



00382



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

Posgrado en Ciencias Físicas  
Instituto de Física  
Instituto de Ciencias Nucleares  
Facultad de Ciencias

"Estructura de Cúmulos alfa en los isótopos del berilio"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

M. en C. LEANDRO HERNÁNDEZ DE LA PEÑA

294420

DIRECTORES DE TESIS:

DR. PETER O. HESS BECHSTEDT

DR. EFRAÍN R. CHÁVEZ LOMELÍ



México, 2001



posgrado en ciencias físicas  
U N A M



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi familia*

## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, hermano y abuela. En ese entorno familiar aprendí muchas de las cosas más importantes que he necesitado a lo largo de estos años. Espero que esta Tesis les sirva de estímulo y represente para ellos una alegría en estos tiempos tan difíciles para nuestra familia y nuestro país.

No puedo olvidar mencionar en este momento a mis amigos en Cuba, Dr. Oscar E. Rodríguez Hoyos y Dr. Fernando Guzmán Martínez. Sin su apoyo profesional y personal esta aventura ni siquiera hubiese comenzado. También les agradezco por su comprensión desde antes y a lo largo de estos años.

Muy importante para mí ha sido la guía del Dr. Peter O. Hess Bechstedt. Le agradezco sus esfuerzos y paciencia a lo largo de estos años de trabajo. La presente Tesis es un resultado también de nuestro trabajo en conjunto.

Me es grato reconocer la valiosísima ayuda del Dr. Efraim R. Chávez Lomeli, codirector de esta Tesis, durante estos cinco años. Siempre encontré en él consejo y apoyo inmediato para resolver todos los contratiempos imaginables.

También agradezco a la Dra. María Esther Ortiz Salazar, miembro de mi Comité Tutoral, por su contribución al desarrollo de mi trabajo en estos años.

Quiero agradecer al Dr. Manuel de Llano Garza, al Dr. Arturo Menchaca Rocha, al Dr. Roelof Bijker, al Dr. Javier Castro Hernández y al Dr. Octavio Castaños Garza, por sus valiosas sugerencias, comentarios y críticas durante la revisión de este material.

Un agradecimiento muy especial a Yanalté y a su familia, en particular a su mamá. Ellos me han hecho sentir como en casa y enseñado a querer más a México.

Agradezco al Dr. Pedro Pablo González Pérez por su amistad personal, su apoyo total y estímulo constante en la etapa final de mi trabajo doctoral.

Un último agradecimiento para la Subdirección General de Intercambio Académico de la UNAM por la beca completa con que han apoyado mis estudios de Posgrado durante estos cinco años, en especial a Ana María Vaca por su atenta y constante ayuda.

*“El sentimiento precede siempre al conocimiento”*

- Leonardo Da Vinci

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Los Modelos de Cúmulos.</b>	<b>8</b>
2.1	El Modelo del Grupo Resonante (RGM).	9
2.2	El Método de la Coordenada Generadora (GCM).	9
2.3	El Modelo de Orbitales Moleculares (MOM).	10
2.4	Los modelos microscópicos de cúmulos.	11
2.5	El modelo de Dinámica Molecular Antisimetrizada (AMD).	11
2.6	Otros modelos.	12
<b>3</b>	<b>El Modelo SU(3) Nuclear.</b>	<b>16</b>
3.1	El oscilador armónico.	16
3.2	Los grupos Simétrico y Unitario.	18
3.2.1	Clasificación según $S_k$ .	18
3.2.2	Clasificación según $U_s$ .	19
3.2.3	Clasificación simultánea según $S_A$ y SU(3).	19
3.3	Clasificación según SU(3) y $R_3$ .	19
3.4	El operador de Casimir de segundo orden de SU(3).	20
<b>4</b>	<b>El Modelo Algebraico Semimicroscópico de Cúmulos (SACM).</b>	<b>22</b>
4.1	El modelo del vibrón.	22
4.2	Estructura de grupos del SACM.	23
4.3	El espacio microscópico del modelo.	23
4.3.1	La condición de Wildermuth.	24
4.3.2	La condición de correspondencia entre las bases del modelo de cúmulos y las del modelo de capas.	25
4.3.3	La cadena de grupos relevantes en el SACM.	27
4.3.4	Las funciones de onda y el Principio de exclusión de Pauli.	29
4.4	Los operadores fenomenológicos.	30
4.4.1	El sistema de cúmulos $^{12}\text{C} + \alpha$ .	32
4.4.2	El sistema de cúmulos $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ .	33
4.4.3	Los operadores de transiciones electromagnéticas.	33
<b>5</b>	<b>Extensión del SACM a núcleos de la capa p.</b>	<b>35</b>
5.1	La cadena de grupos relevantes.	35
5.2	Las funciones base.	36
5.3	El hamiltoniano para los núcleos de la capa p.	37

<b>6</b>	<b>Aplicaciones a los isótopos del berilio, desde el <math>{}^6\text{Be}</math> al <math>{}^{12}\text{Be}</math>.</b>	<b>40</b>
6.1	El isótopo ${}^8\text{Be}$ .	41
6.1.1	El espacio de Hilbert.	41
6.1.2	La deformación.	44
6.2	El isótopo ${}^9\text{Be}$ .	46
6.2.1	El espacio de Hilbert.	46
6.2.2	La deformación.	49
6.3	El isótopo ${}^{10}\text{Be}$ .	50
6.3.1	El espacio de Hilbert.	50
6.3.2	La deformación.	54
6.4	El isótopo ${}^{11}\text{Be}$ .	55
6.4.1	El espacio de Hilbert.	55
6.4.2	La deformación.	61
6.4.3	Consideraciones generales sobre el ${}^{11}\text{Be}$ .	61
<b>7</b>	<b>Extrapolación a partir del <math>{}^9\text{Be}</math>.</b>	<b>64</b>
<b>8</b>	<b>Conclusiones.</b>	<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Determinación de las irreps <math>U_{C_k}^{TS}(4)</math> para los isótopos del berilio.</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Obtención de las irreps de <math>SU(3)</math> totales del SACM para las excitaciones <math>0\hbar\omega</math> y <math>1\hbar\omega</math> en el caso del <math>{}^{11}\text{Be}</math>.</b>	<b>78</b>

# 1 Introducción.

Es un hecho bien conocido que para el conocimiento del núcleo atómico resulta necesario el estudio sistemático y paralelo de las reacciones y la estructura nucleares. También sabemos que es necesario efectuar experimentos que nos muestren cómo ocurren las cosas y formular teorías que nos expliquen por qué ocurren de ese modo. Un ejemplo muy claro de todo esto lo tenemos en los fuertes vínculos tanto teóricos como experimentales que relacionan al estudio de las resonancias moleculares, la radioactividad de cúmulos, la multifragmentación y los modelos de cúmulos.

Las primeras observaciones de estados moleculares que se excitan como resultado de reacciones nucleares datan de la década del 60 [1]. Estas observaciones experimentales fueron explicadas a lo largo de las décadas de los 70 y los 80 suponiendo que, debido al efecto Landau Zener y de modo análogo a como ocurre con las moléculas no monoatómicas, los nucleones más externos describen órbitas en torno al sistema binario constituido por los centros de los dos núcleos que participan en la reacción. Esta situación es descrita teóricamente, entre otros, por el Modelo de Capas de 2 Centros (TCSM) [2].

En los años 80 se efectuaron también numerosos experimentos no sólo para estudiar las resonancias nucleares [3] sino que también para estudiar los procesos de multifragmentación [4] y las reacciones de transferencia [5]. Aunque hay determinados enfoques que destacan la ausencia de efectos estructurales en algunos de estos procesos de multifragmentación [6], la mayoría de los trabajos se dedican a entender los resultados experimentales como una consecuencia de las características estructurales de los sistemas nucleares en cuestión.

Existe una cantidad apreciable de publicaciones que presentan evidencia experimental de una producción importante de fragmentos complejos en reacciones inducidas por iones pesados cuando la energía de bombardeo es del orden de 3 o más veces la barrera coulombiana y la suma de las masas de los núcleos en colisión es del orden o superior a las 100 uma. Investigadores del Departamento de Física Experimental del Instituto de Física de la UNAM han llevado a cabo algunos de estos trabajos en colaboración con investigadores del Oak Ridge National Laboratory [7, 8, 9, 10, 11].

Los modelos de cúmulos constituyen uno de los enfoques teóricos que podrían, en principio, contribuir a explicar los experimentos de multifragmentación y de transferencia como los ya mencionados. La idea esencial que subyace en estos modelos teóricos es considerar a los núcleos como constituidos no simplemente por nucleones que se en-

cuentran ocupando determinadas órbitas en torno a un único centro sino que dentro de un núcleo los nucleones podrían estar divididos en grupos correlacionados de algún modo entre sí de manera que formen "cúmulos" en el interior del sistema.

Esta correlación entre diferentes nucleones se concibe de una manera general y no implica necesariamente que dichos nucleones estén materialmente agrupados en torno a un centro. Dicho más gráficamente, no se trata en general de núcleos pequeños que se encuentran "dentro" de los núcleos más grandes.

De todos modos, aquí se supone que esta correlación entre grupos de nucleones en el seno del núcleo, explicaría también la emisión preferente, no de nucleones aislados ni de cualquier fragmento más pequeño sino, de ciertos sistemas nucleares determinados: partículas alfa, carbono, oxígeno y otros núcleos más pesados, en un fenómeno que ha sido denominado radioactividad de cúmulos [12, 13]. En este contexto es lógico que algunos de los fragmentos sean núcleos con números mágicos de nucleones.

En esta tesis nosotros trabajaremos usando uno de los modelos de cúmulos existentes: el Modelo Algebraico Semimicroscópico de Cúmulos (SACM) [14]. Uno de nuestros propósitos principales es aplicar dicho modelo a la cadena de isótopos del berilio. Es importante señalar que en núcleos ligeros se han efectuado pocos estudios teóricos sistemáticos.

En el SACM los grados de libertad internos de los cúmulos son tratados en términos del modelo de capas  $SU(3)$  y el movimiento relativo es descrito por el modelo del vibrón, el cual tiene estructura  $U(4)$ . Este modelo tiene, para el caso de 2 cúmulos, una estructura de grupos  $U_{C_1}^{ST}(4) \otimes U_{C_1}(3) \otimes U_R(4) \otimes U_{C_2}(3) \otimes U_{C_2}^{ST}(4)$ . Las interacciones fenomenológicas se obtienen en términos de los generadores de los grupos. El espacio del modelo se construye libre de estados prohibidos por Pauli y de los espúreos correspondientes al movimiento del centro de masa, de modo análogo a como se hace en el modelo de cúmulos  $SU(3)$ .

El estudio de los isótopos del berilio es de gran interés para los modelos de cúmulos ya que se trata de sistemas que pueden ser considerados precisamente como poseedores de una estructura de cúmulos donde los núcleos están constituidos por un carozo formado con 2 cúmulos (partículas alfa) a los cuales adicionamos un número adecuado de neutrones [15, 16, 17]. El  $^{10}\text{Be}$  también participa en la formación de moléculas nucleares cuyo carozo está constituido por 3 cúmulos, las cuales fueron observadas en [18] y para las cuales ha sido publicado un modelo en [19].

En [15, 16] se usa el modelo de Dinámica Molecular Antisimetrizada (AMD) en el cual la estructura de cúmulos, en el sentido de cúmulos físicos separados, aparece de modo natural y no como una hipótesis formulada *a priori*.

En [17] se usa el Modelo de Capas de 2 Centros (TCSM) [2] obteniéndose para el carozo una posición de equilibrio igual a la distancia de 2 cúmulos alfa. El  $^{11}\text{Be}$ , que presenta la dificultad de ser un núcleo con "halo" y cuyo estado base ha sido determinado como el  $\frac{1}{2}^+$  de paridad anormal, fue estudiado experimentalmente en [20].

Otro intento de explicación [21] de la estructura de los isótopos del berilio se efectuó por medio de grandes y complicados cálculos según el modelo de capas usando una interacción efectiva de 2 cuerpos que incluyó la excitación de varias capas. Lógicamente, debido a los presupuestos de que se parte en el modelo de capas, no se dedujo en ese caso la existencia de una estructura de cúmulos.

Existen otros trabajos relacionados con uno o varios de los isótopos del berilio, realizados usando no sólo modelos de cúmulos [22] sino también basados en el modelo de capas [23]. Este trabajo, y ésta es una de sus virtudes, está entre los más escasos que abarcan simultáneamente el estudio de varios de estos isótopos, en este caso  $^8\text{Be}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{Be}$  y  $^{11}\text{Be}$  principalmente.

Debido a que los núcleos de Be deben poder describirse también por medio del modelo de capas (si se incluyen excitaciones entre capas) y el modelo de cúmulos es una descripción equivalente [24] en el sentido de que estos modelos pueden ser mapeados entre sí en el límite del oscilador armónico, ambos modelos deben arrojar resultados similares para dichos sistemas.

En esta tesis nos proponemos mostrar que realmente ambas descripciones son válidas, para ello usaremos el SACM el cual representa un punto intermedio de enlace entre cálculos según el modelo de capas puro y aquellos siguiendo la concepción de los cúmulos. Entre nuestros logros está que nosotros mostramos que, usando el SACM, podemos describir incluso la estructura global de núcleos que presentan "halo" de neutrones (aunque subsisten problemas relacionados con la larga "cola" presente en la estructura de dichos sistemas).

La interacción cuadrupolo-cuadrupolo desempeñará un papel esencial al determinar la gran deformación de esos núcleos en la capa p. Como veremos más adelante, es debido a ella que, para el  $^{11}\text{Be}$ , ocurre una inversión de capas. Hay que tener el cuidado de no interpretar a todos los estados de los isótopos del berilio como resultado

de un carozo de 2 partículas alfa. Nosotros mostramos casos en que no hay superposición de los estados con esa estructura de cúmulos. En particular, el estado  $\frac{1}{2}^-$  a 0.320 MeV en  $^{11}\text{Be}$  se encuentra en ese caso y, de manera similar, el estado  $4^+$  que se predijo en la banda base del  $^{10}\text{Be}$  [15] no existe en nuestra descripción (está prohibido según el Principio de Pauli). Tampoco aparece en nuestro espacio modelo a bajas energías el estado  $6^+$  que se obtuvo en [16] como parte de la banda  $0_2^+$  del  $^{10}\text{Be}$ .

La estructura de la tesis es la siguiente:

En la sección 2 nos hemos referido, en líneas muy generales, a algunos de los modelos de cúmulos más usados en la literatura. Allí hemos hecho cierto énfasis en los resultados que se obtuvieron al estudiar los isótopos del Be. También dedicamos, al final de esa sección, algunos comentarios a los resultados que se obtienen al estudiar los isótopos del berilio con otros modelos que no son de cúmulos.

En la sección 3 hemos descrito algunas de las características fundamentales del modelo  $SU(3)$  nuclear. Básicamente, allí hemos analizado los diferentes grupos que intervienen en el etiquetado del modelo de capas  $SU(3)$  lo cual nos lleva a la cadena de grupos relevantes. También nos referimos al operador de Casimir de segundo orden y a su significado físico en dicho modelo.

En la sección 4 se explican las ideas básicas del Modelo Algebraico Semimicroscópico de Cúmulos (SACM). Primeramente se explica el modelo del vibrón que es el usado para describir el movimiento relativo de los cúmulos en el SACM. También se aclara la estructura de grupos del SACM. La condición de Wildermuth es abordada, y aplicada inmediatamente después como ejemplo al  $^8\text{Be}$ . Se formula la condición de correspondencia, la cual es un aporte novedoso de los creadores del SACM, y después de establecer cuál es la cadena de grupos relevantes se muestra, a través de 2 ejemplos tomados de la literatura, cómo se construyen los operadores fenomenológicos en el marco de la Aproximación de Simetría Dinámica.

Como algo nuevo que no está presente en la literatura hasta ahora, en la sección 5 se extiende el SACM a algunos núcleos de masa impar, específicamente a los de la capa p (isótopos del berilio). Se muestra que una combinación particular del momento angular orbital y del espín total es equivalente a la interacción de Coriolis y usamos también una manera novedosa de describir las diferentes bandas usando para ello un término donde está presente el operador de Casimir de segundo orden de las representaciones irreducibles (irreps) de  $SU(3)$ .

En el pasado se han realizado algunos intentos de discutir núcleos de masa impar en términos de modelos algebraicos de cúmulos [25]. Sin embargo, esos núcleos no han sido estudiados sistemáticamente en el contexto del SACM sino que sólo se han hecho algunas aplicaciones ocasionales a los mismos [25, 26, 27]. En particular, se ha considerado el caso del  $^{19}\text{F}$ , entre otras razones porque es un sistema de cúmulos que ha sido muy bien estudiado tanto teórica como experimentalmente.

En la sección 6 se aplica el modelo a los isótopos del berilio desde el  $^6\text{Be}$  al  $^{12}\text{Be}$ . Se muestra que desde el  $^6\text{Be}$  hasta el  $^{10}\text{Be}$  a bajas energías dominan los estados en la capa de valencia, en tanto que en el  $^{11}\text{Be}$  tiene lugar una inversión de capas. En el  $^{11}\text{Be}$  el estado base está formado por una excitación  $1\hbar\omega$  (donde  $\hbar\omega$  es la distancia entre las capas) mientras que la banda rotacional, que comienza con un estado  $\frac{3}{2}^-$  a 3.960 MeV, es una excitación  $2\hbar\omega$ . Las excitaciones  $n\hbar\omega$  mayores se encuentran a mayores energías. Este interesante efecto es producto de la combinación de la apertura de la capa p en términos de agujeros y el corrimiento de los nucleones a capas más altas. La reproducción de ese conocido efecto experimental es también uno de los aspectos positivos de este trabajo.

La sección 7 contiene la explicación del modo en que realizamos una extrapolación de los parámetros del modelo (a partir del  $^9\text{Be}$ ) lo cual es necesario para comprender las características generales de los isótopos del berilio. Allí se ve que el modelo es capaz de reproducir simultáneamente, con un solo ajuste, las características generales de los isótopos  $^6\text{Be}$ ,  $^7\text{Be}$ ,  $^8\text{Be}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{Be}$  y  $^{11}\text{Be}$ .

La octava y última sección está dedicada a las conclusiones. Finalmente, aparecen dos apéndices que explican algunos detalles engorrosos de los cálculos.

## 2 Los Modelos de Cúmulos.

En esta sección comentaremos de manera bastante breve y general las características más sobresalientes de algunos de los modelos de cúmulos más conocidos. No todos estos modelos han sido usados para el estudio de los isótopos del Be. En los casos en que se hayan estudiado los isótopos del Be, que constituyen el tema de esta tesis, haremos referencia a los resultados generales obtenidos.

Finalmente, reseñaremos brevemente otros modelos que, aunque no son exactamente de cúmulos, han sido usados para estudiar a los isótopos del Be. Estos modelos han arrojado resultados similares en el caso de algunos de estos sistemas nucleares.

La ventaja fundamental del SACM respecto a los demás modelos usados para estudiar a los isótopos del berilio, tanto los de cúmulos como el resto, radica en la simplicidad de los cálculos que es necesario realizar lo que permite que éstos se puedan efectuar con mucha mayor rapidez.

Es importante recordar que la presencia de estados de cúmulos no se reduce a núcleos tan ligeros como los considerados en la presente tesis. Hace tiempo se sabe que es una característica presente incluso en sistemas considerablemente más pesados. Entre ellos podemos mencionar a  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{24}\text{Mg}$  y también a  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ,  $^{24}\text{Mg} + ^{24}\text{Mg}$ ,  $^{24}\text{Mg} + ^{28}\text{Si}$ ,  $^{28}\text{Si} + ^{28}\text{Si}$  hasta llegar incluso al  $^{56}\text{Ni}$ . Estos sistemas también han sido estudiados por modelos teóricos. Podemos afirmar con seguridad que el tema del estudio de los estados de cúmulos en los sistemas nucleares está abierto y presenta muchas cuestiones que todavía no son plenamente comprendidas.

La existencia de una estructura de cúmulos  $\alpha$ - $\alpha$  es un hecho bien establecido en el caso del  $^8\text{Be}$  [28]. Sabemos además que el  $^8\text{Be}$  es un núcleo inestable que decae en alrededor de  $10^{-16}$  segundos en dos partículas  $\alpha$ . También se han efectuado cálculos para el  $^9\text{Be}$  suponiendo dicha estructura [28, 29, 30, 31] los cuales reproducen bastante bien los resultados experimentales. Es de esperar que esta estructura  $\alpha$ - $\alpha$  se mantenga presente para los demás isótopos del Be más allá del  $^9\text{Be}$ . La razón de que esto ocurra es que un cúmulo  $\alpha$  dentro de un núcleo tiene una energía interna de enlace muy grande y la interacción  $\alpha$ - $\alpha$  es relativamente débil además de que, debido al Principio de Pauli, es fuertemente repulsiva para distancias muy cortas. Los neutrones más externos, los cuales están débilmente enlazados, no tienen mucha influencia sobre esa estructura tipo  $^8\text{Be}$ . Lo que ellos hacen es darle más estabilidad al sistema  $\alpha$ - $\alpha$ .

El núcleo de  $^{10}\text{Be}$  tiene una fuerte transición E2 del estado  $2_1^+$  (3.37 MeV) al estado

base lo cual indica que el estado base  $0^+$  y el estado excitado  $2_1^+$  constituyen una banda rotacional y tienen por tanto una estructura intrínseca deformada. Algunos cálculos de Hartree-Fock (HF) [32, 33] han mostrado la naturaleza deformada del  $^{10}\text{Be}$ . Además el espín y la paridad del estado base del  $^{11}\text{Be}$  son anormales ( $\frac{1}{2}^+$ ). Esta es una fuerte evidencia de estructura deformada porque no es fácil para el modelo de capas estándar reproducir un estado base anormal.

## 2.1 El Modelo del Grupo Resonante (RGM).

Wildermuth y Kanellopoulos [34] fueron los pioneros en el tratamiento completamente microscópico de las estructuras de cúmulos en los núcleos. Ellos usaron el Modelo del Grupo Resonante (RGM) de Wheeler [35]. En el RGM se usa, en un cálculo variacional, una función de onda de prueba que es el producto completamente antisimetrizado de las funciones de onda de los cúmulos constituyentes por la función de onda de su movimiento relativo. Entonces, si se usan las funciones de onda del oscilador armónico para construir los estados intrínsecos de los cúmulos, se puede demostrar la correspondencia entre las funciones de onda de cúmulos y las del modelo de capas esférico. Para ello sólo es necesario considerar los límites apropiados.

Horiuchi [44] calculó la dispersión  $^{12}\text{C} + \alpha$  usando el Método de Grupo Resonante con Canales Acoplados (CCRGM). Este modelo parte de un sistema dinuclear con acoplamiento débil en el sentido de que el acoplamiento entre el  $^{12}\text{C}$  y el sistema de 4 nucleones es débil y por lo tanto la contribución fundamental a la energía de enlace total proviene de la suma de las energías de enlace de dos sistemas. En este modelo se supone *a priori* la existencia de cúmulos.

## 2.2 El Método de la Coordenada Generadora (GCM).

Una aproximación relacionada con el RGM es el llamado Método de la Coordenada Generadora (GCM) usado en los cálculos de Bloch y Brink [36]. En el GCM, los estados variacionales se construyen a partir del producto de funciones de onda antisimetrizadas de los cúmulos individuales, los cuales se localizan en puntos fijos del espacio. Dicho producto es también antisimetrizado. Finalmente, se calcula la energía del sistema usando un hamiltoniano apropiado y se varían las posiciones de los cúmulos hasta minimizar la energía total. Los cálculos usando esta formulación del modelo de capas de muchos centros para una variedad de configuraciones de cúmulos que presentan simetrías puntuales predicen la existencia de estados de cúmulos muy deformados para ciertos núcleos.

Okabe et al. [31] aplicaron el GCM tratando de manera unificada los estados de paridad normal y anormal del  ${}^9\text{Be}$ . Ellos consideraron el movimiento de un nucleón de valencia alrededor de un carozo de  ${}^8\text{Be}$  del tipo formado por 2 cúmulos  $\alpha$ . De ese modo, tuvieron éxito en reproducir la estructura de niveles, las transiciones electromagnéticas y los factores de forma de las cargas. También mostraron que las funciones de onda obtenidas son, cerca del estado base, casi idénticas a las de un modelo de orbitales moleculares.

### 2.3 El Modelo de Orbitales Moleculares (MOM).

En este modelo [37] se asume que los isótopos del Be tienen un carozo  $\alpha$ - $\alpha$  ( ${}^8\text{Be}$ ) con una estructura tipo molecular y nucleones de valencia alrededor de dicho carozo. Se supone entonces que los estados intrínsecos de dichos isótopos tienen la configuración geométrica de dos esferas (las partículas  $\alpha$ ) que se encuentran separadas a cierta distancia. Los orbitales moleculares se construyen a partir de consideraciones de simetría. Las funciones de onda base de partícula independiente se clasifican de acuerdo con las correspondientes irreps y se construyen a partir de combinaciones lineales de funciones del oscilador armónico con acoplamiento  $j-j$ . Se asume que el estado intrínseco de cada isótopo está dado por un simple determinante de Slater el cual tiene una configuración  $\alpha$ - $\alpha$  para el carozo y orbitales de valencia que son ocupados por nucleones de valencia. Se emplea para la energía la expresión del formalismo de Brueckner-Hartree-Fock. Con el objetivo de asegurar las propiedades de saturación del sistema, se usa como interacción efectiva un potencial W2 modificado (MW2) que fue construido sobre la base de cálculos usando la matriz de reacción. La tendencia general de las energías de enlace de los isótopos del berilio es bastante bien reproducida. Las diferencias entre los resultados calculados y los valores experimentales son menores a 5 MeV incluso para núcleos extremadamente ricos en neutrones. Este modelo reproduce los estados de paridad anormal  $\frac{1}{2}^+$  a energías muy bajas en los casos de  ${}^9\text{Be}$ , similarmente a [30, 31], y  ${}^{11}\text{Be}$ . También en el caso del  ${}^{10}\text{Be}$  son reproducidos cualitativamente los estados de paridad normal. El hecho de que el MOM reproduzca tan bien el estado base  $\frac{1}{2}^+$  de paridad anormal para el  ${}^{11}\text{Be}$  está en contraste con algunos resultados del modelo de capas [78, 38]. En los estados de paridad normal más bajos de los isótopos, la "clusterización" del carozo disminuye a medida que el número de masa se incrementa hasta llegar al núcleo con capas cerradas ( ${}^{12}\text{Be}$ ). Para los isótopos extremadamente ricos en neutrones más allá de la capa cerrada de neutrones, la "clusterización" del carozo en el estado base vuelve a ser grande.

El principal inconveniente de este método es que se asume desde el principio la existencia de cúmulos aunque se puede decir a favor de esta hipótesis que finalmente

los resultados la confirman bastante bien.

## 2.4 Los modelos microscópicos de cúmulos.

Con un modelo de este tipo [22] se ha estudiado la estructura del  ${}^9\text{Be}$  y su núcleo espejo  ${}^9\text{B}$ . Para ello se consideró, en el caso del  ${}^9\text{Be}$ , el sistema de cúmulos  $\alpha + \alpha + n$  y se usó una función de nueve nucleones completamente antisimetrizada. De ahí el nombre de microscópicos para este tipo de modelos. La interacción de dos nucleones incluía componentes central y de espín-órbita además del potencial de Coulomb. El estado base se obtuvo por medio de un método variacional estocástico mientras que varios estados no enlazados se investigaron con el método de escalamiento complejo. El espectro calculado para el  ${}^9\text{Be}$  es bastante parecido al experimental para energías por debajo de 8 MeV. La teoría reprodujo muy bien las propiedades electromagnéticas del estado base tales como radio de carga, momento magnético, momento cuadrupolar. Las transiciones electromagnéticas también fueron bien reproducidas. Para poder explicar el decaimiento  $\beta$  fue necesario distorsionar la partícula  $\alpha$ . Para ello se consideraron las configuraciones  $t + p$  y  $h + n$ .

Los cálculos necesarios en un modelo microscópico para garantizar el cumplimiento del principio de Pauli son largos y complicados. Esto es así incluso, aunque en menor medida, para el resto de los modelos de cúmulos. Éste es posiblemente el mayor obstáculo a enfrentar cuando se trata de implementar modelos que tienen modos análogos de antisimetrizar las funciones de onda.

## 2.5 El modelo de Dinámica Molecular Antisimetrizada (AMD).

La aplicabilidad de las aproximaciones de campo medio no está necesariamente asegurada en el caso de núcleos ligeros debido a la existencia de estructura de cúmulos. Como sabemos, en los modelos de cúmulos se asume *a priori* la existencia de los mismos. Eso es una desventaja a la hora de estudiar núcleos para los cuales hay poca información o datos observados. Si un núcleo, en lugar de tener estructura de cúmulos, tiene estructura de capas, entonces el modelo de cúmulos no constituye una buena aproximación. Para obtener una comprensión sistemática de los isótopos cubriendo una región que abarque desde los ordinarios hasta aquellos ricos en neutrones, es deseable usar un marco teórico que sea capaz de describir tanto los estados tipo modelo de capas como aquellos de cúmulos. El método de Dinámica Molecular Antisimetrizada (AMD) [39, 40, 41, 42] es precisamente el marco teórico que satisface los requerimientos anteriores y nos permite estudiar isótopos de los núcleos ligeros sistemáticamente en un *único marco conceptual* sin que sea necesario asumir nada *a priori* respecto a los

cúmulos.

