

41



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

INTERNET COMO HERRAMIENTA DIDACTICA Y DE DIFUSION PARA PRONOSTICOS Y SERIES DE TIEMPO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE: LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION PRESENTA: JULIO ANTONIO TORRES SOSA

ASESORA: ACT. MARICARMEN GONZALEZ VIDEGARAY.

ACATLAN, EDO. DE MEXICO. JUNIO DE 2001.





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Por permitirme cumplir con esta meta y por estar siempre conmigo, Dios mío, te doy las gracias.

A mis papás, Clementina y Julio, que siempre me han brindado con todo su amor, apoyo incondicional y confianza, las oportunidades para que pueda seguir adelante en mi camino. Gracias mamá por todas tus palabras, que siempre llevo conmigo y si he aprendido a ser una mejor persona, te lo debo a ti; gracias papá. A ustedes debo lo que he logrado.

A mis hermanos, Gerardo y Lorena, pues siempre hemos compartido experiencias *significativas*. Gracias, pues sé que mis alegrías también son tuyas y viceversa.

A la Act. MariCarmen González Videgaray, asesora de esta tesis, por la dedicación puesta en este trabajo; por ser mi amiga y por todo tu apoyo, con mucho cariño y respeto, gracias.

A los profesores que con verdadera vocación imparten cátedra en la ENEP Acatlán.

A todos los amigos que a lo largo de mi vida he encontrado, en especial a David, Ingrid, Luz, Pilar y Rosario, gracias por su apoyo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México Campus Acatlán, mi Alma Mater.

ÍNDICE

Introducción	i
Capítulo I ¿POR QUÉ PRONOSTICAR?	1
1.1 Definición de pronóstico	1
1.2 Necesidad de los pronósticos y cómo ocuparlos para tomar decisiones	2
1.3 Factores modificadores del medio	3
1.4 El enfoque de sistemas, necesario para la planeación y elección de los métodos de pronóstico	5
1.5 Clasificación de los métodos de pronóstico	6
1.6 Metodología Box-Jenkins	9
1.7 Términos y características deseables en los métodos de pronóstico	10
1.8 Ejemplo	11
1.9 Beneficios Obtenidos al emplear pronósticos (resumen)	12
Capítulo II ASENTANDO LAS BASES	13
II.1 Modelos Determinísticos y Modelos Probabilísticos	13
II.2 Estacionaridad de un Proceso Estocástico	15
II.3 Función de Autocovarianza y Función de Autocorrelación	18
II.4 Función de Autocorrelación Parcial	21
II.5 Proceso de Ruido Blanco	23
II.6 Propiedades Espectrales de las Series de Tiempo	24
Capítulo III SERIES DE TIEMPO	27
III.1 Concepto	27
III.2 Utilidad de las Series de Tiempo	27
III.3 Obtención de las Series de Tiempo	28
III.4 Un tipo especial de Series de Tiempo: Las series con fluctuaciones estacionales	30
III.5 Representación Algebraica y Gráfica de las Series de Tiempo	31
III.5.1 Representación con Modelos Autorregresivos y de Medias Móviles	32
III.5.1.1 Proceso Autorregresivo	34
III.5.1.2 Proceso de Medias Móviles	39
III.5.1.3 Proceso Autorregresivo de Medias Móviles	41
III.5.1.4 Proceso Autorregresivo de Medias Móviles Integrado ARIMA(p,d,q)	46

III.5.1.5 Modelo General de los Procesos Autorregresivos de Medias Móviles Integrados	48
III.5.1.6 Series de Tiempo con fluctuaciones estacionales	48
III.5.1.7 Modelos Multiplicativos	50
Capítulo IV FORMAS DE PRONOSTICAR	53
IV.1 Métodos de Pronóstico	53
IV.2 Métodos Cualitativos de Pronóstico	53
IV.3 Métodos Cuantitativos de Pronóstico	54
IV.4 Metodología de Box-Jenkins	56
IV.4.1 Condiciones necesarias para la aplicación de la metodología Box-Jenkins	57
IV.4.1.1 Estabilización de la Varianza	58
IV.4.1.2 Eliminación de la Tendencia	60
IV.4.1.3 Suficientes datos	61
IV.4.2 Pasos iterativos	61
IV.4.2.1 Identificación de modelos	62
IV.4.2.2 Estimación	69
IV.4.2.3 Diagnóstico	73
IV.4.2.3.1 Análisis de los residuales	74
IV.4.2.3.2 Modelos Sobreespecificados	77
IV.4.2.3.3 Modelos Subespecificados	77
IV.4.2.4 Pronóstico	78
IV.4.3 Resumen	78
Capítulo V SOFTWARE DE APLICACIÓN E HIPERLIGAS EN LA RED	80
V.1 Software de propósito general	80
V.2 Software Específico	81
V.3 Un dilema: ¿Crear un software o comprar un software?	86
V.4 Internet, herramienta didáctica	87
V.5 Hiperligas importantes sobre Series de Tiempo	89
V.6 Creación de una página web para Series de Tiempo	91
V.6.1 Objetivos	92
V.6.2 Justificación	92
V.6.3 La página electrónica "Series de Tiempo"	93
V.6.4 Descripción de la página electrónica "Series de Tiempo"	93
V.6.5 Implementación de la página electrónica "Series de Tiempo"	95
V.6.6 Comentarios sobre la página electrónica "Series de Tiempo"	96
V.7 Resumen	100

Capítulo VI UN ESTUDIO REAL COMPLETO	101
VI.1 Elección de la Serie de Tiempo	101
VI.2 Obtención de la Serie de Tiempo	101
VI.3 Análisis	101
VI.4 Estabilización de la Varianza y eliminación de la Tendencia	104
VI.5 Identificación de un Modelo Tentativo	109
VI.5.1 Modelo AR(1)	111
VI.5.2 Modelo AR(1)*SAR(1)	112
VI.5.3 Modelo MA(1)	117
VI.5.4 Modelo MA(1)*SMA(1)	118
VI.6 Una Manera alterna de eliminar la tendencia	122
VI.6.1 Modelo AR(2)*SAR(1)	124
VI.6.2 Modelo ARMA(1,1)	128
VI.6.3 Modelo ARMA(1,1)*SAR(1)	128
VI.7 Elección del mejor modelo	131
VI.8 Resumen	133
CONCLUSIONES GENERALES	134
APÉNDICE	135
BIBLIOGRAFÍA	140

INTRODUCCIÓN

En el umbral de un nuevo milenio, donde la competencia comercial, política y social se ha incrementado, la industria de la información ha llegado a ser la de mayor importancia en todos los sectores del quehacer humano, quien tiene la información, tiene el poder de decidir qué rumbo tomar y así lograr avanzar antes que su competidor. Pero rara vez se tiene la información privilegiada necesaria antes de que ciertos eventos ocurran, además, existen factores que modificarán el curso y el ambiente de desarrollo de nuestras actividades, todo esto es lo que llamamos incertidumbre.

En el afán de disminuir esta incertidumbre, se han desarrollado métodos determinísticos y probabilísticos para la obtención de modelos de pronóstico. Estos métodos giran alrededor de las series de tiempo, que son una reconocida herramienta para la descripción, control, optimización y pronóstico de procesos de diversa índole. Uno de estos métodos probabilísticos fue desarrollado por George E. Box y Willem M. Jenkins quienes crearon los Modelos ARIMA (p,d,q). A través de esta metodología, también llamada Box-Jenkins, se obtienen modelos matemáticos que sirven para el cálculo de pronósticos que reducen la incertidumbre y el riesgo en la toma de decisiones para llegar a la planeación de estrategias y políticas de trabajo.

Este método fue posible gracias a los avances tecnológicos en la computación, pues es la computadora la que desarrolla los cálculos iterativos de esta metodología. Estos mismos avances han permitido que la información también pueda transmitirse casi instantáneamente de computadora a computadora a través de Internet, la red de redes, cuya primera intención fue educativa y científica.

Este trabajo trata sobre las series de tiempo y la metodología Box-Jenkins y aprovecha a la Internet para crear una página electrónica sobre estos temas, esta página de hipertexto tiene una intención didáctica orientada, principalmente, a los alumnos de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación (MAC), impartida en el Campus Acatlán de la UNAM, pues una de las asignaturas del Plan de Estudios de esta carrera trata sobre este método de pronósticos.

¿Qué me motivó a crear esta página didáctica sobre series de tiempo y metodología Box-Jenkins? Principalmente, el gusto por el tema, pues es un claro ejemplo de las matemáticas aplicadas, se requieren los conocimientos de Estadística, Procesos Estocásticos, Probabilidad, Cálculo, etc. para poder llegar a comprender la forma en que se obtiene un modelo para pronosticar valores.

A pesar de ser un método que ha probado su eficacia, su práctica ha sido limitada; durante mi época de estudiante necesité buscar información sobre este método en otros medios además de los libros y me sorprendí cuando en Internet, no existían documentos en el idioma español que pudieran servirme en mi investigación. Ese es mi segundo gran motivo, crear un documento de hipertexto hecho en Acatlán, que sirva a los estudiantes de MAC a aprender la metodología de Box-Jenkins y que

aporte en algo a que otro tipo de profesionales conozcan e implementen estos conocimientos de los egresados de MAC.

Resultado de esta inquietud es la presente Tesis que propone que la Internet es un medio adecuado para la difusión de las series de tiempo, el método Box-Jenkins y su utilidad, a través de una página electrónica de intenciones didácticas y académicas.

La Tesis "Internet como herramienta didáctica y de difusión para pronósticos y series de tiempo" está compuesta por los siguientes capítulos:

•**CAPITULO I ¿POR QUÉ PRONOSTICAR?.** En el cual expongo las ventajas que proporciona el utilizar la historia estadística de la organización para apoyar las *decisiones de la empresa.*

•**CAPITULO II ASENTANDO LAS BASES.** Como he mencionado, se requiere de ciertos conocimientos previos para comprender del todo esta metodología, en este capítulo se explicarán de manera general los conocimientos básicos necesarios para la comprensión del resto del trabajo.

•**CAPITULO III SERIES DE TIEMPO.** Que he dedicado a explicar qué son, cómo se obtienen, su importancia, sus características, cómo se clasifican y cómo se representan. También presento en este capítulo los modelos AR(p), MA(q), ARMA(p,q) y ARIMA(p,d,q) creados por Box-Jenkins.

•**CAPITULO IV FORMAS DE PRONOSTICAR.** Muestro las diferencias entre los métodos Determinísticos y Probabilísticos para la obtención de modelos de pronóstico. De entre los métodos probabilísticos, daré mayor énfasis a la Metodología Box-Jenkins por su precisión y eficacia. Se mencionarán sus características y qué condiciones se necesitan para poder implementarla, así como los pasos que la comprenden hasta llegar a un modelo de pronóstico.

•**CAPITULO V SOFTWARE DE APLICACIÓN E HIPERLIGAS EN LA RED.** La importancia y necesidad de realizar pronósticos ha fomentado la creación de diversos paquetes estadísticos que mencionaré en este capítulo, también opinaré sobre algunas páginas en Internet que han sido creadas en español y que ameritan ser mencionadas en este trabajo.

•**CAPITULO VI UN ESTUDIO REAL COMPLETO.** Para concluir el trabajo, presentaré un estudio completo sobre la serie "Consumo eléctrico por el sector industrial" hasta la obtención de un pronóstico y su interpretación.

Esta es la aportación de un egresado de MAC hacia su propia Alma Mater, la cual espero sea generadora de un deseo de aprendizaje e impulso a la creación de sitios similares desarrollados en la ENEP Acatlán.

CAPÍTULO I ¿POR QUÉ PRONOSTICAR?

El hombre, a través de su historia, ha intentado adelantarse a los hechos para obtener beneficios. De esta manera ha creado la quiromancia (lectura de la palma de la mano), tarot, lectura del café, astrología, etc., pero si alguna de estas formas de adivinación ha funcionado es mera coincidencia.

Si pudiéramos "adivinar" el futuro ¿de qué manera ocuparíamos esta información? La mayoría de nosotros la aprovecharíamos para saber el número ganador de la Lotería Nacional, o apostar al ganador seguro de algún evento deportivo. Sin embargo, nadie tiene una bola de cristal o acceso al oráculo de Delfos.

No podemos adivinar los hechos que ocurrirán en un futuro, pero sí podemos hacer **pronósticos** relativamente acertados a través de la observación y determinación de patrones y tendencias. ¿Pronósticos relativamente acertados? Con esto me refiero a que podemos aproximarnos a los resultados esperados en ciertos eventos, quizás con ciertas diferencias que pueden ser no significativas.

En este capítulo, observaremos la importancia que tienen los pronósticos en nuestra vida cotidiana y que, sin que nos percatemos, a diario hacemos y utilizamos. Estos pronósticos pueden y deben ser ocupados en la vida profesional de científicos, empresarios, políticos, sociólogos, etc. ya que les permitirán obtener mejores resultados en sus ocupaciones, pues el beneficio al implementarlos es innegable.

1.1 DEFINICIÓN DE PRONÓSTICO

¿Qué son los pronósticos? ¿para qué sirven? ¿en dónde se aplican? ¿cómo se obtienen?

Estas son algunas preguntas que encontrarán respuesta a lo largo de este trabajo. Primero conoceremos la definición de **pronóstico**:

Pronóstico. Conjetura acerca de lo que puede suceder.// Señal por donde se adivina una cosa futura.¹

Un pronóstico consiste en formarse una idea del comportamiento futuro de algo, la certeza (es decir, la seguridad de tener razón) que tendremos de este pronóstico dependerá de los factores que se encuentren a su alrededor.

¹ Pequeño Larousse Ilustrado, Ediciones Larousse, México D.F. 1982

1.2 NECESIDAD DE LOS PRONÓSTICOS Y CÓMO OCUPARLOS PARA TOMAR DECISIONES

¿Todo lo que hacemos es arbitrario? es decir, ¿nos comportamos sin un objetivo que nos impulse a realizar acciones que nos ayuden a alcanzar lo que queremos? O bien, ¿Todas nuestras actividades se llevan a cabo conforme a lo planeado, sin ninguna alteración? ¿Qué sucede cuando hacemos algo sin meditarlo bien? Casi puedo asegurar que a todos nos ha pasado que, a pesar de que hemos realizado las acciones planeadas, los resultados obtenidos no son lo que esperábamos o pudieron haber sido mejores, aún así, nuestro comportamiento no se rige por el azar, sea lo que sea que necesitemos, tenemos que basarnos en un juicio (o un objetivo) previamente elaborado antes de decidir o no realizar alguna acción.

Seguramente todos alguna vez nos hemos equivocado al tomar una decisión, el tamaño de nuestros errores es proporcional a la trascendencia de nuestras acciones, así, un error puede ir desde llegar después del jefe a la oficina si no estimamos correctamente el tiempo de traslado de nuestra casa al lugar de trabajo; una empapada y un resfriado si decidimos no cargar con un paraguas a mediados de agosto; o cosas mucho más importantes como perder una gran cantidad de dinero si no estimamos correctamente la afluencia de clientes en una tienda y no se tiene la cantidad correcta de mercancía en inventario.

Toda acción tiene un costo² a favor o en contra, ya sea pequeño o grande dependiendo de la magnitud de la ganancia obtenida o del error cometido, claro que lo que pretendemos es que si es una ganancia la que vamos a obtener, sea lo más grande posible; en cambio, si lo que esperamos es una pérdida, tiene que ser pequeña. Esta es una razón para ocupar pronósticos que nos ayuden a planear nuestras actividades.

Por ejemplo, cuando vamos al cine, antes de comprar las entradas, meditamos qué película nos gustará más, ¿en qué basamos nuestra elección? La mayoría de las veces nos basamos en cómo se llama el filme, o quiénes son los actores, o si nos la recomendaron, etc., es decir, observamos los factores que envuelven a las películas y es entonces que podemos hacer un pronóstico de que la película *x* será la más conveniente y adecuada a nuestro gusto. Pero además, estamos sujetos a las carteleras y horarios de las salas de cine, esto provoca que modifiquemos nuestra elección, pues si la película deseada no se encuentra en ninguna sala o si los horarios no se adecuan a nuestro tiempo, entonces tal vez modifiquemos la decisión anteriormente tomada y posteriormente regresaremos a ver la película que habíamos elegido.

De esta misma manera, un tomador de decisiones en una empresa tendría que basar su juicio para poder elegir entre un grupo de políticas de trabajo; se tendría que hacer preguntas similares a éstas: ¿qué posibilidades hay de que suban las ventas? ¿cuánto dinero perdería o ganaría si llevo a cabo tal política de mercadotecnia? ¿sigo

² Este costo no es necesariamente monetario, depende de la función de valor empleada y puede ser subjetivo.

o no importando la misma cantidad de mercancía? ¿debo modificar el tamaño de la producción? Una vez analizados todos los factores que pueden influir en el medio, pondera para determinar la mejor forma de actuar frente a circunstancias dadas: elabora un pronóstico para tomar su decisión.

Es necesario resaltar la importancia que la información estadística (o histórica) tiene para poder responder estas preguntas, pues es a través de esta información que se podrá hacer un análisis. Además, también es fundamental el clasificar de manera correcta toda la información que se obtiene a lo largo del tiempo, hay que saber qué nos sirve, para qué nos sirve y cómo ocuparlo. La información acumulada a través del tiempo, es la que nos ayudará a determinar de manera más precisa el comportamiento del fenómeno que nos ocupa y hará que nuestros pronósticos se acerquen más a la realidad futura.

De aquí podemos tener una idea de la utilidad y conveniencia del uso de los pronósticos para la planeación y la toma de decisiones, no sólo de índole personal, sino también financiera, legal, social y hasta política, todo mundo debe hacer un pronóstico, por más simple que sea para tomar la decisión de realizar o no una acción determinada.

1.3 FACTORES MODIFICADORES DEL MEDIO

Un mal chiste dice que los pronosticadores pasan una mitad de su tiempo pronosticando y la otra mitad explicando por qué no resultó su pronóstico.

¿A qué se debe esta apreciación? La respuesta ya la mencionamos, la *incertidumbre*, es decir, la probabilidad de que ocurran o no las cosas que esperamos.

Ya mencioné anteriormente que la mayoría de los acontecimientos siguen un patrón básico de comportamiento, pero aunado a éste existe un conjunto de factores que inevitablemente harán que nuestro medio ambiente cambie.

¿A qué me refiero con patrón básico? Pondré un ejemplo muy sencillo para explicarlo:

Don Pancho tiene una panadería que le ha dado para comer durante varios años, al acumular experiencia en su negocio se percató que a la mayoría de las personas les agrada comer un buen pan fresco a la hora del desayuno pero que existen preferencias por cierto tipo de pan, entonces las donas, garibaldis, panqués y conchas, se terminaban más rápido que otros panes y como la gente los seguía pidiendo, optó por hornear más de estos panes que incrementarían su ganancia; las ventas bajaban después de las 12:00hrs. y así se mantenían hasta las 18:00hrs. más o menos, en que volvían a subir pues la gente se prepara para la hora de la cena, ahora el bolillo es el pan que más debe hornear y tener listo en períodos de tiempo relativamente cortos para que la gente no se desespere y se vaya; Don Pancho también notó que las ventas mejoraban significativamente los fines de semana, pero

bajaban de manera radical los lunes e iban aumentando conforme avanzaba la semana. Cada octubre, Don Pancho se prepara para elaborar "pan de muertos" dos semanas antes de noviembre y deja de elaborarlo una semana después del día 2 de noviembre. Tiene que aprovechar muy bien las temporadas del año, así que en enero el éxito está en preparar "rosca de reyes" que se venden como "pan caliente"; en estas épocas a Don Pancho le va muy bien.

Como a todos, a Don Pancho le afectan "las crisis", esto es, cuando los capitales golondrinos, o el precio del petróleo, o el cambio de sexenio, o diferentes circunstancias ajenas a él, provocan una desestabilización en la moneda que frena el desarrollo económico y entonces aumenta la harina, la leche, la levadura de cerveza, el huevo, el azúcar, etc. y el precio del pan tiene que aumentar, al igual que los artículos de consumo primario y secundario, por lo que las ventas en la panadería caen estrepitosamente, Don Pancho tiene que pensar en diferentes formas de salvar su negocio que, además de ser su única fuente de ingresos, también da de comer a las familias de sus empleados.

Don Pancho se desespera porque sabe que, a pesar de haber encontrado ciertas claves de cómo se comporta su negocio, no puede estar seguro de que el día siguiente será como el anterior, no sabe qué hacer para optimizar sus ganancias.

En este sencillo ejemplo, se observa que existen indicios por medio de los cuáles podemos formar una idea de cómo se comporta el negocio de Don Pancho, éste es el *patrón básico*: las ventas que suben, bajan, que mejoran en ciertas temporadas del año, pero no importa qué tanto sepamos acerca del comportamiento del negocio, siempre existirán factores que harán que el patrón básico cambie, algunas veces levemente, otras de manera más radical. Estos factores, pueden venir también por temporadas, en las cuales será relativamente fácil predecirlos, pero algunos otros son factores aleatorios, por lo que su determinación se complica.

Esta incertidumbre, lejos de desalentarnos a realizar estudios y análisis para obtener pronósticos, es la que más nos debe motivar a su realización, pues si un medio ambiente no cambia demasiado rápido o sus cambios no son muy importantes, entonces no nos preocuparán tanto; en cambio si el medio en el que se desarrollan nuestras actividades sufre de cambios sumamente drásticos y muy rápidos (como el medio económico en nuestro país) es necesario tratar de adelantarse a dichos cambios, de manera que estos no nos afecten o que su impacto no sea lo devastador que pueda llegar a ser.

No podemos evitar estos factores que hacen cambiar nuestro medio, pero sí podemos disminuir la probabilidad de errores si tomamos en cuenta patrones de conducta del fenómeno que nos ocupa. Volvamos al ejemplo de las lluvias, ¿en qué época del año tenemos que cargar un paraguas o un impermeable? Por supuesto, en verano cuando la temporada de lluvias comienza; nunca podremos evitar que llueva, pero sí

podemos evitar sufrir sus consecuencias, nos podremos resguardar de ella si tomamos en cuenta la probabilidad de una precipitación pluvial. De esta misma manera un tomador de decisiones tiene que observar y registrar los datos representativos para su estudio y poder determinar así, si puede guiar sus decisiones por un patrón de comportamiento. A este registro de datos lo llamaremos de aquí en adelante **SERIE DE TIEMPO**, siempre y cuando sean datos numéricos que representen el valor de un fenómeno en intervalos de tiempo equidistantes (también llamadas **SERIES TEMPORALES** o por su equivalente en inglés **TIME SERIES**). Pero no profundizaremos en este tema sino hasta el Capítulo II.

1.4 EL ENFOQUE DE SISTEMAS, NECESARIO PARA LA PLANEACIÓN Y ELECCIÓN DE LOS MÉTODOS DE PRONÓSTICO

Para algunas personas, planear y pronosticar es lo mismo; para otras, lo que importa es la planeación de políticas de trabajo y eventos que serán dirigidos a ciertas metas y no conceden tiempo para pronosticar posibles cambios en el futuro. Además, dependiendo de la formación o campo de desarrollo profesional, se tendrá una visión (o enfoque) distinta del problema a resolver. De esta manera, para un mismo asunto, un gerente de ventas puede verlo como un problema relacionado con ventas, en cambio un gerente de producción tendrá la opinión de que el mismo problema tiene que ver con la producción. En otras palabras, antes de decidir pronosticar o planear cualquier cosa, es evidentemente necesario reconocer el problema desde todo punto de vista relacionado con el mecanismo de trabajo de la empresa, esto debe llevarse a cabo de manera conjunta (**BRAINSTORM**) para elaborar una lista común de objetivos que deben irse cumpliendo. Se debe pensar si existe la posibilidad de cambios imprevistos o no deseados en el proceso de alguna área, en qué cambios deben realizarse para que se cumplan los objetivos establecidos, cómo afectarán a cada área dichos cambios, etc.

Este enfoque de sistemas debe realizarse antes de considerar el o los métodos de pronóstico para resolver un problema. Es importante para el correcto desarrollo, evaluación, diseño e implementación de los mismos métodos.

Entonces, resumiendo los pasos del enfoque de sistemas, se debe hacer una lista de:

- ◆ Objetivos generales
- ◆ Objetivos específicos
- ◆ Diferentes estrategias (o medios) para lograrlos
- ◆ Indicadores de éxito

Cuando por fin se tienen bien definidos los objetivos generales y específicos, entonces ya se puede pensar en elegir un método de pronóstico adecuado y funcional que dependerá de manera directa de estos objetivos. Por lo tanto, el enfoque de sistemas ayudará también a la correcta determinación de los medios necesarios para alcanzar las metas fijadas. Lo cual significa un ahorro de tiempo y dinero.

Una vez realizado el estudio y obtenido el pronóstico, se debe recurrir de nuevo a la interactividad entre las partes interesadas en la planeación de políticas de trabajo, su labor será mucho más fácil, ya que tendrán la base firme de un pronóstico, el cual les permitirá enfocar de manera más precisa las actividades requeridas para conseguir el objetivo planteado.

Ahora, ¿podemos nosotros modificar el futuro? Para responder utilizaré un dicho popular: "*cada quien es dueño de su propio destino*" y yo agregaría "*siempre y cuando realice las acciones pertinentes*". Una vez obtenido el pronóstico ¿lo debemos acatar resignadamente?

La planeación no sería posible sin hacer un pronóstico, ¿en qué basaríamos nuestro objetivo final si no tenemos una idea de cómo será el futuro? Y por otro lado, ¿de qué nos sirve un pronóstico si no tenemos en qué aplicarlo? Para lograr definir las acciones que nos ayudarán a lograr una meta, es inevitable el tener un buen pronóstico del comportamiento futuro del medio en el que nos desarrollamos.

1.5 CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE PRONÓSTICO

Para poder realizar un pronóstico que realmente satisfaga nuestros requerimientos, es necesario conocer qué tipos de métodos existen, qué tipo de datos requieren, qué tipo de información arrojan y qué confianza se puede tener en dicho método. De esta manera podremos resolver diferentes tipos de problemas con diferentes tipos de métodos, elegiremos el método de pronóstico a emplear de acuerdo al tipo de datos con los que contamos, cantidad de información requerida por el método, tipo de pronóstico deseado (a corto, mediano o largo plazo), etc. para lograr una mayor eficiencia y eficacia.

La posición más acertada al elegir un método de pronóstico es el ser ecléctico³, es decir, tener en cuenta que más de un método puede o debe ser usado para quedar completamente convencidos. Por supuesto que esto redundará en más tiempo, dinero y esfuerzo, pero si contamos con ellos tendremos mejores resultados.

La mayoría de las clasificaciones que se han hecho a los métodos de pronóstico, se basan en el tipo de datos que emplean, el tipo de gente que hará el pronóstico (tipo de preparación profesional) y el grado de sofisticación del método. La clasificación que se presenta a continuación, se basa en el tipo de método empleado para el análisis de los datos:

³ Pertenciente al eclecticismo.

ECLECTICISMO. Escuela filosófica que procura conciliar las doctrinas que parecen mejores de diversos sistemas. Modo de juzgar y obrar que, en vez de seguir soluciones bien definidas o extremas, adopta un término medio

- ♦ **MÉTODOS SUBJETIVOS.** Son aquellos en los que el proceso usado para analizar los datos no ha sido bien especificado. Estos métodos son llamados también implícitos, informales, clínicos, basados en la experiencia, de corazonadas, etc., pueden ser procesos simples o complejos, pueden usar datos objetivos o subjetivos, pueden o no emplear un análisis formal. Estos datos se traducen en pronósticos en la cabeza del analista.
- ♦ **MÉTODOS OBJETIVOS.** Así son llamados los métodos cuyos procesos para analizar datos están bien especificados. También llamados explícitos, estadísticos o métodos formales. Pueden ser simples o complejos, usar datos objetivos o subjetivos y el proceso de análisis puede realizarse por computadora.

Dentro de los métodos objetivos encontramos:

- ♦ **MÉTODOS DE SERIES DE TIEMPO.** Los métodos que utilizan series de tiempo, analizan variables simples que representan el fenómeno estudiado, pongamos un ejemplo, podríamos pronosticar el número de accidentes de un día X_t en determinada autopista analizando únicamente la variable que representa el número de accidentes del día anterior X_{t-1} . Los métodos de series de tiempo, sólo usan datos de la variable de interés, que a través de un análisis del patrón que sigue el fenómeno, dicha variable se proyecta hacia el futuro. Algunos métodos que utilizan series de tiempo son:
 - ♦ **Métodos de Suavizamiento.** De fácil desarrollo, proveen de pronósticos a corto plazo. Las series de tiempo se usan para obtener valores “suavizados” de los datos, este valor suavizado se convierte en el pronóstico. Estos métodos consisten de promedios de los datos de la serie de tiempo. Entre los métodos más comunes encontramos: el suavizamiento exponencial, exponencial lineal, los promedios móviles y el suavizamiento de Winter
 - ♦ **Métodos de Descomposición.** Consisten en identificar los componentes de la serie de tiempo, tales como tendencia, estacionalidad y ciclos. Se basan en el supuesto de que una serie temporal está compuesta por estos factores, además de un error aleatorio que modifica a la serie de tiempo. Su expresión matemática más general es:

$$X_t = f(T_t, S_t, C_t, e_t)$$

Esto es, el valor de la serie de tiempo en el período t está dado en función de la tendencia, la estacionalidad, los ciclos y el error aleatorio. La desventaja de estos métodos es, que se tiene que identificar el patrón de cada uno de los componentes de la serie.

- ♦ **Métodos Avanzados.** Estos métodos tuvieron mayor auge gracias al desarrollo que tuvieron las computadoras, pues al soportar mayor número

de operaciones matemáticas, se hace más fácil la selección del modelo para el pronóstico de datos. A diferencia de los métodos de descomposición, que usan una combinación de cada uno de los patrones que componen la serie temporal, para pronosticar el valor futuro, los métodos avanzados, lidian con todo junto para seleccionar el modelo matemático. Entre los métodos más comunes podemos mencionar: los modelos ARMA de Box-Jenkins y los modelos ARARMA de Parzen.

- ♦ **MÉTODOS CAUSALES.** Los métodos causales amplían el espectro de factores a estudiar, es decir, ahora para pronosticar el número de accidentes de un día X_t en determinada autopista analizaríamos la variable que representa el número de accidentes del día anterior X_{t-1} , pero agregaríamos además variables de factores tales como el clima, límites de velocidad, hora del día, pericia del conductor, etc., los métodos causales van más allá de esta única variable X_t , pretenden encontrar un **por qué** añadiendo variables que influyen en el comportamiento del sistema que estudiamos.

Los métodos que son objetivos y que se basan en la causalidad pueden ser catalogados o subdivididos en métodos lineales o en métodos de clasificación.

- ♦ **Métodos lineales.** Podríamos decir que se basan en la frase "*si X pasa, causará que Y ocurra*", se encuentran relaciones lineales entre X y Y . Los modelos lineales son usados porque es más fácil trabajar con modelos cuyos términos operan con aritmética simple. En particular, los modelos como (1) se prefieren

$$Y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots \quad (1)$$

donde Y es la variable a ser pronosticada

X_i son las variables causales

a es una constante

b_i representan las relaciones entre X y Y .

- ♦ **Métodos de clasificación.** Estos métodos intentan encontrar unidades de clasificación de comportamiento que respondan de manera similar a variables causales. El objetivo es obtener grupos cuyos elementos tengan sólo pequeñas diferencias, pero entre cada grupo diferencias significativas, de esta manera, cada grupo estará conformado por unidades o elementos que coinciden en ciertas características. Pongamos un ejemplo: supongamos que para las elecciones presidenciales del año 2000, cierto candidato desea saber qué cantidad de votantes tendrá a favor, los votantes pueden ser clasificados en grupos de acuerdo

a sus características de edad, nivel de estudios, situación geográfica, etc. entonces un grupo puede ser:

Descripción del Grupo	prob. de que voten por el candidato X
Votantes entre 18-30 años	
Profesionistas	.77
Que viven en zona conurbada	
Votantes entre 31-45 años	
Campeños	.30
que viven en Morelos	

Con estos datos se logran pronósticos que ayudarán al candidato a determinar los lugares donde debe acentuar su campaña.

El conocer los diferentes tipos de métodos de pronóstico, dará como resultado una agilidad mayor al momento de tener que elegir uno, ayudará a saber qué tipo de información se debe recabar, que la información sea la necesaria y suficiente para el método elegido y que la elección del método dependerá si el pronóstico deseado es a corto, mediano o largo plazo.

1.6 METODOLOGÍA BOX-JENKINS

Los pronósticos se obtienen a partir de modelos matemáticos que se deducen del patrón de comportamiento que se ha presentado al estudiar la serie de tiempo. Estos modelos matemáticos tienen como característica principal que son probabilísticos, es decir, añaden un rango de holgura en los resultados obtenidos.

En el análisis de series de tiempo, existe un método de pronóstico muy efectivo y que estudiaremos en particular en este trabajo, la **Metodología Box-Jenkins**.

En 1976, Goerge E. P. Box y Gwilym M. Jenkins, presentaron su libro **TIME SERIES ANALYSIS, forecasting and control**, en el cual muestran los modelos de series de tiempo de tipo ARIMA(p,d,q) o también conocidos como modelos Box-Jenkins.

Estos modelos son obtenidos a través de una serie de "filtros" que extraen los movimientos aleatorios de la serie de tiempo, dejando únicamente en el modelo matemático obtenido, los elementos que sí se pueden predecir.

Más adelante, profundizaremos en dicha metodología.

1.7 TÉRMINOS Y CARACTERÍSTICAS DESEABLES EN LOS MÉTODOS DE PRONÓSTICO

Los conceptos que a continuación se presentan son indispensables para comprender la teoría desarrollada alrededor de los métodos de pronóstico. Al mismo tiempo, se considera que un pronóstico es efectivo si el método por el cual se obtuvo, reúne las características deseables.

PERÍODO DE TIEMPO

El **período de tiempo** es la unidad básica en la cual el pronóstico se basará. Si el método de pronóstico que utilizaremos para el análisis utiliza una serie de tiempo, recolectaremos la información de ésta, de acuerdo al intervalo que utilizemos para nuestros propósitos; así podremos tener datos anuales o semestrales y si el proceso lo requiere, se utilizará otro tipo de período, como por horas o minutos; o como se mencionó anteriormente, en cualquier otra dimensión requerida.

HORIZONTE DE TIEMPO

Es el número de períodos de tiempo que cubrirá el pronóstico, si el pronóstico cubre ocho intervalos de tiempo, el **horizonte del pronóstico** es de ocho.

INTERVALO ENTRE PRONÓSTICOS

Por lo general este intervalo es igual al período de tiempo; independientemente del método empleado y del horizonte que dicho método pueda cubrir, se deben reemplazar los datos arrojados por el pronóstico con los datos reales cuando estos ya estén disponibles, con el objeto de tener la información lo más apegada a la realidad, de esta manera el modelo empleado se ajustará de manera correcta siempre. Por ejemplo, si nuestro período de tiempo es mensual y tenemos que el pronóstico cubre un horizonte de diez períodos de tiempo, cuando tengamos el primer dato real, lo compararemos con el pronóstico obtenido con el modelo y se juzgará si el modelo arroja buenos resultados.

PLAZO DE LOS PRONÓSTICOS

Cuando hablamos de un plazo de tiempo, nos referimos a qué tan alejado en el tiempo hacemos el pronóstico, podemos distinguir tres casos:

- A largo plazo, son lapsos mayores a cinco años.
- A mediano plazo, períodos mayores a un año (por supuesto menores a cinco).
- A corto plazo, para períodos menores a un año, son los pronósticos más requeridos, encontramos necesarios este tipo de pronósticos para la economía, agricultura, física, etc.

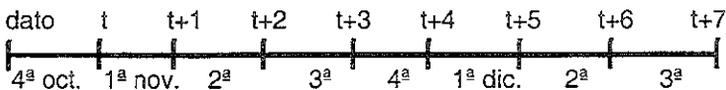
1.8 EJEMPLO

Supongamos que al gerente de ventas de una tienda de artículos deportivos le interesa obtener un pronóstico de ventas para las semanas 2ª y 3ª del mes de diciembre, en este mes las personas acostumbran dar obsequios a sus familiares y amigos y además, es un mes en el que se preparan para vacacionar, por tanto las ventas suben; los artículos que en especial le interesan son: tenis, pants, sudaderas, chamarras, trajes de baño y bloqueadores solares; con este pronóstico podrá planear el inventario de estos artículos y de esta manera optimizar sus ganancias de la temporada de fin de año.

Enfocaremos, para mayor comprensión, el ejemplo sólo en un artículo: los tenis, pero los demás se estudiarían de manera similar.

Como el gerente requiere el pronóstico para las semanas 2ª y 3ª de diciembre, el *período de tiempo* para este estudio es *semana*; el dato para cada semana corresponde a la suma del número de pares de tenis que se hayan vendido durante la semana. Para nosotros la suma se efectúa todos los lunes, o sea que el dato t corresponde a la semana pasada, el dato $t-1$ a la semana antepasada, etc.

Supongamos ahora que nos encontramos en la 1ª semana de noviembre, como no tenemos aún el dato que corresponde a esta semana, lo correcto en este caso es entonces un *horizonte de tiempo de 7 semanas*.



A través de un modelo matemático, obtendríamos un pronóstico para cada semana, el *intervalo entre pronósticos* es de una semana y el pronóstico que estamos obteniendo es *a corto plazo*.

I.9 BENEFICIOS OBTENIDOS AL EMPLEAR PRONÓSTICOS RESUMEN

El empleo de métodos de pronóstico para apoyar la planeación de acciones importantes, no sólo aumenta la probabilidad de éxito en dichas actividades; también evita gastos mayores que tendrían que hacerse para corregir el rumbo que erróneamente se tomó y de las revisiones que serían necesarias para emprender el camino hacia nuevas decisiones.

Al emplear de manera habitual pronósticos para el análisis de los diversos procesos de la empresa que nos ocupe, se evitará que los procesos de recolección de información necesaria sean extensivos y tediosos, al contrario, el pronóstico del período de tiempo anterior se comprobará y comparará con el dato real obtenido en el período actual y a la vez será un nuevo dato en la serie de tiempo de datos reales. Esto lógicamente nos indicará si el método utilizado está arrojando buenos resultados y en caso contrario, tendremos la oportunidad de corregir a tiempo el método o modelo utilizado.

El beneficio que será el más importante a mediano plazo; es adquirir ventaja sobre los competidores, pues al adelantarnos de manera confiable a lo que puede ocurrir en el futuro a través de los pronósticos, obtendremos mejores resultados sobre ellos, es decir, mayores ganancias, más clientes, más confianza en nuestra empresa o negocio, etc. entonces el ocupar buenos métodos de pronóstico atraerá consigo mayores posibilidades de éxito en todas nuestras actividades.

CAPÍTULO II ASENTANDO LAS BASES

Para proseguir con este trabajo, es necesario recordar algunos conceptos que son requeridos para la comprensión y correcta aplicación de los modelos ARIMA de pronóstico.

Es necesario también, empezar con diferenciar los modelos **determinísticos** de los **probabilísticos**, el método de pronóstico que estudiaremos pertenece a esta segunda categoría.

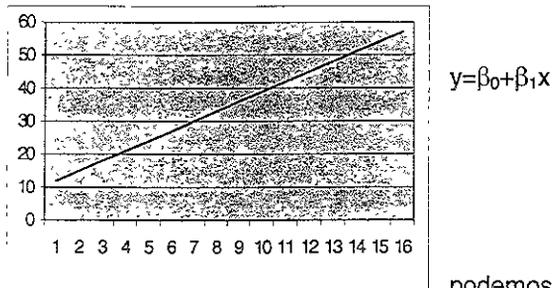
Definiremos funciones importantes como la **FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA** y la **FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN** que en conjunto con el **ANÁLISIS ESPECTRAL** de las series de tiempo, conforman la base para aplicar la metodología de Box-Jenkins.

