UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Filosofía y Letras
División de Estudios de Posgrado
Instituto de Investigaciones Filosóficas

RELACIONES METALÓGICAS ENTRE COMPACIDAD Y COMPLETUD: UNA PRUEBA SEMÁNTICA DE COMPLETUD EN LÓGICA CLÁSICA

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN FILOSOFIA DE LA CIENCIA

presenta

JOSÉ ALFREDO AMOR MONTAÑO

Directora de tesis: Dra. Atocha Aliseda Llera

Ciudad Universitaria 2001

RELACIONES METALÓGICAS ENTRE COMPACIDAD Y COMPLETUD: UNA PRUEBA SEMÁNTICA DE COMPLETUD EN LÓGICA CLÁSICA

El teorema de Correctud-Completud Extendido de Gödel es considerado el resultado fundamental de la lógica deductiva clásica de predicados, desde un punto de vista sintáctico, pues establece la equivalencia entre la noción sintáctica de derivabilidad formal en un sistema axiomático, y la noción semántica de consecuencia lógica clásica. Un corolario de este teorema, es el teorema de Compacidad, el cual establece que un conjunto infinito de fórmulas es satisfacible si y sólo si cada subconjunto finito suyo es satisfacible. Este teorema es considerado el resultado fundamental de la lógica, desde un punto de vista semántico.

Se plantea y se responde el problema de establecer una prueba de tipo semántico del teorema de Correctud-Completud Extendido como consecuencia del teorema de Compacidad. Este tipo de prueba consiste en definir, con una motivación semántica, un sistema axiomático ad hoc, de modo de establecer su Correctud-Completud Extendida, sin trabajar dentro del sistema, con la ayuda del teorema de Compacidad y otros resultados semánticos de Skolem y de Herbrand.

La aportación principal de este trabajo consiste en un análisis profundo de las relaciones metalógicas entre estos dos teoremas, a partir del cual se obtienen resultados metalógicos que permiten proponer el sistema axiomático mencionado. La prueba es directa, semántica, y en ella es esencial demostrar que el sistema satisface el Metateorema de la Deducción.

Las conclusiones principales son por un lado haber probado una equivalencia entre dos teoremas fundamentales de la lógica clásica y por otro mostrar el poder de ideas semánticas para justificar resultados sintácticos.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

RELACIONES METALOGICAS ENTRE COMPACIDAD Y COMPLETUD: UNA PRUEBA SEMANTICA DE COMPLETUD EN LOGICA CLASICA.

Gödel's Extended Correctness-Completeness theorem is regarded as the fundamental result in classical deductive predicate logic, from a syntactical point of view. The reason is that it asserts the equivalence between the syntactical concept of formal derivability in an axiomatic system, and the semantic concept of classical logical consequence. As a corollary of this theorem, the Compactness theorem is proven. This theorem asserts the satisfiability of an infinite set of formulae if and only if each of its finite subsets is also satisfiable. It is often regarded as the fundamental result in logic, from a semantic point of view.

We give an answer to the problem of establishing a semantic-type proof for the Extended Correctness-Completeness theorem as a corollary of the Compactness theorem. This type of proof involves the definition of a semantically motivated ad hoc axiomatic system, in order to establish its extended correctness-completeness property without having to work inside itself. For this we use the Compactness theorem and other semantic results due to Skolem and Herbrand.

The main goal of this research is a deep analysis of the metalogical relationships between these two theorems, the outcome being metalogical results that provide us with the tools to construct the desired axiomatic system. The proof is straightforward, semantic, and relies essentially on the fact that the system satisfies the deduction theorem.

The main conclusions are twofold, to have proved the equivalence between two fundamental theorems in classical logic, and to have shown the power of semantic ideas to justify syntactic results.

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

Para Judith

Para Alejandro, Alfredo y Andrés

A la memoria de Gödel, revolucionario de la lógica moderna.

A todos aquellos que han recorrido el camino fascinante de la lógica . . .

RELACIONES METALÓGICAS ENTRE COMPACIDAD Y COMPLETUD:

UNA PRUEBA SEMÁNTICA DE COMPLETUD EN LÓGICA CLÁSICA

José Alfredo Amor Montaño

Tutora: Dra. Atocha Aliseda Llera
Cotutor: Dr. Raúl Orayen Flores
Cotutor: Dr. Mario Gómez Torrente

Doctorado en Filosofía de la Ciencia
Instituto de Investigaciones Filosóficas
Facultad de Filosofía y Letras
UNAM

Agradecimientos

Quiero agradecer a la Dra. Atocha Aliseda Llera por el invaluable trabajo realizado en la dirección de esta tesis, así como a los cotutores Dr. Raúl Orayen Flores y Dr. Mario Gómez Torrente, por el seguimiento de la misma, sus atinados comentarios y sus observaciones críticas.

Agradezco también a los sinodales: Dr. José Antonio Robles García, Dr. Raymundo Morado Estrada, Dr. Áxel Barceló Aspeitia y Dr. Max Fernández de Castro, por sus valiosas sugerencias e indicaciones que contribuyeron grandemente a mejorar este trabajo. A todos muchas gracias.

Agradezco los interesantes comentarios de: Dr. Ignacio Jané de la Universidad de Barcelona, Dr. Herbert Enderton de la Universidad de California L. A., Dr. Grigori Mints de la Universidad de Stanford, Dra. María Manzano de la Universidad de Salamanca, Dr. Johan van Benthem de la Universidad de Amsterdam.

Mi reconocimiento al apoyo que siempre tuve del Instituto de Investigaciones Filosóficas, del Dr. León Olivé, del Dr. Ambrosio Velasco y de la Dra. Ana Rosa Pérez Ransanz, así como la ayuda incondicional de Mari Carmen Garzón y del Lic. Eric Camacho.

Agradezco a la DGAPA, al Consejo Técnico de la Facultad de Ciencias y al Consejo Departamental de Matemáticas, por el apoyo recibido durante el desarrollo de esta tesis.

PREFACIO

El tema de esta investigación está inscrito en el estudio de las relaciones metalógicas entre Compacidad y Correctud-Completud en la lógica deductiva clásica de primer orden con igualdad.

El teorema de Correctud-Completud Extendido es considerado el resultado fundamental de la lógica de primer orden desde un punto de vista sintáctico, pues establece la equivalencia entre la noción sintáctica de derivabilidad formal (en un sistema axiomático) y la noción semántica de consecuencia lógica clásica. Este teorema asegura la *existencia* de un sistema axiomático, tal que toda fórmula φ que es *derivable en ese sistema formal* a partir de un conjunto de fórmulas Σ, es *consecuencia lógica* de Σ y que toda fórmula φ que es *consecuencia lógica* de Σ es *derivable en ese sistema formal* a partir de Σ. Este teorema, es un puente adecuado entre la sintaxis y la semántica de un lenguaje de primer orden.

Como corolario del teorema de Correctud-Completud Extendido, puede probarse en forma directa otro resultado importante; a saber, el teorema de Compacidad, el cúal establece que para que un conjunto infinito de fórmulas sea satisfacible[1] es necesario y suficiente que cada subconjunto finito suyo sea satisfacible.

Kurt Gödel probó en 1930,[2] para un sistema formal particular, una versión restringida del teorema de Correctud-Completud para lenguajes numerables. A diferencia de lo que se afirma en la literatura, Gödel probó el teorema de Compacidad no como corolario sino en forma semántica e independiente del sistema formal. Con éste resultado, Gödel generalizó su teorema de completud restringida a una formulación generalizada, equivalente a lo que en esta tesis llamamos la versión "extendida" del teorema de Correctud-Completud.

Presentamos el problema de establecer una prueba de tipo semántico del teorema de Correctud-Completud Extendido de Gödel como corolario del teorema de Compacidad. Por esto entendemos definir un sistema axiomático y usando sólo el teorema de Compacidad y otros resultados semánticos, probar de un modo semántico, que es correcto y completo tanto en forma restringida como en forma extendida. La diferencia entre lo que hizo Gödel y lo que hacemos nosotros es la siguiente: él probó la versión restringida, sintácticamente[3] y a partir de ella probó la generalizada usando Compacidad. Nosotros probaremos tanto la versión restringida como la extendida[4] usando Compacidad y otros resultados semánticos.[5]

[1] En el sentido de tener un modelo. Es decir, una interpretación para su lenguaje, respecto a la cual todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas.
[2] Cf. [Gödel 1930 a], [Gödel 1930 b], [Gödel 1930 c].
[3] Para el sistema dado en [Whitehead & Russell]. Véanse las secciones 1.3 del capítulo uno y 3.1 del capítulo tres, de este trabajo.
[4] Para el sistema que definiremos en el capítulo cinco de este trabajo.
[5] Los teoremas de Skolem y de Herbrand que presentaremos con detalle en el capítulo cuatro.

Consideramos que el teorema de Compacidad es el resultado fundamental de la lógica de primer orden, desde un punto de vista semántico. Este teorema afirma (en una formulación equivalente a la mencionada antes), que toda fórmula φ que es *consecuencia lógica* a partir de un conjunto de fórmulas Σ, es *consecuencia lógica "finita"* (de algún subconjunto finito) de Σ, y que toda fórmula que es *consecuencia lógica finita* de Σ es *consecuencia lógica* a partir de Σ.

Con las pruebas de los dos teoremas y tomando como "puente" el concepto de consecuencia lógica, queda demostrada la equivalencia entre los conceptos clave de los dos teoremas (para un sistema formal adecuado) a saber: "***derivable en el sistema formal***" *y* "***consecuencia lógica finita***", ambos para una fórmula φ y un conjunto de fórmulas Σ dados. Lo anterior sugirió sustentar la tesis de que los dos teoremas son equivalentes.

Es un resultado muy conocido que el teorema de Correctud-Completud Extendido implica al teorema de Compacidad. La aportación principal de este trabajo consiste en un análisis profundo de las relaciones entre los dos teoremas, obteniendo algunos resultados metalógicos que nos permiten definir un sistema axiomático *ad hoc* cuyos axiomas y reglas no están motivados sintácticamente sino semánticamente y probar directamente con el teorema de Compacidad y otros resultados semánticos, la correctud y la completud extendida de ese sistema, mostrando así que el teorema de Compacidad implica al teorema de Correctud-Completud Extendido.

RELACIONES METALÓGICAS ENTRE COMPACIDAD Y COMPLETUD:
UNA PRUEBA SEMÁNTICA DE COMPLETUD EN LÓGICA CLÁSICA

CONTENIDO

CAPÍTULO UNO

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes.

La Lógica Matemática surgió con el propósito de estudiar el razonamiento correcto. Actualmente, el estudio del razonamiento correcto como razonamiento deductivo es sólo una parte de la lógica matemática. Ésta, en contraste con el razonamiento correcto, al desarrollarse en el siglo XX se nutrió de la teoría intuitiva de los conjuntos y del álgebra universal, e interactuó con otras teorías matemáticas y ha llegado a ser una rama muy amplia de la matemática moderna.

Una analogía con el desarrollo de la geometría puede ilustrar más esta idea: la geometría surgió con el propósito de medir la tierra. Podemos decir que ese propósito original lo sigue cumpliendo, pero la geometría actualmente es mucho más que eso, pues al interactuar con el álgebra y el cálculo, al abandonar la unicidad euclidiana y al desarrollarse con otras ideas abstractas, la geometría actual es también una rama muy amplia de la matemática moderna, que va mucho más allá de "medir la tierra".

Desde el siglo XIX se desarrolló el álgebra de la lógica de George Boole y la teoría de la cuantificación de Gottlob Frege. En el siglo XX las primeras tareas de la lógica clásica consistieron en elaborar cálculos para la deducción formal o derivación lógica: la lógica proposicional o de los conectivos y la lógica de la cuantificación. También se desarrollaron simbolizaciones y notaciones unidimensionales mucho más fáciles de manipular que las de Frege.

La lógica se matematizó al usar de modo importante métodos e ideas matemáticas como la simbolización, la definición de nuevos conceptos, el uso del modo inductivo y recursivo de pensamiento y novedosos métodos de prueba. Así surgieron las áreas de la lógica matemática conocidas como: fundamentos de la matemática, teoría de la recursión, teoría de la demostración, teoría de modelos y teoría de conjuntos. Más recientemente, han surgido otras áreas como las lógicas no clásicas, la lógica computacional, etc.

Una de las áreas básicas de la Lógica Matemática moderna es la Teoría de Modelos, que es una vasta región entre la lógica y el álgebra, que estudia la relación entre los lenguajes formales y sus modelos,[1] cuyo estudio inicia con los lenguajes formales de primer orden con igualdad y cuyos teoremas más importantes son el teorema de Correctud-Completud Extendido y el teorema de Compacidad. El significado, la historia y las consecuencias de estos dos teoremas se expondrán con todo detalle en los capítulos tres y cuatro respectivamente. Todos los conceptos básicos y resultados preliminares están en el capítulo dos.

Consideramos importante hacer aquí una aclaración sobre la terminología, ya que para algunos conceptos no hay un acuerdo unánime sobre la palabra que se refiere a ellos y en muchos diccionarios no hay palabra para ellos. Dos son básicamente los términos discutidos en este sentido, el primero es *correctud*, que usamos para referirnos a *calidad de correcto*; para este concepto existe también la palabra *corrección.*[2] El segundo de ellos es *completud*, que usamos para referirnos a *calidad de completo*; para este concepto existe también la palabra *compleción*[3]. Respecto a la palabra *compacidad* para referirnos a

---

[1] Interpretaciones de los lenguajes donde las fórmulas son verdaderas.

[2] La palabra *corrección*, si existe en el diccionario de la lengua española de la Real Academia Española, con el significado de "*calidad de correcto*". Cf. [Real Academia Española] página 577. La palabra "*correctud*" no existe ahí.

[3] La palabra *compleción*, si existe en el diccionario de la lengua española de la Real Academia Española, con el significado de "*calidad y condición de completo*". Cf. [Real Academia Española] página 523. La palabra "*completud*" no existe ahí.

calidad de compacto, si hay acuerdo y aparece comúnmente en los diccionarios.

El primero de los dos teoremas fundamentales mencionados, el teorema de Correctud-Completud Extendido, asegura la existencia de un sistema axiomático adecuado para la lógica de primer orden con igualdad; es decir, un sistema formal que recupera sintácticamente de modo correcto y completo a la semántica. Esto último significa que para todas las consecuencias lógicas hay derivaciones formales y todas las derivaciones formales son consecuencias lógicas.[4]

El Teorema de Compacidad, por otro lado, asegura la existencia de un modelo, para cualquier conjunto infinito de enunciados cuyos subconjuntos finitos tengan un modelo.[5] Este teorema tiene bellas y útiles consecuencias y aplicaciones para la construcción de modelos, como lo son el teorema de Löwenheim-Skolem, la justificación de la existencia de los infinitesimales del análisis no estándar y el teorema de los cuatro colores para mapas infinitos.

El objetivo central de este trabajo es el estudio de las relaciones entre el teorema de Compacidad y el teorema de Correctud-Completud Extendida. Es bien sabido que Correctud-Completud Extendida implica Compacidad.[6] En esta tesis se da una prueba de la implicación inversa; es decir, que Compacidad implica Correctud-Completud Extendida. Se propone la existencia de una prueba de tipo semántico[7] de Correctud-Completud Extendida, usando el teorema de Compacidad, el teorema de Herbrand (probado a partir de Compacidad) y otros resultados semánticos.

Consideramos importante una prueba de tipo semántico porque el teorema de Compacidad es puramente semántico y queremos probar a partir de él, el teorema de Correctud-

[4] El significado de estos conceptos se expondrá con todo detalle en el capítulo dos.
[5] Un *modelo* para un conjunto de enunciados es una interpretación para el lenguaje respecto a la cual los enunciados son verdaderos. Esto se verá con más detalle en el capítulo dos.
[6] Cf. [Enderton] página 136 o [Manzano] página 131.
[7] En el capítulo tres, precisamos esta idea de *prueba de tipo semántico*.

Completud Extendido, que es un teorema que relaciona la sintaxis y la semántica; es decir, queremos establecer la existencia de un sistema axiomático adecuado para la semántica y justificar esto de modo semántico. Esta es la contribución principal de la tesis y se encuentra en el capítulo cinco.

Los resultados clave para la construcción del sistema axiomático mencionado en el párrafo anterior, fueron descubrir y establecer ciertas relaciones metalógicas de necesidad y suficiencia entre propiedades semánticas y sintácticas de los sistemas axiomáticos. Esto nos hizo ver que el sistema que queríamos, debería satisfacer necesariamente el Metateorema de la Deducción para poder cumplir el teorema de Correctud-Completud en su forma extendida. Sin embargo estos resultados tienen un interés metalógico por sí mismos, independientemente de su aplicación en esta tesis. Estos resultados metalógicos están en el capítulo dos.

1.2 Motivaciones

Hay al menos tres motivaciones para buscar este tipo de relaciones metalógicas e intentar una prueba del estilo mencionado en la sección anterior. A saber, estas son: matemáticas, filosóficas y didácticas.

Nuestra motivación de tipo matemático surgió al estudiar los dos teoremas, de Correctud-Completud Extendido y de Compacidad, y razonar sobre la relación matemática entre ellos. Ambos son teoremas muy fuertes e importantes en lógica clásica, y se pueden dar demostraciones de cada uno independientes entre sí. Además, es importante notar como antecedente a este trabajo que en [Amor] probamos que estas dos demostraciones se pueden presentar *esencialmente con la misma estructura*, (cf. [Amor] páginas 105-106 y las demostraciones mismas en las páginas 28-36 y páginas 130-144 respectivamente). De esto nos damos cuenta si intercambiamos los conceptos de conjunto de fórmulas *finitamente satisfacible* (para todo subconjunto finito hay un modelo) y de conjunto de fórmulas *consistente* respecto a un sistema axiomático (del conjunto no se deriva una contradicción en el sistema). Ahora bien, existe una prueba directa y sencilla de que Correctud-Completud Extendida implica Compacidad; esto nos sugirió la pregunta por la implicación inversa: ¿Compacidad implica en forma directa el teorema de Correctud-Completud Extendido?

La motivación filosófica surge de reflexionar sobre la relación metamatemática entre los dos teoremas, dado que los dos son de algún modo igual de fuertes, de la misma estructura formal, y ambos parecen decir lo mismo en lenguajes diferentes, uno semánticamente y el otro sintácticamente. Así, nos preguntamos si deben ser de algún modo equivalentes y nos propusimos analizar más finamente la relación entre ellos. La motivación filosófica principal era preguntarnos si el poder de las ideas semánticas puede justificar resultados sintácticos.

La motivación didáctica surge de la enseñanza de pruebas de tipo semántico del teorema de Compacidad totalmente independientes del trabajo con sistemas axiomáticos y que, al presentar el teorema de Completud surge la pregunta: ¿puedo usar el teorema de Compacidad, ya demostrado, así como otros resultados semánticos demostrados usando Compacidad, para probar el teorema de completud de un modo semántico y directo? Esta pregunta surge sobre todo, si no se quiere dar una prueba sintáctica que resulta de la misma estructura y de igual o más complejidad que la prueba de Compacidad.

1.3 Objetivos

El tema de esta investigación está inserto pues, en el estudio de las relaciones entre los teoremas de Compacidad y de Correctud-Completud Extendido en la lógica deductiva clásica de primer orden con igualdad. El teorema de Correctud-Completud Extendido es considerado tradicionalmente el resultado fundamental de la lógica de primer orden, pues establece la equivalencia entre la noción de derivabilidad formal

($\vdash$) y la noción de consecuencia lógica ($\models$). Es decir, es un puente entre la sintaxis y la semántica de un lenguaje formal. Estos conceptos los veremos con precisión en el capítulo dos.

En su versión original, dada por Gödel en 1930, el teorema de Completud (que llamaremos versión restringida) establece que en un sistema formal particular[8], toda fórmula que es lógicamente válida es un teorema del sistema (completud: "Si $\models\alpha$ entonces $\vdash\alpha$"). La afirmación inversa de que toda fórmula que es teorema es lógicamente válida ya era conocida[9] (correctud: "Si $\vdash\alpha$ entonces $\models\alpha$"). La presentación de Gödel da otras formas equivalentes de las que hablaremos en el capítulo tres, dedicado al teorema de Correctud-Completud.

En lo que llamamos su versión *extendida*, este teorema establece que toda fórmula que es derivable a partir de un conjunto de fórmulas Σ es consecuencia lógica de Σ (correctud extendida: "Si $\Sigma\vdash\alpha$ entonces $\Sigma\models\alpha$") y que toda fórmula que es consecuencia lógica de Σ es deducible a partir de Σ (completud extendida: "Si $\Sigma\models\alpha$ entonces $\Sigma\vdash\alpha$").

Usando métodos de su prueba del teorema de Completud, Gödel demuestra otro resultado, a saber, el teorema de Compacidad para lenguajes numerables, el cual establece lo siguiente: "Para que un conjunto infinito (numerable) de fórmulas sea satisfacible (tenga modelo) es necesario y suficiente que cada subconjunto finito suyo sea satisfacible (tenga modelo)".

Nosotros trabajamos el problema de establecer el teorema de Correctud-Completud Extendido de Gödel para la lógica clásica, con una prueba directa de tipo semántico; es decir, como corolario del teorema de Compacidad y de otros resultados semánticos para la misma lógica. Consideramos que el teorema de Compacidad es el resultado fundamental de la lógica de

[8] En el caso de Gödel, se refiere al sistema de Principia Mathematica de Whitehead y Russell. Cf. [Whitehead & Russell].

[9] Esta propiedad resultó muy sencilla de probar, pues sólo requiere verificar que los axiomas son lógicamente válidos y que las reglas de inferencia preservan validez lógica. Los primeros sistemas ya la cumplían. Parece ser que esto lo hizo por primera vez Post en 1921 para el cálculo proposicional. cf. [Kleene] páginas 128-130.

primer orden, desde el punto de vista semántico, cuestión que justificaremos en el capítulo cuatro, dedicado al teorema de Compacidad.

Los antecedentes inmediatos de este trabajo se encuentran en el capítulo tres del libro "Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de Completud", cf. [Amor]. En esta parte del libro se hace un primer análisis entre conceptos metalógicos y se dejan abiertas varias preguntas que resolvemos en esta tesis.[10] Algunas de ellas son las siguientes: ¿hay una prueba de tipo semántico para el teorema de Correctud-Completud Extendido?, ¿puede definirse un sistema axiomático correcto y completo (en forma extendida) para la noción de consecuencia lógica clásica y ello se justifique semánticamente? (Una reseña del libro [Amor] es [Aliseda]).

La pregunta abierta que motiva este trabajo es pues la siguiente: ¿existe una prueba de tipo semántico, del teorema de Correctud-Completud Extendido, a partir del teorema de Compacidad? Esta tesis es la respuesta positiva a esta pregunta. Lo que voy a hacer exactamente es dar una prueba de ese estilo, es decir, definir un sistema axiomático para el que todas las consecuencias lógicas sean justa y exactamente las derivaciones formales. La prueba de esto se hace sin trabajar dentro del sistema dado, sino sólo usando sus propiedades básicas y otros resultados semánticos. En la sección 3.3 del capítulo tres, explico con más detalle lo que entendemos por una prueba semántica del teorema de Correctud-Completud Extendido.

Las aportaciones originales de este trabajo son las siguientes: **la primera** es una concepción y formulación particular de los conceptos de derivación formal y de *sistema axiomático* (cf. sección 2.2, capítulo dos) en particular proponemos que la definición de derivación formal forme parte de la de sistema axiomático. **La segunda** es la aportación de los resultados metalógicos que relacionan a la correctud extendida de un sistema con el Metateorema de la Deducción para el sistema

[10] Cf. [Amor] página 112.

(cf. sección 2.5, capítulo dos). **La tercera** es nuestra concepción y formulación particular del teorema de *Correctud-Completud Extendido* como un teorema *existencial* y no respecto a un sistema axiomático particular, (cf. sección 3.2, capítulo tres). **La cuarta** son los resultados matemáticos principales de la prueba mencionada (cf. secciones 5.2 y 5.3, capítulo cinco).

Para terminar esta sección sobre los objetivos, daremos una breve descripción de esta tesis por capítulos.

