \theta + r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta)$$

$$k_{2T} = \frac{\mu}{(1+\mu) h} \left[ (t-r) \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta \right]$$

A22. FLEXION BIAXIAL.  
ACERO EN LAS ESQUINAS.  
PROFUNDIDADES LIMITE DEL EJE NEUTRO.  
REFUERZO 2.



Fluencia en compresión

$$\frac{k_{3c}h}{y_3} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y}$$

$$k_{3c}h = \mu (k_{3c}h - b \sin \theta - r \cos \theta + r \sin \theta)$$

$$k_{3c} = \frac{\mu}{(1-\mu)h} \left[ (r-b) \sin \theta - r \cos \theta \right]$$

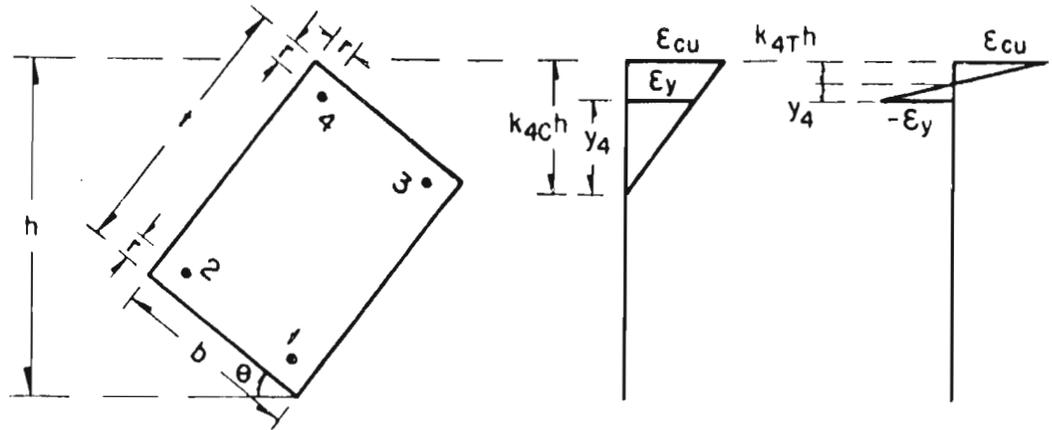
Fluencia en tensión

$$\frac{k_{3t}h}{y_3} = \frac{\epsilon_{cu}}{-\epsilon_y}$$

$$k_{3t}h = -\mu (k_{3c}h - b \sin \theta - r \cos \theta + r \sin \theta)$$

$$k_{3t} = \frac{\mu}{(1+\mu)h} \left[ (b-r) \sin \theta + r \cos \theta \right]$$

**A23. FLEXION BIAXIAL.  
ACERO EN LAS ESQUINAS.  
PROFUNDIDADES LIMITE DEL EJE NEUTRO.  
REFUERZO 3.**



Fluencia en compresión

$$\frac{k_{4Ch}}{y_4} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_y}$$

$$k_{4Ch} = \mu (k_{4Ch} - r \cos \theta - r \sin \theta)$$

$$k_{4C} = -\frac{\mu r}{(1-\mu)h} (\cos \theta + \sin \theta)$$

$$\frac{k_{4Th}}{y_4} = -\mu$$

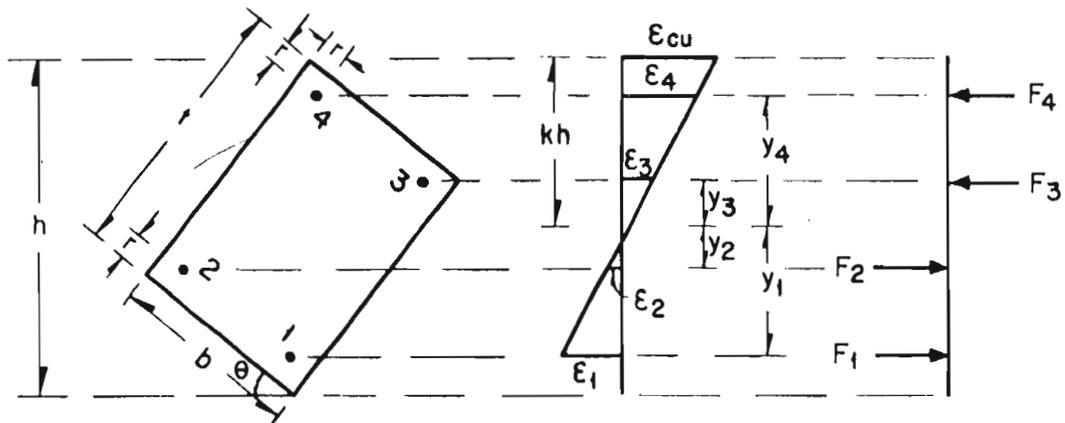
$$k_{4T} = \frac{\mu r}{(1+\mu)h} (\cos \theta + \sin \theta)$$

A24. FLEXION BIAXIAL.

ACERO EN LAS ESQUINAS.

PROFUNDIDADES LIMITE DEL EJE NEUTRO.

REFUERZO 4.



Para los cuatro refuerzos

$$F_i = \frac{A_s}{4} f_i = \frac{\mu y_i}{kh} f_y \frac{A_g}{4}$$

$$\text{si } -f_y \leq f_i \leq f_y$$

$$F_i = \frac{q \mu}{4 kh/t} \frac{y_i}{t}$$

$$\text{si } k_{i,T} \leq k \leq k_{i,C}$$

$$F_i = -\frac{q}{4}$$

$$\text{si } k < k_{i,T}$$

$$F_i = \frac{q}{4}$$

$$\text{si } k > k_{i,C}$$

$$M_{xi} = F_i \frac{b'_{xi}}{b}$$

$$M_{yi} = F_i \frac{b'_{yi}}{t}$$

$$b'_{x1} = b'_{x3} = r - \frac{b}{2}$$

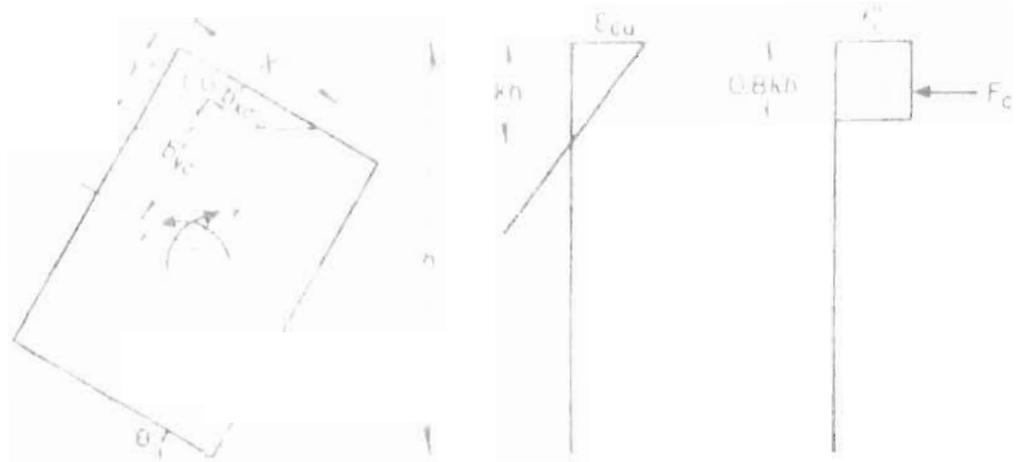
$$b'_{x2} = b'_{x4} = \frac{b}{2} - r$$

$$b'_{y1} = b'_{y2} = r - \frac{t}{2}$$

$$b'_{y3} = b'_{y4} = \frac{t}{2} - r$$

A25. FLEXION BIAXIAL.  
ACERO EN LAS ESQUINAS.  
RESULTANTES EN EL ACERO.

80



$$X_c' = \frac{0,8kh}{\text{sen } \theta}$$

$$Y_c' = \frac{0,8kh}{\text{cos } \theta}$$

$$X = \frac{0,8kh \text{sen } \theta}{b} = \frac{1}{3} \text{sen } \theta$$

$$Y = \frac{0,8kh \text{ cos } \theta}{h} = \frac{1}{3} \text{ cos } \theta$$

$$F_c = A_c \cdot \sigma_c$$

$$F_c = \frac{xy}{2} \cdot M_{xc} = F_c (D_{xc})$$

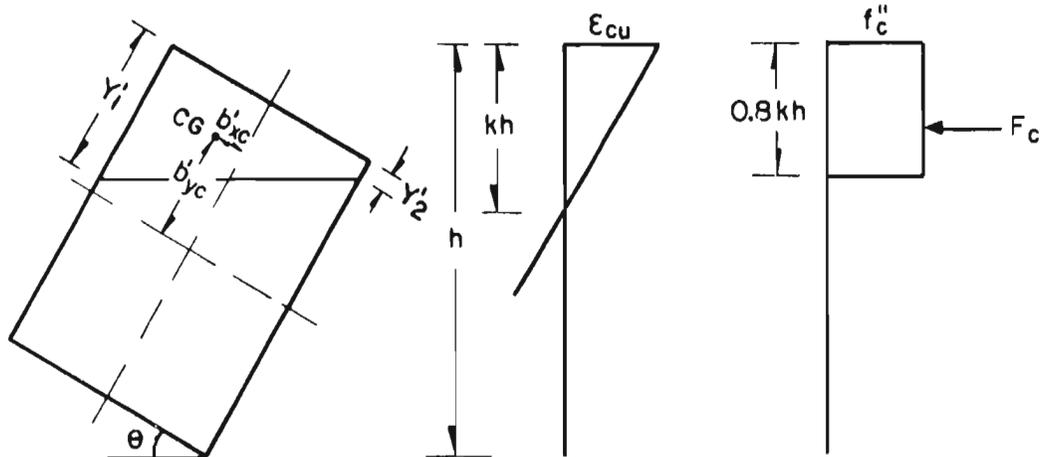
$$D_{xc} = \frac{D}{2} - \frac{X_c'}{3} = M_{xc} = F_c (D_{xc})$$

$$D_{yc} = \frac{1}{2} - \frac{Y}{3}$$

$$D_{xc} = \frac{D_{xc}}{b} = \frac{1}{2} - \frac{X}{3}$$

$$D_{yc} = \frac{D_{yc}}{h} = \frac{1}{2} - \frac{Y}{3}$$

426 FLEXION BIAXIAL  
 RESULTANTES DEL CONCRETO  
 CASO 1.



$$Y'_1 = \frac{0.8kh}{\cos \theta}$$

$$Y'_2 = (0.8kh - b \sin \theta) \frac{1}{\cos \theta}$$

$$Y_1 = \frac{Y'_1}{t} = \frac{0.8kh/t}{\cos \theta}$$

$$Y_2 = \frac{Y'_2}{t} = (0.8kh/t - b/t \sin \theta) \frac{1}{\cos \theta}$$

$$A_c = \frac{Y'_1 + Y'_2}{2} b$$

$$F_c = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

$$b'_{xc} = \frac{b}{2} - b \frac{(Y'_1 + 2Y'_2)}{3(Y'_1 + Y'_2)} \quad M_{xc} = F_c (b'_{xc})$$

$$M_{yc} = F_c (b'_{yc})$$

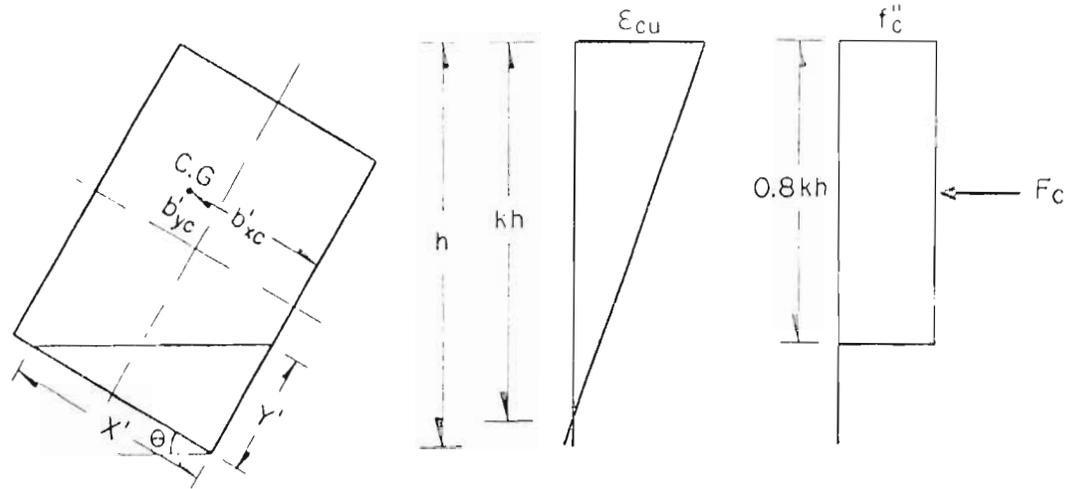
$$b_{xc} = \frac{1}{2} - \frac{Y_1 + Y_2}{3(Y_1 + Y_2)}$$

$$b'_{yc} = \frac{t}{2} - \frac{Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2}{3(Y_1 + Y_2)}$$

$$b_{yc} = \frac{1}{2} - \frac{Y_1 + Y_1 Y_2 + Y_2}{3(Y_1 + Y_2)}$$

A27. FLEXION BIAJIAL.  
RESULTANTES DEL CONCRETO.

