01174

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA

MAESTRÍA EN INGENIERÍA PETROLERA

MODELO DE DOBLE POROSIDAD CON FLUJO INTERPOROSO TRANSITORIO, PARA LA INTERPRETACIÓN DE LA RESPUESTA DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

Directores de tesis:

Dr. JESÚS RIVERA RODRÍGUEZ

Dr. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO

Presenta:

Ing. Héctor Carlos Pulido Bello

Ciudad Universitaria, julio de 2001.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

RESÚMEN

El objetivo de la tesis es proponer un modelo de doble porosidad con flujo interporoso transitorio, para la interpretación de la respuesta de un trazador en un yacimiento naturalmente fracturado. En el modelo se utilizó un nuevo parámetro, el cual representa el gradiente de flujo másico que rige la transferencia fractura-matriz dependiente del tiempo que incluye un factor de forma, utilizando dos casos: bloques cúbicos de matriz rodeado de fracturas y el otro con estratos horizontales altamente permeables, en contacto con bloques horizontales de baja permeabilidad.

Se definieron nuevas variables adimensionales que facilitan la interpretación y eliminan la dispersión resultante de la inversión numérica. La solución del modelo se obtuvo en el espacio de Laplace y se invirtió numéricamente a tiempo real, utilizando el algoritmo de Crump, acoplado con el algoritmo Epsilon que acelera la convergencia. La solución calculada por inversión numérica se comparó con la solución analítica a tiempos adimensionales cortos y largos obtenida para el modelo propuesto, proporcionando resultados satisfactorios. Con los valores de la inversión numérica se generó la *curva tipo* del modelo propuesto, la que se construyó con los grupos de variables adimensionales obtenidos de la solución analítica aproximada a tiempos largos. El ejemplo de aplicación de la interpretación de datos de campo consiste en *ajustar* la curva tipo presentada en este trabajo a los datos publicados de la respuesta observada en los pozos productores del campo Ekofisk cuyas características físicas son correspondientes a las suposiciones ampleadas en el modelo, y así determinar parámetros de interés práctico como son: el valor "in situ" de la constante de dispersividad de las fracturas, difusión en la matriz, el tamaño característico de los bloques de matriz y tendencia de fracturamiento en el campo. Los resultados mostraron que es posible evaluar practicamente la transferencia fractura-matriz en procesos de inyección, tales como contraste de dispersividades y fracción de volumen en la matriz con respecto al introducido a las fracturas.

CONTENIDO

pág.

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

CAPÍTULO 6

IDENTIFICACION DEL PROBLEMA

Cuando la presión estática de un yacimiento declina, puede aplicarse un proceso de disminución de la declinación en la presión del yacimiento para sostener una producción determinada; en México, un ejemplo de esta situación el campo Abkatún perteneciente a la Región Marina Suroeste de PEP, el cual actualmente cuenta con un sistema de inyección de 270 MBD agua en la formación brecha del Paleoceno, otro ejemplo se tiene en la Región Marina Noroeste, donde se tiene proyectado inyectar nitrógeno al casquete del Complejo Cantarell. Para optimizar el proceso de inyección, el desplazamiento de fluidos, así como el diseño oportuno de la explotación, es fundamental conocer las características del yacimiento, y simular numéricamente esquemas de inyección a largo plazo que permitan maximizar el valor económico del aceite extraido. El interés principal que motivó este trabajo se basó en que es posible caracterizar de manera importante un yacimiento naturalmente fracturado por medio de la interpretación de la respuesta obtenida de pruebas de trazadores. Aunque existen datos de pruebas de trazadores a nivel campo para diferentes tipos de yacimientos, *al momento no hay métodos de interpretación analíticos para yacimientos complejos como son los naturalmente fracturados,* aún cuando, existen métodos cualitativos o de ajustes numéricos de minimización con funciones objetivo, además de que en la literatura sólo se han presentado relativamente pocos modelos. El objetivo del presente trabajo es desarrollar un "Modelo de Doble Porosidad con Flujo Interporoso Transitorio para la Interpretación de la Respuesta de Trazadores Radiactivos en Yacimientos Naturalmente Fracturados"; el cual consiste en plantear el modelo, resolverlo, validar la solución, generar el método de interpretación de los datos de concentración de la irrupción de trazador en los pozos productores y obtener parámetros dinámicos del yacimiento en el sitio mismo.

INTRODUCCION

Para conocer la trayectoria de los fluidos en el yacimiento desde un pozo inyector hacia pozos productores se utilizan trazadores incorporados en el fluido desplazante. Un trazador es una substancia que se agrega al fluido inyectado con objeto de detectar su avance a través del medio en que circula; debe tener propiedades tales como ser de detección fácil, no debe interferir con el flujo de fluidos, y requerirse en concentraciones pequeñas.

La interpretación de las pruebas de trazadores consisten en utilizar el modelo adecuado para interpretar la respuesta, la cual consiste en cambios en la concentración del trazador contra tiempo en los pozos productores, con objeto de determinar los parámetros del yacimiento que influyen en el flujo de fluidos a través de la roca de los yacimientos, como son: trayectoria recorrida por el fluido, coeficiente de dispersión longitudinal, porosidad de la matriz, magnitud del volumen de hidrocarburos remanente y la intensidad de estratificación. En yacimientos naturalmente fracturados es de gran importancia la estimación del tamaño de bloque y su geometría, ancho de fractura característico y además la determinación de la magnitud de influencia de cada una de ellas y volumen poroso inaccesible.

El modelo propuesto en este trabajo para representar el flujo de trazadores a través de los yacimientos considera los mecanismos de transporte de masa más relevantes que se presentan en la realidad, como son: dispersión longitudinal del trazador, difusión, convección, decaimiento radiactivo, adsorción, ritmo de transferencia de masa entre dos o más medios porosos.

La solución de muchos modelos de Dispersión-Convección por el método de diferencias finitas son afectados por dispersión numérica, involucran cálculos progresivos donde la solución a un tiempo dado es dependiente de la solución a un tiempo anterior. La herramienta alterna para resolver los modelos de Dispersión-

Convección es utilizar el método de la Transformada de Laplace, pero en muchos casos no es posible invertir analíticamente al tiempo real la solución obtenida, así que una vez obtenida la solución en el espacio de Laplace se realiza la inversión mediante algoritmos numéricos los cuales calculan la solución a cualquier tiempo dado.

Para obtener soluciones analíticas aproximadas generalmente se simplifica la solución dada en el espacio de Laplace mediante aproximaciones a tiempos cortos o largos y en algunos casos a tiempos intermedios y se invierte analíticamente a tiempo real mediante tablas de inversiones. La solución analítica aproximada a tiempos cortos se expresa en función de grupos de variables adimensionales con los cuales se construyen gráficas adimensionales, lo que permite una mejor comparación entre la solución por inversión numérica con la solución analítica correspondiente.

Con el objetivo de desarrollar metodologías de interpretación, se revisaron los modelos matemáticos publicados en la literatura técnica que emplean métodos analíticos para el problema de Dispersión-Convección en yacimientos; los modelos que utilizan esquemas numéricos para resolver este problema, se discuten parcialmente en este trabajo, debido a que el tratamiento matemático que se emplea en los modelos propuestos es analítico; sin embargo se han tomado en cuenta los resultados obtenidos.

El presente trabajo está dividido en seis capítulos, donde el Capítulo 1 trata de los conceptos básicos que se utilizaron en este trabajo, en el Capítulo 2 se presenta la revisión bibliográfica donde se homogeneizaron los modelos y soluciones presentadas a las variables adimensionales utilizadas en este trabajo, con el objeto de identificar modelos particulares resueltos y validar las soluciones a los modelos propuestos, en el Capítulo 3 se presentan los cuatro modelos propuestos desarrollados y soluciones para el flujo de trazadores radiactivos en yacimientos, destacando entre ellos el modelo de doble porosidad para yacimientos naturalmente fracturados, debido a que se estructuró el problema en forma similar a las soluciones en pruebas de presión lo que abre la puerta a un avance tecnológico considerable. El Capítulo 4 presenta la validación de cada modelo propuesto basado en métodos prácticos, el modelo propuesto para yacimientos homogéneos una vez validado, se utilizó para validar el modelo para yacimientos naturalmente fracturados, el Capítulo 5 presenta como aportación una metodología de interpretación original basada en las soluciones analíticas para los casos de flujo radial de los cuales se han publicado los datos de las pruebas de trazadores radiactivos realizadas, así como datos de la formación; para yacimientos homogéneos se utilizaron datos del campo Brassey de Canadá y en yacimientos naturalmente fracturados los del Ekofisk de mar del Norte que ha producido 1250 MMB de aceite y finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones.

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

En la extracción de aceite de yacimientos depresionados es importante atenuar la declinación de su presión mediante la inyección de fluidos en forma tal de sostener una plataforma de producción. La inyección de fluidos requiere mantener frentes de inyección lo más homogéneos posibles y minimizar la posibilidad de una irrupción temprana del fluido inyectado en los pozos productores.

Durante las operaciones de inyección el fluido inyectado se desplazará preferencialmente en las fracturas o zonas más permeables, por lo que las canalizaciones o digitación del fluido inyectado generará un frente de inyección y distribución incompleta del fluido en todas las capas de la formación, disminuyendo así, la recuperación final de aceite y favoreciendo la irrupción temprana de fluidos inyectados en los pozos productores, lo que a su vez resultan en un incremento de los costos de operación debido al manejo de los fluidos adicionales producidos.

El uso de trazadores en el flujo de pozo a pozo proporcionan una medición directa del movimiento del fluido en un yacimiento y al mismo tiempo permiten detectar heterogeneidades. En cualquier proyecto de inyección de fluido, las pruebas de inyección de trazadores de pozo a pozo, y el análisis adecuado de los datos de la prueba, provee un medio posible de mejorar la caracterización de un yacimiento, los cuales proporcionan parámetros básicos que permiten optimizar las variables de operación durante la aplicación de procesos de recuperación secundaria y mejorada de hidrocarburos.

1.1. Información obtenida de pruebas de trazadores radiactivos entre pozos.

- Eficiencia volumétrica de barrido. El volumen del trazador inyectado que es recuperado en los pozos productores proporciona una indicación de la eficiencia de barrido. Un volumen pequeño o tiempos de irrupción pequeños son indicativos de una fractura o de trayectorias de alta permeabilidad en la porción del yacimiento comprendida entre los pozos involucrados en la prueba.
- Trayectorias de alta permeabilidad. La presencia de trayectorias de alta permeabilidad disminuyen las eficiencias areal y vertical del proceso de desplazamiento de aceite del yacimiento y causan una irrupción temprana del fluido inyectado en los pozos productores.
- Direcciones preferenciales de flujo del fluido inyectado. La detección en los pozos productores de los diferentes trazadores marcan direcciones preferenciales de flujo desde los pozos inyectores hacia los diferentes productores.
- Identificación de pozos inyectores inadecuados. Usando un trazador para cada pozo inyector en un arreglo dado, se puede determinar el pozo inyector que causa una irrupción temprana en un pozo productor específico.
- Delineación de barreras al flujo. Al no detectarse la presencia del trazador en el pozo productor indica que puede existir una discontinuidad geológica en la formación, o barreras entre los pozos.
- Las velocidades relativas de los fluidos inyectados. Si diferentes componentes químicos y/o radiactivos son adicionados como trazadores e inyectados en el mismo pozo, el tiempo de arribo de los diferentes trazadores en un pozo productor determinado, proporciona una indicación de la velocidad relativa de los componentes respectivos.
- Acciones correctivas. Antes de iniciar un proyecto de inyección de fluido a nivel de campo, es importante determinar la existencia de heterogeneidades del

yacimiento que pudieran causar la canalización del fluido inyectado y así poder aplicar acciones correctivas.

1.2. Unidades de medición de la radiactividad[REF].

Las mediciones físicas de radiactividad cuantifican el número de partículas por segundo que emite una fuente radiactiva, mientras que las mediciones biológicas describen la cantidad de energía absorbida por organismos vivos o parte de ellos.

Las unidades usuales para medir la radiactividad son las siguientes:

Curie. Actividad correspondiente a 3.7×10^{10} desintegraciones por segundo, número producido por una muestra de un gramo de radio.

Roentgen. Produce alrededor de 2×10^{9} pares de iones por centímetro cúbico de aire, únicamente se aplica a los rayos "x" o gamma.

Rem (equivalente roentgen para el hombre). Es la cantidad de energía de radiación absorbida por un ser humano específicamente. Un rem es la cantidad de radiación ionizante que genera un efecto equivalente a la absorción de un roentgen, cuando lo absorbe una persona

Rad (dosis de radiación absorbida). Absorción de 100 ergios de energía por gramo de tejido.

1.3. Vida media del trazador radiactivo, t_{vm}.

Es el tiempo que se requiere para la desintegración de la mitad de una cantidad inicial de material radiactivo, es decir el tiempo requerido para que N núcleos disminuyan a N/2 núcleos. Este fenómeno se considera cuando el trazador radiactivo tiene una vida menor al tiempo de tránsito del mismo en la formación.

Para un trazador radiactivo la concentración a un tiempo determinado está dada por la ley de decaimiento radiactivo:

$$N = N_o e^{-\lambda t} \qquad (1\text{-}1)$$

En la **Tabla 1** se presentan los valores de vida media de los trazadores, usados en la ingeniería petrolera.

Tabla 1. Vida media de trazadores radiactivos.

Elemento	vida media (días)	Tipo de radiación
Carbono 14	2100000.0	Beta
Níquel 63	34000.0	Beta
Estroncio 90	10000.0	Beta
Tritio 3	4520.0	Beta
Criptón 85	3832.0	Beta
Cobalto 60	1900.0	Gamma
Hierro 55	950.0	Gamma
Cobalto 57	270.0	Gamma
Plata 110	250.0	Gamma
Zinc 65	240.0	Gamma
Sulfuro 35	88.0	Beta
Escandio 46	83.8	Gamma
Iridio 192	73.8	Gamma
Cobalto 58	71.0	Gamma
Zirconio 95	64.0	Gamma
Estroncio 85	65.4	Gamma
Antimonio 124	60.2	Gamma
Iodo 125	60.0	Gamma
Acero 59	45.0	Gamma
Cromo 51	28.0	Gamma
Iodo 131	8.1	Gamma
Oro 198	2.7	Gamma

1.4. Tipos de trazadores radiactivos.

Los trazadores que pueden utilizarse para la caracterización de una formación son de dos tipos:

A. Trazadores fase agua.

A.1. Agua tritiada (HTO), es uno de los mejores trazadores entre pozos, fácilmente detectable a bajas concentraciones, muy estable, con 12.7 años de vida media; emite radiación beta, baja energía de radiación, muy seguro no dectectable con herramientas de rayos gamma, económico subproducto de industria nuclear y se comporta en forma similar al agua.

A.2. Tiocianatos (CNS-), es un excelente trazador, se comporta como un ion cloro en el yacimiento, puede ser usado tanto como trazador químico, o como radiactivo trabajando en forma conjunta con el carbono14, su costo es moderado.

A.3. Bromuros (Br^-), existe naturalmente en muchos campos salinos; provoca problemas con el incremento en la temperatura, es barato.

A.4. Cobalto Hexacianuro ($Co(CN)_6$) $^{-3}$, complejo aniónico es un buen trazador emisor de rayos gamma, estable hasta 100 °C y con una vida media de 5.27 años.

A.5. Ioduro (I^-), es un excelente trazador, se utiliza en concentración baja en muchos campos de aceite con agua salada; su costo es muy alto.

A.6. Deuterio (D_2O), es una forma no radiactiva del agua; existe en forma natural, se requiere en grandes cantidades.

A. 7. Nitrato (NO^{-3}), es un trazador iónico, frecuente en el agua producida, está sujeto a degradación química y bacterial, se descompone a temperaturas mayores de 82 °C, puede ser usado para pruebas cortas o bajo condiciones de irrupción rápida, su costo es bajo.

A. 8. Diluyentes fluorescentes (Rodamina/WT) detectable en concentraciones tan bajas como una parte por millón bajo luz ultravioleta. Tendencia a absorción en la presencia de aceite (a la interfase aceite-agua), usado en la identificación de fracturas y estratos con agua en un campo de aceite, la fluorescencia del aceite interfiere con la detección, su costo es muy bajo.

A. 9. Ácido alcohólico($C_nH_{2n}OH$), es un trazador químico no radiactivo, compuesto de alcoholes inferiores metilo, etilo e isopropilo, preferencialmente solubles en agua, detectables por cromatrografía en bajas concentraciones, sujetos a degradación bacterial, alcohol rutinariamente utilizado en fluidos para tratamientos a pozo. El alcohol isopropílico es detectado por una cromatografía de gas usando una flama de hidrógeno como detector, su costo es bajo.

B. Trazadores fase hidrocarburos.

El tritio ($^3H_2$). Es inyectado como un gas, usado en combinación con otros gases hidrocarburos tienen los mismos beneficios que el agua tritiada, su costo es bajo.
Son componentes tanto de aceite como de gas.
Kripton 85. Gas inerte radiactivo, baja absorción en la roca del yacimiento, su costo es bajo.

1.5. Constante de decaimiento radiactivo, λ.

La constante de decaimiento es una característica del trazador radiactivo utilizado, por lo que es una propiedad de la substancia y es inversamente proporcional a la vida media del trazador, se calcula con la fórmula siguiente:

$$\lambda = \frac{\ln\left(N_o / N\right)}{t_{vm}} = \frac{\ln(2)}{t_{vm}} \tag{1-2}$$

1.6. Cantidad de trazador a utilizar.

La cantidad de trazador a utilizar es función de varios elementos como son: distribución de permeabilidades en el yacimiento, gastos de inyección y producción, distancia entre el pozo inyector y productor, concentración pico, dispersividad, espesor de la formación, porosidad, saturación de agua, método de muestreo, método del análisis de muestreo. Está gobernada por dos límites: la sensibilidad a la detección como límite inferior y la máxima concentración permisible como límite superior. La máxima concentración permisible depende del área donde se encuentren los campos y del medio donde se diluya el trazador ya sea en gas o en líquido y son valores determinados por asociaciones internacionales o regulaciones federales como ejemplo se muestra la tabla 2 (Zemel, B.,1995):

Tabla 2. Máxima concentración permisible.

Isótopo	Clase	Aire, µCi/ml	agua, µCi/ml
H-3	Agua	1×10^{-7}	1×10^{-3}
C-14	CO	2×10^{-6}	
C-14	CO_2	3×10^{-7}	
C-14	Componentes	3×10^{-9}	3×10^{-5}
Co-57	Vida media de 10-100 días	4×10^{-9}	6×10^{-5}
Co-57	Vida media > de 100 días	9×10^{-9}	
Co-60	Vida media de 10-100 días	2×10^{-10}	3×10^{-6}
Co-57	Vida media > de 100 días	5×10^{-11}	

1.7. Porosidad, ϕ.

La porosidad se define como la relación de volumen poroso conectado entre el volumen total de roca:

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} \tag{1-3}$$

Porosidad de matriz, ϕ_m .

Es el volumen poroso de la matriz dividido entre el volumen total de la matriz:

$$\phi_m = \frac{V_{poroso}}{V_{tm}} \tag{1-4}$$

Porosidad de fractura, ϕ_f .

Es el volumen de fracturas dividido entre el volumen total de la roca, puede calcularse con la expresión siguiente (Pirson, 1963):

$$\phi_f = \frac{\phi_{mf}^{\ bmf} - \phi_m^{\ bm}}{1 - \phi_m^{\ bm}} \tag{1-5}$$

donde:

ϕ_{mf} = porosidad total, adim.

b_{mf} = exponente de comentación matriz-fractura, puede ser calculado del método desarrollado por Gómez usando el registro de microresistividad.

b_m = exponente de cementación de la matriz.

El factor de formación de la matriz:

$$F = \frac{1}{\phi_m^{bm}} \tag{1-6}$$

Ejemplos característicos:

$\phi_m = 10\ \%;\quad F = 150$ y $\phi_m = 4\%;\quad F = 1000$

En formaciones calcáreas el factor de formación de la matriz es muy alto ($1/F = \phi_m^{bm} \approx 0$) la Ec. 1-4 se reduce a:

$$\phi_f = \phi_{mf}^{\,b_{mf}} \tag{1-7}$$

1.8. Difusión molecular, D_m.

La difusión molecular es un mecanismo de transferencia de masa debido a la presencia de gradientes de concentración en el fluido mismo. El coeficiente de difusión molecular depende de la concentración de la especie que defina la temperatura y la presión y es una característica de la mezcla, se evalúa experimentalmente. Para utilizar el coeficiente de difusión molecular en la predicción del comportamiento de un fluido en un yacimiento debe ser ajustado para tomar en cuenta la trayectoria tortuosa de difusión en los poros de la roca, así el coeficiente de difusión molecular efectivo está dado por:

$$D_{me} = \frac{D_m}{F\phi} \tag{1-8}$$

En la **Tabla 3** se muestran algunos coeficientes de difusión determinados experimentalmente por Callahan y asoc. (1999):

Tabla 3. Coeficientes de difusión experimentales en núcleos de arena.

Sustancia	10-6 cm^2/s
Yodo	3.6
Pentaflourbenzoato (PFBA)	1.6
Bromo	4.8

1.9. Dispersión.

Cuando un fluido desplaza a otro se presenta el fenómeno de mezclado de fluidos. El proceso de dispersión de un fluido en movimiento en un medio poroso es el resultado de la acción combinada de un fenómeno físico-químico, representado por la difusión, y un componente mecánico resultante del efecto de mezclado producido por el movimiento del fluido.

La componente de la dispersión producida por la difusión es debida a los gradientes de concentraciones y se presentaría aún cuando el fluido estuviera estático; por otra parte, la componente mecánica de la dispersión es el resultado de varios factores tales como la distribución de velocidades existente dentro del poro, variaciones en el tamaño del poro, que a su vez modifican las distribuciones de velocidades y las fluctuaciones de las líneas de corriente debido a la tortuosidad del medio poroso con respecto a la dirección principal del flujo. Si un fluido sigue a otro en flujo a través de un medio poroso a un gasto conocido y a condiciones específicas, el problema es determinar cuál será la concentración de la interfase como función de la distancia y el tiempo. Existen dos tendencias a la dispersión, una en la dirección predominante de flujo se denomina dispersión longitudinal y la otra en dirección normal a ésta, llamada dispersión transversal. Cada una de estas direcciones de dispersión está caracterizada por un coeficiente de dispersión. El coeficiente de dispersión longitudinal se denomina D y el coeficiente de dispersión transversal D_t, siendo $D \neq D_t$.

1.10. Dispersión convectiva microscópica.

Cuando los fluidos fluyen a través de un medio poroso, ocurre un mayor mezclado en la dirección del flujo de lo que se esperaría por difusión molecular únicamente (Perkins y otros, 1963). Este mezclado adicional producido por el flujo o convección parece ser explicada por la teoría de "celdas de mezclado" como se ilustra en la **Fig. 1**.

Como se muestra en esta figura, las líneas de corriente individuales 1, 2, 3 siguen una trayectoria tortuosa a través del medio poroso, la dirección promedio de cada línea de corriente debe ser en la dirección promedio del flujo. Suponiendo que un solvente viaja inicialmente a lo largo de una línea de corriente y en cada una de ellas con una concentración dada. Las concentraciones de solventes asociadas con las líneas de corriente 1 y 2 entran al poro A, a través de pequeñas conexiones porosas. Dentro del poro A la concentración de solvente es igualada por difusión molecular de tal modo que del poro A emerge una concentración uniforme. El solvente de composición alterada asociado con la línea de corriente 2 se mezcla entonces en el poro C con el solvente de composición asociada con la línea de corriente 3. En el poro C la difusión nuevamente iguala las concentraciones de tal modo que la composición de dos solventes es alterada emergiendo desde el poro C a lo largo de la línea de corriente 2.

La **Fig. 1** también ilustra la mezcla de los fluidos por dispersión convectiva transversal en la dirección del flujo. Nuevamente considerando las tres lineas de corriente 1, 2, y 3, pero suponiendo que la línea de corriente 1 inicialmente sólo transporta moléculas de solvente. Donde las líneas de corriente 2 y 3 inicialmente solo acarrean moléculas de aceite. En el poro A, los fluidos de las líneas de corriente 1 y 2 son mezclados y la línea de corriente 2 deja que el poro A transporte algún solvente. En el poro C, el fluido de línea de corriente 2 es mezclado con el fluido libre de solvente desde la línea de corriente 3. La línea de corriente 3 deja ahora que el poro C transporte algún solvente. De esta manera, el solvente comienza a ser dispersado progresivamente normal a la dirección del flujo. Entonces ocurre la mezcla entre líneas de corriente 1 y 2 en el poro D, etc.

1.11. Velocidad microscópica radial, v_r.

La velocidad microscópica radial es la relación que existe entre la distancia recorrida por el trazador dentro de los poros dentro del yacimiento entre el tiempo que tarda en recorrerla. Su importancia en el proceso de inyección de trazadores consiste en generar un efecto de convección que tiende a modificar las concentraciones del trazador:

$$v_r = \frac{L}{t} = \frac{LA_r}{tA_r} = \frac{q}{A_r} \tag{1-9}$$

Se calcula dividiendo el gasto de inyección entre el área perpendicular expuesta al flujo que constantemente se modifica al avanzar el fluido inyectado:

$$v_r = \frac{q}{2\pi rh\phi} = \frac{a}{r} \tag{1-10}$$

donde:

$$a = \frac{q}{2\pi h\phi} \tag{1-11}$$

a = constante de inyección, L^2/T.

1.12. Velocidad macroscópica radial, u_r.

La velocidad macroscópica es la relación que existe entre la distancia recorrida por el trazador en el yacimiento entre el tiempo que tarda en recorrerla.

$$u_r = \frac{d}{t} = \frac{dA}{tA} = \frac{q}{A} \tag{1-12}$$

$$u_r = \frac{q}{2\pi rh} \tag{1-13}$$

Relación entre la velocidad macroscópica y la velocidad microscópica.

$$u = v\phi \tag{1-14}$$

1.13. Coeficiente de Dispersión Longitudinal, D.

El coeficiente de dispersión longitudinal está compuesto por el coeficiente de difusión molecular y la dispersión mecánica. Es función esencialmente de la dispersividad, de la velocidad y del gradiente de concentración (Bear, J., 1972):

$$D = \alpha v + D_m \tag{1-15}$$

1.14. Constante de dispersividad, α.

Es una medida de la tendencia de la roca a mezclar los componentes disueltos (trazador) en el fluido inyectado.

Si la difusión molecular es muy pequeña, el coeficiente de dispersión radial puede suponerse como proporcional a la velocidad radial del fluido (Brigham, 1961):

$$D_r = \alpha v_r \tag{1-16}$$

Despejando la constante de dispersividad:

$$\alpha = \frac{D_r}{v_r} \tag{1-17}$$

Substituyendo la velocidad radial (ec. 1-10):

$$\alpha = \frac{rD_r}{a} \qquad (1\text{-}18)$$

1.15. Variables adimensionales.

Es la combinación de variables para formar grupos sin dimensiones. La distribución de concentración que se origina en un yacimiento durante la inyección depende de los parámetros de yacimiento tales como: permeabilidad, porosidad, compresibilidad, espesor, viscosidad, dimensiones del medio, etc., por lo que es prácticamente imposible graficar el comportamiento del medio en términos de variables reales ya que su número es excesivo. El uso de variables adimensionales permite eliminar la presencia de valores geométricos del yacimiento, generalizar y facilitar la solución, ya que el número de variables dependientes es reducido significativamente y tienen las características siguientes:

- Son directamente proporcionales a las variables reales.
- Son definidas de tal manera que las soluciones adimensionales no contienen variables reales.
- Las variables adimensionales que se utilizan en pruebas de trazadores son: cambio de concentración, volumen poroso inyectado, de longitud y tiempo.
- Facilidad de solución del modelo, por ejemplo al transformar éste al espacio de Laplace la ecuación diferencial ordinaria resultante es homogénea.
- Para graficar no es necesario introducir valores geométricos del yacimiento.

1.15.1. Longitud adimensional, r_D.

Para no involucrar datos de longitudes de núcleos o de yacimientos se utiliza una distancia de referencia. Las distancias de referencia para flujo radial son las siguientes: distancia de pozo a pozo o radio del pozo, espesor de la zona fluyente y de la zona estancada, ancho de la fractura y tamaño de bloque.

1.15.2. *Tiempo adimensional, t_D.*

En un proceso de inyección tradicionalmente los volúmenes inyectados se proporcionan tomando como referencia el volumen poroso del yacimiento.

La expresión que representa el volumen poroso inyectado es:

$$I = \frac{V_{piny}}{V_p} \qquad (1\text{-}19)$$

Para un proceso de inyección radial los volúmenes inyectados se proporcionan tomando como referencia un volumen poroso de yacimiento basado en la distancia del pozo inyector al pozo productor como radio, el espesor constante y una porosidad promedio.

$$t_D = \frac{qt}{\pi r_p^2 h\phi} \qquad (1\text{-}20)$$

Análogo a las pruebas de presión se observa que asociando el coeficiente de dispersión sin difusión molecular del medio poroso con el tiempo, se facilita la interpretación:

$$t_D = \frac{D_r t}{r_w^2} = \frac{\alpha v_r t}{r_w^2} = \frac{\alpha_D a t}{r_w^2} \qquad (1\text{-}21)$$

1.15.3. *Concentración adimensional, C_D.*

La concentración adimensional se obtiene al dividir la concentración en un punto dado a un tiempo correspondiente entre la concentración inyectada en forma constante, Co.

$$C_D(r_D, t_D) = \frac{C(r,t)}{C_o} \qquad (1\text{-}22)$$

Cuando existe una concentración constante en el yacimiento previo a la inyección, C_1, la concentración adimensional se define:

$$C_D(x_D, t_D) = \frac{C(x,t) - C_1}{C_o - C_1} \qquad (1\text{-}23)$$

1.15.4. *Decaimiento radiactivo adimensional, λ_D.*

Es la relación que existe entre la velocidad de decaimiento de referencia (longitud de referencia multiplicando a la constante de decaimiento radiactivo), con respecto a la velocidad macroscópica del fluido, para flujo radial:

$$\lambda_D = \frac{r_w \lambda}{v_r} = \frac{r_w^2 \lambda}{a} \qquad (1\text{-}24)$$

1.16. Número adimensionales.

Los números adimensionales reflejan las relaciones entre las diferentes fuerzas que intervienen en el fenómeno.

1.16.1. *Número de Peclet radial.*

Es un número que relaciona las fuerzas de convección y de dispersión.

$$P_{er} = \frac{v_r r_w}{D_r} = \frac{r_w}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_D} \qquad (1\text{-}25)$$

1.16.2. *Número de Damkoler, D_a.*

Es la relación de la velocidad de transferencia de masa entre dos medios dividido entre la velocidad del fluido inyectado, para flujo radial es:

$$D_a = \frac{M r_w}{v_r} \qquad (1\text{-}26)$$

1.16.3. *Número de Transferencia.* N_D.

Se define como la relación entre el número de Peclet y el número de Damkoler, para flujo radial es:

$$N_D = \frac{\dfrac{v_r r_w}{D_r}}{\dfrac{M r_w}{v_r}} = \frac{v_r^{\,2}}{D_r M} \qquad (1\text{-}27)$$

1.17. Adsorción.

Un fenómeno que ha sido observado repetidamente en la inyección de trazadores es la pérdida de trazador contenido en el fluido inyectado por adsorción en la roca del yacimiento. Cuando un bache de trazador se propaga a través del medio poroso, la orilla del frente pierde trazador gradualmente, la cantidad de pérdida del trazador de un banco puede ser grande o pequeña dependiendo de la naturaleza del trazador y la superficie de la roca.

La adsorción es el fenómeno que se presenta al adherirse una película de trazador a la superficie de los granos, su espesor es generalmente del orden de 1 a 5 micrones.

Se toma en cuenta cuando el volumen perdido por adsorción modifica fuertemente la porosidad inicial:

$$\Delta \phi \approx \frac{n \pi (dp)^2 \delta}{V_t} \qquad (1\text{-}28)$$

1.18. Volumen poroso inaccesible, Vpi.

Los fluidos inyectados con trazador no ocupan todo el volumen poroso conectado en el medio poroso, el sobrante de volumen poroso es inaccesible al trazador. Este volumen poroso inaccesible es ocupado por el fluido inyectado que no contiene trazador, pero que está en equilibrio con el fluido inyectado que contiene trazador.

Esto permite que los cambios en concentración de trazador sean propagados a través del medio poroso más rápidamente debido a que el trazador se propaga a una velocidad diferente. No todos los poros son accesibles a las moléculas de trazador, debido a su tamaño o formación de puentes.

En experimentos de laboratorio el bache de trazador irrumpió tempranamente, su velocidad fue mayor que la del bache del fluido sin trazador, solo hay una explicación, el volumen poroso por el que el trazador puede fluir es más pequeño que el volumen poroso total del núcleo.

