

23

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**"RESULTADOS Y APLICACIONES DE LA
CONJETURA DE MALDACENA"**

T E S I S

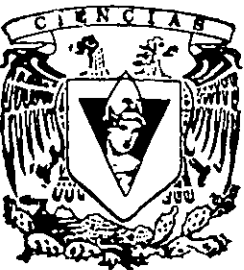
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

GUSTAVO NIZ QUEVEDO

293022



DIRECTOR DE TESIS: DR. *ESTUDIOS* DE LA MACORRA PETERSSON



**FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Resultados y Aplicaciones de la Conjetura de Maldacena"

realizado por Gustavo Niz Quevedo

con número de cuenta 9653404-1, pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DR. AXEL DE LA MACORRA PETERSSON

Propietario DR. RODOLFO PATRICIO MARTINEZ Y ROMERO

Propietario DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

Suplente DR. MANUEL TORRES LABANSAT

Suplente DR. DANIEL EDUARDO SUDARSKY SAIONZ

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLOSTEIN MENACHIS



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Resultados y Aplicaciones de la Conjetura de Maldacena.

Gustavo Niz Quevedo

10 de Enero de 2001

Agradecimientos

Deseo expresar mi más amplio agradecimiento al Director de esta tesis, el Dr. Axel de la Macorra, quien además de ofrecerme este interesante tema de trabajo y ser un gran amigo, me motivó en todo momento para seguir aprendiendo sobre la riqueza de la teoría de cuerdas.

A sí mismo, quiero agradecer a los organizadores y expositores de las escuelas: Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics Latin American School on Strings 2000, y The Fourth Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics "Membranes-2000"; las cuales me ayudaron mucho en el entendimiento de algunos aspectos básicos, y otros no tan básicos, de la teoría de cuerdas.

Por último doy mi más cordial agradecimiento a todo aquel, tanto pariente como amigo, que me ayudó a lo largo del proyecto de tesis.

Índice General

Introducción	1
1 El Confinamiento y el Problema U(1)	11
1.1 Introducción a la Teoría de Campos	11
1.2 El Problema U(1)	15
1.3 El Confinamiento	19
2 Teoría de Cuerdas / Teoría M	25
2.1 Cuerdas	25
2.2 Branas	31
2.2.1 La Acción de Dirac-Born-Infeld	33
2.2.2 Geometría en la Presencia de D p-branas	35
2.3 Dualidad y Teoría M	36
3 Conjetura de Maldacena	41
3.1 Simetría Conforme	41
3.2 Espacio de Anti De Sitter	42
3.3 Conjetura de Maldacena	49
3.3.1 Evidencias de la Conjetura	54
3.3.2 Definición Matemática de la Conjetura	58
3.3.3 Implicaciones de la Conjetura	60

4	Aplicaciones de la Correspondencia AdS / Teorías de Campo	63
4.1	Correspondencia: Teoría M en $AdS_7 \times S^4 \rightarrow$ Yang Mills	63
4.2	El Problema $U(1)$	67
4.3	El Confinamiento	71
4.3.1	Bucle de Wilson	71
4.3.2	Funciones de Correlación	76
4.4	Resultados Cuantitativos	83
<hr/>		
	Conclusiones	85
	Apéndice A: Resumen de Fórmulas	89

Introducción

A lo largo de la historia de la física, y de otras ciencias, se ha buscado el unificar teorías, esto es, el sintetizar dos modelos de la naturaleza en uno solo, que inclusive tiende ser más general y por ende, predice y explica más efectos que las teorías que lo constituyen por separado. Tal es el caso de la unificación de la electricidad y el magnetismo, llevado al cabo por Maxwell y sus famosas ecuaciones del campo electromagnético en el siglo XIX. En la actualidad, los dos pilares de la física moderna son la Teoría de la Mecánica Cuántica y la Teoría General de la Relatividad. Sin embargo, su unificación no ha sido, ni es todavía, del todo clara.

La física en el siglo veinte ha tenido un gran desarrollo, pero sobre todo en el área de las partículas elementales y de las altas energías; de donde conocemos la existencia de cuatro fuerzas en la naturaleza: la gravitacional, la electromagnética, la fuerte, que es la causante de adherir protones y neutrones en los núcleos atómicos; y por último, la fuerza débil, que es responsable del decaimiento beta. La primera está descrita por la teoría de la relatividad general, mientras que las otras tres son interacciones descritas en el formalismo de la mecánica cuántica. Uno de estos grandes avances del siglo XX ha sido el modelo estándar, el cual describe en una teoría tres de las cuatro fuerzas, dejando fuera únicamente a la interacción gravitacional. La teoría del modelo estándar consta de tres familias de cuarks[†] ($[u, d], [c, s], [b, t]$), tres de leptones ($[e, \nu_e], [\mu, \nu_\mu], [\tau, \nu_\tau]$) y un grupo de norma $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, de donde provienen todos los mediadores de las interacciones electromagnética, fuerte y débil. Por un lado, las predicciones del modelo estándar han sido corroboradas de manera muy precisa por los experimentos; y por otro

[†]Los cuarks son las partículas constituyentes de los hadrones, que a su vez se dividen en los mesones (formados por un cuarc q y un anticuarc \bar{q}) y en los bariones (formados por tres cuarks qqq). En los primeros se encuentran los piones ($\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^- = \bar{u}d$ y $\pi^0 = (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$), y en los últimos se encuentran el protón ($p = uud$) y el neutrón ($n = udd$).

lado, si uno trata de pensar en este modelo como un candidato para la teoría unificadora de las cuatro fuerzas es posible darse cuenta que deja muchas preguntas abiertas y sin explicación. El que existan muchos parámetros libres (del orden de 22) dentro del modelo estándar, aunado con preguntas como: ¿por qué existen tres familias de quarks y leptones?, ¿cómo es que únicamente hay cuatro fuerzas en la naturaleza?, o bien, preguntas más fundamentales como: ¿por qué el espacio-tiempo que vemos es cuatridimensional?; descartan por completo al modelo estándar como la teoría "final". Otro gran problema es que la fuerza gravitacional no se puede tratar como el resto de las fuerzas del modelo estándar, dado que al proponerla como una teoría cuántica resultan divergencias incontrolables.

La fuerza gravitacional que siente una electrón y un protón en el núcleo es alrededor de 10^{-40} veces más débil que la fuerza electromagnética entre ambas partículas. Por lo tanto, el efecto de la fuerza gravitacional en la física de partículas subatómicas es prácticamente despreciable. Sin embargo, si las masas del electrón y el protón fuesen del orden de la masa de Planck,

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}; \quad (1)$$

o bien, a escalas equivalentes a la longitud de Planck,

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}; \quad (2)$$

los efectos gravitacionales tendrían el mismo orden de magnitud que las otras tres interacciones. Como vemos, estas escalas o energías, son inalcanzables con la tecnología de hoy en día. Inclusive, los mejores aceleradores de partículas del mundo trabajan con energías del orden de 10^3 GeV. Por lo tanto, si una teoría trata de unificar a las cuatro fuerzas primero tiene que ser consistente, lo cual implica ya una gran restricción; y la comprobación experimental vendrá después y de manera indirecta.

Aunque la mecánica cuántica y la relatividad general son dos teorías completamente incompatibles, al día de hoy existe una teoría consistente que contiene a ambas, y ésta es la teoría de cuerdas. Este modelo surge en el año de 1968 como una teoría para explicar únicamente la fuerza fuerte, sin embargo, al surgir la teoría de QCD (Quantum Chromodynamics por sus siglas en inglés) como una explicación de la interacción fuerte a mediados de la década de los setenta, la teoría de cuerdas fue olvidada. No es sino hasta

los años ochenta cuando la idea de cuerdas fue retomada, pero ahora con un sentido distinto: el de una teoría unificadora de todas las fuerzas.

En la teoría de cuerdas los elementos fundamentales son objetos unidimensionales. De esta manera, las cuerdas barren áreas en el espacio-tiempo, pero sin ser objetos rígidos, dado que inclusive pueden enrollarse para formar cuerdas cerradas. A su vez, las cuerdas tienen una ecuación de onda asociada, y cuyos modos de vibración representan a las diversas partículas elementales. La teoría también predice la existencia de una partícula sin masa y con spin 2 (el gravitón)[†], y por esto se dice que la teoría de cuerdas contiene de manera intrínseca a la gravedad. Por otro lado, las interacciones entre cuerdas dejan de ser puntuales, como en los diagramas de Feynman en teoría de campos, y pasan a ser superficies de interacción, como se muestra en la figura (1). Otra característica de la

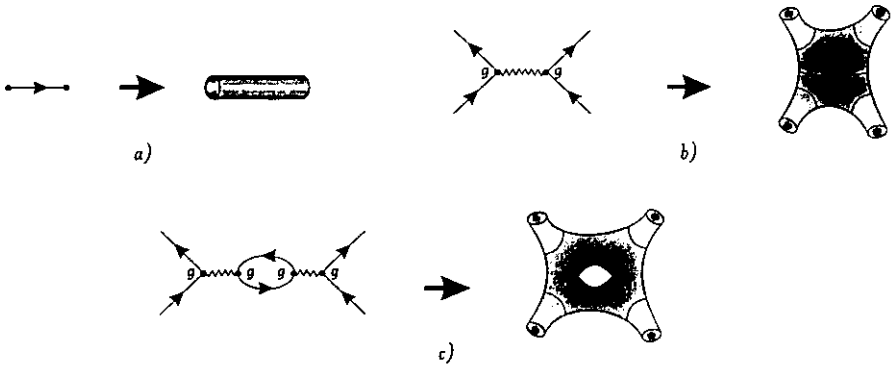


Figura 1: Diagramas de Feynman donde las partículas son substituidas por objetos unidimensionales llamados cuerdas. En a) se muestra una partícula; en b) la interacción simple entre dos partículas mediada por un bosón; y c) la interacción anterior con la creación de un par partícula-antipartícula durante el proceso.

teoría es que la dimensión crítica D del espacio-tiempo, donde las anomalías se cancelan dando una teoría cuántica consistente, es de $D = 26$ para la cuerda bosónica, y de $D = 10$ para la cuerda supersimétrica (también llamada supercuerda). En principio esto sonaría muy extraño y parecería que las cuerdas, o supercuerdas, no puede describir el mundo de

[†]Aunque existen cinco diferentes teorías de cuerdas, el gravitón está presente en el espectro de las cinco.

4 dimensiones en que vivimos. Sin embargo, la idea de más de cuatro dimensiones puede tener una interpretación real: estas dimensiones extra pueden ser tan pequeñas que no las veamos. Por ejemplo, si tenemos una placa metálica de varios metros de largo, por algunos de ancho y con muy poco espesor, veremos un objeto tridimensional siempre que la distancia a la placa sea de pocos metros. En cambio, si la distancia a la placa es relativamente grande, el objeto que veremos a simple vista parecerá ser bidimensional; y si uno se alejara aún más, llegará el momento en que la placa metálica se observará como una línea recta, es decir, como un objeto unidimensional. Esta idea sugiere que quizá las otras 6 dimensiones extra de la supercuerda (o 22 de la cuerda bósónica) sean tan pequeñas que no son perceptibles para las escalas que si conocemos. Dentro de la teoría de cuerdas, al encoger estas dimensiones se dice que uno compactifica el espacio, y el tamaño típico de estas dimensiones compactificadas es la longitud de Planck l_p (ver ecuación (2)), lo cual asegura que son indetectables a bajas energías. Otra posibilidad sería que las partículas elementales y las fuerzas de norma estén únicamente contenidas dentro de un subespacio de 4 dimensiones del espacio total.

Existen varios espacios de 6 (o 22 para la cuerda bosónica) dimensiones que pueden servir como espacios compactificados, y aunque muchos de ellos son equivalentes, todavía no se tiene un catalogo de los mismos. En este sentido, la teoría de cuerdas contiene muchos espacios de seis dimensiones que son solución, y aunque todavía no es claro cómo es que debemos escoger sólo uno de ellos, si podemos afirmar que al elegir uno, la teoría describirá todas sus propiedades en términos de un sólo parámetro libre. Esto es, la teoría de cuerdas responde a cuestionamientos tales como: por qué hay cuatro fuerzas, y con que intensidad; por qué hay 6 quarks y 6 leptones, o bien, por qué es tan pequeña la constante cosmológica; pero siempre y cuando escojamos el espacio adecuado.

Existen cinco teorías distintas de cuerdas, dependiendo de si son abiertas, cerradas, de los grupos de norma que contienen, y de las condiciones a la frontera de sus soluciones. Las cuerdas del tipo I son abiertas, mientras que los otros cuatro son cuerdas cerradas, donde encontramos a las cuerdas del tipo IIA y IIB. Las otras dos cuerdas cerradas son del tipo heterótica, es decir, que contienen una cuerda izquierda bósónica (con dimensión $D = 26$) y una supercuerda (con $D = 10$) como cuerda derecha. La diferencia de dimensiones en estas cuerdas se puede ver como un espacio interno, y que da origen a el grupo de norma $SO(32)$, o bien, al grupo $E_8 \times E_8$.

A su vez, en la teoría existen otros objetos más generales, esto es, de más dimensiones

que las cuerdas y que son llamados p-branas, donde la p es la dimensión espacial de los mismos. Existen p-branas llamadas solitónicas y D p-branas. Éstas últimas son objetos p-dimensionales donde las cuerdas empiezan o/y terminan con condiciones de frontera de Dirichlet. La existencia de D p-branas permite incorporar grupos de norma en subespacios de las teorías de cuerdas cerradas tipo IIA y IIB (que originalmente no tienen fuerzas de norma), y que son indispensables si queremos describir las interacciones del modelo estándar. Por otro lado, las p-branas juegan un importante papel en la conexión de las diferentes teorías de cuerdas mediante las llamadas simetrías S y T dual. Estas simetrías de dualidad, a grandes rasgos, son simetrías que nos señalan que dos teorías de cuerdas compactificadas sobre círculos (u otros espacios más complicados) con radios distintos son equivalentes, o bien, que teorías con constante de acoplamiento g fuerte ($g \gg 1$) son duales, o equivalentes, a teorías de cuerdas con acoplamiento débil ($g \ll 1$). Estas ideas de que las cinco diferentes teorías están conectadas por las simetrías de dualidad, al igual que otros resultados de equivalencia sobre espacios de compactificación más complicados, nos llevan a suponer que quizá todo sea parte de una teoría más general, a la que se ha denominado teoría M. Por último, cabe señalar que aunque todavía no se conoce a ciencia cierta todas las características de las teorías de cuerdas, actualmente es el camino más promisorio para la unificación de las cuatro fuerzas de la naturaleza.

En los últimos años una nueva revolución ha tomado cabida en la teoría de cuerdas. Este cambio, iniciado con el trabajo de Maldacena en 1997 [24], hace de la teoría de cuerdas algo más tangible, puesto que relaciona la teoría de cuerdas en 10 dimensiones (o la teoría M en 11 dimensiones) con teorías de campos en 4 dimensiones. En el trabajo original de Maldacena se propone la dualidad o equivalencia entre dos teorías: la teoría de cuerdas del tipo IIB (en el límite de bajas energías, o también conocido como supergravedad del tipo IIB) sobre cierto espacio de compactificación; con la teoría de $\mathcal{N}=4$ Super Yang Mills en 4 dimensiones. El espacio de compactificación de la teoría de cuerdas es un producto cartesiano entre una esfera unitaria de 5 dimensiones S^5 y un espacio Anti De Sitter de 5 dimensiones AdS_5 , que es el espacio solución de la ecuación de Einstein sin tensor de energía-momento y con constante cosmológica Λ negativa. De manera más explícita, la conjetura de Maldacena señala que un conjunto de N D 3-branas en la teoría de supergravedad IIB sobre un espacio de compactificación $AdS_5 \times S^5$; es equivalente a la teoría de campos con cuatro supersimetrías, o mejor conocida como $\mathcal{N}=4$ Super Yang Mills, y que tiene un grupo de norma $U(N)$. Un modo de entender la equivalencia es

mediante las siguientes dos descripciones. En la primera descripción, tenemos a las D 3-branas descritas por la llamada acción de Dirac-Born-Infeld. Bajo este modelo, las D 3-branas describen un subespacio de Minkowski de (3+1) dimensiones en un espacio (9+1) dimensional. Dado que tenemos cuerdas cerradas, y cuerdas abiertas cuyos extremos terminan sobre las D 3-branas, existen tres posibles tipos de excitaciones: las referentes a las cuerdas cerradas en el espacio sin branas (que son descritos por la acción de cuerdas IIB), los modos de las cuerdas abiertas sobre las D 3-branas (que se describen mediante la acción de Dirac-Born-Infeld) y las interacciones entre ambos sistemas. Sin embargo, bajo el límite de bajas energías³, los dos primeros tipos de excitaciones se desacoplan, es decir, el término de interacción desaparece. Por lo tanto, en el límite de bajas energías terminamos con dos sistemas desacoplados, que son: gravitones en 9+1 dimensiones y Super Yang Mills en 3+1 dimensiones.

