

T-405  
V  
DES

0558 01149

146

CONFIABILIDAD EN SISTEMAS ELECTRICOS

tesis presentada por

Cosme Román Urdalbay Zubillaga

a

La División de Estudios Superiores

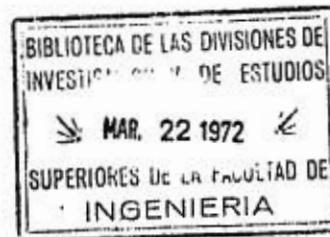
de

Facultad de Ingeniería

como requisito parcial para el grado

Maestro en Investigación de Operaciones

- 1.- Sistemas de Potencia - Confiabilidad
2. Confiabilidad



Universidad Nacional Autónoma de México •

Febrero de 1972

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

244376



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INTRODUCCION

La evaluación de la confiabilidad de un sistema eléctrico es un problema que difícilmente se puede vaciar en forma completa en una simple medida.

Este trabajo se centra en la confiabilidad desde el punto de vista de generación y en forma más concreta al método conocido como "probabilidad de pérdida de carga". Este método se debe a Calabrese<sup>(1, 2)</sup>.

El método determina básicamente la esperanza del tiempo que algún usuario estará fuera de servicio, utilizando para ello la curva de Duración de Carga y la densidad de la suma de capacidades de los generadores (para la construcción y propiedades de la curva de Duración de Carga pueden verse las referencias 3 y 4). Sin embargo, esta convolución de las densidades de los generadores no tiene una fórmula sencilla, por lo que se construye considerando todas las combinaciones de falla -no falla de los generadores.

Pensando en un sistema con 400 generadores, el número de combinaciones posibles es  $2^{400} > 10^{120}$ , con lo que se ve claro que el método requiere una gran cantidad de tiempo y memoria de computadora.

El presente trabajo es una simplificación para resolver los problemas computacionales del método usando la función de cumulantes de la

convolución de generadores para obtener los momentos, igualarlos a los de una distribución continua de fácil manejo analítico y encontrar los parámetros de esta distribución continua.

## CAPITULO I

### MOMENTOS DE LA CONVOLUCION DE GENERADORES.

A pesar de que el calcular la convolución de los generadores es impráctico, si podemos conocer los momentos de la convolución, usando funciones características:

Para cada generador tenemos su densidad dada por

$$f(C_i x_i) = p_i^{x_i} q_i^{1-x_i}; x_i = 0, 1$$

donde

$C_i$  = capacidad del  $i$ -ésimo generador

$p_i$  = probabilidad de servicio del  $i$ -ésimo generador y

$$q_i = 1 - p_i$$

y la suma de capacidades  $Y$  es una variable aleatoria definida como

$$Y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi_y(y) &= E(e^{ity}) \\ &= E(e^{it(C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n)}) \\ &= E(e^{itC_1 x_1} e^{itC_2 x_2} \dots e^{itC_n x_n}) \end{aligned}$$

$$= E(e^{itC_1x_1})E(e^{itC_2x_2})\dots E(e^{itC_nx_n})$$

puesto que el sistema cuenta con dispositivos de protección adecuados, y se pueden considerar independientes los generadores.

Pero

$$E(e^{itC_i x_i}) = q_i + p_i e^{itC_i}$$

por lo tanto

$$\phi_Y(y) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i e^{itC_i})$$

y la función de cumulantes  $L(y)$  está dada por (5, pp. 67-72; 6;7)

$$L(y) = \sum_{i=1}^n \ln(q_i + p_i e^{itC_i})$$

y sabemos que

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} L(0) = K_n i^n$$

y además

$$K_1 = \mu$$

$$K_2 = \mu_2$$

$$K_3 = \mu_3$$

$$K_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$$

entonces podemos determinar los momentos de  $Y$ , con lo que se obtiene

$$\mu = \sum_{i=1}^n C_i p_i$$

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^n C_i^2 p_i q_i$$

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^n C_i^3 p_i q_i$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^n C_i^4 p_i q_i + 3 \left( \sum_{i=1}^n C_i^2 p_i q_i \right)^2$$

en general puede calcularse cualquier momento de Y.