La velocidad interfacial del fluido a través de todo el volumen poroso:

$$v = \frac{q}{A\phi} = \frac{L}{t} \tag{1-29}$$

La velocidad del fluido con trazador a través del volumen poroso accesible:

$$v_t = \frac{q}{A\phi_t} = \frac{L_t}{t_t} \tag{1-30}$$

Porosidad inaccesible, ϕ_i

$$\phi_i = \frac{V_{pi}}{V_t} \tag{1-31}$$

Porosidad efectiva al fluido con trazador, ϕ_t

$$\phi_t = \frac{V_p - V_{pi}}{V_t} \; ; \tag{1-32}$$

Porosidad efectiva al fluido, ϕ

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} \tag{1-33}$$

La porosidad inaccesible es:

$$\phi_i = \phi - \phi_t = \frac{q}{A}\left[\frac{1}{v} - \frac{1}{v_t}\right] = \frac{q}{A}\left[\frac{t}{L} - \frac{t_t}{L_t}\right] = \frac{q}{AL}\left[t - \tau t_t\right] \tag{1-34}$$

donde:

τ = factor de tortuosidad, L/L_t.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Los modelos principales para flujo radial reportados en la literatura se pueden clasificar de acuerdo al yacimiento a través del cual viaja el trazador, como son: homogéneos, estratificados y naturalmente fracturados.

La solución al problema de dispersión-convección para flujo radia para los distintos tipos de modelos, ha sido reportada en la literatura por:

Para yacimientos homogéneos: Tang y Babú (1979), Moench y Ogata (1981), Hsieh (1986), Tang y Peaceman (1987), Chen (1987), Falade y Brigham (1989).

Para yacimientos estratificados: Chen (1985), Chen (1986), Ramírez y asoc. (1992).

Para yacimientos naturalmente fracturados: Chen (1986), Stephenson y asoc. (1989) y Ramírez y asoc. (1992). Las soluciones fueron obtenidas para diferentes tipos de pruebas como son: inyección continua, finita (tipo bache) y pico.

3.1. YACIMIENTOS HOMOGÉNEOS.

Para el caso de flujo radial en yacimientos homogéneos la velocidad es variable, y por consecuencia el coeficiente de dispersión también lo es. La ecuación que describe el comportamiento de un trazador que se inyecta a gasto volumétrico constante en el pozo de radio r_w, a un yacimiento homogéneo, derivada en base a un balance de materia, es la siguiente:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r D_r \frac{\partial C(r,t)}{\partial r}\right) - v_r \frac{\partial C(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial C(r,t)}{\partial t} \qquad (2\text{-}1)$$

Como la transferencia de masa por difusión es muy pequeña comparada con la transferencia de masa por convección, el coeficiente de dispersión para flujo radial se considera directamente proporcional a la velocidad radial:

$$D_r = \alpha v_r \tag{2-2}$$

La velocidad radial microscópica está dada por:

$$v_r = \phi v_m = \frac{q_i}{2\pi h r} = \frac{a}{r} \tag{2-3}$$

donde:

$$a = \frac{q_i}{2\pi h} \tag{2-4}$$

Substituyendo la Ec. 2-3 en la Ec. 2-2:

$$D_r = \frac{\alpha a}{r} \tag{2-5}$$

Es decir:

$$rD_r = \alpha a = cte. \tag{2-6}$$

Substituyendo 2-6 y 2-3 en 2-1 se obtiene:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha a \frac{\partial C(r,t)}{\partial r}\right) - \frac{a}{r}\frac{\partial C(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial C(r,t)}{\partial t}$$

La ecuación en flujo radial de dispersión convección de un trazador químico es:

$$\frac{\alpha a}{r}\frac{\partial^2 C(r,t)}{\partial r^2} - \frac{a}{r}\frac{\partial C(r,t)}{\partial r} = \frac{\partial C(r,t)}{\partial t} \tag{2-7}$$

2.1.1. Modelo de Dawson y Lanz (1972).

Dawson y Lanz observaron en laboratorio que las curvas de irrupción de polímero o los tiempos de llegada dan valores incorrectos en la adsorción de polímeros a menos que se considere el volumen poroso inaccesible. Concluyeron que:

1) En ausencia de adsorción, un polímero se mueve en medio poroso más rápidamente que un trazador.

2) La adsorción de un polímero medida por el tiempo de irrupción de la orilla del frente de un banco de polímero será generalmente demasiado bajo.

3) Los modelos matemáticos y las predicciones de campo desarrolladas sin incluir el volumen poroso inaccesible tendrán error.

El modelo de flujo monofásico de la concentración de polímeros que propusieron fue el siguiente:

$$\nabla\left(D\nabla C\right)-\nabla\left(\phi vC\right)=\left[1-\phi\right]\frac{\partial C_S}{\partial t}+\phi_p\frac{\partial C}{\partial t} \tag{2-8}$$

donde:

C = concentración de polímeros en el fluido, M/L^3.

C_S = concentración de polímeros en el sólido, M/L^3.

2.1.2. Modelo de Tang y Babú (1979).

Hasta 1970 no existían soluciones analíticas exactas para el problema de coeficiente de dispersión dependiente de la velocidad. Tang y Babú fueron prácticamente los primeros en presentar una solución analítica para el problema de dispersión para flujo radial en yacimientos homogéneos.

El modelo para flujo radial de un trazador químico en un yacimiento homogéneo en función de variables reales:

$$\frac{\alpha a}{r}\frac{\partial^2 C(r,t)}{\partial r^2}-\frac{a}{r}\frac{\partial C(r,t)}{\partial r}=\frac{\partial C(r,t)}{\partial t} \tag{2-9}$$

Condición inicial: $C(r,0) = 0$

Condiciones de frontera: $C(r_w, t) = Co$

$$\lim_{r \to \infty} C(r,t) = 0 \qquad (2\text{-}10)$$

La solución a la ecuación con las condiciones dadas fue reportada por Hildebrand (1959) en el espacio de Laplace.

Tang y Babú invierten analíticamente esta solución aplicando la teoría de variable compleja y obtienen la solución exacta en el espacio real en términos de tres integrales, las que a su vez, dependen de las funciones Bessel Modificadas.

Esta solución se comparó con la solución aproximada de Raimondi y asociados (1959) y la solución numérica de Hoopes y Harleman (1965), concluyéndose de lo anterior que la solución presentada por Tang y Babú reporta resultados excelentes con respecto a la solución numérica. En esta sección no se presenta esta solución debido a que las integrales que la conforman son bastantes complejas y se requeriría adicionalmente definir un gran número de variables involucradas en esta solución, sin embargo, es importante mencionarla debido a que algunas de las soluciones posteriormente reportadas se han derivado con base en la solución analítica de Tang y Babú.

2.1.3. Modelo de Moench y Ogata (1981).

Moench y Ogata reportaron la solución en forma adimensional en el espacio de Laplace al problema de dispersión radial de un trazador químico en un yacimiento homogéneo. La inversión a tiempo real se realizó utilizando el algoritmo de Stehfest (1970). Los adimensionales de radio y tiempo los definieron en términos de la dispersividad.

El modelo para flujo radial de un trazador químico en yacimientos homogéneos es:

$$\frac{1}{r_D}\frac{\partial^2 C_D(r_D,t_D)}{\partial r^2_D}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D}=\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}; \qquad r_{Do}<r_D<\infty \qquad (2\text{-}11)$$

Condición inicial: $C_D(r_{DO},0)=0$

Condiciones de frontera: $C_D(r_{DO},t_D)=1$

$$\lim_{r_D\to\infty} C_D(r_D,t_D)=0 \qquad (2\text{-}12)$$

donde:

$$r_D=\frac{r}{\alpha}; \quad t_D=\frac{a\,t}{\alpha^2}; \quad C_D(r_D,t_D)=\frac{C(r,t)}{C_o}; \quad r_{Do}=\frac{r_w}{\alpha}$$

La solución en el espacio de Laplace en términos de la función de Airy es la siguiente:

$$\bar{C}_D(r_D,s)=\frac{e^{\frac{r_D-r_{DO}}{2}}}{s}\left[\frac{Ai\left(\frac{r_D\,\beta(s)+1/4}{\beta(s)^{2/3}}\right)}{Ai\left(\frac{\beta(s)+1/4}{\beta(s)^{2/3}}\right)}\right] \qquad (2\text{-}13)$$

donde:

$$\beta(s)=s$$

Las funciones de Airy se calculan utilizando la siguiente expansión en serie para $|z|>1$ (Abramowitz y Stegun , 1970):

$$Ai(Y)\cong\frac{1}{\sqrt{\pi}Y^{1/4}}e^{-\frac{2Y^{3/2}}{3}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_k\left(\frac{2Y^{3/2}}{3}\right)^{-k} \qquad (2\text{-}14)$$

donde:

$$A_k=\frac{[2k+1][2k+3]\ldots.[6k-1]}{216^k k!}; \qquad A_0=1$$

Todos los elementos del argumento de la función Airy son positivos, de aquí que la función es monotónica, positiva y tiende rápidamente a cero.

La transformada inversa de la ec. 2-13 se obtuvo aplicando el algoritmo de Stehfest (1970). Los resultados de la inversión numérica fueron comparados con la solución al mismo problema presentada por Hoopes y Harleman (1965), quienes la desarrollaron a través de un esquema de diferencias finitas. La conclusión de esta comparación es que la técnica de inversión con el método de Stehfest utilizada por Moench y Ogata (1981) converge a la solución numérica. Sin embargo, es importante hacer notar que la aproximación de la solución obtenida depende del valor de N empleado en la inversión con el algoritmo de Stehfest, y del valor del tiempo adimensional.

2.1.4 Modelo de Hsieh (1986).

Hsieh presenta una solución analítica de tipo integral para el problema de dispersión de un trazador químico en un acuífero confinado de espesor uniforme y de extensión lateral infinita.

$$\frac{1}{r_D}\frac{\partial^2 C_D(r_D,t_D)}{\partial r^2_D} - \frac{1}{r_D}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D} = \frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} \qquad (2\text{-}15)$$

Condición inicial: $C_D(r_D,0) = 0$

Condiciones de frontera: $C_D(r_{D0},t_D) = 1$

$$\lim_{r_D \to \infty} C_D(r_D,t_D) = 0 \qquad (2\text{-}16)$$

La solución en el espacio de Laplace es la siguiente:

$$C_D(r_D,s) = \frac{e^{\frac{r_D - r_{D0}}{2}}}{s}\left[\frac{Ai\left(\frac{r_D\,\beta(s)+1/4}{\beta(s)^{2/3}}\right)}{Ai\left(\frac{\beta(s)+1/4}{\beta(s)^{2/3}}\right)}\right] \qquad (2\text{-}17)$$

donde:

$\beta(s) = s$

La transformada inversa de la Ec. 2-17 es la siguiente:

$$C_D(r_D, t_D) = \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st_D}\, \overline{C}_D(r_D, s)\, ds \qquad (2\text{-}18)$$

donde:

γ = número real

s = número complejo.

El cálculo de la Ec. 2-18 se efectuó de la forma siguiente:

$$C_D(r_D, t_D) = 1 - \int_0^{\infty} \frac{2e^{-v^2 t_D + \frac{r_D - r_{D0}}{2}}}{\pi v} \left[\frac{Ai(Y)Bi(Yw) - Ai(Yw)Bi(Y)}{\left(Ai(Yw)\right)^2 + \left(Bi(Yw)\right)^2} \right] dv \qquad (2\text{-}19)$$

donde:

$$Y = \frac{1 - 4r_D v^2}{4v^{4/3}} \; ; \qquad Yw = \frac{1 - 4r_{D0} v^2}{4v^{4/3}}$$

Las funciones de Airy, Ai(z) y Bi(z) fueron evaluadas con las fórmulas reportadas por Abramowitz y Stegun (1970).

Se utilizan dividiendo el argumento en tres intervalos:

a) Para argumentos Y > 4.8:

$$Ai(Y) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}\, Y^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}Y^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (-1)^k \left(\frac{2}{3} Y^{3/2}\right)^{-k} \qquad (2\text{-}20)$$

$$Bi(Y) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}\, Y^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}Y^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{2}{3} Y^{3/2}\right)^{-k} \qquad (2\text{-}21)$$

donde:

$$A_k = \frac{[2k+1][2k+3]\ldots.[6k-1]}{216^k\, k!} \; ; \qquad A_o = 1$$

b) Para argumentos de $-5 \leq Y \leq 4.8$:

$$Ai(Y) = 0.35502805\,f(z) - 0.25881940g(z) \qquad (2\text{-}22)$$

$$Bi(Y) = \sqrt{3}\left[0.35502805f(z) + 0.25881940g(z)\right] \qquad (2\text{-}23)$$

donde:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1x4}{6!}z^6 + \frac{1x4x7}{9!}z^9 + \ldots \quad y \quad g(z) = z + \frac{2}{4!}z^4 + \frac{2x5}{7!}z^7 + \frac{2x5x8}{10!}z^{10} + \ldots$$

c) Para argumentos Y < -5:

Se define Y* = -Y:

$$Ai(-Y^*) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{Y^*}}\left[sen\left(\varsigma^* + \frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_{2k+1}(\varsigma^*)^{-2k}\right]$$
$$-\left[\cos\left(\varsigma^* + \frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_{2k+1}\left(\varsigma^*\right)^{-2k-1}\right] \qquad (2\text{-}24)$$

$$Bi(-Y^*) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{Y^*}}\left[\cos\left(\varsigma^* + \frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_{2k}(\varsigma^*)^{-2k}\right]$$
$$+ sen\left(\varsigma^* + \frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_{2k+1}\left(\varsigma^*\right)^{-2k-1} \qquad (2\text{-}25)$$

donde:

$$\varsigma^* = \frac{2}{3}z^{*3/2}$$

La integral de la Ec. 2-19 fue calculada por un método descrito por Longman (1956) basado en la transformación de Euler-Bromwich (1942). Hsieh comparó los resultados de su solución semianalítica con los obtenidos a través de métodos numéricos por Hoopes y Harleman (1965) y llega a la conclusión que ambas soluciones proporcionan resultados muy aproximados.

También reportó la comparación de la evaluación de la integral de la Ec. 2-19 con la inversión numérica de la Ec. 2-17, empleando el algoritmo de Stehfest (1970), que corresponde a la solución de Moench y Ogata (1981), encontrando que los resultados presentados por estos autores son muy similares a los de la solución analítica obtenida, sin embargo, se observó que para tiempos adimensionales grandes la solución invertida numéricamente presenta dispersión numérica.

2.1.5. Modelo de Tang y Peaceman (1987).

Tang y Peaceman presentaron una solución analítica para flujo radial de trazadores químicos en yacimientos homogéneos para la condición de frontera interna mixta, con inyección continua y tipo bache, estos autores presentaron una solución constituída por tres integrales que a su vez, están en términos de las funciones Bessel Modificadas. También presentaron una solución basada en diferencias finitas, para compararla con la obtenida por medios analíticos. De lo anterior se concluye que la solución numérica presenta resultados excelentes con respecto a la analítica, es decir, la dispersión numérica prácticamente es despreciable.

El modelo que representa el flujo radial de trazadores químicos es la siguiente:

$$\frac{1}{r_D}\frac{\partial^2 C_D(r_D,t_D)}{\partial r^2_D}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D}=\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} \tag{2-26}$$

Condición inicial: $C_D(r_D,0)=0$

Condiciones de frontera: $C_D(r_{DO},t_D)-\dfrac{\partial C_D(r_{DO},t_D)}{\partial r_D}=1$

$$\lim_{r_D\to\infty} C_D(r_D,t_D)=0 \tag{2-27}$$

La solución dada es la siguiente:

$$\overline{C_D}(r_D, s) = \frac{1}{s} e^{\frac{r_D - r_{Do}}{2}} \sqrt{\frac{r_D + \frac{1}{4s}}{r_{Do} + \frac{1}{4s}}} \left[\frac{K_{1/3}(\zeta)}{\frac{1}{2} K_{1/3}(\zeta_o) + \sqrt{s z_o}\, K_{2/3}(\zeta_o)} \right] \qquad (2\text{-}28)$$

donde:

$$\zeta = \frac{2}{3}\sqrt{s}\left(r_D + \frac{1}{4s}\right)^{3/2}; \qquad \zeta_o = \frac{2}{3}\sqrt{s}\left(r_{Do} + \frac{1}{4s}\right)^{3/2}$$

2.1.6. Modelo de Chen (1987).

Chen obtuvo la solución en el espacio de Laplace al problema de dispersión para flujo radial de trazador químico en yacimientos homogéneos con la condición de frontera interna mixta formulada en base al balance de materia. Invirtió su solución a tiempo real por medio del algoritmo de Stehfest (1970):

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 C_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D} \frac{\partial C_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{\partial C_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} \qquad (2\text{-}29)$$

Condición inicial: $C_D(r_D, 0) = 0$

Condiciones de frontera: $C_D(r_{DO}, t_D) - \frac{\partial C_D(r_{DO}, t_D)}{\partial r_D} = 1$

$$\lim_{r_D \to \infty} C_D(r_D, t_D) = 0 \qquad (2\text{-}30)$$

donde:

$$r_D = \frac{r}{\alpha}; \quad t_D = \frac{a\,t}{\alpha^2}; \quad C_D(r_D, t_D) = \frac{C(r, t)}{C_o}; \qquad r_{DO} = \frac{r_w}{\alpha}$$

La solución en el espacio de Laplace es la siguiente:

$$\overline{C_D}(r_D, s) = \frac{e^{\frac{r_D - r_{Do}}{2}}}{s} \frac{Ai\left(\frac{r_D s + 1/4}{s^{2/3}}\right)}{Ai\left(\frac{r_{DO} s + 1/4}{s^{2/3}}\right) - Ai'\left(\frac{r_{DO} s + 1/4}{s^{2/3}}\right)} \qquad (2\text{-}31)$$

2.1.7. Modelo de Falade y Brigham (1989).

Falade y Brigham incluyen en la ecuación básica que describe el comportamiento de flujo radial de un trazador en un yacimiento homogéneo, el término correspondiente a la reacción química de primer orden y a la adsorsión del trazador en los granos de la roca. Presentaron tres soluciones en el espacio de Laplace, en términos de las funciones Airy. Las soluciones corresponden a la concentración del trazador inyectado baja, moderada y alta, en donde para cada caso se considera distinto coeficiente de dispersión hidrodinámico, según la relevancia de los procesos que lo componen.

Falade y Brigham consideran tanto la inyección continua de trazador como la inyección tipo bache, sus soluciones las invierten numéricamente por medio del algoritmo de Stehfest (1970) y reportan dos gráficas con los resultados, una para la inyección continua y otra para la inyección tipo bache. Sin embargo, estos autores no presentan la comparación de sus soluciones con datos de campo o con otros modelos reportados en la literatura, es por esta razón que en esta sección sólo se mencionan brevemente las soluciones reportadas por Falade y Brigham (1989).

2.2. YACIMIENTOS ESTRATIFICADOS.

Aunque existen pocos modelos reportados en la literatura, en esta sección se presentan solo dos modelos para flujo radial a través de yacimientos estratificados; el primero de ellos es presentado por Chen (1985), quien considera inyección continua de un contaminante químico en un acuífero con un estrato horizontal fluyendo y otro estrato aportando al primero.

El segundo modelo es una extensión del primero y adicionalmente incluyen la opción de un contaminante radiactivo, este último también es presentado por Chen (1986).

2.2.1. Modelo de Chen (1985).

Chen visualizó el problema de flujo radial de un contaminante químico en un yacimiento con un estrato horizontal compuesto de dos regiones donde un estrato aporta verticalmente al otro y éste aporta radialmente al pozo. Efectuando un balance de materia en las dos regiones, Chen obtuvo las siguientes ecuaciones expresadas en forma adimensional.

El modelo de flujo radial en la región fluyente:

$$\frac{1}{r_D}\frac{\partial^2 C_{flD}(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_{flD}(r_D,t_D)}{\partial r_D}+\frac{D_{flD}\phi_s}{z_{flD}\phi_{fl}}\frac{\partial C_{sD}(0,t_D)}{\partial z_D}=\frac{\partial C_{flD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}; \qquad (2\text{-}32)$$

Condición inicial: $C_{flD}(r_D,0)=0$

Condiciones de frontera: $C_{flD}(r_{D0},t_D)=1$

$$\lim_{r_D\to\infty} C_{flD}(r_D,t_D)=0 \qquad (2\text{-}33)$$

El tercer término del lado izquierdo representa el flujo másico en la superficie de contacto de la región fluyente y estancada.

El modelo que representa el flujo lineal de la zona estancada hacia la zona fluyente:

$$D_{sD}\frac{\partial^2 C_{sD}(z_D,t_D)}{\partial z_D^2}=\frac{\partial C_{sD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}; \qquad 0\le z_D\le\infty;\ t_D>0 \qquad (2\text{-}34)$$

Condición inicial: $C_{sD}(z_D,0)=0$

Condición de frontera interna (acoplamiento): $C_{sD}(0,t_D)=C_{flD}(r_D,t_D)$

Condición de frontera externa: $\lim_{z_D\to\infty} C_{sD}(z_D,t_D)=0$ (2-35)

donde:

$$r_D=\frac{r}{\alpha};\quad t_D=\frac{at}{\alpha^2};\quad z_D=\frac{z}{\alpha};\quad D_{sD}=\frac{D_s}{a};\quad D_{flD}=\frac{D_{fl}}{a};\quad z_{flD}=\frac{h_{fl}/2}{\alpha};\quad r_{Do}=\frac{r_w}{\alpha}$$

$$a=\frac{q}{2\pi h\phi}$$

La solución en el espacio de Laplace es:

$$\overline{C_{flD}}(r_D, s) = \frac{1}{s} e^{\frac{Y - Y_o}{2}} \left[\frac{Ai\left((\beta(s))^{1/3} Y\right)}{Ai\left((\beta(s))^{1/3} Y_o\right)} \right] \qquad (2\text{-}36)$$

donde:

$$\beta(s) = s + \frac{D_{flD}\phi_s}{D_{sD} z_{flD} \phi_{fl}} \sqrt{s} \qquad (2\text{-}37)$$

La solución aproximada que presenta Chen (1985) consiste en utilizar tan sólo el primer término de la expansión de la serie de la función Airy para argumentos muy grandes. Al substituir la funciones Airy se cancelan términos y la función resultante se invierte con tablas. Con lo anterior y a través de algunos teoremas, se obtiene la solución siguiente en el espacio real:

$$C_{flD}(r_D, t_D) = \sqrt[4]{\frac{r_{DO}}{r_D}} e^{\frac{r_D - r_{DO}}{2}} \int_u^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} erfc\left(\frac{1}{\sqrt{x[x-u]}} \frac{D_{flD}\left(r_D^{3/2} - r_{DO}^{3/2}\right)^2}{18 z_{flD} \sqrt{D_{sD}} t_D} \right) dx \qquad (2\text{-}38)$$

donde:

$$u = \left(\frac{2\left[r_D^{3/2} - r_{DO}^{3/2}\right]}{3} \right)^2 \frac{1}{4 t_D}; \qquad \eta = \frac{2\left[r_D^{3/2} - r_{DO}^{3/2}\right]}{3} \frac{D_{flD}}{4 z_{flD} \sqrt{D_{sD}}}$$

Esta ecuación es válida para tiempos adimensionales pequeños que corresponden a t_D << 4 r_{DO}.

Chen invierte la solución por medio del algoritmo de Stehfest (1970), utilizando para el cálculo de las funciones de Airy que intervienen en esta ecuación la siguiente identidad (Abramowitz y Stegun, 1970):

$$Ai(Y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Y}{3}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3} Y^{3/2} \right) \qquad (2\text{-}39)$$

$K_{1/3}(\ )$ = función Bessel fraccionaria.

La solución en el espacio de Laplace es:

$$\overline{C_{fiD}}(r_D, s) = \frac{1}{s} e^{\frac{Y - Y_o}{2}} \left[\frac{Ai\left((\beta(s))^{1/3} Y\right)}{Ai\left((\beta(s))^{1/3} Y_o\right)} \right] \tag{2-36}$$

donde:

$$\beta(s) = s + \frac{D_{fiD}\,\phi_s}{D_{sD}\, z_{fiD}\, \phi_{fi}} \sqrt{s} \tag{2-37}$$

La solución aproximada que presenta Chen (1985) consiste en utilizar tan sólo el primer término de la expansión de la serie de la función Airy para argumentos muy grandes. Al substituir la funciones Airy se cancelan términos y la función resultante se invierte con tablas. Con lo anterior y a través de algunos teoremas, se obtiene la solución siguiente en el espacio real:

$$C_{fiD}(r_D, t_D) = \sqrt[4]{\frac{r_{DO}}{r_D}} e^{\frac{r_D - r_{DO}}{2}} \int_u^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} erfc\left(\frac{1}{\sqrt{x[x-u]}} \frac{D_{fiD}\left(r_D^{3/2} - r_{DO}^{3/2}\right)^2}{18\, z_{fiD} \sqrt{D_{sD}}\, t_D} \right) dx \tag{2-38}$$

donde:

$$u = \left(\frac{2\left[r_D^{3/2} - r_{DO}^{3/2}\right]}{3} \right)^2 \frac{1}{4t_D}; \qquad \eta = \frac{2\left[r_D^{3/2} - r_{DO}^{3/2}\right]}{3} \frac{D_{fiD}}{4z_{fiD}\sqrt{D_{sD}}}$$

Esta ecuación es válida para tiempos adimensionales pequeños que corresponden a $t_D << 4\, r_{DO}$.

Chen invierte la solución por medio del algoritmo de Stehfest (1970), utilizando para el cálculo de las funciones de Airy que intervienen en esta ecuación la siguiente identidad (Abramowitz y Stegun, 1970):

$$Ai(Y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Y}{3}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3} Y^{3/2} \right) \tag{2-39}$$

$K_{1/3}(\ ) =$ función Bessel fraccionaria.

Chen presentó los resultados de ambas soluciones, la analítica y la invertida numéricamente con Stehfest, concluyendo que las dos soluciones reportan prácticamente los mismos resultados.

2.2.2. Modelo de Chen (1986).

La conceptualización de este modelo es muy similar al presentado anteriormente, pero se consideró el decaimiento radiactivo y la masa adsorbida del contaminante en los granos de la roca a través de una reacción de primer orden.

Presentó dos modelos matemáticos: el primero considera un contaminante radiactivo transportado a través de una región fluyente por dispersión longitudinal y por convección, la condición de frontera interna es dependiente del tiempo, y el segundo considera solamente el transporte por convección. En esta sección se describe el primero de los modelos.

El modelo que representa a la región fluyente:

$$\frac{1}{r_D}\frac{\partial^2 C_{flD}(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_{flD}(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda_D C_{flD}(r_D,t_D)+\frac{D_{flD}\phi_s}{z_{flD}\phi_{fl}}\frac{\partial C_{sD}(0,t_D)}{\partial z_D}=\frac{\partial C_{flD}(r_D,t_D)}{\partial t_D} \tag{2-40}$$

Condición inicial: $C_{flD}(r_D,0)=0$

Condición de frontera interna: $C_{flD}(r_{D0},t_D)=e^{-\lambda_D t_D}$

Condición de frontera externa: $\lim\limits_{r_D\to\infty} C_{flD}(r_D,t_D)=0$ (2-41)

El modelo que representa la región estancada del yacimiento:

$$D_{sD}\frac{\partial^2 C_{sD}(z_D,t_D)}{\partial z_D^2}-\lambda_D C_{sD}(z_D,t_D)=\frac{\partial C_{sD}(z_D,t_D)}{\partial t_D} \tag{2-42}$$

Condición inicial: $C_{sD}(z_D,0)=0$

Condición de frontera interna (acoplamiento): $C_{sD}(0,t_D)=C_{flD}(r_D,t_D)$

Condición de frontera externa: $\lim\limits_{z_D\to\infty} C_{sD}(z_D,t_D)=0$ (2-43)

donde:

$$\lambda_D = \frac{R_{fl} \alpha^2 \lambda}{a}$$

La solución para la zona fluyente en el espacio de Laplace es:

$$\overline{C_{flD}}(r_D, s) = \frac{1}{s + \lambda_D} e^{\frac{Y - Y_o}{2}} \left[\frac{Ai\left((\beta(s))^{1/3} Y \right)}{Ai\left((\beta(s))^{1/3} Y_o \right)} \right] \tag{2-44}$$

donde:

$$\beta(s) = s + \lambda_D + \frac{D_{flD} \phi_s}{z_{flD} \phi_{fl} \sqrt{D_{sD}}} \sqrt{s + \lambda_D} \tag{2-45}$$

A tiempos adimensionales cortos se substituyen la funciones Airy por aproximaciones, se cancelan términos y la función resultante se invierte con tablas. Con lo anterior y a través de algunos teoremas, se obtiene la solución siguiente a tiempo real:

$$C_{flD}(r_D, t_D) = \sqrt[4]{\frac{r_{DO}}{r_D}} e^{\frac{r_D - r_{DO}}{2}} e^{-\lambda_D t_D} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} erfc\left(\frac{1}{\sqrt{x[x-u]}} \frac{D_{flD} \left(r_D^{3/2} - r_{DO}^{3/2} \right)^2}{18 z_{flD} \sqrt{D_{sD}} t_D} \right) dx \tag{2-46}$$

Las soluciones para tiempos intermedios y largos se obtienen aplicando el algoritmo de Stehfest u obteniendo los límites a tiempos cortos o largos del parámetro s de Laplace, con lo que se simplifica la solución y es posible invertirla analíticamente .

Si la constante de decaimiento es igual a cero, la solución dada por la Ec. 2-46 se reduce a la Ec. 2-38 que es la solución analítica aproximada para tiempos cortos reportada por Chen (1985).

2.3. YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS.

Los modelos para flujo radial que describen el comportamiento del trazador en un yacimiento naturalmente fracturado que contienen fracturas y bloques de matriz, vúgulos, fracturas ciegas, se representan por medio de dos regiones: una región móvil, donde los fenómenos de difusión y convección están presentes y una región estancada donde sólo se presentan los fenómenos de difusión y adsorsión. se diferencian en función de la forma en que se presenta la transferencia fractura-matriz, ya sea en función del tiempo (transitorio) o con variación constante (pseudoestacionario).

Los modelos con transferencia pseudoestacionaria fractura-matriz no requieren una forma dada de los bloques de matriz ya que se consideran como un todo.

Los modelos con transferencia transitoria fractura-matriz se dividen por la geometría de bloque utilizada, los existentes son: el primer modelo en el cual el yacimiento naturalmente fracturado es representado mediante un sistema idealizado, equivalente a un yacimiento con estratos de alta permeabilidad en contacto con estratos de baja permeabilidad, el otro modelo se representó a la matriz con bloques en forma de cubo, que fue el primer modelo en la literatura para el flujo de trazadores radiactivos en yacimientos naturalmente fracturados donde se consideró una geometría de este tipo. Para los dos modelos la solución está expresada en el espacio de Laplace, para cuya inversión numérica se utilizó el algoritmo de Crump (1976).

2.3.1. Modelo de Ramírez, Samaniego, Rivera y Rodríguez (1991).

Ramírez y asoc. presentaron el modelo para flujo radial en yacimientos naturalmente fracturados considerando estratos de alta y baja permeabilidad, que corresponden a las fracturas y a los bloques de matriz, respectivamente. El sistema idealizado está constituido por dos regiones: la región móvil y la región estancada. Estas dos egiones están en contacto a través de una película delgada de fluido estancado cuyo spesor es δ. En el volumen de control considerado, el espesor de la película delgada le flujo δ, está incluida en la zona estancada, y limita la región móvil en dirección z, londe el plano de referencia está ubicada a la mitad de ancho de fractura. Esta película representa la resistencia que controla transferencia de masa entre las egiones móvil e inmóvil, se tiene un ancho de fractura de h_f, limitada en ambos xtremos por bloques cuyo tamaño es H. Se considera un volumen de control de spesor E, el cual es repetitivo, donde:

$$E = \frac{H}{2} + \frac{h_f}{2} \tag{2-47}$$

La región fluyente tiene un espesor de:

$$E_f = \frac{h_f}{2} - \delta \tag{2-48}$$

La región estancada tiene un espesor de:

$$E_e = \frac{H}{2} + \delta \tag{2-49}$$

En la región móvil se consideraron los siguientes fenómenos y suposiciones:

1. Dispersión longitudinal en flujo radial.
2. En la dirección z no se considera la dispersión longitudinal porque se supone que el ancho de la fractura es muy pequeño, por consecuencia no existe gradiente de concentración en esta dirección.
3. Se considera la Convección. Con base en la suposición presentada en el punto 1, la velocidad en la dirección "z" es uniforme su variación en la dirección radial.
4. Se considera el decaimiento radiactivo.
5. Fluido incompresible.

ara la región estancada se consideraron los siguientes procesos:

. Difusión. Este efecto solamente se considera en la dirección z, dado que el componente longitudinal se supone despreciable.

. Adsorción.

. Decaimiento radiactivo.

. No hay convección en la zona estancada.

:l modelo para flujo radial en la región móvil:

$$\frac{1}{r_D}\frac{\partial^2 C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_D}\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D} - \lambda_D C_{fD}(r_D,t_D) + \frac{D_{mD}}{z_{DO}}\frac{\partial C_{mD}(z_{DO},t_D)}{\partial z_D} = \frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}$$

$$r_{DO}<r_D<\infty \quad , \quad t_D>0 \qquad (2\text{-}50)$$

:ondición inicial: $C_{fD}(r_D,0) = 0$

:ondiciones de frontera: $C_{fD}(r_{DO},t_D) = 1$

$$\lim_{r_D\to\infty} C_{fD}(r_D,t_D) = 0 \qquad (2\text{-}51)$$

:l último término del lado izquierdo considera representa la transferencia de masa or difusión de la región móvil a la región estancada en la zona de contacto.