La AMD es un método mecano-cuántico que describe la evolución temporal de la función de onda del sistema. La función de onda total está dada como un determinante de Slater de funciones de onda de partícula independiente representadas por paquetes de onda de Gaussianas. La AMD describe el proceso de reacción por medio del cálculo de la evolución temporal de las 6A variables que representan las coordenadas y momentos en las 3 direcciones espaciales de los centros de las Gaussianas. La construcción de las funciones de onda del estado base de los núcleos que colisionan se efectúa por el Método de Enfriamiento Friccional el cual es un tipo de cálculo variacional. Este método de obtención de la función de onda para el estado de mínima energía es un nuevo y potente instrumento para los estudios de estructura nuclear porque no hay necesidad en absoluto de asumir algo en el modelo en relación a los cúmulos.

Usando la AMD [15], se reproducen cualitativamente las energías de enlace de los isótopos del Be excepto el  $^{11}\text{Be}$ . Tampoco es posible obtener correctamente el estado base de paridad anormal de dicho isótopo. En el caso de la ADM no es directa la obtención de la estructura de "halo" de neutrones. Para ello no es suficiente con un simple paquete de ondas Gaussianas, es necesaria una superposición de las mismas. Los radios experimentales de los isótopos del Be son cualitativamente reproducidos. La AMD reprodujo por primera vez de un modo sistemático los momentos magnéticos dipolares de los isótopos par-impar de Li y Be, excepto el  $^{11}\text{Be}$ . Tal vez lo más interesante e impactante de la AMD es que reproduce el cambio drástico que ocurre, al aumentar el número de neutrones desde 4 hasta 8 (con esto se cierra la capa), desde una estructura de cúmulos hasta una del tipo del modelo de capas.

## 2.6 Otros modelos.

En esta subsección comentaremos muy brevemente modelos que aunque no son de cúmulos, han sido usados para estudiar a sistemas que presentan estados de cúmulos. Algunos de ellos también se han usado para estudiar a los isótopos del berilio.

Un cálculo en una base del Modelo de Capas Deformado (DSM) es el método macroscópico-microscópico de Nilsson y Strutinski en el cual se generan correcciones a la energía macroscópica de un núcleo deformado a partir del espectro de partícula independiente calculado en un potencial con la misma deformación. En cálculos para el  $^{24}\text{Mg}$  se encuentran varios mínimos de las superficies de energía equipotencial para grandes deformaciones. Esos mínimos representan formas correspondientes a las con-

figuraciones estables identificadas en algunos cálculos de modelos de cúmulos. Las simetrías de las funciones de onda del modelo de capas deformados coinciden con la del modelo de cúmulos cuando la forma del núcleo es tal que las razones entre las longitudes de los ejes son razones entre números enteros (2:1, 3:1, etc).

También se han usado modelos de campo medio autoconsistente para el estudio del  $^{24}\text{Mg}$  [43] y se ha encontrado una variedad de estados deformados. Las distribuciones de densidad calculadas para dichos estados son muy similares a las de los cálculos según modelos de cúmulos.

Varios de los métodos de canales acoplados y moleculares también se han usado para estudiar el problema del comportamiento resonante en las reacciones de dispersión  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  y  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ . En la mayoría de los casos se usaron potenciales de dispersión fenomenológicos que por presentar un mínimo pronunciado para grandes distancias de separación entre los dos fragmentos permitían la formación de estados resonantes de larga vida. Los resultados son análogos a los obtenidos por los otros métodos. Por ejemplo, se espera que para altas energías de excitación aparezcan, en núcleos tan ligeros como el  $^{24}\text{Mg}$ , estados de cúmulos tipo moleculares muy deformados.

En [45] se usó la aproximación de Skyrme-Hartree-Fock (SHF) para calcular las propiedades del estado base para los núcleos He, Li y Be. En el modelo SHF estándar las correlaciones de apareamiento son tratadas con la aproximación de fuerza constante o con la de gap constante en las ecuaciones BCS. En este caso se trabajó con una fuerza de apareamiento de alcance cero dependiente de la densidad. Se calcularon, entre otros, las energías de enlace y las distribuciones de densidad para protones y neutrones. Se obtiene un valor para la energía de enlace del  $^8\text{Be}$  que está por debajo del experimental en 10 MeV. Las dificultades más grandes aparecieron para  $^{11}\text{Be}$  y  $^{14}\text{Be}$ , evidenciándose así la complejidad que presentan los núcleos con "halo". En el caso del  $^{11}\text{Be}$  no se reprodujo el estado base  $\frac{1}{2}^+$  conocido experimentalmente.

Otro estudio sistemático de los isótopos del berilio aparece en [46]. En ese caso se investigaron las propiedades de los isótopos por medio de un método de Hartree-Fock deformado y con interacciones de Skyrme. El mínimo de energía para  $^{10}\text{Be}$  y  $^{11}\text{Be}$  (en el estado  $\frac{1}{2}^-$ ) apareció para la configuración esférica. Aunque se obtuvo la forma geométrica correcta para el núcleo de  $^{11}\text{Be}$  en el primer estado  $\frac{1}{2}^+$ , éste no resultó ser el estado base. Se introdujeron entonces correlaciones en las funciones de onda de campo medio deformadas. Ello se hizo restaurando la invariancia rotacional. En ese caso se encontró que el estado base del  $^{10}\text{Be}$  es deformado pero la modificación en energía no fue suficiente para llevar al estado  $\frac{1}{2}^+$  por debajo del  $\frac{1}{2}^-$  para el  $^{11}\text{Be}$ , reafirmando así

la dificultad que presenta ese núcleo.

En [23, 47] se estudia a núcleos de la capa p en un espacio  $(0+2)\hbar\omega$ . Se reproducen bien los espectros de energía del  $^8\text{Be}$ , (4 de los niveles experimentales de)  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{Be}$  y  $^{11}\text{Be}$ . El radio de carga, el momento dipolar magnético y el cuadrupolar eléctrico sólo fueron calculados para el  $^9\text{Be}$  obteniéndose buenos resultados.

Recientemente [21] se efectuó un cálculo según el modelo de capas con un número muy grande de bases para núcleos con  $A=7-11$ . Se consideraron a todos los nucleones activos, o sea, no se supuso la existencia de un carozo. Se consideraron excitaciones hasta de  $6\hbar\omega$ . Una idea de lo complejo y voluminoso del cálculo la podemos tener sabiendo que la dimensión según el esquema m fue, para  $A=7$ , de 663 527. Se calcularon los espines y paridades de los estados base, las energías de enlace, los momentos magnético y eléctrico para, entre otros,  $^7\text{Be}$ ,  $^8\text{Be}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{Be}$  y  $^{11}\text{Be}$ . Los resultados son buenos, particularmente se reproduce el estado base  $\frac{1}{2}^+$  del  $^{11}\text{Be}$ .

El llamado modelo de capas variacional ha sido aplicado exitosamente al estudio del sistema  $^{11}\text{Be}$  [23]. Para ello se partió de una interacción de Skyrme típica de los cálculos de campo medio y se introdujo un método variacional para determinar la función de onda del movimiento relativo. La idea es que cuando el número de nucleones es pequeño, el potencial medio puede no ser muy estático. Lo que se obtiene es un acoplamiento dinámico entre la superficie del carozo (en este caso  $^{10}\text{Be}$ ) y el movimiento de la última partícula. Ése es el llamado campo medio dinámico. En ese caso se pudo obtener adecuadamente la inversión de capas que encontramos en  $^{11}\text{Be}$  entre el estado base y el primer estado excitado. Además se reprodujo, por primera vez, el halo de neutrones sin un ajuste *ex profeso*.

Un punto de vista interesante es abordado en [23]. Los autores opinan que las energías de partícula independiente (SPE) y las interacciones residuales de dos cuerpos en núcleos lejos de la línea de estabilidad  $\beta$  son diferentes de los asociados con núcleos en y cerca de la dicha línea. La idea básica es que uno debe esperar una fuerte dependencia del campo medio y las interacciones residuales respecto del isospín y que debe ser determinada a partir de los datos experimentales en esos núcleos tal y como se hizo para los núcleos estables en las capas 1p y sd. En este cálculo del modelo de capas no se tratan de resolver los problemas aumentando el número de capas que se tienen en cuenta sino la interacción efectiva. Se usó la interacción delta de superficie modificada (MSDI) para la cual se determinaron los parámetros usando datos experimentales de núcleos que se encuentran lejos de la zona de estabilidad  $\beta$ . Los cálculos que se efectuaron para  $^{11}\text{Be}$ ,  $^{12}\text{Be}$  y  $^{14}\text{Be}$  incluyeron las energías de enlace, los

momentos magnético y eléctrico y los niveles de energía. Los resultados son buenos, especialmente se reproduce el estado base  $\frac{1}{2}^+$  del  $^{11}\text{Be}$ .

### 3 El Modelo SU(3) Nuclear.

El principio fundamental en que se basa el modelo de capas es que la interacción de cualquier nucleón con el resto se puede aproximar con un potencial de partícula independiente promedio. Teniendo en cuenta la física del problema y la necesidad de usar un potencial que sea matemáticamente lo menos difícil posible de manipular es que se puede usar con esos fines al potencial del oscilador armónico. Como SU(3) es el grupo de simetría del oscilador armónico entonces queda claro el por qué del nombre del modelo de capas cuyas generalidades explicaremos a continuación.

#### 3.1 El oscilador armónico.

El Hamiltoniano de partícula independiente del oscilador armónico en 3 dimensiones se escribe:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{r}^2 \quad (1)$$

donde  $\mathbf{p}$  es el operador de momento y  $\mathbf{r}$  el de la coordenada. Los autovalores de  $\mathbf{H}$  están caracterizados por el número de cuantos de oscilación y se pueden escribir  $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega$ . En general esos autovalores son múltiplemente degenerados y las funciones de onda se pueden escribir de diferentes maneras.

Analicemos el caso del  $^{20}\text{Ne}$  para hacernos una idea de la complejidad del asunto. Los 20 nucleones, en el caso más sencillo, se encuentran distribuidos entre las capas de la siguiente manera:  $(1s)^4 (1p)^{12} (2s, 1d)^4$ . La capa activa es entonces la  $(2s, 1d)$  con 2 protones y 2 neutrones. El número de subestados magnéticos degenerados disponibles para cada protón y cada neutrón es 12. El número de estados para ese conjunto de 2 protones y 2 neutrones es, por un cálculo combinatorio, igual a 66. El número total de estados es entonces  $66 \times 66 = 4356$ . Esos 4356 estados se pueden enumerar fácilmente como correspondientes a 640 niveles de energía diferentes con varios momentos angulares totales  $J$  y paridad  $\pi$ .

Está claro que es una labor difícil diagonalizar matrices con cientos o incluso miles de filas y columnas. El modelo SU(3) es una manera de clasificar esos numerosos estados de acuerdo a las simetrías espaciales que ellos presentan.

Para estudiar al grupo U(3) de simetría del oscilador armónico es cómodo escribir los generadores en términos de los operadores de creación ( $\mathbf{a}_x^+$ ) y aniquilación ( $\mathbf{a}_x$ ) de

cuantos de oscilación. En la representación cartesiana estos operadores se definen , en la dirección x como:

$$\mathbf{a}_x^+ = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{x} - ib^2 \mathbf{p}_x}{b} \quad (2)$$

$$\mathbf{a}_x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{x} + ib^2 \mathbf{p}_x}{b} \quad (3)$$

y de manera similar en las restantes dos direcciones espaciales. El parámetro b se define como

$$b = \left(\frac{\hbar^2}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Los cuantos de oscilación son bosones y tienen por tanto las relaciones de conmutación acostumbradas. Ellas se pueden comprobar a partir de la construcción explícita de los operadores en 2 y 3.

Los nueve operadores de "corrimiento" del grupo U(3) se pueden escribir en términos de los nueve operadores:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_\alpha^+ \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_\beta \mathbf{a}_\alpha^+) \quad (5)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  pueden tomar cualquiera de las 3 direcciones espaciales x, y, z. Estos operadores "corren" un cuanto de la dirección  $\beta$  a la  $\alpha$ , o sea, eliminan un cuanto en la dirección  $\beta$  para originar uno en la  $\alpha$ . Los operadores que aquí estamos llamando de corrimiento están formados por 6 operadores de "ascenso" y "descenso" y 3 de peso.

Las relaciones de conmutación de los operadores de corrimiento definidos en 5 se pueden deducir de las de sus operadores constituyentes de creación y aniquilación.

En términos de estos nuevos operadores de corrimiento el Hamiltoniano del oscilador armónico de partícula independiente se puede escribir como:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{A}_{xx} + \mathcal{A}_{yy} + \mathcal{A}_{zz} \quad (6)$$

Aunque no lo haremos, ahora es fácil verificar que el oscilador armónico es realmente invariante respecto al grupo U(3). La manera matemática de expresarlo es diciendo que el hamiltoniano del oscilador armónico conmuta con todas las transformaciones unitarias de U(3).

Debido a la invariancia del oscilador armónico respecto al grupo  $U(3)$ , podemos etiquetar a cada autovalor del Hamiltoniano con una irrep de  $U(3)$ . Cada autovalor tendrá entonces una degeneración igual a la dimensión de la irrep.

Con argumentos similares a los anteriores se puede demostrar que el Hamiltoniano del oscilador armónico de muchos cuerpos:

$$\mathbf{H}_0 = \sum_i \mathcal{H}_0(i) \quad (7)$$

donde  $i$  es el número de partícula, es invariante con respecto al grupo  $U(3)$  descrito por los nueve operadores de corrimiento:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \sum_i \mathcal{A}_{\alpha\beta}(i) \quad (8)$$

A veces es cómodo definir a los nueve operadores de corrimiento de  $U(3)$  de modo que tengan propiedades tensoriales esféricas bien definidas y al hacerlo obtenemos a  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{L}_q$  y  $\mathbf{Q}_q$  los cuales son tensores de rango cero, uno y dos respectivamente. Un tensor de un grupo está formado por un conjunto de magnitudes que cambian sus valores simultáneamente ante una transformación de dicho grupo de una manera bien establecida.  $\mathbf{H}$  es el Hamiltoniano del oscilador armónico.  $\mathbf{L}_q$  es el operador de momento angular orbital.  $\mathbf{Q}_q$  es el operador de momento cuadrupolar. El subconjunto de los ocho operadores  $\mathbf{L}_q$  ( $q = -1, 0, +1$ ) y  $\mathbf{Q}_q$  ( $q = -2, -1, 0, 1, 2$ ) conmutan entre ellos y están asociados a un subgrupo de  $U(3)$ , el grupo  $SU(3)$  de transformaciones unitarias especiales de determinante  $+1$ . Como las transformaciones relacionadas con  $\mathbf{H}$  son simplemente transformaciones de fase, en el modelo de capas estamos interesados únicamente en la clasificación según  $SU(3)$ . Un conjunto de funciones que se transforman según una representación irreducible de  $U(3)$  también lo hacen según una de  $SU(3)$ .

## 3.2 Los grupos Simétrico y Unitario.

En esta subsección asumiremos que estamos dando el conjunto de  $d$  funciones de  $k$  partículas distribuidas en  $s$  órbitas de partícula independiente. Entonces, por ejemplo, si hay  $s = 6$  órbitas y  $k = 2$  partículas tendremos  $d = 36$  ( $s^k$ ) funciones.

### 3.2.1 Clasificación según $S_k$ .

El conjunto de  $k!$  permutaciones de  $k$  objetos forma un grupo llamado grupo simétrico y que denotaremos por  $S_k$ . El problema que queremos considerar es la subdivisión del

conjunto de  $d$  funciones tal que las permutaciones del grupo  $S_k$  las transformen dentro de los conjuntos menores posibles. Queremos estudiar entonces las irreps de  $S_k$ .

El problema del número de conjuntos irreducibles existentes, como es bien conocido, es el mismo que el del número de particiones  $[f_1, f_2, \dots]$  de  $k$  en partes enteras  $f_i$  tales que  $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ , con  $f_1 + f_2 + \dots = k$ . La partición  $[f_1, f_2, \dots]$  se puede denotar simplemente por  $[f]$  y puede usarse para etiquetar las irreps. La partición  $[f]$  se puede representar con un diagrama de Young en el cual hay  $f_i$  cuadrados en la  $i$ -ésima fila. La dimensión de la representación está dada por el número de modos en que los números  $1, 2, \dots, k$  se pueden colocar en los cuadrados del diagrama de Young formando una secuencia creciente tanto en las filas como en las columnas.

### 3.2.2 Clasificación según $U_s$ .

El conjunto de todas las transformaciones unitarias entre las  $s$  órbitas de partícula independiente forma el grupo unitario  $U_s$  de dimensión  $s$ . Nuevamente estamos interesados en los conjuntos irreducibles, en este caso del grupo  $U_s$ . Como la transformación  $U_s$  es simétrica (invariante) respecto a  $S_k$ , ella no puede cambiar la etiqueta de una función  $\psi([f])$ . La transformación de  $U_s$  operará solamente entre funciones  $\psi([f] \alpha)$  pertenecientes a la misma fila  $\alpha$  de la representación  $[f]$  y esas funciones forman un conjunto irreducible. Las irreps de  $U_s$  pueden entonces ser etiquetadas con la  $[f]$  de  $S_k$ .

La dimensión de la representación  $[f]$  de  $U_s$  no es, obviamente, la misma que la dimensión de  $[f]$  de  $S_k$ . Esas representaciones están constituidas en estados base diferentes.

### 3.2.3 Clasificación simultánea según $S_A$ y $SU(3)$ .

Los estados de un sistema pueden clasificarse simultáneamente según dos grupos sólo si los elementos de los mismos operan en diferentes espacios o si uno es un subgrupo del otro. Los elementos del grupo  $S_A$  operan en el espacio del número de partículas mientras que los de  $SU(3)$  en un espacio de funciones el cual es diferente. Por ello es posible clasificar a los estados según  $S_A$  y  $SU(3)$  simultáneamente.

## 3.3 Clasificación según $SU(3)$ y $R_3$ .

Por argumentos similares a los de 3.2.3 podemos entender la clasificación simultánea según  $SU(3)$  y  $R_3$ . Las representaciones irreducibles de este último están etiquetadas por el momento angular orbital. La regla general está dada por:

$$= \begin{cases} L, & \text{si } K \neq 0 \\ \{ K, K+1, \dots, K+max(\lambda, \mu), \\ max(\lambda, \mu), max(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0, & \text{si } K = 0 \end{cases}$$

donde el entero  $K$  toma los valores  $\min(\lambda, \mu)$ ,  $\min(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1$  ó  $0$ .

### 3.4 El operador de Casimir de segundo orden de $SU(3)$ .

Ya sabemos que el Hamiltoniano del oscilador armónico es invariante respecto a  $U(3)$  y a  $SU(3)$ . Se pueden construir otros operadores invariantes a partir de los generadores del grupo, éstos son conocidos como *operadores de Casimir*.

El operador de Casimir bilineal del grupo  $U(3)$  se puede escribir como:

$$C_2 = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} \quad (9)$$

con los operadores de corrimiento de  $SU(3)$  que son funciones de los de partícula independiente definidos en 5. Es trivial demostrar, basándose en sus relaciones de conmutación, que  $C_2$  es invariante respecto a  $U(3)$ .

El operador  $\tilde{C}_2$  de  $SU(3)$  se obtiene eliminando toda la dependencia respecto del operador  $H_0$  de 7:

$$\tilde{C}_2 = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}) + 3(L \cdot L) \quad (10)$$

En esta última expresión hemos usado la forma tensorial esférica para los operadores de corrimiento definidos anteriormente. En ella se ve inmediatamente el carácter escalar de  $\tilde{C}_2$  bajo  $R_3$ . Así es como debe ser ya que la invariancia de  $\tilde{C}_2$  respecto a  $SU(3)$  implica inmediatamente la invariancia respecto al subgrupo  $R_3$ .

Si reescribimos 10 encontramos que una fuerza atractiva típica de largo alcance (con un término de partícula independiente) contiene un término proporcional a:

$$-(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}) = -\tilde{C}_2 + 3L^2 \quad (11)$$

Aquí  $(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q})$  está relacionado con la conocida interacción cuadrupolo-cuadrupolo.  $\tilde{C}_2$  es invariante respecto a  $SU(3)$  y por tanto no puede acoplar estados pertenecientes a diferentes representaciones. Dentro de una representación sólo los elementos matriciales diagonales (los valores esperados) son diferentes de cero. Estos elementos

dependen únicamente de las etiquetas  $\lambda$  y  $\mu$  de  $SU(3)$ . Vemos también que los estados más bajos en energía son los que pertenecen a la irrep de  $SU(3)$  con mayor  $C_2$  que es el autovalor del Casimir de segundo orden. Habitualmente ésta es denominada la *representación líder*.

En resumen, en el modelo  $SU(3)$  nuclear los estados más bajos en energía son descritos por funciones que tienen la máxima simetría orbital y que se transforman según la representación líder de  $SU(3)$ . Debe recordarse, sin embargo, que el esquema  $SU(3)$  está diseñado específicamente para describir efectos colectivos en el núcleo. Si las fuerzas en un núcleo determinado no dan lugar a efectos colectivos, entonces la clasificación según  $SU(3)$  fallará. Si hay efectos colectivos pero se deben parcialmente a fuerzas dependientes del espín entonces el esquema de clasificación según  $SU(3)$  también fallará.

## 4 El Modelo Algebraico Semimicroscópico de Cúmulos (SACM).

En esta sección explicaremos las ideas básicas del Modelo Algebraico Semimicroscópico de Cúmulos (SACM). Nos referiremos a cómo fue aplicado a los núcleos par-par. Mencionaremos las características básicas del modelo del vibrón que se usa para describir al movimiento relativo. Construiremos el espacio microscópico del modelo. Para ello, aclararemos cómo se aplica la condición de Wildermuth la cual limita el número mínimo de cuantos relativos el exigir el cumplimiento del Principio de Pauli. La condición de correspondencia entre las bases del modelo de cúmulos y el de capas será otro de los puntos que abordaremos. Mostraremos cómo está constituida la cadena de grupos relevantes del SACM, explicando el significado de las etiquetas de cada grupo. Después explicaremos cómo se construyen los operadores fenomenológicos en la aproximación de simetría dinámica  $SU(3)$ . La utilidad de esta aproximación reside en que usándola podemos obtener expresiones analíticas para el espectro de energías.

### 4.1 El modelo del vibrón.

Debido a que es el usado para caracterizar al movimiento relativo en el SACM es que explicaremos algunas ideas básicas del modelo del vibrón. Este es un modelo fenomenológico de la colectividad dipolar, el cual es similar, en muchos sentidos, al de bosones interactuantes (IBM) del movimiento nuclear cuadrupolar.

El espectro colectivo es generado en el modelo del vibrón por un número finito ( $N_0$ ) de bosones, los cuales interactúan entre sí. Ellos pueden ocupar estados de partícula independiente de momento angular  $l=0$  con paridad positiva (bosones  $\sigma$ ) y  $l=1$  con paridad negativa (bosones  $\pi$ ). Los operadores de las cantidades físicas se pueden construir en términos de los operadores de creación y aniquilación de dichos bosones.

El modelo tiene una estructura de grupos de  $U(4)$  debido a que los bosones  $\sigma$  tienen una sola componente (0), son tensores de rango cero, y los bosones  $\pi$  tienen tres componentes (-1,0,+1) o sea, son tensores de rango uno. Existen varios casos límite llamados simetrías dinámicas en los cuales obtenemos soluciones analíticas para el problema de autovalores. El que nos interesa está etiquetado por la cadena:

$$\begin{array}{l}
 U(4) \supset U(3) \supset O(3) \\
 | N, \quad \quad \quad n_\pi, \quad \quad \quad L \rangle . \\
 n_\pi = N, N - 1, \dots, 0; \quad L = n_\pi, n_\pi - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0.
 \end{array} \quad (12)$$

Aquí  $L$  es el momento angular del sistema de  $N$  bosones y  $n_\pi$  es el número de bosones  $\pi$ , o sea, el número de fonones dipolares. Esta simetría dinámica da una descripción en términos de un oscilador anarmónico que se puede aproximar a uno armónico. Las primeras aplicaciones de este modelo en física nuclear estuvieron relacionadas con las resonancias moleculares en reacciones de iones pesados. Según el límite del oscilador armónico, un bosón  $\pi$  corresponde a excitar un nucleón de una capa a otra.

## 4.2 Estructura de grupos del SACM.

La función de onda interna de un cúmulo en el SACM está dada por una parte espacial y otra de espín-isoespín. La parte radial se obtiene aplicando lo que ya explicamos del modelo  $SU(3)$  nuclear. La única complicación es que se debe hacer para cada uno de los cúmulos presentes en el sistema. Nuestro caso es el más sencillo ya que sólo tendremos 2 de tales cúmulos. Más aún, como uno de ellos es siempre una partícula  $\alpha$  tendremos una simplificación adicional. La componente de espín-isoespín muestra una simetría etiquetada por la representación del grupo  $U^{ST}(4)$  de Wigner. Debido a que la función de onda total tiene que ser antisimétrica entonces a las dos componentes les corresponden diagramas de Young autoadjuntos, o sea, el número de cuadrados en la  $i$ -ésima fila de uno es igual al de la  $i$ -ésima columna del otro. Entonces la simetría de la función de onda interna de un cúmulo es la del grupo  $U_C^{ST}(4) \otimes U_C(3)$ . En un sistema de  $K$  cúmulos tendremos  $K-1$  movimientos relativos, cada uno de ellos descrito por un modelo del vibrón. Nuestro caso es el más sencillo: tendremos sólo un movimiento relativo. Ya sabemos que estará descrito por el grupo  $U_R(4)$ . En este caso la  $R$  significa que se trata del movimiento relativo.

Tendremos entonces en general para el modelo la siguiente estructura de grupos:

$$\begin{aligned} & U_{C_1}^{ST}(4) \otimes U_{C_1}(3) \otimes U_{C_2}^{ST}(4) \otimes U_{C_2}(3) \otimes \dots \otimes U_{C_K}^{ST}(4) \otimes U_{C_K}(3) \\ & \otimes U_{R_1}(4) \otimes U_{R_2}(4) \otimes \dots \otimes U_{R_{K-1}}(4) \end{aligned} \quad (13)$$

## 4.3 El espacio microscópico del modelo.

El modelo que nos ocupa ha sido ya aplicado a núcleos par-par [14] representándolos como configuraciones de 2 cúmulos, en ese caso se consideraron como estados con estructura de cúmulos a los estados de isoespín  $T = 0$ . Los núcleos en cuestión fueron el  $^{16}\text{O}$  (considerado como el sistema de cúmulos  $^{12}\text{C} + \alpha$ ), el  $^{24}\text{Mg}$  ( $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ) y el  $^{18}\text{O}$  ( $^{14}\text{C} + \alpha$ ).

En el caso más simple de los considerados en el artículo mencionado sólo uno de los 2 cúmulos tiene estructura interna (no es un escalar  $U(3)$ ) y ambos tienen isoespín  $T$  igual a cero en todos sus estados. En el caso más complejo además de que ambos cúmulos tienen estructura, uno de los cúmulos tiene  $T$  diferente de cero (aunque con el mismo valor para todos los estados tomados en cuenta). También fue analizado el caso en el que ambos cúmulos tienen estructura interna (no son escalares  $U(3)$ ) pero tienen isoespín igual a cero en todos los estados considerados.

Aunque en esos casos las restricciones utilizadas limitaban la aplicación del modelo significativamente, ellas permitían la descripción de algunos de los sistemas de cúmulos más importantes. Además de los casos mencionados ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{24}\text{Mg}$  y  $^{18}\text{O}$ ) fueron estudiados, en el marco del SACM, algunos otros núcleos de la capa s-d tales como el  $^{38}\text{Ar}$  ( $^{34}\text{S} + \alpha$ ), el  $^{28}\text{Si}$  ( $^{24}\text{Mg} + \alpha$ ,  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ ) y  $^{32}\text{S}$  ( $^{28}\text{Si} + \alpha$ ,  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ ) [48, 49, 50, 51, 52]. Evidentemente, se trata en todos los casos de núcleos par-par.

#### 4.3.1 La condición de Wildermuth.

Al trabajar con el modelo se le asignan representaciones irreducibles (irreps) de  $SU(3)$   $((\lambda, \mu))$  a cada cúmulo describiendo así su estructura interna. También el movimiento relativo es descrito finalmente por medio de irreps de  $SU(3)$   $((n_\pi, 0))$ . El número  $n_\pi$ , que nos da la cantidad de cuantos de oscilación que le asignamos al movimiento relativo, no puede tomar un valor arbitrario. Este número está limitado inferiormente por el requerimiento de que los núcleos (sistemas de fermiones) deben obedecer al principio de exclusión de Pauli. Existe una regla muy sencilla, conocida como condición de Wildermuth [24], que nos permite determinar ese número mínimo de cuantos de oscilación relativa que pueden poseer los sistemas de cúmulos que forman al núcleo unido.