II.1 MODELOS DETERMINÍSTICOS Y MODELOS PROBABILÍSTICOS

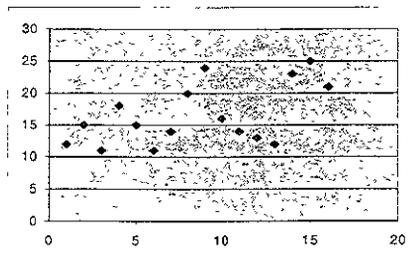
Como bien sabemos, existen modelos matemáticos como

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \tag{II.1}$$

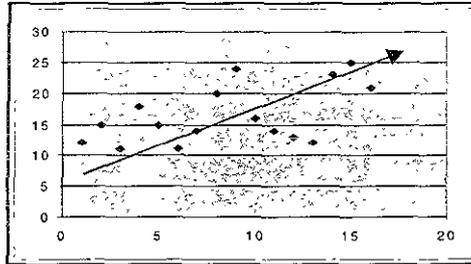
el cual nos permite encontrar valores de y para una x dada y su gráfica sería parecida a la siguiente:



La ecuación II.1 la podemos obtener a partir de un registro de datos reales que, señalándolos con puntos en una gráfica se verían como:



Para encontrar los valores de las constantes β_0 y β_1 , aplicaríamos el método de mínimos cuadrados, el cual nos arrojará valores de y para una x dada, los cuales se encontrarán sobre una recta.



Este modelo es un modelo **DETERMINÍSTICO**. Este tipo de modelos no permiten estimar un margen de error ni un intervalo de confianza y si comparamos el valor obtenido con el modelo para por ejemplo $x=25$ con el dato real para el mismo período de tiempo seguramente tendríamos un error, pues en la realidad, ningún fenómeno tiene estas características de comportamiento puramente lineal.

Los modelos determinísticos los podemos encontrar con facilidad en diversas áreas de la ciencia, por ejemplo: en la física la fórmula $F=ma$, calcula la fuerza de una partícula de acuerdo con la masa y la aceleración que presente.

Sin embargo, ninguno de estos modelos describe con precisión la realidad, la cual no se comporta de manera predeterminada, en ella influyen factores imprevistos que, como ya vimos, modifican sus resultados.

Debido a esto, fue necesario incorporar a estos modelos partes estadísticas y probabilísticas que permitieran estimar un error, así la ecuación II.1 se convertiría en:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \tag{II.2}$$

donde ε es una variable aleatoria con una distribución de probabilidad determinada que representa el error estimado para y .

A esta clase de modelos se les ha llamado **PROBABILÍSTICOS** o **ESTOCÁSTICOS**.

Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias $Z(\omega, t)$ indexadas con respecto al tiempo, donde ω pertenece al espacio muestral y t pertenece al espacio paramétrico. Para una ω dada, $Z(\omega, t)$, como función de t , es llamada función muestral u observación. El conjunto de todas las posibles observaciones se llama **SERIE DE TIEMPO**.

II.2 ESTACIONARIDAD DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO

La estacionaridad tiene suma importancia en el estudio de las series de tiempo, gracias a ella sabremos si existe tendencia en los datos que hemos recabado o se mantienen estables o tienen variaciones que impidan que nuestros datos muestren de manera correcta su patrón básico.

Asumiremos que el espacio paramétrico (o sea el tiempo) en un proceso estocástico será siempre discreto. Considerando un conjunto de variables aleatorias

$$\{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n}\}$$

del proceso estocástico $\{Z(\omega, t) : t = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. La función de distribución n-dimensional que se define por:

$$F(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n}) = P\{\omega : Z(\omega, t_1) \leq Z_{t_1}, \dots, Z(\omega, t_n) \leq Z_{t_n}\} \quad \text{II.3}$$

Se puede simplificar la notación de un proceso estocástico de $Z(\omega, t)$ a Z_t o $Z(t)$, bajo el conocimiento de que el proceso $Z(\omega, t)$, es un conjunto de variables aleatorias que tienen un espacio muestral definido, por eso ω puede ser omitida.

Un proceso estocástico es **estacionario de primer orden**, si su función de distribución no varía con respecto al tiempo, esto es, si $F(Z_t) = F(Z_{t+k})$, para cualesquiera enteros t, k ; de manera análoga, un proceso será **estacionario de segundo orden** si:

$$F(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = F(Z_{t_1+k}, Z_{t_2+k})$$

En forma general un proceso estocástico será **estacionario de n-ésimo orden** si:

$$F(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}) = F(Z_{t_1+k}, \dots, Z_{t_n+k}) \quad \text{II.4}$$

Un proceso estocástico es **estrictamente estacionario**, **estacionario en sentido amplio** o también llamado **completamente estacionario** si II.4 se cumple para cualquier n , esto quiere decir, que si tenemos un proceso estacionario de orden m ($n=m$), el proceso estocástico será estacionario para cualquier orden menor a m .

¿Qué importancia tiene que una serie temporal sea o no estacionaria?

A un proceso estocástico que es estacionario, lo rige una única distribución de probabilidad $p(Z_t)$ que será la misma para toda t , también puede ser escrita $p(Z)$. Una serie de tiempo estacionaria, cumple con características que son esenciales para poder aplicar un método de pronóstico y para encontrar por tanto, un modelo matemático adecuado para nuestros propósitos. En seguida definiremos un conjunto de funciones que tienen suma importancia en nuestro estudio.

La **Función de Media** de un proceso estocástico estacionario es **constante** y define los niveles en los cuales el proceso fluctúa:

$$\mu = E(Z_t) = \int_{-\infty}^{\infty} Zp(Z)dZ \quad \text{II.5}$$

La **Función de Varianza** también es constante en un proceso estacionario e indica qué tan esparcidos están los datos con respecto a la media:

$$\sigma_z^2 = E[(Z_t - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (Z - \mu)^2 p(Z)dZ \quad \text{II.6}$$

Para estimar la media y la varianza de una serie de tiempo se ocupan las fórmulas:

$$\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Z_t \quad \text{II.7}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (Z_t - \bar{Z})^2 \quad \text{II.8}$$

respectivamente. Esto es, la fórmula II.7 calcula la media aritmética de las observaciones de la serie de tiempo, que son sólo una realización del proceso estocástico del cual provienen (todas estas observaciones son una sola muestra del proceso); la fórmula II.8 calcula la varianza muestral de esos mismos valores.

La estacionaridad también implica que la distribución de probabilidad conjunta:

$$p(Z_{t_1}, Z_{t_2})$$

es la misma para toda t_1 y t_2 , que las separa un intervalo constante. Conocemos bien los coeficientes de covarianza (el cual nos da la relación de dependencia entre dos variables) y el de correlación (que es la estandarización del coeficiente de covarianza y arroja valores entre -1 y 1), solo que para una serie de tiempo, no serán dos variables las inferidas, sino la misma variable con un defase k en el período de tiempo (a este defase se le llama *lack* en inglés), es por esta razón que cambian ligeramente los nombres de ambos coeficientes a **Autocovarianza** y a **Autocorrelación**, respectivamente.

Función de Autocovarianza

$$\gamma_k(t_1, t_{1+k}) = E(Z_{t_1} - \mu)(Z_{t_{1+k}} - \mu) \quad \text{II.9}$$

Función de Autocorrelación

$$\rho_k(t_1, t_{1+k}) = \frac{E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(Z_t - \mu)^2]} \sqrt{E[(Z_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{\gamma(t_1, t_{1+k})}{\sigma_{t_1}^2 \sqrt{\sigma_{t_{1+k}}^2}}$$

$$\rho_k(t_1, t_{1+k}) = \frac{\gamma(t_1, t_{1+k})}{\sigma_z^2}$$

Y como para un proceso estacionario la varianza $\sigma_Z^2 = \gamma_0$, es constante para toda t, entonces:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{II.10}$$

Lo cual implica que $\rho_0 = 1$.

Para que un proceso sea **estrictamente estacionario**, las funciones anteriores deben cumplir con las siguientes características:

- ◆ La función de distribución es la misma para toda t

Por tanto se cumple lo siguiente:

- ◆ La función de media $\mu_t = \mu$ es constante y finita.
- ◆ Si $E(Z_t^2)$ es finito, entonces la varianza $\sigma_t^2 = \sigma^2$ para toda t, es decir, es constante y finita.
- ◆ Como

$$F(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = F(Z_{t_1+k}, Z_{t_2+k})$$

Para cualesquiera t_1, t_2 y k, entonces haciendo $t_1 = t - k$ y $t_2 = t$, tenemos:

$$\begin{aligned} \gamma(t_1, t_2) &= \gamma(t_1 + k, t_2 + k) & y & & \rho(t_1, t_2) &= \rho(t_1 + k, t_2 + k) \\ \gamma(t_1, t_2) &= \gamma(t - k, t) = \gamma(t, t + k) = \gamma_k & y & & \\ \rho(t_1, t_2) &= \rho(t - k, t) = \rho(t, t + k) = \rho_k \end{aligned}$$

Esto es, en un proceso estrictamente estacionario, con los dos primeros momentos (media y varianza) finitos, la autocovarianza y la autocorrelación entre Z_t y Z_{t+k} dependen solamente de la diferencia k entre los períodos de tiempo. En otras palabras, del defase entre los períodos t y t+k.

Hemos estudiado hasta el momento una estacionaridad estricta, sin embargo, en la realidad es prácticamente nula la posibilidad de encontrar una serie de tiempo que presente una función de distribución que se comporte de tal manera. Por esto, en el análisis de series de tiempo se prefiere usar un proceso **débilmente estacionario**.

Se dice que un proceso es **débilmente estacionario** de n-ésimo orden si sus momentos de orden menor o igual a n existen y no varían con respecto al tiempo. Un proceso será **débilmente estacionario de segundo orden** o también llamado **estacionario en sentido amplio**, si presenta media y varianza constantes y la covarianza y la correlación dependen únicamente de la diferencia k de período de tiempo.

Para aquellos que pudieran estar confundidos en esta parte de la lectura porque un proceso **estrictamente estacionario** y un proceso **débilmente estacionario de segundo orden** coinciden en esta última parte, es decir, sus primeros dos momentos (media y varianza) permanecen constantes a través del tiempo y además son finitos; debo decir para su tranquilidad, que un proceso **estrictamente estacionario** es también un proceso **débilmente estacionario de segundo orden**; sin embargo, un proceso débilmente estacionario **no es necesariamente** un proceso estrictamente estacionario.

II.3 FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA Y FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Profundizaremos un poco más en estas dos importantes funciones. Ya vimos que como funciones de k , la función de autocovarianza y la función de autocorrelación (a la que se conoce como **ACF**, que en inglés significa **autocorrelation function**) estiman la covarianza y la correlación entre Z_t y Z_{t+k} separadas por k períodos de tiempo.

Existe una matriz asociada a cada una de estas funciones, para un proceso estocástico **estacionario** de n observaciones se tendrá:

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} = \sigma_z^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_z^2 P$$

Una matriz de covarianza Γ_n simétrica y con elementos constantes en cualquiera de sus diagonales se llamará matriz de autocovarianza y su correspondiente matriz de correlación P_n , se conoce como matriz de autocorrelación. Ambas matrices son definidas positivas, esto significa que sus determinantes y sus menores principales son mayores que cero. En particular, para una matriz de autocorrelación de $n=2$ se satisface:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

asi que, $1 - \rho_1^2 > 0$,
 $-1 < \rho_1 < 1$

Y para $n=3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} -1 < \rho_1 < 1 \\ -1 < \rho_2 < 1 \\ -1 < \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} < 1 \end{aligned}$$

Estas funciones cumplen con las siguientes propiedades:

1. $\gamma_0 = \text{Var}(Z_t)$; por lo que $\rho_0=1$.
2. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$; $|\rho_k| \leq 1$
3. $\gamma_k = \gamma_{-k}$ y $\rho_k = \rho_{-k}$, para cualquier k .

Debido a que la diferencia entre Z_t y Z_{t+k} y entre Z_t y Z_{t-k} es la misma, las funciones de autocovarianza y autocorrelación son simétricas, es por esta razón que en su gráfica sólo aparecen sus partes positivas.

Ahora bien, para una serie de tiempo, de n observaciones Z_1, Z_2, \dots, Z_n , podremos sólo hacer **estimaciones** de las primeras $n-k$ autocovarianzas y las autocorrelaciones, esto es porque sólo tenemos una muestra de una realización que consta de n datos.

La autocovarianza se estimará con la fórmula:

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z}) \quad k=1, 2, \dots, K \quad \text{II.11}$$

donde la Z testada representa la media de la serie de tiempo.

La estimación para la autocorrelación la obtendremos a partir de:

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad \text{II.12}$$

donde
$$c_0 = \sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2$$

A manera de ejemplo, calcularemos ahora las autocorrelaciones de la serie de tiempo "producción total de oro" esta serie temporal fue obtenida del BIE (Banco de Información Económica) y la liga se encontrará en el Capítulo V.

Para facilidad, trabajaremos con los primeros 10 datos de la serie cuya media es 651.19 y varianza es 1989.1829 y con estos calcularemos las matrices de autocovarianza y autocorrelación:

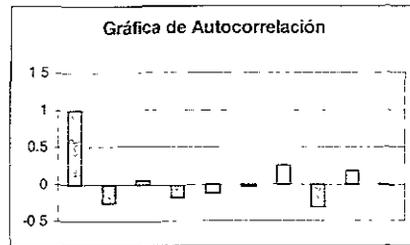
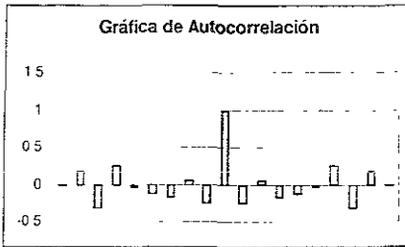
t	Valor Z_t	$Z_t - \mu$	C_k	r_k
1	639.9	-11.29		
2	722.7	71.51	-510.39181	-0.25658365
3	602.1	-49.09	120.54908	0.06060231
4	603.1	-48.09	-339.92073	-0.1708846
5	619.8	-31.39	-247.76594	-0.12455664
6	645.7	-5.49	-80.73766	-0.04058835
7	656.5	5.31	505.10684	0.2539268
8	721.1	69.91	-619.55737	-0.31146325
9	605.8	-45.39	365.96082	0.18397545
10	695.2	44.01	-49.68729	-0.02497874

Las matrices de autocovarianza y autocorrelación son:

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix}
 1989 & -5104 & 1205 & -3399 & -2478 & -807 & 5051 & -6195 & 3659 & -49.7 \\
 -5104 & 1989 & -5104 & 1205 & -3399 & -2478 & -807 & 5051 & 5051 & 3659 \\
 1205 & -5104 & 1989 & -5104 & 1205 & -3399 & -2478 & -807 & 5051 & 5051 \\
 -3399 & 1205 & -5104 & 1989 & -5104 & 1205 & -3399 & -2478 & -807 & 5051 \\
 -2478 & -3399 & 1205 & -5104 & 1989 & -5104 & 1205 & -3399 & -2478 & -807 \\
 -807 & -2478 & -3399 & 1205 & -5104 & 1989 & -5104 & 1205 & -3399 & -2478 \\
 5051 & -807 & -2478 & -3399 & 1205 & -5104 & 1989 & -5104 & 1205 & -3399 \\
 -6195 & 5051 & -807 & -2478 & -3399 & 1205 & -5104 & 1989 & -5104 & 1205 \\
 3659 & -6195 & 5051 & -807 & -2478 & -3399 & 1205 & -5104 & 1989 & -5104 \\
 -49.7 & 3659 & -6195 & 5051 & -807 & -2478 & -3399 & 1205 & -5104 & 1989
 \end{bmatrix}$$

$$P_n = \begin{bmatrix}
 1 & -.25 & .06 & -.17 & -.12 & -.04 & .25 & -.31 & .18 & -.02 \\
 -.25 & 1 & -.25 & .06 & -.17 & -.12 & -.04 & .25 & -.31 & .18 \\
 .06 & -.25 & 1 & -.25 & .06 & -.17 & -.12 & -.04 & .25 & -.31 \\
 -.17 & .06 & -.25 & 1 & -.25 & .06 & -.17 & -.12 & -.04 & .25 \\
 -.12 & -.17 & .06 & -.25 & 1 & -.25 & .06 & -.17 & -.12 & -.04 \\
 -.04 & -.12 & -.17 & .06 & -.25 & 1 & -.25 & .06 & -.17 & -.12 \\
 .25 & -.04 & -.12 & -.17 & .06 & -.25 & 1 & -.25 & .06 & -.17 \\
 -.31 & .25 & -.04 & -.12 & -.17 & .06 & -.25 & 1 & -.25 & .06 \\
 .18 & -.31 & .25 & -.04 & -.12 & -.17 & .06 & -.25 & 1 & -.25 \\
 -.02 & .18 & -.31 & .25 & -.04 & -.12 & -.17 & .06 & -.25 & 1
 \end{bmatrix}$$

Como se dijo anteriormente, la gráfica de la función de autocorrelación es simétrica, por lo que no es necesario graficar ambas partes, aquí presentamos las dos gráficas:



Por supuesto éste es sólo un ejemplo, no pueden usarse diez datos para calcular las autocorrelaciones, Box y Jenkins sugieren un mínimo de 50 observaciones, pues son las requeridas para obtener un buen nivel de confianza en este estudio.

II.4 FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN PARCIAL

Otro elemento de gran utilidad en la identificación de los modelos de pronóstico es la Función de Autocorrelación Parcial o también llamada simplemente **PACF** (que son las siglas en inglés de Partial Autocorrelation Function).

Supongamos que se ha identificado un modelo de pronóstico de orden $(k-1)$, la PACF corrobora que el modelo ajustado sea de ese orden $(k-1)$ y no de orden (k) . Para un modelo de orden $k-1$ se han utilizado las observaciones $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-(k-1)}$. La PACF mide el efecto de incluir Z_{t-k} en el modelo.

Entonces ϕ_{kk} es el coeficiente que usaremos para medir la PACF: Consideremos un modelo de regresión donde la variable dependiente Z_{t-k} de un proceso estacionario con media cero es regresada con un desfase de k variables, estas son: $Z_{t+k-1}, Z_{t+k-2}, \dots, Z_t$. El modelo sería:

$$Z_{t-k} = \phi_{k1}Z_{t+k-1} + \phi_{k2}Z_{t+k-2} + \dots + \phi_{kk}Z_t + e_{t-k}$$

Donde ϕ_{ki} es el i -ésimo parámetro de regresión y e_{t-k} es un error aleatorio. Si multiplicamos ambos lados del modelo anterior por Z_{t+k-j} obtendremos:

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\gamma_{j-k}$$

Y de aquí

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_{j-k}$$

Para $j=1,2,\dots,k$, obtenemos así el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 &= \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ &\vdots \\ \rho_k &= \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_0 \end{aligned}$$

De donde:

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Generalizando:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

II.13

Estas operaciones son sustituidas al calcular como mejor opción la Función de Autocorrelación Parcial Muestral donde se obtienen los estimadores de los parámetros de las funciones.

El siguiente es un proceso recursivo que comienza al hacer $\hat{\phi}_{11} = \rho_1$ para calcular $\hat{\phi}_{kk}$ de aquí:

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{\rho_{k+1} - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{kj} \rho_{k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{kj} \rho_j}$$

y

$$\hat{\phi}_{k+1,j} = \hat{\phi}_{kj} - \hat{\phi}_{k+1,k+1} \hat{\phi}_{k,k+1-j} \quad \text{para } j=1, \dots, k$$

II.5 PROCESO DE RUIDO BLANCO

A un proceso $\{\varepsilon_t\}$ de variables aleatorias independientes, las cuales siguen una distribución de probabilidad normal, la media del proceso es $\mu=0$, la varianza es constante, $\text{Var}(\varepsilon_t)=\sigma^2$ y la autocovarianza $\gamma_k=\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k})=0$ para cualquier k diferente de cero se le conoce como **RUIDO BLANCO**, el cual es un proceso estacionario.

El proceso de ruido blanco puede ser visto como una serie de choques, consiste en una secuencia de variables aleatorias sin correlación alguna.

De este hecho se sigue que su función de autocovarianza es:

$$\gamma_k = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}] = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{II.14}$$

Por consiguiente la función de autocovarianza es:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{II.15}$$

Este ruido blanco es la representación de los factores que alteran el comportamiento de un modelo matemático, es la razón de que el patrón básico de los eventos estudiados se altere. Su comportamiento aleatorio modifica el proceso, inserta la incertidumbre de la que tanto hemos hablado.

El ruido blanco, como se verá más adelante, tiene un papel muy importante en el análisis de series de tiempo.

II.6 PROPIEDADES ESPECTRALES DE LAS SERIES DE TIEMPO

Una serie de tiempo puede ser estudiada como una combinación lineal de funciones seno, a través de la descomposición de la serie en sus funciones armónicas y utilizando la transformada de Fourier podemos obtener una función matemática que represente a la serie de tiempo.

La gráfica de una función trigonométrica se compone de los siguientes elementos:

- **Longitud de período.** Distancia de cresta a cresta.
- **Frecuencia.** Es el número de períodos completos en una unidad de tiempo. Es el recíproco de la longitud de período.
- **Amplitud.** Altura máxima alcanzada por la onda senoidal.
- **Fase.** Desplazamiento horizontal con respecto al origen.

Una serie de tiempo es una función trigonométrica, la cual puede ser descompuesta en:

$$\begin{aligned} & (N-1)/2 \text{ si } N \text{ es impar} \\ & (N/2) \text{ si } N \text{ es par} \end{aligned}$$

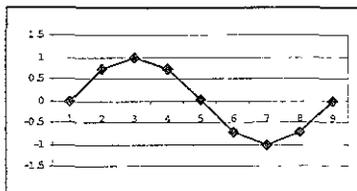
frecuencias. Este número de frecuencias es también el número de funciones seno (funciones armónicas) que pueden ser obtenidas a partir de la serie de tiempo dada.

Es necesario un breve repaso de las componentes de las funciones trigonométricas y la transformada de Fourier, para poder entender más fácilmente dos herramientas que sirven para determinar si una serie de tiempo presenta un comportamiento cíclico:

Supongamos una serie temporal con $N=9$ observaciones, entonces partiendo de la fórmula

$$Y = \text{sen } \theta$$

Cuya gráfica sería más o menos:



Puede ser modificada en su amplitud, multiplicando por una constante A , así la altura de la cresta aumentaría o disminuiría, la fórmula sería ahora:

$$Y = A \text{sen } \theta$$

Para desplazar la función, modificaremos la fase sumando o restando un ángulo ϕ :

$$Y = \text{sen}(\theta + \phi)$$

Y al multiplicar el ángulo por

$$\frac{ft}{N}$$

La frecuencia y la longitud de período serán aumentadas o disminuidas, porque

tratamos de ajustar las $\frac{f}{N}$ frecuencias armónicas de la serie de tiempo. Entonces la función quedará:

$$Y = A \text{sen} \left[\left(\frac{ft}{N} \right) \theta + \phi \right] \quad \text{II.16}$$

Y dependiendo de los valores dados, la función y su gráfica presentarán resultados diferentes al original.

Es a partir de II.10 que se hacen combinaciones lineales de las funciones armónicas de la serie de tiempo para acercar el comportamiento de dicha serie de tiempo a una función trigonométrica que pase por cada uno de los N puntos que contiene la serie. Esta combinación lineal se realiza a partir de:

$$Y_t = \sum_{k=0}^{N/2} A_k \text{sen} \left\{ \frac{kt}{N} 2\pi + \phi_k \right\} \quad \text{II.17}$$

Donde:

$[N/2]$ = el mayor entero entre $(N-1)/2$ y $(N/2)$

A_k = es la amplitud de la frecuencia armónica f_k .

F_k = es la k -ésima armónica, dada por k/N

ϕ_k = es la fase en la frecuencia f_k

Con la ecuación II.17 se calculan valores para las amplitudes y las fases para cada una de las frecuencias armónicas, estos valores se calculan empleando mínimos cuadrados, aquí surge el problema de que el término ϕ_k , que son las fases de la frecuencia k , pertenece al argumento del seno, y entonces tendríamos que resolver ecuaciones no lineales, esto se soluciona utilizando la identidad trigonométrica:

tomando
$$\text{sen}(u + v) = \text{sen } u \cos v + \cos u \text{sen } v$$

$$u = \frac{kt2\pi}{N} \quad v = \phi_k \quad \alpha_k = A_k \text{sen } \phi_k \quad \beta_k = A_k \cos \phi_k$$

y sustituyendo en II.17:

$$Y_t = \sum_{k=0}^{N/2} \left\{ \alpha_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{N} \right) + \beta_k \text{sen} \left(\frac{2\pi kt}{N} \right) \right\} \quad \text{II.18}$$

Como bien sabemos, la ecuación 11.18 es la serie de Fourier y a α_k y β_k se les conoce como coeficientes de Fourier, que son fáciles de calcular por mínimos cuadrados. No nos detendremos en estudiar la serie de Fourier en este trabajo.

En la práctica, encontraremos que algunas series de tiempo presentan estacionalidad, esto es, ciclos que se repiten después de un número determinado de períodos de tiempo; es con la serie de Fourier que detectaremos las frecuencias que destacan en una serie de datos, es decir, después de cuantos períodos de tiempo se presenta el mismo comportamiento.

Para lograr esto, existen el **espectro lineal** y el **periodograma**.

El **espectro lineal** es la gráfica de las frecuencias armónicas contra sus amplitudes, donde la frecuencia cero (f_0) es simplemente el desplazamiento vertical que presenta la serie. La frecuencia que más destaque dará la longitud de período, es decir, cada cuantos datos se presenta el mismo comportamiento. La longitud de período es:

$$\text{longitud de período} = \frac{[N/2]}{k} \quad 11.19$$

Donde $[N/2]$ es el número de frecuencias que fueron obtenidas de los N datos y k es el número de frecuencias encontradas.

El **periodograma** hace prácticamente lo mismo que el espectro lineal, pero de manera exagerada, utilizando:

$$I(f_k) = \begin{cases} Na^2 & \text{si } k = 0 \\ \frac{N}{2} (a_k^2 + b_k^2) & \text{si } k = 1, \dots, \left[\frac{N-1}{2} \right] \\ Na_N^2 & \text{si } k = \frac{N}{2} \text{ y } N \text{ es par} \end{cases} \quad 11.20$$

Nuevamente, se tiene que hacer la gráfica de las frecuencias armónicas contra el resultado de $I(f_k)$.

CAPÍTULO III SERIES DE TIEMPO

En el presente capítulo se hablará de las series de tiempo, su obtención y representación algebraica y gráfica. También se presentan algunos ejemplos de series de tiempo cuya generación fue hecha con el paquete STATGRAPHICS (se dedica un capítulo al software específico más adelante).

III.1 CONCEPTO

Una **Serie de Tiempo**, como se dijo en el Capítulo I, es una colección de datos (a los cuales llamaremos indistintamente observaciones u ocurrencias) con respecto a una variable, ordenados casi por lo general cronológicamente, es decir, con respecto al tiempo en intervalos de tiempo iguales; pero también pueden ser ordenados en otro tipo de dimensión, como espacio, por ejemplo. Estos períodos de tiempo para nuestros propósitos serán discretos.

En el análisis de series de tiempo, existen métodos que estudian las observaciones únicamente de la variable a ser pronosticada, pero también existen métodos causales que estudian dos o más series de tiempo para encontrar correlaciones entre ellas y por consiguiente, causas posibles del fenómeno a estudiar.

A cada serie de tiempo se le llama *realización* porque si pudiéramos repetir, como en un laboratorio, el proceso del cual se tomaron las observaciones, los datos de la nueva serie de tiempo serían diferentes, o sea, sería otra *realización del proceso*. Como no podemos regresar el tiempo para poder aplicar este proceso, cada serie de tiempo es una única realización.

Las series de tiempo se obtienen y ocupan en una gran variedad de campos de las ciencias:

- ♦ **Agricultura.** Producción anual, precios mensuales, cantidades trimestrales de fertilizantes, etc.
- ♦ **Economía.** Índices y precios semanales de títulos, Producto Interno Bruto (PIB) mensual, Índice de Precios y Cotizaciones en forma mensual, etc.
- ♦ **Física.** Señales eléctricas, sonoras y de voltajes por segundo.
- ♦ **Medicina.** Casos mensuales de cáncer de próstata, casos dados de alta o defunciones provocadas por cirugía o por médico, etc.

Y una infinidad de campos en los que las series de tiempo son de gran utilidad en el estudio de procesos.

III.2 UTILIDAD DE LAS SERIES DE TIEMPO

Ya hemos dicho que los pronósticos son especialmente ocupados para planear actividades y políticas de trabajo, pero las series de tiempo tienen más objetivos:

- ◆ **DESCRIPCIÓN** de mecanismos generales que ayuden a visualizarlos y por tanto a comprenderlos.
- ◆ **EXPLICACIÓN** a partir de un análisis causa-efecto se puede determinar cómo afectan los cambios del medio en los procesos o fenómenos a estudiar.
- ◆ **PRONÓSTICO** de cambios en el comportamiento de los procesos específicos de interés.
- ◆ **CONTROL** y modificación de los diferentes procesos en forma conveniente a nuestras intenciones.
- ◆ **OPTIMIZACIÓN** de recursos, maximización de ganancias y minimización de pérdidas.

III.3 OBTENCIÓN DE LAS SERIES TEMPORALES

Como se ha visto, uno de los objetivos de recolectar las series de tiempo, es desarrollar y obtener un modelo que ayude a pronosticar valores para una variable dada. Se ha mencionado ya, que la información tiene vital importancia en el correcto desarrollo del análisis, por lo tanto, el éxito del estudio se cimienta en una buena recolección y selección de los datos, de los que existen diferentes maneras de obtenerlos, sólo que pueden ser unas más confiables, complicadas o de alto costo que otras.

Lo ideal sería que la variable a ser pronosticada fuera ya conocida y bien específica, pero no siempre sucede esto, por lo general el primer paso que se debe dar es identificar qué variable es la más útil y necesaria para realizar un buen pronóstico que ayude a la planeación de políticas de trabajo; la información que se requiere sobre ésta debe ser de fácil acceso o por lo menos factible de recabar. Como se ha visto antes, se debe tener bien claro qué es lo que queremos pronosticar y cuál es el objetivo de dicho pronóstico para evitar trabajar con información menor a la que necesitamos o una complicación del modelo en caso de que la información no sea bien depurada.

El tipo de estudio para el cual se requiere la información afecta de manera directa en el proceso de selección y en el costo de obtención, por ejemplo, si nuestro análisis se requiere para la planeación de políticas de mercadotecnia de la empresa, tendremos que observar y analizar actividades y eventos externos a la compañía, lo cual puede significar más tiempo y mayor costo al momento de conseguir la información; en cambio, si nuestro objetivo es el control de procesos internos, la información se puede obtener de manera más sencilla, directa y quizá sólo tengamos que echar mano del sistema informático de la empresa.

La serie de tiempo puede ser seleccionada de maneras diferentes de acuerdo a:

Período de tiempo

La información que debemos recabar debe ser seleccionada de acuerdo al rango de pronóstico deseado (largo, mediano o corto plazo), así la información puede ser tomada en períodos de tiempo anuales, la cual se utiliza para hacer pronósticos a largo plazo; semestrales, cuatrimestrales, trimestrales, mensuales, semanales, diarios o hasta por hora o cualquier otro período de tiempo requerido por el análisis. Además, de acuerdo a la simplicidad deseada del estudio (principio de parsimonia), se deben tener datos que resuman de manera correcta el comportamiento que se observa, esto es, a una empresa que quiera hacer un estudio de sus volúmenes de ventas, le son más útiles datos mensuales o semanales. Siempre dependiendo de la aplicación del pronóstico.

Nivel de detalle requerido

Este detalle, es decir, que tan exacto debe ser el pronóstico, tiene que ver también con el período de tiempo seleccionado, nuevamente sujeto al objetivo del pronóstico; si queremos pronosticar un sistema completo o dividirlo en sus subsistemas; volviendo al ejemplo de las ventas, podríamos estudiar las ventas globales o por zona geográfica. Esto significa quizás más tiempo para recabar la información, pero al mismo tiempo estaríamos ahorrándolo, porque puede ser que el pronóstico global sea vago o insuficiente y necesitaríamos que volver a empezar por recabar la información, ahora por zona geográfica específica. Siempre es mejor tener información detallada.

Frecuencia con que los datos se requieren

La frecuencia de los datos será necesaria de acuerdo con el período de tiempo seleccionado para hacer un pronóstico, si se tienen datos anuales, por más que se intente, no se podrá obtener un pronóstico mensual. Si sabemos con qué frecuencia se va a requerir la información, podremos recabarla de manera más eficiente, eficaz y sobre todo será realmente útil para nuestro propósito.

Existen básicamente tres fuentes para obtener la información: de registros existentes en sistemas de la compañía, de la fuente original y de datos publicados.

Registros existentes en la compañía

Es la fuente de más fácil acceso y menos costosa. Uno puede determinar su precisión y se pueden acoplar a las necesidades del estudio. Un problema que podemos encontrar es que el sistema de información sea inflexible y a consecuencia de esto, la obtención de los datos requeridos para el estudio se complique a pesar de que los datos necesarios se encuentren en la base del

sistema. El costo de obtener la información de esta manera es únicamente el acceso a los datos.

Fuente original

Cuando no existen los datos necesarios en el sistema administrativo de la empresa, se hace necesario recurrir a otra forma de recolección de datos que es más costosa: la recolección de información directamente de la fuente original.

Para formar una serie de tiempo a partir de los datos originales, será necesario establecer el detalle de la recolección de los datos para hacer un procedimiento que periódicamente almacene las nuevas observaciones, esto puede hacerse manualmente o programarlo en una computadora. Esta opción es mucho más costosa y difícil de iniciar porque requiere un grupo de trabajo especial que se dedique a coordinar, planear y programar las actividades dirigidas a la obtención de datos. Esta forma de obtener la serie de tiempo, nos dará la posibilidad de adaptar los datos a las necesidades específicas del estudio.

Datos publicados

Otra manera de obtener los datos necesarios es buscar la información en publicaciones como periódicos, revistas especializadas o a través de la red Internet si se tiene acceso a ella; otra posibilidad es comprarla a organismos que se dediquen a reunir información estadística (como el INEGI), el costo de obtener la información necesaria de esta manera puede variar desde sólo adquirir y revisar el periódico hasta varios miles de pesos si tenemos que comprarla.

III.4 UN TIPO ESPECIAL DE SERIES DE TIEMPO: LAS SERIES CON FLUCTUACIONES ESTACIONALES

Una serie de tiempo **estacional** es la representación de cómo modifican los diferentes estados en el tiempo a nuestros procesos, por ejemplo, hablando de cómo las estaciones del año afectan nuestro comportamiento y nuestro quehacer económico, si tomamos en cuenta que en la época navideña se incrementan las ventas de juguetes, de ropa invernal, de árboles, de esferas, etc. entonces necesitaremos suficiente mercancía en inventario, pero no más de la necesaria para no correr el riesgo de sobrantes, que una vez fuera de temporada pueden pasar de moda y no venderse. El próximo invierno, se comportará de manera similar y el del año consecutivo y todos los demás, son ciclos que se repiten todo el tiempo, de acuerdo a la época o fase en la que se encuentre el proceso.

El transporte colectivo Metro es ejemplo de comportamiento estacional y es afectado de diversas maneras, por citar sólo unos ejemplos:

1. Horarios de trabajo (entre 8:00 y 18:00 hrs.), entrada y salida de las escuelas (entre 8:00 y 13:00 hrs.), horarios de comida (entre 13:00 y 15:00 hrs.), etc.
2. Días laborales que generalmente son de lunes a viernes.

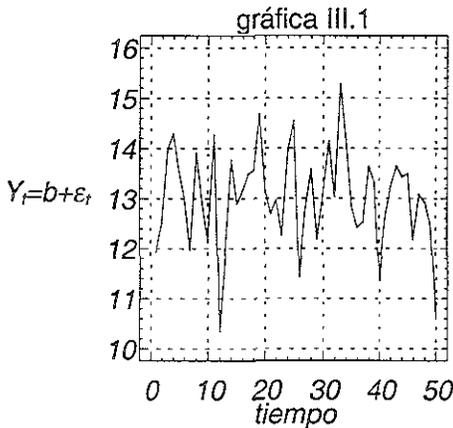
Todo mundo tiene diversos horarios, pero los más comunes son los antes mencionados, es por esta razón que existen las famosas "horas pico" que se caracterizan por los empujones, pellizcos, apretones y todo lo derivado de la saturación del servicio. Además, de lunes a viernes el metro se usa más, pues la mayoría de los mexicanos descansamos sábados y domingos. Todo esto provoca que el sistema se comporte de manera estacional.

III.5 REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA Y GRÁFICA DE LAS SERIES DE TIEMPO

Los modelos que representan a las series temporales son algebraicos. Por ejemplo, para representar una muestra de observaciones aleatorias que sigan alguna distribución de probabilidad dada y la media de esta distribución no cambia con respecto al tiempo, un modelo apropiado sería:

$$Y_t = b + \epsilon_t \tag{III.1}$$

Donde Y_t es la observación en el período t , b es la media de la distribución de probabilidad y ϵ_t es el componente aleatorio en el momento t , comúnmente llamado **ruido**, si este componente aleatorio sigue un comportamiento de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con distribución de probabilidad Normal, media cero y varianza σ^2 se conoce como **ruido blanco**. A continuación se muestra una gráfica de la ecuación III.1 con $b = 13$ y los valores de ϵ_t son valores aleatorios generados con STATGRAPHICS.



Otros ejemplos similares al anterior serían por ejemplo:

1)

$$Y_t = b_1 + b_2t + \epsilon_t \tag{III.2}$$

Donde b_1 y b_2 son constantes, b_2 representa un cambio en la demanda promedio de un período de tiempo a otro.

2) Para representar una variación cíclica usaríamos una ecuación como:

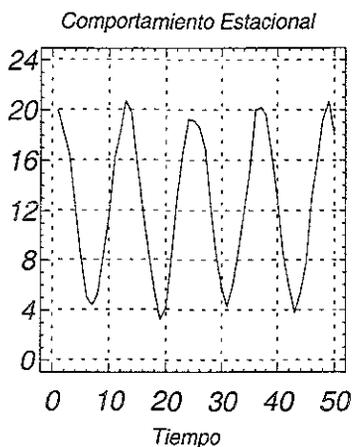
$$Y_t = b_1 + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{12} + b_3 \operatorname{cos} \frac{2\pi t}{12} + \varepsilon \tag{III.3.1}$$

pero de manera más sencilla:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-12} \tag{III.3.2}$$

Que presentará un ciclo de doce períodos de tiempo.

Nuevamente generando valores aleatorios y desarrollando la fórmula III.3.1 en EXCEL y graficando con STATGRAPHICS obtenemos la siguiente gráfica:



Vemos claramente un comportamiento repetido que, como veremos más adelante, caracteriza a las series de tiempo estacionales.

III.5.1 REPRESENTACIÓN CON MODELOS AUTORREGRESIVOS Y DE MEDIAS MÓVILES

Existen diferentes clases de modelos para la representación de las series de tiempo, los cuales pueden ser "simplificados" aplicando un operador de "salto hacia atrás".

Consideremos una serie de tiempo en la que las observaciones se representan como una combinación lineal de variables aleatorias, $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \dots$, las cuales siguen un proceso de **ruido blanco**.