:l modelo de flujo lineal en la región estancada:

$$D_{mD}R_m\frac{\partial^2 C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial z_D^2} - \lambda_D C_{mD}(z_D,t_D) = \frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}; \qquad z_{DO}<z_D<z_{DE};\ t_D>0 \qquad (2\text{-}52)$$

:ondición inicial: $C_{mD}(z_D,0) = 0$

:ondición de frontera interna (interfase): $C_{mD}(z_{DO},t_D) = C_{fD}(r_D,t_D)$

:ondición de frontera externa: $\frac{\partial C_{mD}(z_{DH},t_D)}{\partial z_D} = 0$ (2-53)

Donde:

$$r_D = \frac{r}{\alpha}; \qquad t_D = \frac{a_f t}{\alpha^2}; \qquad z_D = \frac{z}{\alpha}; \qquad C_{fD}(r_D, t_D) = \frac{C_f(r,t)}{C_o}; \qquad C_{mD}(z_D, t_D) = \frac{C_m(z,t)}{C_o};$$

$$z_{DE} = \frac{(H + h_f)/2}{\alpha}; \qquad z_{DO} = \frac{h_f/2 - \delta}{\alpha}; \qquad \lambda_D = \frac{\alpha^2 \lambda}{a_f}; \qquad v_r = \frac{a_f}{r}; \qquad D_{mD} = \frac{D_m}{a_f};$$

$$a_f = \frac{q_i}{4\pi\left[h_f/2 - \delta\right]}; \qquad R_m = \frac{\phi_m}{\phi_m + \rho k\left[1 - \phi_m\right]}$$

La solución general en el espacio de Laplace es:

$$\overline{C}_{fD}(r_D, s) = \frac{1}{s} e^{\frac{r_D - r_{DO}}{2}} \left[\frac{Ai\left(\dfrac{r_D \chi(s) + 1/4}{(\chi(s))^{2/3}} \right)}{Ai\left(\dfrac{r_{DO} \chi(s) + 1/4}{(\chi(s))^{2/3}} \right)} \right] \tag{2-54}$$

donde:

$$\chi(s) = s + \lambda_D + \frac{D_{mD}}{z_{DO}} \sqrt{\frac{\lambda_D + s}{R_m D_{mD}}} \tanh\left(2\left[z_{DE} - z_{DO}\right] \sqrt{\frac{\lambda_D + s}{R_m D_{mD}}} \right) \tag{2-55}$$

2.3.2. Modelo de Ramírez y Samaniego (1992).

El yacimiento naturalmente fracturado se representó por medio de un sistema compuesto por dos regiones: una región móvil donde los procesos de dispersión, convección y decaimiento están presentes y una región estancada donde sólo se consideran los fenómenos de difusión y adsorción y se utilizaron bloques de matriz en forma de cubo.

Modelo Matemático

Bloques de matriz cuyo volumen es H^3, los cuales son repetitivos. Las fracturas envuelven al bloque de matriz en sus 6 caras con un ancho de fractura: h_f. El volumen de control es una pirámide con base cuadrada y el origen del eje de referencia z es el centro del bloque de matriz.

El espesor de película muy delgada δ, que limita la región móvil en dirección "z" representa la resistencia que controla la transferencia de masa entre las regiones móvil y la estancada. La película está incluida en la región estancada, la región móvil está limitada en ambos extremos por bloques de matriz.

Modelo de flujo radial para la región móvil:

$$\frac{1}{r_D}\frac{\partial^2 C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_f(r,t)}{\partial r_D}-\lambda_D C_{fD}(r_D,t_D)+\frac{D_{mD}}{[d_D/6]}\frac{\phi_m}{\phi_f}\frac{\partial C_{mD}(z_{DO},t_D)}{\partial z_D}=\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}$$

(2-56)

Condición inicial: $C_{fD}(r_D,0)=0$

Condición de frontera interna: $C_{fD}(r_{DO},t_D)=1$

Condición de frontera externa: $\lim_{r_D\to\infty} C_{fD}(r_D,t_D)=0$ (2-57)

Modelo de flujo para la región estancada:

$$RD_{mD}\frac{\partial^2 C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial z_D^2}+\frac{2}{z_D}RD_{mD}\frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial z_D}-\lambda_D C_{mD}(z_D,t_D)=\frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}$$

$0<z_D<d_D;\ t_D>0$ (2-58)

Condición inicial: $C_{mD}(z_D,0)=0$

Condición de frontera interna: $\dfrac{\partial C_{mD}(0,t_D)}{\partial z_D}=0$

Condición de frontera externa (interfase): $C_{mD}(z_{DO},t_D)=C_{fD}(r_D,t_D)$ (2-59)

Las variables adimensionales utilizadas en este modelo son las siguientes:

$$r_D=\frac{r}{\alpha};\quad t_D=\frac{qt}{2\pi H\phi_f\alpha^2}=\frac{a_f t}{\alpha^2};\qquad z_D=\frac{z}{\alpha};\qquad C_{fD}(r_D,t_D)=\frac{C_f(r,t)}{C_o};$$

$$C_{mD}(z_D, t_D) = \frac{C_m(z,t)}{C_o}; \quad D_{mD} = \frac{D_m}{a_f}; \quad \lambda_D = \frac{\alpha^2 \lambda}{a_f}; \quad r_{DO} = \frac{r_w}{\alpha}; \quad z_{DO} = \frac{d/2 - \delta}{\alpha}; \quad E_D = \frac{E}{\alpha};$$

$$v_r = \frac{a_f}{r}; \qquad a = \frac{q}{2\pi H \phi_f}; \qquad \varepsilon = \frac{6}{d_D}\frac{\phi_m}{\phi_f} D_{Dm}; \qquad R_m = \frac{\phi_m}{\phi_m + \rho k_d[1-\phi_m]}$$

La solución en el espacio de Laplace es:

$$\overline{C}_{fD}(r_D, s) = \frac{e^{\frac{r_D - r_{DO}}{2}}}{s} \frac{\left(r_{DO} - \dfrac{1}{4\beta(s)}\right)^{1/4}}{\left(r_D - \dfrac{1}{4\beta(s)}\right)^{1/4}} \left[\frac{e^{-\frac{2}{3}\left[\sqrt{\beta(s)}\left(r_D - \frac{1}{4\beta(s)}\right)^{3/2}\right]}}{e^{-\frac{2}{3}\left[\sqrt{\beta(s)}\left(r_{DO} - \frac{1}{4\beta(s)}\right)^{3/2}\right]}} \right] \tag{2-60}$$

donde:

$$\beta(s) = s + \lambda_D + \varepsilon = \frac{6}{E_D}\frac{\phi_m}{\phi_f} D_{mD}\left[\beta(s)\coth(\beta(s) z_{Do}) - \frac{1}{z_{Do}}\right] \tag{2-61}$$

Se empleó el algoritmo de Crump (1976) como invertidor numérico para obtener la solución en tiempo real.

CAPÍTULO 3

MODELOS PROPUESTOS Y SOLUCIONES PARA INYECCIÓN CONTINUA, FINITA Y PICO

En este capítulo se presentan cuatro modelos propuestos que rigen el comportamiento dinámico del flujo radial de trazadores en diferentes tipos de yacimientos, dos modelos son para yacimientos homogéneos, uno considerando el volumen poroso inaccesible y en el otro no. Se proponen dos modelos para flujo radial en yacimientos naturalmente fracturados, uno con geometría de matriz estratificada y otro con geometría de matriz cúbica considerando en ambos el volumen poroso inaccesible.

La metodología empleada para obtener los modelos propuestos consistió en:

a) realizar un balance de materia en base a un volumen de control en los que se adicionan fenómenos físicos significativos y cuantificables para obtener el modelo matemático.
b) definir las variables adimensionales de manera que permitan eliminar problemas de dispersión numérica y facilitar la interpretación de pruebas de trazadores.
c) obtener la solución al modelo propuesto en el espacio de Laplace.
d) aproximar las soluciones a tiempos adimensionales cortos y largos para invertir analíticamente a tiempo real las soluciones aproximadas.
e) derivar con respecto al tiempo la solución analítica aproximada, formar grupos de variables adimensionales y utilizarlos en la comparación entre la solución aproximada y los resultados de la inversión numérica, así como en la construcción de la curva tipo.

f) invertir numéricamente la solución completa para el modelo planteado, con el algoritmo de Crump, acoplado con el algoritmo de aceleración de convergencia Epsilon, lo que permitió acelerar la convergencia hacia la solución.

g) validar la solución haciendo converger los modelos generales a casos particulares, reproduciendo los valores publicados.

h) desarrollar técnicas de interpretación de los datos de campo.

i) aplicar la técnica desarrollada a yacimientos homogéneos y naturalmente fracturados.

Todos los modelos para trazadores radiactivos presentados en este trabajo tienen como caso particular el flujo de trazadores químicos.

3.1. MODELO PROPUESTO PARA FLUJO RADIAL DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS HOMOGÉNEOS.

Se propone un modelo para flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos homogéneos que considera la convección, el decaimiento radiactivo y la dispersión dependiente de la velocidad radial, expresándolo posteriormente en términos de variables adimensionales, para lo cual se definieron nuevas variables adimensionales que permiten disminuir en gran medida la dispersión numérica y facilitan la interpretación de los perfiles de concentración medidos en la prueba. Un caso particular de este modelo propuesto que no considera el decaimiento, es el propuesto originalmente por Moench y Ogata (1981) cuya inversión fue realizada utilizando el algoritmo de Stehfest. El modelo adimensional propuesto es (ver Apéndice A):

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{\partial^2 C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D^{\,2}}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda_D C_D(r_D,t_D)=\alpha_D\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} \tag{3-1}$$

Condición inicial: $C_D(r_D,0)=0$

Condición de frontera interna: $C_D(1,t_D)=1$

ondición de frontera externa: $\lim_{r_D \to \infty} C_D(r_D, t_D) = 0$ (3-2)

onde los párametros adimensionales se definen en la forma siguiente:

$$r_D = \frac{r}{r_W}; \qquad \alpha_D = \frac{\alpha}{r_W}; \qquad \lambda_D = \frac{r_w^{\,2} \lambda}{a};$$

$$t_D = \frac{D_r t}{r_w^2} = \frac{\alpha v_r t}{r_w^2} = \frac{\alpha_D a t}{r_w^2}; \qquad C_D(r_D, t_D) = \frac{C(r,t)}{C_o}$$

a solución en el espacio de Laplace para este problema es (ver Apéndice A):

$$\overline{C}_D(r_D, s) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{s} \left[\frac{Ai\left(\dfrac{r_D \beta(s) + 1/\left(4\alpha_D^{\,2}\right)}{\beta(s)^{2/3}} \right)}{Ai\left(\dfrac{\beta(s) + 1/\left(4\alpha_D^{\,2}\right)}{\beta(s)^{2/3}} \right)} \right] \tag{3-3}$$

onde:

$$\beta(s) = \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s \tag{3-4}$$

No fue posible invertir directamente esta ecuación al tiempo real utilizando un proceso analítico, dado lo complejo de su forma, por lo cual, se realizó la inversión numérica con el algoritmo de Crump acoplado con el algoritmo Epsilon, que permite acelerar el proceso de convergencia y fue necesario hacer aproximaciones a tiempos cortos y largos que permiten simplificarla para obtener casos límites cuya inversión analítica fuera posible.

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales cortos

La *solución analítica aproximada* del modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos homogéneos:

$$C_D(r_D,t_D)=F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+U(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad (3\text{-}5)$$

donde:

$$F(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \quad ; \qquad U(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}$$

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales largos

La solución del flujo radial de trazador radiactivo en un yacimiento homogéneo:

$$C_D(r_D,t_D)=f(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+J(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad (3\text{-}6)$$

donde:

$$f(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}}} \quad ; \qquad J(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}}}$$

Si λ_D=0 la solución para flujo radial de un trazador químico en yacimientos homogéneos es:

$$C_D(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{t_D}}\right) \quad (3\text{-}7)$$

3.2. MODELO PROPUESTO PARA FLUJO RADIAL DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS HOMOGÉNEOS CON VOLUMEN POROSO INACCESIBLE.

Se propone este modelo que es similar al anterior, pero considerando el efecto del volumen poroso inaccesible en el término acumulativo, ya que es importante en el proceso de desplazamiento de fluidos, como lo demostró Dawson y Lanz (1972) ya que consiste en causar un aceleramiento en el avance del trazador en el yacimiento al existir menos volumen poroso disponible. El volumen poroso inaccesible es determinante en el tiempo de irrupción, así como también en la concentración máxima obtenida en el pozo productor. Para considerarlo fue necesario modelar en forma pseudoestacionaria el cambio de concentración debido al volumen poroso inaccesible.

El modelo adimensional para flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos homogéneos es el siguiente (ver Apéndice B):

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{\partial^2 C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D^{\,2}}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda_D C_D(r_D,t_D)=[1-\phi_D]\alpha_D\frac{\partial C_{sD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}+\phi_D\alpha_D\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} \quad (3\text{-}8)$$

Condición inicial: $C_D(r_D,0) = 0$

Condiciones de frontera: $C_D(1,t_D) = 1$

$$\lim_{r\to\infty} C_D(r_D,t_D) = 0 \quad (3\text{-}9)$$

Para considerar el volumen poroso inaccesible al trazador:

$$\alpha_D\frac{\partial C_{sD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}=M_D[C_D(r_D,t_D)-C_{sD}(r_D,t_D)] \quad (3\text{-}10)$$

Condición inicial: $C_{sD}(r_D,0)=0$ (3-11) a solución en el espacio de Laplace es (Ver Apéndice B):

$$\overline{C}_D(r_D, s) = \frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{s}\left[\frac{Ai\left(\frac{r_D\beta(s)+1/4\alpha_D^2}{(\beta(s))^{2/3}}\right)}{Ai\left(\frac{\beta(s)+1/4\alpha_D^2}{(\beta(s))^{2/3}}\right)}\right] \tag{3-12}$$

onde:

$$\beta(s) = \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + \phi_D s + \frac{M_D[1-\phi_D]s}{\alpha_D s + M_D} \tag{3-13}$$

lo fue posible invertir directamente esta ecuación a tiempo real utilizando un roceso analítico, dado lo complejo de su forma, por lo cual, se realizó la inversión umérica con el algoritmo de Crump acoplado con el algoritmo Epsilon, que permite celerar el proceso de convergencia y fue necesario hacer aproximaciones a tiempos ortos y largos que permiten simplificarla para obtener casos límites cuya inversión nalítica fuera posible.

La solución analítica aproximada a tiempos adimensionales cortos:

$$C_D(r_D,t_D) = Q(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}[r_D^{3/2}-1]\phi_D - 3t_D\sqrt{\lambda_D+M_D[1-\phi_D]}}{3\sqrt{\phi_D\alpha_D t_D}}\right) + P(r_D)\,erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}[r_D^{3/2}-1]\phi_D + 3t_D\sqrt{\lambda_D+M_D[1-\phi_D]}}{3\sqrt{\phi_D\alpha_D t_D}}\right)\right] \tag{3-14}$$

donde:

$$Q(r_D) = \frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt{r_D}}\, e^{-\frac{2[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+M_D[1-\phi_D]}{\alpha_D}}} \quad ; \quad P(r_D) = e^{\frac{4[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+M_D[1-\phi_D]}{\alpha_D}}}$$

La solución analítica aproximada a tiempos adimensionales largos:

$$C_D(r_D,t_D) = S(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}[r_D^{3/2}-1]\phi_D - 3t_D\sqrt{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}}{3\sqrt{\phi_D\alpha_D t_D}}\right) + J(r_D)\,erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}[r_D^{3/2}-1]\phi_D + 3t_D\sqrt{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}}{3\sqrt{\phi_D\alpha_D t_D}}\right)\right] \tag{3-15}$$

onde:

$$(r_D) = \frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2^{4} r_D} \cdot e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3} \cdot \frac{\lambda_D+\alpha_D M_D\left[1-\phi_D\right]}{\alpha_D}} \quad ; \quad R(r_D) = e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3} \cdot \frac{\lambda_D+\alpha_D M_D\left[1-\phi_D\right]}{\alpha_D}}$$

.3. MODELO PROPUESTO DE DOBLE POROSIDAD PARA FLUJO ADIAL DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS NATURALMENTE RACTURADOS (CON VOLUMEN POROSO INACCESIBLE Y EOMETRÍA DE MATRIZ ESTRATIFICADA).

on objeto de permitir un análisis del problema de flujo de trazadores a través de acimientos naturalmente fracturados, es necesario reemplazar el sistema real, umamente irregular y complejo compuesto de matriz y fracturas, por unidades egulares de estratos de matriz combinados con fracturas horizontales, en los que los loques de matriz tengan el mismo tamaño y forma **(Fig. 3-1)**.

Se propone un modelo de doble porosidad con flujo interporoso transitorio para la nterpretación de la respuesta observada en los pozos productores, cuando se inyecta razador radiactivo en un yacimiento naturalmente fracturado. El modelo consiste de fracturas donde los mecanismos de dispersión, convección y decaimiento radiactivo están presentes y de bloques de matriz donde se consideran los mecanismos de difusión, decaimiento radiactivo y el volumen poroso inaccesible; en el planteamiento se introdujo un parámetro nuevo que representa el gradiente de flujo másico que rige la transferencia fractura-matriz, la cual es dependiente del tiempo.

Se inyecta trazador radiactivo a concentración constante en una formación naturalmente fracturada, la cual consiste de un conjunto de bloques porosos de baja permeabilidad, separados por fracturas horizontales altamente permeables. Este modelo de doble porosidad se desarrolla basándose en las suposiciones siguientes (ver la Figura 3-2):

1. La matriz y la fractura son sistemas homogéneos y compresibles.

2. El flujo ocurre del pozo a la fractura y de ésta a la matriz.
3. Entre el bloque de matriz y la fractura no existe una superficie de resistencia al flujo.
4. La fractura se extiende horizontalmente sin límite (medio infinito en esa dirección).
5. El caudal de inyección de trazador es constante y se distribuye uniformemente a lo largo de la totalidad del intervalo.
6. La apertura de la fractura es pequeña comparada con el tamaño del bloque, de aquí que la relación h_f/H es una fracción pequeña.
7. El coeficiente de dispersión en la matriz es constante y en las fracturas es proporcional a la velocidad radial ($D_f = \alpha v_f$).
8. El flujo en la fractura y en la matriz obedece la ley de Darcy.
9. La permeabilidad de la fractura es mucho mayor que la de la matriz.
10. A lo largo de la fractura el gradiente vertical de concentración es uniforme.

El modelo matemático propuesto en este trabajo para describir el flujo de trazador en el sistema de fracturas toma en cuenta la transferencia de masa de la fractura hacia la matriz, el cambio de concentración por volumen poroso inaccesible, de acuerdo con el modelo previamente presentado por Dawson y Lanz, y el decaimiento radiactivo del trazador en la fractura, puede expresarse como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_r\frac{\partial C_f(r,t)}{\partial r}\right)-v_r\frac{\partial C_f(r,t)}{\partial r}-\lambda C_f(r,t)-\frac{J_{mf}*(h_f,t)}{\phi_f\sigma}=\frac{\partial C_f(r,t)}{\partial t} \qquad (3\text{-}16)$$

donde:

$J*$ = transferencia de masa por cada unidad de volumen de roca, M/L^{5}T.

σ = factor de forma de bloques de matriz a través del cual se efectúa la transferencia de masa, 1/L^2.

La velocidad macroscópica está dada por:

$$v_r = \frac{a_f}{r} \tag{3-17}$$

donde:

$$a_f = \frac{q_i}{2\pi h_{fi}\phi}$$

La dispersión hidrodinámica es:

$$D_r = \alpha v_r + D_f \tag{3-18}$$

Si la difusión molecular en las fracturas es pequeña comparada con el término de convección debido a la alta velocidad

$$D_r \approx \alpha v_r \approx \frac{\alpha a_f}{r}$$

Arreglando:

$$rD_r = \alpha v_r \tag{3-19}$$

Substituyendo las ecs. 3-19 y 3-17 en 3-16:

$$\frac{\alpha a_f}{r}\frac{\partial^2 C_f(r,t)}{\partial r^2} - \frac{a_f}{r}\frac{\partial C_f(r,t)}{\partial r} - \lambda C_f(r,t) - \frac{J_{mf}^*(h_f,t)}{\phi_f \sigma} = \frac{\partial C_f(r,t)}{\partial t} \tag{3-20}$$

La difusión del trazador dentro de la matriz se trata de acuerdo con la ley de Fick en la que la densidad de flujo másico está dada por:

$$J_m(z,t) = -D_m \frac{\partial C_m(z,t)}{\partial z} \tag{3-21}$$

En la cara de la matriz:

$$J_m(h_f,t) = -D_m \frac{\partial C_m(h_f,t)}{\partial z} \tag{3-22}$$

Condición de frontera interna: $C_m(h_f, t) = C_f(r, t)$

Condición de frontera externa: $\dfrac{\partial C_m(H + h_f, t)}{\partial z} = 0$ (3-29)

La condición para considerar el ritmo de cambio de concentración que se transfiere al volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\frac{\partial C_{sm}(z,t)}{\partial t} = \frac{M_m}{[1-\phi_{mD}]}\left[C_m(z,t) - C_{smD}(z,t)\right] \tag{3-30}$$

La condición inicial: $C_{sm}(z,0) = 0$ (3-31)

El modelo propuesto para flujo radial en las fracturas es:

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{\partial^2 C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D^{\,2}} - \frac{1}{r_D}\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D} - \lambda_D C_{fD}(r_D,t_D) - \frac{1}{\sigma_D}\frac{\partial C_{mD}(z_{Df},t_D)}{\partial r_D} = \frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial t_D} \tag{3-32}$$

Condición inicial: $C_{fD}(r_D,0) = 0$

Condición de frontera interna $C_{fD}(1,t_D) = 1$

Condición de frontera externa: $\lim\limits_{r_D\to\infty} C_{fD}(r_D,t_D) = 0$ (3-33)

Flujo lineal transitorio en la matriz:

$$D_{mD}\frac{\partial^2 C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial z_D^{\,2}} - \lambda_D C_{mD}(z_D,t_D) = [1-\phi_{mD}]\alpha_D\frac{\partial C_{smD}(z_D,t_D)}{\partial t_D} + \phi_{mD}\alpha_D\frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial t_D} \tag{3-34}$$

Condición inicial: $C_{mD}(z_D,0) = 0$

Condición de frontera interna: $C_{mD}(z_{Df}, t_D) = C_{fD}(r_D, t_D)$

Condición de frontera externa: $\dfrac{\partial C_{mD}(z_{DH}, t_D)}{\partial z_D} = 0$ (3-35)

El eje de referencia pasa por el eje de fractura.

La condición para considerar el volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\alpha_D\frac{\partial C_{smD}(z_D,t_D)}{\partial t_D} = M_{mD}\left[C_{mD}(z_D,t_D) - C_{smD}(z_D,t_D)\right] \tag{3-36}$$

Dividiendo la ecuación anterior entre una unidad de volumen de fluido en la fractura:

$$J_m * (h_f, t) = \frac{J_m(h_f, t)}{V_r} = \frac{-D_m}{A_m h_f} \frac{\partial C_m(h_f, t)}{\partial z} \tag{3-23}$$

El flujo másico en la interfase matriz-fractura:

$$J_{mf}(r, t) = J_m(h_f, t) \tag{3-24}$$

El flujo másico en la interfase matriz-fractura por unidad de volumen de fluido en la fractura:

$$J_{mf} * (h_f, t) = \frac{-D_m}{A_m h_f} \frac{\partial C_m(h_f, t)}{\partial z} \tag{3-25}$$

Substituyendo 3-25 en 3-20 se obtiene la ecuación de flujo radial en las fracturas que considera la transferencia matriz-fractura:

$$\frac{\alpha a_f}{r} \frac{\partial^2 C_f(r,t)}{\partial r^2} - \frac{a_f}{r} \frac{\partial C_f(r,t)}{\partial r} - \lambda C_f(r,t) + \frac{D_m}{\phi_f A_m h_f \sigma} \frac{\partial C_m(h_f,t)}{\partial z} = \frac{\partial C_f(r,t)}{\partial t} \tag{3-26}$$

Condición inicial: $C_f(r,0) = 0$

Condición de frontera interna: $C_f(r_w, t) = C_o$

Condición de frontera externa: $\lim_{r \to \infty} C_f(r,t) = 0$ (3-27)

El flujo lineal transitorio en la matriz considerando el volumen poroso inaccesible:

$$D_m \frac{\partial^2 C_m(z,t)}{\partial z^2} - \lambda C_m(z,t) = [1 - \phi_{mD}] \frac{\partial C_{sm}(z,t)}{\partial t} + \phi_{mD} \frac{\partial C_m(z,t)}{\partial t} \tag{3-28}$$

Condición inicial: $C_m(z,0) = 0$

La condición inicial para considerar el volumen poroso inaccesible:

$$C_{smD}(z_D,0) = 0 \tag{3-37}$$

donde las definiciones de las variables adimensionales se listan a continuación:

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \qquad z_D = \frac{z}{r_w}; \qquad \alpha_D = \frac{\alpha}{r_w}; \qquad t_D = \frac{D_r t}{r_w^2} = \frac{\alpha v_r t}{r_w^2} = \frac{\alpha a_f t}{r_w^3} = \alpha_D \frac{a_f t}{r_w^2};$$

$$\lambda_D = \frac{r_w^2 \lambda}{a_f}; \; \sigma_D = \frac{\phi_f \sigma a_f A_m h_f}{r_w D_m}; \; z_{Df} = \frac{h_f}{r_w}; \qquad z_{DH} = \frac{H + h_f}{r_w}; \qquad D_{mD} = \frac{D_m}{a_f};$$

$$C_{fD}(r_D,t_D) = \frac{C_f(r,t)}{C_o}; \quad C_{sfD}(r_D,t_D) = \frac{C_{sf}(r,t)}{C_o}; \qquad C_{mD}(z_D,t_D) = \frac{C_m(z,t)}{C_o};$$

$$C_{smD}(z_D,t_D) = \frac{C_{sm}(z,t)}{C_o}; \quad M_{mD} = \frac{r_w^2 M_m}{a_f[1-\phi_{mD}]}; \quad \phi_{mD} = \frac{\phi_i}{\phi_T}$$

Para establecer la ecuación siguiente que gobierna el flujo en las fracturas y la interacción del trazador en el sistema matriz-fractura, se acoplaron las ecuaciones correspondientes a la fractura y la matriz en el espacio de Laplace, la solución para el problema considerado es (ver Apéndice C):

$$\overline{C}_{fD}(r_D,s) = \frac{1}{s} e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}} \left[\frac{Ai\left(\dfrac{r_D \beta(s) + 1/(4\alpha_D^2)}{(\beta(s))^{2/3}} \right)}{Ai\left(\dfrac{\beta(s) + 1/(4\alpha_D^2)}{(\beta(s))^{2/3}} \right)} \right] \tag{3-38}$$

donde la función de transferencia fractura-matriz en el espacio de Laplace es:

$$\beta(s) = \frac{\sqrt{m(s)}}{\alpha_D \sigma_D} \left[\frac{\tanh(\sqrt{m(s)} z_{DH}) - \tanh(\sqrt{m(s)} z_{Df})}{1 - \tanh(\sqrt{m(s)} z_{Df}) \tanh(\sqrt{m(s)} z_{DH})} \right] + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s \tag{3-39}$$

$$m(s) = \frac{1}{D_{mD}} \left[\frac{[1-\phi_{mD}] M_{mD} s}{M_{mD}/\alpha_D + s} + \phi_{mD} \alpha_D s + \lambda_D \right] \tag{3-40}$$

No fue posible invertir directamente esta ecuación al tiempo real utilizando un proceso analítico, dado lo complejo de su forma, por lo cual, se realizó la inversión numérica con el algoritmo de Crump acoplado con el algoritmo Epsilon, que permite acelerar el proceso de convergencia y fue necesario hacer aproximaciones a tiempos cortos y largos que permiten simplificarla para obtener casos límites cuya inversión analítica fuera posible.

La solución analítica aproximada a tiempos adimensionales cortos:

$$C_{fD}(r_D,t_D)=F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+U(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad (3\text{-}41)$$

donde:

$$F(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \qquad U(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}$$

La solución analítica aproximada a tiempos adimensionales largos:

$$C_{fD}(r_D,t_D)=M(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\sigma_D\left[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}\right]}+\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+\right.$$

$$\left.+L(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\frac{\left[z_{DH}-z_{Df}\right]}{\sigma_D\left[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}\right]}+\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad (3\text{-}42)$$

donde:

$$M(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\left[z_{DH}-z_{Df}\right]/\sigma_D\left[D_{mD}/\lambda_D-z_{DH}z_{Df}\right]+\lambda_D}}$$

$$L(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\left[z_{DH}-z_{Df}\right]/\sigma_D\left[D_{mD}/\lambda_D-z_{DH}z_{Df}\right]+\lambda_D}}$$

Se comparó la solución analítica a tiempos cortos y largos con la solución obtenida por inversión numérica proporcionando resultados satisfactorios.

3.4. MODELO PROPUESTO DE DOBLE POROSIDAD PARA FLUJO RADIAL DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS (CON VOLUMEN POROSO INACCESIBLE Y GEOMETRÍA DE MATRIZ CÚBICA).

Con objeto de permitir un análisis matemático del problema de flujo de trazadores a través de yacimientos naturalmente fracturados, es necesario reemplazar el sistema real, sumamente irregular y complejo compuesto de matriz y fracturas, por unidades regulares de bloques cúbicos de matriz combinados con fracturas rodeándolos, en los que los bloques de matriz tengan el mismo tamaño y forma **(Fig. 3-3)**.

El modelo de flujo radial en las fracturas:

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{\partial^2 C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda_D C_{fD}(r_D,t_D)+\frac{D_{mD}}{[d_D/6]}\frac{\phi_m}{\phi_f}\frac{\partial C_{mD}(z_{DH},t_D)}{\partial z_D}=\alpha_D\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}$$

$$1\le r_D<\infty;\ t_D>0 \qquad (3\text{-}43)$$

Condición inicial: $C_{fD}(r_D,0)=0$

Condición de frontera interna: $C_{fD}(1,t_D)=1$

Condición de frontera externa: $\lim\limits_{r_D\to\infty} C_{fD}(r_D,t_D)=0$ (3-44)

El modelo de flujo lineal transitorio en la matriz con volumen poroso inaccesible:

$$\frac{D_{mD}}{z_D^2}\left[\frac{\partial}{\partial z_D}\left(z_D^2\frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial z_D}\right)\right]-\lambda_D C_{mD}(z_D,t_D)=\alpha_D[1-\phi_{mD}]\frac{\partial C_{smD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}+\alpha_D\phi_{mD}\frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial t_D};$$

$$0<z_D<d_D;\ t_D> \qquad (3\text{-}45)$$

Condición inicial: $C_{mD}(z_D,0)=0$

Condición de frontera interna: $\dfrac{\partial C_{mD}(0,t_D)}{\partial z_D}=0$

Condición de frontera externa (interfase): $C_{mD}(z_{Df},t_D)=C_{fD}(r_D,t_D)$ (3-46)

Ritmo de concentración que se transfiere al volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\alpha_D \frac{\partial C_{smD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = M_{mD}\left[C_{mD}(z_D, t_D) - C_{smD}(z_D, t_D)\right] \tag{3-47}$$

Condición inicial: $C_{smD}(r_D, 0) = 0$ (3-48)

La solución está dada por (ver Apéndice D):

$$\overline{C}_{fD}\left(r_D, s\right) = \frac{1}{s} e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}} \left[\frac{Ai\left(\dfrac{r_D \beta(s) + 1/4\alpha_D^2}{\left(\beta(s)\right)^{2/3}}\right)}{Ai\left(\dfrac{\beta(s) + 1/4\alpha_D^2}{\left(\beta(s)\right)^{2/3}}\right)} \right] \tag{3-49}$$

donde:

$$\beta(s) = \frac{6\phi_m D_{mD} \cdot \overline{m(s)}}{\alpha_D\left[z_{DH} + z_{Df}\right]\phi_f} \left[\coth(\left[z_{DH} + z_{Df}\right] \cdot \overline{m(s)}) - \frac{1}{\left[z_{DH} + z_{Df}\right] \cdot \overline{m(s)}} \right] + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s \tag{3-50}$$

$$m(s) = \frac{1}{D_{mD}} \left[\frac{\left[1 - \phi_{sm}\right] M_{mD}\, s}{M_{mD} / \alpha_D + s} + \lambda_D + \phi_m \alpha_D s \right]$$

Con objeto de invertir numéricamente la solución completa para el modelo planteado se utilizó el algoritmo de Crump, acoplado con el algoritmo de aceleración de convergencia Epsilon.

No fue posible invertir directamente esta ecuación al tiempo real utilizando un proceso analítico, dado lo complejo de su forma, por lo cual, se realizó la inversión numérica con el algoritmo de Crump acoplado con el algoritmo Epsilon, que permite acelerar el proceso de convergencia y fue necesario hacer aproximaciones a tiempos cortos y largos que permiten simplificarla para obtener casos límites cuya inversión analítica fuera posible.

