



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**ESTUDIO DEL FLUJO SIMULTANEO DE ACEITE, GAS Y AGUA EN
MEDIOS POROSOS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

SERGIO RUTEAGA TORRES

ASESOR: .

Ciudad Universitaria, Ciudad de México,

1999

0202

01149

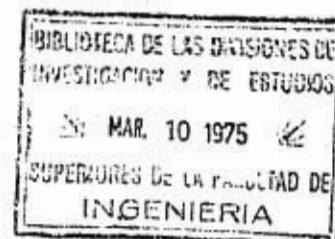
130

TEMA QUE SE PROPONE AL SR. ING. SERGIO RUTEAGA TORRES, PARA QUE
LO DESARROLLE COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OBTENER EL GRADO
DE MAESTRO EN INGENIERIA (FISICA DE YACIMIENTOS)

"ESTUDIO DEL FLUJO SIMULTANEO DE ACEITE, GAS Y AGUA EN MEDIOS
POROSOS"

- 1.- Ecuaciones de flujo
- 2.- Ecuaciones en diferencias finitas
- 3.- Esquemas de solución
- 4.- Análisis de convergencia y estabilidad
- 5.- Discusión de los diferentes métodos de solución utilizados. Ventajas y desventajas.
- 6.- Establecimiento de la secuencia de cálculo del método recomendado.

México, D.F., a 17 de julio de 1973



294570



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

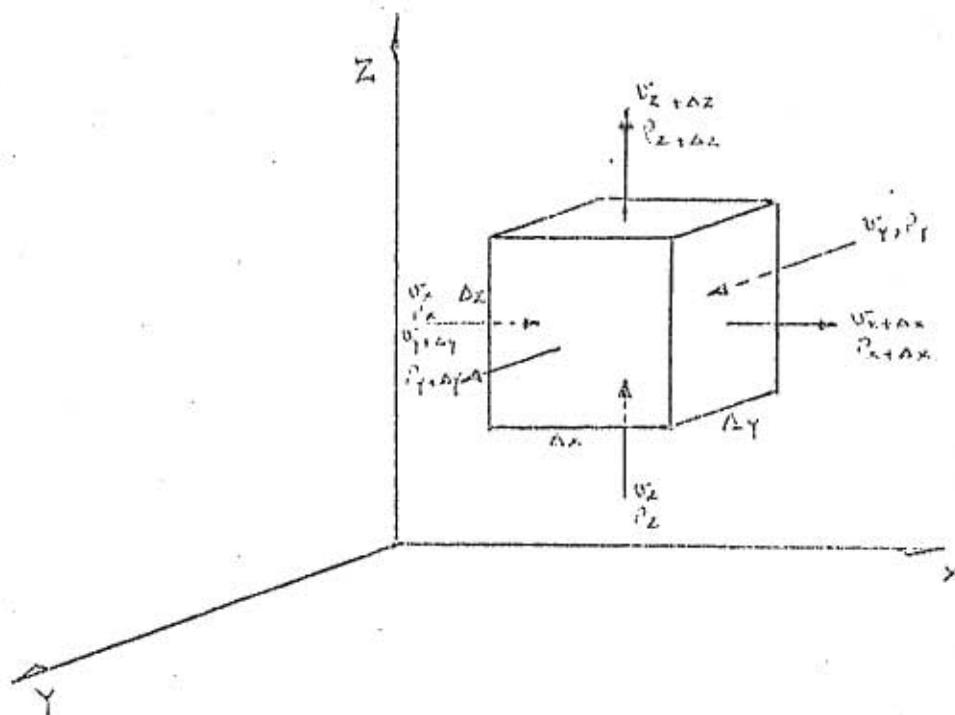
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

1. ECUACIONES DE FLUJO.

1.1 Ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad para el flujo de fluidos a través de un medio poroso, se obtiene aplicando un principio de conservación, el cual establece que una cantidad física no puede crearse ni destruirse. Para el análisis se considera el flujo de masa de un fluido a través de un pequeño elemento del yacimiento con dimensiones Δx^* , Δy , Δz como se muestra en la figura 1.



*Nomenclatura al final.

Este elemento contiene roca y fluidos ocupando el espacio poroso. Para cada fase se puede escribir un balance de materia en la forma

$$\text{masa que entra} - \text{masa que sale} + \text{masa inyectada} = \text{masa acumulada} \quad (1.1)$$

En la cara x del cubo, la velocidad del fluido y su densidad son v_x y ρ_x respectivamente. En la cara $x + \Delta x$, la velocidad y densidad son $v_{x+\Delta x}$ y $\rho_{x+\Delta x}$. Similarmente, para las caras $y, y+\Delta y, z$ y $z+\Delta z$, se obtiene: $v_y, \rho_y, v_{y+\Delta y}, \rho_{y+\Delta y}, v_z, \rho_z, v_{z+\Delta z}$ y $\rho_{z+\Delta z}$.

Los gastos de inyección (+) o extracción (-), quedan representados por Q .

Con estas definiciones, la conservación de masa puede establecerse de acuerdo a la ecuación 1.1. La cantidad de masa que entra al elemento durante un intervalo Δt , es:

$$\rho_x v_x \Delta y \Delta z \Delta t + \rho_y v_y \Delta x \Delta z \Delta t + \rho_z v_z \Delta x \Delta y \Delta t$$

La cantidad de masa que abandona el elemento en el mismo intervalo es:

$$\rho_{x+\Delta x} v_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t + \rho_{y+\Delta y} v_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t + \rho_{z+\Delta z} v_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta t$$

Simultáneamente, durante este tiempo una cantidad

$$Q_{x,y,z,t} \rho \Delta t$$

de masa es inyectada en el elemento.

La suma de estas tres cantidades anteriores, nos da la acumulación de masa en el cubo durante dicho Δt , esto es

$$[(S\phi\rho)_{x,y,z,t+\Delta t} - (S\phi\rho)_{x,y,z,t}] \Delta x \Delta y \Delta z$$

donde S y ϕ son la saturación del fluido y porosidad de la roca, respectivamente.

Substituyendo estas expresiones en 1.1 y dividiendo entre $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$, queda

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho_{x+\Delta x} v_{x+\Delta x} - \rho_x v_x}{\Delta x} - \frac{\rho_{y+\Delta y} v_{y+\Delta y} - \rho_y v_y}{\Delta y} - \frac{\rho_{z+\Delta z} v_{z+\Delta z} - \rho_z v_z}{\Delta z} + \left(\frac{Q \rho}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right)_{x,y,z,t} \\ & = \frac{(S\phi\rho)_{x,y,z,t+\Delta t} - (S\phi\rho)_{x,y,z,t}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Tomando el límite para cuando $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y $\Delta t \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + Q = \frac{\partial}{\partial t}(S\phi\rho) \quad (1.3)$$

o sea

$$-\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho g = \frac{\partial}{\partial t} (S \rho) \quad (1.4)$$

que es la ecuación de continuidad para un fluido que fluye a través de un medio poroso.

1.2 Ecuación de Darcy.

Para el flujo de un fluido en un medio poroso, la ley de Darcy nos relaciona la velocidad volumétrica con el gradiente de presión y las fuerzas gravitacionales como

$$v_x = - \frac{k_x k_r}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1.5a)$$

$$v_y = - \frac{k_y k_r}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1.5b)$$

$$v_z = - \frac{k_z k_r}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.5c)$$

El potencial de flujo está definido por

$$\Phi = p + \rho g h \quad (1.6)$$

en donde g es la aceleración debido a la gravedad.

1.3 Ecuación de difusión.

Combinando las ecuaciones 1.5 con la ecuación 1.4, obtenemos la ecuación de difusión para cualquier fluido fluyendo a través de un medio poroso. Además, substituyendo

$$\rho = \frac{\rho_{sc}}{B} \quad (1.7)$$

en la que ρ_{sc} es una densidad base y B el factor de volumen de la fase, obtenemos

$$\nabla \cdot \left(\frac{k k_{rf}}{B_f \mu_f} \nabla \Phi_f \right) + \frac{q_f}{B_f} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_f \phi}{B_f} \right) \quad (1.8)$$

La ecuación 1.8 aplicada a la fase de agua para un flujo en tres dimensiones, queda

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x k_{rw}}{B_w \mu_w} \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y k_{rw}}{B_w \mu_w} \frac{\partial \Phi_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z k_{rw}}{B_w \mu_w} \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} \right) + \frac{q_w}{B_w} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) \quad (1.9a)$$

Para aceite

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x k_{ro}}{B_o \mu_o} \frac{\partial \Phi_o}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y k_{ro}}{B_o \mu_o} \frac{\partial \Phi_o}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z k_{ro}}{B_o \mu_o} \frac{\partial \Phi_o}{\partial z} \right) + \frac{q_o}{B_o} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (1.9b)$$

Para gas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x k_{rg}}{B_g \mu_g} \frac{\partial \Phi_g}{\partial x} + \frac{k_x k_{ro}}{B_o \mu_o} R_{so} \frac{\partial \Phi_o}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y k_{rg}}{B_g \mu_g} \frac{\partial \Phi_g}{\partial y} + \frac{k_y k_{ro}}{B_o \mu_o} R_{so} \frac{\partial \Phi_o}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z k_{rg}}{B_g \mu_g} \frac{\partial \Phi_g}{\partial z} + \frac{k_z k_{ro}}{\mu_o B_o} R_{so} \frac{\partial \Phi_o}{\partial z} \right) + \frac{q_g}{B_g} + \frac{q_o R_{so}}{B_o} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi S_o}{B_o} R_{so} \right) \quad (1.9c)$$

en donde los términos adicionales en la ecuación 1.9c, son los que rigen el flujo de agua, aceite y gas a través de un medio poroso, los cuales para el flujo trifásico deben satisfacerse simultáneamente. Además se debe cumplir que

$$S_g + S_o + S_w = 1 \quad (1.10)$$

Se pueden definir también dos presiones capilares independientes

$$P_{c_{ow}} = P_o - P_w \quad (1.11a)$$

$$P_{c_{go}} = P_g - P_o \quad (1.11b)$$

Hay pocos datos experimentales sobre presión capilar en tres fases, haciendo necesario obtener estimaciones de los datos medidos en dos fases para los sistemas agua-aceite. Perry y Herron¹, presentan los esquemas usados en su programa para estimar la presión capilar en tres fases y permeabilidades relativas.

¹ Referencias al final.

2. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS.

2.1 Solución analítica.

Debido a la heterogeneidad de los yacimientos y a las condiciones de frontera que se presentan, la solución analítica de las ecuaciones 1.9 es imposible. Aún en algunos casos donde soluciones analíticas están disponibles, la evaluación de series infinitas o integrales puede ser más complicada y consumir más tiempo que la solución en diferencias finitas de las ecuaciones diferenciales parciales.

2.2 Solución numérica.

La solución numérica de una ecuación diferencial parcial es el proceso de resolver una representación en diferencias finitas de la ecuación diferencial. Esta técnica puede usarse para resolver problemas extremadamente complicados, los cuales se llevan a cabo mediante computadoras de alta velocidad.

2.3 Errores involucrados.

Existen dos tipos de error al resolver ecuaciones diferenciales por el método de diferencias finitas.

Para fronteras cuadradas, el error será la mayoría de las veces de redondeo. Pero una solución del tipo iterativo se puede llevar a cabo con un número suficiente de dígitos significativos para mantener este error peque

ño.

El segundo tipo es el error de truncamiento resultante al reemplazar la ecuación diferencial parcial por la aproximación en diferencia. Disminuyendo la medida de los incrementos espaciales y tiempo, usualmente disminuye este error. También tomando una aproximación de orden mayor para las derivadas parciales, puede reducirse dicho error.

2.4 Diferencias finitas.

Esta representación se obtiene reemplazando todas las derivadas por diferencias finitas, las cuales pueden desarrollarse fácilmente por medio de la serie de Taylor aplicada a la variable dependiente en el punto $x + \Delta x$ como sigue

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} + \dots \quad (2.1)$$

Resolviendo para la primera derivada

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \dots \quad (2.2a)$$

o sea

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.2b)$$

en donde $O(\overline{\Delta x})$ es el error de truncamiento asociado con esta aproximación y es del orden de $\overline{\Delta x}$. Esta aproximación se llama progresiva.

Expandiendo la serie de Taylor para el punto $(x-\Delta x)$, queda

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \overline{\Delta x} \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \frac{\overline{\Delta x}^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} + \dots \quad (2.3)$$

y resolviendo para la primera derivada se obtiene

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\overline{\Delta x}}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \dots \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\overline{\Delta x}) \quad (2.4b)$$

que es la aproximación regresiva de la primera derivada y tiene el mismo error de 2.2.