Veamos, a través de un ejemplo, cómo dicha condición fija el número mínimo de cuantos de oscilación relativos. Para ello vamos a considerar un sistema de 2 cúmulos formado por 2 partículas  $\alpha$ . Como tal sistema de cúmulos podría ser considerado el núcleo del  $^8\text{Be}$ . Según el modelo de capas la partícula  $\alpha$ , al tener los 4 nucleones en la capa s, "lleva" cero cuantos de movimiento oscilatorio. Por ello, la suma de los cuantos de oscilación que obtenemos para un sistemas de 2 partículas  $\alpha$  es también cero. Sin embargo, al considerar al núcleo unido que resulta de 2 partículas  $\alpha$ , o sea, al  $^8\text{Be}$ , vemos que tiene según el modelo de capas, además de los 4 nucleones que llenan la capa s, otros 4 nucleones en la capa p los cuales, también de acuerdo con el modelo de capas, "llevan" 1 cuanto de oscilación cada uno, lo cual nos da un total de 4 cuantos de oscilación para el  $^8\text{Be}$ . Tenemos un problema y es que al considerar el núcleo unido

obtenemos 4 cuantos de oscilación pero al considerar el mismo sistema como 2 cúmulos obtenemos sólo cero cuantos. La solución de Wildermuth es sencilla: hay que hacerle corresponder al movimiento relativo un número de cuantos de oscilación que sea igual o mayor que esta diferencia entre el sistema de cúmulos que se considere en cada caso y el núcleo unido. En este caso del  ${}^8\text{Be}$  (considerado como 2 partículas  $\alpha$ ) ese número mínimo es 4. La situación anterior se representa esquemáticamente en la Figura 1.

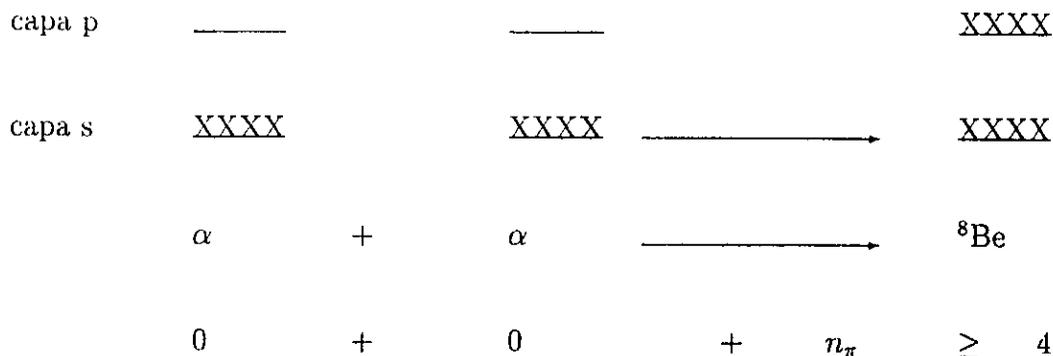


Figura 1: Aplicación de la condición de Wildermuth al  ${}^8\text{Be}$ .

El número mínimo de cuantos de oscilación relativa, obtenido tal como acabamos de explicar, nos garantiza que si antisimetrizamos el estado (o sea, si lo proyectamos) tendremos, con toda seguridad, un resultado no nulo.

#### 4.3.2 La condición de correspondencia entre las bases del modelo de cúmulos y las del modelo de capas.

Una vez que hemos determinado el número mínimo de cuantos relativos acoplamos las representaciones de  $SU(3)$  del modelo de cúmulos mencionadas anteriormente (o sea, las correspondientes a cada cúmulo y al movimiento relativo). Por ejemplo, en el caso de un sistema compuesto por 2 cúmulos tendremos lo siguiente [14]:

$$(\lambda_{C_1}, \mu_{C_1}) \otimes (\lambda_{C_2}, \mu_{C_2}) \otimes (n_\pi, 0) = \sum_{(\lambda, \mu)} m_{(\lambda, \mu)}(\lambda, \mu) \quad (14)$$

donde  $m_{(\lambda, \mu)}$  nos indica la multiplicidad, o sea, cuántas veces aparece una representación  $(\lambda, \mu)$  dada al multiplicar las irreps correspondientes a los cúmulos y al movimiento

relativo.

Para construir el espacio del modelo de cúmulos usamos un procedimiento de correspondencia formulado y aplicado en [14]. Nosotros comparamos las irreps de  $SU(3)$  obtenidas siguiendo los pasos que acabamos de indicar con las irreps de  $SU(3)$  que constituyen el espacio del modelo de capas completamente antisimetrizado para el núcleo unido, para encontrar las cuales está establecido hace tiempo (finales de los 50's) y de una manera muy clara el procedimiento a seguir [54]. Finalmente nos quedamos sólo con aquellas de las irreps de  $SU(3)$  (que obtuvimos al considerar al núcleo como un sistema de 2 cúmulos) que coinciden con las irreps de  $SU(3)$  del modelo de capas del núcleo unido.

En otras palabras, para construir el espacio de nuestro modelo (el SACM) nos quedamos solamente con aquellas irreps que aparecen simultáneamente en ambos espacios (el del sistema de cúmulos y el de capas para el núcleo unido). De este modo, teniendo en cuenta de manera especial configuraciones de cúmulos específicas, podemos truncar el espacio modelo que se obtendría si se considerara únicamente el modelo de capas.

Todavía existe la posibilidad de que las multiplicidades de las irreps presentes en el SACM sean mayores que las de las irreps que se obtienen por medio del modelo de capas. En ese caso sería mas difícil aplicar el procedimiento de correspondencia. Por suerte, esta situación aparece para energías más altas que las de los estados que estudiaremos de los isótopos del berilio.

El proceso descrito se podría graficar cualitativamente como se muestra en la Fig 2.

El sistema de cúmulos (que efectúan entre sí cierto movimiento relativo) nos da algunos estados que no aparecen al analizar al núcleo unido. Por otro lado, hay ciertos estados del núcleo unido que no aparecen si consideramos a éste como formado por un sistema de cúmulos que existen en su interior. Como nuestro interés es describir a los núcleos en términos de cúmulos entonces tomamos, pues, al espacio de nuestro modelo como la "intersección" del espacio del sistema de 2 cúmulos con el del modelo de capas para el núcleo unido.

Este modo en que el SACM determina su espacio modelo es un ingrediente nuevo del modelo en comparación con el modo en que lo hacen otros modelos de cúmulos existentes.

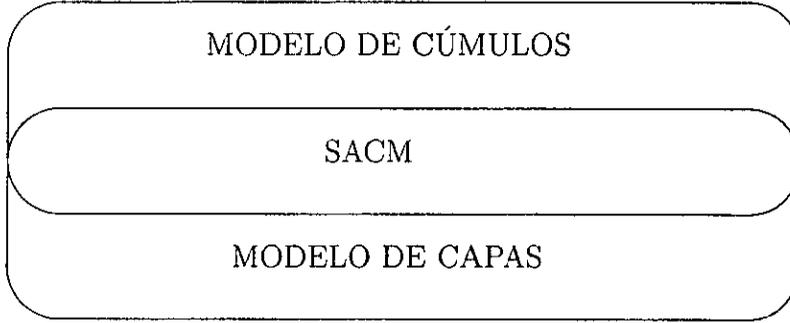


Figura 2: Principio de correspondencia entre el modelo de cúmulos y el de capas.

En [44] Horiuchi afirma haber construido, de un modo diferente al enunciado por nosotros, estados completamente antisimétricos. Lograr estados completamente antisimétricos es una labor difícil, en realidad la manera en que se trabaja en el contexto del SACM es un compromiso que busca encontrar estados más o menos antisimétricos realizando mucho menos trabajo que cuando se buscan estados completamente antisimétricos.

#### 4.3.3 La cadena de grupos relevantes en el SACM.

Entonces el acoplamiento  $SU(3)$  y el etiquetado de las funciones de onda base se hará, en general, según la cadena de grupos:

$$\begin{aligned}
 & ( U_{C_1}^{TS}(4) \otimes U_{C_1}(3) ) \otimes ( U_{C_2}^{TS}(4) \otimes U_{C_2}(3) ) \otimes U_R(4) \supset \\
 & [f_1^{C_1} f_2^{C_1} f_3^{C_1} f_4^{C_1}], [n_1^{C_1}, n_2^{C_1}, n_3^{C_1}], [f_1^{C_2} f_2^{C_2} f_3^{C_2} f_4^{C_2}], [n_1^{C_2}, n_2^{C_2}, n_3^{C_2}] [N_0, 0, 0, 0],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ( U_{C_1}^{TS}(4) \otimes SU_{C_1}(3) ) \otimes ( U_{C_2}^{TS}(4) \otimes SU_{C_2}(3) ) \otimes U_R(3) \supset \\
 & \qquad \qquad \qquad (\lambda_{C_1}, \mu_{C_1}), \qquad \qquad \qquad (\lambda_{C_2}, \mu_{C_2}), \qquad [n_\pi, 0, 0]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ( U_C^{TS}(4) \otimes SU_C(3) ) \otimes SU_R(3) \supset \\
 & | [f_1 f_2 f_3 f_4] \quad m(\lambda_C, \mu_C), \quad (n_\pi, 0)
 \end{aligned}$$

$$\supset ( U^T(2) \otimes U^S(2) ) \otimes SU(3) \supset SU^S(2) \otimes O(3) \supset SU(2)$$

$$T, \quad S, \quad (\lambda, \mu), \chi, \quad L, \quad J \quad ) \quad (15)$$

Alternativamente podemos tener, en lugar del acoplamiento entre los grupos  $SU_{C_k}(3)$  correspondientes a cada cúmulo ( $k = 1, 2$ ) y después con el  $SU_R(3)$  correspondiente al movimiento relativo, el siguiente acoplamiento entre los diferentes grupos  $U(3)$  que aparecen en el modelo ( que finalmente es reducido al  $SU(3)$  total ):

$$( U_{C_1}(3) \otimes U_{C_2}(3) ) \supset U_C(3)$$

$$[n_1^{C_1}, n_2^{C_1}, n_3^{C_1}], [n_1^{C_2}, n_2^{C_2}, n_3^{C_2}], \quad [n_1^C, n_2^C, n_3^C]$$

$$U_C(3) \otimes U_R(3) \supset U(3)$$

$$[n_\pi, 0, 0], \quad [n_1, n_2, n_3]$$

$$U(3) \supset SU(3)$$

$$(\lambda, \mu), \chi. \quad (16)$$

Con las letras C y R. nos referimos a "cúmulo" y "movimiento relativo", respectivamente. Las  $[f_1^{C_k}, f_2^{C_k}, f_3^{C_k}, f_4^{C_k}]$  (donde  $k=1,2$ ) son las etiquetas  $U_{C_k}^{TS}(4)$  que dan las propiedades de espín-isoespín de cada cúmulo. Con  $n_\pi = N_0, N_0-1, \dots, 0$  denominamos al número de cuantos de oscilación correspondientes al movimiento relativo, cuyo número mínimo viene dado por la condición de Wildermuth [24].

Por medio de este valor mínimo de  $n_\pi$  excluimos completamente capas no físicas en las cuales los nucleones de los 2 cúmulos estarían forzados a ocupar los mismos estados en el esquema del modelo de capas del núcleo unido. Por el contrario, el valor máximo de  $n_\pi$ , que llamaremos  $N_0$ , está determinado más que por razones físicas por razones técnicas: se escoge de tal manera que el espacio del modelo sea lo suficientemente grande como para abarcar todos los estados observados experimentalmente.

En el Apéndice A se puede ver en detalle cómo es que determinamos cuáles de las  $U_{C_k}^{TS}(4)$  tomamos para cada cúmulo y sus irreps  $U_{C_k}(3)$  correspondientes para el caso particular del isótopo  $^{11}\text{Be}$ , aquí sólo diremos que, como es habitual y siguiendo el esquema de supermultipletes [53], se toma la irrep  $U_{C_k}^{TS}(4)$  más baja en energía para cada cúmulo y se combina con la irrep  $U_{C_k}(3)$  correspondiente de tal modo que el estado total interno de cada cúmulo es completamente antisimétrico. La irrep  $U_{C_k}^{TS}(4)$  más baja en energía para un número dado de nucleones es la más antisimétrica, o sea, la que tiene

la mayor cantidad posible de filas en cada columna. En este caso el máximo posible de filas en una columna es 4 (ver subepígrafe 3.2.2 y epígrafe 3.4). La elección de la configuración de mínima energía está dictada por el hecho de que busquemos describir los estados más bajos en energía de los sistemas nucleares en cuestión.

Las  $[n_1^{C_k}, n_2^{C_k}, n_3^{C_k}]$  son las etiquetas  $U_{C_k}(3)$  de la estructura orbital del cúmulo: los 3 números determinan la distribución de los cuantos de oscilación en las 3 direcciones espaciales (en el orden convencional  $(z,x,y)$ ). Habitualmente se toma sólo la representación que contiene al estado base del cúmulo dado (o sea, se trabaja con una sola  $[n_1^{C_k}, n_2^{C_k}, n_3^{C_k}]$  para cada cúmulo), la cual también contiene al resto de los estados con igual estructura orbital, es decir, a los que componen la banda del estado base.

Por otro lado, como irreps  $[n_1^C, n_2^C, n_3^C]$  tenemos a todas las que resultan del producto  $[n_1^{C_1}, n_2^{C_1}, n_3^{C_1}] \otimes [n_1^{C_2}, n_2^{C_2}, n_3^{C_2}]$ . Los números  $n_k$  realizan un papel análogo para el sistema completo, mientras que  $\lambda$  y  $\mu$  miden la diferencia entre esos números por lo que podemos considerarlos como indicadores de la desviación del núcleo respecto de la configuración esféricamente simétrica hacia una forma triaxial.

#### 4.3.4 Las funciones de onda y el Principio de exclusión de Pauli.

Las funciones de onda base que se obtienen del modo que acabamos de explicar obedecen al Principio de exclusión de Pauli, el cual nos dice cuáles números cuánticos son permitidos y cuáles no. Pero eso no nos asegura que dichos estados sean completamente antisimétricos. Dichas funciones reflejan además el hecho de que estamos considerando a los núcleos como sistemas de cúmulos.

Lo que Wildermuth [24] sugiere es que la función de onda obtenida según su prescripción sea antisimetrizada. Esto significa antisimetrizar la función que resulta de multiplicar las funciones correspondientes a los cúmulos ( $\phi_{C_k}$ ) con la que caracteriza al movimiento relativo ( $R_{n_\pi}$ ). Este camino que consiste en obtener y usar la función exacta completamente antisimetrizada ( $\mathcal{A}[\phi_{C_1}\phi_{C_2}R_{n_\pi}]$ ) ha sido estudiado hace algunos años [44, 55, 56, 57, 58] y aunque da resultados mejores hay que hacer un trabajo considerablemente más difícil y engorroso que el necesario para seguir la vía propuesta por el SACM. Es en ese sentido que el modelo que nos propone el SACM se puede llamar semimicroscópico.

Los estados resultantes de  $SU(3)$  pertenecen a diferentes capas de acuerdo al valor de  $n_\pi$  correspondiente al movimiento relativo que se usó al multiplicar las irreps que

caracterizan al par de cúmulos con las que caracterizan al movimiento relativo. Al usar el valor mínimo  $n_\pi = n_0$  obtenemos los estados  $0\hbar\omega$  de excitación. De modo análogo, al usar  $n_\pi = n_0 + 1$  tendremos los estados  $1\hbar\omega$  de excitación y así sucesivamente para excitaciones  $n\hbar\omega$  más altas.

Todo esto es válido sólo si las configuraciones internas de cúmulos pertenecen a la capa  $0\hbar\omega$  de excitación de los cúmulos individuales, o sea, cuando consideramos a los núcleos como carozos inertes. Ese es el caso en la mayoría de las aplicaciones.

Si, por el contrario, aceptáramos excitaciones de los cúmulos tendríamos entonces un doble conteo de estados: contaríamos como nuevos estados, producto de la excitación relativa, a estados que ya habrían sido introducidos a través de las excitaciones internas de los cúmulos.

Como en nuestro caso toda excitación proviene del movimiento relativo, podemos describir simultáneamente, con sólo variar el número  $n_\pi$  de bosones de movimiento relativo, tanto para bajas como para altas energías, estados de paridad positiva y negativa usando la misma base.

Vale la pena hacer notar que al seguir, aunque sea en parte, la sugerencia de Wildermuth estamos trabajando con cúmulos abstractos, o sea, diferentes a los cúmulos "libres" que observamos en realidad en los experimentos. Esto es así porque debemos tomar el valor de  $\hbar\omega$ , o sea, el cuanto unitario de oscilación, igual tanto para todos los cúmulos como para el núcleo unido resultante y esto, rigurosamente hablando, no es exacto.

Por ejemplo, al considerar al núcleo de  $^{20}\text{Ne}$  como un sistema de 2 cúmulos (partícula  $\alpha$  y núcleo de  $^{16}\text{O}$ ) lo que hacemos en los cálculos es tomar para ambos cúmulos el valor de  $\hbar\omega$  que corresponde al núcleo unido ( $^{20}\text{Ne}$ ). Esta aproximación se aleja más todavía de la realidad cuando tratamos sistemas más pesados como por ejemplo el  $^{212}\text{Po}$  (que puede considerarse como el sistema de cúmulos  $^{208}\text{Pb} + \alpha$ ) ya que los osciladores que corresponden a sistemas más pesados son mucho menos rígidos que los de sistemas más ligeros, o sea, los valores de  $\hbar\omega$  son mucho más pequeños ( $\hbar\omega_{\text{Pb}} \ll \hbar\omega_\alpha$  y  $\hbar\omega_{\text{Po}} \ll \hbar\omega_\alpha$ ).

#### 4.4 Los operadores fenomenológicos.

En el SACM el espacio del modelo está etiquetado de acuerdo a irreps de  $SU(3)$  mientras que los operadores están etiquetados con números cuánticos que obedecen a las

reglas de transformación de  $SU(3)$ , esta característica es una gran ventaja ya que entonces podemos a través de cálculos tensoriales relativamente sencillos encontrar todos los elementos matriciales [59, 60].

El hecho de que los operadores fenomenológicos sean tensores de  $SU(3)$  es lo que permite que en dicha base se puedan calcular analíticamente los respectivos autovalores. Como explicamos en la sección 3, los tensores de un grupo no conectan a irreps diferentes por lo que sólo algunos elementos de la representación matricial serán diferentes de cero y además estarán expresados en términos de las etiquetas ó números cuánticos de la cadena.

En general, construimos el Hamiltoniano del sistema de cúmulos a partir de los generadores de los grupos que aparecen en la cadena de grupos relevantes (15) y el espín total  $J$ . Los elementos matriciales de este hamiltoniano se pueden calcular fácilmente en las funciones base acopladas según  $SU(3)$  cuyos números cuánticos aparecen también en (15).

Si los generadores de dichos grupos aparecen en combinaciones especiales, digamos, formando los invariantes de Casimir de los grupos relevantes, entonces se puede simplificar aún más el formalismo. En ese caso, el hamiltoniano es diagonal en la base de  $SU(3)$  y podemos calcular analíticamente el espectro de energía. Esta simplificación es llamada "Aproximación de Simetría Dinámica". A pesar de que esta última corresponde a una seria simplificación del hamiltoniano, varias aplicaciones a problemas realísticos de cúmulos [48, 49, 50, 51, 52] muestran su validez aproximada. Esta validez se confirma cuando vemos que las características de los espectros de los isótopos del Be observadas experimentalmente (estructura de bandas y reglas de selección, por ejemplo) concuerdan con las predicciones del modelo basadas en consideraciones de simetría.

Como se ve, nosotros seguimos una definición bastante aceptada [61] según la cual hay simetría dinámica cuando el hamiltoniano es función de los operadores de Casimir de las cadenas de grupos relevantes.

A continuación expondremos dos ejemplos de la literatura ya mencionados [14] para ilustrar la simplificación a que conduce la Aproximación de Simetría Dinámica. En ambos casos, como habíamos mencionado anteriormente en la Introducción, se trata de núcleos par-par.

#### 4.4.1 El sistema de cúmulos $^{12}\text{C} + \alpha$ .

En el caso del sistema de cúmulos  $^{12}\text{C} + \alpha$  que da como resultado para el núcleo unido al  $^{16}\text{O}$ , la aproximación de simetría dinámica conduce a la siguiente expresión para el hamiltoniano y la energía respectivamente [14]:

$$\mathbf{H} = \varepsilon + \gamma n_\pi + \delta n_\pi^2 + \eta \mathbf{C}_2(\text{SU}(3)) + \beta \mathbf{L}^2. \quad (17)$$

$$E = \varepsilon + \gamma n_\pi + \delta n_\pi^2 + \eta(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + \beta L(L + 1). \quad (18)$$

En este sistema tenemos un núcleo con todas sus capas cerradas ( $^4\text{He}$ ) y un núcleo par-par ( $^{12}\text{C}$ ). La dependencia en (17) respecto al movimiento relativo está dada por los términos que dependen de  $n_\pi$  mientras que la influencia del estado  $SU(3)$  del sistema que resulta de acoplar la irrep  $(\lambda_1, \mu_1)$  de  $SU(3)$  del núcleo con estructura (el  $^{12}\text{C}$ ) con la  $(n_\pi, 0)$  correspondiente al movimiento relativo está dada por el término donde se encuentra el Casimir de segundo orden de dicha representación  $(\lambda, \mu)$ . En la Tabla 1 mostramos las irreps de  $U(3)$  que se obtuvieron en [14] para este sistema de cúmulos al aplicar el principio de correspondencia entre las bases del modelo de cúmulos y las del modelo de capas.

$n_\pi$	$[n_1, n_2, n_3]$	$(\lambda, \mu)$	$\chi^\pi$	$J^\pi$
4	[4,4,4]	(0,0)	$0^+$	$0^+$
5	[6,4,3]	(2,1)	$1^-$	$1^-2^-3^-$
	[7,4,3]	(3,1)	$1^+$	$1^+2^+3^+4^+$
	[8,4,2]	(4,2)	$0^+$	$0^+2^+4^+$
			$2^+$	$2^+3^+4^+5^+6^+$
7	[7,4,4]	(3,0)	$0^-$	$1^-3^-$
	[8,4,3]	(4,1)	$1^-$	$1^-2^-3^-4^-5^-$
	[9,4,2]	(5,2)	$0^-$	$1^-3^-5^-$
			$2^-$	$2^-3^-4^-5^-6^-7^-$
	[10,4,1]	(6,3)	$1^-$	$1^-2^-3^-4^-5^-6^-7^-$
		$3^-$	$3^-4^-5^-6^-7^-8^-9^-$	

Tabla 1: Irreps de  $U(3)$  (obtenidas en [14]) para el sistema  $^{12}\text{C} + \alpha$  después de aplicar el principio de correspondencia entre las bases del modelo de cúmulos y las del modelo de capas.

#### 4.4.2 El sistema de cúmulos $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ .

Otro ejemplo en el cual la aproximación de simetría dinámica conduce a una expresión sencilla para el hamiltoniano es el del sistema de cúmulos  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$  ( que conduce al  $^{24}\text{Mg}$ ). En ese caso tendremos [14]:

$$\mathbf{H} = \varepsilon + \gamma \mathbf{n}_\pi + \delta \mathbf{n}_\pi^2 + \eta_C \mathbf{C}_2(\text{SU}_C(3)) + \eta \mathbf{C}_2(\text{SU}(3)) + \beta \mathbf{L}^2. \quad (19)$$

$$E = \varepsilon + \gamma n_\pi + \delta n_\pi^2 + \eta_C (\lambda_C^2 + \mu_C^2 + \lambda_C \mu_C + 3\lambda_C + 3\mu_C) + \eta (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + \beta L(L+1). \quad (20)$$

Aunque el hamiltoniano es análogo, vemos que en (19), debido a que los integrantes del sistema simétrico (núcleos de  $^{12}\text{C}$ ) tienen estructura interna, hay una dependencia explícita respecto de los estados  $\text{SU}(3)$  de cúmulos (  $(\lambda_C, \mu_C)$  ) a través del Casimir de segundo orden. Para este sistema, debido a que es simétrico, aparece una restricción adicional para los valores que puede tomar  $n_\pi$ . Ellos deben cumplir la condición:  $\lambda_C + \mu_C + n_\pi = \text{par}$ . La Tabla 2 muestra las irreps de  $\text{SU}(3)$  que se obtuvieron en [14] para este sistema simétrico de cúmulos.

$n_\pi$	$(\lambda, \mu)^i$
12	(8, 4), (7, 3), (6, 2) <sup>2</sup> , (5, 1), (4, 0), (8, 1)
13	(9, 4) <sup>2</sup> , (8, 3) <sup>2</sup> , (7, 2), (6, 1), (11, 3), (10, 2) <sup>2</sup> , (9, 1), (8, 0)
14	(11, 5), (10, 4) <sup>3</sup> , (9, 3) <sup>2</sup> , (8, 2) <sup>2</sup> , (7, 1), (6, 0), (14, 2), (13, 1), (12, 3) <sup>2</sup> , (11, 2), (10, 1), (12, 0)

Tabla 2: El espacio modelo  $\text{SU}(3)$  del SACM para el sistema  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ . El supraíndice i nos da la multiplicidad de la irrep cuando ella es diferente de 1.

#### 4.4.3 Los operadores de transiciones electromagnéticas.

Podemos obtener los operadores correspondientes a las transiciones eletromagnéticas como combinaciones hermíticas, con carácter tensorial apropiado, de los generadores de los grupos relevantes. Aunque usualmente se consideran sólo términos de un cuerpo, se pueden tomar en principio interacciones de orden más alto. Escribamos como ejemplo el operador de transición cuadrupolar eléctrica:

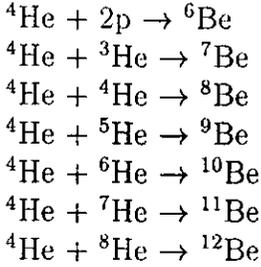
$$T_m^{(E2)} = \sum_\gamma e_\gamma^{(2)} Q_{\gamma, m}^{(2)}. \quad (21)$$

donde  $e_\gamma^{(2)}$  es la carga efectiva y lógicamente  $Q_{\gamma,m}^{(2)}$  son los elementos del operador de momento cuadrupolar eléctrico [14]. Aunque en lo sucesivo no haremos uso de los operadores de transiciones electromagnéticas, hemos querido mencionarlos por completitud. La razón de que no hayamos hecho uso de estos operadores en el desarrollo de nuestra tesis es que los estados de los sistemas nucleares estudiados, son, con muy pocas excepciones, mucho más inestables ante la emisión de partículas, o sea, se desexcitan preferentemente por emisión de partículas y no por emisiones electromagnéticas [62].

## 5 Extensión del SACM a núcleos de la capa p.

En esta sección veremos la extensión de este modelo al caso de sistemas de cúmulos par-impar.

Nos vamos a restringir a núcleos de la capa p. Específicamente, nos ocuparemos de los siguientes sistemas:



Estos sistemas de cúmulos, que evidentemente dan lugar a diferentes isótopos del berilio, son esencialmente del tipo  $\alpha + \text{carozo}$ . Sistemas análogos, o sea, constituidos por una partícula  $\alpha$  y un carozo, han sido estudiados ya en la literatura ( ${}^4\text{He} + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{16}\text{O}$ ,  ${}^4\text{He} + {}^{14}\text{C} \rightarrow {}^{18}\text{O}$ ,  ${}^4\text{He} + {}^{34}\text{S} \rightarrow {}^{38}\text{Ar}$ ,  ${}^4\text{He} + {}^{24}\text{Mg} \rightarrow {}^{28}\text{Si}$  y  ${}^4\text{He} + {}^{28}\text{Si} \rightarrow {}^{32}\text{S}$ ) [14, 48, 49, 51, 52] en el contexto del SACM.

### 5.1 La cadena de grupos relevantes.

A diferencia de los sistemas estudiados para núcleos par-par [14], en este caso trataremos estados con  $T \neq 0$  por lo que aparecerá explícitamente el grupo  $U^{TS}(4)$ .

Tendremos entonces, para el caso  $\alpha + \text{carozo}$ , que el acoplamiento  $SU(3)$  (o sea,  $U(3)$ ) y el etiquetado de las funciones de onda bases se hará según la cadena de grupos:

$$\begin{aligned}
 & ( U_C^{TS}(4) \otimes U_C(3) ) \otimes U_R(4) \supset \\
 & | [f_1 f_2 f_3 f_4], [n_1^C, n_2^C, n_3^C], [N_0, 0, 0, 0], \\
 & ( U_C^{TS}(4) \otimes U_C(3) ) \otimes U_R(3) \supset U_C^{TS}(4) \otimes U(3) \\
 & \qquad \qquad \qquad [n_\pi, 0, 0], \qquad [n_1, n_2, n_3],
 \end{aligned}$$

$$\supset ( U^T(2) \otimes U^S(2) ) \otimes SU(3) \supset SU^S(2) \otimes O(3) \supset SU(2) \\ T, \quad S, \quad (\lambda, \mu), \chi, \quad L, \quad J) . \quad (22)$$

Como una característica nueva tenemos el hecho de que en la ecuación (22) aparecen explícitamente las dependencias respecto al espín ( $S$ ) y al isoespín ( $T$ ). Las irreps de  $U_C^{TS}(4)$  y  $U_C(3)$  se combinan de tal manera que el estado total interno de cada cúmulo es completamente antisimétrico (ver discusión general más arriba en el epígrafe 4.3.3 dedicado a la cadena de grupos relevantes del SACM). En el caso concreto de los isótopos del berilio tendremos la siguiente cadena de grupos:

$$U_C(12) \supset U_C(3) \otimes U_C^{TS}(4) \quad (23)$$

Aquí hemos tenido en cuenta que, según el modelo de capas, a partir del número de orden de la capa podemos saber el grupo unitario que le corresponde al movimiento orbital:  $U(\Omega = (\eta + 1)(\eta + 2)/2)$ . Como los isótopos del berilio se encuentran en la capa  $p$ , hemos considerado que  $\eta = 1$ .