En una segunda descripción, podemos ver a las branas como objetos con una cierta carga dentro de la teoría de cuerdas IIB. Estos objetos deforman el espacio tiempo y la métrica que describen es similar a la métrica de Schwarzschild. La peculiaridad del espacio que describe esta métrica es que tiene una garganta en la posición donde se encuentran las branas, y además es asintóticamente plano. De esta manera, si nos encontramos en una pequeña vecindad de las branas (i.e. en la garganta) esta métrica corresponde a un espacio de Anti De Sitter de 5 dimensiones junto con una esfera unitaria de 5 dimensiones. En esta segunda descripción, también se puede decir que tenemos dos teorías desacopladas (i.e. que no existe interacción alguna entre las dos teorías) en el límite de bajas energías: por un lado hay supergravedad en un espacio plano muy lejos de las branas, es decir fuera de la garganta, y por otro lado tenemos supergravedad en el espacio $AdS_5 \times S^5$. Ahora bien, dado que en ambas descripciones lo que se representa son a las N D 3-branas, podemos hacer una identificación de equivalencia entre las teorías desacopladas en el límite de bajas energías. Por un lado tenemos supergravedad en ambas descripciones en 9+1 dimensiones planas, y por otro lado, tenemos la equivalencia de los otros dos sistemas restantes: la teoría de supergravedad sobre el espacio $AdS_5 \times S^5$, y la teoría de Super Yang Mills $\mathcal{N}=4$ en 4 dimensiones. Ahora bien, dado que todos los modos de la cuerda sobreviven en la garganta aun después de tomar el límite de bajas energías, es posible extender esta relación y conjeturar que la teoría de cuerdas IIB sobre un espacio $AdS_5 \times S^5$ es equivalente a la teoría de Super Yang Mills $\mathcal{N}=4$.

³El límite de bajas energías en la teoría de cuerdas corresponde a tomar $\alpha' \rightarrow 0$, donde α' es el único parámetro libre de la teoría de cuerdas

Dentro de la Conjetura, existe un parámetro que relaciona los diferentes límites de validez de la misma, y éste es el llamado $\lambda \sim g_{YM}^2 N$ (donde N es el número de branas en la teoría de cuerdas IIA, o bien, el número de colores del grupo de norma en la teoría de Super Yang Mills; y g_{YM} es la constante de acoplamiento de Yang Mills). Si este parámetro λ es grande (con N también grande), podemos confiar en la teoría de supergravedad[¶], dado que entra en el régimen perturbativo. Aunque este resultado no parece del todo intuitivo, surge de pedir que la curvatura del espacio-tiempo no sea tan grande comparada con las escalas de cuerdas, y de esta manera evitar los posibles efectos cuánticos de dimensiones compactas. Por otro lado, bajo este límite la teoría de Yang Mills está fuertemente acoplada; por lo que la equivalencia es muy útil, dado que podemos realizar cálculos en la teoría de supergravedad y después interpretarlos como soluciones en la teoría de Yang Mills fuertemente acoplada. Por lo tanto, tenemos que la Conjetura describe la relación entre dos teorías que cuando una está fuertemente acoplada, la otra lo está débilmente, y viceversa.

Aunque esta conjetura no se ha demostrado, existen varias pruebas que apuntan en su favor. Una de estas evidencias es que las simetrías globales y las supercargas de ambas teorías son exactamente las mismas. Otra de las pruebas es que se ha verificado, para ciertos casos, es la equivalencia en resultados de los valores de expectación de funciones de correlación calculados en Super Yang Mills y en la teoría de supergravedad.

Otro par de teorías duales bajo este contexto, que fue propuesto por Maldacena [24] y desarrollado posteriormente por Witten [25], es el de la teoría M con 5-branas, y la teoría de Yang Mills en 4 dimensiones. Hay que apuntar el hecho de que en este caso, la teoría de Yang Mills ya no es supersimétrica y está fuertemente acoplada, lo cual es preferente dado que hoy en día en los aceleradores de partículas no se han visto partículas supersimétricas; y el que la fuerza esté fuertemente acoplada nos permite explicar el régimen no perturbativo de la teoría de campos (QCD). Ahora bien, la denominada teoría M no se conoce por completo, sin embargo, se sabe que al compactificar su límite de bajas energías (supergravedad en 11 dimensiones) sobre un círculo obtenemos las cuerdas del tipo IIA. Por último, en esta correspondencia de teorías, la compactificación de la teoría M (en 11 dimensiones) es sobre el espacio $AdS_7 \times S^4$, a diferencia del caso anterior donde era sobre el espacio $AdS_5 \times S^5$.

[¶]Podemos confiar en supergravedad cuando la curvatura del espacio sea mucho mayor que la escala de la cuerda, para evitar correcciones cuánticas.

El objetivo de este trabajo es mostrar, con resultados cuantitativos, la solución a dos dilemas de la teoría de campos: el problema $U(1)$, y el problema del confinamiento de cuarks y gluones; utilizando la Conjetura de Maldacena. Ahora tratemos de entender primero cuáles son estos problemas en teoría de campos. Para empezar, el lagrangiano del modelo estándar tiene simetrías globales aproximadas, y que son exactas cuando las masas de los cuarks son cero o iguales (sin embargo, sabemos que las masas son distintas y ninguna es cero). Aun así, si sólo tomamos a los cuarks más ligeros (u y d) la simetría $SU(2)_D \times SU(2)_I \times U(1)_B \times U(1)_A$ es una buena aproximación. Una de las predicciones de esta simetría es que las partículas (mesones y hadrones) no tengan una quiralidad bien definida; en contra posición con los resultados experimentales, en donde algunas partículas si son izquierdas o derechas. Esto nos lleva a la suposición de que la simetría esta rota. Cuando una simetría global y continua se rompe espontáneamente, el teorema de Goldstone predice la aparición de nuevas partículas escalares sin masa, llamadas bosones de Goldstone. De este rompimiento espontáneo, surgen cuatro bosones que teóricamente no tendrían masa, tres saldrían del rompimiento de la simetría $SU(2)_D \times SU(2)_I \rightarrow SU(2)$, y otra más del rompimiento de la simetría $U(1)_A$. Sin embargo, al incluir las masas reales de los dos cuarks más ligeros, los bosones adquieren una masa distinta de cero. Tres de los cuatro bosones de Goldstone equivalen a los piones π^\pm y π^0 . Al otro pseudobosón no se le ha encontrado una partícula experimental, o al menos no con la masa que debería^{||}, y esto es lo que se conoce como el Problema $U(1)$. Este problema se resuelve al ver que además de la asimetría provocada por la diferencia de masas, hay una anomalía que depende de un término topológico; y cuyas soluciones no triviales son conocidas como instantones (solitones en 3+1 dimensiones espacio-temporales). De esta manera, la existencia de instantones corrige la masa del pseudo bosón de Goldstone, y el problema queda resuelto en principio. Desde luego, nos gustaría poder calcular esta corrección.

El segundo problema, el confinamiento, se resume en explicar y dar resultados cuantitativos de la masa de los hadrones, que como se sabe no está únicamente dada por la suma de las masas de sus constituyentes (cuarks), sino también por la energía de interacción de los mismos. Por ejemplo, en el caso del pion más, su masa ($m_{\pi^+} \simeq 140$ MeV.) es mucho mayor que la suma de los cuarks que lo constituyen ($m_u + m_{\bar{d}} \simeq 10$ MeV.); y

^{||}Existe una partícula llamada η' con los mismos números cuánticos que el pseudobosón de Goldstone pero con una masa mucho mayor (950 MeV) a la esperada, que debe ser menor a 200 MeV.

por lo tanto, la mayor parte de su masa es producto de la interacción entre el cuarc u y el anticuarc d . En este sentido, los experimentos señalan que los cuarcs y, en principio también los gluones, presentan un confinamiento, o una fuerza que hace imposible su separación. Inclusive, no se han podido ver cuarcs aislados, dado que siempre están en grupos de tres cuarcs formando hadrones (protones p , neutrones n , lambdas Λ , etc.), o en grupos de un cuarc y un anticuarc formando mesones (piones π , kaones K , etc.), es decir, siempre se les ve en conjuntos de partículas con color neutro. Cuando uno trata de separarlos y tiene la energía que cree necesaria para llevar al cabo su separación, se crea un par de cuarc-anticuarc del vacío y tenemos al final dos pares de cuarcs, como se puede ver en la figura (2).

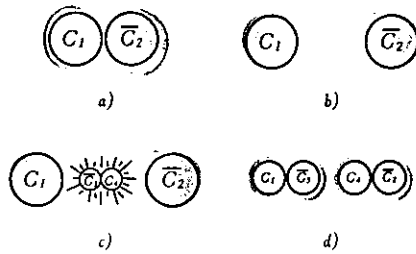


Figura 2: La separación de un mesón (cuarc-anticuarc) a) es imposible, debido a que al incrementar la energía para tratar de separarlos b), se crea un par cuarc-anticuarc c), y se termina con dos mesones d).

Como solución al problema del confinamiento uno esperaría encontrar que la energía entre estas partículas con color aumente con la distancia de separación entre las mismas. Existen diversos trabajos en QCD sobre el confinamiento, pero nuestro trabajo plantea la posibilidad de resolverlo mediante la teoría de cuerdas con la Conjetura de Maldacena.

Habiendo planteado los dos problemas a tratar, veremos cómo es que la Conjetura de Maldacena ayuda a resolver dichos dilemas. Para empezar, el problema $U(1)$ es resuelto al calcular explícitamente el instantón del término topológico antes mencionado. Para ello, se utiliza la idea de la Conjetura de que todo valor de expectación de una función de correlación calculada en supergravedad sobre el espacio $AdS_7 \times S^4$ tiene que ser equivalente a su contraparte, es decir, a una función de correlación pero ahora en

la teoría de Yang Mills. De esta manera, el término topológico puede ser calculado de manera completa en supergravedad y dada la equivalencia, este resultado es el mismo en la teoría de Yang Mills. El segundo problema, el confinamiento, es resuelto en base a dos caminos distintos: mediante el mismo procedimiento que para el problema $U(1)$, o bien, mediante el cálculo de la energía a un bucle de Wilson. En el primer método, plantea la idea de calcular la energía entre un cuarc y un anticuarc (un mesón) mediante la acción de la cuerda, y para después determinar la energía de confinamiento. El resultado de este cálculo apunta al hecho de que la energía es proporcional a la distancia (i.e. la fuerza es constante como función de la distancia), lo cual se espera de un fenómeno como el del confinamiento. El segundo método para el cálculo del confinamiento, contempla la idea de calcular en supergravedad una función de correlación de dos puntos que contenga únicamente al término de interacción entre cuarcs; pero a diferencia del problema $U(1)$ que es calculado a una energía propia de la teoría de cuerdas, en este caso la escala de energías corresponde a la escala de QCD (alrededor de 200 MeV). Por lo tanto, este camino conlleva a la extensión de la Conjetura de Maldacena a todo el espectro de energías y no sólo a la escala de compactificación de cuerdas.

Por último daremos una breve explicación de la organización de este trabajo. El capítulo 1 está enfocado a la compresión en teoría de campos del problema $U(1)$ y del confinamiento. El capítulo 2, describe concisamente a la teoría de cuerdas, desde la acción clásica de la cuerda bosónica, o las diferentes teorías de cuerdas hasta las D p-branas, las dualidades S y T, y la teoría M. El capítulo 3 revisa la Conjetura de Maldacena, sus límites y evidencias. Por otro lado, también incluye un apartado sobre el espacio de Anti De Sitter. El capítulo 4 está dividido en cuatro: la primer sección describe la correspondencia de la teoría M sobre un espacio $AdS_7 \times S^4$ con la teoría de Yang Mills; la segunda y tercera secciones son los cálculos de la susceptibilidad topológica y del confinamiento respectivamente; y en última sección están los resultados cuantitativos obtenidos para ambos problemas. En el siguiente capítulo, damos las conclusiones del trabajo, y por último mostramos un apéndice que muestra un resumen de las principales definiciones de las variables y constantes que utilizamos en este trabajo.

Capítulo 1

El Confinamiento y el Problema U(1)

Antes de explicar en qué consiste el problema $U(1)$ y problema del confinamiento, veremos algunos aspectos básicos de la teoría de campos.

1.1 Introducción a la Teoría de Campos

El lagrangiano para un campo bosónico ϕ , con masa m y un potencial de norma A_μ^a , está dado por

$$\mathcal{L}_{bos} = D_\mu \phi D^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{\theta}{16\pi^2 g^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde de manera implícita hemos sumado sobre a , que es el índice que corre sobre los $N^2 - 1$ generadores del grupo de transformaciones locales $SU(N)$ que deja invariante al lagrangiano anterior (1.1). En el caso de un grupo de norma $U(1)$, la teoría describe a una fuerza similar a la electromagnética, donde encontramos un generador del grupo, es decir, un sólo bosón de norma A^μ , similar al fotón. Para el caso $SU(2)$ lo que se describe es una fuerza similar a la débil, mientras que para el caso $SU(3)$ es realmente la fuerza fuerte. Las fuerzas electromagnética y débil realmente están descritas por el grupo $SU(2) \times U(1)$, donde el fotón y el bosón de norma de la fuerza débil Z_0 son una combinación de uno de los 3 generadores del grupo $SU(2)$ y del generador del grupo $U(1)$. Los dos generadores restantes del grupo $SU(2)$ equivalen a los bosones W^\pm . De la misma manera, para el caso

$SU(3)$ tenemos 8 generadores del grupo ($a = 1, \dots, 8$), que corresponden a los 8 gluones. La constante de acoplamiento g es la magnitud con la que cada fuerza actúa.

Por otro lado, el lagrangiano para un campo fermiónico Ψ , también con una masa m y con interacción de norma, está dado por

$$\mathcal{L}_{fer} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (1.2)$$

El primer término en (1.1) y (1.2) corresponde a la parte cinética del campo bosónico y del campo fermiónico respectivamente. El operador diferencial que aparece en estos términos cinéticos es el de la derivada covariante D^μ , y que está definido por

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig\tau \cdot A_\mu, \quad (1.3)$$

con τ^a ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) los generadores del grupo $SU(N)$ y $\tau \cdot A_\mu = \tau^a A_\mu^a$.

Ante una transformación local de los campos ϕ y Ψ por el grupo $SU(N)$,

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = e^{-i(\tau \cdot \Lambda)}\phi, \\ \Psi &\rightarrow \Psi' = e^{-i(\tau \cdot \Lambda)}\Psi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

uno pueden deducir que la derivada covariante D_μ , y el campo del potencial de norma A_μ^a se transforman como

$$\begin{aligned} D_\mu\phi^a &\rightarrow (D_\mu\phi^a)' = e^{-i(\tau \cdot \Lambda)}D_\mu\phi^a, \\ \tau \cdot A_\mu &\rightarrow \tau \cdot A'_\mu = \tau \cdot A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu(\tau \cdot \Lambda) - i[\tau \cdot A_\mu, \tau \cdot \Lambda], \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde $[,]$ es el operador del conmutador definido por $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$. Los generadores τ^a cumplen con $[\tau^a, \tau^b] = if^{abc}\tau^c$, donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo $SU(N)$.