Esta combinación lineal de variables aleatorias $\{\varepsilon_t\}$ se escribe como:

$$Z_t = \mu + \varphi_0 \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots \quad \text{III.4}$$

o como

$$Z_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}$$

donde φ_j son constantes y μ es la constante que determina el nivel de proceso. Si aplicamos el operador de **salto hacia atrás** que se define como: $B\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$, esto implica que $B^j \varepsilon_t = \varepsilon_{t-j}$.

Usando esta notación III.4 puede ser escrita como:

$$Z_t = \mu + (\varphi_0 B^0 + \varphi_1 B^1 + \varphi_2 B^2 + \dots) \varepsilon_t$$

o como

$$Z_t = \mu + \Psi(B)\varepsilon_t$$

donde $\Psi(B) = \varphi_0 B^0 + \varphi_1 B^1 + \varphi_2 B^2 + \dots$, y φ_0 es uno.

La ecuación III.4 es llamada **Filtro Lineal** o también se conoce como ecuación de **choque aleatorio**. Es claro que las observaciones en la serie $\{Z_t\}$ son dependientes, porque cada una se determina a partir de los mismos valores anteriores de $\{\varepsilon_t\}$.

A partir del modelo de filtro lineal, podemos decir que el modelo de una serie de tiempo **es una función que transforma un proceso de ruido blanco en una serie de tiempo**. Es posible generar diferentes modelos de series de tiempo a partir de III.4. **Box y Jenkins** unificaron y extendieron estos modelos y desarrollaron una metodología para su uso. Los modelos que se derivan del filtro lineal son llamados modelos de Box-Jenkins. Estos modelos son capaces de representar series de tiempo estacionarias y no estacionarias. Si una serie de tiempo es estacionaria, quiere decir que fluctúa aleatoriamente alrededor de una media constante; si hablamos de una serie temporal no estacionaria, implica que no tiene una media con esa misma característica. En general, si la secuencia de $\{\Psi_j\}$ en el filtro lineal es finita o infinita y convergente, la serie de tiempo $\{Z_t\}$ es estacionaria con media μ . Por el contrario, si es infinita y diverge, la serie de tiempo es no estacionaria, y μ es solo un punto de referencia para el origen del proceso.

Una característica que deben de cumplir los modelos de series de tiempo, es la **parsimonia**, esto es, los modelos deben permanecer lo más simples posible. Por esta razón, el modelo de filtro lineal no sería un modelo muy útil, pues tiene un número de parámetros Ψ indefinido.

III.5.1.1 PROCESO AUTORREGRESIVO

Un caso especial del filtro lineal es el modelo

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t \quad \text{III.5}$$

La ecuación III.5 es llamada proceso autorregresivo debido a su similitud con la regresión, pues la observación Z_t es "regresada" de las realizaciones previas $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}$ de la misma serie de tiempo. El proceso contiene p parámetros desconocidos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ y como resultado la ecuación III.5 se conoce como proceso autorregresivo de orden p , **AR(p)**.

El proceso **AR(p)** se puede escribir con el operador de salto atrás como:

$$Z_t = (\phi_1 B^1 + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p) Z_t + \varepsilon_t$$

o

$$(1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Z_t = \varepsilon_t$$

y haciendo

$$\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

finalmente escribimos III.5 como

$$\Phi_p(B) Z_t = \varepsilon_t \quad \text{III.6}$$

El modelo autorregresivo puede ser usado para representar series de tiempo estacionarias y no estacionarias. Si las raíces del polinomio $\Phi_p(B)=0$ se encuentran fuera del círculo unitario ($|\Phi_p|>1$), el proceso es estacionario.

Esta condición se deriva de que $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j$ debe converger para que el proceso $\{Z_t\}$ sea estacionario.

PROCESO AUTORREGRESIVO DE PRIMER ORDEN

Si $p=1$, entonces III.5 es un modelo autorregresivo de primer orden, un **AR(1)**:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{III.7}$$

El proceso **AR(1)** es llamado proceso Markoviano porque la observación en el tiempo t depende sólo de la observación en el tiempo $t-1$. Para que el proceso sea estacionario, se requiere que las raíces de $\Phi_1(B)=1-\phi_1 B^1=0$ se encuentren fuera del círculo unitario $|\Phi_p|>1$.

Además, la media, la varianza y la autocovarianza del proceso **AR(1)** deben cumplir ciertas características a las que llamaremos **condiciones de estacionaridad**, se pueden determinar como:

MEDIA. La media debe ser constante:

$$\begin{aligned}
 \mu &\equiv E(Z_t) = E(\xi + \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t) \\
 &= \xi + \phi_1 E(Z_{t-1}) \\
 &= \xi + \phi_1 [\mu + \xi + \phi_1 E(Z_{t-2})] \\
 &= \xi \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \\
 &= \frac{\xi}{1 - \phi_1}
 \end{aligned}
 \tag{III.8}$$

VARIANZA Y AUTOCOVARIANZA

Estas dos funciones para el proceso **AR(1)** son:

$$\gamma_k = \phi_1^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}
 \tag{III.9}$$

Para $k=0,1,\dots$

la condición de estacionaridad queda como: $(-1 < \phi_1 < 1)$

La autocorrelación se encuentra como:

$$\rho_k = \phi_1^k
 \tag{III.10}$$

La función de autocorrelación del proceso **AR(1)** decrece exponencialmente cuando ϕ_1 es positiva, pero cuando ϕ_1 es negativa decrece en forma exponencial alternando de signo.

FUNCIÓN DE MEMORIA

A partir de la ecuación III.4 de choque aleatorio, se supondría que en **AR(1)** se mantiene la influencia del infinito de sus componentes, pero si el proceso es estacionario, entonces $|\phi_1| < 1$ y el efecto se disipa cuando t tiende a infinito.

La función de memoria es el resultado del coeficiente ε_{t-k} , donde k es el coeficiente de memoria con retraso.

PROCESO AUTORREGRESIVO DE SEGUNDO ORDEN

Un **AR(2)**, es decir, un modelo autorregresivo de orden $p=2$ se expresa como

$$Z_t = \xi + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t
 \tag{III.11}$$

Para que el proceso **AR(2)** sea estacionario, se requiere que las raíces del polinomio $(1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2) = 0$, se encuentren fuera del círculo unitario. Esto es, se requiere que ϕ_1 y ϕ_2 cumplan con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1 \\ |\phi_2| &< 1 \end{aligned} \quad \text{III.12}$$

partiendo de las condiciones anteriores la media de un proceso **AR(2)** será:

$$\mu \equiv E(Z_t) = \frac{\xi}{1 - \phi_1 - \phi_2} \quad \text{III.13}$$

La varianza del proceso es:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t) &= \gamma_0 = E(Z_t Z_t) \\ &= E[(\phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t) Z_t] \\ &= \phi_1 E(Z_{t-1} Z_t) + \phi_2 E(Z_{t-2} Z_t) + E(\varepsilon_t Z_t) \\ &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2 \\ \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

La covarianza se obtiene del cociente

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \text{ donde } \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \sigma^2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{\phi_1 \gamma_{k-1}}{\gamma_0} + \frac{\phi_2 \gamma_{k-2}}{\gamma_0} \\ &= \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \\ \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2, \text{ por tanto} \\ \rho_1 &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \\ \rho_2 &= \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 \end{aligned} \quad \text{III.13}$$

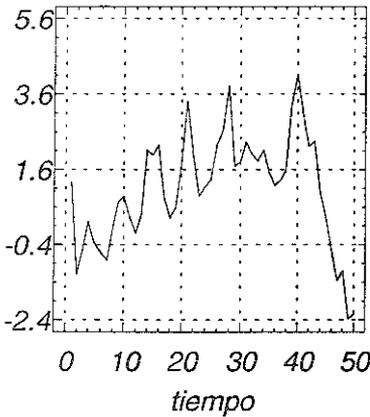
en general, para un proceso **AR(p)** tenemos:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \text{ para } k > 0$$

El conjunto de p ecuaciones III.13 se llaman **ECUACIONES DE YULE-WALKER**. Por las cuales pueden calcularse las autocorrelaciones; si la serie de tiempo es estacionaria, serán decrecientes infinitas.

A continuación se presentan las gráficas de una simulación de un modelo AR(1) con $\phi_1=0.8596$.

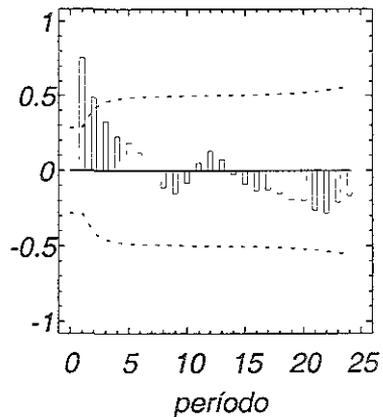
Modelo AR(1) $\phi=0.8596$



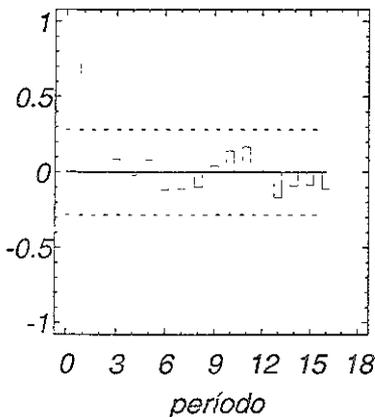
En la gráfica de la serie de tiempo se puede ver cómo los datos se comportan de manera homogénea. La tendencia aparente de la gráfica se puede refutar al observar la gráfica siguiente:

La función de autocorrelación decrece rápidamente, esto indica que la serie de datos es estacionaria. Como es un proceso AR(1), en la gráfica siguiente, la función de autocorrelación parcial (PACF) se trunca en uno.

Función de Autocorrelación



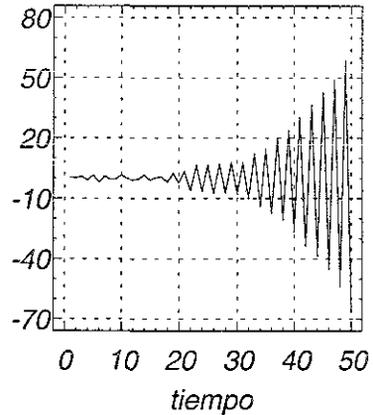
Función de Autocorrelación Parcial



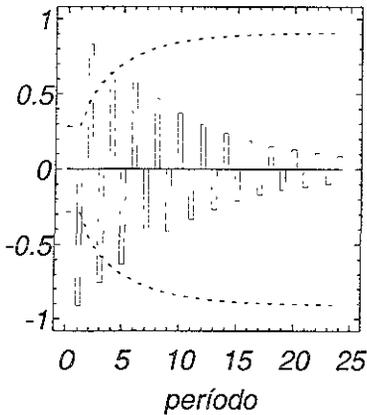
Las siguientes gráficas pertenecen a una simulación de un proceso AR(1) con $\phi_1=-1.09$, esto es, es un modelo no estacionario.

En la gráfica se aprecia claramente una varianza creciente, lo cual indica una serie de datos no estacionaria.

Modelo AR(1) con $\phi=-1.09$

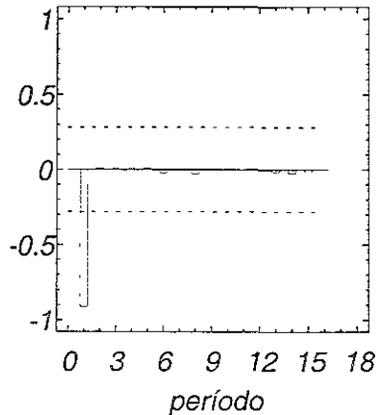


Función de Autocorrelación



La función de Autocorrelación de la serie decrece de manera lenta, otro indicio de la no estacionaridad.

Función de Autocorrelación Parcial



La función de Autocorrelación Parcial Se trunca en uno.

III.5.1.2 PROCESO DE MEDIAS MÓVILES

Consideremos el caso especial de III.4 en que los primeros q valores de ψ son diferentes de cero. El proceso

$$Z_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad \text{III.14}$$

Donde el conjunto θ describe el efecto del choque aleatorio anterior a Z_t . El modelo III.14 se llama **proceso de medias móviles** de orden q , **MA(q)**. Utilizando el operador de salto hacia atrás este proceso sería:

$$\begin{aligned} Z_t &= (1 - \theta_1 B^1 - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \\ &= \Theta_q(B) \varepsilon_t \end{aligned} \quad \text{III.15}$$

La media de un proceso de medias móviles será:

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= (\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) \\ &= \mu \end{aligned} \quad \text{III.16}$$

La varianza de un proceso MA(q) es

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= V(Z_t) = V(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2 \end{aligned} \quad \text{III.17}$$

La función de autocovarianza para un defase k :

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-k-2} - \theta_q \varepsilon_{t-k-q})] \\ \gamma_k &= \begin{cases} \sigma^2 (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_q \theta_{k+q}) & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \end{aligned} \quad \text{III.18}$$

Y finalmente la función de correlación para un proceso MA(q) es:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_q \theta_{k+q}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad \text{III.19}$$

La autocorrelación de un proceso MA(q) consiste en líneas en los tiempos $1, 2, \dots, q$. La función de autocorrelación de un proceso MA(q) se corta en el tiempo q .

PROCESO DE MEDIAS MÓVILES DE PRIMER ORDEN, MA(1)

Un modelo MA(1) se representa entonces como:

$$Z_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad \text{III.20}$$

La media y la varianza no tienen ninguna restricción y la autocorrelación es constante y sólo depende de k :

$$E(Z_t) = \mu$$

$$Var(Z_t) = \sigma^2(1 + \theta_1^2)$$

$$\rho_k = \begin{cases} -\theta & k = 1 \\ 1 - \theta_1^2 & \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

no existen restricciones de estacionaridad sobre θ_1 , es decir, el proceso es estacionario para cualquier valor de θ_1 y la función de autocorrelación se corta en el período 1.

INVERTIBILIDAD

Analicemos el proceso **MA(1)**

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Despejando ε_t , la ecuación es $= (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t$ invertible si $|\theta_1| < 1$, o sea, si:

III.21

$\varepsilon_t = (1 - \theta_1 B)^{-1} Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} (\theta_1^j B^j) Z_t$ Converge al círculo unitario, esto indica que la raíz $B = \theta_1^{-1}$ de $(1 - \theta_1 B) = 0$ se encuentra fuera de dicho círculo.

Si desarrollamos la suma de la última parte de la ecuación III.21 encontramos:

Que es fácilmente $\varepsilon_t = (1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \dots) Z_t$ reconocible como un proceso autorregresivo de orden infinito con $\phi_1 = -\theta_1^{-1}$. Hemos invertido el proceso **MA(1)** en uno **AR(p)**.

Así, los parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ deben cumplir, para asegurar la invertibilidad de un proceso **MA(q)** a uno **AR(p)**, que las raíces del polinomio $\Theta_q(B) = 0$, se encuentren fuera del círculo unitario. Por ejemplo, para el proceso **MA(2)** se tiene:

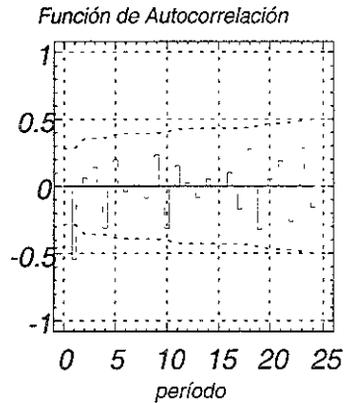
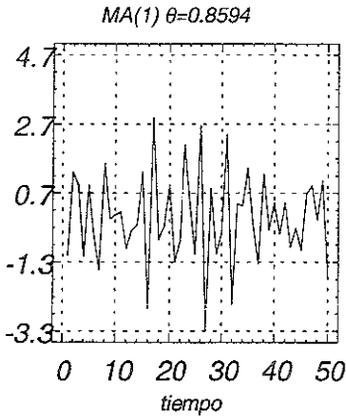
$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &< 1 \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1 \\ |\theta_2| &< 1 \end{aligned} \quad \text{III.22}$$

Las condiciones para los parámetros de un proceso **MA(q)** son las mismas para un proceso **AR(q)**, regresemos a las ecuaciones III.12 y comparémoslas con las ecuaciones III.22. Al igual que un proceso de medias móviles de orden infinito se puede invertir a un proceso autorregresivo finito, un proceso autorregresivo de orden infinito se puede llevar a un proceso de medias móviles de orden finito.

Subrayaremos dos puntos importantes:

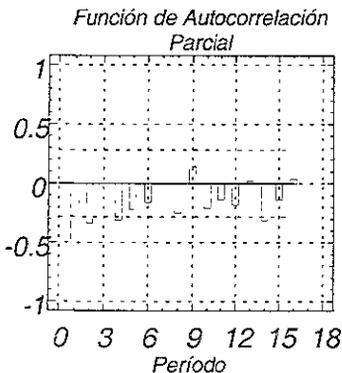
- ♦ Un proceso **MA(q)** es estacionario sin importar los valores de las θ_i , pero es invertible sólo si las raíces de $\Theta_q(B)=0$ están fuera del círculo de radio uno.
- ♦ Un proceso **AR(p)** es estacionario sólo si las raíces de $\Theta_q(B)=0$ se encuentran fuera del círculo unitario y será invertible para cualquier valor de ϕ .

Se hizo una simulación de un proceso de medias móviles MA(1) para poder mostrar aquí el comportamiento de la serie de tiempo, su función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial:



La serie de tiempo no presenta tendencia ni varianza, es homoscedástica.

La ACF se corta en 1, primer indicio de un Modelo MA(1).



La PACF es decreciente, esto confirma que el modelo es un MA(1).

III.5.1.3 PROCESO AUTORREGRESIVO DE MEDIAS MÓVILES

Al construir un modelo, se desea que describa y conserve las propiedades de la serie de tiempo extraída del proceso real, pero se debe procurar que cumpla con ser **parsimonioso**, es decir, lo más simple que se pueda, con esto aseguraremos que nuestro modelo sea el más **apegado** a la realidad y a la vez el más sencillo.

Algunas veces, un modelo de medias móviles o uno autorregresivo, se aleja del principio de la parsimonia, o sea que podemos llegar a determinar un modelo **MA(4)** o uno **AR(5)**, los cuales, debido al número de parámetros que utilizan, son modelos complicados, para cumplir con este principio de parsimonia se crearon los **procesos autorregresivos de medias móviles ARMA(p,q)**, los cuales pueden describir un proceso utilizando un número de parámetros menor.

En otras ocasiones, un proceso que en principio pareciera un AR(1) por ejemplo, puede tener un error que no se comporte como ruido blanco; analizando el comportamiento del error podríamos encontrar que sigue la forma de un proceso de medias móviles, un MA(1), entonces el proceso se describe por un modelo ARMA(1,1).

Un modelo autorregresivo de medias móviles se representa por la ecuación:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad \text{III.23}$$

O bien, utilizando el operador de salto atrás:

$$\Phi_p(B)Z_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t \quad \text{III.24}$$

Un proceso **ARMA(p,q)** será *estacionario* si las raíces de $\Phi_p(B)=0$ están fuera del círculo unitario y será *invertible* si las raíces de $\Theta_q(B)=0$ también se encuentran fuera del círculo unitario.

PROCESO AUTORREGRESIVO DE MEDIAS MÓVILES DE ORDEN (1,1), ARMA(1,1)

Supóngase un proceso AR(1) de la forma

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} = a_t$$

$$a_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Como vemos a_t no es ruido blanco, sino un error que sigue un proceso MA(1).

Sustituyendo, obtenemos un proceso ARMA(1,1), este proceso se representa con la ecuación:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Este proceso es estacionario si $|\phi_1| < 1$ e invertible si $|\theta_1| < 1$. Además su media varianza y autocovarianza son:

$E(Z_t)=0$; No hay restricción

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \text{Var}(Z_t) \\ &= E[(\phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2] \\ &= \phi_1^2 E(Z_{t-1}^2) + \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 - 2\phi_1 \theta_1 E(Z_{t-1} \varepsilon_{t-1}) \\ &= \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 - 2\phi_1 \theta_1 \sigma^2 \\ \gamma_0 &= \frac{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1}{1 - \phi_1^2} \sigma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E(Z_t Z_{t-1}) \\ &= \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma^2\end{aligned}$$

para :

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \phi_1 \gamma_{1-k} \\ &= \phi_1^{k-1} \gamma_1 \quad k \geq 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= E(Z_t Z_{t-2}) \\ &= \phi_1 \gamma_1\end{aligned}$$

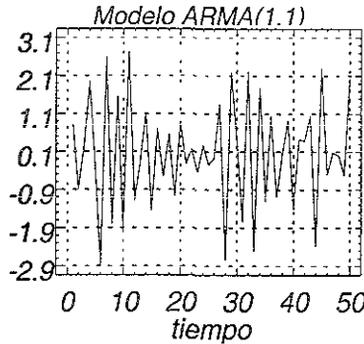
la autocorrelación para el proceso ARMA(1,1) es:

$$\rho_1 = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1}$$

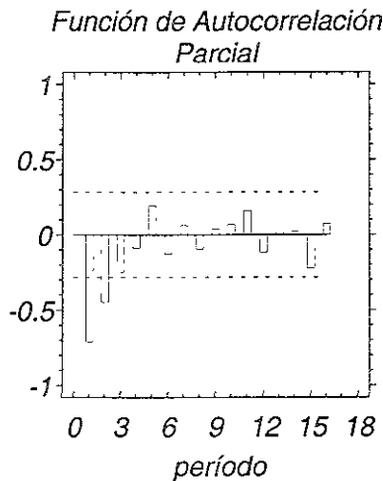
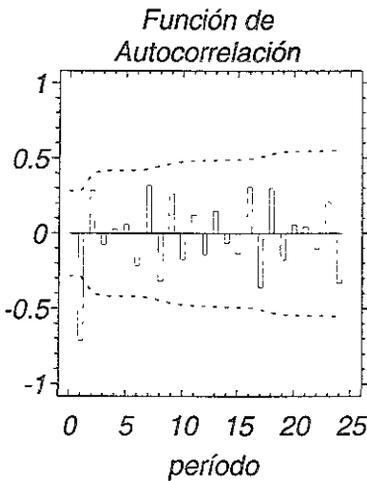
$$\begin{aligned}\rho_k &= \phi_1 \rho_{k-1} \\ &= \phi_1^{k-1} \rho_1 \quad \text{para } k > 1\end{aligned}$$

Para un proceso MA(1), la función de autocorrelación se trunca después de ρ_1 . En cambio la función para un proceso AR(1) decae en forma exponencial. Para un proceso ARMA(1,1), la función de autocorrelación caerá también de forma exponencial.

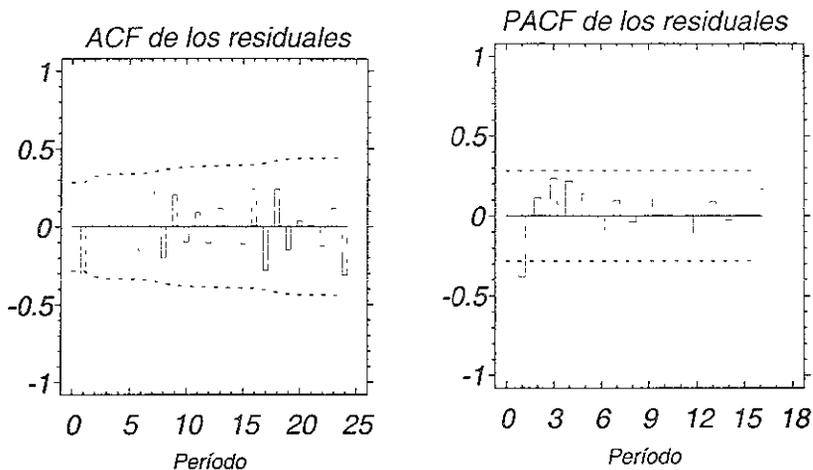
A continuación se presentan las gráficas de una simulación de un modelo ARMA(1,1); esta simulación presenta un comportamiento aparente de un modelo MA(1), pero las gráficas de los residuales no son ruido blanco, sino un AR(1):



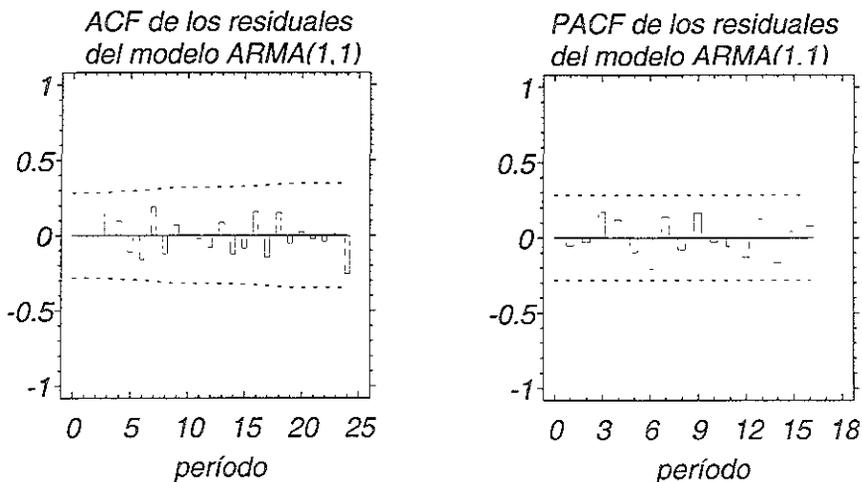
Esta es la serie de tiempo resultante de la simulación, no presenta tendencia y la varianza es constante.



La ACF se corta en uno y la PACF es decreciente, lo cual nos indica de primera instancia un modelo MA(1), como se verá en un capítulo posterior, al elegir un modelo de pronóstico deben seguirse una serie de pasos para asegurar una correcta elección del modelo, por el momento sólo continuaremos analizando las gráficas de los residuales, esto es, de los errores que se supone deben ser aleatorios:



Las gráficas de ACF y PACF de los residuales no se comportan como ruido blanco, la ACF es más bien decreciente y la PACF se corta en uno, por lo tanto los residuales siguen un modelo AR(1). Las gráficas siguientes corresponden a las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de una correcta estimación del modelo, es decir, un ARMA(1,1).

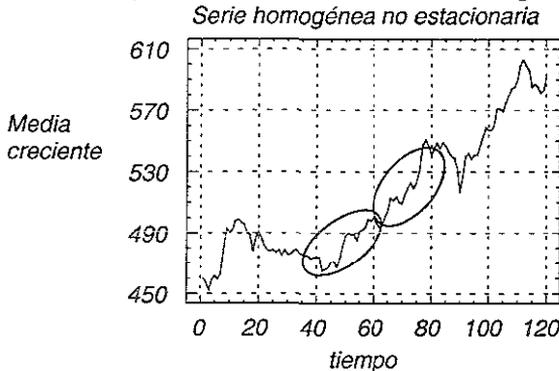


En estas gráficas los residuales sí se comportan como ruido blanco.

III.5.1.4 PROCESO AUTORREGRESIVO DE MEDIAS MÓVILES INTEGRADO ARIMA(p,d,q)

Cuando en un modelo AR(p) las raíces del polinomio $|\phi(B)|=0$ no se encuentran fuera del círculo unitario, significa que la serie de tiempo es **no estacionaria**. Si es en un modelo MA(q) donde las raíces del polinomio $|\theta(B)|=0$ no se encuentran fuera del círculo unitario, entonces el modelo **no es invertible**.

Las series de tiempo frecuentemente presentan este tipo de comportamiento, representan un proceso explosivo o de evolución acelerada. A pesar de esto, las series de tiempo no estacionarias pueden presentar cierta similitud en su comportamiento excepto por el nivel de la media (que es creciente o decreciente), a este tipo de series Box y Jenkins las llaman **series homogéneas no estacionarias**.



En la gráfica anterior se aprecia claramente un comportamiento parecido por intervalos, ¿qué sucedería si al intervalo del dato 40 al dato 60 le sumáramos una constante tal, que llegara al mismo nivel del intervalo de datos 61 al 80? Esto es:

$$\Psi(B)(Z_t+C)=\Psi(B)Z_t$$

donde $\Psi(B)$ es un operador autorregresivo no estacionario que representa un comportamiento homogéneo y C es cualquier constante. Por lo tanto, $\Psi(B)$ debe ser de la forma

$$\Psi(B)=\phi(B)(1-B)^d$$

para $d>0$ y entera, además $\phi(B)$ es un operador autorregresivo **estacionario**. Esto quiere decir que una serie no estacionaria homogénea puede ser reducida a una serie estacionaria realizando d diferencias adecuadas. Una serie Z_t puede ser no estacionaria, pero su d-ésima serie diferenciada $(1-B)^d Z_t$, sí lo es, porque la d-ésima diferencia es constante (no depende de t) e idéntica para todo valor de t, las siguientes diferencias serán nulas, por lo que el grado de desarrollo de las diferencias en el polinomio de grado n, también es n.

"Si en el proceso de obtención de las diferencias se vuelve constante (o aproximadamente constante), puede afirmarse que el conjunto de valores tabulados queda satisfecho exactamente (o muy aproximado) por un polinomio de grado igual al orden de la diferencia constante."

Para nuestro propósito, es necesario que las series de tiempo sean homoscedásticas, para lograr esto, existe un procedimiento llamado **diferencias ordinarias** y un caso especial de éstas conocido como **diferencias estacionales**. Estos procedimientos se basan en este comportamiento homogéneo de las series de tiempo no estacionarias.

Notación

Se usará como operador para las diferencias ordinarias Δ que se define cómo:

$$W_t = \Delta^d Z_t \quad \text{III.30}$$

$$\Delta^d Z_t = (1-B)^d Z_t \quad \text{III.31}$$

donde, w_t representa la serie Z_t ya diferenciada.

De esta manera, desarrollando la primera diferencia $\Delta Z_t = (1-B)Z_t$ para obtener la notación extensiva nos lleva a:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

La segunda diferencia es entonces $\Delta^2 Z_t = (1-B)^2 Z_t$ y desarrollando el binomio tenemos como resultado:

$$\begin{aligned} \Delta^2 Z_t &= (1 - 2B - B^2) Z_t \\ &= Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2} \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Como podemos observar III.31 es la fórmula general para obtener la d-ésima diferencia.

Al igual que la suma tiene a la resta, la multiplicación a la división, las diferencias ordinarias también tienen su operación inversa:

$$Z_t = S^d W_t \quad \text{III.32}$$

S es un operador de suma infinita definido como:

$$\begin{aligned} Sx_t &= \sum_{h=-\infty}^t x_h = (1 + B + B^2 + \dots)x_t \\ &= (1 - B)^{-1} = \Delta^{-1} x_t \end{aligned}$$

Entonces, $S = (1-B)^{-1} = \Delta^{-1}$, para orden mayor de S , se procede de manera similar.

La ecuación III.32 nos indica una suma o bien, una **integración** del proceso estacionario d veces. Es por esto que a estos procesos se les ha llamado *procesos autorregresivos integrados de medias móviles*.

II.5.1.5 MODELO GENERAL DE LOS PROCESOS AUTORREGRESIVOS INTEGRADOS DE MEDIAS MÓVILES

El modelo **ARIMA(p,d,q)**, como ya hemos visto, resulta de la propiedad de las series de tiempo homogéneas no estacionarias. Entonces al modelo:

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B)\varepsilon_t \quad \text{III.33}$$

Donde $\phi(B)$ es el operador AR(p) estacionario, $\theta(q)$ es el operador MA(q) invertible, d representa el orden de las diferencias. El parámetro θ_0 brindará una tendencia determinística en función del tiempo, pero en general es omitido.

Los modelos anteriormente vistos AR(p), MA(q) y ARMA(p,q) son casos estacionarios del modelo ARIMA(p,d,q), con d=0, por ejemplo un modelo AR(1) es el mismo que un ARIMA(1,0,0) o un ARMA(1,1) es igual que un ARIMA(1,0,1). A continuación veremos casos no estacionarios en los que la diferencia d>0.

Proceso ARIMA(1,1,1)

$$(1-\phi_1 B)\Delta Z_t = (1-\theta_1 B)\varepsilon_t, \text{ o en forma extendida}$$

$$Z_t = Z_{t-1} + \theta_1 Z_{t-1} - \phi_1 Z_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Proceso ARIMA(0,1,1)

$$\Delta Z_t = (1-\theta_1 B)\varepsilon_t$$

$$Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Proceso ARIMA(0,2,2)

$$\Delta^2 Z_t = \theta_2(B)\varepsilon_t$$

$$Z_t = 2Z_{t-1} - Z_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

Los dos últimos modelos pueden ser llamados IMA(d,q), pues al carecer del operador, la parte autorregresiva se puede omitir del nombre del modelo.

III.5.1.6 SERIES DE TIEMPO CON FLUCTUACIONES ESTACIONALES

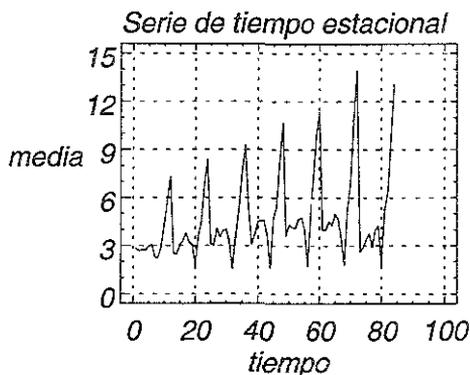
Por otra parte, las **diferencias estacionales** pueden eliminar la estacionalidad o ciclo de una serie de tiempo que presente fluctuaciones estacionales.

Existen diversos ejemplos donde las series de tiempo con fluctuaciones estacionales pueden encontrarse, el más común es el turismo, que se incrementa en la llamada "temporada alta" en los meses de junio, julio, agosto, diciembre y en Semana Santa, los demás meses, por supuesto es la "temporada baja". Durante la temporada alta las aerolíneas, los hoteles, restaurantes, bares, discotecas, etc. de los puntos turísticos incrementan su capacidad de atención para poder dar servicio a un mayor número de

turistas; pero no sólo la empresa turística se beneficia en estos meses, sino en general toda la población. Para dar un ejemplo distinto, mencionaré que en la Investigación Biomédica es muy común el conteo de individuos de cierta especie, como bien sabemos tendrán influencia sobre la especie, sus predadores naturales, el período de reproducción, clima, número de individuos existentes, etc. todos estos factores modificarán las condiciones en los que la especie se desarrolla y se reproduce, por lo que en cierta época del año, según la especie, puede tener condiciones adversas por el número de predadores o las condiciones del clima y por lo tanto el número de individuos decrece, sucediendo que en condiciones óptimas para la especie su número se incrementará. Este comportamiento también es estacional.

Cuando las series de tiempo presentan un comportamiento cíclico, este período variará dependiendo del período de tiempo que se esté empleando, si la serie de tiempo es sobre la población que ocupa el metro por hora, el período cíclico sería cada 24 horas. Si la serie de tiempo es de la población que ocupa el metro por día, el ciclo sería cada 7 días.

Gráficamente una serie con estacionalidad se verá:



Si observamos con detenimiento, nos daremos cuenta que en la gráfica anterior los "picos" que sobresalen a los demás datos se presentan cada 12 períodos de tiempo, esto indica que en nuestro proceso existen influencias que provocan que el comportamiento de los datos sea parecido cada 12 meses, esto es, cada año.

Para poder hacer estas series de tiempo no estacionarias homogéneas susceptibles de análisis, es necesario emplear un método mencionado anteriormente, las **diferencias estacionales**.

Las diferencias estacionales son representadas por Δ_s^d , la s (span) indica el defase de las diferencias, si la estacionalidad se presenta cada 12 meses, la diferencia se haría con $s=12$, si la estacionalidad se presenta cada 7 días entonces $s=7$.

Entonces las diferencias estacionales se representan como:

$$\Delta_s^d Z_t = (1-B_s)^d Z_t = Z_t - Z_{t-s} \quad \text{III.34}$$

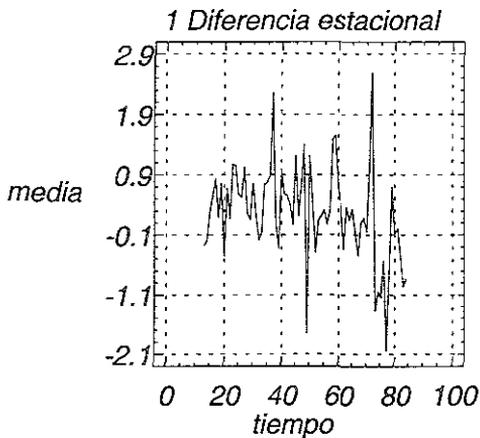
y se opera de manera similar que con las diferencias ordinarias, así una diferencia estacional con $s=12$ sería:

$$\Delta_{12} Z_t = (1-B_{12}) Z_t = Z_t - Z_{t-12}$$

dos diferencias estacionales con $s=7$ serían:

$$\Delta_7^2 Z_t = (1-B_7)^2 Z_t = (1-2B_7+B_7^2)Z_t = Z_t - 2Z_{t-7} + Z_{t-14}$$

Si a los datos de la gráfica anterior se les aplicara una diferencia estacional con un período $\Delta=12$, la gráfica se vería:



Es importante mencionar que cada vez que empleamos diferencias ordinarias se pierde un dato y cada ocasión que se usen las diferencias estacionales se perderán s datos. Esto afecta porque para poder emplear el método de Box-Jenkins se requieren al menos 80 datos y no nos podemos dar el lujo de perder información cuyo costo puede ser elevado.

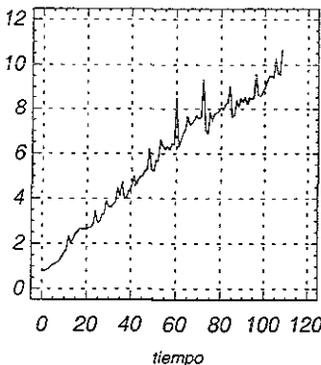
III.5.1.7 MODELOS MULTIPLICATIVOS

Cuando una serie de tiempo tiene un comportamiento estacional, podemos encontrar dos relaciones importantes entre los datos: una entre las observaciones de períodos de tiempo sucesivos ($t-1$) y la otra en períodos de tiempo defasados s períodos ($t-s$). Para hacer más claro lo anterior, trabajaremos en un ejemplo en el que una serie temporal con comportamiento estacional, contiene datos mensuales, en este caso, conviene estudiar los datos de la serie de tiempo en una tabla ordenada por meses y por años, pues las correlaciones pueden darse entre meses sucesivos y/o entre

meses defasados 12 (y sus múltiplos) períodos de tiempo, o sea el mismo mes pero de años anteriores. A continuación veremos la tabla III.1 que está ordenada de la manera planteada. Estos datos se encuentran en el BIE (Banco de Información Económica) del INEGI en el capítulo V se encontrará más información al respecto

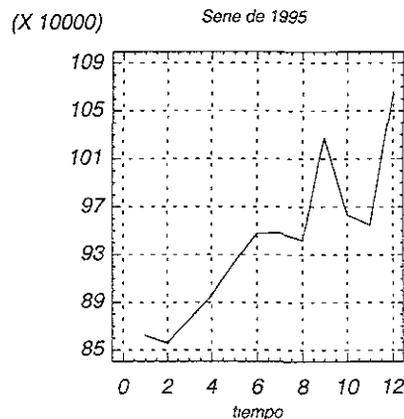
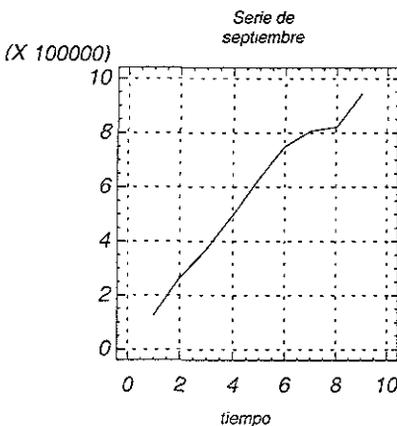
	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
enero	79022	201950	291916	401726	526784	632342	703343	762592	862006
febrero	83006	217973	298597	401714	523987	655536	691320	770377	855852
marzo	87168	243613	326965	431326	568941	691045	784003	835870	975418
abril	98631	251601	330202	439372	568673	704584	744436	809714	895730
mayo	105516	267243	388578	498721	660085	763417	776182	845307	923567
junio	110145	264581	363385	456643	633848	728923	780117	830986	947476
julio	117064	265655	360441	483447	620118	733609	789684	849509	948071
agosto	125867	264059	371965	497062	631304	748491	806428	820626	941953
sept.	142271	271701	382447	497525	617403	767172	796843	848524	1027372
octubre	160459	270557	445128	521738	641926	755853	819976	841943	963314
noviembre	173012	287187	410510	525514	640830	761121	827418	850127	955052
diciembre	233900	344227	472259	617734	846150	934185	903284	957219	1064983

Tabla III.1 Serie de Tiempo de 9 años de total de egresos en prestaciones sociales en México. (Serie Estacional) (X 100000)



En esta primer gráfica, los datos muestran una tendencia creciente y un claro comportamiento estacional.

