



61149

73

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

11

CALCULO DEL EFECTO DE MAREAS EN ESTUARIOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO
EN INGENIERIA CON ESPECIALIDAD EN HIDRAULICA

PRESENTA :

MANUEL LESCANO RIVERO

México, D. F.

1967

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A MIS QUERIDOS PADRES:
CON AMOR Y GRATITUD A SUS SACRIFICIOS,
CARIÑO Y CONSEJOS QUE NUNCA DEJARON DE
BRINDARME.

•

A QUIEN ME AYUDO SIEMPRE CON
SU CARIÑO Y COMPRENSION.

A MIS HERMANOS Y FAMILIARES QUE,
VENCENDO LA DISTANCIA NUNCA DE
JARON DE ALENTARME.

A MIS MAESTROS DE LA DIVISION QUE
ME PERMITEN LLEVAR MAYORES CONOCI
MIENTOS A MI PAIS.

A MIS COMPAÑEROS DE ESTUDIOS Y
AMIGOS POR SU INVALORABLE AMIS
TAD Y AYUDA.

A G R A D E C I M I E N T O

AL ING. JOSE LUIS SANCHEZ BRIBIESCA
POR LA DIRECCION DEL PRESENTE TRABAJO.
AL ING. ANTONIO CAPELLA VIZCAINO POR
SU COLABORACION.
A LA COMPAÑIA MEXICANA AEROFOTO POR
HABERME FACILITADO SU MAQUINA COMPU
TADORA.

I N D I C E

INTRODUCCION.

Capítulo I

EXPLICACION TEORICA DEL ORIGEN DE LAS MAREAS

- 1.- Consideraciones Generales.
- 2.- Variaciones de la Marea
 - a) Variación semi-mensual
 - b) Variación mensual
 - c) Variación Declinacional
 - d) Variación Diurna.
- 3.- Corrientes de Marea.
- 4.- La Marea en los Estuarios.

Capítulo II

METODOS DE MEDICION DE LAS MAREAS

Capítulo III

DETERMINACION Y ANALISIS ARMONICO DE LAS COMPONENTES DE LA MAREA

- 1.- Determinación de las componentes de la Marea
 - A.- Componentes de la Luna
 - a) Componentes armónicas semi-diurnas
 - b) Componentes armónicas diurnas
 - c) Componentes armónicas de largo periodo.
 - B.- Componentes del Sol
 - a) Componentes armónicas semi-diurnas
 - b) Componentes armónicas diurnas
 - c) Componentes armónicas de periodo grande.
- 2.- Análisis Armónicos de las componentes de la Marea
 - A.- Método del Almirantazgo
 - B.- Método de Análisis Armónico de Mareas.

Capítulo IV

MÉTODOS DE CÁLCULO DE MAREAS EN ESTUARIOS

1.- Consideraciones Generales

- A.- Método Armónico de Dronkers
- B.- Método de las co-oscilaciones o de Proudman
- C.- Método de las características.

Capítulo V

EJEMPLO NUMÉRICO APLICANDO LOS 3 MÉTODOS

- 1.- Método de Proudman
- 2.- Método Armónico de Dronkers
- 3.- Método de las características.

Capítulo VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Bibliografía.

I N T R O D U C C I O N

El objeto de este trabajo es mostrar las herramientas con las que el ingeniero puede contar para resolver un problema del tránsito de mareas en un estuario.

Para lograr este objetivo, en el primer capítulo se hace una descripción teórica de los factores que dan origen a las mareas, de tal modo que se pueda ver la complejidad del fenómeno, interpretándolo bajo un punto de vista matemático.

La variación de las mareas puede ser obtenida, en un lugar determinado, haciendo uso de mecanismos especialmente contruidos; por ello, en el capítulo segundo, se hace referencia a ellos.

Teniendo en cuenta que la marea no es producida por un sólo factor sino por varios, estará formada por diferentes componentes que dan lugar a una composición armónica del fenómeno; por ello se hizo necesario desarrollar el tercer capítulo, y para tener una idea de cómo abordar éste análisis, se vió conveniente exponer dos métodos de cálculo, el llamado método del Almirantazgo y el segundo es un método de análisis armónico aplicable con computadoras electrónicas, herramienta que cada día se convierte en una ayuda esencial para el ingeniero.

Hasta éste capítulo del trabajo se ha hecho referencia a las mareas en general; pero siendo objeto del mismo, el analizar problemas de mareas en los estuarios, en el cuarto capítulo se hace una explicación teórico-matemática de tres métodos que permiten abordar el problema. Los tres métodos toman diferentes consideraciones para hacer el desarrollo de las ecuaciones diferenciales que resuelven el problema, mismas que también son desarrolladas en el mismo capítulo.

Los tres métodos de cálculo que se presentan, explicados teóricamente no darían una idea completa de la manera de usarlos y por eso se hará un ejemplo numérico que aclare los conceptos teóricos expuestos, y más aún si se tiene en cuenta que al ingeniero le debe interesar el resolver el problema práctico, al que en todo momento se tiene que enfrentar, es -

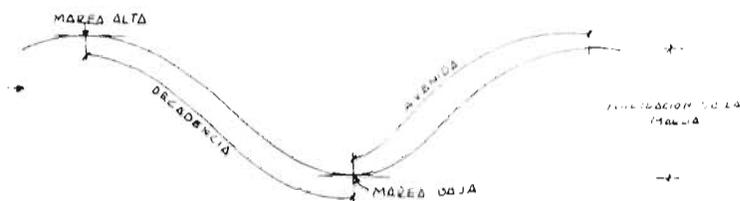
por eso que en el quinto capítulo se ha desarrollado un ejemplo aplicado a la laguna de Alvarado (Veracruz) en la desembocadura del río Papaloapan. Se ha tratado de poner todos los pasos del cálculo para cada uno de los métodos, de modo tal que se aclaren los conceptos vertidos en el desarrollo teórico-matemático de los mismos. Lógicamente los tres métodos, para el ejemplo propuesto, no son perfectamente aplicables, por ello, después de cada desarrollo, se hace una crítica de cada uno de ellos, haciendo ver las posibilidades de cálculo que serían adoptadas en el caso de considerar todos los factores que influyen en la zona. Se han hecho varias simplificaciones y limitaciones, ya que el objeto del ejemplo no es resolver estrictamente el fenómeno que se presenta en ese lugar específico, si no aclarar los diferentes procedimientos. En el último capítulo se presentan conclusiones del trabajo desarrollado y una recomendación para el caso que se quiera resolver un problema similar.

Capítulo I

EXPLICACION TEORICA DEL ORIGEN DE LAS MAREAS

I.- Consideraciones Generales

La marea es un fenómeno producido por la atracción que la luna y el sol ejercen sobre la tierra y se manifiesta, principalmente en las masas líquidas, por levantamientos y caídas ritmicas del agua, cuyas diferencias de altura varían de acuerdo al lugar en el que se observa. Luego nos enfrentamos a un fenómeno que se manifiesta como una ola común y corriente que tiene las siguientes características y denominaciones



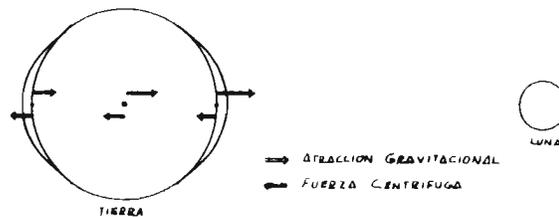
El período que tiene la componente principal es de 12 hs. 25 min; es decir que, aproximadamente, se presenta dos veces al día, con un desfase de 50 minutos de un día con el siguiente, y esta situación, precisamente, está ligada a la luna, que también tiene el mismo retraso para pasar por un mismo meridiano.

La perpetuidad y regularidad de las mareas hacen pensar que existe una fuerza constantemente actuando y que, por consiguiente, gobierna al fenómeno que se presenta en todas las masas de agua de la tierra. Esta fuerza o sistema de fuerzas, puede ser sólo de naturaleza cósmica.

Si se tiene en cuenta que la luna está a 485,000 Km. del centro de la tierra, se puede aceptar que existe una considerable diferencia de la atracción gravitacional desde un lado de la tierra al lado opuesto, ya que las diferencias, en distancia, a la luna es de 1,300 kilómetros.

Sin embargo el sol está a 150 millones de Km. alejado del centro de la tierra y la fuerza gravitacional no va a cambiar demasiado en los lados opuestos de la tierra. De esta manera se concluye que la atracción de la luna es más importante en la formación de mareas, por ello se referirá todo a la luna y un razonamiento similar será válido si se considera el sol.

El resultado de estas diferencias en la atracción gravitacional es que se llegan a formar unas protuberancias sobre la superficie terrestre, esto es, si se imagina el sistema tierra-luna, se puede, vectorialmente, representar la atracción de la luna en el centro de la tierra y en los extremos opuestos y será de mayor magnitud el punto más cercano a la luna, por otra parte el efecto centrífugo, de la rotación del sistema, puede ser representado, en los mismos puntos, por otros vectores que tendrán las mismas magnitudes pero en direcciones opuestas a las primeras, como se muestra en la gráfica.

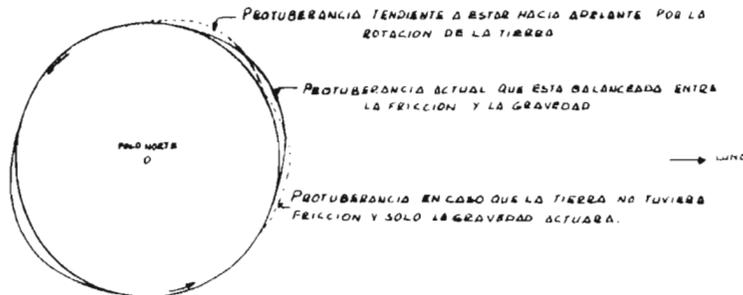


La magnitud y dirección de la fuerza resultante en cada punto, es la fuerza equivalente que produce la protuberancia y en consecuencia la marea.

Si se tiene en cuenta que la tierra gira sobre su eje una vez diaria, varios puntos de la tierra experimentarán dos mareas altas y dos bajas, diferentes en un mismo día.

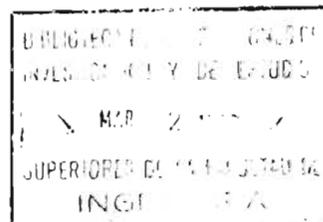
Por otra parte, si se considera que también la luna gira alrededor de la tierra (en la misma dirección que la tierra), completando una órbita en un mes, este movimiento de la luna afecta a cualquier punto de la tierra, la que casi escasa mente una revolución para llegar al lado de la luna nuevamente. Podría pensarse en una posición más compleja y es -

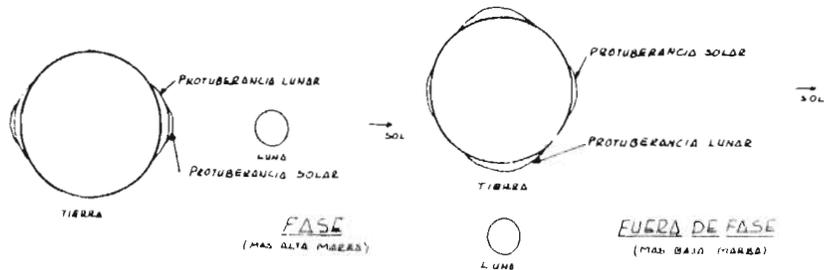
que la protuberancia no se produce en la dirección de la luna, sino que se encuentra ligeramente adelante de ésta y se tendría una representación como la que sigue.



Estas posiciones son el resultado de la fricción de la tierra como si girara por debajo del agua. La rugosidad del fondo de las aguas tiende a obstaculizar o hacer variar a las protuberancias y el efecto gravitacional de la luna tiende a mantener a la protuberancia por debajo de ella. El resultado es una posición de aveniencia en la cual las dos fuerzas están en equilibrio.

Las mareas producidas por el sol, aunque son muy pequeñas, de todos modos ejercen una variación en la marea lunar. Estos efectos se pueden notar más, sobre todo en dos posiciones del sistema tierra-luna-sol y son: fase (cuando los tres están alineados) y fuera de fase (cuando forman un ángulo recto). En el primer caso las protuberancias solares se sumarán a las lunares, en éste caso se producen las mareas más altas y las más bajas. En el caso que no estén en fase, la alta y baja marea, son más o menos 20% menor que el promedio, teniéndose las mareas más bajas, y en efecto, en este caso, las fuerzas gravitacionales del sol, hacen reducir las protuberancias producidas por la luna. Estas situaciones se pueden ver en las gráficas siguientes:





El tiempo de ocurrencia de las mareas más altas es llamado "tiempo de crecida".

En consecuencia el rango mínimo de las mareas ocurrirá cuando la luna esté en las cuadraturas (cuarto creciente o cuarto menguante) y la diferencia de tiempo entre el paso, por el meridiano, de la luna nueva y llena y la ocurrencia de la marea más alta es llamada "edad de la marea", -- que se da en días.

El hecho de que la duración de una marea corresponde exactamente a la mitad de un día lunar medio, llevará a relacionar cada paso de la luna, por un meridiano, con las altas y bajas mareas consecutivas. La diferencia, en tiempo, que existe entre una marea baja y el paso de la luna, permanece constante para cada lugar, siendo éste un valor característico. A éste tiempo se le llama intervalo de aguas altas y medias, en las mareas, debido a la luna y se mide en horas, en consecuencia dá la diferencia de tiempo medio entre el paso de la luna y la ocurrencia de la siguiente marea baja; similarmente se puede relacionar con la marea alta. -- Se llama establecimiento, al tiempo solar aparente (ángulo-hora del sol-H) en que ocurre la marea alta en luna nueva o llena, o al intervalo de aguas altas y medias, en las mareas, debido a la luna de la marea alta cuando el paso (precisamente procediendo a la marea) se produce en medio día o media noche. En luna llena o nueva (zizigeas), la luna y el sol pasan, simultáneamente, por el meridiano, y como el tiempo civil es contado desde el paso del sol, el intervalo de aguas altas y medias, en las mareas, debido a la luna, indica a que hora ocurrirá la marea alta, en una localidad determinada, mientras se tenga luna nueva o llena. En general éstos intervalos se desvían del medio en + 1 hora.

2.- Variaciones de la Marea.

a) Variación semi-mensual.- Los efectos del sol pueden hacer variar el intervalo de aguas altas medias, en las mareas, debido a la luna de modo que las mareas se presenten más pronto (adelanto de las mareas), en caso que disminuya, o se presenten después (atraso de la marea), en caso de que lo aumente. Estas variaciones se producen con intervalos regulares de más o menos medio mes, y a éstas desviaciones, precisamente, se le denomina variación semi-mensual.

Se toma como variación semi-mensual media al valor medio de las variaciones durante un año y se ha determinado que su período es de 14.77 días.

En consecuencia ésta variación semi-mensual en tiempo y altura es producida por el sol.

b) Variación mensual.- La fluctuación de la marea llega a ser un máximo poco después que la luna está en el perigeo y un mínimo poco después que está en el apogeo. En estos tiempos de perigeo y apogeo se producen, entonces, las mareas. La causa se explica por las oscilaciones del paralaje (diferencia entre el lugar verdadero y el aparente de un astro) durante el intervalo de aguas altas y medias, en las mareas, debido a la luna, el cual se presenta en un mes irregular (27.55 días). Si se considera un movimiento resultante, de manera que la tierra se aleja más y más de la luna llena, entonces diremos que la curva de marea tiene que cambiar, y a éste cambio es al que se le llama variación mensual. El grado de paralaje, que rige ésta variación, es generalmente menor que la variación semi-mensual, sin embargo existen lugares, como la costa este de los Estados Unidos, donde ambas variaciones son iguales, o donde, a veces, el paralaje es mayor; en éste caso, las mareas son gobernadas más por el paralaje que por la fase de la luna.

c) Variación Declinacional.- Esta variación se produce cuando la luna se mueve desde el ecuador hacia el hemisferio Norte o Sur, de-

modo que la variación declinacional depende sólo del aumento absoluto de la declinación; en consecuencia, después que la luna esté sobre el ecuador, ocurrirá la mayor fluctuación semi-diaria de la marea y después de la mayor declinación, se tendrá la menor. - También la variación declinacional es pequeña en solsticio (día diferente a la noche, en tiempo) y es mayor en el equinoccio (día igual a la noche), en éste caso, la luna nueva o llena, y el sol, están más o menos sobre el Ecuador (fase) y la fluctuación de la marea alta es la mayor e igualmente de la marea baja, será la menor, y se tendrá el mayor rango de la marea. Se puede concluir - también, que debido a ésta variación, en todos los puntos que no están situados en el ecuador se producirán diariamente dos mareas de diferentes alturas y duración, éste tipo de marea se producen en el Pacífico y en el Indico.

- d) Variación diurna.- Se puede apreciar mediante la diferencia de altura entre dos mareas alta o bajas consecutivas, que por lo general, no son las mismas y lógicamente ésta variación fluctúa de un lugar a otro.