En el capítulo dos, presentamos todos los conceptos básicos necesarios tanto para los resultados principales de ese capítulo como para el resto de la tesis. Iniciamos el capítulo con la distinción tradicional entre semántica y sintaxis, luego damos algunas propiedades semánticas básicas que se usan en adelante, especialmente en el capítulo cinco. Seguimos con las nociones sintácticas de sistema axiomático, axioma, regla de inferencia y derivación formal; de ésta última analizamos y comparamos la definición tradicional y la nuestra. Aquí justificamos por qué nuestra definición de derivación formal es más adecuada que la tradicional. Terminamos esa sección con algunas propiedades sintácticas básicas que se usan en adelante, especialmente en el capítulo cinco. Continuamos con los conceptos semánticos de correctud extendida y correctud restringida, así como con los de completud extendida y completud restringida. Seguimos con la noción de consistencia, relativa a un sistema axiomático y terminamos explicando qué afirma el Metateorema de la Deducción. En la última sección presentamos los resultados principales del capítulo que son una de las aportaciones originales y que son los resultados metalógicos que relacionan la propiedad de correctud extendida con el Metateorema de la Deducción.

El capítulo tres está dedicado al teorema de Correctud-Completud. En la primera sección damos un panorama histórico; seguimos con la presentación de diferentes versiones (restringida y extendida) y diversas formulaciones de cada una de ellas que se han dado del teorema, particularmente la original de Gödel y la de Henkin y las relaciones entre ellas. Terminamos con nuestra versión (extendida) del teorema, en dos formulaciones equivalentes. De nuestras formulaciones destacamos que lo que afirma el teorema es la *existencia* de un sistema axiomático que cumple las propiedades de correctud y de completud extendidas como las formulamos en el capítulo dos. Terminamos este capítulo con una sección dedicada a explicar lo que entendemos por una prueba de tipo semántico del teorema de Correctud-Completud Extendido.

El capítulo cuatro está dedicado al teorema de Compacidad y a otros resultados semánticos. En la primera sección damos una breve historia del teorema de Compacidad, aclarando algunas imprecisiones de afirmaciones hechas al respecto, así como elucidando cómo surge su importancia, pues por mucho tiempo fue considerado sólo como un corolario del teorema de Correctud-Completud Extendido. También comentamos el origen topológico del término compacidad. Seguimos con la presentación de diferentes formulaciones y diferentes formas de probar el teorema. Terminamos con la presentación de dos teoremas semánticos conocidos: el primer teorema es sobre las propiedades semánticas de las llamadas formas normales de Skolem de validez, al cual le llamamos teorema de Skolem y el segundo teorema es el famoso teorema de Herbrand, cuya prueba se puede hacer directamente a partir del teorema de Compacidad. Estos dos resultados semánticos se usan de modo muy importante en el capítulo cinco.

El capítulo cinco está dedicado a la relación de implicación entre los dos teoremas y contiene los resultados matemáticos principales de la tesis. En la primera sección presentamos dos pruebas conocidas de que el teorema de Correctud-Completud Extendido implica directamente al teorema de Compacidad. Cada prueba corresponde a una de las dos versiones dadas de Correctud-Completud Extendida. En la segunda sección proponemos un sistema axiomático al que llamamos *MA* y probamos dos lemas para él. El primero afirma que "*MA* satisface Correctud-Completud Restringida", para cuya prueba, de tipo semántico, usamos los teoremas de Skolem y de Herbrand, cuyas pruebas a su vez son semánticas. El segundo lema afirma que "*MA* satisface el Metateorema de la Deducción". Este se prueba metateóricamente, por inducción sobre la longitud de la derivación dada. Finalmente en la sección tres se presenta la prueba directa de la Correctud-Completud Extendida del sistema *MA*, usando el teorema de Compacidad y los dos lemas de la sección anterior.

La aportación principal de esta tesis consiste en la definición, a partir de un trabajo de Malitz,[11] de nuestro sistema axiomático *MA* de modo que cumpliera Correctud-Completud Extendida y de modo que la prueba de ello, fuese directa y semántica; es decir, basada en el teorema de Compacidad y en los dos lemas antes mencionados. Enseguida precisaremos más esta idea.[12]

Malitz da una cierta prueba de correctud y completud restringida para un sistema axiomático que no cumple ni correctud ni completud extendida. En dicha prueba los únicos lemas sustanciales son los teoremas que nosotros hemos llamado "de Skolem" y " de Herbrand"[13]. Se construye un nuevo sistema ligeramente diferente del de Malitz, agregando una regla y restringiendo la aplicación de una de las reglas originales, de modo que el nuevo sistema sí cumple correctud extendida y del que se muestra que también es completo en sentido restringido, usando como únicos lemas sustanciales los mismos que Malitz. De esto se concluye usando Compacidad, que el nuevo sistema también es completo en forma extendida.

[11] Jerome Malitz, cf. [Malitz] Part III, página 187.
[12] Agradezco al Dr. Mario Gómez Torrente la sugerencia de redacción del párrafo siguiente, el cual describe en forma precisa la aportación principal de esta tesis.
[13] Cf. sección 4.3 del capítulo cuatro.

1.4 Intuición y heurística

Concluyo este capítulo introductorio, con una descripción de las ideas intuitivas y la heurística que nos permitió obtener este sistema axiomático. Sin embargo, es obvio que la mayoría de las justificaciones no están aquí, sino a lo largo de todo este trabajo.

La definición de nuestro sistema axiomático ***MA*** resulta *ad hoc* desde el punto de vista semántico, pues sus axiomas y reglas de inferencia no están motivadas sintácticamente, sino que responden a *invertir* un proceso semántico que describo a continuación, para cualquier fórmula φ y cualquier conjunto de fórmulas Σ:

Partimos de la consecuencia lógica de φ a partir de Σ.[14] Entonces existe una sucesión *finita* de fórmulas de Σ, digamos $\alpha_1,\ldots\alpha_n$, tales que φ es consecuencia lógica a partir de ellas (teorema de Compacidad). Entonces la implicación de ellas a φ es una fórmula implicativa lógicamente válida, digamos **A** ($\mathbf{A}=(\alpha_1\rightarrow(\alpha_2\rightarrow\ldots\rightarrow(\alpha_n\rightarrow\varphi)\ldots))$), para la cual se genera algorítmicamente una forma normal especial **B**, que también es lógicamente válida y a partir de ella, existe una fórmula proposicional cerrada,[15] también lógicamente válida **C**, cuya validez lógica es decidible.

Ahora bien, si simplemente *invertimos* el proceso descrito, pongamos como axioma a cualquier fórmula proposicional cerrada de la forma de **C**, con la condición de que sea lógicamente válida (los axiomas deben ser decidibles y estos lo son por su forma y porque su validez lógica es decidible). Pongamos al paso de **C** a **B** como primera regla de inferencia, (la aplicación de las reglas debe ser decidible y ésta lo es). Ahora pongamos el paso de **B** a **A**, como segunda regla de inferencia (ésta es decidible pues la transformación de una fórmula **A** a la

---

[14] Decimos que una fórmula φ es *consecuencia lógica* de un conjunto de fórmulas Σ, si en caso de que todas las fórmulas de Σ sean verdaderas, entonces φ es verdadera. Cf. sección 2.1 capítulo dos.

[15] Sin variables libres y sin cuantificadores.

forma normal mencionada **B** es algorítmica y por tanto hay un algoritmo para decidir el paso de **B** a **A**).

Hecho lo anterior, tenemos en forma inmediata, por la definición de prueba formal, que la fórmula implicativa **A** se puede obtener como un teorema. Ahora pongamos Modus Ponens como tercera regla de inferencia y tendremos la derivación de φ a partir de la sucesión finita de fórmulas de Σ, y de aquí por lo tanto tendremos la derivación formal de φ a partir de Σ (por monotonía de la relación sintáctica de derivación).

Todo lo anterior garantiza que todas las consecuencias lógicas sean derivaciones formales (completud extendida), sin embargo es necesario "controlar" las derivaciones posibles para tener la importante propiedad complementaria: que todas las derivaciones formales sean consecuencias lógicas (correctud extendida). Para esto, resulta *necesario* que el sistema satisfaga el Metateorema de la Deducción. Este fue un resultado clave para poder "descubrir" nuestro sistema, de modo que satisfaga tanto la completud extendida como la correctud extendida. Así pues, para que nuestro sistema cumpliera eso, debimos restringir la aplicación de la segunda regla de inferencia (el paso de **B** a **A**) de modo que no se aplique a fórmulas que sean hipótesis o que dependan de hipótesis.

Con estas modificaciones, el MTD se cumple y por tanto la correctud extendida se satisface. Así, nuestro sistema axiomático quedó determinado y cumple lo que nos propusimos que cumpliera.

CAPÍTULO DOS

2. SISTEMAS FORMALES Y SEMÁNTICA

2.1 Introducción

Un lenguaje formal es *de primer orden* o *de orden uno*, cuando sólo se puede cuantificar sobre variables individuales, las cuales representan sólo a individuos del universo de interpretación, y no sobre variables que representen a subconjuntos o relaciones de dicho universo. Es conveniente mencionar aquí a la lógica multivariada,[1] que podemos pensar como lógica de primer orden con múltiples tipos de variables que varían sobre diferentes universos. Esta lógica es reducible a la de primer orden, que a su vez se puede pensar como lógica de un solo tipo de variables.[2]

La opción de modificar la sintaxis de los lenguajes de primer orden con el objeto de cuantificar sobre subconjuntos o relaciones del universo también ha sido considerada y los lenguajes correspondientes son llamados lenguajes de orden superior.[3] Estos lenguajes son más expresivos, pero para ellos no se cumplen los teoremas de Compacidad y Completud.

En todo este trabajo nosotros usaremos únicamente lenguajes formales de primer orden con igualdad que son los lenguajes más expresivos para los que sí se cumplen los teoremas de Compacidad y de Correctud-Completud.

---

[1] Many-sorted logic.

[2] Cf. [Enderton] páginas 277-281.

[3] Cf. [Enderton] páginas 268-289 y [Jané] páginas 105-128

En la lógica matemática clásica hay dos enfoques tradicionales: el enfoque *sintáctico* y el enfoque *semántico*.

El enfoque *sintáctico* se refiere a las propiedades y relaciones de símbolos y sucesiones de símbolos entre sí, apelando únicamente a la forma y al orden en que aparecen y no al significado. En una presentación sintáctica de la lógica, la justificación de la aceptación de fórmulas se basa sólo en reglas formales establecidas de antemano en todo un aparato o sistema formal y en la aceptación incondicional de unas fórmulas iniciales llamadas axiomas. A las fórmulas aceptadas sin más condiciones que las del sistema formal se les llama *teoremas formales*. En el enfoque sintáctico, además de la noción de teorema formal se presenta la noción de *derivación formal*: una fórmula particular es formalmente derivable a partir de un conjunto de fórmulas si hay un objeto formal, definido por medio de reglas sintácticas establecidas de antemano, que depende del conjunto de fórmulas y de la fórmula, que se llama una *derivación*. La definición precisa de esta noción la daremos en la siguiente sección.

Con respecto a la notación, en todo lo que sigue usaremos las letras griegas minúsculas α, β, γ, φ, ψ, para referirnos a fórmulas de un lenguaje de primer orden con igualdad. Las letras griegas mayúsculas Σ, Δ, Γ, las usaremos para referirnos a conjuntos, finitos o infinitos, de fórmulas de dicho lenguaje.

El enfoque *semántico* se refiere a las relaciones de los símbolos del lenguaje con un significado establecido para ellos, apelando a la noción de interpretación que está basada en dichos significados[4]. La semántica relaciona a los lenguajes formales con una interpretación para ellos, que en nuestro caso es un sistema constituido por un conjunto no-vacío llamado universo, junto con relaciones, operaciones y objetos "distinguidos"[5] del conjunto. El sistema completo es llamado *estructura conjuntista algebraico-*

[4] La definición de verdad de Tarski no la desarrollaremos aquí, pero puede verse en [Mendelson] capítulo dos. La idea intuitiva es que un enunciado φ es *verdadero* respecto a una interpretación (o modelo) **A**, si es el caso que la interpretación de φ se cumple en **A**.

[5] Los llamamos *distinguidos*, simplemente porque al tener nombre en el lenguaje, se distinguen en eso de los demás. Una razón para distinguirlos es que jueguen algún papel especial en la interpretación, como por ejemplo el cero en los números enteros.

relacional[6] o simplemente *estructura*. Cada lenguaje de primer orden determina a la clase de todas las estructuras que son interpretaciones para ese lenguaje. Cada símbolo del lenguaje debe tener un significado preciso en la estructura: cada constante individual debe ser interpretada como un elemento del conjunto universo, cada predicado de la aridad[7] correspondiente como una relación entre elementos del universo, y cada símbolo funcional también de la aridad correspondiente como una operación en el universo. Los símbolos lógicos, conectivos y cuantificadores, tienen la interpretación clásica. Por comodidad convenimos que tenemos todos los símbolos lógicos clásicos usuales (negación, disyunción, conjunción, condicional material, bicondicional material, cuantificación universal y cuantificación existencial), en caso de no ser así, supondremos que tenemos un conjunto de símbolos lógicos con los que se pueden definir todos los usuales.

En una presentación semántica de la lógica, la aceptación de las fórmulas se basa en la definición tradicional de verdad. A las fórmulas que son verdaderas en cualquier interpretación se les llama *lógicamente válidas*. Cuando un enunciado es verdadero en una interpretación para su lenguaje, decimos que la interpretación es un *modelo* del enunciado; así pues, una fórmula es lógicamente válida si toda interpretación es modelo suyo. Análogamente, un *modelo* para un conjunto de enunciados es una interpretación para el lenguaje, respecto a la cual todos los enunciados del conjunto son verdaderos.

En el enfoque semántico, además de la noción de validez lógica se presenta la noción de *consecuencia lógica deductiva*: una fórmula φ es consecuencia lógica (deductiva) de un conjunto de fórmulas Σ, si para cualquier interpretación, en caso de que todas las fórmulas del conjunto de fórmulas Σ sean verdaderas, entonces la fórmula φ es verdadera; o dicho de otro modo, si todo modelo de Σ es modelo de φ. Esta relación semántica se denota $\Sigma \models \varphi$ y se lee: *φ es consecuencia lógica de Σ* o también, *Σ implica lógicamente a φ*. Obsérvese que esto significa que es **imposible**

[6] Una estructura algebraico-relacional es una cuarteta $A=\langle A, R, O, C\rangle$ donde A es un conjunto no vacío, R es un conjunto de relaciones sobre A, O es un conjunto de operaciones sobre A y C es un conjunto de elementos (distinguidos) de A.
[7] La *aridad* es un número entero positivo asociado al símbolo y que determina el número de argumentos de la relación que lo interprete.

que haya una interpretación respecto a la cual todas las fórmulas del conjunto de fórmulas Σ sean verdaderas y la fórmula φ falsa; o bien, es **imposible** que haya un modelo de Σ que no sea modelo de φ. Las nociones básicas de verdad y consecuencia lógica que nosotros presentamos se deben a Tarski.[8]

Algunas *propiedades semánticas* básicas[9] cuya prueba es elemental y depende solamente de las definiciones de verdad y de consecuencia lógica, son las siguientes:

a) Si $\Gamma \subseteq \Sigma$ y $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Sigma \models \varphi$ (Monotonía).

b) Si $\Sigma \models \varphi$ y para todo α en Σ, $\Gamma \models \alpha$, entonces $\Gamma \models \varphi$ (Corte).

c) $\Sigma, \alpha \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \models (\alpha \rightarrow \beta)$

d) $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no tiene modelo

e) Γ tiene un modelo si y sólo si $\Gamma \not\models \exists x(x \neq x)$

La propiedad c) para Σ vacío, establece la equivalencia entre la noción de consecuencia lógica y la de validez lógica de la implicación correspondiente. La propiedad d) es una reescritura de la definición de consecuencia lógica. En caso de que el lenguaje no tuviera el símbolo "$\rightarrow$" de implicación material, entenderemos que $(\alpha \rightarrow \beta)$ es una abreviatura para la fórmula $(\neg\alpha \vee \beta)$ o para la fórmula que represente a la función de verdad correspondiente.

Algunas de estas propiedades semánticas, cuya prueba es elemental, serán usadas en adelante en particular en el capítulo cinco, apelando a cualesquiera de ellas sólo como "propiedades semánticas".

2.2 Nociones sintácticas básicas

En esta sección presentaremos los conceptos sintácticos de sistema formal, axioma, regla de inferencia y daremos la definición tradicional de derivación.

---

[8] Tarski 1935: *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia Philos. (Warsaw) 1, 261-405. Traducción al inglés: *Logic,Semantic and Metamathematics*, Oxford 1956, 152-278.

[9] También llamadas *propiedades estructurales* de la lógica deductiva clásica.

Hay una noción sintáctica matemáticamente rigurosa de "α es derivable o demostrable a partir de Σ" que pretende capturar completamente la noción intuitiva de "la fórmula α se sigue o se demuestra a partir del conjunto de fórmulas Σ". Esta noción matemática está basada en el concepto de *sistema formal de tipo Hilbert*, el cual descansa a su vez en los conceptos de *axioma*, *regla de inferencia* y *definición de derivación.*

Un *axioma* es simplemente una fórmula que pertenece a un conjunto de fórmulas elegidas, que juegan el papel de primeros principios en el concepto de sistema axiomático que daremos más adelante. Ya que los axiomas son simplemente fórmulas, es natural pedir que el conjunto de fórmulas elegidas sea *decidible.*[10] Una justificación para pedir la decidibilidad de los axiomas es que nuestro punto de partida serán ellos y la intención es tener un punto de partida decidible, así como un concepto de derivación formal también decidible.

Una *regla de inferencia* es un mecanismo formal finito, usualmente presentado en forma de esquema, que permite obtener una fórmula a partir de una o más fórmulas (siempre un número finito de ellas) a las que llamamos sus premisas, y además el mecanismo es decidible.[11] Obsérvese que cada regla de inferencia tiene un número **n** ($n \geq 1$) de premisas. Usualmente cada regla de inferencia se presenta en forma esquemática, es decir cada regla es en realidad un *esquema de regla* de inferencia.

La fórmula que se obtiene de las premisas por medio de una regla de inferencia, se llama *inferencia*, *conclusión* o *consecuencia*, de las premisas *en virtud* de esa regla de inferencia.

A continuación damos tres ejemplos de esquemas de reglas de inferencia:

1) De α y $(\alpha \rightarrow \beta)$ obtener β; regla de dos premisas conocida como Modus Ponens (MP).
2) De α obtener $(\forall x \alpha)$; regla de una premisa conocida como Generalización (Gen).

[10] Un conjunto o una relación es *decidible*, si existe un procedimiento efectivo finito, conocido como *algoritmo*, para decidir objetivamente si un objeto pertenece o no al conjunto o a la relación. Por ejemplo en este caso, que se pueda responder a la pregunta de si una fórmula dada es axioma o no lo es.
[11] Que sea decidible si una fórmula se obtiene de las otras o no, en virtud de esa regla de inferencia.

3) De FNSV(α) obtener α;[12] regla de una premisa a la cual llamamos Regla de Skolem (SK).

Formalmente una regla de inferencia de **n** premisas es una relación de **n+1** argumentos sobre el conjunto ***FL*** de todas las fórmulas del lenguaje.[13] Así por ejemplo, las reglas anteriores son las siguientes relaciones:

1) $MP=\{ (\alpha,(\alpha\rightarrow\beta),\beta) / \alpha \text{ y } \beta \text{ son fórmulas}\}\subseteq \boldsymbol{FL}^3$

2) $Gen=\{ (\alpha,(\forall x\alpha)) / \alpha \text{ es fórmula}\}\subseteq \boldsymbol{FL}^2$

3) $SK=\{(FNSV(\alpha),\alpha) / \alpha \text{ es fórmula}\}\subseteq \boldsymbol{FL}^2$

En general una regla de inferencia R que nos permite obtener una fórmula φ a partir de las **n** fórmulas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (premisas), la podemos representar informalmente como:

$$R: \quad \alpha_1,\ldots,\alpha_n \;/\; \varphi$$

Aunque las reglas de inferencia son mecanismos formales efectivamente decidibles y presentados como esquemas formales, podemos clasificarlas con un criterio semántico, según suceda que la conclusión obtenida por ellas tenga o no alguna propiedad semántica que tengan sus premisas. Es decir, si ciertas propiedades semánticas se heredan de las premisas a la conclusión. Esto nos interesa en particular para las siguientes propiedades semánticas de fórmulas:

a)Satisfacibilidad por una asignación *s* en una interpretación M
b) Verdad en una interpretación o estructura M.
c) Validez lógica.

---

[12] FNSV(α) denota una fórmula que es una forma normal asociada a α, llamada Forma Normal de Skolem para Validez de α. Por ahora no es necesario conocer esta forma particular de fórmula. La veremos en la sección 4.2 del capítulo cuatro. Cf. [Malitz] pág. 156 y [Amor] pág. 83.

[13] Formalmente una relación de m argumentos sobre un conjunto A es un subconjunto cualquiera del producto cartesiano de A consigo mismo, m veces. Es decir, es un subconjunto de A^m = AxAx...xA (m veces).

En el artículo titulado "¿Qué es una regla de inferencia?"[14] se hace una clasificación de reglas de inferencia en varias lógicas, que es parecida a la nuestra, pero que es mucho más general que la nuestra. Nuestro interés es sólo para la lógica clásica de primer orden con igualdad y además sin considerar lo que en dicho artículo se describe como una *sustitución.*[15] Haciendo la restricción mencionada, los elementos comunes entre las dos clasificaciones son: las fórmulas del lenguaje, las estructuras relacionales *M*,[16] y las valuaciones o asignaciones a variables *s*[17].

En el artículo mencionado se restringe la atención al caso donde hay una sola premisa, suponiendo que hay una noción de conjunción en el lenguaje (como es nuestro caso), de modo que un conjunto finito de fórmulas se puede reemplazar por la conjunción de ellas.[18] Así pues, podemos considerar como equivalentes nuestra notación para reglas de inferencia $\alpha_1,\ldots,\alpha_n /\varphi$ y la del artículo mencionado, $\sigma \vdash \varphi$, tomando como σ a la fórmula $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$.

Definición. Sea R: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n /\varphi$, una regla de inferencia, entonces:
1) R es *muy buena* si y sólo si para cualesquiera $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, premisas de R, para toda interpretación *M* y para toda asignación *s* en *M* se cumple lo siguiente:

Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son todas satisfechas por *s* en *M*, entonces la conclusión φ, también es satisfecha por *s* en *M*. Es decir, si R preserva cualquier satisfacibilidad de asignaciones.[19]

2) R es *buena* si y sólo si para cualesquiera $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, premisas de R y para toda interpretación *M* sucede lo siguiente:

[14] Cf. [Fagin, Halpern & Vardi] secciones 1 y 6.
[15] En este artículo, una *sustitución* τ es una función que reemplaza a cada predicado $P(x_1,\ldots,x_n)$ por una fórmula $\psi_P(x_1,\ldots,x_n)$. Dada una fórmula φ, la expresión $\tau[\varphi]$ denota el resultado de reemplazar cada presencia de fórmula atómica $P(t_1,\ldots,t_n)$ en φ por $\psi_P(x_1/t_1,\ldots,x_n/t_n)$ donde lo último es el resultado de sustituir t_i por la variable libre x_i (para $1\leq i\leq n$).
[16] Interpretaciones del lenguaje. Cf. sección 2.1.
[17] Las *asignaciones* (o *valuaciones*) son todas las instanciaciones posibles para las variables, con elementos del dominio sobre el cual varían, y con respecto a una interpretación dada; estas son denotadas con w en el artículo mencionado. Para una explicación detallada, cf. [Mendelson] capítulo dos.
[18] Cf. [Fagin, Halpern & Vardi] nota 3, p. 1019.
[19] En [Fagin, Halpern & Vardi] el tipo de regla correspondiente a "*muy buena*" es llamada "truth inference" tradicionalmente llamada *implicación lógica*, y es denotada por $\sigma \vdash_t \varphi$. Cf. p.1019 y 1035-1036.

Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son todas verdaderas en *M*, entonces la conclusión φ, es verdadera en *M*. Es decir, si R preserva verdad en estructuras, o "lleva" de verdadero a verdadero.[20]

3) R es *regular* si y sólo si para cualesquiera $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, premisas de R, si todas son lógicamente válidas, entonces la conclusión φ también es lógicamente válida. Es decir, si R preserva validez lógica.[21]

Proposición. Toda regala de inferencia *muy buena* es *buena* y toda regla de inferencia *buena* es *regular* pero no inversamente en cada caso.

Es inmediato verificar la proposición. Sólo veremos algunos ejemplos; debe ser claro que la regla MP: $\alpha,(\alpha\rightarrow\beta)/\beta$ es *muy buena*, Gen: $\alpha/(\forall x\alpha)$ es una regla *buena* que **no** es *muy buena*. La regla de Skolem SK: FNSV(φ)/φ, es *regular* pero **no** es *buena*.[22] Algunos de estos ejemplos los usaremos en la sección 3.3 del capítulo tres, y en la sección 5.2 del capítulo cinco, donde ilustraremos la conveniencia de imponer restricciones a la aplicación de las reglas de inferencia, cosa que veremos en la próxima sección 2.3.

Terminamos esta visión semántica sobre las reglas de inferencia en la lógica clásica de primer orden, con una proposición que incluye tres resultados que consideramos que aclaran más este punto de vista. El primero no está mencionado en [Fagin, Halpern & Vardi] aunque es una variante del segundo; el segundo corresponde a uno presentado en dicho artículo;[23] el tercero es una reformulación de la definición correspondiente.

Proposición. Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n/\varphi$ denota una regla de inferencia entonces:

1. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n/\varphi$ es una regla *muy buena* si y sólo si la fórmula $[(\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n)\rightarrow\varphi]$ es lógicamente válida.

---

[20] En [Fagin, Halpern & Vardi] el tipo de regla correspondiente a "*buena*" es llamada "structure inference" y es denotada por $\sigma \vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ donde *M* es una clase de estructuras. Cf. p.1020-1021 y 1035-1036.

[21] En [Fagin, Halpern & Vardi] el tipo de regla correspondiente a "*regular*" es llamada "validity inference" y es denotada por $\sigma \vdash_{v} \varphi$. Cf. p.1018 y 1035-1036.

[22] Esto último quedará justificado después de los teoremas de la sección 4.3 del capítulo cuatro.

[23] Cf. [Fagin, Halpern & Vardi] proposición 6.1 (p.1021 y 1036).

2. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ /φ es una regla *buena* si y sólo si la fórmula $[\forall(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \forall\varphi]$ es lógicamente válida.[24]
3. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ /φ es una regla *regular* si y sólo si la validez lógica de $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ implica la validez lógica de φ.

El concepto tradicional de sistema axiomático se presenta usualmente de la siguiente manera:

Definición tradicional. Un sistema axiomático está dado por lo siguiente:

a) Un conjunto finito o infinito Δ de fórmulas decidible. A las fórmulas de Δ las llamamos *los axiomas* del sistema axiomático.
b) Un conjunto finito RI de reglas de inferencia. Recordar que para cada regla hay un procedimiento efectivo o algoritmo para decidir si una fórmula es consecuencia o no de otras fórmulas en virtud de dicha regla.

Independientemente de la definición de sistema axiomático, tradicionalmente se da una definición de *derivación formal* que se presenta como general, es decir que se aplica por igual a cualquier sistema formal. Es la siguiente:

Definición. Una *derivación formal* de una formula α a partir de un conjunto de fórmulas Σ, es una lista finita de **n** fórmulas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, con $n \geq 1$, de las cuales $\alpha_n = \alpha$ y para toda i (desde i = 1 hasta i = n), o bien α_i es un axioma o bien α_i es una fórmula de Σ (en cuyo caso decimos que α_i es una *hipótesis* de Σ), o bien α_i se obtiene a partir de fórmulas anteriores de la lista en virtud de alguna regla de inferencia. Si existe tal derivación formal, esto se denota por $\Sigma \vdash \alpha$ y se lee: "α *se deriva o es derivable a partir de* Σ".

Hacemos notar que la noción de derivabilidad así definida, es una noción estricta, distinta de la noción intuitiva de deducibilidad. Por ejemplo, la derivabilidad es monotónica pues

[24] Si ψ es una fórmula, con $\forall\psi$ denotamos la *cerradura universal de* ψ, donde $\forall\psi = \forall x_1\ldots\forall x_n\psi$ y $x_1,\ldots,x_n$ son todas las variables libres de ψ.

si existe una derivación y se aumentan las hipótesis, la derivación se conserva. En cambio la noción intuitiva de deducibilidad puede ser no monotónica.

2.3 Derivación y sistemas formales

La anterior noción tradicional de derivación, se presenta como una noción general, ya que cualquier sistema axiomático tiene axiomas y reglas de inferencia.

Veremos un problema con esta definición tradicional por medio de un ejemplo. Considérese la axiomática de Mendelson, (cf. [Mendelson] páginas 69-75), la cual incluye a la regla Gen (Generalización). Por un lado tomando la definición tradicional de derivación, se permite probar que $P(x) \vdash \forall x\, P(x)$ en este sistema,[25] sin embargo sabemos que $P(x) \not\models \forall x\, P(x)$[26]. Por otro lado, al enunciar que el sistema cumple el Metateorema de la Deducción, el autor impone una *restricción a la aplicación de la regla*, como una hipótesis extra impuesta al Metateorema: éste se cumple con la condición de que en las derivaciones "al aplicar generalización, la variable generalizada no tenga presencias libres en hipótesis de las cuales depende la fórmula a generalizar".[27] Esta es una restricción *a la aplicación* de la regla Gen que depende del contexto, que es efectivamente decidible, y que bien pudo haberse incluido en la definición misma de derivación. Con esto se hubieran permitido dos cosas: primero, que no se tuviera como derivación formal algo que no es consecuencia lógica, y segundo, no se tendría que agregar una hipótesis extra al enunciado del Metateorema de la Deducción.[28]

En la noción tradicional de derivación no existe la posibilidad de aplicar restricciones en el uso de las reglas de

---

[25] En sólo dos pasos: la hipótesis y luego simplemente aplicar la regla Generalización a la hipótesis:

1. $P(x)$ Hipótesis
2. $\forall x\, P(x)$ Gen a 1'.

[26] No es consecuencia lógica, pues es posible una interpretación donde una instancia individual de x tenga la propiedad "P", pero que no todos los individuos tengan la propiedad "P". Por ejemplo la propiedad "ser par", en los números naturales.

[27] Cf. [Mendelson] página 74.

[28] En una comunicación personal, el profesor Herbert Enderton concuerda en este punto conmigo y me comenta además que "Curiosamente en su libro Mendelson no hace coincidir la elección de sistema deductivo con la elección de definición de consecuencia lógica."

inferencia. Desde luego que hay que distinguir entre restricciones a las reglas y restricciones a la aplicación de las reglas. No se trata de posibles restricciones a las reglas mismas, lo cual es posible con la definición tradicional, pues eso simplemente cambiaría las reglas y cambiaría por tanto las relaciones correspondientes a ellas. Se trata de poder establecer (posibles) restricciones al momento de la aplicación de las reglas de inferencia, lo que no depende solamente de las reglas mismas, pues éstas, como relaciones sobre el conjunto ***FL*** de las fórmulas no pueden estar cambiando, sino que depende además del *contexto* de cada derivación y de la posición de las fórmulas dentro de la derivación en un caso dado. La conveniencia de incluir estas restricciones dependientes del contexto en la definición misma de sistema axiomático, es que pueden permitir adaptar mejor la noción de derivación para lograr su adecuación a la de consecuencia lógica. El ejemplo de Mendelson debe hacer clara esta idea.

La noción de derivación que en seguida proponemos sí incluye la posibilidad de especificar restricciones dependientes del contexto a la aplicación de las reglas de inferencia del sistema axiomático. Pero es claro que en ese caso la definición de derivación no puede ser general para todos los sistemas axiomáticos y más aún, que puede depender del sistema en cuestión, por lo cual debe ser parte de la definición misma de sistema axiomático. Además debemos conservar la decidibilidad en la aplicación de las reglas por lo que las posibles restricciones también deben ser efectivamente decidibles. Una *restricción* a la aplicación de una regla a fórmulas, es una condición que deben satisfacer la regla y las fórmulas, y que involucra a la derivación considerada en el contexto de la aplicación de la regla. Así pues, *nuestra* definición de sistema axiomático queda de la siguiente manera.

Definición. Un sistema axiomático ***S*** está dado por lo siguiente:

a) Un conjunto finito o infinito Δ de fórmulas decidible. Las fórmulas de Δ se llaman *los axiomas* de ***S***.
b) Un conjunto finito RI de reglas de inferencia de ***S***. Para cada regla debe haber un procedimiento efectivo para

decidir si una fórmula es consecuencia o no, de otras fórmulas en virtud de dicha regla.

c) Una definición de derivación formal de una fórmula α a partir de un conjunto de fórmulas Σ, de tal manera que la derivación sea una lista finita de **n** fórmulas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, con $n\geq1$, tales que $\alpha_n=\alpha$ y para toda i (desde i = 1 hasta i = n), o bien α_i es un axioma de ***S*** o bien α_i es una fórmula de Σ (α_i es una *hipótesis* de Σ), o bien α_i se obtiene a partir de fórmulas anteriores de la lista en virtud de alguna regla de inferencia del conjunto RI de las reglas de inferencia de ***S***, y la aplicación de tal regla puede tener o no restricciones y en caso de tenerlas éstas deben ser efectivamente decidibles. Si existe tal derivación formal, esto se denota por $\Sigma \vdash_s \boldsymbol{\alpha}$ y se lee "**α** se deriva a partir de Σ en el sistema ***S***".

En el inciso c) es exactamente donde está la diferencia de esta definición nuestra con la definición tradicional, y si la aplicamos al sistema de Mendelson tendremos un nuevo sistema que tendrá las dos ventajas mencionadas antes. Esta es la definición que usaremos nosotros de aquí en adelante y es una aportación esencial para los objetivos de esta tesis. Si hiciéramos una comparación de las dos definiciones, podríamos decir que nuestra definición es un "refinamiento" de la definición tradicional, en el sentido de que un sistema axiomático con la definición tradicional cumple nuestra definición, pero un sistema axiomático con nuestra definición no necesariamente cumple la definición tradicional.

El caso particular en que Σ es el conjunto vacío denotado $\varnothing$, es una derivación a partir de $\varnothing$ y se llama *prueba formal* en el sistema ***S***. Esto se denota con $\vdash_s\alpha$ y se lee "α es teorema formal en el sistema ***S***".

Algunas propiedades sintácticas básicas que **no dependen** de qué sistema axiomático ***S*** se trate son:

a) Si $\Gamma\subseteq\Sigma$ y $\Gamma\vdash_S\varphi$ entonces $\Sigma\vdash_S\varphi$ (Monotonía)

b) Si $\Sigma\vdash_S\varphi$ y para todo γ en Σ, $\Gamma\vdash_S\gamma$, entonces $\Gamma\vdash_S\varphi$ (Corte)

Nótese que estas propiedades son la contraparte sintáctica de las correspondientes propiedades semánticas del final de la sección 2.1. Otra propiedad elemental es la reflexividad, es decir que $\alpha \vdash_{S} \alpha$. Obsérvese que la transitividad, es decir:

$$\text{si } \alpha \vdash_{S} \beta \text{ y } \beta \vdash_{S} \varphi \text{ entonces } \alpha \vdash_{S} \varphi$$

es un caso particular de la propiedad de corte con $\Sigma=\{\beta\}$ y $\Gamma=\{\alpha\}$.

Por el sólo hecho de que por definición las derivaciones son finitas, se sigue que las hipótesis usadas en una derivación constituyen un conjunto finito, aunque puede haber una infinidad de hipótesis no usadas. De aquí se sigue el llamado lema de finitud de la derivación que también se cumple para cualquier sistema $\boldsymbol{S}$.

c) **Lema de Finitud** (Primera forma)

Si $\boldsymbol{S}$ es un sistema axiomático y $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas, entonces:

$$\Sigma \vdash_{S} \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \text{hay } \Gamma \subseteq \Sigma, \Gamma \text{ finito, tal que } \Gamma \vdash_{S} \varphi$$

Algunas de estas propiedades sintácticas cuya prueba es elemental, serán usadas en adelante, en particular en el capítulo cinco, apelando a cualesquiera de ellas sólo como "propiedades sintácticas".

2.4 Sintaxis y semántica

Presentamos ahora las principales nociones metalógicas, es decir, nociones lógicas acerca de las nociones lógicas ya expuestas antes. Estas son: correctud, completud, consistencia relativa al sistema formal y metateorema de la deducción. Es importante mencionar que estas nociones metalógicas relacionan entre sí nociones sintácticas y semánticas o bien diferentes nociones sintácticas entre sí o diferentes nociones semánticas entre sí, y no se cumplen en cualquier sistema axiomático.

Además de algunas nociones de relaciones metalógicas ya tradicionales, presentaremos otras que nosotros hemos encontrado, en particular la que relaciona, en un sistema formal, al metateorema de la deducción con la propiedad de correctud extendida.

Decimos que un sistema axiomático ***S*** es correcto en sentido extendido o que satisface *correctud extendida* si y sólo si toda fórmula α que es derivable en ***S*** a partir de un conjunto de fórmulas Σ es consecuencia lógica de Σ, en símbolos: si $\Sigma \vdash_s \alpha$ entonces $\Sigma \models \alpha$. Esta propiedad indica que el sistema axiomático es "*correcto*" en el sentido de que el proceso de derivación en ***S***, no lleva de verdadero a falso.

Por otro lado, decimos que un sistema axiomático ***S*** es completo en sentido extendido o que satisface *completud extendida* si y sólo si toda fórmula α que es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ, es derivable en ***S*** a partir de Σ. En símbolos: si $\Sigma \models \alpha$ entonces $\Sigma \vdash_s \alpha$. Esta propiedad indica que el sistema axiomático es "*completo* o *suficiente*" en el sentido de que todas las consecuencias lógicas pueden obtenerse con el proceso de derivación del sistema.

En el caso de las pruebas formales, o sea de las derivaciones sin hipótesis, se tienen las propiedades correspondientes que llamaremos *restringidas o limitadas*, de correctud y de completud. Así pues, un sistema axiomático ***S*** es correcto en forma restringida o satisface *correctud restringida* si y sólo si toda fórmula que es teorema formal en ***S***, es lógicamente válida (o "consecuencia lógica de $\varnothing$"). En símbolos:

$$\text{si } \vdash_s \alpha \text{ entonces } \models \alpha$$

Esta propiedad indica que el sistema axiomático es "correcto en forma restringida" en el sentido de que todo teorema formal es una fórmula lógicamente válida.

Por otro lado, un sistema axiomático ***S*** es completo en forma restringida o satisface *completud restringida* si y sólo si toda fórmula que es lógicamente válida es un teorema formal en ***S***. En símbolos: si $\models \alpha$ entonces $\vdash_s \alpha$. Esta propiedad indica que el sistema axiomático es "completo o suficiente en forma restringida" en el sentido de que todas las fórmulas lógicamente válidas pueden probarse formalmente en el sistema.

Otra noción lógica fundamental es la noción de *consistencia de conjuntos de fórmulas.* Un conjunto de fórmulas Σ es ***consistente*** *con respecto a un sistema axiomático* $\boldsymbol{S}$ (o $_S$-consistente) si a partir de Σ no se deduce en el sistema $\boldsymbol{S}$, una fórmula y su negación; es decir, no se deriva una contradicción. Nótese que este concepto *no* es en general absoluto, sino relativo al sistema axiomático de que se trate.[29] Sin embargo, es interesante notar que esto no es aclarado en la mayoría de los textos clásicos.[30] Por esta razón, en general debe hablarse de $_S$-consistencia y no de consistencia, a menos que la relatividad haya sido aclarada y sea obvio a qué sistema nos referimos. Con la noción de $_S$-consistencia podemos dar una segunda forma, equivalente a la primera, del lema de finitud:

Lema de Finitud (Segunda forma)

Si $\boldsymbol{S}$ es un sistema axiomático y Σ es un conjunto de fórmulas, entonces:

Σ es $_S$-consistente   si y sólo si   todo subconjunto finito de Σ es $_S$-consistente.

La relación metalógica entre las nociones lógicas de deducibilidad de β a partir de α en un sistema $\boldsymbol{S}$ (es decir $\alpha \vdash_S \beta$) y la de prueba de la fórmula $(\alpha\rightarrow\beta)$ en $\boldsymbol{S}$ (es decir $\vdash_S (\alpha\rightarrow\beta)$), resulta ser sumamente importante en lógica clásica, por lo que la analizaremos con detalle y posteriormente daremos algunos resultados que la involucran.

Primeramente generalizamos esta relación considerando un conjunto cualquiera Σ de posibles hipótesis extra; es decir, analizaremos la relación entre $\Sigma, \alpha \vdash_S \beta$ y $\Sigma \vdash_S (\alpha\rightarrow\beta)$.

[29] Si Σ es un conjunto de fórmulas al que le pertenecen α y $\neg\alpha$, entonces Σ es inconsistente en forma absoluta, pues en ese caso con cualquier sistema se deriva una contradicción. Pero es posible que un mismo conjunto de fórmulas sea consistente con respecto a un sistema axiomático e inconsistente con otro. Un ejemplo de esto último es el conjunto de dos fórmulas $\Sigma = \{P(c), \neg P(a)\}$ que es $_S$-inconsistente y a la vez $_{MA}$-consistente, para los sistemas $\boldsymbol{S'}$ y $\boldsymbol{MA}$ dados en el capítulo cinco. Cf. sección 5.2 capítulo cinco.

[30] Cf. [Mendelson] página 72, [Enderton] páginas 112 y 128, [Manzano] página 115.

Es fácil darse cuenta que la implicación metalógica:

$$\text{Si}\quad \Sigma \vdash_S (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{entonces} \quad \Sigma, \alpha \vdash_S \beta$$

es equivalente a que el sistema tenga la regla de Modus Ponens (MP), ya sea como una regla original del sistema S o como *regla de inferencia derivada* del sistema[31]. La justificación es la siguiente: Por un lado, si S tiene MP y suponemos $\Sigma \vdash_S (\alpha \rightarrow \beta)$ y además se tiene como hipótesis adicional a α, entonces por MP se obtiene β y así tenemos $\Sigma, \alpha \vdash_S \beta$. Por otro lado, si tenemos la implicación metalógica dada, para probar que el sistema tiene MP pongamos como $\Sigma=\{\alpha, (\alpha \rightarrow \beta)\}$, entonces es obvio que $\{\alpha,(\alpha \rightarrow \beta)\} \vdash_S (\alpha \rightarrow \beta)$ y de aquí por la implicación metalógica, tenemos que $\{\alpha,(\alpha \rightarrow \beta)\},\alpha \vdash_S \beta$ finalmente quitando la repetición de α como hipótesis, es lo mismo que $\{\alpha,(\alpha \rightarrow \beta)\} \vdash_S \beta$ lo cual significa que el sistema S tiene MP.

La implicación metalógica inversa, conocida como el *Metateorema de la Deducción*, es una propiedad muy especial de un sistema axiomático S, pues además e independientemente de proporcionar un mecanismo para simplificar las pruebas de fórmulas que sean implicaciones[32], tiene una gran importancia teórica por su relación con la correctud extendida del sistema, como lo veremos en la siguiente sección 2.5 de resultados metalógicos. Obsérvese que el metateorema de la deducción asegura que un condicional es derivable a partir de un conjunto de fórmulas, si su consecuente es derivable del conjunto de fórmulas aumentado con el antecedente. Más precisamente:

Metateorema de la Deducción (MTD) para S.

Para cualquier conjunto de fórmulas Σ y cualesquiera fórmulas α y β, se cumple que:

$$\text{si}\quad \Sigma, \alpha \vdash_S \beta \quad \text{entonces} \quad \Sigma \vdash_S (\alpha \rightarrow \beta)$$

[31] Si una regla de inferencia R es de la forma: obtener β a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces R es *regla derivada* en el sistema S si y sólo si R no es regla original de S y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_S \beta$.

[32] Pues en vez de tener que deducir $(\alpha \rightarrow \beta)$, podemos suponer adicionalmente α y deducir β.

2.5 Resultados metalógicos

En esta sección expondremos una relación entre el metateorema de la deducción (MTD) y la propiedad de correctud extendida.

El descubrimiento de esta relación general nos ayudó a encontrar que un modo de probar correctud extendida de un sistema particular, era probando el metateorema de la deducción para él. La relación metalógica mencionada la expresamos en la siguiente proposición:

Proposición. *Si **S** es un sistema axiomático que satisface correctud- completud restringida y Modus Ponens*[33]*, entonces:*
S cumple correctud extendida si y sólo si S cumple el MTD

Prueba

Sea ***S*** un sistema formal que satisface correctud y completud restringida ($\vdash_s \alpha \Leftrightarrow \ \models \alpha$), y que cumple MP ($\alpha, (\alpha\rightarrow\beta) \vdash_s \beta$).

$\Rightarrow$) Supongamos que ***S*** cumple correctud extendida ($\Sigma \vdash_s \alpha \Rightarrow \Sigma \models \alpha$).
Sean Γ un conjunto de fórmulas, α y β fórmulas tales que:

(1) $\Gamma, \alpha \vdash_s \beta$ — suposición
(2) $\Gamma, \alpha \models \beta$ — correctud extendida
(3) $\Gamma \models (\alpha\rightarrow\beta)$ — propiedades semánticas.[34]
(4) Hay una lista finita $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ de fórmulas de Γ tal que $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \models(\alpha\rightarrow\beta)$ — Teorema de Compacidad (segunda forma)[35]
(5) $\models (\gamma_1\rightarrow(\gamma_2 \rightarrow\ldots \rightarrow(\gamma_n \rightarrow (\alpha\rightarrow\beta))\ldots)$ — propiedades semánticas[36]
(6) $\vdash_s (\gamma_1\rightarrow(\gamma_2 \rightarrow \ldots\rightarrow(\gamma_n\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\ldots)$ — completud restringida de ***S***
(7) $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash_s (\alpha\rightarrow\beta)$ — MP **n** veces en ***S***
(8) $\Gamma \vdash_s (\alpha\rightarrow\beta)$ — propiedad sintáctica[37] y $\{\gamma_1,\ldots, \gamma_n\} \subseteq\Gamma$

[33] Con la expresión "*S* satisface Modus Ponens" queremos decir que para todo Σ, todo α y todo β se satisface: $\Sigma, \alpha, (\alpha\rightarrow\beta) \vdash_s \beta$.
[34] Con *propiedades semánticas* nos referimos a propiedades elementales de las definiciones de verdad y de consecuencia lógica. En este caso por la propiedad semántica c), cf. final de la sección 2.1.
[35] Teorema de Compacidad (*Segunda forma*): Si $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden con igualdad y $\Sigma \models \varphi$, entonces hay un subconjunto finito $\Gamma\subseteq\Sigma$, tal que $\Gamma \models \varphi$. Véase capítulo cuatro, sección 4.2
[36] Propiedad semántica c), cf. final de la sección 2.1.

Así, por (1)-(8), $\boldsymbol{S}$ cumple el MTD.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\boldsymbol{S}$ cumple el MTD (si $\Gamma, \alpha \vdash_S \beta$ entonces $\Gamma \vdash_S (\alpha \rightarrow \beta)$). Sean Σ un conjunto de fórmulas y α una fórmula tales que:

(1) $\Sigma \vdash_S \alpha$ — suposición

(2) Hay una lista finita $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de fórmulas de Σ, tal que $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash_S \alpha$ — Lema de Finitud[38]

(3) $\vdash_S (\gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \alpha))\ldots)$ — MTD **n** veces

(4) $\models (\gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \alpha))\ldots)$ — correctud restringida de $\boldsymbol{S}$

(5) $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$ — propiedad semántica[39]

(6) $\Sigma \models \alpha$.[40] — propiedad semántica[41] y $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subseteq \Sigma$

Así, por (1)-(6), $\boldsymbol{S}$ cumple correctud extendida. □

Podemos obtener tres corolarios de esta proposición si separamos las dos implicaciones y consideramos sólo las hipótesis necesarias para cada una de ellas.