Como se ha mencionado, existen relaciones entre los datos de meses consecutivos y entre datos de un mismo mes de años anteriores. Veremos las gráficas de estas relaciones:



Las relaciones entre el mismo mes de años consecutivos, que en este caso fue septiembre, de acuerdo con la segunda gráfica, podrían ser representados con un modelo ARIMA(p,d,q) con diferencias ordinarias, ya que presenta una tendencia creciente (la media no es constante). O sea que el modelo adecuado será un modelo del tipo:

$$\phi(B)\Delta^d Z_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

Que es el modelo general ARIMA(p,d,q), donde p y q son el orden del modelo y d es el orden de las diferencias ordinarias.

Por otro lado, la tercer gráfica nos muestra un comportamiento diferente, en ésta se advierte que los meses consecutivos presentan una estacionalidad, es sólo la primera parte de los datos recabados a lo largo de 9 años (de acuerdo con la tabla III.1), si observamos la primer gráfica, la tendencia es claramente creciente, y como la serie de tiempo se comporta de manera estacional, para hacer la serie estacionaria se necesitan las diferencias estacionales con $s=12$ (ecuación III.34) este comportamiento también será representado por un modelo ARIMA(P,D,Q)₁₂:

$$\Phi(B^s)\Delta^D Z_t = \Theta(B^s)\varepsilon_t$$

donde P y Q darán el orden del modelo y D el orden de las diferencias estacionales.

Pero como ambos modelos representan dos partes de una misma serie de tiempo, se hace necesaria la combinación de los dos modelos:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\Delta^d\Delta^D_s Z_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)\varepsilon_t$$

Que es el modelo general de un modelo multiplicativo **ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)**. El cual representa gran cantidad de series de tiempo estacionales.

Para el ejemplo de la línea aérea el modelo multiplicativo tendría una periodicidad de 12 meses, es decir, $s=12$:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^{12})\Delta^d\Delta^D_{12} Z_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^{12})\varepsilon_t$$

Más adelante profundizaremos en la obtención de los modelos ARIMA(p,d,q), y su utilidad para obtener pronósticos que ayuden a la planeación de políticas o estrategias de trabajo.

CAPÍTULO IV FORMAS DE PRONOSTICAR

IV.1 MÉTODOS DE PRONÓSTICO

En el Capítulo I se dieron las razones para aplicar los métodos de pronóstico y sus ventajas para apoyar la toma de decisiones en cualquier campo profesional: problemas de control de inventario, comercialización, planeación financiera, producción, por mencionar sólo algunos de estos campos.

La obtención de un buen pronóstico evitará que se cometa algún error grave al tomar una decisión. El pronóstico puede ser resultante de la mera intuición o bien de implementar algún método analítico y/o estadístico. Es esto último lo que hace diferencia en el tipo de pronóstico que puede ser empleado, para ello existen técnicas Cualitativas y técnicas Cuantitativas.

IV.2 MÉTODOS CUALITATIVOS DE PRONÓSTICO

Este tipo de técnicas son llamadas **subjetivas**, pues el pronóstico es obtenido por el juicio u opinión de una o más personas que, debido a sus niveles de conocimiento se les denomina **expertos**, los cuales aplicarán sus conocimientos sobre un tema en particular, estos expertos hacen uso de su intuición y su experiencia.

Dos de las técnicas subjetivas más utilizadas son:

- ♦ **Técnica del grupo de expertos.** En este método, se pide a especialistas del área de interés el estudio de un tema en particular, para su posterior discusión en "mesas de diálogo" para llegar a un "consenso" y un buen pronóstico, basado en el juicio, criterio y experiencia de los especialistas.
- ♦ **Método Delphi.** Este es quizá el método cualitativo más conocido y utilizado, consiste en hacer llegar, vía correo, a cada experto elegido para participar, el problema que se desea que analicen; esta técnica se basa en los siguientes supuestos:
 1. Las personas consultadas son expertos del área.
 2. Se pedirá la opinión de estos especialistas en más de una ocasión.
 3. Existirá retroalimentación.

En el método Delphi siempre se mantendrá el anonimato de las personas consultadas, así como de los resultados obtenidos por cada uno, para garantizar que sus decisiones no serán influidas por el resto del grupo.

Las desventajas de este método son: el método no arroja una solución única, no es suficientemente fiable, además, habrá resultados diferentes cada vez que se cambie a uno de los expertos.

Los métodos que necesitan de supuestos expertos pueden ser cuestionados:

¿Después de cuánto tiempo una persona se vuelve experta en algo? ¿sólo un experto puede dar o aportar información óptima y concluyente? ¿que alguien sea considerado experto garantiza la infalibilidad de su juicio? Debido a esto, los métodos subjetivos pueden no ser los más confiables para cierto tipo de problemas, claro que, si una persona es verdaderamente experta, sabrá esto y aplicará el método correcto para su análisis.

IV.3 MÉTODOS CUANTITATIVOS DE PRONÓSTICO

Las técnicas cuantitativas de pronóstico se dividen en dos grupos: los métodos explicativos o causales y las técnicas que ocupan series de tiempo. A continuación se describen ambas.

Métodos Explicativos o Causales

Estos modelos de pronóstico se apoyan en el hecho de que existen procesos que son afectados por otro u otros procesos, se expresan como una función de variables independientes que determinan el valor de otra variable que es dependiente de éstas.

El empleo de los modelos explicativos o causales de pronóstico, aporta una mejor comprensión del desarrollo de algún proceso, a la vez, nos permitirá experimentar (simular) de qué manera se modificaría un determinado proceso (que se quiere pronosticar) si modificamos los valores de las variables que lo afectan.

Los métodos explicativos de pronóstico son:

- **Regresión simple.** Supone la dependencia lineal de dos variables: una variable dependiente Y a pronosticar y una variable independiente X que la influye. Se obtendrá una función con estas dos variables cuyo valor final es el pronóstico de la variable dependiente Y .

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Esta relación no se cumple en muchos casos, por ejemplo en datos con estacionalidad, como las ventas, donde la regresión simple no puede utilizarse.

- **Regresión múltiple.** La regresión simple es un caso especial de la regresión múltiple; en la regresión múltiple existe una variable dependiente que será pronosticada a través de la resolución de una función matemática que contendrá no una, sino dos o más variables independientes que tienen influencia sobre la variable que representa el proceso a pronosticar. El modelo general es:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k + \varepsilon_t$$

Donde las b_0, b_1, \dots, b_k son constantes desconocidas y ε es ruido blanco.

- **Modelos econométricos.** La regresión múltiple es un caso especial de los modelos econométricos donde en vez de una ecuación de varias variables, esta vez se obtendrán n ecuaciones simultáneas de varias variables, las cuales

involucran procesos diferentes que tienen una influencia sobre la variable dependiente a éstas, de la cual queremos el pronóstico.

La desventaja de estos métodos de pronóstico es que requieren de habilidad para poder abstraer a una o más funciones, las relaciones que existen entre los procesos involucrados en nuestro estudio, además, los modelos resultantes pueden ser demasiado complicados.

Métodos cuantitativos que emplean series de tiempo

Las técnicas que utilizan series de tiempo para pronosticar datos, se basan en un *patrón básico que se supone rige a la serie de tiempo, este patrón es modificado por una variación aleatoria*; algunas otras técnicas de pronóstico toman en cuenta además de este patrón básico y la variación aleatoria, una posible estacionalidad y una tendencia.

Esta clase de métodos se pueden dividir de acuerdo al plazo de pronóstico que arroje la metodología empleada, estos plazos varían entre corto, mediano o largo plazo. También la complejidad entre los diversos métodos de series de tiempo varía desde los simples promedios en el caso de las técnicas de suavizamiento (o también llamadas técnicas de atenuación), que no requieren de grandes conocimientos de Estadística para poder aplicarlos; hasta técnicas más sofisticadas, como el caso de la metodología Box-Jenkins que sí necesita que la persona que la utilice, cumpla con los conocimientos de Estadística requeridos. Algunas técnicas de pronóstico con series de tiempo son:

- **Métodos de suavizamiento.** Estos consisten en hacer promedios de los datos de la serie de tiempo, el promedio resultante será el pronóstico obtenido para el siguiente período. El número de observaciones que serán empleadas para hacer el pronóstico es fijado al gusto o necesidades de la persona que requiera el pronóstico o del encargado de hacerlo. En la tabla IV.1 veremos con datos de la serie de tiempo y promedios de dos y cuatro observaciones.

Los métodos de suavizamiento asumen que una serie de tiempo está compuesta por una media que es alterada por errores aleatorios independientes:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

El asumir errores independientes $\{\varepsilon_t\}$ nos lleva a que cada observación X_t también es independiente de las observaciones anteriores, pero la mayoría de las series de tiempo están compuestas por observaciones $\{X_t\}$ que son dependientes entre sí, por lo que los métodos de suavizamiento se vuelven inapropiados pues no aprovechan la correlación existente en la serie de tiempo, como lo hacen otro tipo de técnicas de pronóstico.

	1995	Pronóstico promedio de 2 periodos de tiempo	Pronóstico promedio de 4 periodos de tiempo
enero	862006		
febrero	855852		
marzo	875418	858929	
abril	895730	865635	
mayo	923567	885574	872251.5
junio	947476	909648.5	887641.75
julio	948071	935521.5	910547.75
agosto	941953	947773.5	928711
sept.	1027372	945012	940266.75
octubre	963314	984662.5	966218
novbre.	955052	995343	970177.5
diciere.	1064983	959183	971922.75

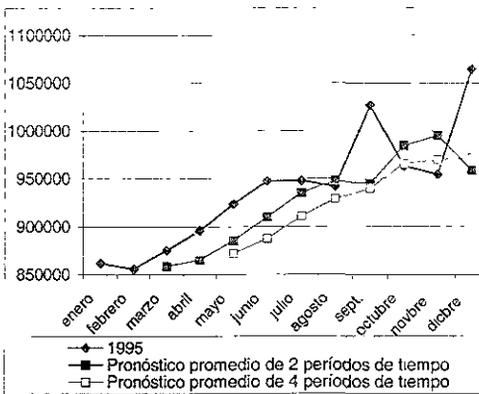


Tabla IV.1 serie de 1995 y suavizamientos

- **Modelos ARIMA.** Las siglas ARIMA son la abreviatura de Autoregressive Integrated Moving Average models, pero en español les llamamos **modelos autorregresivos integrados de medias móviles**, éstos aprovechan la función de autocorrelación para poder explicar la relación existente entre las observaciones recabadas a lo largo del tiempo. Para poder aplicar esta técnica, es necesario que la serie de tiempo sea estacionaria, es decir, que media y varianza sean constantes. Esta metodología es altamente confiable en los pronósticos que arroja y tiene ventaja sobre los métodos econométricos, pues su proceso es mucho más sencillo.

Es por esta razón que damos más importancia a los modelos ARIMA que fueron creados por Box y Jenkins, a continuación explicaré a profundidad dicho método.

IV.4 METODOLOGÍA BOX-JENKINS

En 1976, George E. Box y Gwilym M. Jenkins publicaron su libro "TIME SERIES ANALYSIS: Forecasting and control". En dicho volumen presentan los modelos ARIMA(p,d,q) o también conocidos como modelos Box-Jenkins y un método para la identificación, ajuste y revisión de estos modelos matemáticos cuya finalidad es obtener un pronóstico.

Estos modelos son obtenidos a través de una serie de "filtros" que extraen los movimientos aleatorios de la serie de tiempo, dejando únicamente en el modelo matemático obtenido, los elementos que sí se pueden predecir.

Los filtros lineales por los cuales pasa la serie de tiempo son:

- Filtro autorregresivo
- Filtro de integración y
- Filtro de medias móviles

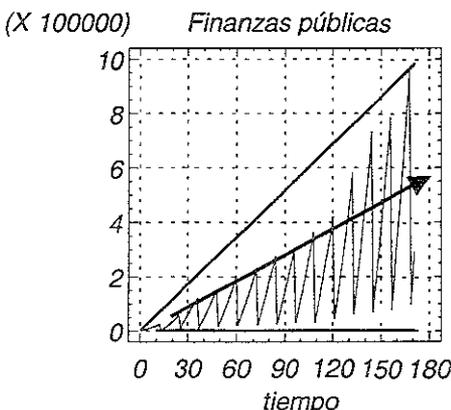
Haciendo una analogía, estos filtros actúan como coladeras por las que la serie de tiempo deja partículas (que son los patrones de comportamiento) hasta que queda ruido blanco, esto significará que el modelo elegido proporciona resultados muy apegados a la serie de tiempo original y que los residuales dejados por el modelo no son significativos y que por lo tanto podemos tener confianza en los pronósticos que arroja.

Las herramientas principales para la identificación del modelo matemático son la función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF). Es con estas funciones y sus gráficas que el análisis podrá ser concluido con la correcta selección de un modelo ARIMA(p,d,q).



IV.4.1 Condiciones necesarias para la aplicación de la metodología Box-Jenkins

La primera propiedad que una serie temporal debe cumplir para poder aplicar el método de Box-Jenkins, es que la serie de tiempo a analizar debe ser **homoscedástica**, es decir, que la dispersión de los datos sea homogénea a través del tiempo (media y varianza constantes). Por supuesto, es poco probable que una serie temporal cumpla con esta característica, en la práctica encontraremos que la mayor parte de las series de tiempo pueden presentar tendencia, varianza o estacionalidad y combinaciones de éstas, aún así, podemos inducir en la serie de tiempo no estacionaria la homogeneidad deseada aplicando a los datos de la serie las transformaciones necesarias. Estas transformaciones serán dirigidas a disminuir la varianza y la media de la serie de tiempo, así como el comportamiento estacional, si existiese.



Podemos apreciar en la gráfica un comportamiento heteroscedástico: en una varianza creciente los datos forman una especie de triángulo; una media creciente marca una tendencia hacia arriba de la gráfica y un comportamiento estacional.

IV.4.1.1 Estabilización de la varianza

Para disminuir el nivel de la varianza en una serie de tiempo es necesaria alguna transformación que haga que los datos muy grandes se hagan pequeños y que los datos pequeños se modifiquen levemente o aumenten su nivel. ¿Qué tipo de operaciones matemáticas pueden realizar esto?

En la práctica es muy común encontrar que la varianza crece en forma proporcional a la tendencia de una serie temporal, se deduce que la varianza de una serie de tiempo se compone del producto de una constante c y de una función que modifica a la media de la serie de tiempo $f(\mu_t)$, tenemos entonces la siguiente ecuación:

$$\text{Var}(Z_t) = cf(\mu_t) \quad \text{IV.1}$$

Donde c es una constante positiva y f es una función cualquiera. Necesitamos modificar el efecto de la función $f(\mu_t)$ sobre la serie Z_t . Representaremos como $T(Z_t)$ a la función que disminuya a una varianza creciente por consecuencia de $f(\mu_t)$. Utilizando la serie de Taylor para aproximarnos a la función $T(Z_t)$ alrededor de un punto μ_t tenemos:

$$T(Z_t) \approx T(\mu_t) + T'(\mu_t)(Z_t - \mu_t) \quad \text{IV.2}$$

Donde $T'(Z_t)$ es la primera derivada de $T(Z_t)$ evaluada en μ_t .

Si además:

$$\begin{aligned} \text{Var}[T(Z_t)] &= [T'(\mu_t)]^2 \text{Var}(Z_t) \\ &= c[T'(\mu_t)]^2 f(\mu_t) \end{aligned} \quad \text{IV.3}$$

Entonces de acuerdo con IV.3, la función $T(Z_t)$ que estabilizará la varianza de la serie de tiempo, debe ser tal que:

$$T'(\mu_t) = \frac{1}{\sqrt{f(\mu_t)}} \quad \text{IV.4}$$

Lo cual implica que

$$T(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{f(\mu_t)}} d\mu_t \quad \text{IV.5}$$

Y entonces de IV.5 podemos deducir los siguientes casos:

- Si la varianza crece en forma proporcional a la tendencia de la serie de tiempo de la forma $\text{Var}(Z_t) = c^2\mu_t^2$, entonces $T(Z_t)$ debe ser:

$$T(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{\mu_t^2}} d\mu_t = \ln(\mu_t) \quad \text{IV.6}$$

La varianza será disminuida aplicando a las observaciones de la serie de tiempo una transformación logarítmica.

- Si la varianza y la tendencia tienen la proporción $\text{Var}(Z_t) = c\mu_t$, entonces $T(Z_t)$ debe ser:

$$T(\mu_t) = \int -\frac{1}{\sqrt{\mu_t}} d\mu_t = 2 \sqrt{\mu_t} \tag{IV.7}$$

Y la raíz de los datos de la serie serán una transformación correcta.

- De manera similar si $\text{Var}(Z_t) = c^2\mu_t^4$ la transformación de los datos deberá ser:

$$T(\mu_t) = \int -\frac{1}{\sqrt{\mu_t^4}} d\mu_t = -\frac{1}{\mu_t} \tag{IV.8}$$

Y el recíproco de los datos será la transformación que deberán sufrir la serie de tiempo.

Box y Cox generalizaron estas transformaciones a través de la siguiente ecuación:

$$T(Z_t) = Z_t^{(\lambda)} = \frac{Z_t^\lambda - 1}{\lambda} \tag{IV.9}$$

Donde λ es llamado parámetro de transformación. La siguiente tabla da los valores de λ más comunes y las transformaciones asociadas a estos valores.

Valores de λ	Transformación
-1.0	$\frac{1}{Z_t}$
-0.5	$\frac{1}{\sqrt{Z_t}}$
0.0	$\ln Z_t$
0.5	$\sqrt{Z_t}$
1.0	Z_t (No hay transformación)

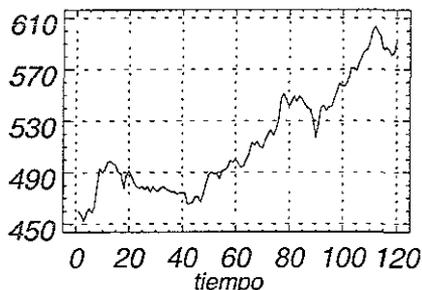
La reducción de la varianza, si es necesario, es el primer paso para el análisis de las series de tiempo. Es importante remarcar que una vez concluido el estudio y obtenido

el modelo y pronóstico deseado, hay que deshacer esta transformación para que el valor obtenido sea el correcto. Más adelante profundizaremos en este tema.

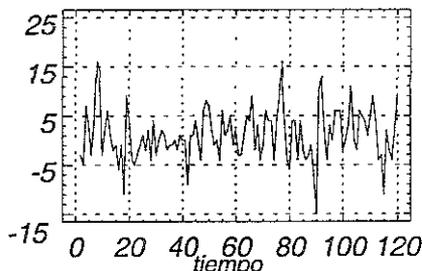
IV.4.1.2 Eliminación de la tendencia

En el Capítulo III demostramos cómo las diferencias ordinarias y las diferencias estacionales pueden reducir la tendencia y un comportamiento cíclico, respectivamente. Entonces la tendencia creciente de una serie de tiempo es disminuida aplicando una o dos diferencias ordinarias:

Serie con tendencia creciente



Serie con 1 diferencia ordinaria

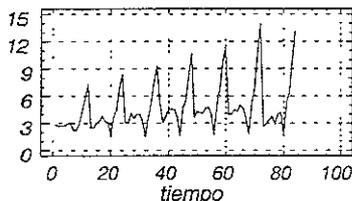


Empleo la primera diferencia $\Delta Z_t = (1-B)Z_t$ para obtener la serie diferenciada.

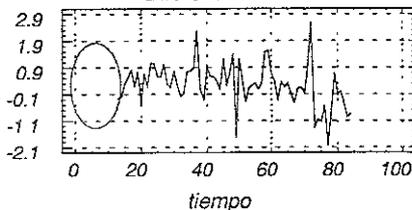
En las gráficas anteriores, la tendencia creciente es clara en la serie de tiempo original, al aplicar una diferencia, o sea $d=1$, la serie estabiliza su media. Para reducir el nivel de la media, fue necesaria una diferencia ordinaria, por lo cual perdimos un dato, esta pérdida de datos es proporcional al número de diferencias que son requeridas, por lo regular, son únicamente necesarias una o dos diferencias para disminuir la tendencia.

En el caso de las series de tiempo con comportamiento estacional, es más notorio este déficit de datos:

Serie de tiempo estacional



Serie de tiempo con una Diferencia estacional



La serie de tiempo pierde más datos después de aplicar la diferencia estacional, en realidad se pierden s datos cada vez que se aplica la fórmula: $\Delta_s^d Z_t = (1-B_s)^d Z_t = Z_t - Z_{t-s}$

Como vemos el comportamiento estacional disminuye con las diferencias estacionales, lo cual permite tener en la serie temporal una media constante. Es importante hacer notar que este es el orden en que deben hacerse las transformaciones, esto es, primero debe disminuirse la varianza y posteriormente

hacerse diferencias en la serie, si hiciéramos primero las diferencias sería común que algunos resultados fueran negativos, lo cual complica las transformaciones de la varianza, por ejemplo, ¿qué sucedería si fuera necesaria una transformación raíz cuadrada? Pues que tendríamos raíces complejas y se dificulta en análisis.

IV.4.1.3 Suficientes datos

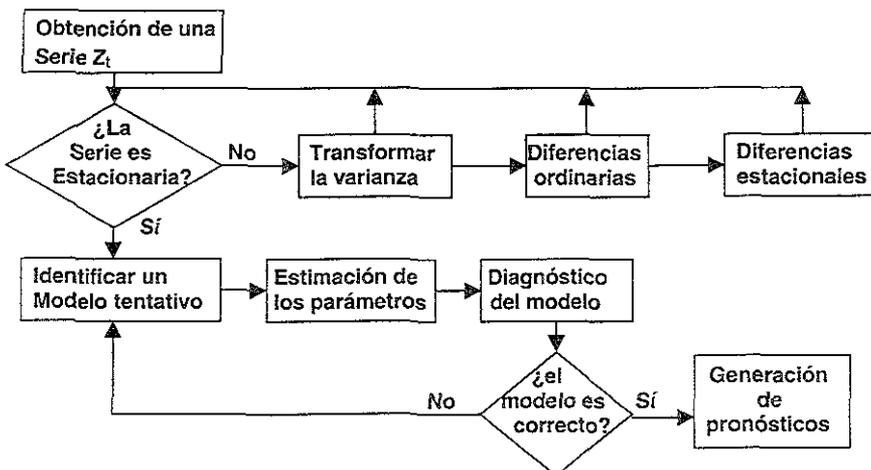
El problema de hacer diferencias para disminuir la tendencia es que vamos perdiendo datos, lo cual puede disminuir la precisión del modelo alcanzado, de aquí se deriva la segunda propiedad que deben cumplir las series de tiempo: deben estar compuestas de por lo menos 80 observaciones para garantizar que se tendrá un buen nivel de confianza.

IV.4.2 PASOS ITERATIVOS DE LA METODOLOGÍA BOX JENKINS

La metodología Box Jenkins consta de varias etapas antes de encontrar un modelo que se ajuste de manera adecuada a una serie de tiempo. Estas etapas son:

- **Generación** de una serie de tiempo homogénea
- **Identificación** de un modelo tentativo
- **Estimación** de los parámetros del modelo
- **Diagnóstico** del modelo y sus parámetros
- **Pronósticos** arrojados por el modelo

Estos son pasos iterativos en los cuales uno debe tener en cuenta que lo importante es obtener buenos pronósticos con un modelo parsimonioso. La siguiente gráfica es un diagrama de flujo de todas las etapas de la metodología Box Jenkins.



IV.4.2.1 Identificación de Modelos

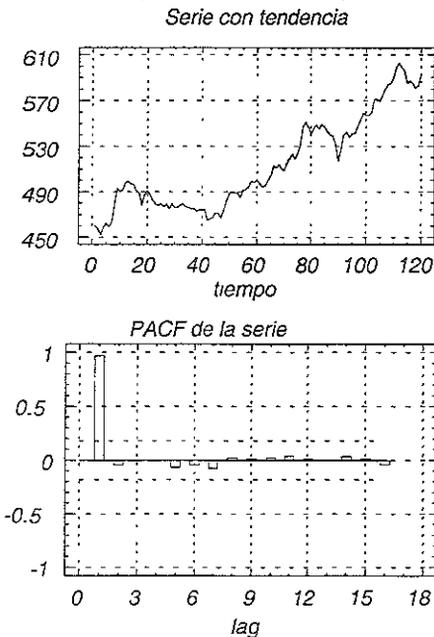
La misión de la metodología Box-Jenkins, es encontrar un modelo ARIMA(p,d,q) que se ajuste de manera óptima a los datos de la serie de tiempo observada y que arroje pronósticos con un buen nivel de confianza. El modelo a obtener será derivado del ya conocido modelo general ARIMA(p,d,q):

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d Z_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \quad \text{IV.10}$$

En la identificación de modelos ARIMA deben procurarse siempre los modelos parsimoniosos, es decir, que el mejor modelo es aquel que siendo el más sencillo se ajusta correctamente a los datos de la serie.

Podemos dividir la identificación de modelos en 2 fases:

1. El primer paso en la identificación de modelos será graficar la serie de tiempo de interés para determinar si es necesario aplicar alguna transformación en la varianza o en la tendencia de los datos o la existencia de un comportamiento estacional. En ocasiones no será fácil determinar a simple vista de la gráfica de la serie temporal si se necesitan hacer transformaciones, entonces nos apoyaremos en las gráficas de la función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF), por ejemplo, si la gráfica de la ACF decrece de manera muy lenta y la gráfica de la PACF se corta en uno es indicativo de la necesidad de hacer diferencias ordinarias. La gráfica de la función de autocorrelación de una serie de tiempo estacional, presentará un comportamiento cíclico muy evidente cada s periodos.



La gráfica de la serie de tiempo, presenta tendencia y por tanto la gráfica de la ACF descende lentamente y la gráfica de la PACF se corta en uno.

2. Una vez obtenida una serie de tiempo estacionaria, las gráficas de la ACF y la PACF se verán de manera diferente, de acuerdo al tipo de modelo que se trate.

- Si la gráfica de la ACF disminuye rápidamente y la gráfica de la PACF se corta en uno, se trata de un modelo AR(1), esto es, la gráfica de la PACF nos indica en este caso el orden del modelo AR(p).
- Para un modelo MA(q) la gráfica de la ACF es la que indicará el orden del modelo de acuerdo al número donde se corte y la gráfica de la PACF disminuirá de manera acelerada.
- Cuando las gráficas de ambas funciones disminuyan rápidamente, podremos hablar de un modelo ARMA(p,q). La gráfica de la ACF se cortará después de q-p intervalos, similarmente, la gráfica de la PACF se cortará después de p-q intervalos.

La siguiente tabla muestra lo anterior:

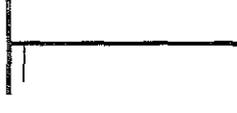
Modelo	ACF	PACF
AR(p)	Decrece rápidamente	Se corta después de p intervalos
MA(q)	Se corta después de q intervalos	Decrece rápidamente
ARMA(p,q)	Decrece rápidamente después de (q-p) intervalos	Decrece rápidamente después de (p-q) intervalos

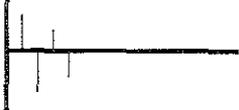
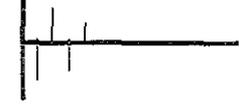
Huellas digitales

MariCarmen González Videgaray llama a este comportamiento teórico de las gráficas de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial la "huella digital"¹ de los modelos ARMA(p,q), ya que en su conjunto dan el patrón para elegir el modelo que se ajusta a la serie de tiempo. A continuación se muestran algunas gráficas de ACF y PACF teóricas para la determinación de modelos ARMA(p,q).

Modelo	ACF teórica	PACF teórica
AR(1) Con coeficiente ϕ positivo	 Decrece rápidamente	 Se corta después de uno

¹ Notas de clase

Modelo	ACF teórica	PACF teórica
AR(1) Con coeficiente ϕ negativo	 Decrece rápidamente	 Se corta después de uno
AR(2) Con coeficiente ϕ_1 positivo y ϕ_2 positivo	 Decrece rápidamente	 Se corta después de dos
AR(2) Con coeficientes ϕ_1 positivo y ϕ_2 negativo	 Decrece rápidamente de manera senoidal	 Se corta después de dos
AR(2) Con coeficientes ϕ_1 negativo y ϕ_2 positivo	 Decrece rápida alternadamente	 y Se corta después de dos
AR(2) Con coeficientes ϕ_1 negativo y ϕ_2 negativo	 Decrece rápida alternadamente	 y Se corta después de dos
MA(1) Con coeficiente θ_1 positivo	 Se corta después de uno	 Decrece rápidamente

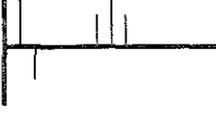
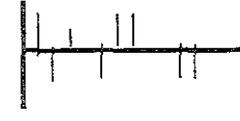
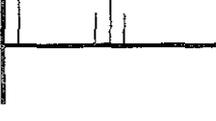
Modelo	ACF teórica	PACF teórica
MA(1) Con coeficiente θ_1 negativo	 Se corta después de uno	 Decrece rápidamente
MA(2) Con coeficiente θ_1 y θ_2 positivos	 Se corta después de dos	 Decrece rápidamente
MA(2) Con coeficiente θ_1 positivo y θ_2 negativo	 Se corta después de dos	 Decrece rápidamente
MA(2) Con coeficiente θ_1 negativo y θ_2 positivo	 Se corta después de dos	 Decrece rápidamente
MA(2) Con coeficiente θ_1 y θ_2 negativos	 Se corta después de dos	 Decrece rápidamente

Es preciso mencionar que en la práctica encontraremos que las gráficas de las ACF y PACF muestrales difieren en su comportamiento con respecto a las gráficas anteriores y su interpretación será más compleja, es a través de la práctica que se agilizará la comprensión y elección de un modelo de pronóstico a partir de dichas funciones y sus gráficas.

Para los modelos multiplicativos también existe una manera de identificarlos de acuerdo a su comportamiento teórico, su identificación es más complicada pues en muchas ocasiones las gráficas de ACF y PACF no serán lo suficientemente claras para interpretar el comportamiento del proceso, en este caso será necesario probar con varios modelos para comparar el ajuste al proceso de cada modelo; a continuación se muestra el cuadro de comportamiento teórico de las ACF y las PACF:

Modelo	ACF	PACF
AR(p)*SAR(P)	Decrece	Se corta después de p+sP intervalos
MA(q)*SMA(Q)	Se corta después de q+sQ intervalos	Decrece
Mezclados	Decrece	Decrece

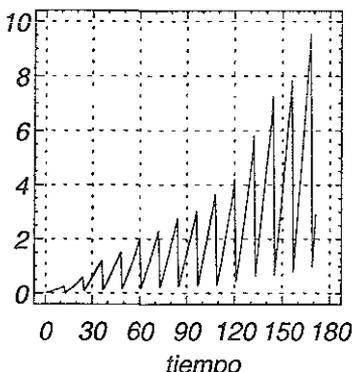
Los siguientes son sólo algunos ejemplos de las ACF y PACF de los modelos mezclados:

Modelo	ACF teórica	PACF teórica
AR(1)*SAR(1) Con coeficiente ϕ_1 positivo y Φ_1 positivo	 Decae	 Se corta después de 2 intervalos
MA(2)*SMA(1) Con coeficiente θ_1 positivo θ_2 negativo y Θ_1 negativo	 Se corta después de dos intvlos.	 Decae
AR(1)*SMA(1) Con ϕ_1 negativo y Θ_1 negativo	 Decae	 Decae

EJEMPLO

La serie de tiempo que a continuación analizaremos fue tomada del BIE (Banco de Información Económica) que es un órgano del INEGI. Se trata de las finanzas públicas del Estado. Más adelante hablaré más sobre el BIE.

(X 100000) Finanzas públicas

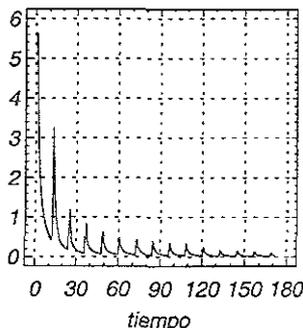


La serie de tiempo no es estacionaria, la gráfica de la serie presenta varianza y media crecientes, así como un comportamiento estacional con periodo $s=12$.

Serán necesarias transformaciones de la varianza y diferencias tanto ordinarias como estacionales para poder aplicar la metodología Box-Jenkins.

De acuerdo al orden establecido, las transformaciones de la varianza serán las primeras en realizarse:

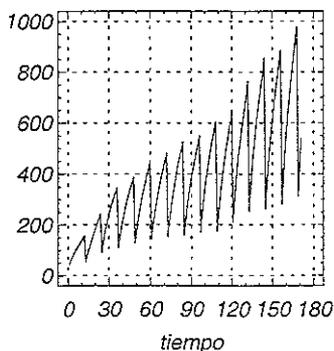
(X 1E-4) Transformación recíproco



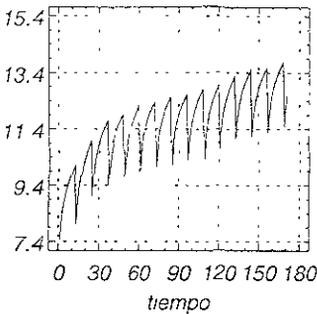
Con una transformación recíproco disminuye el nivel de los datos pero seguimos teniendo varianza en las observaciones de la serie, esta transformación no nos funciona.

Aplicando la transformación raíz cuadrada sólo disminuye el nivel de la serie de tiempo, pero realmente no ha sido modificada la varianza de los datos, no funciona esta transformación.

Transformación raíz cuadrada



Transformación logarítmica



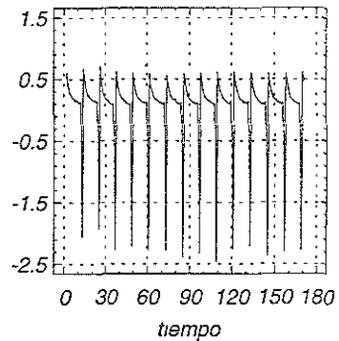
La transformación logarítmica sí disminuye la varianza de los datos y baja el nivel de la media, por lo cual sólo resta disminuir la tendencia y el comportamiento estacional.

Para suavizar la tendencia, tenemos que aplicar a la serie transformada diferencias ordinarias de orden n , generalmente, son necesarias únicamente diferencias de primer o segundo orden.

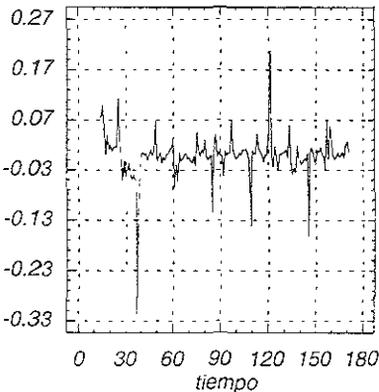
El resultado de aplicar a la serie de tiempo una diferencia ordinaria se ve en la gráfica a la derecha, el nivel de la media y la tendencia han disminuido.

Ya sólo queda el comportamiento estacional de la serie de tiempo, aplicaremos diferencias estacionales.

Serie con una diferencia estacional



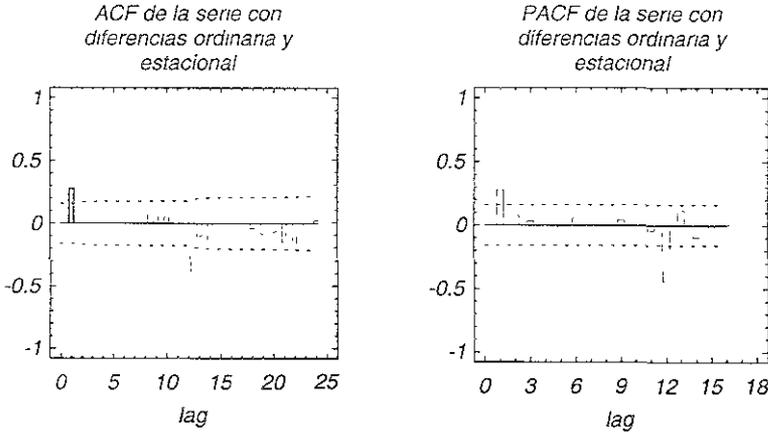
Serie con una diferencia estacional



Después de aplicar una diferencia estacional el marcado comportamiento cíclico ha disminuido. También podemos apreciar cómo se han perdido datos debido a las diferencias que fueron necesarias.

La serie de tiempo es ya susceptible de aplicar el método Box-Jenkins podemos corroborarlo al ver las gráficas de la ACF y la PACF de la serie de tiempo resultante:

Las gráficas de la ACF y la PACF disminuyen rápidamente y sólo sobresalen los coeficientes 1 y 13 que corresponden a la longitud del periodo de estacionalidad.



De acuerdo con estas gráficas podemos deducir que se trata de un modelo multiplicativo ARIMA(1,1,0)x SMA₁₂(1).

Esta es la primera parte en la identificación de modelos, la estabilización de la serie de tiempo y la identificación preliminar del modelo.

IV.4.2.2 ESTIMACIÓN

En el camino hacia un buen pronóstico la identificación de un modelo tentativo es la primera estación, la estimación de los parámetros del modelo elegido será la siguiente parada antes de continuar. Así, los p parámetros (φ₁, φ₂,..., φ_n) y los q parámetros (θ₁, θ₂,..., θ_n) del modelo general ARIMA(p,d,q)

$$(1-\phi_1 B-\dots-\phi_p B^p)(1-B)^d Z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B-\dots-\theta_q B^q) \varepsilon_t \tag{IV.10}$$

se eligen de manera tal que minimicen la suma de los cuadrados de las diferencias entre una serie real Z_t y una serie ajustada Z_t, esto es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= (\text{serie real}) - (\text{modelo ajustado}) \\ &= Z_t - (\phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) \end{aligned}$$

a estas diferencias se les llama **residuales** una vez que se han sustituido los vectores de parámetros autorregresivos φ=(φ₁, φ₂,..., φ_n) y de de medias móviles θ=(θ₁, θ₂,..., θ_n) por sus estimadores, que como ya se dijo tienen que minimizar la suma del cuadrado de los errores.

A esta suma se le representa por:

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=1}^N e_t^2 \quad \text{IV.11}$$

Donde N es el número de observaciones de la serie. Como también se mencionó ya, tenemos que sustituir a los parámetros por sus estimadores, entonces denotaremos a los vectores de los estimadores por:

$$\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p) \text{ y } \hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q)$$

Y al sustituir estos vectores reescribimos IV.11 como:

$$S(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \sum_{t=1}^N \hat{e}_t^2$$

Para calcular los valores de los estimadores podemos usar varios procedimientos, ya sean los mínimos cuadrados, máxima verosimilitud, método de los momentos y un procedimiento no lineal. Todos estos métodos son iterativos y necesitan cálculos engorrosos y lentos que, gracias al desarrollo de la computación y de los programas especializados en Estadística son ahora fáciles de completar.