Debemos hacer notar que  $\phi_Y(y)$  no corresponde a la función característica de ninguna distribución sencilla.

## CAPITULO II

### SOLUCION APROXIMADA.

Aún cuando la densidad de Y es discreta es deseable ajustarla a alguna densidad teórica continua con lo que se puede ahorrar memoria y tiempo de cálculo, la manera de hacerlo sería calculando los momentos de Y, igualándolos a los momentos de la distribución teórica y resolviendo las ecuaciones para determinar los parámetros. Con este procedimiento sólo podemos ajustar tantos momentos como parámetros tenga la distribución.

**Distribución Normal.** - Podría pensarse que dada la cantidad de generadores que hay, la suma de sus capacidades tendiera a normalizarse, sin embargo en la normal  $\mu_3=0$  y  $\beta_2=3$  ( $\beta_2$  coeficiente de kurtosis), y para Y tenemos

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^n C_i^3 P_i q_i$$



$$\beta_2 = 3 + \frac{\sum C_i^4 p_i q_i}{(\sum C_i^2 p_i q_i)^2}$$

valores que están muy alejados de los valores teóricos de la distribución normal, por lo que este ajuste no es conveniente.

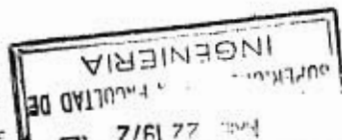
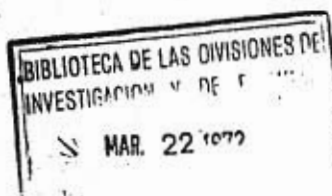
Distribuciones contínuas con rango de cero a infinito y de un parámetro.- Dentro de esta categoría están las distribuciones siguientes: (6;7;8, pp. 56-57).

nombre	f(x)	media	variancia
exponencial	$\frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$	$\theta$	$\theta^2$
Rayleigh	$\frac{1}{\alpha^2} x e^{-1/2 (\frac{x}{\alpha})^2}$	$\alpha \sqrt{\pi/2}$	$\alpha^2 \left(\frac{4-\pi}{2}\right)$
Maxwell	$\frac{4x^2}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} e^{-(x/\alpha)^2}$	$\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$	$\alpha^2 \left(\frac{3\pi-8}{2\pi}\right)$

sin embargo dado que sólo es posible igualar uno de sus momentos, no hay suficiente flexibilidad para hacer el ajuste (a pesar de ello se hicieron pruebas, las cuales robustecieron los supuestos).

Distribuciones contínuas de dos parámetros y rango de cero a Z, con Z positivo.- Dentro de estas distribuciones se estudiaron las siguientes: (6;7;8, pp. 56-57).

nombre	f(x)	media	variancia
--------	------	-------	-----------



Gamma	$\frac{x^a e^{-x/b}}{\Gamma(a+1)b^{a+1}}$	$b(a+1)$	$b^2(a+1)$
	$x > 0; a > -1; b > -1$		
Beta	$\frac{\Gamma(a+b+2)x^a(1-x)^b}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}$	$\frac{a+1}{a+b+2}$	$\frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+2)^2(a+b+3)}$
	$0 \leq x \leq 1; a > -1; b > -1$		
Weibull	$abx^{b-1}e^{-ax^b}$	$\alpha^\beta \Gamma(\beta+1)$	$\alpha^{2\beta} [\Gamma(2\beta+1) - \Gamma^2(\beta+1)]$
	$x > 0; a > 0; b > 0$	$\alpha = 1/a$	$\alpha = 1/a$
		$\beta = 1/b$	$\beta = 1/b$

Distribución Gamma. - Si suponemos que Y se distribuye como Gamma y efectuamos el ajuste mediante los dos primeros momentos tenemos

$$\begin{aligned} \sum C_i P_i &= b(a+1) \\ \sum C_i^2 P_i q_i &= b^2(a+1) \end{aligned}$$

cuya solución para a y b está dada por

$$a = \frac{(\sum C_i P_i)^2}{\sum C_i^2 P_i q_i} - 1 \quad b = \frac{\sum C_i^2 P_i q_i}{\sum C_i P_i}$$

sin embargo la distribución Gamma tiene un serio inconveniente, es integrable en forma exacta sólo para a entero, aún cuando el proceso pueda ser lento para valores grandes de a; para un valor arbitrario de a, no entero, se requiere integración numérica.