El segundo término de los lagrangianos (1.1) y (1.2) es el término de masa del campo; y los dos últimos términos del lagrangiano (1.1) están dados en función de los tensores $F_{\mu\nu}^a$ y $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$, que a su vez, se definen como

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &\equiv \partial_\mu(A_\nu^a) - \partial_\nu(A_\mu^a) - igf^{abc}A^b A^c \\ \tilde{F}_{\mu\nu}^a &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{a\lambda\rho}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ es el símbolo de Levy-Chivita de cuatro índices. Bajo una nueva definición

$$A_\mu \equiv \frac{1}{2}\tau^a A_\mu^a, \quad F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\tau^a F_{\mu\nu}^a, \quad (1.7)$$

las expresiones que aparecen en (1.6) se reescriben como

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu], \\ \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

El término $F^{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu} = \text{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ contiene a la parte cinética del campo A_μ , mientras que la expresión $F^{\mu\nu} \cdot \tilde{F}_{\mu\nu} = \text{Tr} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ representa a un término topológico, es decir, que sólo depende de las condiciones a la frontera. Para probar dicho argumento, definamos a la función K_μ como

$$K^\mu \equiv \frac{1}{g^2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} A_\nu \partial_\kappa A_\lambda - \frac{ig}{3} A_\nu A_\kappa A_\lambda \right). \quad (1.9)$$

Entonces, por las propiedades cíclicas de la traza y realizando un poco de algebra, encontramos que

$$\begin{aligned} \partial_\mu K^\mu &= \frac{1}{g^2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\kappa A_\lambda) - ig (\partial_\mu A_\nu) A_\kappa A_\lambda \right) \\ &= \frac{1}{2g^2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\kappa A_\lambda) - \frac{1}{2g} i \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \text{Tr} A_\mu A_\nu (\partial_\kappa A_\lambda) \\ &\quad - \frac{1}{2g} ig \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu) A_\kappa A_\lambda - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \text{Tr} A_\mu A_\nu A_\kappa A_\lambda \\ &= \frac{1}{8g^2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \text{Tr} \{ \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \} \{ \partial_\kappa A_\lambda - \partial_\lambda A_\kappa - ig [A_\kappa, A_\lambda] \} \\ &= \frac{1}{4g^2} \text{Tr} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

De donde concluimos que el término $\text{Tr} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ es efectivamente una divergencia total. Por lo tanto, la acción euclidenana¹ de este término sólo depende de su valor en la frontera del área de integración. Esto se puede ver al utilizar $\text{Tr} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ como lagrangiano dentro de la acción euclideana, para después aplicar el teorema de Gauss en 4 dimensiones

$$S = \frac{1}{4g^2} \int_R \text{Tr} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} d^4x = \int_{\partial R} K^\mu d\sigma_\mu, \quad (1.11)$$

donde $d\sigma_\mu$ es el volumen infinitesimal del área ∂R . Esto quiere decir que la física que describe este término no depende de la dinámica local, sino de la topología del espacio-tiempo euclideo y del valor de los campos de norma en la frontera del mismo. Las soluciones no triviales al término $\text{Tr} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ son los llamados instantones, que se describen

¹Para formar la acción euclideana sólo hemos considerado que la coordenada temporal x_0 es ix_0 .

como soluciones de las ecuaciones del campo de norma en donde el campo A^μ pasa de un valor al tiempo euclideo $x_0 \rightarrow -\infty$ a otro valor distinto cuando $x_0 \rightarrow +\infty$. Por lo tanto, se obtiene un efecto físico dado que la probabilidad (cuántica) de la transición, de pasar del valor del campo A^μ en $x_0 \rightarrow -\infty$ a su valor en $x_0 \rightarrow +\infty$, es distinta de cero. Inclusive, uno de los efectos físicos de los instantones conlleva a la solución del problema $U(1)$, como veremos más adelante.

Dado que en la teoría de campos, en general, no se pueden obtener soluciones exactas, se utilizan métodos matemáticos aproximados, como el de la teoría de perturbaciones. Para medir la amplitud \mathcal{A} de cualquier fenómeno físico, basado en una sola fuerza con constante de acoplamiento g , se necesita hacer una suma sobre todas las posibles interacciones (ver figura (1.1)), esto es, sobre todos los posibles diagramas de Feynman,

$$\mathcal{A} = \sum_n c_n g^n, \quad (1.12)$$

donde c_n es factor correspondiente a todos los posibles diagramas con los mismos puntos de interacción. Como vemos, cada punto de interacción tiene un peso de g . Sin embargo, sólomente cuando tenemos acoplamiento débil (i.e. $g \ll 1$) la serie converge y podemos sumarla. A este tipo de proceder, se le llama teoría de perturbaciones. Por otro lado, para acoplamiento fuerte ($g \gg 1$) todavía no existe un modo claro de plantear y resolver las ecuaciones; y en este régimen nos encontraremos cuando veamos el problema del confinamiento.

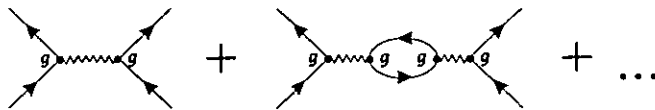


Figura 1.1: Suma de diagramas de Feynman con un peso en la fuerza de interacción entre partículas dado por la constante de acoplamiento g . El primer término de la suma es una interacción sencilla, en el segundo se crea un par de partícula-antipartícula en medio del proceso, y así los siguientes términos tendrán más creaciones de pares de partícula-antipartícula (o bucles de bosones de norma) en medio de la interacción.

Entendiendo estos conceptos básicos de la teoría de campos podemos proceder, y

posteriormente entender en qué constan los dos problemas que trataremos en los siguientes capítulos.

1.2 El Problema U(1)

El lagrangiano de la teoría del campo de la fuerza fuerte, QCD, con N_f sabores de cuarks q_k está dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{k=1}^{N_f} \bar{q}_k (i\gamma^\mu D_\mu - M_k) q_k - \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{\theta}{16\pi^2 g^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu}, \quad (1.13)$$

donde M_k es la matriz de masas de los cuarks, y donde k corre sobre los cuarks u, d, c, s, b y t . Si sólo consideramos los dos primeros cuarks (u y d) y suponemos que sus masas son cero (o bien iguales) tenemos una simetría global que permite intercambiar estos cuarks sin que se afecte el lagrangiano. Esta simetría global está dada por un grupo $SU(2)$. Como sabemos las masas del cuarc u y del d no son cero¹ y por ende la simetría no es exacta, pero es una buena aproximación dado que las masas m_u y m_d y la diferencia de masas $m_u - m_d$ son muy pequeñas comparadas con la escala de QCD, Λ_{QCD} [§]. Si tratamos de expandir esta simetría al tercer cuarc (s) o a los siguientes cuarks, las masas y la diferencia de masas ya no son tan pequeñas comparadas con Λ_{QCD} y la simetría deja de ser una buena aproximación. Por ende, sólo consideraremos a los primeros dos cuarks.

Por otro lado, cada cuarc puede ser expresado en la suma de su parte derecha ($q_k)_D$ y su parte izquierda ($q_k)_I$, esto es,

$$\begin{aligned} q_k &= (q_k)_D + (q_k)_I, \\ (q_k)_D &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q_k, \\ (q_k)_I &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q_k, \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Debido a esta propiedad podemos decir que el grupo de invarianza global está dado por $SU(2)_D \times SU(2)_I$, donde el primer grupo actúa únicamente sobre la parte derecha y

¹La masa del cuarc u es de 5 MeV aproximadamente y la del cuarc d es de 7 MeV.

[§]La energía donde la fuerza fuerte comienza su fase de confinamiento, esto es, donde hay acoplamiento fuerte ($g \gg 1$) es la escala de QCD ($\Lambda_{QCD} \simeq 200$ MeV.)

el segundo hace lo propio sobre la parte izquierda del cuarc. Sin embargo, el lagrangiano anterior poseé otras dos simetrías que hay que destacar, las cuales son también globales y tienen, ambas, un grupo $U(1)$. Las transformaciones de dichos grupos son

$$\begin{aligned} q_k &\rightarrow e^{i\theta_B} q_k, \\ q_k &\rightarrow e^{i\theta_A \gamma_5} q_k. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Entonces, las dos transformaciones extras forman la simetría $U(1)_B \times U(1)_A$. El primer grupo nos conduce a la corriente de Neother conservada

$$\mathcal{J}_\mu^B = \sum_{k=1}^{N_f} \bar{q}_k \gamma_\mu q_k \Rightarrow \partial^\mu \mathcal{J}_\mu^B = 0; \quad (1.16)$$

y que a su vez, representa al número bariónico, que como sabemos se conserva en QCD. Por lo tanto, la simetría $U(1)_B$ tiene que ser exacta. El segundo grupo, $U(1)_A$, tiene asociada otra corriente

$$\mathcal{J}_\mu^A = \sum_{k=1}^{N_f} \bar{q}_k \gamma_\mu \gamma_5 q_k, \quad (1.17)$$

y que como veremos es la causante del problema $U(1)$. Concluyendo, tenemos una simetría global dada por

$$SU(2)_D \times SU(2)_I \times U(1)_B \times U(1)_A. \quad (1.18)$$

Esta simetría global predice que las partículas (mesones o hadrones) no deberían tener una quiralidad bien definida, contradictoriamente a lo que se observa en los experimentos. Por ellos, la simetría debe de estar rota. El rompimiento espontáneo de simetría del grupo $SU(2)$, por el teorema de Goldstone, predice la existencia de 3 bosones con masa cero. Por otro lado, el rompimiento del grupo $U(1)_A$ predice la existencia de un cuarto bosón de Goldstone sin masa. Sin embargo, como ya habíamos mencionado las masas de los cuarcs u y d no son precisamente iguales (i.e. $m_u - m_d \neq 0$), ni tampoco cero ($m_u, m_d \neq 0$), por lo que la simetría global (1.18) no es exacta. Estos términos de masa rompen explícitamente las simetrías globales (1.18) y debido a ello, los bosones de Goldstone adquieren una masa proporcional a Λ_{QCD} . Los 3 pseudo bosones de Goldstone derivados del rompimiento de $SU(2)$ son los mesones π^\pm y π^0 ; y cuyas predicciones de masa mediante dicho mecanismo

son muy acertadas con las encontradas experimentalmente. El pseudo bosón de Goldstone (ζ) que surge del rompimiento del grupo $U(1)_A$, debería de tener una masa acotada por

$$m_\zeta \leq \sqrt{3}m_\pi, \quad (1.19)$$

donde m_π es la masa del pion y que es de alrededor de 140 MeV. Claramente esta partícula no se ha visto, y aunque existe un bosón llamado η' que cumple con las mismas propiedades del boson ζ , la única diferencia es que su masa es de $m_{\eta'} = 950$ MeV [¶]. Este es el llamado problema $U(1)$, y que podría resumirse en la pregunta: ¿dónde esta el pseudoescalar de Goldstone ζ , o bien, por qué la diferencia de masas con la partícula η' encontrada experimentalmente?.

El primer paso para resolver el problema es ver que existe una anomalía para la corriente (1.16) dada por

$$\partial^\mu \mathcal{J}_\mu^A = 3b_0 (F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{\alpha\mu\nu}) + \sum_{k=1}^{N_f} im_k \bar{q}_k \gamma_5 q_k, \quad (1.20)$$

donde b_0 es la función β de corrección a un bucle; que depende del número de bosones y de fermiones, y esta dada por

$$b_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right), \quad (1.21)$$

para un grupo de norma $SU(N_c)$; y con N_f fermiones (cuarcs) en nuestro sistema.

Aun aproximando las masas de ambos cuarcs a cero, $m_u = m_d = 0$, la corriente no se conserva debido al primer término de la ecuación (1.20). Como mencionamos en la sección anterior §1.1 de este capítulo, este término tiene soluciones no triviales llamadas instantones. Como fue demostrado por Witten [5] y Veneziano [6], la existencia de soluciones a este término llevan a una segunda corrección en la masa del pseudo bosón de Goldstone, y cuya expresión formal está dada por la denominada fórmula de Witten-Veneziano

$$m_\zeta^2 = m_K^2 + \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(2m_K^2 - 2m_\pi^2 - a) + 8a^2} \quad (1.22)$$

donde $m_K^2 \simeq 500$ MeV y $m_\pi^2 \simeq 140$ MeV son las masas del kaon y pion respectivamente, y a es un parámetro que está definido en teoría de campos como

$$a = \frac{2\chi_t}{f_\pi^2} \quad (1.23)$$

[¶]El boson η' es el singlete de la representación 8×1 (un octete y un singlete) de los mesones. En un principio se pensó que el bosón η era el singlete, con una masa de 550 MeV, pero después se dieron cuenta de que era parte del octete, y por ende, no era el pseudo bosón de Goldstone ζ .

donde f_π es la constante del decaimiento del pion que aproximadamente vale 0.093 GeV; y χ_t es la susceptibilidad topológica, que se define por

$$\chi_t = \frac{1}{(16\pi^2)^2} \int d^4x < Tr \mathbf{F}\tilde{\mathbf{F}}(x) Tr \mathbf{F}\tilde{\mathbf{F}}(0) >, \quad (1.24)$$

en la cual, el término $< Tr \mathbf{F}\tilde{\mathbf{F}}(x) Tr \mathbf{F}\tilde{\mathbf{F}}(0) >$ es valor esperado de $Tr \mathbf{F}\tilde{\mathbf{F}} Tr \mathbf{F}\tilde{\mathbf{F}}$. Sin embargo, la susceptibilidad topológica no puede ser calculada en QCD de manera exacta. La fórmula (1.22) considera un sistema de 3 cuarks (u, d, s), donde dos de ellos son livianos (i.e. u, d tienen masas aproximadamente cero) y el otro (s) tiene una masa comparable a la escala de QCD. De los valores experimentales en las masas del pion, kaon, η, η' y de la ecuación (1.22) se obtiene un valor para el parámetro $\bar{a} = (0.492 \text{ GeV})^2$; y a través de la ecuación (1.23) se obtiene

$$\chi_t \approx (180 \text{ MeV})^4. \quad (1.25)$$

Este valor de la susceptibilidad también ha sido corroborado utilizando cálculos mediante el sistema de cuadrículas ("lattice") para un número finito de colores [7].

Otro problema aunado al U(1), llamado problema CP fuerte, es debido al hecho de que la constante θ de la ecuación (1.13) debe de ser muy pequeña. Los resultados experimentales del momento magnético del neutrón dan un valor acotado por

$$\theta < 10^{-10}. \quad (1.26)$$

El problema radica en que es muy difícil mantener una constante tan pequeña después de las correcciones cuánticas, al mismo tiempo de que deseamos que las constantes sean más bien cercanas a uno. En principio, al realizar la primer corrección cuántica θ_1 al lagrangiano, la constante θ se ve afectada por el valor de la constante θ_1 , y por ende, ahora tendríamos que pedir que la sumas de ambas constantes ($\theta + \theta_1$) fuese menor a la cota anterior (1.26). Sin embargo, con la siguiente corrección cuántica tendríamos una tercer constante θ_2 y sucedería lo mismo. Mientras dichas constantes extras debidas a las correcciones no fuesen pequeñas y convergieran a cero, no podríamos fijar a θ en un valor tan pequeño.

La solución a este problema viene del planteamiento de θ como un campo, al que han llamado el axión. En el mínimo de su potencial $V(\theta)$ obtenemos que el valor esperado

del axi3n es

$$\langle \theta \rangle = 0,$$

y por lo tanto, cumple con (1.26).

Aqu3 hemos expuesto de manera breve y sin mucho detalle el problema $U(1)$, adem3s claro, de otras ideas relacionadas, como los instantones, las susceptibilidad topol3gica, o el problema CP fuerte. Ahora analizaremos el otro asunto que nos interesa, es decir, el confinamiento entre part3culas con carga fuerte.