El grupo  $U_C^{TS}(4)$  se reduce a  $SU^T(2) \otimes SU^S(2)$ , o sea, el producto directo de los grupos de espín e isoespín. Para realizar esto podemos usar tablas disponibles en la literatura [63]. Al efectuar la reducción hay que asegurarse de que está incluido el núcleo en consideración. Por ejemplo, para  $^{11}\text{Be}$  es necesario que en la irrep de  $U_C^{TS}(4)$  esté incluido  $T = \frac{3}{2}$  y valores mayores. En el Apéndice A se muestra cómo se realizó dicha reducción para el caso del  $^{11}\text{Be}$  y en el Apéndice B se puede ver, también para el caso concreto del  $^{11}\text{Be}$ , cómo se obtienen finalmente las irreps de  $SU(3)$  del sistema para las excitaciones  $0\hbar\omega$  y  $1\hbar\omega$ , estas últimas después de haberles restado los estados espúreos que se corresponden con el movimiento del centro de masa.

## 5.2 Las funciones base.

La paridad total de los estados finales está determinada por la paridad del movimiento relativo (que está dada por  $n_\pi$ ) multiplicada por la de un nucleón extra ( $\Pi$ ). Ella es par si  $n_\pi$  es par y  $\Pi$  es + o si  $n_\pi$  es impar y  $\Pi$  es -. Ella es impar si  $n_\pi$  es impar y  $\Pi$  es + ó si  $n_\pi$  es par y  $\Pi$  es -. Podemos expresar los estados base obtenidos de ese modo haciendo uso de los coeficientes  $SU(3)$  de Wigner [64]. Como tenemos que la partícula  $\alpha$  constituye uno de los cúmulos, o sea, sólo uno de los cúmulos tiene estructura interna, dada por  $(\lambda_C, \mu_C)$ , obtendremos entonces:

$$|N_0 n_\pi, T, S; (\lambda_C, \mu_C); (\lambda, \mu) \chi L J M_J \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{M_S M_L} (SM_S, LM_L | JM_J) \\
&\times \sum_{R \chi_C L_C} \sum_{M_R M_C} \langle (n_\pi, 0) 0 R M_R, (\lambda_C, \mu_C) \chi_C L_C M_C | (\lambda, \mu) \chi L M_L \rangle \\
&\quad \times |N_0 n_\pi R M_R \rangle |T S M_S; (\lambda_C, \mu_C); \chi_C L_C M_C \rangle . \quad (24)
\end{aligned}$$

Los números cuánticos de espín e isoespín de estos estados están dados por los del otro núcleo que constituye al carozo, ya que ni la partícula  $\alpha$  (por ser un núcleo par-par con el mismo número de protones que de neutrones) ni el movimiento relativo contribuyen a dichos números cuánticos. Para  ${}^6\text{Be}$ ,  ${}^7\text{Be}$ ,  ${}^8\text{Be}$ , debido a que en estos cúmulos todos los nucleones se encuentran en la capa s, tenemos siempre como irrep  $(\lambda_C, \mu_C)$  a la  $(0, 0)$  y las irreps  $SU(3)$  finales están determinadas únicamente por  $(n_\pi, 0)$ . En esos casos los valores mínimos de  $n_\pi$  son 2, 3 y 4 respectivamente. En general, es necesario usar un subíndice de multiplicidad  $\rho$  que aquí no aparece ya que en este caso la multiplicidad es 1.

### 5.3 El hamiltoniano para los núcleos de la capa p.

Nosotros propondremos una expresión particular para el hamiltoniano ajustada para los núcleos de la capa p, como es el caso para los isótopos del berilio. Dicho hamiltoniano tendrá la forma:

$$H = E_0 + \hbar\omega \mathbf{n}_\pi - \chi C_2(SU(3)) + \frac{1}{(C_2(SU(3)) + 3)} (a_L \mathbf{L}^2 + a_J \mathbf{J}^2 + b \mathbf{K}_L^2) . \quad (25)$$

Hemos usado los operadores de Casimir de segundo orden  $C_2(SU(3))$  del grupo  $SU(3)$  total cuyos autovalores son  $C_2(\lambda, \mu) = (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu)$ . El término  $\hbar\omega \mathbf{n}_\pi$  es simplemente el correspondiente a un oscilador armónico y es, en términos de teoría de grupos, el invariante de Casimir de primer orden del grupo  $U_R(3)$ . Para núcleos ligeros tenemos que  $\hbar\omega$  es igual a  $45A^{-1/3} - 25A^{-2/3}$  [26, 65]. En la ecuación (25) aparece también un término rotacional el cual depende linealmente del momento angular orbital  $\mathbf{L}^2$ , el momento angular total  $\mathbf{J}^2$  y el operador  $\mathbf{K}_L^2$ . Los autovalores de este último nos dan la proyección del momento angular orbital a lo largo del eje de simetría del núcleo. Frente a estos operadores rotacionales tenemos un factor  $1/(C_2(SU(3)) + 3)$  el cual tiene en cuenta el hecho de que el momento de inercia es proporcional al cuadrado de la deformación, cuya dependencia respecto al operador de Casimir de segundo orden

de  $SU(3)$  ha sido estudiada en [66].

En [14] se usó otra combinación  $(a_L + n_\pi a_L')L^2$  para la reproducción de diferentes momentos de inercia en diferentes capas, esto implica un parámetro más ( $a_L'$ ). Así, nuestra propuesta disminuye el número total de parámetros en uno.

El nuevo factor toma en cuenta que la constante rotacional decrece no sólo cuando pasamos a capas cada vez más altas, sino también dentro de una capa al pasar a representaciones de  $SU(3)$  cada vez mayores. El desdoblamiento de estados, para valores iguales del momento angular orbital  $L$  en la misma  $(\lambda, \mu)$ , se tiene en cuenta con el término  $\mathbf{K}_L^2$ . Todavía podríamos incluir en el hamiltoniano términos dependientes del espín como, por ejemplo,  $\mathbf{S}^2$ . En este caso no es necesario porque para los casos discutidos de bajas energías aparece un único valor de espín ( $0$  ó  $\frac{1}{2}$ ). Debemos señalar que la combinación  $(a_L L^2 + a_J J^2)$  ya se usó en [67] pero sin los demás términos que nosotros hemos introducido, en particular sin el factor  $1/(\mathbf{C}_2(SU(3)) + 3)$ .

Para núcleos con  $A$  par, (en el caso concreto de los isótopos del berilio siempre son par-par) como  $S = 0$  tendremos  $\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2$  y entonces podemos expresar los primeros dos términos de la parte rotacional del hamiltoniano como  $\tilde{a}_L \mathbf{L}^2$  donde  $\tilde{a}_L = (a_L + a_J)$ . Por tanto, para núcleos con  $A$  par ( $S = 0$ ) no aparece en esos términos una dependencia particular de la estructura interna respecto al acoplamiento de  $S$  y  $L$ .

Para el caso de núcleos con  $A$  impar esta situación cambia ya que el valor del espín es mayor o igual que  $\frac{1}{2}$  y entonces  $J$  es diferente a  $L$ . En este caso, los autovalores de energía cambian significativamente dependiendo de si el acoplamiento entre  $L$  y  $S$  es paralelo o antiparalelo [67]. Esta circunstancia lleva en los núcleos de  $A$  impar a un efecto de Coriolis. Dicho con más precisión, los primeros dos términos en la parte rotacional se corresponden con un acoplamiento de Coriolis para el caso de espín  $S = \frac{1}{2}$  y  $L = \text{par}$  ( $0, 2, 4, \dots$  para la banda del estado base de un núcleo par-par). En ese caso el momento angular  $J$  es  $J = L + \frac{1}{2}$  ó  $J = L - \frac{1}{2}$ . Para estos dos casos obtenemos:

$$\begin{aligned} & a_L L(L+1) + a_J J(J+1) \\ = & \begin{cases} (a_L + a_J)J(J+1) - a_L(J + \frac{1}{2}) + \frac{a_L}{4}, & \text{si } J = L + \frac{1}{2} \\ (a_L + a_J)J(J+1) + a_L(J + \frac{1}{2}) + \frac{a_L}{4}, & \text{si } J = L - \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

respectivamente. Podemos escribir para ambos una sola expresión:

$$(a_L + a_J) \left( J(J+1) + (-1)^{J+\frac{1}{2}} \frac{a_L}{(a_L + a_J)} \left( J + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{a_L}{4} . \quad (26)$$

Si comparamos este resultado con la notación usada en [17] tendremos que  $\frac{\hbar^2}{2\Theta} = \frac{(a_L+a_J)}{(C_2(SU(3))+3)}$  y  $a = \frac{a_L}{(a_L+a_J)}$ . Según nuestro hamiltoniano (25), como el término  $\frac{1}{(C_2(SU(3))+3)}$  está multiplicando a  $a_L$  y  $a_J$ , vemos entonces que el término  $\frac{a_L}{4}$  introduce en el modelo una dependencia extra. Para los isótopos del berilio podemos estimar los valores anteriores a partir de los valores deducidos experimentalmente en [17]. Los parámetros  $\chi$  y  $b$  del hamiltoniano se ajustan a los valores experimentales de la energía. Finalmente, y como ya dijimos, el parámetro  $\hbar\omega$  del término armónico se toma como  $45A^{-1/3} - 25A^{-2/3}$  siguiendo el valor para esta constante asignado en [26, 65] a los núcleos ligeros con número de masa  $A$ .

## 6 Aplicaciones a los isótopos del berilio, desde el ${}^6\text{Be}$ al ${}^{12}\text{Be}$ .

A continuación vamos a considerar por separado a cada uno de los núcleos mencionados anteriormente. Para ello ajustaremos los parámetros del modelo a sus respectivos espectros experimentales. Como dijimos en la sección anterior, el valor de  $\hbar\omega$  es fijo y los parámetros  $a_L$  y  $a_J$  se ajustarán según el intervalo de valores observado para  $\frac{\hbar^2}{2\Theta}$  y  $a$  en [17]. Ajustaremos  $\chi$  y  $b$  según una rutina numérica desarrollada por G. Lévai [68]. Posteriormente, en la sección 7 dedicada a efectuar la extrapolación de los parámetros del modelo, usaremos la dependencia de  $\chi$  respecto al número de masa  $A$  deducida en [69] y asumiremos que  $\frac{\hbar^2}{2\Theta} = \text{const}$  y  $a = 2.138$  (valor que se derivó de los experimentos) para discutir el comportamiento de dichos parámetros al recorrer la cadena de isótopos del Be. Para ese análisis partiremos del  ${}^9\text{Be}$ .

Debido a que para  ${}^6\text{Be}$ ,  ${}^7\text{Be}$  y  ${}^{12}\text{Be}$  tenemos pocos datos disponibles es que no buscaremos los mejores ajustes para estos núcleos sino que nuestra discusión sobre ellos se hará en el contexto de la mencionada extrapolación de los parámetros la cual realizaremos al final de esta sección. Haremos discusión explícitas sólo para  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^9\text{Be}$ ,  ${}^{10}\text{Be}$  y  ${}^{11}\text{Be}$ .

La mayoría de nuestros espectros de energía experimentales provienen de [62]. En los casos en que usamos otra fuente lo escribiremos explícitamente en el texto y en las Tablas. En las Tablas 5, 7, 9, 11 están descritos los espacios del modelo para estos núcleos en el contexto del SACM. Dicho espacio se obtuvo usando una rutina computacional desarrollada por Peter Hess [70] que analiza automáticamente la correspondencia entre el espacio de Hilbert inicial del modelo de cúmulos y el espacio del modelo de capas.

Veamos, por ejemplo, cuál es el camino que sigue el programa en el caso del  ${}^8\text{Be}$ . El espacio del modelo para la capa  $0\hbar\omega$  de excitación consiste de  $(s)^4(p)^4$ , donde vemos 2 protones y 2 neutrones en la capa de valencia. La irrep más baja en energía (supermultiplete) correspondiente al grupo  $U^{TS}(4)$  es  $[1^4]$  lo que nos lleva a  $(4, 0)$  para la irrep de  $SU(3)$ . Podemos obtener el espacio del modelo para la capa  $1\hbar\omega$  de excitación si consideramos la excitación de un nucleón desde la capa  $p$  a la capa  $sd$  y de la capa  $s$  a la capa  $p$ . Esto nos conduce a las configuraciones  $(s)^4(p)^3(sd)^1$  y  $(s)^3(p)^5$ , respectivamente.

Para determinar las irreps de  $SU(3)$  correspondientes a cierta excitación  $n\hbar\omega$  nosotros determinamos las irreps de  $SU(3)$  para cada una de las capas involucradas y posteriormente las multiplicamos. Con el objetivo de eliminar estados espúreos correspondientes

núcleo	$\hbar\omega$	$\chi$	$a_L$	$a_J$	$b$
${}^6\text{Be}$	17.19	-	3.610	-	-
${}^7\text{Be}$	16.69	-	6.008	-3.004	-
${}^8\text{Be}$	16.25	0.4799	17.170	-	-
${}^9\text{Be}$	15.86	0.4899	46.920	-24.979	-
${}^{10}\text{Be}$	15.50	0.3907	9.915	-	22.940
${}^{11}\text{Be}$	15.18	0.3480	43.705	-23.733	121.062
${}^{12}\text{Be}$	14.89	-	4.550	-	-

Tabla 3: Conjunto de parámetros obtenidos para el mejor ajuste de los datos.

al movimiento del centro de masa, multiplicamos , para el caso de  $1\hbar\omega$  de excitación, las irreps de  $0\hbar\omega$  de excitación por  $(1,0)$  que es la irrep del movimiento del centro de masa y restamos la lista de irreps de  $SU(3)$  resultantes de la lista de irreps para  $1\hbar\omega$  de excitación que se obtiene según el procedimiento explicado más arriba. Finalmente nos quedamos con una lista de irreps donde no queda ningún estado espúreo.

Para excitaciones  $\hbar\omega$  más altas se usa el mismo procedimiento con la única complicación de que son posibles cada vez más maneras diferentes de excitar los nucleones de una capa a otra. Para efectuar la correspondencia entre el espacio modelo del SACM y el del modelo de capas nosotros usamos también varios códigos de cálculo por computadora desarrollados en Louisiana por el grupo de J.P.Draayer [64, 71].

Nosotros procedemos de modo análogo para el resto de los isótopos del berilio. Por ejemplo, en el caso del  ${}^9\text{Be}$  la configuración de partida para  $0\hbar\omega$  de excitación está dada por  $(s)^4(p)^5$  mientras que para el  ${}^{12}\text{Be}$  es  $(s)^4(d)^8$ .

## 6.1 El isótopo ${}^8\text{Be}$ .

### 6.1.1 El espacio de Hilbert.

Veamos el espacio que nos da el modelo de capas  $SU(3)$ . En el caso del  ${}^8\text{Be}$  la configuración  $0\hbar\omega$  de excitación está dada por  $(s)^4(p)^4$ . La única capa abierta es la p. La irrep  $U^{TS}(4)$  más baja en energía es la  $[1^4]$ . La irrep  $SU(3)$  que se obtiene a partir de ella (ya que deben ser autoconjugadas para que la función de onda total sea completamente antisimétrica) es la  $(4,0)$ . La configuración  $1\hbar\omega$  de excitación con la mayor irrep de  $SU(3)$  es la  $(s)^4(p)^3(sd)^1$ . Las capas abiertas son la p y la sd con 3 y 1 partícula respectivamente. Las irreps  $U^{TS}(4)$  más bajas en energía, pertenecientes a las

capas p y sd, son  $[1^3]$  y  $[1]$ , las cuales multiplicándolas [63] dan como irrep  $U^{TS}(4)$  total a  $[21^2]$  y  $[1^4]$ . En [63] podemos encontrar, mediante tablas, la reducción para el espín y el isoespín. En este caso particular tenemos  $[21^2] \rightarrow (T, S) = (0, 1) + (1, 0) + (1, 1)$  y  $[1^4] \rightarrow = (0, 0)$ . Para encontrar ahora la irrep de  $SU(3)$  total debemos multiplicar la irrep  $SU(3)$  de cada capa entre sí. Para ello buscamos las autoconjugadas de cada capa, teniendo cuidado de que en la capa n del oscilador cada nucleón debe poseer n cuantos de oscilación. Por ejemplo, en este caso, 3 nucleones en la capa p llevan 3 cuantos de oscilador y les corresponde como irrep de  $SU(3)$  la  $(3,0)$  pero 1 nucleón en la capa sd posee 2 cuantos de oscilación por lo que le corresponde como irrep de  $SU(3)$  la  $(2,0)$ . Una configuración para  $2\hbar\omega$  de excitación la cual da la irrep  $SU(3)$  con el mayor valor del operador de Casimir de segundo orden es la  $(s)^4(p)^3(pf)^1$ . Las capas abiertas son la p y la pf, con 3 y 1 partícula respectivamente, que dan como irreps  $U^{TS}(4)$  la  $[1^3]$  y la  $[1]$  respectivamente. El resultado en términos de  $(T, S)$  es el mismo que en el primer ejemplo. Las respectivas irreps de  $SU(3)$  son en ambos casos  $(3,0)$  ya que un nucleón en la capa pf posee 3 cuantos de oscilación. Las  $SU(3)$  totales serán entonces  $(6,0)$ ,  $(4,1)$ ,  $(2,2)$  y  $(0,3)$ .

Podemos obtener el espacio de Hilbert del SACM si consideramos al  ${}^8\text{Be}$  como un sistema de cúmulos  $\alpha + \alpha$ . Según la condición de Wildermuth el número mínimo de bosones  $\pi$  es 4, lo que se corresponde con "levantar" la partícula  $\alpha$  (o sea, el núcleo  ${}^4\text{He}$ ) desde la capa s hasta la capa p. La irrep de cúmulo de la partícula  $\alpha$  es  $(0,0)$ , lo que lleva al resultado trivial  $(\lambda_C, \mu_C) = (0,0)$ . Este resultado hay que multiplicarlo por  $(n_\pi, 0)$  siendo  $n_\pi \geq 4$ . Finalmente, hay que analizar cuáles de los estados de la lista resultante se corresponden con la del modelo de capas, lo que lleva a  $(4,0)$  como única irrep para  $0\hbar\omega$  de excitación según el SACM.

<i>Cuantos de excitación</i>	<i>Modelo de</i>	<i>Representaciones Irreducibles (irreps) de <math>SU(3)</math></i>
0	<i>capas <math>SU(3)</math></i>	$(4,0)$
	<i>Cúmulos</i>	$(4,0)$
1	<i>capas <math>SU(3)</math></i>	$(5,0), (3,1), (1,2)$
	<i>Cúmulos</i>	ninguna
2	<i>capas <math>SU(3)</math></i>	$(6,0), (4,1), (2,2), (0,3)$
	<i>Cúmulos</i>	$(6,0)$

Tabla 4: Representaciones irreducibles de  $SU(3)$  a las que se aplicará el principio de correspondencia para obtener el espacio microscópico del SACM para el  ${}^8\text{Be}$ .

$n_\pi (\lambda, \mu)$	$K_L$	$L$	$J^\pi$	$E_{teo1}(\text{MeV})$	$E_{teo2}(\text{MeV})$	$E_{exp}(\text{MeV})$	$Ref(\text{Exp})$
4 (4, 0)	0	0	0 <sup>+</sup>	0.000	0.000	0.000	[62]
4 (4, 0)	0	2	2 <sup>+</sup>	3.323	2.310	3.040	[62]
4 (4, 0)	0	4	4 <sup>+</sup>	11.078	7.700	11.400	[62]
6 (6, 0)	0	0	0 <sup>+</sup>	20.023	17.000	20.200	[62]
6 (6, 0)	0	2	2 <sup>+</sup>	21.830	18.256	22.200	[62]
6 (6, 0)	0	4	4 <sup>+</sup>	26.047	21.188	25.500	[62]

Tabla 5: Espectros teórico y experimental para el  $^8\text{Be}$ . Hemos usado los parámetros de la Tabla 3 (fila 3) y los parámetros extrapolados que se muestran más adelante en la Tabla 12 (fila 3).

En la tabla 4 aparecen resumidos los resultados que se obtienen para los espacios de los modelos  $SU(3)$  de capas y el de cúmulos cuando se consideran 0, 1 y 2 cuantos de excitación.

Nosotros hemos ajustado los parámetros al espectro experimental disponible en [62] y el resultado se muestra en la Tabla 3 y en la Figura 3. Como se ve en la octava columna de la tabla 5, en este caso todos los datos experimentales usados por nosotros provienen de [62]. Para el estudio de los restantes isótopos (nos referimos a  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{Be}$  y  $^{11}\text{Be}$  que fue para quienes hicimos ajustes por separado) fue siempre necesario recurrir a fuentes experimentales adicionales lo cual es consignado en las subsecciones 6.2, 6.3 y 6.4 dedicadas al análisis de los isótopos respectivos.

En la Tabla 5 comparamos el espacio y el espectro teóricos del modelo con los resultados experimentales. La banda del estado base es descrita por (4, 0) y la banda excitada por (6, 0). Los momentos de inercia de las dos bandas son diferentes y el modelo los puede reproducir adecuadamente por medio del factor  $(C_2(SU(3)) + 3)^{-1}$ . Ya dijimos que la razón de ser de este término está dada por la dependencia del momento de inercia respecto de la deformación cuadrupolar [73] y la relación de dicha deformación cuadrupolar con el operador de Casimir de segundo orden de  $SU(3)$  [66].

Hay algunos otros estados de paridad positiva por debajo de la banda (6, 0) (con  $T = 0$  y a energías  $\geq 16$  MeV) los cuales no se pueden explicar por medio del espacio del modelo que hemos usado. Posiblemente esos estados provengan de configuraciones en las cuales una de las partículas  $\alpha$  está rota, o sea, de configuraciones que tienen otra estructura de cúmulos.

Tampoco hemos considerado a los estados de paridad negativa porque se trata de

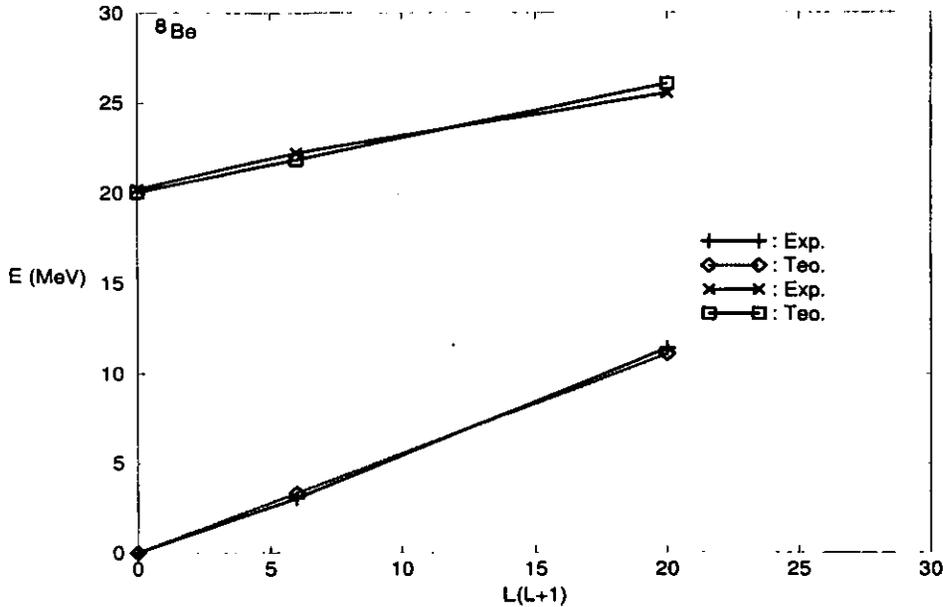


Figura 3: Espectros teórico y experimental del  ${}^8\text{Be}$  según los parámetros de las Tablas 3 y 12. Las curvas teórica y experimental prácticamente coinciden.

un sistema simétrico ( $\alpha$ - $\alpha$ ) formado por 2 cúmulos par-par. Como ya vimos en el epígrafe 4.4.2, para estos sistemas, el SACM lleva a la condición de que  $n_\pi + \lambda + \mu$  debe ser igual a un número par. Eso es debido a argumentos de simetría ya que la función de onda total debe ser invariante ante el intercambio de dos cúmulos idénticos. Por eso en el caso del  ${}^8\text{Be}$ , en el contexto del SACM, no se pueden obtener estados con  $n_\pi$  impar, o sea, con paridad negativa.

### 6.1.2 La deformación.

Usando la deformación del  ${}^8\text{Be}$  que se deduce de [66] ( $\beta = 0.75$ ), hemos representado en la Figura 4 un corte a través de la superficie cuadrupolar deformada.

Según se observa, hay una separación física de los cúmulos la cual es debida principalmente a que la deformación cuadrupolar es grande. Vale la pena hacer notar que si usáramos la definición de Raman [72] obtendríamos un valor  $\beta > 0.75$ . Esta discrepancia surge debido a que se trata de definiciones diferentes. Veamos en qué consiste la diferencia.

Vamos a partir de la conocida expresión que relaciona a la deformación ( $\beta$ ) con las

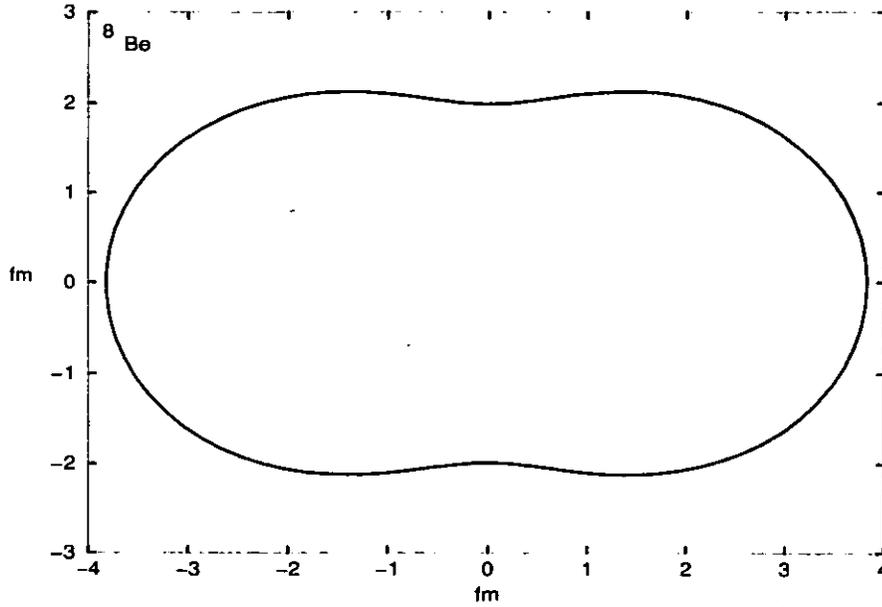


Figura 4: Sección transversal cuadrupolar del  $^8\text{Be}$ .

transiciones cuadrupolares eléctricas [73]:

$$B(E2; I_i \rightarrow I_f)_{\text{banda base}} = A^2 \frac{2I_f + 1}{2I_i + 1} (I_f 0, 20 | I_f 0)^2 \beta_0^2 (1 + 0.36\beta_0)^2 \quad (27)$$

donde

$$A = \frac{3ZR_0^2}{4\pi} \quad (28)$$

La expresión anterior para las transiciones cuadrupolares eléctricas es válida cuando se trata de núcleos deformados con simetría axial. En ella  $Z$  es el número atómico y  $R_0$  representa, como es habitual, un parámetro que aparece si suponemos que existe una distribución de densidad homogénea en el núcleo y desarrollamos su radio en términos de los Polinomios de Lagrange.

En general, la expresión  $\beta_0(1 + 0.36\beta_0)$  puede escribirse como  $\beta = \beta_R + \Delta\beta$  (donde  $\beta_R$  es la definida y usada por Raman). Si suponemos  $\Delta\beta \ll \beta_R$  entonces tendremos que  $\beta \approx \beta_R$ , o sea,  $\beta_0 \approx \beta_R$ . Esa es la aproximación que hace Raman y es válida cuando se trata de sistemas para los cuales la deformación varía poco, o sea, sistemas duros. La otra posibilidad es que  $\beta_R \ll \Delta\beta$ , en ese caso  $\beta_0 \approx \Delta\beta$ . Esta condición se

cumple para sistemas muy suaves en los cuales las variaciones de la deformación son comparables con la deformación misma. Nosotros no hemos usado ninguna de estas aproximaciones, o sea, hemos trabajado con la expresión exacta.

## 6.2 El isótopo ${}^9\text{Be}$ .

### 6.2.1 El espacio de Hilbert.

En el caso del  ${}^9\text{Be}$ , según el modelo de capas  $\text{SU}(3)$ , la configuración  $0\hbar\omega$  de excitación es la  $(s)^4(p)^5$ . La  $p$  es la única capa abierta. La irrep  $U^{TS}(4)$  más baja en energía es la  $[21^3]$ . La irrep  $\text{SU}(3)$  asociada con ella (por la misma razón vinculada al principio de Pauli que en el caso del  ${}^8\text{Be}$ ) es la  $(3, 1)$ . La configuración  $1\hbar\omega$  de excitación  $(s)^4(p)^4(sd)^1$  es la que da la mayor irrep  $\text{SU}(3)$ . En este caso las capas abiertas son la  $p$  y la  $sd$  con 4 y 1 partícula respectivamente. Las irreps  $U^{TS}(4)$  más bajas en energía de las capas  $p$  y  $sd$  son  $[1^4]$  y  $[1]$ , las cuales al multiplicarse [63] dan como única irrep  $U^{TS}(4)$  total a  $[21^3]$ . También en [63] podemos encontrar las tablas que permiten obtener los valores de espín e isoespín que les corresponden a dichas irreps. En este caso concreto tenemos  $[21^3] \rightarrow (T, S) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . De modo análogo a como ya explicamos para el  ${}^8\text{Be}$ , para obtener la  $\text{SU}(3)$  total se multiplican entre sí las de cada capa.