Esta variación, que tiene un período de la mitad de un mes tropical de la luna, influye fuertemente en las curvas de marea que serán asimétricas. Algunas veces esta influye es tan grande que las mareas semi-diarias son suprimidas.

Por ejemplo, se llegan a tener mareas, como en el Golfo de México y Tonkin, que en las 24 horas 50 minutos, solo alcanzan una alta marea y una baja, y en las Indias Holandesas se producen mareas mixtas, es decir, que un día se producen dos altas y dos bajas y al día siguiente sólo una alta y una baja.

3.- Corrientes de Marea.- Es evidente que juntamente con el desplazamiento vertical del agua al producirse la marea, existen también desplazamientos horizontales de masas de agua, a las que se les denomina como "corrientes de marea" y que no son sino diferentes manifestaciones del mismo fenómeno, que tienen poca significancia en el mar abierto y que, en cambio, en puertos y estuarios estrechos, tienen mucha importancia. La dirección de flujo es el establecido por la corriente. La máxima velocidad

dad de la corriente viene más o menos al mismo tiempo que el máximo cambio en la altura de agua.

Las corrientes de marea tienen pequeñas influencias en playas abiertas, pero pueden tener efectos considerables en los movimientos de arena, que unas veces pueden ser propicias al mantenimiento de las profundidades delante de los puertos, y otras veces pueden socavar en las proximidades de un obstáculo (diques por ejemplo), o producir azolves dentro de un puerto. Por lo general el efecto combinado de éstas corrientes y las fuerzas de las olas del océano, casi siempre causan una barrera arenosa en el lado exterior de las entradas a un puerto, lo mismo que puede producir olas grandes en la línea de rompimiento y poner en peligro embarcaciones que entran o abandonan el puerto.

Las corrientes de marea, cambian, teóricamente, de sentido en el momento en que el mar alcanza su nivel medio. Cuando el mar está por encima de éste nivel hay corriente de reflujó cuyo sentido es opuesto al primero.

Estas corrientes desplazan las aguas del mar sobre un gran espesor, por ejemplo en las costas de Chile se han reconocido espesores de más de 3,000 metros.

4.- La Marea en los Estuarios.- Una de las influencias más importantes para la altura de las mareas es la forma del fondo del mar, en consecuencia en alta mar ésta influencia no será muy notoria, pero hacia la playa, la configuración terrestre actúa como una cuña puesta debajo de las olas y como resultado de ello es que la fluctuación de la altura de marea es exagerada en las costas, en ésta situación se puede empeorar el panorama si se considera un estuario que se va estrechando, como un embudo, a medida que se aleja de la playa, luego el ancho de la onda de marea que entra al estuario se tendrá que restringir a las condiciones geométricas del mismo, de modo que éstas construcciones concentran la energía de las ondas e incrementan su altura. Si el estuario fuera muy grande, los efectos de fricción en los lados y en el fondo reducen, gradualmente, la altura de la onda de marea a medida que avanza, por ello el problema en los estuarios es grande, pero relativamente en pocos lugares son tomados

en cuenta al calcular la estructura.

Es claro pues que la marea es un fenómeno complejo que una teoría - general no podría explicar todas sus irregularidades y su propagación; pe ro una teoría conveniente puede hacer posible establecer un método práctico para su determinación a lo largo de costas y en estuarios y pueden ser empleados métodos numéricos que permitan determinar los coeficientes que fijan las mareas en cualquier punto determinado.

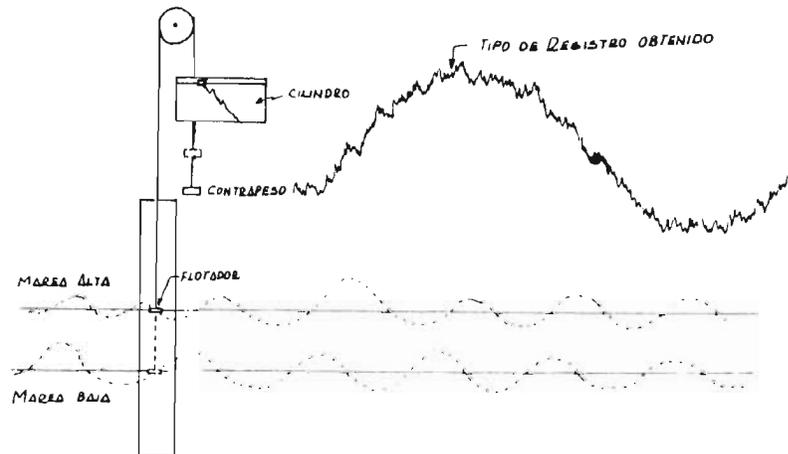
Capítulo II.

MÉTODOS DE MEDICIÓN DE LAS MAREAS

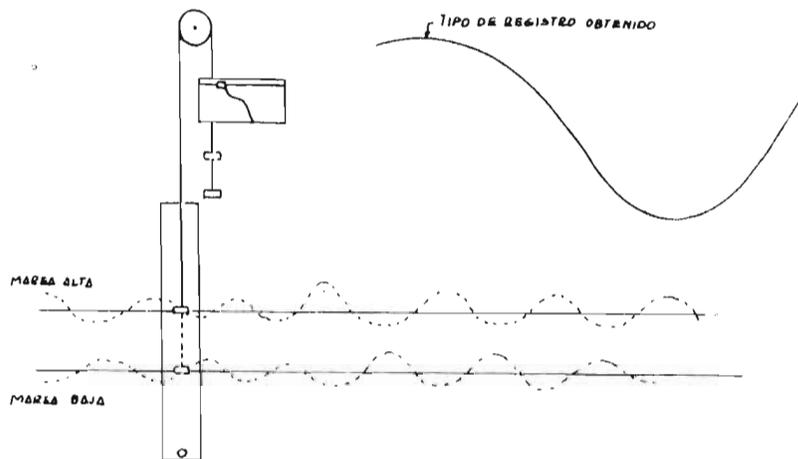
Los instrumentos que permiten medir las mareas, generalmente son --
puestos en aguas tranquilas, donde no están expuestos a oleajes fuertes,
de modo que las olas pequeñas no afecten el sistema de medición.

Se puede decir que el instrumento más antiguo para ésta clase de me-
diciones fué dado a conocer por Lord Kelvin en 1882.

Consistía en poner un pilar, en aguas tranquilas, o protegido en al-
ta mar. El mecanismo constaba de una tubería de un pie de diámetro, a-
bierto en el fondo y arriba, extendido verticalmente, desde el piso del-
lugar hasta encima del nivel de la marea alta. Dentro de la tubería hay
un flotador sujeto a una cuerda que rodea una polea y se desliza hacia a-
bajo, con un contrapeso. Un mecanismo de reloj hace girar un cilindro -
provisto de un papel especialmente graduado, por debajo de la polea y su-
jeto por un tornillo existe un lápiz que va pintando en el papel la va-
riación que el flotador tiene y se obtiene una gráfica como el de la fi-
gura.

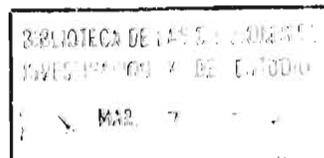


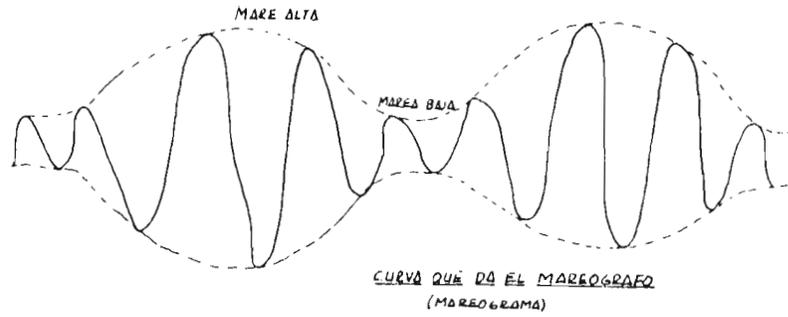
Posteriormente éste instrumento se modificó ligeramente de modo que pueda medir ondas de período largo y para ello se selló la parte inferior de la tubería y sólo se le dejó un agujero pequeño, de tal manera que al producirse la ola se ejercía una presión sobre el agujero y ésta se transmitía al líquido de la tubería y hacía elevar su nivel y por consiguiente al flotador. Las olas pequeñas no alcanzaban a hacer sentir las presiones que ejercían, ya que las de mayor período y mayor presión, predominaban y de ésta manera se obtenía un registro sólo de la marea, como se muestra esquemáticamente



Este último instrumento modificado, precisamente es el fundamento — del mareógrafo, en el que se dón algunas normas, por ejemplo que el área del orificio sea de $1/200$ del de la tubería, lo que asegura que las ondas pequeñas no afecten al flotador y de éste modo obtener los registros.

Por lo general el mareógrafo registra también olas que no son de marea, y en base a ellas se puede determinar la onda de marea, que estará — dada por una envolvente, como se puede ver en la gráfica siguiente





El mecanismo del cilindro del mareógrafo que contiene el papel, gira más o menos una pulgada por hora y el mecanismo dá una marca en el papel, cada hora, y así se pueden determinar las alturas horarias directamente — del mareograma.

Capítulo III

DETERMINACION Y ANALISIS ARMONICO DE LAS COMPONENTES DE LA MAREA.

1.- Determinación de las Componentes de la Marea

El potencial de generación de mareas está dado por:

$$V_2 = \frac{1}{3} G_M (3 \cos 2\theta + 1) \left(\frac{c}{r_M} \right)^3$$
$$V_3 = \frac{1}{6} G_M (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta) \left(\frac{c}{r_M} \right)^4 - \frac{a}{c} \quad (1)$$

En las que:

G_M es un coeficiente de marea dado por Doodson y es igual a

$$G_M = \frac{3}{4} f M \frac{a^2}{c^3}$$

Siendo: fM = Fuerza de atracción de la luna

a = Radio de la tierra

c = Distancia del centro de la tierra a la luna

θ = Distancia zenital del punto de la tierra que se considere

r_M = Distancia del centro de la tierra al de la luna.

Las expresiones (1) tienen dos cantidades variables, θ , que depende de la posición del punto sobre la tierra y c/r_M , que depende de la variación de distancia entre la luna y la tierra.

La variable en el potencial generador de mareas, definida en (1), es la distancia zenital θ . Esta cantidad cambia periódicamente debido a dos efectos: El período medio es debido a la rotación diaria de la tierra -- (24 hs.), combinado con el movimiento de la luna en ésta órbita (50 minutos por día), que produce el día lunar (24 hs. 50min.) y otra variación - secundaria causada por el movimiento de la luna, en ésta órbita, durante el mes lunar, el cual resulta en la periodicidad media mensual de una declinación δ en 27.3 días medios solares (mes tropical).

De ésta manera, $\cos Q$, puede ser expresado en términos de coordenadas celestes referidas en las figs. de la página número 14, en las que:

H = Angulo hora: arco entre el meridiano del observador y que pasa por la luna y los polos, se mide hacia el lado Oeste.

δ = Declinación: arco entre la estrella considerada y el ecuador, expresado en grados al norte o sur del ecuador.

β = Latitud: distancia angular del cuerpo celeste, al norte o sur del eclíptico.

λ = Longitud: Arco a lo largo del eclíptico, entre T , equinoccio vernal o primer punto de aries, (intersección del eclíptico con el ecuador) y el pie del círculo mayor que pase por el eclíptico. Es positiva si está al lado Este, a partir de T .

Ω, Ω' = Nodos, superior e inferior: puntos de intersección entre el eclíptico y la órbita de la luna.

ϕ = Latitud terrestre: arco desde el punto del observador al ecuador.

T' = Equinoccio invertido: pie de la perpendicular, al eclíptico, bajada desde T , sobre la órbita lunar.

γ = Ascensión directa de la intersección de la órbita lunar y el ecuador.

ϱ = Longitud de ésta intersección sobre la órbita lunar.

μ = Distancia entre la luna y T .

ξ = Angulo del ecuador con el eclíptico.

ϵ' = Angulo entre el eclíptico y la recta MT .

I = Angulo entre el ecuador y la órbita lunar.

i = Angulo entre el eclíptico y la órbita lunar.

X' = Intersección del meridiano del observador y el ecuador.

M' = Intersección del meridiano que pasa por la luna y el ecuador.

G = Intersección del meridiano de Greenwich y el ecuador.

A = Intersección del ecuador con la órbita lunar.

L = Intersección del meridiano que pasa por la luna y la órbita lunar.

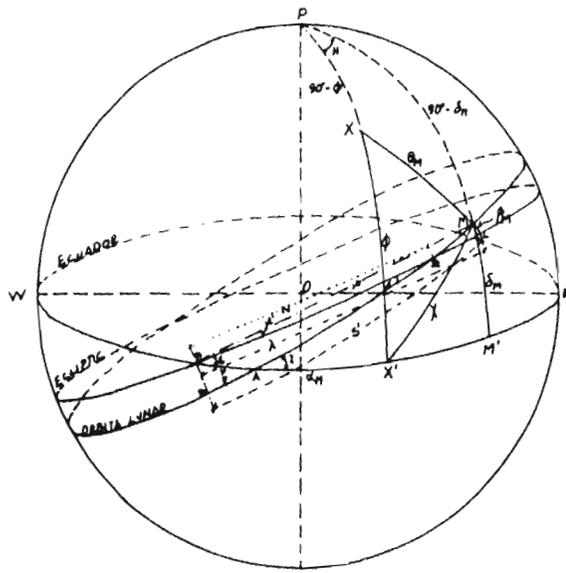
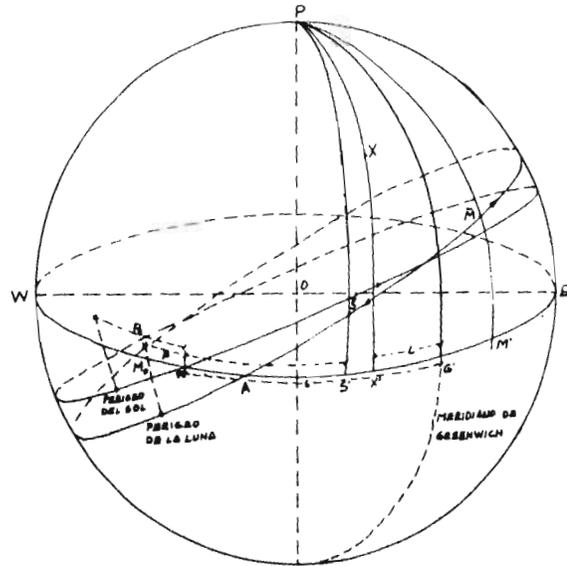
\bar{S}' = Intersección del meridiano que pasa por el sol y el ecuador.

\bar{l} = Distancia $G X'$ sobre el ecuador.

s = Longitud media de la luna ($M'T$ sobre el ecuador).

h = Longitud media del sol.

p = Longitud media del perigeo de la luna.



- p_{\odot} = Longitud media del perigeo del sol.
 Q_x = Tiempo sideral local en el punto X: Arco sobre el ecuador medido hacia el lado oeste, a partir del meridiano del observador hasta γ , se puede dar en grados (1 hora sideral = 15°)
 t = Tiempo medio solar en Greenwich.
 t_x = Tiempo medio solar en un punto X sobre la tierra: arco a lo largo del ecuador, medido hacia el lado oeste, a partir del meridiano del observador hasta la posición media del sol sobre el ecuador. El día medio solar es mayor que el sideral en 3 min. - - - 55,91 seg. medios solares.
 τ_x = Tiempo medio lunar.
 χ = Distancia entre M y X'.
 N = Distancia entre Ω y \mathcal{T} , longitud media del nodo ascendente.

De esta manera se tiene que en triángulo MPX, en el que M es la posición de la luna, P el polo norte y X la posición del observador, por la fórmula del coseno, en un triángulo esférico, se tiene:

$$\cos \theta = \text{Sen } \beta \text{ Sen } \delta + \text{Cos } \beta \text{ Cos } \delta \text{ Cos } H. \quad (2)$$

Si este valor se substituye en las expresiones (1) se obtiene:

$$V_2 = \left(\frac{c}{r} \right)^3 G \left[\frac{1}{3} (1-3\text{sen}^2 \beta)(1-3\text{sen}^2 \delta) + \text{Sen } 2\beta \text{ Sen } 2\delta \text{ cos } H + \text{cos}^2 \beta \text{ cos}^2 \delta \text{ Cos } 2H \right] \quad (3)$$

$$V_3 = \left(\frac{c}{r} \right)^4 \left(\frac{a}{c} \right) G \left[\frac{1}{3} \text{sen } \beta (3-5 \text{sen}^2 \beta) \text{ sen } \delta (3-5 \text{sen}^2 \delta) + \frac{1}{2} \text{cos } \beta (1-5 \text{sen}^2 \beta) \text{ cos } \delta (1-5 \text{sen}^2 \delta) \text{ cos } H + 5 \text{sen} \beta \text{ Cos}^2 \beta \text{ sen } \delta \text{ cos}^2 \delta \text{ cos } 2H + \frac{5}{8} \text{cos}^3 \beta \text{ cos}^3 \delta \text{ cos } 3H \right] \quad (4)$$

En cada una de las expresiones, un término es independiente de H, en cambio los demás dependen de $\text{cos } H$, $\text{cos } 2H$ y $\text{cos } 3H$, esto permite separar y obtener las componentes de largo período, diurnas, semi-diurnas y tercias-diurnas. Cada uno de los tipos de componentes están multiplicados por funciones con β , δ y la distancia a la luna. Los primeros términos de V_2 y V_3 son independientes de H, pero están sujetos a variaciones en la declinación y la distancia a la luna, y ambos, a la vez, varían levemente

te en el curso de un mes. Las componentes de largo período, sin embargo generalmente tienen períodos de medio mes o más. El segundo término, que depende de $\cos H$, determina las componentes diurnas con períodos aproximados de un día lunar y el tercer término, que contiene a $\cos 2H$, incluye a las componentes semi-diurnas con períodos, aproximados de medio día lunar. El término, con $\cos 3H$, en V_3 , tiene una influencia muy pequeña sobre las mareas; los demás términos que contienen δ y C/r también varían durante un mes.