Corolario 1. Si un sistema axiomático satisface correctud restringida entonces para que satisfaga correctud extendida es *suficiente* que cumpla el Metateorema de la Deducción.

Corolario 2. Si un sistema axiomático satisface correctud-completud restringida y Modus Ponens, entonces para que satisfaga correctud extendida es *necesario* que cumpla el Metateorema de la Deducción.

Corolario 3. Si un sistema axiomático satisface completud extendida entonces para que satisfaga correctud extendida es *necesario* que cumpla el Metateorema de la Deducción.

---

[37] Con *propiedades sintácticas* nos referimos a propiedades elementales de las derivaciones formales, que no dependen de qué sistema axiomático se trate. En este caso por la propiedad sintáctica a), cf. final de la sección 2.3.

[38] Propiedad sintáctica c), cf. final de la sección 2.3.

[39] Aplicando **n** veces la propiedad semántica c), cf. final de la sección 2.1.

[40] Propiedad semántica a), cf. final de la sección 2.1.

[41] Propiedad semántica a), cf. final de la sección 2.1

Corolario 4. Si un sistema axiomático satisface correctud restringida y completud extendida entonces para que satisfaga correctud extendida es *necesario y suficiente* que cumpla el Metateorema de la Deducción.

Obsérvese que el tercer corolario se sigue de una ligera variante de la parte ($\Rightarrow$) de la prueba anterior, ya que de $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \models (\alpha\rightarrow\beta)$ podemos pasar directamente a $\gamma_1, \ldots,\gamma_n \vdash_S (\alpha\rightarrow\beta)$ por completud extendida de ***S*** que ahora es nuestra hipótesis. Nótese que en la prueba, se usan completud restringida y MP en ***S*** que son hipótesis de la proposición probada. El cuarto corolario es la "unión" del primero y el tercero.

Podemos observar entonces que el MTD es tan importante que si un sistema con correctud restringida lo cumple, eso basta para que cumpla correctud extendida, pero si un sistema no lo cumple, aunque tenga correctud-completud restringida y Modus Ponens, necesariamente no satisfará correctud extendida. Un ejemplo de esto último es el sistema de Malitz[42] agregándole MP como regla de inferencia, que veremos en los capítulos tres y cinco como sistema ***S'***.[43] Veremos que es un sistema que satisface completud extendida y *correctud restringida* y sin embargo no satisface *correctud extendida* y la razón de esto es que no satisface el MTD.

Conclusiones

En este capítulo, presentamos todos los conceptos básicos necesarios para los resultados principales tanto del mismo capítulo como del resto de esta tesis. Presentamos la distinción tradicional entre semántica y sintaxis, dimos algunas propiedades semánticas que se usan en varios resultados, especialmente los del capítulo cinco y presentamos las nociones sintácticas de: sistema axiomático, axioma, regla de inferencia y derivación formal. De ésta última comparamos la definición tradicional y la nuestra.

[42] Cf. [Malitz] página 188 y [Amor] página 110.
[43] Cf. sección 3.3 del capítulo tres y sección 5.2 del capítulo cinco.

Justificamos por qué nuestras definiciones de derivación formal y de sistema axiomático son más convenientes, si la intención es adecuar la noción de derivación con la de consecuencia lógica, de un modo más fino. También dimos algunas propiedades sintácticas básicas que se usan más adelante, especialmente en el capítulo cinco. Presentamos después los conceptos semánticos de correctud extendida y correctud restringida, así como los de completud extendida y completud restringida. Seguimos con la noción de consistencia de un conjunto de fórmulas, relativa a un sistema axiomático y terminamos explicando qué afirma el metateorema de la deducción para un sistema.

En la última sección presentamos y demostramos los resultados principales del capítulo que son una de las aportaciones originales de esta tesis y que son los resultados metalógicos que muestran al Metateorema de la Deducción como una condición necesaria y suficiente para la correctud extendida del sistema.

CAPÍTULO TRES

3. EL TEOREMA DE CORRECTUD-COMPLETUD

3.1 Historia

En 1879 Frege[1] presentó el primer cálculo deductivo que incluye lo que sería después la lógica de primer orden; este cálculo involucra a la aritmética, pues el interés de Frege era emplear la lógica como una *lingua characterica* para dar un fundamento de la aritmética, por lo que la completud de la lógica misma, era algo totalmente inadvertido en tanto ajeno a sus objetivos. En 1910 Whitehead y Russell[2] presentaron un cálculo deductivo que incluía a la lógica de primer orden, pero en forma análoga a Frege, su interés era fundamentar la aritmética en la lógica y la idea de completud de la lógica, carecía de sentido desde ese punto de vista; no era preocupación del momento por lo que no hubo conciencia de ella. Fue hasta 1928 que Hilbert y Ackermann[3] delinearon claramente lo que hoy conocemos como lógica de primer orden y dieron un sistema deductivo para ella. Hasta este momento se hizo clara la importancia de que un cálculo o sistema axiomático como esos, para la lógica de primer orden, cumpliera la condición de que todas las fórmulas obtenidas como teoremas fueran lógicamente válidas y que todas las fórmulas lógicamente válidas pudieran ser obtenidas como teoremas.

La primera condición, correspondiente a lo que nosotros hemos llamado correctud restringida (*toda fórmula demostrable es lógicamente válida*), resultó muy sencilla y había sido probada para

[1] Cf. Begriffsschrift en [Heijenoort] páginas 1-82.
[2] Cf. [Whitehead & Russell].
[3] Cf. [Hilbert & Ackermann].

los primeros sistemas[4]. La segunda condición aún no tenía respuesta general en 1928 como lo hicieron notar David Hilbert y Wilhelm Ackermann en su libro[5]. Sin embargo, para el fragmento de la lógica proposicional la completud había sido ya establecida independientemente[6] por Emil Post en 1921[7] y por Paul Bernays en 1926.[8] Esto es, que toda tautología es un teorema del cálculo proposicional de Principia Mathematica.

El teorema de Completud, probado por Gödel, cf. [Gödel 1929] y [Gödel 1930], asegura que las fórmulas lógicamente válidas coinciden con los teoremas formales del cálculo lógico de Principia Mathematica. El teorema generalizado (también probado por Gödel) afirma algo análogo para conjuntos numerables de fórmulas en el sentido de que para cualquier conjunto (numerable) de fórmulas sucede que: o a partir de él se derivan contradicciones en el cálculo o bien es satisfacible (es decir, tiene una interpretación donde todas las fórmulas son verdaderas). Henkin dio una prueba más general y elegante de este teorema en 1949 cf. [Henkin].

La prueba de la completud para la lógica de primer orden la dio por primera vez Gödel en 1929 en su tesis doctoral[9] y también la presentó en un artículo en 1930[10] cuyo teorema principal es el siguiente: *toda fórmula (lógicamente) válida de la lógica de primer orden es demostrable.*[11]

Hay que hacer notar aquí que Gödel se refiere con "demostrable" a "demostrable en un sistema axiomático particular",[12] lo que remarca que la noción de demostrable es relativa a un sistema axiomático particular. Gödel sigue a Hilbert y Ackermann en el lenguaje formal y en la notación, aunque el

---

[4] Esta propiedad, sencilla de probar, sólo requiere verificar que los axiomas son lógicamente válidos y que las reglas de inferencia preservan validez lógica. Los primeros sistemas ya la cumplían, sin embargo parece que esto se hizo explícito hasta 1928 en el libro de Hilbert y Ackermann. Cf. [Hilbert & Ackermann].

[5] Cf. [Hilbert & Ackermann].

[6] Cf. [Dawson a] página 54.

[7] Cf. [Post].

[8] Bernays Paul, Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der Principia Mathematica. Mathematische Zeitschrift 25:305-320. 1926.

[9] On the completeness of the calculus of logic. Universidad de Viena, 1929.

[10] The completeness of the axioms of the functional calculus of logic (1930)(translation by Stefan Bauer-Mengelberg, approved by Kurt Gödel), Kurt Gödel, Collected Works Vol. I. 1986.

[11] Corresponde a lo que nosotros hemos llamado *completud restringida*: hay un sistema axiomático S para el cual toda fórmula lógicamente válida de la lógica de primer orden, es teorema formal de S. (Cf. sección 2.4, capítulo dos).

[12] Esencialmente el sistema dado en [Whitehead & Russell] *1 y *10, pero con la simbolización de Hilbert y Ackermann.

sistema axiomático que usa es esencialmente el de Principia Mathematica.

Este famoso teorema aparece en su artículo[13] en dos formas como sigue:

Teorema I: *Toda fórmula (lógicamente) válida de la lógica de primer orden es deducible*.

Teorema II: *Toda fórmula de la lógica de primer orden es o refutable*[14] *o satisfacible (en un dominio numerable)*.

Estas dos formulaciones son equivalentes y la equivalencia entre ellas es inmediata sabiendo el significado de que una fórmula sea refutable, como que su negación es demostrable, lo cual nuevamente hace evidente que no es un concepto absoluto sino relativo al sistema particular de que se trate. La prueba de la equivalencia la damos a continuación:

I $\Rightarrow$II. Sea φ una fórmula de la lógica de primer orden que no es satisfacible, entonces $(\neg\varphi)$ es lógicamente válida de donde por I es deducible, y así φ es refutable.

II$\Rightarrow$I. Sea φ una fórmula lógicamente válida, entonces $(\neg\varphi)$ es no satisfacible y por II es refutable, es decir $(\neg(\neg\varphi))$ es deducible. De aquí por propiedades del sistema se sigue que φ es deducible.[15]

3.2 Diversas formulaciones de Correctud-Completud

A continuación presentaremos un bosquejo de la prueba del teorema II que es el que Gödel demuestra, y otras versiones del teorema de completud.

Teorema II: Toda fórmula es o refutable o satisfacible (en un dominio numerable).

[13] Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, publicado en Monatshefte für Mathematik und Physik 37, 349-360, (1930). El título se traduce usualmente como "La completud de los axiomas del cálculo lógico funcional", Kurt Gödel, Collected Works Vol.I. 1986. Jesús Mosterín traduce el título como "La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden", Kurt Gödel, Obras Completas, Alianza Editorial, 1981, cf [Mosterín].

[14] Que una fórmula sea *refutable*, significa que su negación sea demostrable o deducible (sin hipótesis) en el sistema. Esto es relativo al sistema de que se trate.

[15] No es claro en el sistema que presenta Gödel. que a su vez es el de "*Principia Mathematica*", cómo se elimina la doble negación. pues no hay axiomas que involucren a la negación. Sin embargo en *Principia Mathematica*, la negación no es un símbolo primitivo sino definido y de la definición se sigue la eliminación de la doble negación. Cf. [Whitehead & Russell].

DEFINICIÓN. Una K-fórmula es una fórmula en forma prenex[16] que además inicia con un cuantificador universal y termina con un existencial. El grado de una k-fórmula es el número de alternancias de bloques de cuantificadores universales y existenciales.

Teorema III. *Si cualquier K-fórmula es refutable o satisfacible, entonces también lo es cualquier fórmula.*
La razón de este resultado es que cualquier fórmula es lógicamente equivalente a una K-fórmula.
Teorema IV. *Si cualquier K-fórmula de grado n es refutable o satisfacible, entonces también lo es cualquier K-fórmula de grado n+1.*
Teorema V. *Cada K-fórmula de grado 1 es refutable o satisfacible.*

Como toda K-fórmula es de algún grado n, ($n \geq 1$) de los teoremas V y IV se sigue por inducción matemática que toda K-fórmula es refutable o satisfacible, y de aquí por el teorema III se sigue que de hecho toda fórmula es refutable o satisfacible.

La generalización del teorema II para conjuntos numerables de fórmulas, probada como teorema IX, afirma que:
Teorema IX. *Todo conjunto (numerable) de fórmulas de la lógica de primer orden o tiene un subconjunto finito cuya conjunción es refutable*[17] *o bien es satisfacible (en un dominio numerable).*

El teorema que damos a continuación es la primera versión conocida del teorema de Compacidad (para el caso numerable):
Teorema X: *Para que un conjunto infinito numerable de fórmulas sea satisfacible, es necesario y suficiente que cada subconjunto finito suyo sea satisfacible.*

Queremos señalar que Gödel simplemente menciona[18] (sin probarlo) que el teorema IX se sigue inmediatamente del teorema X. Tal vez para Gödel la prueba de la completud extendida o generalizada (teorema IX) a partir de completud restringida

[16] Una fórmula está en forma *prenex*, si todos sus cuantficadores (si los hay) están al principio de la fórmula. Cf. sección 4.3 capítulo cuatro.
[17] La conjunción de un conjunto finito de fórmulas es una fórmula.
[18] Cf. [Gödel a] página 119, [Gödel b] página 32, [Gödel c] página 590.

(teorema II) usando compacidad (teorema X) era tan obvia que se limito a enunciarla sin prueba. Sin embargo aunque Gödel sólo menciona el teorema X (Compacidad) es claro que la demostración de IX se sigue del teorema II y del X conjuntamente, como mostramos a continuación.

Prueba del Teorema IX: Sea Σ un conjunto infinito numerable de fórmulas. Si Σ no es satisfacible, por el teorema X hay un subconjunto finito suyo que no es satisfacible, entonces la conjunción de ese subconjunto finito no es satisfacible[19] y por el teorema II, la conjunción de ese subconjunto finito es refutable. □

Pudiera pensarse que en su disertación doctoral de 1929, Gödel presenta el teorema de compacidad, pero esto no es así. Aunque ya presenta el teorema IX, sólo da un bosquejo de su prueba, donde comenta que "*...la prueba es completamente análoga a la dada para fórmulas*" es decir, a la del teorema II.

Este teorema IX resulta ser equivalente al teorema de Henkin[20], para el caso numerable, suponiendo que el sistema axiomático en cuestión cumple algunas propiedades básicas que mencionaremos más adelante. Este teorema que Henkin prueba hasta 1949, afirma lo siguiente:

Teorema de Henkin. *Todo conjunto Σ de fórmulas de la lógica de primer orden que sea consistente,*[21] *es satisfacible.*

Esta versión se cumple para todo conjunto Σ de cualquier cardinalidad. Para ver claramente la equivalencia con el teorema IX (para el caso numerable), basta mostrar la siguiente proposición más general que ofrecemos a continuación, para cualquier conjunto Σ numerable o más que numerable.

Proposición. Sea Σ un conjunto de fórmulas de la lógica de primer orden y sea $\boldsymbol{S}$ un sistema axiomático que cumple: MTD, MP, los teoremas: $\vdash_S (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (*contraposición*), y $\vdash_S \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (*no contradicción*), así como las reglas de inferencia: de α y β obtener $(\alpha \wedge \beta)$ (*conjunción*), y de $(\alpha \wedge \beta)$ obtener α y obtener β (*separación*). Entonces:

[19] Por el criterio de verdad de la conjunción.
[20] Cf. [Henkin].
[21] Esta propiedad, de *consistencia* de conjuntos de fórmulas, es relativa al sistema de que se trate.

Σ es s-inconsistente si y sólo si hay un $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito, tal que la conjunción de Γ[22] *es refutable (en **S**).*

Prueba: sea S un sistema axiomático que cumple las hipótesis. Sea Σ un conjunto de fórmulas.

$\Rightarrow$) Supongamos que Σ es *s*-inconsistente.

(1)	Σ es *s*-inconsistente	suposición
(2)	Hay una fórmula α tal que $\Sigma \vdash_s (\alpha \wedge \neg\alpha)$	definición
(3)	Hay un subconjunto finito Γ de fórmulas de Σ tal que $\Gamma \vdash_s (\alpha \wedge \neg\alpha)$	Lema Finitud[23]
(4)	$\wedge\Gamma \vdash_s \gamma_i$ para toda $\gamma_i \in \Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$[24]	separación
(5)	$\wedge\Gamma \vdash_s (\alpha \wedge \neg\alpha)$	corte[25] (3), (4)
(6)	$\vdash_s [\wedge\Gamma \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)]$	MTD
(7)	$\vdash_s [\wedge\Gamma \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)] \rightarrow [\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg(\wedge\Gamma)]$	contraposición
(8)	$\vdash_s [\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg(\wedge\Gamma)]$	MP (6), (7)
(9)	$\vdash_s \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	teorema de ***S***
(10)	$\vdash_s \neg(\wedge\Gamma)$	MP (9), (8)
(11)	La conjunción de Γ[26] es refutable en ***S***.	

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que hay un $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito, tal que

(1)	La conjunción de Γ es refutable en ***S***	suposición
(2)	$\vdash_s \neg(\wedge\Gamma)$	definición[27]
(3)	$\Sigma \vdash_s \neg(\wedge\Gamma)$	monotonía[28]
(4)	$\Sigma \vdash_s (\wedge\Gamma)$	conjunción **n** veces ($\Gamma \subseteq \Sigma$)
(5)	Σ es *s*-inconsistente	□

[22] Si $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, entonces "*la conjunción de* Γ", denotada $\wedge\Gamma$, es la fórmula $(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n)$.
[23] Lema de Finitud, cf. sección 2.3 capítulo dos.
[24] Si $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, entonces "*la conjunción de* Γ", denotada $\wedge\Gamma$, es $(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n)$.
[25] Propiedad sintáctica b), cf. sección 2.3 del capítulo dos.
[26] Γ es subconjunto finito de Σ.
[27] Donde $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subseteq \Sigma$ y $\wedge\Gamma = (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n)$.
[28] Propiedad sintáctica a), cf. sección 2.3 capítulo dos.

Esta proposición nos está demostrando que la noción sintáctica de *s-inconsistencia* y la propiedad sintáctica de "*tener un subconjunto finito cuya conjunción es s-refutable*", son equivalentes para cualquier sistema axiomático ***S*** que cumpla las hipótesis.

Así pues, usando la proposición anterior, en la generalización de Gödel (teorema IX) y usando que el sistema ***S*** cumple las hipótesis, podemos sustituir la expresión "Σ *tiene un subconjunto finito cuya conjunción es* s-refutable", por la expresión "Σ *es s-inconsistente*" y resulta claramente equivalente al teorema de Henkin en el caso numerable.

Como hemos visto, hay dos versiones diferentes del teorema de Correctud-Completud[29], una *restringida* o débil como en las formulaciones equivalentes de los teoremas I y II de Gödel y nuestra formulación de Correctud y Completud restringida de la sección 2.4 (capítulo dos), y una versión generalizada, fuerte o *extendida* como en las formulaciones equivalentes del teorema IX de Gödel, la del teorema de Henkin y nuestra formulación de Correctud y Completud extendida de la sección 2.4. George Boolos se refiere a esta distinción de la siguiente manera[30]: "Puede hacerse una distinción entre dos tipos de teorema de completud que pueden probarse acerca de sistemas lógicos: entre teoremas de completud débil y fuerte. Un teorema de completud débil muestra que un enunciado es demostrable si es válido; un teorema fuerte, que un enunciado es demostrable a partir de un conjunto de enunciados si es una consecuencia lógica del conjunto".[31]

Boolos hace referencia a la equivalencia entre la versión mencionada de completud extendida o fuerte y la versión del teorema IX generalizado de Gödel, sin mencionar explícitamente esta versión ni considerar su restricción al caso numerable, sino para cualquier conjunto de enunciados[32]: "La completud fuerte de la lógica puede expresarse como: un conjunto de enunciados es satisfacible si carece de una refutación. (Una refutación de un

[29] Aunque muchas veces no se hace explícita la correctud, nosotros generalmente sí tratamos juntas a la correctud y la completud.
[30] Nuestra traducción.
[31] Cf. [Boolos] página 52.
[32] Nuestra traducción.

conjunto de enunciados es una prueba de la negación de una conjunción (*finita*)[33] de elementos del conjunto)."[34]

Si consideramos las dos versiones, la relación entre ellas, para cualquier sistema axiomático, es la siguiente:

i) Corr-Compl. Ext. $\Rightarrow$ Corr-Compl. Restr.

ii) Corr-Compl. Restr.+MP+MTD+Compacidad $\Rightarrow$ Corr-Compl Ext.

La Correctud-Completud Extendida implica trivialmente la Correctud-Completud Restringida, pues ésta última corresponde al caso particular $\Sigma = \varnothing$ de la primera. Por otro lado, la Correctud-Completud Restringida junto con MP y MTD en el sistema y junto con el teorema de Compacidad, implican Correctud-Completud Extendida. La prueba de esta implicación metalógica puede verse en [Amor] página 106.

Como se ha mencionado anteriormente, nosotros consideramos que en las formulaciones del teorema de Correctud-Completud es fundamental considerar la relatividad a un sistema axiomático, cosa que no se hace usualmente. Nuestra concepción pues, sobre todo desde nuestro punto de vista metalógico es la de resaltar en la afirmación del teorema, la *existencia* de un sistema axiomático relativo al cual se cumplen las propiedades de correctud y completud extendidas. Así pues, consideramos las siguientes dos formulaciones equivalentes del teorema en forma extendida.

Teorema de Correctud-Completud Extendido (Formulación 1)
Existe un sistema formal ***S*** tal que para cualquier $\Sigma \cup \{\alpha\}$ conjunto de enunciados:

$$\Sigma \models \alpha \quad \text{si y sólo si} \quad \Sigma \vdash_S \alpha$$

Teorema de Correctud-Completud Extendido (Formulación 2)
Existe un sistema formal ***S*** tal que:
i) Para todos α y β enunciados, $\alpha, (\alpha \rightarrow \beta) \vdash_S \beta$ (MP en ***S***).

[33] Paréntesis nuestro.
[34] Cf. [Boolos] página 52.

ii) Para todos β y γ enunciados, $\vdash_s (\beta \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \gamma))$ (Contradicción implica trivialidad en $\boldsymbol{S}$).

iii) Para todo α enunciado, $\vdash_s [(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha]$ (Consequentia Mirabilis en $\boldsymbol{S}$).

iv) Para todo $\Gamma\cup\{\alpha, \beta\}$ conjunto de enunciados,

si $\Gamma, \alpha \vdash_S \beta$ entonces $\Gamma \vdash_S (\alpha \rightarrow \beta)$ (MTD en $\boldsymbol{S}$).

v) Para cualquier Σ conjunto de enunciados,

Σ es s-consistente si y sólo si Σ es satisfactible.

Obsérvese que el inciso v) de la formulación 2 es el teorema de Henkin junto con la afirmación inversa. Hay que hacer notar que para tener la equivalencia de las dos formulaciones, son necesarias las propiedades i) a iv) de la formulación 2. (Para una prueba de la equivalencia de las dos formulaciones véase [Amor] páginas 118-119).

3.3 ¿Qué entendemos por una prueba de tipo semántico del teorema de Correctud-Completud Extendido, a partir de Compacidad?

Una prueba de tipo semántico del teorema de Correctud-Completud Extendido a partir de Compacidad, consiste en *definir* un sistema axiomático[35] W y *sin trabajar dentro de él*, sino usando sólo sus propiedades básicas y conceptos y resultados semánticos basados en el teorema de Compacidad, *probar de modo breve*, que para cualquier conjunto de fórmulas Σ y para cualquier fórmula φ, ese sistema W satisface:

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \Sigma \vdash_W \varphi$$

Una respuesta parcial a este problema, con el enfoque que buscamos, fue dada por Jerome Malitz en 1979, respecto a lo que nosotros llamamos el teorema de Correctud-Completud Restringido. (cf. [Malitz], página 188). Se muestra ahí la existencia de un sistema axiomático $\boldsymbol{S}$, definido usando conceptos semánticos y se prueba semánticamente que para cualquier fórmula φ se cumple:

[35] Cf. sección 2.3, capítulo dos.

$$\vdash_S \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \models \varphi$$

La parte "sólo si" ($\Rightarrow$) se prueba por inducción sobre la longitud de la prueba formal, pues los axiomas del sistema son lógicamente válidos y las reglas de inferencia de ***S*** preservan validez lógica.

La prueba de la parte "si" ($\Leftarrow$) depende directamente de la forma "ad hoc" en que se definen los axiomas y las reglas de inferencia de ***S***, del teorema de Compacidad y de los teoremas de Skolem y de Herbrand (cf. sec.4.3 cap.4) este último probado a partir del teorema de Compacidad.