**Distribución Beta.** - Como la distribución Beta tiene un rango entre cero y uno, y  $Y$  se distribuye entre cero y la capacidad en operación, debemos hacer un cambio de variable: si llamamos  $C_0$  a la capacidad en operación,  $Y' = Y/C_0$  se distribuye entre cero y uno, y los momentos de  $Y'$  son

$$\mu_{Y'} = \mu_Y / C_0$$

$$\sigma_{Y'}^2 = \sigma_Y^2 / C_0^2$$

entonces el sistema a resolver es

$$\mu_{Y'} = \frac{a+1}{a+b+2}$$

$$\sigma_{Y'}^2 = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+2)^2(a+b+3)}$$

cuya solución es

$$a = \frac{\mu_Y^2(1-\mu_Y) - \sigma_Y^2(1+\mu_Y)}{\sigma_Y^2} \quad b = \frac{\mu_Y(1-\mu_Y)^2 + \sigma_Y^2(\mu_Y-2)}{\sigma_Y^2}$$

la distribución Beta tiene el mismo problema que la distribución Gamma, en general es integrable sólo mediante métodos numéricos.

**Distribución Weibull.** - Dada la distribución

$$f(y) = aby^{b-1}e^{-ay^b}; y \geq 0, a > 0, b > 0$$

debemos resolver el sistema

$$\sum C_i p_i = (1/a)^{1/b} \Gamma(1/b+1)$$

$$\sum C_i^2 p_i q_i = (1/a)^{2/b} [\Gamma(2/b+1) - \Gamma^2(1/b+1)]$$

sin embargo este sistema no puede resolverse explícitamente para  $a$  y  $b$ , por lo que se debe resolver en forma iterativa.

La distribución Weibull presenta una enorme ventaja sobre las distribuciones Gamma y Beta, pues es integrable en forma exacta:

$$F(y) = \int_0^y abx^{b-1} e^{-ax^b} dx$$

$$\text{si } z = x^b; dz = bx^{b-1} dx$$

$$F(y) = \int_0^y ae^{-az} dz = -e^{-az} \Big|_0^y = 1 - e^{-ay^b}$$

ventaja que además de exactitud en el resultado también se refleja en el tiempo de cálculo, pues la integración numérica requiere más tiempo que la solución iterativa del sistema de ecuaciones para la determinación de los parámetros de la Weibull.

### CAPITULO III

#### RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

Básicamente se hicieron ajustes con cuatro distribuciones: Normal, Gamma, Beta y Weibull, la distribución Normal no se ajustó a los resultados exactos, hecho que era de esperarse; en el caso de la Gamma y la Beta se usó para integrar numéricamente el método 1/3 de Simpson variando el número de intervalos para determinar la sensibilidad. (9)

Los mejores resultados se obtuvieron para la Gamma y la Weibull, en la gráfica 1 se muestran resultados para 24 quincenas comparando el resultado exacto con la Gamma y Weibull.