Existe otro tipo de aproximación para la primera derivada y es la llamada diferencia central. Para obtenerla, basta restar 2.3 de 2.1, quedando

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\overline{\Delta x}} - \frac{\overline{\Delta x}^2}{3!} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\overline{\Delta x}} + O(\overline{\Delta x}^2) \quad (2.5b)$$

El error de truncamiento asociado con esta expresión, es del orden de $\overline{\Delta x}^2$. Así, para $\overline{\Delta x}$ pequeña, la expansión es más exacta que 2.2b y 2.4b. Intuitivamen-

te, parecería razonable usar la aproximación en diferencias centrales en lugar de las otras dos. Sin embargo, al aplicarse a la solución de ecuaciones parabólicas en casi todos los casos, resultan esquemas inestables. La segunda derivada puede obtenerse de la misma manera. Sumando las ecuaciones 2.1 y 2.3, queda

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{2(\Delta x^2)}{4!} \frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (2.6b)$$

en donde el error de truncamiento asociado con esta expansión, es del orden de Δx^2 .

2.5 Ecuación de difusión.

Aplicando las ecuaciones 2.4b a las ecuaciones 1.9, obtenemos la ecuación de difusión en diferencias finitas. Reemplazando los índices x por i , $x+\Delta x$ por $i+1$, y suponiendo Δx , Δy y Δz constantes, se obtiene para el agua

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{wx} \frac{\Phi_{w_{i,j,k}} - \Phi_{w_{i-1,j,k}}}{\Delta x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{wy} \frac{\Phi_{w_{i,j,k}} - \Phi_{w_{i,j-1,k}}}{\Delta y} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(T_{wz} \frac{\Phi_{w_{i,j,k}} - \Phi_{w_{i,j,k-1}}}{\Delta z} \right) + q_w^* = \\ = \frac{\left(\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right)_{i,j,k,n+1} - \left(\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right)_{i,j,k,n}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.7a)$$

Aplicando 2.2b a 2.7a, se tiene

$$\begin{aligned}
& T_{w_{i+\frac{1}{2},j,k}} (\Phi_{w_{i+1,j,k}} - \Phi_{w_{i,j,k}}) - T_{w_{i-\frac{1}{2},j,k}} (\Phi_{w_{i,j,k}} - \Phi_{w_{i-1,j,k}}) \\
& + T_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}} (\Phi_{w_{i,j+1,k}} - \Phi_{w_{i,j,k}}) - T_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}} (\Phi_{w_{i,j,k}} - \Phi_{w_{i,j-1,k}}) \\
& + T_{w_{i,j,k+\frac{1}{2}}} (\Phi_{w_{i,j,k+1}} - \Phi_{w_{i,j,k}}) - T_{w_{i,j,k-\frac{1}{2}}} (\Phi_{w_{i,j,k}} - \Phi_{w_{i,j,k-1}}) \\
& + q_w^* = \frac{\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)_{i,j,k,n+1} - \left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)_{i,j,k,n}}{\Delta t} \quad (2.8b)
\end{aligned}$$

El subíndice n en el miembro derecho de 2.8b, se refiere al nivel del intervalo Δt . Este subíndice se omitió del primer miembro, pero será añadido cuando se especifique la técnica a seguir para resolver la ecuación 2.8b. Los coeficientes T_w en esta ecuación, se definen como:

$$T_{w_{i+\frac{1}{2},j,k}} = \frac{T_{w_{i+1,j,k}} + T'_{w_{i,j,k}}}{2 \Delta x} \quad (2.9a)$$

$$T'_{w_{i+1,j,k}} = \left(\frac{k_x k_{rw}(S_w)}{B_w(\rho) \mu_w(\rho)} \right)_{i+1,j,k} \quad (2.9b)$$

Los demás coeficientes se definen de una manera similar a 2.9. Expresiones semejantes a 2.8b, se obtienen para el aceite y el gas.

3. ESQUEMAS DE SOLUCION.

3.1 Modelos de líneas de flujo.

Higgins y Leighton², han descrito una técnica para - aproximar la recuperación de aceite por medio de inyección de agua basado en líneas de flujo generales para el flujo de un solo fluido. Su técnica usa esas líneas de flujo para dividir el área total de flujo en "canales de flujo", los cuales fluyen en paralelo entre pozos inyectores y productores. Cada canal es dividido en un cierto número de celdas lineales, en serie, las cuales se aproximan a la forma del canal. Mediante el uso de los factores de forma determinados para cada una de las celdas y usando un desplazamiento frontal del tipo Buckley y Leverett³, se calcula el comportamiento de cada canal. Combinando el comportamiento de todos los canales se obtiene la historia de producción de cada uno de los pozos.

El uso de canales de flujo requiere el conocimiento previo de las líneas de flujo para el arreglo de pozos estudiado, para que de este modo las celdas y sus factores de forma puedan ser calculados. Estos cálculos son demasiado laboriosos para una aplicación práctica.

Le Blanc⁴, presentó un método que produce resultados equivalentes pero no requiere el conocimiento previo de las líneas de flujo ni factores de forma. Este modelo bifásico para yacimientos homogéneos, fue ampliado a

tres fases⁵ y aplicable a cualquier tipo de yacimientos. Las ecuaciones 1.9 aplicadas a un solo fluido incompresible, de viscosidad constante, que fluye isotérmicamente a través de un medio poroso incompresible, heterogéneo y anisotrópico, donde se considera que los efectos gravitacionales son despreciables, se reducen a

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x h \frac{\partial P}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y h \frac{\partial P}{\partial y}) + \frac{\mu q_{xy}}{\Delta x \Delta y} = 0 \quad (3.1)$$

La aproximación en diferencias finitas de 3.1 con $\Delta x = \Delta y$ es

$$\begin{aligned} & (k_x h)_{i+1/2, j} (P_{i+1, j} - P_{i, j}) - (k_x h)_{i-1/2, j} (P_{i, j} - P_{i-1, j}) + (k_y h)_{i, j+1/2} (P_{i, j+1} - P_{i, j}) \\ & - (k_y h)_{i, j-1/2} (P_{i, j} - P_{i, j-1}) + \mu q_{i, j} = 0 \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$B_{i, j} P_{i, j-1} + D_{i, j} P_{i-1, j} + E_{i, j} P_{i, j} + F_{i, j} P_{i+1, j} + H_{i, j} P_{i, j+1} + \mu q_{i, j} = 0 \quad (3.2b)$$

en donde

$$B_{i, j} = (k_y h)_{i, j-1/2} = \frac{(k_y h)_{i, j} + (k_y h)_{i, j-1}}{2} \quad (3.3a)$$

$$E_{i, j} = -(B_{i, j} + D_{i, j} + F_{i, j} + H_{i, j}) \quad (3.3b)$$

y los demás términos se definen en forma similar.

Al usar una malla de $I \times J$ nodos para representar al yacimiento, habrá que resolver simultáneamente un siste

ma de $I \times J$ ecuaciones. Para esto se usa el procedimiento fuertemente implícito (SIP) propuesto por Herbert L. Stone.

Si aplicamos 3.2.b en orden creciente de i para cada j , y variando j desde 1 hasta J , nos resulta un sistema de ecuaciones como el mostrado en la figura 2.

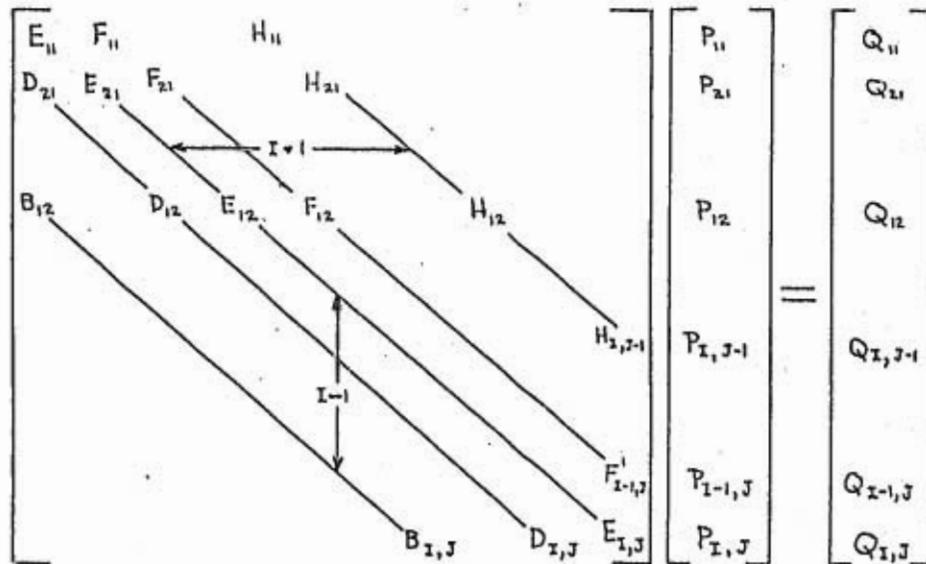


Figura 2.

que expresada en forma matricial es

$$M\vec{p} = \vec{Q} \quad (3.4)$$

La solución de 3.4 por eliminación de Gauss, cuando se tiene un número grande de ecuaciones, requiere mucho cálculo, por lo que la matriz M se altera en $M + N$, de tal forma que

$$M + N = L U = M'$$

siendo L una matriz triangular inferior, figura 3a y U una triangular superior con unos en la diagonal principal como se muestra en la figura 3b. La matriz alterada M' , figura 4, tiene siete diagonales cuyos elementos para un renglón son

$$b_{i,j}, b_{i,j} e_{i,j-1}, \dots, c_{i,j} d_{i,j} + b_{i,j} f_{i,j-1} + c_{i,j} e_{i-1,j}, e_{i,j}, \dots, c_{i,j} f_{i,j}, d_{i,j} f_{i,j}$$

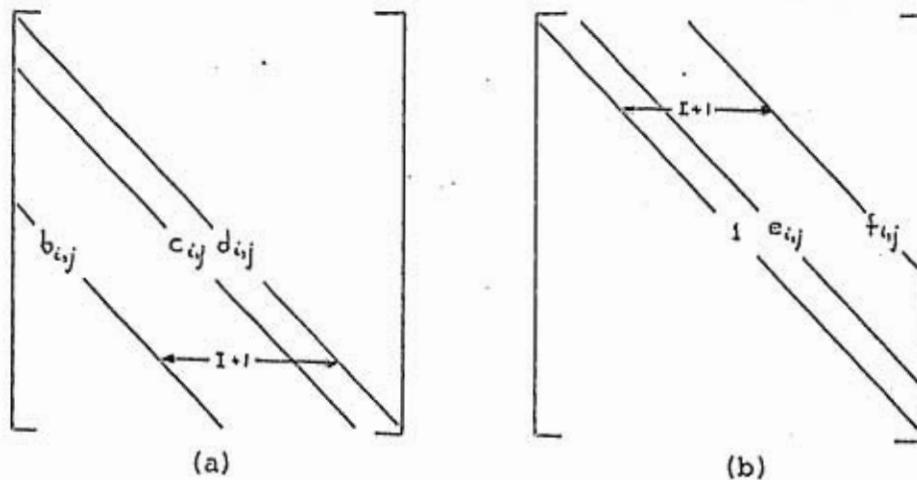


Figura 3

lo que nos conduce a una expresión del tipo

$$\begin{aligned} B'_{i,j} P_{i,j-1} + C'_{i,j} P_{i+1,j-1} + D'_{i,j} P_{i-1,j} + E'_{i,j} P_{i,j} + F'_{i,j} P_{i+1,j} \\ + G'_{i,j} P_{i-1,j+1} + H'_{i,j} P_{i,j+1} = Q_{i,j} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Todo los métodos iterativos consisten en intentar hacer la matriz M' tan parecida como sea posible a M

y luego usar M' como la base del método escribiendo

$$M'p^{k+1} = M'p^k - w [M'p^k - Q] \quad (3.7)$$

donde w es un parámetro de iteración.

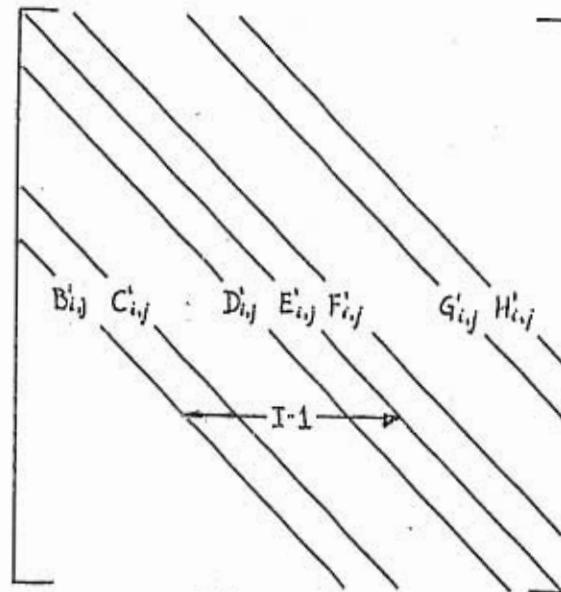


Figura 4.