Una pregunta que surge naturalmente de lo anterior, es si se puede demostrar semánticamente en este sentido la completud extendida. Resolver esta pregunta no resulta tan fácil como simplemente extender el sistema de Malitz, como se verá a continuación.

Modificando el sistema ***S*** de Malitz, en uno nuevo ***S'*** (agregando Modus Ponens como nueva regla), hemos probado que para cualquier conjunto de fórmulas Σ y para cualquier fórmula φ:

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{implica} \quad \Sigma \vdash_{S'} \varphi$$

Es decir, tenemos la completud extendida de ***S'***. Esta prueba es de tipo semántico ampliando la prueba de Malitz, usando el teorema de Compacidad y la propiedad de finitud de las derivaciones formales (cf. [Amor] páginas 112-113).

Sin embargo estos sistemas ***S*** y ***S'***, no cumplen correctud extendida! Es decir, hay un conjunto Σ y una fórmula φ tales que:

$$\Sigma \vdash_{S'} \varphi \quad \text{pero} \quad \Sigma \not\models \varphi$$

Además, en estos sistemas tampoco se cumple el Metateorema de la Deducción; es decir, hay fórmulas α y β tales que:

$$\Gamma, \alpha \vdash_{S'} \beta \quad \text{pero} \quad \Gamma \nvdash_{S'} (\alpha \rightarrow \beta).$$

Para ejemplificar estos dos hechos negativos, considérense:

$$\Sigma=\{P(c)\}, \quad \varphi = \forall x P(x), \quad \Gamma = \varnothing, \quad \alpha = P(c), \quad \beta = \forall x P(x).$$

Entonces $P(c) \vdash_{S'} \forall x P(x)$ ya que $FNSV(\forall x P(x))=P(c)$ y la regla de Skolem lleva de $FNSV(\varphi)$ a φ para cualquier fórmula φ. Pero claramente $P(c) \not\models \forall x P(x)$!

Por otro lado $P(c) \vdash_{S'} \forall x P(x)$ pero $\nvdash_{S'} (P(c) \rightarrow \forall x P(x))$ por la correctud restringida de ***S'*** ya que $(P(c) \rightarrow \forall x P(x))$ no es fórmula lógicamente válida. Para más detalles véase la sección 5.2 del capítulo cinco (o bien cf. [Amor] páginas 112-113).

La explicación que nosotros damos de por qué este sistema ***S'***, que si bien es Completo en forma extendida tiene el grave defecto de no ser Correcto en forma extendida (aún siéndolo en forma restringida), involucra la caracterización semántica de tipos de reglas de inferencia según la propiedad semántica que preservan (satisfacibilidad, verdad, validez lógica) dada en el capítulo dos.[36]

En este caso el sistema tiene una regla de inferencia (la que llamamos regla de Skolem y que también es regla del sistema ***S*** original de Malitz), que no es "buena"[37] en el sentido de que al aplicarla puede llevar de verdadero a falso en alguna interpretación, aunque lleva de fórmulas lógicamente válidas a lógicamente válidas[38]. Es decir, preserva validez pero no verdad. Así, el comportamiento de esa regla es el que ocasiona la falla de la correctud extendida de esos sistemas, pues permite derivar fórmulas a partir de hipótesis, que no son consecuencia lógica de las hipótesis.

Regresando al objetivo de nuestra investigación, de obtener una prueba semántica de la existencia de un sistema correcto y completo en forma extendida, la respuesta parcial o restringida de los sistemas ***S*** y ***S'*** ilustra el tipo de prueba que queremos, sin

[36] Cf. sección 2.2, capítulo dos.

[37] Recordar que definimos que una regla de inferencia R es *buena* si y sólo si al aplicar R a fórmulas verdaderas siempre se obtiene una fórmula verdadera. Cf. [Amor] páginas 100-101.

[38] Recordar que una regla que lleva de fórmulas lógicamente válidas a lógicamente válidas, la llamamos *regular*. Así pues, SK es regla regular no buena.

embargo no lo logra. Para lograrlo consideramos dos posibles caminos, uno sería dar un sistema nuevo que en principio no necesariamente tenga relación con los sistemas ***S*** o ***S'*** y el otro camino sería corregir el defecto del sistema ***S'*** restringiendo o limitando de alguna manera el uso de la mencionada regla de Skolem (SK). En esta segunda opción, la posibilidad de fijar restricciones o limitaciones en la aplicación de reglas de inferencia, forma parte de nuestra definición de derivación formal en un sistema axiomático[39]. La intención de esto, es que se obtengan como derivaciones formales, *únicamente* las consecuencias lógicas; es decir, verdades a partir de verdades o que la regla sea "buena". Pero además es necesario desde luego, que dichas restricciones no afecten a la completud extendida, de modo que el sistema con la restricción la siga cumpliendo.

Nuestro camino fue una variante del segundo; es decir, propusimos un sistema que es una restricción de ***S*** en el uso de la regla de Skolem, pero que también es una extensión de él con otra regla, la regla de Modus Ponens. Sin embargo, como sabemos que ningún sistema va a cumplir correctud-completud extendida si no cumple el metateorema de la deducción, por los resultados metalógicos del capítulo dos,[40] nuestro sistema tenía que cumplirlo. Esta fue la clave para encontrar el sistema que nosotros queríamos.

Este sistema lo daremos con detalle en el capítulo cinco y probaremos su correctud y completud extendida con ayuda de Compacidad. Esta es la contribución matemática más importante de esta tesis.

Conclusiones

Este capítulo lo dedicamos al teorema de Correctud-Completud. En la primera sección dimos un panorama histórico, seguimos con la presentación de diversas versiones y formulaciones que se han dado de él, particularmente las originales de Gödel y la de Henkin y las relaciones entre ellas, para terminar con nuestra versión del teorema en dos formulaciones equivalentes.

---

[39] Cf. sección 2.3 del capítulo dos.
[40] Cf. Corolario 3, sección 2.5 capítulo dos.

De nuestra versión destacamos que lo que afirma el teorema, es la *existencia* de un sistema axiomático que cumple las propiedades de correctud y completud *extendida*. Terminamos este capítulo con una sección dedicada a explicar lo que entendemos por una prueba de tipo semántico del teorema de Correctud-Completud Extendido.

CAPÍTULO CUATRO

4. EL TEOREMA DE COMPACIDAD

4.1 Historia

La teoría de Modelos clásica es la parte de la lógica matemática que estudia la relación entre los lenguajes formales y sus modelos, o sea con las interpretaciones donde las fórmulas son verdaderas.

Los teoremas básicos de esta teoría, para los lenguajes de primer orden con igualdad, son el teorema de Completud y el teorema de Compacidad. Ambos teoremas son fundamentales para la teoría de modelos, el de completud porque asegura la existencia de sistemas axiomáticos (definidos sintácticamente) que son adecuados para la semántica y el de compacidad porque da un procedimiento teórico muy poderoso para la construcción de modelos. Por su utilidad y consecuencias, podríamos decir que ambos son igualmente valiosos e importantes, y esta es una tesis de este trabajo, pues ya hemos hablado de demostraciones de ambos con semejanzas estructurales y en el capítulo cinco daremos una relación de implicación entre ambos. Sin embargo son muy diferentes entre sí, pues el primero de ellos (completud) relaciona la semántica con la sintaxis (cf.cap.3) y el segundo (compacidad) es puramente semántico.

El teorema de Compacidad asegura la existencia de un modelo para cualquier conjunto infinito de enunciados cuyos subconjuntos finitos posean un modelo. Esto significa poder garantizar la existencia de un modelo para cualquier conjunto infinito de enunciados pidiendo solamente que cada subconjunto finito suyo tenga un modelo.

La versión más general conocida actualmente se refiere a conjuntos cualesquiera[1] de enunciados de un lenguaje de primer orden con igualdad, donde el lenguaje puede ser finito o infinito de cualquier cardinalidad. Es decir, el número de constantes, letras funcionales o predicados puede ser cualquiera, finito o infinito de cualquier cardinalidad.

En esta sección presentaré la historia, poco conocida y a veces imprecisa del teorema de Compacidad y su relación histórica con el teorema de Completud (cf. sec.3.1 cap.3).

La primera referencia que tenemos del teorema de Compacidad, fue su presentación y demostración por primera vez por Kurt Gödel para lenguajes de primer orden numerables, en 1930.[2] Este poderoso teorema, de interesantes aplicaciones en muchas áreas de la matemática, fue presentado como Teorema X y probado (para lenguajes numerables) por primera vez por Gödel en el mismo artículo de 1930, donde lo usó para probar la versión generalizada de Completud (cf. sec.3.2 cap.3). Lo repetimos a continuación:

Teorema X: **(Teorema de Compacidad)**

Para que un conjunto infinito numerable de fórmulas sea satisfacible, es necesario y suficiente que cada subconjunto finito suyo sea satisfacible.

En la prueba de este teorema, Gödel se limita a conjuntos de K-fórmulas de primer grado[3] (cf. sec.3.2 cap.3), pues aplicando los procedimientos usados en la prueba de los teoremas III y IV, a fórmulas individuales, podemos especificar para cada conjunto de fórmulas Σ un conjunto Σ' de K-fórmulas de primer grado, tal que la satisfacibilidad de un subconjunto cualquiera de Σ es equivalente con la del correspondiente subconjunto de Σ'.

Después, a partir de un conjunto numerable de K-fórmulas de grado 1 tal que todo subconjunto finito es satisfacible, define una sucesión numerable de fórmulas de la cual prueba que cada una es

[1] De cualquier cardinal, finito o infinito, numerable o más que numerable.

[2] Teorema X en "The completeness of the axioms of the functional calculus of logic", Gödel, 1930. Cf. [Gödel a] páginas 119-121, y [Gödel b] páginas 32-33.

[3] Definición de K-fórmula: cf. sec. 3.2 cap.3.

satisfacible. Finalmente por un argumento que usó en la prueba del Teorema V,[4] concluye que el conjunto completo es satisfacible.

El teorema de Compacidad atrajo muy poco la atención en esta primera presentación, donde como se ve, no fue probado como un corolario del teorema de Completud como muchas veces se afirma,[5] sino que es una prueba semántica que usa métodos y resultados parciales demostrados por Gödel para su prueba del teorema de completud, en el mismo artículo.[6] Van Heijenoort afirma en su introducción al artículo de 1930, que Gödel da una prueba *semántica* del teorema de Compacidad (cf. [Heijenoort] página 582).

Como ya hemos mencionado antes, (cf. secc.3.1, cap.3) Gödel demostró el teorema de completud como parte de su disertación doctoral en 1929[7] y lo publicó en un artículo de 1930 que coincide en lo general con dicho trabajo.[8] No obstante, hay dos diferencias importantes: la primera es que en el texto de 1930 Gödel omitió la introducción al trabajo doctoral de 1929, en la que aborda la cuestión de la resolubilidad de todo problema matemático y deja ver la posibilidad de probar la existencia de problemas irresolubles en un sistema formal para la matemática.[9] La segunda diferencia importante es la presentación del nuevo resultado puramente semántico que ahora conocemos como teorema de compacidad (para el caso numerable).

Con este teorema y junto con el teorema de completud restringido, prueba su versión generalizada de completud. John W. Dawson en su libro *Logical Dilemmas*, se refieren en forma imprecisa a este hecho del siguiente modo: "En el artículo publicado [de 1930] el teorema de completud fue obtenido como una consecuencia de un nuevo resultado ... [el] teorema de compacidad".[10] Gómez Torrente hace una corrección del error mencionado, en una reseña del libro de Dawson.[11] La verdad es pues, que Gödel obtuvo primero completud para fórmulas (completud restringida) y después la generalización de

[4] Cf. sec. 3.2 cap.3.
[5] Cf. [Enderton] página 139, [Manzano] página 178, [Mosterín] página 18.
[6] The completeness of the axioms of the functional calculus of logic (La completud de los axiomas del cálculo lógico funcional).
[7] Cf. [Gödel 1929]
[8] Cf. [Gödel a], [Gödel b] y [Gödel c].
[9] En esa introducción se encuentran las primeras ideas de Gödel sobre lo que serían sus famosos resultados de incompletud de la aritmética, de 1931. Para un amplio estudio sobre el tema cf. cap. 4 de [Torres].
[10] Cf. [Dawson a] página 58.
[11] Cf. [Gómez-Torrente a] y [Gómez-Torrente b].

completud para conjuntos (numerables) de fórmulas, a partir de compacidad y de completud para fórmulas.

Así pues, en vez de verlo como corolario, en la presentación de Gödel su relación con el teorema de completud (restringido) es que se prueba con parte de la misma herramienta de la prueba de éste y luego se usa junto con éste, para probar su versión generalizada (cf. [Feferman] páginas 119 y 121).

Posteriormente el teorema fue presentado en forma ampliada a lenguajes no numerables de cualquier cardinalidad, en 1936 y en 1941, por Anatolii Mal'cev.[12] Sin embargo consideramos que hay que precisar algunos detalles sobre estas presentaciones. El artículo de Mal'cev de 1936[13] empieza de la siguiente forma:

"Este artículo está dedicado a generalizar dos teoremas, uno para el cálculo proposicional (CP) y otro para la lógica de predicados de primer orden (LPPO)[14]. El primer teorema se debe a Gödel [46][15] y puede ser formulado como sigue: *Para que un sistema contable de fórmulas del CP sea consistente*[16] *es suficiente que toda parte finita del sistema sea consistente.*"

Como vemos, Mal'cev adjudica incorrectamente a Gödel la prueba de compacidad contable para el CP, pues es para la lógica de primer orden. Incluso la fecha de referencia (1936) está equivocada, pues es 1930.

Este teorema lo generaliza para conjuntos de fórmulas del CP de cualquier cardinal y lo enuncia, como sigue:

Teorema 1. *Para que un conjunto S de fórmulas del Cálculo Proposicional sea consistente (e.d. satisfacible), es necesario y suficiente que todo subconjunto finito de S sea consistente (e.d. satisfacible)* (cf. [Mal'cev] páginas 1-4).

[12] Mal'cev A. I. The metamathematics of algebraic systems: collected papers, 1936-1967. North Holland, 1971.

[13] El artículo original es: *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik*, Rec.Math. N.S.1, 323-336. Y aparece como: *Investigations in the realm of Mathematical Logic*, en [Mal'cev] páginas 1-14.

[14] Con este segundo teorema, al que se refiere Mal'cev es a un teorema de T. Skolem sobre extensiones de modelos.

[15] La referencia [46] de Mal'cev se refiere a: "K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37, 349-360, (1936)"(sic).

[16] Su definición de "*consistente*" es, "*satisfacible en el sentido semántico* de la lógica proposicional", pues define textualmente: "S es *consistente* si y sólo si es posible asignar valores de verdad, V o F, a todas las proposiciones elementales a partir de las cuales se construyen las fórmulas en S, de modo que cada fórmula en S tenga el valor V de acuerdo a las reglas del CP".

En este mismo artículo de 1936, Mal'cev considera también conjuntos no numerables de enunciados de la lógica de predicados de primer orden pero no formula explícitamente para esos enunciados, el teorema general de Compacidad o *teorema Local* general como él le llama, sin embargo propone para cada conjunto S de fórmulas de la lógica de predicados de primer orden (LPPO), un conjunto de ciertas fórmulas asociadas de la lógica proposicional (CP) equivalente a S en el sentido de satisfacibilidad, es decir, el primero es satisfacible si y sólo si el segundo lo es (cf. [Mal'cev] páginas 7-9) y con un pie de página termina diciendo: "El lector sagaz puede notar que esta construcción, junto con el Teorema 1 (compacidad para la lógica proposicional), lleva al análogo del Teorema 1 para la LPPO (compacidad para la lógica de predicados de primer orden)". Este teorema, llamado teorema de compacidad o *teorema local general* para la LPPO es citado por Mal'cev pero sólo posteriormente, en el artículo de 1941 como teorema básico:

Teorema Básico (Compacidad o teorema Local para la LPPO) *Si toda parte finita de un conjunto infinito de fórmulas de la LPPO es consistente,*[17] *entonces el conjunto completo es consistente.*[18]

Autores posteriores como Henkin y Mostowski, han comentado acerca del descuido en la escritura de los artículos de Mal'cev y han puesto en duda la correctud de la prueba de Mal'cev. Por ejemplo, cito un comentario de una *reseña* de Henkin y Mostowski:[19]

-En el artículo de Mal'cev de 1941 encontramos la primera formulación del "Teorema Local general" y la primera de sus aplicaciones a problemas de álgebra. Sin embargo, para una prueba (así como para una formulación precisa) del teorema, el autor se refiere a su artículo de 1936, ... los presentes revisores no han podido encontrar ninguna formulación del "Teorema Local general" en dicho artículo, y ya que la prueba de ahí adolece de ciertos huecos, el lector que busque una prueba satisfactoria de este teorema debe remitirse a las pruebas más recientes de Henkin y A. Robinson, cada uno de los cuales deduce el "Teorema Local general" del teorema de Completud

[17] Recordar que para Mal'cev su definición de "consistente" es "satisfacible en el sentido semántico". (Nótese que en este caso, es para la lógica de predicados de primer orden).

[18] En un pie de página, el autor se refiere a una formulación precisa y a una prueba de este teorema, en el artículo de 1936. Sin embargo, aparentemente esta formulación de 1941 es la primera formulación de este resultado, aunque el argumento y la formulación esencial pueden ser discernidos del artículo previo de 1936.

[19] Cf. [Henkin & Mostowski].

(extendido) para sistemas de lógica de primer orden en lenguajes no numerables-.

El trabajo de aplicaciones del teorema, que hicieron Mal'cev y Tarski en álgebra y otras áreas de matemáticas y posteriormente el desarrollo del análisis no estándar de A. Robinson, le dieron cada vez más relevancia al teorema de Compacidad.

La importancia del teorema de Compacidad permaneció sin reconocimiento por muchos años después de su presentación por Gödel en 1930. Incluso mucho tiempo después siguió siendo considerado sólo como un corolario del teorema de Correctud-Completud. La razón de este desdén pudo deberse a su carácter puramente semántico. Las circunstancias de esa indiferencia se exploran en [Dawson a].[20] Incluso en autores como A. Robinson en publicaciones previas a 1955, las aplicaciones de Compacidad se obtienen a través de lo que Dawson llama "la desviación sintáctica" a través del teorema de completud extendido de Gödel.[21] Dawson llama "*la desviación sintáctica*", al fenómeno de recurrir a métodos sintácticos en aplicaciones de Compacidad, cosa que se repite a menudo en esa época y aún posteriormente, por el rechazo a aplicar compacidad directamente debido a un prejuicio entre algunos lógicos, contra el uso de argumentos semánticos.[22]

El teorema de compacidad tiene bellas y útiles consecuencias y aplicaciones como lo son por ejemplo, el teorema de Lowenheim Skolem[23], la existencia de modelos no estándar para los números naturales, la justificación de la existencia de los infinitesimales del análisis no estándar[24] y el teorema de los cuatro colores para mapas infinitos.[25]

El teorema de Compacidad es llamado algunas veces teorema de Finitud[26] o teorema Local,[27] pero más frecuentemente es llamado

[20] Cf. [Dawson a] página 58 y nota [136] en página 280.
[21] Cf. [Dawson b] página 24.
[22] Cf. [Dawson b] página 22.
[23] Este teorema asegura que cualquier conjunto de enunciados que tiene un modelo infinito, tiene un modelo infinito de cualquier cardinalidad mayor o igual que el cardinal del lenguaje.
[24] Existencia de una extensión del sistema de los números reales en la que están incluidos los números infinitesimales, lo que los reivindicó como realmente existentes y aclaró las propiedades de estos números ya tratados desde la obra de Leibniz y Newton.
[25] El teorema de los cuatro colores para mapas finitos, asegura que: para colorear cualquier mapa con un número finito de países, de modo que países con frontera común sean coloreados con colores distintos, bastan cuatro colores. El teorema de Compacidad generaliza este teorema para mapas con un número infinito de países.
[26] En [Heijenoort] página 582.

teorema de Compacidad. Ciertamente tiene mucho más sentido llamarlo teorema de finitud, pero el nombre de compacidad se debe a que este teorema es equivalente a la afirmación de que cierto espacio topológico asociado a ciertos conjuntos de fórmulas del lenguaje, es compacto en sentido topológico.[28]

Si ***L*** es un lenguaje de primer orden, tal espacio topológico, conocido como "*Espacio de Stone*" para ***L***, es un espacio (S, τ) definido por Keisler,[29] sobre el conjunto S de todas las teorías completas[30] en el lenguaje ***L*** y τ es la topología cuyos cerrados básicos son los conjuntos $[\varphi]=\{p\in S/\varphi\in p\}$ (de todas las teorías de S que tienen a una fórmula de ***L***), es decir el conjunto de todos los cerrados básicos es el conjunto $\{[\varphi]/\varphi$ es fórmula de ***L***$\}$.[31]

TEOREMA *Sea L un lenguaje de primer orden con igualdad. Entonces:*
El teorema de Compacidad para L es equivalente a que el espacio de Stone (S, τ) para L, sea compacto.

Además este espacio topológico resulta ser de Hausdorff y totalmente inconexo. Esta prueba puede verse con detalle en [Amor] páginas 37-42.

4.2 Pruebas y aplicaciones.

Hay dos diferentes formas y muchas diferentes pruebas del teorema de Compacidad.

Teorema de Compacidad (Gödel-Mal'cev) Primera forma.

Sea Σ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden con igualdad. Si para cada subconjunto finito $\Gamma\subseteq\Sigma$, hay un modelo de todas las fórmulas de Γ, entonces hay un modelo de todas las fórmulas de Σ.

[27] En [Mal'cev] páginas 14 y 16.
[28] Un espacio topológico es *compacto* si toda colección de subconjuntos *abiertos* cuya unión contiene al espacio, tiene una subcolección *finita* cuya unión también contiene al espacio.
[29] Cf. [Keisler] páginas 59-60.
[30] Una *teoría completa* es un conjunto de enunciados tal que para cualquier enunciado del lenguaje, o el enunciado le pertenece o le pertenece su negación.
[31] Cf. [Amor] páginas 37-42.

Teorema de Compacidad Segunda forma.

Si $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden con igualdad y $\Sigma \models \varphi$, entonces hay un subconjunto finito $\Gamma \subseteq \Sigma$, tal que $\Gamma \models \varphi$.

Estas dos formas son equivalentes y la prueba de la equivalencia la damos a continuación.

La primera implica la contrapuesta de la segunda: suponemos la primera forma. Sea $\Sigma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas y suponemos además que para todo subconjunto finito $\Gamma \subseteq \Sigma$, $\Gamma \not\models \varphi$ (es decir $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tiene un modelo y por lo tanto Γ también). De aquí se sigue que todo subconjunto finito de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ tiene un modelo. Entonces por la primera forma, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ tiene un modelo, de donde se sigue que no todo modelo de Σ es modelo de φ; es decir, $\Sigma \not\models \varphi$.

La contrapuesta de la segunda implica la primera: suponemos la contrapuesta de la segunda. Sea Σ tal que para cada subconjunto finito $\Gamma \subseteq \Sigma$, hay un modelo de Γ, entonces para cada subconjunto finito $\Gamma \subseteq \Sigma$, $\Gamma \not\models \exists x(x \neq x)$, pues $\exists x(x \neq x)$ no es verdad en ese modelo de Γ (ni en ninguna interpretación). Entonces por la contrapuesta de la segunda forma, $\Sigma \not\models \exists x(x \neq x)$, de donde hay un modelo para Σ (que no es modelo de $\exists x(x \neq x)$). □

En la sección anterior vimos cómo fueron las primeras pruebas del teorema de Compacidad. Actualmente se prueba en forma muy general y elegante, siguiendo la idea semántica correspondiente a la idea sintáctica de la prueba de Henkin[32], o bien como corolario del teorema de Completud extendido.[33]

Henkin dio en 1949 una prueba del teorema de Completud generalizado o extendido, que exhibe un sistema axiomático respecto al cual asegura que todo conjunto consistente de enunciados es satisfacible.[34] Henkin empieza con un conjunto consistente de fórmulas arbitrario, lo agranda consistentemente por medio de ciertos

---

[32] Cf. [Malitz] páginas 162-165 y [Amor] páginas 28-36

[33] Cf. [Enderton] página 138 y [Manzano] página 131.