El análisis para el caso del sol, es completamente similar que para la luna, pero en éste caso se puede despreciar toda la V_3 . Las amplitudes de las mareas solares son obtenidas a partir de las amplitudes de las mareas lunares, multiplicándolas por 0.46, es decir que las solares son el 46% de las respectivas lunares.

Para poder continuar con el desarrollo del potencial de marea se dan las fórmulas del movimiento de la luna y el sol.

a) Sol:

$$\frac{C}{R} = 1 + e_s \cos(h-p_s) = 1 + 0.017 \cos(h-p_s) \quad (5)$$

$$\lambda_s = h + 2e_s \sin(h-p_s) = h + 0.0034 \sin(h-p_s) \quad (6)$$

Donde $e_s = 0.0167$ y es la excentricidad del sol y todos los demás términos ya han sido definidos.

b) Luna:

$$\frac{C}{R} = 1 + 0.055 \cos(s-p) + 0.003 \cos 2(s-p) + 0.01 \cos(s-2h+p) + 0.007 \cos 2(s-h) \quad (7)$$

$$\lambda = s + 0.110 \sin(s-p) + 0.004 \sin 2(s-p) + 0.02 \sin(s-2h+p) + 0.011 \sin(2s-2h) \quad (8)$$

$$\beta = 0.089 \sin(s-N) + 0.05 \sin(2s-p-N) - 0.005 \sin(p-N) \quad (9)$$

En estas condiciones, Laplace fué el primero que trató de obtener el

FALTAN PAGINAS

De la:

17

A la:

20

$$1,005 \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varepsilon \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \varepsilon \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{sen} (\theta - 2s) + \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{sen} (\theta + 2s) \right\} \quad (23)$$

y siendo $\varepsilon = 27^\circ 27' 8''$ se tiene que

$$0,367 \operatorname{sen} \theta - 0,384 \operatorname{sen} (\theta - 2s) + 0,016 \operatorname{sen} (\theta + 2s) \quad (24)$$

se acostumbra llamar:

$$0,367 \operatorname{sen} \theta = \text{componente } K_1$$

$$0,384 \operatorname{sen} (\theta - 2s) = \text{componente } O_1$$

$$0,016 \operatorname{sen} (\theta + 2s) = \text{componente } OO_1$$

que son las principales componentes diurnas de la marea lunar.

c) Componentes Armónicas de Largo Periodo. Los términos que quedan en el potencial V_2 , después de sacar los términos que contienen a 2θ y θ , son:

$$2(C/r)^3 G \left[\operatorname{sen}^2 \beta \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \varepsilon (1 + \cos 2\beta)(1 - \cos 2\lambda) + \frac{1}{2} \cos^2 \varepsilon (1 - \cos 2\beta) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varepsilon \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} \lambda \right\} + \cos^2 \beta \left\{ \frac{1}{8}(1 + \cos 2\beta)(1 + \cos 2\lambda) + \frac{1}{8} \cos^2 \varepsilon (1 + \cos 2\beta)(1 - \cos 2\lambda) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \varepsilon (1 - \cos 2\beta) - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varepsilon \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} \lambda \right\} - \frac{1}{3} \right] \quad (25)$$

de manera análoga que en los casos anteriores, introduciendo las simplificaciones el factor entre corchetes se puede escribir despreciando los términos de 2º orden de β y Δ :

$$\operatorname{sen}^2 \beta \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varepsilon (1 - \cos 2s + 2\Delta \operatorname{sen} 2s) + \beta \operatorname{sen} 2\varepsilon \operatorname{sen} s \right\} + \cos^2 \beta \left\{ \frac{1}{4} (1 + \cos 2s - 2\Delta \operatorname{sen} 2s) + \frac{1}{4} \cos^2 \varepsilon (1 - \cos 2s + 2\Delta \operatorname{sen} s) - \frac{1}{2} \beta \operatorname{sen} 2\varepsilon \operatorname{sen} s \right\} - \frac{1}{3}$$

los términos de mayor importancia están subrayados y de igual forma si son multiplicados por el término constante de C^3/r^3 se obtiene:

$$G 1,005 (1 - 3 \operatorname{sen}^2 \beta) \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varepsilon \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varepsilon \cos 2s \right] \quad (26)$$

de (26) se obtienen las componentes de período largo, las mismas que en la práctica no se toman en cuenta dada la pequeña magnitud que representan, ellas son denominadas por M_f, M_m, MS_m, MS_f .

B.- Componentes del Sol.— Siendo el movimiento del sol menos irregular que el de la luna, el número de las componentes armónicas del sol es menor que en la luna, y como se dijo anteriormente, el equilibrio solar de marea es 0.46 del lunar.

Las fórmulas que se utilizan en éste desarrollo son similares a las de la luna, variando sólo en la nomenclatura que para el caso del sol, lleva un subíndice "s".

La fórmula para $\cos \theta_s$, está dada por (15), donde ϵ la oblicuidad del eclíptico y θ el tiempo sideral, λ_s es de la longitud del sol que puede ser expresada por (6) en términos de h y p_s .

El potencial de marea está directamente relacionado con la altura de la marea solar mediante

$$\xi_s = H_{s1} (\cos 2 \theta_s + 1/3)$$

donde: ξ_s = altura de la marea solar

$$H_s = \frac{G_s}{g} (C/r)_s^3 \quad G_s = \text{coeficiente de marea para el sol}$$

de ésta manera si se hace intervenir (15), en ésta fórmula se halla también que existen mareas diurnas, semi-diurnas y de período largo, - las mismas que se deducen a continuación:

a) Componentes Semi-diurnas.- A partir de (15) y (27) se tiene que:

$$G_s \cos^2 \theta (C/r)_s^3 \left[\cos 2\theta \left\{ 1/2 \operatorname{sen}^2 \epsilon + 1/2(1+\cos^2 \epsilon) \cos 2\lambda_s \right\} + \operatorname{sen} 2\theta \cos \epsilon \operatorname{sen} 2\lambda_s \right] \quad (28)$$

Si se toma en cuenta (6) para λ_s , los términos que están entre corchetes, en (28), y se desprecian los términos de 2º orden, se tiene:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \epsilon + 1/2(1+\cos^2 \epsilon) \right] \left\{ \underline{\cos 2h} - 0.034 \cos (h+p_s) + \right. \\ \left. + 0.034 \cos (3h-p_s) \right\} + \operatorname{sen} 2\theta \left[\cos \epsilon \left\{ \underline{\operatorname{sen} 2h} - 0.034 \operatorname{sen}(h+p_s) + \right. \right. \\ \left. \left. + 0.034 \operatorname{sen}(3h-p_s) \right\} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

en la que los términos más importantes han sido subrayados. Tomando los términos subrayados y considerando que $\epsilon = 23^\circ 45'$ y omitiendo el término constante $G_s \cos^2 \theta$ y utilizando la parte constante del coeficiente $(C/r)_s^3$, dan:

$$0.079 \cos 2\theta + 0.919 \cos(2\theta - 2h) + 0.002 \cos(2\theta + 2h) \quad (30)$$

el tercer término puede ser omitido y se acostumbra llamar:

0.079 $\cos 2h$ = componente K_2
 0.919 $\cos (2\theta - 2h)$ = componente S_2

Si la componente S_2 se multiplica por los términos variables de $(C/r)_s^3$, si se obtiene una componente T_2 que constituye la principal - componente elíptica semi-diurna del sol.

b) Componentes Diurnas. A partir de (15) y (27) se tiene que:

$$G_s \text{ sen } 2\beta (C/r)_s^3 \text{ sen } \varepsilon [\cos \theta \text{ sen } 2 \lambda_s + \text{ sen } \theta \cos \varepsilon (1 - \cos 2 \lambda_s)] \quad (31)$$

tomando en cuenta (6) para λ_s , los términos que están entre corchetes se pueden escribir:

$$\begin{aligned} & \cos \theta [\text{sen } 2h - 0.034 \text{ sen}(h+p_s) + 0.034 \text{ sen}(3h-p_s)] + \\ & + \text{ sen } \theta [\cos \varepsilon \{ \text{sen } 2h + 0.034 \cos(h+p_s) - 0.034 \cos(3h-p_s) \}] \quad (32) \end{aligned}$$

en la que los términos más importantes están subrayados.

De manera análoga a los casos anteriores, multiplicando por el término constante de $(C/r)_s^3$ y despreciando los términos de segundo orden se obtienen las componentes K_1 , P_1 y β_1 ; la componente K_1 , aparece tanto en la luna como en el sol, en las componentes diurnas, por eso se le llama: componente solar-lunar declinacional diurna. Como pasa lo contrario con P_1 , que sólo aparece en el sol se le llama: componente solar declinacional diurna. Si se consideran los términos variables del factor de paralaje, se obtiene una componente η_1 , que es la más importante de las componentes diurnas del sol.

c) Componentes de Período Grande.- Estas componentes pueden ser obtenidas a partir de:

$$G_s (1 - 3 \text{ sen}^2 \beta) (C/r)_s^3 [(1/3 - 1/2 \text{ sen}^2 \varepsilon) + 1/2 \text{ sen}^2 \varepsilon \cos 2 \lambda_s] \quad (33)$$

y siguiendo un procedimiento análogo a los casos anteriores, con los términos entre corchetes, se llega a tener que son:

$$0.254 + 0.079 \cos 2h + 0.013 \cos(h-p_s)$$

expresión que da lugar a las componentes respectivas, el término constante que se obtiene es denominado como componente S_{su} del sol y las -

siguientes S_a y MS_1 , respectivamente. Se ha determinado, a partir de observaciones, que S_{aa} y S_a están predominadas por factores metereológicos.

Además de éstas componentes, también existen otras de relativa importancia y que están consideradas dentro de las "Mareas en aguas poco Profundas". Dentro de ellas se distinguen las "sobremareas" y las — "mareas compuestas". Ambas son originadas principalmente por las componentes semi-diurnas del sol, M_2 y S_2 . Las sobre mareas de la luna — son llamadas por los símbolos M_4 , M_6 y M_8 , y las del sol por S_4 , S_6 y S_8 , los subíndices indican el número de oscilaciones por día. El número de mareas compuestas es mucho mayor, las componentes astronómicas a partir de las cuales son derivadas son: M_2 , S_2 , N_2 , K_1 y O_1 . Sus símbolos son dados por el símbolo de la componente astronómica que le ha dado origen y los subíndices indican el período expresado en partes de una marea diurna, (por ejemplo MS_4 es la suma de M_2 y S_2 y el índice 4 indica que es una marea cuarto-diurna (suma de las velocidades angulares)).

En general, cada una de las componentes tiene una velocidad angular que está dada en grados o en radianes.

A continuación se dan éstas velocidades para las componentes antes mencionadas, así como la fórmula que se utilizaría para el cálculo numérico del factor de nodo, f , que corrige la longitud media hn , en la tabla número 1.

TABLA NO. 1.

Símbolo	Origen	Veloc. angular ω (grad/h sol)	Factor de nodo (f)
K_2	L	30.082	$\text{Sen}^2 1/0.1565$
M_2	L	28.984	$\text{Cos}^4 1/2/0.9154$
K_1	L	15.041	$\text{Sen} 21/0.7214$
O_1	L	13.943	$(\text{Sen} 1 \cos^2 1/21)/0.38$
OO_1	L	16.139	$(\text{Sen} 1 \text{sen}^2 1/21)/0.0164$
M_f	L	1.098	$\text{Sen}^2 1/0.1578$
M_m	L	0.514	$(2/3-\text{sen}^2 1)/0.5021$
MS_m	L	0.471	$(2/3-\text{sen}^2 1)/0.5021$
MS_f	L	1.015	$(2/3-\text{sen}^2 1)/0.5021$
N_2	L	28.439	$\text{Cos}^4 1/21/0.9154$
K_2	S	30.082	1
S_2	S	30.000	1
K_1	S	15.041	1
P_1	S	14.958	1
ϕ_1	S	15.123	1
1	S	14.917	1
S_{sa}	S	0.082	1
S_a	S	0.041	1

2.- Análisis Armónico de las Componentes de la Marea.

En el transcurso del tiempo muchos métodos aproximados han sido desarrollados para el análisis armónico de las mareas. Todos los métodos están basados en la agrupación de observaciones en las que más o menos son eliminadas las influencias meteorológicas. Así por ejemplo el método de mínimos cuadrados, puede ser aplicado rigurosamente y se puede determinar la amplitud y la variación de la marea. También surgieron muchos métodos muy ingeniosos a raíz de los trabajos hechos por Doodson en el Instituto de Marea de Liverpool, cuyo primer trabajo fue publicado en 1928. Publicó varios métodos para el análisis de períodos pequeños de observación, 15 y 29 días, entre ellos se encuentra el llamado "Método del Almirantazgo para el Análisis de Marea", el mismo que está desarrollado con ayuda de tablas que el mismo Doodson propuso. En los últimos años, la aplicación del método Armónico usando computadoras electrónicas ha tomado mucho impulso en diferentes institutos hidrográficos y oceanográficos ya que la ventaja está en el ahorro de tiempo con uso de las máquinas.

Dentro de todos los métodos, el del Almirantazgo tiene una gran importancia práctica para la determinación de las componentes de la marea ya que para los propósitos de ingeniería, la mayoría de veces se tienen que hacer estudios de mareas a partir de un número limitado de días de observación, y el método aplicable a computadoras también es bastante práctico por el mismo hecho de usar máquinas a cambio de que se necesitan varios datos (por lo menos 8857 que equivalen a las observaciones horarias de un año).

Por los motivos antes expuestos se ha visto conveniente explicar éstos dos métodos de análisis.

A).- Método del "Almirantazgo".- Como se dijo, este método es debido a Doodson, quien lo desarrolló para determinar las componentes medias M_2 , S_2 , N_2 , K_2 , K_1 , O_1 , P_1 , M_4 y MS_4 , usando una serie de observaciones de 15 o 29 días, el proceso que se resume es para el caso de 29 días de datos.

Sea que el nivel del agua, causada por las K componentes mencionadas, se pueda expresar por:

$$h(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{K+1} H_n \cos(\omega_n t - \alpha_n) \quad (34)$$

en la que: S_0 = Altura del nivel medio del mar, sobre el nivel cero de la medida de mareas.

$H_n = fh_n$ = factor de nodo de la componente multiplicada por la amplitud de la misma.

t = tiempo relacionado con el tiempo central origen de las 11 hs. - 30 m. del día referido en media noche $t = -11.5$ y el argumento de la componente será entonces $(-11.5 \omega_n - \alpha_n)$

α_n = es el argumento de la componente a las 11 hs. 30 min.

Si se desarrolla el coseno de la diferencia, en (34) y se omiten los subíndices se tiene:

$$h(t) = S_0 + \sum_k (H \cos \alpha \cos \omega t + H \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \omega t) \quad (35)$$

En estas condiciones si se quiere determinar X_0 (suma de las 24 alturas horarias), para determinar el nivel medio diario se tiene

$$X_0 = \sum_0^{24} h(t) = 24S_0 + \sum_k H \cos \alpha \sum_{t=0}^{24} \cos \omega t + H \operatorname{sen} \alpha \sum_{t=0}^{24} \operatorname{sen} \omega t$$

en esta expresión la suma de los términos con $H \operatorname{sen} \alpha$ es cero, ya que $\operatorname{sen}(-r) = -\operatorname{sen} r$ y de esta manera se tiene:

$$X_0 = 24S_0 = \sum_k F_0 H \cos \alpha \quad (36)$$

$$\text{donde } F_0 = \operatorname{sen} 12\omega \operatorname{cosec} 0.5\omega \quad (37)$$

Si se substituyen los valores de ω (dados en la tabla número 1), para cada componente, y se considera, en (36), que por ejemplo H_{M2} — $\cos M_2$ es reemplazado por M_2 , se obtiene:

$$X_0 = 24 S_0 - 0.84 M_2 - 1.31 N_2 + 0.06 K_2 - 0.06 K_1 + 1.82 O_1 + 0.06 P_1 - 0.85 M_4 - 0.43 M_3 - 1.71 M_5$$

de manera general en las funciones X_{pq} , Y_{pq} , la p indica la clase de componente (1=diurnas, 2=semi-diurnas y 4 cuartas diurnas) y la q indica el número de oscilaciones mensuales. De esta manera para determinar las sumas $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_4, Y_4$, se asume que son oscilaciones con velocidades angulares de $15^\circ, 30^\circ$ y 60° por hora solar. Para agrandar un grupo con respecto a los otros dos, dos tipos de sumaciones, X_p y Y_p , son obtenidas por cada clase p, de marea.