Para obtener el espacio de Hilbert del SACM consideramos al  ${}^9\text{Be}$  como  $\alpha + {}^5\text{He}$ . El número mínimo de bosones  $\pi$  es 4, lo que se corresponde, como en el caso del  ${}^8\text{Be}$ , con "levantar" la partícula  $\alpha$  (el  ${}^4\text{He}$ ) de la capa  $s$  a la capa  $p$ . La irrep de cúmulo de la partícula  $\alpha$  es  $(0, 0)$  y la del  ${}^5\text{He}$  es  $(1, 0)$  lo que nos da  $(\lambda_{C_1}, \mu_{C_1}) \otimes (\lambda_{C_2}, \mu_{C_2}) = (1, 0)$ . Esta irrep debe ser multiplicada por  $(n_\pi, 0)$  siendo  $n_\pi \geq 4$ . Finalmente analizamos cuáles de los estados resultantes de este cálculo según el modelo de cúmulos se corresponden con los estados del modelo de capas, lo cual nos da a  $(3, 1)$  como la única irrep para  $0\hbar\omega$  de excitación en el contexto del SACM.

En la tabla 6 se muestran las irreps de  $\text{SU}(3)$  que se obtienen para el  ${}^9\text{Be}$  según el modelo  $\text{SU}(3)$  y el de cúmulos.

Casi todos los niveles experimentales y las asignaciones de espín y paridad provienen de [62]. Las excepciones son los niveles a 5.59 MeV, 6.38 MeV y 6.76 MeV los cuales tienen  $J^\pi = \frac{3}{2}^-, \frac{7}{2}^-$  y  $\frac{9}{2}^+$ , respectivamente (el nivel a 6.76 MeV es considerado en [62] como un nivel  $\frac{7}{2}^-$ ). Los niveles a 5.59 MeV y 6.38 MeV se obtienen del análisis experimental de datos  $(p, p')$  y  $(e, e')$  en [74] y [75] respectivamente. Para el nivel a 11.283 MeV no se propone en [62] ningún valor para el espín o la paridad y nosotros usamos, otra vez según [74, 75], el valor  $\frac{7}{2}^+$ .

Cuantos de excitación	Modelo de	Representaciones Irreducibles (irreps) de $SU(3)$
0	capas $SU(3)$	(3,1)
	Cúmulos	(5,0), (3,1)
1	capas $SU(3)$	(6,0), (4,1), (2,2)
	Cúmulos	(6,0), (4,1)
2	capas $SU(3)$	(7,0), (5,1), (3,2), (1,3)
	Cúmulos	(7,0), (5,1)

Tabla 6: Representaciones irreducibles de  $SU(3)$  a las que se aplicará el principio de correspondencia para obtener el espacio microscópico del SACM para el  ${}^9\text{Be}$ .

Como parámetros rotacionales  $a_L$  y  $a_J$  usamos los valores que se deducen de la pendiente de una de las bandas, los cuáles están en el intervalo descrito por [17]. Nosotros ajustamos  $\chi$  mientras que  $b$ , el parámetro para la interacción  $\mathbf{K}_L^2$ , lo tomamos igual a cero. Esta última elección es debida a que todos los estados que conocemos en el espectro de energías experimentales pertenecen a un solo valor de  $K_L$  para una irrep  $(\lambda, \mu)$  de  $SU(3)$  dada.

El parámetro  $\mathbf{K}_L^2$  nos sirve para ajustar las diferencias de energía entre estados que son distintos pero pertenecen a la misma irrep  $(\lambda, \mu)$  de  $SU(3)$  y tienen igual valor de  $L$ . Por ejemplo, la banda  $\frac{3}{2}^-$  pertenece a (3,1) con  $K_L = 1$ , mientras que la banda  $\frac{1}{2}^+$  pertenece a (6,0) con  $K_L = 0$ .

Hemos escogido los parámetros del modelo de tal modo que los estados en que el espín y el momento angular orbital son paralelos se encuentran a energías menores que aquellos en los que el espín y el momento angular orbital son antiparalelos, acorde con la expresión que ya habíamos obtenido para el hamiltoniano en (26). Para ambos casos tenemos que el espín a partir de  $U_C^{TS}(4)$  es  $\frac{1}{2}$  para las irreps más antisimétricas tanto de  $0\hbar\omega$  como de  $1\hbar\omega$  de excitación. Así, para (3,1) la banda  $K_L = 1$ , con acoplamiento paralelo, nos da los estados  $\frac{3}{2}^-$  ( $L = 1$ ),  $\frac{5}{2}^-$  ( $L = 2$ ),  $\frac{7}{2}^-$  ( $L = 3$ ) y  $\frac{9}{2}^-$  ( $L = 4$ ). Este último es el único que no aparece en el espectro experimental. El acoplamiento antiparalelo nos da los estados  $\frac{1}{2}^-$  ( $L = 1$ ),  $\frac{3}{2}^-$  ( $L = 2$ ),  $\frac{5}{2}^-$  ( $L = 3$ ) y  $\frac{7}{2}^-$  ( $L = 4$ ). De estos estados con acoplamiento antiparalelo sólo los dos primeros tienen contraparte experimental. Los estados correspondientes a la excitación  $1\hbar\omega$  ( $SU(3)=(6,0)$ ) tienen  $K_L = 0$  y son, cuando el acoplamiento es paralelo,  $\frac{1}{2}^+$  ( $L = 0$ ),  $\frac{5}{2}^+$  ( $L = 2$ ),  $\frac{9}{2}^+$  ( $L = 4$ ) y  $\frac{13}{2}^+$  ( $L = 6$ ). Del acoplamiento antiparalelo resultan los

$n_\pi (\lambda, \mu)$	$K_L$	$L$	$2J^\Pi$	$E_{teo}$ (MeV)	$E_{exp}$ (MeV)	$Ref$ (Exp)
4 (3, 1)	1	1	3 <sup>-</sup>	0.000	0.000	[62]
4 (3, 1)	1	2	5 <sup>-</sup>	2.242	2.429	[62]
4 (3, 1)	1	3	7 <sup>-</sup>	6.052	6.380	[74, 75]
4 (3, 1)	1	4	9 <sup>-</sup>	11.429	-	-
4 (3, 1)	1	1	1 <sup>-</sup>	2.676	2.780	[62]
4 (3, 1)	1	2	3 <sup>-</sup>	6.703	5.59	[74]
4 (3, 1)	1	3	5 <sup>-</sup>	12.297	-	-
4 (3, 1)	1	4	7 <sup>-</sup>	19.458	-	-
5 (6, 0)	0	0	1 <sup>+</sup>	1.318	1.685	[62]
5 (6, 0)	0	2	3 <sup>+</sup>	4.942	4.704	[62]
5 (6, 0)	0	2	5 <sup>+</sup>	2.751	3.049	[62]
5 (6, 0)	0	4	7 <sup>+</sup>	11.207	11.283	[74, 75]
5 (6, 0)	0	4	9 <sup>+</sup>	7.263	6.760	[74, 75]
6 (7, 0)	0	1	1 <sup>-</sup>	10.696	7.900	[62]

Tabla 7: Espectros teórico y experimental para el  ${}^9\text{Be}$ . Hemos usado los parámetros de la Tabla 3 (fila 4). Los valores de espín en la lista están multiplicados por 2.

estados  $\frac{3}{2}^+$  ( $L = 2$ ),  $\frac{7}{2}^+$  ( $L = 4$ ) y  $\frac{11}{2}^+$  ( $L = 6$ ). Todos esos estados, con excepción de los estados  $\frac{11}{2}^+$  y  $\frac{13}{2}^+$ , están presentes en el espectro experimental.

Debido a que el acoplamiento paralelo es menor en energía que el antiparalelo y los estados de la banda de paridad positiva pertenecen a una y la misma banda, es que este espectro reproduce el efecto de Coriolis. En este caso, a diferencia de los estados anteriores en que se repetían  $\frac{3}{2}^-$  y  $\frac{5}{2}^-$ , no hay ningún estado repetido.

En la Tabla 3 está la lista de parámetros que resultó del ajuste al espectro experimental, mientras que en la Tabla 7 tenemos los estados que se obtienen al comparar con el experimento y los números cuánticos que se les asignan en el contexto del SACM. En la Figura 5 hemos graficado los resultados del ajuste.

Dependiendo de cuál ajuste consideremos mejor de todos los posibles, podemos escoger otro conjunto de parámetros que nos den como resultado aproximadamente el mismo espectro de energías.

El ajuste reproduce, como podemos ver en la Tabla 7 y en la Figura 5, el efecto de Coriolis en la banda  $\frac{1}{2}^+$  y la pendiente en la banda  $\frac{3}{2}^-$ . Se puede apreciar claramente

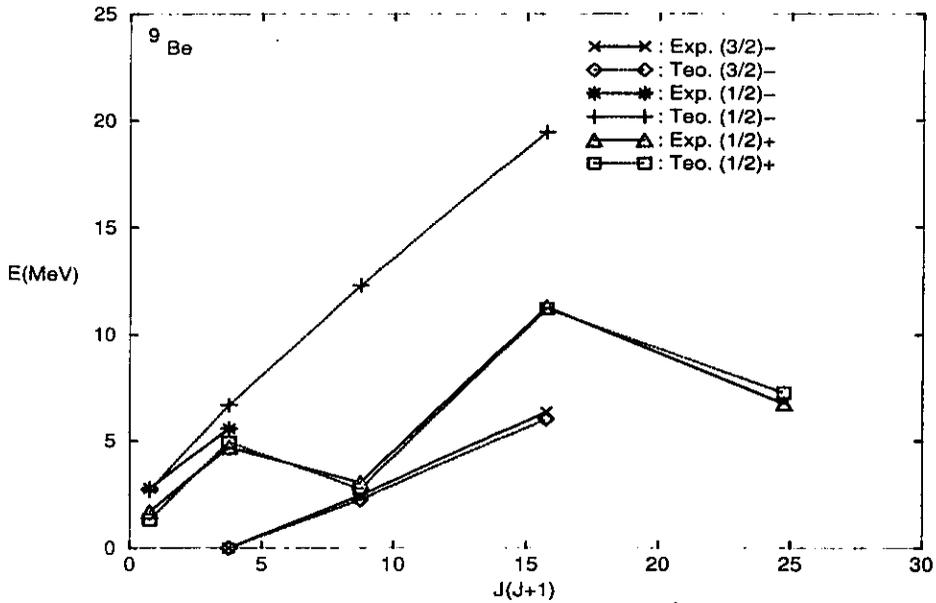


Figura 5: Ajuste para el  ${}^9\text{Be}$ .

la importancia del factor proporcional a  $(C_2(\text{SU}(3)) + 3)^{-1}$  en la parte rotacional del hamiltoniano de la ecuación (25). De acuerdo con lo explicado en la sección 5, las pendientes de las bandas están determinadas por el cambio de la variable de deformación  $\beta$ .

### 6.2.2 La deformación.

Hemos graficado la forma del  ${}^9\text{Be}$  en la Figura 6.

Para ello hemos deducido el parámetro de deformación ( $\beta = 0.6$ ) a partir de [66] con la corrección ya indicada al calcular la deformación del  ${}^8\text{Be}$ . También hemos usado la expresión para el radio de un núcleo con deformación cuadrupolar dado en [73]. El resultado es muy ilustrativo y muestra la existencia de cúmulos físicos en el sistema. La distancia entre los centros de estas "esferas" es de alrededor de 4 fm, lo cual es aproximadamente igual a la distancia entre los centros de 2 partículas  $\alpha$  cuyas superficies se rozan. La separación física es menos pronunciada debido a que el sistema es menos deformado que el  ${}^8\text{Be}$ . La forma es de tipo puramente cuadrupolar y seguramente no es la más eficiente en el sentido de minimizar la tensión superficial [73]. Sin embargo, confirma la representación habitual del carozo como 2 partículas  $\alpha$  separadas.

Queremos hacer notar que una estructura de cúmulos no se corresponde siempre

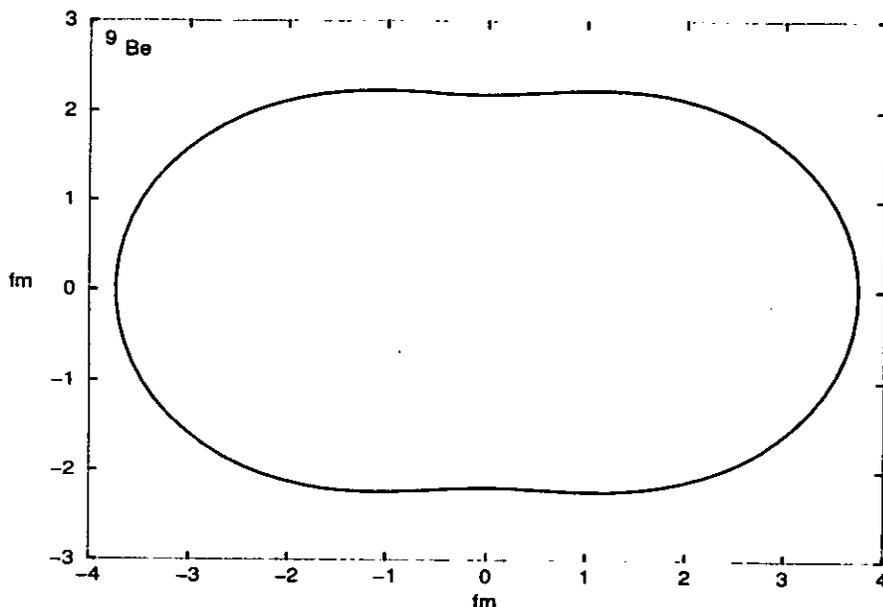


Figura 6: Sección transversal cuadrupolar del  ${}^9\text{Be}$ .

con una separación física de 2 cúmulos. Por ejemplo, el estado base del  ${}^{16}\text{O}$  es esférico pero se puede considerar como un sistema  ${}^{12}\text{C} + \alpha$  lo cual significa que su superposición con el estado base del  ${}^{16}\text{O}$  es diferente de cero. El hecho de que para los isótopos del Be obtengamos una separación física entre los cúmulos es debido a la existencia de grandes deformaciones. Aquí nos estamos refiriendo a 2 definiciones diferentes de estados con estructura de cúmulos. Cuando hay una separación física de los cúmulos se trata de la definición rígida usada por Horiuchi [44]. Por otro lado, llamamos definición blanda al caso en el que la función de onda del núcleo unido tiene cierta componente de alguna base de cúmulos. Esta última es la usada por nosotros.

### 6.3 El isótopo ${}^{10}\text{Be}$ .

#### 6.3.1 El espacio de Hilbert.

En el caso del  ${}^{10}\text{Be}$  la configuración con  $0\hbar\omega$ , de acuerdo al modelo de capas  $\text{SU}(3)$ , es la  $(s)^4(p)^6$ . La única capa abierta es la p. La irrep  $U^{TS}(4)$  más baja en energía es la  $[2^21^2]$ . La irrep  $\text{SU}(3)$  vinculada con ella, por la razón ya explicada es la  $(2, 2)$ . La configuración  $1\hbar\omega$  que da la mayor irrep  $\text{SU}(3)$  es la  $(s)^4(p)^5(sd)^1$ . Las capas abiertas son la p con 5 partículas y la sd con 1. La irrep  $U^{TS}(4)$  más baja en energía, de las que pertenecen a las capas p y sd son  $[21^3]$  and  $[1]$  y dan, al ser multiplicadas [63], a  $[31^3]$

y  $[2^2 1^2]$  como irreps  $U^{TS}(4)$  totales. Los valores de espín e isoespín correspondientes se pueden encontrar en [63]. En este caso tenemos  $[31^3] \rightarrow (T, S) = (0, 0) + (1, 1)$  y  $[2^2 1^2] \rightarrow (T, S) = (0, 1) + (1, 0)$ . Una configuración con  $2\hbar\omega$  que da la irrep  $SU(3)$  con el mayor valor del operador de Casimir de segundo orden es la  $(s)^4(p)^4(sd)^2$ . Las capas abiertas son la p y la sd las cuales dan a  $[1^4]$  y  $[1^2]$  como las irreps de  $U^{TS}(4)$  respectivamente. Al multiplicarlas obtenemos a  $[2^2 1^2]$  como la única irrep posible. Los valores de  $(T, S)$  son  $(0, 1) + (1, 0)$ . Debido a que la componente z del isoespín del  $^{10}\text{Be}$  es 1, sólo contribuirán aquellas irreps de  $U^{TS}(4)$  que tengan isoespines  $T \geq 1$ .

Para obtener el espacio de Hilbert según el SACM podemos considerar al  $^{10}\text{Be}$  como  $\alpha + ^6\text{He}$ . En analogía con el caso para el  $^9\text{Be}$ , tenemos que el número mínimo de bosones  $\pi$  es nuevamente 4 lo que se corresponde con "levantar" la partícula  $\alpha$  (ó  $^4\text{He}$ ) desde la capa s a la capa p. Ya sabemos que la irrep de cúmulos de la partícula  $\alpha$  es  $(0, 0)$ . La del  $^6\text{He}$  es  $(2, 0)$  lo cual nos conduce a que  $(\lambda_C, \mu_C) = (2, 0)$ . Hay que multiplicar esta irrep por  $(n_\pi, 0)$  siendo  $n_\pi \geq 4$ . Después de aplicar, para la lista de estados resultante, el principio de correspondencia con los estados del modelo de capas, nos quedamos con  $(2, 2)$  como la única irrep según el SACM para  $0\hbar\omega$ . En la Tabla 9 se encuentra el espacio que se obtiene para nuestro modelo después de aplicar la condición de correspondencia con el modelo de capas.

Cuantos de excitación	Modelo de	Representaciones Irreducibles (irreps) de $SU(3)$
0	capas $SU(3)$	$(2, 2)$
	Cúmulos	$(6, 0), (4, 1), (2, 2)$
1	capas $SU(3)$	$(5, 1), (3, 2), (4, 0), (1, 3), (2, 1)$
	Cúmulos	$(7, 0), (5, 1), (3, 2)$
2	capas $SU(3)$	$(8, 0), (6, 1), (4, 2), (2, 3), (0, 4)$
	Cúmulos	$(8, 0), (6, 1), (4, 2)$

Tabla 8: Representaciones irreducibles de  $SU(3)$  a las que se aplicará el principio de correspondencia para obtener el espacio microscópico del SACM para el  $^{10}\text{Be}$ .

Las irreps resultantes de  $SU(3)$  para el  $^{10}\text{Be}$  según los modelos  $SU(3)$  y de cúmulos aparecen en la tabla 8.

La mayoría de nuestras asignaciones de espín y paridad coinciden con [62]. La asignación de  $2^+$  a los niveles a 3.37 MeV y 5.958 MeV es también usada en trabajos posteriores, tanto experimentales como teóricos [76, 77]. En [62] se sugiere una asignación

$n_\pi (\lambda, \mu)$	$K_L$	$L$	$J^\pi$	$E_{teo1}(\text{MeV})$	$E_{teo2}(\text{MeV})$	$E_{exp}(\text{MeV})$	$Ref(\text{Exp})$
4 (2, 2)	0	0	$0^+$	0.000	0.000	0.000	[62]
4 (2, 2)	0	2	$2^+$	2.203	3.268	3.368	[62, 76]
4 (2, 2)	2	2	$2^+$	5.602	5.476	5.958	[62, 76]
4 (2, 2)	2	3	$3^+$	7.805	8.744	-	-
4 (2, 2)	2	4	$4^+$	10.743	13.102	-	-
5 (5, 1)	1	1	$1^-$	6.556	6.450	5.960	[62]
5 (5, 1)	1	2	$2^-$	7.319	7.581	6.263	[62]
5 (5, 1)	1	3	$3^-$	8.463	9.278	7.371	[62]
5 (5, 1)	1	4	$4^-$	9.988	11.541	9.270	[62]
5 (5, 1)	1	5	$5^-$	11.895	14.369	-	-
5 (5, 1)	1	6	$6^-$	14.183	17.763	-	-
6 (8, 0)	0	0	$0^+$	5.998	5.650	6.179	[62]
6 (8, 0)	0	2	$2^+$	6.652	6.620	7.542	[62]

Tabla 9: Espectros teórico y experimental para el  $^{10}\text{Be}$ . Hemos usado los parámetros de la Tabla 3 (fila 5) y los parámetros extrapolados que se encuentran listados más adelante en la Tabla 12.

de  $J^\pi = 4^-$  para el nivel a 9.27 MeV y nosotros usamos ese valor. Pero considerando un trabajo experimental posterior ya mencionado [76] donde se observó la intensidad de transiciones Gamow-Teller a 9.4 MeV en la reacción  $(t, ^3\text{He})$  y la sugerencia de los autores de que en este caso todos los valores  $2^+$ ,  $3^+$  ó  $4^+$  son posibles, el nivel a 9.27 MeV podría pertenecer también a la irrep (2, 2) de  $SU(3)$  con  $K=2$  y  $J^\pi = 3^+$  ó  $4^+$ .

Debido a que el espín para núcleos par-par es  $S = 0$ , tenemos simplemente a  $(a_L + a_J)$  como parámetro rotacional. Nosotros usamos el valor deducido para  $(a_L + a_J)$  a partir de la posición del estado  $2_1^+$  [62]. Los parámetros  $\chi$  y  $b$  se obtienen del ajuste.

Hemos usado a  $\chi$  para obtener la posición de las irreps de  $SU(3)$  entre sí y a  $b$  para reproducir correctamente el desdoblamiento  $K_L$  entre los estados  $2_1^+$  y  $2_2^+$ . Tenemos una lista en la Tabla 3 de los parámetros ajustados a ese espectro. En la Tabla 9 se comparan los estados obtenidos con los que resultan de los experimentos y se dan los números cuánticos que a cada uno de ellos se le asocian en los marcos del SACM. En la Figura 7 están graficados los resultados del ajuste.

Es posible ver en la Tabla 9 y en la Figura 7 que nuestro ajuste reproduce bastante bien el espectro experimental. Es interesante hacer notar la estructura de la primera banda excitada  $0^+$  la cual aparece como una excitación  $2\hbar\omega$ . Uno de los estados  $2\hbar\omega$

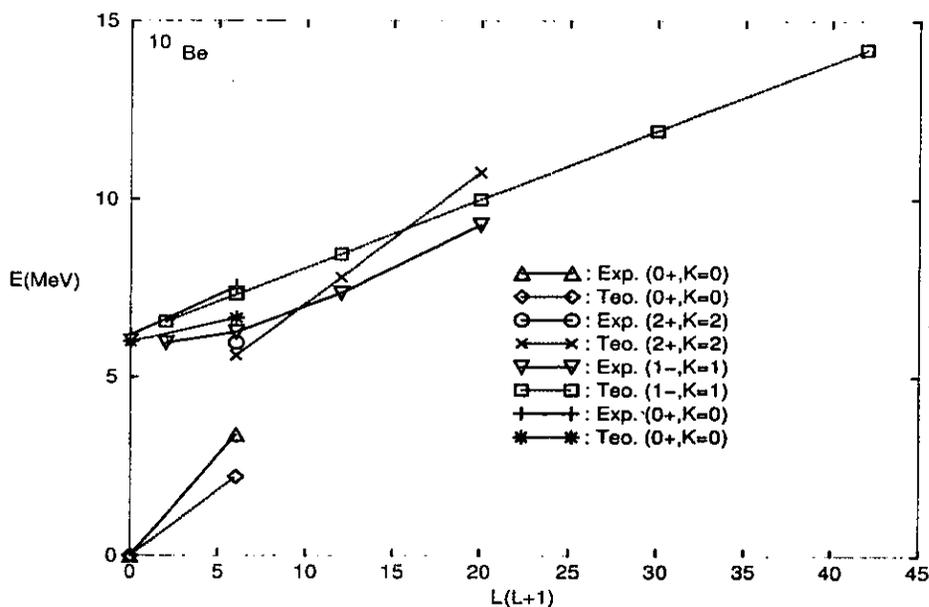


Figura 7: Ajuste del  $^{10}\text{Be}$ .

del modelo de capas que encontramos es un estado  $0^+$  aislado que surge de la irrep  $(0,0)$  de  $SU(3)$ . Este estado tiene una superposición igual a cero con el sistema de cúmulos  $\alpha + ^6\text{He}$  pero diferente de cero con el sistema  $^9\text{Be} + n$ , por eso no aparece en el espacio modelo del SACM para las estructuras de cúmulos que hemos considerado. Sin embargo, debería estar presente. Si despreciamos los efectos del carozo y tomamos la interacción  $C_2(SU(3))$  tendremos, para  $\chi = 0.3907$ , una diferencia de energía estimada de alrededor de 9.4 MeV respecto al estado base ( que pertenece a la irrep  $(2,2)$  de  $SU(3)$  ). O sea, este estado se encuentra a una energía bastante más alta que el primer estado  $0_1^+$  observado y no puede asociarse con el estado  $0_2^+$ .

En conclusión, podemos interpretar al primer estado excitado  $0_2^+$  como una excitación  $2\hbar\omega$  lo que ya nos muestra que, debido a una fuerte interacción cuadrupolar descrita por  $C_2(SU(3))$ , los estados que resultan de un par de excitaciones  $\hbar\omega$  caen bastante bajos en energía. Este efecto lo veremos más acentuado todavía para el  $^{11}\text{Be}$ . Los grande valores de  $\chi$  implican grandes deformaciones y sistemas superdeformados extendidos. Podemos ver otra vez claramente la importancia del factor proporcional a  $(C_2(SU(3)) + 3)^{-1}$  en la parte rotacional del hamiltoniano de la ecuación (25). Según explicamos en la sección 5, el cambio en la variable de deformación  $\beta$  determina las pendientes de las diferentes bandas.

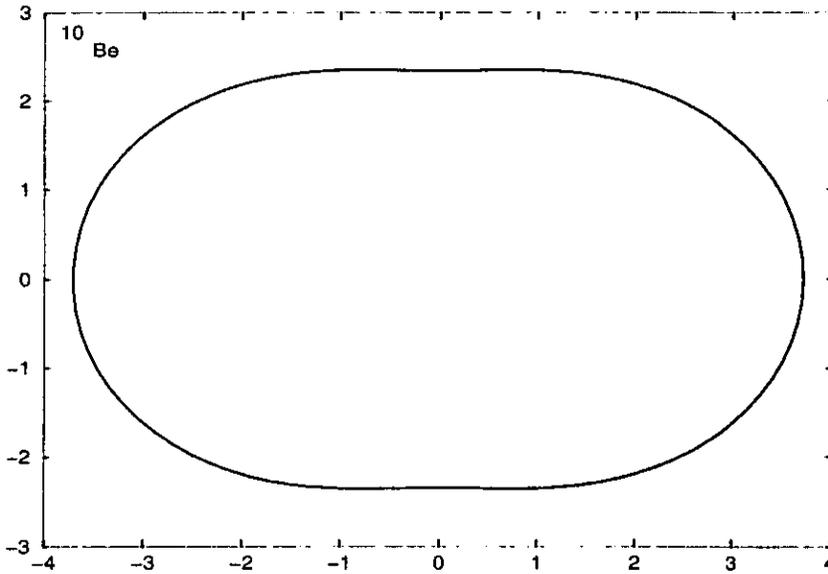


Figura 8: Sección transversal cuadrupolar del  $^{10}\text{Be}$  tomando como estado base la irrep  $(2, 2)$  de  $SU(3)$ .

El estado  $4^+$  más bajo pertenece a la banda  $K_L = 2$ . Al contrario de lo que se sugiere en [15], en nuestro modelo no hay un estado  $4^+$  asociado a la banda del estado base y tampoco el estado  $6^+$  que obtienen en [16] existe en la irrep  $(2, 2)$  de  $SU(3)$  del espacio de nuestro modelo. Debido a que los estados de paridad positiva más bajos en energía pertenecen a la irrep  $(2, 2)$ , la banda del estado base con  $K_L = 0$  consiste sólo de un estado  $0^+$  y un estado  $2^+$  mientras que la banda  $K_L = 2$  consiste de un estado  $2^+$ , uno  $3^+$  y otro  $4^+$ . Por eso sospechamos que los estados  $4^+$  y  $6^+$ , asociados en [15] y [16] con la banda del estado base y la  $K_L = 2$  respectivamente, son espúreos.

### 6.3.2 La deformación.

Hemos graficado en la Figura 8 un corte a lo largo de la superficie del  $^{10}\text{Be}$  en su estado base, tomando como sistema de referencia el fijo al cuerpo ( $\beta = 0.52$ ).

Evidentemente hemos obtenido, tal y como ocurrió para el  $^9\text{Be}$ , una separación física de los cúmulos  $\alpha$  (ver discusión en la última subsección) aunque en este caso, debido al menor valor de la deformación, dicha separación no es tan pronunciada. El isótopo  $^{10}\text{Be}$  será el menos deformado, o sea, en correspondencia con [17] será el más compacto.

En [16] se señala que las bandas excitadas  $1^-$  y  $0_2^+$  muestran, en ese orden, una estructura de cúmulos cada vez más definida. En nuestro modelo, esas bandas pertenecen a la irrep  $(5, 1)$  correspondiente a  $1\hbar\omega$  de excitación, y a la irrep  $(8, 0)$  correspondiente a  $2\hbar\omega$  de excitación, respectivamente. Sus deformaciones son  $\beta = 0.72$  y  $0.95$  (comparado con  $0.52$  de la banda del estado base). Mientras que en la Figura 8 el cuello del  $^{10}\text{Be}$  en la banda del estado base no es muy pronunciado, en las bandas excitadas y debido a la mayor deformación se forma un cuello más definido, lo que confirma la observación hecha en Ref. [16].

