

0536

8

01149

**FACULTAD DE INGENIERIA**  
División de Estudios Superiores

**La Programación Dinámica Aplicada al Diseño  
y Operación de Aprovechamientos Agrícolas**

**T E S I S**

Que para optar por el grado de:  
**MAESTRO EN INGENIERIA**  
(Investigación de Operaciones)

presenta el  
**ING. ALEXIS AGUILAR MALDONADO**

11574  
**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

MEXICO, D. F. MARZO DE 1972

BIBLIOTECA DIVISIONES DE  
INVESTIGACIONES Y ESTUDIOS  
JUN. 7 1972  
SUPERIOR DE INVESTIGACIONES Y ESTUDIOS





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre

Profa. Marfa Maldonado Vda. de Aguilar

A mi esposa, Dora Arévalo de Aguilar

Su apoyo es acicate de superación

A mis hijas, Alejandra y Dora Marfa

A mi abuelo

Carlos Maldonado C.

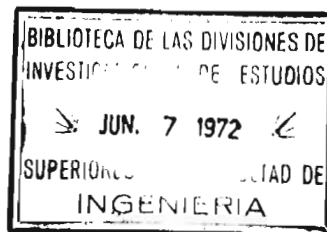
In memoriam.



RECONOCIMIENTOS

Al Ing. Fernando González Villarreal, maestro y amigo, director de esta tesis, por las innumerables enseñanzas recibidas.

Al Dr. Ronald G. Cummings, co-director de este trabajo y quien, a través de "Resources for the Future", Inc. hizo posible la realización de esta tesis.



I N D I C E

	Página
INTRODUCCION	1
<u>CAPITULO I.</u> PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
<u>CAPITULO II</u> METODOLOGIA	8
<u>CAPITULO III</u> ALGORITMO DE OPTIMIZACION	37
<u>CAPITULO IV</u> APLICACION DE LA METODOLOGIA	52
<u>CAPITULO V</u> PRESENTACION DE RESULTADOS	67
<u>CAPITULO VI</u> CONCLUSIONES.	86
REFERENCIAS	89
BIBLIOGRAFIA	90

## INTRODUCCION

En los distritos de riego los responsables del manejo del agua confrontan anualmente el problema de decidir la cantidad de agua que prometerán entregar a los agricultores en el siguiente ciclo agrícola. Esta decisión se toma en base al volumen almacenado en el sistema de aprovechamiento y en una estimación del volumen de alimentación natural al mismo, siendo dicha estimación el resultado de una mezcla de intuición y experiencia.

La incertidumbre asociada con los volúmenes de agua que anualmente entran al sistema da lugar a la aparición de dos tendencias: una de ellas ejerce presión para que se mantengan grandes almacenamientos y se utilicen pequeños volúmenes anuales, con el fin de asegurar el suministro en años futuros; la otra tendencia actúa para que se utilice tanta agua como sea posible en el ciclo inmediato, sin importar lo que pueda ocurrir en el futuro, reflejando la preferencia en el tiempo por el consumo.

Es claro, entonces, que la importancia relativa que se dé, en un momento dado, a estas tendencias influye en forma determinante en la decisión sobre la cantidad de agua que se ha de prometer a la zona de riego. Se entiende, además, que el hecho de no contar con una medida del riesgo que

se corre al tomar la decisión puede provocar que en años de sequía ocurra un fracaso en la explotación de la zona de riego, con los problemas sociales que ésto acarrearía, o que en años abundantes se tengan grandes volúmenes de derrames, con el consiguiente desperdicio de agua de otro modo aprovechable.

En éste trabajo se enfocó el problema de obtener reglas de operación anuales para un distrito de riego en el que se cuenta con una presa de almacenamiento y un acuífero, de manera que el valor esperado de los beneficios netos actualizados sea máximo, tomando en cuenta el carácter aleatorio de las aportaciones a la presa, los datos de proyecto de la misma, las características del acuífero y su recarga anual. Es de gran valor para la evaluación de las reglas de operación que se propongan el conocimiento de la probabilidad de tener un volumen cualquiera almacenado en la presa y en el acuífero, por lo que también se enfocó el problema de evaluar dicha probabilidad.

En la literatura se tratan algunos aspectos del problema de proporcionar herramientas a los responsables de la administración del agua, que les permitan evaluar las posibles consecuencias de sus decisiones, ó determinar reglas de decisión "óptimas", dadas las condiciones del problema y el objetivo que se persiga. Así, se tienen diversos estudios teóricos desarrollados por O.R. Burt<sup>1</sup> sobre el Manejo Económico y Adjudicación Intertemporal del Agua Subterránea; los trabajos de R. Cummings<sup>2</sup> sobre Aspectos Teóricos del Uso de Recursos Exhaustibles; el Uso Óptimo Intertemporal del Agua de una Presa se ha tratado por Fernando González Villarreal\*

\* Investigador del Instituto de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México.

en un trabajo aún no publicado y por Ana Rosa Peiró<sup>3</sup>. El establecimiento de reglas de operación para una presa y un acuífero se trata de un artículo de O.R. Burt<sup>4</sup>, en él determina reglas de operación bajo la hipótesis de que el volumen almacenado en el acuífero domina, en un período largo, la decisión sobre el volumen total anual a entregar; de manera que es posible descomponer el problema de decisión en dos partes. Primero, una política de consumo total se determina en base al volumen almacenado en el acuífero al principio del período; en seguida, se determina una familia de políticas para el almacenamiento superficial, una para cada uno de los estados posibles del almacenamiento subterráneo. Sin embargo, en la realidad, la decisión sobre el volumen total anual a extraer de la presa y el acuífero depende del almacenamiento que se tiene en ambos al principio del ciclo agrícola.

En el capítulo I se presenta el planteamiento del problema, se definen las variables involucradas y sus interrelaciones; en el capítulo II se describe la metodología, se establecen las hipótesis de trabajo y se desarrollan modelos; en el capítulo III se presenta el algoritmo de optimización del modelo adoptado, se determinan las reglas de operación óptimas y las probabilidades de tener un almacenamiento cualquiera bajo esas reglas de operación. En el capítulo IV se hace una aplicación de la metodología el caso concreto de la Comarca Lagunera, en el norte de la República Mexicana, en los capítulos V y VI se analizan los resultados obtenidos y se presentan conclusiones y recomendaciones.



## CAPITULO I

## P L A N T E A M I E N T O D E L P R O B L E M A

En el desarrollo de éste trabajo se supone un sistema formado por una presa de almacenamiento, un acuffero y una zona de riego, como puede verse esquemáticamente en la figura 1.

Para tal sistema se pretende establecer una política de operación anual que maximice el valor esperado a largo plazo de los beneficios netos actualizados que se deriven de la zona de riego; ésto es, al principio de un ciclo agrícola se pretende determinar, para cualesquiera almacenamiento en la presa y en el acuffero, la extracción de ambos de manera que el beneficio neto esperado por la operación del sistema sea máximo.

Los beneficios que obtienen anualmente de la operación del sistema provienen del aprovechamiento del agua para la irrigación, razón por la que los beneficios dependen del monto y composición de la producción agrícola en el distrito de riego.

Estos beneficios dependen, a su vez de la decisión que al principio del ciclo agrícola se toma sobre el volumen de agua que se pretende entregar a los agricultores en el ciclo inmediato, de la tierra y mano de obra disponibles, de los cultivos que es factible desarrollar y del mercado existente para los productos.

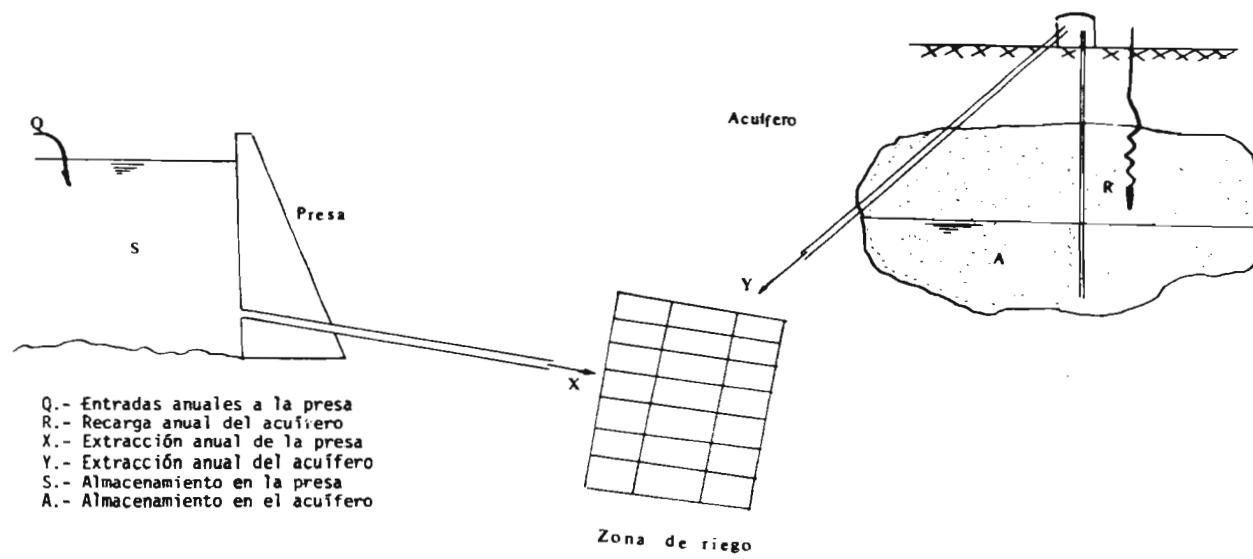


Figura 1.- Representación esquemática de un sistema Presa-Acuifero-Zona de Riego.

La decisión sobre el volumen de agua que se promete entregar en el ciclo agrícola depende del volumen almacenado en el sistema y del volumen de alimentación al mismo; siendo éste último una variable aleatoria, puede no ser posible entregar la cantidad prometida, o que al haberlo no se tenga disponible agua almacenada para el siguiente ciclo. Estas situaciones darían como resultado una gran variación del ingreso de los agricultores de un año a otro, lo que podría significar un gran costo social, producto de la inestabilidad económica. Las consideraciones anteriores apoyadas además en la disminución de la productividad marginal del agua conducen a considerar conveniente la extracción de pequeños volúmenes anuales a fin de asegurar la entrega de agua en años futuros, esto es, propician el mantenimiento de grandes volúmenes almacenados.

Por otra parte, éstos almacenamientos aumentan las pérdidas por evaporación y derrames. Dada la escasez del agua, es deseable que la cantidad perdida por éstos conceptos sea la menor posible. Además, una unidad monetaria en el presente es más deseable que la misma unidad monetaria en el futuro, lo que impone una tasa de interés al capital\*. Las consideraciones anteriores inducen a que se extraiga la mayor cantidad de agua posible en el presente ciclo, sin preocuparse de los ciclos futuros y, por lo tanto, conduce al mantenimiento de pequeños almacenamientos.

Es claro, entonces, que el agua almacenada en el sistema representa una seguridad contra la posibilidad de años de sequía y, por consiguiente, déficits en la entrega de agua a los agricultores; de modo que sí han

\* Ronald G. Cummings. Opus Citada.

de proponerse reglas de operación útiles, éstas deberán balancear las fuerzas que exigen grandes almacenamientos y pequeñas extracciones y - aquellas que exigen se utilice tanta agua como sea posible y se manten gan pequeños almacenamientos.

De la discusión anterior puede plantearse el problema como sigue:

DE UNA ZONA DE RIEGO EN LA QUE PREVALECE DETERMINADAS CONDICIONES SOCIALES, ECONOMICAS, FISICAS, CON UN CIERTO COMPORTAMIENTO HIDROLOGICO- Y EN LA QUE SE CUENTA CON UN SISTEMA DE EXPLOTACION Y DISTRIBUCION DEL AGUA DE UNA PRESA Y UN ACUIFERO, DETERMINAR REGLAS DE OPERACION QUE - PERMITAN ESTABLECER LA ASIGNACION OPTIMA INTERTEMPORAL DEL AGUA DE LA PRESA Y EL ACUIFERO A LA ZONA DE RIEGO, DE MODO QUE EL VALOR ESPERADO DE LOS BENEFICIOS NETOS A LARGO PLAZO SEA MAXIMO, TOMANDO EN CUENTA - LAS RESTRICCIONES QUE EL MEDIO ECONOMICO Y SOCIAL IMPONE SOBRE LA OPE- RACION DEL SISTEMA.

## CAPITULO II

## METODOLOGIA.

El problema planteado es de naturaleza estocástica puesto que el beneficio neto obtenible en un período de tiempo es una variable aleatoria. La aleatoriedad de los beneficios surge tanto de la incertidumbre ligada a muchas variables económicas, como de la ligada a las alimentaciones futuras de agua.

La multitud de variables que deben considerarse impide su manejo simultáneo y por ésta razón se consideró necesario manipular en forma independiente las variables sociales, económicas y agrológicas y las variables hidrológicas que son las que de manera más directa influye en la decisión de cuánta agua ha de entregarse. En este trabajo se supuso que los beneficios netos obtenidos por la operación del sistema en un determinado período de tiempo pueden cuantificarse si la cantidad de agua entregada es dada; esto es, que puede construirse para el sistema en estudio una función de beneficios como la mostrada en la figura # 2.

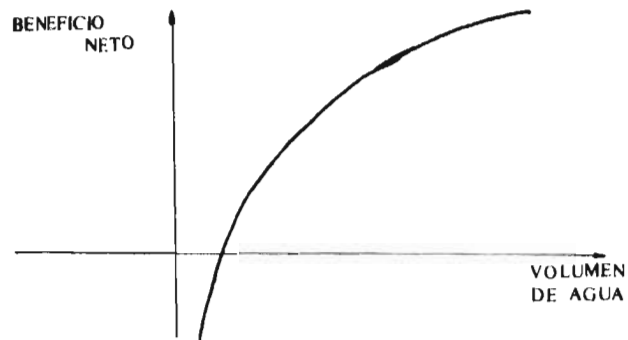


Fig. 2. Forma de la Función de Beneficios.

Se supuso, además que ésta función de beneficios es independiente del --- tiempo, y en ella están consideradas las variables sociales, económicas y agrológicas.

La suposición anterior tiene las siguientes dos implicaciones:

a) La tecnología agrícola permanecerá constante.

Con ésta hipótesis se favorece al consumo actual del agua, dado que se está despreciando la mayor productividad del agua en el futuro.

b) La relación entre los precios de los insumos y productos de -- agricultura permanecerá constante.

Con ésta hipótesis se favorece el consumo de agua en el futuro, dado que se desprecia el hecho de que los precios de los insumos de la -- agricultura crecen a ritmo superior al de los precios de los productos agrícolas.

De manera que el suponer que la función de beneficio es independiente -- del tiempo equivale a decir que el efecto del incremento en tecnología - se anulará con el efecto de la diferencia de precios entre insumos y pro ductos. Dada la falta de datos que permitan un mayor refinamiento, se - pensó que tal suposición es aceptable.

En base a lo anterior se enfocó la atención al problema de decisión que - implica el manejo óptimo intertemporal del agua de la presa y el acuffe- ro. Como se indicó, éste problema depende de las aportaciones de agua - al sistema, que se caracterizan por su función de distribución de probabi lidades. En éste trabajo se supuso perfecto conocimiento del funciona--

miento del acuífero, expresado en términos de su recarga anual; de manera que la aleatoriedad de las aportaciones se asoció únicamente a la existente en las aportaciones a la presa, cuya función de distribución de probabilidades puede estimarse mediante el análisis de series históricas de escurrimientos.

El problema de decisión que se enfrenta puede representarse esquemáticamente como se vé en las figuras: 3-a y 3-b.

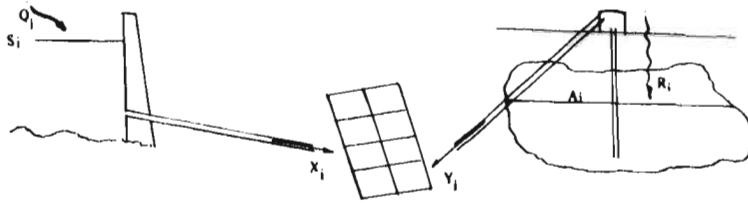


Figura 3-a.- Estado del sistema al principio del año  $i$ .

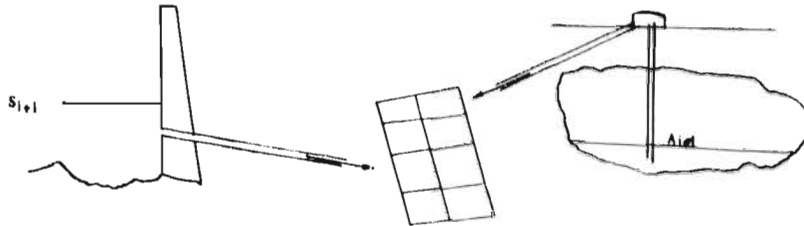


Figura 3-b Estado del sistema en el año  $i+1$ , dado el estado del mismo en el año  $i$ , las decisiones  $X_i$  y  $Y_i$  y las -- entradas  $Q_i$  y  $R_i$ .

En las figuras 3-a y 3-b se puede observar que si al principio del año  $i$  se tienen almacenamientos  $S_i$  y  $A_i$  y se toma la decisión de extraer  $X_i$  -- unidades de agua de la presa y  $Y_i$  unidades de agua del acuífero, los almacenamientos  $S_{i+1}$  y  $A_{i+1}$  al principio del año  $i+1$  dependen del monto -- de las aportaciones a la presa y al acuífero que se tenga en el intervalo  $i, i+1$ . Se está, entonces ante un proceso estocástico de decisión -- secuencial, en el que los intervalos entre cada decisión son de un año.