Máxima Verosimilitud Condicional

Tenemos que ajustar al modelo ARIMA(p,d,q) los parámetros ϕ y θ de una serie de tiempo Z_t de n observaciones y que requirió de d diferencias para ser estacionaria, entonces tenemos que la serie de tiempo no estacionaria original constaba de $N=n+d$ datos.

Suponemos que la media de la serie $\mu=0$, que los errores e_t son ruido blanco y por lo tanto su valor esperado es igual a cero y que la varianza es σ^2 . La función de verosimilitud logarítmica condicional (L -) es:

$$L(\phi, \theta, \sigma_a) = -n \ln \sigma_a - \frac{s(\phi, \theta)}{2\sigma_a} \quad \text{IV.12}$$

Donde (-) enfatiza que la función de verosimilitud y la suma de los cuadrados de los errores son condicionadas a los valores no observados de la serie de tiempo, esto es, $Z_0, Z_{-1}, \dots, Z_{-p+1}, e_0, e_{-1}, \dots, e_{-q+1}$.

Entonces tanto la suma del cuadrado de los errores ($s(\phi, \theta)$) como la función de verosimilitud logarítmica $L(\phi, \theta, \sigma_a)$ están condicionadas a la elección de estos valores pasados, una elección posible sería sustituir $z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p+1}$ y $e_0, e_{-1}, \dots, e_{-q+1}$ por sus valores esperados de $z(\mu=0)$ y de ϵ (que como es ruido blanco su valor esperado es cero), pero esta aproximación puede ser no satisfactoria si las raíces del polinomio $B(\phi)=0$ están cerca de la no estacionaridad (próximas a 1) y/o la serie de tiempo contiene pocos datos.

Para poder calcular ϕ y θ utilizaremos un método iterativo que consiste en dar un valor inicial a ϕ y θ y se deben calcular valores de $z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p+1}$ estos pueden ser calculados a través de lo que en inglés llaman "backcast" literalmente su traducción

sería "pronóstico hacia atrás" que es un cálculo para extrapolar los valores no observados de la serie, para representar esta operación utilizaremos el operador "salto hacia delante":

$$F^j Z_t = Z_{t+j} \tag{IV.13}$$

Entonces podemos hacer un retroceso en la serie de tiempo utilizando:

$$\begin{aligned} \phi(F)Z_t &= \theta(F)\varepsilon_t \\ Z_t &= \phi^{-1}(F)\theta(F)\varepsilon_t \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Se calcularán tantos valores de $z_0, z_{-1}, z_{-2}, \dots, z_{-p+1}$ hasta que la diferencia entre z_{-p+n+1} y z_{-p+n} sea menor a una diferencia dada M , es decir, que converjan. Con estos nuevos valores de z , calculamos entonces la diferencia entre los datos reales y los resultados del modelo calculado con los valores de ϕ y θ iniciales. Se puede calcular entonces la suma de los errores al cuadrado; para que sea mínima se probará con otro valor de (ϕ, θ) .

EJEMPLO

Continuando con el ejemplo anterior, de acuerdo con el modelo propuesto tenemos un modelo $ARIMA(1,1,0) \times SMA_{12}(1)$. Para simplificar, tomaremos únicamente la parte $AR(1)$, es decir, calcularemos una ϕ_1 tentativa y los valores $z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p+1}$ necesarios.

Tomaremos los primeros términos de la serie de tiempo de las finanzas públicas:

t	Z_t	Z_t transformada
1	1778.5	0.03256283
2	3236.2	0.04316369
3	4822.3	0.02235543
4	6441.3	0.00086863
5	8287	-0.08434308
6	10063.3	-0.08163922
7	12144.5	-0.06485487
8	14100.5	-0.06761991
9	16476.1	-0.0594557
10	18893.4	-0.05142878

La forma del modelo $AR(1)$ para calcular los backcast sería:

$$a_t = Z_t - \phi Z_{t-1} \tag{IV.15}$$

Y el modelo $AR(1)$ normal para pronosticar despejando los errores:

$$\varepsilon_t = Z_t - \phi Z_{t+1} \tag{IV.16}$$

De acuerdo a la gráfica de autocorrelación de la sección anterior tomaremos $\phi=0.3$ como valor inicial.

Queremos calcular la mínima suma de cuadrados:

$$s(\phi = 0.3) = \sum_{t=-M}^{10} [E(a_t | \phi = 0.3, Z)]^2 \quad \text{IV.17}$$

Donde M es la diferencia establecida para detener las iteraciones y será elegida tal que:

$$|E(Z_t / \phi = .3, Z) - E(Z_{t-1} / \phi = .3, Z)| < .005$$

para $t \leq -(M + 1)$

Para obtener $E(a_t)$ emplearemos: $E(a_t) = E(Z_t) - \phi E(Z_{t-1})$ pero para poder calcular $E(a_t)$ cuando t es igual o menor a 1, necesitamos de $E(Z_t) = E(\varepsilon_t) + \phi E(Z_{t-1})$ para poder hacer el backcast, además como desconocemos los valores de ε_t para $z_0, z_{-1}, z_{-2}, \dots, z_{-p+1}$ tomaremos su valor esperado que es cero $E(\varepsilon_t) = 0$. La siguiente tabla muestra los resultados de estas operaciones:

t	$E(Z_t) = E(\varepsilon_t) + \phi E(Z_{t-1})$	$E(a_t) = E(Z_t) - \phi E(Z_{t-1})$
-2	0.0008792	0.00080007
-1	0.00293065	0.0026669
0	0.00976885	0.00888965
1	0.03256283	0.02963217
2	0.04316369	0.03339484
3	0.02235543	0.00940632
4	0.00086863	-0.005838
5	0.01715815	0.01689756
6	0.00495435	-0.0001931
7	0.00882356	0.00733725
8	0.00294248	0.00029541
9	0.00638982	0.00550707
10	0.00698118	0.00506424

Tabla IV.2 Resultados del backcast.

Como vemos en la tabla, la diferencia que establecimos para parar de calcular $E(Z_t)$ que es de .005 se cumple entre $t=-2$ y $t=-1$ entonces tomamos $M=1$.

De acuerdo a estos resultados podemos calcular la suma de los cuadrados de los errores $E(a_t)$ con la fórmula IV.17:

$$s(\phi = 0.3) = \sum_{t=-1}^{10} [E(a_t | \phi = 0.3, Z)]^2 = 0.00259808$$

Este es el resultado para $\phi=.3$, se deben probar otros valores de ϕ para hallar la suma mínima de los cuadrados de los errores. Un procedimiento similar se requerirá para calcular la parte SMA(1) del modelo identificado con anterioridad.

IV.4.2.3 DIAGNÓSTICO

Superadas las etapas de identificación de un modelo de pronóstico y estimación de los parámetros del mismo, es necesario saber si el modelo tentativo cumple correctamente con ciertas pruebas estadísticas que indicarán el grado de confianza que podemos tener en el modelo. De nuevo, debemos tener en mente que el mejor modelo es aquel que siendo el más sencillo arroja buenos resultados, es decir, nunca hay que olvidarnos del principio de parsimonia.

Para comprobar que un coeficiente de un estimador no ha sido mal calculado existen las siguientes pruebas de bondad de ajuste:

- Error estándar del estimador

$$\text{error estándar} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{IV.18}$$

Donde $n=N-d$.

- El estadístico t

$$t = \frac{\text{estimador}}{\text{error estándar}} \quad \text{IV.19}$$

El estadístico t indica si un coeficiente ϕ o θ son significativos o se deben omitir (en el caso de modelos sobreespecificados).

- Límites de confianza

Las siguientes herramientas estadísticas para comprobar el ajuste del modelo:

- Estimador de la desviación estándar de los residuales
- Suma de los errores al cuadrado (que tiene que ser la mínima)
- ACF y PACF de los residuales
- Periodograma Integral de los residuales
- Estadístico Box-Pierce de los residuales

En el proceso de diagnóstico, habrá que comparar varios modelos para una misma serie de tiempo para asegurar que se elegirá el modelo con menor varianza en los errores. Hay que subrayar que para que dos modelos puedan ser directamente comparados deben haberse obtenido de una misma serie de tiempo, es decir, una serie con las mismas transformaciones.

IV.4.2.3.1 ANÁLISIS DE LOS RESIDUALES

Autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuales.

Para un modelo $\phi(B)Z_t = \theta(B)\varepsilon_t$ que ha sido bien identificado y ajustado tenemos:

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(B)\hat{\phi}(B)z_t$$

Que son llamados residuales y que pueden ser valorados como:

$$\varepsilon_t = a_t + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

El estimador es igual al ruido blanco más un error estándar que será cercano a cero, siempre y cuando el modelo ajustado sea correcto. Se debe esperar que al estudiar el comportamiento de los residuales se confirme el correcto ajuste del modelo.

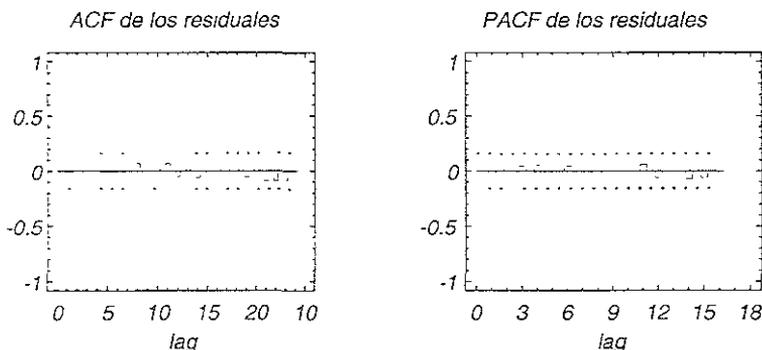
La función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial de ε_t indicará si su comportamiento se puede tomar como ruido blanco o si siguen un patrón que hay que calcular y anexarlo al modelo.

Ahora, como no sabemos el valor exacto de (ϕ, θ) no podemos ponernos tan exigentes con los residuales y debemos darles un margen de error (error estándar), que marcará los límites de superior e inferior de tolerancia para las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial. Este error estándar se toma tal que:

$$\text{error estándar} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Sin embargo, éste no es útil para series de tiempo pequeñas, pues se reduce la significancia.

Las siguientes gráficas muestran las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuales del ejemplo de la serie de tiempo Finanzas Públicas, en éstas, las líneas punteadas marcan los límites del error que se permite para los residuales:



Prueba portmanteau

Esta prueba toma un número determinado de autocorrelaciones de los residuales y determina si el modelo es adecuado a través de:

$$Q = n \sum_{k=1}^K r_k^2(\varepsilon) \quad \text{IV.20}$$

donde $n=N-d$ y K es un número suficientemente grande tal que $\psi(B)$ del polinomio $z_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)\varepsilon_t = \psi(B)\varepsilon_t$, sea despreciable después de $j=K$ (según Box y Jenkins, libro citado, pag. 291).

Y se comporta como χ^2 con $(K-p-q)$ g.l., el valor de Q será observado en tabla de valores bajo la curva de la distribución χ^2 , si el modelo es inadecuado, Q será mayor al valor en tablas.

Periodograma integral de los residuales

Esta prueba se define como:

$$C(f_i) = \frac{\sum l(f_i)}{ns^2} \quad \text{IV.21}$$

Donde f_i es la frecuencia, s^2 es el estimador de σ^2 e $l(f)$ es el periodograma:

$$l(f_i) = \frac{2}{n} \left[\left(\sum_{t=1}^n \varepsilon_t \cos 2\pi f_i t \right) + \left(\sum_{t=1}^n \varepsilon_t \sin 2\pi f_i t \right) \right]$$

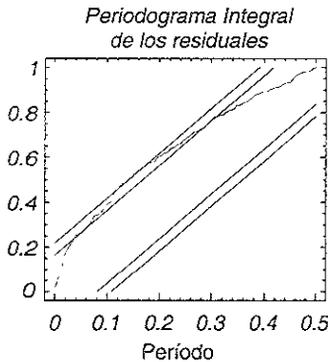
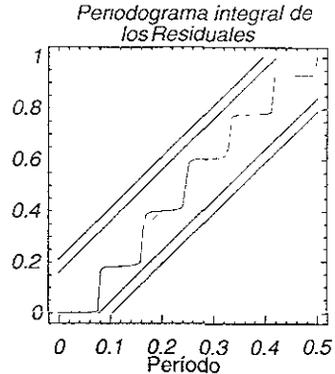
$C(f_i)$ detecta la presencia de tendencia o estacionalidad en los residuales.

Si de un modelo fueran conocidos sus parámetros exactos, entonces los residuales serían ruido blanco, al dibujar la gráfica de IV.21, se trazaría una línea recta en un plano que va de (0,0) a (0.5,1) que es el dominio de frecuencias.

En la práctica no conoceremos los valores exactos de los parámetros, sólo podremos calcular sus estimadores, por lo tanto los residuales también serán estimaciones, por lo que no se dibujará esta línea recta, pero sí una apegada que no deberá tener patrones sistemáticos, por otro lado, si el modelo no fue bien estimado y no fueron ajustadas al modelo la tendencia o la estacionalidad, la gráfica del periodograma integral mostrará un comportamiento no aleatorio, alejándose de esta línea ideal.

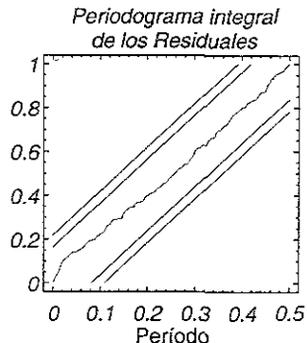
De nuevo servirá de ejemplo la serie Finanzas públicas, a continuación se muestran tres tipos de gráficas del periodograma integral:

Si al modelo no se incluye la parte estacional, el periodograma integral de los residuales mostrará este comportamiento. Esta primer gráfica muestra una especie de escalera que es signo de estacionalidad.



Si no se hacen las diferencias necesarias para disminuir la tendencia de una serie de tiempo, ésta no será estacionaria, y el periodograma integral de los residuales mostrará este problema.

Cuando la serie de tiempo ha sido correctamente filtrada (cuando se han hecho las transformaciones necesarias) la línea de los residuales será muy apegada a la línea recta que indica que los residuales son ruido blanco. El modelo es satisfactorio.



Como hemos visto, son diversas las herramientas para comprobar que los residuales de un modelo de pronóstico se comporten como ruido blanco. Si la serie de tiempo fue correctamente filtrada, los residuales seguirán este patrón de comportamiento, en caso contrario, son estas mismas pruebas las que nos indicarán si el modelo propuesto ha sido sobre-especificado o sub-especificado.

IV.4.2.3.2 MODELOS SOBRESPECIFICADOS

Se dice que un modelo está sobreespecificado cuando contiene coeficientes de más, esto quiere decir que el modelo es más complicado de lo que debería y entonces hay que quitarle parámetros. A los parámetros que están de más se les llama **redundantes** o **excesivos**.

Tenemos entonces la hipótesis nula

$$H_0: \beta_i = 0$$

esto es que el coeficiente del estimador del parámetro es insignificante y que podemos omitirlo del modelo, contra la hipótesis alternativa:

$$H_a: \beta_i \neq 0$$

la cual indica que el parámetro es necesario para el modelo.

El problema se resuelve utilizando el estadístico t de los coeficientes.

$$T = \frac{\beta_i}{\sigma_{\beta_i}} \quad \text{IV.22}$$

Que se comporta aproximadamente como una t-student con $(n-p-q)$ g. l. si no hay constante (media) o con $(n-p-q-1)$ si hay constante. Como queremos un grado de confianza del 95% y la prueba es de dos colas tenemos $\alpha/2=0.025$, el valor en tablas para infinitos grados de libertad es de 1.96, para facilitarnos las cosas redondeamos y tomamos este valor como 2.

Por lo tanto aceptamos la hipótesis nula H_0 cuando:

$$|T| < 2$$

esto quiere decir que el parámetro esta de más en el modelo y lo debemos eliminar para tener un modelo que cumpla con el principio de parsimonia.

Ai contrario, rechazamos H_0 si:

$$|T| \geq 2$$

el parámetro es significativo y debe formar parte del modelo de pronóstico.

IV.4.2.3.3 MODELOS SUBESPECIFICADOS

La única forma de saber si a un modelo de pronóstico le hacen falta parámetros ya sean autorregresivos (ϕ) o de medias móviles (θ) es a través de los residuales, pues si al revisar las gráficas de la ACF y la PACF estas no se comportan como ruido blanco, quiere decir que siguen un patrón que no es aleatorio y que por lo tanto se puede deducir un modelo para los residuales. Entonces, es necesario agregar al modelo los parámetros **uno a uno** y realizar la prueba de hipótesis anteriormente vista, de no

hacerlo así, se corre el riesgo de caer en parámetros redundantes y la consecuente complicación del modelo.

IV.4.2.4 PRONÓSTICO

Hasta este momento, el modelo elegido ha pasado por las pruebas necesarias para asegurar que sea parsimonioso y que arroje resultados confiables, entonces, hemos llegado a la etapa donde se aplica el modelo ARIMA(p,d,q) elegido para obtener pronósticos de la serie de tiempo.

Como vimos en el Capítulo I, se pronostica para un horizonte de tiempo H, esto es, pronosticamos h períodos de tiempo a partir del tiempo t (al cual se le llama origen), así a partir de la serie Z_1, Z_2, \dots, Z_t obtendremos $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+h}$.

Claro que estos pronósticos tienen un margen de error, estos se definen como:

$$\varepsilon_t(h) = Z_{t+h} - Z_t(h) \quad \text{IV.23}$$

esto es, el error para el período t+h es la diferencia entre el valor real (una vez que se tiene acceso a éste) y el valor pronosticado. Este error tiene un costo, que en la práctica se desconoce la función que lo describe, pero en general puede definirse como:

$$C(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^2 \quad \text{IV.24}$$

Donde α es una constante positiva. La mejor solución a la función anterior será por supuesto aquel pronóstico que minimice el costo, pero resulta que el resultado que minimiza el costo es la media de la distribución del pronóstico, esto es, $E[Z_{t+h}]$.

Para concluir, los modelos de pronóstico deben estar en constante actualización para que sigan siendo útiles y confiables, para lograr esto se deben hacer básicamente dos cosas:

- > Actualizar la serie de tiempo cuando se encuentren disponibles los datos reales que fueron pronosticados.
- > Actualizar el valor de los parámetros del modelo ARIMA(p,d,q).

IV.4.3 Resumen

Para obtener modelos de pronóstico confiables es necesario que la serie de tiempo sea homogénea, esto se logra al hacer transformaciones que disminuyan la varianza, la tendencia y el comportamiento estacional. Una vez lograda una serie de tiempo homogénea se necesita "filtrar", esto es, extraer los patrones de comportamiento que

no sean aleatorios, así, los filtros de integración, autorregresivo y de medias móviles extraerán de la serie estos movimientos no aleatorios.

El primer modelo que se tendrá será llamado modelo tentativo, y se extraerá de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial y sus gráficas, también son necesarios una serie de pasos iterativos para lograr que el modelo sea parsimonioso y que la suma de errores al cuadrado sea mínima. Los pasos iterativos son:

- > Identificación de un modelo tentativo
- > Estimación de los parámetros de dicho modelo
- > Diagnóstico del modelo

Cuando se logra obtener el mejor modelo entonces ya podemos calcular pronósticos para dicha serie de tiempo.

Como ya se ha mencionado, un pronóstico debe ser utilizado para planear las acciones necesarias para alcanzar metas y objetivos deseados.

NO SE PUEDE VER EL
DE LA UNIDAD 11

CAPÍTULO V SOFTWARE DE APLICACIÓN E HIPERLIGAS EN LA RED

En este capítulo se analizarán las capacidades de diferentes paquetes y lenguajes de cómputo con los que se pueden manipular datos de tipo estadístico, algunos de ellos lo hacen de manera general, algunos otros han sido especialmente diseñados para implementar métodos estadísticos para tareas específicas, en este trabajo se estudiarán los paquetes que puedan manipular series de tiempo y en especial la metodología Box-Jenkins. Así mismo, en el afán de divulgar el uso de las series de tiempo para obtener pronósticos confiables a través de los modelos ARIMA(p,d,q), me di a la tarea de investigar en la Internet las páginas web que existen acerca del tema.

V.1 SOFTWARE DE PROPÓSITO GENERAL

Hojas de cálculo

Existen programas para computadora llamados “hojas de cálculo” que tienen la capacidad de manipular de manera ágil y sencilla datos numéricos, con los cuales realizan análisis estadístico.

La facilidad con la que los datos son manipulados en las hojas de cálculo, propician la simulación de los procesos ARIMA(p,d,q), así por ejemplo para simular un proceso que se comporte como ruido blanco, debemos sumar doce números aleatorios (recordemos que los números aleatorios en estos programas siguen una distribución uniforme) y al resultado de la suma se le resta seis, los números obtenidos de esta manera formarán un proceso con media cero y varianza σ^2 y seguirán una distribución Normal.

De igual manera, la simulación de los procesos ARIMA es viable, por ejemplo, el modelo AR(1):

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

A partir de este modelo con una ϕ_1 dada (recordemos que para que un proceso autorregresivo de primer orden sea estacionario se requiere que $-1 < \phi_1 < 1$) entonces:

$$Z_1 = \phi_1 Z_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon_1$$

$$Z_2 = \phi_1 Z_1 + \varepsilon_2$$

etc.

Las hojas de cálculo también permiten la creación de “macros”, esto es, procedimientos definidos por el usuario los cuales pueden utilizar las fórmulas que han sido incluidas en el programa o crear nuevas fórmulas y rutinas. Se pueden programar macros que analicen las series de tiempo y creen gráficas de autocorrelaciones, periodogramas, etc.,

El uso de hojas de cálculo es una opción viable, pero hay que recordar que existen programas especializados en estos procesos estadísticos.

Lenguajes generales de programación

Los lenguajes de programación tales como Delphi, C++, Visual Basic, etc., permiten la creación de rutinas y programas que cubran las necesidades específicas de las personas que los soliciten, sin embargo, no todos los programadores tienen conocimientos de estadística y mucho menos de la metodología Box-Jenkins, ni todos los profesionales de la estadística poseen la habilidad de programar, por lo que en la creación de estos programas se requerirá la colaboración de por lo menos dos personas: una que programe y otra que asesore en los procesos estadísticos que se implementen.

Los egresados de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación, poseen los conocimientos matemáticos, estadísticos y de programación deseados para crear paquetes de software de esta índole.

Programar los requerimientos específicos que se necesitarán resulta muy conveniente, de esta manera podemos obtener una interfaz diseñada a nuestra conveniencia, los resultados del análisis que se requieran se dispondrán de una manera clara para nuestros propósitos; la desventaja es que para la creación de un **buen** sistema que desarrolle esta clase de procedimientos de análisis de series temporales, se requerirá además de gente capaz y capacitada, de un amplio período de tiempo que significará dinero que se dejará de percibir hasta que se consiga este sistema. Como veremos más adelante, existen paquetes especializados en estadística y en el análisis de las series de tiempo.

V.2 SOFTWARE ESPECÍFICO

Compañías como Quantitative, Manugistics y Estima, han creado paquetes de cómputo especializados en análisis estadístico, estos paquetes han evolucionado de acuerdo a los estándares, así, Statgraphics por ejemplo, dejó de ser un paquete basado en DOS para adquirir un ambiente gráfico basado en Windows.

¿Cuál es la ventaja de estos paquetes sobre las otras herramientas anteriormente vistas?

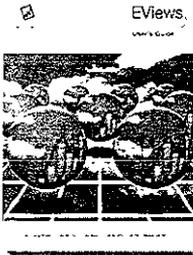
- Aunque con las llamadas "hojas de cálculo" se pueden realizar diversos cálculos estadísticos, no tienen implementados procesos específicos de pronósticos, por lo que se deben crear macros, es decir, subprogramas o rutinas que se programan dentro de la hoja de cálculo como complemento a los procesos del paquete, la desventaja es que se debe aprender a programar en el lenguaje definido para crear estas subrutinas. En cambio los programas que han sido específicamente elaborados para estos procesos únicamente requieren que sean introducidos los datos de la serie de tiempo de la que se desea obtener un pronóstico.

Los programas especializados en procesos estadísticos están hechos en lenguajes de programación tales como C++, Visual Basic, Delphi, etc., y han sido probados y diseñados para tener un alto desempeño en los requerimientos de los usuarios. La desventaja es su precio, ya que generalmente es muy elevado para estos productos. Por otro lado, antes de adquirir uno de estos paquetes, tenemos que asegurarnos que cuenten con los procesos que se necesitan para el análisis deseado.

A continuación se hace referencia a algunos de los paquetes existentes en el mercado que analizan y pronostican series de tiempo:

EViews 3.1

Eviews es un paquete hecho por la compañía Quantitative MicroSoftware. Eviews 3.1 se basa en el sistema operativo Windows que realiza análisis econométricos y pronósticos.



Según sus creadores, Eviews 3.1 es una herramienta poderosa para la realización de análisis de regresión de datos y pronósticos. Aunque no menciona claramente la metodología Box Jenkins, el paquete realiza correlogramas, autocovarianzas y autocorrelaciones.

Existen también versiones alternas de este paquete que no son tan completas y modernas, pero son más baratas.

El paquete cuesta \$795 USD Para un solo usuario.



Se ha liberado una versión para estudiantes la cual está basada en la poderosa herramienta que es Eviews, según dicen. La versión para estudiantes sólo se diferencia en que no es igual de poderosa que la versión profesional, pero tiene una ventaja, es menos complicada por lo que el alumno podrá concentrarse en aprender el material de su curso y no en aprender a manejar un paquete complicado. El costo por supuesto es menor: \$39.95 USD.

Si gustan visitar la página de la compañía en la Internet, ésta es la dirección:
<http://www.eviews.com>

RATS

ESTIMA es la compañía creadora del paquete llamado RATS (Regresion Analysis of Time Series) este programa es su paquete estrella: sus autores presumen que es un paquete rápido y eficiente para el análisis de series de tiempo y econometría. Existen versiones para Windows, DOS, MAC, UNIX y LINUX.



Estima

RATS cuenta con un editor interactivo que permite crear y correr programas (macros) hechos en el lenguaje especial de RATS.

Este paquete tiene las siguientes características:

Estadísticas

- ◆ Regresión Múltiple
- ◆ Regresión con errores autorregresivos
- ◆ Regresión con corrector de heteroscedasticidad
- ◆ Matrices de covarianza
- ◆ Modelos de redes neuronales

Procedimientos de series de tiempo

- ◆ Modelos ARIMA incluyendo modelos multiplicativos
- ◆ Análisis espectral
- ◆ Descomposiciones de varianza
- ◆ Función de transferencia

Pronósticos

- ◆ Modelos de series de tiempo
- ◆ Modelos de regresión
- ◆ Suavizamiento exponencial
- ◆ Simulaciones con aleatoriedad
- ◆ Desarrollo de pronósticos estadísticos

Gráficas

- ◆ Lee y escribe datos ASCII, DIF, PRN, DBF y archivos binarios
- ◆ Lee y escribe Lotus Works sheet y Excel.
- ◆ Formatos propios de RATS

Si uno ya cuenta con el paquete puede entrar en la página de Internet de ejemplos. El costo del paquete depende del sistema operativo que uno tenga (precios en dólares):

VERSIÓN	COSTO	COPIA ADICIONAL
WinRATS	\$400	\$250
WinRATS plus	\$450	\$300
WinRATS 32-bits	\$500	\$350
MacRATS PPC	\$500	\$350
UNIX u Open VMS	\$700	\$350
LINUX	\$700	\$350

Por supuesto tienen página web, la dirección es: <http://www.estima.com>

STATGRAPHICS Y STATGRAPHICS PLUS

Manugistics es la compañía que desarrolla y comercializa Statgraphics. Statgraphics es un paquete muy completo para el análisis estadístico en general.



manugistics

STATGRAPHICS

Para el análisis de series de tiempo, cuenta entre otros procedimientos, con métodos de suavizamiento y con la metodología Box-Jenkins para crear modelos ARIMA(p,d,q). La interfaz del paquete es muy amigable, esto es, muy fácil de entender y utilizar; la manipulación de datos se realiza de

manera muy sencilla y permite leer y guardar los datos en varios formatos: ASCII, Lotus y Works. Las gráficas son muy claras y fácilmente pueden ser modificados sus colores, títulos, la forma y tamaño de las líneas, etc. y pueden ser guardadas con formato CGM que puede ser manipulado por otros paquetes como Word o CorelDraw, por ejemplo.

Las primeras versiones de este paquete habían sido basadas en el MS DOS, pero ahora Statgraphics plus utiliza la interfaz gráfica de Windows, esta nueva versión tiene las siguientes presentaciones:

Producto	Característica	Costo unitario
Standard edition	Cuenta con los procesos estadísticos más comúnmente requeridos.	\$649.00 USD
Quality and Design	Procedimientos especializados en el diseño de experimentos y control de calidad.	\$999.00 USD
Professional	La versión más completa, cuenta con los procesos de las dos presentaciones anteriores.	\$1649.00 USD

Ya no existe en el mercado ninguna versión de Statgraphics para MS DOS.

En la página web de Statgraphics permiten descargar dos demos:

- Time out demo. Expira algunos días después de haber sido instalado.
- Limited feature demo. Este demo no permite guardar ni imprimir tus resultados.

La página web de statgraphics se encuentra en: <http://www.statgraphics.com>.

SPSS



SPSS ofrece un rápido entorno de modelado visual que utilizando diversos procedimientos, desde lo más simple hasta lo más complejo. Según sus creadores SPSS permite crear modelos de manera interactiva, utilizando técnicas analíticas probadas y acreditadas. SPSS cuenta con una amplia gama de productos.

SPSS se compone de un producto base al cual se le pueden añadir módulos que se especializan en otros procedimientos, uno de estos módulos llamado "Tendencias" se enfoca al análisis de series de tiempo.

De acuerdo al decir de los creadores de SPSS el módulo Tendencias ayuda a mejorar predicciones con las potentes herramientas de análisis de series temporales. Y agregan:

"El análisis de series temporales es la herramienta más potente de que dispone para analizar información histórica, crear modelos y pronosticar acontecimientos futuros con cualquier dato que examine (cifras de ventas, matriculación de estudiantes, índices de crímenes)..."

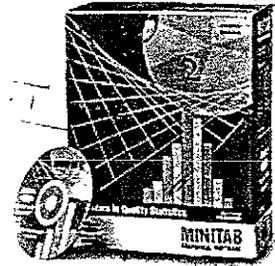
SPSS BASE 10.0 en castellano. Incluye análisis exploratorio de datos, informes OLAP, tablas de contingencia, comparación de medias, análisis de varianza, pruebas no paramétricas, correlación, regresión lineal múltiple y análisis multivariado por un precio de \$7000 pesos.

MINITAB

Minitab es el software estadístico más popular en las universidades de E.E. U.U. para introducir a sus alumnos en el análisis estadístico.

Actualmente se está comercializando la versión 13 de este paquete que incluye:

- Estadística avanzada
- Regresión y ANOVA
- Análisis de Series Temporales
- Gráficos
- Simulaciones y distribuciones
- Importación y exportación de datos
- Y otras opciones



Se puede descargar un software de evaluación para Windows.

Esta es la lista de precios:

Versión	Precio
Minitab V. 13 para Windows 95,98,2000 y NT	\$995.00 USD
Minitab V. 10 Xtra para Macintosh y Power Macintosh	
Minitab V. 12 para Windows 95 y NT	

Esta es la dirección electrónica: <http://www.minitab.com>

V.3 UN DILEMA: ¿CREAR UN SOFTWARE O COMPRAR UN SOFTWARE?

Cuán importante es la decisión de crear un paquete a la medida de nuestros requerimientos o comprar un paquete estadístico que quizás no esté a la medida de nuestro presupuesto.

Si creamos nuestro propio paquete, tiene que pasar por las etapas propias de la creación de un sistema, esto es, el ciclo de desarrollo de sistemas que comprende¹:

- Identificación de objetivos
- Determinación de los requerimientos de información

¹ Según Kendall y Kendall, "Análisis y diseño de sistemas", 1991.

- Análisis de las necesidades del sistema
- Diseño del sistema recomendado
- Desarrollo y documentación del software
- Pruebas y mantenimiento del sistema
- Implantación y evaluación del sistema

Estas etapas no funcionan independientemente, por el contrario, interactúan varias al mismo tiempo e incluso son iterativas. Adicionalmente, como se ha mencionado con anterioridad, no sólo se requerirá de gente capacitada en la creación de estos sistemas, también será necesaria la intervención de expertos en estadística que brinden las bases teórico-prácticas para la creación del sistema. A cambio de ese esfuerzo e inversión, se tendrá un paquete hecho a la medida de nuestros requerimientos que podrá ser mejorado y adicionado con nuevas funciones si son elementales para nuestros propósitos.

La otra opción, es comprar una licencia de algún software estadístico, estos programas son hechos también por profesionales y podemos tener confianza de que trabajan de manera correcta siempre y cuando el sistema de cómputo donde se instalarán cumpla con los requerimientos del paquete. El costo de estos paquetes por lo general es elevado, por lo que antes de comprar uno de estos programas se debe investigar sus características y las funciones que realiza para asegurar que sí contiene el o los métodos que se quieren implementar; por otro lado, también hay que capacitarse en el uso del paquete elegido, por lo que será más tiempo y dinero que invertir.

En efecto, es una decisión delicada que hacer, pero también de esta manera se tendrá más confianza y rapidez en la obtención del análisis de las series de tiempo y el beneficio pronto superará al costo de inversión gracias a las decisiones y estrategias tomadas con el apoyo de un pronóstico confiable.

V.4 INTERNET, HERRAMIENTA DIDÁCTICA

Antecedentes

Desde mediados del siglo XX, el desarrollo de las computadoras ha sido cada vez más rápido y sorprendente, como bien sabemos, esto ha permitido el desarrollo de la ciencia y la tecnología a pasos gigantescos y, entonces, las computadoras dejaron de ser máquinas que ocupaban gran cantidad de espacio y pasaron a una nueva era: la comunicación de datos.

La primera red llamada ARPANET fue parte de un experimento, al inicio de la década de los años 70, del Departamento de Defensa de los E.E. U.U. quienes buscaban una red informática que, en caso de incidentes, siguiera funcionando. Esta red, fue utilizada por investigadores, científicos, profesores y alumnos de universidades de los E.E. U.U. quienes descubrieron el potencial de la transferencia de datos por este medio a favor de la investigación y la educación. Posteriormente, la National Science

Foundation ofreció servicios gratuitos de su red NSFNET a toda institución educativa. Otras instituciones unieron sus propias redes a la NSFNET para empezar así la red de redes ahora llamada INTERNET.

Actualmente, el uso de la world wide web es ya cotidiano, es muy fácil obtener información actualizada sobre casi cualquier tópico, se pueden visitar bibliotecas, museos, ver obras de arte, aprender idiomas, conocer los lugares más importantes de casi cualquier país, escribir cartas electrónicas que llegan instantáneamente a su destino, mandar y recibir toda clase de documentos, "chatear" con gente en otros países, estar al día en los resultados deportivos, comprar y vender objetos de toda índole sin tener que poner un pie en la calle, en fin, a través Internet podemos hallar todo lo que nos podamos imaginar y mucho más.

Como vemos Internet ha invadido prácticamente todos los campos de desarrollo de las personas, incluso ha incrementado palabras y modificado significados tales como: "estar en línea", el ya mencionado "chatear", "e-mail", "bajar" o "descargar" archivos, términos que se refieren a la obtención de algún documento por medios electrónicos, entre otros.

Internet como apoyo a la Educación

Hay que regresar al génesis, el propósito de la red se ha comercializado y alejado de lo que podría ser un excelente medio de divulgación de la ciencia y la educación, el campo educativo debe utilizar este medio para la difusión de conocimientos; concretamente la Universidad Nacional Autónoma de México debe promover la creación de nuevas páginas de hipertexto que le ayuden a cumplir sus objetivos fundamentales: promover la Investigación, la Educación y la difusión de la Cultura.

La facilidad de acceso que brinda la Internet debe ser utilizada en el campo educativo con mayor énfasis, esto es, se puede estudiar una materia, una carrera universitaria o un posgrado y hasta obtener un título de grado por este medio (dicho proyecto ha sido presentado ya a la Dirección de la ENEP Acatlán por la Mtra. MariCarmen González Videgaray) mientras que la universidad y nuestro tutor se encuentran a kilómetros de distancia o incluso en un país diferente al nuestro.

La difusión de métodos y tecnologías no debe quedarse fuera de este objetivo, a través de Internet deben darse a conocer las ventajas de la utilización de nuevos procedimientos, así como de métodos que han probado ser efectivos y útiles en campos diversos como lo son la agricultura, la investigación biomédica, la economía, la sociología, etc.

Las Series de Tiempo en la Internet

Tal es el caso de la utilización de las series de tiempo para obtener modelos matemáticos de pronóstico a través de la metodología Box Jenkins, dicho sea de paso, es una de las materias medulares de la preespecialidad de Simulación y Análisis de Decisiones en la **Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación** que se imparte en la ENEP Acatlán desde 1982. Los egresados de esta preespecialidad son capaces de abstraer modelos matemáticos de diversa índole que ayuden a cumplir los objetivos de la empresa en la cual se desarrollen profesionalmente, para puntualizar, en México debemos difundir y emplear mejores estrategias de planeación.

En ningún sector del desarrollo humano como las ciencias básicas, la economía, la política, la sociología, etc., tanto en la empresa privada como en el sector público, se puede dejar de lado un pronóstico correcto que sirva para planear estrategias de trabajo que sean dirigidas hacia un futuro con mayores probabilidades de ocurrencia. La ventaja que con este pronóstico se obtendrá, será contundente en una mejor planeación y por tanto en los resultados obtenidos cuando se alcance el horizonte de tiempo proyectado.

Por todo lo anterior, es mi consideración que una opción de la educación como lo es la Internet debe ser mayormente explotada para difundir el uso e implementación de las series de tiempo y los métodos de pronóstico en la empresa pública y privada, ya sea grande, mediana o pequeña. En este afán, investigué qué material existía en la red que fuera de valía en la obtención de series de tiempo o en el contenido teórico y en el diseño y creación de una página electrónica cuyo contenido fuera rico en estos temas. Consecuencia de esto son los siguientes temas.

V.5 HIPERLIGAS IMPORTANTES SOBRE SERIES DE TIEMPO

En esta sección encontraremos direcciones electrónicas de sitios que he considerado que su contenido puede ayudar a encontrar información sobre series de tiempo, maestrías que en su currícula incluyen materias de análisis de series de tiempo y pronósticos, así como organismos que recaudan información y ponen a disposición del público series de tiempo de diversos temas.

Esta investigación fue hecha en Internet utilizando Altavista.com como buscador, debido a su amplia cobertura de temas a nivel mundial. También se intentó encontrar información utilizando otros buscadores como Adnet.com.mx o como Yahoo.com, pero en Adnet no se encontró ningún documento que se ajustara a la búsqueda. En Yahoo la información fue menos clara que en Altavista.

Es indispensable comentar que fue muy poca la información clara e importante que ameritara comentarse en este trabajo. A pesar de la importancia que deben tener la planeación y los pronósticos para todo sector: público o privado, económico-financiero, científico, social, etc. no existe un conocimiento y mucho menos

implementación de las series de tiempo ni de las metodologías que pueden aplicarse para obtener modelos de pronóstico.

Sin embargo los documentos web aquí comentados brindan un apoyo a todos los interesados en conocer más sobre las series temporales, los pronósticos y la planeación de estrategias.