## 6.4 El isótopo $^{11}\text{Be}$ .

### 6.4.1 El espacio de Hilbert.

De acuerdo con el modelo de capas  $\text{SU}(3)$ , la configuración con  $0\hbar\omega$  de excitación para el  $^{11}\text{Be}$  es la  $(s)^4(p)^7$ . La única capa abierta es la  $p$ . La irrep  $U^{TS}(4)$  más baja en energía *no* es la  $[2^31]$  porque ella se reduce a  $[63]$   $(T, S) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Debido a que la componente  $z$  del isoespín del  $^{11}\text{Be}$  es  $\frac{3}{2}$ , ese valor debe estar presente en la irrep  $U^{TS}(4)$  que escojamos y como hemos visto no está presente en la irrep  $U^{TS}(4)$  mencionada. La próxima irrep  $U^{TS}(4)$  más antisimétrica es la  $[321^2]$ . La irrep  $\text{U}(3)$  correspondiente es, por la razón ya explicada, la  $[421]$ , o sea, la  $(2, 1)$  para  $\text{SU}(3)$ . La siguiente irrep  $U^{TS}(4)$  para  $0\hbar\omega$  es la  $[32^2]$  que nos da la  $[331]$  para  $\text{U}(3)$  lo que lleva finalmente a  $(0, 2)$  como irrep  $\text{SU}(3)$ . La configuración  $1\hbar\omega$  de excitación que da la mayor irrep de  $\text{SU}(3)$  es la  $(s)^4(p)^6(sd)^1$ . Las capas abiertas son la  $p$  y la  $sd$  con 6 y 1 partícula respectivamente. Las irreps  $U^{TS}(4)$  más bajas en energía, de las pertenecientes a las capas  $p$  y  $sd$  son  $[2^21^2]$  y  $[1]$  las cuales al multiplicarse  $[63]$  dan como irreps  $U^{TS}(4)$  totales a  $[321^2]$  y  $[2^31]$ . Los valores de espín e isoespín correspondientes se pueden encontrar en [63]. En este caso particular tenemos  $[321^2] \rightarrow (T, S) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  y  $[2^31] \rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . De éstas sólo la primera irrep  $U^{TS}(4)$  contiene al  $^{11}\text{Be}$  el cual tiene una componente  $z$  del isoespín de  $\frac{3}{2}$ . Una configuración para  $2\hbar\omega$  de excitación que tiene la irrep  $\text{SU}(3)$  con el mayor autovalor del operador de Casimir de segundo orden es la  $(s)^4(p)^5(sd)^2$ . Las capas abiertas son la  $p$  y la  $sd$  y dan a  $[21^3]$  y  $[1^2]$  respectivamente como las irreps  $U^{TS}(4)$ . El producto de ellas da  $[321^2]$  y  $[2^31]$ . Sólo la primera contiene al núcleo  $^{11}\text{Be}$ .

Para obtener el espacio de Hilbert del SACM hemos considerado al  $^{11}\text{Be}$  como  $\alpha + ^7\text{He}$ . Una vez más, como en el caso de los isótopos  $^8\text{Be}$ ,  $^9\text{Be}$  y  $^{10}\text{Be}$ , el número mínimo de bosones  $\pi$  es 4, o sea, el necesario para "levantar" la partícula  $\alpha$  (ó  $^4\text{He}$ ) desde la capa  $s$  a la capa  $p$ . La irrep de cúmulos de la partícula  $\alpha$  es conocida:  $(0, 0)$ . La del  $^7\text{He}$  es  $(1, 1)$ , lo que nos lleva a  $(\lambda_C, \mu_C) = (1, 1)$ . Este resultado hay que multiplicarlo por  $(n_\pi, 0)$  siendo  $n_\pi \geq 4$ . Hay que aplicar entonces el principio de correspondencia

entre los estados de cúmulo que resultan de las multiplicaciones anteriores y los que se obtienen a partir del modelo de capas aplicado al núcleo unido. Al hacer esto obtenemos a (2, 1) como la única irrep según el SACM para una excitación  $0\hbar\omega$ .

<i>Cuantos de excitación</i>	<i>Modelo de</i>	<i>Representaciones Irreducibles (irreps) de SU(3)</i>
0	<i>capas SU(3)</i>	(2,1), (0,2)
	<i>Cúmulos</i>	(5,1), (3,2), (4,0), (2,1)
1	<i>capas SU(3)</i>	(4,2), (2,3), (3,1), (0,4)
	<i>Cúmulos</i>	(1,2), (2,0) (6,1), (4,2), (5,0), (3,1)
2	<i>capas SU(3)</i>	(7,1), (5,2), (3,3), (6,0)
	<i>Cúmulos</i>	(4,1), (1,4), (2,2), (0,3) (7,1), (5,2), (6,0), (4,1)

Tabla 10: Representaciones irreducibles de SU(3) a las que se aplicará el principio de correspondencia para obtener el espacio microscópico del SACM para el  $^{11}\text{Be}$ .

En la tabla 10 aparecen las irreps de SU(3) tanto del modelo SU(3) como del de cúmulos para el  $^{11}\text{Be}$ .

En el caso del  $^{11}\text{Be}$  tenemos, en comparación con los demás isótopos del berilio, la situación experimental más confusa e incluso contradictoria. Por otro lado, es bien conocido cuán difícil resulta para cálculos convencionales basados en el modelo de capas reproducir la inversión de niveles que ocurre en este núcleo entre el estado base y el primer estado excitado. Aunque algunos cálculos basados en el modelo de capas lo han logrado [23], también hay numerosos ejemplos de intentos fallidos no sólo para cálculos del modelo de capas [21, 78] sino también para cálculos según modelos de cúmulos [15, 79]. Para el estado base y los dos primeros estados excitados (a 0.320 MeV y 1.778 MeV) hay, confirmando los resultados de [62], abundante evidencia experimental [76, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 88] que apoya la asignación de los valores  $\frac{1}{2}^+$ ,  $\frac{1}{2}^-$  y  $\frac{5}{2}^+$  respectivamente. Para el nivel a 2.69 MeV se sugieren en [62] los valores tentativos  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})^+$  pero, en vista de la amplia evidencia experimental que apoya una paridad opuesta para dicho nivel [76, 86, 87, 88], nosotros lo consideramos como un nivel  $\frac{3}{2}^-$ . En el caso del nivel a 3.41 MeV nosotros adoptamos el valor de [62]. El nivel a 3.887 MeV no recibió en [62] una asignación precisa, allí se sugiere simplemente un valor  $J \geq \frac{7}{2}$ , pero en concordancia con trabajos experimentales posteriores [76, 88] nosotros proponemos el valor  $\frac{5}{2}^-$ . En [86] se propone para este nivel que  $J^\pi = \frac{3}{2}^+$  y

nuestro modelo puede interpretarlo también de ese modo (ver Tabla 11). En el caso del nivel a 3.956 MeV nosotros coincidimos con [62]. En [62] no hay más asignaciones de espín o paridad para niveles a energías mayores a los 4 MeV. Teniendo en cuenta a Ref. [86, 88] nosotros consideramos como posibles interpretaciones del modelo a los niveles a 5.255 MeV y 5.86 MeV como niveles  $\frac{5}{2}^-$  y  $\frac{1}{2}^-$  respectivamente. En nuestro modelo son posibles dos interpretaciones diferentes del nivel a 5.86 MeV como nivel  $\frac{1}{2}^-$  (ver Tabla 11). Para niveles que se encuentran a energías por encima de los 6 MeV nosotros encontramos en la literatura sugerencias experimentales únicamente para las paridades [88]. Nosotros proponemos para los niveles a 6.51 MeV, 7.03 MeV y 8.81 MeV los valores  $\frac{9}{2}^+$ ,  $\frac{7}{2}^-$  y  $\frac{9}{2}^-$  respectivamente. Estas nuevas asignaciones a los estados están en concordancia con los resultados experimentales obtenidos para el núcleo espejo  $^{11}\text{N}$  [87].

Nosotros dedujimos los valores de los parámetros rotacionales  $a_L$  y  $a_J$  a partir de una de las bandas y ellos se encuentran en el intervalo dado por [17]. Obtenemos el parámetro  $\chi$  del ajuste mientras que  $b$ , el parámetro de la interacción  $K_L^2$ , desempeña en este caso un papel particular cómo será explicado más adelante. Podríamos, siguiendo los mismos argumentos dados en el caso del  $^9\text{Be}$ , tomarlo como igual a cero. Hay sin embargo, para una excitación de  $2\hbar\omega$ , una banda  $\frac{3}{2}^-$  dada por la irrep (7, 1) cuya pendiente es reproducida por el factor que se encuentra en frente de los términos rotacionales. Vemos una vez más la importante propiedad del factor  $(\mathbf{C}_2(\text{SU}(3) + 3))^{-1}$  de la interacción rotacional en el hamiltoniano del modelo dado por (25). Comparemos dicha pendiente con la pendiente de los estados correspondientes a la irrep (2, 1). El autovalor del operador de Casimir de segundo orden para la irrep (7, 1) es 81 y para la (2, 1) es 16. La razón del primero respecto del segundo es aproximadamente 5 lo cual se refleja en la pendiente mucho menor de (7, 1). La banda (2, 1), la cual corresponde a una excitación  $0\hbar\omega$ , se encuentra muy cerca de la banda (7, 1), correspondiente a una excitación  $2\hbar\omega$ . Viendo la Figura 9 se puede comprender la cercanía entre estas dos bandas.

Un hecho experimental a tener en cuenta en esta discusión es que hay excitaciones  $n\hbar\omega$  mayores que  $0\hbar\omega$  y que sin embargo se encuentran a energías menores. Por ejemplo, el estado base del  $^{11}\text{Be}$  es el  $\frac{1}{2}^+$  el cual pertenece a la irrep (4, 2) con  $K_L = 0$  y  $L = 0$  y es un estado de  $1\hbar\omega$ .

Hemos graficado en la Figura 9 la energía del hamiltoniano "de juguete", o sea sin interacciones rotacionales,  $H = \hbar\omega\mathbf{n}_\pi - \chi\mathbf{C}_2(\text{SU}(3))$ , como función de  $\chi$ .

Como podemos ver, para un valor razonable de  $\chi$ , los estados de (7, 1) están muy

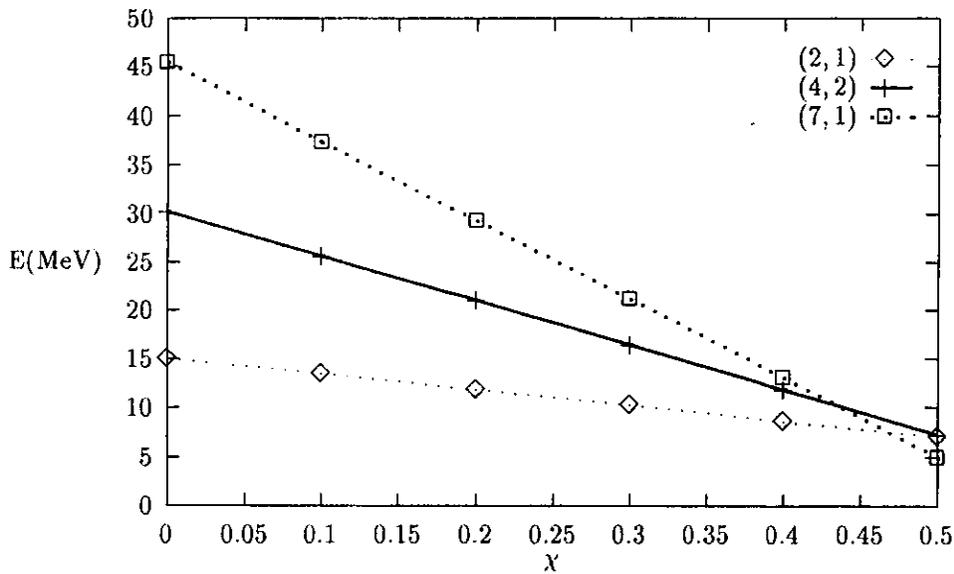


Figura 9: Energía del hamiltoniano sin términos rotacionales.

cerca de los de (2, 1). Sin embargo, no es posible correr los estados  $1\hbar\omega$  hacia energías menores que las de los demás. Debido a los términos rotacionales del hamiltoniano (25), hay cierta estructura fina en la posición de las cabezas de banda, sin embargo, la estructura global de las cabezas de banda no debe cambiar mucho. Dándole un valor adecuado a la interacción  $K_L^2$ , que introducimos con ese propósito, podemos reproducir la diferencia en energía entre los estados (2, 1) y (4, 2). Esto conduce a un valor artificialmente grande para  $b$ . Más adelante volveremos sobre este punto.

Debemos hacer notar también que las excitaciones de energía que son múltiplos de  $\hbar\omega$  mayores que  $2\hbar\omega$  se encuentran nuevamente para energías mayores. El hecho de que las excitaciones, hasta  $2\hbar\omega$ , se encuentran a valores de energía muy bajos es un bonito efecto que resulta de la apertura de la capa de valencia (en términos de agujeros) y el "levantamiento" de un nucleón ó 2 a capas más altas lo cual produce, en ambos casos, saltos grandes en los valores de  $(\lambda, \mu)$ . La excitación de más nucleones a capas más altas, una vez que la capa de valencia p está menos llena que la mitad, reduce los valores  $(\lambda, \mu)$  en la capa de valencia llevando así a saltos de  $(\lambda, \mu)$  menos pronunciados. La presencia del término  $\hbar\omega n_\pi$ , que representa una inversión adicional extra de energía para cada nucleón adicional, es esencial para la ocurrencia del efecto anterior. Se puede decir que básicamente el término armónico  $\hbar\omega n_\pi$  compite aquí

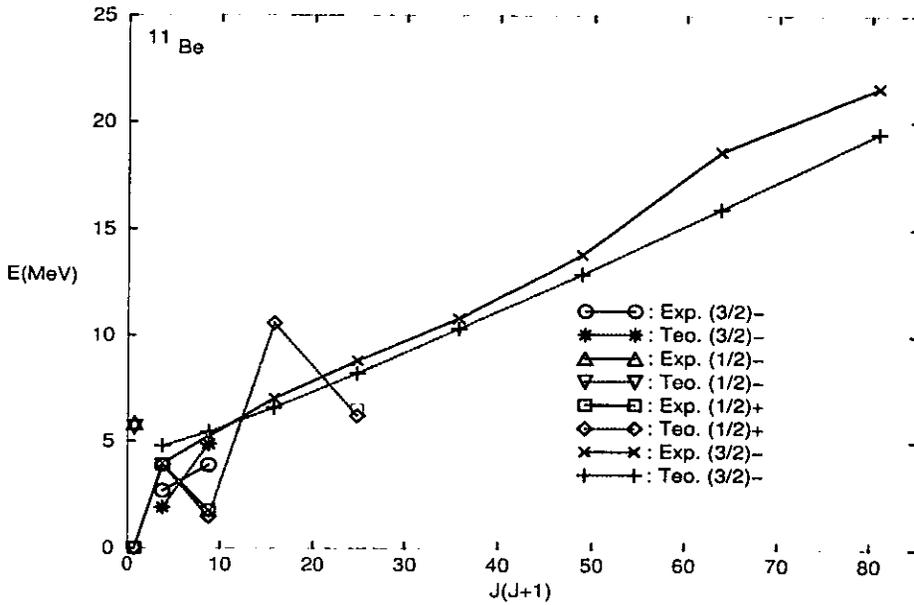


Figura 10: Ajuste del  $^{11}\text{Be}$  según los parámetros de la Tabla 3. La banda  $\frac{3}{2}^-$  es generada por la irrep (7, 1) correspondiente a  $2\hbar\omega$  de excitación.

con el término  $\chi C_2(SU(3))$  de  $SU(3)$ . Esto es también una consecuencia indirecta del principio de Pauli: en las capas más bajas son excluidas muchas irreps "grandes" (con grandes deformaciones).

En la Tabla 3 mostramos una lista de los parámetros ajustados a ese espectro mientras que en la Tabla 11 podemos ver los estados obtenidos por el modelo, en comparación con los experimentales, y los números cuánticos que se les asocian en los marcos del SACM. En la Figura 10 se grafican los resultados del ajuste.

El ajuste reproduce en términos generales, como podemos ver en la Tabla 11 y la Figura 10, el efecto de Coriolis en la banda  $\frac{1}{2}^+$  y la pendiente de la banda  $\frac{3}{2}^-$ . El espín máximo posible para un estado en esta última banda es, según nuestro modelo,  $\frac{17}{2}$  lo que explica que se hayan observado estados con valores altos de espín en [17], aunque allí el valor más alto observado para un espín es  $\frac{19}{2}$  y las asignaciones de espines son algo ambiguas. Vemos otra vez con claridad la importancia del factor proporcional a  $(C_2(SU(3) + 3))^{-1}$  en la parte rotacional del hamiltoniano (25). El cambio en la variable de deformación  $\beta$ , tal y como explicamos en la sección 5, determina la pendiente de las bandas.

$n_\pi (\lambda, \mu)$	$K_L$	$L$	$2J^\Pi$	$E_{teo1}(\text{MeV})$	$E_{teo2}(\text{MeV})$	$E_{exp}(\text{MeV})$	$Ref(\text{Exp})$
5 (4, 2)	0	0	1 <sup>+</sup>	0.000	0.000	0.000	[62, 80, 81, 83, 84, 85]
5 (4, 2)	0	2	3 <sup>+</sup>	3.899	3.624	3.899	[86]
5 (4, 2)	0	2	5 <sup>+</sup>	1.477	1.434	1.780	[62, 80, 81, 83, 84, 85]
5 (4, 2)	0	4	7 <sup>+</sup>	10.574	9.891	-	-
5 (4, 2)	0	4	9 <sup>+</sup>	6.214	5.947	6.510	[88]
6 (7, 1)	1	1	3 <sup>-</sup>	4.785	3.518	3.960	[62]
6 (7, 1)	1	2	5 <sup>-</sup>	5.454	4.161	5.240	[86, 88]
6 (7, 1)	1	3	7 <sup>-</sup>	6.598	5.252	7.030	[88]
6 (7, 1)	1	4	9 <sup>-</sup>	8.218	6.794	8.811	[88]
6 (7, 1)	1	5	11 <sup>-</sup>	10.313	8.784	10.800	[17]
6 (7, 1)	1	6	13 <sup>-</sup>	12.883	11.223	13.800	[17]
6 (7, 1)	1	7	15 <sup>-</sup>	15.929	14.112	18.600	[17]
6 (7, 1)	1	8	17 <sup>-</sup>	19.451	17.450	21.600	[17]
6 (7, 1)	1	1	1 <sup>-</sup>	5.633	4.284	5.860	[86, 88]
6 (7, 1)	1	2	3 <sup>-</sup>	6.867	5.438	-	-
6 (7, 1)	1	3	5 <sup>-</sup>	8.576	7.041	-	-
6 (7, 1)	1	4	7 <sup>-</sup>	10.760	9.094	-	-
4 (2, 1)	1	1	3 <sup>-</sup>	1.911	-3.095	2.690	[76, 82, 86, 87, 88]
4 (2, 1)	1	2	5 <sup>-</sup>	4.867	-0.253	3.887	[76, 88]
4 (2, 1)	1	3	7 <sup>-</sup>	9.925	4.574	-	-
4 (2, 1)	1	1	1 <sup>-</sup>	5.659	0.295	5.860	[86, 88]
4 (2, 1)	1	2	3 <sup>-</sup>	11.112	5.396	-	-
4 (2, 1)	1	3	5 <sup>-</sup>	18.669	12.484	-	-
4 (0, 2)	0	0	1 <sup>-</sup>	(-3.658)	(-3.468)	-	-
4 (0, 2)	0	2	3 <sup>-</sup>	(11.037)	(10.193)	-	-
4 (0, 2)	0	2	5 <sup>-</sup>	(1.909)	(1.936)	-	-

Tabla 11: Espectros teórico y experimental para el  $^{11}\text{Be}$ . Hemos usado los parámetros de la Tabla 3 (fila 6) y los parámetros extrapolados que se encuentran listados más adelante en la Tabla 12 (fila 6). Los valores de espín que aparecen en la lista están multiplicados por 2. El coeficiente de  $K_L^2$  se usó para correr el estado  $\frac{1}{2}^-$  a un valor arbitrario de alrededor de 5 MeV, suficientemente alto como para que no apareciera como un posible estado en el espectro observado en los experimentos.

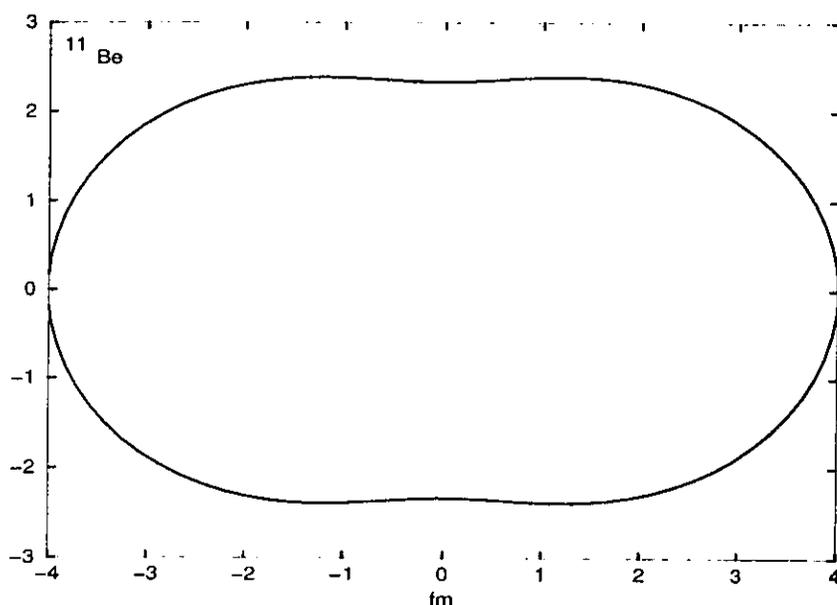


Figura 11: Sección transversal del  $^{11}\text{Be}$  tomando como estado base la irrep  $(4, 2)$  de  $SU(3)$ .

#### 6.4.2 La deformación.

Hemos graficado en la Figura 11 la forma del  $^{11}\text{Be}$ , deduciendo el parámetro de deformación  $\beta$  a partir de [66] ( $\beta = 0.61$ ). Hemos usado también la expresión para el radio de un núcleo con deformación cuadrupolar dada en [73]. El resultado es muy ilustrativo y muestra nuevamente la formación física de una estructura de cúmulos. La distancia entre los centros de las "esferas" es de cerca de 4 fm, o sea, aproximadamente la distancia entre 2 partículas  $\alpha$  cuyas superficies se rozan.

#### 6.4.3 Consideraciones generales sobre el $^{11}\text{Be}$ .

El hecho de que no sea fácil obtener el ajuste para el  $^{11}\text{Be}$ , lo que nos llevó a un valor desproporcionadamente grande para la interacción  $K_L^2$ , puede comprenderse como debido a la estructura especial de éste, que es un núcleo con "halo". Sabemos que las funciones del oscilador armónico del modelo de capas no son una base adecuada para tales núcleos por lo que se hace necesario introducir ciertas correcciones [89]. Sin embargo, es sorprendente que podamos reproducir las características fundamentales de la estructura (la pendiente de las bandas, el efecto de Coriolis, la ubicación a energías más bajas de excitaciones que se corresponden con un valor mayor de  $n\hbar\omega$ ) manteniéndonos

todavía en el marco del modelo de capas, lo cual indica que éste es , exceptuando algunas correcciones [89], una buena aproximación aún para núcleos con "halo".

Nos gustaría recalcar finalmente que nuestros resultados son consistentes con el Modelo de Capas de 2 Centros (Two-Center Shell Model, TCSM) [2] en el contexto del cual el estado base del  $^{11}\text{Be}$  se puede explicar para grandes deformaciones (los 2 cúmulos están muy separados). En este modelo, tenemos que una órbita con proyección total del espín igual a  $\frac{1}{2}$  y paridad positiva "desciende" desde la capa p. Sin embargo, hay que tener en cuenta que para separaciones grandes esto es una ilusión porque uno tiene que expandir la órbita en términos de las *bases esféricas* donde contribuirán estados correspondientes a excitaciones mayores que  $1\hbar\omega$ . Hay que ser cuidadosos a la hora de usar el TCSM porque en general eso significa que estamos asumiendo un movimiento de los 2 centros que es adiabático respecto al movimiento de un nucleón en el campo medio del núcleo. Una estimación rápida y simple para los isótopos del Be muestra que, en ese caso, las escalas de tiempo de ambos movimientos son del mismo orden, cuestionando así la pertinencia del uso del TCSM.

No hemos considerado en esta subsección la estructura del primer estado excitado  $\frac{1}{2}^-$  que se encuentra a una energía de 0.320 MeV. La estructura de cúmulos  $\alpha + ^7\text{He}$  no puede describir dicho estado. El estado  $\frac{1}{2}^-$  se podría interpretar como un estado (2, 1) pero entonces el acoplamiento paralelo daría estados más bajos en energía que los resultantes del acoplamiento paralelo. También en otras bandas aparecerían más abajo otros estados, por ejemplo en la banda  $\frac{3}{2}^-$ . Esto no es lo que se observa en los experimentos.

Para otros modelos de cúmulos es también muy difícil interpretar este nivel. En [15], usando el Modelo de Orbitales Moleculares (MOM), el nivel  $\frac{1}{2}^-$  se obtiene por debajo del estado  $\frac{1}{2}^+$ . También en [15], el modelo de Dinámica Molecular Antisimetrizada (AMD) fue incapaz de obtener el estado  $\frac{1}{2}^+$  como el estado base y en un cálculo posterior [79] incluyendo correcciones de Hartree-Fock (AMD + HF) no fue posible reproducir la inversión. Para cálculos del modelo de capas con bases grandes [21] es igualmente difícil reproducir la inversión.

Con el objetivo de hacernos una idea sobre cómo nuestro modelo maneja esta cuestión, echemos un vistazo a todas las posibles irreps de  $U^{TS}(4)$  que tienen a los estados orbitales más simétricos.

Al considerar excitaciones  $0\hbar\omega$  restringiremos los nucleones a estar en la capa p.

Hasta ahora hemos considerado como a  $[321^2]$  como la irrep  $U^{TS}(4)$  lo cual nos llevó a  $(2, 1)$  como la irrep de  $SU(3)$ . La siguiente posibilidad para el  $^{11}\text{Be}$ , o sea, que contiene el valor de isoespín  $T = \frac{3}{2}$ , es considerar a  $[32^2]$  como la irrep de  $U^{TS}(4)$  lo que se corresponde con la  $(0, 2)$  para  $SU(3)$ . Basándonos en esa irrep orbital que tiene  $K_L = 0$  y  $L = 0, 2$  podemos, mediante un acoplamiento paralelo, construir una banda  $\frac{1}{2}^-$  que presenta un efecto de Coriolis. La diferencia en energía entre este estado  $\frac{1}{2}^-$  y el siguiente estado más alto dentro de esta banda, el cual es el  $\frac{5}{2}^-$ , está siempre en el orden de entre 6 y 8 MeV. Este valor es mucho mayor que la diferencia en energía entre el estado base  $\frac{1}{2}^+$  y la banda rotacional de paridad negativa. En la práctica sólo veremos el estado más bajo en energía, o sea, el  $\frac{1}{2}^-$ . Podemos explicar el estado  $\frac{1}{2}^-$  a 0.320 MeV dentro del SACM si lo asociamos a la estructura de cúmulos  $^8\text{Li} + ^3\text{H}$ .

Un posible método experimental que permitiría chequear nuestra conjetura sería estudiar el poblamiento del estado  $\frac{1}{2}^-$  en la reacción del  $^8\text{Li}$  con el  $^3\text{H}$ , aunque esto sería bastante difícil de llevar a la práctica debido a la corta vida media del  $^8\text{Li}$  (aproximadamente 0.85 s) [62].

núcleo	$\hbar\omega$	$\chi$	$a_L$	$a_J$	$b$
${}^6\text{Be}$	17.19	0.963	5.005	-	-
${}^7\text{Be}$	16.69	0.745	25.517	-13.582	-
${}^8\text{Be}$	16.25	0.596	11.935	-	-
${}^9\text{Be}$	15.86	0.490	46.920	-24.979	-
${}^{10}\text{Be}$	15.50	0.411	10.395	-	23.373
${}^{11}\text{Be}$	15.18	0.351	40.333	-21.468	23.373
${}^{12}\text{Be}$	14.89	0.303	5.005	-	23.373

Tabla 12: Conjunto de parámetros que se obtienen de la extrapolación a partir del  ${}^9\text{Be}$ . En el texto se explica cómo fué realizada dicha extrapolación.

## 7 Extrapolación a partir del ${}^9\text{Be}$ .

En esta subsección comenzaremos con el ajuste del  ${}^9\text{Be}$  y extrapolaremos los parámetros de las interacciones a los otros isótopos del Be. Ajustaremos sólo 3 parámetros para el  ${}^9\text{Be}$ :  $\chi$ ,  $a_L$  y  $a_J$ . Extrapolando esos 3 parámetros vamos a predecir todos los otros 38 estados de los demás isótopos del Be (a veces ajustaremos, en cuyo caso se indicará en el texto, al parámetro que multiplica a  $K_L^2$ ). Para el valor de  $\chi$  usaremos el escalamiento en el número de masa A propuesto por A. Zucker et al. [69] el cual es

$$\chi \sim A^{-\frac{5}{3}} \quad (29)$$

En la Tabla 12 está la lista de los valores resultantes de  $\chi$  para los isótopos  ${}^{10}\text{Be}$  y  ${}^{11}\text{Be}$ .