En todo proceso de decisión se pueden distinguir los siguientes componentes:

- 1) Las variables de decisión, que son aquellas que pueden manipularse para el logro del objetivo deseado.
- 2) Las variables de estado, que son aquellas variables que contienen toda la información necesaria para el conocimiento del sistema.
- 3) Los parámetros, que son aquellas variables no controladas que afectan al objetivo.
- 4) La medida de efectividad, proporcionada por una función escalar de las variables de decisión, de estado y los parámetros. La medida de efectividad o Función Objetivo permite establecer la preferencia entre decisiones alternativas.
- 5) La región de factibilidad. En la mayoría de los problemas las variables de decisión están limitadas a tomar valores dentro de un conjunto definido por una región de factibilidad o conjunto de restricciones.



En el problema de decisión que se ha planteado se tiene:

- 1) Las variables de decisión son los volúmenes anuales a extraer de la presa y el acuffero para su aprovechamiento en la zona de riego.
- 2) Las variables de estado son los volúmenes almacenados en la presa y en el acuffero al principio de cada ciclo agrícola.
- 3) Los parámetros son las características físicas de la presa, el acuffero y la zona de riego así como las características estadísticas de las aportaciones a la presa y el acuffero, siendo las primeras una variable aleatoria.
- 4) La Función Objetivo se estableció como la suma de los beneficios netos esperados en valor presente obtenidos de la operación del sistema presa-acuffero-zona de riego.

Matemáticamente se puede escribir:

$$B^* = \sum_{i=1}^N \beta^{i-1} B_i(W_i)$$

Donde:

$B^*$  = Beneficios neto esperado en valor presente, obtenido por el sistema en N años de operación.

$B_i(W_i)$  = Beneficio neto esperado obtenido en año i, dado que se recibió una cantidad de agua  $W_i$ .

$W_i$  = Volumen total entregado en el año i e igual a la suma de los volúmenes extraídos ese año de la presa ( $X_i$ ) y del acuffero ( $Y_i$ ).

$r =$  Tasa de interés.

$$\beta = \frac{1}{1 + r}$$

- 5) La región de factibilidad se estableció en función de las características físicas de los elementos del sistema, de las restricciones que imponen las condiciones socioeconómicas de la zona de riego, de las características de la función de demanda de agua durante el año y de las ecuaciones de continuidad que deben cumplirse al efectuarse la transición del estado del sistema en el año  $i$  al estado del mismo en el año  $i + 1$ . Esta región de factibilidad se estableció en la forma de un conjunto de restricciones, cuya expresión matemática se presenta al definir matemáticamente el proceso de decisión.

#### DEFINICION MATEMATICA DEL PROCESO DE DECISION.

Si se definen las variables:

- .  $X_i$  y  $Y_i$ , volúmenes que se promete entregar en el año  $i$  provenientes de la presa y el acuffero, respectivamente.
- .  $S_i$  y  $A_i$ , los almacenamientos que tienen al principio del año  $i$  en la presa y en el acuffero, respectivamente.
- .  $Q_i$ , variable aleatoria que representa las entradas a la presa en el año  $i$ .
- .  $R$ , la recarga anual del acuffero.
- .  $E_v(S_i, S_{i+1})$ , la evaporación en la presa en el intervalo dados un almacenamiento inicial  $S_i$  y un almacenamiento final  $S_{i+1}$ .

.  $B(S_1, A_1)$ , el beneficio neto máximo esperado de la operación del sistema desde el año 1 hasta el año N, dado que los almacenamientos en el año 1 son  $S_1$  y  $A_1$ .

.  $B(X_i, Y_i, S_i, S_{i+1}, A_{i+1})$ , el beneficio neto que se obtiene si dados los volúmenes almacenados  $S_i$  y  $A_i$  se deciden extracciones  $X_i$  y  $Y_i$  y -- se llega a almacenamientos  $S_{i+1}$  y  $A_{i+1}$ .

. N, el número de años de operación del sistema

. r, la tasa de interés

$$\beta = \frac{1}{1+r}$$

El problema planteado puede expresarse como:

Determinar  $X_i$  y  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), como funciones de  $S_i$  y  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) tales que hagan máximo el valor esperado de los beneficios actualizados derivados de la operación del sistema durante N años, esto es:

$$\begin{aligned} \text{MAX } B^*(S_1, A_1) = E & \left[ B(X_1, Y_1, S_1, S_2, A_1, A_2) + \beta B(X_2, Y_2, S_2, S_3, A_2, A_3) \right. \\ & \left. (Q_i, i=1, N) \quad + \dots + \beta^{N-1} B(X_n, Y_n, S_n, S_{n+1}, A_n, A_{n+1}) \right] \quad --(1) \end{aligned}$$

Sujeto a las restricciones:

a) Continuidad en el almacenamiento superficial

$$S_{i+1} = S_i + Q_i - X_i - E_v(S_i, S_{i+1}) \quad v_i$$

b) Continuidad en el almacenamiento subterráneo

$$A_{i+1} = A_i + R - Y_i \quad V_i$$

c) Limitaciones físicas del almacenamiento en la presa

$$S_{\min} \leq S_i \leq S_{\max} \quad V_i$$

d) Limitaciones en el almacenamiento factible del acuífero

$$A_{\min} \leq A_i \leq A_{\max} \quad V_i$$

e) La extracción del acuífero debe ser no negativa y la extracción anual debe ser inferior a la capacidad de bombeo instalada pero sin sobrepasar la demanda en ningún período del ciclo agrícola.

$$0 \leq Y_i \leq f(W_i, C_B) \quad V_i$$

f) La extracción que se realiza de la presa es no negativa

$$X_i \geq 0 \quad V_i$$

g) El volumen total que se prometa entregar debe ser mayor o igual que  $D_{\min}$ .

$$D_{\min} \leq X_i + Y_i = W_i \quad V_i$$

Donde:

$$W_i = X_i + Y_i$$

- .  $D_{\min}$  es la cantidad mínima de agua que puede prometerse entregar
- .  $C_B$  es la capacidad instalada de bombeo anual.

Al conjunto de decisiones  $X_i, Y_i; i = 1, 2, \dots, N$  que cumplen con las restricciones (a), (b), (c), (d), (e), (f) y (g) se le nombrará en lo siguiente, conjunto  $\Omega$

Las restricciones a) y b) son las ecuaciones de continuidad que permiten determinar el estado del sistema en el tiempo  $i+1$ , dado el estado del mismo en el tiempo  $i$ , las decisiones  $X_i$  y  $Y_i$  y las aportaciones.

Las restricciones (c y d) establecen que los almacenamientos en la presa y el acuífero en cualquier tiempo  $i$  deben mantenerse entre dos límites:

La capacidad máxima de almacenamiento y un mínimo permisible que puede fijarse a voluntad siempre que sea mayor o igual a la capacidad mínima.

La restricción e) establece que la cantidad  $Y_i$  extraída del acuífero debe ser mayor o igual que cero pero menor o igual que una cierta función de la cantidad total  $W_i$ , de la forma de la ley de demandas mensuales para la extracción anual  $W_i$  y de la capacidad de bombeo  $C_B$ . La necesidad de esta restricción se puede explicar mediante la figura # 4

No obstante que la capacidad de bombeo mensual es  $C_b$ , puede verse en la figura #4 que, debido a la forma de la ley de demandas, en algunos meses no puede bombearse del acuífero a la capacidad máxima. Como la ley de demandas depende de la demanda anual  $W_i$ , entonces de cantidad máxima que es posible bombear en un año depende de  $W_i$ , de la distribución mensual de la deman

$D_i (W)$  = Demanda de agua en el mes  $i$  para  $W$ ,  $i = 1, \dots, 12$ .  
 $P_i (W) = \min \begin{cases} D_i (W) \\ C_b \end{cases}$  Cantidad máxima que puede -  
 bombearse en el mes  $i$

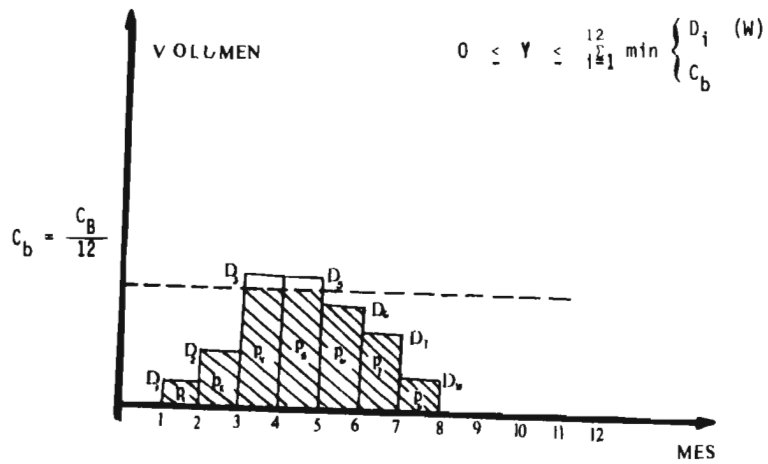


Figura # 4.- Esquema de la restricción e).

da y de la capacidad de bombeo.

La restricción g) establece que  $W_i = X_i + Y_i$  debe mantenerse mayor o igual a un mínimo establecido por las condiciones económicas, sociales y políticas del sistema.

Dado que el modelo se ha planteado en la base anual, la expresión (1) puede simplificarse tomando en cuenta que los volúmenes de escurrimiento anual -- presentan, en general, autocorrelaciones muy bajas y se puede considerar en muchas ocasiones que los  $Q_i$  son independientes. Entonces se puede escribir:

$$B^*(S_1, A_1) = E_{\{Q_1\}} [B(X_1, Y_1, S_1, S_2, A_1, A_2)] + \beta E_{\{Q_2\}} [B(X_2, Y_2, S_2, S_3, A_2, A_3)] + \dots + \beta^{N-1} E_{\{Q_N\}} [B(X_n, Y_n, S_n, A_n, S_{n+1}, A_{n+1})] \quad (2)$$

Es conveniente definir una función  $\psi_i(S_i, A_i)$  como el máximo valor esperado de los beneficios netos actualizados al año  $i$  que se obtuvieran en el período  $i, i+1, i+2, \dots, N$ , dados los almacenamientos  $S_i$  y  $A_i$  en la presa y en acuffero al principio del año  $i$ .

$$\psi_i(A_i, S_i) = \max_{\left( \begin{array}{c} X_1, X_{i+1}, \dots, X_n \\ Y_1, Y_{i+1}, \dots, Y_n \\ \epsilon \quad \Omega \end{array} \right)} E_{\{Q_i\}} [B(X_i, Y_i, S_i, S_{i+1}, A_i, A_{i+1})] + \beta E_{\{Q_{i+1}\}} [B(X_{i+1}, Y_{i+1}, S_{i+1}, S_{i+2}, A_{i+1}, A_{i+2})] + \dots + \beta^{N-1} E_{\{Q_n\}} [B(X_n, Y_n, S_n, A_n, S_{n+1}, A_{n+1})] \quad (3)$$

Que también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \psi_i(S_i, A_i) = & M A X_{\left\{ \begin{array}{l} \{Q_i\} \\ \{X_i, Y_i\} \in \Omega \end{array} \right\}} E [B(X_i, Y_i, S_i, S_{i+1}, A_i, A_{i+1})] + \beta M A X_{\left\{ \begin{array}{l} \{Q_{i+1}\} \\ \{X_{i+1}, \dots, X_n\} \\ \{Y_{i+1}, \dots, Y_n\} \in \Omega \end{array} \right\}} E [B(X_{i+1}, Y_{i+1}, \\ & S_{i+1}, S_{i+2}, A_{i+1}, A_{i+2})] + \dots + \beta^{n-i-1} E_{\left\{ \begin{array}{l} \{Q_n\} \\ \{X_n, Y_n, S_n, S_{n+1}, A_n, A_{n+1}\} \end{array} \right\}} \\ & (4) \end{aligned}$$

Y considerando la definición de  $\psi_i(S_i, A_i)$  se puede escribir:

$$\psi_i(S_i, A_i) = M A X_{\left\{ \begin{array}{l} \{X_i, Y_i\} \in \Omega \end{array} \right\}} E [B(X_i, Y_i, S_i, S_{i+1}, A_{i+1}, A_i)] + \beta \psi_{i+1}(S_{i+1}, A_{i+1}) \quad (5)$$

Se puede observar que  $B^*(S_1, A_1) = \psi_1(S_1, A_1)$  y la expresión (5) es la ecuación recursiva de la Programación Dinámica que permite maximizar  $B^*(S_1, A_1)$ .

Si las variables S, almacenamiento en la presa; A, almacenamiento en el acuífero; Q, entrada anual a la presa; X, extracción anual de la presa y Y, extracción anual del acuífero se discretizan dentro del rango de valores factibles y se hacen las siguientes definiciones:

1) El estado del sistema está dado por el par (S,A), de manera que se tiene un número finito de estados igual al producto del número de valores discretos de S por el número de valores discretos de A; por lo que es posi--



ble asociar un número natural a cada uno de los estados posibles.

2) Una decisión,  $k$ , está dada por el par  $(X,Y)$ , de manera que se tiene un número finito de decisiones posibles, igual al producto del número de valores discretos de  $X$  por el número de valores discretos de  $Y$ .

3) Una política,  $K$ , es una función tal que  $(X,Y) = K(S,A)$ .

El proceso estocástico implícito en la ecuación (5) puede caracterizarse como un Proceso Markoviano Discreto, con un número finito de estados, cuya representación está dada por la matriz:

$$P^{(K)} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_1 & & \kappa_1 \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ \kappa_2 & \kappa_2 & & \kappa_2 \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \kappa_m & \kappa_m & & \kappa_m \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, m$$

$$p_{rs} \geq 0 \quad r, s = 1, 2, \dots, m$$

Donde:

$P^{(K)}$  es la matriz de transición de un paso del Proceso de Markov, bajo la política  $K$ .

•  $p_{rs}^{k_r}$  es la probabilidad de que el sistema pase al estado  $s$  al tiempo  $t=i+1$  dado que en el tiempo  $t=i$  se encuentra en el estado  $r$  y se toma la decisión  $k_r \in K$ .

•  $m$  es el número de estados del proceso.

Si se construye la matriz:

$$b = \begin{bmatrix} b_{11}^{k_1} & b_{12}^{k_2} & \dots & b_{1m}^{k_1} \\ b_{21}^{k_2} & b_{22}^{k_2} & \dots & b_{2m}^{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}^{k_m} & b_{m2}^{k_m} & \dots & b_{mm}^{k_m} \end{bmatrix}$$

Donde:

•  $b_{rs}^{k_r}$  es el beneficio neto esperado en un ciclo agrícola dado que el sistema se encuentra en el estado  $r$  al principio del ciclo, se toma la decisión  $k_r \in K$  y se llega al estado  $s$  al final del ciclo.

La ecuación (5) puede escribirse en la forma:

$$\psi_i(r) = \max_{\substack{k_r \in K \\ k_r \in \Omega}} \left[ \sum_{s=1}^m p_{rs}^{k_r} \left( b_{rs}^{k_r} + \beta \psi_{i+1}(s) \right) \right] \quad \dots (7)$$

La ecuación recursiva dada por (7) permite obtener las políticas óptimas  $k_r$ , para cada uno de los tiempos  $t=1,2,3,\dots,N$ .

Determinación de la matriz  $P^{(K)}$ .

Dado que el rango de la variable  $S$  se encuentra definido por sus valores extremos,  $S_{\min}$  y  $S_{\max}$ , si arbitrariamente, para hacer la discretización de  $S$  se escogen  $L$  valores espaciados  $\Delta S$ .

$$\Delta S = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{L-1}$$

Cualquiera de los  $L$  valores puede escribirse:

$$S^l = S_{\min} + (l-1) \Delta S; \quad l = 1, 2, \dots, L$$

Además se cumple una cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$(l - 1/2) \Delta S < S < (l + 1/2) \Delta S; \quad 1 < l < L$$

$$S > (l - 1/2) \Delta S; \quad l = L$$

$$S < (l + 1/2) \Delta S; \quad l = 1$$

De manera que dado un almacenamiento  $S$ , el valor discreto  $S^l$  que se le asigna es el más cercano con lo que se tiene cubierto todo el rango de  $S$ . En la figura 5 se muestra gráficamente lo anterior.

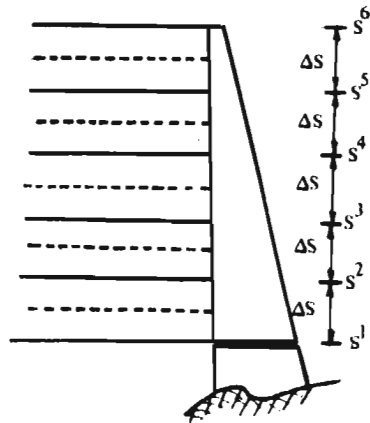


Figura 5.- Discretización de la variable  $S$ .

Dando a la variable  $A$  un tratamiento análogo al anterior pueden definirse  $NA$  valores discretos de  $A$  que cubran todo su rango, así:

$$\Delta A = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{NA - 1}$$

$$A^n = A_{\min} + (n-1) \Delta A; n = 1, 2, \dots, NA.$$

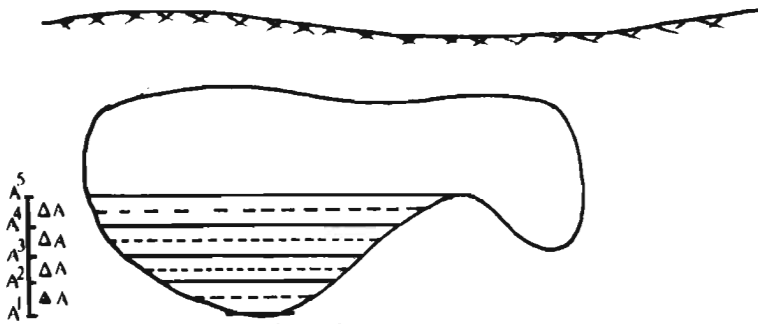


Figura 6.- Discretización de la variable  $A$ .