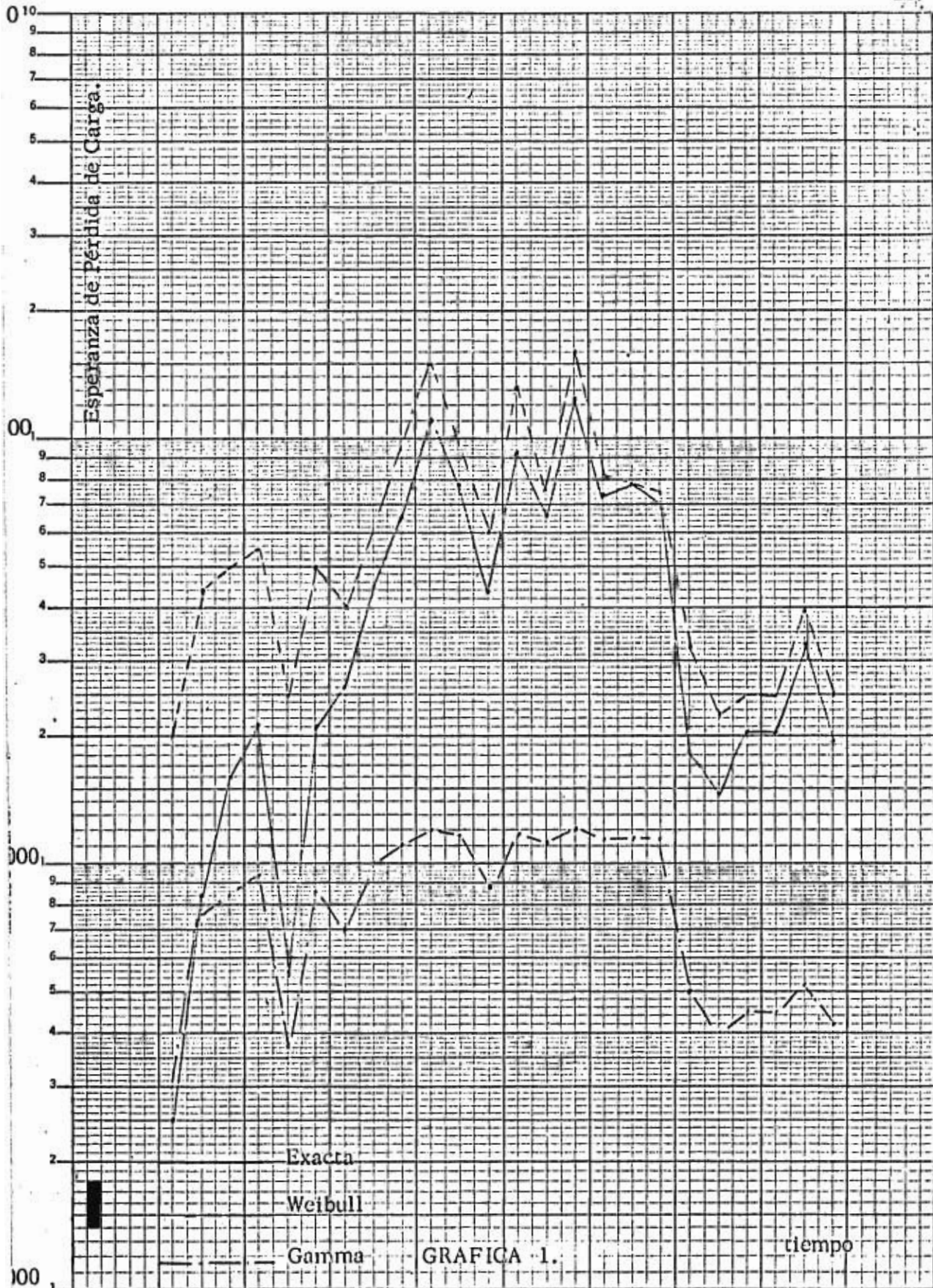
Como se ve la tendencia de las curvas es la misma, sin embargo, la sensibilidad al cambio de los datos es diferente, la Gamma se ajusta más en la zona de menor pérdida de carga y la Weibull se ajusta me