1.3 El Confinamiento

Desde que se descubrieron los cuarks nunca se les ha podido ver de manera aislada, dado que siempre se encuentran formando hadrones, que son grupos de tres cuarks, o bien, formando mesones, que est3n formados por un cuarc-anticuarc. Esto es, siempre se encuentran formando part3culas con color neutro. Por ejemplo, cuando uno aumenta la energ3a de un mes3n para tratar de separar a sus dos cuarks, lo que resulta al final son dos mesones, debido a que la energ3a se va en la creaci3n de otro par cuarc-anticuarc. A esta cualidad que presentan los cuarks, y en principio todas las part3culas con color, de no poder aislarse se le llama confinamiento. Sin embargo, esta propiedad no se ha podido calcular en la teor3a cu3ntica de campos para la fuerza fuerte, QCD. El problema para calcular, es que el confinamiento se da cuando la constante de acoplamiento g es grande, y por ende, la teor3a de perturbaciones, que nos permite sumar la serie (1.12) cuando $g \ll 1$, ya no es v3lida. De aqu3, que todos los intentos por calcular resultados en QCD, y en particular los referentes al confinamiento, hayan fracasado mediante las t3cnicas usuales. Sin embargo, existen algunas caracter3sticas cualitativas del problema que pueden ser expuestas y que ofrecen una idea m3s clara de lo que sucede con la fuerza fuerte a diferencia de las interacciones electromagn3ticas y d3biles.

Para las part3culas en general existen dos fases l3mites en la fuerza que presentan dependiendo de la constante de acoplamiento. Una es la fase de Coulomb, donde las part3culas pueden separarse, como en el caso de las part3culas con carga electromagn3tica (en bajas energ3as). En esta fase la fuerza y la energ3a disminuyen con la distancia,

como en el caso electromagnético, donde la fuerza y la energía van como: $\mathcal{F} \sim 1/r^2$ y $E \sim 1/r$ respectivamente. En la otra fase, llamada fase de confinamiento, la energía depende proporcionalmente de la distancia, o de cualquier potencia positiva de la misma. Como resultado de esta aseveración, la fuerza en la fase de confinamiento sería, en primer aproximación, constante con respecto a la distancia; y de manera más general, crecería como una potencia positiva (o cero) de la misma.

Sabemos que la intensidad de la fuerza está dada por la constante de acoplamiento g , y que a su vez, esta constante depende de la energía del sistema. Supongamos que colisionamos dos electrones como se muestra en la figura (1.2). Al lanzar un electrón con poca energía, éste no llegará muy cerca del electrón fijo (si tomamos como centro de las coordenadas a uno de los dos electrones). Por el contrario si incrementamos la energía del electrón colisionador, la distancia mínima entre los electrones disminuirá. De este modo, vemos que la distancia mínima entre los electrones depende de la energía que poseen antes de colisionar. En el caso de bajas energías, la carga del electrón fija puede ser apantallada por la creación en el vacío de pares de partícula-antipartícula con carga eléctrica y que desempeñan el papel de dipolos eléctricos. Este apantallamiento se reduce cuando la energía crece para el caso electromagnético, mientras que para las partículas con color, el apantallamiento crece a medida que aumenta la energía. De cualquier manera, podemos concluir que la intensidad de la fuerza está regida por estos efectos cuánticos que dependen de la energía de las partículas; y por ende, la constante de acoplamiento g es función de la energía.

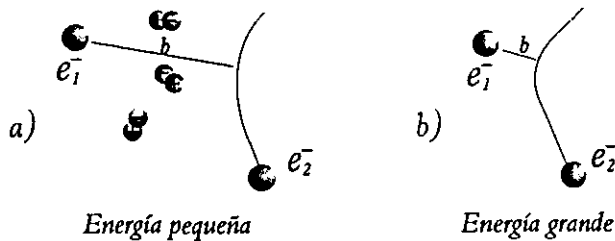


Figura 1.2: Si tenemos dos electrones colisionando, la distancia mínima b entre ellos dependerá inversamente de la energía, además de que para el caso a) de poca energía se produce un mayor apantallamiento de la carga del electrón fijo que en caso de mayor energía b), debido a la creación de pares de partícula-antipartícula.

El comportamiento de la carga de la partícula (i.e. en la constante de acoplamiento g) como función de la energía E está dada controlada por la función beta, esto es

$$E \frac{\partial g^2}{\partial E} = \beta = -b_0(g^2)^2 - b_1(g^2)^3 - \dots \quad (1.27)$$

Si sólo consideramos el primer término de la expansión anterior, obtenemos una corrección en la constante de acoplamiento g a un bucle ("loop") dada por

$$\frac{1}{g^2(E)} = \frac{1}{g^2(E_0)} + 2b_0 \ln\left(\frac{E}{E_0}\right), \quad (1.28)$$

donde E_0 es una energía inicial. A b_0 se le conoce como la función β de corrección a un bucle (1.21), que depende del número de fermiones y bosones, y que está dada por

$$b_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right); \quad (1.29)$$

o bien, por

$$b_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(3N_c - \frac{1}{2} N'_f \right), \quad (1.30)$$

para un grupo de norma supersimétrico con $N'_f = 2N_f$. La energía crítica E_c donde esta curva comienza su fase de confinamiento está aproximada por la ecuación anterior en el punto en donde $g^2(E) \gg 1$ (i.e. $\frac{1}{g^2(E)} \ll 1$)

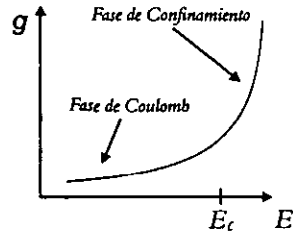
$$E_c = E_0 e^{-\frac{1}{2b_0 g^2(E_0)}}. \quad (1.31)$$

Se puede demostrar que el valor de E_c en la ecuación anterior no depende de la energía inicial E_0 en donde empezamos, bien podríamos calcularla en otra energía E'_0 (introduciendo, a su vez, el valor de $g^2(E'_0)$ en lugar de $g^2(E_0)$ en la fórmula (1.31)).

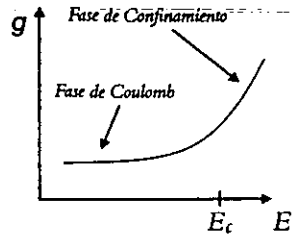
La gráfica de la constante de acoplamiento g como función de la energía puede verse en las figuras (1.3). La forma de la curva va a depender del signo de la constante b_0 . Para el caso de el electromagnetismo b_0 es negativa, dado que únicamente los fermiones sienten la carga eléctrica (por lo que $N_f \neq 0$), mientras que el fotón (bosón de norma del electromagnetismo) no siente carga eléctrica alguna, lo que implica que $N_c = 0$.

Para el caso de la fuerza débil, cuyo grupo de norma es $SU(2)$, el número de bosones de norma que sienten la carga débil es de 3. Pero dado que hay al menos 12 fermiones (6 leptones y 6 cuarks), la función β de corrección a un bucle, b_0 , es negativa. De esta manera, para el caso abeliano $U(1)$ (electromagnetismo) y el no abeliano $SU(2)$ (fuerza

a) Fuerza Electromagnética (grupo de norma abeliano $U(1)$)
 $b_0 < 0$



b) Fuerza débil (grupo de norma no-abeliano $SU(2)$)
 $b_0 < 0$



c) Fuerza fuerte (grupo de norma no-abeliano $SU(3)$)
 $b_0 > 0$

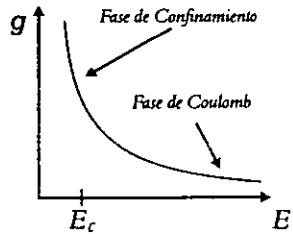


Figura 1.3: Las partículas presentan dos fases límite en la fuerza de interacción, la llamada fase de Coulomb, donde la energía es inversamente proporcional a potencias positivas de la distancia entre partículas, y la llamada fase de Confinamiento (para energías, mayores o menores, a la energía crítica E_c), donde la energía es directamente proporcional a potencias positivas de la distancia. Las gráficas muestran el comportamiento de la constante de acoplamiento g como función de la energía E para a) el caso de la fuerza electromagnética, b) la fuerza débil y c) la fuerza fuerte.

débil) la gráfica es similar, aunque comparativamente la del electromagnetismo crece más rápido. A estos grupos se les dice grupos de norma asintóticamente libres.

El caso de la fuerza fuerte difiere de los dos anteriores, como se observa en la figura (1.3). Para este caso $b_0 > 0$, dado que existen 8 gluones, y sólo 6 fermiones sienten la fuerza fuerte (6 cuarks). Cuando el grupo presenta este tipo de comportamiento se dice que es un grupo no asintóticamente libre.

Debido a esta conducta que presenta QCD la energía necesaria para separar a dos cuarks crece con la distancia, y es por ello que hay confinamiento y no se observan cuarks aislados. Aunque el comportamiento en QCD es el indicado, no ha sido posible calcular la energía entre dos cuarks debido a que la teoría entra en el régimen no perturbativo, y no se tienen técnicas matemáticas para resolver el problema.

Corrimiento de la constante de acoplamiento a la escala de QCD

El valor de la constante de acoplamiento g en la escala de QCD nos será de gran importancia, dado que es a esta energía donde esperamos tener confinamiento. Para empezar, debemos de fijar los datos necesarios para este cálculo. Mediante los experimentos de [8]: dispersión leptón-hadrón profundamente inelástica, decaimiento del leptón tau, dispersión de cuarks y gluones en colisiones hadrónicas de alta energía, colisiones e^+e^- , y el cálculo [8] de los niveles de energía de un cuarc-anticuarc con el sistema de cuadrículas ("lattice"); se puede obtener los promedios de la constante de acoplamiento a una energía de 91 GeV^{||} y de la escala de QCD. Estos promedio son:

- $\alpha_0 = \frac{g_0^2}{4\pi} = 0.117 \pm 0.005$, a una energía inicial $E_0 = 91$ GeV. El error en α_0 es principalmente teórico, sin embargo, también existen contribuciones de tipo experimental.
- El dato anterior corresponde a una escala de QCD de $\Lambda_{QCD} = 195 + 65 - 50$ MeV.

A su vez, fijamos los siguientes parámetros.

- $N_c=3$ (corresponden al número de colores de la fuerza fuerte) y $N_f=5$ (sólo hemos excluido el cuarc top que tiene una masa muy grande comparada con la escala de QCD).

^{||}Energía correspondiente a la masa del bosón Z^0 .

De esto datos obtenemos un valor para la función β de corrección a un bucle (1.21), igual a

$$b_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) = \frac{23}{48\pi^2}. \quad (1.32)$$

Y por último, en base a la ecuación (1.28), encontramos un valor para la constante de acoplamiento a la escala de QCD (con valor central de $\Lambda_{QCD} = 200 \text{ MeV}$) de

$$g^2(\Lambda_{QCD}) = 8.60322. \quad (1.33)$$

Aunque este proceder no es del todo preciso y se tendría que tomar una infinidad de correcciones a más de un bucle en la constante de acoplamiento para obtener el resultado exacto; existe otra manera alternativa de definir donde comienza el régimen de confinamiento, y ésta es mediante la igualdad $2b_0g^2 \equiv 1$ [31]; de donde se puede deducir el valor de $g^2 = 10.3$, y el cual no varía mucho de (1.33) para nuestros propósitos.

Como vemos este valor concuerda con la idea de que la constante de acoplamiento tiene que ser mayor a uno cuando se presenta confinamiento, debido al régimen no perturbativo del fenómeno.

Capítulo 2

Teoría de Cuerdas / Teoría M

En este capítulo trataremos de incorporar, de manera más formal, las diferentes características de la teoría de cuerdas; para después adentrar un poco en los límites y especulaciones de la misma, como en lo referente a la teoría M.

2.1 Cuerdas

La acción de una cuerda puede ser descrita en base al área que barre sobre el espacio-tiempo[†],

$$S = T_c \int d\sigma d\tau \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2}, \quad (2.1)$$

donde (τ, σ) [‡] son las coordenadas sobre el área barrida (o también llamada hoja de mundo); y

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \tau}, \quad X'^\mu = \frac{\partial X^\mu(\sigma, \tau)}{\partial \sigma}. \quad (2.2)$$

Si D es la dimensión del espacio-tiempo, entonces $\mu = 0, \dots, D - 1$. De esta manera, el índice μ de los campos X^μ sería visto, desde las dos dimensiones que describe la acción (2.1), como representando dimensiones internas y no del espacio-tiempo. Introduciendo

[†]Existen otras maneras alternativas de describir la acción de la cuerda (como lo sería en base a la curvatura del área que barre); pero se puede mostrar que todas ellas son equivalentes clásicamente.

[‡] τ es la coordenada temporal, mientras que σ es la espacial del área que barre la cuerda en el espacio-tiempo.

una nueva variable $h^{\alpha\beta}$ (con $\alpha, \beta = 1, 2$), que corresponde a la métrica de la superficie descrita por la cuerda en el espacio-tiempo, la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$S = -\frac{T_c}{2} \int d\sigma d\tau \sqrt{|h|} h^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \quad (2.3)$$

que es una forma más familiar, dado que es la acción de un campo escalar en dos dimensiones. Aquí $\sqrt{|h|}$ es la raíz cuadrada del valor absoluto del determinante de $h^{\alpha\beta}$ y $G_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo. La ecuación de Euler-Lagrange para $h^{\alpha\beta}$ es la ecuación de constricción

$$G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha'\beta'} G_{\mu\nu} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X^\nu = 0; \quad (2.4)$$

de donde se puede resolver para h y sustituir en la ecuación (2.3), para recuperar la acción (2.1). Aunque la equivalencia entre las acciones (2.1) y (2.3) es a nivel clásico por la ecuación de constricción (2.4), también se ha mostrado a nivel cuántico [9].

La constante T_c en la acción (2.1) permite que la expresión sea adimensional, lo cual será nuestro modo de proceder a lo largo de este trabajo. En el caso de trabajar con la convención $c = \hbar = 1$, T_c tiene dimensión de (longitud)⁻², y por lo mismo, está asociada con la tensión de la cuerda. Esta constante es el único parámetro libre de la teoría de cuerdas. Al definir una nueva variable α' que tiene dimensión de (longitud)², y que es inversamente proporcional a la tensión de la cuerda ($\alpha' = 1/(2\pi T_c)$), podemos fijar dicho parámetro libre al pedir que:

$$\alpha' \sim l_p^2 \quad (T_c \sim m_p^2), \quad (2.5)$$

donde m_p y l_p son la masa (1) y la longitud de Planck (2) respectivamente. Esto se hace para poder recuperar la relatividad general de Einstein.

Así mismo, la ecuación de Euler-Lagrange, o ecuación de movimiento de la acción (2.1) para el campo X^μ es

$$\partial_\alpha \sqrt{|h|} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu = 0; \quad (2.6)$$

y que en el caso de escoger la métrica $h^{\alpha\beta}$ como la de Minkowski[§], la ecuación anterior se reduce a una simple ecuación de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^\mu = 0. \quad (2.7)$$

[§]Tomar la métrica $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es posible gracias a la libertad de norma que generan las tres simetrías locales del sistema [9]: las dos reparametrizaciones de X^μ y $h^{\alpha\beta}$, y un escalamiento de Weyl (invarianza ante dilataciones de la métrica).