El número de estados discretos,  $m$ , es igual a  $L \times NA$ .

Si se ordenan los  $m$  estados en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} &S^1, A^1 \\ &S^1, A^2 \\ &S^1, A^3 \\ &\vdots \\ &S^1, A^{NA} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 S^2, A^1 \\
 S^2, A^2 \\
 S^2, A^3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 S^2, A^{NA} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 S^L, A^1 \\
 S^L, A^2 \\
 S^L, A^3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 S^L, A^{NA}
 \end{array}$$

se puede asociar un número  $r$  ( $r = 1, 2, 3, \dots, m$ ) a cada uno de los estados en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 r &= (l - 1) NA + n & l &= 1, 2, \dots, L \\
 & & n &= 1, 2, \dots, NA \\
 & & r &= 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

Discretizando el rango de la extracción superficial  $X$  utilizando un intervalo  $\Delta X = \Delta S$  se tiene:

$$X = \zeta \Delta X ; \zeta = 0, 1, 2, \dots$$

Haciendo lo mismo para la extracción del acuífero  $Y$ ; utilizando  $\Delta Y = \Delta A$ :

$$Y = \tau \Delta Y ; \tau = 0, 1, 2, \dots$$

La variable aleatoria  $Q$ , entradas a la presa, puede discretizarse utilizando un  $\Delta Q = \Delta S$  se tiene:

$$Q = \xi \Delta Q;$$

Donde  $\xi$  es una variable aleatoria discreta con una función de distribución de probabilidades que se aproxima a la de  $Q$ , como puede verse en la figura

7.

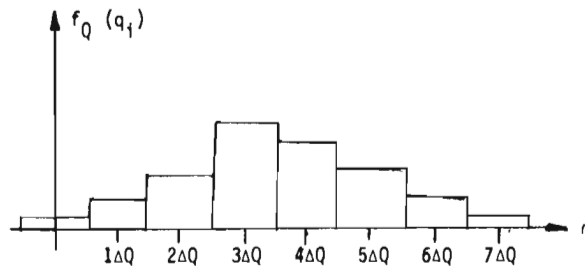
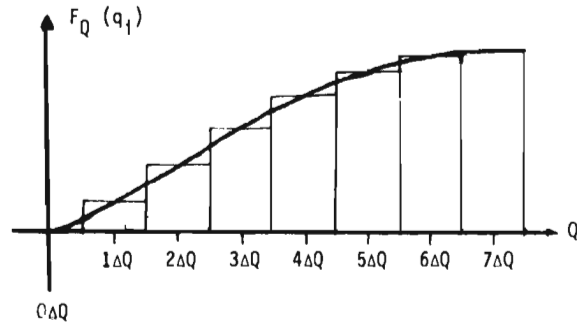


Figura 7.- Discretización de la función de distribución de la variable  $Q$ .

Si el estado del sistema en el tiempo  $t$  es  $r$ , definido por  $l$  y  $n$  tales -

que  $r = (l-1)NA + n$  y se toma la decisión  $k_r \in K = (\xi \Delta X, \tau \Delta Y)$   
 $\{\xi = 0, 1, 2, \dots, \tau = 0, 1, 2, \dots\}$

se tiene, en virtud de las ecuaciones de continuidad para la presa y el acuífero, que la probabilidad de que en el tiempo  $t+1$  el sistema se encuentre en el estado  $s$ , definido por  $l'$  y  $n'$ , tales que,  $s = (l'-1)NA + n'$ , depende del valor que tome la variable aleatoria  $\xi$ , esto es:

$$P_{r_s}^{(kr)} = P_r \left\{ \left[ (l'-1 - 1/2) < \frac{S^l - \xi \Delta X + \xi \Delta Q - Ev(S^l, S^{l'})}{\Delta S} < (l' - 1/2) \right] \cup \left[ A^{n'} = A^n - \tau \Delta Y + R \right] \right\}$$

para  $1 < l' < L$

$$P_{r_s}^{(kr)} = P_r \left\{ \left[ \frac{S^l - \xi \Delta X + \xi \Delta Q - Ev(S^l, S^{l'})}{\Delta S} > (l' - 1/2) \right] \cup \left[ A^{n'} = A^n - \tau \Delta Y + R \right] \right\}$$

para  $l' = L$

$$P_{r_s}^{(kr)} = P_r \left\{ \left[ \frac{S^l - \xi \Delta X + \xi \Delta Q - Ev(S^l, S^{l'})}{\Delta S} < (l' + 1/2) \right] \cup \left[ A^{n'} = A^n - \tau \Delta Y + R \right] \right\}$$

para  $l' = 1$

(8)

La política óptima que resulta de la aplicación del modelo de decisión propuesto descansa sobre un conjunto de hipótesis del cumplimiento de las cuales depende su confiabilidad. Entre esas hipótesis destaca por su importancia la que se refiere al comportamiento del sistema dentro del interva-

lo de un ciclo agrícola, ya que se ha supuesto que la distribución de las entradas a la presa y de la demanda en dicho intervalo no afecta a las probabilidades de transición, calculadas en base anual. Con el objeto de observar el efecto de dicha distribución en el comportamiento del sistema -- se elaboró un modelo de simulación para el sistema Presa-Acuifero-Zona de Riego para simular, bajo condiciones de operación mensual, el comportamiento hidrológico y económico del mismo si se sigue la política anual obtenida del modelo de decisión.

Dicha simulación puede hacerse utilizando el registro histórico de escurrimientos mensuales o muestras sintéticas de los mismos.

El diagrama de bloques del modelo de simulación elaborado se presenta en la figura (8).

Los resultados que se obtienen del modelo son los siguientes:

- 1.- AÑOS CON DEFICIT
- 2.- MONTO ANUAL Y MENSUAL DE LOS DEFICITS
- 3.- BENEFICIO NETO ACUMULADO, EN VALOR PRESENTE, AL FINAL DE -  
CADA AÑO DE OPERACION.
- 4.- BENEFICIO NETO OBTENIDO EN CADA AÑO DE OPERACION.

El análisis de éstos resultados permite retroalimentar el modelo de decisión relajando o imponiendo restricciones, de tal manera que llegue a obtenerse una política anual óptima que sea operacional en la base mensual.

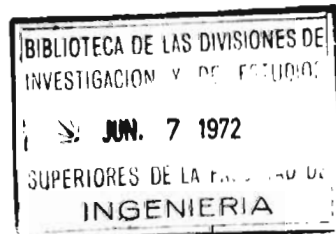
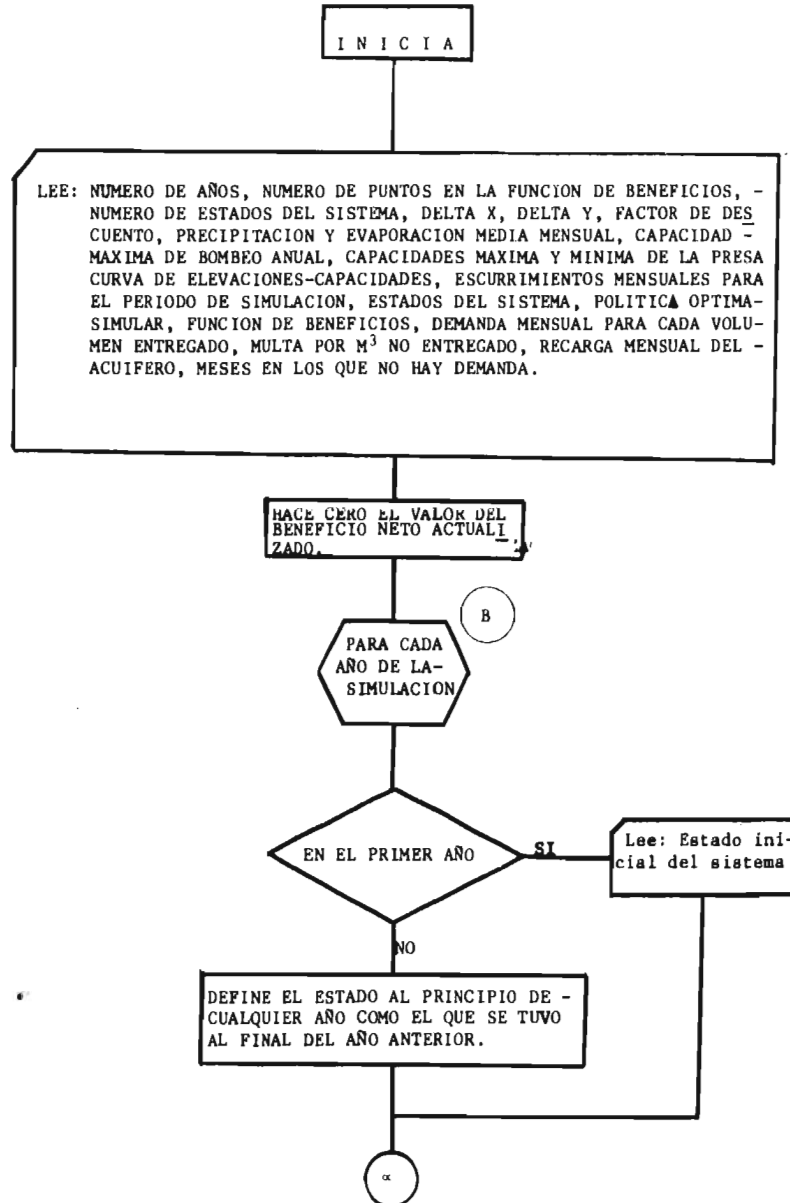
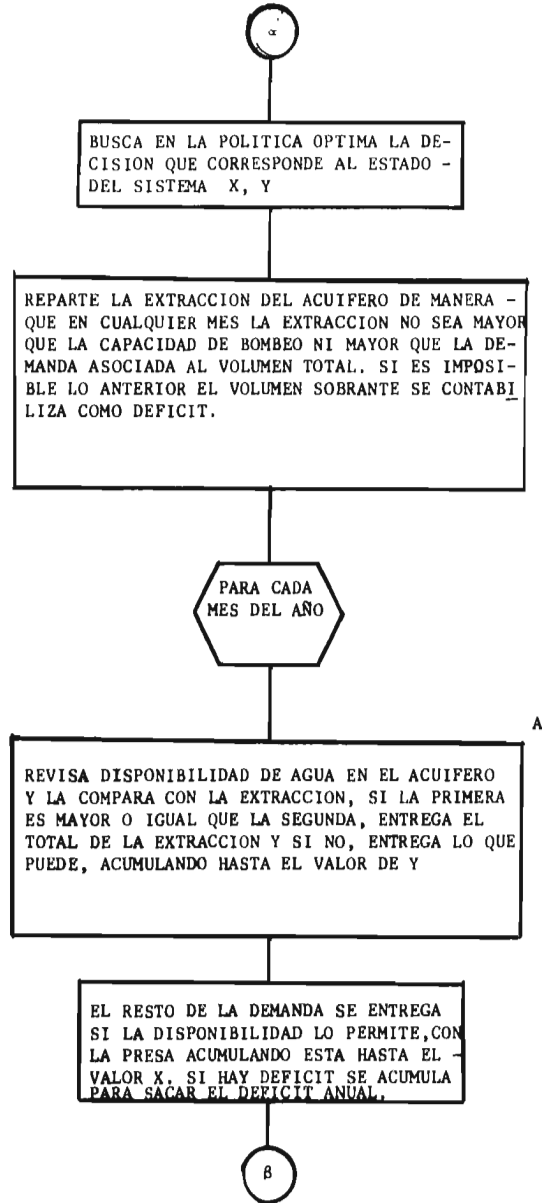




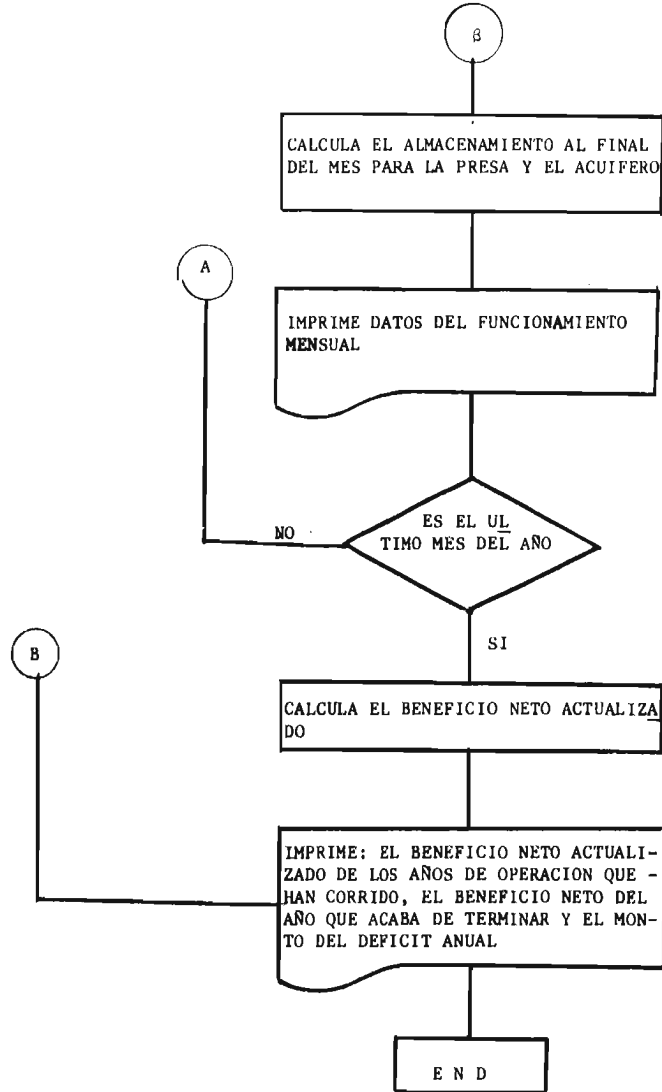
Fig. 8. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL

PROGRAMA SIMULA





A



DETERMINACION DE LA MATRIZ  $b^{(k)}$ 

Para la determinación de los elementos  $b_{kr}$  de la matriz  $b^{(k)}$  se construyó - para la zona de riego, una función de beneficios netos en términos del recurso agua. Dicha función se obtuvo maximizando los beneficios netos obtenidos en un ciclo agrícola, bajo un conjunto de restricciones relativas a - la cantidad de agua, tierra y mano disponibles; así como a la capacidad del sistema de distribución del agua y la capacidad de los medios de comercialización y consumo de los productos.

El modelo empleado para la construcción de la función de beneficios fué uno de Programación Lineal en el cual las restricciones de tierra, mano de obra, capacidad de la red de distribución y las restricciones de mercado se mantuvieron constantes y la restricción de agua disponible se varió en forma paramétrica.

Matemáticamente el modelo puede escribirse:

$$BN(W) = \text{MAX } Z = \sum_{i=1}^{NC} (p_i - c_i) x_i \quad (9)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{NC} a_{ij} x_i \leq cc_j \quad j=1,2,\dots,12 \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{12} a_{ij} x_i \leq W \quad (W \text{ se varia en forma arbitraria}) \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{NC} x_i \leq T \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{NC} l_{ij} x_i \leq Lm_j \quad j=1,1,\dots,12 \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{12} l_{nj} = L \quad (14)$$

$$r_i x_i \leq R_i \quad (15)$$

Donde:

- . BN(W) es el beneficio neto máximo obtenido en un ciclo agrícola, dado - que se ha entregado a la zona de riego un volumen anual de agua W
- .  $p_i$  es el valor de la producción de 1 ha. del cultivo i
- .  $c_i$  es el costo de la producción de 1 ha. del cultivo i
- .  $x_i$  es el número de ha. en que se desarrolla el cultivo i
- . NC es el número de cultivos factibles en la zona
- . W es el volumen anual disponible
- .  $a_{ij}$  es la demanda de agua por ha. del cultivo i en el mes j
- .  $cc_j$  es la capacidad mensual de los canales de distribución
- . T es la superficie total de tierra disponible
- .  $lm_{ij}$  es la mano de obra necesaria, por ha. del cultivo i, en el mes j

- .  $L$  es la mano de obra total disponible en un ciclo agrícola
- .  $r_i$  es el rendimiento por ha. de cultivo  $i$
- .  $R_i$  es la restricción que impone al cultivo  $i$ , el tamaño del mercado de la zona, la capacidad de proceso de productos y capacidad de almacenamiento.
- .  $L_{mj}$  es la mano de obra disponible en el mes  $j$ .

La ecuación (9) expresa que el objetivo del modelo es hacer máximo el beneficio neto derivado del Distrito de Riego en un ciclo agrícola.

La ecuación (10) establece que la demanda mensual de agua no debe exceder la capacidad de los canales de distribución .

La ecuación (11) obliga a que la demanda anual de agua debe ser menor o igual a la cantidad total disponible,  $W$ .

La restricción dada por (12) expresa que la tierra empleada para cultivos debe ser menor o igual al área total disponible.

En las ecuaciones (13) y(14) se establece que la cantidad de mano de obra empleada no debe exceder la disponibilidad mensual y anual de la misma.