CASO 2.



$$X' = \frac{h - 0.8kh}{\text{sen } \theta}$$

$$Y' = \frac{h - 0.8kh}{\text{cos } \theta}$$

$$X = \frac{h/t - 0.8kh/t}{b/t \text{ sen } \theta}$$

$$Y = \frac{h/t - 0.8kh/t}{\text{cos } \theta}$$

$$A_c = bt - \frac{X'Y'}{2}$$

$$F_c = 1 - \frac{XY}{2}$$

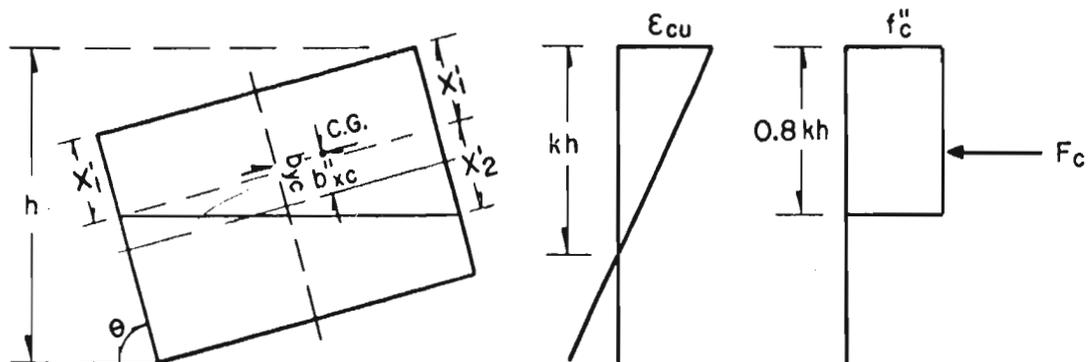
$$M_{xc} = F_c (b x_c)$$

$$M_{yc} = F_c (b y_c)$$

$$b x_c = \frac{\frac{XY}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{X}{3} \right)}{1 - \frac{XY}{2}}$$

$$b y_c = \frac{\frac{XY}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{Y}{3} \right)}{1 - \frac{XY}{2}}$$

A28. FLEXION BIAIXIAL.  
 RESULTANTES DEL CONCRETO.  
 CASO 3.



$$x'_1 = (0.8 kh - t \cos \theta) \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$x'_2 = \frac{0.8 kh}{\text{sen } \theta} - x'_1$$

$$x_1 = \frac{0.8 kh/t - \cos \theta}{(b/t) \text{sen } \theta}$$

$$x_2 = \frac{0.8 kh/t}{b/t \text{sen } \theta} x_1$$

$$A_c = (2 x'_1 + x'_2) \frac{t}{2}$$

$$F_c = \frac{2 x_1 + x_2}{2}$$

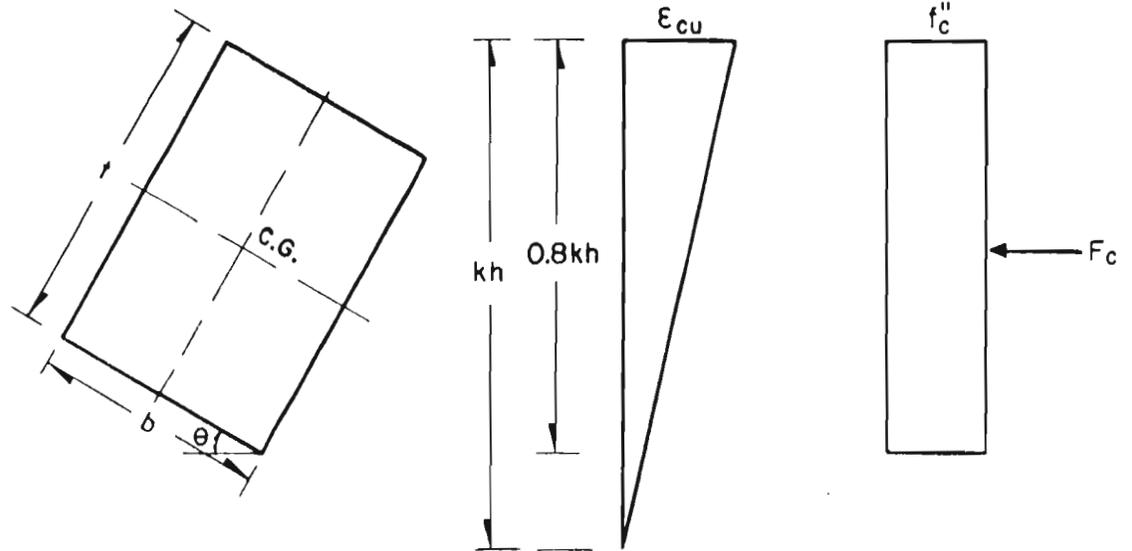
$$b x_c = \frac{1}{2} - \frac{x_1^2 + x_2 (x_1 + \frac{x_2}{3})}{2 x_1 + x_2}$$

$$M x_c = F_c (b x_c)$$

$$M y_c = F_c (b y_c)$$

$$b y_c = \frac{1}{2} - \frac{x_1 + \frac{x_2}{3}}{2 x_1 + x_2}$$

A29. FLEXION BIAXIAL.  
RESULTANTES DEL CONCRETO.  
CASO 4.



$$A_c = b t$$

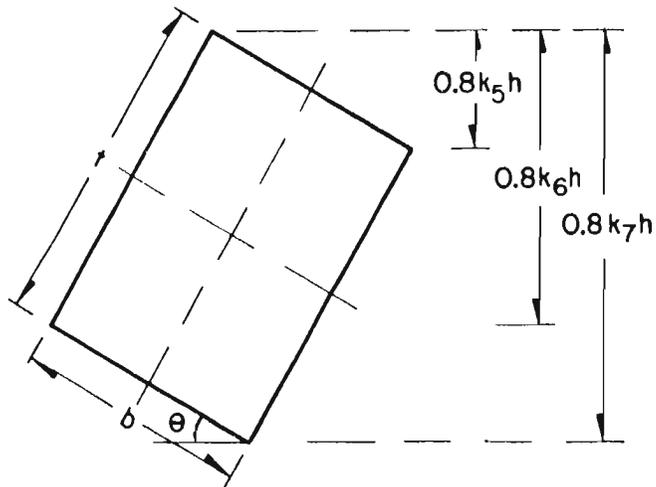
$$F_c = 1$$

$$b x_c = 0$$

$$b y_c = 0$$

A30. FLEXION BIAXIAL.  
RESULTANTES DEL CONCRETO.

C A S O 5.



$$0.8 k_5 h = b \operatorname{sen} \theta$$

$$k_5 = \frac{1.25 b/t \operatorname{sen} \theta}{h/t}$$

$$0.8 k_6 h = t \cos \theta$$

$$k_6 = \frac{1.25 \cos \theta}{h/t}$$

$$k_7 = 1.25$$

Si  $k < k_5 < k_6$  ; Caso I

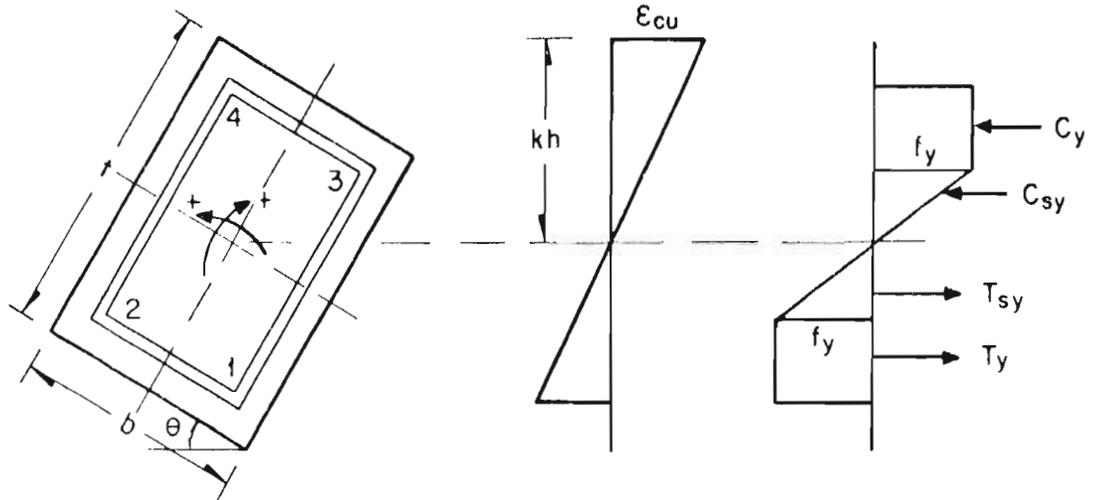
Si  $k_5 < k < k_6$  ; Caso II

Si  $k_6 < k < k_5$  ; Caso IV

Si  $k_5$  y  $k_6 < k < k_7$  ; Caso III

Si  $k > k_7$  ; Caso V

A 31. FLEXION BIAXIAL.  
RESULTANTES DEL CONCRETO.  
VALORES LIMITE PARA LOS 5 CASOS.



$L' =$  Suma de longitudes de barras

$$L' = 2(b - 2r) + 2(t - 2r)$$

$$L = \frac{L'}{t} = 2\left(\frac{b}{t} + 1 - 4\frac{r}{t}\right)$$

$$H = \frac{A_s}{L}$$

$$F_s = F_{1-2} + F_{2-4} + F_{3-4} + F_{3-1}$$

Barra 1-2	Barra 2-4	Barra 4-3	Barra 3-1
$y_1 = y_1$	$y_1 = y_2$	$y_1 = y_4$	$y_1 = y_1$
$y_s = y_2$	$y_s = y_4$	$y_s = y_3$	$y_s = y_3$

Para los valores de  $y_1, y_2, y_3, y_4$  ver fig. A-20

Para cada barra

$$F_{1s} = C_y + C_{sy} + C_s + T_y + T_{sy} + T_s$$

Para saber cuales valores se anulan en cada caso, ver fig A 40.