De esta manera, comprobamos que efectivamente la acción (2.3) corresponde a una cuerda, cuya ecuación de onda esta dada por la expresión anterior. Como sabemos, la ecuación de Euler-Lagrange para el campo el campo X^μ se obtiene al variar $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$; sin embargo al tomar esta variación en la acción de la cuerda encontramos dos términos, un proporcional a la ecuación (2.6), y el otro es un término de superficie, cuya nulidad depende de la siguiente condición

$$\delta X^\mu \partial_n X_\mu \Big|_{\sigma=\pi} - \delta X^\mu \partial_n X_\mu \Big|_{\sigma=0} = 0, \quad (2.8)$$

donde ∂_n es la derivada normal a la frontera de la hoja de mundo. Como ya hemos mencionado, las cuerdas pueden ser abiertas o cerradas, y esto depende de cómo se cumpla la condición de frontera (2.8). En el caso de las cuerdas cerradas, la condición de periodicidad en la cuerda

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \pm X^\mu(\tau, \sigma + \pi), \quad (2.9)$$

cumple con (2.8). Como sabemos, la ecuación de onda (2.7) tiene soluciones, consistentes con la condición de periodicidad (2.9), que pueden viajar hacia la izquierda o hacia la derecha y cuyos modos son independientes; así que, podemos escribir la solución de la ecuación de onda para X^μ como la suma de dos partes independientes, una derecha X_D^μ y una izquierda X_I^μ

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_D^\mu(\tau - \sigma) + X_I^\mu(\tau + \sigma). \quad (2.10)$$

De este modo, la solución más general de la ecuación de onda (2.7) para el caso de cuerdas cerradas es

$$\begin{aligned} X_D^\mu(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha'p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \xi_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}, \\ X_I^\mu(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha'p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\xi}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde ξ_n^μ son coeficientes de Fourier de los modos de oscilación de la cuerda; x^μ y p^μ son la posición y el momento que definen al centro de masa de la cuerda; y los términos sucesivos son los modos de vibración de la cuerda. Es fácil ver que se cancelan los términos lineales sobre σ al hacer la suma $X^\mu(\tau, \sigma) = X_D^\mu(\tau - \sigma) + X_I^\mu(\tau + \sigma)$, por lo que se cumple la

condición de periodicidad (2.9).

Para el caso de las cuerdas abiertas, cualquier de las condiciones de frontera

$$\partial_n X^\mu = 0 \quad (\text{Neumann}) \quad (2.12)$$

$$\delta X^\mu = 0 \quad (\text{Dirichlet}) \quad (2.13)$$

para ambos extremos de la cuerda (i.e. $\sigma = 0, \pi$), cumple directamente con la restricción (2.8). Sin embargo, ahora los modos izquierdos y derechos no son linealmente independientes y por el contrario, se combinan para formar modos estacionarios. Las condiciones de Neumann respetan la invarianza de Poincaré y conservan el momento. Las condiciones de Dirichlet, por otro lado, describen defectos espacio-temporales como veremos más adelante al hablar sobre las D p-branas.

Ahora bien, el equivalente de la solución para cuerdas cerradas (2.11), a la ecuación de onda (2.7), pero ahora para cuerdas abiertas con condiciones de Neumann (2.12) es

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \xi_n^\mu e^{-2in\tau} \cos(n\sigma). \quad (2.14)$$

Cuando uno cuantiza los diferentes armónicos de las fluctuaciones de las cuerdas, se desprenden un número finito de estados sin masa, además de un número infinito de estados masivos; cuya masa para las cuerdas abiertas está dada por

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{-n} \cdot \xi_n; \quad (2.15)$$

y para las cuerdas cerradas por

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{-n} \cdot \xi_n + \tilde{\xi}_{-n} \cdot \tilde{\xi}_n). \quad (2.16)$$

Como vemos, en las ecuaciones anteriores, la masa es inversamente proporcional a $\sqrt{\alpha'}$; y por las relaciones de la ecuación (2.5) obtenemos un espectro de masas para las cuerdas abiertas o cerradas del orden de la masa de Planck m_p , lo cual hace de los modos masivos lo bastante pesados como para no ser detectados a las energías que se alcanzan hoy en día.

Por otro lado, en los estados sin masa encontramos partículas sin masa y con espín dos; que a su vez se encuentran acoplados a la materia. Debido a estas partículas en el

espectro y a que en cierto límite de la teoría de cuerdas se recupera la relatividad general de Einstein (más correcciones), se dice que la teoría de cuerdas describe la gravitación cuántica por sí misma.

A su vez, las cuerdas presentan interacción con otras cuerdas, y dado que barren áreas en el espacio-tiempo, las interacciones dejan de ser puntuales (como en el caso de las partículas). Dado que no profundizaremos en las interacciones de las cuerdas, el lector puede referirse a [9] o [10] para encontrar más información al respecto.

La dimensión crítica del espacio-tiempo para la teoría de cuerdas bosónicas que acabamos de describir, es decir, la dimensión donde se cancelan las anomalías, es $D = 26$. Sin embargo, el estado de mínima energía es un taquión ($m^2 < 0$), por lo que la energía no está acotada por debajo. Para resolver este problema se introducen campos fermiónicos de tal forma que el lagrangiano resultante sea supersimétrico. Debido a estos campos extra, la dimensión crítica es $D = 10$, y ahora, el estado de mínima energía tiene energía cero.

Al incorporar estos campos fermiónicos surge otra condición de frontera similar a (2.8). Sin entrar en más detalles, en las cuerdas abiertas existen dos posibles configuraciones que satisfacen la condición de frontera, y que dan lugar a dos posibles sectores: uno simétrico llamado Neveu-Schwarz (NS), y otro antisimétrico denominado Ramond (R). En el caso de las cuerdas cerradas, dado que las soluciones fermiónicas izquierdas y derechas también son independientes, tenemos cada uno de los sectores de la cuerda abierta para ambos lados (izquierdo y derecho) de la cuerda cerrada, es decir, tenemos cuatro diferentes sectores: NS-NS, NS-R, R-NS y R-R. En las teorías de cuerdas IIA y IIB, los campos no masivos de los sectores NS-R y R-NS son fermiónicos y son iguales en ambas teorías. Por otro lado, los sectores NS-NS y R-R representan campos bosónicos. En el caso del sector NS-NS, para ambas teorías (IIA y IIB), los campos no masivos son un escalar, un tensor de dos índices simétrico y otro antisimétrico. Sin embargo, para el sector R-R cada teoría tiene diferentes campos no masivos: para la teoría IIA tenemos una uno-forma y una tres-forma; mientras que la teoría IIB contiene un escalar (distinto al del sector NS-NS), una dos-forma y una cuatro-forma.

Tipos de cuerdas

Existen cinco diferentes teorías de cuerdas. El llamado tipo I es el único de cuerdas abiertas, y que como mencionamos, sus soluciones izquierdas y derechas no son linealmente independientes. En contraposición, tenemos a los otros cuatro tipos de cuerdas, que son cerradas, y cuyas soluciones derechas e izquierdas si son linealmente independientes. Dentro de las cuerdas cerradas están el tipo IIA y el tipo IIB, que difieren en las condiciones de periodicidad, tanto de la solución izquierda como de la derecha. Por un lado las cuerdas IIA cumplen con

$$\begin{aligned} X_D^\mu(\tau, \sigma) &\equiv X_D^\mu(\tau, \sigma + \pi), \\ X_I^\mu(\tau, \sigma) &= X_I^\mu(\tau, \sigma + \pi). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Mientras que por otro lado, las cuerdas del tipo IIB cumplen con

$$\begin{aligned} X_D^\mu(\tau, \sigma) &= X_D^\mu(\tau, \sigma + \pi), \\ X_I^\mu(\tau, \sigma) &= -X_I^\mu(\tau, \sigma + \pi). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Las dos clases de cuerdas restantes equivalen a un tipo diferente, el de las cuerdas heteróticas. Son cuerdas donde la parte izquierda (sólo por convención) es del tipo bosónica, es decir que su dimensión crítica es 26, y la parte derecha es una supercuerda, con dimensión crítica de 10. Esta diferencia de dimensiones puede entenderse de la siguiente manera: en la solución izquierda, cuya dimensión crítica es de 26, las primeras 10 dimensiones son de espacio-tiempo y son las mismas que en la parte supersimétrica. Las 16 dimensiones restantes pueden pensarse como provenientes de un espacio interno (para entenderlo mejor, vale la pena pensar en la acción para la cuerda del tipo (2.1) donde el índice en los campos X^μ representan una dimension interna más que la del espacio-tiempo). De esta manera, los únicos dos grupos que son consistentes con esta idea de la cuerda heterótica son el $SO(32)$ y el $E_8 \times E_8$. Por algún tiempo se pensó que las cuerdas heteróticas eran las únicas que podían generar un grupo de norma, y por ende, eran las únicas que podían contener al modelo estándar. Sin embargo, ahora existen otros mecanismos para generar grupos de norma con los otros tipos de cuerdas, como veremos más adelante.

En los últimos años se han hecho progresos al entender aspectos no perturbativos (cuando g_s no es pequeña) de la teoría de cuerdas; y se han llegado a relacionar estos cinco tipos de teorías de cuerdas, junto con otra teoría mas: supergravedad en once dimensiones.

Esta teoría de supergravedad es una teoría de campos supersimétricos donde no existe otra interacción que no sea la gravitacional. Además se presupone que quizá estas teorías sólo sean límites de una teoría más general, a la que se ha llamado Teoría M, y de la que hablaremos más adelante.

2.2 Branas

A los objetos más generales que las cuerdas se les denomina p -branas, donde p es la dimensión espacial de los mismos. Una partícula sería una 0-brana, una cuerda una 1-brana, una 2-brana describiría una membrana, y así sucesivamente.

Al igual que las partículas pueden estar cargadas ante la fuerza electromagnética, Polchinski [22] encontró que estos objetos extendidos están cargados ante los tensores antisimétricos de los sectores NS-NS y R-R de las cuerdas cerradas del tipo IIA o IIB. Las branas que se acoplan al tensor antisimétrico del sector NS-NS son llamadas NS p -branas, y de las que sólo tenemos NS 1-branas (también conocidas como NS cuerdas) y NS 5-branas. Éstas últimas se encuentran en todas las teorías de cuerdas cerradas. Las branas que se acoplan a las cargas R-R son las llamadas D p -branas, y que tienen como característica el hecho de que las cuerdas que terminan en ellas cumplen con la condición de frontera de Dirichlet (2.13), como se muestra en la figura (2.1). De esta manera, en las cuerdas del tipo IIA existen D p -branas con dimension par ($p = 0, 2, 4, 6$ y 8 .), mientras que, para las cuerdas del tipo IIB, las D- p -branas tienen dimensión impar ($p = -1, 1, 3, 5, 7$ y 9) [¶]. Inclusive, se ha visto últimamente que las cuerdas cerradas del tipo IIA y IIB tienen sectores con cuerdas abiertas, o mejor dicho, cuerdas que descansan sobre las p -branas con las condiciones de frontera de Dirichlet, como se puede ver la figura (2.1). De esta manera, en las cuerdas del tipo IIA y IIB se puede tener interacción entre las cuerdas cerradas y las cuerdas abiertas que terminan sobre las D p -branas.

[¶]la dimensión $p=-1$ dice que la D-brana barre una superficie $p+1=0$ en el espacio-tiempo; esto es, un punto en el espacio tiempo, que es llamado D instantón.

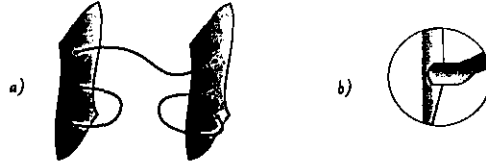


Figura 2.1: a) Las cuerdas pueden empezar y terminar sobre las D p-branas, siempre y cuando cumplan con la condición de frontera de Dirichlet b).

Sistema de N D p-Branas

Una característica importante que se desprende de trabajar con un sistema de N branas, es la posibilidad de formar un grupo de norma $U(N)$.

Polchinski [16] mostró cómo es que los diferentes grados de libertad dinámicos de las D p-branas son descritos por los modos no masivos de las cuerdas abiertas que en ellas acaban. Dentro del espectro de los modos no masivos de estas cuerdas abiertas encontramos un campo A^μ . Supongamos que tenemos una de estas cuerdas abiertas con los dos extremos terminando en las misma brana. Dado que las condiciones de frontera de esta cuerda abierta son de Dirichlet para las $(p+1)$ coordenadas del volumen que describe la D p-brana, y de Neumann para el resto de las coordenadas del espacio; el campo A^μ se descompone en dos partes distintas: una que corresponde a las componentes paralelas al volumen que describe la D p-brana y otra que se desprende de las componentes transversales al mismo volumen. Dado que los extremos de la cuerda, en estas $(p+1)$ coordenadas, están fijos a la brana, podemos interpretar a estos campos A^μ (sólo las componentes paralelas al volumen) como si se encontraran dentro del volumen descrito por la brana. De esta manera, las $(p+1)$ componentes del campo A^μ forman un campo de norma A^α ($\alpha = 0, \dots, p$) que corresponde a una teoría de norma con grupo $U(1)$ sobre el volumen de la brana [16]; mientras que las $8-p$ componentes restantes forman los campos escalares X^a ($a = 0, \dots, 8-p$). Estos campos X^a describen las fluctuaciones del volumen que produce la D p-brana en las direcciones transversales al mismo.

Si en lugar de tener una sólo brana, tenemos un sistema de N D p-branas paralelas (ver figura (2.2)). Dado que en cada brana existe un campo sin masa A^α , la teoría de norma final tendrá un grupo $U(1)^N$. Sin embargo, también existen unos campos masivos que corresponden a las cuerdas que inician en cierta brana y terminan en una brana dis-

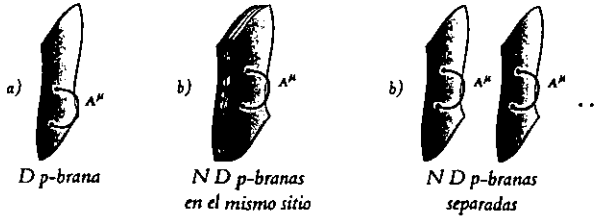


Figura 2.2: a) La cuerda empieza y termina sobre la D p-brana y tiene un campo A_μ con masa cero en ella, que deriva en un grupo $U(1)$. Un sistema de N D p-branas, en el mismo sitio b) o separadas c), da lugar a un grupo de norma $U(N)$ y $U(1)^N$ respectivamente.

tinta. Existen $N^2 - N$ campos masivos que cumplen con esta característica, y la masa de cada uno de ellos es proporcional a la distancia entre las dos branas involucradas. Fue señalado por Witten [17] que conforme se acercan las branas unas a las otras, las cuerdas tendidas entre ellas se tornan no masivas y tenemos finalmente N^2 campos no masivos cuyas transformaciones corresponden al grupo supersimétrico $U(N)$. Por lo tanto, la teoría de bajas energías de un sistema de N D p-branas es simplemente la teoría de Super Yang Mills (SYM), con grupo de norma $U(N)$.

Este resultado es muy importante, dado que antes sólo se podían construir grupos de norma para el modelo estándar a partir de las cuerdas heteróticas. Ahora, sin embargo, vemos que con las D p-branas podemos generar grupos de norma a partir de las supercuerdas del tipo IIA y IIB.

2.2.1 La Acción de Dirac-Born-Infeld

Las D p-branas son objetos dinámicos y en este sentido sienten a la fuerza de gravedad. Además, la tensión de una brana controla la respuesta de influencias externas que tratan de cambiar su forma, absorber energía, etc., tal y como lo hace la tensión de la cuerda.

Ahora bien, si introducimos las variables ξ^α ($\alpha = 1, \dots, p$) sobre una p-brana en un espacio D dimensional, podemos escribir la acción en la misma manera que hicimos para la cuerda (2.3), es decir, en términos de los campos $X^m(\xi)$ (con $m = p + 1, \dots, D - 1$) que se encuentran dentro del volumen barrido sobre el espacio-tiempo. Por esta analogía

con las cuerdas, la acción más sencilla (con simetría de Weyl) sería

$$S = -\tau_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi_0} \sqrt{\det(G_{\alpha\beta})}, \quad (2.19)$$

donde τ_p es la tensión de la brana, y que como en el caso de la cuerda es una constante que deja adimensional la acción; $G_{\alpha\beta}$ es la métrica inducida sobre la brana, conocida como el jalamiento (“pullbacks”) de la métrica del espacio-tiempo $G_{\mu\nu}$ a la brana, es decir,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Por otro lado, la dependencia del dilatón e^{ϕ_0} en la acción (2.19) proviene de pedir que sea invariante bajo las dilataciones de Weyl, asociadas justamente con la posibilidad de interponer un factor que expanda o comprima la métrica del espacio tiempo. Además, la identificación de la constante de acoplamiento de cuerdas abiertas g_s y el dilatón dada por

$$g_s \equiv e^{\phi_0}; \quad (2.21)$$

proviene del resultado de Polchinski [16], donde se muestra que los modos de las D p-branas corresponden a diagramas de cuerdas abiertas.