INEGI <http://www.inegi.gob.mx>

El Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) es el órgano encargado de recopilar la información de diferentes rubros en nuestro país. En el sitio web del INEGI se encuentran ligas donde se disponen los resultados de encuestas, censos y estadísticas relacionadas con la población de cada estado y sus respectivos municipios a través de la base de datos llamada SIMBAD, así encontramos también resultados de encuestas y censos económicos, estos se localizan en el llamado BIE:

Banco de Información Económica <http://www.inegi.gob.mx/bie>

En el BIE se localizan las variables de coyuntura económica de nuestro país de los sectores público y privado. Se puede localizar la información requerida por medio de un sistema jerárquico de descripciones sucesivas, las variables mostradas contienen información asociada a los valores obtenidos. Estos valores se muestran en forma tabular y gráfica, además pueden descargarse en formato Excel para su manipulación.

Series de Tiempo. Página del profr. Alejandro Ludlow
<http://centaury.uam.mx/ludlow/index.html>

Alejandro Ludlow es un profesor de la Universidad Autónoma Metropolitana que ha creado esta página cuyo contenido principal son las series de tiempo y los modelos ARMA de Pronóstico, aunque es más su enfoque hacia la Economía.

Superintendencia de Riesgos Del Trabajo
<http://www.srt.gov.ar/home.html>

La Superintendencia de Riesgos del Trabajo (SRT), es el órgano argentino encargado de regular y fiscalizar el funcionamiento de las aseguradoras, de la higiene y seguridad en el trabajo por parte de empleadores, supervisando las prestaciones otorgadas a los empleados.

Uno de los apartados de su página electrónica se dedica a brindar información estadística a los usuarios. Entre otros tipos de datos, se pueden encontrar series de tiempo agrupadas por:

1. Cantidad de trabajadores cubiertos por seguro social
2. Cantidad de empleadores asegurados
3. Masa salarial
4. Entre muchas otras

Estas series de tiempo acumulan datos mensuales desde 1996, año en que entró en funciones, por lo que se encuentran relativamente pocos datos.

Universidad Torcuato Di Tella (UTDT)

Escuela de Economía Empresarial

Master of Business Administration (BMA)

<http://www.Utdt.edu/departamentos/empresarial/mba/mbautdt.htm>

Este es un programa de posgrado de dos años de duración, de tiempo parcial, orientado a profesionales que deseen adquirir un nivel de excelencia en los negocios sin abandonar su carrera laboral. El programa busca fomentar en sus alumnos las competencias centrales que debe manejar un futuro gerente general: el valor como especialista, el valor como gerente y el valor como ser humano.

En su plan de estudios se incluyen materias de planeación, entre éstas destaca:

Decisiones Gerenciales II

Objetivo: Conocer y dominar técnicas avanzadas de resolución cuantitativa de problemas. Temas centrales: Análisis multivariado. Programación lineal. **Forecasting con series de tiempo**. Teoría de colas. Aplicaciones en estrategia, marketing, logística, operaciones, análisis financiero, y recursos humanos.

V.6 CREACIÓN DE UNA PÁGINA WEB PARA SERIES DE TIEMPO

La creación de páginas de hipertexto por instituciones educativas tales como las universidades, al respecto de asignaturas de las carreras que imparten y de las investigaciones que se desarrollan en sus campus, deben servir de apoyo académico a sus profesores, a sus alumnos y a la comunidad en general. El objetivo de una página web debe ser lograr una mejor y mayor divulgación de los logros alcanzados y que de esta manera la ciencia esté al alcance de las personas que la necesiten.

De estas páginas electrónicas se espera un contenido claro, veraz, consistente y dinámico para que quienes consulten estas páginas tengan el deseo de continuar aprendiendo por este medio y sean invitados a investigar y a proponer más material sobre el tema de su interés. De hecho, éste debe ser el afán de la educación: crear un deseo en el otro, deseo que impulse, motive e invite a la creación.

* Temas que se cubren en la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación

V.6.1 OBJETIVOS

La construcción de una página web didáctica sobre series de tiempo, tiene una triple intención:

1. Que sea útil como material didáctico para los alumnos de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación, así como para todos los interesados en el análisis de series de tiempo y los pronósticos.
2. Que sirva para promover el uso de las series de tiempo para la obtención de pronósticos auxiliares en la toma de decisiones en cualquier campo científico, económico o político.
3. Intensificar el requerimiento en el ámbito laboral de los egresados de la licenciatura en MAC con preespecialidad en Simulación y Análisis de Decisiones.

V.6.2 JUSTIFICACIÓN

Como se ha señalado hasta este momento, la red es una vía que tiene que aprovecharse para transmitir conocimientos. Debe tomarse en cuenta la gran demanda que la red Internet tiene, el número de usuarios se incrementa día con día en todo el mundo y de estos usuarios, un gran número son estudiantes y profesionistas de habla hispana que desean encontrar información sobre tópicos específicos en la red. En una investigación publicada por el boletín @NÍMATE! Acatlán en su versión electrónica, se encontró que un gran número de estudiantes de la carrera de Actuaría desean que se publiquen páginas electrónicas con los temas de sus materias que sirvan de apoyo a sus estudios.

En la investigación hecha para la realización de este trabajo encontré que es poca la información que puede obtenerse en el idioma español sobre las series de tiempo, métodos para obtener pronósticos y en particular los modelos ARIMA de Box-Jenkins, a pesar de la gran utilidad y beneficios que estos brindan a quienes los emplean.

La página electrónica que desarrollaré pretende cubrir una pequeña parte de la currícula de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación (la licenciatura consta de 45 asignaturas), dar inicio a la creación de sitios web cuyo contenido sean las materias de esta licenciatura y cubran los temas de estudio de dichas materias. Debido a que la página electrónica no se encontrará en una intranet, podrá tener acceso todo aquél que su interés se enfoque en su contenido, por esto mismo, creo que servirá también para que se difunda aún más la gama de capacidades que los egresados de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación poseen y se fomente su contratación en el campo laboral.

V.6.3 LA PÁGINA ELECTRÓNICA "SERIES DE TIEMPO"

Para la creación de este sitio, elegí utilizar Fireworks y Dreamweaver, ambas herramientas desarrolladas por Macromedia. Estos paquetes brindan el poder de desarrollar sitios web interactivos y crean y manipulan de manera fácil y rápida las imágenes necesarias.

La tendencia actual en la elaboración de sitios web es de crearlos con un **gran impacto visual**, que llamen la **atención** y que **inviten** al cibernauta a la página siguiente de dichos sitios; llenas de **imágenes** y animaciones, la **información** apenas **necesaria** que provoque al usuario a regresar a ese mismo sitio la próxima vez que esté en línea.

Estas mismas características son las que se desean para cualquier sitio con fines educativos y que se implementarán en particular en la página electrónica que desarrollaré. Sin embargo, esta página didáctica no presentará animaciones que representan grandes gastos de memoria y tiempo en la descarga de este tipo de archivos, por lo que su implementación fue descartada, a pesar de haber sido considerada.

V.6.4 DESCRIPCIÓN DE LA PÁGINA ELECTRÓNICA "SERIES DE TIEMPO"

Esta página fue diseñada para verse más cómodamente en una resolución de 800x600 pixeles pues es la más utilizada, esto no significará problemas en el caso de que se tenga una resolución distinta o un tamaño de monitor mayor a las 14 pulgadas que es el tamaño de monitor más común. El tamaño de la página fue restringido para evitar un scroll demasiado largo, de esta manera el contenido total de cada página será visible si el explorador se encuentra definido en el modo "pantalla completa".

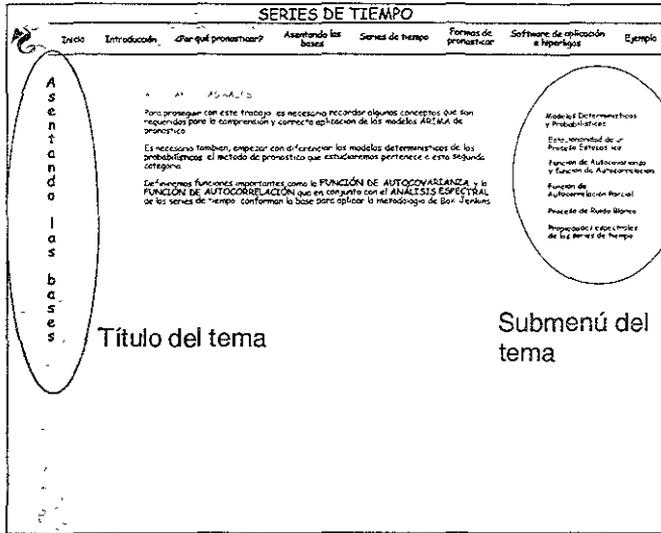
Para este sitio, utilicé colores sobrios para evitar distracciones del objetivo principal que son las series de tiempo. La figura muestra la barra de navegación, es decir, la



imagen principal que muestra los botones que son los hipervínculos hacia los temas existentes en la página y que llevarán al usuario a diversas partes del sitio según la opción elegida. Los botones en esta barra y en los submenús tendrán un "rollover", es decir, cuando el puntero del mouse pase sobre ellos serán resaltados por un brillo exterior llamado "glow" de color azul. La figura muestra un ejemplo de este comportamiento.



Para que el usuario encuentre su visita en el sitio más clara, se ha incluido el título del tema en el cual se encuentra en la parte izquierda de la página, y los submenús de cada tema en la parte derecha de la misma.



El contenido de la página es prácticamente el mismo de los capítulos que constituyen este trabajo. Las gráficas fueron modificadas a un formato que pueda ser visto en un documento web, esto es, son archivos de tipo jpg, jpeg o gif.

En particular, en esta página electrónica, la información escrita es lo más importante pero será apoyada por gráficas relacionadas con el tema que se trate, ya que, para la total comprensión de los conceptos en el estudio de las series de tiempo son necesarias gráficas de la serie estudiada, así como las gráficas de las diversas funciones requeridas para su análisis.

La misión de este sitio es difundir el uso de las series de tiempo para obtener modelos de pronóstico, despejar dudas sobre el tema y apoyar de cierta manera a que se conozcan las capacidades de los egresados de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación para que sea mayor su requerimiento en el campo laboral en México y en el Mundo. Esta página será un apoyo en la investigación de este tema para alumnos, profesores y público en general que desee conocer sobre el tema, sin embargo, no se desea que los cibernautas restrinjan su investigación sólo a este sitio y copien el contenido de este para resolver de manera rápida tareas o trabajos, la información está ahí, pero no podrá copiarse para manipularse en un procesador de texto.

Así, espero que el material encontrado en la página electrónica sea verdaderamente de ayuda académica, que estimule un deseo de autoenseñanza y que sea útil para

fomentar el uso e implementación de las metodologías para obtener modelos de pronóstico.

V.6.5 IMPLEMENTACIÓN DE LA PÁGINA ELECTRÓNICA "SERIES DE TIEMPO"

Por ser un sitio creado en la ENEP Acatlán, que habla sobre una parte específica de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación y que es ante todo una página de intenciones académicas, se buscó que la página "Series de Tiempo" se hospedara en el servidor de la Escuela, este servidor es un Silicon Graphics llamado "Indiana" que también hospeda a la página principal de la ENEP Acatlán.

La dirección electrónica de esta página principal de la UNAM Campus Acatlán es:

<http://www.acatlan.unam.mx>,

y como los archivos que constituyen la página "Series de Tiempo" fueron colocados en una subcarpeta de este servidor la dirección correspondiente al sitio es:

http://www.acatlan.unam.mx/series_tiempo/inicio.htm.

Esta dirección de URL fue dada de alta en buscadores de la red tales como:

- www.altavista.com
- www.webcrawler.com
- www.voila.com
- www.infoseek.com
- www.lycos.com

entre otros, para que fuera visible para cualquier persona que buscara en ellos los siguientes tópicos:

- series de tiempo
- series
- tiempo
- metodología Box Jenkins
- box
- jenkins
- pronósticos
- time series analysis
- forecasting methods
- UNAM
- Acatlán
- ENEP Acatlán

Los tópicos en inglés fueron incluidos pues gran parte de los hispanoparlantes busca información en este idioma, además, voila.com es un buscador francófono para aquellas personas que hablen español con fluidez.

V.6.6 COMENTARIOS SOBRE LA PÁGINA ELECTRÓNICA "SERIES DE TIEMPO"

Cuando la página estuvo completa, se notificó a los alumnos del grupo 1902 de noveno semestre de la preespecialidad de Simulación y Análisis de Decisiones, quienes llevan la materia "Modelos de Decisión con Procesos Estocásticos II" cuyo temario abarca la metodología de Box-Jenkins. La profesora de esta materia, la Act. MariCarmen González, asesora de este trabajo, entregó a estos alumnos una actividad que requería la visita al sitio "Series de Tiempo".

Esta práctica virtual constó de 10 preguntas de las cuales las primeras cinco cuestionan sobre la estimación de parámetros en la metodología Box-Jenkins de un ejemplo en la página, tema que se llevaba en clase en ese momento; las cinco restantes recabaron la opinión de los alumnos respecto a la página. La práctica se muestra a continuación:

PRÁCTICA DE CAMPO VIRTUAL "CONOCIENDO UN SITIO DE SERIES DE TIEMPO EN ACATLÁN"

Tema: Estimación de parámetros.

Objetivo: Revisar el tema de estimación de modelos y opinar sobre un sitio académico propio de Acatlán.

Descripción: Visitaremos ahora el sitio

http://www.acatlan.unam.mx/series_tiempo/inicio.htm construido por un egresado de MAC (Julio A. Torres Sosa) como parte de su tesis.

1. Presiona en "Formas de pronosticar", ¿Cómo aparecen enunciados los pasos de la metodología de Box-Jenkins?
2. Presiona "Estimación" ¿Cuándo se indica que la aproximación de los valores prehistóricos por sus valores esperados incondicionales puede no ser satisfactorio?
3. Presiona "Identificación" y al final de esta sección presiona "¿Quieres ver un ejemplo?". ¿Qué transformación y/o diferencias se eligió hacer a los datos?
4. ¿Cuál fue el modelo tentativo seleccionado?
5. Regresa a "Estimación" y vuelve a presionar en "¿Quieres ver un ejemplo?". ¿Qué suma de los cuadrados de los residuales se obtuvo para el valor inicial de 0.3 del parámetro?
6. Dentro de "Software de aplicación e hiperligas en la red", ¿Qué opinas de lo que se dice en el apartado "Un dilema: ¿Crear o comprar un software?"
7. ¿Qué te parece la presentación de la página?
8. ¿Qué opinas sobre el contenido? ¿Faltaría o sobraría algo? ¿Crees que puede servir como apoyo para aprender este tema?
9. ¿Crees que sea importante que nuestra Escuela ofrezca este tipo de materiales en Internet para alumnos o cualquier otro curioso?
10. ¿Cuántos archivos te imaginas que constituyen este sitio?

También se pidió una conclusión.

Se pide al lector que resuelva las primeras cinco preguntas visitando el sitio. Algunas de las respuestas que los alumnos dieron a las otras cinco preguntas se muestran a continuación:

5. Dentro de "Software de aplicación e hiperligas en la red", ¿Qué opinas de lo que se dice en el apartado "Un dilema: ¿Crear o comprar un software?"

"...Nosotros creemos que a pesar de que adquirir un paquete puede ser costoso, siempre será altamente retribuyente si se emplea adecuadamente. En lo que se refiere al tiempo que debemos invertir en la capacitación del paquete elegido nunca será mayor al tiempo invertido en la elaboración de un software. Por lo tanto podemos concluir que es mejor ajustarse y adquirir un paquete que elaborar y ajustar un software a nuestras necesidades."

Alejandro Diosdado, Gerardo Navarrete, Jorge Ontiveros y David Villegas.

"Creemos que es una buena reflexión para los que se dedican a esto, ya que efectivamente es un dilema, creemos que habría que evaluar la situación en la que se encuentran los problemas que se desean resolver, si es muy general, en nuestra opinión se debería utilizar alguno ya hecho y conocido por los usuarios ya que esto reduciría la inversión y si el o los problemas son muy particulares, tal vez valdría la pena hacer uno de acuerdo a las necesidades requeridas."

Fabiola Muñoz, Claudia Martínez.

"En México el desarrollo de un software a la medida no se paga como en otros países, por lo regular el desarrollo de un paquete a la medida es más costoso que uno comercial. El paquete específicamente a la medida debe ser mejor que uno comercial, si el desarrollador no lo garantiza así, es mejor optar por el comercial."

Ismael Gallardo.

7. ¿Qué te parece la presentación de la página?

"Tiene una muy buena presentación, el único problema que yo le veo es que con respecto al tamaño de la letra es muy pequeña le falta que sea un poco más grande y que podamos obtener la información en un archivo."

Josué Nava, Nayely Zavaleta.

"La página en general está bien diseñada en lo que corresponde a presentación y vinculación de temas, el único defecto es que no permite copiar la información contenida en ella directamente, debido a que puso la información como imagen y además la letra es muy pequeña."

Julissa Escamilla, Everardo Espinoza.

"La presentación me parece buena y bastante entendible, incluso gente que vio esta página siendo ajena a la carrera, le fue fácil entender algunos de los conceptos que se mencionan; tal vez valdría la pena hacer el comentario de que hay momentos en los que la letra se ve muy pequeña y dificulta un poco la lectura."

Gerardo Ceja, Alejandro Monroy, Donovan Moreno, Rodrigo Oropeza.

8. ¿Qué opinas sobre el contenido? ¿Faltaría o sobraría algo? ¿Crees que puede servir como apoyo para aprender este tema?

"Excelente, tiene los ingredientes necesarios y suficientes para brindarnos un apoyo, un muy buen apoyo para la estimación de modelos."

Laura Lazcano.

"El contenido, en mi opinión, es completo y suficiente para poder entender como analizar y aprovechar una serie de tiempo. Me agrada que cuente con suficientes gráficas que nos permitan darnos una idea de lo que estamos leyendo, por ejemplo las del capítulo de identificación de modelos."

Miriam Morales.

"La verdad no la revisé detalladamente como para poder afirmar que le sobra o falta algo, pero parece estar bastante completa. Algo que no vi fue una bibliografía, por cierto, últimamente he encontrado que muchas páginas ofrecen un documento más detallado en formato .pdf o en algún otro compactado, si el trabajo ya está hecho sólo hay que darle un formato para que pueda ser accesado."

Ismael Gallardo.

9. ¿Crees que sea importante que nuestra Escuela ofrezca este tipo de materiales en Internet para alumnos o cualquier otro curioso?

"Sí, porque sería un medio muy accesible en casos donde no existan muchas fuentes de información, y que más que la propia escuela proporcione este tipo de materiales como apoyo a alumnos tanto de plantel como de otras instituciones."

Julissa Escamilla, Everardo Espinoza.

"...este tipo de páginas nos ayuda a disipar dudas; además de que si no es la escuela quien proporcione este tipo de información, entonces ¿quién? ¿otras escuelas? ¿otras bibliotecas?"

Miriam Morales.

"Por supuesto que lo es, ya que de alguna forma es una presentación para todos los egresados de la carrera, ya sea como profesionistas o como académicos creemos que incluso se debería fomentar más la creación de este tipo de proyectos y temas, ya que a los alumnos nos motiva a crear nuevas cosas y superar lo ya hecho..."

Fabiola Muñoz, Claudia Martínez.

"No sólo nos parece importante sino indispensable, pues vamos caminando a pasos apresurados hacia la educación a distancia, y es necesario que comencemos por evaluar esta clase de proyecto, y para ello qué mejor que iniciar en un sistema paralelo que nos permita comparar entre la clase presencia l y la virtual."

Edgar Guerrero, Héctor Mayorga, Erik López, Arturo Orea.

10. ¿Cuántos archivos te imaginas que constituyen este sitio?

"Como 200 archivos."

Miguel Enciso, Héctor Magueyal, Ruth Rivera.

"No sabemos exactamente, pero por la apariencia que tienen las páginas y la cantidad de archivos gif usados, deben ser muchísimos."

Edgar Guerrero, Héctor Mayorga, Erik López, Arturo Orea.

"Pues contando todos los archivos de imágenes, de texto y de presentación, yo calculo que unos 16,000. "

Pedro Villanueva.

Conclusiones de los alumnos.

"Es muy grato saber que en nuestra institución se están creando materiales académicos de tan buena calidad, que aparte de servir como un buen apoyo para los alumnos de la materia, es un material que puede ser aprovechado por cualquier persona de este mundo que tenga acceso a Internet. De hecho, yo lo tomaré como guía para repasar lo visto en clase."

Pedro Villanueva.

"Es importante que existan páginas de este tipo, ya que es difícil encontrar información sobre temas de este tipo en español, y más aún si es realizada por gente de la propia carrera de MAC."

Gerardo Ceja, Alejandro Monroy, Donovan Moreno, Rodrigo Oropeza.

"Esta página realmente parece como unos apuntes de apoyo a nuestra materia... Un sitio académico de Acatlán que contenga esta información, es muy valioso y no considero que haya razón para quitarlo de la red, al contrario hay que contribuir en el desarrollo y mejora de las páginas que ayuden a los estudiantes y profesores a entender mejor cualquier tema que sea de su interés."

Miriam Morales.

"...es un excelente sitio, elaborado por un egresado de MAC que expone de manera muy concreta esta metodología y ofrece ligas a otros sitio de interés..."

Sería de gran importancia que todos colaboráramos en promover la creación de sitios que ofrezcan este tipo de material en todas sus asignaturas. A veces todos tenemos algo que aportar, lo único que falta es ponerlo en un lugar donde esté al alcance de todos, inclusive de nosotros mismos, porque muchas veces, no sabemos ni dónde dejamos nuestras ideas."

Alejandro Diosdado, Gerardo Navarrete, Jorge Ontiveros y David Villegas.

V.7 RESUMEN

La importancia que la Internet ha adquirido gracias a la enorme difusión que tiene, debe ser aprovechada por las instituciones educativas. En particular la UNAM Campus Acatlán deberá alcanzar un papel protagónico en este campo y promover la creación de sitios en Internet, conteniendo las asignaturas que se imparten en las diferentes licenciatura que en este Campus se brindan para que sirvan como apoyo, no sólo a sus estudiantes y profesores sino para toda la comunidad en general.

Como se ha podido comprobar, los alumnos han opinado muy favorablemente del sitio sobre series de tiempo y pronósticos que se ha desarrollado e implementado a lo largo de este trabajo, no solamente por el sitio mismo sino por su contenido, el cual se buscó que su característica principal fuera la claridad en el lenguaje, que sin solemnidad, siguiera siendo un sitio lleno de conceptos teóricos que son indispensables en la metodología empleada.

CAPÍTULO VI UN ESTUDIO REAL COMPLETO

En los capítulos anteriores hemos estudiado conceptos teóricos sobre las series de tiempo y de la metodología de Box-Jenkins para obtener pronósticos. En cada punto importante de estos conceptos se revisaron también ejemplos al respecto para proporcionar a todos los lectores un complemento en la teoría. Es la práctica la que construirá el sólido edificio de la experticia con cimientos teóricos firmes. Esta es la razón del presente Capítulo, brindar una idea clara de cómo se construye un proceso de pronóstico, desde la obtención de la serie de tiempo hasta la deducción de un modelo ARIMA(p,d,q) para la generación de pronósticos para la serie de tiempo estudiada.

El análisis de la serie de tiempo elegida se llevó a cabo con la versión 7.0 de Statgraphics.

VI.1 Elección de la serie de tiempo

La serie de tiempo que se analizará en este capítulo trata de la energía eléctrica consumida por el sector industrial por mes en un período de 18 años, esto es, las observaciones de la serie temporal abarcan desde enero de 1982 hasta mayo de 2000. La serie puede ser consultada en el apéndice.

La serie fue elegida debido a las características que presenta, que como se verá, son de gran valor práctico.

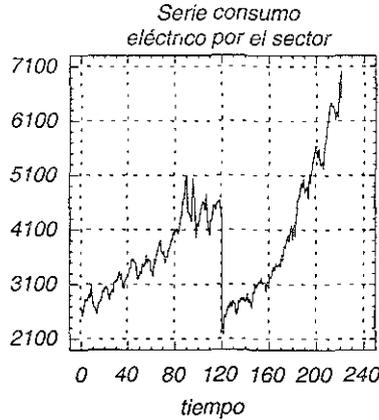
VI.2 Obtención de la serie de tiempo

La serie se obtuvo del Banco de Información Económica (BIE), que es la base de datos del sector económico del país creada y mantenida por el INEGI en Internet, la información sobre esta base de datos se encuentra en el Capítulo anterior.

El Banco de Información Económica contiene varios apartados, uno de los cuales es el Sector Energético que proporciona información sobre la producción, oferta, consumo, exportación e importación de energía eléctrica. Dentro del Sector Energético existen variables concernientes a estos rubros. La variable de la serie de tiempo que analizaremos es Consumo de Energía Eléctrica por el Sector Industrial.

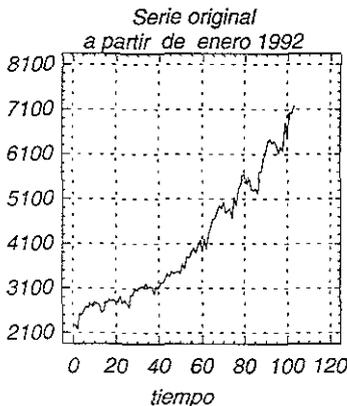
VI.3 Análisis

El análisis de la serie de tiempo debe comenzar por la observación de la gráfica de la serie de tiempo.



La gráfica muestra un comportamiento extraño, durante los primeros datos presenta una marcada tendencia creciente, pero para el dato 121, la serie tiene una severa caída por debajo del nivel inicial. ¿A qué se debió esto? A una modificación en la recopilación de los datos ya que a partir de enero de 1992 sólo se incluyó en la serie de tiempo el suministro de alta tensión, esto debido a una reestructuración en las tarifas de suministro y venta de energía eléctrica que se publicó en el Diario Oficial el 10 de noviembre de 1991¹. A partir del dato correspondiente al mes de enero de 1992 nuevamente se observa que la media de la serie es creciente. Por ello, para poder realizar el análisis de la serie de tiempo es necesario eliminar los datos anteriores a 1992 para que queden sólo los datos que fueron tomados de la misma tensión.

La gráfica nos muestra los datos a partir de enero de 1992:

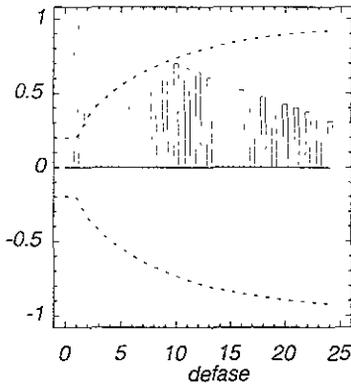


A simple vista, la serie de tiempo no presenta heteroscedasticidad, pero esto se comprobará más adelante. Además, existe tendencia en la serie de tiempo.

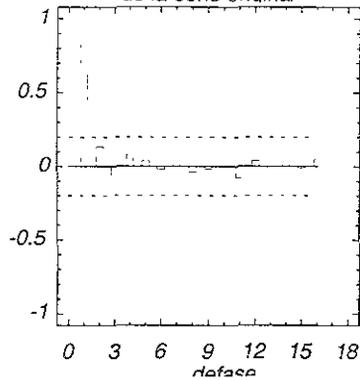
Las gráficas de la ACF y la PACF revelan también la tendencia:

¹ Nota marginal de la propia serie de tiempo.

Gráfica de ACF de la serie original



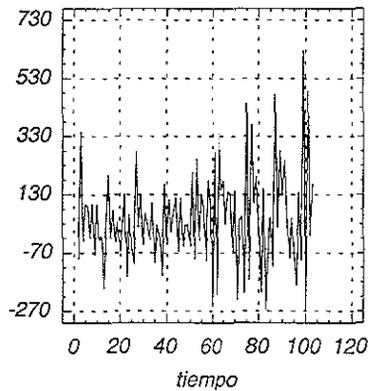
Gráfica de la PACF de la serie original



La función de autocorrelación decrece lentamente y la función de autocorrelación parcial se corta en uno, comportamiento debido a la tendencia.

Para reducir la tendencia creciente, aplicaremos una diferencia ordinaria de orden uno:

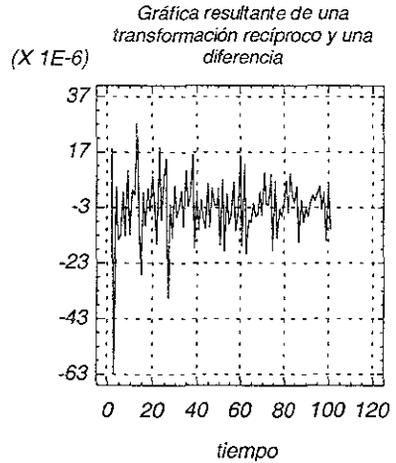
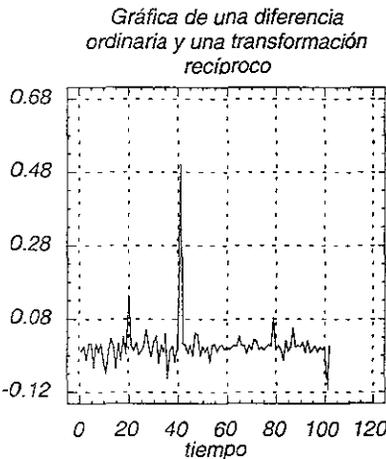
Serie con una diferencia ordinaria



En la gráfica se observa que la tendencia ha sido eliminada, ya no es necesaria otra diferencia, sin embargo, al final de la serie se puede apreciar cómo presenta una aparente varianza creciente, por lo que habría que transformar la serie para volver la varianza constante. Estas transformaciones deben aplicarse antes de la diferencia ordinaria.

Para realizar las transformaciones a la serie temporal debe regresarse a las observaciones antes de la diferencia ordinaria, de lo contrario tendríamos problemas con el dominio de las ecuaciones, tal es el caso de la ecuación raíz cuadrada de Z_t , pues si se tuvieran valores negativos resultantes de la diferencia ordinaria no podríamos aplicar esta transformación; o bien, los resultados pueden alterarse al aplicar una transformación a datos diferenciados:

Por ejemplo, si a la serie le aplicamos correctamente la transformación recíproco y posteriormente una diferencia ordinaria, la gráfica resultante sería la siguiente:



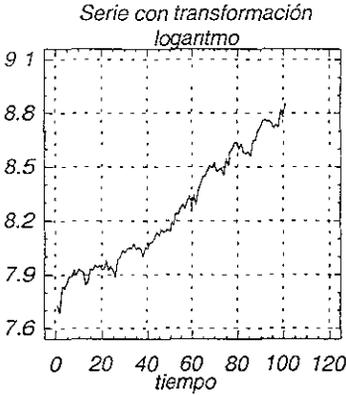
Si por el contrario aplicamos incorrectamente una diferencia ordinaria antes de una transformación, los datos resultantes se verán alterados y la gráfica a la izquierda lo demuestra.

VI.4 ESTABILIZACIÓN DE LA VARIANZA Y ELIMINACIÓN DE LA TENDENCIA

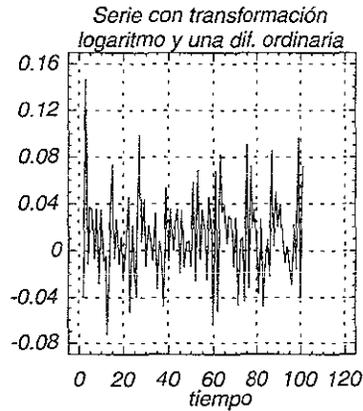
Para hacer la varianza constante realizaremos transformaciones a los datos de la serie de tiempo "consumo eléctrico del sector industrial". Estas transformaciones eliminarán la heteroscedasticidad de nuestros datos.

Transformación logarítmica

Al aplicar un logaritmo a la serie de tiempo nuestros datos dibujarán la gráfica siguiente:

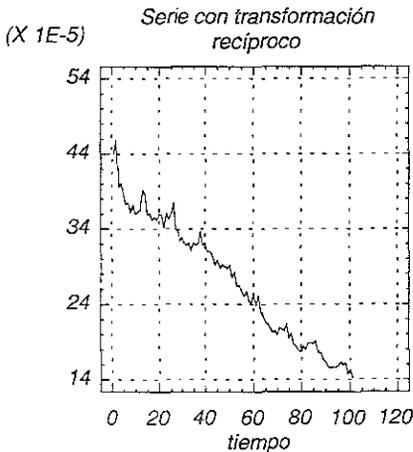


La serie es ahora homoscedástica y el nivel se ha reducido significativamente. El siguiente paso será aplicar una diferencia ordinaria, de la cual resulta la siguiente gráfica:



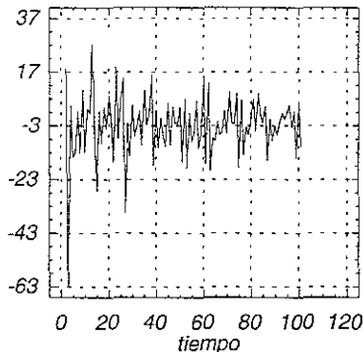
Al aplicar una diferencia ordinaria a la serie de tiempo se elimina la tendencia creciente.

Transformación recíproca



Al aplicar esta transformación a la serie de tiempo los datos pequeños se volverán grandes y los datos grandes se volverán pequeños, esta es la razón de que ahora la gráfica de la serie transformada tenga una pendiente negativa, nótese lo reducido de los datos en la escala del eje y.

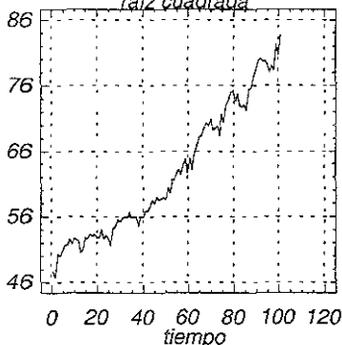
Gráfica de transformación recíproco y una dif. ordinaria
(X 1E-6)



Al hacer la diferencia ordinaria los datos adquieren una media constante, el efecto de la transformación es que los datos se aproximarán cada vez más a cero.

Transformación raíz cuadrada

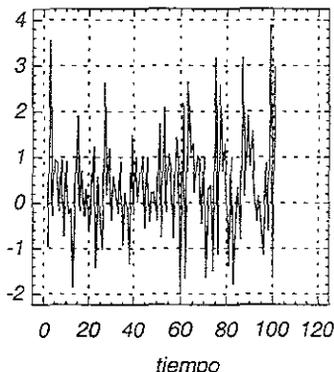
Serie con transformación raíz cuadrada



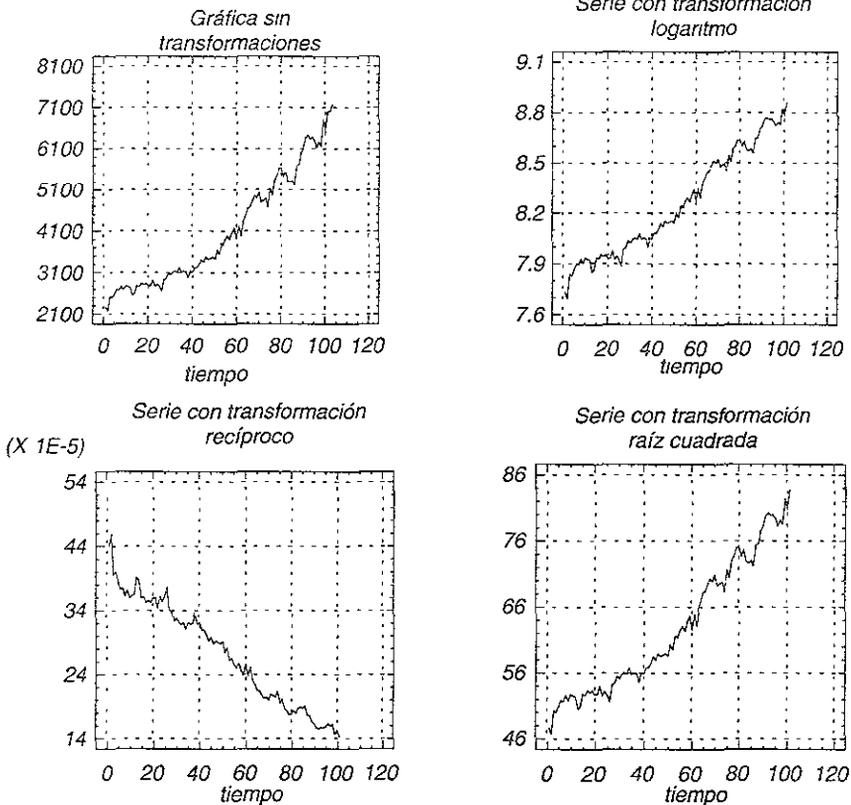
Esta es la gráfica que resulta de los datos de la serie después de haber calculado su raíz cuadrada, a pesar de que el nivel de la serie se reduce, no hay mucho cambio respecto a la gráfica de los datos sin transformaciones, esto lo comprobaremos al aplicar la diferencia ordinaria.

Si observamos la gráfica después de hacer una diferencia ordinaria nos percataremos que sólo ha disminuido el nivel de la serie de tiempo, pero sigue habiendo heteroscedasticidad; esta transformación no significa un gran cambio respecto a la serie original.

Gráfica de la serie con transf. Raíz cuadrada y dif. ord.



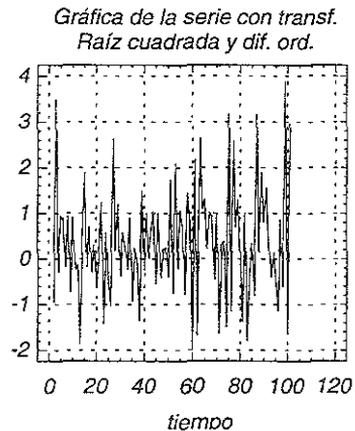
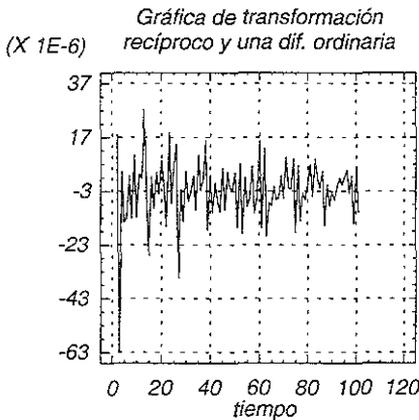
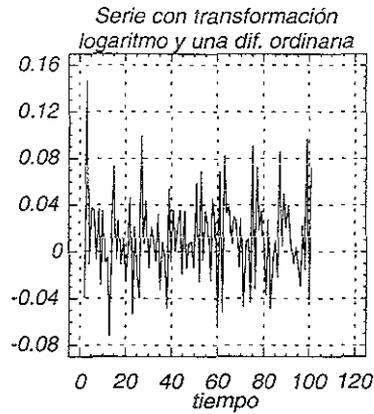
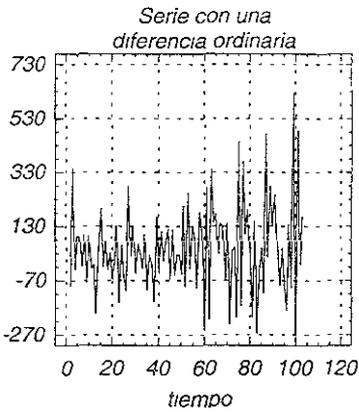
Comparemos las gráficas de las transformaciones contra las gráficas originales, así como las gráficas después de realizar diferencias ordinarias:



Al observar las gráficas de las transformaciones hechas a la serie original "consumo eléctrico industrial" se nota cómo la escala de los valores de los datos disminuye, siendo mucho más apreciable en la transformación recíproco que también presenta una pendiente negativa debido al efecto que esta transformación tiene sobre los datos. Las transformaciones logaritmo y raíz cuadrada tienen casi la misma forma y tendencia que la serie original.