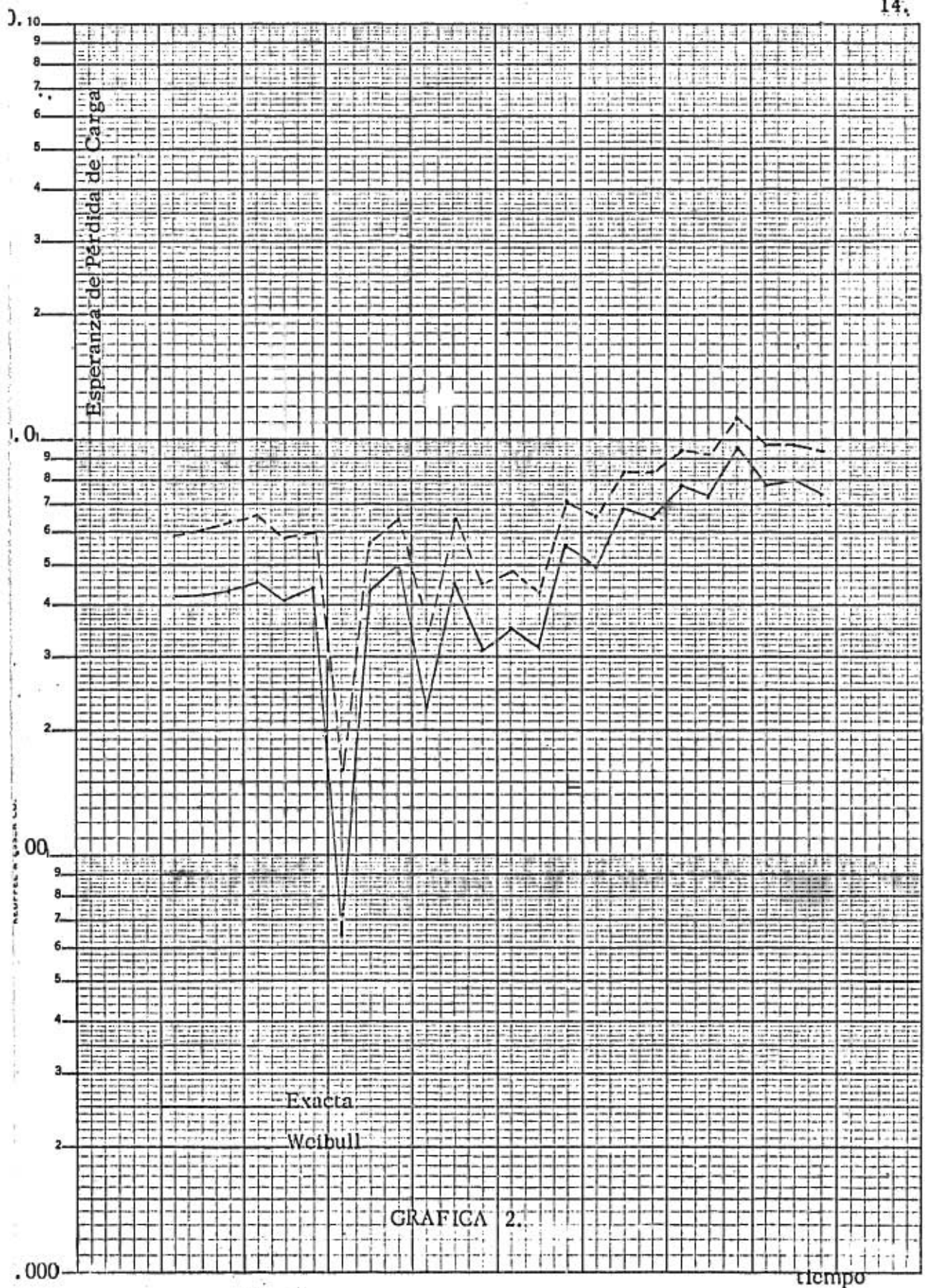
por para una pérdida de carga mayor.

Dado que en los estudios de planeación, desde el punto de vista de confiabilidad, realmente interesa decir si el sistema es o no confiable, y el límite de confiabilidad aceptado se encuentra más cercano a la zona de ajuste de la distribución Weibull, aunado al menor tiempo de cálculo, los estudios se enfocaron sobre la distribución Weibull.

En las gráficas 2 y 3 se muestran resultados de la distribución Weibull contra la distribución exacta, donde el ajuste para la obtención de los parámetros se hizo en función de la media y la variancia. Sin embargo dado que el ajuste se puede hacer en función de cualesquiera 2 momentos, el coeficiente de asimetría o el coeficiente de kurtosis, queda la duda de si el ajuste hecho sobre la media y la variancia fue el mejor.