Para reducir el error de redondeo, se define

$$\delta_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j}^k \quad (3.8a)$$

$$R_{i,j}^k = Q_{i,j}^k - B_{i,j} p_{i,j-1}^k - D_{i,j} p_{i-1,j}^k - E_{i,j} p_{i,j}^k - F_{i,j} p_{i+1,j}^k - H_{i,j} p_{i,j+1}^k \quad (3.8b)$$

así 3.7 queda

$$M'\delta^{k+1} = wR^k \quad (3.9)$$

La ecuación 3.9 es muy fácil de resolver, substituyendo

$$M' = L U$$

$$L U \delta^{k+1} = w R^k \quad (3.10a)$$

definiendo

$$V^{k+1} = U \delta^{k+1} \quad (3.10b)$$

queda

$$L V^{k+1} = w R^k \quad (3.10c)$$

y

$$U \delta^{k+1} = V^{k+1} \quad (3.10d)$$

Hacer que el método iterativo sea lo más rápido posible, consiste en como especificar los elementos de L y U . Stone notó que los valores de $P_{i+1,j-1}$ y $P_{i-1,j+1}$ se podían aproximar por

$$\begin{aligned} P_{i+1,j-1} &\approx P_{i+1,j} + P_{i,j-1} - P_{i,j} \\ P_{i-1,j+1} &\approx P_{i-1,j} + P_{i,j+1} - P_{i,j} \end{aligned} \quad (3.11)$$

y además multiplicó los miembros derechos de 3.11 por un parámetro de iteración α , el cual varía de 0 a 1.

Con esto, siempre que la matriz modificada introduzca el término $P_{i-1,j+1}$, esta presión será parcialmente cancelada restando $\alpha(-P_{i,j} + P_{i+1,j} + P_{i,j+1})$. Así, la forma modificada de 3.4 es

$$\begin{aligned} B_{i,j} P_{i,j-1} + D_{i,j} P_{i-1,j} + E_{i,j} P_{i,j} + F_{i,j} P_{i+1,j} + H_{i,j} P_{i,j+1} \\ + C_{i,j} [P_{i+1,j-1} - \alpha(-P_{i,j} + P_{i+1,j} + P_{i,j-1})] \\ + G_{i,j} [P_{i-1,j+1} - \alpha(-P_{i,j} + P_{i,j+1} + P_{i-1,j})] \end{aligned} \quad (3.12)$$

en donde

$$C_{i,j} = C'_{i,j} = b_{i,j} e_{i,j-1} \quad \text{y} \quad G_{i,j} = c_{i,j} f_{i-1,j} \quad (3.13)$$

Los términos que involucran a $P_{i,j-1}$ son $(B_{i,j} - \alpha C_{i,j})$ lo cual en 3.6 corresponden a $b_{i,j}$, por lo tanto

$$b_{i,j} = B_{i,j} - \alpha C_{i,j} \quad (3.14a)$$

$$c_{i,j} = D_{i,j} - \alpha G_{i,j} \quad (3.14b)$$

$$d_{i,j} + b_{i,j} f_{i,j-1} + c_{i,j} e_{i,j} = E_{i,j} + \alpha C_{i,j} + \alpha G_{i,j} \quad (3.14c)$$

$$e_{i,j} d_{i,j} = F_{i,j} - \alpha C_{i,j} \quad (3.14d)$$

$$d_{i,j} f_{i,j} = H_{i,j} - \alpha G_{i,j} \quad (3.14e)$$

Los coeficientes b , c , d , e , f , R^n y V son coeficientes intermedios, generados y usados durante el proceso de eliminación y están definidos por 3.10 y 3.14, o sea

$$b_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{1 + \alpha e_{i,j-1}} \quad (3.15a)$$

$$c_{i,j} = \frac{D_{i,j}}{1 + \alpha f_{i-1,j}} \quad (3.15b)$$

$$d_{i,j} = E_{i,j} + b_{i,j}(\alpha e_{i,j-1} - f_{i,j-1}) + c_{i,j}(\alpha f_{i-1,j} - e_{i-1,j}) \quad (3.15c)$$

$$e_{i,j} = \frac{F_{i,j} - \alpha b_{i,j} e_{i,j-1}}{d_{i,j}} \quad (3.15d)$$

$$f_{i,j} = \frac{H_{i,j} - \alpha c_{i,j} f_{i-1,j}}{d_{i,j}} \quad (3.15e)$$

$$R_{i,j} = Q_{i,j} - [B_{i,j} P_{i,j-1}^k + D_{i,j} P_{i-1,j}^k + E_{i,j} P_{i,j}^k + F_{i,j} P_{i+1,j}^k + H_{i,j} P_{i,j+1}^k] \quad (3.15f)$$

$$V_{i,j} = (R_{i,j} - b_{i,j} V_{i,j-1} - c_{i,j} V_{i-1,j}) / d_{i,j} \quad (3.15g)$$

Las ecuaciones 3.15 se aplican a los puntos en la línea $j = 1$ con i variando de 1 a I . Enseguida j se incrementa en 1 tomando i los valores anteriores. Este procedimiento se continúa hasta que $j = J$. A continuación se aplica 3.10d para δ^{k+1} aplicándose en orden contrario en cada punto para obtener el cambio de presión, esto es

$$\delta_{i,j}^{k+1} = V_{i,j} - e_{i,j} \delta_{i+1,j}^{k+1} - f_{i,j} \delta_{i,j+1}^{k+1} \quad (3.16a)$$

finalmente

$$P_{i,j}^{k+1} = P_{i,j}^k + \delta_{i,j}^{k+1} \quad (3.16b)$$

Al aplicar 3.15 se debe tener en cuenta que

$$B_{i,1} = H_{i,2} = 0 \quad \text{para } i=1,2,\dots,I \quad (3.17a)$$

$$D_{1,j} = F_{2,j} = 0 \quad \text{para } j=1,2,\dots,J \quad (3.17b)$$

Stone encontró empíricamente que haciendo w diferente de uno, no se aceleraba la convergencia, por lo que únicamente queda en el método un solo parámetro α de iteración. También empíricamente se ha encontrado que $(1 - \alpha_k)$ debe ser calculado del mismo modo que Π_k se calcula para el ADI. El valor mínimo de α no es crítico y puede ser cero. En cambio el valor máximo si es muy crítico y se ha encontrado satisfactorio calcularlo con

$$1 - \alpha_{\max} = \min_{i,j} \left[\frac{\Pi^2}{2I^2 \left(1 + \frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)}, \frac{\Pi^2}{2J^2 \left(1 + \frac{\Delta X}{\Delta Y}\right)} \right] \quad (3.18)$$

en donde ΔX son $D_{i,j}$ y $F_{i,j}$, y ΔY son los coeficientes $B_{i,j}$ y $H_{i,j}$. Los diferentes valores de $(1-\alpha)$ en el ciclo se escogen de modo que estén espaciados geométricamente entre 1 y $(1-\alpha_{\max})$, así

$$1 - \alpha_k = (1 - \alpha_{\max})^{\frac{k-1}{K-1}}, \quad k=1, 2, \dots, K \quad (3.19)$$

donde K es el número de parámetros en el ciclo. Si el problema tiene compresibilidad ($|E| > |B+D+F+H|$), entonces $\alpha = 1$ debe incluirse en el ciclo.

Una vez calculada la distribución de presiones, se procede a calcular las líneas de flujo, para lo cual se sitúan partículas cerca del pozo inyector. Las velocidades en los nodos donde hay pozos se calculan con⁷

$$v_{i,j,x} = \left(\frac{k_x}{\phi \mu \Delta s} \right)_{i,j} \frac{2P_{i,j} - P_{i-1,j} - P_{i+1,j}}{2\Delta x} \quad (3.20a)$$

$$v_{i,j,y} = \left(\frac{k_y}{\phi \mu \Delta s} \right)_{i,j} \frac{2P_{i,j} - P_{i,j-1} - P_{i,j+1}}{2\Delta y} \quad (3.20b)$$

y en el resto con

$$v_{i,j,x} = \left(\frac{k_x}{\phi \mu \Delta s} \right)_{i,j} \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (3.20c)$$

$$v_{i,j,y} = \left(\frac{k_y}{\phi \mu \Delta s} \right)_{i,j} \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (3.20d)$$

Así el avance de las partículas se calcula con

$$X_{t+\Delta t} = X_t + v_x \Delta t \quad (3.21a)$$

$$Y_{t+\Delta t} = Y_t + v_y \Delta t \quad (3.21b)$$

lo cual nos genera las líneas de flujo. Si las líneas al partir de un pozo inyector se encuentran igualmente espaciadas, el flujo por cada una de ellas será función de su posición relativa, esto es

$$q_i = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^N v_j} q_r \quad (3.22a)$$

en donde

$$v_i = \sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \quad (3.22b)$$

$$v_{x_i} = v_x \cos \alpha \quad (3.22c)$$

$$v_{y_i} = v_y \operatorname{sen} \alpha \quad (3.22d)$$

Como se trata de un solo fluido, el avance de estas líneas de flujo, nos define el volumen poroso de la línea en cualquier punto, en función del tiempo de avance y el volumen acarreado por la línea de flujo, o sea

$$V_{p_i} = q_r t_i \quad (3.23)$$

El gasto de un fluido i que pasa por una celda en una línea de flujo es

$$q_i = \frac{K k_{r_i} A \Delta P_i}{\mu_i L} \quad (3.24a)$$

para otro fluido j en la misma celda

$$q_j = \frac{K k_{rj} A \Delta P_j}{\mu_j L} \quad (3.24b)$$

Despejando λ/L de 3.24a y 3.24b e igualando queda

$$\frac{q_i}{\lambda_i \Delta P_i} = \frac{q_j}{\lambda_j \Delta P_j} \quad (3.25a)$$

$$\Delta P_j = \frac{q_j}{q_i} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \Delta P_i \quad (3.25b)$$

en donde el subíndice i se aplica cuando tenemos un solo fluido en el yacimiento, y j representa a cualquiera de las fases aceite, agua o gas.

El gasto q_s que pasa por una línea a un tiempo t , es constante a lo largo de ella; por lo que la conductividad total del canal a ese tiempo es

$$\frac{q_{s,t}}{(P_1 - P_n)_t} = \frac{q_{s,t}}{\sum_{j=1}^n \Delta P_j} \quad (3.26)$$

en donde n es el número total de celdas, o regiones de diferente movilidad en la línea de flujo. Substituyendo 3.25b en 3.26, queda

$$\frac{q_{s,t}}{\Delta P_{TOTAL}} = \frac{q_{s,t}}{\sum_{j=1}^n \frac{q_{s,t}}{q_o} \frac{\lambda_{o,j}}{\lambda_{j,t}} \Delta P_{o,j}} \quad (3.27)$$

en donde q_0 , se refiere a cuando se tiene un solo fluido. Así resolviendo para $q_{s,t}$, se obtiene

$$q_{s,t} = \frac{\Delta P_T}{\lambda_0 \sum_{j=1}^n \frac{\Delta P_{0,j}}{\lambda_{j,t}}} q_0 = C_T q_0 \quad (3.28)$$

En esta ecuación el coeficiente C es constante para un tiempo Δt . Esta constante también nos relaciona las velocidades en el canal, por lo que

$$v_{s,t} = C_T v_0 \quad (3.29)$$

Todos los puntos que empiezan en una línea de flujo, permanecerán en ella. La ecuación 3.28, contiene un solo término que no se puede obtener de la ecuación para un solo fluido, ΔP_T . Se puede suponer una ΔP_T constante durante todo el proceso, o bien, hacerse función del tiempo.

De la ecuación de Buckley y Leverett, se tiene que la velocidad de cualquier saturación es

$$\left(\frac{dl}{dt} \right)_{s_w} = \frac{q}{\phi A(l)} \left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} \right)_{s_w} \quad (3.30)$$

en donde $q/\phi A(l)$ es la velocidad total del fluido en cualquier punto de l . Esta velocidad se puede substituir por 3.29, quedando

$$v_{s_w,t} = C_t v_o \left(\frac{\partial f_w}{\partial s_w} \right)_{s_w} \quad (3.31)$$

Para obtener f_w' , la curva de f_w vs s_w se aproxima por una serie de líneas rectas como se muestra en la figura 5. El número de líneas rectas define las p celdas de movilidad constante. La f_w' correspondiente a cada saturación, es la pendiente en la curva que precede inmediatamente al valor de s_w .

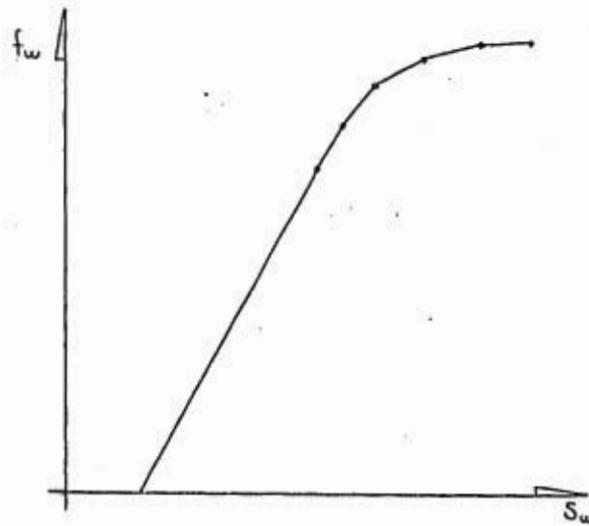


Figura 5.