Para poder decidir sobre cuál es la transformación que mejor elimina la varianza será necesario comparar de esta misma manera las gráficas de las diferencias ordinarias de las transformaciones hechas a la serie de tiempo.

La gráfica de las diferencias ordinarias de la serie original, presentaba heteroscedasticidad:



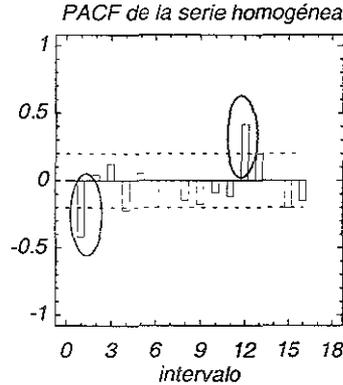
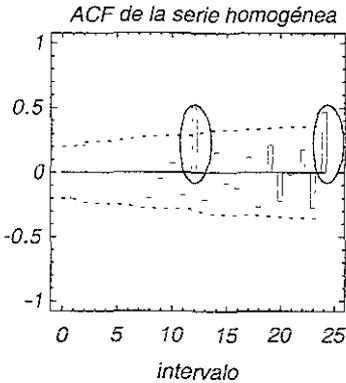
Podemos observar que las transformaciones realizadas a la serie original son más claras después de realizar una diferencia ordinaria y que han cumplido el objetivo de hacer homogénea la serie original, con excepción de la gráfica de la raíz cuadrada con diferencias ordinarias, que prácticamente es la misma que la gráfica de la serie original con una diferencia ordinaria.

La gráfica de la transformación logaritmo con diferencias ordinarias, disminuye notoriamente el nivel de la serie cuya media constante es cercana a cero. Sin embargo la transformación recíproco reduce aún más dicho nivel, además, es más notorio en la gráfica el comportamiento estacional al final de la gráfica de la serie con la transformación y la diferencia ordinaria. Para proseguir con la búsqueda de un modelo de pronóstico tomaremos la transformación recíproco con una diferencia ordinaria.

Como se ha mencionado con anterioridad, una vez que el modelo haya sido identificado, aceptado y se hayan hecho los pronósticos, es necesario revertir la transformación con la operación inversa correspondiente, es decir, si a la serie de tiempo se le aplicó una transformación recíproco para hacerla homoscedástica a los pronósticos arrojados por el modelo ARIMA se tendrán que aplicar la correspondiente transformación inversa para que sean congruentes con la serie original.

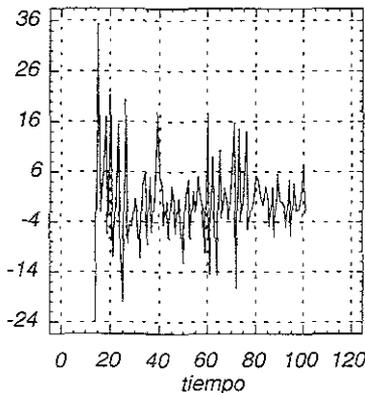
VI.5 IDENTIFICACIÓN DE UN MODELO TENTATIVO

Para poder identificar un modelo es necesario observar las gráficas de ACF y PACF de la serie homogénea obtenida en la sección anterior:



Este comportamiento periódico de las gráficas de ACF y la PACF revela estacionalidad en la serie de tiempo, esta estacionalidad será de $S=12$ pues los datos que tenemos son mensuales; para eliminar la estacionalidad debemos hacer diferencias estacionales.

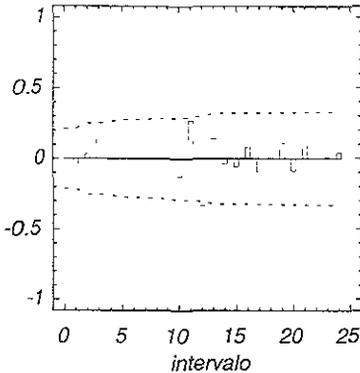
(X 1E-6) *Serie homogénea con una diferencia estacional*



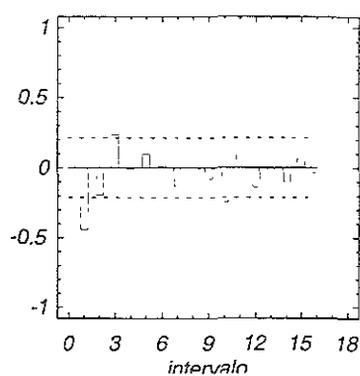
Esta es la gráfica resultante de hacer una diferencia estacional a los datos de la serie "consumo eléctrico del sector industrial" a la que ya se había hecho una transformación recíproco y una diferencia ordinaria. Ahora deben observarse las gráficas de ACF y PACF para determinar un modelo tentativo.

Las gráficas de la ACF y la PACF muestran un modelo multiplicativo, pero no es muy claro el modelo que sugieren.

Gráfica de la ACF de la serie homogénea con una diferencia estacional



Gráfica de la PACF de la serie homogénea con una diferencia estacional



La gráfica de ACF decrece, siendo los valores significativos en 1 y 12, mientras que la gráfica de PACF tiene valores importantes en 1 y 10 y se corta después de este último valor, esto nos hace pensar que se trata de un modelo multiplicativo.

El siguiente cuadro de comportamiento teórico de las ACF y las PACF brindan una manera para identificar modelos multiplicativos:

Modelo	ACF	PACF
AR(p)*SAR(P)	Decae	Se trunca después de p+sP
MA(q)*SMA(Q)	Se trunca después de q+sQ	Decae
Mezclados	Decae	Decae

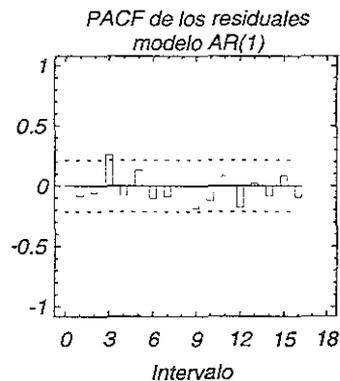
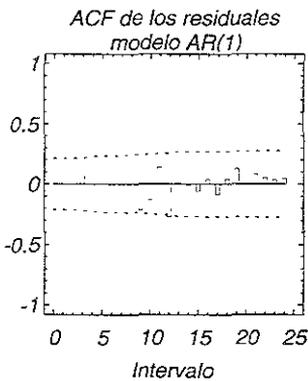
Las gráficas de la ACF y la PACF carecen de la suficiente claridad para poder determinar un modelo de acuerdo a su comportamiento teórico, es decir, su huella digital no es muy clara, tendremos que probar varios modelos y verificar cuál de todos es el mejor, estos modelos tienen que ser deducidos a partir del más simple, de esta manera iremos aumentando parámetros uno a uno si fuera necesario. Debemos recordar que no importa tanto que un modelo se ajuste correctamente, lo que importa más es qué tan buenos pronósticos arroje.

VI.5.1 MODELO AR(1)

Para empezar con la elección del modelo empezaremos por el más simple de los modelos autorregresivos, que es el modelo AR(1), estos son los valores que corresponden a los parámetros del modelo calculados con STATGRAPHICS:

Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
AR (1) (ϕ_1)	-.44056	.09684	-4.54933	.00002
Media (μ)	.00000	.00000	-.51935	.60485
Constante (δ)	.00000			

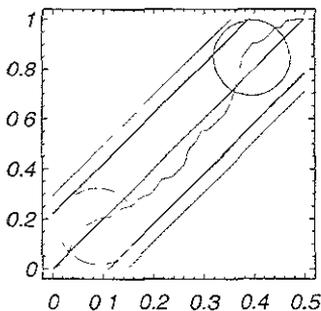
La tabla anterior indica que la media y la constante deben ser eliminadas del modelo. Las siguientes gráficas muestran la ACF y la PACF de los residuales:



Como puede apreciarse en las gráficas, los residuales no son ruido blanco, la gráfica de la ACF muestra valores significativos en 3 y en 12, mientras que la gráfica de la PACF muestra un valor que sobresale en 3.

A continuación veremos la gráfica del periodograma integral de los residuales para interpretar su comportamiento.

Periodograma Integral de los
residuales Mod. AR(1)



En el periodograma integral puede verse cómo, a pesar de encontrarse dentro de los límites de confianza, presenta una especie de peldaños que aunque no son muy claros, indican que debemos mejorar el ajuste.

Aumentaremos un parámetro SAR al modelo para ajustar este comportamiento estacional que muestran tanto las gráficas de la ACF y la PACF como el periodograma integral de los residuales.

VI.5.2 MODELO AR(1)*SAR(1)

Los parámetros del modelo fueron calculados con el paquete STATGRAPHICS, a continuación se muestra la tabla de los resultados:

Parámetros calculados:

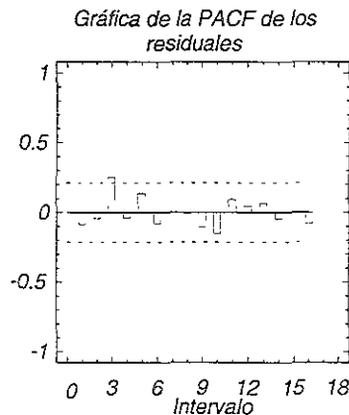
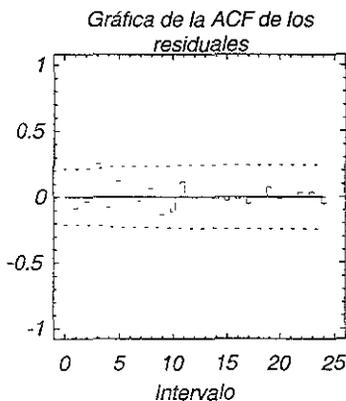
Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p	
AR (1)	(ϕ_1)	-0.40616	.10000	-4.06160	.00011
SAR(12)	(Φ_1)	-0.20013	.10636	-2.63386	.01003
Media	(μ)	.00000	.00000	.59297	.55477
Constante	(δ)	.00000			

Como podemos ver en la tabla anterior, la media es cero y el valor en tablas t-student es menor a dos, lo que indica que este valor es insignificante y debe ser eliminado del modelo, la siguiente tabla muestra los nuevos valores sin la media ni la constante:

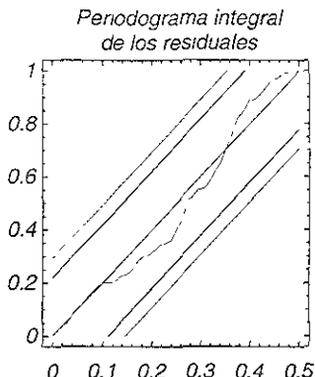
Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p	
AR (1)	(ϕ_1)	-0.40353	.09954	-4.05405	.00011
SAR(12)	(Φ_1)	-0.27935	.10573	-2.64201	.00979

Diferencias Ordinarias: 1
Diferencia estacional de primer orden de longitud = 12
Varianza de ruido blanco = 6.51702E-11 con 86 grados de libertad
Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 8.07281E-6

Estas son las gráficas de la ACF de los residuales y la PACF de los residuales:



A pesar de que las gráficas están cercanas a describir ruido blanco aún sobresalen algunos valores.



La gráfica del periodograma integral de los residuales muestra que el ajuste ha mejorado en comparación al modelo AR(1).

¿Puede mejorarse este ajuste? Recordemos que la serie era de enero de 1982 a mayo de 2000, esto es un total de 221 datos, pero tuvimos que quitar los primeros 120 datos de la serie por no ser congruentes con el resto, entonces quedaron 101 observaciones. Para poder hacer a la serie de tiempo homogénea tuvieron que hacerse una diferencia ordinaria y otra diferencia estacional, esto es 13 datos menos. Esto quiere decir que estamos calculando los parámetros con 88 datos, los cuales deberían ser suficientes para calcular el modelo, pero cabe la pregunta ¿mejorará el modelo si calculamos pronóstico hacia atrás (backcast)?

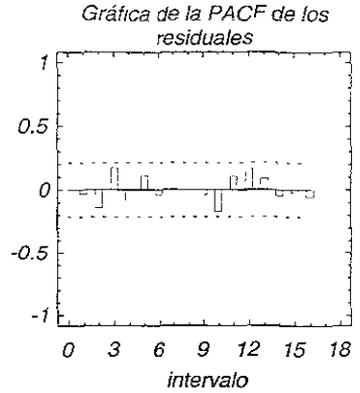
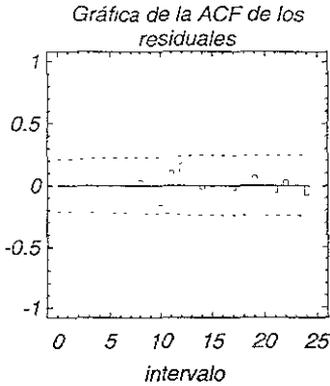
Estimación del modelo de pronóstico con pronósticos hacia atrás (backcast)

En la siguiente tabla se muestran los resultados del cálculo de los parámetros:

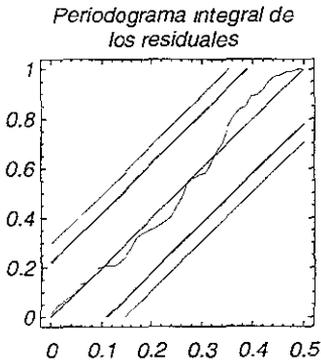
Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
AR (1) (ϕ_1)	-.41238	1.09666	-4.26610	.00005
SAR(12) (Φ_1)	-.50158	.07455	-6.72816	.00000

Diferencias Ordinarias: 1
Diferencia estacional de primer orden de longitud = 12
Varianza de ruido blanco = 5.81629E-11 con 86 grados de libertad
Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 7.62646E-6

Las gráficas de ACF y la PACF así como el periodograma integral de los residuales mostrarán el ajuste del modelo:

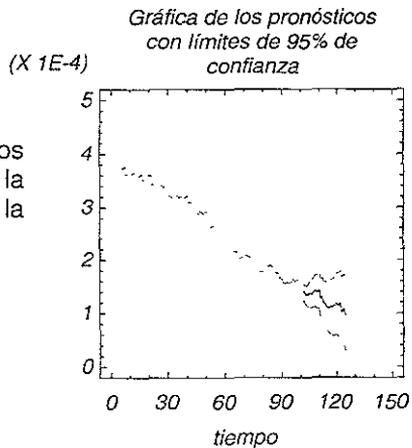


Estas gráficas revelan un ajuste ligeramente mejor y los valores de los residuales se comportan como ruido blanco.



El periodograma integral de los residuales del modelo muestra un mejor ajuste.

Esta es la gráfica de los pronósticos, a los cuales se tiene que revertir el efecto de la transformación recíproca que se aplicó a la serie de tiempo.



A continuación se muestra la tabla de valores obtenidos en el pronóstico, así como la tabla de su correspondiente transformación inversa:

Horizonte	Límite inferior	Probable	Límite superior	Horizonte	Límite inferior	Probable	Límite superior
1	1.24E-04	1.39E-04	1.54E-04	13	7.39E-05	1.16E-04	1.59E-04
2	1.15E-04	1.33E-04	1.50E-04	14	6.51E-05	1.10E-04	1.55E-04
3	1.11E-04	1.32E-04	1.53E-04	15	6.10E-05	1.09E-04	1.57E-04
4	1.12E-04	1.36E-04	1.59E-04	16	6.12E-05	1.12E-04	1.63E-04
5	1.07E-04	1.33E-04	1.59E-04	17	5.71E-05	1.10E-04	1.63E-04
6	1.11E-04	1.39E-04	1.67E-04	18	5.85E-05	1.14E-04	1.70E-04
7	1.12E-04	1.42E-04	1.72E-04	19	6.00E-05	1.18E-04	1.76E-04
8	1.07E-04	1.39E-04	1.71E-04	20	5.47E-05	1.15E-04	1.75E-04
9	1.09E-04	1.42E-04	1.76E-04	21	5.55E-05	1.18E-04	1.80E-04
10	9.17E-05	1.27E-04	1.62E-04	22	3.83E-05	1.02E-04	1.67E-04
11	9.27E-05	1.30E-04	1.66E-04	23	4.07E-05	1.07E-04	1.73E-04
12	8.17E-05	1.20E-04	1.58E-04	24	2.86E-05	9.67E-05	1.65E-04

Tabla 1. Muestra los valores pronosticados y los correspondientes límites de confianza.

Horizonte	Límite inferior	Probable	Límite superior	Horizonte	Límite inferior	Probable	Límite superior
1	6489.46	7197.77	8079.70	13	6289.51	8586.42	13526.14
2	6651.24	7532.39	8682.74	14	6435.63	9072.27	15366.89
3	6543.73	7586.68	9025.19	15	6365.53	9171.79	16403.26
4	6273.49	7355.81	8889.44	16	6153.28	8938.47	16329.81
5	6286.54	7506.27	9313.24	17	6119.99	9070.54	17514.76
6	5998.48	7207.78	9027.72	18	5896.89	8767.70	17085.46
7	5828.56	7062.05	8957.76	19	5694.11	8488.46	16668.17
8	5855.04	7196.16	9334.10	20	5723.41	8717.41	18279.83
9	5685.95	7028.44	9200.73	21	5563.96	8503.40	18026.95
10	6164.32	7876.62	10906.15	22	6000.06	9757.24	26102.16
11	6007.59	7716.59	10784.37	23	5780.78	9361.19	24593.23
12	6311.38	8330.07	12247.20	24	6067.00	10337.46	34910.11

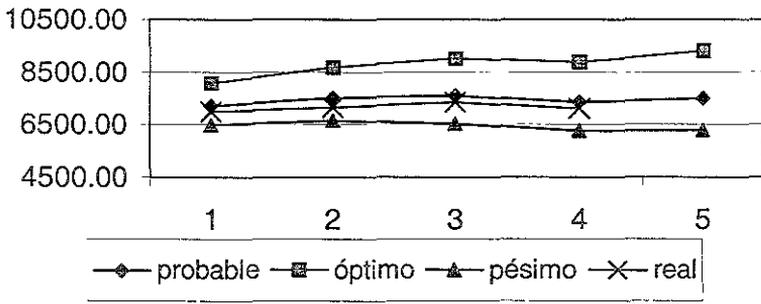
Tabla 2. Valores pronosticados habiendo aplicado una transformación inversa, es decir, el recíproco del valor de la tabla 1.

Como se aprecia en los valores de las tablas, conforme es más amplio el horizonte pronosticado por el modelo los límites se expanden y pierden precisión, este comportamiento es lógico pues mientras más amplio sea nuestro pronóstico mayor incertidumbre tendremos del futuro valor real. Sin embargo, como veremos en la siguiente tabla y su correspondiente gráfica, los valores pronosticados para un horizonte de hasta 4 períodos de tiempo comparados con el valor real del proceso tienen una mínima diferencia:

Mientras el presente trabajo estaba siendo elaborado, se obtuvieron los datos de los meses siguientes al último dato de la serie de la cual se obtuvo el modelo, estos datos nos servirán para validar el modelo obtenido. La siguiente tabla es un comparativo de los valores pronosticados y los valores reales arrojados por el proceso:

PERÍODO	Lim. inferior	PROBABLE	Lim. superior	REAL
Junio 2000	6489.46	7197.77	8079.70	7000
Julio 2000	6651.24	7532.39	8682.74	7165
Agosto 2000	6543.73	7586.68	9025.19	7345
Septiembre 2000	6273.49	7355.81	8889.44	7106

Tabla de pronósticos comparados con el valor real del período



Como vemos en la tabla y su gráfica, los valores pronosticados son muy aproximados a los valores reales, el modelo se ajusta correctamente y arroja buenos resultados.

Por lo tanto, podemos considerar que el modelo elegido es un buen modelo y que podemos tener confianza en los valores que se obtienen al emplearlo, el modelo es entonces un AR(1)*SAR(1) es decir:

$$Z_t = (\phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t)(\Phi_1 Z_{t-12} + \varepsilon_t)$$

$$= \Phi_1 \phi_1 Z_{t-13} + \phi_1 Z_{t-1} \varepsilon_t + \Phi_1 Z_{t-12} \varepsilon_t + \varepsilon_t$$

Donde $Z_t = \Delta A_{t2} \frac{1}{w_t}$, esto es, Z_t es el recíproco de una serie w_t con diferencias ordinaria y estacional; $\phi_1 = -0.41238$ y $\Phi_1 = -0.50158$ y ε_t es ruido blanco.

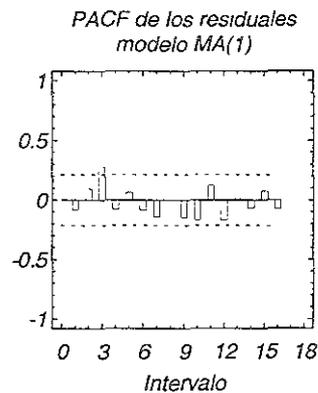
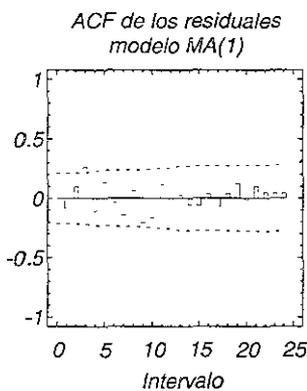
Como se ha mencionado, se debe asegurar que el modelo que se va a elegir para pronosticar valores de la serie de tiempo sea el mejor, esto es, se deben identificar modelos alternos para comparar resultados y así elegir el que se ajuste a la serie y que a la vez sea parsimonioso, así buscaremos modelos alternos al anterior. A continuación sólo se verán las gráficas de los pronósticos de los modelos y los valores de los parámetros que arrojen, todos los modelos deben ser obtenidos de manera similar al anterior.

VI.5.3 MODELO MA(1)

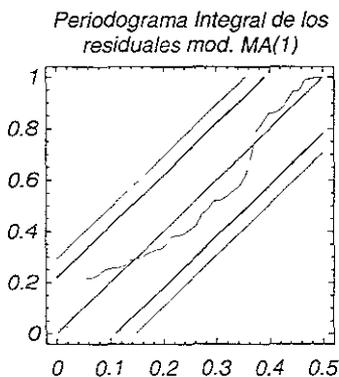
Probaremos ahora con un modelo MA(1) para tratar de encontrar un modelo alternativo al anterior que pudiera generar pronósticos mejores. Estos son los valores de los parámetros:

Parámetro		Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
MA (1)	(θ_1)	-.40586	.09782	4.14927	.00008
Media	(μ)	.00000	.00000	.57442	.56718
Constante	(δ)	.00000			

Donde la media y la constante deben ser eliminadas del modelo. Las gráficas de ACF y PACF son muy parecidas a las del modelo AR(1):



Estas gráficas son muy parecidas a las del modelo AR(1) y no muestran ruido blanco, sobresalen valores en 3 y en 12 en la gráfica de la ACF y en 3 en la PACF.



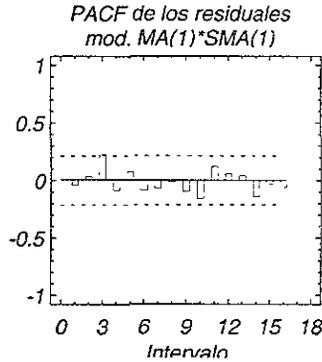
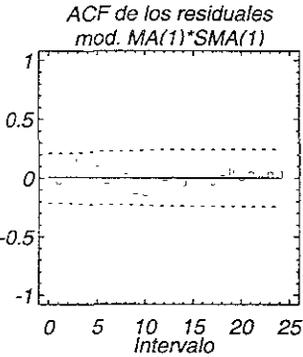
En el periodograma integral de los residuales se verifica que no ha sido totalmente filtrada la parte estacionaria de la serie de tiempo, aumentaremos un parámetro SMA para contrarrestar la falta de ajuste.

VI.5.4 MODELO MA(1)*SMA(1)

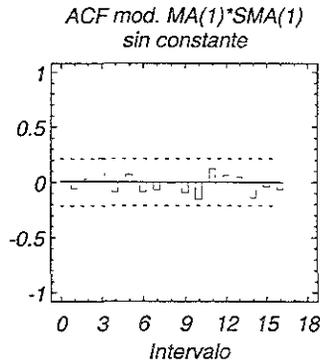
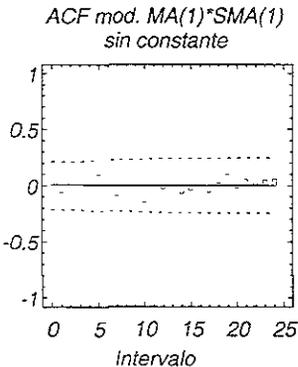
Los parámetros calculados para este modelo son:

Parámetro		Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
MA (1)	(θ_1)	.40623	.09596	4.10484	.00009
SMA(12)	(θ_1)	.28736	.10440	2.84817	.00510
Media	(μ)	.00000	.00000	.67050	.50435
Constante	(δ)	.00000			
Diferencias Ordinarias: 1					
Diferencia estacional de primer orden de longitud = 12					
Varianza de ruido blanco = 6.5128E-11 con 85 grados de libertad					
Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 8.0702E-6					

Las gráficas de ACF y PACF de los residuales presentan el siguiente comportamiento:

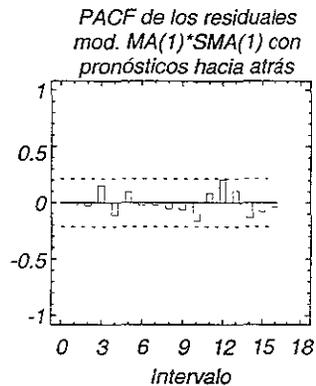
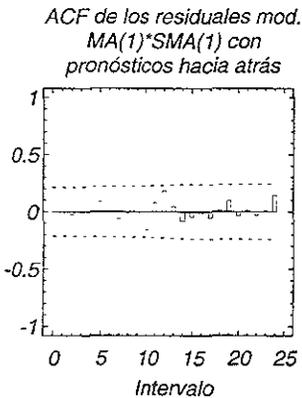


Parámetro		Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
MA (1)	(θ_1)	.40206	.09860	4.07754	.00010
SMA(12)	(θ_1)	.29445	.10393	2.83311	.00574
Diferencias Ordinarias: 1					
Diferencia estacional de primer orden de longitud = 12					
Varianza de ruido blanco = 6.47097E-11 con 86 grados de libertad					
Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 8.04423E-6					



El modelo sin constante mejora un poco el comportamiento de las gráficas de la ACF y la PACF de los residuales y ya podrían considerárseles ruido blanco, pero calcularemos pronósticos hacia atrás para ajustar aún más el modelo:

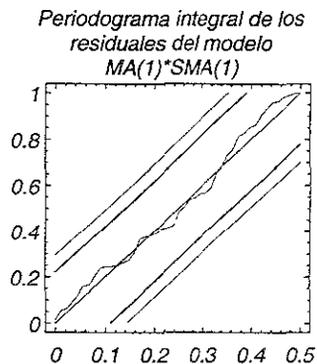
Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p	
MA (1)	(θ_1)	.40206	.09860	4.07754	.00010
SMA(12)	(ϕ_1)	.29445	.10393	2.83311	.00574
Diferencias Ordinarias: 1					
Diferencia estacional de primer orden de longitud = 12					
Varianza de ruido blanco = 6.47097E-11 con 86 grados de libertad					
Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 8.04423E-6					



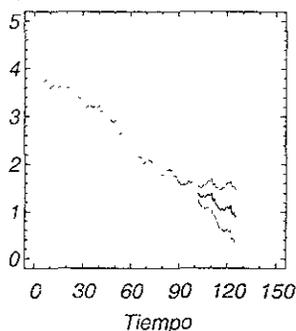
En estas gráficas de los residuales las autocorrelaciones y las parciales se comportan de mejor manera y el ajuste del modelo ha mejorado, veremos ahora la gráfica del periodograma integral de los residuales:

Esta gráfica muestra que con el cálculo de pronósticos hacia atrás, el modelo MA(1)*SMA(1) tiene un mejor ajuste.

Ahora calcularemos los pronósticos utilizando este modelo, la siguiente gráfica muestra los pronósticos obtenidos:



Pronósticos para el
(X 1E-4) modelo MA(1)*SMA(1)



A los pronósticos obtenidos debe aplicarse una transformación inversa al recíproco para que los resultados puedan ser comparables con los datos reales de la serie de tiempo.

Las siguientes tablas muestran los pronósticos y los pronósticos con una transformación inversa:

Horizonte	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior	Horizonte	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior
1	1.54E-04	1.39E-04	1.24E-04	13	1.50E-04	1.12E-04	7.41E-05
2	1.51E-04	1.33E-04	1.15E-04	14	1.46E-04	1.06E-04	6.54E-05
3	1.51E-04	1.30E-04	1.10E-04	15	1.46E-04	1.03E-04	6.08E-05
4	1.56E-04	1.34E-04	1.12E-04	16	1.52E-04	1.07E-04	6.23E-05
5	1.54E-04	1.30E-04	1.06E-04	17	1.49E-04	1.03E-04	5.61E-05
6	1.60E-04	1.35E-04	1.09E-04	18	1.56E-04	1.07E-04	5.89E-05
7	1.65E-04	1.38E-04	1.10E-04	19	1.61E-04	1.10E-04	6.01E-05
8	1.63E-04	1.34E-04	1.05E-04	20	1.59E-04	1.07E-04	5.51E-05
9	1.70E-04	1.39E-04	1.09E-04	21	1.66E-04	1.12E-04	5.86E-05
10	1.55E-04	1.23E-04	9.08E-05	22	1.51E-04	9.56E-05	4.01E-05
11	1.59E-04	1.26E-04	9.27E-05	23	1.56E-04	9.88E-05	4.17E-05
12	1.50E-04	1.15E-04	8.05E-05	24	1.47E-04	8.79E-05	2.93E-05

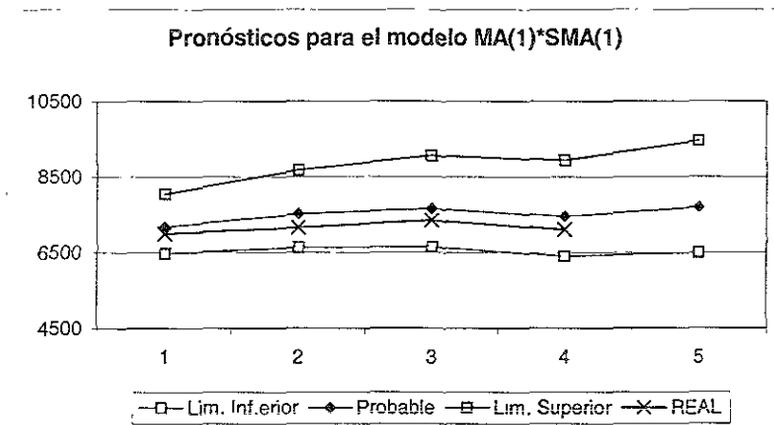
Tabla 3. Valores pronosticados y los correspondientes límites de confianza.

Horizonte	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior	Horizonte	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior
1	6474.59	7181.12	8060.68	13	6657.26	8915.44	13491.80
2	6634.95	7525.42	8692.02	14	6842.14	9452.33	15282.53
3	6642.89	7668.30	9068.07	15	6855.65	9678.86	16455.11
4	6402.62	7462.85	8943.98	16	6599.14	9353.84	16056.42
5	6498.57	7703.74	9457.70	17	6696.44	9735.39	17824.23
6	6235.89	7432.62	9197.77	18	6411.32	9306.39	16968.62
7	6059.91	7269.40	9082.07	19	6217.78	9051.90	16633.84
8	6122.54	7444.30	9493.79	20	6274.82	9324.70	18143.03
9	5883.98	7169.13	9172.46	21	6015.58	8896.88	17075.86
10	6470.44	8150.96	11010.67	22	6618.53	10460.71	24937.22
11	6287.05	7945.71	10793.23	23	6415.56	10125.05	24004.30
12	6687.71	8692.78	12415.10	24	6820.31	11370.25	34156.86

Tabla 4. Valores pronosticados y límites de confianza transformados.

Esta tabla y la gráfica comparan los valores reales de la serie de tiempo contra los valores pronosticados y los límites de confianza:

Período	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior	REAL
Junio 2000	6474.587245	7181.122266	8060.680805	7000
Julio 2000	6634.951598	7525.417096	8692.024199	7165
Agosto 2000	6642.885138	7668.300015	9068.074032	7345
Septiembre 2000	6402.622514	7462.853646	8943.983829	7106



Los pronósticos arrojados por el modelo son muy buenos y apegados a los valores reales de la serie de tiempo. Este modelo MA(1)*SMA(1) con s=12 se puede escribir:

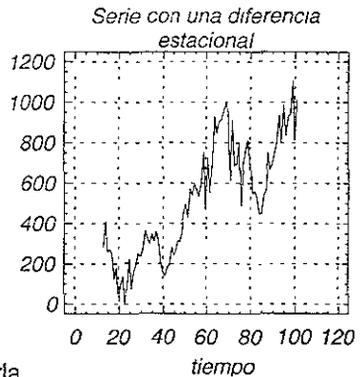
$$Z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_1 B^{12}) \varepsilon_t$$

$$= \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-12} + \theta_1 \theta_1 \varepsilon_{t-13}$$

Donde $Z_t = \Delta \Delta_{12} \frac{1}{w_t}$, esto es, Z_t es el recíproco de una serie w_t con diferencias ordinaria y estacional; $\theta_1=0.40206$ y $\theta_7=0.29445$ y ε_t es ruido blanco.

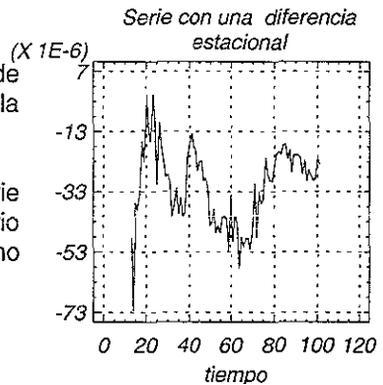
VI.6 UNA MANERA ALTERNA DE ELIMINAR LA TENDENCIA

En ocasiones, una diferencia estacional también elimina la tendencia en la serie de tiempo y entonces ya no es necesario hacer una diferencia ordinaria. En la gráfica a la derecha muestra una diferencia estacional hecha a la serie original, vemos que la diferencia estacional no elimina la tendencia. ¿se comportará de manera diferente si hacemos la transformación recíproco?

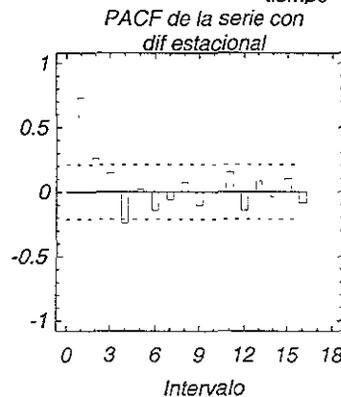
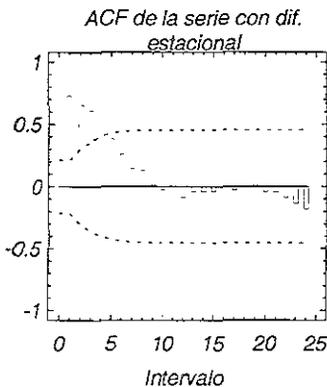


Retomaremos la transformación recíproco para volverla homoscedástica.

Aplicando una diferencia estacional a la serie de tiempo transformada tendremos la gráfica a la derecha:



De nuevo, el nivel de la serie es reducido y la serie aparentemente no tiene tendencia. Pero es necesario observar las gráficas de ACF y PACF, las cuales no muestran un comportamiento claro:



La gráfica de la ACF decrece de manera más o menos rápida pero la gráfica de la PACF tiene un comportamiento peculiar, pues el primer intervalo calculado es muy notorio mientras que dos más están apenas fuera de los límites, esta huella digital parece ser un modelo AR(p) o para ser más claros a un AR(3).

Calcularemos los coeficientes de un modelo **AR(3)** para tratar de ajustar un modelo para la serie:

Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
AR(1) (ϕ_1)	.46164	.10680	4.32254	.00004
AR(2) (ϕ_2)	.34289	.11245	3.04927	.00306
AR(3) (ϕ_3)	.17748	.10789	1.64494	.00000
Media (μ)	-.00005	.00001	-7.49891	.00000
Constante (δ)	.00000			

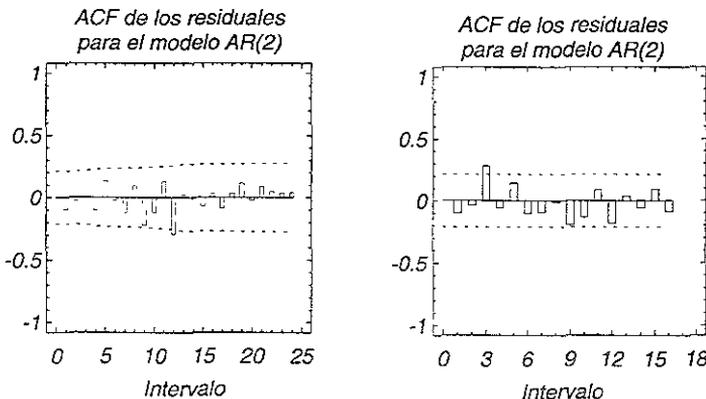
Diferencias Ordinarias: 0
 Diferencia estacional de primer orden de longitud = 12
 Varianza de ruido blanco = 6.79739E-11 con 85 grados de libertad
 Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 8.24463E-6

Donde el parámetro ϕ_3 puede ser eliminado, entonces calcularemos el modelo **AR(2)**:

Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
AR(1) (ϕ_1)	.53653	.09717	5.52132	.00000
AR(2) (ϕ_2)	.44097	.09782	4.50810	.00002
Media (μ)	-.00006	.00001	-7.32791	.00000
Constante (δ)	.00000			

Diferencias Ordinarias: 0
 Diferencia estacional de primer orden de longitud = 12
 Varianza de ruido blanco = 6.92359E-11 con 86 grados de libertad
 Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 8.32081E-6

Y las gráficas de ACF y PACF se comportan de la siguiente manera:



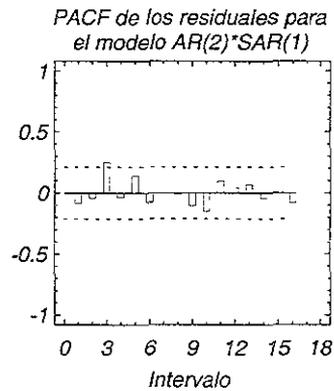
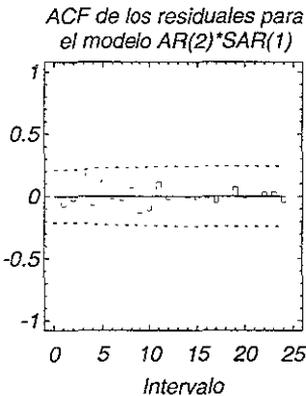
Que no se comportan como ruido blanco pues sobresalen intervalos en 3 y 12 en la gráfica de autocorrelación y en la parcial en el intervalo 3, por lo tanto tenemos que agregar un parámetro estacional, un **SAR(1)**.