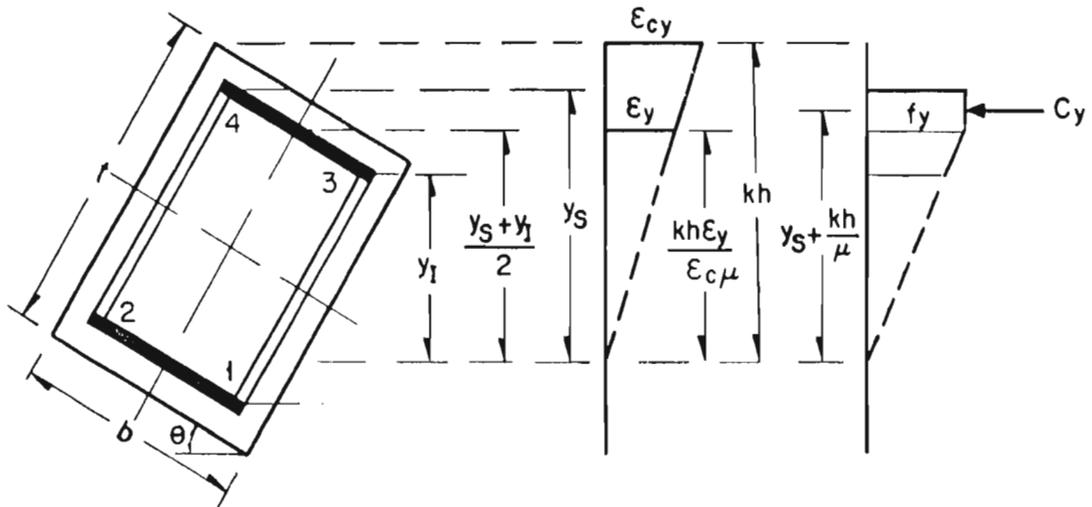
$$by_{1-2} = r - \frac{t}{2}$$

$$bx_{2-4} = \frac{b}{2} - r$$

$$by_{4-3} = \frac{t}{2} - r$$

$$bx_{3-1} = r - \frac{b}{2}$$

### A 32. SECCION BIAXIAL. ACERO DISTRIBUIDO. CONSIDERACIONES GENERALES.



Barras cortas

'y' positiva hacia arriba

$$C'_y = \frac{A_s}{L} \frac{(y_s - k \frac{h}{\mu})}{\text{sen } \theta} f_y$$

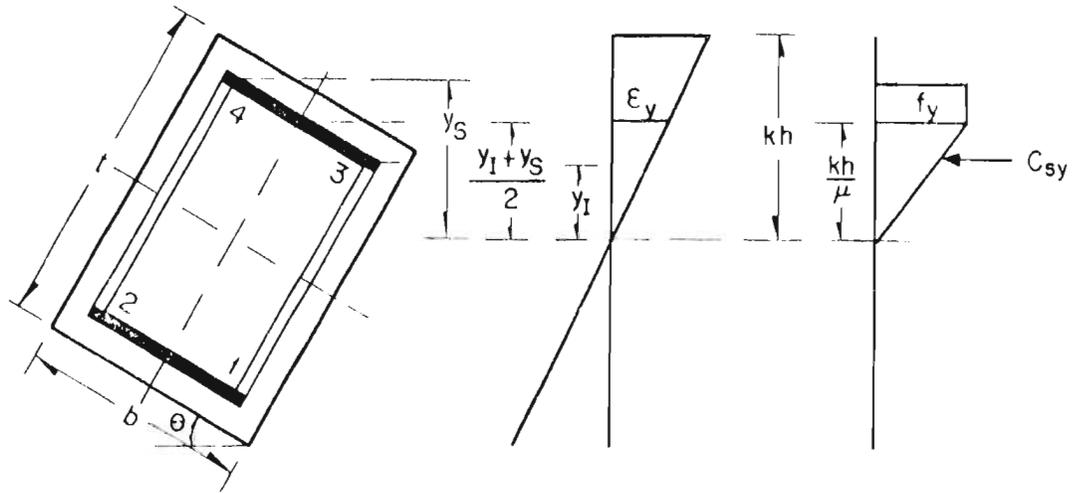
$$C_y = \frac{q (y_s - k \frac{h/t}{\mu})}{L \text{ sen } \theta}$$

$$M'_{xcy} = C_y \left[ + \frac{y_s + \frac{kh}{\mu}}{2} - \frac{y_s + y_1}{2} \right] \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$M_{xcy} = C_y \left[ + \frac{y_s + \frac{kh/t}{\mu}}{2} - \frac{y_s + y_1}{2} \right] \frac{1}{b/t \text{ sen } \theta}$$

$$M_{xcy} = \frac{C_y}{2(b/t) \text{ sen } \theta} \left( \frac{kh/t}{\mu} - y_1 \right)$$

**A33. FLEXION BIAXIAL.**  
**ACERO DISTRIBUIDO.**  
**RESULTANTES DEL ACERO.**  
**BARRAS EN DIRECCION 'x'  $C_y, M_{xcy}$ .**



Barras cortas

$$C'_{sy} = \frac{A_s}{L'} \frac{l}{2} \frac{kh}{\mu} \frac{l}{\text{sen } \theta} f_y$$

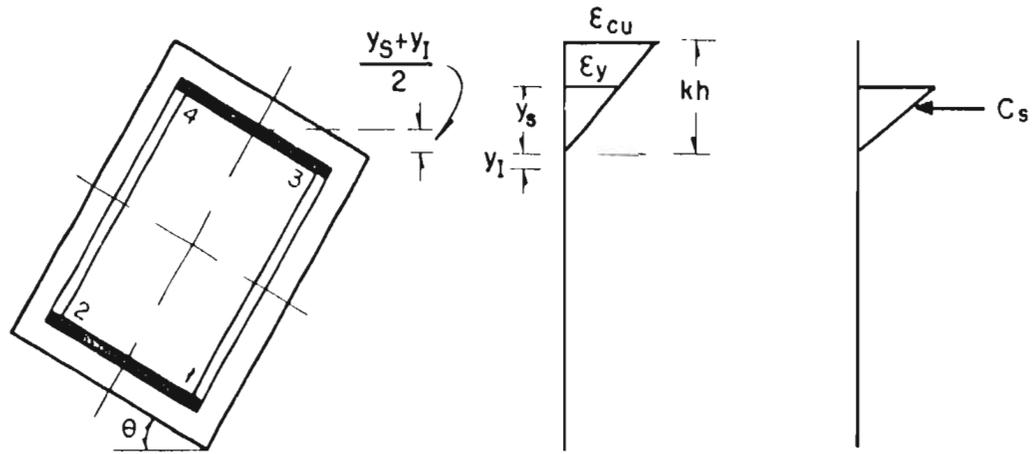
$$C_{sy} = \frac{q kh/t}{2 L \mu \text{sen } \theta}$$

$$M'_{xcsy} = C_{sy} \left( -\frac{y_I + y_s}{2} + \frac{2}{3} \frac{kh}{\mu} \right) \frac{l}{\text{sen } \theta}$$

$$M_{xcsy} = C_{sy} \left( -\frac{y_I + y_s}{2} + \frac{2}{3} \frac{kh/t}{\mu} \right) \frac{l}{b/t \text{sen } \theta}$$

Se está tomando una parte de barra ficticia, cuya resultante se anula al tomar en cuenta una componente  $C_s$  de signo contrario

A34 FLEXION BIAIXIAL.  
ACERO DISTRIBUIDO.  
RESULTANTES DEL ACERO.  
BARRAS EN DIRECCION 'x'  $C_{sy}$ ,  $M_{xcsy}$ .



Barras cortas

$$C'_s = \frac{A_s}{L'} \frac{y_s}{2 \operatorname{sen} \theta} f_s$$

$$f_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_y} f_y$$

$$\epsilon_s = \frac{y_s}{kh} \epsilon_{cu}$$

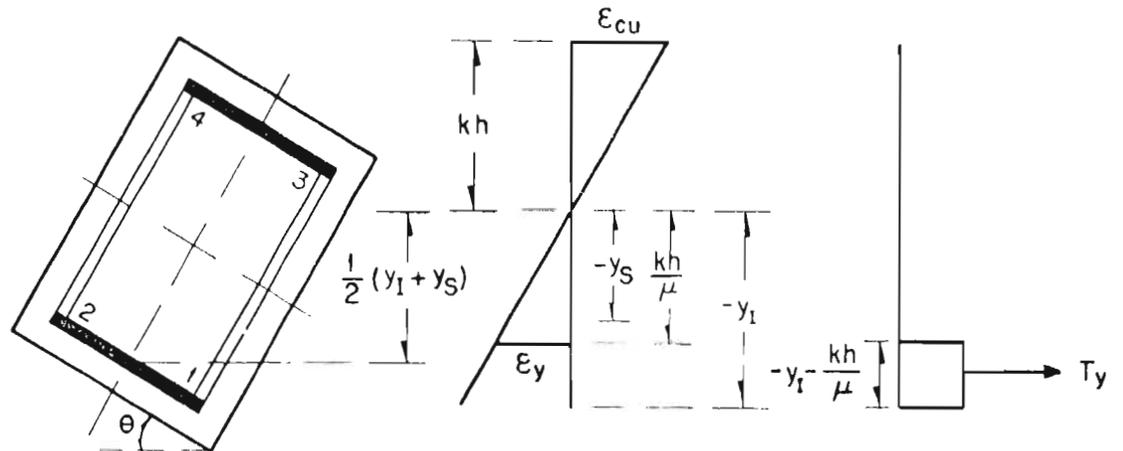
$$f_s = \frac{y_s}{kh} \mu f_y$$

$$C_s = \frac{q y_s^2 \mu}{2 L kh / t \operatorname{sen} \theta}$$

$$M_{xcs} = C_s \left( -\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{2}{3} y_s \right) \frac{l}{b/t \operatorname{sen} \theta}$$

$$M_{xcs} = C_s \left( \frac{-3y_1 + y_2}{6} \right) \frac{l}{b/t \operatorname{sen} \theta}$$

A35. FLEXION BIAXIAL.  
 ACERO DISTRIBUIDO.  
 RESULTANTES DEL ACERO.  
 BARRAS EN DIRECCION 'x'  $C_s$ ,  $M_{xcs}$ .



Barras cortas

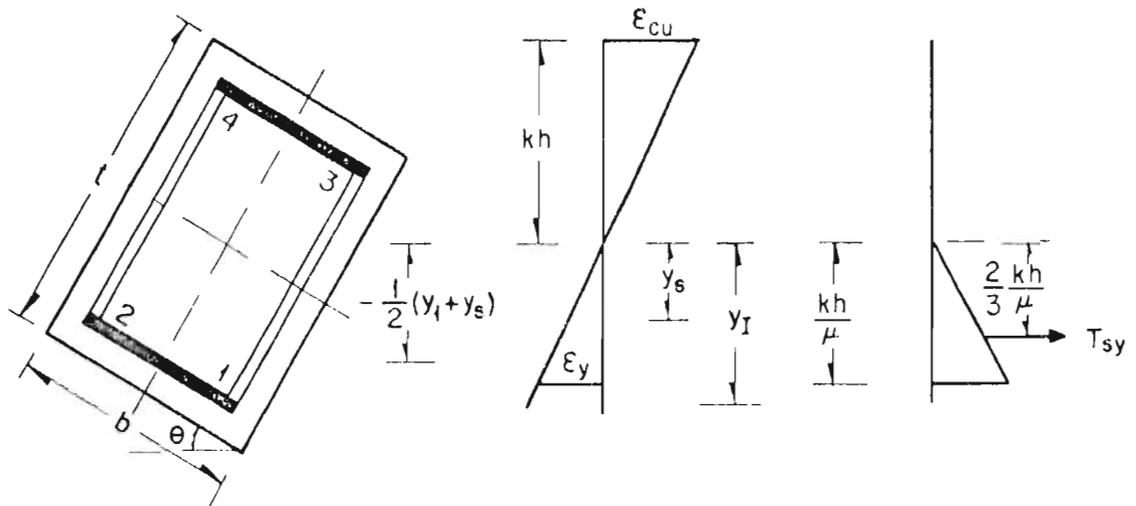
$$T'_y = -\frac{A_s}{L} \left( -y_1 + \frac{kh}{\mu} \right) \frac{f_y}{\text{sen } \theta}$$

$$T_y = \frac{q}{L \text{ sen } \theta} \left( -y_1 + \frac{kh/t}{\mu} \right)$$

$$M_{xTy} = T_y \frac{l}{2} \left[ \left( -y_1 + \frac{kh}{\mu} \right) + (y_1 + y_s) \right] \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$M_{xTy} = \frac{T_y}{2 b/t \text{ sen } \theta} \left( \frac{kh/t}{\mu} + y_s \right)$$