La solución analítica aproximada a tiempos adimensionales cortos:

$$C_{fD}(r_D,t_D) = F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+U(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad (3\text{-}51)$$

donde:

$$F(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \qquad U(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}$$

La solución analítica aproximada a tiempos adimensionales largos para el flujo radial de trazador radiactivo en un yacimiento naturalmente fracturado en que las fracturas y la matriz actúan como "un solo sistema" es:

$$C_{fD}(r_D,t_D)=M(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\sigma_D\left[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}\right]}+\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+\right.$$

$$\left.+L(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\frac{\left[z_{DH}-z_{Df}\right]}{\sigma_D\left[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}\right]}+\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad (3\text{-}52)$$

donde:

$$M(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\left[z_{DH}-z_{Df}\right]/\sigma_D\left[D_{mD}/\lambda_D-z_{DH}z_{Df}\right]+\lambda_D}}$$

$$L(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\left[z_{DH}-z_{Df}\right]/\sigma_D\left[D_{mD}/\lambda_D-z_{DH}z_{Df}\right]+\lambda_D}}$$

En el caso de que la porosidad adimensional en la matriz es igual a uno, $\phi_{mD}=1$, y la constante de transferencia sea cero, la solución es la misma que la del modelo para yacimientos homogéneos.

3.5. COMPORTAMIENTO DE LA CONCENTRACIÓN CON RESPECTO AL TIEMPO EN LOS MODELOS PROPUESTOS DE DOBLE POROSIDAD.

Los valores obtenidos de la inversión numérica sirvieron para determinar el comportamiento de la concentración con respecto al tiempo de los modelos de doble porosidad con flujo interporoso transitorio. Una gráfica semilogarítmica muestra tres periodos de flujo, el primer y tercer régimen corresponde a tiempos cortos y largos, el segundo régimen a la existencia de un tiempo de flujo intermedio (Fig. 3-4), pueden ser explicados como sigue:

En el *primer régimen de flujo*, el fluido es inyectado a las fracturas inicialmente, produciendo una diferencia grande de concentración entre las fracturas y la matriz, el comportamiento de la concentración es lineal con respecto al tiempo y similar al comportamiento de un yacimiento homogéneo, se le domina comportamiento a tiempos cortos.

En el *segundo régimen de flujo*, el fluido fluye de las fracturas a la matriz, este es el periodo de transición, el flujo interporoso se presenta como un decremento en el ritmo de concentración en las fracturas y un aumento en el ritmo de concentración en la matriz.

En el *tercer régimen de flujo*, debido a que el periodo de estabilización de concentración no continúa, el ritmo de incremento de concentración es el mismo en las fracturas y en la matriz y el yacimiento actúa como un solo sistema se le denomina comportamiento a tiempos largos.

3.6. PRUEBA DE INYECCIÓN DE UN VOLUMEN FINITO (BACHE).

La solución al problema de la inyección de un volumen finito de trazador (bache), se obtiene aplicando el principio de superposición en tiempo a la solución para el caso de inyección continua de trazador, tal como fue propuesto por Craig 1971.

La concentración para este tipo de inyección está dada por la ecuación siguiente:

$$C_D(r_D,t_D)_{bache} = C_D(r_D,t_D) - C_D(r_D,t_D - \Delta t_D) \tag{3-51}$$

$$C_D(r_D,t_D - \Delta t_D) = 0 \qquad \text{si } t_D \leq \Delta t_D \tag{3-52}$$

donde:

Δt_D = tiempo adimensional de inyección del bache.

3.7. PRUEBA DE INYECCIÓN DE UN VOLUMEN DADO EN FORMA INSTANTÁNEA (INYECCIÓN PICO).

Una prueba de la inyección instantánea de un volumen específico de fluido, o inyección pico: corresponde a la solución a la ecuación que representa la inyección de trazador durante un intervalo de tiempo muy pequeño, se determina por aproximarse más a lo que ocurre en un caso real. Walkup y Horne (1985) establecieron que la ecuación que representa una prueba de inyección tipo pico es:

$$L\left[\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right] = s \quad L\left[C_D(r_D,t_D)\right] - C_D(r_D,0) \tag{3-53}$$

Substituyendo la condición inicial:

$$L\left[\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right] = s \quad L\left[C_D(r_D,t_D)\right] \tag{3-54}$$

Aplicando la transformada inversa se observa que la derivada con respecto al tiempo en espacio real puede obtenerse invirtiendo el resultado de multiplicar el parámetro de Laplace (s), por la solución en el espacio de Laplace obtenida para las condiciones de frontera impuestas:

$$\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} = L^{-1}\left[s\overline{C_D}(r_D,s)\right] \tag{3-55}$$

A la derivada con respecto al tiempo se le conoce como concentración pico:

$$C_D(r_D,t_D)_{pico} = \frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} \tag{3-56}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores:

$$C_D(r_D,t_D)_{pico} = L^{-1}\left[s\overline{C_D}(r_D,s)\right] \tag{3-57}$$

Los valores obtenidos de la inversión numérica se utilizaron para obtener la solución pico y observar el comportamiento de la derivada en los modelos propuestos de doble porosidad.

El comportamiento de la derivada de la concentración con respecto al tiempo en una gráfica Log-Log.

Durante el primer régimen de flujo la derivada tiene un valor constante hasta iniciar el periodo de transición. El período de transición inicia cuando el valor de la derivada se reduce hasta la mitad del valor inicial y luego se incrementa suavemente hasta alcanzar el valor constante que es cuando inicia el tercer régimen de flujo y se mantiene hasta alcanzar alguna frontera (ver Fig. 3-5).

CAPÍTULO 4

VALIDACIÓN DE LOS MODELO PROPUESTOS

La validez de los modelos depende de la exactitud con la que describen los principales procesos que afectan el flujo del trazador a través del yacimiento y su capacidad para reproducir la respuesta de los cambios en su concentración medida en el pozo productor. En este capítulo se presenta la validación de los modelos propuestos en este trabajo, la cual consistió en reproducir los valores generados de modelos o de mediciones de campo publicados por otros investigadores.

El proceso de validación de los modelos generalmente consiste en reproducir respuestas conocidas de un proceso determinado, cuyos datos provienen de cualquiera de las fuentes siguientes:

a) pruebas de campo,

b) datos experimentales de laboratorio,

c) datos históricos,

d) modelos reportados en la literatura,

e) datos sintéticos.

Debido a que varios modelos publicados previamente en la literatura corresponden a casos particulares de los modelos propuestos en este trabajo, se validó la consistencia de los modelos propuestos en este trabajo con los mismos datos empleados en cada artículo publicado correspondiente. En la Tabla 5 se muestran los artículos utilizados para validar cada tipo de modelo propuesto.

El modelo de flujo radial para yacimientos homogéneos fue validado utilizando un decaimiento radiactivo igual a cero, con los mismos datos de entrada de Hsieh y de

Moench y Ogata y las respuestas coincidieron como se muestra en la tabla 6.

Los modelos de doble porosidad para yacimientos naturalmente fracturados considerando volumen poroso inaccesible convergieron al modelo para yacimientos homogéneos a tiempos adimensionales cortos y largos con las correspondientes adecuaciones como se muestra en la tabla 6.

Tabla 5 Artículos utilizados para validar los modelos propuestos.

	Homogéneos	Naturalmente Fracturados
Radial	Moench y Ogata (1981), Hsieh, (1986), Anderson, Laurie, Loder y Kennedy[7] (1992).	Chen, (1986), Skilbrei, Hallenbeck y Sylte (1990), Ramírez S. y asoc., (1992)

4. 1 EVALUACIÓN DEL INVERTIDOR NUMÉRICO.

Como se comentó previamente, para analizar los comportamientos de los modelos propuestos se requirió utilizar un invertidor numérico, por ello, debe evaluarse al grado de exactitud con el que se invierten las soluciones a tiempo real. Para este propósito se realizó lo siguiente: el modelo de flujo radial para yacimientos homogéneos de trazadores que no considera el decaimento radiactivo, previamente publicado por Moench y Ogata, se transformó a la forma adimensional utilizando las variables adimensionales propuestas en este trabajo y se obtuvo una solución en el espacio de Laplace. Posteriormente se obtuvo su solución analítica aproximada a tiempos adimensionales cortos; se programó esta solución y se comparó con los resultados de la inversión numérica con los algoritmos de Stehfest y de Crump.

La inversión numérica con el algoritmo de Stehfest presentó una buena aproximación y conforme el tiempo adimensional aumenta, se tiene una diferencia mayor en los resultados con respecto a la solución analítica y adicionalmente se presentan algunos problemas de dispersión numérica.

Con el algoritmo de Stehfest (1970) como invertidor numérico se encontró una importante dispersión numérica para valores de tiempos y radios adimensionales grandes y dependencia del parámetro N, mientras que el algoritmo de Crump mostró bastante eficiencia en su uso y se ajustó muy bien a la solución analítica como puede observarse en la Fig. 4.1.

El modelo de Dispersión-Convección de Coats y Smith[40] tiene solución analítica exacta, por lo que Correa y asoc. (1987)[45] programaron la solución analítica y compararon los resultados con la inversión numérica utilizando el algoritmo de Crump de la solución obtenida en el espacio de Laplace, la comparación mostró excelentes resultados por lo que concluyeron que el algoritmo de Crump presenta mejores resultados que el de Stehfest.

Ramírez y asoc. también concluyeron que el algoritmo de Crump presenta mejores resultados que el de Stehfest y lo aplicaron para invertir sus modelos tanto en flujo radial como lineal, lo que es apoyado en sus artículos publicados (Ramírez y asoc, 1991 y Ramírez y asoc, 1992).

Debido a lo mencionado anteriormente se optó por invertir todos los modelos propuestos en esta tesis con el algoritmo de Crump. Para el tipo de problemas de Dispersión-Convección-Decaimiento, las series originales presentadas por Crump requieren de un cálculo de cerca de 2000 términos para converger. Con el proceso de aceleración conocido como algoritmo Epsilon, la convergencia se obtuvo aproximadamente después de cerca de 40 términos.

Para los modelos discutidos en este trabajo, se calculó la solución del modelo en 50 intervalos de tiempo, usando doble precisión aritmética, lo que permitió un ahorro substancial en tiempo de cómputo.

Las soluciones analíticas existentes de algunos modelos y las numéricas calculadas en este trabajo son iguales a los primeros ocho dígitos.

La ventaja de utilizar en el problema de dispersión-convección-decaimiento la transformada de Laplace con inversión numérica es que el tiempo de cálculo para realizar un cambio de datos de entrada es menor que por medio de la simulación numérica con un esquema de diferencias finitas ya que un simple cambio de tamaño de bloque solo se introduce el valor al programa mientras que por simulación se tendría que generar una nueva malla o en un software comercial se modificaría el código de datos.

Valores de entrada

Para observar el comportamiento de las soluciones de los modelos propuestos obtenidas en el capítulo anterior se utilizó la información correspondiente a las propiedades del fluido inyectado y del trazador, propiedades petrofísicas de la capa y valores reportados para la dispersividad, así como parámetros de operación, como se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6. Datos usados para generar la respuesta de concentración.

Distancia, r	1000 m
Espesor de la formación, h	30 m
Tamaño de fractura	0.025 pies
Tamaño de bloque	9.05 pies
Porosidad de fractura, ϕf	0.45
Porosidad de matriz, ϕm	0.05
Coeficiente de dispersión, Dr	1.38E-5 m^2/D
Constante de decaimiento radiactivo, λ	1.53E-4 1/D
Dispersividad, α	50 m

Gasto de Inyección qi	10 BPM
Permeabilidad de fractura, k_f	500 mD
Permeabilidad de matriz, k_m	0.01 mD

Derivación de los grupos adimensionales

Aunque generalmente se comparan las soluciones utilizando gráficas de:

$C_D(r_D, t_D)$ vs_t_D $\qquad$ $C_D(r_D; t_D)$ vs_r_D

Un camino que debe ser usado para presentar los resultados del problema en términos de:

$$t_D^{\frac{3}{2}} \frac{\partial C_D(r_{Dp}, t_D)}{\partial t_D} \quad vs \quad \frac{\left(r_{Dp}^{3/2} - 1\right)^2}{t_D}$$ así como de $$C_D(r_{Dp}, t_D) \quad vs \quad \frac{\left(r_{Dp}^{3/2} - 1\right)^2}{t_D}$$

Los cuales fueron obtenidos de derivar con respecto al tiempo adimensional la solución analítica para flujo radial en yacimientos homogéneos dada por la ecuación 3-1 y multiplicada por $t_D^{\frac{3}{2}}$, y evaluada en el pozo productor, que es el lugar donde se medirá la respuesta.

4.2. VALIDACIÓN DEL MODELO PROPUESTO PARA FLUJO RADIAL DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS HOMOGÉNEOS.

Validación analítica

La solución obtenida en el espacio de Laplace con

se obtiene la misma solución que la reportada por Moench y Ogata.

La solución para el modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos homogéneos obtenida en el capítulo anterior está dada por:

$$C_D(r_D,t_D)=F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}\,erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right]$$

donde: (4-1)

$$F(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}$$

Para comparar esta solución con valores previamente publicados en la literatura, se utilizó el valor de decaimiento igual a cero en la solución general, que se reduce a la solución para un trazador químico (Fig. 4-2):

$$C_D(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right) \quad (4\text{-}2)$$

Los valores para trazadores químicos proporcionados en el artículo de Hsieh se transformaron a las variables definidas en este trabajo y se graficaron (Fig. 3-3) mostrando respuestas similares del modelo de Hsieh y el propuesto.

Validación numérica

Con la información de la tabla 6, se graficó el comportamiento de la solución obtenida (Fig. 4-4) por inversión numérica con la solución analítica aproximada, la comparación no mostró dispersión numérica.

Para invertir numéricamente las soluciones con el algoritmo de Crump, se utilizaron los datos que se presentan en la Tabla 1, se graficaron los datos generados por la inversión numérica de la solución general obtenida en el espacio de Laplace con los valores de Hsieh generando la Fig. 4-5. La comparación de estas dos soluciones mostró resultados excelentes dado que el artículo de Hsieh proporcionó el valor de la constante de dispersividad.

Otros artículos pueden también validar el modelo pero no proporcionan la información suficiente para reproducir el comportamiento con el modelo propuesto y comparar los resultados presentados en los artículos.

4.3. VALIDACIÓN DEL MODELO PROPUESTO PARA FLUJO RADIAL DE TRAZADORES ENYACIMIENTOS HOMOGÉNEOS CON VOLUMEN POROSO INACCESIBLE.

Validación analítica

La función de transferencia de la solución al modelo para yacimientos homogéneos con volumen poroso inaccesible (ec 3-13) es:

$$\beta(s) = \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + \phi_D s + \frac{M_D[1-\phi_D]s}{\alpha_D s + M_D}$$

Fue validado utilizando un volumen poroso inaccesible igual a cero, es decir la porosidad adimensional es igual a uno $\phi_D = 1$ y la función de transferencia coincide con la del modelo propuesto para flujo radial en yacimientos homogéneos, ec.(3-4):

$$\beta(s) = \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s$$

Validación numérica

La inversión numérica para el modelo de flujo radial en yacimientos homogéneos con volumen poroso inaccesible se graficó utilizando el valor de cero para el volumen poroso inaccesible ($\phi_D = 1$)y proporcionó la misma solución que la del modelo que no considera volumen poroso inaccesible, como puede verse en la Fig. 4-6.

4.4. VALIDACIÓN DEL MODELO DE DOBLE POROSIDAD PARA FLUJO DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS (CON VOLUMEN POROSO INACCESIBLE Y GEOMETRÍA DE MATRIZ ESTRATIFICADA).

Validación analítica

La solución del modelo propuesto para yacimientos naturalmente fracturados con geometría de matriz estratificada, a tiempos cortos converge a la solución del modelo propuesto para flujo radial en yacimientos homogéneos, utilizando los mismos valores de porosidad, espesor y dispersividad en las fracturas del yacimiento naturalmente fracturado, la porosidad, espesor y dispersividad del yacimiento homogéneo.

La función de transferencia matriz-fractura para el modelo con geometría de matriz tipo estratificada es (ec. 3-39):

$$\beta(s)=\frac{\sqrt{m(s)}}{\alpha_D\sigma_D}\left[\frac{\tanh(\sqrt{m(s)}z_{DH})-\tanh(\sqrt{m(s)}z_{Df})}{1-\tanh(\sqrt{m(s)}z_{Df})\tanh(\sqrt{m(s)}z_{DH})}\right]+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s$$

$$m(s)=\frac{1}{D_{mD}}\left[\frac{[1-\phi_{mD}]M_{mD}\,s}{M_{mD}/\alpha_D+s}+\phi_{mD}\alpha_D s+\lambda_D\right]$$

A tiempos cortos en la ecuación anterior se excluye el efecto de la matriz, (si la porosidad o el coeficiente de difusión en la matriz son muy pequeños), sólo estarían actuando las fracturas, la ecuación anterior se reduciría a la expresión siguiente (Apéndice C, ec. C-64):

$$\beta(s)=\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s \tag{4-6}$$

Si se utiliza $\lambda_D = 0$ en la ecuación 3-39 es equivalente a considerar flujo de un trazador químico, la respuesta será la misma reportada por Moench y Ogata (1981) así como a la solución reportada por Hsieh (1986) [2-17].

Se observa de la comparación con la solución de Hsieh (1986) y de Moench y Ogata, que la aproximación de los resultados del modelo propuesto en su versión simplificada al caso homogéneo considerando un trazador químico, es excelente (ver Fig. 4-7).

Caso particular: espesor infinito.

Si se utiliza $\lambda_D = 0$ en la ec. 3-39 que es la solución correspondiente a yacimientos naturalmente facturados, es posible obtener una solución simplificada para el caso en que la matriz se comporte como si fuera infinita en la dirección z, para los tiempos de interés. Lo anterior implica que los efectos de la frontera externa de la matriz no influyen en el flujo del trazador, esto se cumple a tiempos pequeños. Para un espesor infinito la tangente hiperbólica que considera la matriz es aproximadamente igual a uno en la ec. 3-39. Bajo estas condiciones, el problema a resolver sería equivalente al que reporta Chen (1985 y 1986).

La solución del modelo propuesto, simplificada para el caso de inyección continua de un trazador radiactivo con matriz infinita, genera la solución presentada por Chen (1985 y 1986). Es decir, la solución general se reduce al caso particular anteriormente mencionados con:

$$\beta(s) = s + \lambda_D + \frac{D_{mD}\phi_m}{z_{DH}}\sqrt{\frac{s+\lambda_D}{D_{mD}}} \qquad (4\text{-}8)$$

Al comparar los resultados obtenidos por Chen (1985 y 1986) empleando sus soluciones, con el caso particular invertido numéricamente del modelo propuesto, en la Fig. 4-8 se observa que ambas soluciones presentan prácticamente los mismos resultados, de aquí se puede concluir que a pesar de que las ecuaciones diferenciales son distintas, adicionalmente a que, los métodos de solución empleados en cada caso son diferentes, los resultados reportados son enteramente similares.

Con base en lo anterior, se puede afirmar que las soluciones presentadas por Chen corresponden a al caso particular del modelo propuesto en este trabajo para un yacimiento con fracturas horizontales.

Validación numérica

El modelo propuesto de doble porosidad con volumen poroso inaccesible ec. 3-19 a tiempos pequeños proporcionó la misma respuesta que el modelo para yacimientos homogéneos con volumen poroso inaccesible considerando que el espesor y porosidad de las fracturas son las mismas para el yacimiento homogéneo, esto puede observarse en la Fig. 4-9 y a tiempos largos también el comportamiento fue similar.

4.5. VALIDACIÓN DEL MODELO DE DOBLE POROSIDAD PARA FLUJO RADIAL DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS (CON VOLUMEN POROSO INACCESIBLE Y GEOMETRÍA DE MATRIZ CÚBICA).

Validación analítica

Con el fin de lograr una analogía entre los modelos para flujo radial en yacimientos homogéneos y con ello validar el modelo para flujo radial en yacimientos naturalmente fracturados considerando una geometría matriz-fractura cúbica.

Se puede observar en la función de transferencia fractura-matriz:

$$\beta(s) = \frac{6\phi_m D_{mD}\sqrt{m(s)}}{\alpha_D\left[z_{DH}+z_{Df}\right]\phi_f}\left[\coth\left(\left[z_{DH}+z_{Df}\right]\sqrt{m(s)}\right)-\frac{1}{\left[z_{DH}+z_{Df}\right]\sqrt{m(s)}}\right]+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s$$

$$m(s) = \frac{1}{D_{mD}}\left[\frac{\left[1-\phi_{sm}\right]M_{mD}s}{M_{mD}/\alpha_D+s}+\phi_m\alpha_D s+\lambda_D\right]$$

Si $\phi_{mD}=1$, la función de transferencia se reduce a:

$$m(s) = \frac{\lambda_D+\alpha_D s}{D_{mD}}+s$$

$$\beta(s) = \frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s \qquad (4\text{-}10)$$

Por consiguiente la solución para un yacimiento naturalmente fracturado converge a la solución del modelo para flujo radial en yacimientos homogéneos.

En el caso de que el espesor de yacimiento, sea igual al tamaño de bloques, H, es posible establecer una equivalencia entre los términos de interacción, además para simplificar el análisis de ambos modelos se consideró un trazador químico.

La función hiperbólica, coth (x) converge al valor de la unidad cuando sus argumentos corresponden a un argumento mayor a 5. Con base en lo anterior, la influencia de estas funciones en las ecuaciones antes mencionadas da origen a la desigualdad:

$$\frac{1}{D_{mD}^2}\,\overline{\lambda_D + \phi_m\alpha_D s + \frac{M_{mD}[1-\phi_{sm}]\alpha_D s}{M_{mD}/\alpha_D + s}} \geq 5 \qquad (4\text{-}12)$$

Se forma una desigualdad cuadrática:

$$s^2 + \left[\frac{\lambda_D + M_{mD}[\phi_m - \phi_{sm}\alpha_D] + M_{mD}\alpha_D + 25D_{mD}^4}{\phi_m\alpha_D}\right]s + \frac{\lambda_D M_{mD} + 25D_{mD}^4 M_{mD}}{\phi_m{\alpha_D}^2} \geq 0 \qquad (4\text{-}13)$$

Si la Ec. 3-12 se satisface, la Ec. 3-9 se reduce a la siguiente:

$$\beta(s) = \frac{1}{\alpha_D}\left[\frac{6}{d_D}\frac{\phi_m}{\phi_f}D_{mD}\left[5z_{DH} - \frac{1}{\sqrt{m(s)}z_{DH}}\right] + \lambda_D + \phi_f\alpha_D s + \frac{M_{fD}[1-\phi_{sF}]s}{M_{fD}/\alpha_D + s}\right] \qquad (4\text{-}14)$$

Con base en lo anterior, es posible concluir que el modelo para el flujo radial considerando geometría matriz-fractura cúbica, tiene como caso particular el modelo para flujo radial para un yacimiento con matriz en forma de estratos.

Validación numérica

La solución considerando el caso en que tanto la porosidad como el coeficiente de difusión de los bloques de matriz son muy pequeños, de tal manera que no se transfiere masa a la región estancada y por consiguiente sólo actúa un sólo medio, el sistema de fracturas como se muestra en la Figura 3-9.

Bajo estas condiciones, el comportamiento del trazador en un yacimiento fracturado con una geometría matriz-fractura cúbica, es igual al comportamiento del trazador en yacimientos homogéneos.

Con base en lo anterior se puede concluir que los dos modelos para flujo radial en yacimientos naturalmente fracturados propuestos en esta tesis, reportan los mismos resultados en el caso en que el trazador sólo viaja a través del sistema de fractura, ya que no existe el término de interacción fractura-matriz.

CAPÍTULO 5

INTERPRETACIÓN DE PRUEBAS DE TRAZADORES

En este capítulo se presenta el problema que se conoce como inverso; es decir, se tiene la respuesta a un impulso del medio poroso (que son los datos obtenidos de una prueba de trazadores) a la cual se aplica el modelo basado en que las suposiciones empleadas son correspondientes, para inferir las características del yacimiento.

Se proponen dos métodos de interpretación de pruebas de trazadores con base en los datos de variaciones en la concentración fluyente del trazador, medidos en los pozos productores, los cuales son el de curvas tipo especializadas y el del inverso de la función error.

Para la interpretación utilizando curvas tipo especializadas se tomó como base la solución analítica aproximada a tiempos largos para el modelo de flujo radial en yacimientos homogéneos con la que se determina los grupos adimensionales.

En la generación de las curvas tipo del modelo propuesto para flujo radial en yacimientos homogéneos se utiliza la inversión numérica. Las curvas tipo se ajustan obteniendo parámetros de rectas trazadas en zonas específicas de los datos y se substituyen en la solución del modelo.

Es muy importante obtener el coeficiente de dispersión de las pruebas de trazadores del yacimiento ya sea éste homogéneo, estratificado o naturalmente fracturado. Con el coeficiente de dispersión determinado se reproduce la prueba de campo para validar el valor. El valor del coeficiente de dispersión se utiliza en la simulación numérica de desplazamiento de un fluido por otro.

En un desplazamiento miscible se requiere de una estimación de la extensión de la zona de mezclado en el yacimiento para diseñar de manera óptima los procesos de desplazamiento sensibles a la dispersión. Dependiendo del tipo de emisión del trazador a utilizar, la manera de obtener datos de concentración fluyente consiste en introducir un contador Geiger con sensor de memoria colgando de un cable a la profundidad media del intervalo del pozo productor para registrar el tiempo y su correspondiente concentración de trazador. Otra manera es introducir una herramienta con dos sensores de rayos gamma los cuales registran el flujo, de la diferencia entre las mediciones y con el intervalo de tiempo se obtiene un delta de tiempo y se convierte a concentración. Debido a que el coeficiente de dispersión está compuesto por el producto de la dispersividad y la velocidad radial de flujo, es posible determinar la dispersividad con la interpretación y posteriormente encontrar el coeficiente. La constante de dispersividad es un parámetro importante ya que se utiliza como parámetro de ajuste en la simulación de flujo de trazadores en yacimientos y el valor obtenido se utiliza en la simulación del flujo de fluidos de inyección. Con el coeficiente de dispersión se optimiza el comportamiento del desplazamiento miscible en el yacimiento.

5.1. INTERPRETACIÓN UTILIZANDO CURVAS TIPO ESPECIALIZADAS (CTE).

Es conveniente mencionar este método de interpretación sigue el procedimiento que utilizó el Dr. Cinco Ley para obtener las curvas tipo especializadas que se utiliza en el análisis de pruebas de presión.

5.1.1. Flujo radial de trazadores en yacimientos homogéneos.

Con la finalidad de comprender la metodología sugerida en este trabajo, se presenta la determinación de la dispersividad a partir de la solución para el flujo de un trazador químico en yacimientos homogéneos, y posteriormente se desarrolla la técnica para la interpretación de trazadores radiactivos.

La solución del modelo de flujo radial de un trazador radiactivo en yacimientos homogéneos presentada en el capítulo 3 ec. 3-5 es:

$$C_D(r_D,t_D)=F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+U(r_D)erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad (5\text{-}1)$$

donde:

$$F(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \quad ; \quad U(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}$$

Substituyendo el valor del decaimiento radiactivo igual a cero en la ecuación anterior se obtiene la solución del flujo radial de trazador químico en yacimientos homogéneos presentada en el capítulo 3 (ec. 3-7):

$$C_D(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right) \quad (5\text{-}2)$$

Utilizando la definición de la función error complementaria:

$$C_D(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}}^{\infty}e^{-U^2}dU \quad (5\text{-}3)$$

La derivada parcial con respecto al tiempo utilizando la regla de Leibnitz de la integral de la ec. anterior utilizando la regla de:

$$\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}=-\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{r_D^{3/2}-1}{2(\alpha_D t_D)^{3/2}}\right]e^{-\frac{\left(r_D^{3/2}-1\right)^2}{9\alpha_D t_D}} \quad (5\text{-}4)$$

Al multiplicar la ecuación anterior por $t_D^{3/2}$ que es el denominador:

$$t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{r_D}}e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{r_D^{3/2}-1}{\alpha_D^{3/2}}\right]e^{-\frac{\left(r_D^{3/2}-1\right)^2}{9\alpha_D t_D}} \tag{5-5}$$

En forma general la ecuación anterior puede escribirse como:

$$t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} = k_1 e^{-\frac{k_2}{t_D}} \tag{5-6}$$

donde:

$$k_1 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{r_D}}e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{r_D^{3/2}-1}{\alpha_D^{3/2}}\right] \tag{5-7}$$

$$k_2 = \frac{\left(r_D^{3/2}-1\right)^2}{9\alpha_D} \tag{5-8}$$

Si se utilizan logaritmos en base 10:

$$\log\left(t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right) = \log k_1 - \frac{k_2}{2.30259\ t_D} \tag{5-9}$$

En la Fig 5.1 se muestra la gráfica Log-Log de:

$$t_D^{3/2}\left[\frac{\partial C_D(r_D,t_D)^2}{\partial t_D}\right] \quad vs \quad \frac{1}{t_D}$$

Se observa una recta con pendiente negativa, m y ordenada al origen, b, por lo que:

$$m = -\frac{\left(r_D^{3/2}-1\right)^2}{2.30259\ [9\alpha_D]} = -\frac{\left(r_D^{3/2}-1\right)^2}{20.72\ \alpha_D} \tag{5-10}$$

$$b = \log\left(-\frac{1}{3\sqrt{\pi}\sqrt[4]{r_D}}e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{\alpha_D^{3/2}}\right]\right) \tag{5-11}$$

Ajustando una recta sobre los datos en la gráfica y conocidos el radio del pozo y la distancia entre el pozo inyector y el pozo productor se obtiene la dispersividad adimensional:

$$\alpha_D = \frac{\left(r_D^{3/2} - 1\right)^2}{20.72331 \quad m} \tag{5-12}$$

B) Flujo Radial de Trazador en Yacimientos Homogéneos.

Dada la solución para el flujo de trazadores radiactivos en yacimientos homogéneos:

$$C_D(r_D,t_D) = F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+U(r_D)erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \tag{5-13}$$

donde:

$$F(r_D) = \frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \tag{5-14}$$

$$U(r_D) = e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \tag{5-15}$$

En el miembro de la derecha de esta ecuación, el segundo término es menor que el primero por lo que substituyendo la definición de la función error complementaria.

$$C_D(r_D,t_D) = F(r_D)\int_{\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}}^{\infty} e^{-u^2}\,du \tag{5-16}$$

Derivando con respecto al tiempo adimensional utilizando la regla de Leibnitz:

$$\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} = F(r_D)\frac{1}{2}\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D}}t_D^{-3/2}+\frac{\sqrt{\lambda_D}}{\sqrt{t_D}}\right]e^{-\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2} \tag{5-17}$$

Multiplicando por $t_D^{3/2}$:

$$t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}=\frac{F(r_D)}{2}\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D}}+t_D\sqrt{\lambda_D}\right]e^{-\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2} \tag{5-18}$$

Aplicando el logaritmo natural:

$$\ln\left(t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right)=\ln\left(\frac{F(r_D)}{2}\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{\sqrt{\alpha_D t_D}}+t_D\sqrt{\lambda_D}\right]\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2 \tag{5-19}$$

Transformando a logaritmo en base diez y dividiendo entre 2.3 toda la ecuación:

$$\log_{10}\left(t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right)=-\frac{1}{18.27\alpha_D}\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{\sqrt{t_D}}\right)^2+\log_{10}\left(\frac{F(r_D)}{2}\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}+t_D\sqrt{\lambda_D}\right]\right) \tag{5-20}$$

La ec. anterior tiene la forma de la ecuación de recta cuando se grafica en escala log-log de los parámetros (5,3):

$$t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\ vs\ \frac{\left(r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}\right)}{\sqrt{t_D}} \tag{5-21}$$

Por ensayo y error se obtiene la dispersividad adimensional y la gráfica que presente una relación lineal anterior y que satisfaga la condición siguiente:

$$m=\frac{1}{18.27\alpha_D} \tag{5-22}$$

La ordenada al origen es:

$$b=\log_{10}\left(\frac{F(r_D)}{2}\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}+t_D\sqrt{\lambda_D}\right]\right) \tag{5-23}$$

Aplicando el antilog a la ec. anterior:

$$10^b=H(r_D,t_D) \tag{5-24}$$

Substituyendo las Ecs. 42 y 47 en 51 y la resultante en la Ec. 56:

$$10^{\xi} = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}} e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D}}} \left[\frac{r_D^{3/2} - 1}{3\sqrt{\alpha_D}} - \frac{1}{2} t_D \sqrt{\alpha_D \lambda_D}\right] \tag{5-25}$$

Rearreglando se tiene una ecuación implícita en la cual conocida r_D y utilizando el valor de α_D, para un valor de t_D dado.

Curva Tipo para el Flujo de Trazadores Radiactivos en Yacimientos Homoéneos

La utilidad de obtener una curva tipo que describa la concentración del trazador fluyendo en un yacimiento homogéneo es el permitir la estimación de la dispersividad adimensional mediante el ajuste de los datos de campo con dicha curva[20]. La curva tipo se generó con los valores obtenidos de la inversión numérica.

El eje de las "x" de la curva tipo es el cuadrado del argumento de la función error complementaria y el eje de las "y" las concentraciones adimensionales (Ver la Fig. 3).