Para determinar los parámetros rotacionales nosotros usamos la observación hecha en [17] de que la pendiente de las bandas  $\frac{1}{2}^+$ , a bajas energías, es aproximadamente la misma para  ${}^9\text{Be}$  y  ${}^{11}\text{Be}$ , tomando así para ambos la del  ${}^9\text{Be}$ .

El valor del parámetro rotacional  $\frac{(a_L+a_J)}{(C_2(6,0)+3)} = \frac{\hbar^2}{2\Theta}$  es reportado [17], para el  ${}^9\text{Be}$ , entre 0.35 y 0.46 para la banda  $\frac{1}{2}^+$ , que pertenece a la irrep (6, 0). El mejor ajuste que obtuvimos fue para el valor 0.385, el cual fijaremos para todos los isótopos en consideración. Los parámetros  $a_L$  y  $a_J$  están dados por la expresión :

$$\begin{aligned} a_L &= 2.138 * 0.385 * (C_2(6, 0) + 3) \\ a_J &= a_L \left( \frac{1}{a} - 1 \right) \end{aligned} \quad (30)$$

donde se tomó para  $a$ , en el caso del  ${}^9\text{Be}$ , el valor ajustado de 2.138. En el  ${}^{11}\text{Be}$  la

núcleo	$\hbar\omega$	$\chi$	$a_L$	$a_J$	$b$
${}^6\text{Be}$	17.19	0.963	5.005	-	-
${}^7\text{Be}$	16.69	0.745	25.517	-13.582	-
${}^8\text{Be}$	16.25	0.596	11.935	-	-
${}^9\text{Be}$	15.86	0.490	46.920	-24.979	-
${}^{10}\text{Be}$	15.50	0.411	10.395	-	23.373
${}^{11}\text{Be}$	15.18	0.351	40.333	-21.468	23.373
${}^{12}\text{Be}$	14.89	0.303	5.005	-	23.373

Tabla 12: Conjunto de parámetros que se obtienen de la extrapolación a partir del  ${}^9\text{Be}$ . En el texto se explica cómo fué realizada dicha extrapolación.

## 7 Extrapolación a partir del ${}^9\text{Be}$ .

En esta subsección comenzaremos con el ajuste del  ${}^9\text{Be}$  y extrapolaremos los parámetros de las interacciones a los otros isótopos del Be. Ajustaremos sólo 3 parámetros para el  ${}^9\text{Be}$ :  $\chi$ ,  $a_L$  y  $a_J$ . Extrapolando esos 3 parámetros vamos a predecir todos los otros 38 estados de los demás isótopos del Be (a veces ajustaremos, en cuyo caso se indicará en el texto, al parámetro que multiplica a  $K_L^2$ ). Para el valor de  $\chi$  usaremos el escalamiento en el número de masa A propuesto por A. Zucker et al. [69] el cual es

$$\chi \sim A^{-\frac{5}{3}} \quad . \quad (29)$$

En la Tabla 12 está la lista de los valores resultantes de  $\chi$  para los isótopos  ${}^{10}\text{Be}$  y  ${}^{11}\text{Be}$ .

Para determinar los parámetros rotacionales nosotros usamos la observación hecha en [17] de que la pendiente de las bandas  $\frac{1}{2}^+$ , a bajas energías, es aproximadamente la misma para  ${}^9\text{Be}$  y  ${}^{11}\text{Be}$ , tomando así para ambos la del  ${}^9\text{Be}$ .

El valor del parámetro rotacional  $\frac{(a_L+a_J)}{(C_2(6,0)+3)} = \frac{\hbar^2}{2\Theta}$  es reportado [17], para el  ${}^9\text{Be}$ , entre 0.35 y 0.46 para la banda  $\frac{1}{2}^+$ , que pertenece a la irrep (6,0). El mejor ajuste que obtuvimos fue para el valor 0.385, el cual fijaremos para todos los isótopos en consideración. Los parámetros  $a_L$  y  $a_J$  están dados por la expresión :

$$\begin{aligned} a_L &= 2.138 * 0.385 * (C_2(6,0) + 3) \\ a_J &= a_L \left( \frac{1}{a} - 1 \right) \end{aligned} \quad (30)$$

donde se tomó para  $a$ , en el caso del  ${}^9\text{Be}$ , el valor ajustado de 2.138. En el  ${}^{11}\text{Be}$  la

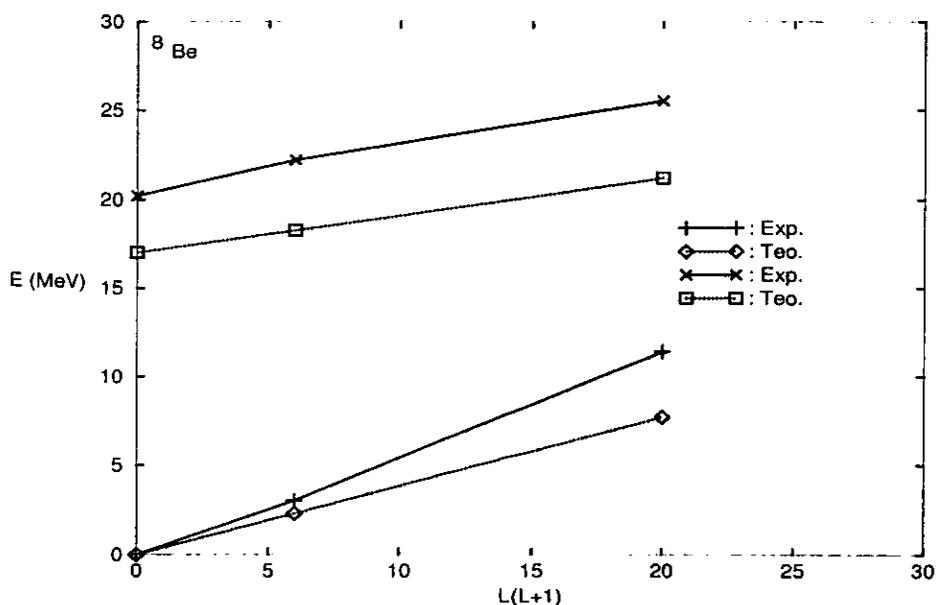


Figura 12: Ajuste que resulta para el  ${}^8\text{Be}$ , a partir de la extrapolación de los parámetros del  ${}^9\text{Be}$ . La banda teórica excitada tiene igual pendiente que la experimental.

banda  $\frac{1}{2}^+$  pertenece a la irrep (4, 2) correspondiente a una excitación  $1\hbar\omega$ . Esto nos conduce a los valores de  $a_L$  y  $a_J$  reportados en la Tabla 12. En lugar de esto, con el objetivo de ajustar a  $\frac{\hbar^2}{2\Theta}$ , podríamos haber tomado la banda  $0\hbar\omega$  porque, como dijimos anteriormente, el factor que depende del autovalor del operador de Casimir de segundo orden toma en cuenta las diferencias en las pendientes.

Tenemos para el  ${}^{10}\text{Be}$ :

$$a_L = 2.138 * 0.385 * (C_2(2, 2) + 3) \quad (31)$$

El valor de  $a_J$  se puede deducir del mismo modo que en Eq. 30. Como vemos,  $a$  tendrá el mismo valor para todas las bandas, lo que implica que podemos suponer que *una parte* de la estructura se mantiene común a todos los núcleos. Los cambios en las pendientes de las bandas están dados completamente por la dependencia respecto de la irrep de  $SU(3)$ . Debido a que, para el  ${}^{10}\text{Be}$ , no hay diferencia entre  $L$  y  $J$  podemos unir los términos proporcionales a  $L(L+1)$  y  $J(J+1) = L(L+1)$  obteniendo así una nueva  $\tilde{a}_L$  como la suma  $(a_L + a_J) = 10.395$  (ver también la Tabla 12). Vale la pena hacer notar que, excepto la constante que multiplica a  $K_L$  en algunos casos aislados, no hay parámetros involucrados en la determinación del espectro para

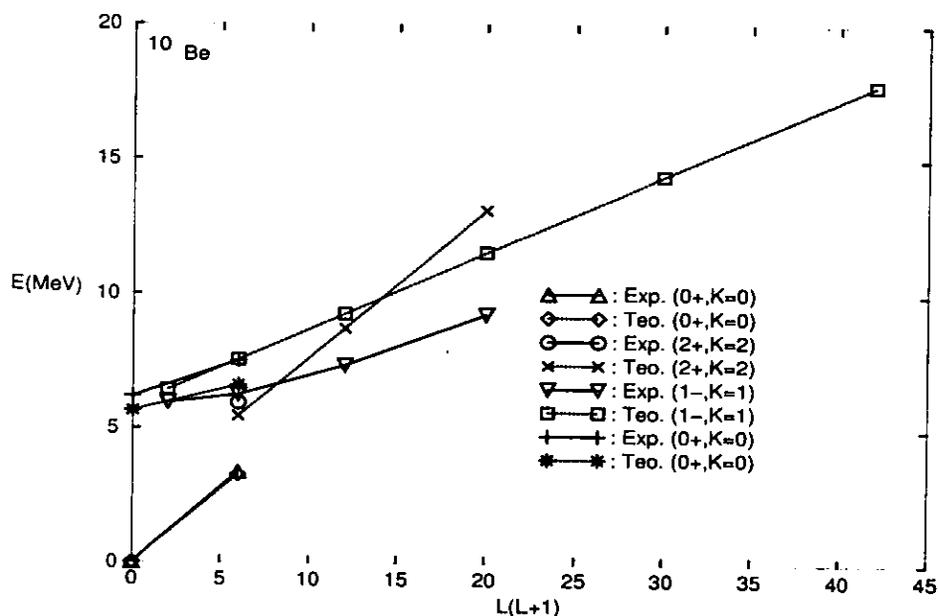


Figura 13: Ajuste que resulta para el  $^{10}\text{Be}$ , tomando los parámetros extrapolados a partir del  $^9\text{Be}$ , cuando se ajusta la interacción  $K_L^2$  por medio del parámetro  $b$ . En esta extrapolación se reproduce la banda  $1^-$  mejor, en general, que en la Fig. 7. Sin embargo, el estado  $2_1^+$  aparece a una energía muy baja.

los otros isótopos del Be. Los resultados para  $^8\text{Be}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{Be}$  y  $^{11}\text{Be}$  se encuentran en las Tablas 5,7,9,11, en la sexta columna con el subíndice teo2. En la Figura 12 está representado el espectro del  $^8\text{Be}$ . En el  $^{10}\text{Be}$  ajustamos la interacción  $K_L^2$  ( $b = 14.900$ ) con el fin de obtener el desdoblamiento entre el primer y segundo estado  $2^+$  excitados. En la Figura 13 encontramos el ajuste que se obtiene para  $^{10}\text{Be}$  como resultado de la extrapolación.

Como consecuencia de la poca información experimental existente no pudimos dar ningún valor al parámetro  $b$  para el caso del  $^9\text{Be}$ . Por esa razón, nosotros proponemos que se deberían volver a hacer mediciones experimentales del  $^9\text{Be}$  con el objetivo de identificar estados excitados a más altas energías pertenecientes a diferentes valores de  $K_L$ . Existen estados de este tipo pertenecientes a la configuración  $(s)^3(p)^6$  con las irrep de  $U^{TS}(4)$   $[1^3]$  y  $[2^21^2]$  de  $(s)^3$  y  $(p)^6$  respectivamente. Su producto directo contiene a la irrep  $[3^221]$  de  $U^{TS}(4)$  la cual se reduce a un estado  $T = \frac{1}{2}$ . La irrep de  $SU(3)$  está determinada únicamente por la de  $(p)^6$  que es la  $(2, 2)$  y que tiene las bandas  $K_L = 0$  y  $2$ .

Finalmente, en la Tabla 11 tenemos el resultado que se obtiene para el  $^{11}\text{Be}$  cuando

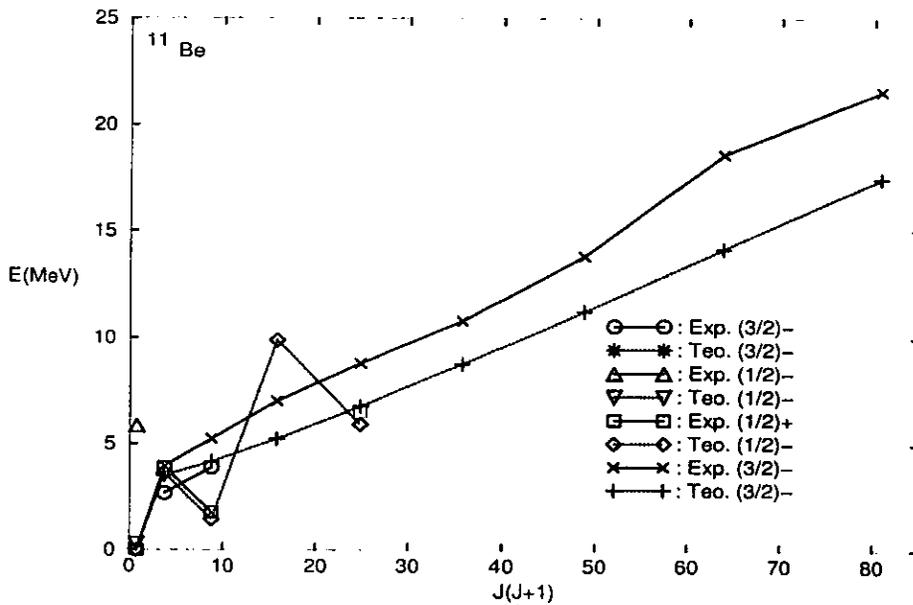


Figura 14: Ajuste que resulta para el  $^{11}\text{Be}$  al usar los parámetros extrapolados a partir del  $^9\text{Be}$ . Además se ajusta, por medio del parámetro  $b$ , la interacción  $\mathbf{K}_L^2$  para reproducir la diferencia de energías entre (4, 2) y (2, 1) asumiendo arbitrariamente que el estado más bajo en (2, 1) se encuentra a 5 MeV. Se reproduce la banda  $\frac{3}{2}^-$  mucho mejor que en la Fig. 10.

se incluye la interacción  $\mathbf{K}_L^2$  y además se ajusta para obtener como estado base al  $\frac{1}{2}^+$  el cual pertenece a la irrep (4, 2) de  $SU(3)$  que corresponde a una excitación  $1\hbar\omega$ . El espectro está representado en la Figura 14 .

Los espectros de los isótopos  $^8\text{Be}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{10}\text{Be}$  y  $^{11}\text{Be}$  , según vemos en las Tablas 5, 7, 9, 11 se pueden reproducir bastante bien por medio del SACM. El hecho de que, si no fijamos el parámetro  $b$ , los estados (2, 1) del  $^{11}\text{Be}$  se encuentran a energías muy bajas no nos debe preocupar mucho (ver la discusión hecha anteriormente relativa al ajuste que se hizo por separado para el  $^{11}\text{Be}$ ). Debido a la gran sensibilidad del esquema de niveles al valor del parámetro  $\chi$  y al hecho de que el  $^{11}\text{Be}$  es un núcleo con "halo" es que nosotros no debemos esperar una descripción muy apropiada de dicho núcleo. Sin embargo, los resultados mostrados en esta subsección demuestran que el modelo de capas puede explicar aceptablemente incluso muchas características de núcleos con "halo" además de las de los núcleos de la capa p.

Finalmente, en la Tabla 12 hay una lista de los parámetros extrapolados para los

isótopos  ${}^6\text{Be}$ ,  ${}^7\text{Be}$  y  ${}^{12}\text{Be}$ . Aunque no debemos olvidar que para los 2 primeros no podemos tomar como carozo una estructura  $2\alpha$  por lo que podemos cuestionar la aplicabilidad en este caso de las suposiciones sobre las que se basa la extrapolación.

Los estados más bajos del  ${}^6\text{Be}$  pertenecen a la irrep  $(2, 0)$  de  $SU(3)$  y están determinados únicamente por el número mínimo de bosones  $\pi$  igual a 2 (ver discusión en subepígrafe 4.3.1 y al final del epígrafe 5.2). En la Tabla 12 se encuentran los parámetros extrapolados a partir del  ${}^9\text{Be}$ . Al efectuar la extrapolación el primer estado  $2^+$  excitado, que según el experimento se encuentra a 1.67 MeV, está a 2.31 MeV de acuerdo con los cálculos teóricos. A partir de ese punto, no se observan más estados.

Los estados más bajos del  ${}^7\text{Be}$  están descritos como pertenecientes a la irrep  $(3, 0)$  de  $SU(3)$ , la cual está dada por el número mínimo de bosones  $\pi$  ( $n_\pi = 3$ ). Nosotros obtenemos, con los parámetros extrapolados cuya lista está en la Tabla 12 y tomando a todos los estados como los más bajos en energía, para los estados  $\frac{3}{2}^-$ ,  $\frac{1}{2}^-$ ,  $\frac{7}{2}^-$  y  $\frac{5}{2}^-$  que se encuentran, según los experimentos, a los valores de energía (en MeV) 0., 0.42908, 4.57 y 6.73 (ó 7.21, dependiendo de a qué estado le asignemos tales números cuánticos) los respectivos valores teóricos 0., 1.94, 4.390 y 8.917. Podemos también, por supuesto, ajustar los parámetros de una manera óptima sólo que en ese caso perderíamos todo poder de predicción. Por otro lado, los estados conocidos son muy pocos como para hacer algo así [62].

En el caso del  ${}^{12}\text{Be}$  tenemos un estado  $2^+$  excitado con  $T = 2$  a 2.102 MeV. La lista de los parámetros extrapolados se encuentra en la Tabla 12. De acuerdo con ellos el primer estado  $2^+$  excitado se encuentra a un valor teórico de energía de 2.31 MeV. En este caso usamos como irrep de  $SU(3)$  del estado base a la  $(2, 0)$  la cual corresponde a  $0\hbar\omega$  de excitación.

Si tomamos en conjunto todos los resultados anteriores podemos decir que es posible describir la estructura principal de los isótopos del Be tomando un comportamiento escalado del parámetro  $\chi$  y una pendiente común de  $\frac{\hbar^2}{2\Theta}$  para los estados de la banda base. Esto podría estarnos confirmando la imagen de ellos como poseedores en común de una estructura de cúmulos  $\alpha$  como carozo con partículas extra (que en el caso de los isótopos  ${}^6\text{Be}$  y  ${}^7\text{Be}$  serían agujeros) alrededor de ellos.

Por último, vemos en la Tabla 13 una lista del espacio modelo de los isótopos en cuestión donde hemos tomado en cuenta las excitaciones  $0\hbar\omega$ ,  $1\hbar\omega$  y  $2\hbar\omega$ .

En la lista se encuentran también las irreps de  $SU(3)$  que no hemos comparado con

$\hbar\omega$	${}^6\text{Be}$	${}^7\text{Be}$	${}^8\text{Be}$	${}^9\text{Be}$	${}^{10}\text{Be}$	${}^{11}\text{Be}$	${}^{12}\text{Be}$
0	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(2,1)	(2,0)
1	(3,0)	(4,0)	— —	(6,0) (4,1)	(5,1)	(4,2)	(4,1) (3,0)
2	(4,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0) (5,1)	(8,0) (6,1) (4,2)	(7,1) (6,0) (5,2) (4,1)	(6,2) (5,1) (4,0)

Tabla 13: El espacio modelo del SACM para  $0\hbar\omega$ ,  $1\hbar\omega$  y  $2\hbar\omega$ .

los espectros experimentales debido a que los estados correspondientes están a energías muy altas y no han sido aún identificados en los experimentos.

Queremos destacar que los saltos en las dimensiones de las irreps de  $SU(3)$  más altas para las excitaciones  $0\hbar\omega$ ,  $1\hbar\omega$  y  $2\hbar\omega$  se incrementan dramáticamente a partir del  ${}^9\text{Be}$ . Esto lo podemos ver si calculamos la razón entre los operadores de Casimir de segundo orden de las mayores irreps de  $SU(3)$  para excitaciones  $2\hbar\omega$  respecto a la irrep correspondiente a  $0\hbar\omega$ . Para los isótopos  ${}^7\text{Be}$ ,  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^9\text{Be}$ ,  ${}^{10}\text{Be}$ ,  ${}^{11}\text{Be}$  y  ${}^{12}\text{Be}$  esta relación da respectivamente 2.22, 1.93, 2.8, 3.66, 5.06 y 7.6. Como ya se explicó anteriormente, este incremento tan grande para los isótopos que mayor cantidad de neutrones tienen es un resultado de la apertura de la capa de valencia, en términos de agujeros, y la excitación de 2 nucleones a capas más altas.

## 8 Conclusiones.

En esta Tesis hemos examinado la estructura de varios de los isótopos del Be con números de masa 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 respectivamente y hemos dado *una descripción consistente de dichos isótopos en el contexto del Modelo Algebraico Semimicroscópico de Cúmulos ( SACM )*. El SACM se origina a partir del modelo de capas y usa como bases a estados de cúmulos. El Principio de exclusión de Pauli es tomado en cuenta a través de una condición de correspondencia no sólo en el número de cuantos relativos de oscilación sino también entre las irreps de  $SU(3)$  del SACM y las del modelo de capas para el núcleo unido. Dicho principio de correspondencia permite excluir también a los estados espúreos correspondientes al movimiento del centro de masa. Las bases obtenidas de este modo se pueden considerar como una manera de truncar el espacio del modelo de capas, inspirada en ciertas estructuras de cúmulos.

Nuestro trabajo ha estado dirigido a la descripción de las características generales de los isótopos del Be. Por eso debe ser considerado simplemente como un estudio que complementa a otros trabajos anteriores encaminados a la comprensión de los detalles.

Nuestros principales resultados son los siguientes:

1) Podemos describir el espectro de los isótopos del Be en los marcos del SACM, incluso el de los núcleos par-impar, si incluimos para ello un efecto de Coriolis.

2) Podemos explicar la pendiente de las bandas a través de una estructura rotacional intrínseca descrita por  $a_L$  y  $a_J$  ( e incluso quizás también por  $b$  ) y un factor que depende de la irrep de  $SU(3)$  a la cual pertenece la banda. La introducción de ese factor está motivada por la dependencia del momento de inercia que es proporcional al cuadrado de la deformación cuadrupolar.

3) En el  $^{11}\text{Be}$  tiene lugar una inversión de capas quedando la irrep  $(4, 2)$  de  $SU(3)$  correspondiente a una excitación  $1\hbar\omega$  como la banda base y la banda  $\frac{3}{2}^-$  como una excitación  $2\hbar\omega$ . Esto puede explicar la banda que se sugiere en [17] y que llega hasta  $\frac{17}{2}$ . Las excitaciones  $n\hbar\omega$  mayores se encuentran a energías todavía mayores. La inversión de capas indica que éste es un núcleo con una gran deformación.

4) El primer estado excitado  $\frac{1}{2}^-$  del  $^{11}\text{Be}$  a 0.320 MeV no puede ser descrito por el sistema de cúmulos  $\alpha + ^7\text{He}$  pero probablemente sí por el sistema  $^8\text{Li} + ^3\text{H}$ , aunque sería necesario un análisis más detallado para confirmar esa hipótesis. La pendiente de la banda rotacional más baja correspondiente es tan empinada que sólo se ha podido

ver el miembro más bajo en energía de la banda  $\frac{1}{2}^-$ .

5) Los estados  $4^+$  y  $6^+$  de la banda del estado base del  $^{10}\text{Be}$ , predichos en [15, 16], no están presentes en nuestro modelo y deben ser espúreos. En el contexto del SACM no hay ningún estado  $4^+$  ó  $6^+$  asociado a la banda del estado base, sino que ésta termina con un estado  $2^+$ . El estado  $4^+$  que se observa en el experimento pertenece a la banda  $K_L = 2$  y no hay presente ningún estado  $6^+$  en la irrep (2, 2) de SU(3) que es la que describe en nuestro modelo los estados de paridad positiva más bajos en energía.

6) El segundo estado  $0^+$  del  $^{10}\text{Be}$  es producto de una excitación  $2\hbar\omega$ .

7) Al representar la forma cuadrupolar obtenemos para todos los isótopos del berilio una separación física entre los cúmulos lo cual no debe malinterpretarse en el sentido de que esto deba ocurrir siempre. Estados base que son esféricos, como por ejemplo el del  $^{16}\text{O}$ , pueden ser descritos por una determinada estructura de cúmulos aunque en realidad no haya una separación física entre ellos.

8) El modelo puede incluso reproducir muchos efectos para núcleos con "halo" aunque los detalles son muy difíciles de tratar.

Una de las direcciones futuras en que se puede continuar este trabajo, y en la que hemos hecho ya una aproximación inicial [90], es extendiéndolo al caso de sistemas pesados con la complicación adicional que resulta del hecho de que para sistemas pesados la interacción espín-órbita, la cual rompe la simetría SU(3), es más fuerte y por tanto no se puede despreciar.

Otra dirección de interés sería la aplicación de este modelo en la descripción de sistemas formados por 3 cúmulos. Esa extensión permitiría, tal vez, explicar algunos de los resultados experimentales de multifragmentación comentados en la Introducción.

Las dificultades básicas para extender el SACM a sistemas más pesados son que en ese caso la interacción espín-órbita es importante y ella rompe la simetría SU(3) y por otro lado que se hace más difícil cumplir con el principio de Pauli porque aumenta la multiplicidad de las irreps. Por otro lado también aumenta la diferencia entre las  $\hbar\omega$  de los diferentes cúmulos que forman al sistema.

Ya hemos comenzado a estudiar el modo de calcular los factores espectroscópicos, en el contexto del SACM para reacciones que incluyen a isótopos del berilio, como parte de un trabajo conjunto con físicos nucleares experimentales del IFUNAM. Una

versión muy sucinta de las ideas esenciales expuestas en esta tesis está publicada en [91]. Una versión más extensa se puede encontrar en [92].

## A Determinación de las irreps $U_{C_k}^{TS}(4)$ para los isótopos del berilio.

En este Apéndice trataremos solamente el caso del  $^{11}\text{Be}$ . El procedimiento es análogo para el resto de los isótopos del berilio.

Veamos cómo, según el modelo de capas del oscilador armónico, están distribuidos los 11 nucleones (4 protones y 7 neutrones) del  $^{11}\text{Be}$ . La capa s, al contener 4 nucleones, está cerrada, mientras que los restantes 7 nucleones (2 protones y 5 neutrones) están en la capa p, esta última constituye, debido a que está abierta, la capa de valencia para el núcleo. Lo anterior se corresponde al caso de la excitación  $0\hbar\omega$  y se acostumbra escribir como  $(s)^4 (p)^7$ .

Para el  $^{11}\text{Be}$ , debido a que tiene 3 neutrones en exceso en la capa de valencia, o sea que no se pueden aparear con protones, es que tenemos que  $T_Z = \frac{3}{2}$  lo que implica que para todos los estados que encontremos del  $^{11}\text{Be}$  debe cumplirse que  $T \geq \frac{3}{2}$ .

Comencemos por los estados correspondientes a la excitación  $0\hbar\omega$ . Usaremos el método gráfico donde en lugar de escribir puntos pondremos la letra "n" que en este caso significa que se trata de un nucleón. Entonces tendremos:

$$\begin{array}{cccc}
 U(4) & & & \\
 (capa\ s) & \otimes & (capa\ p) & (total) \\
 n & & nnn & nn \\
 n & & nn & n \\
 n & & n & \\
 n & & n & 
 \end{array} \tag{32}$$

Es importante precisar que en el gráfico anterior hemos sustituido, como irrep  $U_{C_k}^{TS}(4)$  total, a la  $[4322] = [432^2]$  por la irrep equivalente  $[21]$ . El procedimiento para hacerlo es muy sencillo y general, siendo válido para todos los grupos unitarios  $U(n)$  donde n es un número entero arbitrario (en nuestro caso tenemos  $n=4$ ) y consiste en eliminar todas las columnas que tengan un número de elementos igual al orden del grupo unitario dado (en el presente caso 4). De este modo se simplifican los cálculos.

Tenemos entonces como irrep  $U_{C_k}^{TS}(4)$  total a la  $[21]$ . Al consultar las tablas [63] vemos que el contenido de espín-isoespín de dicha irrep es  $(S, T) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

Debido a que el núcleo es un sistema de fermiones, su función de onda total debe ser completamente antisimétrica y para ello las irreps de  $SU(3)$  del núcleo deben ser las autoconjugadas de las irreps de  $U_{C_k}^{TS}(4)$  que acabamos de encontrar. Llegamos así a lo siguiente:

$$\begin{array}{rcccl}
 U(3) & & & & \\
 (capa\ s) & \otimes & (capa\ p) & (SU(3)\ total) & \\
 nnnn & & nnnn & (2, 1) & \\
 & & nn & & \\
 & & n & & (33)
 \end{array}$$

En este caso, como la capa  $s$  está completa (tiene 4 nucleones) entonces para determinar la irrep total sólo tomamos en cuenta la capa  $p$ . Además, como finalmente trabajamos con la irrep de  $SU(3)$  es que la hemos escrito directamente en lugar de la irrep de  $U(3)$ . El paso de una a otra es muy fácil: si para  $U(3)$  tenemos  $[n_1, n_2, n_3]$  entonces la irrep de  $SU(3)$  queda determinada como  $(\lambda, \mu) = (n_1 - n_2, n_2 - n_3)$ .