El primer tipo, X_p , es una suma sobre las altas horarias para las cuales, $\cos p.15^\circ t$, es positivo y otra sobre las altas horarias para las que es negativo. En éstas sumas, los términos en $H \operatorname{sen} \alpha$ son siempre cero, en consecuencia la expresión general para X_p ($p=1,2,4$) es:

$$X_p = \sum_k H \cos \alpha \left[\sum_{\cos p.15^\circ t > 0} \cos \omega t - \sum_{\cos p.15^\circ t < 0} \cos \omega t \right]$$

El segundo tipo de suma, es sobre las altas horarias para las cuales $\operatorname{sen} p.15^\circ t$, es positivo y otra para las cuales es negativo, en éstas sumas los términos en $H \cos \alpha$, siempre son cero. La expresión general para Y_p es:

$$Y_p = \sum_k H \operatorname{sen} \alpha \left[\sum_{\operatorname{sen} p.15^\circ t > 0} \operatorname{sen} \omega t - \sum_{\operatorname{sen} p.15^\circ t < 0} \operatorname{sen} \omega t \right]$$

Para llevar a cabo éstas sumas existe una convención de signos, los cuales se dan en la tabla número 2, los signos de arriba se refieren a las horas de 0-11 y las de abajo a las 23-12.

TABLA NO. 2
SIGNOS PARA LAS SUMAS DIARIAS.

HORAS SOLARES SUMAS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
X_1	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
Y_1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
X_2	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+
Y_2	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
X_4	+	0	-	-	0	+	+	0	-	-	0	+
Y_4	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-
	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+

De manera análoga (36) se puede desarrollar y para $p = 1, 2, 4$, las ecuaciones se pueden escribir:

$$X_p = \sum_k F_{xp} H \cos \alpha \tag{38}$$

$$Y_p = \sum_k F_{yp} H \sin \alpha$$

en las que:

$$\begin{aligned} F_{X_1} &= 2 \operatorname{sen} 6\omega \operatorname{sen}^2 3\omega \operatorname{cosec} 0.5\omega \\ F_{Y_1} &= 8 \operatorname{sen} 6\omega \cos 3\omega \cos 1.5\omega (1+2\cos \omega) \\ F_{X_2} &= -8 \cos 6\omega \operatorname{sen} 3\omega \operatorname{sen} 1.5\omega (1+2\cos \omega) \\ F_{Y_2} &= -8 \cos 6\omega \operatorname{sen} 3\omega \cos 1.5\omega (1+2\cos \omega) \\ F_{X_4} &= -16 \cos 6\omega \cos 3\omega \operatorname{sen} 1.5\omega \operatorname{sen} \omega \\ F_{Y_4} &= -8 \cos 6\omega \cos 3\omega \operatorname{sen} 1.5\omega (1+2\cos \omega) \end{aligned} \tag{39}$$

Si los valores de ω , dados en la tabla número 1, para las diferentes componentes, se substituyen en las expresiones (39) se obtienen los valores numéricos de F_{xp} y F_{yp} , los mismos que se resumen en la tabla número 3 que se da a continuación

TABLA NO. 3

COMP. SUMA	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1	M_4	MS_4	$2MS$
X_0	-0.84	0	-1.31	0.06	-0.06	1.82	0.06	-0.85	-0.43	-1.71
X_1	1.69	0	2.63	-0.13	15.35	14.57	15.30	-0.02	0	3.46
Y_1	0.09	0	0.22	0	15.28	16.28	15.34	0.18	0.05	0.37
X_2	15.03	15.46	14.71	15.48	0.03	-0.62	-0.02	-1.70	-0.86	14.38
Y_2	15.85	15.46	15.96	15.34	0.07	-1.62	-0.07	-0.09	-0.02	16.00
X_4	0.28	0	0.42	-0.03	0	-0.05	0	13.17	13.00	0.52
Y_4	0.80	0	1.20	-0.07	0.03	-0.69	-0.03	16.00	16.12	1.54

En las relaciones (38) los valores de $H \cos \alpha$ y $H \sin \alpha$, de las componentes mencionadas en la tabla, son desconocidas.

Para cada serie de observaciones diarias, los valores X_p y Y_p pueden ser determinados. Desde que para todas las componentes, excepto S_2 , se tiene

$$24 \omega - p \cdot 360^\circ = \xi \neq 0 \quad (40)$$

los valores de $H \cos \alpha$ y $H \sin \alpha$ (a las 11 hrs 30 m) varían día a día.

Sea ξ el incremento diario de una componente n , con un argumento α_n , a las 11 hrs. 30 min., para el medio día ($d=0$) de una serie de observaciones, entonces para la suma $X_p(d)$ en el día d , se puede escribir:

$$X_p(d) = \sum_k F_{xp} H \cos (\alpha - d\xi) \quad (41)$$

y análogamente

$$Y_p(d) = \sum_k F_{yp} H \sin (\alpha - d\xi)$$

donde d es un entero, $-14, 0, 14$. (30 días)

Los incrementos diarios ξ , para cada componente son dados en las tablas número 4, los valores de $d\xi$ expresados en términos de grados en un periodo de 28 días también se dan en la misma tabla.

TABLA NO. 4

COMP INCR	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O	P_1	M_4	MS_4	$2MS$
ξ	2438	0	-3745	197	099	-2537	-099	-4876	-2438	-4676
28ξ	-6286	0	-10485	55	275	-7105	-275	-1366	-6826	-1365

Continuando con el método se determinan combinaciones de sumas diarias de X_p y Y_p , tales que en cada suma realizada un grupo determinado de componentes puede ser determinado.

El nivel medio S_0 con respecto al nivel cero de la medición de las mareas se define mediante la suma de los 29 valores de X_0 , ya que en X_0 la contribución de las componentes es pequeña, como se puede ver en

la tabla número 3.

A partir de la tabla número 4, se pueden apreciar cuatro grupos, - el primero, conteniendo S_2 , K_2 , K_1 y P_1 para los cuales 28ξ está entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$; el segundo grupo, M_2 , MS_4 y O_1 para los cuales 28ξ cambia en $2 \times 360^\circ - \beta$; el tercer grupo, N_2 , el cual cambia en $3 \times 360^\circ - \delta$; y el cuarto grupo, M_4 y $2MS$, los cuales cambian en $4 \times 360^\circ - \delta$, donde β, γ y δ son ángulos entre 0 y $+\pi/2$.

Para calcular las componentes del primer grupo (S_2, K_2, K_1 y P_1) - los cuales tienen un incremento mensual pequeño, se realiza una suma de los valores diarios de X_p y Y_p ($p=1,2,4$), en un período $d=14$ a $d=14$. Estas sumas se anotan con un segundo subíndice 0 , después del primero - y son:

$$X_{p0} = \sum_{d:-14}^{14} X_p(d) = \sum_k F_{X_p} \left[H \cos \alpha \sum_{d:-14}^{14} \cos d\xi + H \sin \alpha \sum_{d:-14}^{14} \sin d\xi \right]$$

las funciones que contienen seno, son cero, ya que: $\sin(-d) = -\sin d\xi$ de manera que se tiene

$$X_{p0} = \sum_k F_{X_p}^0 H \cos \alpha \quad (42)$$

en forma análoga para Y se tiene

$$Y_{p0} = \sum_{d:-14}^{14} Y_p(d) = \sum_k F_{Y_p} \left\{ H \sin \alpha \sum_{d:-14}^{14} \cos d\xi - H \cos \alpha \sum_{d:-14}^{14} \sin d\xi \right\}$$

en esta expresión las funciones con $H \cos \alpha$ son iguales a cero y se tiene:

$$Y_{p0} = \sum_k F_{Y_p}^0 H \sin \alpha \quad (43)$$

Los valores de F_0^0 , que son los mismos en (42) y (43), se darán en la tabla número 6.

Para determinar las sumas de los otros grupos de componentes, denominadas en el segundo subíndice con $q=2,3$, y 4 (las cuales tienen aproximadamente, $2, 3$, y 4 oscilaciones de $d\xi$, por día), se asume que éstos grupos tienen un incremento diario de, exactamente, $(360/28)q = \bar{\xi}q$.

De manera análoga al tratamiento anterior, en éste caso también se obtienen dos tipos de sumas.

El primer tipo de suma es sobre los valores diarios de X_p (ó Y_p), con un valor positivo para los \overline{d}_{ξ}^q y el otro con un valor negativo - para los \overline{d}_{ξ}^q . Estas sumas se denominan por X_{pq}^c y Y_{pq}^c respectivamente, siendo $p=1,2,4$ y $q=2,3,4$, en este caso la suma en los términos - en $\text{sen } d_{\xi}$ es igual a cero y así se tiene:

$$\begin{aligned} X_{pq}^c &= \sum_{\cos \overline{d}_{\xi}^q > 0} X_p(d) - \sum_{\cos \overline{d}_{\xi}^q < 0} X_p(d) = \\ &= \sum_k F_{xp} H \cos \alpha \left\{ \sum_{\cos \overline{d}_{\xi}^q > 0} \cos d_{\xi} - \sum_{\cos \overline{d}_{\xi}^q < 0} \cos d_{\xi} \right\} = \\ &= \sum_k F_{pq}^c F_{xp} H \cos \alpha \end{aligned} \quad (44)$$

y de manera análoga para Y se tiene:

$$\begin{aligned} Y_{pq}^c &= \sum_{\cos \overline{d}_{\xi}^q > 0} Y_p(d) - \sum_{\cos \overline{d}_{\xi}^q < 0} Y_p(d) = \\ &= \sum_k F_{yp} H \text{sen} \alpha \left\{ \sum_{\cos \overline{d}_{\xi}^q > 0} \cos d_{\xi} - \sum_{\cos \overline{d}_{\xi}^q < 0} \cos d_{\xi} \right\} = \\ &= \sum_k F_{pq}^c F_{yp} H \text{sen} \alpha \end{aligned} \quad (45)$$

los valores de F_{pq}^c para las diferentes componentes, y que son iguales en (44) y (45) se dan en la tabla número 6.

El segundo tipo de suma, comprende también dos, una para los valores positivos de $\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q$ y otra con valores negativos de $\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q$. - En éstas sumas como $\cos(-d_{\xi}) = -\cos d_{\xi}$, la suma en los términos en $\cos d_{\xi}$ son cero. Estas sumas se denominan por X_{pq}^s y Y_{pq}^s , siendo $p=1,2,4$ y $q=2,3,4$.

$$\begin{aligned} X_{pq}^s &= \sum_{\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q > 0} X_p(d) - \sum_{\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q < 0} Y_p(d) = \\ &= \sum_k F_{xp} H \text{sen} \alpha \left\{ \sum_{\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q > 0} \text{sen } d_{\xi} - \sum_{\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q < 0} \text{sen } d_{\xi} \right\} = \\ &= \sum_k F_{pq}^s F_{xp} H \text{sen} \alpha \end{aligned} \quad (46)$$

de manera análoga para Y se tiene:

$$\begin{aligned} Y_{pq}^s &= \sum_{\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q > 0} Y_p(d) - \sum_{\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q < 0} Y_p(d) = \\ &= \sum_k F_{yp} H \cos \alpha \left\{ \sum_{\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q > 0} \text{sen } d_{\xi} - \sum_{\text{sen } \overline{d}_{\xi}^q < 0} \text{sen } d_{\xi} \right\} = \\ &= \sum_k F_{pq}^s F_{yp} H \cos \alpha \end{aligned} \quad (47)$$

Los valores numéricos de F_{pq}^s , que es el mismo en (46) y (47), se dan en la tabla número 6, para las diferentes componentes.

En la tabla número 5 se dan los signos para los valores diarios - X_p y Y_p para las sumas X_{pq}^c , Y_{pq}^c , X_{pq}^s ($p=1, 2, 3$), y Y_{pq}^s

TABLA NO. 5
SIGNOS PARA LAS SUMAS MENSUALES

Días INFERIORES c.9 a 6,9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	
C,2	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
C,3	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+
C,4	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
S,2	0	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	0
S,3	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	0
S,4	0	-	-	-	+	+	+	0	-	-	-	+	+	+	0

Los signos que aparecen en la parte superior corresponden a los días 1-14 y los inferiores a 16-20.

Debido al hecho que los incrementos de S_2 y K_2 y los del K_1 y P_1 difieren muy poco los valores para F_q^c y F_q^s no se dan para K_2 y P_1 , en la tabla número 6.

Cuando los valores de ξ , para varias componentes, se substituyen en las sumas indicadas de (44) a (47), los valores, F_q^c ó F_q^s , dados en la tabla número 6, son los correctos. Si los valores de F_{xp} y F_{yp} , de la tabla número 3, se multiplican por los valores dados en la tabla número 6, de acuerdo con (44) a (47), se pueden obtener esos diferentes productos para cada componente.

TABLA NÚM. 6

VALORES DE F_0^0 , F_q^c y F_q^s

IND. COMP. C, 9, 2, 3, 4	M ₂	S ₂	N ₂	K ₂	κ ₁	O ₁	P ₁	M ₄	MS ₄	2MS
0;0	-0.53	29	-0.16	27.82	28.70	0.62	28.70	-0.54	-0.53	-0.54
C;2	18.09	1	1.13		0.92	18.82		-2.03	18.09	-2.03
S;2	17.83	0	1.19		1.43	17.66		-0.82	17.83	-0.82
C;3	1.53	1	18.42		1.00	2.95		-0.36	1.53	-0.36
S;3	-2.76	0	18.38		-1.19	0.76		2.47	-2.76	2.47
C;4	-1.33	1	1.35		0.95	-1.44		18.19	-1.33	18.19
S;4	1.05	0	-1.55		0.61	0.29		16.60	1.05	16.60

Posteriormente Doodson dijo que la existencia de componentes separadas obliga a hacer otras combinaciones apropiadas para tomarlas en cuenta, éstas combinaciones son hechas con X_{pq}^c , Y_{pq}^c , X_{pq}^s y Y_{pq}^s . En estas combinaciones se niegan las componentes secundarias y así se da:

$$\sum_{pq} A_{pq} (X_{pq}^c - Y_{pq}^s) + A_{p0} X_{p0} = F_n H_n \cos \alpha_n$$

$$\sum_{pq} B_{pq} (X_{pq}^s + Y_{pq}^c) + B_{p0} Y_{p0} = F_n H_n \sin \alpha_n \quad (48)$$

Los valores de A_{pq} y F_n , usados en estas expresiones, son dados en la tabla número 7. Los valores de B_{pq} son los mismos que A_{pq} , excepto para B_{12} , de MS_4 , el cual es 0.03 y B_{42} de M_4 que es 0.61. Así en (48) los valores de $H \sin \alpha$ y $H \cos \alpha$ de cada componente puede determinarse y H y α pueden ser obtenidas.

De ésta manera los valores de X_{pq}^c , Y_{pq}^c , X_{pq}^s y Y_{pq}^s están dados por (44) a (47) y los valores numéricos necesarios son dados en las tablas número 3 y 6. En estas condiciones se tienen catorce ecuaciones para la determinación de H y α de las 7 componentes y el problema se ha reducido a resolver este sistema de ecuaciones para tener los valores de las componentes a que se hacen referencia.

Este método de análisis puede extenderse, con los mismos princi—

sistema (52) está compuesto por $N + I$ ecuaciones.

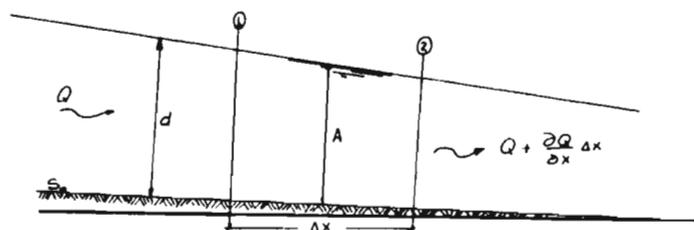
De ésta manera conociendo los valores de A_i , se puede obtener, substituyendo en (49), la ecuación de la marea, la misma que se podría utilizar para predecir la marea para cualquier tiempo t .

Hasta aquí, se han visto las mareas de manera general, con el objeto de hacer notar el origen del fenómeno que nos preocupa y el tratamiento que se les puede dar para hacer un análisis de sus componentes. En lo sucesivo la referencia se reducirá únicamente al cálculo de las mareas en los Estuarios que es, precisamente, el punto cardinal del presente trabajo.