5.1.2 Flujo Radial en Yacimientos Naturalmente Fracturados.

La solución del flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos naturalmente fracturados está dada por:

$$\overline{C}_{fD}\left(r_D, s\right) = \frac{1}{s} e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}} \left[\frac{Ai\left(\dfrac{r_D \beta(s) + 1/\left(4\alpha_D^2\right)}{\left(\beta(s)\right)^{2/3}}\right)}{Ai\left(\dfrac{\beta(s) + 1/\left(4\alpha_D^2\right)}{\left(\beta(s)\right)^{2/3}}\right)}\right] \tag{5-26}$$

donde la función de transferencia fractura-matriz en el espacio de Laplace es:

a) Para una geometría matriz-fractura estratificada (fracturas horizontales):

$$\beta(s) = \frac{\sqrt{m(s)}}{\alpha_D \sigma_D}\left[\frac{tanh(\sqrt{m(s)} z_{DH}) - tanh(\sqrt{m(s)} z_{Df})}{1 - tanh(\sqrt{m(s)} z_{Df}) tanh(\sqrt{m(s)} z_{DH})}\right] + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + \phi_{sf} s + \frac{\left[1 - \phi_f\right] M_{fD} s}{M_{fD} + \alpha_D s} \tag{5-27}$$

donde:

$$m(s) = \frac{1}{D_{mD}}\left[\frac{[1-\phi_{sm}]M_{mD}s}{M_{mD}/\alpha_D + s} + \phi_{sm}\alpha_D s + \lambda_D\right]$$

b) Para una geometría de matriz fractura cúbica:.

$$\beta(s) = \frac{6\phi_m D_{mD}\sqrt{m(s)}}{\alpha_D\left[z_{DH}+z_{Df}\right]\phi_f}\left[coth(z_{DH}\sqrt{m(s)}) - \frac{1}{z_{DH}\sqrt{m(s)}}\right] + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + \phi_f s + \frac{\left[1-\phi_{sf}\right]M_{fD}s}{M_{fD}+\alpha_D s} \quad (5\text{-}28)$$

donde:

$$m(s) = \frac{1}{D_{mD}}\left[\frac{[1-\phi_{sm}]M_{mD}s}{M_{mD}/\alpha_D + s} + \lambda_D + \phi_m\alpha_D s\right]$$

Con los valores de la inversión numérica se generaron las curvas tipo para la fractura y la matriz, las que se construyeron con los grupos adimensionales $C_{fD}(r,t_D)$ vs $\left((r_D^{3/2}-1)/t_D\right)$. A las curvas tipo generadas se ajustaron los datos del campo Ekofisk para determinar los parámetros de interés práctico en la inyección de fluidos. Adicionalmente se determinó una técnica de graficar los datos medidos en campo, basada en esta solución analítica aproximada, la cual también permite la estimación de la dispersividad adimensional de parámetros físicos del yacimiento.

5.2. INTERPRETACIÓN UTILIZANDO EL INVERSO DE LA FUNCIÓN ERROR.

Este método se desarrolló siguiendo la metodologia de Brigham, quien la aplicó en yacimientos para flujo lineal de trazadores químicos en yacimientos homogéneos (Brigham, 1974) y en estratificados (Correa, Pande, Ramey y Brigham: 1987), es este trabajo se propone extenderla para el flujo radial de trazadores radiactivos en yacimientos homogéneos y naturalmente fracturados.

5.2.1. Flujo Radial en Yacimientos Homogéneos.

La solución del flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos homogéneos (ec):

$$C_D(r_D,t_D)= F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+U(r_D)erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad (5\text{-}29)$$

Donde:

$$F(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \quad ; \qquad U(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}$$

Para valores de dispersividad adimensional menores de 0.01 (ver figura 1) el segundo término de la solución es despreciable con respecto al primer término por lo que se reduce a:

$$C_D(r_D,t_D) = F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad (5\text{-}30)$$

Para valores de dispersividad adimensional grandes el segundo término de la solución no es despreciable comparado con el primero.

La solución en términos de la función error es:

$$\frac{C_D(r_D,t_D)}{F(r_D)} = 1-erf\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right) \quad (5\text{-}31)$$

Despejando el argumento de la función error :

$$\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}} = erf^{-1}\left(1-\frac{C_D(r_D,t_D)}{F(r_D)}\right) \quad (5\text{-}32)$$

Evaluando (4-26) en el pozo productor:

$$\frac{\left[r_{Dp}^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}=erf^{-1}\left(1-\frac{C_D\left(r_{Dp},t_D\right)}{F(r_{Dp})}\right) \qquad (5\text{-}33)$$

donde:

$$F\left(r_{Dp}\right)=\frac{e^{\frac{r_{Dp}-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_{Dp}}}e^{-\frac{2\left[r_{Dp}^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}$$

Utilizando diferentes valores de la constante de dispersividad se construye una gráfica de:

$$\frac{\left[r_{Dp}^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3t_D\sqrt{\lambda_D}} \quad vs \quad erf^{-1}\left(1-\frac{C_D\left(r_{Dp},t_D\right)}{F\left(r_{Dp}\right)}\right)$$

Para verificar condiciones de flujo radial la gráfica debe mostrar una pendiente unitaria.

Dado que se conoce el valor de la constante de decaimiento adimensional, por ensaye y error se determina la dispersividad adimensional, utilizando la ecuación siguiente (que se obtuvo de arreglar la ecuación anterior) y utilizando los datos después de la irrupción de trazador:

$$\alpha_{Dcalc}=\frac{1}{\lambda_D}\left(\frac{\left[r_{Dp}^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\alpha_{Dsup}}\,erf^{-1}\left(1-2\sqrt[4]{r_{Dp}}\,e^{\frac{2\left[r_{Dp}^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_{Dsup}}}\sqrt{\lambda_D}-\frac{r_{Dp}-1}{2\alpha_{Dsup}}}C_D\left(r_{Dp},t_D\right)\right)}{3t_D}\right)^2 \qquad (5\text{-}34)$$

5.2.2. Flujo Radial en Yacimientos Naturalmente Fracturados.

Interpretación Tipo Bourdet

Substituyendo la definición de la función error en la ec. 40:

$$C_D\left(r_D,t_D\right)=F\left(r_D\right)\left[\int_{\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}}^{\infty} e^{-u^2}\,du+U\left(r_D\right)\int_{\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}}^{\infty} e^{-u^2}\,du\right] \qquad (43)$$

Derivando la Ec. 43 respecto al tiempo adimensional utilizando la regla de Leibnitz:

$$\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}=F(r_D)\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D}}t_D^{-3/2}+\frac{\sqrt{\lambda_D}}{\sqrt{t_D}}^{-1/2}\right]e^{-\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2}\frac{U(r_D)}{2}\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D}}t_D^{-3/2}-\frac{\sqrt{\lambda_D}t_D^{-1/2}}{\sqrt{t_D}}\right]e^{-\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2}t_D^{-3/2}\right] \qquad (44)$$

Aplicando los conceptos de Bourdet[5] para agrupar variables:

$$t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}=-\frac{F(r_D)}{2}\left[\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D}}+t_D\sqrt{\lambda_D}\right]e^{-\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2}-U(r_D)\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D}}-t_D\sqrt{\lambda_D}\right]e^{-\left(\frac{r_D^{3/2}-1+3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2}\right] \qquad (45)$$

Definiendo la función siguiente:

$$g(r_D)=\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D}} \qquad (46)$$

Substituyendo la Ec. 46 en la Ec. 45:

$$t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}=\frac{F(r_D)}{2}\left[\left[-g(r_D)-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_D}t_D\right]e^{-\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2}+U(r_D)\left[g(r_D)+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_D}t_D\right]e^{-\left(\frac{r_D^{3/2}-1+3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2}\right] \qquad (47)$$

Como es más grande el primer término que el segundo dentro del corchete (debido a que el argumento de la exponencial es mayor, se desprecia el segundo término, resultando:

$$t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}=F(r_D)\left[\frac{t_D\sqrt{\lambda_D}}{2}-g(r_D)\right]e^{-\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2} \qquad (48)$$

Aplicando el logaritmo natural:

$$\ln\left(t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right)=\ln\left(F(r_D)\left[\frac{t_D\sqrt{\lambda_D}}{2}-g(r_D)\right]\right)-\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\lambda_D\alpha_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)^2 \tag{49}$$

Se define la función siguiente:

$$H(r_D,t_D)=F(r_D)\left[g(r_D)-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_D}t_D\right] \tag{50}$$

Transformando a logaritmo en base diez:

$$\log_{10}\left(t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right)=-\frac{1}{18.27\alpha_D}\left(\frac{r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}}{\sqrt{t_D}}\right)^2+\log_{10}(H(r_D,t_D)) \tag{51}$$

La Ec. 51 tiene la forma de la ecuación de recta en una gráfica doble logarítmica de:

$$t_D^{3/2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} \quad vs \quad \frac{\left(r_D^{3/2}-1-3t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}\right)^2}{t_D} \tag{52}$$

Se tendría que suponer un valor de la dispersividad adimensional, α_D y la que presente un la relación lineal anterior será el valor correcto.

La pendiente está dada por:

$$m=\frac{1}{18.27\alpha_D} \tag{53}$$

La ordenada al origen:

$$b=\log_{10}(H(r_D,t_D)) \tag{54}$$

Se obtiene el parámetro de dispersividad para flujo radial:

$$\alpha_D=\frac{1}{18.27m} \tag{55}$$

Aplicando el antilog a la Ec. 54

$$10^b=H(r_D,t_D) \tag{56}$$

Substituyendo las Ecs. 42 y 47 en 51 y la resultante en la Ec. 56:

$$10^b=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D}}}\left[\frac{r_D^{3/2}-1}{3\sqrt{\alpha_D}}-\frac{1}{2}t_D\sqrt{\alpha_D\lambda_D}\right] \tag{57}$$

Rearreglando se tiene una ecuación implícita en la cual utilizando el valor de α_D, se obtiene un valor de r_D conocido t_D o viceversa.

Interpretación Tipo Brigham

Si en la solución expresada por medio de la Ec.40 el primer término es mucho mayor que el segundo:

$$C_D(r_D,t_D) = F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2} - 1 \right] - 3t_D\sqrt{\alpha_D \lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}} \right) \right] \tag{58}$$

Expresando la Ec. 58 en términos de la función error:

$$\frac{C_D(r_D,t_D)}{F(r_D,\alpha_D)} = 1 - erf\left(\frac{\left[r_D^{3/2} - 1 \right] - 3t_D\sqrt{\alpha_D \lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}} \right) \tag{59}$$

Despejando el argumento de la función error para obtener los grupo para graficar:

$$\frac{\left[r_D^{3/2} - 1 \right] - 3t_D\sqrt{\alpha_D \lambda_D}}{3t_D\sqrt{\alpha_D}} = erf^{-1}\left(1 - \frac{C_D(r_D,t_D)}{F(r_D} \right) \tag{60}$$

De la Ec. 60 se observa que la gráfica de $\frac{\left[r_D^{3/2} - 1 \right] - 3t_D\sqrt{\beta_D \lambda_D}}{3t_D\sqrt{\lambda_D}}$ vs $erf^{-1}\left(1 - \frac{C_D(r_D,t_D)}{F(r_D)} \right)$ presenta una pendiente unitaria para condiciones de flujo radial.

Ejemplos de aplicación

La constante de dispersividad se utiliza como parámetro de ajuste en simulación de flujo de trazadores radiactivos en medios porosos, el valor obtenido puede utilizarse para disminuir el número de corridas.

La solución de flujo radial es igual a la solución de flujo lineal[10] multiplicada por una función del radio y dispersividad adimensional.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

El propósito de esta tesis ha sido el desarrollar una herramienta que permita la obtención de parámetros de flujo básicos del yacimiento a través de la solución del problema inverso, lo cual permite mejorar la caracterización de dicho yacimiento y geometrías de flujo utilizando trazadores radiactivos. En esta tesis se presentaron cuatro modelos matemáticos para la interpretación de pruebas de trazadores radiactivos.

Con base en los resultados de este trabajo, se pueden establecer las conclusiones siguientes:

1. Los modelos consideran los mecanismos de transferencia de masa más importantes que influyen en el flujo de un trazador radiactivo: a traves de medios porosos y fracturados, dispersión, convección, difusión, adsorción, volumen poroso inaccesible y decaimiento radiactivo.
2. Se consideran los casos de inyección continua, bache e instantánea del trazador.
3. Se obtuvieron soluciones analíticas a tiempos cortos y largos para yacimientos homogéneos y naturalmente fracturados, las cuales se emplearon para interpretar la respuesta del trazador y determinar un valor medio "in situ" representativo del coeficiente de dispersión en el yacimiento mismo.
4. Se presentó una metodología de validación de las soluciones obtenidas.
5. Se presentaron los grupos adimensionales que permitan graficar la concentración adimensional y su derivada.
6. Se desarrolló una curva tipo para la interpretación de pruebas de inyección continua de trazadores radiactivos, en función de los grupos adimensionales

$t_D^{3/2} \frac{\partial C_D(r_{Dp}, t_D)}{\partial t_D}$ contra $\frac{\left(r_D^{3/2} - 1\right)^2}{t_D}$ para diferentes constantes de decaimiento.

7. Las soluciones utilizando los resultados de la inversión numérica para flujo radial son obtenidas con el algoritmo de inversión Crump, y permiten describir el flujo de un trazador en yacimientos naturalmente fracturados, utilizando dos parámetros para determinar la fracción de desplazamiento de fluido en las fracturas con respecto al volumen total (matriz y fracturas, así como el contraste de dispersión entre matriz y fracturas.
8. La combinación de las técnicas de interpretación utilizando curvas tipo, soluciones analíticas aproximadas y soluciones por inversión numérica permite mejorar la caracterización del yacimiento obtenida por medio de una prueba de inyección de trazadores.
9. Se aplicó la técnica de interpretación a dos casos, uno para yacimientos homogéneos en los que se usaron los datos del campo Brassey de Canadá y en el otro para un yacimiento naturalmente fracturado usando los datos del Campo Ekofisk de mar del Norte, cada con su correspondiente modelo.
10. De casos de campo consultados se observó que se requiere extender el modelo de flujo lineal con fracturas verticales y paralelas, como el del campo Jujo, así como desarrollar modelos de flujo elíptico, con objeto de contemplar casos que se presentan en campos mexicanos de gran relevancia.

NOMENCLATURA

a = constante de inyección radial en el medio, L^2/T.
A = área transversal expuesta al flujo, L^2.
b = exponente de cementación, adim.
C_s = concentración del trazador en la zona estancada.
$C_s(x,t)$ = concentración en la región estancada, mol/L^3.
$C(x,t)$ = concentración "in situ" del trazador en un punto x a un tiempo t, mol/L^3.
$C(r,t)$ = concentración de trazador en el yacimiento, mol/L^3.
C_i = concentración de referencia, mol/L^3.
D = coeficiente de dispersión promedio, que engloba los efectos de las fluctuaciones por
difusión y por dispersión mecánica debido al flujo, L^2/T.
D_o = coeficiente de difusión molecular, L^2/T.
D_{oe} = coeficiente de difusión molecular efectivo, L^2/T.
D_a = coeficiente de difusión aparente, L^2/T.
D_t = coeficiente de difusión en la zona estancada, L^2/T.
dA = elemento de área, L^2.
d_p = diámetro del grano, L.
F = factor de formación, adim.
h = espesor de la formación, L.
H = altura característico del bloque de matriz, L.
h_f = mitad del ancho de la fractura,L.
$\vec{J}_D$ = densidad de corriente por difusión, M/L^2T.
K_d = coeficiente de adsorción en la roca, L^3/M.
K = coeficiente de transferencia de masa en el fenómeno de adsorción, 1/L.
k_m = coeficiente de distribución en la matriz (masa de soluto adsorbido por la concentración de
soluto en solución), L^3/M.
L = longitud del yacimiento, L.
M = coef. de transferencia de masa entre las regiones móvil y estancada, 1/T.
N = número de núcleos de la especie radiactiva al tiempo t.
N_o = número original de núcleos de la especie radiactiva al tiempo $t = 0$.
N_{pe} = número de Péclet, uL/D, adim.
N_{Da} = número de Damköler, LM/u (coeficiente de transferencia de masa).
n = número de granos por cada unidad de volumen total, L^3/L^3.
P = fracción del total de adsorción en la región móvil.
q_i = gasto volumétrico de inyección en el medio poroso, L^3/T.
r = radio, L.
t = tiempo de inyección, T.
t_{vm} = vida media del trazador radiactivo, T.
u = velocidad intersticial o microscópica, L/T.
V_f = volumen de espacio poroso ocupado por macroporos, L^3.
V_s = volumen de espacio poroso ocupado por microporos en los poros esféricos, L^3.
V_t = volumen total, L^3.

V_p = volumen de poros conectados, L^3.

V_a = volumen adsorbido, L^3.

$V_{p\,inacc}$ = volumen poroso inaccesible, L^3.

v = velocidad microscópica promedio, L/T.

v_f = velocidad macroscópica en el medio, L/T.

v = velocidad microscópica, L/T.

v = velocidad promedio, L/T.

$\hat{n}$ = vector normal unitario.

1-f = fracción del volumen estancado, adim.

Símbolos griegos

λ = constante de decaimiento radiactivo, $^1/T$.

α = constante de dispersividad en el medio, L.

ϕ = porosidad, adim.

ζ = factor de empacamiento o de inhomogeneidad, adim.

$\Delta\phi$ = cambio de porosidad, adim.

ρ_b = densidad promedio de la matriz, M/L^3.

λ = constante de decaimiento radiactivo, 1/T.

δ = espesor de película muy delgada de fluido estancado, L.

Subíndices

D = adimensional

fl = fluyente

f = fractura

m = matriz

mf = matriz-fractura

L = lineal

r = radial

s = en la zona estancada

t = efectiva al trazador

W= pozo.

1. Abbaszadeh, M. y Brigham, W. E., 1981: ***Computation of Tracer Production Curves for Various Flooding Patterns***, Annual Heavy Oil/EOR Contractor Reports-Proceedings CONF-810718 (julio 28-30), San Francisco, CA.
2. Abbaszadeh, M., 1982: ***Analysis of Unit Mobility Ratio Well to Well Tracer Flow to Determine Reservoir Heterogeneity***, tesis doctoral, Stanford University, C. A. (agosto), SPE 10760.
3. Abbaszadeh, M. y Brigham, W. E., 1984: ***Analysis of Well to Well Tracer Flow to Determine Reservoir Layering***, JPT (octubre), pp. 1753-1762.
4. Abbaszadeh, M. y Brigham, W. E., 1987: ***Tracer Testing for Reservoir Description***, JPT, pp. 519-527.
5. Abramowitz, M. y Stegun, I. A., 1972: ***Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables***, Dover Publications, New York, pp. 438 y 450.
6. Aguilera, R., 1980: ***Naturally Fractured Reservoirs***, Penn Well Books, Tulsa, Oklahoma.
7. Anderson, J. H., Laurie R. A., Loder, W. R. y Kennedy P., 1992: ***Brassey Field Miscible Flood Management Program Features Innovative Tracer Injection***, SPE 24874.
8. Baker, L. E., 1977: ***Effects of Dispersion and Dead-End Pore Volume in Miscible Flooding***, SPEJ (junio), pp. 219-227, Trans. AIME 263.
9. Baldwin, D. E. Jr., 1966: ***Prediction of Tracer Performance in Five Spot Pattern***, JPT (abril), pp. 513-517.
10. Barenblantt, G. I., Zheltov, Iv. P., y Kochina, I. N., 1960: ***Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks***, Journal Applied Mathematical and Mechanics, 24 (5), pp. 1286-1303.
11. Bayar, M. y Okandan, E., 1987: ***Tracer Flow in a Fractured Geothermal Reservoir Model***, Proceeding 12 Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, Stanford, CA., Enero 20-22, SGP-TR-109.
12. Bear, J., 1972: ***Dynamics of Fluids in Porous Media***, Elsevier Science, N. Y.
13. Bear, J., 1979: ***Hidraulics of Groundwater***, McGrawHill, New York.
14. Bender, C. M. and Orzag, S. A., 1978: ***Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers***, McGrawHill Book Company, USA.
15. Bentsen, R. G. y Nielsen, R. F., 1965: ***A Study of Plane, Radial Miscible Displacement in a Consolidated Porous Medium***, SPEJ (marzo).
16. Boulton, N. S., 1973: ***The influence of Delayed Drainage on Data from Pumping Test in Uncofined Aquifers***, Journal of Hydrology, vol. 19, pp. 157-169.
17. Boulton, N. S. y Streltsova, T. D., 1977: ***Unsteady Flow to a Pumped Well in a Fissured Water Bearing Formation***, Journal of Hydrology, vol. 35, pp. 257-269.

18.Boulton, N. S. y Streltsova, T. D., 1977: ***Unsteady Flow to a pumped Well in a Two-Layered Water Bearing Formation,*** Journal of Hydrology, vol 35 pp. 245-256.

19.Bowman, R. S. y Rice, R. C., 1986: ***Transport of Conservative Tracers in the Field Under Intermittent Flood Irrigation;*** Water Resources Research, vol. 22, pp. 1531-1536.

20.Breitenbach, K. A., 1982: ***Chemical Tracer Retention in Porous Media***, Stanford Geothermal Program, SGP-TR-53 (mayo), Stanford C. A.

21.Brigham, W. E., Reed, P. W. y Dew, J. N., 1961: ***Experiments on Mixing During Miscible Displacement in Porous Media***, SPEJ (marzo), Trans. AIME, 222, pp. 212-214.

22.Brigham, W. E. y Smith, D. H., 1965: ***Prediction of Tracer Behavior in a Five-Spot Flow,*** JPT (abril), pp. 513-517. SPE 1130.

23.Brigham, W. E., 1973: ***Mixing Equations in Various Geometries***, SPE 4585, 48 th Annual Fall Meeting of SPE of AIME, Las Vegas, Nevada, sep 30-oct. 3.

24.Brigham, W. E., 1974: ***Mixing Equations in Short Laboratory Cores,*** Trans. AIME 257, pp. 91.

25.Brigham, W. E. y Abbaszadeh, M., 1987: ***Tracer Testing for Reservoir Description,*** JPT (mayo), pp. 519-527.

26.Bromwich, T. J., 1942: ***An Introduction to the Theory of Infinite Series***, McMillan, New York.

27.Brown, S. L. y Brigham, W. E., 1981: ***Further Results Determining Permeability and Thickness for Multilayer Five Spot Tracer Test,*** US DOE Report ET/205-70, SUPRI TR-17.

28.Burwell, E. L., 1966: ***Multiple Tracers Establish Waterflood Flow Behavior***, Oil and Gas Journal (noviembre), pp. 76.

29.Carslaw, H. S. y Jaeger, J. C., 1959: ***Conduction of Heat in Solids***, Clarendon Press, Oxford University. London, 2nd Ed, (1a. ed. 1946).

30.Carvalho, R. S., Redner, R. A., Thompson, L. G., y Reynolds, A. C., 1992: ***Robust Procedures for Parameter Estimation by Automated Type-Curve Matching***, paper SPE 18161 presented at 63rd Annual Technical Conference and Exhibition, Washington, D. C., October 4-7.

31.Calhoun, T. G. y Hurford, T., 1970: ***Case History of Radioactive Tracers and Techniques in Fairway Field***, JPT, pp. 1217-1224.

32.Caudle, B. H. y Witte, M. D., 1959: ***Production Potential Changes During Sweep Out in a Five Spot System***, Trans. AIME 216.

33.Chase, C. A., 1971: ***Finite Element Analysis of Single Well Back Flow Tracer Test in a Homogeneous Reservoir,*** SPE 3485, New Orleans (octubre 3-6).

34.Chen, C. S., 1985: *Analytical and Approximate Solutions to Radial Dispersion from an Injection Well to a Geological Unit with Simultaneous Diffusion into Adjacent Strata,* Water Resources Research (agosto), vol. 21, No. 8, pp. 1069-1076.

35.Chen, C. S., 1986: ***Solutions for Radionuclide Transport from an Injection Well into a Single Fracture in a Porous Medium***, Water Resources Research (abril), Vol. 22, pp. 508-518.

36.Chen, C. S., 1987: ***Analytical Solutions for Radial Dispersion with Cauchy Boundary at Injection Well,*** Water Resources Research (julio), Vol. 23, No. 7 1217-1224.

37.Chen, C. S., 1987: ***Comment on: Effect of Radial Flow on Deviations From Local Equilibrium During Sorbing Solute Transport Through Homogeneous Soils,*** by A. J. Valocchi, Water Resources Research, Vol. 23, Nov. 7, pp. 2157.

38.Chen, C. S. y Woodside, G. D., 1988: ***Analytical Solution for Aquifer Decontamination by Pumping,*** Water Resources Research (agosto), Vol. 24, No. 8, pp. 1329-1338.

39.Cheung, S., Edwards, y Howard, J., 1999: ***A Novel Approach to Interwell Tracer Design and Field Case History,*** SPE 56610.

40.Chrien, E. R., 1972: ***Focus on Physics Nuclear Physics***, McGraw-Hill.

41.Clenshaw, C.W. y Curtis, A. R., 1960: ***A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer,*** Num. Math., Vol. 12, pp. 197-205.

42.Coats, K. H. y Smith, B. D., 1964: ***Dead-End Pore Volume and Dispersion in Porous Media***, SPEJ (marzo), pp. 73-84.

43.Collins, R. E., 1961: ***Flow of Fluids through Porous Media***, Reinhold Publishing Corp.

44.Correa, A. C., Pande, K. K., Ramey, H. J. Jr y Brigham, W. E., 1990: ***Computation and Interpretation of Miscible Displacement Performance in Heterogeneous Porous Media***, SPERE (febrero).

45.Correa, A. C., Pande, K. K., Ramey, H. J. Jr y Brigham, W. E., 1987: ***Prediction and Interpretation of Miscible Displacement Performance Using Transverse Matrix Diffusion Model***, SPE 16704.

46.Craig, F. F., 1971: ***The Reservoir Engineering Aspects of Water Flooding***, Monograph Series, SPE, Richardson, Tex.

47.Craig, F. F., 1985: ***Field Use of Halogen Compounds to Trace Injected*** CO_2, SPE 14309.

48.Crump, K. S., 1976: ***Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation,*** Journal of the Association of Computing Machinery (enero), Vol. 23, No. 1, pp. 89-96.

49.Dagan, G., 1971: ***Perturbations Solutions of the Dispersion Equation in Porous Media***, Water Resources Research, vol. 11, No 3, pp. 135-142.

50.Datta Gupta, A., Lake, L. W., Pope, G. A.y King, M. J., 1995: *A Type-Curve Approach to Analyzing Two-Well Tracer Tests*, SPEFE (marzo).

51.Dawson R. y Lanz, R., 1972: ***Inaccesible Pore Volume in Polymer Flooding***, SPEJ (octubre), pp. 448-452.

52.Davies, B. y Martin, B., 1979: ***Numerical Inversion of the Laplace Transform: A Survey and Comparison of Methods***, Journal of Computational Physics (octubre), vol 33, pp. 1-32.

53.Davies, J. A., Blair, R. K. y Wagner, O. R., 1976: ***Monitoring and Control Program for a Large Scale Miscible Flood,*** SPE 6097, New Orleans, oct 3-6.

54.Deans, H. A., 1963: ***A Mathematical Model for Dispersion in the Direction of Flow in Porous Media,*** SPEJ (marzo), vol. 1, pp. 49-52.

55.D Hooge, J. A., Sheely, C. y Williams, B. J., 1981: ***Interwell Tracers - An Effective Reservoir Evaluation Tool: West Sumatra Field Results***, JPT (mayo).

56.Dogru, A. H., Dixon, T. N. y Edgar, T. F., 1977: ***Confidence Limits on the Parameters Predictions of Slightly Compressible, Single-Phase Reservoirs***, S P E J. (Feb) 42-56.

57.Dyes, A. B., Caudle, B. H. y Erickson, R. A., 1954: ***Oil Production after Breakthrough as Influenced by Mobility Ratio,*** Trans. AIME 201.

58.Falade, G. K. y Brigham, W. E., 1989: ***Analysis of Radial Transport of Reactive Tracer in Porous Media,*** SPERE (febrero), pp. 85-90.

59.Flag, A. H., y asoc., 1954: ***Radioactive Tracers in Oil Production Problems***, Petroleum Branch of AIME paper number 424-G (Fall Meeting, Petroleum Branch, of AIME, San Antonio.

60.Fossum, M. P., 1984: ***Tracer Analysis in a Fractured Geothermal Reservoir: Field Results from Wairakei, New Zaeland***, Stanford Geothermal Program, SGP-TR-56, Stanford, CA, Junio.

61.Fossum, M. P., Horne, R. N., 1982: ***Interpretation of Tracer Return Profiles at Wairekei Geothermal Field Using Fracture Analysis***, Geothermal Resources Council, Transactions 6.

62.Freeze, J. A. y Cherry, J. F., 1979: ***Groundwater***, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. Y.

63.Gershon, N. D. y Nir, A., 1969: ***Effects of Boundary Conditions of Models on Tracer Distribution in Flow through Porous Media***, Water Resources Research (agosto), pp. 830-839.

64.Gómez, R., O., 1981: ***A Conciliatiory Porosity Exponent Relationships Its Aplication to Practical Well Log Analysis,*** Trans. 22th Annual Symposium of SPWLA, pp. 1-19.

65.Gómez, R. O., 1976: ***A Practical Method for Determining Cementation Exponents and some other Parameters as and Aid in Well Log Analysis,*** The Log Analyst (sep-oct.) pp. 8-24.

66.Ghori, S. G. y Heller, J. P., 1992: *The Use of Well to Well Tracer Tests to Determine Geostatiscal Parameters of Permeability*, SPE/DOE 24138.

67.Gringarten, AC Borgess, TM. Viturat Pelisser y Aubry M., 1981: ***Evaluating Fissured Formatión Geometryc from Well Test Data: A Field Example***, Paper SPE 1018.

68.Greenkorn, R. A., 1962: *Experiments Study of Waterflood Tracers*, JPT (enero). Trans. AIME 225 pp. 87-92.

69.Grisak, G. E. y Pickens, J. F., 1980: ***Solute Transport through Fractured Media 1. The Effect of Matrix Diffusion,*** Water Resources Research, vol. 16, No. 4, pp. 719-730.

70.Grisak, G. E. y Pickens, J. F., 1981: ***An Analytical Solution for Solute Transport through Fractured Media with Matrix Diffusion***, Journal of Hydrology, vol. 52, pp. 47-57.

71.Grisak, G. E., Pickens, J. F. y Cherry, J. A., 1980: ***Solute Transport through Fractured Media 2, Column Study of Fractured Till,*** Water Resources Research (abril), vol. 16, pp. 731-739.

72.Grove, D. B. y Beetem, W. A., 1971: ***Porosity and Dispersion Constant Calculations for a Fractured Carbonate Aquifer Using the Two-Well Tracer Method***, Water Resources Research, vol. 7, No. 1, pp. 128-134.

73.Guvansen, V. y Guvansen, V. M., 1987: ***An Approximate Semianalytical Solution for Tracer Injection Tests in a Confined Aquifer with a Radially Converging Flow Field and Finite Volume of Tracer and Chase Fluid,*** Water Resources Research (agosto), Vol. 23, No. 8, pp. 1607-1619.

74.Guven, O., Falta, R. W., Molz, F. J. y Melville, J. G., 1985: ***Analysis and Interpretation of Single-Well Tracer Test in Stratified Aquifers,*** Water Resources Research (mayo), vol. 21, No. 5, pp. 676-684.

75.Halevy, E. y Nir, A., 1962: ***The Determination of Aquifer Parameters with the Aid of Radioactive Tracers,*** Journal Geophysical, vol. 67, No. 6, pp. 2403-2409.

76.Harvey, C. F., Haggerty, R. y Goralick, S. M., 1994: ***Aquifer Remediation: A Method for Estimating Mass Transfer Rate Coefficients and An Evaluation of Pulsed Pumping,*** Water Resources Research, vol. 30, No. 7, pp. 1979-1991.

77.Heisler, R. P., 1986: ***Interpretation of Radioactive Tracer Results in a Stemdrive Project,*** SPE 15092.

78.Heller, J. P., 1972: ***Observations of Mixing and Diffusion in Porous Media***, Proceeding of the second Symposium Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, IAHR/ISSS, pp. 1-26, Ontario, Canada.

79.Heller, J. P., 1966: ***Onset of Instability Pattern between Miscible Fluids in Porous Media***, Journal Appl. Phys., vol. 36.

80.Heller, J. P., 1986: ***Tracer Distribution in Radial Flow Mobility Control for CO_2 Injection***, DOE/MC/16426-19 pp. 111-136.

81.Hoopes, J. A. y Harleman, D. R. F., 1967: ***Dispersion in Radial Flow from a Recharge Well,*** Journal Geophysical Research, vol. 72, No. 14, pp.3595-3607.

82.Horne, R. N., 1982: ***Geothermal Reinjection Experience in Japan***, JPT (marzo), pp. 495-503.

83.Horne, R. N. y Rodriguez, F., 1983: ***Dispersion in Tracer Flow in Fractured Geothermal Systems***, Geophysical Research Letters, 10(4), pp. 289-292.

84.Hsieh, P. A., 1986: ***A New Formula for the Analytical Solution of the Radial Dispersion Problem,*** Water Resources Research (octubre), Vol. 22, No. 11, pp. 1597-1605.

85.Hugakorn, P. S., Lester, B. H. y Mercer, J. W., 1983: ***An Efficient Finite Element Technique for Modeling Transport in Fractured Porous Media-1. Single Species Transport,*** Water Resources Research, vol 18, No 3:, pp. 841-854.

86.Hutchins, R. D. y Dovan, H. T., 1991: ***Aqueous Tracers for Oilfield Aplications***, SPE 21049 presentado en el Simposio Internacional en química de campos petroleros, (febrero) Anaheim, CA.

87.Jensen, C. L. y Horne, R. N., 1983: ***Matrix Diffusion and its Effect on the Modeling of Tracer Returns from the Fractured Goethermal Reservoir at Wairakei, New Zealand***, Stanford Geothermal Program, SGP-TR-71 (diciembre), Stanford Ca., pp. 323-324.