**A36. FLEXION BIAXIAL.  
ACERO DISTRIBUIDO.  
RESULTANTES DEL ACERO.  
BARRAS EN DIRECCION 'x'  $T_y$ ,  $M_{Ty}$ .**



Barras cortas

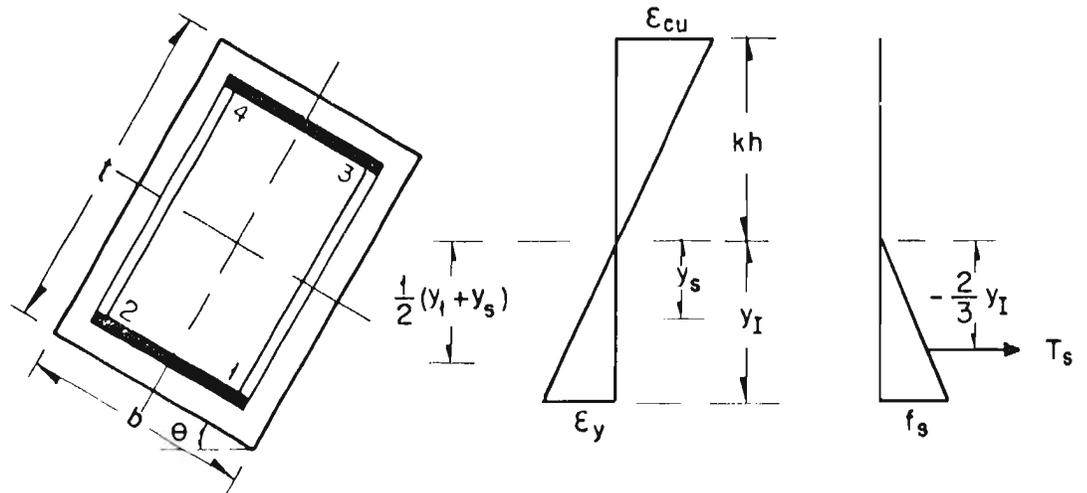
$$T'_{sy} = -\frac{A_s}{L} \frac{1}{2} \frac{kh}{\mu} f_y \frac{l}{\text{sen } \theta}$$

$$T_{sy} = -\frac{q}{2L \text{sen } \theta} \frac{kh/t}{\mu}$$

$$M_{Tsy} = T_{sy} \left[ \frac{2}{3} \frac{kh}{\mu} + \frac{1}{2} (y_I + y_s) \right] \frac{l}{\text{sen } \theta}$$

$$M_{Tsy} = T_{sy} \left[ \frac{2}{3} \frac{kh/t}{\mu} + \frac{1}{2} (y_I + y_s) \right] \frac{l}{b/t \text{ sen } \theta}$$

**A37. FLEXION BIAXIAL.**  
**ACERO DISTRIBUIDO.**  
**RESULTANTES DEL ACERO.**  
**BARRAS EN DIRECCION 'x'  $T_{sy}$ ,  $M_{Tsy}$ .**



Barras cortas

Caso 6

$$T'_s = -\frac{A_s}{L} \frac{y_I}{2 \operatorname{sen} \theta} f_s$$

$$f_s = \frac{\epsilon_I}{\epsilon_y} f_y$$

$$\epsilon_s = \frac{y_I}{k h} \epsilon_{cu}$$

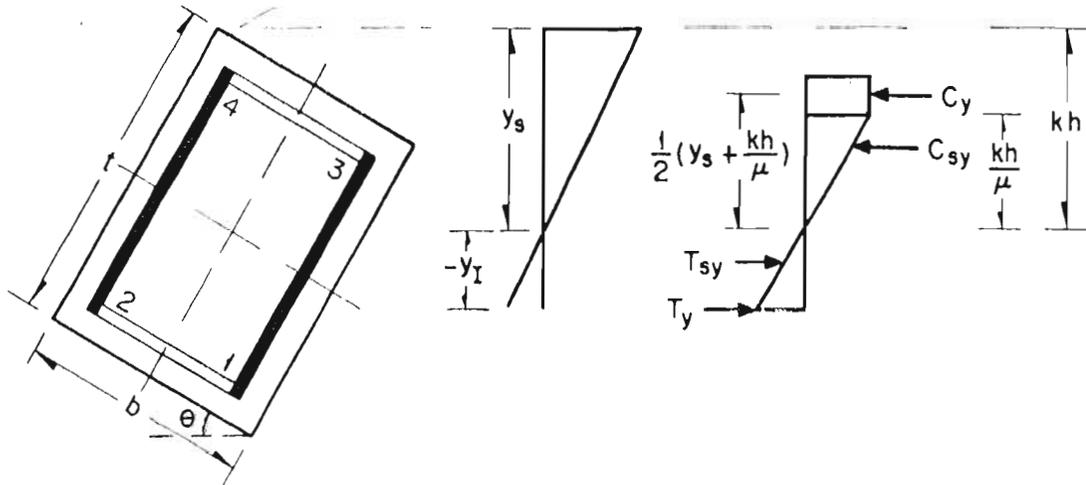
$$T'_s = \frac{A_s}{L} \frac{y_I^2 \mu}{2 k h \operatorname{sen} \theta} f_y$$

$$T_s = -q \frac{y_I^2 \mu}{2 L k h / t \operatorname{sen} \theta}$$

$$M'_{xcs} = T_s \left[ -\frac{2}{3} y_I + \left( \frac{y_I + y_s}{2} \right) \right] \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$M_{xcs} = T_s (3 y_s - y_I) \frac{1}{6 b / t \operatorname{sen} \theta}$$

A 38. FLEXION BIAXIAL.  
ACERO DISTRIBUIDO.  
RESULTANTES DEL ACERO.  
BARRAS EN DIRECCION 'x' CASO 6.



Barras en dirección 'y'

Fuerzas -

Se obtienen las mismas fórmulas sustituyendo  $\cos \theta$  en lugar de  $\sin \theta$

Momentos -

Se obtienen las mismas fórmulas sustituyendo  $\cos \theta$  en lugar de  $b/t \sin \theta$

Ejemplo :

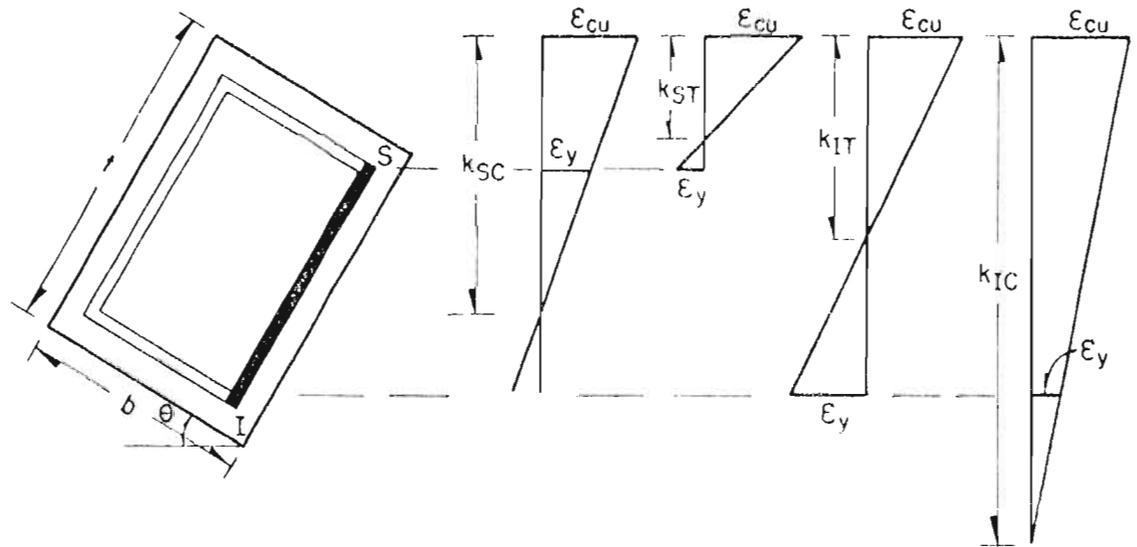
$$C'_y = \frac{A_s}{L} \left( y_s - \frac{kh}{\mu} \right) \frac{l}{\cos \theta}$$

$$C_y = \frac{q}{L \cos \theta} \left( y_s - \frac{kh/t}{\mu} \right)$$

$$M_{cy} = \frac{C}{2} y \left[ \left( y_s + \frac{kh}{\mu} \right) - (y_I + y_s) \right] \frac{l}{\cos \theta}$$

$$M_{cy} = \frac{C_y}{2 \cos \theta} \left( -y_I + \frac{kh/t}{\mu} \right)$$

A 39. FLEXION BIAXIAL.  
ACERO DISTRIBUIDO.  
RESULTANTES DEL ACERO.  
BARRAS EN DIRECCION 'y'.



Si  $k < k_{ST}$  , Caso 1

Si  $k < k_{SC}$  y  $k < k_{IT}$  , Caso 2

Si  $k_{IT} < k < k_{IC}$   
y  $k_{ST} < k < k_{SC}$  , Caso 3

Si  $k_{SC} < k < k_{IT}$  , Caso 4

Si  $k_{IT} < k < k_{IC}$  , Caso 5

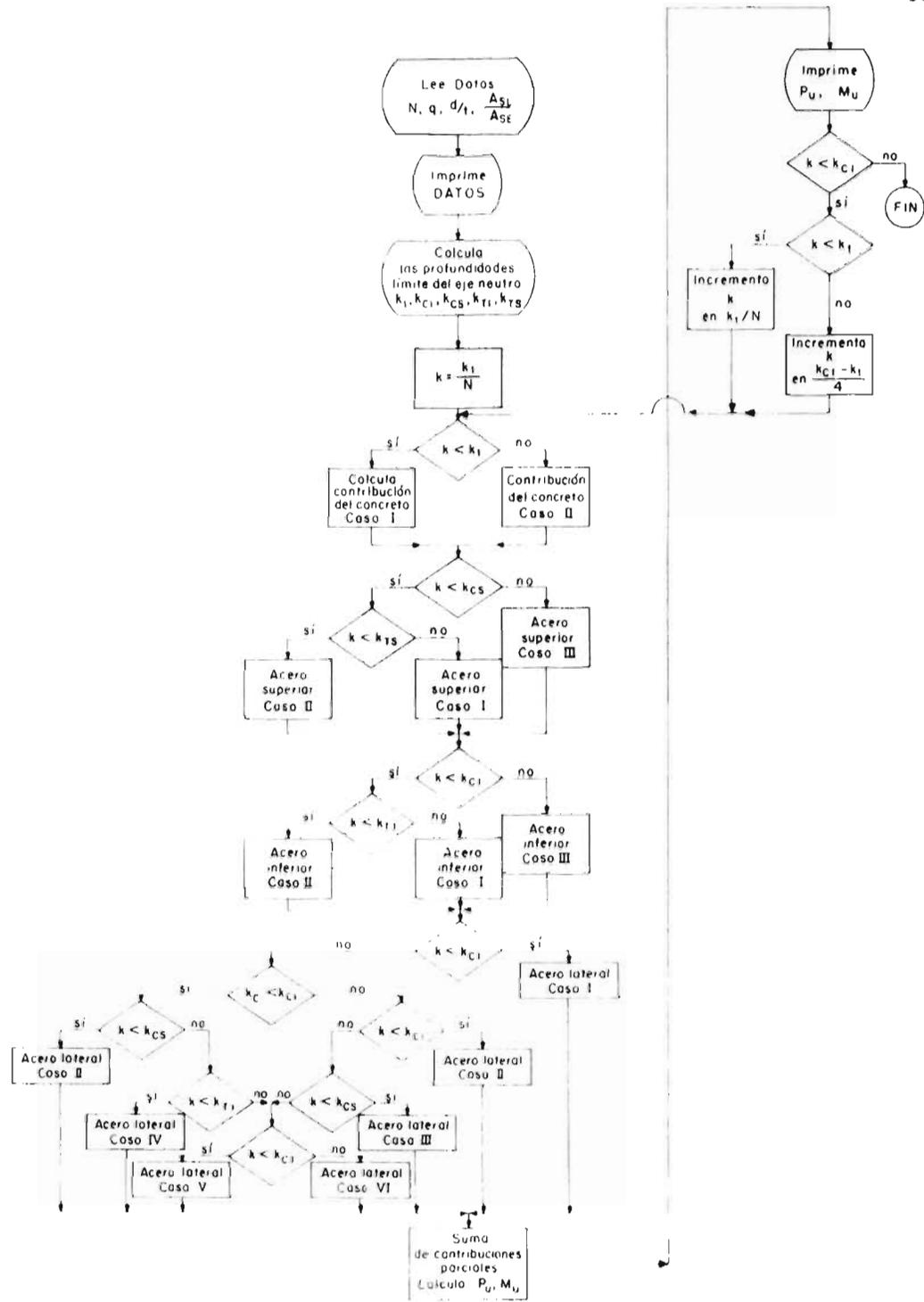
Si  $k > k_{IC}$  , Caso 6

Para la definición de los 6 casos véase figs A 6 a la A 8

A 40. FLEXION BIAXIAL.  
ACERO DISTRIBUIDO.  
INTERVALOS DE APLICACION.  
DE LOS DISTINTOS CASOS.