De la misma manera que hemos considerado el acoplamiento de los campos $X^m(\xi)$ a la métrica $G_{\mu\nu}$, podemos hacerlo a otros campos del fondo, tales como el tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$ del sector NS-NS. La dependencia de la acción a este nuevo término estará dada por el campo $B_{\alpha\beta}$, que se define de manera equivalente a $G_{\alpha\beta}$ en la ecuación (2.20). A su vez, podemos establecer una acción que tome en cuenta a los campos de norma $A_\alpha(\xi)$ que se encuentran sobre la p-brana; y la manera de incluirlos, conservando invarianza de norma (ante el grupo $U(1)$) en los campos $B_{\alpha\beta}$ y A_α , es mediante el término $B_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta}$, donde $F_{\alpha\beta}$ está definido como en (1.6) para los campos A_α y con un grupo de norma $U(1)$. La acción de las branas que toma en cuenta todos estos términos es la llamada de acción de Dirac-Born-Infeld, y que aunque no se conoce de manera completa (al igual que la de cuerdas), tiene una parte fundamental motivada por estas ideas y por resultados en el límite de bajas energías (i.e. $\alpha' \ll 1$ y que corresponde a la teoría de campos). La forma de dicha acción para una p-brana está dada por

$$S = -\tau_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{\det(G_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta})}, \quad (2.22)$$

donde τ_p , la tensión de la p-brana, está dada por

$$\tau_p = \frac{(2\pi\sqrt{\alpha'})^{1-p}}{2\pi\alpha'}; \quad (2.23)$$

y que como vemos, para el caso $p = 1$ se reduce a la tensión de la cuerda T_c .

Por último, es importante hacer mención que el dilatón $e^{-\phi}$ y los términos $G_{\alpha\beta}$ y $B_{\alpha\beta}$, son invariantes bajo una transformación más general que la del grupo de Poincaré: el llamado grupo conforme, el cual veremos más adelante.

2.2.2 Geometría en la Presencia de D p-branas

Las D p-branas son objetos que tienen la llamada carga de Ramond-Ramond (R-R) [22], y por lo tanto uno puede buscarlos dentro de las teorías de pura supergravedad como objetos, con esta carga, que deforman el espacio-tiempo. Dado que la métrica que producen es similar a la de los hoyos negros de Schwarzschild, es que son llamadas D p-branas “negras”. Una manera formal de encontrar el espacio solución que describen estas branas negras es proponer un ansatz de métrica que respete las simetrías del problema, para luego encontrar el valor de cada parámetro. De esta manera buscamos soluciones estáticas, que preservan translaciones y rotaciones en las p dimensiones de la brana, que son esféricamente simétricas en las dimensiones restantes, y cuya fuente de carga R-R está en el origen. A su vez, al incorporar las ecuaciones de movimiento de la acción de supergravedad en D dimensiones, bajo la presencia de p-branas (i.e. condiciones a la frontera), uno obtiene restricciones sobre el ansatz propuesto. De esta manera, para una p-brana uno obtiene la fórmula de Horowitz y Strominger [18]

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-2\frac{d-2}{\Delta}} (Sgn() f dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{2\frac{p+1}{\Delta}} \left(f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \right), \\ H &= 1 + \left(\frac{R}{r} \right)^{d-2}, \quad f = 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{d-2}, \\ \Delta &= (p+1)(d-2) + \frac{1}{2} a^2 (D-2), \\ R^{2(d-2)} + r_0^{d-2} R^{d-2} &= \frac{\Delta Q^2}{2(d-2)(D-2)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $d = D - (p + 1)$, Q es la carga de la p-brana, a es una fase del campo del dilatón, y $Sgn() = -1(+1)$ para signatura de Minkowski (Euclidea). Las coordenadas (t, \vec{x}) corren a lo largo del volumen $p + 1$ dimensional generado por la p-brana, y el resto son

las coordenadas ortogonales a la misma, que en este caso están en coordenadas polares con r el radio vector y $d\Omega_{d-2}^2$ la métrica de una $(d-2)$ -esfera unitaria S^{d-2} .

Si $r_0 = 0$ la solución es llamada extrema y no contiene singularidad alguna, mientras que para $r_0 \neq 0$ la solución es no-extrema y existe una singularidad en $r = 0$, mientras que en $r = r_0$ tenemos un horizonte de eventos. Para los casos $(D, p) = (11, 5), (11, 1), (10, 3)$ el parámetro $a = 0$, lo cual los coloca en casos especialmente simples. Por otro lado, si consideramos un conjunto de N D p-branas^{||} extremas ($r_0 = 0$) de alguno de los tres casos anteriores, la carga Q de la ecuación (2.24) estaría dada por

$$Q = Ng_s \frac{(2\pi\sqrt{\alpha'})^{d-2}}{\Omega_{d-1}^r} \Rightarrow R^{d-2} = Ng_s \frac{(2\pi\sqrt{\alpha'})^{d-2}}{(d-2)\Omega_{d-1}^r}; \quad (2.25)$$

donde Ω_{d-1}^r es el volumen de una esfera de radio r en $(d-1)$ dimensiones.

En particular, para un conjunto de N 3-brana extremas ($r_0 = 0$) en 10 dimensiones se obtiene la solución a la métrica (2.24) descrita por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2), \\ H &= 1 + \frac{R^4}{r^4} \quad R^4 \equiv 4\pi g_s N (\alpha')^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para terminar con la sección de Branas, deseamos señalarle al lector que muchas de las ideas y ecuaciones aquí mencionadas sólo muestran de manera introductoria todo el trabajo que se ha hecho al respecto, y recomienda leer los artículos [12] y [13] para una revisión más completa sobre el tema.

2.3 Dualidad y Teoría M

Como ya hemos dicho, en los últimos años se han podido relacionar los distintos tipo de teorías de cuerdas. Ésto ha sido gracias al descubrimiento de un tipo de simetría llamada la dualidad T y la dualidad S. Antes de continuar con la dualidad T, deseamos dejar en claro que de ahora en adelante diremos que dos teorías son duales o equivalentes, cuando entre ellas no exista diferencia en la física que describen, o bien, como lo describe

^{||}La métrica que describe, en supergravedad, un conjunto de N D p-branas se obtiene de la misma manera que para una brana, pero con una fuente de carga N veces mayor que la propuesta para una sólo brana.

Maldacena et al [31]: se habla de "dualidad" cuando una teoría tiene (al menos) dos descripciones diferentes.

Dualidad T

Esta dualidad es una simetría que se ha encontrado en ciertas teorías de cuerdas. La simetría radica en que una teoría de cuerdas compactificada en un círculo de radio R es equivalente a otra teoría de cuerdas distinta compactificada en un círculo de radio α'/R . Esto es, una teoría compactificada sobre un círculo muy pequeño es equivalente a otra teoría compactificada sobre un círculo muy grande. La simetría tiene su origen en el espectro de momentos y de masas de la teoría de cuerdas compactificada. Aunque no demostraremos los siguientes hechos, al compactificar la cuerda sobre un círculo se obtiene todo un espectro de momentos con masas dadas por $M \sim m/R$ (con m entero). Al mismo tiempo, las cuerdas cerradas tienen los llamados modos enrollados, y que son consecuencia de que la cuerda envuelva al círculo compactificado. Por eso, cuando la cuerda le da n vueltas al círculo los estados obtienen masas dadas por $M \sim nR/\alpha'$. Ahora vemos que existe una invariancia al cambiar R por α'/R , además del intercambio de m y n .

Por lo tanto, después de estudiar esta simetría en los lagrangianos de las diferentes teorías de cuerdas, encontramos que las cuerdas IIA compactificadas en un círculo de radio R son T-dual a las cuerdas IIB compactificadas sobre un círculo de radio α'/R , y viceversa. Así mismo, observamos que las cuerdas $E_8 \times E_8$ y $SO(32)$, compactificadas sobre un círculo, son T-duales. Por último, cabe señalar que la dualidad T también está probada sobre otros espacios de compactificación más complicados, sin tener todavía una generalización de la misma.

Dualidad S

Esta dualidad permite establecer una relación entre teorías perturbativas (con constante de acoplamiento g , pequeña o débil) y no perturbativas (con constante de acoplamiento g , grande o fuerte). Por ejemplo, en la cuantización que hizo Dirac para los monopolos magnéticos, el encontró que $qe = 2\pi$, donde e y q son las cargas del electrón y del monopolo magnético respectivamente. Por lo tanto, con que existiese sólo un monopolo magnético en el universo, las cargas eléctricas estarían dadas por $e = 2\pi/q$. De este hecho

parte el que si hacemos la transformación que manda $e \rightarrow 1/e$ y $q \rightarrow 1/q$ (olvidándose de constantes y tomando que $F^{\mu\nu} \leftrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$) la teoría permanece invariante; es decir, la teoría magnética sería idéntica a la eléctrica y viceversa.

Esta dualidad entre acoplamiento débil-fuerte o también llamada dualidad S, permite el trabajar con modelos de cuerdas en donde no se puede aplicar la teoría de perturbaciones. Para que la dualidad sea consistente, se sabe que la teoría no perturbativa debe de contener toda una variedad de p-branas, que juegan el papel de los monopolos magnéticos [22]. A su vez, la importancia de las p-branas dentro de esta dualidad radica en la estrecha relación de la tensión de la brana con la constante de acoplamiento de la cuerda g_s .

El primer ejemplo de esta dualidad es el de las cuerdas del tipo IIB, que para sorpresa de uno, son auto S-duales, es decir, S-duales a las cuerdas IIB. Cuando uno pasa de un acoplamiento débil a uno fuerte, las fluctuaciones cuánticas predominan y lo último que uno esperaría es obtener la misma teoría que en acoplamiento débil. Sin embargo, al estudiar la dualidad con mayor profundidad encontramos que lo que realmente ocurre es que las cuerdas fundamentales son S-duales a las D 1-branas (que también están presentes en la teoría de cuerdas IIB).

Con respecto a las cuerdas del tipo I, antes de ver cual es su teoría S-dual, podemos pensar que esta teoría es simplemente una proyección de las cuerdas del tipo IIB. Para que esta proyección sea consistente deben de estar presentes las D 9-branas; que barren un volumen de 10 dimensiones en el espacio-tiempo, pudiendo llenar todo el espacio. Dado que las cuerdas pueden acabar en cualquier brana con la condición de Dirichlet, en el caso de las D 9-branas, que llenan todo el espacio, podrían acabar en cualquier parte. Justamente esta es la definición de una cuerda abierta. Sin embargo, aunque las cuerdas del tipo I provienen de cierta proyección del tipo IIB, no son auto S-duales. Las sutilezas de la dualidad S nos llevan a que las cuerdas abiertas del tipo I sean S-duales a las cuerdas heteróticas $SO(32)$. De hecho, la teoría del tipo I contiene D 1-branas que se convierten en las cuerdas fundamentales heteróticas al hacer el mapeo de la dualidad S. Por correspondencia uno esperaría que las cuerdas heteróticas $SO(32)$ tuvieran algún objeto análogo que sobre el mapeo inverso se convirtieran en las cuerdas abiertas de la teoría I, pero esto no sucede.

Ahora bien, una teoría en once dimensiones, compuesta por supergravedad y ciertas

branas**, nos lleva en su límite de acoplamiento débil a la teoría de cuerdas IIA. Esta teoría en once dimensiones contiene membranas (2-branas) que al compactificarse en un círculo de radio $R = g_s \sqrt{\alpha'}$ dan lugar a las cuerdas fundamentales del tipo IIA. Del mismo modo, las cuerdas del tipo $E_8 \times E_8$ emergen al compactificar esta teoría de once dimensiones en un intervalo recto de largo $l = g_s \sqrt{\alpha'}$. En este caso, el espacio-tiempo de once dimensiones está dividido en dos espacios de 10 dimensiones en cada extremo del intervalo; y cada uno de estos espacios tiene un grupo de norma E_8 . De esta manera, la onceava dimensión se pierde cuando la constante de acoplamiento es pequeña y sólo aparece en el límite del acoplamiento fuerte. Esto nos lleva a completar el panorama general de lo que es una cuerda, una p-brana, y de las diferentes dualidades entre cuerdas. Ahora, para terminar con la sección de teoría de cuerdas, platicaremos un poco de lo que es la teoría M.

Teoría M

En principio, el que existan cinco teorías perturbativas de cuerdas distintas más supergravedad en once dimensiones, y con sus respectivas relaciones de dualidad que permitan pasar de una a la otra (figura (2.3)); nos lleva a pensar que quizá exista una teoría más general y cuyos límites son las teorías que conocemos. Esta teoría debería tener, en principio, once dimensiones (pues por el momento no hay necesidad de dimensiones extras) y sus objetos fundamentales no podrían ser las cuerdas, pues como vimos las cuerdas sólo viven en 10 dimensiones. Por otro lado, en esta teoría la constante de acoplamiento debería de ser aproximadamente uno, $g \sim 1$, pues las teorías límite trabajan en acoplamiento fuerte o débil. Aunque todavía no se conoce mucho acerca de esta teoría, uno esperaría que los nuevos avances en resultados no perturbativos den pistas para la estructura y los componentes de esta teoría, llamada Teoría M.

**La teoría de supergravedad en once dimensiones permite introducir sólo dos tipos de branas que se acoplen a sus campos: las 2-branas y las 5-branas.

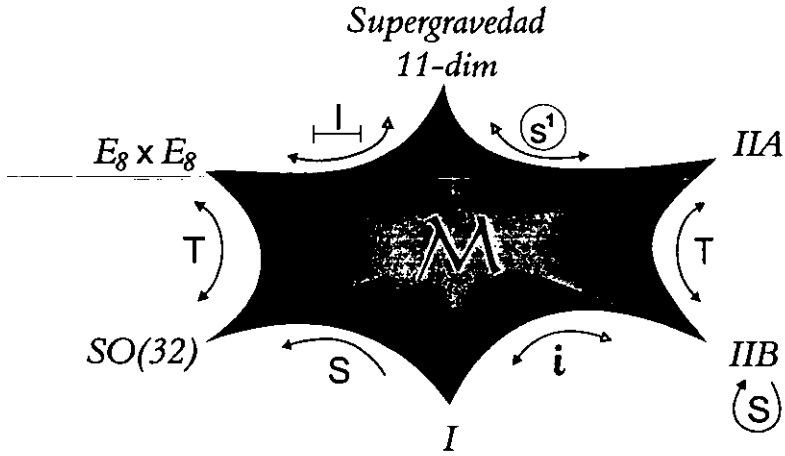


Figura 2.3: La idea de una teoría M central con sus teorías límite, que son las que actualmente conocemos, sale de las posibles conexiones entre dichas teorías. Partiendo de la Supergravedad en 11 dimensiones y en el sentido de las manecillas del reloj tenemos: el límite de la teoría en 11 dimensiones compactificada en un círculo S^1 es dual al tipo IIA de cuerdas. A su vez, el tipo IIA compactificado sobre un círculo es T-dual al tipo IIB; quienes, por su parte, son auto S-duales en 10 dimensiones. Las cuerdas de tipo I pueden obtenerse vía una proyección i de las cuerdas IIB. El tipo I de cuerdas es S-dual, en 10 dimensiones, a las cuerdas heteróticas con grupo de norma $SO(32)$; las cuales, a su vez, compactificadas en un círculo son T-duales con el otro tipo de cuerdas heteróticas, $E_8 \times E_8$. Y por último, las cuerdas $E_8 \times E_8$ se pueden obtener mediante la compactificación sobre un intervalo I de la teoría de supergravedad en 11 dimensiones.