88.Kelkar, M. G. y Gupta, S. P., 1988: ***The Effect of Small Scale Heterogeneities on the Efective Dispersivity of Porous Medium***, SPE 17339 presentado en el simposio SPE/EOR, Tulsa, abril 17-20.

89.Kleven, R., Hovring, O., Opdal, S. T., Bjornstad, T., Dugstad, O. y Hudere, I. A., 1996: ***Non -Radioactive Tracing of Injection Gas in Reservoirs***, SPE 35651.

90.Lai, C. H., Bodvarsson, G. S., Tsang, C. F. y Witherspoon, P. A., 1983: ***A New Model for Well Test Data Analysis for Naturally Fractured Reservoirs***, SPE 11688, presentado en la Regional Meeting SPE, Ventura, CA., pp. 23-25.

91.Lagston, E. P. y Shirer, J. A., 1985: ***Performance of Jay/LEC Fields Unit Under Mature Waterflood and Early Tertiary Operations***, JPT (febrero) pp. 261.

92.Long, J.C.S., Remer, J. S., Wilson, C. R. y Witherspoon, P. A., 1982: ***Porous Media Equivalents for Networks of Discontinuous Fractures,*** Water Resources Research, 18,3 pp. 645-658.

93. Leblanc, J. L. y Caudle, B. V., 1971: ***A Streamline Model for Secondary Recovery.*** SPEJ (marzo), pp. 7-12.

94.Maloszewski, P. y Zuber, A., 1985: ***On the Theory of Tracer Experiments in Fissured Rock with Porous Matrix***, Journal of Hydrology, vol. 79, pp. 333-358.

95. McHenry, K.W. y Wilhelm, R.H., 1975: AIChe Journal Vol. 3, 83.

96. Macdonald, J. R., 1964: ***Accelerated Convergence, Divergence, Iteration, Extrapolation, and Curve Fitting,*** Journal Applied Physical (octubre), vol. 35, pp. 3034-3041.

97. Mishra, S., 1987: ***On the Use of Pressure and Tracer Test Data for Reservoir Description***, tesis doctoral, Universidad de Stanford.

98. Mishra, S. y Ramey, H. J., 1990: ***A Comparison of Pressure Transient and Tracer-Concentration-Time Data for Layered Reservoirs Under Injection***, SPEFE, March. pp. 60-66.

99. Moench, A. F. y Ogata, A., 1981: ***A Numerical Inversion of the Laplace Transform Solution to Radial Dispersion in a Porous Medium***, Water Resources Research (febrero), vol. 17, No. 1, pp. 250-252.

100. Moench, A. F. y Ogata, A., 1984: ***A Double Porosity Model for a Fissured Groundwater Reservoir with Fracture Skin***, Water Resources Research, vol. 20, No. 7, pp. 831-846.

101. Montgomery D. 1984: ***Desing and Analysis of Experiments,*** John Wiley and Sons, N. Y.

102. Nanba, T. y Horne, R. N.: ***An improved Regression Algorithm for Automated Well Test Analysis***, SPE 18161 presented at 63rd Annual Technical Conference

103. Neretnieks, I., 1980: ***Diffusion in the Rock Matrix: An Important Factor in Radionuclide Retardation***, Journal Geophysical Research, vol. 85, pp. 4379-4397.

104. Neretnieks, I., Eriksen, T. y Tahtinen, P., 1982: ***Tracer Movement in a Single Fissure in Granitic Rock: Some Experimental Results and their Interpretations***, Water Resources Research, vol. 18, No. 4, pp. 849-58.

105. Nir, A., 1964: ***On the Interpretation of Tritium "Age" Measurements of Groundwater,*** Journal Geophysical Research (junio), vol. 69, No. 12.

106. O'Hara, H. y Smith, F. J., 1969. ***The Evaluation of Definite Integrals by Interval Subdivision***, Computer Jour., 12, pp. 179-182.

107. Ohno, K. y Namba, T., 1985: ***Analysis of an Interwell Tracer Test in a Depleated Heavy Oil Reservoir***, SPE 13672.

108. Pande, K. K., Ramey, H. J. Jr., Brigham, W. E. y Orr, F. M. Jr., 1987: ***Frontal Advance Theory for Flow in Heterogeneous Porous Media***, SPE 16344.

109. Peaceman, D. W. y Rachford, H. H., 1962: ***Numerical Calculation of Multidimensional Miscible Displacement***, SPEJ, pp. 327-339.

110. Perkins, T. K. y Johnston, O. C., 1963: ***A Review of Diffusion and Dispersion in Porous Media***, Trans. AIME, vol. 228, pp. 70-84.

111. Pickens, J. F., Jackson, R. E., Inch, K. J. y Merrit, W. F., 1981: ***Measurement of Distribution Coefficients Using a Radial Injection Dual-Tracer Test,*** Water Resources Research (junio), vol. 17, No. 3, pp. 529-544.

112. Pickens, J. F. y Grisak, G. E., 1981: ***Scale-dependent dispersion in a Hydrogeologic System***, Water Resources Research (dec.), vol. 17, No. 6, pp. 1701-1711.

113.Pirson, S. J., 1963: *Handbook of Well Log Analysis*, Prentice Hall, Ing., Englewood Cuffs, N. Y.

114.Pruess, K., y Bodvarsson, G. S., 1984: ***Thermal Effects of Reinjection in Geothermal Reservoirs, with Major Vertical Fractures***, JPT, pp. 1567-1578.

115.Raimondi, P., Gardner, H. F. y Patrick. C. B., 1959: *Effect of Pore Structure and Molecular Diffusion on the Mixing of Miscible Liquids Flowing in Porous Media*, Preprint 43 presentado en el AIChe-SPE Joint Symposium on Fundamental Concepts of Miscible Displacement, Part II, San Francisco, Cal (Dic. 6-9).

116.Ramírez, S. J., 1988: *Modelo para predecir el Flujo de Trazadores en Yacimientos Naturalmente Fracturados*, tesis presentada para optar por el grado de maestría en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

117.Ramírez, S. J., Rivera, J. y Rodríguez, F., 1988: ***Tracer Flow Model for Naturally Fractured Geothermal Reservoirs.*** Proceeding, 13th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford U., Stanford, Ca., SGP-TR-113, pp. 137-145.

118.Ramírez, S. J., Rivera, R. J., Samaniego, V. F., y Rodríguez, F., 1990: ***A Semi-analytical Solution for Tracer Flow in Naturally Fractured Reservoirs.*** Proceedings, 15th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford, Ca., enero 23-25.

119.Ramírez S. J., Samaniego, V. F., Rivera, R. J. y Rodríguez, F., 1991. ***An Investigation of Radial Tracer Flow in Naturally Fractured Reservoirs,*** Procedings, 16th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford U., Stanford, Ca., Enero 23-25.

120.Ramírez, S. J., 1992: *Flujo de Trazadores en Yacimientos Naturalmente Fracturados*, tesis doctoral, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

121.Ramírez, S. J.y Samaniego, V. F., 1992. *A Cubic Matrix-Fracture Geometry Model for Radial Tracer Flow in Naturally Fractured Reservoirs*, Proceedings 17th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford U., Stanford, Ca., enero 29-31.

122.Ramírez, S. J., Samaniego, V. F., Rivera, R. J. y Rodríguez, F., 1993: ***Flow Tracer in Reservoirs Naturally Fractured.*** SPE 25900.

123.Ramírez, S. J., Samaniego, V. F., Rodríguez, F. y Rivera, R. J., 1995. ***Tracer Test Interpretation in Naturally Fractured Reservoirs***, SPERE (septiembre) pp. 186-192.

124.Ramírez, S. J., Samaniego, V. F., Rodríguez, F. y Rivera, R. J., 1994. ***An Inverse Problem Solution to the Flow of Tracers in Naturally Fractured Reservoirs***. Proceedings Nineteenth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford U., Stanford, Ca., enero 18-20.

125.Rasmuson, A., 1985. ***Analysis of Hydrodynamic Dispersion in Discrete Fracture Networks Using the Method of Moments***, Water Resources Research, vol. 21, No. 11, pp. 1677-1683.

126.Rivera, R. J. y Ramírez, S. J., 1987: ***Parallel Fractures Model for Interpretation of Tracer Test Response through Naturally Fractured Geothermal Reservoirs***. Proceedings, Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford U., Stanford, Ca., December.

127.Rivera, R. J., Ramírez, J. y Rodríguez, F., 1987: ***Parallel Fractures Model for Tracer Flow through Geothermal Reservoirs. Preliminary Results***, Proceedings, 12th Worshop Geo thermal Reservoir Engineering, Stanford U, Stanford, Ca., Enero 20-22, SGP-TR-109.

128.Rivera, R. J., Vides, A. R., Cuéllar, G., Samaniego, V. F. y Neri, G.I., 1983: ***A Status Report on the Exploration Conditions of the Abuchapan Geothermal Field***, Memorias 9th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford, Ca. Dic.

129.Rosenbrock, H. H., 1960. ***An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function***. Computer Journal, 3, 175-1984.

130.Saidi, A. M., 1987: ***Reservoir Engineering of Fractured Reservoirs***, Total Edition Press, París.

131. Sauty, J. P., 1980: ***Analysis of Hydrodispersive Transfer in Aquifers***, Water Resources Research (febrero), pp. 145-158.

132.Skilbrei, O. B., Hallenbeck, L. D. and Sylte, J. E., 1990: ***Comparison and Analysis of Radioactive Tracer Injection Response with Chemical Water Analysis Into the Ekofisk Formation Pilot Waterflood***, SPE 20776.

133. Hallenbeck, L. D., Sylte, J. E., 1990: ***Pilot Waterflooding***.

134. Smith, D. H. y Brigham, W. E., 1965: ***Field Evaluation of Waterflooding Tracers in a Five Spot***, Producers Monthly (agosto).

135. Stehfest, H., 1970: ***Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms***. Communications of the ACM, Vol. 13, Enero, pp. 47-49.

136. Stephenson, D., Paling, W. A. J. y de Jesús, A.S.M., 1989: ***Radioatracer Dispersion Tests in a Fissured Aquifer***. J. of Hydrol., 110, pp. 253-164.

137. Sudicky, E. A., 1986: ***A Natural Gradient Experiment on Solute Transport in Sand Aquifer: Spatial Variability of Hydraulic Conductivity and its Role in the Dispersion Process***, Water Resources Research, vol. 22, pp. 2069-2082.

152.Walkup, G. W. y Horne, R. N., 1985: ***Characterization of Tracer Retention Processes and their Effect on Tracer Transport in Fractured Geothermal Reservoirs***, SPE 13610, presented at California Regional Meeting, Bakersfield, Ca., marzo 27-29.

153.Warren, J. E. y Price, H. S., 1961: ***Flow in Heterogeneous Porous Media***, SPEJ, pp. 153-169, Trans., AIME, Vol. 231.

154.Warren, J. E. y Root, P. J., 1963: ***The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs***, SPEJ (septiembre), pp. 245-255; Trans., AIME, Vol. 228.

155.Weber, K. J. y Baker, M., 1981: ***Fracture and Vuggy Porosity***, SPE 10332, presented at 56th Annual Fall Technical Conference.

156.Willhite, G. P., 1986: ***Waterflooding***, Texbook Series, SPE, Richardson, TX, 3.

157.Wood, K. N., Lai, F. S. and Heacock, D. W., 1989: ***Water Tracing Enhances Miscible Pilot***, SPE 19642, presented at the Technical Conference, San Antonio, Texas, October 8-11.

158.Yuen, D. L., Brigham, W. E. y Cinco, L. H., 1979: ***Analysis of Five Spot Tracer Tests to Determine Reservoir Layering***, U. S. DOE report SAW 1265-8, Washington, D. C.

138. Shinta, A. y Kazemi H. 1993: ***Tracer Transport in Characterization of Dual Porosity Reservirs,*** paper SPE 26636 presentado en el SPE Annual Technical Conference and exhibition, Houston, Texas 3-6 October.

139. Tang, D. H. y Babu, D. K., 1979: ***Analytical Solution of a Velocity Dependent Dispersion Problem***, Water Resources Research (diciembre), vol. 15, No. 6, pp. 1471-1478.

140. Tang, D. H., Frind, E. O. y Sudicky, E. A., 1981: ***Contaminant Transport in Fractured Porous Media: Analytical Solution for a Single Fracture***, Water Resources Research (junio), Vol. 17, No. 3, pp. 555-564.

141. Tang, D. H. y Peaceman, D. W., 1987: ***New Analytical and Numerical Solutions for the Radial Convection-Dispersion Problem***, SPERE, pp. 343-359, agosto.

142. Tester, J. N., Bivens, R. L. y Potter, R. M., 1982: ***Interwell Tracer Analysis of a Hydraulically Fractured Granitic Geothermal Reservoir***, SPEJ., vol. 22, 537-545.

143. Tomich, J. F. y asoc. 1973: ***Single Well Tracer Method to Measure Residual Oil Saturation,*** JPT (febrero), pp. 211-218.

144. Van Genuchten, 1981: ***Non-Equilibrium Transport Parameters from Miscible Displacement Experiments,*** United States Department of Agriculture Science and Education Administration, Report No. 119, U. S. Salinity Laboratory, Riverside CA. February.

145. Van Golf-Racht, T.D., 1982: ***Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering***, Elsevier, Amsterdam.

146. Van Everdingen, A. F. y Hurst W., 1949: ***The Aplication of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs***, Petroleums transactions, AIME. T.P. 2732, pp. 305-324.

147. Von Rosemberg, D. V., 1956: ***On the Mechanics of Steady State Single Phase Fluid Displacement from Porous Media***, AIChe Journal, vol. 2, pp. 55.

148. Wagner, R. O., 1972. ***Design of Partitioning Tracer Test for Subsurface Contaminant Detection.***

149. Wagner, R. O., Baker, L. E. y Scott, G. R., 1974: ***The Design and Implementation of Multiple Tracer Program for Multifluid, Multiwell Injection Projects***, SPE 5125.

150. Wagner, R. O., 1977: ***The Use of Tracers in Diagnosing Interwell Reservoir Heterogeneities- Fields Results,*** JPT (noviembre), pp. 1410 (SPE 6046, 1976).

151. Walkup, G. W., Jr., 1984: ***Characterization of Retention Processes and Their Effect on the Analysis of Tracer Test in Fractured Reservoirs***, Stanford Geothermal Program, SGP-TR-77, Stanford, CA. Junio.

APÉNDICES DE LOS MODELOS PROPUESTOS

APÉNDICE A. FLUJO RADIAL DE TRAZADORES EN YACIMIENTOS HOMOGÉNEOS.

El modelo de flujo radial es el siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_r \frac{\partial C(r,t)}{\partial r}\right) - v_r \frac{\partial C(r,t)}{\partial r} - \lambda C(r,t) = \frac{\partial C(r,t)}{\partial t} \qquad \text{(A-1)}$$

La velocidad macroscópica está dada por:

$$v_r = \frac{q_i}{2\pi h r \phi} = \frac{a}{r} \qquad \text{(A-2)}$$

donde la constante de inyección es:

$$a = \frac{q_i}{2\pi h \phi}$$

La dispersión hidrodinámica es:

$$D_r = \alpha v_r + D_m$$

Despreciando la difusión molecular y substituyendo la velocidad radial:

$$D_r \approx \alpha v_r \approx \frac{\alpha a}{r};$$

$$rD_r = \alpha a = cte \qquad \text{(A-3)}$$

Substituyendo las Ecs. A-2 y A-3 en A-1 se obtiene el modelo para a flujo radial de un trazador radiactivo en yacimientos homogéneos:

$$\frac{\alpha a}{r}\frac{\partial^2 C(r,t)}{\partial r^2} - \frac{a}{r}\frac{\partial C(r,t)}{\partial r} - \lambda C(r,t) = \frac{\partial C(r,t)}{\partial t} \qquad \text{(A-4)}$$

Condición inicial: $C(r,0) = 0$

Condición de frontera interna: $C(r_w,t) = C_o$

Condición de frontera externa: $\lim_{r\to\infty} C(r,t) = 0 \qquad \text{(A-5)}$

Transformación a variables adimensionales del modelo y sus condiciones

Las variables adimensionales se definen en la forma siguiente:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \tag{A-6}$$

$$\alpha_D = \frac{\alpha}{r_w} \tag{A-7}$$

$$t_D = \frac{D_r t}{r_w^2} = \frac{\alpha v_r t}{r_w^2} = \frac{\alpha_D a t}{r_w^2} \tag{A-8}$$

$$C_D(r_D, t_D) = \frac{C(r,t)}{C_o} \tag{A-9}$$

$$\lambda_D = \frac{r_w^2 \lambda}{a} \tag{A-10}$$

Despejando la concentración de A-9:

$$C(r,t) = C_o C_D(r_D, t_D) \tag{A-11}$$

Derivando las Ecs. A-6, A-8 y A-11:

$$\frac{dr_D}{dr} = \frac{1}{r_w} \tag{A-12}$$

$$\frac{dt_D}{dt} = \frac{\alpha_D a}{r_w^2} \tag{A-13}$$

$$\frac{dC(r,t)}{dC_D(r_D, t_D)} = C_o \tag{A-14}$$

Se requiere de la primera y segunda derivada en espacio, y la primera derivada en tiempo; así la primera derivada en espacio es:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{dC}{dC_D}\left[\frac{\partial C_D}{\partial r_D}\right]\frac{dr_D}{dr} = C_o\left[\frac{\partial C_D}{\partial r_D}\right]\frac{1}{r_w} \tag{A-15}$$

La segunda derivada en espacio utilizando la regla de cadena:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} = \frac{C_o}{r_w}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial C_D}{\partial r_D}\right)\right] = \frac{C_o}{r_w}\left[\frac{\partial}{\partial r_D}\left(\frac{\partial C_D}{\partial r_D}\right)\right]\frac{dr_D}{dr} = \frac{C_o}{r_w^2}\frac{\partial^2 C_D}{\partial r_D^2} \tag{A-16}$$

La primera derivada en tiempo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{dC}{dC_D}\left[\frac{\partial C_D}{\partial t_D}\right]\frac{dt_D}{dt} = C_o\left[\frac{\partial C_D}{\partial t_D}\right]\frac{\alpha_D a}{r_w^2} \tag{A-17}$$

Substituyendo las derivadas en tiempo y en espacio, así como las definiciones de radio, concentración y decaimento en la ec. (A-1):

$$\frac{\alpha a}{r_w r_D}\frac{C_o}{r_w^2}\frac{\partial^2 C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{a}{r_w r_D}\frac{C_o}{r_w}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda\frac{ar_w^2}{ar_w^2}C_o C_D(r_D,t_D)=\frac{aC_o}{r_w^2}\alpha_D\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}$$

Simplificando y substituyendo las definiciones adimensionales de decaimento y de dispersividad, se obtiene el modelo adimensional del comportamiento de la concentración de trazador radiactivo para flujo radial en yacimientos homogéneos:

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{\partial^2 C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda_D C_D(r_D,t_D)=\alpha_D\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D} \quad \text{(A-18)}$$

Condición inicial: $C_D(r_D,0)=0$

Condiciones de frontera: $C_D(1,t_D)=1$

$$\lim_{r_D\to\infty} C_D(r_D,t_D)=0 \quad \text{(A-19)}$$

Solución analítica en el espacio de Laplace

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de flujo radial (A-18):

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{d^2\overline{C}_D(r_D,s)}{dr_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{d\overline{C_D}(r_D,s)}{dr_D}-\lambda_D\overline{C_D}(r_D,s)=\alpha_D\left[s\overline{C_D}(r_D,s)-C_D(r_D,0)\right] \quad \text{(A-20)}$$

Substituyendo la condición inicial en la ecuación anterior y arreglando:

$$\frac{d^2\overline{C}_D(r_D,s)}{dr_D^2}-\frac{1}{\alpha_D}\frac{d\overline{C}_D(r_D,s)}{dr_D}-\beta(s)r_D\overline{C}_D(r_D,s)=0 \quad \text{(A-21)}$$

donde:

$$\beta(s)=\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s$$

La solución general de la ecuación de flujo radial en el espacio de Laplace (A-21) es:

$$\overline{C}_D(r_D,s)=e^{\frac{r_D}{2\alpha_D}}\left[k_1 Ai\left(\frac{r_D\beta(s)+\frac{1}{4\alpha_D^2}}{(\beta(s))^{2/3}}\right)+k_2 Bi\left(\frac{r_D\beta(s)+\frac{1}{4\alpha_D^2}}{(\beta(s))^{2/3}}\right)\right] \quad \text{(A-22)}$$

Transformando las condiciones de frontera al espacio de Laplace:

$$\overline{C}_D(1,s)=\frac{1}{s} \quad \text{(A-23)}$$

$$\lim_{r_D\to\infty}\overline{C}_D(r_D,s)=0 \quad \text{(A-24)}$$

Utilizando la condición de frontera externa dada en (A-24):

$$\lim_{r_D \to \infty} \overline{C}_D(r_D,s) = \lim_{r_D \to \infty} e^{\frac{r_D}{2\alpha_D}} \left[k_1 \lim_{r_D \to \infty} Ai\left(\frac{r_D\beta(s) + \frac{1}{4\alpha_D^2}}{\beta(s)^{2/3}} \right) + k_2 \lim_{r_D \to \infty} Bi\left(\frac{r_D\beta(s) + \frac{1}{4\alpha_D^2}}{\beta(s)^{2/3}} \right) \right]$$

Substituyendo el valor de la condición de frontera y evaluando las funciones:

$$0 = \left[\lim_{r_D \to \infty} e^{\frac{r_D}{2\alpha_D}} \right] \left[k_1[0] + k_2[valor] \right] \tag{A-25}$$

Para satisfacer la condición de frontera externa se requiere que:

$$k_2 = 0 \tag{A-26}$$

Substituyendo el valor de la constante k_2 en la solución general (ec. A-23)

$$\overline{C}_D(r_D,s) = e^{\frac{r_D}{2\alpha_D}} \left[k_1 Ai\left(\frac{r_D\beta(s) + \frac{1}{4\alpha_D^2}}{\beta(s)^{2/3}} \right) \right] \tag{A-27}$$

Utilizando la condición de frontera interna dada en A-23:

$$\overline{C}_D(1,s) = e^{\frac{1}{2\alpha_D}} \left[k_1 Ai\left(\frac{[1]\beta(s) + \frac{1}{4\alpha_D^2}}{\beta(s)^{2/3}} \right) \right] = \frac{1}{s}$$

Despejando la constante k_1:

$$k_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2\alpha_D}}}{sAi\left(\frac{\beta(s) + 1/4\alpha_D^2}{\beta(s)^{2/3}} \right)} \tag{A-28}$$

Substituyendo la constante anterior en la ec. A-27 se obtiene la solución al problema en el espacio de Laplace:

$$\overline{C}_D(r_D,s) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{s} \left[\frac{Ai\left(\frac{r_D\beta(s) + 1/(4\alpha_D^2)}{\beta(s)^{2/3}} \right)}{Ai\left(\frac{\beta(s) + 1/(4\alpha_D^2)}{\beta(s)^{2/3}} \right)} \right] \tag{A-29}$$

donde la función de transferencia:

$$\beta(s) = s + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} \tag{A-30}$$

Se puede observar que la ecuación anterior con $\lambda_D = 0$, es la misma reportada por Moench y Ogata, 1981 (Ec. 2-13).

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales cortos

Los argumentos de las funciones de Airy de la solución (Ec. 29) son:

$$Y = \frac{r_D\beta(s) + \frac{1}{4\alpha_D^2}}{\beta(s)^{2/3}} \qquad \text{(A-31)}$$

$$Y_w = \frac{\beta(s) + \frac{1}{4\alpha_D^2}}{\beta(s)^{2/3}} \qquad \text{(A-32)}$$

Para tiempos cortos en el numerador del primer término domina sobre el segundo:

$$\beta(s)r_D >> \frac{1}{4\alpha_D^2} \qquad \text{(A-33)}$$

$$\beta(s) >> \frac{1}{4\alpha_D^2} \qquad \text{(A-34)}$$

Simplificando:

$$Y \approx \frac{r_D\beta(s)}{(\beta(s))^{2/3}} \approx \beta(s)^{1/3} r_D \qquad \text{(A-35)}$$

$$Y_w \approx \frac{\beta(s)}{(\beta(s))^{2/3}} \approx \beta(s)^{1/3} \qquad \text{(A-36)}$$

La función Airy para argumentos mayores de 1.0 se expresa en la forma siguiente:

$$Ai(Y) \cong \frac{A_o}{\sqrt{\pi}\,Y^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}Y^{3/2}} \qquad \text{(A-37)}$$

Al substituir las funciones de Airy con sus argumentos simplificados:

$$\bar{C}_D(r_D, s) = \frac{1}{s} e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}} \left[\frac{\frac{A_o}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{r_D\beta(s)^{1/3}}}\, e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\beta(s)}\,r_D^{3/2}}}{\frac{A_o}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{\beta(s)^{1/3}}}\, e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\beta(s)}}} \right] \qquad \text{(A-38)}$$

Simplificando y arreglando:

$$\bar{C}_D(r_D, s) = e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}} \sqrt[4]{\frac{1}{r_D}}\, \frac{e^{-\frac{2}{3}\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\beta(s)}}}{s} \qquad \text{(A-39)}$$

Substituyendo la función de s en la ecuación anterior:

$$\bar{C}_D(r_D,s)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,\frac{e^{-\frac{2}{3}\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s}}}{s} \tag{A-40}$$

Arreglando la ecuación anterior:

$$\bar{C}_D(r_D,s)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{s-\left(\frac{-\lambda_D}{\alpha_D}\right)}}}{s-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}-\left(-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right)} \tag{A-41}$$

Aplicando la transformada inversa y el teorema de la traslación:

$$C_D(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,e^{-\frac{\lambda_D t_D}{\alpha_D}}\,L^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{s}}}{s-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}}\right] \tag{A-42}$$

Invirtiendo con tablas (Carslaw y Jaeguer, 1959) (pag. 381, 1946) de antitransformadas de Laplace:

$$C_D(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,e^{-\frac{\lambda_D t_D}{\alpha_D}}\,\frac{e^{\frac{\lambda_D t_D}{\alpha_D}}}{2}\left[e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}\,erfc\left(\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\frac{1}{2\sqrt{t_D}}-\sqrt{\frac{\lambda_D t_D}{\alpha_D}}\right)+e^{\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}}\,erfc\left(\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\frac{1}{2\sqrt{t_D}}+\sqrt{\frac{\lambda_D t_D}{\alpha_D}}\right)\right] \tag{A-43}$$

Simplificando se obtiene la *solución analítica aproximada a tiempos cortos* del modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos homogéneos:

$$C_D(r_D,t_D)=F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+U(r_D)\,erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \tag{A-44}$$

donde:

$$F(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}\,e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \tag{A-45}$$

$$U(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \tag{A-46}$$

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales largos

A tiempos adimensionales largos ($s \rightarrow 0$) la *función de transferencia* (A-30) no se simplifica porque produce una solución estacionaria:

$$\beta(s) = \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s \tag{A-47}$$

Substituyendo la *función de transferencia* (ec. B-30) en la solución general:

$$\bar{C}_D(r_D, s) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}} \frac{e^{-\frac{2}{3}\left[r_D^{3/2} - 1\right]\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s}}}{s} \tag{A-48}$$

Arreglando:

$$\bar{C}_D(r_D, s) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}} \frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2} - 1\right]}{3}\sqrt{s - \left(-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right)}}}{s - \frac{\lambda_D +}{\alpha_D} - \left(-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right)} \tag{A-49}$$

Aplicando la transformada inversa y el teorema de la traslación a la ec. anterior:

$$C_D(r_D, t_D) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}} e^{-\left[\frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right]t_D} L^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2} - 1\right]}{3}\sqrt{s}}}{s - \frac{\lambda_D}{\alpha_D}}\right] \tag{A-50}$$

Invirtiendo con tablas (Carslaw y Jaeguer, 1959, ec. 19 del Apéndice 5) de antitransformadas de Laplace:

$$C_D(r_D, t_D) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}} e^{-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}t_D} \frac{e^{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}t_D}}{2} \bullet$$

$$\bullet\left[e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2} - 1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}}} erfc\left(\frac{2\left[r_D^{3/2} - 1\right]}{3}\frac{1}{2\sqrt{t_D}} - \sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}t_D}\right) + e^{\frac{2\left[r_D^{3/2} - 1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}}} erfc\left(\frac{2\left[r_D^{3/2} - 1\right]}{3}\frac{1}{2\sqrt{t_D}} + \sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}t_D}\right)\right] \tag{A-51}$$

Arreglando se obtiene la *solución analítica aproximada a tiempos largos* del modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos homogéneos:

$$C_D(r_D,t_D)=f(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+J(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \quad \text{(A-52)}$$

$$f(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}}} \quad \text{(A-53)}$$

$$J(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}}} \quad \text{(A-54)}$$

Si $\lambda_D=0$ la solución para flujo radial de un trazador químico en yacimientos homogéneos es:

$$C_D(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}erfc\left(\frac{\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{t_D}}\right) \quad \text{(A-55)}$$

APÉNDICE B. FLUJO RADIAL DE TRAZADORES RADIACTIVOS EN YACIMIENTOS HOMOGÉNEOS CON VOLUMEN POROSO INACCESIBLE.

Deducción de la ecuación general de dispersión-convección-decaimiento considerando volumen poroso inaccesible.