Para resolver este problema se tomó el siguiente enfoque: a cualquiera de los ajustes posibles debe corresponder una media y una variancia, que en general serán diferentes a los de los datos, es decir, llamando  $\mu_n^W$  y  $\mu_n^e$  a los momentos n-ésimos de la distribución Weibull y la distribución exacta respectivamente, y el ajuste se hace en función de



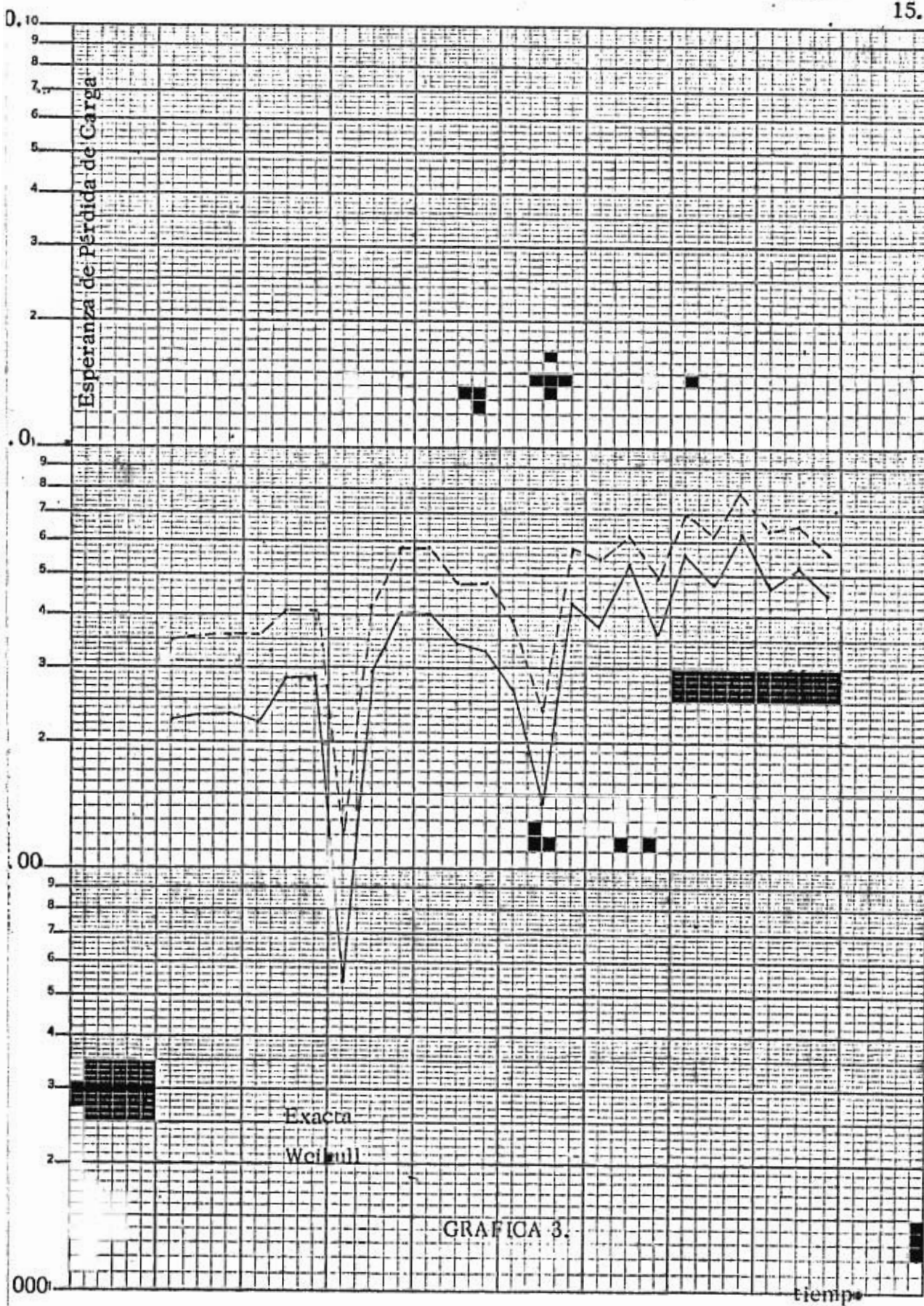


Exacta  
Weibull

GRAFICA 2.

tiempo





GRAFICA 3.

$$\mu_n^e = \mu_n^w$$

$$\mu_m^e = \mu_m^w$$

esto equivale a resolver un sistema del tipo

$$\mu_1^w = \mu_1^e$$

$$\mu_2^w = \mu_2^e$$

donde en general  $\mu_1^e \neq \mu_1^w$  y  $\mu_2^e \neq \mu_2^w$ , con este punto de vista se resolvió el sistema:

$$\mu_1^w = k_1 \mu_1^e$$

$$\mu_2^w = k_2 \mu_2^e$$

para diferentes valores de  $k_1$  y  $k_2$ .