**A P E N D I C E      B**

**Programas para Computadora**



B 1. DIAGRAMA DE FLUJO PARA SECCION RECTANGULAR.  
FLEXION EN UNA DIRECCION

96

```

C      DIAGRAMAS DE INTERACCION,COLUMNAS*RECTANGULARES
C      R INOICA LA CONTRIBUCION DEL ACERO LATERAL
2  FORMAT(5F10.0)
31  FORMAT(7H P ULT=E15.8,7H M ULT=E15.8)
34  FORMAT(7H DATOS=5E10.4)
1  READ 2,FNE,FMU,PM,DST,R
   CA1=1.25/DST
   CA2=FMU*(1. DST)/(DST*(FMU-1.))
   CA3=FMU*(1. DST)/(DST*(FMU+1.))
   CA4=FMU/(FMU-1.)
   CA5=FMU/(FMU+1.)
   PMF=PM/(1.+R)
   PML=PM-PMF
3  CA=CA1/FNE
4  IF(CA1-CA)5,6,6
5  CC=-1.
   RC=0.0
   GO TO 7
6  CC=-0.8*CA*DST
   RC=0.5-0.4*CA*DST
7  IF(CA2-CA)8,8,9
3  CSF=-PMF/2.
   GO TO 12
9  IF(CA3-CA)10,10,11
10  CSF=-0.5*PMF*FMU*(DST*(1.+CA)-1.)/(CA*DST)
   GO TO 12
11  CSF=PMF/2.
12  IF(CA4-CA)13,13,14
13  TSF=-PMF/2.
   GO TO 17
14  IF(CA5-CA)15,15,16
15  TSF=0.5*PMF*FMU*(1.-CA)/CA
   GO TO 17
16  TSF=PMF/2.
17  RS=DST-0.5
   CCM=-CC*RC
   CFM=-CSF*RS
   TFM=TSF*RS
   IF(CA3-CA)19,20,20
20  FSL=PML
   FSLM=0.0
   GO TO 21
19  A=2.*DST-1.
   B=CA*DST/FMU
   D=1./FMU+1.
   F=CA*DST-1. DST
   IF(CA2-CA)22,23,23
23  IF(CA5-CA)24,25,25
25  CSL=PML*FMU*F**2/(2.*A*CA*DST)
   TSL=PML*CA*DST/(2.*A*FMU)
   CYL=0.
   TYL=PML*(DST-CA*DST*D)/A
   CSLM=CSL*(2./3.*DST-CA*DST/3.-1./6.)
   TSLM=TSL*(CA*DST+2./3.*CA*DST/FMU*.5)
   CYLM=0.
   TYLM=TYL/2.*(E+CA*DST/FMU)
   GO TO 26
24  IF(CA2-CA)27,27,28
28  CSL=PML*F**2/(2.*A*CA*DST)*FMU
   TSL=PML*FMU*(DST-CA*DST)**2/(2.*A*CA*DST)
   CYL=0.

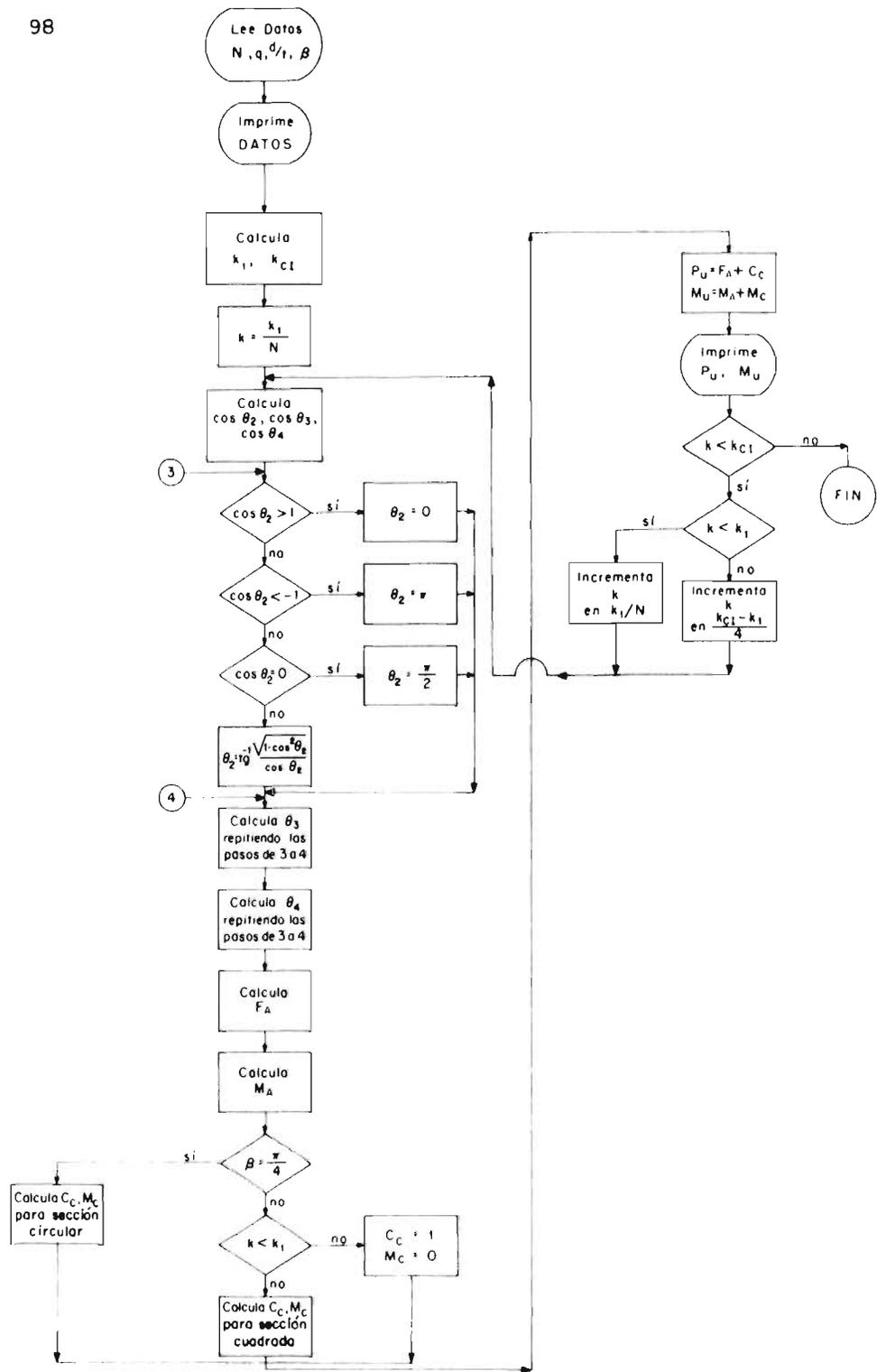
```

```

TYL=0.
CSL=CSL*(2./3.*DST-CA*DST/3.-1./6.)
TSL=TSL*(2./3.*DST+CA*DST/3.-0.5)
CYL=0.
TYLM=0.
GO TO 26
27 CSL=PML*B/(2.*A)
TSL=PML/B*(DST-CA*DST)**2/(2.*A)
CYL=PML/A*(F-B)
TYL=0.
CSLM=CSL*(0.5-CA*DST+2./3.*B)
TSLM=TSL*(2./3.*DST+CA*DST/3.-0.5)
CYLM=CYL/2.*(DST-CA*DST+B)
TYLM=0.
GO TO 26
22 IF(CA2-CA)29,25,25
29 IF(CA5-CA)27,30,30
30 CSL=PML*CA*DST/(2.*A*FMU)
TSL=CSL
CYL=PML*(E-CA*DST/FMU)/A
TYL=PML*(DST-CA*DST*D)/A
CSLM=CSL*(0.5-CA*DST*(1.-2./3.*FMU))
TSLM=TSL*(CA*DST+2.*CA*DST/3.*FMU)-0.5)
CYLM=CYL*(DST-CA*DST+CA*DST/FMU)/2.
TYLM=TYL*(E-CA*DST/FMU)/2.
26 FSL=-CSL-CYL+TSL+TYL
FSLM=CSLM+CYLM+TSLM+TYLM
21 PU=CC+CSF+TSF+FSL
UM=CCM+CFM+TFM+FSLM
PRINT 31,PU,UM
CA=CA+CA1/ENF
IF(CA-CA1)4,4,32
32 CA=CA+(CA4-CA1)/4.
IF(CA-CA4)4,4,33
33 PRINT 34,ENF,FMU,PM,DST,R
GO TO 1
END