Se consideran dos volúmenes porosos, uno accesible y otro inaccesible, por lo que la porosidad total es:

$$\phi_T = \phi_i + \phi_t \; ; \qquad \text{(B-1)}$$

donde:

$$\phi_i = \frac{V_{pi}}{V_T} \; ; \qquad \phi_t = \frac{V_p - V_{pi}}{V_T}$$

El desplazamiento por dispersión es debido a la existencia de gradientes de concentración y está regido por la ley de Fick de la forma:

$$J_D = -\phi_T D \nabla C \qquad \text{(B-2)}$$

El desplazamiento por convección es debido a la existencia de gradientes de presión y su densidad de corriente, está dado por:

$$J_C = \phi_T \bar{u} C \qquad \text{(B-3)}$$

Superponiendo los efectos de dispersión y convección, se tiene la densidad de corriente total:

$$J = \phi_T \left[uC - D\nabla C \right] \qquad \text{(B-4)}$$

Dada una región R, de un medio poroso limitada por una superficie S, el flujo de masa por unidad de tiempo, a través de la superficie S, está dado por:

$$\dot{m} = \iint_s \phi_T \left[uC - D\nabla C \right] \hat{n} dA \qquad \text{(B-5)}$$

Aplicando el teorema de la divergencia, se tiene:

$$\iint_s \phi_T \left[uC - D\nabla C \right] \hat{n} dA = \iiint_R \nabla \left(\phi_T \left[uC - D\nabla C \right] \right) dV \qquad \text{(B-6)}$$

La masa por unidad de tiempo que entra menos la que sale, debido a la dispersión y a la convección:

$$\dot{m} = \iiint_R \nabla \left(\phi_T \left[\bar{u}C - D\nabla C \right] \right) dV \qquad \text{(B-7)}$$

La masa por unidad de tiempo que se acumula, en cada volumen poroso que es independiente del tiempo:

$$\dot{m} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_R \phi_t C dV + \iiint_R \phi_i C_s dV \right) \tag{B-8}$$

Agrupando las integrales:

$$\dot{m} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_R [\phi_t C + \phi_i C_s] dV \right) \tag{B-9}$$

La masa de trazador por unidad de tiempo que se pierde por decaimento en una región:

$$\dot{m} = \iiint_R \phi_T \lambda C \, dV \tag{B-10}$$

Utilizando el principio de la conservación de la masa donde el decaimento actúa como un sumidero:

$$\iiint_R \nabla\left(\phi_T \left[C\bar{u} - D\nabla C\right]\right) dV = -\iiint_R \left(\phi_t \frac{\partial C}{\partial t} + \phi_i \frac{\partial C_s}{\partial t} \right) dV - \iiint_R \phi_T \lambda C dV \tag{B-11}$$

Arreglando:

$$\iiint_R \nabla\left(\phi_T \left[C\bar{u} - D\nabla C\right]\right) dV + \iiint_R \phi_T \lambda C dV + \iiint_R \left[\phi_t \frac{\partial C}{\partial t} + \phi_i \frac{\partial C_s}{\partial t} \right] dV = 0 \tag{B-12}$$

El operador integral de región es lineal, por lo que agrupando las integrales:

$$\iiint_R \left[\nabla\left(\phi_T \left[C\bar{u} - D\nabla C\right]\right) + \phi_T \lambda C + \phi_t \frac{\partial C}{\partial t} + \phi_i \frac{\partial C_s}{\partial t} \right] dV = 0 \tag{B-13}$$

Como la región existe, dV ≠ 0:

$$\nabla\left(\phi_T \left[C\bar{u} - D\nabla C\right]\right) + \phi_T \lambda C + \phi_t \frac{\partial C}{\partial t} + \phi_i \frac{\partial C_s}{\partial t} = 0 \tag{B-14}$$

Como la porosidad total es constante sale del operador y substituyendo la porosidad inaccesible (de la ec. B-1):

$$\phi_T \nabla\left(C\bar{u} - D\nabla C\right) + \phi_T \lambda C + \phi_t \frac{\partial C}{\partial t} + \left[\phi_T - \phi_t\right] \frac{\partial C_s}{\partial t} = 0 \tag{B-15}$$

Dividiendo entre la porosidad total:

$$\nabla\left(\bar{u}C - D\nabla C\right) + \lambda C + \frac{\phi_t}{\phi_T}\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\phi_T - \phi_t}{\phi_T}\frac{\partial C}{\delta t} = 0 \tag{B-16}$$

Aplicando el operador ∇:

$$\bar{u}\nabla C + C\nabla\bar{u} - \nabla\left(D\nabla C\right) + \lambda C + \phi_D\frac{\partial C}{\partial t} + \left[1-\phi_D\right]\frac{\partial C_s}{\partial t} = 0 \tag{B-17}$$

donde:

$$\phi_D = \frac{\phi_t}{\phi_T}$$

Para un flujo incompresible el gradiente de velocidad es cero, en consecuencia:

$$\bar{u}\nabla C - \nabla\left(D\nabla C\right) + \lambda C\,\phi_D\frac{\partial C}{\partial t} + \left[1-\phi_D\right]\frac{\partial C_s}{\partial t} = 0 \tag{B-18}$$

Arreglando se obtiene la ec. general de dispersión-convección-decaimiento con volumen poroso inaccesible:

$$\nabla\left(D\nabla C\right) - \bar{u}\nabla C - \lambda C = \phi_D\frac{\partial C}{\partial t} + \left[1-\phi_D\right]\frac{\partial C_s}{\partial t} \tag{B-19}$$

Transformando a coordenadas cilíndricas y si la concentración no varía con el ángulo para cualquier radio:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_r\frac{\partial C(r,t)}{\partial r}\right) - v_r\frac{\partial C(r,t)}{\partial r} - \lambda C(r,t) = \phi_D\frac{\partial C(r,t)}{\partial t} + \left[1-\phi_D\right]\frac{\partial C_s(r,t)}{\partial t} \tag{B-20}$$

Substituyendo la ec. A-3 y A-2 en B-20, se obtiene el modelo para flujo radial de trazadores radiactivos en yacimientos homogéneos considerando el volumen poroso inaccesible:

$$\frac{\alpha a}{r}\frac{\partial^2 C(r,t)}{\partial r^2} - \frac{a}{r}\frac{\partial C(r,t)}{\partial r} - \lambda C(r,t) = \phi_D\frac{\partial C(r,t)}{\partial t} + \left[1-\phi_D\right]\frac{\partial C_s(r,t)}{\partial t} \tag{B-21}$$

Condición inicial: $C(r,0) = 0$

Condición de frontera interna: $C(r_w,t) = C_o$

Condición de frontera externa: $\lim_{r\to\infty} C(r,t) = 0$ (B-22)

El ritmo de concentración que se transfiere al volumen poroso inaccesible:

$$\frac{\partial C_s(r,t)}{\partial t} = \frac{M}{\left[1-\phi_D\right]}\left[C(r,t) - C_s(r,t)\right] \tag{B-23}$$

La condición inicial para considerar el volumen poroso inaccesible:

$$C_s(r,0) = 0 \tag{B-24}$$

Donde las definiciones de las variables adimensionales son:

$$r_D = \frac{r}{r_W}; \quad \alpha_D = \frac{\alpha}{r_W}; \quad t_D = \frac{D_r t}{r_W^2} = \frac{\alpha v_r t}{r_W^2} = \frac{\alpha a t}{r_W^3} = \alpha_D \frac{at}{r_W^2}; \quad \lambda_D = \frac{r_W^2 \lambda}{a};$$

$$C_D(r_D, t_D) = \frac{C(r,t)}{C_o}; \quad C_{sD}(r_D, t_D) = \frac{C_s(r,t)}{C_o}; \quad M_D = \frac{r_W^2 M}{a[1-\phi_D]}$$

Transformación a variables adimensionales

Despejando las variables reales:

$$r = r_W r_D \tag{B-25}$$

$$C(r,t) = C_o C_D(r_D, t_D) \tag{B-26}$$

$$C_s(r,t) = C_o C_{sD}(r_D, t_D) \tag{B-27}$$

Derivando las variables adimensionales de radio y de tiempo, así como las ecs. de concentración:

$$\frac{dr_D}{dr} = \frac{1}{r_w} \tag{B-28}$$

$$\frac{dt_D}{dt} = \frac{\alpha_D a}{r_w^2} \tag{B-29}$$

$$\frac{dC(r,t)}{dC_D(r_D, t_D)} = C_o \tag{B-30}$$

$$\frac{dC_s(r,t)}{dC_{sD}(r_D, t_D)} = C_o \tag{B-31}$$

Para transformar la ecuación en derivadas parciales a variables adimensionales se requiere de la primera y segunda derivada en espacio y la primera derivada en tiempo, por lo que la primera derivada en espacio:

$$\frac{\partial C(r,t)}{\partial r} = \frac{dC(r,t)}{dC_D(r_D, t_D)}\left[\frac{\partial C_D(r_D, t_D)}{\partial r_D}\right]\frac{dr_D}{dr} = C_o\left[\frac{\partial C_D(r_D, t_D)}{\partial r_D}\right]\frac{1}{r_w} \tag{B-32}$$

La segunda derivada en espacio:

$$\frac{\partial^2 C(r,t)}{\partial r^2} = \frac{C_O}{r_w}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial C_D(r_D, t_D)}{\partial r_D}\right)\right] = \frac{C_O}{r_w}\left[\frac{\partial}{\partial r_D}\left(\frac{\partial C_D(r_D, t_D)}{\partial r_D}\right)\right]\frac{dr_D}{dr} = \frac{C_O}{r_w^2}\frac{\partial^2 C_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} \tag{B-33}$$

La derivada con respecto al tiempo de la concentración:

$$\frac{\partial C(r,t)}{\partial t}=\frac{dC(r,t)}{dC_D(r_D,t_D)}\left[\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right]\frac{dt_D}{dt}=C_o\left[\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right]\frac{\alpha_D a}{r_w^2} \qquad \text{(B-34)}$$

La derivada en tiempo para la concentración debida al volumen poroso inaccesible:

$$\frac{\partial C_s(r,t)}{\partial t}=\frac{\partial C_s(r,t)}{\partial C_D(r_D,t_D)}\left[\frac{\partial C_{sD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right]\frac{dt_D}{dt}=C_o\left[\frac{\partial C_{sD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}\right]\frac{\alpha_D a}{r_w^2} \qquad \text{(B-35)}$$

Substituyendo las derivadas en tiempo y en espacio, así como las definiciones de radio, concentración y decaimiento:

$$\frac{\alpha a C_o}{r_w r_D r_w^2}\frac{\partial^2 C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{aC_o}{r_w r_D r_w^2}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda\frac{r_w^2 aC_o}{ar_w^2}C_D(r_D,t_D)=$$

$$=\phi_D\frac{aC_o}{r_w^2}\alpha_D\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}+[1-\phi_D]\frac{aC_o}{r_w^2}\alpha_D\frac{\partial C_{sD}(r_D,t_D)}{\partial t_D} \qquad \text{(B-36)}$$

Simplificando se tiene el modelo adimensional de flujo radial de trazadores radiactivos en yacimientos homogéneos:

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{\partial^2 C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda_D C_D(r_D,t_D)=\phi_D\alpha_D\frac{\partial C_D(r_D,t_D)}{\partial t_D}+[1-\phi_D]\alpha_D\frac{\partial C_{sD}(r_D,t_D)}{\partial t_D} \qquad \text{(B-37)}$$

Condición inicial:	$C_D(r_D,0)=0$
Condición de frontera interna:	$C_D(1,t_D)=1$
Condición de frontera externa:	$\lim_{r_D\to\infty} C_D(r_D,t_D)=0$ (B-38)

Substituyendo la derivada con respecto al tiempo de la ec. B-35 en la condición para considerar el volumen poroso inaccesible en la matriz (ec.B-23):

$$\frac{\alpha_D aC_o}{r_w^2}\frac{\partial C_{sD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}=\frac{MC_o}{[1-\phi_D]}[C_D(r_D,t_D)-C_{sD}(r_D,t_D)] \qquad \text{(B-39)}$$

Simplificando y substituyendo la definición para el ritmo de transferencia entre concentraciones se obtiene ecuación del ritmo de concentración que se transfiere al volumen poroso inaccesible:

$$\alpha_D\frac{\partial C_{sD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}=M_D[C_D(r_D,t_D)-C_{sD}(r_D,t_D)] \qquad \text{(B-40)}$$

donde la condición inicial:

$$C_{sD}(r_D,0)=0 \qquad \text{(B-41)}$$

Solución analítica en el espacio de Laplace

Aplicando la transformada de Laplace al modelo de flujo radial en el yacimiento y substituyendo las condiciones iniciales:

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{d^2\overline{C_D}(r_D,s)}{dr_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{d\overline{C_D}(r_D,s)}{dr_D}-\lambda_D\overline{C_{ID}}(r_D,s)=[1-\phi_D]s\alpha_D\overline{C_{sID}}(r_D,s)+\phi_D s\alpha_D\overline{C_{ID}}(r_D,s) \qquad \text{(B-42)}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ec. B-40, substituyendo su condición inicial (ec. B-41) y despejando la concentración que se transfiere al volumen poroso inaccesible:

$$\overline{C}_{sID}(r_D,s)=\left[\frac{M_D}{\alpha_D s+M_D}\right]\overline{C}_D(r_D,s) \qquad \text{(B-43)}$$

Substituyendo la Ec. anterior en la ecuación de flujo en el yacimiento, ec. (B-42):

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{d^2\overline{C_D}(r_D,s)}{dr_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{d\overline{C_D}(r_D,s)}{dr_D}-\lambda_D\overline{C_{ID}}(r_D,s)=[1-\phi_D]\left[\frac{M_D}{\alpha_D s+M_D}\right]s\alpha_D\overline{C_D}(r_D,s)+\phi_D s\alpha_D\overline{C_D}(r_D,s) \qquad \text{(B-44)}$$

Arreglando:

$$\frac{d^2\overline{C_D}(r_D,s)}{dr_D^2}-\frac{1}{\alpha_D}\frac{d\overline{C_D}(r_D,s)}{dr_D}-\beta(s)r_D\overline{C_D}(r_D,s)=0 \qquad \text{(B-45)}$$

donde:

$$\beta(s)=\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+\phi_D s+\frac{M_D[1-\phi_D]s}{\alpha_D s+M_D}$$

Solución general a la ecuación diferencial ordinaria de coeficientes variables (B-45)

$$C_D(r_D,s)=e^{\frac{r_D}{2\alpha_D}}\left[k_1 Ai\left(\frac{r_D\beta(s)+\frac{1}{4\alpha_D^2}}{(\beta(s))^{2/3}}\right)+k_2 Bi\left(\frac{r_D\beta(s)+\frac{1}{4\alpha_D^2}}{(\beta(s))^{2/3}}\right)\right] \qquad \text{(B-46)}$$

Aplicando la transformada de Laplace a las condiciones de frontera dadas en la ec. (B-38):

$$\overline{C}_D(1,s)=\frac{1}{s} \qquad \text{(B-47)}$$

$$\lim_{r_D\to\infty}\overline{C_D}(r_D,s)=0 \qquad \text{(B-48)}$$

Aplicando las condiciones de frontera en la solución general ec. (B-47 y B-48) se obtiene la solución al problema en el espacio de Laplace:

$$\overline{C}_D(r_D, s) = \frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{s}\left[\frac{Ai\left(\dfrac{r_D\beta(s)+1/4\alpha_D^2}{(\beta(s))^{2/3}}\right)}{Ai\left(\dfrac{\beta(s)+1/4\alpha_D^2}{(\beta(s))^{2/3}}\right)}\right] \quad \text{(B-49)}$$

donde la *función de transferencia* es:

$$\beta(s) = \phi_D s + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + \frac{M_D[1-\phi_D]s}{\alpha_D s + M_D} \quad \text{(B-50)}$$

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales cortos
Los argumentos de la función Airy son:

$$Y = \frac{r_D\beta(s) + \dfrac{1}{4\alpha_D^2}}{(\beta(s))^{2/3}}; \qquad Y_W = \frac{\beta(s) + \dfrac{1}{4\alpha_D^2}}{(\beta(s))^{2/3}} \quad \text{(B-51) y (B-52)}$$

Para tiempos cortos ($s \to \infty$)en el numerador del primer término domina sobre el segundo:

$$\beta(s)r_D >> \frac{1}{4\alpha_D^2} \quad \text{(B-53)}$$

$$\beta(s) >> \frac{1}{4\alpha_D^2} \quad \text{(B-54)}$$

Simplificando:

$$Y \approx \beta(s)^{1/3} r_D \quad \text{(B-55)}$$

$$Y_W \approx \beta(s)^{1/3} \quad \text{(B-56)}$$

La función Airy para argumentos mayores a 1.0 se expresa en la forma siguiente:

$$Ai(Y) \cong \frac{A_o}{\pi Y^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}Y^{3/2}} \quad \text{(B-57)}$$

Al substituir las funciones Airy con sus argumentos respectivos:

$$\overline{C}_D(r_D, s) = \frac{1}{s} e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}\left[\frac{\dfrac{A_o}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{r_D\beta(s)^{1/3}}} e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\beta(s)}r_D^{3/2}}}{\dfrac{A_o}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{\beta(s)^{1/3}}} e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\beta(s)}}}\right] \quad \text{(B-58)}$$

Simplificando y arreglando:

$$\bar{C}_D\left(r_D,s\right)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt{r_D}}\,\frac{e^{-\frac{2}{3}\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\beta(s)}}}{s} \tag{B-59}$$

A tiempos adimensionales cortos la función de transferencia (ec. B-50) se simplifica:

$$\beta(s)=\phi_D s+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+\frac{M_D\left[1-\phi_D\right]}{\alpha_D} \tag{B-60}$$

Substituyendo la *función de transferencia* (ec. B-60) en la solución general:

$$\bar{C}_D\left(r_D,s\right)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt{r_D}}\,\frac{e^{-\frac{2}{3}\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+\frac{M_D\left[1-\phi_D\right]}{\alpha_D}+\phi_D s}}}{s} \tag{B-61}$$

Arreglando:

$$C_D\left(r_D,s\right)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt{r_D}}\,\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\phi_D}\sqrt{s-\left(-\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\phi_D\alpha_D}\right)}}}{s-\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\phi_D\alpha_D}-\left(-\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\phi_D\alpha_D}\right)} \tag{B-62}$$

Aplicando la transformada inversa y el teorema de la traslación a la ec. (B-64):

$$C_D\left(r_D,t_D\right)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt{r_D}}\,e^{-\left[\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\phi_D\alpha_D}\right]t_D}\,L^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{s}}}{s-\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\phi_D\alpha_D}}\right] \tag{B-63}$$

Invirtiendo con tablas (Carslaw y Jaeguer, 1959, ec. 19 del Apéndice 5) de antitransformadas de Laplace:

$$\begin{aligned}C_D\left(r_D,t_D\right)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt{r_D}}\,e^{-\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\phi_D\alpha_D}t_D}\,\frac{e^{\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\phi_D\alpha_D}t_D}}{2}&\left[e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\alpha_D}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\phi_D}}{3}\frac{1}{2\sqrt{t_D}}-\sqrt{\left[\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\phi_D\alpha_D}\right]t_D}\right)\right.\\&\left.+e^{\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\alpha_D}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\phi_D}}{3}\frac{1}{2\sqrt{t_D}}+\sqrt{\frac{\lambda_D+M_D\left[1-\phi_D\right]}{\phi_D\alpha_D}t_D}\right)\right]\end{aligned} \tag{B-64}$$

Arreglando se obtiene la *solución analítica aproximada a tiempos cortos* al modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos homogéneos considerando el volumen poroso inaccesible:

$$C_D(r_D,t_D)=Q(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]\phi_D-3t_D\sqrt{\lambda_D+M_D[1-\phi_D]}}{3\sqrt{\phi_D\alpha_D t_D}}\right)+P(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]\phi_D+3t_D\sqrt{\lambda_D+M_D[1-\phi_D]}}{3\sqrt{\phi_D\alpha_D t_D}}\right)\right]$$

donde: (B-65)

$$Q(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+M_D[1-\phi_D]}{\alpha_D}}} \qquad \text{(B-66)}$$

$$P(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+M_D[1-\phi_D]}{\alpha_D}}} \qquad \text{(B-67)}$$

Si $\phi_D=1$ se obtiene la misma solución para yacimientos homogéneos, ec. (A-44).

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales largos

A tiempos adimensionales largos la *función de transferencia* dada por la ec. (B-60) se simplifica a:

$$\beta(s)=\phi_D s+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+M_D[1-\phi_D] \qquad \text{(B-68)}$$

Substituyendo la *función de transferencia* simplificada en la solución general:

$$\bar{C}_D(r_D,s)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,\frac{e^{-\frac{2}{3}\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+M_D[1-\phi_D]+\phi_D s}}}{s} \qquad \text{(B-69)}$$

Arreglando:

$$\bar{C}_D(r_D,s)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\phi_D}\sqrt{s-\left(-\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\phi_D\alpha_D}\right)}}}{s-\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\phi_D\alpha_D}-\left(-\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\phi_D\alpha_D}\right)} \qquad \text{(B-70)}$$

Aplicando la transformada inversa y el teorema de la traslación a la ec. anterior:

$$C_D(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,e^{-\left[\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\phi_D\alpha_D}\right]t_D}\,L^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{2[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\phi_D s}}}{s-\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\phi_D\alpha_D}}\right] \tag{B-71}$$

Invirtiendo con tablas (Carslaw y Jaeguer, 1959, ec. 19 del Apéndice 5) de antitransformadas de Laplace:

$$C_D(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,e^{-\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\phi_D\alpha_D}t_D}\,\frac{e^{\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\phi_D\alpha_D}t_D}}{2}\bullet$$

$$\bullet\left[e^{-\frac{2[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\alpha_D}}}\,erfc\left(\frac{2[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\phi_D}\,\frac{1}{2\sqrt{t_D}}-\sqrt{\left[\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\phi_D\alpha_D}\right]t_D}\right)\right.$$

$$\left.+e^{\frac{2[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\alpha_D}}}\,erfc\left(\frac{2[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\phi_D}\,\frac{1}{2\sqrt{t_D}}+\sqrt{\left[\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\phi_D\alpha_D}\right]t_D}\right)\right] \tag{B-72}$$

Arreglando se obtiene la *solución analítica aproximada a tiempos largos* del modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos homogéneos considerando el volumen poroso inaccesible:

$$C_D(r_D,t_D)=s(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}[r_D^{3/2}-1]\phi_D-3t_D\sqrt{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}}{3\sqrt{\phi_D\alpha_D t_D}}\right)+R(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}[r_D^{3/2}-1]\phi_D+3t_D\sqrt{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}}{3\sqrt{\phi_D\alpha_D t_D}}\right)\right] \tag{B-73}$$

$$s(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}\,e^{-\frac{2[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\alpha_D}}} \tag{B-74}$$

$$R(r_D)=e^{\frac{4[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D+\alpha_D M_D[1-\phi_D]}{\alpha_D}}} \tag{B-75}$$

Si $\phi_D=1$ se obtiene la misma solución para yacimientos homogéneos, ec. (A-44).

APÉNDICE C. FLUJO RADIAL DE TRAZADORES RADIACTIVOS EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS CON VOLUMEN POROSO INACCESIBLE (matriz tipo estratos)

La ecuación de flujo radial de un trazador radiactivo en yacimientos Naturalmente Fracturados (geometría de matriz estratificada) está dada por la expresión siguiente:

$$\frac{\alpha a_f}{r}\frac{\partial^2 C_f(r,t)}{\partial r^2}-\frac{a_f}{r}\frac{\partial C_f(r,t)}{\partial r}-\lambda C_f(r,t)+\frac{D_m}{\phi_f A_m h_f \sigma}\frac{\partial C_m(h_f,t)}{\partial z}=\frac{\partial C_f(r,t)}{\partial t} \qquad \text{(C-1)}$$

Condición inicial: $C_f(r,0)=0$

Condición de frontera interna: $C_f(r_w,t)=C_o$

Condición de frontera externa: $\lim_{r\to\infty} C_f(r,t)=0$ (C-2)

El flujo transitorio en la matriz considerando el volumen poroso inaccesible es:

$$D_m\frac{\partial^2 C_m(z,t)}{\partial z^2}-\lambda C_m(z,t)=\phi_{mD}\frac{\partial C_m(z,t)}{\partial t}+[1-\phi_{mD}]\frac{\partial C_{sm}(z,t)}{\partial t} \qquad \text{(C-3)}$$

Condición inicial: $C_m(z,0)=0$

Condición de frontera interna: $C_m(h_f,t)=C_f(r,t)$

Condición de frontera externa: $\frac{\partial C_m(H+h_f,t)}{\partial z}=0$ (C-4)

Ritmo de concentración que se transfiere al volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\frac{\partial C_{sm}(z,t)}{\partial t}=\frac{M_m}{[1-\phi_{mD}]}[C_m(z,t)-C_{smD}(z,t)] \qquad \text{(C-5)}$$

La condición inicial para considerar el volumen poroso inaccesible en la matriz:

$C_{sm}(z,0)=0$ (C-6)

Donde las definiciones de las variables adimensionales son:

$$r_D=\frac{r}{r_w};\quad z_D=\frac{z}{r_w};\quad \alpha_D=\frac{\alpha}{r_w};\quad t_D=\alpha_D\frac{a_f t}{r_w^2};\quad \lambda_D=\frac{r_w^2\lambda}{a_f};$$

$$\sigma_D=\frac{\phi_f\sigma A_m a_f h_f}{D_m r_w};\quad z_{Df}=\frac{h_f}{r_w};\quad z_{DH}=\frac{H+h_f}{r_w};$$

$$D_{mD} = \frac{D_m}{a_f}; \quad C_{fD}(r_D,t_D) = \frac{C_f(r,t)}{C_o}; \quad C_{mD}(z_D,t_D) = \frac{C_m(z,t)}{C_o};$$

$$C_{smD}(z_D,t_D) = \frac{C_{sm}(z,t)}{C_o}; \quad M_{mD} = \frac{r_w^{\,2} M_m}{a_f\left[1-\phi_{mD}\right]}; \quad Q_{mD} = \frac{Q_t}{Q_T}$$

Transformación a variables adimensionales

Despejando las variables reales

$$r = r_w r_D \tag{C-7}$$

$$z = r_w z_D \tag{C-8}$$

$$C_f(r,t) = C_o C_{fD}(r_D,t_D) \tag{C-9}$$

$$C_m(z,t) = C_o C_{mD}(z_D,t_D) \tag{C-10}$$

$$C_{sm}(z,t) = C_o C_{smD}(z_D,t_D) \tag{C-11}$$

Derivando las variables adimensionales de radio, altura de matriz y tiempo, así como las ecs. de la C-7 a C-11:

$$\frac{dr_D}{dr} = \frac{1}{r_w} \tag{C-12}$$

$$\frac{dz_D}{dz} = \frac{1}{r_w} \tag{C-13}$$

$$\frac{dt_D}{dt} = \frac{\alpha_D a_f}{r_w^{\,2}} \tag{C-14}$$

$$\frac{\partial C_f(r,t)}{\partial C_{fD}(r_D,t_D)} = C_o \tag{C-15}$$

$$\frac{\partial C_m(z,t)}{\partial C_{mD}(z_D,t_D)} = C_o \tag{C-16}$$

$$\frac{\partial C_{sm}(z,t)}{\partial C_{smD}(z_D,t_D)} = C_o \tag{C-17}$$

Se requiere de la primera y segunda derivada en espacio y la primera derivada en tiempo, por lo que la primera derivada en espacio de la concentración en las fracturas:

$$\frac{\partial C_f}{\partial r} = \frac{\partial C_f}{\partial C_{fD}}\left[\frac{\partial C_{fD}}{\partial r_D}\right]\frac{dr_D}{dr} = C_o\left[\frac{\partial C_{fD}}{\partial r_D}\right]\frac{1}{r_w} \tag{C-18}$$

La segunda derivada en espacio de la concentración en las fracturas:

$$\frac{\partial^2 C_f}{\partial r^2}=\frac{C_0}{r_w}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial C_{fD}}{\partial r_D}\right)\right]=\frac{C_0}{r_w}\left[\frac{\partial}{\partial r_D}\left(\frac{\partial C_{fD}}{\partial r_D}\right)\right]\frac{dr_D}{dr}=\frac{C_0}{r_w^2}\frac{\partial^2 C_{fD}}{\partial r_D^2} \tag{C-19}$$

La primera derivada en tiempo de la concentración en las fracturas:

$$\frac{\partial C_f}{\partial t}=\frac{\partial C_f}{\partial C_{fD}}\left[\frac{\partial C_{fD}}{\partial t_D}\right]\frac{dt_D}{dt}=C_o\left[\frac{\partial C_{fD}}{\partial t_D}\right]\frac{\alpha_D a_f}{r_w^2} \tag{C-20}$$

La primera derivada en espacio de la concentración en la matriz:

$$\frac{\partial C_m}{\partial r}=\frac{dC_m}{dC_{mD}}\left[\frac{\partial C_{mD}}{\partial r_D}\right]\frac{dr_D}{dr}=C_o\left[\frac{\partial C_{mD}}{\partial r_D}\right]\frac{1}{r_w} \tag{C-21}$$

La segunda derivada en espacio de la concentración en la matriz:

$$\frac{\partial^2 C_m}{\partial r^2}=\frac{C_0}{r_w}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial C_{mD}}{\partial r_D}\right)\right]=\frac{C_0}{r_w}\left[\frac{\partial}{\partial r_D}\left(\frac{\partial C_{mD}}{\partial r_D}\right)\right]\frac{dr_D}{dr}=\frac{C_0}{r_w^2}\frac{\partial^2 C_{mD}}{\partial r_D^2} \tag{C-22}$$

La primera derivada en tiempo de la concentración en la matriz:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t}=\frac{\partial C_m}{\partial C_{mD}}\left[\frac{\partial C_{mD}}{\partial t_D}\right]\frac{dt_D}{dt}=C_o\left[\frac{\partial C_{mD}}{\partial t_D}\right]\frac{\alpha_D a_f}{r_w^2} \tag{C-23}$$

La primera derivada en tiempo para la concentración transferida al volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\frac{\partial C_{sm}}{\partial t}=\frac{\partial C_{sm}}{\partial C_{mD}}\left[\frac{\partial C_{smD}}{\partial t_D}\right]\frac{dt_D}{dt}=C_o\left[\frac{\partial C_{smD}}{\partial t_D}\right]\frac{\alpha_D a_f}{r_w^2} \tag{C-24}$$

Substituyendo las derivadas en tiempo y en espacio, así como las definiciones de radio, concentración y decaimiento en la ec. C-1:

$$\frac{\alpha a_f C_o}{r_w r_D r_w^2}\frac{\partial^2 C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{a_f C_o}{r_w r_D r_w^2}\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda\frac{r_w^2 a_f C_o}{a_f r_w^2}C_{fD}(r_D,t_D)-\frac{D_m r_w}{a_f\phi_f A_m h_f\sigma}\frac{a_f C_o}{r_w^2}\frac{\partial C_{mD}(z_{Df},t_D)}{\partial z_D}=\frac{a_f C_o}{r_w^2}\alpha_D\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}$$

Simplificando se obtiene el modelo adimensional de flujo radial de trazadores radiactivos en las fracturas:

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{\partial^2 C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda_D C_{fD}(r_D,t_D)-\frac{1}{\sigma_D}\frac{\partial C_{mD}(z_{Df},t_D)}{\partial z_D}=\alpha_D\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial t_D} \tag{C-25}$$

Condición inicial:

$$C_{fD}(r_D,0)=0$$

Condición de frontera interna: $C_{fD}(1,t_D)=1$

Condición de frontera externa: $\lim_{r_D\to\infty} C_{fD}(r_D,t_D)=0$

(C-26)

Substituyendo las derivadas en tiempo y en espacio, así como las definiciones de radio, concentración y decaimiento en la ecuación C-3 es:

$$\frac{D_m a_f C_o}{a_f r_w^2}\frac{\partial^2 C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial z_D^2}-\lambda\frac{r_w^2 a_f C_o}{a_f r_w^2}C_{mD}(r_D,t_D)=[1-\phi_{mD}]\frac{a_f C_o}{r_w^2}\alpha_D\frac{\partial C_{smD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}+\phi_{mD}\frac{a_f C_o}{r_w^2}\alpha_D\frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}$$

Simplificando y substituyendo las definiciones de las variables adimensionales, se obtiene el modelo adimensional de flujo lineal de trazadores radiactivos en la matriz considerando el volumen poroso inaccesible:

$$D_{mD}\frac{\partial^2 C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial z_D^2}-\lambda_D C_{mD}(z_D,t_D)=\phi_{mD}\alpha_D\frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}+[1-\phi_{mD}]\alpha_D\frac{\partial C_{smD}(z_D,t_D)}{\partial t_D} \quad \text{(C-27)}$$

Condición inicial: $C_{mD}(z_D,0)=0$

Condición de frontera interna: $C_{mD}(z_{Df},t_D)=C_{fD}(r_D,t_D)$

Condición de frontera externa: $\frac{\partial C_{mD}(z_{DH},t_D)}{\partial z_D}=0$

(C-28)

Ritmo de concentración que se transfiere al volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\frac{\alpha_D a_f C_o}{r_w^2}\frac{\partial C_{smD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}=\frac{M_m C_o}{[1-\phi_{mD}]}[C_{mD}(z_D,t_D)-C_{smD}(z_D,t_D)] \quad \text{(C-29)}$$

Simplificando y substituyendo la definición para el ritmo de transferencia entre concentraciones se obtiene la condición para considerar el volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\alpha_D\frac{\partial C_{smD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}=M_{mD}[C_{mD}(z_D,t_D)-C_{smD}(z_D,t_D)]$$

(C-30)

La condición inicial para considerar el volumen poroso inaccesible:
$C_{smD}(z_D,0)=0$

(C-31)

Aplicando la transformada de Laplace a la ec. de flujo lineal transitorio en la matriz (Ec. C-27) y substituyendo las condiciones iniciales:

$$D_{mD}\frac{d^2\bar{C}_{mD}(z_D,s)}{dz_D^2}-\lambda_D\bar{C}_{mD}(z_D,s)=[1-\phi_{mD}]s\alpha_D\bar{C}_{smD}(z_D,s)+\phi_{mD}s\alpha_D\bar{C}_{mD}(z_D,s) \quad \text{(C-32)}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ec. C-30, substituyendo su condición inicial (ec. C-31) y despejando la concentración transferida al volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\bar{C}_{smD}(z_D,s)=\left[\frac{M_{mD}}{s\alpha_D+M_{mD}}\right]\bar{C}_{mD}(z_D,s) \tag{C-33}$$

Substituyendo la ec. C-33 en la ec. C-32 y arreglando se obtiene:

$$\frac{d^2\bar{C}_{mD}(z_D,s)}{dz_D^2}-\frac{1}{D_{mD}}\left[\frac{M_{mD}[1-\phi_{mD}]s\alpha_D}{\alpha_D s+M_{mD}}+\phi_{mD}\alpha_D s+\lambda_D\right]\bar{C}_{mD}(z_D,s)=0 \tag{C-34}$$

$$\frac{d^2\bar{C}_{mD}(z_D,s)}{dz_D^2}-m(s)\bar{C}_{mD}(z_D,s)=0 \tag{C-35}$$

donde:

$$m(s)=\frac{1}{D_{mD}}\left[\frac{[1-\phi_{mD}]M_{mD}s}{M_{mD}/\alpha_D+s}+\phi_{mD}\alpha_D s+\lambda_D\right]$$

La solución general de la ecuación anterior:

$$\bar{C}_{mD}(z_D,s)=A\ \cosh\left(\sqrt{m(s)}z_D\right)+B\ senh\left(\sqrt{m(s)}z_D\right) \tag{C-36}$$

Transformando al espacio de Laplace las condiciones de frontera para la matriz (Ec. C-28):

$$\frac{d\bar{C}_{mD}(z_{DH},s)}{dz_D}=0 \tag{C-37}$$

$$\bar{C}_{mD}(z_{DI},s)=\bar{C}_{fD}(r_D,s) \tag{C-38}$$

Derivando la ec. C-36 y evaluando en la mitad del bloque de matriz:

$$\frac{d\bar{C}_{mD}(z_{DH},s)}{dz_D}=\sqrt{m(s)}\left[Asenh\left(\sqrt{m(s)}z_{DH}\right)+B\cosh\left(\sqrt{m(s)}z_{DH}\right)\right] \tag{C-39}$$

Substituyendo el valor de la condición de frontera (ec. C-37) en la expresión anterior y despejando una de las constantes:

$$B=-A\tanh\left(\sqrt{m(s)}z_{DH}\right) \tag{C-40}$$

Substituyendo la constante B, en la solución general (ec. C-36):

$$\bar{C}_{mD}(z_D,s)=A\left[\cosh\left(\sqrt{m(s)}z_D\right)-\tanh\left(\sqrt{m(s)}z_{DH}\right)senh\left(\sqrt{m(s)}z_D\right)\right] \tag{C-41}$$

Aplicando la condición C-38, evaluando la ec. anterior en la interfase fractura- matriz y despejando la constante:

$$A = \frac{\bar{C}_{fD}(r_D, s)}{\cosh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{Df}\right) - \tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{DH}\right)\ senh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{Df}\right)} \qquad \text{(C-42)}$$