La movilidad $\lambda_{j,t}$ para 3.27 en esta zona invadida es

$$\lambda_{j,t} = \frac{k_{rwj}}{\mu_w} + \frac{k_{roj}}{\mu_o} \quad (3.32)$$

El gas libre se supone es desplazado totalmente por el banco de aceite y que en la zona de gas únicamente fluye gas, debido a la gran diferencia de movilidad entre

él y el aceite^o. Así para el banco de aceite tenemos

$$\lambda_{j,t} = \frac{k_{ro,j}}{\mu_o} \quad (3.33)$$

El volumen de agua inyectada a un tiempo dado, será - igual al volumen de gas móvil desplazado. Así el volumen poroso del canal al cual se encuentra el frente de aceite es

$$V_{p,t} = \frac{W_{i,t}}{S_{g,m}} \quad (3.34)$$

La movilidad en el banco de gas será

$$\lambda_{j,t} = \frac{k_{rg,j}}{\mu_g} \quad (3.35)$$

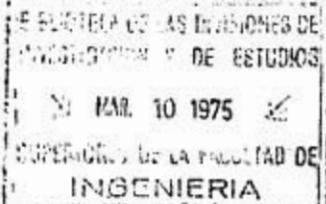
Durante esta etapa, en la cual existe gas libre, la producción de aceite y agua son nulas. El agua inyectada en un intervalo está dada por

$$\Delta W_{i,t} = q_{i,t} \Delta t \quad (3.36)$$

Una vez que el banco de aceite alcance el pozo productor se tendrá producción de aceite, la cual se calcula con

$$\Delta N_{p,t} = \Delta W_{i,t} \quad (3.37)$$

Durante esta etapa no se produce agua, aunque se puede



incluir para cuando la saturación de ~~agua en el banco~~ de aceite sea mayor que S_{wc} . Una vez que el agua inyectada surge en el pozo productor, se tiene

$$\Delta W_{p,t} = \Delta W_{I,t} f_{w,t} \quad (3.38a)$$

$$\Delta N_{p,t} = \Delta W_{I,t} - \Delta W_{p,t} \quad (3.38b)$$

Así con las ecuaciones 3.36 a 3.38, se obtiene la historia de producción de cada línea de flujo. Sumando el comportamiento de todas las líneas de flujo del yacimiento, se obtiene el comportamiento global de él, así como el de cada pozo.

3.2 Método de presión implícita y saturación explícita.

Una de las formas de resolver las ecuaciones 1.9, es el método IMPES, el cual consiste en eliminar las saturaciones de tales ecuaciones usando 1.10 y

$$\frac{\partial}{\partial t} (S_w + S_o + S_g) = 0 \quad (3.39)$$

con lo cual, únicamente quedan como incógnitas los potenciales de las tres fases. Fagin⁹ y colaboradores, en su artículo desprecian el efecto de la presión capilar, quedando así los potenciales definidos como

$$\Phi_w = p + \rho_w g h \quad (3.40a)$$

$$\bar{\Phi}_o = p + \rho_o g h \quad (3.40b)$$

$$\bar{\Phi}_g = p + \rho_g g h \quad (3.40c)$$

Multiplicando 1.9c (aplicada a dos dimensiones) por B_g y expandiendo el miembro derecho

$$B_g \nabla \cdot [T_g \nabla \bar{\Phi}_g] + B_g \nabla \cdot [T_o R_{so} \nabla \bar{\Phi}_o] + q_g^* = h B_g \left[\left(\frac{\phi}{B_g} \right)_{n+1} \frac{\partial S_g}{\partial t} + S_{gn} \frac{\partial (\phi/B_g)}{\partial t} + \left(\frac{\phi R_{sg}}{B_o} \right)_{n+1} \frac{\partial S_o}{\partial t} + S_{on} \frac{\partial (\phi R_{so}/B_o)}{\partial t} \right] \quad (3.41)$$

en donde

$$T = \frac{K k_r h}{B \mu} \quad (3.42a)$$

$$q_g^* = \frac{Q_g}{\Delta x \Delta y} + \frac{Q_o R_{so} B_g}{\Delta x \Delta y B_o} \quad (3.42b)$$

Haciendo A igual al primer miembro de 3.41, se tiene

$$A = \phi h \frac{\partial S_g}{\partial t} + S_{gn} h \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{h \phi}{\partial y} \frac{dB_g}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\phi R_{sg} h B_g}{B_o} \frac{\partial S_o}{\partial P_{cgo}} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial t} + h B_g S_o \left[\frac{\phi}{B_o} \frac{dR_{so}}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} + R_{so} \left(\frac{1}{B_o} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\phi}{B_o} \frac{dB_o}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right] \quad (3.43)$$

Como la presión capilar es cero entre el aceite y gas, el término $\frac{\partial P_{cgo}}{\partial t}$ vale cero, quedando

$$A = \phi h \left[\frac{\partial S_g}{\partial t} - \frac{S_g}{B_g} \frac{dB_g}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} \right] - \frac{B_g R_{so} S_o}{B_o} h \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{B_g \phi h S_o}{B_o} \frac{dR_{so}}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} \\ + \left[S_g - \frac{B_g R_{so} S_o}{B_o} \right] h \frac{\partial \phi}{\partial t} + q_g^* \quad (3.44a)$$

Aplicando un procedimiento similar al balance de aceite y agua da

$$B_o \nabla \cdot [T_o \nabla \bar{\Phi}_o] = \phi h \left[\frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{S_o}{B_o} \frac{dB_o}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} \right] + S_o h \frac{\partial \phi}{\partial t} + B_o q_o \quad (3.44b)$$

$$B_w \nabla \cdot [T_w \nabla \bar{\Phi}_w] = \phi h \left[\frac{\partial S_w}{\partial t} - \frac{S_w}{B_w} \frac{dB_w}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} \right] + S_w h \frac{\partial \phi}{\partial t} + B_w q_w \quad (3.44c)$$

Sumando las ecuaciones 3.44 y aplicando las ecuaciones 1.10 y 3.39, queda

$$B_g \nabla \cdot [T_g \nabla \bar{\Phi}_g] + B_w \nabla \cdot [T_w \nabla \bar{\Phi}_w] + (B_o + B_g R_{so}) \nabla \cdot [T_o \nabla \bar{\Phi}_o] \\ - [q_g^* + B_o q_o + B_w q_w] + \phi h \frac{\partial p}{\partial t} \left[\frac{S_g}{B_g} \frac{dB_g}{dp} + \frac{S_o}{B_o} \left(\frac{dB_o}{dp} + B_g \frac{dR_{so}}{dp} \right) \right. \\ \left. + \frac{S_w}{B_w} \frac{dB_w}{dp} \right] - h \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.45)$$

Aplicando la técnica de diferencias finitas a 3.45 y definiendo el operador

$$\Delta^2 (\bar{\Phi})_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[T_{o_{i+1/2,j}} (\bar{\Phi}_{o_{i+1,j}} - \bar{\Phi}_{o_{i,j}}) \right. \\ \left. - T_{o_{i-1/2,j}} (\bar{\Phi}_{o_{i,j}} - \bar{\Phi}_{o_{i-1,j}}) \right] \quad (3.46)$$

la ecuación 3.45 para dos dimensiones y aplicada al punto i,j queda

$$\begin{aligned}
 & [f_1^{n+1}(p) \Delta x^2 (\bar{\Phi}_0^{n+1})_{i,j} + f_1^{n+1}(p) \Delta y^2 (\bar{\Phi}_0^n)_{i,j}] + [f_2^{n+1}(p) \Delta x^2 (\bar{\Phi}_\omega^{n+1})_{i,j} \\
 & + f_2^{n+1}(p) \Delta y^2 (\bar{\Phi}_\omega^n)_{i,j}] + [f_3^{n+1}(p) \Delta x^2 (\bar{\Phi}_g^{n+1})_{i,j} + f_3^{n+1}(p) \Delta y^2 (\bar{\Phi}_g^n)_{i,j}] \\
 & - g_1(p, s) + \phi h g_2(p, s) \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta t} - h \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = 0 \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Esta ecuación es implícita en la dirección X, ya que los operadores de diferencias en la dirección Y no contienen potenciales en el nivel de tiempo $n + 1$. El método empleado para resolver 3.47 es el desarrollado por Peaceman y Rachford¹⁰, llamado procedimiento iterativo implícito de dirección alternante (ADIP). La ecuación anterior contiene tres incógnitas $p_{i-1,j}^{n+1}$, $p_{i,j}^{n+1}$ y $p_{i+1,j}^{n+1}$, así cuando se escribe para cada punto de una fila de la malla que representa al yacimiento, figura 6a, se obtiene un sistema de ecuaciones que se supone es lineal durante el intervalo Δt . Este sistema de ecuaciones genera una matriz tridiagonal el cual se resuelve fácilmente mediante el algoritmo de Thomas¹¹,

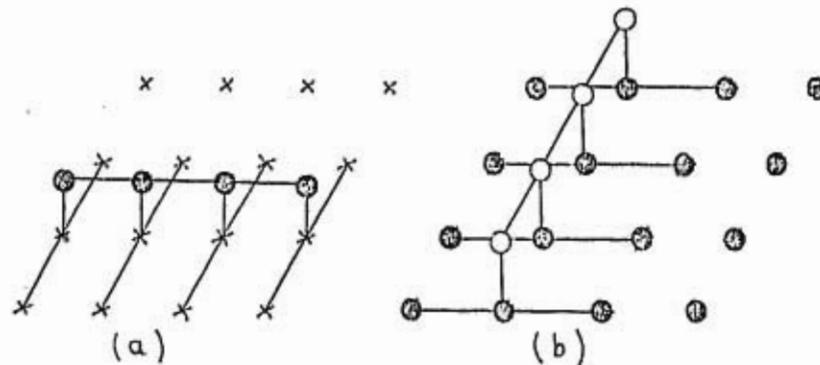


Figura 6.

- x valores al tiempo n.
- ⊗ valores al tiempo n+1/2
- valores al tiempo n+1.

Aunque este método es equivalente al de eliminación de Gauss, evita el crecimiento del error asociado con la solución regresiva del método de eliminación y también minimiza el problema de memoria en la computadora. La ecuación 3.47 aplicada al punto i, j queda

$$A_i P_{i-1,j}^{n+1} + B_i P_{i,j}^{n+1} + C_i P_{i+1,j}^{n+1} = D_i \quad (3.48)$$

en donde

$$A_i = \frac{1}{\Delta x^2} [f_1(p) T_{0,i+1/2,j} + f_2(p) T_{w,i+1/2,j} + f_3(p) T_{g,i+1/2,j}] \quad (3.49a)$$

$$B_i = -\frac{1}{\Delta x^2} [f_1(p) (T_{0,i+1/2,j} + T_{0,i-1/2,j}) + f_2(p) (T_{w,i+1/2,j} + T_{w,i-1/2,j}) + f_3(p) (T_{g,i+1/2,j} + T_{g,i-1/2,j})] - \frac{\phi h g_z(p,s)}{\Delta t} \quad (3.49b)$$

$$C_i = \frac{1}{\Delta x^2} [f_1(p) T_{0,i-1/2,j} + f_2(p) T_{w,i-1/2,j} + f_3(p) T_{g,i-1/2,j}] \quad (3.49c)$$

$$D_i = \frac{T_{0,i+1/2,j}}{\Delta x^2} [(p_0 g_z)_{i,j} - (p_0 g_z)_{i+1,j}] + \frac{T_{w,i+1/2,j}}{\Delta x^2} [(p_w g_z)_{i,j} - (p_w g_z)_{i+1,j}] + \frac{T_{g,i+1/2,j}}{\Delta x^2} [(p_g g_z)_{i,j} - (p_g g_z)_{i+1,j}] + \frac{T_{0,i-1/2,j}}{\Delta x^2} [(p_0 g_z)_{i,j} - (p_0 g_z)_{i-1,j}] + \frac{T_{w,i-1/2,j}}{\Delta x^2} [(p_w g_z)_{i,j} - (p_w g_z)_{i-1,j}] + \frac{T_{g,i-1/2,j}}{\Delta x^2} [(p_g g_z)_{i,j} - (p_g g_z)_{i-1,j}] + g_i(p,s) + P_{i,j}^n + \frac{\phi h g_z(p,s)}{\Delta t} + \frac{h \Delta \phi}{\Delta t} \quad (3.49d)$$

El sistema de I ecuaciones resultante para un renglón en forma matricial da

$$[B]\vec{p} = \vec{D} \quad (3.50)$$

en donde

$$[B] = \begin{bmatrix} B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \\ \dots \\ A_I, C_I \end{bmatrix}; \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \dots \\ P_I \end{bmatrix}; \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \dots \\ D_I \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