CAPITULO IV

METODOS DE CALCULO DE MAREAS EN ESTUARIOS

I.- Consideraciones Generales.- En un río el flujo del agua se transporta, predominantemente, en una dirección, por ello el movimiento del mismo se puede considerar unidimensional. En un estuario generalmente el fondo tiene una pendiente pequeña, de ésta manera se puede aceptar una representación como la siguiente.



Considerando el fondo del cauce como el eje X y el sentido positivo en la dirección del flujo, la velocidad del flujo también será positiva en ése sentido, además si se trabaja con un ancho unitario, el gasto, en la sección 1, será Q y en la 2 será $Q + (\partial Q / \partial X) \Delta X$.

Por continuidad entre las dos secciones, distanciadas en un ΔX , y en un tiempo Δt , se tendrá:

$$(Q + \frac{\partial Q}{\partial X} \Delta X) \Delta t - Q(\Delta t) - \frac{\partial A}{\partial t} (\Delta t) \quad (53)$$

en la que el término en igualdad representaría el volúmen de agua que entró o salió entre las dos secciones.

En (53) realizando los productos y simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial X} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (54)$$

en general el area A se entiende por $A = b(d+h)$ en la que:

b es el ancho del cauce

h es el incremento o decremento respecto a d .

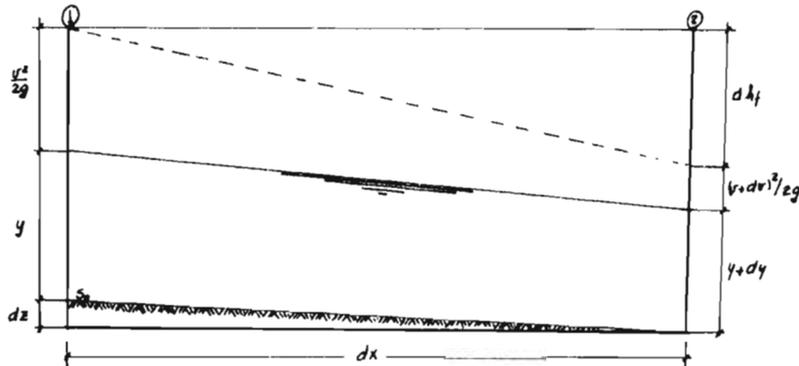
en el problema, b y d son constantes pero h varía con el tiempo, es decir que en la expresión de A se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{y reemplazando en (54) se obtiene}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (I)$$

Ecuación de continuidad que indica que la diferencia de la descarga entre dos secciones transversales X y $X + dX$, y la acumulación de las pérdidas de agua, causadas por el ascenso o descenso del nivel del agua, deben ser equilibradas en ambas secciones.

Si se consideran las mismas secciones, 1 y 2, pero con miras a considerar la energía se tiene:



Tomando Bernoulli entre las dos secciones se tiene:

$$dz + y + \frac{v^2}{2g} = y + dy + \frac{v^2 + 2v dv + (dv)^2}{2g} + dh_f$$

Si se simplifica y desprecia el término diferencial cuadrado se tiene:

$$dz = dy + \frac{v}{g} dv + dh_f \quad (55)$$

dividiendo (55) entre dx se obtiene:

$$\frac{dz}{dx} = S_0 = \frac{dy}{dx} + \frac{v}{g} \frac{dv}{dx} + Sf$$

Como la S_0 es muy pequeña se puede considerar igual a cero.
Desde que y varía en función de t y x se puede escribir:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

y dividiendo entre dx , se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{dt}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{dx} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{v} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

en ésta expresión se considera que:

$$\frac{dy}{\partial t} \frac{1}{v} \ll \frac{y}{x} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (57)$$

De manera análoga, v varía con t y x y se tiene:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad \text{y dividiendo entre } dx \text{ se obtiene:}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dt}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dx} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (58)$$

si se reemplaza (57) y (58) en (56) se tiene:

$$0 = Sf + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{v}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + Sf \quad (59)$$

Si en el cálculo se considera una primera aproximación, se puede aceptar que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$, derivada de la carga de velocidad, es nula y (59) sería:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + Sf = 0 \quad (60)$$

Por la fórmula de Chezy se tiene:

$$v = c \sqrt{RSf} \quad \therefore \quad Sf = \frac{v^2}{c^2 R}$$

si se reemplaza Sf en (60) y se multiplica toda la ecuación por $-A_0g$; A_0 = área media de la sección, se obtiene:

$$gA_0 \frac{\partial y}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{(Av)^2}{c^2 R} \quad (61)$$

pero $y = d + h$ $\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}$, ya que d es constante, reemplazamos en (61) y tenemos:

$$gA \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{gAv^2}{c^2 R} \quad (62)$$

Si: $\lambda = \frac{8}{c^2} \frac{R^2}{d}$, en estuarios casi siempre $R=d$, por lo que se considerará así, el último término (62) se podrá escribir:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{c^2}{gA} Q \dot{\lambda} = \frac{8}{3\pi} \frac{gQ}{c^2 Ad} Q \dot{\lambda} = \lambda Q$$

y con esto (62) se transforma en:

$$gA \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda Q = 0 \quad (11)$$

que representa la ecuación dinámica o de movimiento.

Si se pudiera resolver I y II, el problema estaría resuelto, ya que se podría conocer la h y Q en cualquier tiempo t . Precisamente la solución de las dos ecuaciones ha dado lugar a diferentes métodos de los que se harán tres.

A.- Método Armónico de Dronkers. - Este método permite obtener las fórmulas de propagación de mareas, correspondientes a las componentes de aguas poco profundas. Desde un punto de vista práctico es imposible obtener las diferentes componentes de la marea en el cálculo de la propagación de las mareas en un lugar determinado. El número de componentes depende también del intervalo de tiempo durante el cual la propagación de mareas se desea conocer.

Las consideraciones que hace Dronkers en su método son:

- a) La deformación causada por los efectos no-lineales, durante la propagación, no se considera.
- b) Se considera que los coeficientes, en las ecuaciones parciales, y las dimensiones del perfil del estuario, que lo considera como un canal, son constantes.
- c) Los términos de segundo orden no se consideran y el término de la fricción es reemplazado por un término lineal, es decir que se considera una fricción lineal de valor pequeño.

Sea la marea vertical, en la desembocadura del río:

$$h_1(0,t) = h_1(0) \cos \omega t \quad (63)$$

la forma compleja de esta expresión es:

$$h_1(0,t) = H_1(0) e^{i\omega t} + cc \quad (64)$$

en la que cc representa la función compleja $H_{-1}(0) e^{-i\omega t}$ y también $H_1(0) = H_{-1}(0) = 1/2 h_1(0)$.

Dronkers dice que la solución de I y II es de la forma:

$$\begin{aligned} h_1(x,t) &= H_1(x) e^{i\omega t} + H_{-1}(x) e^{-i\omega t} = \overline{H(x)} e^{-i\omega t} \\ Q_1(x,t) &= Q_1(x) e^{i\omega t} + Q_{-1}(x) e^{-i\omega t} = \overline{Q(x)} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (65)$$

en las que $H_1(x)$ y $Q_1(x)$ son funciones complejas y $\omega = 2\pi/T$; T = período. Para determinar la función compleja $H_1(x)$ se sigue el siguiente camino, para $Q_1(x)$ será similar:

De (I) se tiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial t} \quad (66)$$

derivando (66) respecto a t :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} = -b \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (67)$$

y (II) respecto a X :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (68)$$

si se reemplazara (66) y (67) en (68)

$$0 = -b \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \lambda b \frac{\partial h}{\partial t} + gA \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{o también:}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial h}{\partial t} = g \frac{A}{b} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (69)$$

si en (69) se llama $C_0 = \sqrt{\frac{gA}{b}}$, siendo C_0 la velocidad de propu—
gación cuando $\lambda = 0$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial h}{\partial t} = C_0^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (111)$$

y una ecuación análoga se obtiene para $Q_1(x)$

de (65) se tiene que:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -i\omega H(x) e^{-i\omega t} \quad (70)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\omega^2 H(x) e^{-i\omega t} \quad (71)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{d^2 H(x)}{dx^2} e^{-i\omega t} \quad (72)$$

Substituyendo (70), (71) y (72) en (III)

$$-\omega^2 H(x) e^{-i\omega t} - \lambda i \omega \overline{H(x)} e^{-i\omega t} = C_0^2 \frac{d^2 \overline{H(x)}}{dx^2} e^{-i\omega t}$$

y al simplificar se tiene:

$$C_0^2 \frac{d^2 \overline{H(x)}}{dx^2} + (\omega^2 - \lambda i \omega) \overline{H(x)} = 0 \quad (73)$$

La solución de ésta ecuación es de la forma:

$$\overline{H(x)} = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} = \overline{C(x)} e^{-ikx} \quad (74)$$

en la que $\overline{C(x)}$ es una función compleja de X ; si se substituye el valor de $\overline{H(x)}$ en (73) se obtiene:

$$C_0^2 k^2 + (\omega^2 - \lambda i \omega) = 0$$

a partir de ésta expresión se define K de la siguiente manera:

$$K = \pm \frac{\omega}{C_0} (\sigma + i\beta) \quad (75)$$

en la que

$$\begin{aligned} \sigma &= \left[-1/2 + 1/2 (1 + S_1^2)^{1/2} \right]^{1/2} \\ \beta &= \left[1/2 + 1/2 (1 + S_1^2)^{1/2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (76)$$

siendo $S_1 = \frac{\lambda}{\omega}$, un parámetro adimensional.

Para tener la solución general del problema de una onda armónica-simple, se reemplaza (65), (74) y (75) en III y se obtiene que:

$$h_1(x,t) = H_{11} e^{\omega \sigma x / C_0 + i\omega(t + \beta x / C_0)} + H_{12} e^{-\omega \sigma x / C_0 + i\omega(t + \beta x / C_0)} + c.c. \quad (77)$$

donde H_{11} y H_{12} son parámetros de integración, y satisfacen la relación:

$$H_{11} + H_{12} = \overline{H_1(0)} \quad (78)$$

la forma real de (77) es:

$$\begin{aligned}
 h_1(x,t) &= h_{11} e^{i\omega x/c_0} \cos \omega(t + \frac{\beta}{c_0} x) + h_{12} e^{-i\omega x/c_0} \cos \omega(t - \frac{\beta}{c_0} x) = \\
 &= h_{11}(x,t) + h_{12}(x,t) \quad (70)
 \end{aligned}$$

A partir de II y de (65) se tiene que:

$$Q(x,t) = - \frac{gA_0}{\lambda + \omega i} \frac{d\overline{H_1(x)}}{dx} e^{i\omega t} + c.c$$

reemplazando (75) y (77) se obtiene: (80)

$$Q_1(x,t) = - \frac{b_0 c_0}{\sigma + i\beta} \left[H_{11} e^{i\omega x/c_0 + i\omega(t + \beta x/c_0)} - H_{12} e^{-i\omega x/c_0 + i\omega(t - \beta x/c_0)} \right] + c.c$$

Si en esta ecuación se considera que $x=0$ y $t=0$, se tiene:

$$H_{11} - H_{12} = \frac{-\beta + i\sigma}{b_0 c_0} \overline{Q_1(0)} \quad (81)$$

resolviendo (78) y (81) se obtiene:

$$H_{11} = 1/2 \overline{H_1(0)} - 1/2 \overline{Q_1(0)} \frac{\beta - i\sigma}{b_0 c_0}$$

$$H_{12} = 1/2 \overline{H_1(0)} + 1/2 \overline{Q_1(0)} \frac{\beta - i\sigma}{b_0 c_0}$$

y al reemplazar estos valores en (77) resulta:

$$h_1(x,t) = \left\{ \overline{H_1(0)} \cos h Kx + \overline{Q_1(0)} \frac{Ki}{\omega b_0} \operatorname{sen} h Kx \right\} e^{i\omega t} + cc \quad (82)$$

$$Q_1(x,t) = \left\{ \overline{Q_1(0)} \cos h Kx - \overline{H_1(0)} \frac{\omega b_0 i}{k} \operatorname{sen} h Kx \right\} e^{i\omega t} + cc \quad (83)$$

Que dan la solución general del problema, comparando (82) y (83) con (65) se determina que:

$$\overline{H_1(x)} = \overline{H_1(0)} \cos h Kx + \overline{Q_1(0)} \frac{Ki}{\omega b_0} \operatorname{sen}_h Kx \quad (84)$$

$$\overline{Q_1(x)} = \overline{Q_1(0)} \cos h Kx - \overline{H_1(0)} \frac{b_0 i}{k} \operatorname{sen}_h Kx \quad (85)$$

A partir de estas soluciones Dronkers hace el estudio específico para estuarios, con las consideraciones de su método y además que la marea vertical es conocida.

Considera $x=l$, la longitud del estuario y para $Q(l)=0$

De acuerdo con (83) la descarga $Q_1(0,t)$, en la desembocadura, puede ser obtenida en un determinado instante; luego esto conduce a que la amplitud compleja de la descarga en la desembocadura es:

$$\overline{Q_1(0)} = \overline{H_1(0)} \frac{\omega b_0 l}{k} \tanh k l$$

que al reemplazar en (84) y (85) se tiene:

$$\overline{H_1(x)} = \overline{H_1(0)} \frac{\cosh k(x-l)}{\cosh k l} \quad (86)$$

$$\overline{Q_1(x)} = - \overline{H_1(0)} \frac{\omega b_0 l}{k} \frac{\sinh k(x-l)}{\cosh k l} \quad (87)$$

Si se substituye (86) y (87) en (65) se obtiene la solución que resolverá el problema y es:

$$h_1(x,t) = h_1(0) \frac{A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t}{\cosh S_2 \sigma + \cos S_2 \beta} \quad (88)$$

$$Q_1(x,t) = h_1(0) \frac{b_0 c_0}{\sigma^2 + \beta^2} \frac{C \cos t + D \operatorname{sen} t}{\cosh S_2 \sigma + \cos S_2 \beta} \quad (89)$$

$$S_2 = \frac{2 \omega l}{c_0} = \frac{4 \pi f l}{L} \quad (90)$$

con L = longitud de onda

$$A = 2 [\beta_1(1) \beta_1(x-1) + \beta_2(1) \beta_2(x-1)] \quad (91)$$

$$B = -2 [\beta_1(1) \beta_2(x-1) - \beta_2(1) \beta_1(x-1)] \quad (92)$$

$$C = 2\sigma [\beta_1(1) \beta_3(x-1) - \beta_2(1) \beta_4(x-1)] - 2\beta [\beta_1(1) \beta_4(x-1) + \beta_2(1) \beta_3(x-1)] \quad (93)$$

$$D = 2\beta [-\beta_1(1) \beta_3(x-1) + \beta_2(1) \beta_4(x-1)] - 2\sigma [\beta_1(1) \beta_4(x-1) + \beta_2(1) \beta_3(x-1)] \quad (94)$$

$$\beta_1(x) = \cosh 1/2 S_2 \sigma x/l \cos 1/2 S_2 \beta x/l \quad (95)$$

$$\beta_2(x) = \sinh 1/2 S_2 \sigma x/l \operatorname{sen} 1/2 S_2 \beta x/l \quad (96)$$

$$\beta_3(x) = \cosh 1/2 S_2 \sigma x/l \operatorname{sen} 1/2 S_2 \beta x/l \quad (97)$$

$$\phi_4(x) = \text{sen}_h 1/2 S_2 \sigma x/l \cos 1/2 S_2/\beta x/l \quad (98)$$

En estas condiciones el proceso del cálculo sería:

- a) Cálculo de $\lambda = \frac{8}{3\pi} \frac{g v_m}{C^2 d}$ en la que v_m es la velocidad media, C es el coeficiente de Chezy y d es el tirante.
- b) Cálculo de $\omega = \frac{2\pi}{T}$, en radianes por segundo
- c) Cálculo de $S_1 = \lambda/\omega$
- d) Cálculo de σ y β con las ecuaciones (76)
- e) Cálculo de $C_0 = \sqrt{gA/b}$
- f) cálculo de K con la ecuación (75)
- g) Cálculo de S_2 con (90)
- h) Cálculo de las ϕ necesarias para A, B, C, y D, en las ecuaciones (95) a la (98).
- i) Cálculo de A, B, C, y D con (91) a (94).
- j) Cálculo de $h_1(x,t)$ y $Q(x,t)$ con (88), (89).

De esta manera se puede obtener la h y Q para cualquier sección del estuario y en un determinado momento.

B.- Método de las Co-oscilaciones o de Proudman.- Para resolver las ecuaciones I y II, Proudman hizo diferentes hipótesis y llegó a determinar la altura de la marea en cualquier sección del estuario así como las velocidades, conociendo la marea en su desembocadura. Las hipótesis que hace son:

- a) $\lambda = 0$, no considera la fricción
- b) $Q = AU$, gasto en una sección igual al área por la velocidad de la misma, U , la determina indirectamente como se verá posteriormente. De la expresión Q , se tiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial t} \quad (99)$$

c) considera que:

$$h = Z(x) \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (100)$$

$$U = U(x) \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (101)$$

en las que: $Z(x)$ = es el tirante de agua en la sección x

$U(x)$ = velocidad en la sección x

T = período

h = variación de la altura de agua con respecto al nivel medio del mar.