Capítulo 3

Conjetura de Maldacena

Uno de los grandes resultados de los últimos años en la teoría de cuerdas es el llevado al cabo por Juan Maldacena [24], quien conjeturó que en ciertos espacios una teoría cuántica de Yang Mills es dual a una teoría clásica de supergravedad. Esta conjetura es válida en los llamados espacios de Anti De Sitter. Antes de considerar la conjetura de Maldacena, revisaremos de manera breve la simetría conforme y los espacios de Anti De Sitter, dado que serán de gran importancia para entender dicha conjetura.

3.1 Simetría Conforme

La simetría conforme es una simetría más general que la simetría de Poincaré, dado que además de ser invariante bajo el grupo de Poincaré (compuesto por las rotaciones de Lorentz y las translaciones en el espacio-tiempo), también es invariante bajo dilataciones y bajo una transformación más, llamada transformación conforme especial. La simetría conforme es aquel grupo de transformaciones que preserva los ángulos.

Como sabemos, el espacio de Minkowski de n dimensiones es invariante bajo el grupo de Poincaré, el cual tiene $\frac{1}{2}n(n+1)$ generadores ($\frac{1}{2}n(n-1)$ provenientes del grupo de rotaciones de Lorentz $SO(1, n-1)$ ¹ y n generadores más provenientes de las translaciones). De esta manera, el grupo conforme tendría los mismos generadores del grupo de Poincaré

¹ $SO(\xi, \chi)$ es como el grupo $SO(\chi + \xi)$, pero con la diferencia de que en este caso estamos considerando ξ "tiempos" en la métrica, esto es, existen ξ coordenadas que tienen signo '+' y χ coordenadas con signo '-' en la métrica η_{ab} .

más los referentes a las dilataciones y a las transformaciones conformes especiales. Por un lado, las dilataciones están dadas por

$$\vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (3.1)$$

que suman un generador más debido al parámetro λ . Por su parte, las transformaciones conformes especiales son

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + \alpha^\mu x^2}{1 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{x} + \alpha^2 x^2}, \quad (3.2)$$

que a su vez, suman n generadores más, dado que incluye n parámetros α^μ ($\mu = 1, \dots, n$). De esta manera tenemos $n + 1$ generadores más; y en total suman $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ generadores para el grupo conforme. Se puede demostrar que el algebra que obedecen los generadores del grupo conforme corresponde a la del grupo $SO(2, n)$.

3.2 Espacio de Anti De Sitter

A partir de la ecuación de Einstein, sin presencia de masa y con una constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}\Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

podemos construir dos soluciones en D -dimensiones: el espacio de De Sitter dS_D , para $\Lambda < 0$, y el de Anti De Sitter AdS_D , para el caso opuesto ($\Lambda > 0$). La ecuación anterior implica que el escalar de curvatura R es una constante y el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ es proporcional a la métrica

$$R = \frac{D}{2 - D}\Lambda, \quad R_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{2 - D}g_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

El espacio de Anti De Sitter de $D \equiv n + 1$ dimensiones se puede representar como un subespacio de un espacio plano E de dimensión $D + 1 = n + 2$ y con métrica $\eta_{ab} = \text{diag}(+, -, -, \dots, -, +)$; donde la norma de un vector $\xi^a = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^n, \xi^{n+1})$ es

$$\xi^2 = \eta_{ab}\xi^a\xi^b = (\xi^0)^2 + (\xi^{n+1})^2 - \sum_{i=1}^n (\xi^i)^2. \quad (3.5)$$

El subespacio que representa al espacio AdS_{n+1} se construye mediante la condición

$$\xi^2 = b^2, \quad (3.6)$$

donde b es una constante; y se le llama el radio del espacio de Anti De Sitter. Se puede comprobar que la métrica η_{ab} junto con la condición (3.6) es solución de la ecuación de Einstein (3.3) y donde la relación entre la constante cosmológica Λ y el radio del espacio Anti De Sitter b es

$$\Lambda = \frac{n(n+1)}{b^2}. \quad (3.7)$$

Sabemos que el espacio pseudo-euclideo E^{n+2} (con dos coordenadas "temporales": ξ^0 y ξ^{n+1}) es invariante bajo el grupo de transformaciones $SO(2, n)$. De este modo, podemos ver que el grupo que preserva la isometría del espacio AdS_{n+1} es equivalente al grupo de isometría de E^{n+2} . Por lo tanto, $SO(2, n)$ es el grupo de isometría del espacio AdS_{n+1} , y tiene una dimensión de $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, que como sabemos es también el número de generadores del grupo. Para entender un poco más la relación que tiene este grupo de isometría con un grupo conforme, veamos otra forma de escribir el espacio de Anti De Sitter AdS_{n+1} , mediante el cambio de variables

$$U = \xi^0 + i\xi^{n+1}, \quad V = \xi^0 - i\xi^{n+1}. \quad (3.8)$$

Entonces la ecuación que describe el espacio AdS_{n+1} es

$$\xi^2 = UV - \bar{\xi}^2 = b^2. \quad (3.9)$$

Al hacer el reescalamiento de las variables U, V y ξ^a por un factor \mathfrak{R}

$$U \rightarrow \mathfrak{R}\bar{U}, \quad V \rightarrow \mathfrak{R}\bar{V}, \quad \xi^a \rightarrow \mathfrak{R}\bar{\xi}^a;$$

y tomando el límite cuando $\mathfrak{R} \rightarrow \infty$; es fácil ver que la superficie que describe la frontera del espacio de Anti De Sitter es

$$\bar{U}\bar{V} - \bar{\xi}^2 = 0. \quad (3.10)$$

Además, $t\mathfrak{R}$ lleva al mismo resultado que \mathfrak{R} , por lo que podemos reescalar las variables siempre por una constante t , de modo que la ecuación anterior nos lleve a

$$(\xi^0)^2 + (\xi^{n+1})^2 = \bar{U}\bar{V} = 1 = \bar{\xi}^2 \quad (3.11)$$

que representa la topología de dos esferas. Esto nos lleva a decir que la topología de la frontera del espacio de Anti De Sitter es $S^1 \times S^{n-1}$, y que representa la topología del espacio de Minkowski (o Euclideo) compactificado. Esto indica que recuperamos un espacio de Minkowski o Euclideo (dependiendo del signo relativo entre la métrica de la esfera S^1 y la S^{n-1}) al descompactificar las dos esferas.

De este modo, el grupo isométrico $SO(2, n)$ del espacio de Anti De Sitter, funciona como grupo conforme para la frontera del mismo espacio. Esto se puede ver de la siguiente manera: como ya dijimos, el número de generadores de $SO(2, n)$ es $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, mientras que para el grupo de isometría de un espacio n dimensional como el de la frontera es de $\frac{1}{2}n(n+1)$ generadores. Por lo tanto, la diferencia de generadores entre los grupos de isometría del espacio de Anti De Sitter y de su frontera es de $n+1$ generadores, que corresponden, precisamente, a las otras simetrías del grupo conforme, es decir, a las dilataciones y las transformaciones conformes especiales.

Otras representaciones del espacio de Anti De Sitter (AdS)

Implementemos otro cambio de variables, utilizado por Maldacena, dado por

$$\begin{aligned}\xi^0 &= \frac{1}{2U} \left(1 + U^2(b^2 + \bar{x}^2 - t^2) \right) \\ \xi^n &= \frac{1}{2U} \left(1 - U^2(b^2 - \bar{x}^2 + t^2) \right) \\ \xi^{n+1} &= bUt \\ \xi^i &= bUx^i;\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $u > 0$. A partir de la métrica del espacio pseudo-euclideo E^{n+2}

$$ds^2 = (d\xi^0)^2 + (d\xi^{n+1})^2 - d(\bar{\xi})^2\tag{3.13}$$

podemos construir la métrica del espacio de Anti De Sitter $(ds^2)_{AdS_{n+1}}$ en estas nuevas coordenadas (U, t, \bar{x}) , y que está dada por

$$(ds^2)_{AdS_{n+1}} = b^2 \left(U^2(-dt^2 + d\bar{x}^2) + \frac{dU^2}{U^2} \right).\tag{3.14}$$

Una última forma que nos será muy útil es la del espacio de Anti De Sitter con tiempo euclidiano. Para escribir este tipo de espacio de Anti De Sitter, utilicemos la

ecuación (3.9); de donde despejamos U en términos de V y $\bar{\xi}$. Posteriormente bajo el cambio de variables

$$\frac{t}{b} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{V^2}{b^2(b^2 + r^2)} \right), \quad (3.15)$$

y tomando a $\bar{\xi}$ en coordenadas polares de modo que $r^2 \equiv \sum \xi_i^2$, $i = 1, \dots, n$; la métrica del Anti De Sitter con tiempo euclideo[†] se escribe como

$$ds^2 = dU dV - d\bar{y}^2 = \left\{ 1 + \frac{r^2}{b^2} \right\} dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{b^2}} + r^2 d\Omega_{n-1}^2, \quad (3.16)$$

donde $d\Omega_{n-1}$ es la métrica de la esfera unitaria de $n - 1$ dimensiones. Por construcción, la métrica anterior es solución de la ecuación de Einstein sin materia y con constante cosmológica Λ (3.3), la cual, sin embargo, contiene otra solución estática y esféricamente simétrica. Ésta es la llamada solución del hoyo negro del espacio Anti De Sitter AdS_{n-1} (con coordenada temporal euclidea), cuya métrica es similar a la anterior pero con una singularidad en $r=0$ y con un horizonte de eventos para un cierto radio crítico. Esta métrica es

$$ds^2 = \left\{ 1 + \frac{r^2}{b^2} - \frac{\omega_n M}{r^{n-2}} \right\} dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{b^2} - \frac{\omega_n M}{r^{n-2}}} + r^2 d\Omega_{n-1}^2, \quad (3.17)$$

donde

$$\omega_n = \frac{16\pi\kappa_N^2}{(n-1)\Omega_{n-1}}, \quad \Omega_{n-1} \equiv Vol(S^{n-1}), \quad (3.18)$$

y en la cual, M es la masa del hoyo negro[‡] y κ_N^2 es la constante de la gravitación universal en N dimensiones. Es claro que esta ecuación tiene singularidades cuando el "potencial" $\mathcal{V}(r)$ se hace nulo para un radio crítico r_c , es decir,

$$\mathcal{V}(r_c) \equiv \left(1 + \frac{r^2}{b^2} - \frac{\omega_n M}{r^{n-2}} \right) \Big|_{r=r_c} = 0; \quad (3.19)$$

y por ende la métrica solo nos interesa para $r > r_+$, donde r_+ es la solución mayor de la ecuación anterior. Cabe apuntar que para $r = r_+$ la métrica no es singular siempre y

[†]Es importante notar que el tiempo euclideo surge al realizar el cambio de variables (3.8) y tomar a ξ^{n+1} como $i\xi^{n+1}$.

[‡]Aunque no haremos los cálculos, se puede mostrar [30] que este parámetro M es la masa del hoyo negro, al calcular la entropía del sistema y compararla con la fórmula de Beckenstein-Hawking.

cuando el tiempo sea una variable periódica[¶] con período

$$\int dt \equiv \frac{1}{T} = \frac{4\pi b^2 r_+}{n r_+^2 + (n-2)b^2} = 4\pi [\mathcal{V}'(r_+)]^{-1}. \quad (3.20)$$

Esta afirmación se puede obtener al expandir la métrica alrededor del horizonte

$$ds^2 = \mathcal{V}'(r_+)(r - r_+) dt^2 + \frac{dr^2}{\mathcal{V}'(r_+)(r - r_+)}, \quad (3.21)$$

donde hemos expandido el potencial $\mathcal{V}(r)$ en una serie de Taylor alrededor del radio r_+ ; y considerado sólo el primer término. Ahora bien, introduciendo el cambio de variables

$$\theta \equiv \frac{1}{2} \mathcal{V}'(r_+) t \quad z = \frac{2(r - r_+)^{1/2}}{(\mathcal{V}'(r_+))^{1/2}}, \quad (3.22)$$

la métrica (3.21) toma la forma

$$ds^2 = dz^2 + z^2 d\theta^2. \quad (3.23)$$

Esta métrica no es singular cuando la variable θ tiene un periodo de 2π . Por lo tanto, la ecuación (3.22) implica que la variable t también debe de ser periódica, y con periodo $4\pi [\mathcal{V}'(r_+)]^{-1}$.

Si graficamos $\frac{1}{T}$ como función de r_+ (ver figura (3.1)), vemos que para $r_+ \rightarrow 0$ y $r_+ \rightarrow \infty$, el inverso de la temperatura (i.e. $\frac{1}{T}$) se aproxima a cero, lo que da lugar a temperaturas muy grandes. Calculando la función de partición clásica para las soluciones sin hoyo negro (3.16) y con hoyo negro (3.17), tenemos que

$$e^{-I} = e^{-I_1} + e^{-I_2} = e^{-I_1}(1 + e^{-\Delta I}), \quad (3.24)$$

donde I_1 y I_2 son las acciones euclideanas clásicas de la solución (3.16) y (3.17) respectivamente. A partir de la expresión exacta de $\Delta I = I_2 - I_1$ (la cual no calcularemos, pero se puede encontrar una revisión detallada en [30]) uno encuentra que $\Delta I > 0$ para temperaturas pequeñas ($T \ll 1$), lo que representa un dominio de la solución sin hoyo negro (3.16) sobre la solución con hoyo negro (3.17) en la función de partición. Sin embargo, para grandes temperaturas ($T \gg 1$) se tienen dos casos posibles: cuando $r_+ \rightarrow 0$ y cuando $r_+ \rightarrow \infty$. En el primer caso, se tiene que $\Delta I \approx 0$, lo cual representa que ambas

[¶]A esta variable periódica que denominamos T , la hemos llamado temperatura; sin embargo, es importante señalar que no pretendemos colocarle ningún sentido termodinámico, aunque en otros trabajos si lo tenga [25], [28] y [30].

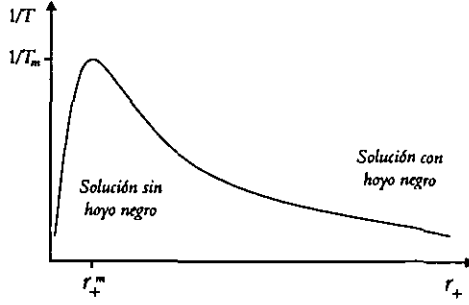


Figura 3.1: Gráfica del inverso de la temperatura $1/T$ como función del radio crítico r_+ . La función tiene un máximo $1/T_m = 4\pi b/\sqrt{n(n-2)}$ para $r_+^m = \sqrt{\frac{n-2}{n}}b$. En los límites $r_+ = 0$ y $r_+ = \infty$ la función $1/T$ tiende a cero, pero sólo en el segundo límite la solución del hoyo negro (3.17) predomina sobre la solución sin hoyo negro (3.16).

soluciones contribuyen de manera similar a la función de partición. Por el contrario, para el segundo caso, se obtiene que $\Delta I < 0$, lo que representa que la solución de hoyo negro (3.17) domina sobre la solución sin hoyo negro (3.16). De esta manera, si deseamos utilizar únicamente la solución con hoyo negro (3.17), nos conviene tomar el límite $r_+ \rightarrow \infty$, que a su vez, corresponde a grandes temperaturas.