La matriz B puede descomponerse en dos matrices triangulares, una superior y otra inferior, esto es

$$[B] = [w][b] \quad (3.52)$$

en donde

$$[w] = \begin{bmatrix} w_1 \\ A_2, w_2 \\ A_3, w_3 \\ \dots \\ A_I, w_I \end{bmatrix}; \quad [b] = \begin{bmatrix} 1, b_1 \\ 1, b_2 \\ 1, b_3 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.53a)$$

para los cuales se tiene

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= B_1 \\
 \omega_j &= B_j - A_j b_{j-1}, \quad 2 \leq j \leq I \\
 b_j &= \frac{C_j}{\omega_j}, \quad 1 \leq j \leq I-1
 \end{aligned} \tag{3.53b}$$

Substituyendo 3.52 en 3.50, da

$$[w][b]\vec{p} = \vec{D} \tag{3.54}$$

Definiendo el vector \vec{g} como

$$[w]\vec{g} = \vec{D} \tag{3.55a}$$

se puede escribir

$$g_1 = \frac{D_1}{w_1} \tag{3.55b}$$

$$g_j = \frac{D_j - A_j g_{j-1}}{w_j}, \quad 2 \leq j \leq I$$

Igualando 3.54 con 3.55a, y premultiplicando por la inversa de $[w]$ queda

$$[b]\vec{p} = \vec{g} \tag{3.56a}$$

que es la solución del sistema 3.50, o sea

$$\begin{aligned}
 p_1 &= g_1 \\
 p_j &= g_j - b_j p_{j+1}, \quad I-1 \geq j \geq 1
 \end{aligned} \tag{3.56b}$$

La secuencia de cálculo para resolver 3.50 es la aplicación de los algoritmos 3.53b y 3.55b en forma descendente, calculándose los elementos de $[w]$, $[b]$ y \vec{g} . La solución se obtiene resolviendo en forma ascendente 3.56b. La aplicación sucesiva de este método a todos los renglones de la malla, da como resultado un nivel de presiones a un nivel de iteración $n + 1$. Escribiendo la ecuación 3.47, para una fila de nodos, figura 6b, queda en forma similar a 3.50, sólo que los niveles de presión serán $k+2$.

Una vez resuelto este sistema, tenemos los nuevos niveles de presión al tiempo $n + 2$, con lo cual podemos obtener explícitamente los valores de las saturaciones simplemente resolviendo para S_g , S_o y S_w las ecuaciones 3.44. En este punto las presiones y saturaciones al nivel $k+2$ se comparan con las del nivel $k+1$. Si la tolerancia no está dentro del rango fijado, se hace otra iteración. De otro modo, se pasa al siguiente intervalo. Cuando una tendencia se ha establecido, una extrapolación lineal se puede hacer para los valores de presión y saturación.

3.3 Modelo implícito.

Perry y Herron¹², desarrollaron un modelo matemático para la predicción exacta y eficiente de un yacimiento en tres fases y dos dimensiones. Incluye los efectos de compresibilidad de la roca y el fluido, viscosidad, gra

vedad, presión capilar, permeabilidades relativas y solubilidad del gas. Dentro de la restricción de dos dimensiones, el yacimiento puede ser completamente heterogéneo y anisotrópico.

Como ya se dijo, la ecuación que nos gobierna el flujo de un fluido en un yacimiento, es

$$\nabla \cdot \left[\frac{k k_x h}{B \mu} \nabla (p - \rho g z) \right] + q = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S}{B} \right) \quad (3.57)$$

Para el nodo i, j esta ecuación expresada en diferencias finitas es

$$\begin{aligned} \Delta x \left[\left(\frac{k k_x h}{B \mu} \right)_n (\Delta x p_{n+1} - (\rho g)_n \Delta x D) \right] \\ + \Delta y \left[\left(\frac{k k_y h}{B \mu} \right)_n (\Delta y p_{n+1} - (\rho g)_n \Delta y D) \right] = \Delta t \left(\frac{\phi S}{B} \right) - q_n \end{aligned} \quad (3.58)$$

en donde los operadores de diferencias tienen las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \Delta x (C_n \Delta x p_{n+1}) = \frac{1}{\Delta x^2} \left[C_{i+1/2, j, n} (p_{i+1, j, n+1} - p_{i, j, n+1}) \right. \\ \left. - C_{i-1/2, j, n} (p_{i, j, n+1} - p_{i-1, j, n+1}) \right] \end{aligned} \quad (3.59a)$$

$$\begin{aligned} \Delta y (C_n \Delta y p_{n+1}) = \frac{1}{\Delta y^2} \left[C_{i, j+1/2, n} (p_{i, j+1, n+1} - p_{i, j, n+1}) \right. \\ \left. - C_{i, j-1/2, n} (p_{i, j, n+1} - p_{i, j-1, n+1}) \right] \end{aligned} \quad (3.59b)$$

$$\Delta t \left(\frac{\phi S}{B} \right)_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S}{B} \right)_{i,j,n+1} - \left(\frac{\phi S}{B} \right)_{i,j,n} \right] \quad (3.59c)$$

Δx y Δy son las dimensiones del bloque i, j . El término $C_{i+1/2, j, n}$ representa una cantidad medida en la frontera del bloque y es una propiedad promedio de los bloques i, j e $i-1, j$. Sin embargo, las permeabilidades relativas en esta cantidad se basan en las propiedades del bloque que está aguas arriba en la dirección del flujo. Esta ecuación es regresiva en presión y progresiva en movilidad. La saturación se expresa en términos de las variables dependientes usando las presiones capilares. Ninguna de las ecuaciones se resuelve explícitamente.

Con el fin de reducir el error de redondeo, se puede hacer el siguiente cambio de variable en 3.58

$$\Delta P_{n+1} = P_{n+1} - P_n \quad (3.60)$$

la cual escrita para la fase de gas, queda

$$\begin{aligned} & \Delta_{xy} C_{g_{xy}n} \Delta_{xy} (\Delta P_g)_{n+1} + \Delta_{xy} C_{s_{xy}n} \Delta_{xy} (\Delta P_o)_{n+1} \\ & = \Delta t \left[\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s (1 - S_w - S_g)}{B_o} \right]_{n+1} + G_{g_n} \end{aligned} \quad (3.60a)$$

en donde

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} C_{g_{xy}n} \Delta_{xy} (\Delta p_g)_{n+1} &= \Delta_x C_{g_n} \Delta_x (\Delta p_g)_{n+1} \\ &+ \Delta_y C_{g_n} \Delta_y (\Delta p_g)_{n+1} \end{aligned} \quad (3.60b)$$

$$C_{g_n} = \left(\frac{k k_{rg} h}{\mu_g B_g} \right)_n \quad (3.60c)$$

$$C_{s_n} = \left(\frac{R_s k k_{ro} h}{\mu_o B_o} \right)_n \quad (3.60d)$$

$$\begin{aligned} G_{g_n} &= g \Delta_{xy} \rho_g C_{g_{xy}} \Delta_{xy} D + g \Delta_{xy} \rho_o C_{s_{xy}} \Delta_{xy} D \\ &- \Delta_{xy} C_{g_{xy}} \Delta_{xy} p_{g_n} - \Delta_{xy} C_{s_{xy}} \Delta_{xy} p_{o_n} - q_{g_n} \end{aligned} \quad (3.60e)$$

Para resolver la ecuación 3.60a, se usa el procedimiento iterativo desarrollado por Weinstein y colaboradores¹² aplicado a tres fases. Así los elementos B, D, E, etc., son matrices de 3 x 3 y p, son vectores de tres elementos.

Los términos de acumulación no lineales se tratan con un procedimiento iterativo Newtoniano.

Considérese el cambio de saturación de n a n+1. Esta diferencia en saturación queda

$$\begin{aligned} \Delta t \left(\frac{\phi S_g}{B_g} \right)_{n+1} &= \left(\frac{\phi S_g}{B_g} \right)_{n+1} - \left(\frac{\phi S_g}{B_g} \right)_n \\ &= \left(\frac{\phi}{B_g} \right)_{n+1} (S_{g_{n+1}} - S_{g_n}) \\ &+ S_{g_n} \left[\left(\frac{\phi}{B_g} \right)_{n+1} - \left(\frac{\phi}{B_g} \right)_n \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

La iteración $k+1$ de saturación está expresada en términos de la iteración k -ésima por

$$S_{g_{n+1}}^{k+1} = S_{g_{n+1}}^k + \left(\frac{\partial S_g}{\partial P_{c_{wo}}} \right)^k \left[\Delta P_{c_{wo}}^{k+1} - \Delta P_{c_{wo}}^k \right] \\ + \left(\frac{\partial S_g}{\partial P_{c_{go}}} \right)^k \left[\Delta P_{c_{go}}^{k+1} - \Delta P_{c_{go}}^k \right] \quad (3.62)$$

en donde la saturación de gas es una función de la presión capilar agua-aceite y gas-aceite. Usando 3.62 y expresando las presiones capilares en términos de las presiones de las fases, resulta

$$S_{g_{n+1}}^{k+1} - S_{g_n} = \left(\frac{\partial S_g}{\partial P_{c_{wo}}} - \frac{\partial S_g}{\partial P_{c_{go}}} \right)^k \Gamma_o^{k+1} + \left(-\frac{\partial S_g}{\partial P_{c_{wo}}} \right)^k \Gamma_w^{k+1} \\ + \left(\frac{\partial S_g}{\partial P_{c_{go}}} \right)^k \Gamma_g^{k+1} + \left(S_{g_{n+1}}^k - S_{g_n} \right) \quad (3.63a)$$

en donde

$$\Gamma^{k+1} = (\Delta p)^{k+1} - (\Delta p)^k \quad (3.63b)$$

La saturación de agua se trata en la misma forma, sólo que ésta se considera función de la presión capilar únicamente. La porosidad, factor de volumen y la solubilidad del gas, se expresan también como función de la presión usando el procedimiento iterativo de Newton. Multiplicando 3.60a por el volumen de un bloque, esta

ecuación es función de los Γ 's definidos anteriormente, se transforma en

$$\begin{aligned} & (\Delta_{xy} C_{sxy} \Delta_{xy} - B_{g_1}) \Gamma_o^{k+1} + (-B_{g_2}) \Gamma_w^{k+1} \\ & + (\Delta_{xy} C_{sxy} \Delta_{xy} - B_{g_3}) \Gamma_g^{k+1} = R_s \quad (3.63a) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B_{g_1} = \frac{V_p}{\Delta t} & \left[\left(\frac{1}{B_0} \right)_{n+1}^k \left(\frac{\partial S_g}{\partial P_{cwo}} - \frac{\partial B_g}{\partial P_{cgo}} \right)^k + \left(\frac{R_s}{B_0} \right)_{n+1}^k \left(\frac{\partial S_g}{\partial P_{cgo}} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial S_g}{\partial P_{cwo}} - \frac{\partial S_w}{\partial P_{cwo}} \right)^k + (1 - S_w - S_g)_n \left(\frac{\partial (R_s/B_0)}{\partial P_0} \right)^k \right] \quad (3.63b) \end{aligned}$$

$$B_{g_2} = \frac{V_p}{\Delta t} \left[\left(\frac{1}{B_g} \right)_{n+1}^k \left(-\frac{\partial S_g}{\partial P_{cwo}} \right)^k + \left(\frac{R_s}{B_0} \right)_{n+1}^k \left(\frac{\partial S_w}{\partial P_{cwo}} + \frac{\partial S_g}{\partial P_{cwo}} \right)^k \right] \quad (3.63c)$$

$$B_{g_3} = \frac{V_p}{\Delta t} \left[\left(\frac{1}{B_g} - \frac{R_s}{B_0} \right)_{n+1}^k \left(\frac{\partial S_g}{\partial P_{cgo}} \right)^k + (S_g)_n \left(\frac{d(1/B_g)}{dP_g} \right)^k \right] \quad (3.63d)$$

$$\begin{aligned}
 R_g^k = & G_{gn} - \Delta x \gamma C_{g \times \gamma n} \Delta x \gamma (\Delta P_g)^k - \Delta x \gamma C_{sg \times \gamma n} \Delta x \gamma (\Delta P_o)^k \\
 & + \frac{V_p}{\Delta t} \left\{ \left(\frac{1}{B_g} - \frac{R_s}{B_o} \right)_{n+1}^k (S_{g_{n+1}}^k - S_{g_n}) - \left(\frac{R_s}{B_o} \right)_{n+1}^k (S_{w_{n+1}}^k - S_{w_n}) \right. \\
 & \left. + (S_g)_n \left[\left(\frac{1}{B_g} \right)_{n+1}^k - \left(\frac{1}{B_g} \right)_n \right] + (1 - S_w - S_g)_n \left[\left(\frac{R_s}{B_o} \right)_{n+1}^k - \left(\frac{R_s}{B_o} \right)_n \right] \right\} \quad (3.63e)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones representadas por 3.63, se resuelven usando el método fuertemente implícito (SIP), aplicado a tres fases.