```

## B2.2. DIAGRAMAS DE INTERACCION.- COLUMNAS RECTANGULARES



B 3. DIAGRAMA DE FLUJO PARA GRAFICAS DE INTERACCION SECCION CIRCULAR

```

C      DIAGRAMAS INTERACCION COLUMNAS REFUERZO CIRCULAR
C      SECCION CUADRADA (BETA=1) Y CIRCULAR (BETA=0.7854)
C      D ES DIAMETRO DEL REFUERZO          *
1 READ 2,FNE,FMU,PM,DST,BETA
2 FORMAT(5F10.0)
41 FORMAT(7H P ULT=F15.8,7H M ULT=F15.8)
44 FORMAT(3H N=F10.4,4H MU=E10.4,5H D/T=E10.4,4H PM=E10.4,3H B=E10.4
CA1=1./DST
CA4=(1.+DST)/(2.*DST)*(FMU/(FMU-1.))
CA=CA1/ENE
PI=.14159270
3 CS2=1.-7.6*CA*DST
IF(CS2-1.)12,13,13
13 TETA2=0.
GO TO 14
12 IF(CS2+1.)15,15,16
15 TETA2=PI
GO TO 14
16 T2=SQRTF(1.-CS2**2)/CS2
IF(CS2-0.)17,18,19
18 TETA2=PI/2.
GO TO 14
17 TETA2=PI+ATANF(T2)
GO TO 14
19 TETA2=ATANF(T2)
14 CS3=1./DST+2.*CA/FMU*(1.-FMU)
IF(CS3-1.)20,21,21
21 TETA3=0.
GO TO 22
20 IF(CS3+1.)23,23,24
23 TETA3=PI
GO TO 22
24 T3=SQRTF(1.-CS3**2)/CS3
IF(CS3-0.)25,26,27
26 TETA3=PI/2.
GO TO 22
25 TETA3=PI+ATANF(T3)
GO TO 22
27 TETA3=ATANF(T3)
22 CS4=1./DST-2.*CA/FMU*(1.+FMU)
IF(CS4-1.)28,29,29
29 TETA4=0.
GO TO 30
28 IF(CS4+1.)31,31,32
31 TETA4=PI
GO TO 30
32 T4=SQRTF(1.-CS4**2)/CS4
IF(CS4-0.)33,34,35
9 34 TETA4=PI/2.          *
GO TO 30
33 TETA4=PI+ATANF(T4)
GO TO 30
35 TETA4=ATANF(T4)
30 A=PM*BETA/PI
B=TETA3+TETA4
C=SINF(TETA3)-SINF(TETA4)
H=TETA3-TETA4
D=-H*(1./DST-2.*CA)
E=-SINF(TETA3)-SINF(TETA4)
G=SINF(TETA4)*COSF(TETA4)-SINF(TETA3)*COSF(TETA3)
FS=A*(PI-B+(FMU/(2.*CA))*(C+D))

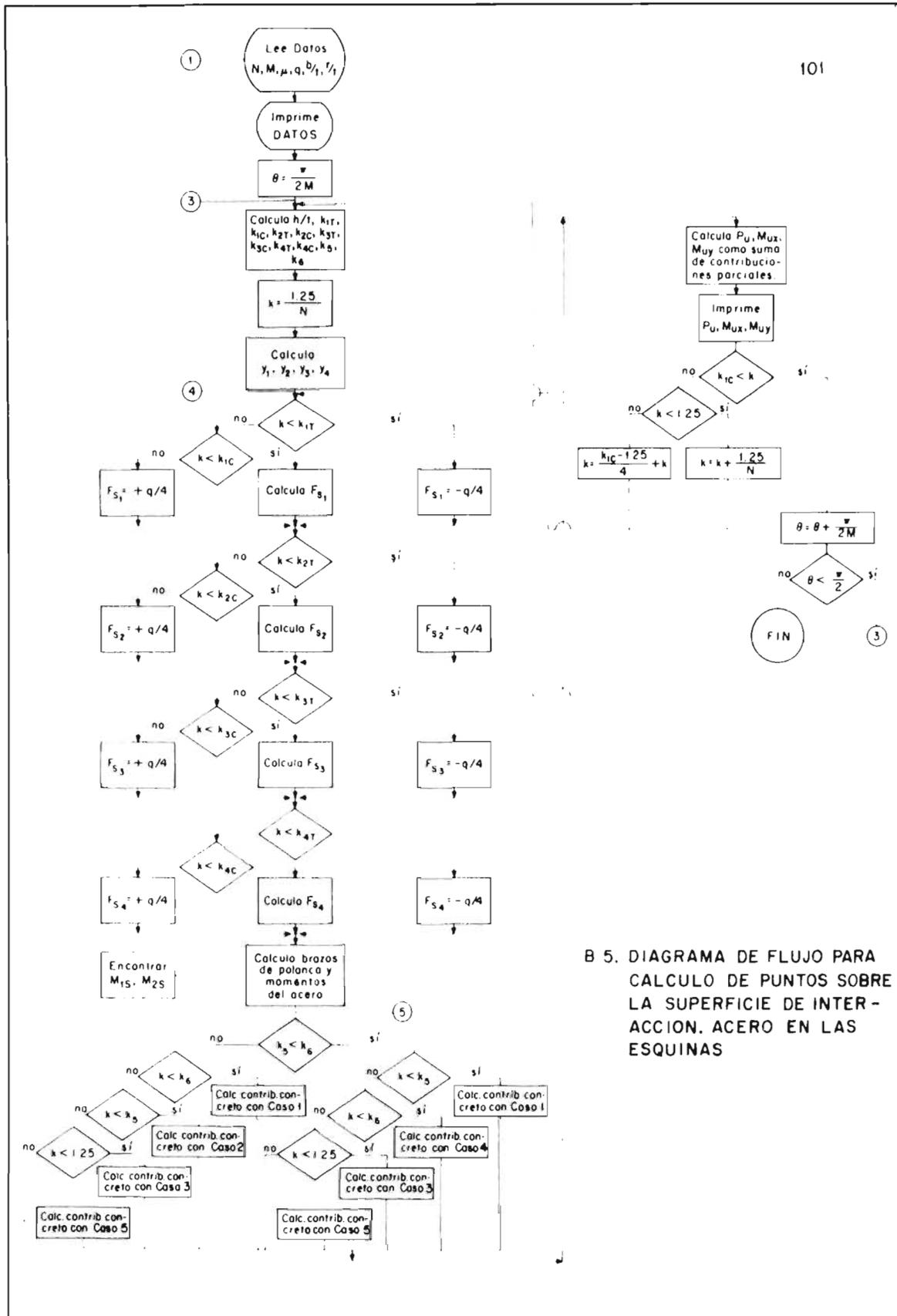
```

100

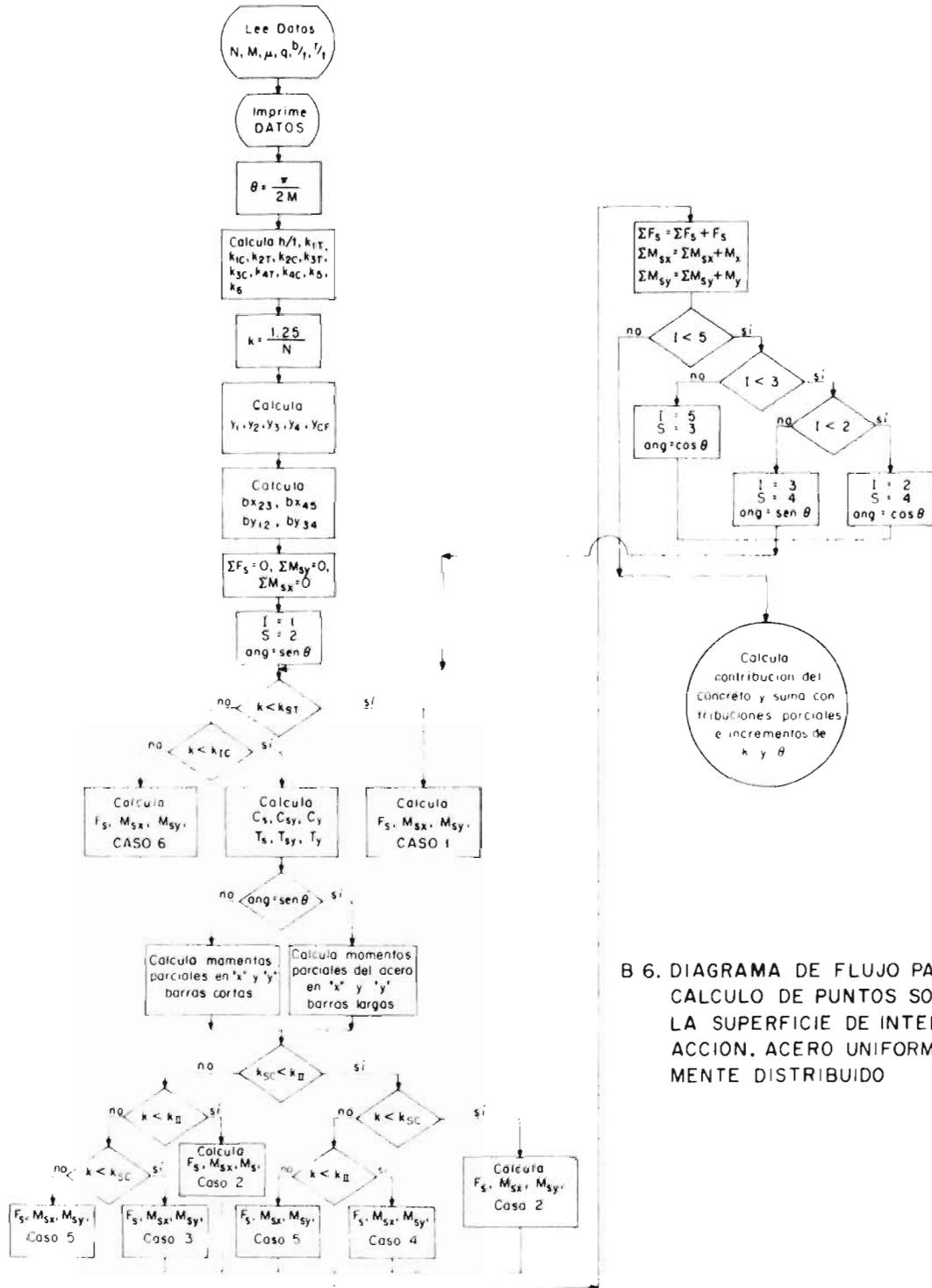
```
SM=-A/2.*DST*(E+FMU/(2.*CA)*(H/2.*(1./DST-2.*CA)*C-G/2.))
IF(BETA-.78539819)36,37,36
36 IF(CA1-CA)38,38,39
38 CC=-1.
   CM=0.
   GO TO 40
39 CC=-0.8*CA*DST
   CM=0.4*CA*DST*(1.-0.8*CA*DST)
   GO TO 40
37 CC=-0.25*(TETA2-SINF(TETA2)*COSF(TETA2))
   CM=1./12.*SINF(TETA2)**3
40 PU=FS+CC
   UM=SM+CM
   PRINT 41,PU,UM
   IF(CA4-CA)43,43,51
51 IF(CA1-CA)42,52,52
42 CA=CA+(CA4-CA1)/4.
   GO TO 3
52 CA=CA+CA1/ENF
   GO TO 3
43 PRINT 44,ENE,FMU,DST,PM,BETA
   GO TO 1
```

#### B4. DIAGRAMAS INTERACCION. SECCIONES REFUERZO CIRCULAR

B 4.2.



B 5. DIAGRAMA DE FLUJO PARA CALCULO DE PUNTOS SOBRE LA SUPERFICIE DE INTERACCION. ACERO EN LAS ESQUINAS



B 6. DIAGRAMA DE FLUJO PARA CALCULO DE PUNTOS SOBRE LA SUPERFICIE DE INTERACCION, ACERO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO



104

```

C FLEXUCOMPRESION BIAXIAL ACERO ESQUINAS
C CONVERGE A VALORES FIJOS DE MX/MY
  2 FORMAT(6F10.0)
603 FORMAT(I3,F10.0)
  52 FORMAT(7H DATOS=6E11.4)
608 FORMAT(4H PU=E15.8,4H MX=E15.8,4H MY=E15.8)
  59 FORMAT(6H ALFA=E11.4)
  DIMENSION ALFA(5)
  READ 603,L,GAMMA
  READ 2,(ALFA(K),K=1,L)
  1 READ 2,ENE,EME,FMU,PM,BST,RST
  PRINT 52,ENE,EME,FMU,PM,BST,RST
  PS2=1.5707963
  DELTA=PS2/EME
  DELCA=1.25/ENF
401 CA=DELCA
601 TETA=DELTA
  DO 602 K=1,L
  E=ALFA(K)
  PRINT 59,E
901 ES=0.
  EI=0.
  2 HST=BST*SINF(TETA)+COSF(TETA)
  A=FMU/((1.-FMU)*HST)
  B=FMU/((1.+FMU)*HST)
  CA1T=B*((BST-RST)*SINF(TETA)+(1.-RST)*COSF(TETA))
  CA1C=-A*B*CA1T
  CA2T=B*((1.-RST)*COSF(TETA)+RST*SINF(TETA))
  CA2C=-A/B*CA2T
  CA3T=B*((BST-RST)*SINF(TETA)+RST*COSF(TETA))
  CA3C=-A/B*CA3T
  CA4T=B*RST*(SINF(TETA)+COSF(TETA))
  CA4C=-A/B*CA4T
  CA5=1.25*BST*SINF(TETA)/HST
  CA6=1.25*COSF(TETA)/HST
  CA7=1.25
  4 D=PM/4.*FMU/(CA*HST)
  IF(CA-CA1T)5,5,6
  5 FS1=PM/4.
  GO TO 7
  6 IF(CA-CA1C)8,9,9
  8 FS1=D*(HST*(1.-CA)-RST*(SINF(TETA)+COSF(TETA)))
  GO TO 7
  9 FS1=-PM/4.
  7 IF(CA-CA2T)10,10,11
10 FS2=PM/4.
  GO TO 12
11 IF(CA-CA2C)13,14,14
13 FS2=D*(HST*(1.-CA)-RST*COSF(TETA)+(RST-BST)*SINF(TETA))
  GO TO 12
14 FS2=-PM/4.
12 IF(CA-CA3T)15,15,16
15 FS3=PM/4.
  GO TO 17
16 IF(CA-CA3C)18,19,19
13 FS3=-D*(CA*HST+(RST-BST)*SINF(TETA)-RST*COSF(TETA))
  GO TO 17
19 FS3=-PM/4.
17 IF(CA-CA4T)20,20,21
20 FS4=PM/4.
  GO TO 22
21 IF(CA-CA4C)23,24,24