Substituyendo la constante A en la Ec. C-41 se obtiene la ecuación que representa la concentración en la matriz en función de la concentración en la fracturas:

$$\bar{C}_{mD}(z_D, s) = \left[\frac{\cosh\left(\sqrt{m(s)}\, z_D\right) - \tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{DH}\right)\ senh\left(\sqrt{m(s)}\, z_D\right)}{\cosh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{Df}\right) - \tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{DH}\right)\ senh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{Df}\right)}\right]\bar{C}_{fD}(r_D, s) \qquad \text{(C-43)}$$

Se requiere el gradiente de concentración en la matriz, por lo que se deriva la ec. anterior y se evalúa en la interfase fractura -matriz:

$$\frac{d\bar{C}_{mD}(z_{Df}, s)}{dz_D} = g(s)\bar{C}_{fD}(r_D, s) \qquad \text{(C-44)}$$

donde:

$$g(s) = \sqrt{m(s)}\left[\frac{\tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{Df}\right) - \tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{DH}\right)}{1 - \tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{DH}\right)\ \tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{Df}\right)}\right] \qquad \text{(C-45)}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ec. de flujo en las fracturas (ec. C-23):

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{d^2\overline{C_{fD}}(r_D, s)}{dr_D^{2}} - \frac{1}{r_D}\frac{d\overline{C_{fD}}(r_D, s)}{dr_D} - \lambda_D\overline{C_{fD}}(r_D, s) - \frac{1}{\sigma_D}\frac{d\overline{C_{mD}}(z_{Df}, s)}{dz_D} = \alpha_D\left[s\overline{C_{fD}}(r_D, s) - C_{fD}(r_D, 0)\right] \qquad \text{(C-46)}$$

Substituyendo la ec. C-44 y la condición inicial para las fracturas en la ecuación anterioren la ecuación anterior:

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{d^2\overline{C_{fD}}(r_D, s)}{dr_D^{2}} - \frac{1}{r_D}\frac{d\overline{C_{fD}}(r_D, s)}{dr_D} - \lambda_D\overline{C_{fD}}(r_D, s) - \frac{g(s)}{\sigma_D}\overline{C_{fD}}(r_D, s) = s\alpha_D\overline{C_{fD}}(r_D, s) \qquad \text{(C-47)}$$

Arreglando se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de coeficientes variables:

$$\frac{d^2\overline{C_{fD}}(r_D, s)}{dr_D^{2}} - \frac{1}{\alpha_D}\frac{d\overline{C_{fD}}(r_D, s)}{dr_D} - \beta(s) r_D\overline{C_{fD}}(r_D, s) = 0 \qquad \text{(C-48)}$$

donde:

$$\beta(s) = \frac{\sqrt{m(s)}}{\alpha_D\sigma_D}\left[\frac{\tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{DH}\right) - \tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{Df}\right)}{1 - \tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{DH}\right)\tanh\left(\sqrt{m(s)}\, z_{Df}\right)}\right] + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s$$

La solución general de la Ec. C-48:

$$\bar{C}_{fD}(r_D,s) = e^{\frac{r_D}{2\alpha_D}}\left[k_1 Ai\left(\frac{r_D\beta(s)+\frac{1}{4\alpha_D^2}}{(\beta(s))^{2/3}}\right)+k_2 Bi\left(\frac{r_D\beta(s)+\frac{1}{4\alpha_D^2}}{(\beta(s))^{2/3}}\right)\right] \quad \text{(C-49)}$$

Aplicando la transformada de Laplace a las condiciones de frontera para las fracturas:

$$\overline{C_{fD}}(1,s)=\frac{1}{s}$$

$$\lim_{r_D\to\infty}\overline{C_{fD}}(r_D,s)=0 \quad \text{(C-50)}$$

(C-51)

Aplicando la condiciones de frontera a la solución general (ec. C-49), se obtiene la solución en el espacio de Laplace:

$$\overline{C}_{fD}(r_D,s) = \frac{1}{s}e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}\left[\frac{Ai\left(\frac{r_D\beta(s)+1/(4\alpha_D^2)}{(\beta(s))^{2/3}}\right)}{Ai\left(\frac{\beta(s)+1/(4\alpha_D^2)}{(\beta(s))^{2/3}}\right)}\right]$$

donde: (C-52)

$$\beta(s) = \frac{\sqrt{m(s)}}{\alpha_D\sigma_D}\left[\frac{\tanh(\sqrt{m(s)}z_{DH})-\tanh(\sqrt{m(s)}z_{Df})}{1-\tanh(\sqrt{m(s)}z_{Df})\tanh(\sqrt{m(s)}z_{DH})}\right]+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s \quad \text{(C-53)}$$

$$m(s) = \frac{1}{D_{mD}}\left[\frac{[1-\phi_{mD}]M_{mD}s}{M_{mD}/\alpha_D+s}+\phi_{mD}\alpha_D s+\lambda_D\right] \quad \text{(C-54)}$$

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales cortos

Para tiempos adimensionales cortos (s grandes, s → ∞) en el numerador de los argumentos de la función de Airy predomina el primer término:

$$r_D\beta(s) >> \frac{1}{4\alpha_D^2} \quad \text{(C-55)}$$

$$\beta(s) >> \frac{1}{4\alpha_D^2}$$

(C-56)

Simplificando los argumentos:

$$Y \approx (\beta(s))^{1/3}r_D \quad \text{y} \quad Y_W \approx (\beta(s))^{1/3}$$

(C-57) y (C-58)

La función Airy se puede expresar en la forma siguiente:

$$Ai(Y) \approx \frac{A_o e^{-\frac{2}{3}Y^{3/2}}}{\sqrt{\pi}\,Y^{1/4}} \tag{C-59}$$

Al substituir las funciones Airy con sus argumentos respectivos en la Ec. C-51, simplificando y arreglando:

$$\overline{C}_{fD}(r_D, s) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}} \frac{e^{-\frac{2}{3}\left[r_D^{3/2} - 1\right]\sqrt{\beta(s)}}}{s} \tag{C-60}$$

A tiempos adimensionales cortos el volumen poroso inaccesible considerado en la matriz no influye en el comportamiento de la concentración en las fracturas, todo el volumen poroso de la matriz está disponible, esto es:

$$\phi_{mD} = 1 \tag{C-61}$$

Substituyendo C-61 en la Ec. C-54:

$$m(s) = \frac{\alpha_D}{D_{mD}}\left[s + \frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right] \tag{C-62}$$

Aplicando el límite para "s" grandes a la Ec. C-61, el primer término domina sobre el segundo:

$$m(s) = \frac{\alpha_D s}{D_{mD}} \tag{C-63}$$

A tiempos adimensionales cortos el parámetro "s" es grande, entonces la ec. C-63 es grande, substituyendo esta función de s en la diferencia de las tangentes hiperbólicas queda indeterminada, por lo que aplicando L'hopital, el primer término de la función de transferencia es cero (ec. C-53) y se obtiene:

$$\beta(s) = \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s \tag{C-64}$$

Substituyendo la Ec. C-64 en la ec. C-60 se obtiene el modelo "homogéneo y en fracturas":

$$C_{fD}(r_D, s) = \frac{1}{\sqrt[4]{r_D}} e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}} \frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2} - 1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s}}}{s} \tag{C-65}$$

Arreglando:

$$\bar{C}_{fD}(r_D,s)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{s-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}-\left(-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right)}}}{s-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}-\left(-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right)} \qquad \text{(C-66)}$$

La transformada inversa, utilizando el teorema de la traslación:

$$C_{fD}(r_D,t_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}}\,e^{-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}t_D}\,L^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{s}}}{s-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}}\right] \qquad \text{(C-67)}$$

Invirtiendo con tablas (Ec. 19 del Apéndice V) y arreglando se obtiene la *solución analítica aproximada a tiempos cortos* al modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos naturalmente fracturados:

$$C_{fD}(r_D,t_D)=F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+G(r_D)\,erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \qquad \text{(C-68)}$$

donde:

$$F(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}\,e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \quad ; \quad G(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \qquad \text{(C-69) y (C-70)}$$

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales largos

Aplicando el límite a la ec. C-54 a tiempos adimensionales largos. es decir, "s" tendiendo a cero:

$$\lim_{s\to 0} m(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{D_{mD}}\left[\frac{\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}s}{M_{mD}/\alpha_D+s}+\phi_{mD}s+\lambda_D\right]=\frac{1}{D_{mD}}\left[\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}+\lambda_D\right] \qquad \text{(C-71)}$$

Substituyendo el límite anterior en la ec. C-53 y debido a que los argumentos de la tangente hiperbólica para los valores prácticos son menores a uno, se obtiene:

$$\beta(s)=\frac{\sqrt{\frac{\lambda_D+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}\left[\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_D+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}\,z_{DH}\right)-\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_D+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}\,z_{Df}\right)\right]}{\alpha_D\sigma_D\left[1-\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_D+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}\,z_{DH}\right)\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_D+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}\,z_{Df}\right)\right]}+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s$$

Para argumentos pequeños, $\tanh(x) \approx x$:

$$\beta(s)=\frac{\dfrac{\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD}}{D_{mD}}\left[\dfrac{\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD}}{D_{mD}}z_{DH}-\dfrac{\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD}}{D_{mD}}z_{Df}\right]}{\alpha_D\sigma_D\left[1-\dfrac{\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD}}{D_{mD}}z_{DH}z_{Df}\right]}+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s$$

La *función de transferencia* fractura-matriz simplificada:

$$\beta(s)=\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\alpha_D\sigma_D\left[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}\right]}+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s \qquad \text{(C-72)}$$

Substituyendo la función de transferencia simplificada (ec C-72), en la ec. C-60:

$$\overline{C}_{fD}(r_D,s)=\frac{1}{\sqrt[4]{r_D}}e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}\frac{e^{-\frac{2[r_D^{3/2}-1]}{3}\sqrt{\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\alpha_D\sigma_D[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}]}+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s}}}{s}$$

(C-73)

En forma similar a la obtención anterior se determina la *solución analítica aproximada a tiempos largos* para el modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos naturalmente fracturados:

$$C_{fD}(r_D,t_D)=M(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}[r_D^{3/2}-1]-3t_D\sqrt{\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\sigma_D[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}]}+\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+\right.$$

$$\left.+L(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}[r_D^{3/2}-1]+3t_D\sqrt{\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\sigma_D[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}]}+\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \qquad \text{(C-74)}$$

donde:

$$M(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2[r_D^{3/2}-1]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\sigma_D[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}]}+\lambda_D}} \qquad \text{(C-75)}$$

$$L(r_D)=e^{\frac{4[r_D^{3/2}-1]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\sigma_D[D_{mD}/(\lambda_D+\alpha_D[1-\phi_{mD}]M_{mD})-z_{DH}z_{Df}]}+\lambda_D}} \qquad \text{(C-76)}$$

APÉNDICE D. FLUJO RADIAL DE TRAZADORES RADIACTIVOS EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS CON VOLUMEN POROSO INACCESIBLE (matriz tipo bloques cúbicos).

Modelo para flujo radial en las fracturas:

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{\partial^2 C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D^2}-\frac{1}{r_D}\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial r_D}-\lambda_D C_{fD}(r_D,t_D)+\frac{D_{mD}}{[d_D/6]}\frac{\phi_m}{\phi_f}\frac{\partial C_{mD}(z_{DH}+z_{Df},t_D)}{\partial z_D}=\alpha_D\frac{\partial C_{fD}(r_D,t_D)}{\partial t_D}$$

$$1\le r_D<\infty;\ t_D>0 \qquad \text{(D-1)}$$

Condición inicial: $C_{fD}(r_D,0)=0$

Condición de frontera interna: $C_{fD}(1,t_D)=1$

Condición de frontera externa: $\lim_{r_D\to\infty} C_{fD}(r_D,t_D)=0$ (D-2)

Modelo para flujo en la matriz cúbica:

$$\frac{D_{mD}}{z_D^2}\left[\frac{\partial}{\partial z_D}\left(z_D^2\frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial z_D}\right)\right]-\lambda_D C_{mD}(z_D,t_D)=\alpha_D[1-\phi_{mD}]\frac{\partial C_{smD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}+\alpha_D\phi_{mD}\frac{\partial C_{mD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}$$

$$0\le z_D\le z_{DH}+z_{Df};\quad t_D\ge 0 \qquad \text{(D-3)}$$

Condición inicial: $C_{mD}(z_D,0)=0$

Condición de frontera interna: $\frac{\partial C_{mD}(0,t_D)}{\partial z_D}=0$

Condición de frontera externa (interfase): $C_{mD}(z_{DH}+z_{Df},t_D)=C_{fD}(r_D,t_D)$ (D-4)

(El eje de referencia pasa por el centro del bloque)

Ritmo de concentración que se transfiere al volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\alpha_D\frac{\partial C_{smD}(z_D,t_D)}{\partial t_D}=M_{mD}[C_{mD}(z_D,t_D)-C_{smD}(z_D,t_D)] \qquad \text{(D-6)}$$

Condición inicial: $C_{smD}(z_D,0)=0$

Solución

Aplicado la transformada de Laplace a la ec. de flujo para la matriz, sustituyendo las condiciones iniciales y arreglando, se llega a la siguiente expresión:

$$D_{mD}\left[\frac{d^2\overline{C}_{mD}(z_D,s)}{dz_D^2}+\frac{2}{z_D}\frac{d\overline{C}_{mD}(z_D,s)}{dz_D}\right]-\lambda_D\overline{C}_{mD}(z_D,s)=\alpha_D\phi_{mD}s\overline{C}_{mD}(z_D,s)+\alpha_D[1-\phi_{mD}]s\overline{C}_{smD}(z_D,s)$$

(D-6)

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación que representa el ritmo de concentración transferida al de volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\alpha_D\left[s\overline{C_{smD}}(r_D,s)-C_{smD}(r_D,0)\right]=M_{mD}\left[\overline{C_{mD}}(z_D,s)-\overline{C_{smD}}(z_D,s)\right] \tag{D-7}$$

Substituyendo la condición inicial y despejando la concentración transferida al volumen poroso inaccesible en la matriz:

$$\overline{C_{smD}}(r_D,s)=\frac{M_{mD}}{M_{mD}+\alpha_D s}\overline{C_{mD}}(z_D,s) \tag{D-8}$$

Substituyendo la ecuación anterior en la ec. D-6:

$$D_{mD}\left[\frac{d^2\overline{C_{mD}}(z_D,s)}{dz_D^2}+\frac{2}{z_D}\frac{d\overline{C_{mD}}(z_D,s)}{dz_D}\right]-\lambda_D\overline{C_{mD}}(z_D,s)=\alpha_D\phi_{mD}s\overline{C_{mD}}(z_D,s)+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]s\frac{M_{mD}}{M_{mD}+\alpha_D s}\overline{C}_{mD}(z_D,s) \tag{D-9}$$

Agrupando se tiene:

$$\frac{d^2\overline{C_{mD}}(z_D,s)}{dz_D^2}+\frac{2}{z_D}\frac{d\overline{C_{mD}}(z_D,s)}{dz_D}-m(s)\overline{C_{mD}}(z_D,s)=0 \tag{D-10}$$

donde:

$$m(s)=\frac{1}{D_{mD}}\left[\lambda_D+\phi_{mD}\alpha_D s+\frac{\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}s}{M_{mD}/\alpha_D+s}\right]$$

Aplicando los cambios de variables siguientes:

$$z_D=\frac{w}{\sqrt{m(s)}} \tag{D-11}$$

$$\overline{C}_{mD}(z_D,s)=\frac{P_D(w)}{\sqrt{w}} \tag{D-12}$$

Derivando la variable de transformación:

$$\frac{dw}{dz_D}=\sqrt{m(s)}$$

La primera derivada utilizado la regla de la cadena:

$$\frac{d\overline{C}_{mD}(z_D,s)}{dz_D}=\frac{dw}{dz_D}\frac{d\overline{C}_{mD}(z_D,s)}{dw}=\sqrt{m(s)}\frac{d}{dw}\left(\frac{P_D(w)}{\sqrt{w}}\right)$$

Derivando con respecto a la nueva variable:

$$\frac{d\overline{C}_{mD}(z_D,s)}{dz_D}=\sqrt{m(s)}\left[\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{dP_D(w)}{dw}-\frac{1}{2w^{3/2}}P_D(w)\right] \tag{D-13}$$

La segunda derivada utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{d^2\overline{C_{mD}}(z_D,s)}{dz_D^2} = \sqrt{\overline{m}(s)}\,\frac{d}{dz_D}\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{dP_D(w)}{dw} - \frac{1}{2w^{3/2}}P_D(w)\right) = \sqrt{\overline{m}(s)}\left[\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{dp_D(w)}{dw} - \frac{1}{2w^{3/2}}P_D(w)\right)\right]\frac{dw}{dz_D}$$

Aplicando el operador derivada:

$$\frac{d^2\overline{C_{mD}}(z_D,s)}{dz_D^2} = m(s)\left[\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{d^2P_D(w)}{dw^2} - \frac{1}{2w^{3/2}}\frac{dP_D(w)}{dw} - \frac{1}{2w^{3/2}}\frac{dP_D(w)}{dw} + \frac{3}{4w^{5/2}}P_D(w)\right]$$

Agrupando términos en la ecuación anterior:

$$\frac{d^2\overline{C_{mD}}(z_D,s)}{dz_D^2} = m(s)\left[\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{d^2P_D(w)}{dw^2} - \frac{1}{w^{3/2}}\frac{dP_D(w)}{dw} + \frac{3}{4w^{5/2}}P_D(w)\right] \tag{D-15}$$

Substituyendo la segunda y primera derivada así como la función de transformación propuesta:

$$\frac{m(s)}{\sqrt{w}}\frac{d^2P_D(w)}{dw^2} - \frac{m(s)}{w^{3/2}} + \frac{dP_D(w)}{dw} + \frac{3m(s)}{4w^{5/2}}P_D(w) + \frac{2m(s)}{w^{3/2}}\frac{dP_D(w)}{dw} - \frac{2\sqrt{m(s)}\sqrt{m(s)}}{w}P_D(w) - \frac{m(s)P_D(w)}{w^{1/2}} = 0$$

Arreglando:

$$\frac{m(s)}{\sqrt{w}}\frac{d^2P_D(w)}{dw^2} - \frac{m(s)}{w^{3/2}}\frac{dP_D(w)}{dw} - \frac{m(s)}{4w^{5/2}}P_D(w) - \frac{m(s)}{w^{1/2}}P_D(w) = 0$$

Simplificando y multiplicando por $\frac{w^{5/2}}{m(s)}$ se obtiene la ecuación siguiente:

$$w^2\frac{d^2P_D(w)}{dw^2} + w\frac{dP_D(w)}{dw} - \left[w^2 + \frac{1}{4}\right]P_D(w) = 0 \tag{D-16}$$

La solución de la ecuación Bessel Modificada de orden $\nu=\frac{1}{2}$:

$$P_D(w) = k_1 I_{1/2}(w) + k_2 I_{-1/2}(w) \tag{D-17}$$

Las definiciones de las funciones Bessel fraccionarias (pág. 443 Abramowitz y Stegún):

$$I_{1/2}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}}senh(w) \tag{D-18}$$

$$I_{-1/2}(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi w}}\cosh(w) \qquad \text{(D-19)}$$

Substituyendo las definiciones anteriores y dividiendo entre $\sqrt{w}$:

$$\frac{P_D(w)}{\sqrt{w}} = \frac{k_1}{w}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, senh\,(w) + \frac{k_2}{w}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cosh(w) \qquad \text{(D-20)}$$

Cambiando de variables se obtiene la solución general para la matriz:

$$\overline{C}_{mD}(z_D,s) = k_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{senh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)}{z_D\sqrt{m(s)}} + k_2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cosh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)}{z_D\sqrt{m(s)}} \qquad \text{(D-21)}$$

Transformando al espacio de Laplace las condiciones de frontera:

$$\frac{d\overline{C_{mD}}(0,s)}{dz_D}=0\,; \qquad \text{(D-22)}$$

$$\overline{C_{mD}}\left(z_{DH}+z_{Df}\right)=\overline{C_{fD}}(r_D,s) \qquad \text{(D-23)}$$

Derivando la solución general:

$$\frac{d\overline{C_{mD}}(0,s)}{dz_D}=k_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{cosh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)}{z_D}-\frac{senh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)}{\sqrt{m(s)}z_D^2}\right]+k_2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{cosh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)}{z_D}-\frac{senh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)}{\sqrt{m(s)}z_D^2}\right] \qquad \text{(D-24)}$$

Arreglando y evaluando cuando z_D es cero:

$$z_D^2\sqrt{m(s)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{dC_{mD}(z_D,s)}{dz_D}=k_1\left[z_D\sqrt{m(s)}\cosh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)-senh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)\right]+k_2\left[z_D\sqrt{m(s)}senh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)-\cosh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)\right] \qquad \text{(D-25)}$$

Substituyendo los valores:

$$0=k_1[0-0]+k_2[0-1] \qquad \text{(D-26)}$$

Es necesario que la constante k_2 sea igual a cero, por lo que substituyendo en la solución general:

$$\overline{C}_{mD}(z_D,s)=k_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{senh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)}{z_D\sqrt{m(s)}} \qquad \text{(D-27)}$$

Utilizando la condición de frontera externa:

$$\overline{C_{mD}}(z_{DH}+z_{Df},s)=k_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{senh\left(\left[z_{DH}+z_{Df}\right]\sqrt{m(s)}\right)}{\left[z_{DH}+z_{Df}\right]\sqrt{m(s)}}=\overline{C_{fD}}(r_D,s) \qquad \text{(D-28)}$$

Despejando la constante:

$$k_1 = \frac{\left[z_{DH} + z_{Df}\right]\sqrt{m(s)}\,\overline{C_{fD}}(r_D, s)}{\sqrt{2/\pi}\; senh\left(\left[z_{DH} + z_{Df}\right]\sqrt{m(s)}\right)} \tag{D-29}$$

La solución para la matriz en términos en función de la concentración en las fracturas:

$$\overline{C_{mD}}(z_{Do}, s) = \frac{\left[z_{DH} + z_{Df}\right]}{senh\left(\left[z_{DH} + z_{Df}\right]\sqrt{m(s)}\right)}\left[\frac{senh\left(z_D\sqrt{m(s)}\right)}{z_D}\right]\overline{C_{fD}}(r_D, s) \tag{D-30}$$

Para acoplar el término correspondiente a la transferencia de masa que pierden las fracturas y gana la matriz en el contacto fractura matriz, es necesario derivar la ec. para la matriz con respecto a z_D.

$$\frac{d\overline{C}_{mD}(z_D, s)}{dz_D} = \frac{\left[z_{DH} + z_{Df}\right]}{senh\left(\sqrt{\overline{m(s)}}\left[z_{DH} + z_{Df}\right]\right)}\left[-\frac{senh\left(\sqrt{\overline{m(s)}}\,z_D\right)}{z_D^2} + \frac{\sqrt{\overline{m(s)}}\cosh\left(\sqrt{\overline{m(s)}}\,z_D\right)}{z_D}\right]\overline{C}_{fD}(r_D, s) \tag{D-31}$$

Evaluando en $z_{DH} + z_{Df}$:

$$\frac{d\overline{C}_{mD}(z_{DH} + z_{Df}, s)}{dz_D} = \sqrt{\overline{m(s)}}\left[-\frac{1}{\sqrt{\overline{m(s)}}\left[z_{DH} + z_{Df}\right]} + \coth\left(\sqrt{\overline{m(s)}}\left[z_{DH} + z_{Df}\right]\right)\right]\overline{C}_{fD}(r_D, s) \tag{D-32}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ec. flujo radial en las fracturas, y substituyendo la condición inicial:

$$\frac{\alpha_D}{r_D}\frac{d^2\overline{C}_{fD}(r_D, s)}{dr_D^2} - \frac{1}{r_D}\frac{d\overline{C_{fD}}(r_D, s)}{dr_D} - \lambda_D\overline{C}_{fD}(r_D, s) + \frac{D_{mD}}{\left[d_D/6\right]}\frac{\phi_m}{\phi_f}\frac{d\overline{C}_{mD}(z_{DH} + z_{Df}, s)}{dz_D} = \alpha_D s\overline{C}_{fD}(r_D, s) \tag{D-33}$$

Substituyendo la Ec. correspondiente al término de interacción entre las dos regiones y arreglando, se obtiene la ecuación diferencial para la región móvil:

$$\frac{d^2\overline{C}_{fD}(r_D, s)}{dr^2_D} - \frac{1}{\alpha_D}\frac{d\overline{C}_{fD}(r_D, s)}{dr_D} - r_D\beta(s)\overline{C}_{fD}(r_D, s) = 0 \tag{D-34}$$

donde:

$$\beta(s) = \frac{6\phi_m D_{mD}\sqrt{\overline{m(s)}}}{\alpha_D\left[z_{DH} + z_{Df}\right]\phi_f}\left[\coth\left(\left[z_{DH} + z_{Df}\right]\sqrt{\overline{m(s)}}\right) - \frac{1}{\left[z_{DH} + z_{Df}\right]\sqrt{\overline{m(s)}}}\right] + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s$$

Aplicando la transformada de Laplace a las condiciones de frontera para las fracturas:

$$\bar{C}_{fD}(r_{DH}, s) = \frac{1}{s}; \tag{D-35}$$

$$\lim_{r_D \to \infty} \bar{C}_{fD}(r_D, s) = 0 \tag{D-36}$$

Al substituir las condiciones de frontera se obtiene la solución:

$$\bar{C}_{fD}(r_D, s) = \frac{1}{s} e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}} \left[\frac{Ai\left(\dfrac{r_D \beta(s) + 1/4\alpha_D^2}{(\beta(s))^{2/3}} \right)}{Ai\left(\dfrac{\beta(s) + 1/4\alpha_D^2}{(\beta(s))^{2/3}} \right)} \right] \tag{D-37}$$

donde:

$$\beta(s) = \frac{6\phi_m D_{mD} \sqrt{m(s)}}{\alpha_D [z_{DH} + z_{Df}] \phi_f} \left[\coth([z_{DH} + z_{Df}] \sqrt{m(s)}) - \frac{1}{[z_{DH} + z_{Df}] \sqrt{m(s)}} \right] + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s \tag{D-38}$$

$$m(s) = \frac{1}{D_{mD}} \left[\frac{[1 - \phi_{mD}] M_{mD} s}{M_{mD} / \alpha_D + s} + \lambda_D + \phi_{mD} \alpha_D s \right] \tag{D-39}$$

Se observa que si $\phi_{mD} = 1$, $\phi_f = 1$ y $\alpha_D = 1$, no hay volumen poroso inaccesible en la matriz, se obtiene la solución de Ramírez y Samaniego (1992).

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales cortos

Para tiempos adimensionales cortos (s grandes, s $\rightarrow \infty$) predomina el primer término:

$$\beta(s) r_D >> \frac{1}{4\alpha_D^2} \tag{D-40}$$

$$\beta(s) >> \frac{1}{4\alpha_D^2} \tag{D-41}$$

Simplificando los argumentos de la función de Airy de la ec. D-37:

$$Y \approx (\beta(s))^{1/3} r_D \quad \text{y} \quad Y_W \approx (\beta(s))^{1/3} \tag{D-42) y (D-43}$$

La función Airy se puede expresar en la forma siguiente:

$$Ai(Y) \approx \frac{A_o e^{-\frac{2}{3} Y^{3/2}}}{\sqrt{\pi} Y^{1/4}} \tag{D-44}$$

Al substituir las funciones Airy con sus argumentos respectivos en la ec. D-37, simplificando y arreglando:

$$\overline{C}_{fD}\left(r_D, s\right) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}} \frac{e^{-\frac{2}{3}\left[r_D^{3/2}-1\right]\sqrt{\beta(s)}}}{s} \tag{D-45}$$

A tiempos adimensionales cortos el volumen poroso inaccesible considerado en la matriz no influye en el comportamiento de la concentración en las fracturas, todo el volumen poroso de la matriz está disponible:

$$\phi_{mD} = 1 \tag{D-46}$$

Substituyendo D-46 en la Ec. D-39:

$$m(s) = \frac{\alpha_D}{D_{mD}}\left[s + \frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right] \tag{D-47}$$

Aplicando el límite para "s" grandes a la Ec. D-47, el primer término domina sobre el segundo:

$$m(s) = \frac{\alpha_D s}{D_{mD}} \tag{D-48}$$

A tiempos adimensionales cortos el parámetro "s" es grande, entonces la ec. D-48 es grande, substituyendo esta en la diferencia de las tangentes hiperbólicas queda indeterminada, por lo que aplicando L'hopital, se obtiene:

$$\beta(s) = \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s \tag{D-49}$$

Substituyendo la Ec. D-49 en la ec. D-45 se obtiene el modelo "homogéneo en fracturas":

$$\bar{C}_{fD}\left(r_D, s\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{r_D}} e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}} \frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s}}}{s} \tag{D-50}$$

Arreglando:

$$\bar{C}_{fD}\left(r_D, s\right) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}} \frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{s-\left(-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right)}}}{s - \frac{\lambda_D}{\alpha_D} - \left(-\frac{\lambda_D}{\alpha_D}\right)} \tag{D-51}$$

La transformada inversa, utilizando el teorema de la traslación[8]:

$$C_{fD}\left(r_D, t_D\right) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{\sqrt[4]{r_D}} e^{-\frac{\lambda_D}{\alpha_D} t_D} L^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{s}}}{s - \frac{\lambda_D}{\alpha_D}}\right] \quad \text{(D-52)}$$

Invirtiendo con tablas (Ec. 19 del Apéndice V) y arreglando se obtiene la *solución analítica aproximada a tiempos cortos* al modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos naturalmente fracturados:

$$C_{fD}(r_D, t_D) = F(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right] - 3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right) + U(r_D) erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right] + 3t_D\sqrt{\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right]$$

(D-53)

donde:

$$F(r_D) = \frac{e^{\frac{r_D - 1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}} e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \qquad U\left(r_D\right) = e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\lambda_D}} \quad \text{(D-54) y (D-55)}$$

Solución analítica aproximada a tiempos adimensionales largos

Aplicando el límite a la ec. D-39 a tiempos adimensionales largos, es decir, "s" tendiendo a cero:

$$\lim_{s\to 0} m(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{D_{mD}}\left[\frac{\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}s}{M_{mD}/\alpha_D + s} + \phi_{mD}s + \lambda_D\right] = \frac{1}{D_{mD}}\left[\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}\right] \quad \text{(D-56)}$$

Substituyendo el límite anterior en la ec. D-45 y debido a que los argumentos de la tangente hiperbólica para los valores prácticos son menores a uno, se obtiene:

$$\beta(s) = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}\left[\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}z_{DH}\right) - \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}z_{Df}\right)\right]}{\alpha_D\sigma_D\left[1 - \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}z_{DH}\right)\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}z_{Df}\right)\right]} + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s$$

Para argumentos pequeños, $\tanh(x) \approx x$:

$$\beta(s) = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}\left[\sqrt{\frac{\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}z_{DH} - \sqrt{\frac{\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}}z_{Df}\right]}{\alpha_D\sigma_D\left[1 - \frac{\lambda_D + \alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}}{D_{mD}}z_{DH}z_{Df}\right]} + \frac{\lambda_D}{\alpha_D} + s$$

La *función de transferencia* fractura-matriz simplificada:

$$\beta(s)=\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\alpha_D\sigma_D\left[D_{mD}/\left(\lambda_D+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}\right)-z_{DH}z_{Df}\right]}+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s \qquad \text{(D-57)}$$

Substituyendo la función de transferencia (ec C-71), en la ec. C-59:

$$C_{fD}(r_D,s)=\frac{1}{\sqrt[4]{r_D}}e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}\frac{e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3}\sqrt{\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\alpha_D\sigma_D\left[D_{mD}/\left(\lambda_D+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}\right)-z_{DH}z_{Df}\right]}+\frac{\lambda_D}{\alpha_D}+s}}}{s}$$

(D-58)

En forma similar a la obtención anterior se determina la *solución analítica aproximada a tiempos largos* para el modelo propuesto de flujo radial de trazador radiactivo en yacimientos naturalmente fracturados:

$$C_{fD}(r_D,t_D)=M(r_D)\left[erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]-3t_D\sqrt{\frac{z_{DH}-z_{Df}}{\sigma_D\left[D_{mD}/\left(\lambda_D+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}\right)-z_{DH}z_{Df}\right]}+\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)+\right.$$

$$\left.+L(r_D)erfc\left(\frac{\sqrt{\alpha_D}\left[r_D^{3/2}-1\right]+3t_D\sqrt{\frac{\left[z_{DH}-z_{Df}\right]}{\sigma_D\left[D_{mD}/\left(\lambda_D+\alpha_D\left[1-\phi_{mD}\right]M_{mD}\right)-z_{DH}z_{Df}\right]}+\lambda_D}}{3\sqrt{\alpha_D t_D}}\right)\right] \qquad \text{(D-59)}$$

donde:

$$M(r_D)=\frac{e^{\frac{r_D-1}{2\alpha_D}}}{2\sqrt[4]{r_D}}e^{-\frac{2\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\left[z_{DH}-z_{Df}\right]/\sigma_D\left[D_{mD}/\lambda_D-z_{DH}z_{Df}\right]+\lambda_D}} \qquad \text{(D-60)}$$

$$L(r_D)=e^{\frac{4\left[r_D^{3/2}-1\right]}{3\sqrt{\alpha_D}}\sqrt{\left[z_{DH}-z_{Df}\right]/\sigma_D\left[D_{mD}/\lambda_D-z_{DH}z_{Df}\right]+\lambda_D}} \qquad \text{(D-61)}$$