En la ecuación (15) expresa las restricciones de producción, impuestas por condiciones de carácter económico, tales como la capacidad de proceso, capacidad de almacenes, tamaño del mercado, etc.

Cabe aclarar que en los costos  $c_i$  no se consideró el costo de bombeo del acuffero, ya que este depende del volumen que se extrae y de la profundidad de bombeo. La inclusión de este costo se discute más adelante.

La aplicación de este modelo de optimización, para cada valor de  $W$  seleccionado, proporciona el plan óptimo de cultivos ( $x_i$ ,  $i = 1, NC$ ) y el beneficio neto máximo  $BN(W)$  correspondiente.

Graficando los volúmenes  $W$  considerados contra los beneficios netos  $BN(W)$  se obtiene una curva como la 1 de la Fig. 9, que cumple con la ley de los rendimientos decrecientes, cuya pendiente valuada en cualquier punto proporciona el beneficio neto marginal del agua en el Distrito de Riego, para el volumen  $W$  correspondiente.

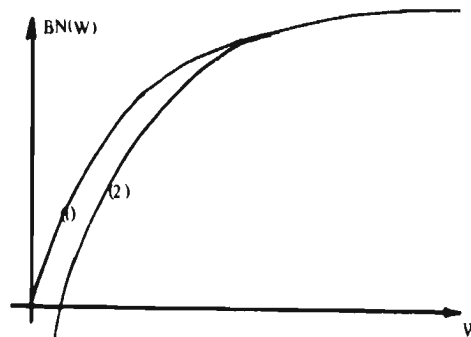


Fig. Número 9.- Función de Beneficios obtenida del modelo de Programación Lineal

La función de beneficios que se obtiene de esta manera parte de cero puesto que en el modelo de Programación Lineal no se incluyen los costos sociales que implica el entregar pequeños volúmenes anuales de agua, que de incluirse, darían una curva como la (2) de la Fig. 9.

En el modelo de asignación intertemporal del agua, objeto de este trabajo - se considera lo anterior mediante la restricción (g) bajo la hipótesis de

que el entregar un volumen de agua inferior al mínimo tiene un costo social muy elevado.

A partir de la función de beneficios netos,  $BN(W)$ , los elementos de la matriz  $b(k)$  se determinaron como sigue:

- A) Se supuso que si el almacenamiento de la presa al final del ciclo es mayor que  $S_{min}$ , la cantidad de agua prometida de la presa,  $X$ , pudo ser entregada por lo que:

$$\begin{aligned} [kr = (x+y)] \\ b_{rs} &= BN(X+Y) - CB(Y,n); s > NA \end{aligned} \quad (16)$$

- B) En caso de que el almacenamiento en la presa al final del ciclo sea igual a  $S_{min}$ , existe la posibilidad de déficits en la entrega de la cantidad prometida  $X$ , por lo que  $b_{rs}^{kr}$  debe calcularse como un valor esperado, esto es:

$$\begin{aligned} [kr = X+Y] \\ b_{rs} &= EB(W) - CB(Y,n); s < NA \end{aligned} \quad (17)$$

Donde:

- $CB(Y,n)$  es el costo de bombear  $Y$  unidades de agua del acuífero desde el nivel dado por  $n$ .

$$\begin{aligned} \cdot EB(W) &= \frac{\sum [P_r \{Q=Q_\lambda\} \left| \frac{S-X-Ev+Q_\lambda}{\Delta S} \leq 1^{1/2} \right\}] [BN(W-W_r) - c(W, W_r)]}{\sum [P_r \{Q=Q_\lambda\} \left| \frac{S-X-Ev+Q_\lambda}{\Delta S} \leq 1^{1/2} \right\}]} \end{aligned} \quad (18)$$



.  $W_p$  es el volumen real entregado.

En la ecuación (18) se considera que el hecho de no entregar toda el agua - prometida implica perder no sólo lo que no se gana,  $BN(W) - BN(W_p)$ , sino que además se pierde parte de la inversión realizada  $C(W, W_p)$ , expresada ésta - pérdida en función del déficit anual.

En las expresiones anteriores se consideró como única fuente de déficits al almacenamiento superficial, dado que se ha supuesto perfecto conocimiento de la recarga y del acuífero y puede establecerse dentro del modelo que la extracción  $Y$  del acuífero nunca sea mayor que el volumen almacenado más la recarga.

## CAPITULO III

## ALGORITMO DE OPTIMIZACION

La ecuación recursiva

$$v_i(r) = \text{MAX} \left[ \sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} (b_{rs}^{kr} + \beta v_{i+1}(s)) \right] \quad (7)$$

$kr \in K$   $i = 1, \dots, N$   
 $K \in \Omega$   $r = 1, \dots, m$

puede escribirse en la forma:

$$v_i(r) = \text{MAX} \left[ \sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} b_{rs}^{kr} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} v_{i+1}(s) \right]$$

$kr \in K$   
 $K \in \Omega$

y definiendo:

$$q_r^{kr} = \sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} b_{rs}^{kr}$$

queda:

$$v_i(r) = \text{MAX} \left[ q_r^{kr} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} v_{i+1}(s) \right] \quad (19)$$

$kr \in K$   $i = 1, \dots, N$   
 $K \in \Omega$   $r = 1, \dots, m$

La cantidad  $q_r^{kr}$  es el beneficio esperado en la próxima transición, dado que el sistema está en el estado  $r$  y se toma la decisión  $kr$ .

La aplicación de la ecuación recursiva (19) para determinar las decisiones óptimas correspondiente a cada uno de los estados  $r$  ( $r=1, \dots, m$ ) en el año  $i$  ( $i=1, \dots, N$ ), requiere especificar el valor de  $\psi_N(r)$  ( $r=1, \dots, m$ ). Hecho esto, basta seguir la ecuación (19) desde el año  $N$  hasta el año 1 para determinar las políticas óptimas  $K$  e  $\alpha$  para cada uno de los años  $i=1, 2, \dots, N$ .

Howard<sup>5</sup> ha desarrollado un algoritmo denominado "Método de Iteración de Políticas" que permite resolver la ecuación (19) de manera más eficiente cuando  $N$  es grande.

En seguida se describe brevemente el fundamento teórico del algoritmo mencionado:

Definiendo:

$$\bar{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ q_m \end{Bmatrix} \quad \bar{\psi}_i = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \psi_m \end{Bmatrix}$$

puede escribirse la ecuación (19) como:

$$\bar{\psi}_i = \bar{q} + \beta P \bar{\psi}_{i+1} \quad - - \quad (20)$$

donde se han suprimido los super-índices  $K$  y  $kr$ .

Si el orden de numeración de los años se invierte, la ecuación (20) queda:

$$\bar{\psi}_{i+1} = \bar{q} + \beta P \bar{\psi}_i \quad - - (21)$$

Definiendo a  $\bar{\psi}(Z)$  como la transformada  $Z$  del vector  $\bar{\psi}_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) - se puede escribir la transformada  $Z$  de la ecuación (21) como:

$$Z^{-1} [\bar{\psi}(Z) - \bar{\psi}(0)] = \frac{1}{1-Z} \bar{q} + \beta P \bar{\psi}(Z)$$

y operando:

$$\bar{\psi}(Z) - \bar{\psi}(0) = \frac{Z}{1-Z} \bar{q} + \beta Z P \bar{\psi}(Z)$$

$$(I - \beta Z P) \bar{\psi}(Z) = \frac{Z}{1-Z} \bar{q} + \bar{\psi}(0)$$

$$\bar{\psi}(Z) = \frac{Z}{1-Z} (I - \beta Z P)^{-1} \bar{q} + (I - \beta Z P)^{-1} \bar{\psi}(0) \quad - - (22)$$

La ecuación (22) proporciona la transformada  $Z$  de  $\bar{\psi}_i$ , a partir de ella es posible obtener una expresión cerrada para  $\bar{\psi}_i$ , de manera que no es necesario recurrir para ello a la ecuación recursiva (19).

Howard<sup>5</sup> demuestra que  $(I - \beta Z P)^{-1}$  puede escribirse en la forma  $1/(1 - \beta Z) \bar{\xi} + F(Z)$ , donde  $\bar{\xi}$  es la matriz de probabilidades límite del proceso de Markov y  $F(Z)$  es una matriz cuyos componentes tienden a cero si  $N$  es grande. Por tanto  $(I - \beta Z P)^{-1}$  puede escribirse:

$$(I - \beta Z P)^{-1} = \frac{1}{1 - \beta Z} \bar{\xi} + F_{(\beta Z)} \quad - - (23)$$

donde  $F(\beta Z)$  denota componentes que tienden a cero cuando  $N$  es grande.

Substituyendo (23) en (22)

$$\bar{\psi}(Z) = \frac{Z}{1-Z} \left[ \frac{1}{1-\beta Z} \bar{s} + F(\beta Z) \right] \bar{q} + \left[ \frac{1}{1-\beta Z} \bar{s} + F(\beta Z) \right] \bar{\psi}(0)$$

- - (24)

cuando  $N$  es grande

$$\bar{\psi}(Z) = \frac{Z}{(1-Z)} \left[ \frac{1}{1-\beta} \bar{s} + F(\beta) \right] \bar{q}$$

y antitransformando:

$$\bar{\psi}_1 = \left[ \frac{1}{1-\beta} \bar{s} + F(\beta) \right] \bar{q} = (I - \beta P)^{-1} \bar{q}$$

y por lo tanto para  $N$  grande  $\bar{\psi}_1$  tiende a un límite  $\bar{\psi} = (I - \beta P)^{-1} \bar{q}$

- - (25)

El vector  $\bar{\psi}$  puede denominarse vector de valores presentes, dado que cada uno de sus elementos  $\psi(r)$ ,  $r = 1, 2, \dots, m$  es el valor presente de un número -- infinito de beneficios futuro; descontados por el factor  $\beta$ , obtenidos bajo una política dada.

El desarrollo anterior permite establecer el Método de Iteración de Políticas como sigue:

PASO:1: Determinación del vector de valores presentes.

Puesto que el interés se ha enfocado en un proceso de decisión para  $N$  grande, pueden substituirse en la ecuación (19) los valores límite  $\psi(r)$ , ( $r = 1, 2, \dots, m$ ), por las cantidades  $\psi_i(r)$ ,  $r = 1, 2, \dots, m$ , lo que permite escribir -- las ecuaciones:

$$\psi(r) = q_r^{kr} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} \psi(s) \quad - - (26)$$

de manera que dadas  $kr \in K$  y por lo tanto  $q_r^{kr}$  y  $p_{rs}^{kr}$ , es posible determinar  $\psi(r)$  resolviendo el sistema de ecuaciones (26).

PASO 2: Rutina para el mejoramiento de políticas.

La política óptima es aquella que proporciona el mayor valor presente en todos los estados  $r$ , esto es, se busca  $K = K^*$  tal que, de acuerdo con la ecuación (19) haga máximo a:

$$\psi_i(r) = q_r^{kr} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} \psi_{i+1}(s) \quad - - - (27)$$

$$r = 1, 2, \dots, m.$$

con respecto a todas las decisiones alternativas  $kr$  en el estado  $r$ .

Puesto que se está tratando con un proceso con un gran número de etapas de decisión ( $N$  es grande), puede substituirse  $\psi(r)$  por  $\psi_i(r)$  en (27). De tal manera que ahora debe maximizarse a:

$$q_r^{kr} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} \psi(s)$$

con respecto a todas las alternativas  $kr$  en el estado  $r$ .

Si se conocen los valores presentes  $\psi(r)$ ,  $r=1, \dots, m$ , para una política cualquiera, entonces una política al menos tan buena como ésta, esto es, con valores presentes al menos tan altos, puede ser determinada mediante el procedimiento siguiente:

Para cada  $r$ , encuéntrase la alternativa  $kr$  que hace máximo a:

$$q_r^{kr} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{kr} \psi(s)$$

utilizando los valores  $\psi(s)$  de la política original. Esta  $kr$  viene a ser la nueva decisión para el estado  $r$ . Al terminar el proceso se tiene una nueva política  $K$ .

La rutina de mejoramiento de políticas puede combinarse con la determinación del vector de valores presentes en el ciclo de interacción mostrado en la figura 10.

El proceso termina cuando las políticas obtenidas en dos ciclos sucesivos -- son iguales.

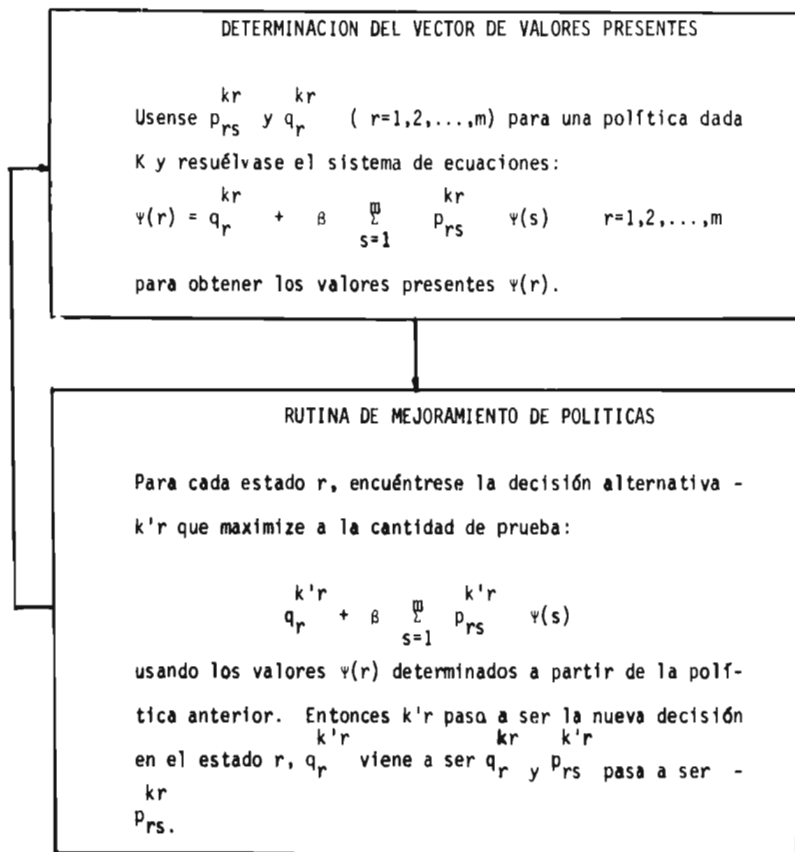


Figura 10.- Ciclo iterativo para un proceso Markoviano de decisión con descuento.

En seguida se demuestra que en cada iteración se obtiene al menos una política de igual valor presente, a la anterior y además que el proceso ter --



mina cuando en dos pasos sucesivos se obtienen las mismas políticas.

Considérese una política  $\bar{A}$  y a sucesora  $\bar{B}$  producida por la rutina de mejoramiento de políticas. Puesto que  $\bar{B}$  ha sido generada por  $\bar{A}$  se cumple:

$$q_r^{\bar{B}} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{B}} \psi_s^{\bar{A}} \geq q_r^{\bar{A}} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{A}} \psi_s^{\bar{A}} \quad - - (28)$$

para todos los estados  $r=1,2,\dots,m$ .

Además se tiene que para  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  tomadas individualmente:

$$\psi_r^{\bar{A}} = q_r^{\bar{A}} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{A}} \psi_s^{\bar{A}} \quad - - (29)$$

$$\psi_r^{\bar{B}} = q_r^{\bar{B}} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{B}} \psi_s^{\bar{B}} \quad - - (30)$$

$$r = 1, 2, \dots, m.$$

Definiendo

$$\gamma_r = q_r^{\bar{B}} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{B}} \psi_s^{\bar{A}} - q_r^{\bar{A}} - \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{A}} \psi_s^{\bar{A}}$$

donde  $\gamma_r$  es el mejoramiento que la rutina de mejoramiento de políticas --  
logró en el valor de la "cantidad de prueba" para el estado  $r$ . Por la --  
ecuación (28) se tiene .

Restando (29) de (30):

$$\psi_r^{\bar{B}} - \psi_r^{\bar{A}} = q_r^{\bar{B}} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{B}} \psi_s^{\bar{B}} - q_r^{\bar{A}} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{A}} \psi_s^{\bar{A}}$$

$$= \gamma_r - \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\beta} \psi_{(s)}^{\bar{A}} + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{A}} \psi_{(s)}^{\bar{A}} - \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\bar{A}} \psi_{(s)}^{\bar{A}} + \\ \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\beta} \psi_{(s)}^{\beta}.$$

Definiendo  $\psi_r^{\Delta} = \psi_{(r)}^{\beta} - \psi_{(r)}^{\bar{A}}$ :

$$\psi_{(r)}^{\Delta} = \gamma_r + \beta \sum_{s=1}^m p_{rs}^{\beta} \psi_{(s)}^{\Delta} \quad - - (31)$$

$$r = 1, 2, \dots, m$$

Donde  $\psi_{(r)}^{\Delta}$  es el incremento en los valores presentes proporcionados por la rutina de mejoramiento de políticas.

Resolviendo el sistema de ecuaciones (31) para  $\psi_{(r)}^{\Delta}$ :

$$\psi^{\Delta} = [I - \beta P^{\beta}]^{-1} \gamma$$

donde  $\psi^{\Delta}$  y  $\gamma$  son dos vectores de componentes  $\psi_{(r)}^{\Delta}$  y  $\gamma_r$ , respectivamente.