[34] Cf. sec. 3.1 y 3.2 del capítulo tres.

axiomas, eliminando las fórmulas existenciales en favor de instancias de sustitución con constantes preasignadas como "testigos" de los existenciales. Entonces extiende el conjunto por un método de Lindenbaum hasta un conjunto *maximal consistente*[35], para el cual es más fácil construir un modelo. La demostración usa solamente propiedades generales de la relación de prueba formal, por lo que es casi independiente del sistema formal; además, el argumento es del mismo tipo en el caso de que el conjunto inicial de fórmulas sea no numerable, mientras que la prueba de Gödel no se extiende a este caso.

Es importante mencionar que como las propiedades semánticas generales son análogas a las propiedades de la relación de prueba formal en sistemas adecuados, el argumento general de Henkin también se puede aplicar "semánticamente", sustituyendo la propiedad sintáctica "*s.consistencia*" para los conjuntos de fórmulas, por la propiedad semántica "*todo subconjunto finito suyo tiene modelo*", para los correspondientes conjuntos de fórmulas. Así pues, se puede dar una prueba del teorema correspondiente, que es el de Compacidad después de esta sustitución, y resulta de estructura semejante a la prueba de Completud, pero totalmente semántica, sin apelar a ningún sistema axiomático y aplicable también al caso no numerable.

Otras pruebas de Compacidad, independientes de Completud y de tipo algebraico son las basadas en *ultrafiltros*,[36] donde a partir de los modelos de los subconjuntos finitos, que existen por hipótesis, se hace una construcción llamada *el ultraproducto* de los modelos módulo un *ultrafiltro*, y esta construcción resulta ser un modelo del conjunto total infinito de enunciados. Una prueba muy diferente e interesante es la de Jon Barwise (cf. [Barwise] páginas 26-33) que prueba primero el teorema de compacidad para la lógica proposicional y luego un Lema de Reducción de la lógica de primer orden a la lógica proposicional, por medio del cual puede reducir compacidad para la lógica de primer orden a compacidad proposicional y regresar a la lógica de primer orden. Esta idea parece ser muy semejante a la esbozada en la prueba de Mal'cev de 1936, sólo que esta última no tiene ni el rigor ni la claridad de la prueba de Barwise.

[35] Un conjunto *maximal consistente* es un onjunto consistente que no puede estar contenido propiamente en ningún otro conjunto consistente.
[36] Cf. [Bell & Slomson].

4.3 Los teoremas de Skolem y de Herbrand.

Para la prueba de tipo semántico del teorema de Completud que nosotros queremos dar, usando el teorema de Compacidad, necesitamos algunos otros resultados semánticos. El objetivo de esta última parte de este capítulo es presentar esos resultados.

Así pues, en esta sección veremos un teorema de Skolem sobre ciertas formas normales y el teorema de Herbrand. El teorema que llamamos aquí "teorema de Skolem", no debe confundirse con el famoso teorema de Skolem sobre existencia de modelos numerables para teorías. Es un resultado referente a formas especiales de fórmulas asociadas a cada fórmula, las llamadas *formas normales de validez*. La relación entre una fórmula y su forma normal de validez asociada, es una relación estrictamente más débil que la de equivalencia lógica, pero suficientemente útil para que exista entre ellas una "equivalencia" al nivel de validez lógica. Así pues, se cumple que una fórmula es lógicamente válida si y sólo si su correspondiente forma de validez también lo es.

En lo que sigue haremos precisas estas ideas y daremos los elementos necesarios para poder enunciar los dos teoremas mencionados.

Formas Normales de Skolem de Validez.

Cualquier fórmula φ se puede transformar mediante un algoritmo a su "Forma Normal de Skolem de Validez", denotada FNSV(φ). La FNSV(φ) es siempre de la forma $(\exists x_1 \ldots \exists x_k\ \psi)$ donde ψ es una fórmula sin cuantificadores y $x_1,\ldots,x_k$ son todas las variables (libres)[37] de ψ.

Ejemplos:

FNSV($\exists y \forall x Q(x,y)$) = $\exists y Q(f(y),y)$

FNSV($\forall x \exists y Q(x,y)$) = $\exists y Q(c,y)$

FNSV($\forall x P(x)$) =P(c)

[37] Obsérvese que las variables de ψ, donde ψ no tiene cuantificadores, son necesariamente libres.

Otra forma normal asociada a cualquier fórmula es la Forma Normal de Skolem de Satisfacción, denotada FNSS(φ) y que resulta de un proceso algorítmico consistente en lo siguiente: introducción de negaciones mediante las leyes lógicas de la negación, seguida del renombre de las variables repetidas en cuantificaciones diferentes (si las hay), luego pasar a la Forma Normal Prenex (FNP)[38], y finalmente a la eliminación de izquierda a derecha de los cuantificadores existenciales por "testigos" que son constantes o funciones de Skolem[39]. Este proceso es mejor conocido como "Skolemización". La FNSS(φ) es siempre de la forma ($\forall x_1 \ldots \forall x_k \psi$), donde ψ es una fórmula sin cuantificadores, con variables (libres) $x_1, \ldots, x_k$. Hay que hacer notar que aunque los procesos anteriores hasta el de prenexación generan fórmulas lógicamente equivalentes, el proceso de skolemización no cumple esto, por lo que una fórmula y su Forma Normal de Skolem de Satisfacción **no** son lógicamente equivalentes. Sin embargo cumplen una relación que, aunque más débil, es muy útil y le podríamos llamar "equisatisfacibilidad lógica"; es decir, una es satisfacible si y sólo si la otra es satisfacible.

Ejemplos:

$\text{FNSS}(\forall y \exists x \neg Q(x,y)) = \forall y \neg Q(f(y),y)$

$\text{FNSS}(\exists x \neg P(x)) = \neg P(c)$

La relación entre las dos formas normales mencionadas es la siguiente:

$$\text{FNSV}(\varphi) = \text{FNP}[\neg(\text{FNSS}(\neg\varphi))]$$ [40]

Así pues, para obtener FNSV(φ) a partir de φ, el procedimiento (indicando abreviaturas para cada paso) es el siguiente: negar φ (neg-φ), obtener la Forma Normal de Skolem de Satisfacción de $\neg\varphi$ FNSS($\neg\varphi$), para lo cual el proceso es: introducir negaciones ($\neg$intro), renombrar variables repetidas (renom-var), prenexar[41] todos los

[38] Forma de fórmula en la cual todos sus cuantificadores (si los hay) están al principio de la fórmula.

[39] Estas funciones (llamadas "*de Skolem*") dependen de las variables de los cuantificadores universales anteriores al cuantificador existencial que se está eliminando. En caso de no haber cuantificadores universales anteriores, la sustitución es por una constante (llamada "*de Skolem*").

[40] Para más detalles y ejemplos de estas formas normales cf. [Amor] página 71-88.

[41] Transformar a la forma normal prenex.

cuantificadores (prenex-cuant)[42], skolemizar (skol-$\exists$var/fsk) donde var es la variable existencial y fsk es una constante o función de Skolem. Así obtenemos FNSS($\neg\varphi$). Continuamos con: negar la FNSS($\neg\varphi$) anterior y obtener su forma Prenex, que en ese caso equivale a sólo introducir la negación ($\neg$intro). Así obtenemos FNSV(φ).

Las equivalencias lógicas las denotamos con "$\equiv$". Hay que recordar que los pasos de skolemización, a diferencia de los demás, **no** preservan equivalencia lógica. Como ilustración daremos un ejemplo del algoritmo para obtener la FNSV(φ) a partir de φ con las abreviaturas indicadas:

$$
\begin{array}{lr}
\varphi = [\exists y \forall x\, P(x,y) \wedge \neg\exists z \forall x \forall y\, Q(z,x,f(y))] & \\
\neg\varphi = \neg[\exists y \forall x\, P(x,y) \wedge \neg\exists z \forall x \forall y\, Q(z,x,f(y))] & \text{neg-}\varphi \\
\quad \equiv \forall y \exists x\, \neg P(x,y) \vee \exists z \forall x \forall y\, Q(z,x,f(y)) & \neg\text{intro} \\
\quad \equiv \forall v \exists w\, \neg P(w,v) \vee \exists z \forall x \forall y\, Q(z,x,f(y)) & \text{renom-var} \\
\quad \equiv \forall v \exists z \forall x \forall y \exists w[\neg P(w,v) \vee Q(z,x,f(y))] & \text{prenex-cuant} \\
FNP(\neg\varphi) = \forall v \exists z \forall x \forall y \exists w[\neg P(w,v) \vee Q(z,x,f(y))] & \\
Sk_1 = \forall v \forall x \forall y \exists w[\neg P(w,v) \vee Q(g(v),x,f(y))] & \text{skol-}\exists z/g(v) \\
Sk_2 = \forall v \forall x \forall y[\neg P(h(v,x,y),v) \vee Q(g(v),x,f(y))] & \text{skol-}\exists w/h(v,x,y) \\
FNSS(\neg\varphi)) = \forall v \forall x \forall y[\neg P(h(v,x,y),v) \vee Q(g(v),x,f(y))] & \\
\neg FNSS(\neg\varphi)) = \neg[\forall v \forall x \forall y[\neg P(h(v,x,y),v) \vee Q(g(v),x,f(y))]] & \text{neg} \\
FNP(\neg FNSS(\neg\varphi)) = \exists v \exists x \exists y[P(h(v,x,y),v) \wedge \neg Q(g(v),x,f(y))] & \neg\text{intro} \\
FNSV(\varphi) = \exists v \exists x \exists y[P(h(v,x,y),v) \wedge \neg Q(g(v),x,f(y))] &
\end{array}
$$

Presentaremos enseguida los teoremas semánticos de Skolem y de Herbrand, los cuales involucran formas normales de Skolem de validez y hacen explícitas algunas de las propiedades semánticas ya mencionadas, para estos tipos de formas de fórmulas.

La FNSV de una fórmula tiene la propiedad de que es implicada lógicamente por la fórmula; es decir, es verdadera siempre que la fórmula lo sea. Sin embargo el inverso no se cumple pues no son

[42] Hasta aquí, todas las fórmulas generadas son lógicamente equivalentes entre sí.

lógicamente equivalentes; es decir, puede ser que la FNSV de una fórmula sea verdadera pero que la fórmula sea falsa.

Una relación más débil que cumplen una fórmula y su correspondiente FNSV es que una es lógicamente válida si y sólo si la otra lo es. Dicho de otro modo, o las dos son lógicamente válidas o ninguna de las dos lo es. Esto aclara por qué la regla de inferencia SK: FNSV(φ)/φ, presentada como un ejemplo de regla de inferencia en la sección 2.2 del capítulo dos no es *buena*; es decir, no necesariamente lleva de verdad a verdad. Sin embargo sí es *regular*; es decir, lleva necesariamente de validez lógica a validez lógica. En la sección 5.2 del capítulo cinco hablaremos más de esta regla SK.

Las propiedades que acabamos de explicar están resumidas en el teorema de Skolem.

TEOREMA DE SKOLEM[43]

I) *Para cualquier fórmula* φ: $\models[\varphi \rightarrow \mathrm{FNSV}(\varphi)]$

II) *No para toda fórmula* φ $\models[\mathrm{FNSV}(\varphi) \rightarrow \varphi]$

III) *Para cualquier fórmula* φ: Si $\models \mathrm{FNSV}(\varphi)$ entonces $\models \varphi$

Es fácil ver que una consecuencia inmediata de I) es la siguiente:

IV) *Para cualquier fórmula* φ: Si $\models \varphi$ entonces $\models \mathrm{FNSV}(\varphi)$

Obsérvese que de las propiedades III y IV se sigue la equivalencia anunciada entre la validez lógica de φ y la validez lógica de FNSV(φ).

Llamamos *instancia de sustitución* de una fórmula al resultado de reemplazar todas las presencias de variables libres de la fórmula, por términos. Si los términos que sustituyen a las presencias libres de variables, son términos sin variables,[44] la instancia de sustitución se llama *cerrada*.

Veamos ahora el importante teorema de Herbrand, que relaciona la validez lógica de una fórmula existencial pura[45], con las instancias

[43] Cf. [Amor] páginas 85-86.

[44] A los términos sin variables les llamamos términos *cerrados*. Son las constantes, las funciones aplicadas a constantes, las funciones aplicadas a funciones aplicadas a constantes, etcétera.

[45] Una fórmula *existencial pura* es una fórmula en forma prenex que no tiene cuantificadores universales, por ejemplo, la FNSV de alguna fórmula.

cerradas de sustitución de la matriz de la fórmula. Es importante mencionar que una instancia *cerrada* de sustitución de una fórmula sin cuantificadores, es un enunciado sin cuantificadores y para los enunciados sin cuantificadores es efectivamente decidible si son lógicamente válidos o no, al igual que si son satisfacibles o no. Esto debe ser claro pues los enunciados sin cuantificadores son formas proposicionales, también llamadas fórmulas booleanas, para las cuales la lógica proposicional tiene métodos de decisión muy conocidos.

TEOREMA DE HERBRAND (Jaques Herbrand, 1928)

Si ψ *es una fórmula sin cuantificadores y con variables* $x_1,\ldots,x_k$ *entonces*:

$\models(\exists x_1\ldots\exists x_k\psi)$ *si y sólo si hay una sucesión finita* $\psi_1,\ldots,\psi_n$, *de instancias cerradas de sustitución de* ψ, *tal que* $\models(\psi_1\vee\ldots\vee\psi_n)$.

La prueba de este teorema está basada en el teorema de Compacidad (cf. [Amor] páginas 88-90). Para ilustrarlo veamos un ejemplo de aplicación del Teorema de Herbrand.

Sea $\varphi=\exists y\exists w[\neg P(c,y)\vee P(w,f(y))]$. Sabemos que φ es una fórmula lógicamente válida, es decir $\models\varphi$.[46]

Los símbolos no lógicos del lenguaje son: P, f, c. Algunos ejemplos de términos cerrados (sin variables) de ese lenguaje son: c, f(c), f(f(c)), etc.[47] Algunas instancias cerradas de sustitución de la matriz $\psi = [\neg P(c,y)\vee P(w,f(y))]$ de la fórmula φ, son:[48]

$\psi_1=[\neg P(c,c)\vee \mathbf{P(c,f(c))}]$

$\psi_2=[\neg P(c,c)\vee P(f(c),f(c))]$

$\psi_3=[\neg \mathbf{P(c,f(c))}\vee P(c,f(f(c)))]$

El teorema de Herbrand nos predice entonces que tiene que haber una sucesión *finita* de instancias cerradas de sustitución de la matriz, cuya disyunción es lógicamente válida. En cada una de las posibles disyunciones, la validez lógica es decidible por ser formas proposicionales. Veamos algunos casos.

---

[46] Se puede verificar semánticamente con todo rigor desde el metalenguaje, que efectivamente la fórmula $\exists y\exists w[\neg P(c,y)\vee P(w,f(y))]$ es lógicamente válida. No lo haremos aquí por razones de espacio.

[47] Nótese que hay una cantidad infinita de ellos.

[48] Nótese que también hay una cantidad infinita de ellos.

Entonces ¿ $\models \psi_1$? No. Si N_1 es la estructura de los números naturales con la interpretación: "*mayor o igual*", "*sucesor*", "*3*" para P, f, c, entonces $N_1 \not\models [\neg P(c,c) \vee P(c,f(c))]$.[49]

Entonces ¿ $\models(\psi_1 \vee \psi_2)$? No. Si N_2 es la estructura de los números naturales con la interpretación: "únicamente *3 relacionado con 3*"[50], "*sucesor*", "*3*" para P, f, c, respectivamente, entonces $N_2 \not\models [\neg P(c,c) \vee P(c,f(c))] \vee [\neg P(c,c) \vee P(f(c),f(c)))]$.

Entonces ¿ $\models(\psi_1 \vee \psi_2 \vee \psi_3)$? Sí. Sea *A* una estructura cualquiera para su lenguaje. Debe de ser obvio que: *A* es modelo de $P(c,f(c))$ o *A* es modelo de $\neg P(c,f(c))$, de donde *A* es modelo de $[P(c,f(c)) \vee \neg P(c,f(c))]$ y entonces *A* es modelo de $(\psi_1 \vee \psi_2 \vee \psi_3)$, por la forma que tienen tales fórmulas. En este ejemplo hemos comprobado que hay una sucesión de instancias ψ_1, ψ_2, ψ_3, tal que $\models(\psi_1 \vee \psi_2 \vee \psi_3)$.

A manera de resumen de los resultados semánticos vistos en esta última sección podemos aplicarlos de la siguiente manera: si φ es una fórmula lógicamente válida ($\models\varphi$), entonces por el teorema de Skolem, FNSV(φ) también es lógicamente válida y además es de la forma $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$ es decir, $\models(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$. El paso inverso, es decir, pasar de $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$=FNSV($\varphi$) a φ, también preserva validez lógica por el teorema de Skolem, parte III).

Ahora bien, si continuamos del paso anterior, donde FNSV(φ) = $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$ es lógicamente válida, entonces por el teorema de Herbrand tenemos que hay una sucesión finita de instancias cerradas de sustitución de ψ, digamos $\psi_1,\ldots,\psi_n$ tales que su disyunción es lógicamente válida, es decir:

$$\models(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n).$$

El paso inverso en este caso, es decir, pasar de $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ a $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$, también preserva validez lógica pues, más aún, preserva verdad, por la regla lógica conocida como "generalización

[49] La notación $N_1 \not\models [\neg P(c,c) \vee P(c,f(c))]$ abrevia que N_1 no es modelo de $[\neg P(c,c) \vee P(c,f(c))]$.

[50] Nos referimos a la relación binaria que únicamente tiene a la pareja ordenada (3,3).

existencial".[51] Es decir, si $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ es verdadera, entonces ψ_i es verdadera (para alguna i), y entonces por dicha regla aplicada k veces, $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$ es también verdadera, pues ψ_i es una instancia cerrada de sustitución de ψ.

Todos estos resultados semánticos los usaremos en la sección 5.2 del capítulo cinco, como parte de la prueba de tipo semántico del teorema de Correctud-Completud Extendido, usando el teorema de Compacidad.

Conclusiones

En este capítulo hablamos del teorema de Compacidad y de dos resultados semánticos importantes que se usarán también al igual que Compacidad, en el siguiente capítulo. En la primera sección dimos una breve historia de Compacidad, aclarando algunas imprecisiones de afirmaciones hechas al respecto, así como tratando de elucidar cómo surge su importancia, a pesar de que mucho tiempo fue considerado sólo como un corolario del teorema de Correctud-Completud. También comentamos el origen topológico del término compacidad y seguimos con la presentación de diversas formulaciones y diferentes formas de probar el teorema.

Terminamos con la presentación de dos teoremas semánticos conocidos: el primero es sobre las propiedades semánticas de las llamadas formas normales de Skolem de validez, al cual le llamamos teorema de Skolem y el segundo es el famoso teorema de Herbrand, cuya prueba se puede hacer directamente a partir del teorema de Compacidad. Todos estos resultados semánticos se usan de modo muy importante en el capítulo cinco.

[51] Por ejemplo de $P(c)$ pasar a $\exists x P(x)$.

CAPÍTULO CINCO

5. LA RELACIÓN ENTRE LOS DOS TEOREMAS

En este capítulo establecemos la relación de implicación entre los teoremas de Correctud-Completud Extendida y de Compacidad, ya presentados en los capítulos tres y cuatro respectivamente.

Primeramente presentamos el resultado muy conocido de que Correctud-Completud Extendida implica Compacidad de modo directo. En la segunda sección, damos el sistema axiomático anunciado desde el principio de este trabajo al que llamamos ***MA***, cuyo antecedente es el sistema ***S*** de Malitz que no satisface la forma extendida del teorema.

La presentación del sistema *MA* y la justificación de sus propiedades básicas hace uso de la mayoría de los resultados semánticos conocidos ya expuestos en el capítulo cuatro y de resultados nuevos obtenidos en capítulos anteriores. Finalmente, en la tercera y última sección damos la prueba de tipo semántico de que el sistema ***MA*** satisface Correctud-Completud Extendida, la cual es una demostración breve que utiliza las propiedades probadas en la segunda sección.

5.1 Correctud-Completud Extendida implica Compacidad.

El objetivo de esta sección es mostrar que si se supone el teorema de Correctud-Completud Extendido en cualquiera de sus dos versiones equivalentes (cf. sec.3.2 cap.3), se prueba de un modo directo el teorema de Compacidad. Esta implicación que presenta al teorema de Compacidad como corolario del teorema de Correctud-Completud Extendida, es muy conocida[1] y de ella daremos dos

[1] Cf. [Enderton] página 136, [Manzano] página 131, [Amor] página 105.

pruebas, correspondientes a las dos versiones de Correctud-Completud Extendida.

Teorema. *Si hay un sistema axiomático que cumple Correctud-Completud Extendida, entonces se prueba el teorema de Compacidad.*

Primera prueba

Supongamos que hay un sistema axiomático W, que cumple Correctud-Completud Extendida en la primera versión (cf. sec. 3.2); es decir, que para cualquier $\Sigma\cup\{\alpha\}$ conjunto de fórmulas

$$\Sigma \models \alpha \quad \text{si y sólo si} \quad \Sigma \vdash_W \alpha.$$

Supongamos que todo subconjunto finito $\Gamma\subseteq\Sigma$ tiene un modelo, entonces para todo subconjunto finito $\Gamma\subseteq\Sigma$, $\Gamma\not\models\exists x(x\neq x)$.[2] Entonces por Correctud extendida de W, para todo subconjunto finito $\Gamma\subseteq\Sigma$, $\Gamma\not\vdash_W\exists x(x\neq x)$. De aquí, por el lema de Finitud (primera forma) (cf. sec. 2.3), para Σ mismo, $\Sigma\not\vdash_W\exists x(x\neq x)$ y por Completud extendida de W, $\Sigma\not\models\exists x(x\neq x)$, de donde hay un modelo de Σ.[3] □

Segunda prueba

Supongamos que hay un sistema axiomático W, que cumple Correctud-Completud extendida en la segunda versión (cf. sec. 3.2), entonces para cualquier Σ conjunto de enunciados, Σ es $_W$-consistente si y sólo si Σ tiene un modelo.

Supongamos que todo subconjunto finito de Σ tiene un modelo; entonces por Correctud extendida de W, todo subconjunto finito de Σ es $_W$-consistente. De aquí, por el lema de Finitud (segunda forma) (cf. sec. 2.4), Σ mismo es $_W$-consistente, y por Completud extendida de W, Σ tiene un modelo. □

[2] Cf. sección 2.1 del capítulo dos, propiedad semántica e).

[3] Que además no es modelo de $\exists x(x\neq x)$.

5.2 Existencia de un sistema axiomático correcto y completo en forma extendida.

En esta sección definiremos un sistema axiomático al que llamaremos ***MA***, para el cual las derivaciones formales son precisamente las consecuencias lógicas, es decir, que satisface Correctud y Completud extendidas. Sea L un lenguaje de primer orden con igualdad. Suponemos sin pérdida de generalidad que hay una constante en L.[4]

Consideremos primero como antecedente, el sistema axiomático ***S*** dado por Jerome Malitz[5]:

Axiomas de *S*: Si $n \geq 1$, y $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ es una disyunción lógicamente válida de instancias cerradas de sustitución de alguna fórmula ψ sin cuantificadores, entonces el enunciado $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ es un axioma de *S*.

Reglas de inferencia de *S*:

a) A partir de $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)$ se puede obtener $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$, donde $m \geq 1$, ψ es una fórmula sin cuantificadores, y para toda i ($1 \leq i \leq m$), ψ_i es *instancia cerrada de sustitución de* ψ y $x_1, \ldots, x_k$ son todas las variables de ψ.[6] A esta regla le llamaremos EX.

b) A partir de FNSV(φ) se puede obtener φ, donde φ es una fórmula cualquiera y FNSV(φ) = FNP[$\neg$(FNSS($\neg\varphi$))][7] (Cf. sec.4.2 cap.4). A esta regla le llamaremos SK.