Otra posibilidad que podríamos considerar para la irrep  $U_{C_k}^{TS}(4)$  del  $^{11}\text{Be}$  en el caso de la excitación  $0\hbar\omega$  es:

$$\begin{array}{rcccl}
 U(4) & & & & \\
 (capa\ s) & \otimes & (capa\ p) & (total) & \\
 n & & nn & n & \\
 n & & nn & n & \\
 n & & nn & n & \\
 n & & n & & (34)
 \end{array}$$

Aquí hemos sustituido nuevamente la irrep de  $U(4)$  que se obtiene de manera inmediata ( $[3332] = [3^3 2]$ ) por una irrep equivalente. Tenemos entonces a  $[111] = [1^3]$  como irrep  $U_{C_k}^{TS}(4)$  total la cual es equivalente a  $[1]$ . Pero si consultamos las tablas [63] vemos que en este caso el contenido de espín-isoespín de dicha irrep es  $(S, T) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  por lo que no se corresponde con un estado del  $^{11}\text{Be}$  ya que para estos, como ya dijimos, debe ser  $T \geq \frac{3}{2}$ .

Pero tenemos todavía 2 opciones que podemos considerar para el caso de la excitación  $0\hbar\omega$ .

$$\begin{array}{rcccc}
U(4) & & & & \\
(\text{capa } s) & \otimes & (\text{capa } p) & (\text{total}) & \\
n & & nnn & [311] & \\
n & & nn & & \\
n & & nn & & \\
n & & & & (35)
\end{array}$$

Aquí hemos sustituido la irrep  $U(4)$  ( $[4331] = [43^21]$ ) por su irrep equivalente ( la  $[311] = [31^2]$  ). En este caso la irrep equivalente se encuentra si completamos el arreglo que forma la irrep de la capa p hasta tener un arreglo rectangular de 3 columnas por 4 filas y buscamos la irrep correspondiente al gráfico conjugado del que se forma con los nucleones que es necesario añadir para completar la irrep de la capa p. En este caso es necesario añadir un nucleón en la segunda fila, otro en la tercera y tres en la cuarta y última, obteniéndose así una irrep equivalente que en este caso es llamada la conjugada o adjunta. El contenido de espín-isoespín de la irrep  $[31^2]$  es  $(S, T) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  y  $(S, T) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ .

Para la parte orbital, también finalmente en términos de  $SU(3)$ , tendremos en ese caso:

$$\begin{array}{rcccc}
U(3) & & & & \\
(\text{capa } s) & \otimes & (\text{capa } p) & (SU(3) \text{ total}) & \\
nnnn & & nnn & (0, 2) & \\
& & nnn & & \\
& & n & & (36)
\end{array}$$

Por último, podemos tener, para el caso de la excitación  $0\hbar\omega$ :

$$\begin{array}{rcccc}
U(4) & & & & \\
(\text{capa } s) & \otimes & (\text{capa } p) & (\text{total}) & \\
n & & nnn & [32] & \\
n & & nnn & & \\
n & & n & & \\
n & & & & (37)
\end{array}$$

En este caso, otra vez hemos hecho uso del método de completar la irrep de la capa p hasta lograr un arreglo rectangular de 3 columnas por 4 filas y buscar después el gráfico conjugado del añadido y la irrep que le corresponde. El contenido de espín-isoespín de la irrep [32] es idéntico al caso anterior de la irrep [311]:  $(S, T) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  y  $(S, T) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ .

Para la parte orbital tendremos en ese caso:

$$\begin{array}{rcccl}
 U(3) & & & & \\
 (capa\ s) & \otimes & (capa\ p) & & (SU(3)\ total) \\
 nnnn & & nnn & & (1, 0) \\
 & & nn & & \\
 & & nn & & (38)
 \end{array}$$

A medida que aumenta  $n\hbar\omega$  vamos teniendo cada vez más opciones diferentes para obtener las irreps de  $U_{C_k}^{TS}(4)$  correspondientes. En la tabla 14 aparece un resumen del análisis anterior.

$n\hbar\omega$	$U^{TS}(4)$	$(S, T)$	$SU(3)$
0	[21]	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	(2, 1)
0	[1]	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	—
0	[31 <sup>2</sup> ]	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	(0, 2)
0	[32]	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	(1, 0)

Tabla 14: Representaciones irreducibles de  $U^{TS}(4)$  para  $0\hbar\omega$  en el caso del  $^{11}\text{Be}$  y sus correspondientes irreps de  $SU(3)$ .

Para las excitaciones  $1\hbar\omega$  tenemos 2 posibilidades: excitar un nucleón de la capa p a la sd  $((s)^4(p)^6(sd)^1)$  ó excitar un nucleón de la capa s a la capa p  $((s)^3(p)^8)$ . Nosotros usamos únicamente la primera posibilidad debido a que da el mayor valor  $(\lambda, \mu)$  para la irrep de  $SU(3)$ .

Para las excitaciones  $2\hbar\omega$  tenemos 4 posibilidades:  $((s)^4(p)^6(fp)^1)$ ,  $((s)^4(p)^5(sd)^2)$ ,  $((s)^4(p)^6(sd)^1)$ ,  $((s)^3(p)^7(sd)^1)$ ,  $((s)^2(p)^9)$ .

Para las excitaciones  $3\hbar\omega$  tenemos todavía más posibilidades (7):  $((s)^4(p)^6(sdg)^1)$ ,  $((s)^3(p)^7(fp)^1)$ ,  $((s)^4(p)^5(sd)^1(fp)^1)$ ,  $((s)^4(p)^4(sd)^3)$ ,  $((s)^3(p)^6(sd)^2)$ ,  $((s)^2(p)^8(sd)^1)$ ,

$((s)^1(p)^{10})$ .

Lógicamente, para cada una de estas posibilidades son todavía posibles diferentes variantes, o sea, como estamos trabajando con las irreps de  $U_{C_k}^{TS}(4)$  nos referimos a todas las formas posibles de distribuir los nucleones que cumplen que en cada columna habra un número de nucleones menor o igual que 4.

En realidad nosotros nos quedamos en cada caso sólo con una de todas las posibles irreps de  $U_{C_k}^{TS}(4)$ : la más baja en energía. La irrep más baja en energía, en el caso de un grupo  $U(4)$  es la que presente el mayor número posible de columnas de 4 elementos.

## B Obtención de las irreps de $SU(3)$ totales del SACM para las excitaciones $0\hbar\omega$ y $1\hbar\omega$ en el caso del $^{11}\text{Be}$ .

En este Apéndice trataremos únicamente el caso del  $^{11}\text{Be}$ . El procedimiento es análogo para el resto de los isótopos del berilio.

En el caso de la excitación  $0\hbar\omega$  tenemos que la capa p es la única que está abierta, en ella se encuentran 7 nucleones (2 protones y 5 neutrones). En ese caso tendremos:

$$\begin{aligned}
 U(12) &\supset U(3) \otimes U_C^{TS}(4) \\
 [1^7] &\quad [h_1, h_2, h_3] \quad [h_1, h_2, h_3] \\
 &\quad [421] \quad [321^2] \\
 SU(3) &= (2, 1) \tag{39}
 \end{aligned}$$

Aunque en este caso la irrep de  $U_C^{TS}(4)$  más baja en energía era la  $[2^3 1]$  ella no fué utilizada porque, como ya se explicó en el Apéndice A, no cumple la condición  $T \geq \frac{3}{2}$ .

Para la excitación  $1\hbar\omega$  hemos escogido excitar un nucleón de la capa p a la sd ( $(s)^4 (p)^6 (sd)^1$ ). Lo hemos hecho así porque dicha configuración nos da el mayor valor para el autovalor del operador de Casimir de segundo orden. Las otras configuraciones también, en principio, están presentes pero a energías más altas. En el caso que escogimos tenemos 2 capas abiertas: la p y la sd. Por eso este caso es ligeramente más complicado que el anterior. Primero se hace para cada capa abierta lo mismo que se hizo para la única capa abierta en el caso de la excitación  $0\hbar\omega$ , después se multiplican entre sí las irreps de  $SU(3)$  obtenidas para cada capa.

Tendremos entonces para la capa p:

$$\begin{aligned}
 U(12) &\supset U(3) \otimes U_C^{TS}(4) \\
 [1^6] &\quad [h_1, h_2, h_3] \quad [h_1, h_2, h_3] \\
 &\quad [420] \quad [2^2 1^2]
 \end{aligned}$$

$$SU(3) = (2, 2) \quad (40)$$

La irrep (2, 2) fué la que obtuvimos para el  $^{10}\text{Be}$ . Por otro lado, para la capa sd tendremos:

$$U(24) \supset U(6) \otimes U_C^{TS}(4)$$

$$[1] \qquad [1] \qquad [1]$$

$$SU(3) = (2, 0) \quad (41)$$

Aquí fué necesaria la reducción del grupo  $U(6)$  al  $U(3)$  y finalmente de éste al  $SU(3)$ . Para obtener las irreps totales debemos multiplicar los resultados obtenidos para las 2 capas:

$$(2, 2) \otimes (2, 0) = (4, 2) + (2, 3) + (3, 1) + (0, 4) + (1, 2) + (2, 0)$$

Pero todavía es necesario restar los estados espúreos que se corresponden con excitaciones del centro de masa. Para encontrar cuáles son, multiplicamos la irrep obtenida para la excitación  $0\hbar\omega$  del núcleo por la correspondiente a una excitación  $1\hbar\omega$  del centro de masa ((1, 0)):

$$(2, 1) \otimes (1, 0) = (3, 1) + (1, 2) + (2, 0)$$

Al comparar con la lista anterior vemos fácilmente que las irreps de  $SU(3)$  totales que no se corresponden con excitaciones del centro de masa son:

$$(4, 2), (2, 3) \text{ y } (0, 4).$$

Naturalmente, para excitaciones  $n\hbar\omega$  más altas las cosas se complican un poco porque aumenta el número de maneras diferentes de obtenerlas, hay más capas abiertas y también aparece un mayor número de estados espúreos correspondientes al movimiento del centro de masa pero esencialmente el método es el mismo que en estos casos sencillos que acabamos de analizar.

## Lista de Figuras

1	Aplicación de la condición de Wildermuth al ${}^8\text{Be}$ . . . . .	25
2	Principio de correspondencia entre el modelo de cúmulos y el de capas. . . . .	27
3	Espectros teórico y experimental del ${}^8\text{Be}$ según los parámetros de las Tablas 3 y 12. Las curvas teórica y experimental prácticamente coinciden. . . . .	44
4	Sección transversal cuadrupolar del ${}^8\text{Be}$ . . . . .	45
5	Ajuste para el ${}^9\text{Be}$ . . . . .	49
6	Sección transversal cuadrupolar del ${}^9\text{Be}$ . . . . .	50
7	Ajuste del ${}^{10}\text{Be}$ . . . . .	53
8	Sección transversal cuadrupolar del ${}^{10}\text{Be}$ tomando como estado base la irrep $(2, 2)$ de $SU(3)$ . . . . .	54
9	Energía del hamiltoniano sin términos rotacionales. . . . .	58
10	Ajuste del ${}^{11}\text{Be}$ según los parámetros de la Tabla 3. La banda $\frac{3}{2}^-$ es generada por la irrep $(7, 1)$ correspondiente a $2\hbar\omega$ de excitación. . . . .	59
11	Sección transversal del ${}^{11}\text{Be}$ tomando como estado base la irrep $(4, 2)$ de $SU(3)$ . . . . .	61
12	Ajuste que resulta para el ${}^8\text{Be}$ , a partir de la extrapolación de los parámetros del ${}^9\text{Be}$ . La banda teórica excitada tiene igual pendiente que la experimental. . . . .	65
13	Ajuste que resulta para el ${}^{10}\text{Be}$ , tomando los parámetros extrapolados a partir del ${}^9\text{Be}$ , cuando se ajusta la interacción $K_L^2$ por medio del parámetro $b$ . En esta extrapolación se reproduce la banda $1^-$ mejor, en general, que en la Fig. 7. Sin embargo, el estado $2_1^+$ aparece a una energía muy baja. . . . .	66
14	Ajuste que resulta para el ${}^{11}\text{Be}$ al usar los parámetros extrapolados a partir del ${}^9\text{Be}$ . Además se ajusta, por medio del parámetro $b$ , la interacción $K_L^2$ para reproducir la diferencia de energías entre $(4, 2)$ y $(2, 1)$ asumiendo arbitrariamente que el estado más bajo en $(2, 1)$ se encuentra a 5 MeV. Se reproduce la banda $\frac{3}{2}^-$ mucho mejor que en la Fig. 10. . . . .	67

## Lista de Tablas

1	Irreps de $U(3)$ (obtenidas en [14]) para el sistema $^{12}\text{C} + \alpha$ después de aplicar el principio de correspondencia entre las bases del modelo de cúmulos y las del modelo de capas. . . . .	32
2	El espacio modelo $SU(3)$ del SACM para el sistema $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ . El supraíndice $i$ nos da la multiplicidad de la irrep cuando ella es diferente de 1. . . . .	33
3	Conjunto de parámetros obtenidos para el mejor ajuste de los datos. . .	41
4	Representaciones irreducibles de $SU(3)$ a las que se aplicará el principio de correspondencia para obtener el espacio microscópico del SACM para el $^8\text{Be}$ . . . . .	42
5	Espectros teórico y experimental para el $^8\text{Be}$ . Hemos usado los parámetros de la Tabla 3 (fila 3) y los parámetros extrapolados que se muestran más adelante en la Tabla 12 (fila 3). . . . .	43
6	Representaciones irreducibles de $SU(3)$ a las que se aplicará el principio de correspondencia para obtener el espacio microscópico del SACM para el $^9\text{Be}$ . . . . .	47
7	Espectros teórico y experimental para el $^9\text{Be}$ . Hemos usado los parámetros de la Tabla 3 (fila 4). Los valores de espín en la lista están multiplicados por 2. . . . .	48
8	Representaciones irreducibles de $SU(3)$ a las que se aplicará el principio de correspondencia para obtener el espacio microscópico del SACM para el $^{10}\text{Be}$ . . . . .	51
9	Espectros teórico y experimental para el $^{10}\text{Be}$ . Hemos usado los parámetros de la Tabla 3 (fila 5) y los parámetros extrapolados que se encuentran listados más adelante en la Tabla 12. . . . .	52
10	Representaciones irreducibles de $SU(3)$ a las que se aplicará el principio de correspondencia para obtener el espacio microscópico del SACM para el $^{11}\text{Be}$ . . . . .	56
11	Espectros teórico y experimental para el $^{11}\text{Be}$ . Hemos usado los parámetros de la Tabla 3 (fila 6) y los parámetros extrapolados que se encuentran listados más adelante en la Tabla 12 (fila 6). Los valores de espín que aparecen en la lista están multiplicados por 2. El coeficiente de $K_L^2$ se usó para correr el estado $\frac{1}{2}^-$ a un valor arbitrario de alrededor de 5 MeV, suficientemente alto como para que no apareciera como un posible estado en el espectro observado en los experimentos. . . . .	60
12	Conjunto de parámetros que se obtienen de la extrapolación a partir del $^9\text{Be}$ . En el texto se explica cómo fué realizada dicha extrapolación. . . .	64

13	El espacio modelo del SACM para $0\hbar\omega$ , $1\hbar\omega$ y $2\hbar\omega$ . . . . .	69
14	Representaciones irreducibles de $U^{TS}(4)$ para $0\hbar\omega$ en el caso del $^{11}\text{Be}$ y sus correspondientes irreps de $SU(3)$ . . . . .	76

## Bibliografía

- [1] A. Bromley, J. A. Kuehner y E. Almqvist, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960), 365.
- [2] D. Scharnweber, W. Greiner y U. Mosel, *Nucl. Phys. A* **164** (1971), 257.
- [3] W. D. Rae, R. G. Stokstad, B. G. Harvey, A. Dacal, R. Legrain, J. Mahoney, M. J. Murphy y T. J. M. Symons, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980), 884.
- [4] R. Trockel, K. D. Hildenbrand, U. Lynen, W. F. J. Mueller, H. J. Rabe, H. Sann, H. Stelzer, W. Trautmann y R. Wada, *Phys. Rev. C* **39** (1989), 729;  
G. Peilert, H. Stoecker, W. Greiner, A. Rosenhauer, A. Bohnet y J. Aichelin, *Phys. Rev. C* **39** (1989), 1402;  
D. Heuer, A. Chabane, M. E. Brandan, M. Charvet, A. J. Cole, P. Desesquelles, A. Giorni, A. Lleres, A. Menchaca-Rocha y J. B. Viano, *Phys. Rev. C* **50** (1994), 1943.
- [5] G. Bizard, R. Brou, H. Doubre, A. Drouet, F. Guilbault, F. Hanappe, J. M. Harasse, J. L. Laville, C. Lebrun, A. Oubahadou, J. P. Patry, J. Peter, G. Ployart, J. C. Steckmeyer y B. Tamain, *Phys. Lett. B.* **172** (1986), 301.
- [6] L. G. Moretto, D. N. Delis y G. J. Wozniak, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), 3935;  
L. G. Moretto, Th. Rubehn, L. Phair, N. Colonna, G. J. Wozniak, D. R. Bowman, G. F. Peaslee, N. Carlin, R. T. de Souza, C. K. Gelbke, W. G. Gong, Y. D. Kim, M. A. Lisa, W. G. Lynch y C. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), 2634;  
Th. Rubehn, K. X. Jing, L. G. Moretto, L. Phair, K. Tso y G. J. Wozniak, *Phys. Rev. C* **54** (1996), 3062;  
A. Aranda, Jorge A. López y Zehua Wu, *Phys. Rev. C* **55** (1997), 788;  
Claudio O. Dorso, Jorge A. López y Xiayou Wang, *Phys. Rev. C* **58** (1998), 2986.
- [7] J. Gómez del Campo, D. Shapira, M. Korolija, H. J. Kim, K. Teh, J. Shea, J. P. Wieleczko, E. Chávez, M. E. Ortiz, A. Dacal, C. Volant y A. D'Onofrio, *Phys. Rev. C* **53** (1996), 222.
- [8] J. Gómez del Campo, D. Shapira, E. Chávez, M. E. Ortiz, A. Dacal, A. D'Onofrio y F. Terrasi, *Rev Mex. Fís.* **41** Supl.1(1996), 101.
- [9] H. Madani et al., *Proceedings of the 12th Winter Workshop in Nuclear Dynamics* 1996.

- [10] H. Madani, E. Chávez, A. Dacal, M. E. Ortiz, J. Suro, J. Gómez del Campo, J. McConnell y D. Shapira, *Rev Mex. Fís.* **41** Supl.1(1996), 188.
- [11] M. E. Ortiz, E. Chávez, A. Dacal, H. Madani, J. Suro, J. Gómez del Campo, J. McConnell y D. Shapira, *Rev Mex. Fís.* **44** Supl.1(1998), 78.
- [12] A. Sandulescu, D. Poenaru y W. Greiner, *Sov. J. Part. Nucl.* **11** (1980), 528.
- [13] H. J. Rose y G. A. Jones, *Nature* **307** (1984), 245.
- [14] J. Cseh, *Phys. Lett.* **B281** (1992), 173;  
J. Cseh y G. Lévai, *Ann. Phys. (N.Y.)* **230**, (1994), 165.
- [15] M. Seya, M. Kohno y S. Nagata, *Prog. Theo. Phys.* **65** (1981), 204;  
Y. Kanada-En'yo, H. Horiuchi y A. Ono, *Phys. Rev.* **C52** (1995), 628;  
Y. Kanada-En'yo, H. Horiuchi y A. Doté, *J. Phys.* **G24** (1998), 1499.
- [16] Y. Kanada-En'yo, H. Horiuchi y A. Doté, *Phys. Rev.* **C60** (1999), 064304.
- [17] W. von Oertzen, *Z. Phys.* **A354** (1996), 37;  
W. von Oertzen, *Z. Phys.* **A357** (1997), 355;  
W. von Oertzen, *Il Nuovo Cim.* **A110** (1997), 895.
- [18] A. V. Ramayya, J. K. Hwang, J. H. Hamilton, A. Sandulescu, A. Florescu, G. M. Ter-akopian, A. V. Daniel, Yu. Ts. Oganessian, G. S. Popeko, W. Greiner, J. D. Cole y GANDS95 Collaboration 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 947.
- [19] P. O. Hess, W. Scheid y W. Greiner, *J. Phys.* **G25** (1999), L139-L145;  
S. Misicu, P. O. Hess, A. Sandulescu y W. Greiner, *Jour. Phys.* **G25** (1999), L147-L153.
- [20] H. G. Bohlen, W. von Oertzen, R. Kalpakchieva, A. Blazevic, B. Gebauer, S. M. Grimes, A. Lépine-Szily, T. N. Massey, W. Mittig, A. N. Ostrowski, J. M. Oliveira, P. Roussel-Chomaz, S. Thummerer y M. Wilpert, *Il Nuovo Cimento* **111 A** (1998), 841.
- [21] P. Navrátil y B. R. Barrett, *Phys. Rev. C* **57** (1998), 3119.
- [22] K. Arai et al., *Phys. Rev. C* **54** (1996), 132;  
N. Itagaki y S. Okabe, *Phys. Rev. C* **61** (2000), 044306;  
N. Itagaki, S. Okabe y K. Ikeda, *Phys. Rev. C* **62** (2000), 034301;  
Y. Ogawa et al., *Nucl. Phys. A* **673** (2000), 122.

- [23] A. G. M. Van Hees y P. W. M. Glaudemans, *Z. Phys. A* **315** (1984), 223;  
A. A. Wolters et al., *Phys. Rev. C* **42** (1990), 2053;  
T. Otsuka, N. Fukunishi y H. Sagawa, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), 1385;  
N. Vinh Mau, *Nucl. Phys. A* **592** (1995), 33;  
J. N. Gu, C. H. Zhang, A. Vitturi, *J. Phys. G* **25** (1999), B1-B6.
- [24] K. Wildermuth y Y.C.Tang, *A Unified Theory of the Nucleus*, Academic Press, New York, 1977.
- [25] G. Lévai y J. Cseh, *Phys. Rev. C* **44** (1991), 152  
G. Lévai y J. Cseh, *Phys. Rev. C* **44** (1991), 166.
- [26] G. Lévai y J. Cseh, *Phys. Lett. B* **381**(1996), 1.
- [27] G. Lévai y J. Cseh, *Proc. of the 9th International Symposium on Capture Gamma-Ray Spectroscopy and related Topics*, Budapest, Hungary, 1996, eds. G. L. Molnár, T. Belgya, Zs. Révay, *Springer Hungarica Ltd., Budapest, Vol.1, 1997*, p. 237.
- [28] J. Hiura y R. Tamagaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **52** (1972), 25.
- [29] P. D. Kuntz, *Ann. of Phys.* **11** (1960), 275; *Phys. Rev.* **128** (1962), 1343. J. Hiura y I. Shimodaya, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **30** (1963), 585.
- [30] S. Okabe, Y. Abe y H. Tanaka, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **57** (1977), 866.
- [31] S. Okabe y Y. Abe, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **61** (1979), 1049.
- [32] A. Faessler, P. U. Sauer y M. M. Stingl, *Z. Phys.* **212** (1968), 1.
- [33] M. Bouten et al., *Nucl. Phys.* **A158** (1970), 561.
- [34] K. Wildermuth y T. Kanellopoulos, *Nucl. Phys.* **7** (1958), 150.
- [35] J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **52** (1937), 1107.
- [36] D. M. Brink, *Proc. Int. School of Physics Enrico Fermi Course XXXVI, Varenna, Italy, 1965*, (New York Academic, 1966), 247.
- [37] M. Seya, M. Kohno y S. Nagata, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **65** (1981), 204.
- [38] S. S. Hanna et al., *Phys. Rev. C* **3** (1971), 2198.
- [39] H. Horiuchi, *Nucl. Phys.* **A522** (1991), 257c.
- [40] A. Ono et al., *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992), 2898.

- [41] A. Ono et al., Phys. Rev. C **48** (1993), 2946.
- [42] Y. Kanada-En'yo y H. Horiuchi, Prog. Theor. Phys. **93** (1995), 115.
- [43] G. Leander y S. E. Larsson, Nucl. Phys. **A239** (1975), 93.
- [44] H. Horiuchi, Prog. Theor. Phys. **51** (1974), 745.
- [45] Y. Shen y Z. Ren, Phys. Rev. C **54** (1996), 1158.
- [46] X. Li y P. Heenen, Phys. Rev. C **54** (1996), 1617.
- [47] A. A. Wolters et al., Phys. Rev. C **42** (1990), 2062.
- [48] G. Lévai, J. Cseh y W. Scheid, Phys. Rev. C **46** (1992), 548.
- [49] Zs. Fülöp, G. Lévai, E. Somorjai, Á. Z. Kiss, J. Cseh, P. Tikkanen y J. Keinonen, Nucl. Phys. A **604** (1996), 286.
- [50] J. Cseh, G. Lévai y W. Scheid, Phys. Rev. C **48** (1993), 1724.
- [51] J. Cseh, Phys. Rev. C **50** (1994), 2240.
- [52] J. Cseh, G. Lévai, A. Ventura y L. Zuffi, Phys. Rev. C **58** (1998), 2144.
- [53] J. P. Elliott y P. G. Dawber, "Symmetries in Physics" Vol. 1, chapter 12, Oxford University Press, (1979)
- [54] J. P. Elliott, Proc. R. Soc. London, Ser. A **245**, 128 (1958); **245**, 562 (1958); M. Harvey, Adv. Nucl. Phys. **1**, 67 (1968).
- [55] K. T. Hecht y D. Braunschweig, Nucl. Phys. A **244** (1975), 365.
- [56] K. T. Hecht, Phys. Rev. C **16** (1977), 2401.
- [57] K. T. Hecht y D. Braunschweig, Nucl. Phys. A **295** (1978), 34.
- [58] Y. Suzuki, Nucl. Phys. A **448** (1986), 395.
- [59] J. Escher y J. P. Draayer, Jour. Math. Phys. **39** (1998), 5123.
- [60] C. Bahri y J. P. Draayer, Comp. Phys. Comm. **83** (1994), 59.
- [61] Frank A. y Van Isacker P., *Algebraic Methods in Molecular and Nuclear Structure*, (Wiley Intersciences, New York, 1994).

- [62] Cha C Y, Nordberg N, Firestone R B y Ekström L P 1999  
ISOTOPE EXPLORER 2.23, Jan. 28;  
F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. **A490** (1988), 1;  
F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. **A506** (1990), 1.
- [63] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, (Dover Publications, New York, 1989).
- [64] J. P. Draayer y Y. Akiyama, J. Math. Phys. **14** (1973), 1904;  
Y. Akiyama y J. P. Draayer, Comput. Phys. Commun. **5** (1973), 405.
- [65] J. Blomquist y A. Molinari, Nucl. Phys. A **106** (1968), 545.
- [66] O. Castaños, J. P. Draayer y Y. Leschber, Z. Phys. A **329** (1988), 33.
- [67] R. Bijker y V. K. B. Kota, Ann. Phys. (N.Y.) **187** (1988), 148.
- [68] Geza Lévai ,Institute of Nuclear Research of the Hungarian Academy of Sciences, Debrecen 1994.
- [69] A. P. Zuker, J. Retamosa, A. Poves y E. Caurier, Phys. Rev. C **52** (1995), R1741.
- [70] P. O. Hess Bechstedt, Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM 1998.
- [71] Computer Routines for the reduction of  $U(n)$  to  $SU(3)$ , J. P. Draayer et al. (1998).
- [72] S. Raman et al., Atomic Data and Nuclear Data Tables **36** (1987).
- [73] J. M. Eisenberg y W. Greiner, *Nuclear Theory I: Nuclear Models*, (North-Holland, Amsterdam, 1987).
- [74] S. Dixit et al., Phys. Rev. C **43** (1991), 1758.
- [75] J. P. Glickman et al., Phys. Rev. C **43** (1991), 1740.
- [76] I. Daito et al., Phys. Lett. B **418** (1998), 27.
- [77] E. K. Warburton y B. A. Brown, Phys. Rev. C **46** (1992), 923.
- [78] I. Talmi y I. Unna, Phys. Rev. Lett. **4** (1969), 60.
- [79] A. Doté, H. Horiuchi y Y. Kanada-En'yo, Phys. Rev. C **56** (1997), 1844.
- [80] J. P. Deutsch et al., Phys. Lett. B **28** (1968), 178.

- [81] D. L. Auton et al., Nucl. Phys. A **157** (1970), 305.
- [82] B. Zwieglinski et al., Nucl. Phys. A **315** (1979), 124.
- [83] R. B. Weisenmiller et al., Phys. Rev. C **13** (1976), 1330.
- [84] R. Aryaeinejad et al., Nucl. Phys. A **436** (1985), 1.
- [85] H. Sakai et al., Phys. Lett. B **302** (1993), 7.
- [86] G. B. Liu y H. T. Fortune, Phys. Rev. C **42** (1990), 167.
- [87] J. M. Oliveira et al., Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 4056.
- [88] D. J. Morrissey et al., Nucl. Phys. A **627** (1997), 222.
- [89] M. V. Stoikov, J. Dobaczewski, P. Ring y S. Pittel, preprint, nucl-th-9909006 (1999);  
S. Pittel y M. V. Stoitsov, Rev Mex. Fís. **46** Supl.1(2000), 92.
- [90] P. O. Hess, L. Hernández, W. Scheid, A. Algora y J. Cseh, G. Lévai, Cluster-99 Croatia, june 14-19, 1999 ; ( World Scientific, Singapore, 2000) 104.
- [91] L. Hernández, P. O. Hess, A. Algora y G. Lévai, Heavy Ion Physics **13**, (2001) 197 (Akadémiai Kiadó, Budapest, Hungary).
- [92] L. Hernández, P. O. Hess, G. Lévai y A. Algora (aceptado para su publicación en Journal of Physics G, 2001).