La matriz  $[I - \beta P]^{\beta}$  no tiene elementos negativos<sup>5</sup> y tiene valores de -- por lo menos 1 en la diagonal principal. Entonces, si alguna  $\gamma_r > 0$  al menos una  $\psi_{(r)}^{\Delta}$  debe ser mayor que cero y ninguna  $\psi_{(r)}^{\Delta}$  puede ser menor -- que cero. Por lo tanto, la rutina de mejoramiento de políticas debe incrementar el valor presente de al menos uno de los estados y no puede disminuir el valor presente de ninguno.

También se vé que no es posible que la rutina converja en la política  $\bar{A}$  si la política  $\bar{B}$  produce valores presentes más altos en cualquier estado puesto que, si la rutina converge en  $\bar{A}$  todos los  $\gamma(r) \leq 0$  y, por tanto, todos  $v_{(r)}^A \leq 0$ . Se tiene entonces que cuando la rutina de mejoramiento de políticas converge en una política, ninguna otra puede proporcionar mayores valores presentes.

Se asentó en la introducción a este trabajo que es de particular interés - el conocimiento de la probabilidad de tener un volumen cualquiera almacenado en la presa y en el acuífero. Este problema se abordó aprovechando la - caracterización del problema como un proceso de decisión estocástico markoviano.

La matriz  $P$  es la matriz de transición de un paso del proceso estocástico - markoviano y por el Teorema de Chapman-Kolmogorov, la matriz de transición - de  $n$  pasos puede obtenerse como:

$$P^{(n)} = P^n$$

Si se define a  $\pi_r(n)$   $r = 1, 2, \dots, N$  como la probabilidad de que el sistema ocupe el estado  $r$  después de  $n$  transiciones, dado que su estado en  $n = 0$  es conocido, puede escribirse:

$$\sum_{r=1}^N \pi_r(n) = 1$$

$$\pi_s(n+1) = \sum_{r=1}^N \pi_r(n) p_{rs} \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, \dots, N \\ N = \text{número de estados} \end{array}$$

Si se define un vector renglón de probabilidades de estado  $\pi(n)$  con componentes  $\pi_r(n)$ , entonces

$$\pi(n+1) = \pi(n) P \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Puesto que recursivamente:

$$\begin{aligned} \pi(1) &= \pi(0) P \\ \pi(2) &= \pi(1) P = \pi(0) P^2 \\ \pi(3) &= \pi(2) P = \pi(0) P^3 \end{aligned}$$

y en general se tiene

$$\pi(n) = \pi(0) P^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (32)$$

De manera que la probabilidad de tener un almacenamiento cualquiera en la presa y en el acuífero después de  $n$  años queda determinada por el vector  $\pi(n)$ .

El análisis de la ecuación 32 mediante la transformada  $Z^s$  permite conocer su comportamiento para valores grandes de  $n$ . Procediendo se tiene:

$$\begin{aligned} \pi(n+1) &= \pi(n) P \\ Z^{-1} \left[ \pi(Z) - \pi(0) \right] &= \pi(Z) P \\ \pi(Z) - Z \pi(Z) P &= \pi(0) \\ \pi(Z) &= \pi(0) (1 - ZP)^{-1} \end{aligned}$$

La antitransformada de la última ecuación es de la forma:

$$\pi(n) = \pi(0) H(n) \quad - (33)$$

donde  $H(n)$  es la antitransformada de  $(1 - ZP)^{-1}$

La comparación de las ecuaciones (32) y (33) permite establecer  $H(n) = P^n$

como una manera de calcular la enésima potencia de la matriz P en forma cerrada.

Howard<sup>5</sup> demuestra que  $H(n)$  es tal que siempre cuenta entre sus componentes con al menos una matriz estocástica y que cuando el proceso es completamente ergódico, entonces hay exactamente una matriz estocástica cuyos renglones son todos iguales y contienen el vector de probabilidades límite de estado, siendo ésta independiente de  $n$ . Esta matriz es la componente estacionaria del proceso.

Los términos restantes de  $H(n)$  representan el comportamiento transitorio del proceso.

Los términos restantes de  $H(n)$  representan el comportamiento transitorio del proceso. Estos son matrices multiplicadas por coeficientes de la forma  $a^n, na^n, n^2 a^n$ , donde  $|a| < 1$ . Estas componentes de  $H(n)$  tienden a cero cuando  $n$  es muy grande. Los elementos de los renglones de dichas matrices suman cero y por ello se les denomina matrices diferenciales.

Puede escribirse entonces:

$$H(n) = \bar{S} + T(n)$$

Donde:

$\bar{S}$  es la matriz estocástica que contiene las probabilidades límites de estado del proceso y

$T(n)$  es la suma de un cierto número de matrices diferenciales multiplicadas por coeficientes geométricos que tienden a cero cuando  $n$  es muy grande.

Si se designa con  $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N\}$  al vector de probabilidades Límite de estado:

$$\pi = \pi(0) \mathfrak{S}$$

$$\pi_s = \sum_{r=1}^N \pi_r(0) \mathfrak{S}_{rs}$$

puesto que  $\mathfrak{S}$  tiene todos sus renglones iguales, cada elemento  $\mathfrak{S}_{rs}$  es igual a un valor  $\bar{\mathfrak{S}}_s$  que depende sólo del índice de columnas y se tiene:

$$\pi_s = \sum_{r=1}^N \pi_r(0) \bar{\mathfrak{S}}_s$$

$$\pi_s = \bar{\mathfrak{S}}_s \sum_{r=1}^N \pi_r(0) = \bar{\mathfrak{S}}_s \quad \text{-- (34)}$$

De manera que un proceso de Markov completamente ergódico tiene un vector de probabilidades Límite de estado que es independiente de  $\pi(0)$ . Además la ecuación 34 muestra que dicho vector es precisamente uno de los renglones de  $\mathfrak{S}$ .

Para calcular el vector  $\pi$  no hace falta elevar  $P$  a mayores y mayores potencias puesto que para el vector de probabilidades Límite debe cumplirse la ecuación

$$\pi = \pi P$$

que implica las  $N$  ecuaciones simultáneas de primer grado:

$$\pi_s = \sum_{r=1}^N \pi_r P_{rs} \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (35)$$

Este sistema de ecuaciones conduce a la identidad  $1=1$ , y por tanto las ecuaciones son linealmente dependientes. Para obtener un valor único para cada  $\pi_s$  se debe adicionar al sistema la ecuación.

$$\sum_{r=1}^N \pi_r = 1 \quad (36)$$

Las ecuaciones 35 y 36 permiten determinar la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado cualquiera después de un gran número de transiciones y por lo tanto proporcionan la probabilidad de un almacenamiento cualquiera en la presa y en el acuífero si se sigue la política de operación que da origen a la matriz P.



## CAPITULO IV

## IMPLEMENTACION DE LA METODOLOGIA

La metodología presentada en los capítulos anteriores puede aplicarse al proceso de diseño de aprovechamientos agrícolas ya que el tomar en cuenta la operación óptima de diseños alternativos proporciona información valiosa en la toma de la decisión de la escala del proyecto. Así mismo, la aplicación de ésta metodología a sistemas de aprovechamiento en operación permite la revisión y mejora, en su caso, de las políticas de operación que se siguen.

En éste capítulo se presenta la implementación del modelo de decisión expuesto al Distrito de Riego de la Comarca Lagunera, en el Norte de la República Mexicana.

En éste distrito se aprovechan las aguas provenientes de un almacenamiento superficial, la presa Lázaro Cárdenas sobre el río Nazas, y las provenientes de la explotación de un acuífero.

Un esquema del distrito de riego de la Comarca Lagunera se muestra en la fig. 11

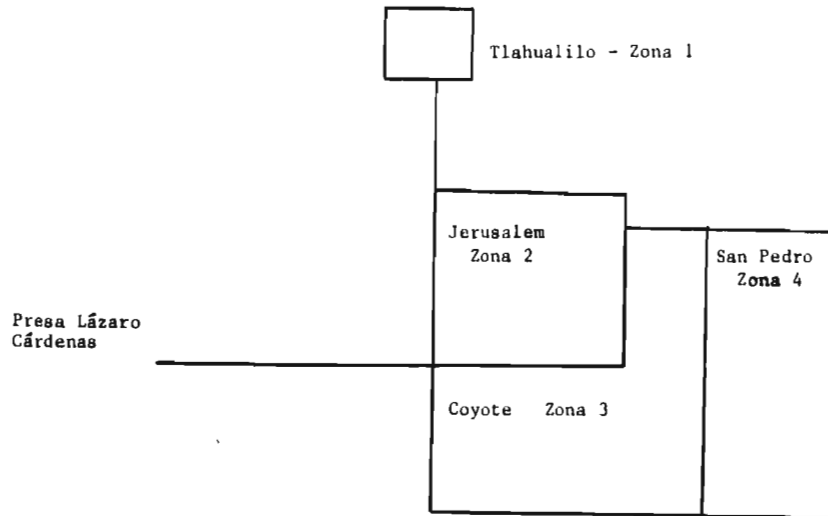


Fig. No. 11.- ESQUEMA DEL DISTRITO DE RIEGO DE LA COMARCA LAGUNERA

En lo que sigue se expone la manera en que se determinaron los datos necesarios para la implementación del modelo.

#### CARACTERISTICAS FISICAS DE LA PRESA

CAPACIDAD MAXIMA =  $3\ 200 \times 10^6 \text{ M}^3$

CAPACIDAD MINIMA =  $200 \times 10^6 \text{ M}^3$

## CARACTERISTICAS FISICAS DEL ACUIFERO

Dada la falta de datos relativos a la potencialidad del acuífero y al monto de su recarga anual fué preciso tomar la decisión de considerarlos como parámetros y observar los resultados que arrojará el modelo para diferentes valores asignados a dichos parámetros.

Debido a lo costoso que hubiera resultado el obtener soluciones del modelo para varios valores de éstos parámetros y dado que lo que aquí se pretende es presentar una metodología y hacer ver que es posible implementarla y obtener resultados, en los que se presenta se trabajó con los siguientes valores:

$$\text{CAPACIDAD MAXIMA} = 1\ 000 \times 10^6 \text{ M}^3$$

$$\text{CAPACIDAD MINIMA} = 200 \times 10^6 \text{ M}^3$$

$$\text{RECARGA ANUAL} = 200 \times 10^6 \text{ M}^3$$

Es claro que las soluciones que pueden obtenerse variando el valor de los parámetros presentarán diferencias que valuadas en pesos proporcionarán el valor que tiene la información relativa a ellos y de la que no se dispone hasta el momento.

## CAPACIDAD DE BOMBEO.

Se consideró una capacidad de bombeo anual de  $600 \times 10^6 \text{ m}^3$

#### CARACTERISTICAS HIDROLOGICAS.

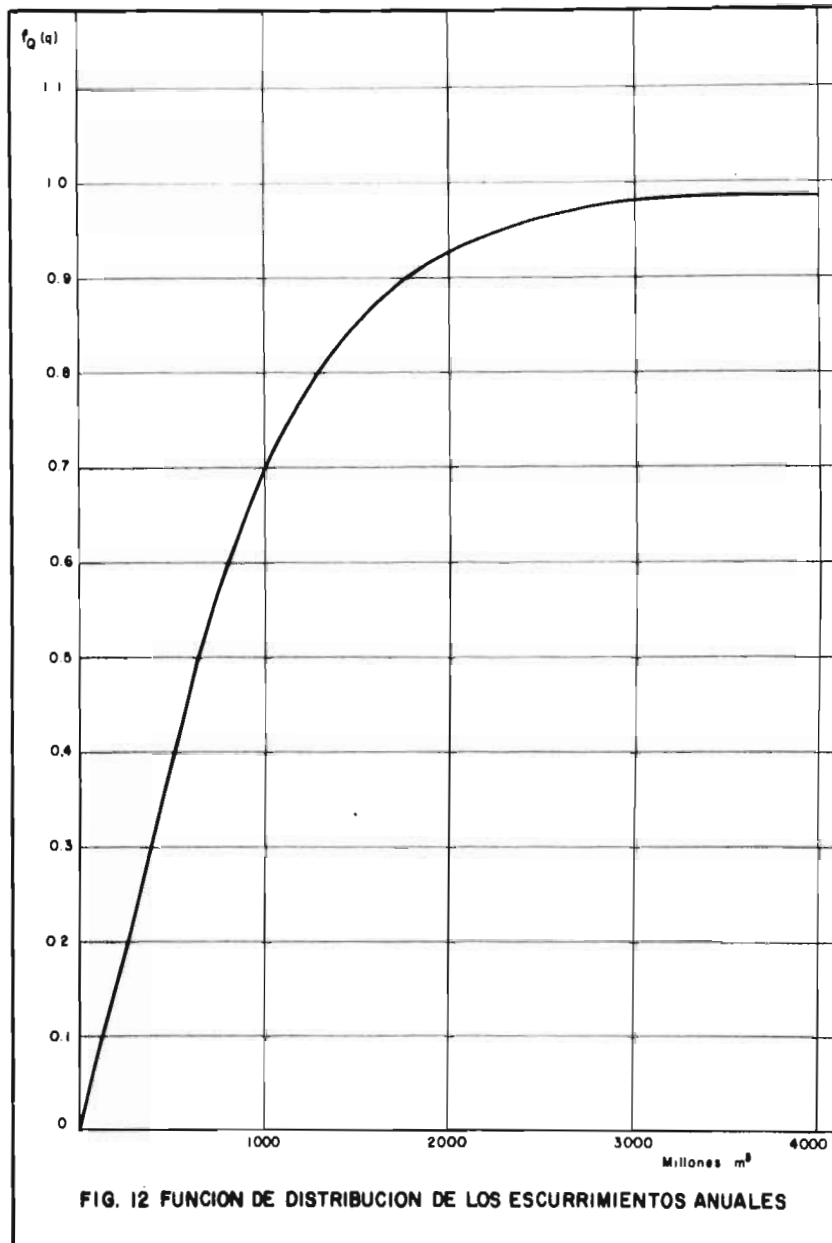
La Secretaría de Recursos Hidráulicos publica anualmente el Boletín Hidrológico # 6, en el que se proporciona información sobre aportaciones, evaporaciones y precipitación pluvial en la presa Lázaro Cárdenas, con esta información fué posible estimar la Función de Distribución de probabilidades de las aportaciones anuales a la presa. En la fig. 12 se presenta el ajuste de una función  $F$  de parámetros  $\alpha = 168$  y  $\beta = 620.47$  a dicha Función de Distribución, así mismo, se estimó que la evaporación - media anual de la presa en términos de almacenamiento medio anual en la misma es de 11.6%.

Los valores medios mensuales de precipitación se presentan en la Tabla # 1.

#### LA FUNCION DE BENEFICIOS BN(W).

El modelo de Programación Lineal empleado se describe en seguida; si el lector desea analizar en detalle la formulación e implementación del modelo deberá consultar los trabajos de Ronald G. Cummins<sup>6</sup> y Ana Rosa Peiró<sup>3</sup>.

La comarca Lagunera se consideró dividida en 4 zonas fig. 11 , defini



das de tal manera que se tuviera, en cada una de ellas, homogeneidad con respecto a las pérdidas de agua. En cada zona se consideraron siete actividades de uso de agua, que se enumeran a continuación:

- 1.- Algodón con nivel de uso de agua 1
- 2.- Algodón con nivel de uso de agua 2
- 3.- Algodón con nivel de uso de agua 3
- 4.- Algodón con nivel de uso de agua 4
- 5.- Alfalfa
- 6.- Maíz
- 7.- Vid

El modelo planteado fué el siguiente:

$$\text{M A X } BN(W) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^7 p_{ij} X_{ij} - P_i - \sum_{s=1}^4 L^s$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^7 X_{ij} \leq \bar{X} + P_i \quad i = 1, 2, \dots, 4$$

$$P_i \leq NP: \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^7 m_{ij}^r X_{ij} \leq F L^r + L^r \quad r = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^7 b_{ij}^a X_{ij} \leq C C^a \quad a = 1, 2, \dots, 12$$

$$\sum_{a=1}^{12} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^7 b_{ij}^a X_{ij} \leq W$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^7 Y_j X_{ij} \leq R$$

Donde:

$x_{ij}$ , $i, j = 1, 2, 3, 4$	Ha. de algodón $j$ en zona $i$
$x_{i5}$	Ha. de maiz en zona $i$
$x_{i6}$	Ha. de alfalfa en zona $i$
$x_{i7}$	Ha. de vid en zona $i$
$p_i$	número de Ha. niveladas y preparadas para irrigación, actualmente no utilizadas.
$\pi_j$	ingreso neto por Ha.
$\alpha$	costo por Ha. de preparación de tierra.
	costo mano de obra asalariada.
$L^s$ , $s=1,2,3,4$	mano de obra asalariada disponible en el periodo $s$
$\bar{x}$	tierra preparada disponible actualmente
$m_j^r$	horas de trabajo por Ha. requeridas en el periodo $r$
$FL^r$ , $r=1,2,3,4$	mano de obra familiar disponible en el periodo $r$ .
$b_{ij}^a$ , $a=1, \dots, 12$	volumen de agua requerido por Ha. de cultivo $j$ en la zona $i$ , en el periodo $a$
$C C^a$	capacidad de canales
$W$	agua total disponible
$R$	restricción de mercado para el algodón,
$Y_j$ , $j = 1,4$	rendimiento por Ha. de algodón al nivel de uso de agua $j$

El modelo anterior se resolvió para los valores de  $W$  que se muestran en la tabla # 2, juntamente con las  $BN(W)$  correspondientes.