Este sistema ***S*** de Malitz satisface Correctud-Completud *restringida*. Es decir, para toda fórmula φ, se tiene que:

$$\vdash_S \varphi \qquad \text{si y sólo si} \qquad \models \varphi$$

Y sin embargo resulta que este sistema ***S*** no satisface ni Correctud ni Completud extendidas! Si bien lo que acabamos de afirmar lo justificaremos plenamente más adelante (tanto que satisface

---

[4] Si no la hay, se la agregamos. La necesidad de al menos una constante es para poder hablar de Formas Normales de Skolem.

[5] Cf. [Malitz] página 188.

[6] Obsérvese que necesariamente todas las variables son libres en ψ.

[7] FNP denota la Forma Normal Prenexa, cf. [Amor] página 71. FNSS denota la Forma Normal de Skolem para Satisfacción (cf. [Amor] página 79).

correctud-completud *restringida* como que no satisface ni correctud ni completud *extendidas*), por ahora lo que nos interesa decir es que si bien este sistema tiene las deficiencias mencionadas, resulta ser de modo tal que la prueba de su Correctud-Completud *restringida* es sumamente breve, elegante y de tipo semántico, pues se justifica con metateoremas y propiedades semánticas.

Nuestro objetivo principal en el desarrollo de este trabajo ha sido dar una extensión o modificación de este sistema de modo tal que cumpla Correctud-Completud *Extendida*, pero a la vez de modo tal que su prueba sea también breve, elegante y de tipo semántico en el mismo sentido de estar justificada con teoremas y propiedades semánticas. Esto es lo que haremos más adelante cuando definamos nuestro sistema y probemos que cumple lo que queremos.

Para probar que el sistema ***S*** de Malitz no satisface ni Correctud ni Completud *extendidas*, bastará con dar los contraejemplos correspondientes, para lo cual usaremos que cumple Correctud restringida:

Para el contraejemplo a la Correctud extendida, obsérvese que $P(c) \vdash_S \forall x P(x)$ pues la siguiente derivación en ***S***, lo muestra:

1. P(c)	Hipótesis
2. $\forall$xP(x)	SK 1, pues FNSV($\forall$xP(x)) = P(c)

Por otro lado, es claro que $P(c) \nvDash \forall x P(x)$. Así pues, ***S*** no cumple Correctud extendida; es decir, el sistema ***S*** deriva una fórmula a partir de otra, de la que no resulta ser consecuencia lógica! Aplicando el resultado metalógico principal (Corolario 1) del capítulo dos (cf. sec. 2.5), concluimos que el sistema ***S*** no cumple el Metateorema de la Deducción.

Para el contraejemplo a la Completud extendida, partimos de que es claro que $\forall x P(x) \vDash P(c)$. Sin embargo $\forall x P(x) \nvdash_S P(c)$ porque si $\forall x P(x) \vdash_S P(c)$ entonces habría una derivación de P(c) a partir de $\forall$xP(x) en ***S***, donde $\forall$xP(x) estaría justificada como hipótesis (no podría justificarse como teorema formal de ***S*** por Correctud restringida, pues no es lógicamente válida). Pero por la forma de la fórmula $\forall x P(x)$, no es posible haberle aplicado ninguna de las dos reglas de inferencia de ***S***, por lo que resulta una fórmula no usada; es decir, es irrelevante en la derivación. Entonces a dicha derivación le puedo quitar esa fórmula $\forall x P(x)$ y lo que queda es una prueba formal en ***S*** de P(c); es decir, $\vdash_S P(c)$. Pero esto es absurdo por la Correctud restringida de ***S***, pues P(c) no es lógicamente válida, es decir $\nvDash P(c)$. Así pues, ***S*** no satisface Completud extendida.

Una última consecuencia que podemos obtener de los resultados anteriores, es dar un ejemplo de un conjunto Σ que es consistente respecto a un sistema axiomático y a la vez es inconsistente respecto a otro sistema.[8] Obsérvese que la fórmula $[\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)]$ es lógicamente válida, de donde por la completud restringida de *S*, $\vdash_S [\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)]$.

Por otro lado, ya vimos unos párrafos atrás que $P(c) \vdash_S \forall x P(x)$. Consideremos ahora al sistema *S'* dado en la sección 3.3 del capítulo tres, que es el sistema que resulta del sistema *S* aumentado con la regla de MP. Entonces dado que todo lo que se prueba en *S* se prueba en *S'*,[9] es inmediato que $\vdash_{S'} [\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)]$ y $P(c) \vdash_{S'} \forall x P(x)$. Ahora consideremos el siguiente esquema de derivación[10] en *S'*:

1. $\neg P(a)$	Hipótesis
2. $\exists x \neg P(x)$	EX, 1.
3. $[\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)]$	Teorema formal de *S'*
4. $\neg \forall x P(x)$	MP 2, 3.

Esta derivación muestra que: $\neg P(a) \vdash_{S'} \neg \forall x P(x)$.

Ahora bien, si $\Sigma = \{P(c), \neg P(a)\}$, se tiene claramente que $\Sigma \vdash_{S'} \forall x P(x)$ y también $\Sigma \vdash_{S'} \neg \forall x P(x)$ de donde Σ es $_{S'}$-inconsistente.

Sin embargo $\Sigma = \{P(c), \neg P(a)\}$ es satisfacible, por ejemplo en el universo de los números naturales con la interpretación: "ser par", "2"

[8] Cf. sección 2.4 capítulo dos, donde se comentó que la consistencia de conjuntos de enunciados puede ser relativa al sistema axiomático.
[9] Puede darse exactamente la misma derivación.
[10] Para que fuera una derivación, bastaría sustituir el teorema formal por su prueba.

y "3", para los símbolos P, c y a, respectivamente (pues 2 es par y 3 no lo es). De aquí se sigue que cualquier sistema axiomático que satisfaga correctud-completud extendida, por ejemplo el sistema *MA* que veremos más adelante, cumple que Σ es $_{MA}$-consistente si y sólo si Σ es satisfacible.[11] Pero como efectivamente Σ es satisfacible, entonces Σ es $_{MA}$-consistente. En síntesis, $\Sigma=\{P(c),\neg P(a)\}$ es un conjunto $_{MA}$-consistente y $_{S}$-inconsistente.

El sistema que nosotros vamos a definir ahora es tanto una *extensión* como una *modificación* del sistema ***S*** de Malitz. La extensión consiste en que agregamos la regla de Modus Ponens (MP). Se conservan del sistema original el primer esquema de axioma al que denominaremos Ax y las dos reglas de inferencia que nosotros llamamos EX y SK. La modificación consiste en que nuestra definición del sistema axiomático incluye la definición de derivación *con restricciones en la aplicación de reglas*, en este caso, con una restricción en la aplicación de la regla SK. Más precisamente, el Sistema Axiomático ***MA*** para el lenguaje L de primer orden con igualdad, que definimos es el siguiente:

Definición. El sistema axiomático ***MA***:

i) ***Axiomas de MA***.

Ax) Si $n \geq 1$, y $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ es una disyunción lógicamente válida de instancias cerradas de sustitución de alguna fórmula ψ sin cuantificadores, entonces el enunciado $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ es axioma de *MA*.

Obsérvese que los axiomas de ***MA***, todos de la forma Ax), son efectivamente decidibles, pues las disyunciones de instancias cerradas de sustitución de una fórmula ψ sin cuantificadores, son enunciados sin cuantificadores, para los cuales hay un algoritmo para decidir si son lógicamente válidos o no.[12]

[11] Cf. Formulación 2 de Correctud-Completud Extendida, sección 3.2 capítulo tres.

[12] La razón es que los enunciados sin cuantificadores, son formas proposicionales y su validez lógica se decide proposicionalmente, por ejemplo con tablas de verdad, con árboles semánticos o con el algoritmo de Davis Putnam.

ii) ***Reglas de inferencia de MA***.

a) Regla Existencial, EX:

A partir de $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)$ se puede obtener $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$, donde $m \geq 1$, ψ es una fórmula sin cuantificadores, y para toda i $(1 \leq i \leq m)$, ψ_i es *instancia cerrada de sustitución de* ψ y $x_1, \ldots, x_k$ son todas las variables de ψ.

b) Regla de Skolem, SK:

A partir de FNSV(φ) se puede obtener φ, donde φ es una fórmula cualquiera y FNSV(φ) = FNP[$\neg$(FNSS($\neg\varphi$))][13]

c) Regla de Modus Ponens, MP:

A partir de α y de $(\alpha \rightarrow \beta)$ se puede obtener β. Donde α y β son fórmulas cualesquiera.

Obsérvese que las tres reglas de inferencia de ***MA*** son efectivamente decidibles como lo requiere nuestra definición de sistema axiomático (cf. sec. 2.3). En particular podemos mencionar que dada una fórmula cualquiera φ hay un algoritmo para obtener FNSV(φ), (cf. [Amor] páginas 79-85). Obsérvese también que MP y EX son reglas de inferencia *muy buenas* y SK es regla de inferencia *regular* que no es *buena*, en el sentido de la definición de la sección 2.2 del capítulo dos.

iii) ***Definición de derivación en MA***.

Si $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas de L, decimos que φ se deduce de Σ en ***MA***, denotado: $\Sigma \vdash_{MA} \varphi$ si y sólo si hay una lista finita $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de fórmulas, tal que $\varphi_n = \varphi$ y para cada i, $(1 \leq i \leq n)$, o bien φ_i es axioma de ***MA*** o $\varphi_i \in \Sigma$ (φ_i es hipótesis) o φ_i es consecuencia de una fórmula anterior de la lista por la regla EX o es consecuencia de dos fórmulas anteriores por la regla MP, o bien es consecuencia de una fórmula anterior por la regla SK **con la restricción siguiente**: *no se aplique a fórmulas de* Σ *o a fórmulas que dependan de fórmulas de*

[13] FNP denota la Forma Normal Prenexa, (cf.sec.4.2 cap.4). Cf. [Amor] página 71. FNSS denota la Forma Normal de Skolem para Satisfacción (cf. [Amor] página 79). Recordar que FNSV(φ) es una fórmula de la forma $(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$ donde ψ es una fórmula sin cuantificadores y $x_1, \ldots, x_k$ son todas las variables (libres) de ψ. Cf. sección 4.3, capítulo cuatro.

Σ. Esto significa que no se permite la aplicación de la regla SK a hipótesis ni a fórmulas que dependan de hipótesis.

Desde el punto de vista sintáctico no es necesario explicar el por qué de una regla o de una restricción en su aplicación. Sin embargo desde un punto de vista intuitivo o de la intención que se tiene, esta explicación podría darse para entender el por qué de una restricción. Para el caso que nos ocupa, la restricción a la aplicación de la regla SK se impone para prevenir el paso de una hipótesis que puede ser verdadera a una inferencia que puede ser falsa. Algo completamente similar sucede en la lógica modal con la regla de inferencia de *necesitación* (RN), que es la inferencia de: $\Box\varphi$ (φ es necesario) a partir de φ. Por ejemplo, en el libro de lógica modal de Chellas[14] se establece lo siguiente: Si $\vDash\varphi$ entonces $\vDash\Box\varphi$, pero $\nvDash[\varphi\rightarrow\Box\varphi]$; y en el artículo de lógica model de Orayen[15] se establece la *regla de necesidad* (RN) como: si φ es un teorema (del sistema modal) entonces puede derivarse sintácticamente que $\Box\varphi$ también lo es.

En forma análoga, en nuestro caso con la regla SK, la inferencia de φ a partir de FNSV(φ), cumple que: si $\vDash$FNSV(φ) entonces $\vDash\varphi$, pero $\nvDash$[FNSV(φ)$\rightarrow\varphi$] (cf. sec.4.3 cap.4). Así pues, la restricción de no aplicar esta regla a fórmulas que no sean lógicamente válidas o que no sean teoremas,[16] evita perder la correctud (extendida) de la derivación a partir de hipótesis.

Para probar que el sistema ***S*** de Malitz satisface Correctud-Completud restringida, haremos la siguiente observación. La misma prueba de la Correctud-Completud restringida del sistema ***MA*** que daremos adelante (Lema 1), justifica también la del sistema ***S*** por las siguientes razones: todos los axiomas de ***S*** son axiomas de ***MA***, las dos reglas de inferencia de ***S*** son reglas de inferencia de ***MA*** y la restricción al uso de la regla SK no aplica en este caso restringido pues no hay hipótesis, es decir $\Sigma = \varnothing$.

[14] Cf. [Chellas] páginas 7, 14.
[15] Cf. [Orayen] página 306.
[16] Cf. [Gamut] vol 2, página 28: "La restricción en esta regla consiste en que no haya hipótesis en la prueba. Que esta restricción es necesaria es obvio a partir del hecho de que en caso contrario, podríamos siempre derivar ($\varphi\rightarrow\Box\varphi$)".

Por otro lado, los axiomas de ***MA*** usados en la prueba de completud restringida son sólo los de ***S*** porque son los mismos y la regla MP no se usa.

Lema 1. *MA satisface Correctud-Completud Restringida.*
Para toda fórmula φ, se tiene que:

$$\vdash_{MA}\varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \models\varphi$$

$\Rightarrow$) Supongamos que $\vdash_{MA}\varphi$ y sea $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ una prueba formal tal que $\varphi_n = \varphi$. Por inducción matemática sobre n, veremos que $\models\varphi_i$ para toda i, ($1\leq i \leq n$). Para el caso i=n, tendremos que $\models\varphi$.

i) Si φ_i es un axioma de ***MA***, entonces $\models\varphi_i$. Esto se debe a la definición de axioma del sistema.

ii) Si φ_i es consecuencia por alguna regla de inferencia, de fórmulas anteriores y éstas son lógicamente válidas por hipótesis inductiva, entonces φ_i es lógicamente válida, pues las tres reglas de ***MA*** preservan validez lógica. De hecho las reglas EX y MP preservan verdad y por tanto validez lógica, y la regla SK aunque no preserva verdad,[17] sí preserva validez lógica, es decir: si $\models$FNSV(φ) entonces $\models\varphi$,[18] (cf. sec.4.3 capítulo cuatro).

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\models\varphi$. Entonces, por el teorema de Skolem[19] (cf. sec.4.3 cap.4), tenemos que $\models$ FNSV(φ). Ahora bien, FNSV(φ)= $(\exists x_1\ldots \exists x_k\,\psi)$, donde ψ es una fórmula sin cuantificadores, de aquí que $\models(\exists x_1\ldots\exists x_k\psi)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_1,\ldots, x_k$ son todas las variables de ψ.[20] Ahora, como $\models(\exists x_1\ldots\exists x_k\,\psi)$ y ψ no tiene cuantificadores y $x_1,\ldots, x_k$ son todas las

[17] Es posible que $\not\models$ [FNSV(φ) $\rightarrow\varphi$]. Por ejemplo, si $\varphi = \forall x P(x)$, entonces FNSV($\forall x P(x)$) = P(c) y claramente $\not\models$[P(c)$\rightarrow$($\forall x P(x)$)]. Cf. sección 4.3, capítulo cuatro.

[18] Teorema de Skolem: Para cualquier fórmula φ, si $\models$FNSV(φ) entonces $\models\varphi$ (cf. sec. 4.3 cap.4). Cf. [Amor] página 85.

[19] Teorema de Skolem: Para cualquier fórmula φ, $\models$ [$\varphi\rightarrow$FNSV(φ)] (cf. sec. 4.3 cap.4). Cf.[Amor] página 85.

[20] Si x es una variable libre de una fórmula α y $\models\alpha$, entonces también $\models(\exists x\alpha)$.

variables de ψ, por el Teorema de Herbrand[21] (cf. sec.4.3 cap.4), se sigue que hay una sucesión finita $\psi_1,\ldots,\psi_n$, de instancias cerradas de sustitución de ψ, tal que $\models(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$.

Ahora bien, por definición, $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ es un axioma de ***MA***, de donde la siguiente lista de tres fórmulas es una prueba formal de φ en el sistema ***MA***:

1. $(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ Axioma A1)
2. $(\exists x_1 \ldots \exists x_k\, \psi)$ Regla EX a 1.
3. φ Regla SK a 2, pues $FNSV(\varphi) = (\exists x_1 \ldots \exists x_k\, \psi)$

Por lo tanto, $\vdash_{MA} \varphi$.
De aquí que se satisface Correctud-Completud Restringida para el sistema ***MA***. □

Hay que notar que en esta demostración se da la relación fundamental entre la semántica y el sistema formal, ya que se muestra que en éste último se puede llevar a cabo (sin hacerlo) una derivación de ese tipo para cualquier fórmula lógicamente válida. Sin embargo aunque el esquema de lista de tres fórmulas es un esquema de prueba formal, podemos decir que no estamos "trabajando dentro" del sistema, pues las justificaciones están hechas desde el metalenguaje y son semánticas: son el teorema de Herbrand y el teorema de Skolem.

Antes de presentar el segundo lema, que expresa una propiedad fundamental del sistema, la de validar el MTD, queremos recordar los resultados metalógicos del capítulo dos (cf. sec. 2.5) pues fueron los que nos hicieron ver la necesidad de tener este Metateorema para nuestro sistema si queríamos la correctud extendida para él; ya que sin él, aunque tuviera correctud restringida, completud extendida y modus ponens, no tendría correctud extendida.

[21] Teorema de Herbrand: Si ψ es una fórmula sin cuantificadores y con variables $x_1,\ldots, x_k$ entonces: $\models(\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)$ si y sólo si hay una sucesión finita $\psi_1,\ldots, \psi_n$, de instancias cerradas de sustitución de ψ, tal que $\models(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ (cf. sec.4.3 cap.4). Este teorema se demuestra con el teorema de Compacidad. Cf. [Amor] pág 88.

Lema 2. *Metateorema de la Deducción para el sistema MA*.

Para todo $\Sigma \cup \{\alpha, \beta\}$ conjunto de fórmulas:

$$\text{Si} \quad \Sigma, \alpha \vdash_{MA} \beta \quad \text{entonces} \quad \Sigma \vdash_{MA} (\alpha \to \beta)$$

Prueba.

Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ($\varphi_n = \beta$) una derivación de β a partir de $\Sigma \cup \{\alpha\}$ en ***MA***. Demostraremos por inducción matemática sobre n, que para todo $i \leq n$, se cumple $\Sigma \vdash_{MA} (\alpha \to \varphi_i)$. Para el caso $i = n$, tenemos el resultado. Supongamos el resultado para todo $j < i \leq n$: Hipótesis Inductiva (HI). Para φ_i hay seis casos posibles: φ_i es un axioma de ***MA***, $\varphi_i \in \Sigma$, $\varphi_i = \alpha$, φ_i es consecuencia por EX, φ_i es consecuencia por MP, φ_i es consecuencia por SK.

Caso 1. Si φ_i es un axioma de *MA*, entonces φ_i es lógicamente válida. Entonces también $(\alpha \to \varphi_i)$ es lógicamente válida y por completud restringida (Lema 1) $\vdash_{MA} (\alpha \to \varphi_i)$ y de aquí por la propiedad sintáctica a)[22] tenemos que $\Sigma \vdash_{MA} (\alpha \to \varphi_i)$.

Caso 2. Si $\varphi_i \in \Sigma$ (hipótesis de Σ) entonces la fórmula $[\varphi_i \to (\alpha \to \varphi_i)]$ es lógicamente válida y por completud restringida (Lema 1) $\vdash_{MA} [\varphi_i \to (\alpha \to \varphi_i)]$. Ahora como el sistema tiene MP esto es equivalente al inverso del MTD por lo que se satisface $\varphi_i \vdash_{MA} (\alpha \to \varphi_i)$. De aquí como $\varphi_i \in \Sigma$, por la propiedad sintáctica a), $\Sigma \vdash_{MA} (\alpha \to \varphi_i)$.

Caso 3. Si $\varphi_i = \alpha$, entonces $(\alpha \to \alpha)$ es lógicamente válida y por completud restringida (Lema 1) $\vdash_{MA} (\alpha \to \alpha)$. Pero $\varphi_i = \alpha$, entonces $\vdash_{MA} (\alpha \to \varphi_i)$ y por lo tanto $\Sigma \vdash_{MA} (\alpha \to \varphi_i)$.

Caso 4. Si φ_i es consecuencia por EX de alguna fórmula φ_j con $j<i$ entonces $\varphi_i = (\exists x_1 \ldots \exists x_k\, \psi)$ donde ψ es fórmula sin cuantificadores, $x_1, \ldots, x_k$ son todas las variables de ψ, y $\varphi_j = (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)$ donde cada ψ_r $(1 \leq r \leq n)$ es una instancia cerrada de sustitución de ψ. Como $j<i$, por

[22] Monotonía de la derivación. Cf. sección 2.3 capítulo dos.

HI tenemos que $\Sigma \vdash_{MA}(\alpha \to \varphi_j)$, es decir tenemos que $\Sigma \vdash_{MA}(\alpha \to (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n))$ **(#1)**

Es un resultado semántico fácil de ver que la fórmula $[(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n) \to (\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)]$ es lógicamente válida, es decir, $\models [(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n) \to (\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)]$,[23] y de aquí, por la completud restringida (Lema 1) tenemos $\vdash_{MA}[(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n) \to (\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)]$ **(#2)**

Es también un resultado semántico que la fórmula:

$(\alpha \to (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)) \to [[(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n) \to (\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)] \to (\alpha \to (\exists x_1 \ldots \exists xk \psi))]$

es lógicamente válida, pues es una tautología de la forma:

$$(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$$

de aquí, por la completud restringida (Lema 1) tenemos que:

$\vdash_{MA}(\alpha \to (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n)) \to [[(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n) \to (\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)] \to (\alpha \to (\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi))]$

Ahora de este teorema, por MP con (#**1**) obtenemos:

$\Sigma \vdash_{MA}[[(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n) \to (\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi)] \to (\alpha \to (\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi))]$

y ahora de aquí, por MP con (#**2**) obtenemos:

$\Sigma \vdash_{MA}(\alpha \to (\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi))$, es decir $\Sigma \vdash_{MA} (\alpha \to \varphi_i)$.

Caso 5. Si φ_i es consecuencia por MP de φ_r y $\varphi_m = (\varphi_r \to \varphi_i)$ con r, m<i, entonces por HI tenemos $\Sigma \vdash_{MA} (\alpha \to \varphi_r)$* y $\Sigma \vdash_{MA}(\alpha \to (\varphi_r \to \varphi_i)$**. Obsérvese que la fórmula $[(\alpha \to (\varphi_r \to \varphi_i)] \to [(\alpha \to \varphi_r) \to (\alpha \to \varphi_i)]$ es lógicamente válida pues es una tautología de la forma $[(A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$. Entonces por la completud restringida (Lema 1), $\vdash_{MA}[(\alpha \to (\varphi_r \to \varphi_i)] \to [(\alpha \to \varphi_r) \to (\alpha \to \varphi_i)]$. De aquí por MP con ** tenemos que $\Sigma \vdash_{MA}[(\alpha \to \varphi_r) \to (\alpha \to \varphi_i)]$ y por MP con * tenemos $\Sigma \vdash_{MA}(\alpha \to \varphi_i)$.

Caso 6. Si φ_i es consecuencia por SK de φ_k con k<i, entonces φ_k=FNSV(φ_i) y además sabemos que φ_k **no es ni** hipótesis de Σ **ni depende de** hipótesis de Σ. Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, la lista que representa la derivación de φ_k; de esta lista considero la sublista que tiene a las fórmulas φ_j con j<k, que se usaron en la derivación original para obtener φ_k, junto con φ_k al final, y **únicamente** a esas fórmulas.

[23] Cf. [Amor] páginas 8-10. Un ejemplo particular es $\models [P(c,a) \to \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2)]$.

Debe ser claro que ninguna fórmula de esa sublista está en Σ (ninguna es hipótesis), pues φ_k no está en Σ y si alguna φ_j (con $j<k$) estuviera en Σ, como se usó para obtener φ_k, entonces tendríamos tanto que φ_k dependería de ella como que sería fórmula de Σ lo cual es imposible ya que contradiría que φ_k no depende de hipótesis de Σ. Así pues, se tiene que por definición esa sublista es una prueba formal de φ_k; es decir $\vdash_{MA} \varphi_k$, o sea que φ_k es un teorema formal.