U = variación de las velocidades.

De acuerdo a las hipótesis hechas, las expresiones I y II, se pueden escribir:

$$\frac{\partial}{\partial x}(AU) = -b \frac{\partial h}{\partial t} \quad (I')$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (II')$$

de acuerdo con (101) se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x}(AU) = \frac{\partial}{\partial x}(AU(x) \sin \frac{2\pi t}{T}) = \sin \frac{2\pi t}{T} \frac{\partial}{\partial x}(AU(x)) \quad (102)$$

y de acuerdo con (100) se tiene:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(Z(x) \cos \frac{2\pi t}{T}) = -\frac{2\pi}{T} Z(x) \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (103)$$

De (101)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(U(x) \sin \frac{2\pi t}{T}) = \frac{2\pi}{T} U(x) \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (104)$$

De (100)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(Z(x) \cos \frac{2\pi t}{T}) = \cos \frac{2\pi t}{T} \frac{\partial}{\partial x} Z(x) \quad (105)$$

reemplazando (102) y (103) en (I') se tiene

$$\sin \frac{2\pi t}{T} \frac{\partial}{\partial x}(AU(x)) = b \frac{2\pi}{T} Z(x) \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (106)$$

si se reemplaza (104) y (105) en II' y haciendo la misma consideración que en caso anterior se llega a:

$$d(Z(x)) = - \frac{2 \pi}{gT} U(x) dx \quad (108)$$

Con las ecuaciones (107) y (108) es que procedemos a realizar la solución del problema y para ello se debe disponer los siguientes datos:

- Áreas y anchos en cada sección (A y b)
- Tirante en cada sección (d)
- Período de la marea (T)
- Distancia entre secciones (dx)
- Variación de la marea, en la desembocadura (Δh)
- Altura necesaria en la primera sección del estuario, aguas arriba.

En estas condiciones, conviene numerar las secciones, de θ a n, siendo la primera sección aguas arriba la θ .

De esta manera el procedimiento a seguir en el cálculo es como sigue:

- a) en la sección 0, $U = 0$ y se conoce Z_0 .
- b) con la ecuación (107) se puede conocer $d(AU(x)) = \Delta[AU(x)]_0$.
- c) $(AU)_0 = 0$; $(\Delta Z)_0$ no existe.
- d) Se puede calcular $(AU)_1 = (AU)_0 + [\Delta(AU)]_0$
- e) $U_1 = \frac{(AU)_1}{A_1}$; $(AU)_1$, calculado en d) y A_1 es conocido.
- f) con la ecuación (108) se puede calcular $d[Z(x)] = (\Delta Z)_1$.
- g) Se calcula $Z_1 = Z_0 + (\Delta Z)_1$
- h) con la ecuación (107) se puede calcular $d(AU(x)) = \Delta[AU(x)]_1$
- i) Se calcula $(AU)_2 = (AU)_1 + \Delta[AU(x)]_1$

y así sucesivamente se continúa el cálculo hasta la sección n, en la que se conoce la marea, entonces se llega a verificar si el valor obtenido es el correcto y sino se puede hacer simplemente una regla de tres para ver a una cierta altura de la sección "n", que altura le corresponde a la sección θ .

Para facilidad de este cálculo se da un cuadro, que siguiendo el proceso indicado, se llena fácilmente

SECC	b_x	A_x	$[AU(x)]$	$\Delta[AU(x)]$	$U(x)$	$Z(x)$	ΔZ
0	b_0	A_0	$(AU)_0 = 0$	$\Delta[AU(x)]_0$	$U_0 = 0$	Z_0	-
1	b_1	A_1	$\Delta[AU(x)]_0 + (AU)_0$	$\Delta[AU(x)]_1$	$U_1 = \frac{(AU)_1}{A_1}$	$Z_1 = Z_0 + (\Delta Z)_1$	$(\Delta Z)_1$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n		A_n	$\Delta[AU(x)]_{n-1} + (AU)_{n-1}$	$\Delta[AU(x)]_n$	$U_n = \frac{(AU)_{n-1}}{A_n}$	$Z_n = Z_{n-1} + (\Delta Z)_n$	$(\Delta Z)_n$

C.- Método de las Características.-

Una ecuación diferencial parcial se puede representar en general como:

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e \quad (109)$$

referida a un sistema XY y en la que e es un término cualquiera - con la única condición de que no tenga ninguna derivada parcial de segundo orden.

Se dice que (109) es hiperbólica si:

$$b^2 - 4ac > 0$$

Para hacer el símil con la ecuación III, ésta se puede escribir:

$$-C_0^2 \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\lambda \frac{\partial h}{\partial t}$$

comparándola con (109): $a = -C_0^2$; $b = 0$; $c = 1$; $e = -\lambda \frac{\partial h}{\partial t}$, ---
 y: $b^2 - 4ac = 4C_0^2 > 0$, en consecuencia la ecuación III es hiperbólica y precisamente éste método es aplicable a ellas, llamando:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial f}{\partial x} & q &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & t &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (110)$$

y se considera que h es función de X y Y, de modo que se puede escribir:

$$df = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \quad \text{y de acuerdo con (110)}$$

$$df = p dx + q dy \quad (111)$$

Con la nomenclatura (110) la ecuación (109) se puede escribir:

$$ar + bs + ct = e \quad (112)$$

si se supone que p y q son funciones de x y y, de modo que

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy$ y con la nomenclatura de (110) se puede escribir:

$$dx r + dy S + 0 = dp \quad (113)$$

$$0 + dy S + dy t = dq \quad (114)$$

Con (112), (113) y (114) se puede tener un sistema de ecuaciones y suponiendo a las incógnitas como r, s, t, el determinante de este sistema es:

$$\Delta_{\text{mix}} = a(dy)^2 + c(dx)^2 - bd_x dy \quad (115)$$

Como a, b, y c son finitos, y si se les considera muy pequeños, el determinante del sistema será también aproximadamente igual a cero, luego para que Δ_r , Δ_s y Δ_t no sean valores infinitos se les puede considerar iguales a cero. Con estas consideraciones, (115) lo podemos dividir entre $(dx)^2$ y se obtiene:

$$a \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b \frac{dy}{dx} + c = 0$$

ecuación de segundo grado cuya incógnita es $\frac{dy}{dx}$ y resolviéndola se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (116)$$

Cuyas dos soluciones dan, precisamente, las dos características - que son las mismas en todo el problema, únicamente cambian de signo.

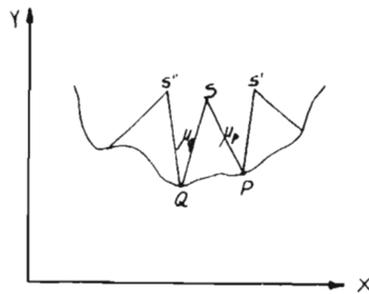
Se verá ahora, para sacar una conclusión, que interesa, que explicaría que el determinante de la derivada mixta, Δ_{mix} , sea cero:

$$\Delta_{\text{mix}} = \begin{vmatrix} a & e & c \\ dx & dp & 0 \\ 0 & dq & dy \end{vmatrix} = adpdy + cdqdx - edxdy = 0$$

si se divide entre dx, se obtiene, despejando e dy:

$$e \, dy = a \left(\frac{dy}{dx} \right) dp + cdq \quad (117)$$

de ésta manera, si se supone que conocemos las condiciones de frontera (P y Q) y se quieren conocer las condiciones del punto interior S.



donde SQ y SP, son pequeños, considerándolos como diferenciales.

En éstas condiciones se pueden conocer μ_Q y μ_P , que serían los valores obtenidos en (116), y así obtener.

$$(Y_s - Y_p) = \mu_P (X_s - X_p) \quad (118)$$

$$(Y_s - Y) = \mu_Q (X_s - X_Q)$$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (X_s , Y_s) - que se pueden conocer.

Si en (117) se consideran los diferenciales como incrementos para los puntos P y Q, relacionados con S, se tiene que:

$$e_p (y_s - y_p) = a_p \mu_p (p_s - p_p) + c_p (q_s - q_p) \quad (119)$$

$$e (y_s - y) = a_Q \mu_Q (p_s - p_Q) + c_Q (q_s - q_Q)$$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (p_s y q_s) de la misma manera se puede hacer con (111) y se obtiene:

$$f_s - f_p = \frac{p_s - p_p}{2} (x_s - x_p) + \frac{q_s - q_p}{2} (y_s - y_p)$$

que despejando f_s se tiene:

$$f_s = f_p + \frac{P_s - P_p}{2} (X_s - X_p) + \frac{q_s + q_p}{2} (Y_s - Y_p) \quad (120)$$

así se obtendría el valor de f en el punto S , de éste modo se puede ir avanzando, sobre la frontera, e ir obteniendo otros puntos internos (S' , S'' ...) y luego apoyándose en ellos se puede avanzar otra faja y así terminar con toda la zona en estudio.

Lo antes expuesto representa la solución general de las ecuaciones hiperbólicas por el método de las características. Como la ecuación III es de éste tipo de ecuaciones diferenciales, se le puede aplicar el mismo método y procediendo:

De acuerdo con (116) y III se tiene que:

$$\mu = \frac{0 \pm \sqrt{-4(-C_0)(1)}}{2C_0^2} = \frac{2C_0}{2C_0^2} = \frac{1}{C_0} \quad (121)$$

Las ecuaciones (118) serían:

$$\begin{aligned} t_s - t_p &= \mu_p (X_s - X_p) \\ t_s - t &= \mu_q (X_s - X_q) \end{aligned} \quad (122)$$

pudiéndose obtener t_s y X_s .

las ecuaciones (119), en éste caso son:

$$\begin{aligned} \sigma_p (t_s - t_p) - a_p (P_s - P_p) \mu_p - C_p (q_s - q_p) &= 0 \\ \sigma (t_s - t) - a_q (P_s - P_q) \mu_q - C (q_s - q_q) &= 0 \end{aligned} \quad (123)$$

en éste caso se representa:

$$p = \frac{\partial h}{\partial x} \quad q = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{y se puede conocer } P_s \text{ y } q_s.$$

La ecuación final (120) será:

$$h_s = h_p + (X_s - X_p) \frac{1}{2} (P_s - P_p) + (t_s - t_p) \frac{1}{2} (q_s + q_p) \quad (124)$$

todas éstas ecuaciones referidas a un sistema x, t , es decir las x representando las longitudes del estuario y t el tiempo.

Este método por lo extenso de los cálculos, es aplicable con máquinas computadoras y precisamente el ejemplo numérico que se presenta es

resuelto haciendo uso de ellas.

La ecuación III puede ser también obtenida a partir de las ecuaciones del teorema de Bernoulli y el de continuidad, eliminando la velocidad, así pues éstas ecuaciones se pueden escribir:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = S_0 - S_f \quad (125)$$

$$V \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (126)$$

En la que: V = velocidad

S_0 = pendiente del fondo

S_f = pendiente hidráulica

D = tirante medio = A/B (area/ancho libre de la superficie del agua)

y = tirante de agua en el canal

x = abscisa de la sección transversal

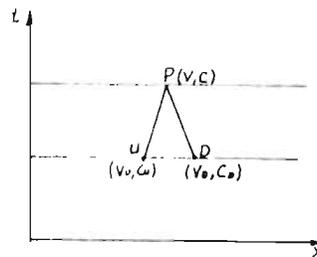
t = tiempo.

Para poderlas integrar se llevan a cabo diferentes transformaciones (se puede ver la referencia número 3), llegando a determinar, considerando incrementos, que las ecuaciones (125) y (126) se pueden escribir:

$$A_+ (V + 2C) = g (S_0 - S_f) \Delta t \quad (127)$$

$$(V - 2C) = g (S_0 - S_f) \Delta t$$

en general para un punto U y para otro D, ubicados como se indica en la gráfica



Si en éstas ecuaciones se hace:

$Y = g(S_0 - S_f)$, pero de la fórmula de Manning se tiene que $S_f =$

$= \left(\frac{nV}{R^{2/3}} \right)^2$ y reemplazando se tiene

$$Y = g \left(S_0 - \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} \right)$$

Considerando que $R = B$ y siendo la celeridad $C = \sqrt{gY}$, siendo Y el tirante medio, se obtiene que:

$$Y = g \left(S_0 - n^2 g^{4/3} \frac{V^2}{C^{8/3}} \right)$$

Si se denomina $Z = \frac{V^2}{C^{8/3}}$ se tiene

$$Y = g \left(S_0 - n^2 g^{4/3} Z \right)$$

Con estas consideraciones para los puntos P, U y D, las ecuaciones (127) se pueden escribir:

$$\begin{aligned} (V + 2C) - (VU + 2CU) &= Y_{UP} \Delta t \\ (V - 2C) - (V - 2CD) &= Y_{DP} \Delta t \end{aligned} \quad (128)$$

Estas dos expresiones permiten abordar el ejemplo numérico por este método, tal como se explica al desarrollarlo.

CAPITULO V

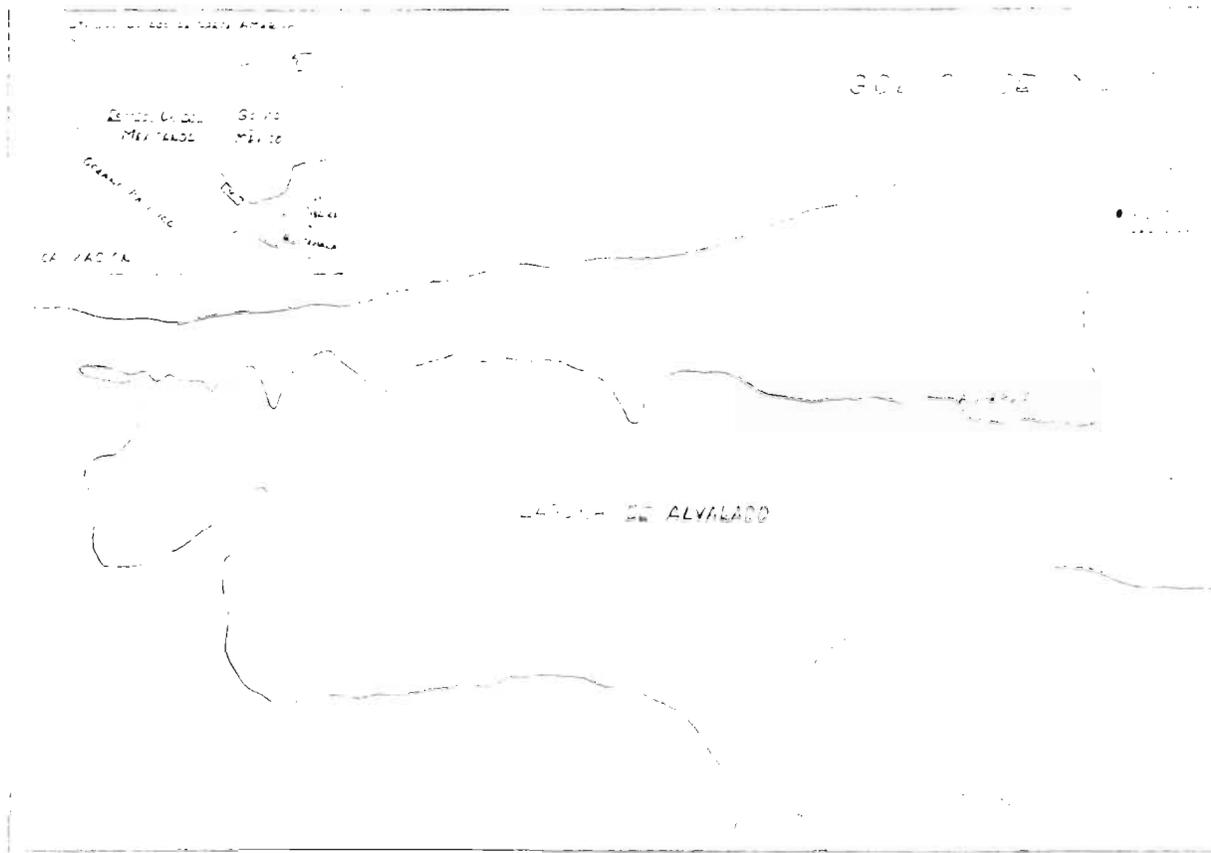
EJEMPLO NUMERICO APLICANDO LOS TRES METODOS

El objeto de éste ejemplo numérico es solamente aclarar la manera de proceder con cada método y encontrar la interpretación práctica de cada término.