```

B.8.1.

```

23 FS4=-0*(CA*HST-RST*(SINF(TETA)+COSF(TETA)))
GO TO 22
24 FS4=-PM/4.
22 BX1=0.5-RST/BST
BX3=BX1
BX2=-BX1
BX4=-BX1
BY1=0.5-RST
BY2=BY1
BY3=-BY1
BY4=-BY1
IF(CA5-CA6)25,25,26
25 IF(CA-CA5)27,27,28
27 X=0.8*CA*HST/(BST*SINF(TETA))
Y=0.8*CA*HST/COSF(TETA)
FC=X*Y/2.
BXC=0.5-X/3.
BYC=0.5-Y/3.
GO TO 29
28 IF(CA-CA6)3,30,31
30 Y1=0.8*CA*HST/COSF(TETA)
Y2=(0.8*CA*HST-BST*SINF(TETA))/COSF(TETA)
FC=(Y1+Y2)/2.
BXC=.5-(Y1+2.*Y2)/(3.*(Y1+Y2))
BYC=0.5-(Y1**2+Y1*Y2+Y2**2)/(3.*(Y1+Y2))
GO TO 29
31 IF(CA-CA7)32,33,33
32 X=HST*(1.-0.8*CA)/(BST*SINF(TETA))
Y=HST*(1.-0.8*CA)/COSF(TETA)
FC=1.-X*Y/2.
BXC=X*Y/2.*(0.5-X/3.)/(1.-X*Y/2.)
BYC=X*Y/2.*(0.5-Y/3.)/(1.-X*Y/2.)
GO TO 29
33 FC=1.
BXC=0.
BYC=0.
GO TO 29
26 IF(CA-CA6)27,27,34
34 IF(CA-C/5)35,35,31
35 X1=(0.8*CA*HST-COSF(TETA))/(BST*SINF(TETA))
X2=.3*CA*HST/(BST*SINF(TETA)) X1
X2=.8*CA*HST/(BST*SINF(TETA)) X1
FC=(2.*X1+X2)/2.
BXC=0.5-(X1**2+X2*(X1+X2/3.))/(2.*X1+X2)
BYC=0.5-(X1 X2/3.)/(2.*X1+X2)
29 PU=FC-FS1-FS2-FS3-FS4
UMX=FS1*BX1 FS2*BX2+FS3*BX3+FS4*BX4+FC*BXC
UMY=FS1*BY1 F.2*BY2+FS3*BY3+FS4*BY4+FC*BYC
XSY=UMX/UMY
DIFE=ABSF(XSY-E)
607 IF(DIFE-GAMMA)606,606,609
609 IF(E-XSY)61,610,611
610 ES=XSY
TETS=TETA
IF(EI-0.)612,668,612
668 TETA=TETA-DELTA
GO TO 3
612 TETA=(E-ES)/(EI-ES)*TET1+(E-EI)/(ES-EI)*TETS
IF((TETA-TET1)-0.0001)406,406,618
618 IF((TETS-TETA)-0.0001)406,406,3
611 TET1=TETA
EI=XSY

```

106  
613 IF(ES-0.)612,614,612  
614 DELTA=TETA+DDELTA  
GO TO 3  
405 PRINT 59, XSY  
IF(CA-CAT)38,38,1  
38 CA=CA+CAT/ENE  
606 PRINT 608, PU, UMX, UMY  
602 CONTINUE  
PRINT 59, CA  
402 CONTINUE  
GO TO 1  
END

B 8. FLEXOCOMPRESION BIAXIAL  
ACERO ESQUINAS

```

C      FLEXOCOMPRESION BIAXIAL ACERO TUBULAR DIAGRAMAS INTERACCION
C      CONVERGENCIA HACIA UN VALOR FIJO DE MX/MY
      2 FORMAT(6F10.0)
615  FORMAT(4H CA=E15.8)
603  FORMAT(I3,F10.0)
608  FORMAT(4H PU=E15.8,4H EX=E15.8,4H EY=E15.8)
      52 FORMAT(7H DATOS=6E11.4)
      59 FORMAT(6H ALFA=E11.4)
625  FORMAT(20H NO CONVERGE A MX/MY)
      DIMENSION ALFA(5)
      READ 603,L,GAMMA
      READ 2,(ALFA(K),K=1,L)
      1 READ 2,FNE,EME,FMU,PM,BST,RST
      PRINT 52,EME,FMU,PM,RST,RST
      PS2=1.5707963
      DELTA=PS2/EMF
      CA=1.25/FNE
601  TLTA=DELTA
      DO 602 K=1,L
      ES=0.
      E=ALFA(K)
      PRINT 59,E
      3 ST=SINF(TETA)
      CT=COSE(TETA)
      HST=BST*ST+CT
      A=FMU/((1.-FMU)*HST)
      B=FMU/((1.+FMU)*HST)
      BMR=BST-RST
      RM1=RST-1.
      CH=CA*HST
      BS=BMR*ST
      RC=RST*CT
      RS=RST*ST
      SB=ST*RST
      CHF=CH/FMU
      CAT1=B*(BS-CT*RM1)
      CAC1=-A/B*CAT1
      CAT2=B*(RS-CT*RM1)
      CAC2=-A/B*CAT2
      CAT3=B*(BS+RC)
      CAC3=-A/B*CAT3
      CAT4=B*RST*(ST+CT)
      CAC4=-A/B*CAT4
      CA5=1.25*SB/HST
      CA6=1.25*CT/HST
      CA7=1.25
      BB=(ST-2.)*RST
      T=1.-2.*RST
      W=PM/(2.*(BB+T))
      4 Y1=HST-CH-RS-RC
      Y2=HST-CH-BS-RC
      Y3=-CH+BS+RC
      Y4E=BHTRCORS-CA)
      SFS=0.
      YMS=0.
      XMS=0.
      I=1
      J=2
      P=W*BB
      BX=0.
      BY=0.5-RST

```

```

        YI=Y1
        YS=Y2
        CATI=CAT1
        CACI=CAC1
        CATS=CAT2
        CACS=CAC2
        ANG=ST
200 IF(CA-CATS)201,201,202
201 FS=P
        XM=P*BX
        YM=P*BY
        GO TO 220
202 IF(CA-CACI)203,204,204
204 FS=-P
        XM=-P*BX
        YM=-P*BY
        GO TO 220
203 CS=-W*Yn**2/(2.*ANG*CHF)
        CSY=-W*CHF/(2.*ANG)
        CY=1*(CHF+YS)/ANG
        TS=W*FM1*YI**2/(2.*ANG*CH)
        TSY=W*CHF/(2.*ANG)
        TY=W*(YI-CHF)/ANG
        IF(J-3)205,206,206
206 IF(I-3)207,205,207
205 YCS=CS*BY
        YCSY=CSY*BY
        YCY=CY*BY
        YTS=TS*BY
        YTSY=TSY*BY
        YTY=TY*BY
        YC=(YI+YS)/2.
        XCS=-CS*(YC 2./3.*YS)/SB
        XCSY=-CSY*(YC+2./3.*CHF)/SB
        XCY=-CY*(YC (YS-CHF)/2.)/SB
        XTS=TS*(2./3.*YI-YC)/SB
        XTSY=TSY*(2./3.*CHF-YC)/SB
        XTY=TY*((YI CHF)/2.-YC)/SB
        GO TO 217
207 XCS=CS*BX
        XCSY=CSY*BX
        XCY=CY*BX
        XTS=TS*BX
        XTSY=TSY*BX
        XTY=TY*BX
        YCS=CS*((2./3.*YS-YFC)/CT+BFC)
        YCSY=-CSY*((YFC+2./3.*CHF)/CT-BFC)
        YCY=-CY*((YFC+(CHF-YS)/2.)/CT-BFC)
        YTS=TS*((2.*YI/3.-YFC)/CT+BFC)
        YTSY=TSY*((2./3.*CHF-YFC)/CT+BFC)
        YTY=TY*((YI+CHF)/2.-YFC)/CT+BFC)
217 IF(CACS-CATI)208,209,209
208 IF(CA-CACS)210,210,211
211 IF(CA-CATI)212,212,213
209 IF(CA-CATI)210,210,215
215 IF(CA-CACS)216,216,213
210 FS=CS+TY+TSY
        XM=XCS+XTY+XTSY
        YM=YCS+YTY+YTSY
        GO TO 220
212 FS=TSY+TY+CSY+CY