Como una medida del ajuste entre las distribuciones se tomó el valor absoluto de la diferencia máxima entre ellas. El resultado que se obtuvo fue una superficie de respuesta que se muestra en la figura siguiente, la cual tiene un mínimo global para  $k_1 = 1.25$  y  $k_2 = 2.75$ , y la reducción en la diferencia máxima fue de 0.146 a 0.098 (debe hacerse notar que una diferencia máxima más pequeña no implica necesariamente un mejor ajuste), sin embargo los resultados en el cálculo de la confiabilidad prácticamente no mejoraron,

ésto aunado a la búsqueda necesaria para determinar el mínimo, in  
dica que no vale la pena buscar ajustes mejores que el dado por

$$\mu_1^w = \mu_1^e$$

$$\mu_2^w = \mu_2^e$$

De las gráficas 2 y 3 vemos que el valor dado por la distribución --  
Weibull siempre es más alto que el exacto, ésto sugiere que pueda  
reducirse de alguna manera para obtener un mejor ajuste. Esta po  
sibilidad se estudió tratando de determinar las causas, sin embargo  
no se pudo encontrar un criterio que funcionara en todos los casos.  
Para remediar en parte este problema se pensó en subir el límite -  
de la confiabilidad para hacerlo equivalente al resultado exacto. Una  
segunda solución fue disminuir la demanda en un cierto porcentaje,  
con ello se aumenta la confiabilidad, y al disminuir la pérdida de -  
carga esperada, el valor Weibull se acerca al valor exacto, deci--  
diendo de esta manera si un sistema es o no aceptable se obtuvieron  
los mismos resultados (si o no) que con el método exacto en 15 de  
17 casos estudiados.

Como conclusión a este trabajo se sugiere por las ventajas ya ano-  
tadas el uso de la distribución Weibull.

$\sigma^2$					
2.95	.1076	.1031	.0985	.1065	.1251
2.90	.1076	.1030	.0984	.1090	.1280
2.85	.1076	.1030	.0984	.1115	.1309
2.80	.1075	.1030	.0984	.1144	.1338
2.75	.1075	.1030	.0983	.1173	.1369
2.70	.1075	.1030	.1004	.1203	.1400
2.65	.1075	.1030	.1033	.1234	.1431
2.60	.1075	.1030	.1064	.1266	.1464
2.55	.1075	.1030	.1095	.1298	.1497
	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35

Superficie de Respuesta  $\mu - \sigma^2$

APENDICE  
MOMENTOS DE LAS DISTRIBUCIONES.

Antes de determinar los momentos de las distribuciones es conveniente definir las funciones gamma y beta.

Función gamma. - La función gamma está dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

y tiene como principales propiedades que

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \text{ y } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Función beta. - La función beta está definida como

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt$$

y cumple que (10, pp 255-265).

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = B(w, z)$$

Distribución de Rayleigh. La distribución de Rayleigh está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\alpha^2} x e^{-1/2 \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}; \quad x \geq 0$$

entonces

$$\mu_n^* = \int_0^{\infty} x^n \frac{1}{\alpha^2} x e^{-1/2 \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} dx$$

$$\text{si } u = 1/2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 ; du = \frac{x}{a^2} dx ; x = a \sqrt{2u}$$

$$\begin{aligned} \mu_n' &= \int_0^\infty a^n (2u)^{n/2} e^{-u} du = a^n 2^{n/2} \int_0^\infty u^{n/2} e^{-u} du = \\ &= a^n 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \mu_n' = \begin{cases} a^n 2^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)! & \text{si } n \text{ es par} \\ a^n 2^{n/2} \sqrt{\pi} \frac{1.3.5\dots n}{2^{n+1/2}} & \end{cases}$$