VI.6.1 MODELO AR(2)*SAR(1)

Los parámetros calculados para el modelo y las gráficas de ACF y PACF son:

Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
AR(1) (ϕ_1)	.56335	.09827	5.73244	.00000
AR(2) (ϕ_2)	.43576	.09896	4.40358	-.00003
SAR(1) (Φ_1)	-.31863	.10506	-3.03284	.00321
Media (μ)	-.00006	.00001	-8.74106	.00000
Constante (δ)	.00000			

Diferencias Ordinarias: 0
 Diferencia estacional de primer orden de longitud = 12
 Varianza de ruido blanco = 6.34059E-11 con 85 grados de libertad
 Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 7.96278E-6

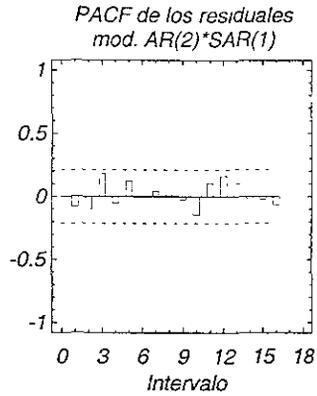
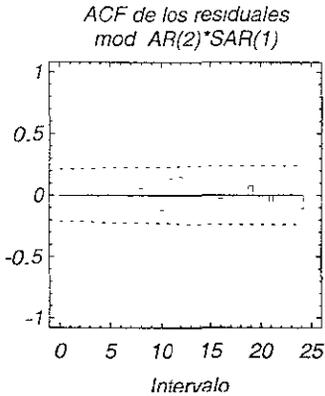


Estas gráficas están muy cercanas a comportarse como ruido blanco, calcularemos pronósticos hacia atrás para mejorar el ajuste del modelo:

Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
AR(1) (ϕ_1)	.54347	.10085	5.38881	.00000
AR(2) (ϕ_2)	.35768	.09868	3.62464	.00049
SAR(1) (Φ_1)	-.49090	.07469	-6.57213	.00000
Media (μ)	-.00003	.00001	-6.44485	.00000
Constante (δ)	.00000			

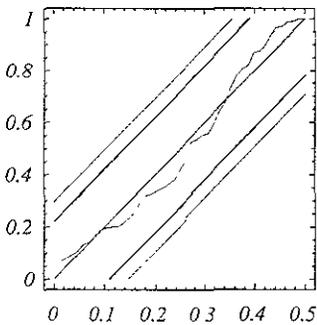
Diferencias Ordinarias: 0
 Diferencia estacional de primer orden de longitud = 12
 Varianza de ruido blanco = 5.72336E-11 con 85 grados de libertad
 Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 7.56529E-6

Las gráficas de ACF y PACF se comportan de la siguiente manera:

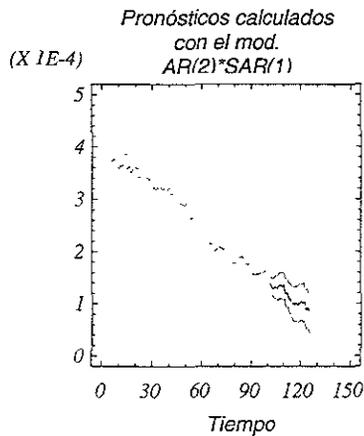


Como puede apreciarse en las gráficas, los residuales están más próximos a ser ruido blanco, el periodograma integral de los residuales se muestra a continuación:

*Periodograma Integral de los
residuales para el modelo
AR(2)*SAR(1)*



El periodograma integral de los residuales muestra un ajuste bueno para el modelo, es adecuado usarlo para calcular pronósticos, los cuales tienen la siguiente gráfica:



Las tablas siguientes muestran los valores pronosticados y los valores con la transformación correspondiente para poder comparar los pronósticos con los valores reales.

Período	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior	Período	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior
1	1.53E-04	1.38E-04	1.23E-04	13	1.38E-04	1.07E-04	7.69E-05
2	1.48E-04	1.31E-04	1.14E-04	14	1.32E-04	1.00E-04	6.88E-05
3	1.49E-04	1.29E-04	1.09E-04	15	1.31E-04	9.82E-05	6.56E-05
4	1.54E-04	1.32E-04	1.11E-04	16	1.34E-04	1.00E-04	6.69E-05
5	1.52E-04	1.29E-04	1.06E-04	17	1.32E-04	9.81E-05	6.38E-05
6	1.58E-04	1.34E-04	1.10E-04	18	1.36E-04	1.01E-04	6.63E-05
7	1.61E-04	1.36E-04	1.11E-04	19	1.40E-04	1.04E-04	6.89E-05
8	1.58E-04	1.33E-04	1.07E-04	20	1.37E-04	1.01E-04	6.48E-05
9	1.62E-04	1.35E-04	1.09E-04	21	1.40E-04	1.03E-04	6.68E-05
10	1.47E-04	1.20E-04	9.26E-05	22	1.24E-04	8.77E-05	5.09E-05
11	1.49E-04	1.22E-04	9.44E-05	23	1.29E-04	9.16E-05	5.45E-05
12	1.40E-04	1.12E-04	8.40E-05	24	1.18E-04	8.11E-05	4.38E-05

Tabla 5. Pronósticos de la serie de tiempo calculados con el modelo AR(2)*SAR(1).

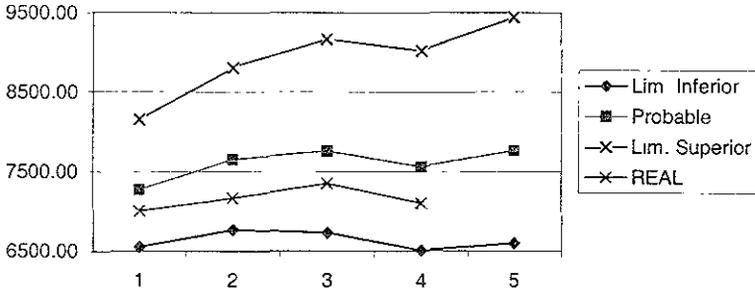
Período	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior	Período	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior
1	6550.46	7266.60	8158.54	13	7272.04	9329.14	13009.09
2	6765.53	7652.05	8805.84	14	7597.63	9979.84	14538.07
3	6729.93	7761.08	9165.40	15	7642.86	10181.12	15243.60
4	6511.14	7565.38	9026.98	16	7468.93	9963.24	14958.71
5	6594.87	7765.00	9439.93	17	7553.38	10195.70	15681.26
6	6346.87	7486.82	9125.92	18	7339.67	9873.62	15079.73
7	6219.02	7360.90	9016.48	19	7143.21	9572.49	14505.37
8	6314.77	7540.11	9355.50	20	7307.38	9916.01	15421.18
9	6180.85	7386.02	9174.90	21	7160.71	9685.61	14961.12
10	6823.89	8362.18	10795.81	22	8036.58	11405.10	19635.18
11	6699.45	8207.82	10592.74	23	7773.45	10917.48	18331.87
12	7159.48	8941.10	11903.16	24	8444.80	12327.95	22821.98

Tabla 6. Valores de los pronósticos transformados.

Los pronósticos obtenidos se comparan con los valores de la serie de tiempo en la tabla y gráfica siguientes:

Período	Lim. Inferior	Probable	Lim. Superior	REAL
Junio 2000	6550.46	7266.60	8158.54	7000
Julio 2000	6765.53	7652.05	8805.84	7165
Agosto 2000	6729.93	7761.08	9165.40	7345
Septiembre 2000	6511.14	7565.38	9026.98	7106

Pronósticos calculados mod. AR(2)*SAR(1)



En la gráfica puede verse que los pronósticos están muy próximos a los valores reales de la serie de tiempo. El modelo AR(2)*SAR(1) puede escribirse también de la forma:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - \Phi_1 B^{12})Z_t - \delta = \varepsilon_t$$

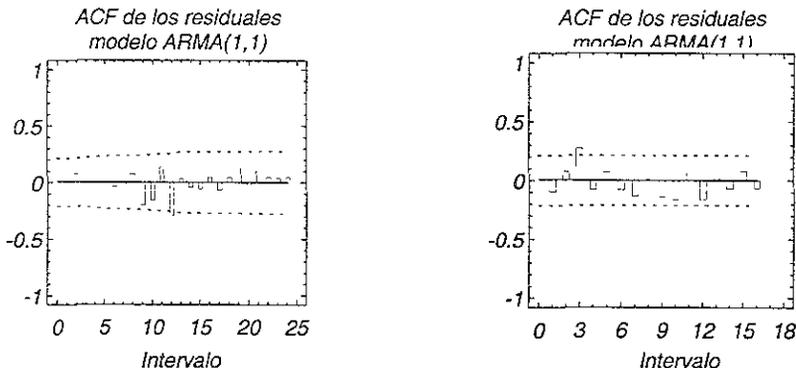
O bien si desarrollamos la ecuación:

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \Phi_1 Z_{t-12} - \phi_1 \Phi_1 Z_{t-13} - \phi_2 \Phi_1 Z_{t-14} + \varepsilon_t$$

Que tendrá $\phi_1=.54347$, $\phi_2=.35768$, $\Phi_1=-.49090$ y $\delta=-.00003$; que es un modelo que, comparado con los demás, es complicado y no cumple con el principio de parsimonia.

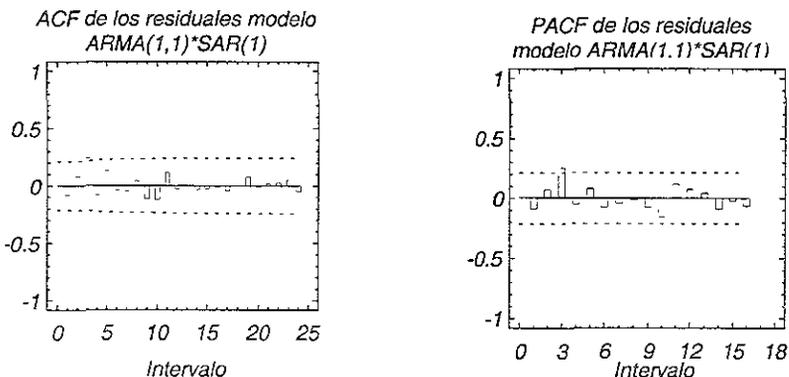
VI.6.2 MODELO ARMA(1,1)

El primer modelo que debemos probar es un ARMA(1,1) que es el más sencillo de todos. Al ejecutar el modelo en el paquete STATGRAPHICS obtuvimos las siguientes gráficas de ACF y PACF:



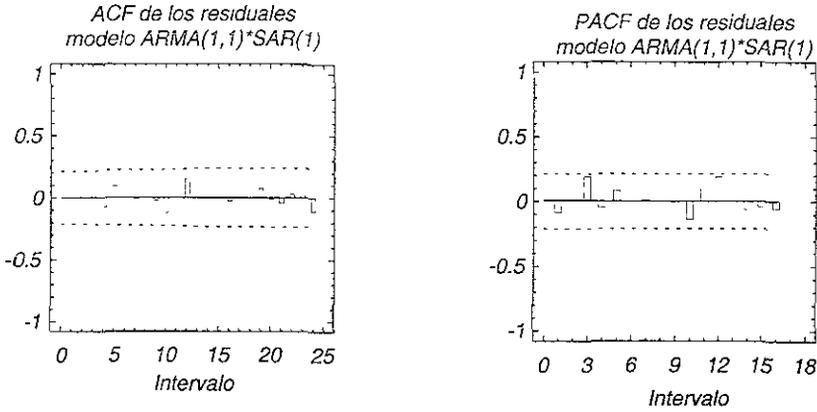
Las gráficas de la ACF y PACF de los residuales no son ruido blanco, y el intervalo 12 resalta en la gráfica de ACF de los residuales, lo que indica que se debe aumentar un parámetro estacional, probaremos con el modelo ARMA(1,1)*SAR(1).

VI.6.3 MODELO ARMA(1,1)*SAR(1).



Como podemos ver, tampoco se comportan como ruido blanco los residuales del modelo pero están muy próximos a serlo ¿mejorará el modelo si calculamos pronósticos hacia atrás?

Las gráficas siguientes muestran las ACF y PACF de los residuales del modelo habiendo calculado pronósticos hacia atrás:

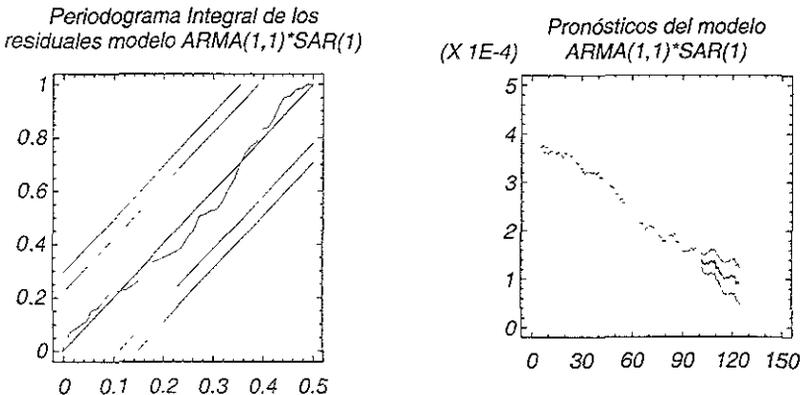


Analizando estas gráficas se puede decir que los residuales se comportan ya como ruido blanco, analizaremos ahora los coeficientes del modelo ARMA(1,1)*SAR(1). Hay que notar que el parámetro autorregresivo (ϕ) es próximo a 1, es decir, que la serie de tiempo está muy cerca a la no estacionaridad.

Coefficientes calculados:

Parámetro	Estimado	Error estándar	Valor t	Valor p
AR (1) (ϕ_1)	.94449	.03937	23.99021	.00000
SAR(12) (Φ_1)	-.50659	.07349	-6.89301	.00000
MA (1) (θ_1)	.36100	.11191	3.22584	.00178
Media (μ)	-.00003	.00001	-5.90040	.00000
Constante (δ)	.00000			
Diferencias ordinarias: 0				
Diferencia estacional de primer orden, longitud: 12				
Varianza de ruido blanco = 5.75062E-11 con 86 grados de libertad				
Desviación estándar para el ruido blanco (std err) = 7.58329E-6				

Veamos la gráfica del periodograma integral de los residuales y la gráfica de los pronósticos:



El ajuste del modelo es bueno según lo indica el periodograma integral de los residuales del modelo.

De nuevo a estos pronósticos tiene que revertirse la transformación hecha a los datos de la serie para hacerla estacionaria, a continuación se muestran las tablas de pronósticos:

Horizonte	Límite inferior	Probable	Límite superior	Horizonte	Límite inferior	Probable	Límite superior
1	1.52E-4	1.37E-4	1.22E-4	13	1.37E-4	1.08E-4	7.83E-5
2	1.47E-4	1.30E-4	1.12E-4	14	1.32E-4	1.01E-4	7.01E-5
3	1.48E-4	1.28E-4	1.09E-4	15	1.31E-4	9.94E-5	6.72E-5
4	1.53E-4	1.32E-4	1.11E-4	16	1.34E-4	1.01E-4	6.85E-5
5	1.51E-4	1.29E-4	1.07E-4	17	1.33E-4	9.94E-5	6.55E-5
6	1.57E-4	1.34E-4	1.10E-4	18	1.37E-4	1.02E-4	6.81E-5
7	1.60E-4	1.36E-4	1.12E-4	19	1.41E-4	1.06E-4	7.07E-5
8	1.58E-4	1.33E-4	1.08E-4	20	1.38E-4	1.02E-4	6.66E-5
9	1.61E-4	1.36E-4	1.10E-4	21	1.41E-4	1.04E-4	6.86E-5
10	1.46E-4	1.20E-4	9.43E-5	22	1.26E-4	8.93E-5	5.26E-5
11	1.49E-4	1.22E-4	9.60E-5	23	1.30E-4	9.32E-5	5.62E-5
12	1.40E-4	1.12E-4	8.56E-5	24	1.20E-4	8.28E-5	4.54E-5

Tabla 3. Valores pronosticados.

Horizonte	Límite inferior	Probable	Límite superior	Horizonte	Límite inferior	Probable	Límite superior
1	6559.36	7279.45	8177.15	13	7248.95	9246.16	12762.26
2	6761.55	7666.65	8851.59	14	7560.52	9881.13	14257.12
3	6745.64	7757.59	9126.67	15	7601.44	10059.94	14868.94
4	6521.88	7549.45	8961.38	16	7421.65	9837.48	14585.30
5	6608.95	7742.22	9344.57	17	7497.71	10053.41	15252.46
6	6352.80	7452.51	9012.74	18	7279.82	9732.45	14677.43
7	6223.47	7324.40	8898.46	19	7079.90	9433.52	14131.34
8	6314.09	7494.57	9218.03	20	7234.42	9761.72	15002.74
9	6174.97	7336.22	9035.46	21	7084.56	9534.25	14573.52
10	6812.13	8294.35	10601.05	22	7933.74	11191.50	18988.66
11	6687.93	8145.51	10415.48	23	7671.12	10718.72	17783.91
12	7139.13	8860.61	11676.05	24	8317.60	12072.59	22007.96

Tabla 4. Valores pronosticados con transformación inversa.

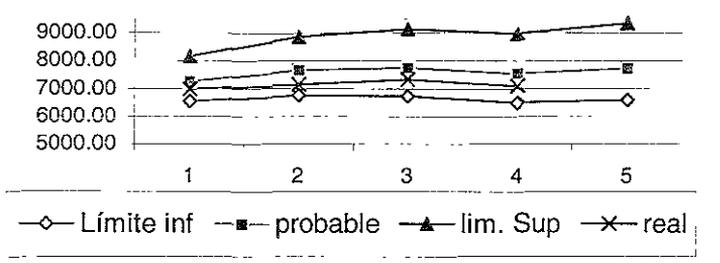
Este modelo tendrá la siguiente expresión algebraica:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \phi_1 B^{12})Z_t - \delta = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_1 B^{12})\epsilon_t$$

Donde $\phi_1 = -.94449$, $\phi_1 = -.50659$, $\theta_1 = .36100$ y $\delta = .00003$

Que tendrá la siguiente gráfica de pronósticos:

Pronósticos comparados con el valor real del período



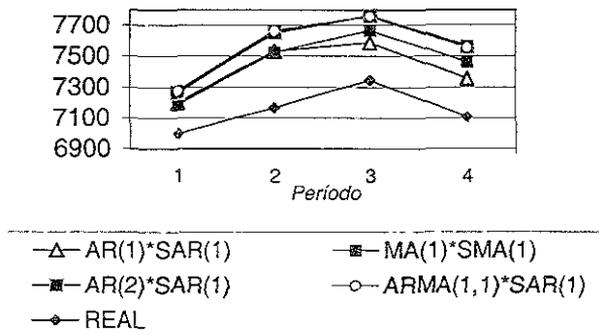
Como vemos en la gráfica, los pronósticos se encuentran bastante apegados al valor real del período.

VI.7 ELECCIÓN DEL MEJOR MODELO

Pero ¿cuál de los modelos es el más adecuado? Comparemos en una tabla y en una gráfica los pronósticos arrojados por todos los modelos :

AR(1)*SAR(1)	MA(1)*SMA(1)	AR(2)*SAR(1)	ARMA(1,1)*SAR(1)	REAL
7197.77	7181.12	7266.6	7279.45	7000
7532.39	7525.42	7652.05	7666.65	7165
7586.68	7668.30	7761.08	7757.59	7345
7355.81	7462.85	7565.38	7549.45	7106

Comparación de los pronósticos



En la gráfica comprobamos que el modelo $AR(1)*SAR(1)$ arroja pronósticos con mayor proximidad a los valores reales arrojados por el modelo. Debemos comparar ahora los valores de los parámetros y los estadísticos de los modelos.

	Modelo $AR(1)*SAR(1)$	Modelo $MA(1)*SMA(1)$	Modelo $AR(2)*SAR(1)$	Modelo $ARMA(1,1)*SAR(1)$
Diferencias ordinarias	1	1	0	0
Dif. estacionales	1	1	1	1
No. de Parámetros	2	2	3	3
$AR \phi(1)$	-.41238	-	.54347	.94449
Estadístico t	-4.26610	-	5.38881	23.99021
$AR \phi(2)$	-	-	.35768	-
Estadístico t	-	-	3.62464	-
$MA \theta(1)$	-	.40206	-	.36100
Estadístico t	-	4.07754	-	3.22584
$SAR \Phi(1)$	-.50158	.29445	-.49090	-.50659
Estadístico t	-6.72816	2.83311	-6.57213	-6.89301
Media	-	-	-.00003	-.00003
Estadístico t	-	-	-6.44485	-5.90040
Varianza de los residuales	5.81629E-11 con 86 g.l.	6.47097E-11 con 86 g.l.	5.72336E-11 con 85 g.l.	5.75062E-11 con 85 g.l.
Desviación estándar de los residuales	7.62646E-6	8.04423E-6	7.56529E-6	7.58329E-6

De acuerdo a estos resultados, el modelo $AR(1)*SAR(1)$ es adecuado para obtener pronósticos ya que es un modelo que arroja pronósticos muy cercanos al valor real de la serie de tiempo. Por otro lado, el modelo $MA(1)*SAR(1)$ arroja pronósticos que son también muy buenos, pero la varianza y la desviación estándar de los residuales son mayores que aquellas del primer modelo. A pesar de que ambos modelos conservan la simplicidad deseada, yo me inclinaría en usar el modelo $AR(1)*SAR(1)$, por tener pronósticos más cercanos a los valores reales de la serie de tiempo.

La fase siguiente es ocupar estos pronósticos para tomar decisiones o planear políticas de trabajo que tendrán más posibilidades de ser exitosas gracias a que contamos con un gran apoyo como lo son los pronósticos obtenidos con un modelo ARIMA(p,d,q).

Con estos resultados, observamos cómo el requerimiento de energía eléctrica seguirá incrementándose (consumo de alta tensión), estos resultados modificarán de diversas maneras las políticas de trabajo de una empresa, dependiendo del ramo al que se dedique.

Por ejemplo, la compañía encargada de suministrar la energía eléctrica (CFE) deberá proyectar si serán lo suficientemente capaces para suministrar la energía eléctrica necesaria dentro de dos años, si no lo es, implementará acciones para corregir esta deficiencia en su sistema. Por otra parte, deberá implementar campañas entre los consumidores que inviten al uso moderado del suministro de la energía eléctrica.

La fase última es añadir los valores reales a la serie temporal conforme se va alcanzando el período de tiempo siguiente y observar si nuestro modelo continúa siendo correcto o es necesario volver a calcularlo. Esto garantizará que nuestros pronósticos tengan un nivel de confianza alto.

VI.8 RESUMEN

En este último Capítulo, empleamos la metodología Box-Jenkins para obtener un modelo ARIMA(p,d,q), pasando por cada una de las fases que la complementan; los resultados nos muestran la exactitud y gran confianza que podemos tener en los modelos matemáticos de pronóstico que a través de este método se obtienen. Es esta precisión la que ha popularizado esta metodología en diferentes ámbitos del quehacer humano, tanto en la empresa privada como en el sector público; el éxito de esta metodología radica en parte, en que el desarrollo de las computadoras permitió que los cálculos iterativos fueran hechos de manera rápida y precisa, además como esta metodología a demostrado su eficacia, se han desarrollado paquetes de cómputo especializados en estadística y en particular, en la obtención de modelos ARIMA(p,d,q).

Reitero una vez más que el empleo de las series de tiempo para obtener modelos de pronóstico debe ser cada vez más utilizado, un pronóstico debe llevar a una planeación de políticas o estrategias de trabajo. Dichas acciones pueden ser correctivas en caso de un pronóstico adverso a lo esperado, o bien, las políticas de trabajo deberán ser complementadas para seguir obteniendo buenos resultados.

CONCLUSIONES GENERALES

A lo largo de todo este trabajo, he expuesto las razones por las cuales se deben ocupar los pronósticos para reducir la incertidumbre en las actividades de los profesionistas cuya labor en sus empleos sea la toma de decisiones, sea cual sea el campo en el que se desenvuelvan. Así mismo, se dieron las bases teóricas de la metodología Box-Jenkins por la cual se obtienen los modelos $ARIMA(p,d,q)$.

Pero la importancia de este trabajo radica en la creación de una página web dedicada a este tópico, página que será de ayuda académica no sólo a los alumnos de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la UNAM Campus Acatlán (en particular a los que cursen la preespecialidad en Simulación y Análisis de Decisiones), sino a todos los interesados en este tema que tengan acceso a la red Internet. Este mismo medio, la Internet, debe ser aprovechado para difundir y promover sitios electrónicos creados en la ENEP Acatlán para que puedan ser aprovechados por todos sus estudiantes, profesores y todos los que ingresen a estas páginas electrónicas.

La página electrónica "Series de Tiempo" cubre los objetivos de la asignatura Modelos de Decisión con Procesos Estocásticos II (según el Plan de Estudios de la carrera de MAC), con un lenguaje fresco, con ejemplos y gráficas suficientes para que la comprensión de sus diversos pasos sea más clara. Cuando los alumnos de MAC, que cursaban la materia arriba citada, tuvieron acceso al sitio web reaccionaron favorablemente y estuvieron de acuerdo en que sitios como éste, son necesarios para complementar sus estudios e investigaciones y opinaron que deberían crearse más sitios con características similares a la página electrónica "Series de Tiempo" en la UNAM y en particular en el Campus Acatlán.

De esta manera, la página electrónica creada en este trabajo, ha cumplido con su objetivo de ser una ayuda didáctica, conteniendo material valioso para todos aquellos que estén interesados en las series de tiempo y cómo se ocupan para crear modelos de pronóstico para disminuir la incertidumbre en la toma de decisiones.

Pero además de su ayuda académica, la página electrónica "Series de Tiempo" podrá dar a conocer el impacto que los egresados de la preespecialidad en Simulación y Análisis de Decisiones pueden tener en la empresa pública y privada, pues al implementar sus conocimientos para reducir la incertidumbre en la planeación de estrategias y políticas de trabajo, se fomentará que la contratación de los egresados aumente.

APÉNDICE

Series de tiempo empleadas.

Serie 1.

$Y_t = b + \varepsilon_t$ Con $b=13$:

t	$Y_t = b + \varepsilon_t$								
1	11.9319	11	14.2663	21	12.6858	31	14.1422	41	12.5837
2	12.495	12	10.3386	22	12.9704	32	13.0355	42	13.2311
3	13.9917	13	11.9787	23	12.259	33	15.2788	43	13.6479
4	14.2829	14	13.7748	24	13.945	34	14.1388	44	13.4294
5	13.552	15	12.8903	25	14.5437	35	12.842	45	13.4964
6	12.9859	16	13.1522	26	11.4195	36	12.4103	46	12.1714
7	11.963	17	13.4862	27	12.7926	37	12.5237	47	13.079
8	13.9056	18	13.5647	28	13.5844	38	13.6413	48	12.9167
9	12.9122	19	14.6841	29	12.1786	39	13.3166	49	12.4624
10	12.1533	20	13.1742	30	13.1137	40	11.3521	50	10.5919

Serie 2. $Y_t = b_1 + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{12} + b_3 \frac{2\pi t}{12} + \varepsilon_t$ Con $b_1=12$, $b_2=4$, $b_3=7$.

t	Y_t								
1	19.9184	11	16.1376	21	8.0943	31	4.27	41	8.3834
2	18.1328	12	18.1791	22	13.0309	32	6.003	42	5.8872
3	16.3985	13	20.6845	23	16.6513	33	8.7285	43	3.7816
4	12.3842	14	19.7519	24	19.244	34	11.7451	44	5.4453
5	8.2825	15	15.7686	25	19.1485	35	15.0875	45	7.8521
6	4.9963	16	12.1863	26	18.546	36	19.9768	46	12.9214
7	4.3387	17	8.688	27	16.839	37	20.1676	47	15.9246
8	5.2442	18	5.6505	28	12.275	38	19.5878	48	19.2199
9	8.3807	19	3.2059	29	8.4292	39	16.4943	49	20.6458
10	11.5762	20	4.0911	30	5.7347	40	12.9507	50	18.0193

Serie 3. Modelo AR(1) con $\phi_1 = -0.8596$

t	Z _t								
1	1.260037	11	0.327121	21	3.413041	31	2.329131	41	3.093498
2	-1.190332	12	-0.090840	22	2.021662	32	2.009063	42	2.216225
3	-0.564498	13	0.401681	23	0.887378	33	1.830885	43	2.347117
4	0.210953	14	2.120438	24	1.142408	34	2.116178	44	0.998481
5	-0.323580	15	1.983641	25	1.334301	35	1.515903	45	0.308284
6	-0.629077	16	2.243780	26	2.255189	36	1.186457	46	-0.533663
7	-0.820122	17	0.835851	27	2.645645	37	1.306573	47	-1.365295
8	0.017489	18	0.311502	28	3.809079	38	1.567504	48	-1.105144
9	0.713978	19	0.590555	29	1.690061	39	3.345860	49	-2.373886
10	0.889349	20	1.766645	30	1.799443	40	4.099821	50	-2.250606

Serie 4. Modelo AR(1) con $\phi_1 = -1.09$

t	Z _t								
1	0.46072	11	-0.19871	21	3.29978	31	7.80280	41	30.05492
2	0.09129	12	-0.80548	22	-6.12434	32	-10.11212	42	-33.55367
3	0.91582	13	-0.29696	23	6.36737	33	12.02490	43	36.39790
4	-1.07768	14	1.58686	24	-6.52014	34	-13.83588	44	-38.51679
5	1.44803	15	-0.81900	25	6.56873	35	14.79269	45	42.33549
6	-1.97656	16	0.23834	26	-7.49435	36	-17.13002	46	-45.30537
7	1.02819	17	0.75335	27	7.11842	37	19.77097	47	48.81614
8	-0.60849	18	-1.80291	28	-7.19647	38	-20.76090	48	-54.16072
9	-0.39960	19	2.31681	29	7.92802	39	23.62990	49	58.61864
10	1.42986	20	-2.12779	30	-7.92215	40	-26.66145	50	-65.19852

Serie 5. Modelo MA(1) con $\theta_1 = 0.8594$

t	Z _t								
1	-1.11957	11	0.14235	21	-1.29714	31	2.39166	41	-0.49700
2	1.30468	12	-0.91301	22	-0.68584	32	-2.51622	42	0.41393
3	0.92160	13	-0.39078	23	2.10226	33	0.38923	43	-0.86373
4	-1.13387	14	-0.22271	24	0.39066	34	0.32319	44	-0.33136
5	0.91932	15	1.31565	25	-1.07310	35	1.42241	45	-0.95362
6	-0.56036	16	-2.65823	26	2.66901	36	-0.20813	46	0.66259
7	-1.52039	17	2.87994	27	-3.26545	37	-1.35266	47	0.91023
8	1.55457	18	-0.63831	28	0.84082	38	1.25787	48	-0.07145
9	-0.04934	19	-0.24180	29	-1.05613	39	-0.36643	49	1.05296
10	0.06439	20	0.92929	30	-0.46819	40	0.41013	50	-1.70538

Serie 6. Modelo ARMA(1,1) con $\phi_1=-0.56$ y $\theta_1=0.6$

t	Z _t								
1	0.81389	11	2.72790	21	-0.20711	31	-1.73196	41	0.41696
2	-0.88566	12	-1.18811	22	0.15093	32	2.19497	42	0.39016
3	0.23188	13	-0.18522	23	-0.42911	33	-2.48727	43	1.03494
4	1.93745	14	1.11653	24	0.25464	34	1.79055	44	-2.36805
5	-0.29314	15	-1.44570	25	-0.24022	35	-1.20604	45	2.27820
6	-2.87506	16	0.69633	26	-0.07318	36	1.03453	46	-0.50432
7	2.58503	17	-0.56041	27	1.33983	37	-1.13796	47	0.07152
8	-1.78762	18	0.54852	28	-2.72494	38	0.03638	48	-0.00053
9	1.53718	19	-1.06303	29	2.18746	39	0.91929	49	-0.51736
10	-1.97994	20	0.87298	30	0.42663	40	-1.40517	50	1.99954

Serie 7. Prestaciones Sociales en México. Egresos totales. Fuente: INEGI/BIE.

	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
enero	79022	201950	291916	401726	526784	632342	703343	762592	862006
febrero	83006	217973	298597	401714	523987	655536	691320	770377	855852
marzo	87168	243613	326965	431326	568941	691045	784003	835870	875418
abril	98631	251601	330202	439372	568673	704584	744436	809714	895730
mayo	105516	267243	388578	498721	660085	763417	776182	845307	923567
junio	110145	264581	363385	456643	633848	728923	780117	830986	947476
julio	117064	265655	360441	483447	620118	733609	789684	849509	948071
agosto	125867	264059	371965	497062	631304	748491	806428	820626	941953
sept.	142271	271701	382447	497525	617403	767172	796843	848524	1027372
oct.	160459	270557	445128	521738	641926	755853	819976	841943	963314
nov.	173012	287187	410510	525514	640830	761121	827418	850127	955052
dic.	233900	344227	472259	617734	846150	934185	903284	957219	1064983

Serie 8. Finanzas Públicas en México. Ingresos del sector público. De enero 1986 a marzo 2000. Fuente: INEGI/BIE

t	dato	t	dato	t	dato	t	dato	t	dato	t	dato
1	1778.5	31	67440.5	61	20979.8	91	170861.6	121	43792.1	151	439741.8
2	3236.2	32	78683.3	62	37544.6	92	195414.1	122	80567.9	152	503522.7
3	4822.3	33	88897.1	63	54199.9	93	220087.8	123	123493.5	153	568228
4	6441.3	34	98445.6	64	73198	94	244398.4	124	170036.2	154	637470.9
5	8287	35	108180	65	91042.2	95	269213.9	125	218835.9	155	701608.2
6	10063.3	36	118513.8	66	108592.2	96	301520.1	126	260066.7	156	783046
7	12144.5	37	12168.8	67	127745.9	97	29513.9	127	307927.5	157	79075.4
8	14100.5	38	22483.6	68	147929.7	98	53915	128	356635.9	158	142701.6
9	16476.1	39	34333.1	69	166157.8	99	84410.6	129	401908	159	226307
10	18893.4	40	45919.8	70	186674.8	100	114065	130	454049.1	160	313445.5
11	21268.6	41	58680.2	71	205542.3	101	141655.6	131	506786	161	384901.3
12	24082.3	42	71038.2	72	229608.3	102	170986.7	132	580722	162	456465.6
13	3064.7	43	84429.7	73	23603.6	103	201128.6	133	64350.9	163	535727.7
14	6010.8	44	97444.6	74	41395.1	104	232634	134	116823.6	164	616180
15	9892.7	45	109971.4	75	62445.8	105	264526	135	172464.8	165	693507.7
16	13912	46	122985.6	76	85310.4	106	297116.3	136	231068.4	166	776857.6
17	17934.2	47	135123.5	77	105924.1	107	328054.1	137	287562.6	167	859834.6
18	22656	48	149088.3	78	127561.8	108	363065.5	138	348382.9	168	954937.3
19	27655.2	49	16381.8	79	150681.3	109	30859.2	139	407567.3	169	98356.9
20	32768.4	50	29924.4	80	179825.8	110	56845.6	140	463294.6	170	182108.5
21	38549.4	51	45505.9	81	201365.7	111	89221.1	141	515266	171	290925.8
22	44860.4	52	61193.4	82	224312.8	112	120795.4	142	577586.5		
23	51318.4	53	76962.9	83	245956.2	113	156286.6	143	637735.8		
24	59102.7	54	92640.7	84	274471	114	191184.8	144	731991.2		
25	8414.7	55	108913.7	85	25133.5	115	226180.8	145	69013.4		
26	17030	56	125734.5	86	45388.4	116	261338.7	146	125524.4		
27	27616.3	57	142248.2	87	71172.5	117	293176.4	147	187841.2		
28	36928.6	58	160874.5	88	96890.4	118	329093.9	148	253625.7		
29	46947.3	59	179391.4	89	120829.5	119	363651.4	149	311857.5		
30	56881.5	60	203486.3	90	145323.1	120	418882.6	150	372910.3		

Serie 9. Consumo eléctrico del sector industrial. De enero 1982 a julio 2000.
Fuente INEGI/BIE.

t	dato	t	dato	t	dato	t	dato	t	dato	t	dato
1	2629	41	3245	81	4085	121	2270	161	3226	201	5433
2	2506	42	3379	82	4111	122	2181	162	3228	202	5581
3	2676	43	3394	83	4027	123	2525	163	3300	203	5317
4	2819	44	3546	84	4088	124	2497	164	3419	204	5286
5	2792	45	3560	85	4302	125	2592	165	3355	205	5335
6	2806	46	3501	86	4364	126	2683	166	3472	206	5219
7	2905	47	3497	87	4651	127	2665	167	3424	207	5693
8	2856	48	3398	88	4670	128	2762	168	3448	208	5711
9	3082	49	3194	89	4998	129	2686	169	3475	209	5991
10	2826	50	3218	90	5083	130	2781	170	3430	210	6126
11	2684	51	3319	91	4422	131	2756	171	3635	211	6372
12	2674	52	3298	92	4409	132	2742	172	3544	212	6430
13	2635	53	3461	93	4332	133	2551	173	3796	213	6343
14	2569	54	3424	94	4260	134	2589	174	3770	214	6391
15	2709	55	3463	95	5028	135	2785	175	3901	215	6304
16	2770	56	3619	96	4798	136	2767	176	3987	216	6125
17	2791	57	3490	97	4494	137	2841	177	3891	217	6261
18	2859	58	3562	98	3956	138	2810	178	4071	218	6166
19	2975	59	3535	99	4216	139	2842	179	4176	219	6790
20	2965	60	3365	100	4176	140	2778	180	3922	220	6523
21	3045	61	3326	101	4300	141	2785	181	4198	221	7009
22	3052	62	3245	102	4451	142	2916	182	3984	222	7000
23	3010	63	3571	103	4542	143	2765	183	4324	223	7165
24	2920	64	3473	104	4622	144	2824	184	4470		
25	2817	65	3633	105	4578	145	2767	185	4645		
26	2935	66	3720	106	4466	146	2660	186	4676		
27	2994	67	3833	107	4756	147	2937	187	4816		
28	2963	68	3901	108	4367	148	2957	188	4947		
29	3155	69	3708	109	4112	149	3087	189	4883		
30	3142	70	3656	110	4009	150	3045	190	5022		
31	3174	71	3699	111	4267	151	3109	191	4792		
32	3226	72	3486	112	4291	152	3139	192	4834		
33	3319	73	3590	113	4550	153	3114	193	4886		
34	3191	74	3600	114	4549	154	3215	194	4680		
35	3295	75	3756	115	4481	155	3112	195	5123		
36	3040	76	3770	116	4597	156	3137	196	4961		
37	3023	77	3882	117	4618	157	3125	197	5331		
38	3163	78	3928	118	4644	158	2977	198	5434		
39	3191	79	4050	119	4508	159	3141	199	5625		
40	3240	80	4006	120	4363	160	3114	200	5637		

Nota: A partir de enero de 1992 el consumo de energía para uso industrial comprende sólo el suministro de alta tensión, debido a la reestructuración tarifaria para el suministro y venta de energía eléctrica (publicado en el diario oficial el 10 de noviembre de 1991), ya que anteriormente incluía otros tipos de tensión. Por ello las cifras no son comparables.

BIBLIOGRAFÍA

1. BOX, George y JENKINS, Gwilym. TIME SERIES ANALYSIS forecasting and control. Ed. Holden Day. E.E.U.U. 1976.
2. WEI, William, TIME SERIES ANALYSIS Univariate and Multivariate Methods. Ed. Addison-Wesley. E.E.U.U. 1990.
3. GONZÁLEZ, María del Carmen. Modelos de Decisión con Procesos Estocásticos II (Metodología de Box-Jenkins). Ed. UNAM Acatlán. México 1990.
4. MONTGOMERY, Douglas. Forecasting and Time Series Analysis. Ed. McGraw-Hill International Editions, 2ª ed. E.E.U.U. 1990.
5. ARMSTRONG, Scott. LONG-RANGE FORECASTING From Crystal Ball to Computer. Ed. John Wiley & Sons. E.E.U.U. 1978.
6. CHRÉTIENNE, Philippe et FAURE, Robert. Processus stochastiques, leurs graphes, leurs usages. Ed. Gauthier-Villars. Francia 1974.
7. WHEELWRIGHT, Steven y MAKRIDAKIS, Spyros. Forecasting Methods for Management. 4º ed. Ed. John Wiley & Sons. E.E.U.U. 1985.
8. KENDALL Kenneth y KENDALL Julie. Análisis y diseño de sistemas. Ed. PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA. México 1991.