```

```

XM=XTSY+XTY XCSY+XCY
YM=YTSY+YTY YCSY+YCY
GO TO 220
213 FS=CSY+CY+TS
XM=XCSY+XCY XTS
YM=YCSY+YCY YTS
GO TO 220
216 FS=CS+TS
XM=YCS+XTS
YM=YCS+YTS
220 SFS=SFS+FS
YMS=YMS+YM
XMS=XMS+XM
IF (I-5)218,230,230
218 IF (I-3)219,221,221
221 I=5
J=3
ANG=CT
BFC=-BB/2.*ST/CT
P=W*T
RX=0.5-RST/BST
RY=0.
YI=Y1
YS=Y3
CATI=CAT1
CACI=CAC1
CATS=CAT3
CACS=CAC3
GO TO 200
219 IF (I-2)222,223,223
223 I=3
J=4
YI=Y3
YS=Y4
ANG=ST
P=W*RB
RX=0.
RY=RST-0.5
CATI=CAT3
CACI=CAC3
CATS=CAT4
CACS=CAC4
GO TO 200
222 I=2
J=4
ANG=CT
BFC=BB/2.*ST/CT
YI=Y2
YS=Y4
P=W*T
RX=RST/BST-.5
RY=0.
CATI=CAT2
CACI=CAC2
CATS=CAT4
CACS=CAC4
GO TO 200
230 IF (CA5-CA6)25,25,26
25 IF (CA-CA5)27,27,28
27 X=0.8*CH/SB
Y=0.8*CH/CT

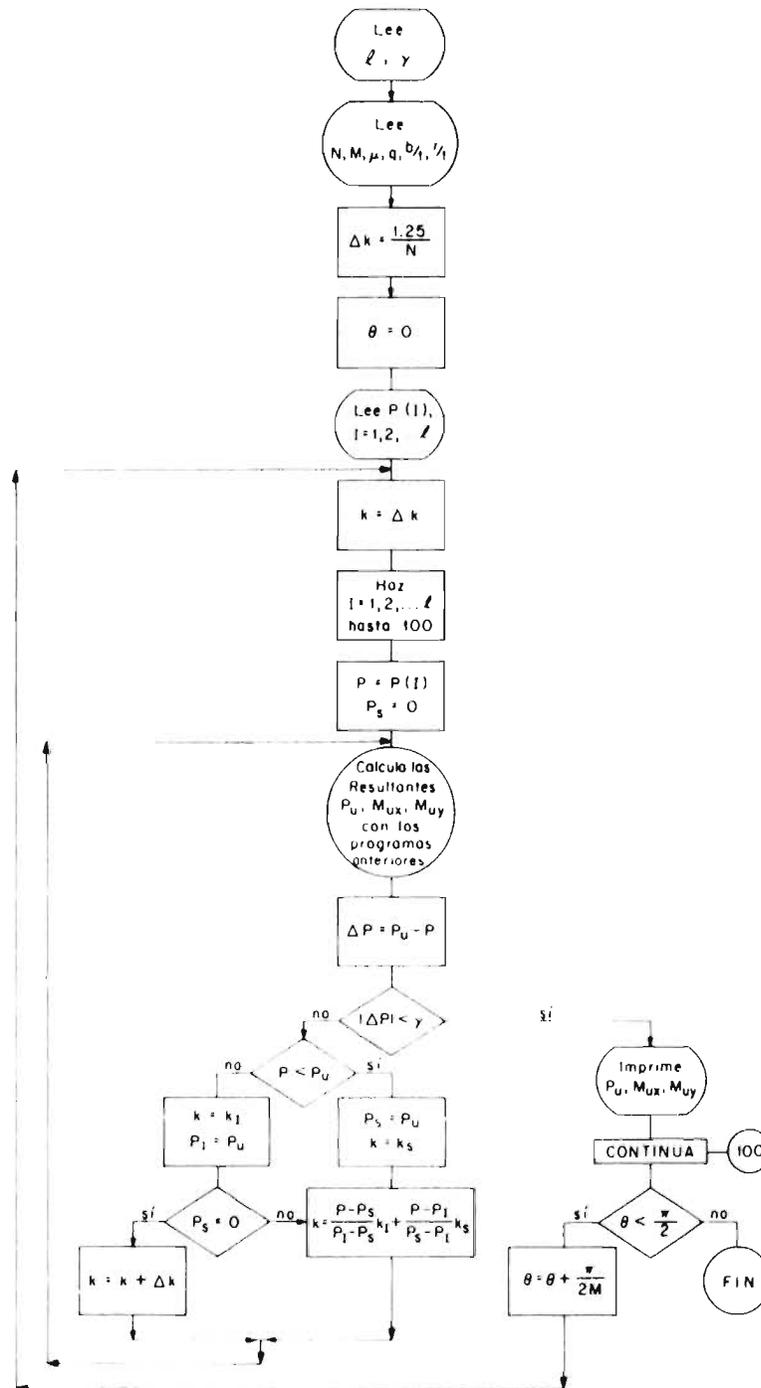
```

```

FC=X*Y/2.
BXC=0.5-X/3.
BYC=0.5-Y/3.
GO TO 29
28 IF((CA-CA6)3 ,30,31
30 Y1=0.8*CH/CT
Y2=(0.8*CH-SB)/CT
FC=(Y1+Y2)/2.
BXC=.5-(Y1+2.*Y2)/(3.*(Y1+Y2))
BYC=0.5-(Y1**2+Y1*Y2+Y2**2)/(3.*(Y1+Y2))
GO TO 29
31 IF(CA-CA7)32,33,33
32 X=(HST-0.8*CH)/SB
Y=(HST-0.8*CH)/CT
FC=1.-X*Y/2.
BXC=X*Y/2.*(0.5-X/3.)/(1.-X*Y/2.)
BYC=X*Y/2.*(0.5-Y/3.)/(1.-X*Y/2.)
GO TO 29
33 FC=1.
BXC=0.
BYC=0.
GO TO 29
26 IF(CA-CA6)27,27,34
34 IF(CA-CA5)35,35,31
35 X1=(0.8*CH-CT)/SB
X2=0.8*CH/SB-X1
FC=(2.*X1+X2)/2.
BXC=0.5-(X1**2+X2*(X1+X2/3.))/(2.*X1+X2)
BYC=0.5-(X1 X2/3.)/(2.*X1+X2)
29 PU=FC-SF5
UMX=XMS+FC*BXC
UMY=FC*BYC+YMS
XSY=UMX/UMY
PRINT 52,XSY
DIFF=ARSE(XSY-E)
507 IF(DIFE-GAMMA)606,606,609
607 IF(E-XSY)61 ,610,611
610 IF(XSY-ES)620,621,621
621 IF(ES-0.)622,620,622
622 PRINT 625
GO TO 606
620 ES=XSY
TETS=TETA
612 TET/=(E-FS)/(EI-ES)*TETI+(E-FI)/(ES-EI)*TETS
IF((TETA-TETI)-.001)606,606,618
618 IF((TETS-TETA)-.001)606,606,3
611 IF(XSY-FI)623,623,624
623 PRINT 625
GO TO 606
624 TETI=TETA
FI=XSY
613 IF(ES-0.)612,614,612
614 TFTA=TETA+DELTA
GO TO 3
606 PRINT 608,PU,UMX,UMY
602 CONTINUE
PRINT 615,CA
IF(CA-CA7)38,38,1
38 CA=CA+CA7/ENE
GO TO 601
END

```

#### B.9.4 FLEXOCOMPRESION BIAxIAL ACERO TUBULAR



B10. DIAGRAMA DE FLUJO PARA CORTES HORIZONTALES DE UNA SUPERFICIE DE FALLA EN FLEXOCOMPRESION BIAIXIAL

112

```

C      FLEXOCOMPRESION BIAxIAL ACERO ESQUINAS CORRECCION PARA B/T
C      CONVERGE A MX/MY Y PU DADOS.
      2 FORMAT(6F10.0)
603  FORMAT(13,13,F10.0)
      52 FORMAT(7H DATOS=6E11.4)
608  FORMAT(4H PU=E15.8,4H MX=E15.8,4H MY=E15.8)
      59 FORMAT(6H ALFA=E11.4)
      DIMENSION ALFA(5),P(5)
      READ 609,L,LL,GAMMA
      READ 2,(ALFA(K),K=1,L)
      READ 2,(P(M),M=1,LL)
      1 READ 2,ENE,EME,FMU,PM,RST,RST
      PRINT 52,ENE,EME,FMU,PM,RST,RST
      PS2=1.5707963
      DELTA=PS2/EME
      DELCA=1.25/ENE
401  CA=DELCA
      DO 4J2 M=1,LL
      PP=P(M)
601  TETA=DELTA
      DO 602 K=1,L
      E=ALFA(K)
      PRINT 59,E
      PS=0.
      PI=0.
901  ES=0.
      EI=0.
      3 HST=BST*SINF(TETA)+COSF(TETA)
      A=FMU/((1.-FMU)*HST)
      B=FMU/((1.+FMU)*HST)
      CA1T=B*((RST-RST)*SINF(TETA)+(1.-RST)*COSF(TETA))
      CA1C=-A/B*CA1T
      CA2T=B*((1.-RST)*COSF(TETA)+RST*SINF(TETA))
      CA2C=-A/B*CA2T
      CA3T=B*((BST-RST)*SINF(TETA)+RST*COSF(TETA))
      CA3C=-A/B*CA3T
      CA4T=B*RST*(SINF(TETA)+COSF(TETA))
      CA4C=-A/B*CA4T
      CA5=1.25*BST*SINF(TETA)/HST
      CA6=1.25*COSF(TETA)/HST
      CA7=1.25
      4 D=PM/4.*FMU/(CA*HST)
      IF(CA-CA1T)5,5,6
      5 FS1=PM/4.
      GO TO 7
      6 IF(CA-CA1C)8,9,9
      8 FS1=D*(HST*(1.-CA)-RST*(SINF(TETA)+COSF(TETA)))
      GO TO 7
      9 FS1=-PM/4.
      7 IF(CA-CA2T)10,10,11
      10 FS2=PM/4.
      GO TO 12
      11 IF(CA-CA2C)13,14,14
      13 FS2=D*(HST*(1.-CA)-RST*COSF(TETA)+(RST-BST)*SINF(TETA))
      GO TO 12
      14 FS2=-PM/4.
      12 IF(CA-CA3T)15,15,16
      15 FS3=PM/4.
      GO TO 17

```

```

16 IF (CA-CA3C)18,19,19
18 FS3=-D*(CA*HST+(RST-BST)*SINF(TETA)-RST*COSF(TETA))
   GO TO 17
19 FS3=-PM/4.
17 IF (CA-CA4T)20,20,21
20 FS4=PM/4.
   GO TO 22
21 IF (CA-CA4C)23,24,24
23 FS4=-D*(CA*HST-RST*(SINF(TETA)+COSF(TETA)))
   GO TO 22
24 FS4=-PM/4.
22 BX1=0.5-RST/BST
   BX3=BX1
   BX2=-BX1
   BX4=-BX1
   BY1=0.5-RST
   BY2=BY1
   BY3=-BY1
   BY4=-BY1
   IF (CA5-CA6)25,25,26
25 IF (CA-CA5)27,27,28
27 X=0.8*CA*HST/(BST*SINF(TETA))
   Y=.8*CA*HST/COSF(TETA)
   FC=X*Y/2.
   BXC=0.5-X/3.
   BYC=0.5-Y/3.
   GO TO 29
28 IF (CA-CA6)30,30,31
30 Y1=0.8*CA*HST/COSF(TETA)
   Y2=(0.8*CA*HST-BST*SINF(TETA))/COSF(TETA)
   FC=(Y1+Y2)/2.
   BXC=.5-(Y1+2.*Y2)/(3.*(Y1+Y2))
   BYC=.5-(Y1**2+Y1*Y2+Y2**2)/(3.*(Y1+Y2))
   GO TO 29
31 IF (CA-CA7)32,33,33
32 X=HST*(1-.9*CA)/(BST*SINF(TETA))
   Y=HST*(1-.8*CA)/COSF(TETA)
   FC=1.-X*Y/2.
   BXC=X*Y/2.*(0.5-X/3.)/(1.-X*Y/2.)
   BYC=X*Y/2.*(0.5-Y/3.)/(1.-X*Y/2.)
   GO TO 29
33 FC=1.
   BXC=.
   BYC=0.
   GO TO 29
26 IF (CA-CA6)27,27,34
34 IF (CA-CA5)35,35,31
35 X1=(0.8*CA*HST-COSF(TETA))/(BST*SINF(TETA))
   X2=.8*CA*HST/(BST*SINF(TETA))-X1
   X2=.8*CA*HST/(BST*SINF(TETA))-X1
   FC=(2.*X1+X2)/2.
   BXC=0.5-(X1**2+X2*(X1+X2/3.))/(2.*X1+X2)
   BYC=0.5-(X1*X2/3.)/(2.*X1+X2)
29 PU=FC-FS1-FS2-FS3-FS4
   UMX=FS1*BX1 FS2*BX2+FS3*BX3+FS4*BX4+FC*BXC
   UMY=FS1*BY1 FS2*BY2+FS3*BY3+FS4*BY4+FC*BYC
   XSY=UMX/UMY
   DIFE=,BSF(XSY-E)
607 IF (DIFE-GAMMA)606,606,609

```

114

```
609 IF(E-XY)61 ,610,611
610 ES=XY
    TETS=TETA
    IF(FI-0.)612,668,612
668 TETA=TETA-DELTA
    GO TO 3
612 TETA=(E-ES)/(EI-ES)*TETI+(E-EI)/(ES-EI)*TETS
    IF((TETA-TETI)-0.0001)406,406,618
618 IF((TETS-TETA)-0.0001)406,406,618
611 TETI=TETA
    EI=XY
613 IF(ES-0.)612,614,612
614 TETA=TETA+DELTA
    GO TO 3
606 DIFP=ABSF(PU-PP)
607 IF(DIFP-GAMMA)406,406,409
609 IF(OP-PU)41 ,410,411
410 PS=PU
    CAS=CA
    IF(PI-0.)412,468,412
468 CA=CA-DEL CA
    GO TO 901
417 CA=(PP-PS)/(PI-PS)*CAI+(PP-PI)/(PS-PI)*CAS
    IF((PP-PI)-.0001)406,406,418
418 IF((PS-PP)-.0001)406,406,901
411 CAI=CA
    PI=PU
413 IF(PS-0.)412,414,412
414 CA=CA+DEL CA
    GO TO 901
406 PRINT 608,PU,UMX,UMY
602 CONTINUE
402 CONTINUE
    GO TO 1
    END
```

### B.11.3 FLEXOCOMPRESION BIAxIAL ACERO ESQUINAS