Distribución Maxwell. Esta distribución está definida como

$$f(x) = \frac{4x^2}{a^3 \sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}, x \geq 0$$

por lo tanto tenemos

$$\mu_n' = \int_0^\infty \frac{4x^{n+2}}{a^3 \sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} dx$$

$$\text{si } u = \frac{x^2}{a^2} ; du = \frac{2x}{a^2} dx, x = a \sqrt{u}$$

$$\begin{aligned} \mu_n' &= \int_0^\infty \frac{2x^{n+1}}{a \sqrt{\pi}} e^{-u} du = \int_0^\infty \frac{2a^n u^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-u} du \\ &= \frac{2a^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{\frac{n+1}{2}} e^{-u} du = \frac{2a^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\mu_n' = \begin{cases} \frac{2a^n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n+1}{2}\right)! & \text{si } n \text{ es impar} \\ a^n \frac{1.3.5\dots(n+1)}{2^{n/2}} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Distribución Gamma.

$$f(x) = \frac{x^a e^{-x/b}}{\Gamma(a+1)b^{a+1}}$$

Entonces

$$\mu'_n = \int_0^{\infty} \frac{x^{a+n} e^{-x/b}}{\Gamma(a+1) b^{a+1}} dx$$

$$\text{si } z = x/b ; dz = dx/b ; x = zb$$

$$\begin{aligned} \mu'_n &= \int_0^{\infty} \frac{(zb)^{a+n} e^{-z}}{\Gamma(a+1) b^a} dz = \frac{b^n}{\Gamma(a+1)} \Gamma(a+n+1) = \\ &= \frac{b^n (a+n)!}{a!} \end{aligned}$$

Distribución beta.

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b+2) y^a (1-y)^b}{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1)} = \frac{y^a (1-y)^b}{B(a+1, b+1)}$$

$$\mu'_n = \int_0^1 \frac{y^{a+n} (1-y)^b}{B(a+1, b+1)} dy = \frac{B(a+n+1, b+1)}{B(a+1, b+1)}$$

$$= \frac{(a+n)! (a+b+1)!}{a! (a+b+n+1)!}$$

Distribución Weibull

$$f(x) = aby^{b-1} e^{-ay^b}$$

$$\mu'_n = \int_0^{\infty} aby^{b+n-1} e^{-ay^b} dy$$

$$\text{si } z = ay^b ; dz = aby^{b-1} dy ; y = \left(\frac{z}{a}\right)^{1/b}$$

$$\mu'_n = \int_0^\infty \left(\frac{z}{a}\right)^{n/b} e^{-z} dz = \left(\frac{1}{a}\right)^{n/b} \Gamma(n/b+1)$$

$$F(y) = \int_0^y abx^{b-1} e^{-ax^b} dx$$

$$\text{si } z = x^b ; dz = bx^{b-1} dx$$

$$F(y) = \int_0^y ae^{-az} dz = -e^{-az} \Big|_0^y = 1 - e^{-ay^b}$$



## BIBLIOGRAFIA

- (1) G. Calabrese. "Generating Capacity Reserve Determined by the Probability Method", A. I. E. E. Transactions. Vol. 66, 1947.
- (2) R. Billinton. "Power System Reliability Evaluation". Gordon and Breach, Science Publishers 1970.
- (3) C. Urdaibay. "Cálculo de la Confiabilidad en un Sistema Eléctrico" Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México, 1969.
- (4) H. D. Jacoby. "Analysis of Investment in Electric Power" Tesis Doctoral, Harvard University, Cambridge, Massachusetts. 1967.
- (5) M. G. Kendall. "The Advanced Theory of Statistics". Charles Griffin & Company Limited. 1963.
- (6) E. Parzen. "Modern Probability Theory and its Applications". John Wiley 1960.
- (7) B. V. Gnedenko "The Theory of Probability" MIR Publishers, 1969.
- (8) B. Ostle. "Statistics in research" Limusa Wiley. 1963.
- (9) A. Ralston. "A First Course in Numerical Analysis. Mc Graw-Hill 1965.
- (10) Abramowitz M. "Handbook of Mathematical Functions with -- Formulas, Graphs and Mathematical Tables", National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series. 1964.