Como $\varphi_k = \text{FNSV}(\varphi_i)$, tenemos que $\vdash_{MA} \text{FNSV}(\varphi_i)$. De aquí, por la regla SK (pues $\varphi_k = \text{FNSV}(\varphi_i)$ no está en Σ ni depende de Σ) tenemos que $\vdash_{MA} \varphi_i$ y como también $\vdash_{MA}[\varphi_i \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi_i)]$,[24] por MP tenemos que $\vdash_{MA} (\alpha \rightarrow \varphi_i)$ y por lo tanto $\Sigma \vdash_{MA} (\alpha \rightarrow \varphi_i)$.

Esto concluye la prueba por inducción matemática del Metateorema de la Deducción para el sistema *MA*. □

En esta demostración se usa de modo fundamental, en el caso seis, la restricción particular dependiente del contexto, a la aplicación de la regla SK en las derivaciones del sistema *MA*, lo cual forma parte de nuestra definición de este sistema en particular, así como la posibilidad de restricción a la aplicación de reglas, forma parte de nuestra definición de sistema axiomático en general.[25]

5.3 Compacidad implica Correctud-Completud Extendida.

Ahora sí, daremos una demostración de tipo semántico, basada en los teoremas de Compacidad, de Skolem y de Herbrand[26], de que hay un sistema axiomático para el cual las derivaciones formales son precisamente las consecuencias lógicas. Esto es, que satisface Correctud-Completud Extendida y la prueba de ello es breve y de tipo semántico, usando los dos lemas ya demostrados, el teorema de Compacidad y las propiedades semánticas y sintácticas elementales.

[24] Por la completud restringida (Lema 1), pues $\models[\varphi_i \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi_i)]$.
[25] Cf. sec. 2.3 capítulo dos.
[26] Cf. [Amor] páginas 85-86. (Cf. sección 4.3, capítulo cuatro).

Teorema. Hay un sistema axiomático ***MA***, tal que para cualquier conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$ satisface:

$$\Sigma \vdash_{MA} \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \Sigma \vDash \varphi$$

Prueba: Sea ***MA*** el sistema que acabamos de dar en la sección 5.2 y sea $\Sigma \cup \{\varphi\}$ cualquier conjunto de fórmulas. Entonces:

i) $\Sigma \vdash_{MA} \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash \varphi$

$\Sigma \vdash_{MA} \varphi$	
$\Rightarrow$ hay $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito, tal que $\Gamma \vdash_{MA} \varphi$	Lema de Finitud[27]
$\Rightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_{MA} \varphi$	Sea $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$
$\Rightarrow \vdash_{MA} (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \varphi) \ldots))$	Lema 2: MTD n veces
$\Rightarrow \vDash (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \varphi) \ldots))$	Lema 1: Correctud-Restr
$\Rightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \varphi$	Propiedades semánticas[28]
$\Rightarrow$ hay un $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito, tal que $\Gamma \vDash \varphi$	Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \Gamma$
$\Rightarrow \Sigma \vDash \varphi$	Propiedades semánticas[29]

ii) $\Sigma \vDash \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash_{MA} \varphi$

$\Sigma \vDash \varphi$	
$\Rightarrow$ hay un $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito, tal que $\Gamma \vDash \varphi$	Teorema de Compacidad
$\Rightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \varphi$	Sea $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$
$\Rightarrow \vDash (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \varphi) \ldots))$	Propiedades semánticas[30]
$\Rightarrow \vdash_{MA} (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \varphi) \ldots))$	Lema 1: Completud-Restr
$\Rightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_{MA} \varphi$	MP **n** veces
$\Rightarrow$ hay $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito, tal que $\Gamma \vdash_{MA} \varphi$	Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \Gamma$
$\Rightarrow \Sigma \vdash_{MA} \varphi$	Propiedades sintácticas[31]

[27] Propiedad sintáctica c), cf. sección 2.3, capítulo dos.
[28] Propiedad semántica c), n veces, cf. sección 2.1, capítulo dos.
[29] Propiedad semántica a), cf. sección 2.1, capítulo dos.
[30] Propiedad semántica c), n veces, cf. sección 2.1, capítulo dos.
[31] Propiedad sintáctica a), cf. sección 2.3, capítulo dos.

Conclusiones

En este capítulo establecimos la relación de implicación entre los dos teoremas, de Correctud-Completud Extendido y de Compacidad, y contiene los resultados matemáticos principales de esta tesis. En la primera sección dimos dos pruebas muy conocidas de que el teorema de Correctud-Completud Extendido implica directamente al teorema de Compacidad. Cada prueba corresponde a una de las dos formulaciones dadas de Correctud-Completud Extendida.

En la segunda sección definimos nuestro sistema axiomático ***MA*** y probamos dos lemas. El primero indica que: ***MA*** satisface Correctud-Completud Restringida, para cuya prueba de tipo semántico, usamos los teoremas de Skolem y de Herbrand. El segundo afirma que: ***MA*** satisface el Metateorema de la Deducción, este se prueba por inducción matemática sobre la longitud de la derivación dada. En esta prueba fue esencial tener la restricción en la aplicación de la regla SK, así como tener la regla de MP.

Finalmente en la tercera sección se presentó la prueba directa de la Correctud-Completud Extendida del sistema ***MA***, usando el teorema de Compacidad y los dos lemas de la sección anterior. Hacemos notar que en esta última prueba, la parte de "ida" o de la correctud extendida resulta redundante, pues esta implicación se sigue directamente del Metateorema de la Deducción para ***MA*** (Lema 2) y del "regreso" de la proposición metalógica principal de la sección 2.5 del capítulo dos. Sin embargo la presentamos aquí de este modo para que el resultado quede completo con la prueba directa de las dos implicaciones.

CAPÍTULO SEIS

6. CONCLUSIONES

En esta tesis, hemos desarrollado un análisis profundo de las relaciones entre los teoremas de Completud y Compacidad en la lógica clásica de primer orden con igualdad. Consideramos al teorema de Correctud-Completud Extendido como el resultado fundamental de la lógica clásica de primer orden desde el punto de vista sintáctico y al teorema de Compacidad como el resultado fundamental de dicha lógica, desde el punto de vista semántico.

Creemos que hemos probado lo que nos propusimos; es decir, dar una prueba de tipo semántico y directa del teorema de Correctud-Completud Extendido, a partir del teorema de Compacidad y otros resultados semánticos que son los teoremas de Skolem y de Herbrand. Esta prueba establece de hecho una equivalencia entre estos dos importantes teoremas.

6.1 Conclusiones metalógicas

Hicimos la distinción tradicional entre semántica y sintaxis y presentamos tanto las nociones y propiedades semánticas básicas, como las nociones y propiedades sintácticas básicas. A partir de esto analizamos la definición tradicional de derivación formal y propusimos una alternativa. Justificamos por qué nuestras definiciones de derivación formal y de sistema axiomático, incluyendo esta última la definición de derivación formal, son más convenientes, si la intención es adecuar la noción de derivación con la de consecuencia lógica, de un modo más fino.

Propusimos una distinción entre los conceptos semánticos de correctud y completud *extendida* por un lado y de correctud y completud *restringida* por el otro, lo cual nos permitió formular con rigor el teorema de Correctud-Completud Extendido a través de la presentación de diversas versiones y formulaciones que se han dado de él, particularmente las originales de Gödel y la de Henkin, así como nuestra versión en dos formulaciones equivalentes y finalmente las relaciones entre todas ellas. De nuestra versión destacamos que lo que afirma el teorema, es la *existencia* de un sistema axiomático que cumple las propiedades de correctud y completud extendida. No es una afirmación acerca de un sistema particular, sino sobre la *existencia* de *un* sistema con esas propiedades.

Destacamos que la noción de consistencia de un conjunto de enunciados, es relativa para cada sistema axiomático, explicamos qué afirma el Metateorema de la Deducción para un sistema axiomático y lo enunciamos con toda precisión. Presentamos y demostramos los resultados principales del capítulo dos, que son una de las aportaciones originales y que son los resultados metalógicos que muestran al Metateorema de la Deducción como una condición metalógica necesaria y suficiente para la correctud extendida del sistema.

6.2 Conclusiones lógico-matemáticas

En el capítulo cuatro presentamos el teorema de Compacidad y dos resultados semánticos importantes, los teoremas de Skolem y de Herbrand, que se usan a la par que Compacidad, en la prueba de los resultados del capítulo cinco.

Dimos una breve historia de Compacidad, aclarando algunas imprecisiones de afirmaciones hechas al respecto, con el fin de elucidar cómo surge su importancia a partir de sus aplicaciones matemáticas en la construcción de modelos, a pesar de que mucho tiempo fue considerado sólo como un corolario del teorema de Correctud-Completud Extendida. También comentamos el origen topológico del término compacidad e hicimos la presentación de diferentes formulaciones y diferentes formas de probar el teorema.

Terminamos con la presentación de los dos teoremas semánticos: el primer teorema es sobre las propiedades semánticas de las llamadas formas normales de Skolem de validez, al cual le llamamos *teorema de Skolem*, y el segundo es el famoso *teorema de Herbrand*, cuya prueba se puede hacer directamente a partir del teorema de Compacidad. Todos estos resultados semánticos se usan de modo muy importante en el capítulo cinco.

Nos propusimos el problema de establecer una prueba directa y de tipo semántico del teorema de Correctud-Completud Extendido de Gödel para la lógica clásica; es decir, de un modo breve y sin trabajar dentro de ningún sistema formal, como corolario del teorema de Compacidad y de los otros resultados semánticos para la misma lógica. Esto lo presentamos en el capítulo cinco, el cual contiene los resultados matemáticos principales de esta tesis.

Establecimos la relación de implicación entre los dos teoremas: Correctud-Completud Extendido y Compacidad. Propusimos nuestro sistema axiomático ***MA*** y probamos dos lemas acerca de él: el primero asegura que ***MA*** satisface Correctud-Completud Restringida (para cuya prueba justificada semánticamente, usamos los teoremas de Skolem y de Herbrand). El segundo muestra que ***MA*** satisface el Metateorema de la Deducción (este se prueba en el metalenguaje, por inducción matemática sobre la longitud de una derivación dada).

Finalmente se presenta la prueba directa de la Correctud-Completud Extendida del sistema *MA*, usando el teorema de Compacidad y los dos lemas mencionados.

Este resultado nos lleva a concluir que los teoremas de Correctud-Completud Extendido y de Compacidad son de hecho equivalentes y el sistema axiomático involucrado tipo *MA*, debe cumplir necesariamente con el MTD.

6.3 Conclusiones filosóficas

En esta última sección quiero hacer una reflexión final sobre los dos resultados principales de esta tesis. El primero es el resultado metalógico de la sección 2.5 del capítulo dos y el segundo es el resultado lógico matemático de las secciones 5.2 y 5.3 del capítulo cinco.

El primero de ellos es un resultado que relaciona la propiedad de correctud extendida de un sistema axiomático, con la propiedad de que el sistema cumpla el Metateorema de la Deducción (MTD).

Este resultado que ofrecemos, afirma que si un sistema satisface correctud *restringida* y completud *extendida*, entonces para que cumpla correctud extendida es *necesario y suficiente* que cumpla el MTD.[1] Nos parece interesante este resultado pues la primera propiedad (correctud extendida) relaciona la semántica con la sintaxis y la segunda propiedad (MTD) es puramente sintáctica. Esto nos presenta al MTD como una propiedad sintáctica esencial y necesaria para un sistema axiomático con el que se pretenda recuperar adecuadamente la semántica.

En particular en nuestro caso este resultado fue la clave para poder definir de un modo semántico nuestro sistema axiomático de manera que cumpliera tanto la completud extendida como la correctud extendida. Así pues el hecho de que necesariamente tenía que cumplir el MTD nos llevo a hacer los ajustes, restricciones y extensiones necesarias al sistema de Malitz[2], y así lograr con nuestro sistema lo que ese sistema no cumplía.

El segundo resultado consiste en haber definido el sistema axiomático ***MA*** de modo tal que cumpliera Correctud-Completud Extendida y que la prueba de ello fuese directa y semántica; es decir, basada en el teorema de Compacidad y en los dos lemas, el primero de los cuales está basado en los teoremas de Skolem y de Herbrand (cuyas pruebas también son semánticas) y el segundo de

[1] Cf. Corolario 4, sección 2.5 capítulo dos.
[2] Jerome Malitz. Cf. [Malitz] Part III, página 187.

ellos muestra metateóricamente, que nuestro sistema cumple el MTD. La definición de nuestro sistema ***MA*** resulta *ad hoc* desde el punto de vista semántico, pues sus axiomas y reglas de inferencia no están motivadas sintácticamente, ni por una relación sintáctica-semántica, sino que responden simplemente al hecho de *invertir* un cierto proceso semántico.

Las reflexiones anteriores parecen mostrar que el poder de las ideas semánticas puede ser capaz de justificar resultados sintácticos. A estas propiedades semánticas les corresponde un sistema sintáctico no específico y muestran una fertilidad e independencia de lo sintáctico, que comúnmente no se hace explícita, por los métodos de prueba más sintácticos que normalmente usamos.

A continuación damos la reflexión heurística que nos llevo a la definición del sistema ***MA*** y la justificación de los pasos correspondientes. Este procedimiento heurístico consiste en lo siguiente, para cualquier fórmula φ y cualquier conjunto de fórmulas Σ:

Suponiendo cierta la consecuencia lógica de φ a partir de Σ, existe una sucesión *finita* de fórmulas de Σ, digamos $\alpha_1,\ldots\alpha_n$, tales que φ es consecuencia lógica a partir de ellas (teorema de Compacidad). Entonces la implicación de ellas a la fórmula φ es una fórmula de forma implicativa, lógicamente válida **A** (donde $\mathbf{A}=(\alpha_1\rightarrow(\alpha_2\rightarrow\ldots\rightarrow(\alpha_n\rightarrow\varphi)\ldots))$, para la cual se genera algorítmicamente una forma normal especial (de validez) **B** (donde **B**=FNSV(**A**)), que también es lógicamente válida (teorema de Skolem) y a partir de ella, existe una fórmula proposicional cerrada **C** (disyunción de instancias cerradas de sustitución de la matriz de **B**) que también es lógicamente válida (teorema de Herbrand), y cuya validez lógica es decidible proposicionalmente (pues es cerrada y sin cuantificadores).

Ahora bien, si simplemente **invertimos** el proceso semántico descrito, pongamos como *axioma* a cualquier fórmula proposicional cerrada de la forma de **C**, con la condición de que sea lógicamente válida (los axiomas deben ser decidibles y estos lo son por su forma y porque su validez lógica es decidible).

Pongamos al paso de **C** a **B** como *primera regla de inferencia* (regla Existencial, EX), (la aplicación de las reglas debe ser decidible y esta lo es pues es una versión de la conocida regla de *instanciación existencial* que es decidible). Ahora pongamos el paso de **B** a **A**, como *segunda regla de inferencia* (regla de Skolem, SK), (esta es decidible pues la transformación de una fórmula a su forma normal mencionada es algorítmica; es decir, hay un algoritmo para pasar de **A** a FNSV(**A**) y por lo tanto para decidir si una de ellas es la FNSV correspondiente a la otra).

Hecho lo anterior, tenemos en forma inmediata, simplemente por la definición de teorema formal, que la fórmula implicativa **A** se puede obtener como un teorema formal. No vamos a hacerlo, sólo nos interesa que sabemos que es un teorema formal y que se puede obtener como tal, en el sistema que estamos proponiendo. Ahora pongamos MP como *tercera regla de inferencia*, y tendremos la derivación de φ a partir de la sucesión finita de fórmulas de Σ, aplicando la regla tantas veces como fórmulas de la sucesión finita. De aquí por lo tanto, tendremos la derivación formal de φ a partir de Σ (por la monotonía de la relación sintáctica de derivación).

La descripción previa garantiza que para todas las consecuencias lógicas existen derivaciones formales (completud extendida). Sin embargo, es necesario "controlar" las derivaciones posibles para tener la importante propiedad complementaria: que todas las derivaciones formales sean consecuencias lógicas (correctud extendida). Para esto, resulta *necesario* que el sistema que estamos definiendo satisfaga el Metateorema de la Deducción. Este fue un resultado clave para poder dar nuestro sistema, de modo que satisfaga tanto la completud extendida como la correctud extendida.

Así pues, para que nuestro sistema cumpliera eso, debimos *restringir la aplicación* de la segunda regla (el paso de **B** a **A** o regla de Skolem, SK) de modo que no se aplique a fórmulas que sean hipótesis o que dependan de hipótesis (para probar el MTD). Con estas modificaciones, el MTD se satisface y por tanto la correctud extendida se satisface, por los resultados metalógicos del capítulo dos. Esto lo podemos ver también en forma directa del modo siguiente:

Suponiendo que existe una derivación formal de φ a partir de Σ, entonces existe una sucesión *finita* de fórmulas de Σ, digamos $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, tales que φ es formalmente derivable a partir de ellas (Lema de Finitud). Entonces la implicación de ellas a φ es una fórmula de forma implicativa, digamos **A** (donde $A=(\alpha_1\rightarrow(\alpha_2\rightarrow\ldots\rightarrow(\alpha_n\rightarrow\varphi)\ldots)))$ que se puede obtener como un teorema formal con la aplicación de **n** veces el MTD.

Ahora bien, un teorema formal (sin hipótesis) es obtenido a partir de los axiomas por aplicación de reglas de inferencia. Es un hecho muy fácilmente verificable que todos los axiomas de ***MA*** son lógicamente válidos (lo son por definición!). También es un hecho que las tres reglas de inferencia preservan validez lógica. Para la regla EX es conocido que incluso preserva verdad; para la regla SK, preserva validez lógica por el teorema de Skolem (aunque no preserva verdad), y para MP es obvio que preserva verdad, por lo que la fórmula implicativa A es lógicamente válida.

De aquí, por propiedades semánticas elementales, se sigue que φ es consecuencia lógica de $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, y por la monotonía de la relación de consecuencia lógica se tiene que φ es consecuencia lógica de Σ.

Todo lo anterior, garantiza que todas las derivaciones formales en ***MA*** son consecuencias lógicas (correctud extendida).

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

[Aliseda] ***Reseña de [Amor]***, *Atocha Aliseda, en Crítica, Revista Hispanoamericana de Filosofía Vol.XXXI, No.93 (diciembre 1999): 117-124.*

[Amor] ***Compacidad en Lógica de Primer Orden y su relación con el teorema de Completud,*** *José Alfredo Amor, Coord. Serv. Ed., Facultad de Ciencias, UNAM, 1999.*

[Barwise] ***Handbook of Mathematical Logic, Part A Model Theory,*** *Jon Barwise, North Holland, 1977.*

[Bell & Slomson] ***Models and ultraproducts: an introduction,*** *John Bell & Alan Slomson, North Holland, 1969.*

[Boolos] ***Logic, Logic, and Logic,*** *George Boolos, Harvard University Press, 1998.*

[Bridge] ***Beginning Model Theory*** *the Completeness theorem and some consequences, Jane Bridge, Oxford University Press, 1977.*

[Chellas] ***Modal Logic an introduction,*** *Brian F. Chellas, Cambridge University Press, Cambridge 1980.*

[Church] ***Introduction to Mathematical Logic, Part I,*** *Alonzo Church, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1944.*

[Dawson a] ***Logical Dilemmas, the life and work of Kurt Gödel***, *John W. Dawson, A K Peters Ltd, 1997.*

[Dawson b] ***The Compactness of First Order Logic: from Gödel to Lindström***, *John W. Dawson, History and Philosophy of Logic, vol. 14 (no.1), 1993, pp.15-37.*

[Enderton] ***A Mathematical Introduction to Logic***, *Herbert B. Enderton, Academic Press, New York, 1972.* Traducción al español de Pablo Rosenblueth: ***Una introducción matemática a la lógica***, *Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, 1987.*

[Fagin, Halpern & Vardi] ***What is an inference rule?***, *Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern and Moshe Y. Vardi, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 57, N.3, 1992, pp. 1018-1045.*

[Feferman] ***Kurt Gödel Collected Works, Vol.I***, *Solomon Feferman Ed., Oxford University Press, 1986.*

[Gamut] ***Logic, Language and Meaning Vol. II*** *Intensional Logic and Logical Grammar, L.T.F. Gamut, The University of Chicago Press, 1991.*

[Gödel 1929] ***On the completeness of the calculus of logic,*** *en Kurt Gödel Collected Works, Vol.I, Oxford University Press, 1986. Ed. Solomon Feferman, p. 61-101.*

[Gödel 1930 a] ***The completeness of the axioms of the functional calculus of logic,*** *en Kurt Gödel Collected Works, Vol.I, Oxford University Press, 1986. Ed. Solomon Feferman, p. 103-123.*

[Gödel 1930 b] ***La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico funcional,*** *en Kurt Gödel Obras completas, Alianza Universidad, 1981. Ed. Jesús Mosterín, p. 20-34.*

[Gödel 1930 c] ***The completeness of the axioms of the functional calculus of logic***, *Kurt Gödel, en From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879-1931, Harvard University Press, 1967, p. 582-591.*

[Gómez-Torrente a] ***Review***, *Mario Gómez-Torrente, en Isis, vol. 89 (no.2), 1998, pp.356-357.*

[Gómez-Torrente b] ***Letter***, *Mario Gómez-Torrente, en Isis, vol. 90 (n.1), 1999, pp. 96-97.*

[Heijenoort van] ***From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879-1931***, *Jean van Heijenoort, Harvard University Press, 1967.*

[Heijenoort van] ***El desarrollo de la teoría de la cuantificación***, *Jean van Heijenoort, IIF-UNAM, 1975.*

[Henkin] ***The completeness of the first-order functional calculus***, *Leon Henkin, The Journal of Simbolic Logic, Vol.14, No.3, 1949, (pp. 159-166).*

[Henkin & Mostowski] ***Review***, *Leon Henkin & Andrzej Mostowski, Journal of Symbolic Logic Vol.24, 1959, pp.55-57.*

[Hilbert & Ackermann 1928] ***Grundzüge der Theoretischen logik***, *David Hilbert & Wilhelm Ackermann, Berlin, Springer 1928.* Traducción al inglés: ***Principles of Mathematical Logic***, *Chelsea Pub. Co., 1950.*

[Kleene] ***Introduction to Metamathematics***, *Stephen Cole Kleene, D. Van Nostrand, 1950.*

[Jané] ***Lógica de orden superior***, *Ignacio Jané, en Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Dir. Proy: Manuel Reyes Mate, IF del C.S.I.C, IIF, CIF, Editorial Trotta, 1995, pp.105-128.*

[Keisler] ***Fundamentals of Model Theory***, *H. Jerome Keisler, en Handbook of Mathematical Logic, Part A Model Theory, North Holland, 1977, pp. 47-103.*

[Lindström] ***On extensions of elementary logic***, *Per Lindström, Theoria 35, 1969, pp. 3-11.*

[Mal'cev] ***The Metamathematics of Algebraic Systems: Collected Papers 1936-1967***, *Anatolii Ivanovic Mal'cev, North Holland, 1971.*

[Malitz] ***Introduction to Mathematical Logic, Part III Model Theory***, *Jerome Malitz, Springer-Verlag, 1979.*

[Manzano] ***Teoría de Modelos,*** *María Manzano, Alianza Editorial, Madrid, 1989.*

[Mendelson] ***Introduction to Mathematical Logic***, *Elliott Mendelson, Fourth edition, Chapman & Hall, 1997.*

[Mosterín] ***Kurt Gödel Obras Completas,*** *Jesús Mosterín, Alianza Editorial, 1981. Ed. Jesús Mosterín.*

[Orayen] ***Lógica Modal***, *Raúl Orayen, en Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Dir. Proy.: Manuel Reyes Mate, IF del C.S.I.C, IIF, CIF, Editorial Trotta, Madrid, 1995, pp. 289-322.*

[Post] ***Introduction to a general theory of elementary propositions, 1921***, *Emil Post, en From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879-1931, Harvard University Press, 1967 (264-283).*

[Real Academia Española] ***Diccionario de la lengua española***, *vigésima primera edición, Editorial Espasa Calpe, Madrid, 1992.*

[Torres] ***Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica, la filosofía matemática de David Hilbert y Kurt Gödel.*** *Carlos Torres Alcaraz, Tesis de Doctorado en Filosofía, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, 2001.*

[Whitehead & Russell] ***Principia Mathematica***, *Alfred N. Whitehead & Bertrand Russell, Cambridge University Press, 1964.*

ÍNDICE ANALÍTICO