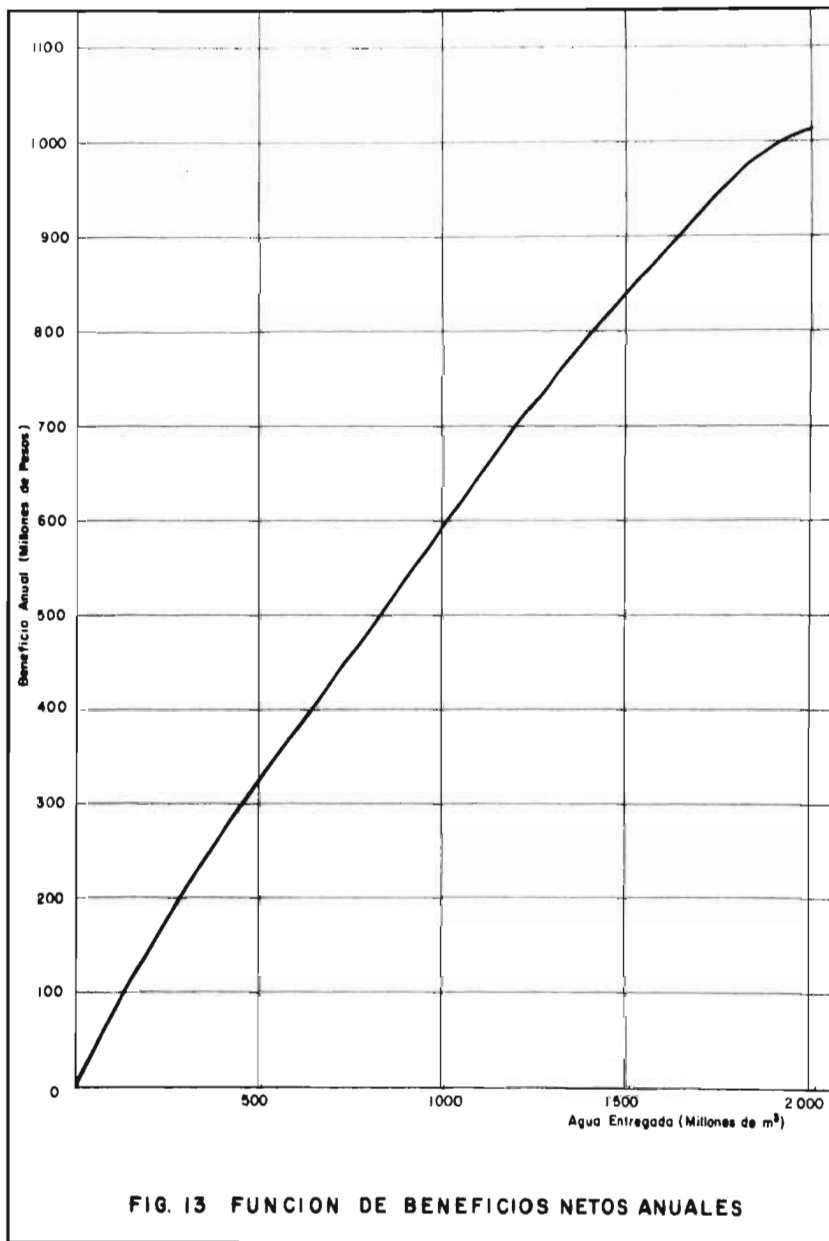
En la fig. 13 se presenta gráficamente la Función de Beneficios.

Cabe aclarar aquí que se está conciente de las siguientes debilidades -- del modelo empleado:

- 1) Considera precios y costos constantes.
- 2) No considera más que 4 puntos de la función de producción del algodón y una sólo de las demás.
- 3) No considera las restricciones de tipo institucional en la elaboración de los planes de cultivo.
- 4) No considera las restricciones que el hábito social impone en la elaboración de los planes de cultivo.

Por lo anterior se tiene que para obtener resultados utilizables deben -- tomarse en cuenta los juicios de personas que conozcan las condiciones -- socioeconómicas de la región, los cuales presentan dificultades para ser introducidos al modelo.





MES	E	F	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
Precipitación (mm)	5.69	1.81	2.83	2.66	6.59	38.05	78.12	87.14	76.64	27.50	2.98	4.78
Evaporación (mm)	152.06	187.06	292.97	323.97	352.48	312.45	243.50	223.01	189.20	177.97	157.20	136.84

TABLA # 1.- Precipitaciones y evaporaciones medias mensuales  
en la presa LAZARO CARDENAS.

## DISCRETIZACION DE LAS VARIABLES:

Para la discretización de las variables necesaria para la implementación - del modelo de Programación Dinámica se escogió como módulo de espaciamiento entre los valores discretos el siguiente:

$$\Delta S = \Delta A = \Delta X = \Delta Y = \Delta Q = 200 \times 10^6 \text{ M}^3$$

con lo que se generaron, dadas las características físicas de la presa y el acuffero, 16 niveles posibles en la presa y 6 en el acuffero y, por lo tanto 96 estados (S.A.).

FACTOR DE DESCUENTO  $\beta$ 

En este trabajo se utilizó un factor de descuento,  $\beta$ , igual a 0.9, esto es, una tasa de descuento de 11%.

## COSTOS DE BOMBEO CB (Y,n)

Los costos de bombeo se consideraron constantes e iguales a \$ 0.055 por metro cúbico. La simplificación anterior fué necesaria ya que no se contó con información suficiente para establecer una función de costo de bombeo variable sobre la profundidad del mismo.

MULTA POR NO ENTREGAR EL AGUA PROMETIDA C (W, W<sub>p</sub>)

Se utilizaron dos valores para C (W, W<sub>p</sub>), en primer término se consideró --

$C(W, W_r) = 0.54$  pesos por  $m^3$  no entregado, siendo este valor la pendiente del primer tramo de la función  $BN(W)$ , esto es, considerando que la pérdida por no entregar el agua es únicamente el beneficio que se deja de obtener. En segundo término se utilizó  $C(W, W_r) = 3.00$  pesos por  $m^3$  no entregado, - considerando que no únicamente se pierde lo que se deja de ganar, sino que además se pierde parte de la inversión realizada.

Lo anterior tiene una interpretación muy sugerente, esto es, puede decirse que en el primer caso se está ante una situación de indiferencia al riesgo en tanto que en el segunda se está ante una situación de aversión al riesgo. De tal manera que es posible obtener una curva en la que se graficaran las multas  $C(W, W_r)$  contra lo que se deja de ganar con respecto a la situación de indiferencia al riesgo, en estas circunstancias se proporcionaría una información muy valiosa a quienes han de tomar las decisiones.

Se consideró en ésta aplicación que el volumen mínimo que puede prometerse entregar en un ciclo agrícola es de  $600 \times 10^6 m^3$  es claro que variando paramétricamente éste valor mínimo puede proporcionarse a quienes han de tomar las decisiones, un panorama más completo de las consecuencias de éstas.

Los resultados del modelo de decisión bajo las multas,  $C(W, W_r)$ , de \$ 0.54 - y \$ 3.00, se presenten en el capítulo siguiente, donde también se comentan éstos a la luz de los resultados arrojados por el modelo de simulación.

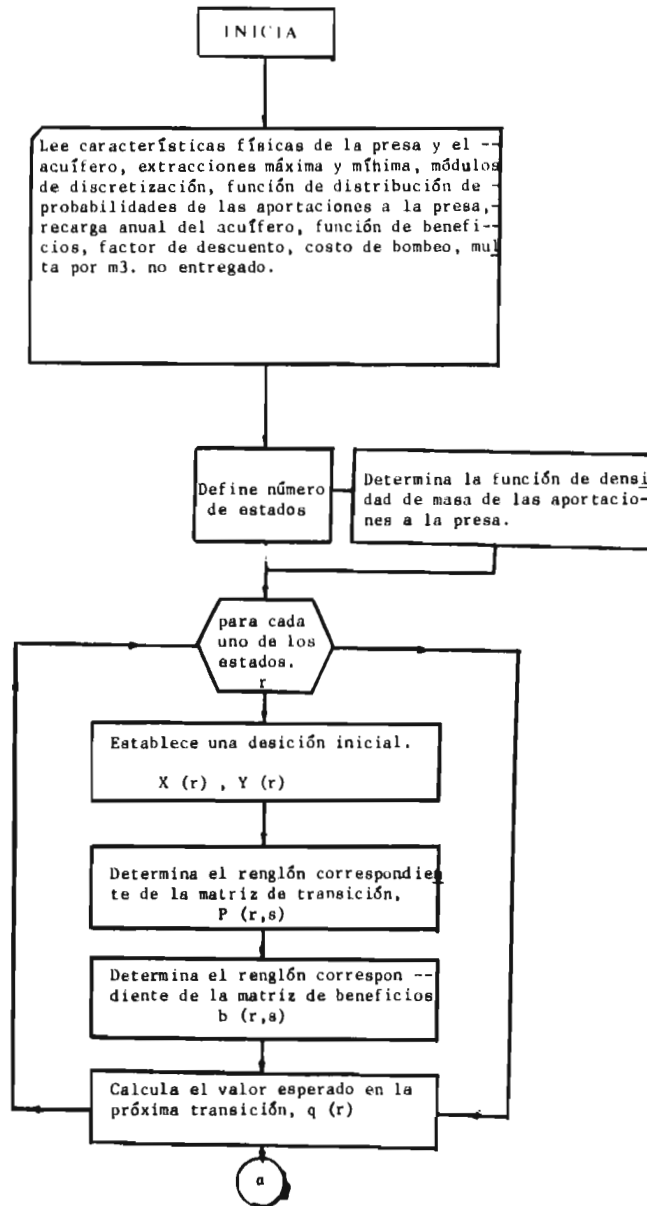
La implementación del modelo de decisión requiere la utilización de una calculadora electrónica, por lo que se elaboró el programa PRESACUI, en lenguaje Fortran IV, cuyo diagrama de bloques se presenta en la figura 14.

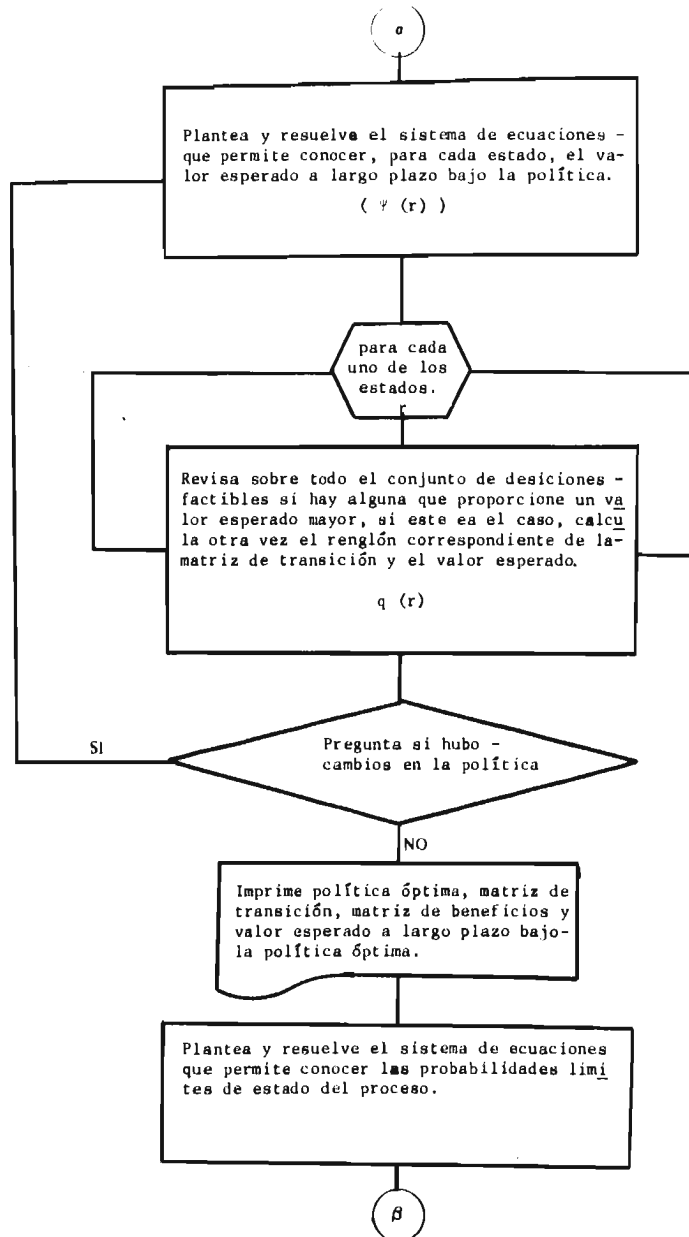
Los datos presentados en éste capítulo se proporcionaron al programa - -  
PRESACUI, obteniéndose los resultados que se presentan en el capítulo V.

VOLUMEN ENTREGADO (W) m <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	INGRESO NETO TOTAL BN (W) \$ x 10 <sup>6</sup>
300	212.177
400	269.631
500	324.994
600	380.028
700	433.723
800	487.404
900	540.876
1000	593.195
1100	645.117
1200	696.934
1300	748.640
1400	798.694
1500	840.018
1600	878.875
1700	917.376
1800	955.833
1900	993.742
2000	1016.876
2100	1034.976
2200	1052.940
2300	1070.903
2400	1077.168

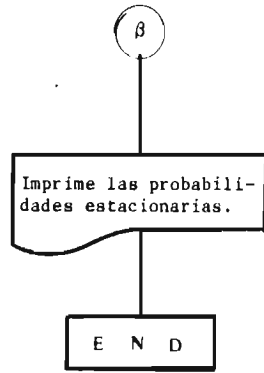
TABLA 2 .- Ingreso neto total para diferentes niveles de agua entregada.

Fig. 14 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROGRAMA PRESACUI









## CAPITULO V

## PRESENTACION DE RESULTADOS.

Se presentan en éste capítulo los resultados obtenidos al aplicar la metodología desarrollada en éste trabajo al caso de la Comarca Lagunera.

En la tabla 3 se presente la política óptima de operación del sistema bajo la multa de 0.54 pesos por  $m^3$  no entregado, en la tabla 4 se muestran la función de densidad de masa conjunta para el almacenamiento en la presa -- y en el acuífero y en las figuras 15 y 16 se presentan las funciones de densidad marginal de masa para el almacenamiento superficial y para el acuífero, respectivamente.

En la tabla 5 se muestra la política óptima de operación bajo la multa de 3.00 pesos por  $m^3$  no entregado, en la tabla 6 se presenta la función de densidad de masa conjunta para el almacenamiento en la presa y en el acuífero y en las figuras 17 y 18 se presentan las funciones de densidad marginal de masa para el almacenamiento superficial y para el acuífero, respectivamente.

Así mismo, en las tablas 7 y 8 se presentan los resultados obtenidos del modelo de simulación al correrlo con las dos políticas óptimas obtenidas.

El análisis de la política obtenida con la multa de \$ 0.54 y su revisión -

mediante el modelo de simulación indica que se trata de una política que - presenta, por una parte, muy altas probabilidades de que el sistema se encuentre en los niveles más bajos de almacenamiento, como puede observarse en la tabla 4 y en las figuras 15 y 16; y por otra parte la simulación arroja un porcentaje de deficiencias muy alto.

Estas consideraciones aunadas al hecho de que en la práctica el ajuste de las políticas de operación de los sistemas tienda a políticas que presenten porcentajes de deficiencias aceptables y que proporcionen cierta regularidad en los volúmenes que se entregan, hace pensar que una multa de 0.54 pesos por  $m^3$  no entregado no es adecuada y que su valor debe ser más alto.

Por lo que respecta a la política obtenida con la multa de \$ 3.00 y a su - revisión mediante el modelo de simulación, puede decirse que, en términos del monto y frecuencia de las deficiencias, presenta características que la hacen más deseable que la obtenida bajo la multa de \$ 0.54.

El valor real de la multa  $C(W, W_p)$  puede determinarse mediante un análisis económico. El valor de \$ 3.00 utilizado es el resultado de una evaluación gruesa del mismo, considerando además una penalización por aversión al riesgo.

La comparación entre ambas políticas permite observar que el efecto de la diferencia entre las multas es el de obligar a tener un almacenamiento mayor en la presa.

Por otra parte, debido al tamaño de la presa en comparación con las entra-

das medias anuales, prácticamente no se presentan derrames bajo ninguna de las dos políticas obtenidas. Es de notar que en la operación real del sistema se han tenido volúmenes importantes de derrames en los años abundantes.

Se piensa que un proceso de ajuste sobre el valor de multa puede continuarse con un proceso iterativo para la selección del volumen mínimo que puede prometerse entregar. Este doble proceso conduciría a una política que presentara una mayor regularidad en las extracciones y también un porcentaje de déficits aceptable desde el punto de vista práctico.