Para este objeto se ha tomado, como referencia, la laguna de Alvarado (Veracruz), que se comunica al mar mediante un canal de más o menos 2,500 metros de longitud y 450 metros de ancho y con una profundidad media de 10 metros, la laguna, tiene una profundidad media de 2 metros y una area aproximada de $11.0 \times 10^6 \text{ m}^2$; el canal no es sino la desembocadura del río Papaloapan, como se puede ver en el plano número 1. El problema que tiene es del mantenimiento de un canal de navegación, que sería construido a través de la barra existente en la desembocadura del río Papaloapan. Este canal debería ser proyectado para una profundidad hasta la batimétrica -10 m, para permitir el acceso al puerto de Alvarado que se proyecta construir. Los fenómenos que controlan el movimiento del líquido y del material en suspensión o que forman el fondo, son tres: las mareas, la descarga del río Papaloapan y el oleaje. En éste ejemplo sólo se abordará el primer fenómeno que afectará al río, la laguna y al canal.

Se tienen registros de mareas en el punto denominado Punta del Sur, comprendidos entre el 2 de octubre de 1962, al 30 de junio de 1963, de los mismos que se obtienen como amplitud media 0.509 m. y período de 12.4 hrs; para las mareas semi-diurnas. También se tiene el plano batimétrico del canal, (plano no. 2), del que se obtuvieron las secciones transversales, como se vé en el plano no. 3.

De ésta manera y teniendo en cuenta el fin que se persigue, se han hecho varias consideraciones simplificadorias para cada método, mismas que se puntualizan para cada método y se dan algunas ideas para el caso que éstas no sean tomadas en cuenta.

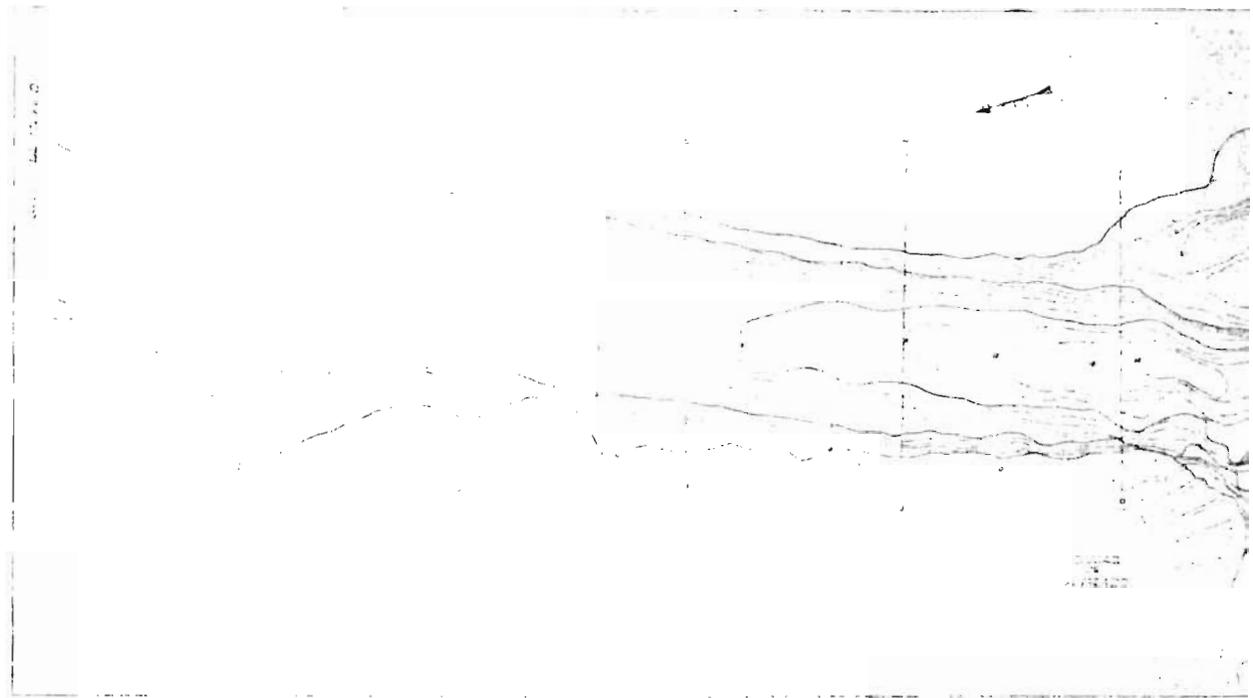


GOLFO DE NICARAGUA

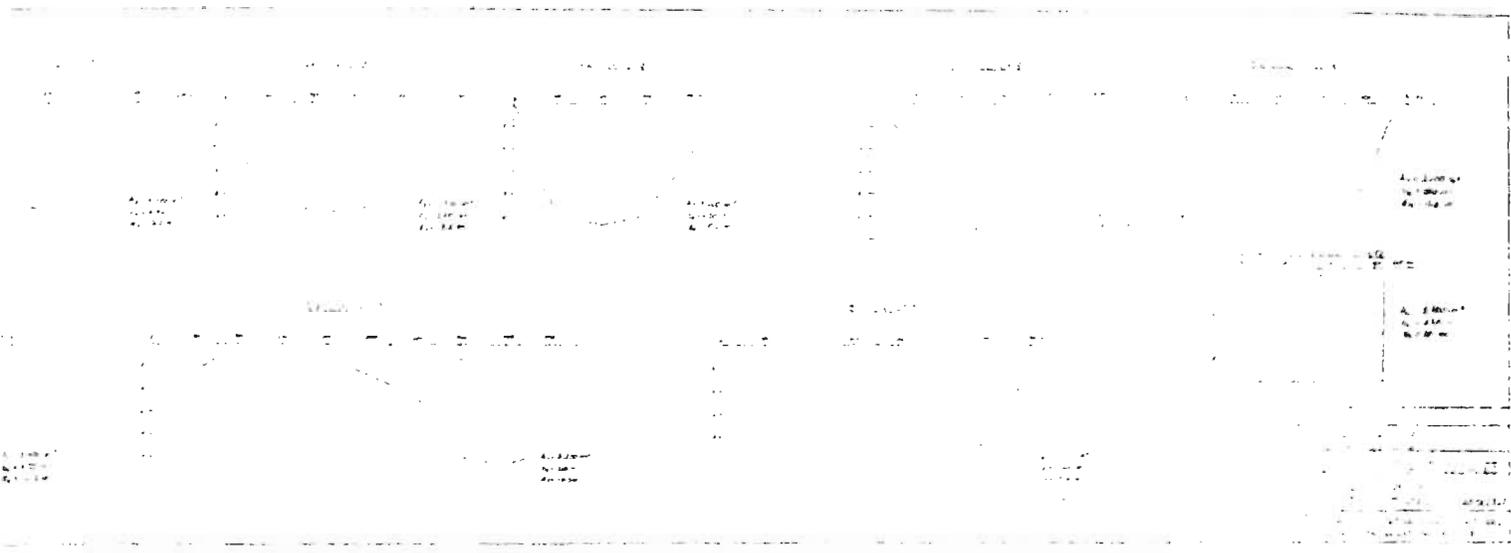


LAGUNA DE ALVALADO

ENCUENTRO DE LA LAGUNA
DE ALVALADO
PLAN 1/100000
Escala 1:100000
1950







1.- Método de Proudman.-

Para desarrollar éste método se han considerado los 3,500 m. finales de la desembocadura del Papaloapan, abarcando el tramo, 8 secciones ubicadas como se indican en el plano no. 2

- Las condiciones de frontera que se suponen en éste método son:
- la sección no. 8 es el límite del canal y en consecuencia la velocidad del agua será igual a cero.
 - El gasto del río Papaloapan se supone nulo.
 - El almacenamiento de la laguna no influye en la propagación de la marea.
 - El tirante en la última sección es de 9.0 m.

Con éstas consideraciones se obtienen los siguientes resultados, siguiendo el proceso indicado se tiene:

$$x = 500 \text{ m}$$

$$T = 12.4 \text{ hs.}$$

$$h = \pm 0.509 \text{ m.}$$

Se pueden calcular los siguientes términos constantes:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{6.28}{12.4 \times 3600} = 0.00141$$

$$\frac{2\pi}{T} \Delta x = 0.0705$$

$$-\frac{2\pi}{gT} \Delta x = -\frac{0.0705}{9.81} = -0.0072$$

de ésta manera la ecuación (107) resulta

$$\Delta(AU(x)) = \frac{2\pi b}{T} Z(\Delta x) = 0.0705 bZ$$

y la (108)

$$Z = -0.0072 U$$

con éstas dos ecuaciones se tiene, siguiendo el procedimiento indicado:

- En la sección no. 8: $U=0$, $Z_0 = 9.0 \text{ m}$
- $\Delta(AU(x))_8 = 0.0705 \times 460 \times 9 = 292$
- $(AU)_8 = 0$; $(\Delta Z)_8 = 0$

$$- (AU)_7 = (AU)_8 + [\Delta(AU)]_8 = 0 + 292 = 292$$

$$- U_7 = (AU)_7 / A_7 = 292 / 3,250 = 0.09 \text{ m/s.}$$

$$- (\Delta Z)_7 = -0.0072 \times 0.09 = 0.000648$$

$$- Z_7 = 9.0 - 0.000648 = 8.999352$$

$$- \Delta(AU)_7 = 0.0705 \times 515 \times 8.9993 = 326$$

$$- (AU)_6 = (AU)_7 + \Delta(AU)_7 = 292 + 326 = 618$$

$$\rightarrow U_6 = (AU)_6 / A_6 = 618 / 3,400 = 0.182 \text{ m/s.}$$

$$- (\Delta Z)_6 = -0.0072 \times 0.182 = -0.00131$$

Y así sucesivamente, se siguen los cálculos, mismos que se indican en el cuadro siguiente.

Secc	b_x (m)	A_x (m ²)	$A_i(x)$ (m ²)	$\Delta(AU(x))$	$U(x)$ (m/s)	$Z(x)$ (m)	ΔZ (m)
8	460	2.700	0	292	0	9.0	—
7	515	3.250	292	326	0.09	8.999352	-0.000648
6	470	3.400	618	302	0.182	8.998652	-0.001310
5	525	3.900	920	320	0.236	8.996300	-0.001700
4	580	3.400	1240	285	0.365	8.993700	-0.00263
3	620	3.300	1525	330	0.460	8.990400	-0.00330
2	485	3.280	1855	306	0.565	8.986300	-0.00407
1	505	3.200	2161		0.680	8.981700	-0.00480

Este resultado se podría representar de la manera siguiente.



Si se considera que el nivel medio estaría dado por la altura de 9.0 m, en la sección 8, el momento más desfavorable sería cuando en I se tenga la máxima elevación, de 0.509 m y con la gráfica anterior, por simple regla de tres se determina que la sobreelevación en 8 sería de 0.51 m. De ésta manera pues se vé que la marea no produce mayor efecto en la sección última. De una manera análoga, como se conocen los tirantes, calculados, para cada sección se pueden determinar las elevaciones debidas a las mareas. Se ve también que la velocidad puede influir en la propagación de la marea, en éste caso, se podría esperar una corriente de marea considerable, es claro que el no tomar en cuenta el efecto de la laguna, que podría ser considerable, y el gasto del río, den lugar a resultados algo modificados, pero sí se puede decir que la corriente de marea puede afectar en la desembocadura, las limitaciones del problema también pueden influir tanto que los resultados reales sean diferentes. Si se considerara la laguna, a partir de la sección no. 6, hasta la 8, se tendrían que variar las áreas, considerando a la laguna y los anchos de la superficie libre se elevaría considerablemente y en consecuencia aumentarían las velocidades, lo que a su vez haría aumentar el desnivel total de la superficie del agua y los resultados serían más desfavorables; en éste caso el proceso sería el mismo. Si se considerara el gasto del río, la única variante sería el considerar en la sección 8, un gasto inicial $(AU)_8$, igual al del río y se tendría entonces una velocidad diferente de cero y con esas consideraciones el proceso de cálculo sería exactamente el mismo.

2.- Método Armónico de Dronkers.-

Como es la hipótesis del método el considerar el estuario como un canal, en éste caso la representación que se ha adoptado, es un canal rectangular de 320 m de ancho por 10 de tirante, obtenido en promedio, como se puede ver en el plano no. 3, el canal tiene 3,500 m, igual que en el caso anterior, y del método de Proudman se puede apreciar una velocidad media de 0.4 m/s, y se toma un coeficiente de Chezy igual a 70. Se obtendrá la variación de la marea en la última sección donde el gasto se supone nulo, de ésta manera se tienen los siguientes datos:

$$A = 3,200 \text{ m}^2 \quad V_m = 0.4 \text{ m/s}$$

$d = 10 \text{ m}$ $c = 70$
 $b_0 = 320 \text{ m}$ $x = l = 3,500 \text{ m}$
 y siguiendo el procedimiento indicado se obtiene:

$$\lambda = \frac{8}{3\pi} \times \frac{9.81 \times 0.4}{(70) \times 10} = 0.0000503$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6.28}{12.4 \times 3,600} = 0.000141$$

$$S_1 = \frac{\lambda}{\omega} = \frac{0.0000503}{0.000141} = 0.357$$

$$\sigma = \left[-1/2 + 1/2 (1 + 0.357)^2 \right]^{1/2} = 0.648$$

$$\beta = \left[1/2 + 1/2 (1 + 0.357)^2 \right]^{1/2} = 1.19$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{9.81 \times 3,200}{320}} = 9.9$$

$$S_2 = \frac{2\omega l}{c_0} = \frac{2 \times 0.000141 \times 3500}{9.9} = 0.10$$

$$\beta_1(1) = \cos_{h \ 1/2 \times 0.1 \times 0.648} \cos 1/2 \times 0.1 \times 1.19 = 0.998$$

$$\beta_2(1) = \sin_{h \ 1/2 \times 0.1 \times 0.648} \sin 1/2 \times 0.1 \times 1.19 = 0.00174$$

$$\beta_1(x-1) = 1 \qquad \beta_3(x-1) = 0$$

$$\beta_2(x-1) = 0 \qquad \beta_4(x-1) = 0$$

$$A = 2 [0.998 \times 1 + 0] = 1.996$$

$$B = -2 [0.998 \times 0 - 0.00174 \times 1] = 0.00348$$

$$C = 0 \qquad D = 0$$

reemplazando valores en (88) y (89) se tiene

$$Q(1, t) = 0$$

$$h(1, t) = 0.509 \times \frac{1.996 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0.00348 \sin \frac{2\pi t}{T}}{\cos_{h \ 0.1 \times 0.648} + \cos 0.1 \times 1.19}$$

$$h(1, t) = 0.51 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0.00175 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

que sería la solución en la última sección, con ella se puede deter

var la altura de marea sobre el nivel medio del mar, para cualquier tiempo y sección, cambiando sólo el valor de l , para los cálculos.

En el caso expuesto, el momento más desfavorable va a ser cuando $2\pi t/T$ valga 1 , es decir que la altura de la marea sería 0.00175 m. De cualquier manera éste resultado no es aceptable, y se puede pensar que las suposiciones hechas afectan demasiado a las condiciones reales del problema, lo que en éste caso se concluiría que éste método no es aplicable.

Si se quisiera considerar la laguna, se tendrían que hacer hipótesis similares, pero ya habría necesidad de variar la sección del canal, una idea para éste problema sería una vez obtenida la variación de la marea en la sección 8, como se hizo, considerar ésta variación, y teóricamente girarla 90 grados y propagarla a lo largo de la laguna. Lógicamente éstas hipótesis darían tal vez resultados absurdos.

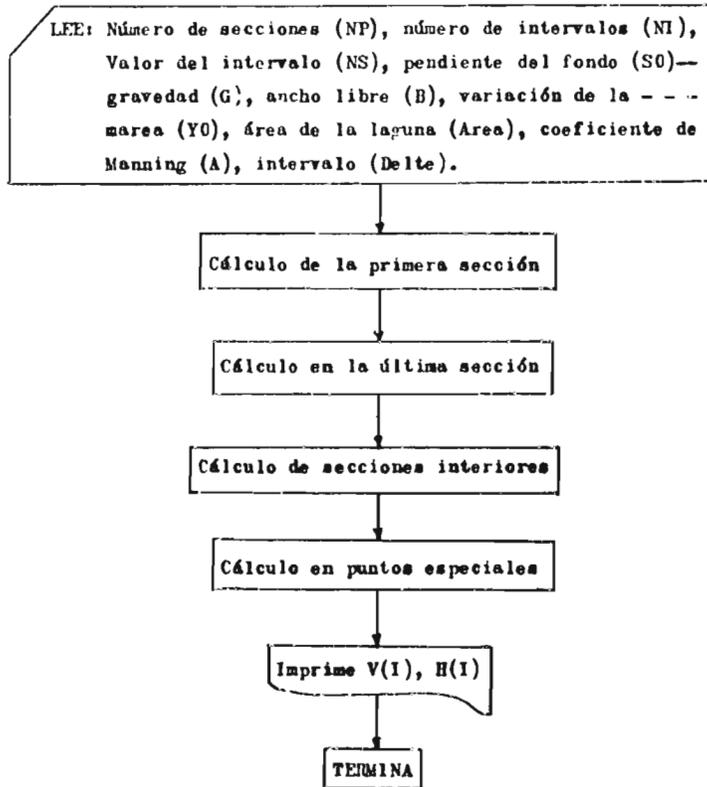
3.- Método de las Características.-

Para desarrollar el ejemplo por éste método se han supuesto las siguientes condiciones de frontera:

- Que la laguna de Alvarado tiene influencia en la propagación de las mareas, se considera su volumen.
- El canal tiene las características geométricas iguales al método anterior, es decir: área de $3,200 \text{ m}^2$; tirante medio de 10 m; ancho libre 320 m. (se puede considerar variable).
- La pendiente del fondo del canal igual a cero (puede ser cualquiera)
- La variación de la marea, en la primera sección, se supone senoidal.
- Se ha supuesto un coeficiente de Manning igual a 0.02 , cosa que es arbitraria, ya que inclusive, puede ser variable de una sección a otra.
- El gasto del río Papaloapan no se ha considerado.