4.- ANALISIS DE CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD

4.1.- Convergencia

El error de truncamiento es en el que se incurre al reemplazar una ecuación diferencial por una ecuación en diferencias. La solución exacta de una ecuación en diferencias difiere de la solución de la correspondiente ecuación diferencial debido a este error. Este error está dado por

$$E_T = D u_{i,j,n} - d u_{i,j,n} \quad (4.1)$$

donde

E_T = Error de truncamiento.

D_u = Forma en diferencias.

d_u = Forma diferencial.

Este error se puede usar como una guía del orden de convergencia de la solución de la ecuación en diferencias a la solución de la ecuación parcial conforme los incrementos Δx , Δy , Δt tienden a cero.

Para una aplicación práctica en problemas muy complejos, la estimación del error mejor se obtiene resolviendo las ecuaciones de diferencias con diferentes tamaños de malla así como Δt , para determinar sus efectos en la solución. En muchos casos, valores prácticos de Δx , Δy , y Δt pueden ser demasiado largos que el error no decrece tan rápido como lo predicen las ecuaciones para el error. Esto se debe a que las

expresiones para el orden del error describen el comportamiento asintótico conforme Δx , Δy y Δt se aproximan a cero, y no dice algo acerca del comportamiento del error para intervalos Δx , Δy y Δt grandes. Debido a esto, se debe tener precaución con las estimaciones empíricas de los errores obtenidos al correr el mismo problema con diferentes incrementos Δx , Δy y Δt .

4.1.1.- Ecuación de Laplace.

Por simplicidad, el análisis de convergencia se hará para una sola dimensión. Tenemos de 4.1 que

$$\varepsilon_T = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

Desarrollando en serie de Taylor los elementos de 4.2 se tiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_T = & \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\Phi_i^n + \Delta x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right. \\ & + \frac{\Delta x^5}{5!} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^5} + O(\Delta x^6) - 2\Phi_i^n + \Phi_i^n - \Delta x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ & \left. - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \frac{\Delta x^5}{5!} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^5} + O(\Delta x^6) \right] - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (4.3a) \end{aligned}$$

Cancelando términos queda

$$\epsilon_T = \frac{\overline{\Delta x}^2}{12} + O(\overline{\Delta x}^4) \quad (4.3b)$$

Para minimizar el error se tiene que hacer que $\Delta x \rightarrow 0$.

4.1.2.- Ecuación de difusión.

En este caso tenemos que

$$\epsilon_T = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} - c \frac{\Phi_i^n - \Phi_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.4)$$

Desarrollando los términos en serie de Taylor

$$\begin{aligned} \epsilon_T = & \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\Phi_i + \overline{\Delta x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \frac{\overline{\Delta x}^4}{4!} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \right. \\ & + \frac{\overline{\Delta x}^5}{5!} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^5} + O(\overline{\Delta x}^6) - 2\Phi_i + \Phi_{i-1} - \Delta x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\overline{\Delta x}^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \\ & + \frac{\overline{\Delta x}^4}{4!} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \frac{\overline{\Delta x}^5}{5!} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^5} + O(\overline{\Delta x}^6) \left. \right] - \frac{c}{\Delta t} \left[\Phi_i - (\Phi_i - \Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \right. \\ & \left. \frac{\overline{\Delta t}^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + O(\overline{\Delta t}^3) \right] - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + c \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.5a) \end{aligned}$$

Cancelando términos

$$\epsilon_T = \frac{\overline{\Delta x}^2}{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - c \frac{\overline{\Delta t}}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + O(\overline{\Delta x}^4) + O(\overline{\Delta t}^2) \quad (4.5b)$$

Si se quiere minimizar el error se debe hacer que

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2} = C \frac{\overline{\Delta t}}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

Milt demostró que si el potencial satisface

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.7 a)$$

también satisface

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (4.7 b)$$

por lo que 4.6 queda

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{12} = \frac{C \overline{\Delta t}}{2} \quad (4.8 a)$$

así la condición de convergencia es

$$\frac{C \overline{\Delta t}}{\overline{\Delta x}^2} = \frac{1}{6} \quad (4.8 b)$$

4.1.3.- Método S I P.

El análisis del ritmo de convergencia se llevará a cabo mediante un análisis de Fourier, suponiendo que los coeficientes son constantes para todos los puntos y están

definidos por las relaciones

$$B_{i,j} \equiv B = H_{i,j} \quad (4.9 a)$$

$$D_{i,j} \equiv D = F_{i,j} \quad (4.9 b)$$

$$E_{i,j} = -2(B + D) \quad (4.9 c)$$

Para valores grandes de i y j los coeficientes b , c , d , e y f adoptan valores asintóticos y C tiende a G . Para $\alpha = 0$ se tiene

$$b = B; C = b e = \frac{BD}{d}; d + bf + ce = E$$

$$d + b \frac{H}{d} + C \frac{F}{d} = E; d^2 - Ed + BH + DF = 0$$

$$d = \frac{1}{2}E \pm \sqrt{2BD}; C = \frac{BD}{\frac{1}{2}E + \sqrt{2BD}}$$

Finalmente

$$C = \frac{BD}{-(B+D) + \sqrt{2BD}} \quad (4.10 a)$$

Para $\alpha = 1$

$$C = \sqrt{BD} \quad (4.10 b)$$

Definiendo el error en k -ésima iteración como

$$E_{i,j}^k = P_{i,j}^k - P_{i,j} \quad (4.11)$$

en donde $p_{i,j}$ es la solución verdadera. Se supone que el error se puede representar por

$$\varepsilon_{i,j}^k = \xi^k A_{w,p} e^{\hat{w}\pi x + p\pi y} \quad (4.12)$$

Si M es la matriz del problema y M' la matriz del método, se tiene

$$Mp = Q \quad (4.13 a)$$

substituyendo (4.11)

$$M(p^k - \varepsilon^k) = Q \quad (4.13 b)$$

$$Mp^k - Q = M\varepsilon^k = R^k \quad (4.13 c)$$

$$M' \delta^k = R^k \quad (4.13 d)$$

o sea

$$M'(p^{k+1} - p^k) = R^k \quad (4.13 e)$$

De 4.13 c y 4.11 se tiene

$$M'(\varepsilon^{k+1} - \varepsilon^k) = M\varepsilon^k \quad (4.13 f)$$

con lo cual se han eliminado las presiones y Q . Substituyendo 4.12 en 4.13f se llega a la expresión

$$\xi = \frac{[0.5c(1-\alpha)J + c\alpha A]^2 - 4c^2 R^2}{[0.5c(1-\alpha)J + c\alpha A + S]^2 - 4c^2 R^2} \quad (4.14 a)$$

en donde

$$J = \cos(\omega \pi \Delta x) \cos(p \pi \Delta y) \quad (4.14 b)$$

$$A = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega \pi \Delta x}{2}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{p \pi \Delta y}{2}\right) \quad (4.14 c)$$

$$R^2 = \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega \pi \Delta x}{2}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{p \pi \Delta y}{2}\right) \right] \cdot \left[1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega \pi \Delta x}{2}\right) \right] \\ \left[1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{p \pi \Delta y}{2}\right) \right] \quad (4.14 d)$$

$$S = -D \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega \pi \Delta x}{2}\right) - B \operatorname{sen}^2\left(\frac{p \pi \Delta y}{2}\right) \quad (4.14 e)$$

Para convergencia se debe tener

$$|\xi| < 1 \quad (4.15)$$

En el análisis de 4.14 a, Stone⁶ encontró que:

(i) Conforme D o B (pero no ambas) tienden a cero, ξ tiende a cero

Esto corresponde a que las transmisibilidades tienden a cero, en cuyo caso el factor de - aproximación de la matriz M es exacto y así la solución se obtiene sin iteración.

(ii) Si B y D son grandes con respecto a $(\pi \Delta x/2)^2$ y $(\pi \Delta y/2)^2$, el uso repetido de $\alpha = 1.0$, origina que $|\xi| \geq 1$. De hecho el uso repetido de cualquier α en la vecinidad de 1.0 resulta en $|\xi| \geq 1$ para alguna combinación de ω y p.

(iii) Para cualquier combinación de ω y p existe una α que está en el rango de cero a uno, el cual hace a ξ pequeño con respecto a la unidad. Sin embargo, para otras combinaciones de ω y p, esta elección de α puede resultar en $|\xi|$ ligeramente mayor que uno. Por lo tanto, se sugiere el uso de un ciclo de parámetros, cayendo cada uno dentro del rango de cero a uno. Valores cerca de la unidad tienden a bajar los errores fundamentales y de baja frecuencia más rápidamente, mientras que valores cercanos a cero aminoran los errores de alta frecuencia más rápidamente. Los valores cercanos a uno son más sensitivos a los valores de ω y p, esto es. si α se escoge para minimizar $|\xi|$ para una combinación particular de ω y p, un cambio relativamente pequeño en ω y p resultará en un valor mucho mayor de $|\xi|$. Por esta razón es de esperarse que la mayoría de los valores de α empleados en un ciclo sean cercanos a uno.

4.2.- Estabilidad

Los requerimientos de estabilidad implican que los errores presentes en cualquier etapa del cálculo no crezcan en los niveles sucesivos del cálculo. Existen varios criterios para determinar la estabilidad. Los más conocidos son el de Karplus y Von Neumann.

4.2.1.- Ecuación de Laplace.

Esta ecuación en diferencia es

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y^2} + \frac{\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y^2} = 0 \quad (4.16)$$

El criterio de Karplus nos dice que si todos los coeficientes son no negativos, el esquema es estable, lo cual es el caso en 4.16, por lo que se concluye que la ecuación de Laplace es incondicionalmente estable.

4.2.2.- Método ADIP.

Las ecuaciones que definen al procedimiento implícito de dirección alternante son

$$\Delta_x^2 P_{n+1/2} + \Delta_y^2 P_n = \frac{2}{\Delta t} (P_{n+1/2} - P_n) \quad (4.17a)$$

$$\Delta_x^2 P_{n+1/2} + \Delta_y^2 P_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (P_{n+1} - P_{n+1/2}) \quad (4.17b)$$

Sea p^* la solución exacta de las ecuaciones en diferencias 4.17 a y 4.17 b
 p la solución de la máquina y ϵ la diferencia entre ellas. Así, mediante estas definiciones, p^* satisface las ecuaciones 4.17.

$$\Delta_x^2 P_{n+1/2}^* - \Delta_y^2 P_n^* = \frac{2}{\Delta t} (P_{n+1/2}^* - P_n^*) \quad (4.18a)$$

$$\Delta_X^2 P_{n+1/2}^* + \Delta_Y^2 P_n^* = \frac{2}{\Delta t} (P_{n+1}^* - P_{n+1/2}^*) \quad (4.18 b)$$

Por lo que las ecuaciones 4.17 quedan

$$\Delta_X^2 (P_{n+1/2}^* + \varepsilon_{n+1/2}) + \Delta_Y^2 (P_n^* + \varepsilon_n) = \frac{2}{\Delta t} (P_{n+1/2}^* + \varepsilon_{n+1/2} - P_n^* - \varepsilon_n) \quad (4.19 a)$$

$$\Delta_X^2 (P_{n+1/2}^* + \varepsilon_{n+1/2}) + \Delta_Y^2 (P_{n+1}^* + \varepsilon_{n+1}) = \frac{2}{\Delta t} (P_{n+1}^* + \varepsilon_{n+1} - P_{n+1/2}^* - \varepsilon_{n+1/2}) \quad (4.19 b)$$

Restando 4.18 de 4.19

$$\Delta_X^2 \varepsilon_{n+1/2} + \Delta_Y^2 \varepsilon_n = \frac{2}{\Delta t} (\varepsilon_{n+1/2} - \varepsilon_n) \quad (4.20 a)$$

$$\Delta_X^2 \varepsilon_{n+1/2} + \Delta_Y^2 \varepsilon_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1/2}) \quad (4.20 b)$$

Usando el criterio de Von Neumann el cual representa al error

$$\varepsilon_n = \lambda^n e^{\hat{\Gamma} \beta_i} e^{\hat{\Gamma} \beta_j} \quad (4.21)$$

donde $\hat{\Gamma}$ representa $\sqrt{-1}$. La condición de estabilidad es

$$|\lambda| < 1$$

Así

$$\lambda \equiv \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\lambda_{n+1/2}}{\lambda_n} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1/2}} \quad (4.22)$$

es el factor de amplificación del error para el intervalo completo de tiempo.