TABLA 3. POLITICA OPTIMA DE OPERACION BAJO LA MULTA DE 0.54 PESOS  
POR M<sup>3</sup>NO ENTREGADO

ALMACENAMIENTO EN LA PRESA M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	EXTRACCION EN LA PRESA M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	EXTRACCION EN EL ACUIFERO M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	B* \$ x 10 <sup>5</sup>	q \$ x 10 <sup>6</sup>
200	0	400	200	5564	229
200	200	400	400	5708	373
200	400	400	400	5817	373
200	600	400	400	5916	373
200	800	400	400	6004	373
200	1000	400	400	6085	373
400	0	600	200	5704	371
400	200	600	400	5848	515
400	400	600	400	5958	515
400	600	600	400	6055	515
400	800	600	400	6144	515
400	1000	600	400	6224	515
600	0	800	200	5844	514
600	200	600	400	5977	571
600	400	600	400	6083	571
600	600	600	400	6179	571
600	800	600	400	6267	571
600	1000	600	400	6347	571
800	0	800	200	5971	570
800	200	800	200	6077	570
800	400	800	400	6181	674
800	600	800	400	6277	674
800	800	800	400	6365	674
800	1000	800	400	6445	674
1000	0	1000		6067	570
1000	200	1000	200	6171	674
1000	400	800	400	6271	693
1000	600	800	400	6367	693
1000	800	800	400	6454	693
1000	1000	800	400	6534	693
1200	0	1200		6162	674

ALMACENAMIENTO EN LA PRESA M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	EXTRACCION EN LA PRESA M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	EXTRACCION EN EL ACUIFERO M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	B* \$ x 10 <sup>6</sup>	q \$ x 10 <sup>6</sup>
1200	200	1200		6259	674
1200	400	1000	400	6356	791
1200	600	1000	400	6451	791
1200	800	1000	400	6539	791
1200	1000	1000	400	6619	791
1400	0	1200		6240	693
1400	200	1200	200	6337	791
1400	400	1400	600	6439	1078
1400	600	1400	600	6549	1078
1400	800	1400	600	6646	1078
1400	1000	1400	600	6735	1078
1600	0	1400		6318	791
1600	200	1400		6415	791
1600	400	1400	600	6553	1132
1600	600	1400	600	6659	1132
1600	800	1400	600	6755	1132
1600	1000	1400	600	6843	1132
1800	0	1400		6407	791
1800	200	1600	400	6553	1132
1800	400	1600	400	6659	1132
1800	600	1600	400	6755	1132
1800	800	1600	400	6843	1132
1800	1000	1400	600	6930	1132
2000	0	1800	200	6553	1132
2000	200	1800	200	6659	1132
2000	400	1800	200	6755	1132
2000	600	1800	200	6843	1132
2000	800	1600	400	6930	1132
2000	1000	1600	400	7011	1132
2200	0	2000		6659	1132
2200	200	2000		6755	1132
2200	400	2000		6843	1132
2200	600	1800	200	6930	1132

ALMACENAMIENTO EN LA PRESA M' x 10 <sup>3</sup>	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO M' x 10 <sup>3</sup>	EXTRACCION EN LA PRESA M' x 10 <sup>3</sup>	EXTRACCION EN EL ACUIFERO M' x 10 <sup>3</sup>	B*	q
				\$ x 10 <sup>6</sup>	\$ x 10 <sup>6</sup>
2200	800	1800	200	7011	1132
2200	1000	1400	600	7096	1132
2400	0	2000		6747	1132
2400	200	2000		6842	1132
2400	400	2000		6930	1132
2400	600	2000		7010	1132
2400	800	1600	400	7095	1132
2400	1000	1400	600	7177	1132
2600	0	2000		6828	1132
2600	200	2000		6922	1132
2600	400	2000		7009	1132
2600	600	1800	200	7094	1132
2600	800	1600	400	7176	1132
2600	1000	1600	400	7257	1132
2800	0	2000		6911	1132
2800	200	2000		7005	1132
2800	400	2000		7093	1132
2800	600	1800	200	7175	1132
2800	800	1800	200	7255	1132
2800	1000	1600	400	7334	1132
3000	0	2000		6993	1132
3000	200	2000		7085	1132
3000	400	2000		7172	1132
3000	600	2000		7253	1132
3000	800	1800	200	7331	1132
3000	1000	1600	400	7470	1132
3200	0	2000		7068	1132
3200	200	2000		7161	1132
3200	400	2000		7248	1132
3200	600	2000		7328	1132
3200	800	1800	200	7403	1132
3200	1000	1800	200	7475	1132

TABLA 4. FUNCION DE DENSIDAD DE MASA CONJUNTA PARA EL ALMACENAMIENTO EN LA PRESA Y EN EL ACUIFERO BAJO LA MULTA DE 0.54 PESOS POR M<sup>3</sup>NO ENTREGADO.

VOLUMEN PRESA	VOLUMEN ACUIFERO	PROBABILIDAD
200	0	2.101371E-01
200	200	6.737186E-02
200	400	1.294516E-02
200	600	1.258906E-03
200	800	6.273036E-05
200	1000	1.283553E-06
400	0	8.818352E-02
400	200	5.152291E-02
400	400	9.379650E-03
400	600	1.004318E-03
400	800	7.493644E-05
400	1000	2.228283E-06
600	0	6.848284E-02
600	200	4.553051E-02
600	400	1.071937E-02
600	600	1.169028E-03
600	800	8.747446E-05
600	1000	2.695128E-06
800	0	6.361652E-02
800	200	4.156266E-02
800	400	7.949639E-03
800	600	1.086195E-03
800	800	9.843827E-05
800	1000	3.119803E-06
1000	0	4.817038E-02
1000	200	2.964319E-02
1000	400	6.189125E-03
1000	600	9.342214E-04
1000	800	8.196238E-05



VOLUMEN PRESA	VOLUMEN ACUIFERO	PROBABILIDAD
1000	1000	2.579590E-06
1200	0	3.035942E-02
1200	200	1.784354E-02
1200	400	4.816500E-03
1200	600	9.429781E-04
1200	800	1.168725E-04
1200	1000	4.261480E-06
1400	0	2.796423E-02
1400	200	1.475905E-02
1400	400	3.920884E-03
1400	600	7.641466E-04
1400	800	1.027762E-04
1400	1000	4.099501E-06
1600	0	2.116319E-02
1600	200	1.213390E-02
1600	400	3.333252E-03
1600	600	6.423881E-04
1600	800	8.525194E-05
1600	1000	3.423109E-06
1800	0	1.094568E-02
1800	200	7.906979E-03
1800	400	2.350249E-03
1800	600	4.860528E-04
1800	800	6.975063E-05
1800	1000	2.896476E-06
2000	0	9.993836E-03
2000	200	6.481937E-03
2000	400	1.868628E-03
2000	600	3.845547E-04
2000	800	5.819034E-05
2000	1000	2.448878E-06

VOLUMEN PRESA	VOLUMEN ACUIFERO	PROBABILIDAD
2200	0	5.684871E-03
2200	200	5.625919E-03
2200	400	1.697838E-03
2200	600	3.387199E-04
2200	800	5.156513E-05
2200	1000	2.281120E-06
2400	0	4.584549E-03
2400	200	3.539445E-03
2400	400	1.079019E-03
2400	600	2.245179E-04
2400	800	3.161908E-05
2400	1000	1.271289E-06
2600	0	4.357014E-03
2600	200	2.674429E-03
2600	400	7.554750E-04
2600	600	1.577455E-04
2600	800	2.157411E-05
2600	1000	8.711023E-07
2800	0	1.759712E-03
2800	200	2.179577E-03
2800	400	6.058045E-04
2800	600	1.135430E-04
2800	800	1.333095E-05
2800	1000	5.156268E-07
3000	0	7.405256E-04
3000	200	1.205585E-03
3000	400	4.159742E-04
3000	600	9.142828E-05
3000	800	1.337954E-05
3000	1000	5.448249E-07

VOLUMEN PRESA	VOLUMEN ACUIFERO	PROBABILIDAD
3200	0	8.477321E-03
3200	200	5.152115E-03
3200	400	1.337703E-03
3200	600	2.439948E-04
3200	800	3.298855E-05
3200	1000	1.358326E-06

TABLA 5. POLITICA OPTIMA DE OPERACION BAJO LA MULTA DE 3.00 PESOS POR M<sup>3</sup>  
NO ENTREGADO

ALMACENAMIENTO EN LA PRESA M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	EXTRACCION DE LA PRESA M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	EXTRACCION DEL ACUIFERO M <sup>3</sup> x 10 <sup>6</sup>	B* \$ x 10 <sup>6</sup>	q \$ x 10 <sup>6</sup>
200	0	400	200	4686	21
200	200	200	400	4983	208
200	400	200	400	5136	208
200	600	200	400	5254	208
200	800	200	400	5354	208
200	1000	200	400	5442	208
400	0	400	200	4972	200
400	200	200	400	5178	281
400	400	200	400	5310	281
400	600	200	400	5421	281
400	800	200	400	5519	281
400	1000	200	400	5608	281
600	0	400	200	5171	279
600	200	400	400	5318	426
600	400	400	400	5450	426
600	600	400	400	5561	426
600	800	400	400	5659	426
600	1000	400	400	5748	426
800	0	600	200	5305	424
800	200	600	400	5452	571
800	400	600	400	5585	571
800	600	600	400	5698	571
800	800	600	400	5796	571
800	1000	600	400	5885	571
1000	0	800	200	5437	568
1000	200	800	200	5572	568
1000	400	800	200	5686	568
1000	600	800	400	5789	672
1000	800	800	400	5888	672
1000	1000	800	400	5977	672

ALMACENAMIENTO EN LA PRESA	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO	EXTRACCION DE LA PRESA	EXTRACCION DEL ACUIFERO	B*	q
1200	0	1000		5552	566
1200	200	1000		5665	566
1200	400	1000	200	5769	669
1200	600	800	400	5869	693
1200	800	800	400	5967	693
1200	1000	800	400	6056	693
1400	0	1000		5636	591
1400	200	1200		5747	667
1400	400	1000	200	5850	693
1400	600	800	400	5952	693
1400	800	800	400	6048	693
1400	1000	800	400	6136	693
1600	0	1200		5739	693
1600	200	1200		5850	693
1600	400	1200		5948	693
1600	600	1200	200	6046	791
1600	800	1200	200	6134	791
1600	1000	1000	400	6222	791
1800	0	1400		5836	791
1800	200	1400		5947	791
1800	400	1400		6046	791
1800	600	1400	600	6177	1132
1800	800	1400	600	6288	1132
1800	1000	1400	600	6386	1132
2000	0	1200		5933	693
2000	200	1600	400	6045	1132
2000	400	1600	400	6177	1132
2000	600	1600	400	6288	1132
2000	800	1600	400	6386	1132
2000	1000	1600	400	6475	1132
2200	0	1800	200	6045	1132
2200	200	1800	200	6177	1132
2200	400	1800	200	6288	1132

ALMACENAMIENTO EN LA PRESA	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO	EXTRACCION DE LA PRESA	EXTRACCION DEL ACUIFERO	B*	q
2200	600	1800	200	6396	1132
2200	800	1800	200	6475	1132
2200	1000	1400	600	6568	1132
2400	0	2000		6176	1132
2400	200	2000		6288	1132
2400	400	2000		6386	1132
2400	600	2000		6475	1132
2400	800	1600	400	6567	1132
2400	1000	1600	400	6655	1132
2600	0	2000		6269	1132
2600	200	2000		6377	1132
2600	400	2000		6473	1132
2600	600	1800	200	6566	1132
2600	800	1800	200	6653	1132
2600	1000	1600	400	6739	1132
2800	0	2000		6368	1132
2800	200	2000		6470	1132
2800	400	2000		6565	1132
2800	600	2000		6652	1132
28000	800	1800	200	6737	1132
2800	1000	1600	400	6820	1132
3000	0	2000		6455	1132
3000	200	2000		6553	1132
3000	400	2000		6647	1132
3000	600	2000		6735	1132
3000	800	1800	200	6817	1132
3000	1000	1600	400	6898	1132
3200	0	2000		6536	1132
3200	200	2000		6633	1132
3200	400	2000		6727	1132

ALMACENAMIENTO EN LA PRESA	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO	EXTRACCION DE LA PRESA	EXTRACCION DEL ACUIFERO	B*	q
3200	600	2000		6813	1132
3200	800	1800	200	6892	1132
3200	1000	1800	200	6970	1132

TABLA 6. FUNCION DE DENSIDAD CONJUNTA PARA EL ALMACENAMIENTO EN LA PRESA Y EN EL ACUIFERO BAJO LA MULTA DE 3.00 PESOS POR M<sup>3</sup>NO ENTREGADO.

ALMACENAMIENTO EN LA PRESA	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO	PROBABILIDAD
200	0	7.985390E-02
200	200	2.444419E-02
200	400	1.201097E-02
200	600	2.372744E-03
200	800	2.059463E-04
200	1000	5.991702E-06
400	0	7.827736E-02
400	200	3.955800E-02
400	400	2.354081E-02
400	600	4.327604E-03
400	800	4.051874E-04
400	1000	1.287290E-05
600	0	7.520157E-02
600	200	4.555677E-02
600	400	2.847204E-02
600	600	4.980774E-03
600	800	4.322389E-04
600	1000	1.314597E-05
800	0	7.390740E-02
800	200	4.012618E-02
800	400	2.169499E-02
800	600	4.794622E-03
800	800	5.318840E-04
800	1000	1.815593E-05
1000	0	6.288866E-02
1000	200	3.178190E-02
1000	400	1.681993E-02
1000	600	3.728759E-03



ALMACENAMIENTO EN LA PRESA	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO	PROBABILIDAD
1000	800	4.318969E-04
1000	1000	1.561645E-05
1200	0	4.622532E-02
1200	200	2.719533E-02
1200	400	1.391403E-02
1200	600	3.853917E-03
1200	800	5.586668E-04
1200	1000	2.133394E-05
1400	0	2.694493E-02
1400	200	1.684808E-02
1400	400	9.137461E-03
1400	600	2.734756E-03
1400	800	4.589596E-04
1400	1000	1.943990E-05
1600	0	2.180748E-02
1600	200	1.339520E-02
1600	400	7.395207E-03
1600	600	2.036163E-03
1600	800	3.707680E-04
1600	1000	1.643290E-05
1800	0	1.423766E-02
1800	200	1.036810E-02
1800	400	6.016336E-03
1800	600	1.709684E-03
1800	800	3.039851E-04
1800	1000	1.344667E-05
2000	0	9.319400E-03
2000	200	7.095359E-03
2000	400	4.175800E-03
2000	600	1.349211E-03
2000	800	2.483798E-04

ALMACENAMIENTO EN LA PRESA	ALMACENAMIENTO EN EL ACUIFERO	PROBABILIDAD
2000	1000	1.094792E-05
2200	0	8.244455E-03
2200	200	5.859471E-03
2200	400	3.405499E-03
2200	600	1.008291E-03
2200	800	2.115841E-04
2200	1000	1.022600E-05
2400	0	6.913855E-03
2400	200	4.948311E-03
2400	400	2.869276E-03
2400	600	7.805100E-04
2400	800	1.370348E-04
2400	1000	5.909599E-06
2600	0	3.932727E+03
2600	200	3.120976E-03
2600	400	1.831595E-03
2600	600	5.991791E-04
2600	800	1.029374E-04
2600	1000	4.409080E-06
2800	0	3.333883E-03
2800	200	2.266587E-03
2800	400	1.302600E-03
2800	600	3.640419E-04
2800	800	6.034831E-05
2800	1000	2.630469E-06
3000	0	2.721851E-03
3000	200	2.117254E-03
3000	400	1.226042E-03
3000	600	3.218291E-04
3000	800	5.514210E-05
3000	1000	2.372930E-06
3200	0	8.231411E-03
3200	200	5.576729E-03
3200	400	3.180236E-03
3200	600	8.996961E-04
3200	800	1.489740E-04
3200	1000	6.443308E-06

TABLA 7.

RESULTADOS DE LA SIMULACION CONSIDERANDO 0.54 PESOS POR M<sup>3</sup> NO ENTREGADO.- 22 AÑOS DE REGISTRO

AÑO	MILLONES DE METROS CUBICOS				DEFICIT
	S	A	X	Y	
1	1 400	600	1 400	600	61.55
2	629	261	600	400	19.72
3	1 109	81	1 200	0	0
4	563	281	600	400	85.85
5	296	101	400	400	160.39
6	238	12	400	200	210.74
7	439	12	600	200	88.30
8	459	12	600	200	32.64
9	1 119	12	1 200	0	0
10	911	212	1 000	200	135.15
11	264	212	400	400	170.06
12	1 559	32	1 400	0	0
13	1 323	232	1 200	200	0
14	968	232	1 000	200	0
15	891	232	800	200	0
16	353	232	600	400	250.22
17	738	52	800	200	0
18	1 253	52	1 200	0	0
19	517	252	600	400	19.72
20	1 970	71	1 800	200	0
21	1 702	71	1 400	0	0
22	3 200	271	2 000	0	0

Número de años con déficit = 11

Máximo déficit anual = 210.74 x 10<sup>6</sup> m<sup>3</sup> 30%

BENEFICIO ACTUALIZADO TRAS

22 AÑOS DE OPERACION = \$ 6 009 x 10<sup>6</sup>

TABLA 8.