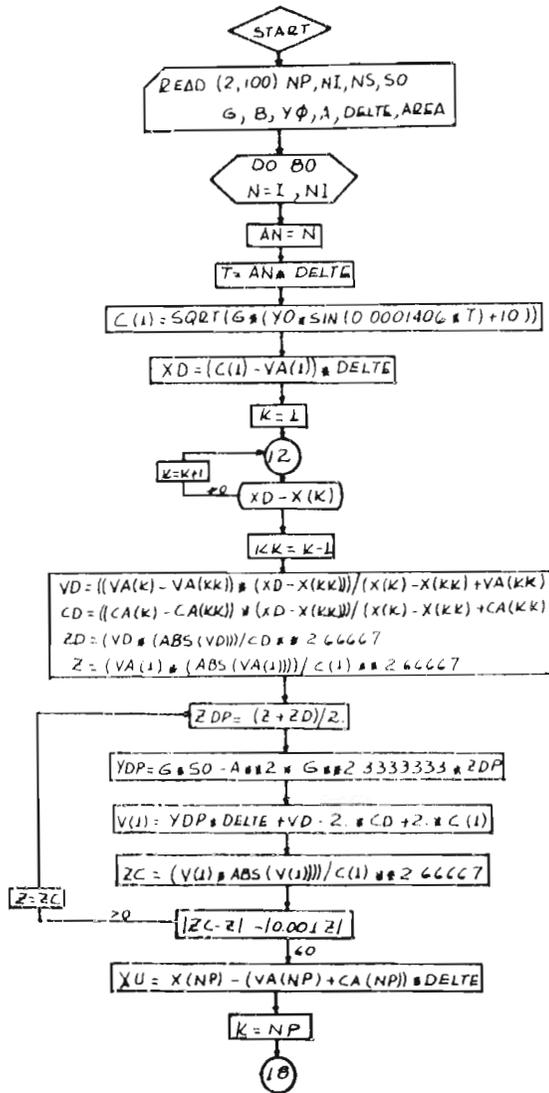
En éstas condiciones, a partir de las ecuaciones (128), se puede llevar a cabo el desarrollo y poder determinar las velocidades y tirantes en cada sección y a los intervalos de tiempo que se desee.

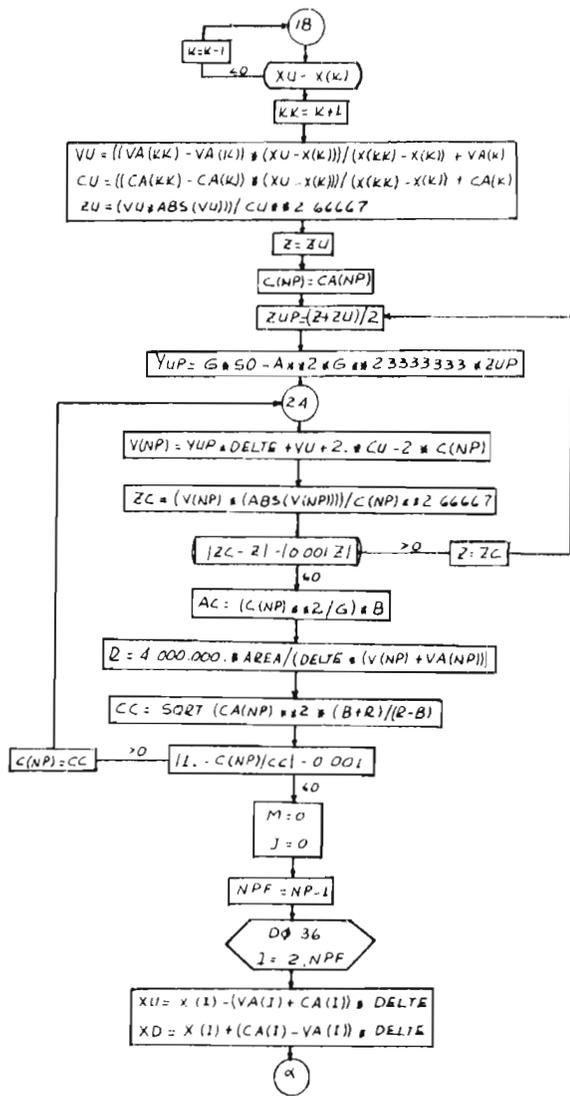
El proceso seguido puede simplificarse de la manera siguiente:

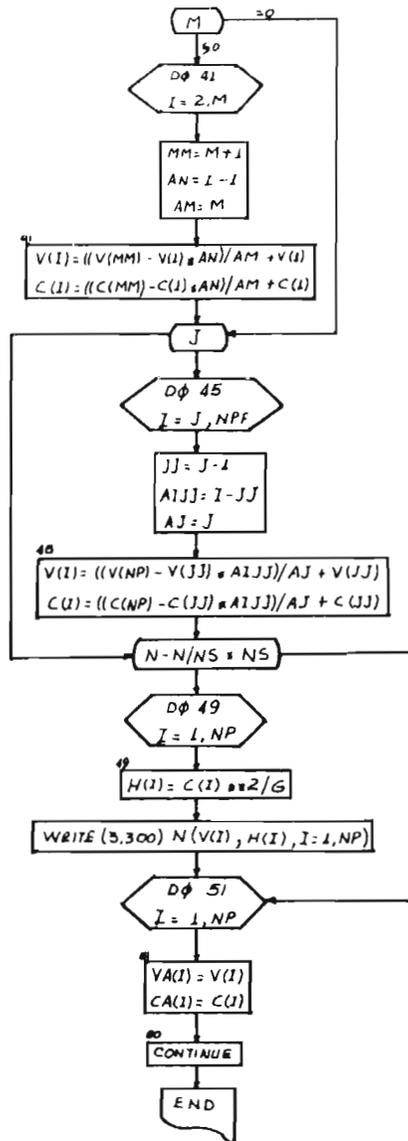


cuyo diagrama de flujo y programa se dan a continuación.

DIAGRAMA DE FLUJO








```

22 M=9
   J=0
   NPF=NPF-1
   DO 36 I=2,NPF
      XI=X(I)-VA(I)+CA(I)*NPF/3
      XD=X(I)+CA(I)-VA(I)*NPF/3
      TP=X(I)*.95+.05
37 M=J
      GO TO 36
25 IF (XD-X(NP))27,27,28
28 J=I
      GO TO 38
27 K=I
31 IF (X(XI)-X(XI)*29,30,31)
30 K=K-1
      GO TO 31
30 KK=K+1
   VJ=(VA(KK)-VA(KI))*(XD-X(KI))/(X(KI)-X(KK))+VA(KI)
   DJ=(CA(KK)-CA(KI))*(XD-X(KI))/(X(KK)-X(KI))+CA(KI)
   K=I
34 IF (XD-X(KI))32,32,33
33 K=K+1
      GO TO 34
32 KK=K-1
   VJ=(VA(KI)-VA(KK))*(XD-X(KI))/(X(KI)-X(KK))+VA(KI)
   DJ=(CA(KI)-CA(KK))*(XD-X(KI))/(X(KI)-X(KK))+CA(KI)
   Z=(VA(I)+ARS(VA(I)))/CA(I)**2,66667
   ZD=(VD+ARS(VD))/CD**2,66667
   ZU=(VU+ARS(VU))/CU**2,66667
37 ZUP=(Z+ZU)/2
   ZD=(Z+ZD)/2
   YUP=(YU+YU)*.5+.5*ZUP*ZUP
   YDP=(YD+YD)*.5+.5*ZD*ZD
   VU=(YUP+YDP)*DELTF/2+.5*(VU+VU)/2+.5*(C1-C2)
   CU=(YUP+YDP)*DELTF/4+.5*(VU+VU)/4+.5*(C1+C2)
   ZU=(VU+ARS(VU))/CU**2,66667
   IF (ABS(ZU-Z)-ABS(ZU,001+1))36,36,37
35 ZLTC
   GO TO 32
36 CONTINUE
38 IF (M)39,40,39
39 DO 41 I=2,M
   MM=I-1
   AN=I-1
   AN=V
   V(I)=(V(NP)-V(I))*AN/2**2*2
61 C(I)=(C(NP)-C(I))*AN/2**2*2
62 IF (J)63,46,63
44 DO 45 I=J,NPF
   JJ=I-1
   AJ=I-1
   V(I)=(V(NP)-V(JJ))*AJ/JJ*AJ+V(JJ)
65 C(I)=(C(NP)-C(JJ))*AJ/JJ*AJ+C(JJ)
66 IF (5-N/N**2)*.5**48,48,49
48 DO 49 I=J,N
69 H(I)=C(I)**2/5
   WRITE(7,100) N,(V(I)+H(I)),I=J,NP
300 FORMAT(1)H(15,8(2F7.3))
50 DO 51 I=1,NP
   V(I)=V(I)
51 CA(I)=C(I)

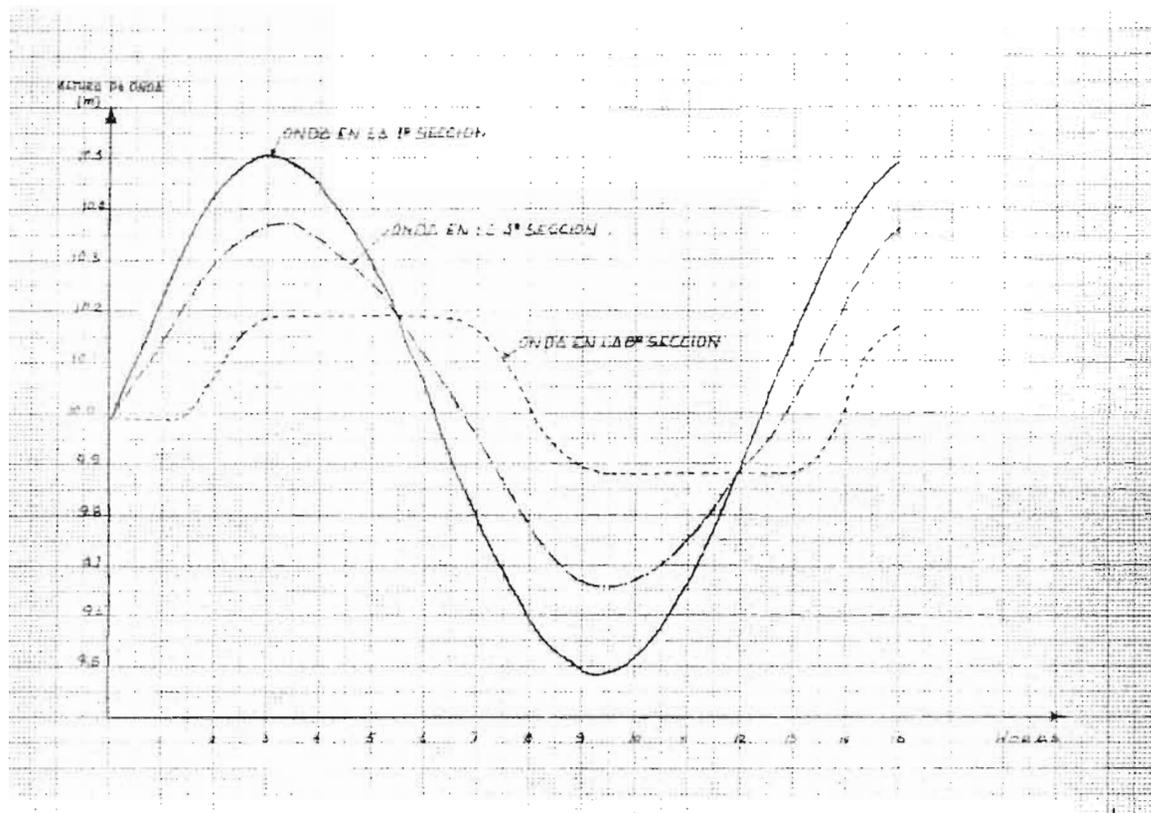
```

80 CONTINUE
CALL EXIT
END

En éste caso se ha considerado como datos:

- Intervalos: 30 segundos (los resultados son dados cada 30 intervalos, es decir, cada 15 minutos)
- Nivel inicial 10 m.
- Gravedad 9.81 m/s^2
- Variación de la marea $+ 0.509 \text{ m}$.
- Area de la laguna $11 \times 10^6 \text{ m}^2$.
- Aproximación de cálculos 0.001.

y se obtuvieron los resultados que se indican en la página siguiente.



Para poder visualizar mejor el resultado, se ha llevado a una gráfica (pag. 70) la variación de los tirantes en las secciones 1, 4 y 8, en las que se puede apreciar claramente el tránsito de la onda, así como el efecto que la laguna produce en la última sección donde se tiene una elevación de la onda que es 32 cm. menor que en la primera sección y la cresta bastante aplanada, esto se puede deber, precisamente, al gran volumen de la laguna que no permite hacer un cambio rápido sino cuando las velocidades adquieren el valor máximo.

Se nota también que a medida que la onda avanza va perdiendo altura, esto se puede explicar que es debido a la fricción del canal que va absorbiendo parte de la energía que trae la onda, cosa que no haría peligrar a las embarcaciones.

Si se observa como van variando las velocidades en las diferentes secciones, se concluye que son de esperarse flujos y reflujos de cuidado y que podrían afectar a la navegación, pero se tienen intervalos hasta de tres horas en los que las velocidades son pequeñas; se podría entonces aprovechar éstos tiempos para que las embarcaciones entren o salgan.

De ésta manera pues, éste método permite hacer un estudio más detallado, y sobre todo que permite hacer intervenir a todos los factores que tengan influencia en el fenómeno, por ejemplo, si se quisiera considerar el gasto del río, la variación en el proceso de cálculo estaría en la condición de fronteras de la última sección.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Como se puede ver, a través del desarrollo hecho, el problema de transitar las mareas es bastante complejo, si se tienen en cuenta todos los factores que influyen en ellas, lo que obliga a hacer una serie de simplificaciones y consideraciones simplificadorias para poder llegar a resultados más o menos satisfactorios, y que son singulares para cada lugar y en consecuencia para cada estudio y aún se hace más complejo desde que, en general, no se tienen los datos e informaciones necesarias.

Específicamente en el problema tratado, en Estuarios, se puede concluir que los métodos usados tienen una aplicación limitada, desde que cada uno hace consideraciones diferentes, y eso lo muestran los resultados obtenidos, así, para el ejemplo expuesto, se puede decir que el método de Dronkers no sería aplicable, observando el resultado que proporciona, esto hace pensar que las consideraciones que hace el autor del método, son demasiado simplificadorias, que no reflejan una situación más o menos real del problema, es lógico que al suponer por ejemplo la sección uniforme, y el limitar la última sección como una frontera rígida, tiene que afectar enormemente el problema. El método de Proudman, nos puede dar una idea bastante aceptable del problema, ya que los resultados obtenidos son más o menos lógicos, pero en este caso no nos da idea del tiempo en el que se producen determinadas alturas de marea. El método de las Características, tal vez, sea el más completo y general, pues como se dijo, después de hacer el desarrollo numérico, permite hacer intervenir todos los factores que se deseen, implicando, por supuesto, un mayor trabajo y complicaciones en el planteamiento matemático para hacer posible el uso de computadoras.

Se puede concluir, en resumen, que es muy difícil y casi imposible hacer intervenir todos los factores que afectan y producen la marea y al tratarla en un lugar específico, los métodos de que se disponen tienen también sus limitaciones pero teniendo en cuenta lo antes

dicho y el trabajo desarrollado, se recomienda que para un problema de mareas en un estuario, el método de las características es el que puede dar resultados más favorables, pudiendo también, por la sencillez y rapidez del desarrollo, tomarse el método de Proudman, como para tener una idea del problema que se trata de abordar.

Referencias.-

- 1.- Tidal Computation - J. J. Dronkers.
- 2.- Physical Oceanography (tomo II) - Defant
- 3.- Contribución al Estudio de Ondas de Avenida en canales (sobretiro de la Revista Ingeniería) - Jose Luis Sánchez B., Antonio Capella, Ismael Herrera R.
- 4.- Beach and Waves - Dascom
- 5.- Manual of Armonic Analisis and Prediction of Tides - P. Shureman.
- 6.- Apuntes de clase de: Hidráulica Marítima y Métodos Numéricos. dictados por el Ing. José Luis Sánchez B. en 1960.