Sustituyendo 4.21 en 4.20 y dividiendo por $e^{\hat{\beta}i} e^{\hat{\alpha}j}$

queda

$$-\lambda_{n+1/2} \frac{(2-2\cos\beta)}{\Delta x^2} - \lambda_n \frac{(2-2\cos\delta)}{\Delta y^2} = \frac{2}{\Delta t} (\lambda_{n+1/2} - \lambda_n) \quad (4.23 a)$$

$$-\lambda_{n+1/2} \frac{(2-2\cos\beta)}{\Delta x^2} + \lambda_{n+1} \frac{(2-2\cos\delta)}{\Delta y^2} = \frac{2}{\Delta t} (\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1/2}) \quad (4.23 b)$$

en donde se substituyó $\cos x = \frac{e^{\hat{i}x} + e^{-\hat{i}x}}{2}$

Usando la identidad $2 - 2 \cos x = 4 \operatorname{sen}^2(x/2)$ y resolviendo la ecuación 4.23 a para $\lambda_{n+1/2}/\lambda_n$, y la ecuación 4.23 b para $\lambda_{n+1}/\lambda_{n+1/2}$ da

$$\lambda = \frac{\lambda_{n+1/2}}{\lambda_n} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1/2}} = \frac{\left[\frac{2}{\Delta t} - \frac{4 \operatorname{sen}^2(\delta/2)}{\Delta y^2} \right] \left[\frac{2}{\Delta t} - \frac{4 \operatorname{sen}^2(\beta/2)}{\Delta x^2} \right]}{\left[\frac{2}{\Delta t} + \frac{4 \operatorname{sen}^2(\delta/2)}{\Delta y^2} \right] \left[\frac{2}{\Delta t} + \frac{4 \operatorname{sen}^2(\beta/2)}{\Delta x^2} \right]} \quad (4.24)$$

Esta ecuación muestra que la condición de estabilidad $|\lambda| < 1$, se satisface para toda β y δ^1 para cualquier incremento positivo de tiempo Δt . Por lo tanto, el ADIP es incondicionalmente estable.

4.2.3.- Método IMPES.

Si los fluidos se consideran incompresibles, y las transmisibilidades se toman constantes en cualquier dirección dada, las ecuaciones 1.9 en diferencias finitas quedan

$$T_w \Delta^2 p_w - q_w = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta t S_w \quad (4.25 a)$$

$$T_o \Delta^2 p_o - q_o = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta t S_o \quad (4.25 b)$$

$$T_g \Delta^2 p_g - q_g = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta t S_g \quad (4.25 c)$$

donde

$$T \Delta^2 p \equiv T_x \Delta^2_x p + T_y \Delta^2_y p + \Delta^2_z p \quad (4.25 d)$$

$$T_{wx} = \frac{k_x k_{rw}}{\mu_w} \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \quad (4.25 e)$$

Usando funciones lineales de presión capilar queda

$$T_w \Delta^2 p - P'_{cwo} T_w \Delta^2 S_w - q_w = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta t S_w \quad (4.26 a)$$

$$T_o \Delta^2 p - q_o = -\frac{V_p}{\Delta t} \Delta t S_w - \frac{V_p}{\Delta t} \Delta t S_g \quad (4.26 b)$$

$$T_g \Delta^2 p + P'_{cgo} T_g \Delta^2 S_g - q_g = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta t S_g \quad (4.26 c)$$

donde p es la presión del aceite. Hay tres ecuaciones y tres incógnitas S_w , S_g y p .

Los errores E_1 , E_2 , E_3 en esas variables satisfacen las mismas ecuaciones.

$$T_w \Delta^2 (\varepsilon_3)_{n+1} + T'_w \Delta^2 (\varepsilon_1)_n = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta t \varepsilon_1 \quad (4.27 a)$$

$$T_o \Delta^2 (\varepsilon_3)_{n+1} = -\frac{V_p}{\Delta t} \Delta t \varepsilon_1 - \frac{V_p}{\Delta t} \Delta t \varepsilon_2 \quad (4.27 b)$$

$$T_g \Delta^2 (\varepsilon_3)_{n+1} + T'_g (\varepsilon_2)_n = \frac{V_p}{\Delta t} \Delta t \varepsilon_2 \quad (4.27 c)$$

donde $T'_w = -P'_{cwo} T_w$, un número positivo y $T'_g = P'_{cgo} T_g$, también positivo. La notación del tiempo en el primer miembro de 4.27 refleja el hecho de que el método IMPES toma las presiones implícitamente y las presiones capilares o saturaciones explícitamente.

Reemplazando

$$E_{ijk} = f_m e^{i\alpha_x x} e^{i\alpha_y y} e^{i\alpha_z z} \quad (4.28)$$

da

$$\Delta_x^2 E_{ijkm} = -\gamma_x E_{ijkm} \quad (4.29 a)$$

$$\Delta_y^2 E_{ijkm} = -\gamma_y E_{ijkm} \quad (4.29 b)$$

$$\Delta_z^2 E_{ijkm} = -\gamma_z E_{ijkm} \quad (4.30 a)$$

donde $\gamma_x = 4 \text{sen}^2(\alpha_x/2)$; $\gamma_y = 4 \text{sen}^2(\alpha_y/2)$; $\gamma_z = 4 \text{sen}^2(\alpha_z/2)$

y f_n es una función de n . α_x , α_y , α_z varían de casi cero a π pero no más de dos de estas tres variables pueden valer π al mismo tiempo. Así se tiene

$$T_d \Delta^2 E_d = T_{dx} \Delta_x^2 E_d + T_{dy} \Delta_y^2 E_d + T_{dz} \Delta_z^2 E_d = -\lambda_d \gamma_d E_d \quad (4.31 a)$$

en donde

$$\lambda_d = k_{rel} / \mu_d \quad (4.31 b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_d = & \frac{4k_x \Delta y \Delta z}{\Delta x} \text{sen}^2 \frac{\alpha_x}{2} + \frac{4k_y \Delta x \Delta z}{\Delta y} \text{sen}^2 \frac{\alpha_y}{2} \\ & + \frac{4k_z \Delta x \Delta y}{\Delta z} \text{sen}^2 \frac{\alpha_z}{2} \end{aligned} \quad (4.31 c)$$

Substituyendo 4.31 a en 4.27 da

$$-\lambda_w \gamma_3' \varepsilon_{3m+1} - \bar{\lambda}_w \gamma_1' \varepsilon_{1m} = \alpha (\varepsilon_{1m+1} - \varepsilon_{1m}) \quad (4.32 a)$$

$$-\lambda_o \gamma_3' \varepsilon_{3m+1} = -\alpha (\varepsilon_{1m+1} - \varepsilon_{1m}) - \alpha (\varepsilon_{2m+1} - \varepsilon_{2m}) \quad (4.32 b)$$

$$-\lambda_g \gamma_3' \varepsilon_{3m+1} - \bar{\lambda}_g \gamma_2' \varepsilon_{2m} = \alpha (\varepsilon_{2m+1} - \varepsilon_{2m}) \quad (4.32 c)$$

donde $\bar{\lambda}_w = -P'_{cwo} \lambda_o$, $\bar{\lambda}_g = P'_{cgo} \lambda_g$ y $\alpha = V\rho/\Delta t$. Sumando estas tres ecuaciones y resolviendo para $\gamma_3' \varepsilon_{3m+1}$ y substituyendo lo último en 4.32 b y 4.32 c da

$$\alpha \varepsilon_{1m+1} = \left[\alpha - \frac{\bar{\lambda}_w}{\lambda} (\lambda_o + \lambda_g) \gamma_1' \right] \varepsilon_{1m} + \frac{\lambda_w \bar{\lambda}_g}{\lambda} \gamma_2' \varepsilon_{2m} \quad (4.33 a)$$

$$\alpha \varepsilon_{1m+1} + \alpha \varepsilon_{2m+1} = \left[\alpha - \frac{\lambda_o \bar{\lambda}_w}{\lambda} \gamma_2' \right] \varepsilon_{1m} + \left[\alpha - \frac{\lambda_o \bar{\lambda}_g}{\lambda} \gamma_2' \right] \varepsilon_{2m} \quad (4.33 b)$$

λ es la movilidad total $\lambda_w + \lambda_o + \lambda_g$. Estas dos ecuaciones en forma matricial son;

$$a \varepsilon_{m+1} = b \varepsilon_m \quad (4.34 a)$$

donde

$$\epsilon_m = \begin{Bmatrix} \epsilon_{1m} \\ \epsilon_{2m} \end{Bmatrix} \quad (4.34 b)$$

Resolviendo para ϵ_{m+1} se tiene

$$\epsilon_{m+1} = \alpha^{-1} b \epsilon_m = B \epsilon_m \quad (4.35)$$

La matriz B es

$$B = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha - \gamma_1 \bar{\lambda}_w \left(1 - \frac{\lambda_w}{\lambda}\right), & \frac{\lambda_w \bar{\lambda}_2}{\lambda} \gamma_2 \\ \frac{\bar{\lambda}_w \lambda_2 \gamma_1}{\lambda}, & \alpha - \frac{\bar{\lambda}_2 \gamma_2}{\lambda} (\lambda_0 + \lambda_w) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Aplicaciones sucesivas de la ecuación 4.35 da el vector error después de n pasos de tiempo como

$$\epsilon_m = B^m \epsilon_0 \quad (4.37)$$

donde ϵ_0 es el error inicial. Para estabilidad se requiere que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B^m = O \text{ (Matriz nula)} \quad (4.38)$$

Esto es cierto si el radio espectral es menor que la unidad. Haciendo los elementos de la matriz $B = b_{ij}$, se tiene para los valores característicos de la ecuación

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \sigma & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \sigma \end{bmatrix} = 0 \quad (4.39 a)$$

Resolviendo para σ

$$\sigma = \frac{b_{11} + b_{22} \pm \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4 \Delta_b}}{2} \quad (4.39 b)$$

donde

$$\Delta_b = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} \quad (4.39 c)$$

Resolviendo 4.39b para σ se tiene

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{2\alpha} & \left\{ 2\alpha - \frac{\delta_1 (\lambda_0 + \lambda_g) \bar{\lambda}_w}{\lambda} - \frac{\delta_2 \bar{\lambda}_g (\lambda_0 + \lambda_w)}{\lambda} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda} \sqrt{[\delta_1 \bar{\lambda}_w (\lambda_0 + \lambda_g) - \delta_2 \bar{\lambda}_g (\lambda_0 + \lambda_w)]^2} \right. \\ & \left. + 4\lambda_w \lambda_g \bar{\lambda}_w \bar{\lambda}_g \delta_1 \delta_2 \right\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

σ es siempre menor que +1. La restricción $-1 < \sigma$ da

$$\Delta t \leq \frac{4 V_p}{\frac{\gamma_1 \bar{\lambda}_w (\lambda_o + \lambda_g)}{\lambda} - \frac{\gamma_2 \bar{\lambda}_g (\lambda_o + \lambda_w)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sqrt{\quad}} \quad (4.41)$$

Para las regiones de agua-aceite en el yacimiento, se hace $\lambda_g = \bar{\lambda}_g = 0$,
se tiene

$$\Delta t \leq \frac{\phi \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\mu_w}{k_{rw}} + \frac{\mu_o}{k_{ro}} \right)_{\min.}}{2 P'_{iwo} \left(k_x \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} + k_y \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} + k_z \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \right)} \quad (4.42 a)$$

Para la región de gas-aceite se tiene $\lambda_w = \bar{\lambda}_w = 0$, con lo
que se obtiene

$$\Delta t \leq \frac{\phi \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\mu_w}{k_{rw}} + \frac{\mu_o}{k_{ro}} \right)_{\min.}}{2 P'_{iwo} \left[k_x \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} + k_y \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} + k_z \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \right]} \quad (4.42 b)$$

Para obtener las ecuaciones 4.42 se usó el hecho de que la restricción más severa en Δt ocurre cuando los términos sen^2 en γ_1 y γ_2 tienen su valor máximo de uno o casi uno.

5. DISCUSION DE LOS DIFERENTES METODOS DE SOLUCION UTILIZADOS. VENTAJAS Y DESVENTAJAS.

5.1.- Modelos de línea de flujo.

Desde 1962 en que Higgins y Leighton¹³ presentaron su método de canales de flujo, este principio ha sido usado por un número de autores para hacer cálculos aproximados de inyección de agua, vapor, gas y polímeros^{2,4-5,13-18}. El éxito de este método¹³ fue que presentó una excelente concordancia con los resultados numéricos y experimentales reportados por Douglas y colaboradores¹⁹ para un arreglo repetitivo de cinco pozos.

Las suposiciones básicas de estos modelos, es que (1).- las líneas de flujo son independientes de la relación de movilidades, (2).- la teoría de Buckley y Leverett puede ser usada para calcular el desplazamiento de los fluidos entre líneas adyacentes. La primera suposición permite que las líneas de flujo sean determinadas a partir del flujo de una sola fase, y mantenerse fijas conforme la invasión progresa.

Para el caso en que se tengan arreglos no confinados, estas líneas cambiarán cuando la relación de movilidades se aleje de la unidad²⁰, con lo cual la predicción se alejará de la realidad. Sin embargo, recalculando las potenciales conforme avanza el frente, la exactitud puede ser grandemente mejorada. Esta desviación se debe a que atrás del frente de agua ocurre casi toda la caída de presión, con lo cual las trayectorias de las líneas de flujo atrás del frente se hacen casi independientes de la región de alta movilidad adelante del frente de agua.

La falla del modelo para relaciones desfavorables, es de particular interés cuando se tiene la presencia de gas libre inicial, ya que en estos casos se tiene una movilidad favorable a través del banco de aceite.