RESULTADOS DE LA SIMULACION CONSIDERANDO \$3.00 POR M<sup>3</sup> NO ENTREGADO.- 22 AÑOS DE REGISTRO.-

AÑO	MILLONES DE METROS CUBICOS				DEFICIT
	S	A	X	Y	
1	1 400	600	800	400	19.713
2	1 220	420	1 000	200	0
3	1 270	420	1 000	200	0
4	911	419	800	200	0
5	358	418	200	400	20.5
6	444	240	200	400	20.5
7	619	60	400	200	0
8	735	60	600	200	0
9	1 344	60	1 000	0	0
10	1 321	260	1 200	0	0
11	319	460	200	400	20
12	1 658	280	1 200	0	0
13	1 614	480	1 200	0	0
14	1 243	680	800	400	19.713
15	1 348	500	1 000	200	0
16	587	500	400	400	20.5
17	969	320	800	200	0
18	1 429	320	1 000	200	0
19	879	320	600	400	19.7
20	2 311	140	2 000	0	0
21	1 828	340	1 400	0	0
22	3 200	539	2 000	0	0

AÑOS CON DEFICIT = 6

DEFICIT MAXIMO ANUAL =  $20.5 \times 10^6 \text{ m}^3$

BENEFICIO ACTUALIZADO

TRAS 22 AÑOS DE OPERACION =  $\$ 5\,630 \times 10^6$

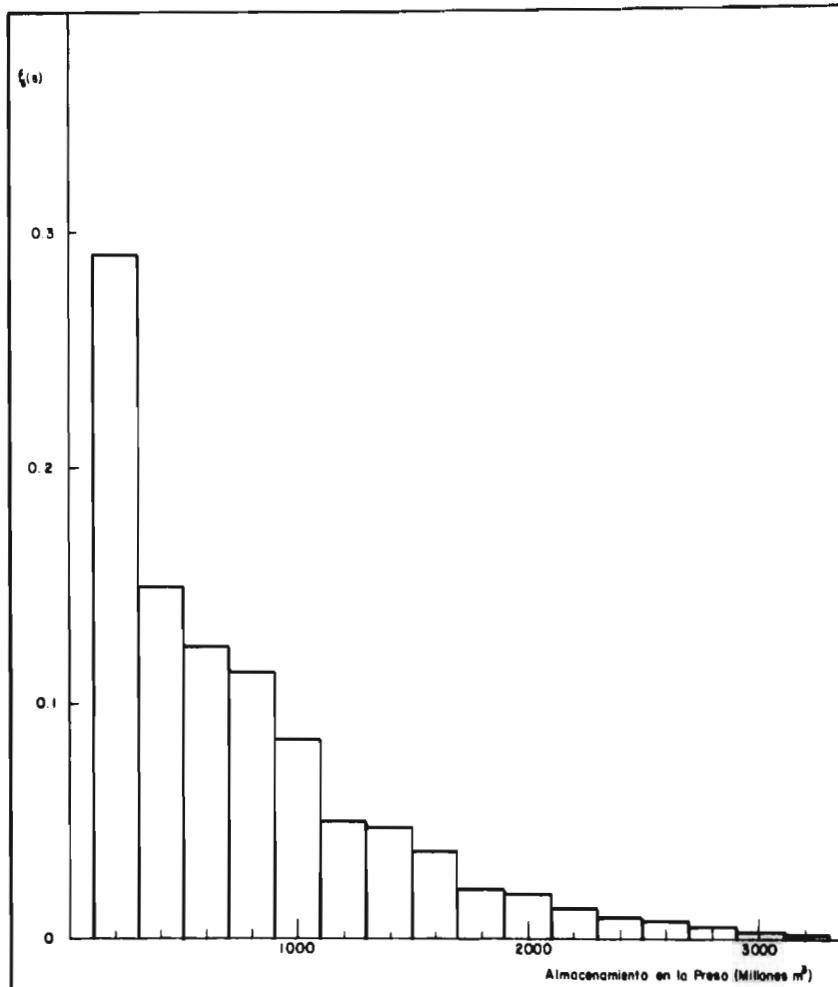
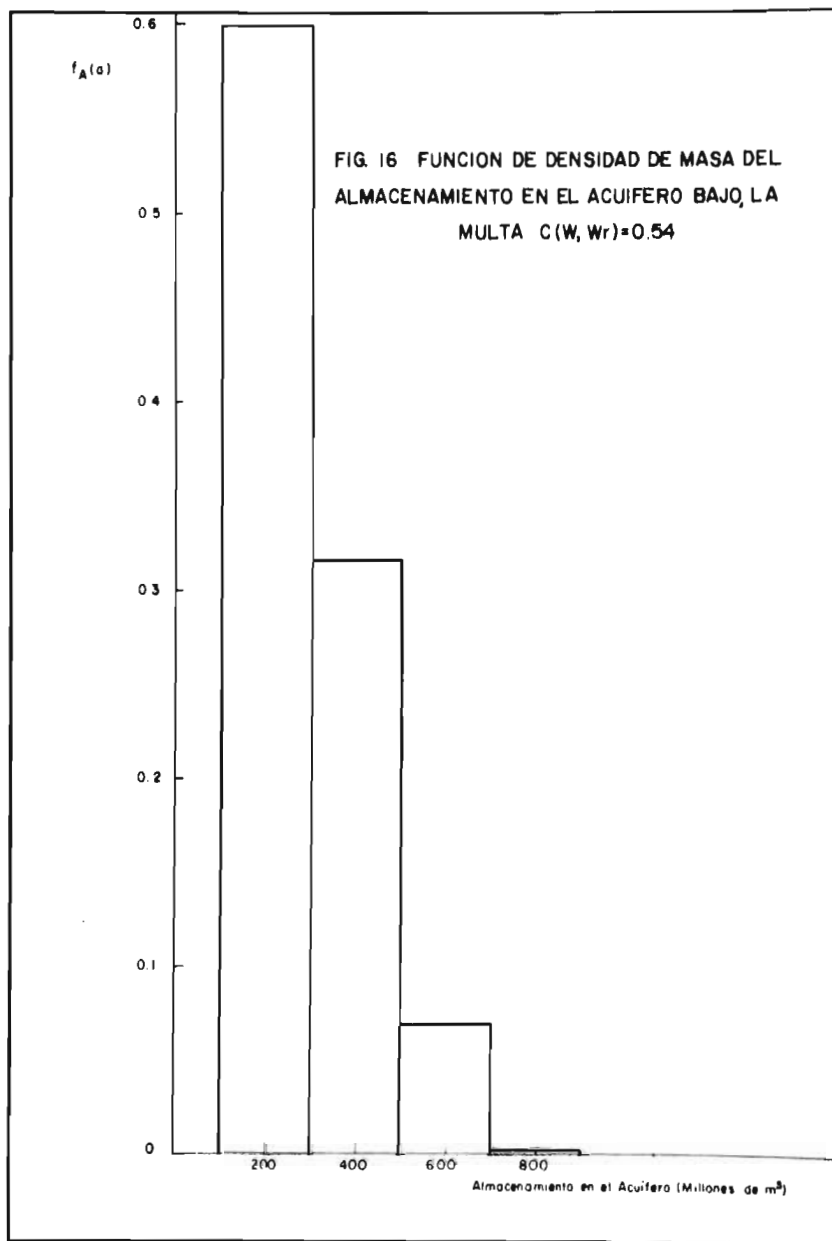


FIG. 15 DENSIDAD MARGINAL DE MASA DEL ALMACENAMIENTO EN LA PRESA, BAJO LA MULTA  $C(W, W_r) = 0.54$



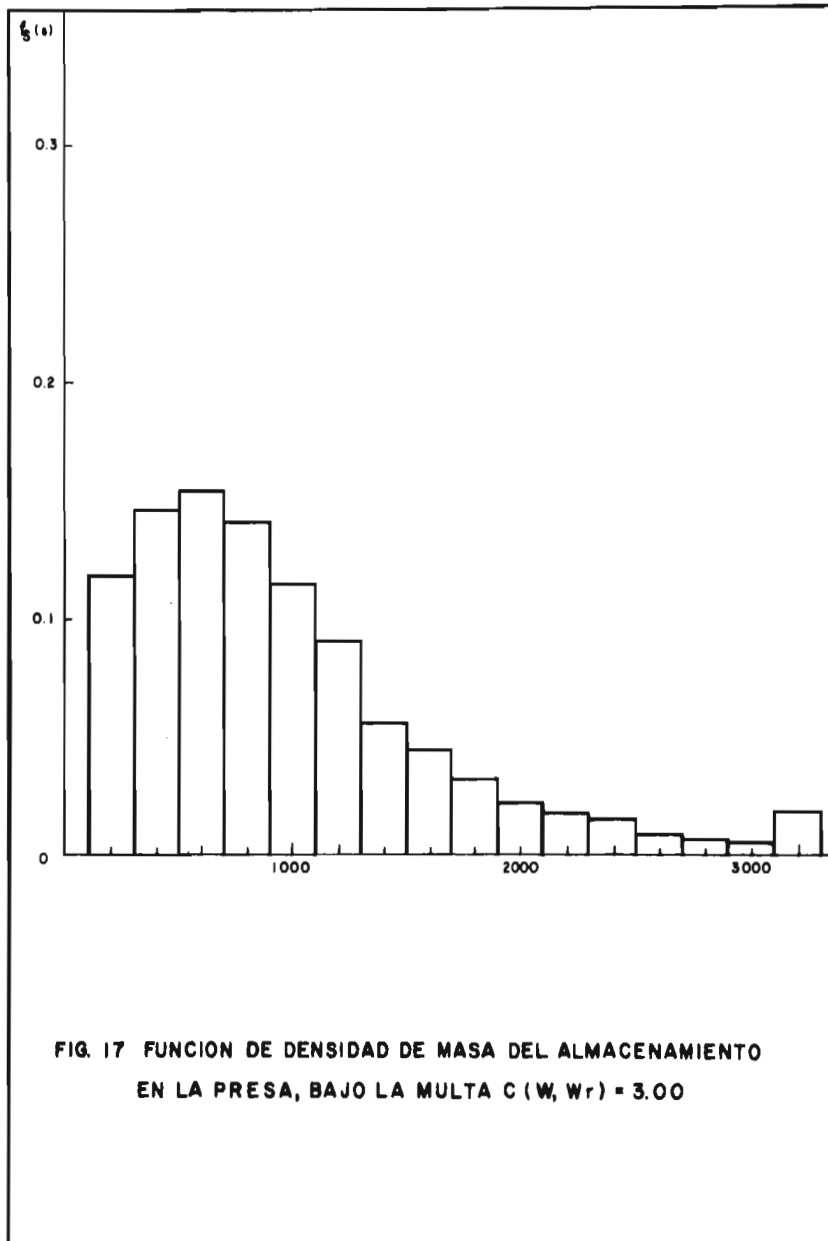
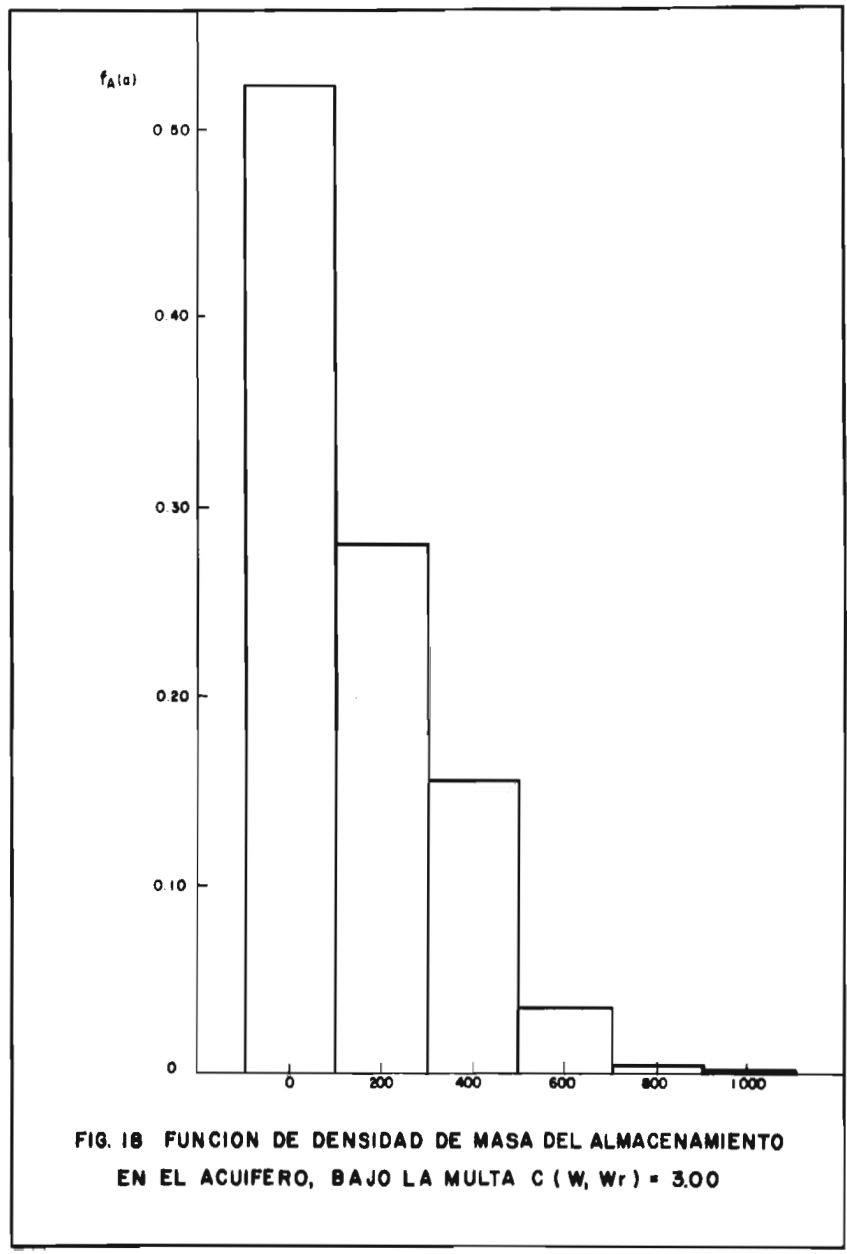


FIG. 17 FUNCION DE DENSIDAD DE MASA DEL ALMACENAMIENTO  
EN LA PRESA, BAJO LA MULTA  $C(W, W_r) = 3.00$





## CAPITULO VI

## CONCLUSIONES

La metodología desarrollada en éste trabajo puede ser de gran utilidad en la planeación y diseño de aprovechamientos agrícolas, ya que el considerar desde la etapa de planeación la posible operación óptima de los sistemas es, sin lugar a dudas, de gran valor para la evaluación de los proyectos. Ya en la etapa de diseño, la operación del sistema es determinante en la selección de las características físicas de las obras de aprovechamiento-hidráulico y, dado que dentro del modelo propuesto, éstas intervienen como parámetros es posible variarlos en un proceso iterativo hasta lograr aquella combinación que proporcione las características más adecuadas.

El problema de aplicación presentado en los capítulos IV y V muestra la utilidad que ésta metodología puede tener en la revisión de las políticas seguidas en sistemas en operación.

Por otra parte, como se hizo notar en el capítulo IV un análisis de éste tipo permite conocer el valor de tener más y mejor información sobre algunos parámetros del sistema, tales como la capacidad del acuífero, la función de distribución de las entradas a la presa, etc.

Las ventajas obtenidas de la operación conjunta de la presa y el acuífero pueden verse en la tabla # 9, en la que se presenta la comparación entre la política seguida históricamente en la presa Lázaro Cárdenas, la políti

ca obtenida en el trabajo de Cummings<sup>6</sup> y la política que se seguiría bajo operación conjunta. Puede verse que bajo ésta última el volumen mínimo - entregado es de  $600 \times 10^6 \text{m}^3$  en tanto que para las dos primeras el volumen mínimo es de  $200 \times 10^6$ . La variación entre los volúmenes mínimo y máximo entregados es también menor bajo condiciones de operación conjunta.

Esta misma metodología puede aplicarse al análisis de dos presas que abastecen a un distrito de riego, con la única complicación adicional de que en éste caso ambos almacenamientos están sujetos a la aleatoriedad de sus respectivas alimentaciones, y lo único que debe cambiarse dentro del modelo - es el cálculo de la matriz de transición.

TABLA 9

COMPARACION DE LAS POLITICAS SEGUIDAS EN LA OPERACION DEL DISTRITO DE RIEGO DE LA COMARCA LAGUNERA CON LAS POLITICAS OBTENIDAS POR CUMMIGS PARA LA OPERACION DE LA PRESA Y LAS OBTENIDAS BAJO OPERACION CONJUNTA DE LA PRESA Y EL ACUIFERO.

AÑO	ALMACENAMIENTO INICIAL OBSER- VADO. M <sup>3</sup> X 10 <sup>6</sup>	EXTRACCION OBSERVADA EN LA PRESA LAZARO CARDENAS M <sup>3</sup> X 10 <sup>6</sup>	EXTRACCION OPTIMIZADO LA OPERACION DE LA - PRESA* M <sup>3</sup> X 10 <sup>6</sup>	EXPLORACION PROBABLE BAJO OPERACION CON- JUNTA M <sup>3</sup> X 10 <sup>6</sup>	
				PRESA	ACUIFERO
1957	304	228.4	300	200	400
1958	332	326.8	300	200	400
1959	2176	1450.3	1700	1400	600
1960	1277	1226.6	1300	800	400
1961	917	998.9	900	800	400
1962	917	821.3	900	800	400
1963	262	26.1	300	200	400
1964	1399	785.9	1400	800	400
1965	1603	952.4	1500	1000	400
1966	1024	739.5	1000	800	400
1967	2012	1027.5	1600	1600	400

## R E F E R E N C I A S

1. OSCAR R. BART: "Economic of Graund Water Reserves" Journal of farm economics, 1966  
"Temporal Allocation of Ground Water" Water Resources Research, 1967.
2. RONALD CUMMINGS: "Some extensions of the Economic Theory of Exhaustible Resources" West Economical Journal Vol. 7 Número 3
3. A. ROSA PEIROT DE ACOSTA: Tesis de Maestría en ingeniería, UNAM 1972
4. OSCAR R. BURT: "The Economics of the Conjunctive Use of Ground - and Surface Water".- Hilgardia, 32(2), 1964
5. RONALD HOWARD: "Dynamic Programming and Markov Processes" M.I.T. Press 1966
6. DONALD CUMMINGS: "Water Resource Management in Arid Environs" In press. Johns Hopkins Press.

## B I B L I O G R A F I A

## Introduction to Dynamic Programming

George L. Nemhauser  
John Wiley 1966

## Water Resources Systems Engineering

Hall and Dracup  
Mc Graw Hill 1970

## Dinamic Probabilistic Systems

Ronald Howard  
John Wiley. 1971

## Linear Programming

Hadley  
Addison Wesley

## Boletín Hidrométrico # 6

Secretaría de Recursos Hídricos, México.