5.1.1.- Ventajas.

Con el modelo más avanzado de este tipo⁵, se puede predecir la inyección de agua de cualquier tipo de yacimiento, además que se puede calcular las eficiencias de barrido a diferentes etapas de la invasión. La memoria que requiere en la computadora es pequeña y el tiempo de cálculo es rápido.

La deformación de las líneas de flujo puede evitarse recalculando varias veces las líneas de flujo, pero con el consiguiente aumento de tiempo.

5.1.2.- Desventajas.

El comportamiento, así como la forma del avance de la interfase, sólo son confiables cuando se tiene una relación de movilidades igual a uno. El comportamiento de los pozos productores estará sujeto únicamente a los gastos de las líneas que a ellos llegan, lo cual se aleja mucho de la realidad para los pozos más alejados de los inyectores.

5.2.- Método IMPES.

Este modelo está programado para computadoras digitales con bastante capacidad de memoria. Está diseñado para una solución práctica de la relación física compleja entre las fuerzas naturales y las propiedades físicas de un yacimiento - -

heterogéneo. La expansión de todas las fases, incluyendo la de la roca se lleva a cabo de tal modo, que el cálculo de la presión es el caso general en régimen variable. Para tomar en cuenta las grandes variaciones en elevación encontradas en algunos yacimientos y permitir la segregación de algunas fases, se incluye un término gravitacional en el potencial de flujo.

5.2.1.- Ventajas.

Este modelo se puede aplicar a cualquier caso práctico, ya sea para ajuste de historia o parámetros del yacimiento, predicción del comportamiento con inyección de agua o gas, tomar en cuenta acuíferos, fallas, etc., predicción de comportamientos primarios, relaciones agua-aceite, gas-aceite, etc.

5.2.2.- Desventajas.

Para trabajar eficientemente, este modelo necesita una computadora de gran capacidad de memoria y alta velocidad de cálculo. Se debe tener una descripción muy detallada del yacimiento en todas sus propiedades, tanto petrofísicas como de fluidos para poder lograr una buena estimación, ya que debido a los muchos parámetros que intervienen simultáneamente, algunas combinaciones entre ellos pueden dar los mismos resultados durante algún tiempo. Esto es, que al predecir el comportamiento, se puede alejar de la realidad.

Los intervalos de tiempo están restringidos a las condiciones de estabilidad, aunque si los cambios de saturaciones no son muy grandes, esto puede no ser problema.

5.3.- Modelo implícito.

Este simulador está diseñado para dar una gran flexibilidad al usuario del programa. Se puede usar en coordenadas cartesianas o cilíndricas para describir el comportamiento por pozo.

Incluye los efectos más importantes para el comportamiento en tres fases. Como es implícito en presión y saturación, los intervalos de tiempo pueden ser lo suficientemente largos aunque haya cambio grande en saturación.

La mayor suposición de este modelo en tres fases concierne a las propiedades de los fluidos. Las propiedades del aceite y gas se caracterizan por la sola presión del aceite.

5.3.1.- Ventajas.

Debido a su carácter implícito se puede aplicar con confianza aun cuando haya grandes cambios en las saturaciones de los bloques durante un intervalo de tiempo.

Incluye los efectos más importantes del comportamiento en tres fases y es de una gran versatilidad, ya que se puede simular, dentro de la restricción de dos dimensiones, cualquier cosa como acuífero, segregación, inyección de gas, etc.

5.3.2.- Desventajas.

Debido a la versatilidad del modelo, las ecuaciones a resolver son algo complicadas, teniendo que hacer muchos cálculos para cada nodo, por lo que - -

consume mucho tiempo al aplicarse a un caso común, en los cuales a veces no se tiene la suficiente información para poder simularse con este modelo.

6. ESTABLECIMIENTO DE LA SECUENCIA DE CALCULO DEL METODO RECOMEN- DADO.

El método más accesible, por simplicidad y características es el propues-
to por Fagin⁹ y Stewart, sólo que usando el procedimiento fuertemente implícito⁶ -
(SIP) ya que su ritmo de convergencia es mayor que el de dirección alternante¹⁰ -
(ADIP).

En la figura 7, se muestra un diagrama de bloques mostrando la secuen-
cia lógica de cálculo para una predicción. Una vez que se ha definido la malla que -
representa al yacimiento, los siguientes datos se necesitan para cada nodo i, j .

Profundidad.- Cima de la arena.

Espesor.- Espesor efectivo del yacimiento.

Porosidad.- Porosidad media del bloque.

Saturación inicial de gas.- Necesaria únicamente si un casquete está
presente inicialmente.

Saturación crítica de agua.- Pueden ser definidas con las curvas de -
presión capilar por programa.

Saturación inicial de agua.- Puede ser calculada automáticamente por
el contacto agua-aceite.

Presión inicial.- Calculada de mediciones.

Permeabilidad.- Introduciendo los productos Kh entre puntos de malla, es necesario un conjunto para las filas y otro para los renglones. Fallas y otras barreras pueden ser incluidas aquí.

Además se debe tener: correlaciones de las propiedades de los fluidos del yacimiento; historia de producción; permeabilidades relativas y presiones capilares; datos del acuífero, si lo hay; y datos del pozo que puedan ser usados en la predicción.

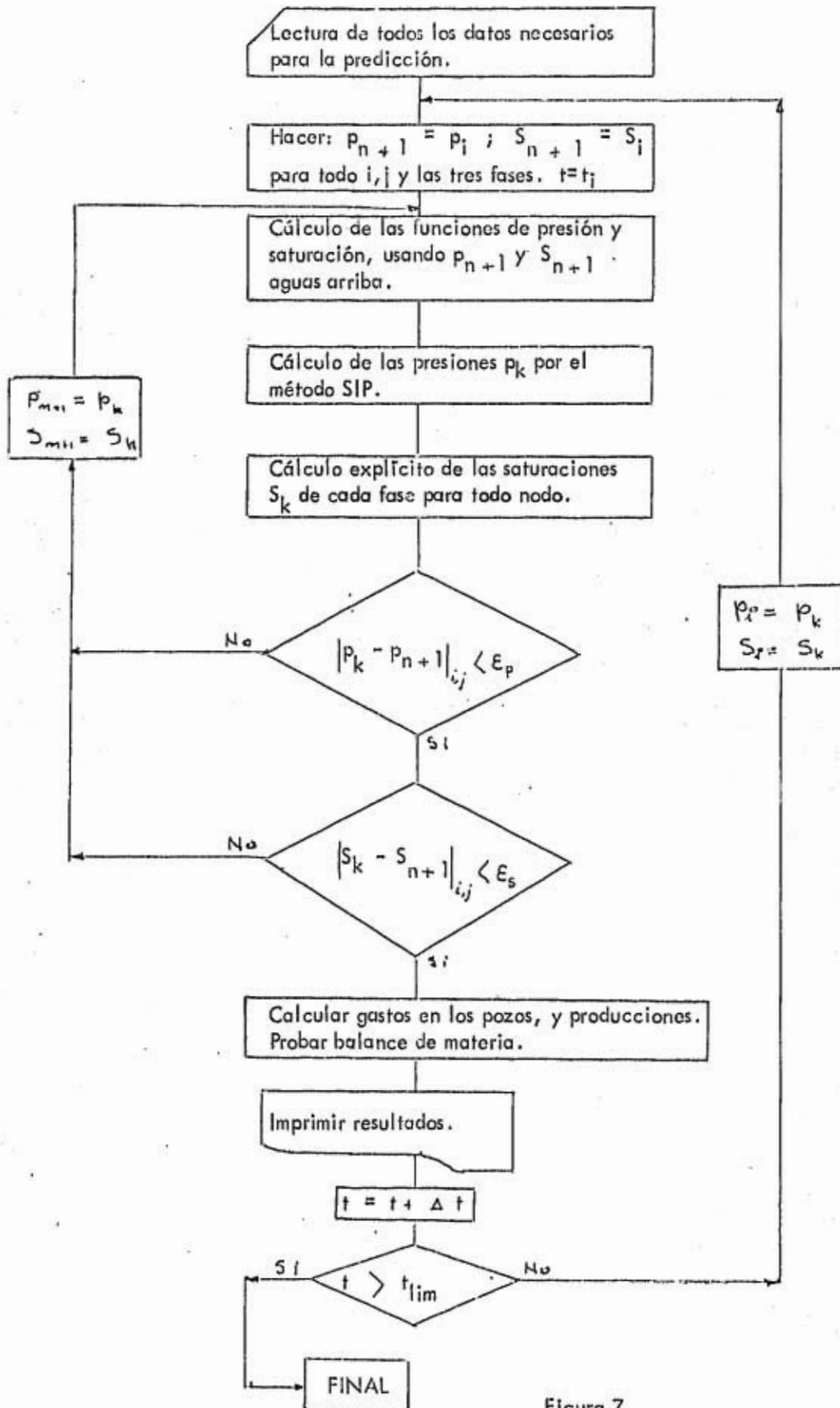


Figura 7

R e f e r e n c i a s

- 1.- Perry, J.H. y Herron, E.H. Jr.,: "Three Phase Reservoir Simulation", Jour. of Petr. Tech. AIME (febrero de 1969), 211 - 220.
- 2.- Higgins, R.V. y Leightan, A.J.: "Computer Prediction of Water Drive of Oil - and Gas Mixtures through Irregularly Banded Porous Media-Three Phase Flow". Jour. Petr. Tech. (septiembre 1962) 1048.
- 3.- Buckley, S.E. y Leverett, M.C.,: "Mechanism of Fluid Displacement in Sands"., Trans. AIME (1942).
- 4.- LeBlanc, J.L. y Caudle, B.H.,: "A Streamline Model for Secondary Recovery"., Soc. of Petr. Eng. Jour. (marzo 1971) 7 - 12.
- 5.- Ruteaga, S.J.,: "Modela Trifásico Bidimensional para Calcular Eficiencia de - Barrido y Predicción del Comportamiento en Proyectos de Inyección de Agua", por publicarse en el Instituto Mexicano del Petróleo.
- 6.- Stone, H.L.,: "Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations", SIAM J. Numbr. Annual (septiembre 1968) 5,3, 530 - 557.
- 7.- McCord, D.F.,: "Two Dimensional Unsteady-State Model", McDonnell Automation Center, Dallas, Texas.
- 8.- Kyte, Stanclift, Stephan y Rapoport,: "Mechanism of Waterflooding in Presence of Free Gas", Trans. AIME Reprint Series No. 2 (1959).
- 9.- Fagin, R. G. y Stewart, C. H. Jr.,: "A New Approach to the Two-Dimensional Multiphase Reservoir Simulator", Soc. of Petr. Eng. Jour. (junio de 1966)., 175-182.
- 10.- Peaceman, D.W. y Rachford, H.H. Jr.,: "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations", Jour. Soc. Ind. Appl. Math. (1955-3,28).
- 11.- Bruce, G.H., Peaceman, D.W. y Rachford, H.H. Jr.,: "Calculations of Unsteady State Gas Flow through Porous Media", Trans. AIME (1953) 198,79-92.

- 12.- Weinstein, H.G., Stone, H.L. y Kwan, T.V.: "Simultaneous Solution of Multiphase Reservoir Flow Equations", Soc. of Petr. Eng. Jour. (junio 1970), 99-110.
- 13.- Higgins, R.V. y Leighton, A.J.: "A Computer Method to Calculate Two-Phase Flow In any Irregularly Bounded Porous Medium", J. Petr. Tech. (junio 1962), 679-683.
- 14.- Doyle, R.E. y Wurl, T.M.: "Stream Channel Concept Applied to Waterflood Performance Calculations for Multiwell Multizone, Three-Component Cases", J. Petr. Tech. (marzo 1971), 373-380.
- 15.- Sprinkle, T.L., Merrick, R.J. y Caudle, B.H.: "Adverse Influence of Stratification on a Gas Cycling Project", J. Petr. Tech. (febrero 1971), 191-194.
- 16.- Rincón, A.C., Díaz-Muñoz, J., y Farouq AlF, S.M.: "Sweep Efficiency in Steam Flooding", J. of Can. Petr., (julio-sept. 1970).
- 17.- Patton, J.T., Coats, K.H., y Colegrove, G.T.: "Prediction of Polymer Flood Performance", Soc. of Petr. Eng. J. (marzo 1971).
- 18.- Ruteaga, S.J., Solís, M.G.: "Estudio del Yacimiento San Andrés, Quinta Parte", Publicación No. 69 BH/038 del I.M.P. (1969)
- 19.- Douglas, J. Jr., Peaceman, D.W. y Rachford, H.H.: "A Method for Calculating Multi-Dimensional Immiscible Displacement", Trans. AIME (1959), 216, 297-308.
- 20.- Martin, J.C., Woo, P.T. y Wegner, R.E.: "Failure of Stream Tube Methods to Predict Waterflood Performance of an Isolated Inverted Five-Spot at Favorable Mobility Ratios". Jour. Petr. Tech. (febrero de 1973), 151-153.