En el caso de la ecuación $V(r_+) = 0$, el límite $r_+ \rightarrow \infty$ es equivalente a pedir que $M \rightarrow \infty$, como se observa a partir de despejar M de la ecuación (3.19). Al tomar este límite es conveniente hacer el rescalamiento

$$r \rightarrow r_1 = \left(\frac{\omega_n M}{b^{n-2}}\right)^{-1/n} r \quad (3.25)$$

de manera que la métrica (3.17) se reescribe como

$$ds^2 = \left\{ \left(\frac{\omega_n M}{b^{n-2}}\right)^{-\frac{2}{n}} + \frac{r_1^2}{b^2} - \frac{b^{n-2}}{r_1^{n-2}} \right\} \left(\frac{\omega_n M}{b^{n-2}}\right)^{\frac{2}{n}} dt^2 + \frac{dr_1^2}{\left(\frac{\omega_n M}{b^{n-2}}\right)^{-\frac{2}{n}} + \frac{r_1^2}{b^2} - \frac{b^{n-2}}{r_1^{n-2}}} + r_1^2 \left(\frac{\omega_n M}{b^{n-2}}\right)^{2/n} d\Omega_{n-1}^2. \quad (3.26)$$

Como lo muestran en [28] y [30], la topología de esta solución es $S^2 \times S^{n-1}$, donde las variables (t, r_1) definen la topología de S^2 , y $d\Omega_{n-1}^2$ es la esfera S^{n-1} . Por consiguiente, la frontera de este espacio es $S^1 \times S^{n-1}$, como ya habíamos visto de (3.11). A su vez, el último término en la métrica está multiplicado por un factor proporcional a $M^{2/n}$, por

lo que al tomar el límite $M \rightarrow \infty$ (manteniendo r_1 constante) el radio de la esfera se hace muy grande y estamos en un espacio prácticamente plano, por lo que la topología de la frontera es $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Esta topología corresponde a un espacio de Minkowski con coordenada temporal periódica.

Al tomar el límite $M \rightarrow \infty$ la solución crítica del potencial (3.19) es aproximadamente

$$(r_1)_+ = (b^2 \omega_n M)^{(1/n)} \equiv U_0 b^2, \quad (3.27)$$

y por consiguiente, la temperatura toma el valor de

$$T = \frac{n}{4\pi b^2} (b^2 \omega_n M)^{(1/n)} = \frac{n}{4\pi} U_0. \quad (3.28)$$

También bajo este límite ($M \rightarrow \infty$), el primero de los tres términos del potencial $\mathcal{V}(r)$ es despreciable (para $r_1 \geq (r_1)_+$), y el último término de la ecuación (3.26) se traduce simplemente en la métrica de las coordenadas cartesianas $x_i = 2X_i/b$ del plano \mathbb{R}^{n-1} . Aunado a esto, si se introduce el cambio de variables

$$r_1 = \frac{b}{U_0} U; \quad (3.29)$$

la métrica (3.26) toma la forma de

$$(ds^2)_{AdS_{n+1}}^{HN} = b^2 \left\{ \frac{1}{U^2} \frac{dU^2}{1 - \left(\frac{U_0}{U}\right)^n} + U^2 \left[\left(1 - \frac{U_0^n}{U^n}\right) dt^2 + \sum_{i=1}^{n-1} dX_i^2 \right] \right\}. \quad (3.30)$$

Las dos métricas, (3.16) y (3.30), son importantes porque representan las soluciones de los espacios que describen las branas. Por un lado, la métrica (3.16) representa al espacio de Anti De Sitter, y por el otro lado, describe a las llamadas soluciones extremas de las p-branas; que en particular, cuando $n = 4$ es igual a la métrica que describe una 3-brana negra en supergravedad. De manera equivalente, la métrica del espacio Anti De Sitter con hoyo negro (3.30) también describe las métricas, llamadas no extremas, de las p-branas negras; y que para una 5-brana y una 2-brana^{||} en la teoría M, están descritas por dicha métrica (3.30) para $n = 6$ y $n = 3$ respectivamente.

^{||}Cabe señalar que no existen cuerdas en 11 dimensiones y por lo tanto no tiene sentido hablar de D 5-branas o D 2-branas, dado que no existen condiciones de Dirichlet si no hay cuerdas pegadas a las branas.

3.3 Conjetura de Maldacena

La conjetura de Maldacena propone que un sistema de N D 3-branas (i.e. un conjunto de N branas de dimensión 3, con condiciones de frontera del tipo Dirichlet en las cuerdas que terminan en las branas) en la teoría de cuerdas IIB compactificada sobre un espacio $AdS_5 \times S^5$, es equivalente a la teoría de campos con cuatro supersimetrías, o mejor conocida como $\mathcal{N}=4$ Super Yang Mills en (3+1) dimensiones planas, y con un grupo de norma $U(N)$.

Partiendo de la teoría de cuerdas IIB con constante de acoplamiento g_s , que permanece fija, consideremos un sistema de N D 3-branas paralelas sobre un espacio plano de Minkowski, que están separadas por una distancia r . En una primera descripción, las D 3-branas están descritas por la acción de Dirac-Born-Infeld (2.22) y barren un espacio de (3+1) dimensiones sobre un espacio (9+1) dimensional. Dentro de esta teoría tenemos cuerdas cerradas y cuerdas abiertas cuyos extremos terminan sobre las D 3-branas, por lo que tenemos tres tipos de excitaciones: las referentes a las cuerdas cerradas en el espacio libre de branas, los modos de las cuerdas abiertas sobre las branas (que describen a su vez las excitaciones de las branas como lo muestra Polchinski [16]) y las interacciones entre las cuerdas cerradas y las abiertas de ambos sistemas.

Tomando el límite de la distancia entre branas tendiendo a cero ($r \rightarrow 0$), el grupo de norma que se obtiene de las cuerdas abiertas sobre las branas es $U(N)$ como se vio en la sección §2.2, y al tomar el límite de energías bajas (que es equivalente al límite de $\alpha' \rightarrow 0$ como se entiende a partir de la relación (2.5)); los únicos modos que podemos excitar en las cuerdas son los que no tienen masa. Esta idea se puede ver al considerar que el espectro de masas está cuantizado en términos de la masa de Planck (ver ecuaciones (2.15) y (2.16)), y por lo tanto, a bajas energías todos los modos masivos no interactúan y se pueden integrar “fuera” de nuestra acción, es decir, los estados masivos no son variables dinámicas de la teoría. Los estados sin masa de las cuerdas cerradas (que corresponden a gravitones) sobre el espacio libre de branas están descritos, en el límite de bajas energías, por la acción de supergravedad IIB**; mientras que para las branas, la acción de Dirac-Born-Infeld (2.22), en el límite de bajas energías, se reduce a la teoría de Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$ en (3+1) dimensiones [10], [17]. Consideremos la acción efectiva de los

**Se conoce como supergravedad IIB, a límite de bajas energías de la teoría de cuerdas IIB, es decir, únicamente a los modos no masivos de la teoría.

modos sin masa, que está dada por

$$S = S_{\text{bulto}} + S_{\text{brana}} + S_{\text{int}} \quad (3.31)$$

donde S_{bulto} , en el límite de bajas energías, representa a la acción de supergravedad en diez dimensiones; S_{brana} es la acción de la brana que describe un volumen de (3+1) dimensiones en el espacio-tiempo; y S_{int} describe la interacción entre los modos de la brana y los del bulto (bulk). La acción S_{brana} contiene a la de Super Yang Mills $\mathcal{N} = 4$ en (3+1) dimensiones, más correcciones que desaparecen en el límite de bajas energías, y en donde la constante de acoplamiento g_{YM} de Super Yang Mills está relacionada con la constante de cuerdas g_s mediante la expresión

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s \quad (3.32)$$

y de manera más general, para una p-brana se tiene la relación

$$\frac{g_{YM}^2}{4\pi} = g_s (2\pi\sqrt{\alpha'})^{p-3}; \quad (3.33)$$

la cual se obtiene a partir de la acción de Dirac-Born-Infeld (2.22).

Por otro lado, la constante de acoplamiento en S_{int} entre las branas y la supergravedad en el bulto es proporcional a $(\alpha')^2 g_s$, y por lo tanto este término de interacción desaparece bajo el límite de bajas energías. De esta manera, a bajas energías nos quedamos únicamente con dos sistemas desacoplados: por un lado el sistema de supergravedad pura en el bulto, y por el otro, una teoría de Super Yang Mills en cuatro dimensiones. Es importante darse cuenta que los dos límites que hemos considerado han sido $r \rightarrow 0$ (la distancia entre branas tiende a cero, para obtener el grupo de norma $U(N)$) y $\alpha' \rightarrow 0$ (bajas energías). Definimos el límite del horizonte cercano al incorporar la restricción $U = \frac{r}{\alpha'} = \text{fijo}$, es decir,

$$r \rightarrow 0, \quad \alpha' \rightarrow 0, \quad U \equiv \frac{r}{\alpha'} = \text{fijo}. \quad (3.34)$$

Por otro lado, en una segunda descripción, las D p-branas son objetos que deforman al espacio tiempo, y que en particular la métrica que describe un sistema de N D 3-branas, como vimos en el capítulo anterior en la ecuación (3.35), está dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(d\tau^2 + r^2 d\Omega_5^2), \\ H &= 1 + \frac{R^4}{r^4} \quad R^4 \equiv 4\pi g_s N (\alpha')^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

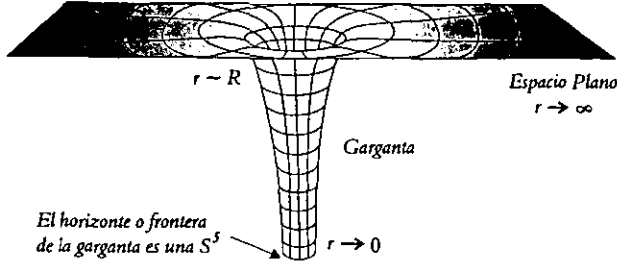


Figura 3.2: Una posible descripción de las D 3-branas es mediante que deforman el espacio-tiempo de manera similar a los hoyos negros (métrica de Schwarzschild). En la teoría de super-gravedad a estos objetos que tienen la misma carga que las D p-branas y que deforman el espacio como se ve en la figura se les denomina p-branas “negras”. El espacio cercano a la brana $r \rightarrow 0$ tiene una garganta que comienza a partir de $r \sim R$, donde b es el radio de la cinco esfera, que a su vez es la frontera de la garganta. El espacio cuando $r \rightarrow \infty$ es asintóticamente plano.

Como se puede observar, para $r \rightarrow \infty$ la métrica anterior tiende a un espacio de Minkowski plano. Sin embargo, al tomar el límite $r \rightarrow 0$ la función H diverge como $1/r^2$, lo que nos lleva a un espacio que tiene una gran garganta en las dimensiones ortogonales a la 3-brana. Dicha garganta comienza en $r \sim R$, como se observa en la figura (3.2). Bajo los límites (3.34) la función armónica H se reduce al cociente R^4/r^4 , y usando la variable $U \equiv \frac{r}{R}$, podemos reescribir la métrica (3.35) como:

$$ds^2 = \alpha' \left[\frac{U^2}{\sqrt{4\pi g_s N}} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \sqrt{4\pi g_s N} \frac{dU^2}{U^2} + \sqrt{4\pi g_s N} d\Omega_5^2 \right]. \quad (3.36)$$

Los primeros dos términos de esta métrica describen un espacio de Anti De Sitter de cinco dimensiones (AdS_5), como se puede ver a partir de la ecuación (3.14). Mientras que el último término representa a una cinco-esfera. Al la métrica (3.36) se le conoce como la solución no extrema de una p-brana cerca del horizonte; y que como mencionamos en la sección anterior sobre los espacios de Anti De Sitter, las soluciones no extremas de D 3-branas (en cuerdas IIB), 5-branas y 2-branas (en la teoría M), corresponden a espacios de Anti De Sitter de diferentes dimensión multiplicados por esferas.

De la ecuación (3.36), apreciamos que los radios del espacio AdS_5 y S^5 son iguales, esto es

$$R^2 = R_{AdS_5}^2 = R_{S^5}^2 \equiv b^2 = \alpha' \sqrt{4\pi g_s N}. \quad (3.37)$$

Sin embargo, para que esta teoría se reduzca a supergravedad, debemos considerar que supergravedad es válida cuando el espacio no tiene gran curvatura, esto es, cuando los radios de los espacios AdS_5 y S^5 son grandes comparados con la escala de cuerdas. Por el contrario, si los radios fuesen menores que la escala de cuerdas, surgirían efectos como la aparición de modos masivos debido al enrollamiento de las cuerdas en estas dimensiones compactas. Por lo tanto, confiamos en que supergravedad es una buena aproximación cuando

$$\frac{b^2}{\alpha'} \gg 1, \quad (3.38)$$

y por las ecuaciones (3.32), (3.37) es equivalente a los límites^{††}:

$$Ng_s \gg 1 \quad \lambda \equiv Ng_{YM}^2 \gg 1. \quad (3.39)$$

Y de esta manera, cuando N es grande tenemos aproximadamente 10 dimensiones planas para cierta vecindad de cualquier punto.

Cuando un observador se encuentra en infinito ($r \rightarrow \infty$), bajo el límite de bajas energías, sólo distingue dos tipos de excitaciones desacopladas. Una de las excitaciones es la de partículas sin masa (gravitones) que se mueven sobre el espacio plano y que no interactúan con los otros modos, que son partículas que se encuentran dentro de la garganta [26], [27]. Este desacoplamiento se puede entender por el hecho de que, bajo el límite de bajas energías, la longitud de onda de las partículas en el bulto es mucho más grande (aun considerando el corrimiento gravitacional) que el radio de la garganta b [31], por lo que no interactúan con las partículas que se encuentran dentro de la misma. Por otro lado, las partículas dentro de la garganta ($r \sim 0$), bajo el límite de bajas energías, cada vez encuentran más difícil subir el potencial gravitacional y escapar a la región asintóticamente plana [24], y por lo tanto, no tienen interacción con los gravitones del bulto. Dentro de la garganta uno pensaría que, bajo los límites (3.34), los únicos estados dinámicos serían aquellos sin masa, dado que la energía de los estados masivos son proporcionales a la masa de Planck (recordemos las ecuaciones (2.15) y (2.16)) y por lo tanto muy pesados. Sin embargo, el resultado anterior sólo es válido en sistemas de referencia planos, y dentro de la garganta no sería el caso. A partir de la ecuación (3.35)

^{††}Aquí hemos considerado el que $g_{YM} \leq 1$, pero si tuviéramos lo contrario $g_{YM} > 1$, entonces se cumpliría la condición $N/g_{YM} \gg 1$ en lugar de la ecuación (3.39). En otras palabras necesitamos N grande, pero no g_{YM} grande. Del mismo modo para g_s .

vemos que las energías E_∞ y E_c , que miden un observador en infinito y otro a cierta distancia r de la garganta, están relacionadas por el término temporal de la métrica, es decir,

$$E_\infty = (G_{tt})^{1/2} E_c; \quad (3.40)$$

donde E_c es la energía de los modos de la cuerda, y que es proporcional a la masa de Planck (ver ecuaciones (2.15) y (2.16)) o al inverso de la $\sqrt{\alpha'}$. Bajo el límite de bajas energías, la energía que mide el observador en infinito se convierte en

$$E_\infty \sim \frac{r}{b} E_c \sim \frac{r}{b\sqrt{\alpha'}} \sim \frac{r}{\alpha'} = U; \quad (3.41)$$

que se mantiene fija bajo los límites del horizonte cercano (3.34). Por lo tanto, los modos que sobreviven dentro de la garganta son todas las excitaciones posibles de la cuerda. resumiendo, tenemos dos sistemas desacoplados: gravitones fuera de la garganta en un espacio plano de 10 dimensiones (supergravedad), y todos los modos de las cuerdas dentro de la garganta en un espacio $AdS_5 \times S^5$ (ver figura (3.3)) y que cumplen con (3.34). Sin embargo, para que estos dos sistemas sean descritos por dos teorías distintas se necesitan dar condiciones de frontera entre los dos sistemas; y como veremos esto juega un papel muy importante dentro de la Conjetura.

También cabe señalar que en esta descripción de las branas, al calcular el flujo de la 5-forma Ramond-Ramond sobre la cinco esfera, es decir, el flujo de carga Q , uno encuentra que es proporcional a N , como se puede ver a partir de la ecuación (2.25).

Resumiendo, las dos descripciones de este sistema de N D 3-branas^{††} son: una en base a la acción de Dirac-Born-Infeld y la otra a partir de objetos con carga R-R en supergravedad y que deforman el espacio-tiempo. A partir de estas dos descripciones distintas, se pueden identificar las diferentes teorías. Por un lado, la teoría de supercuerdas IIB compactificada sobre el espacio $AdS_5 \times S^5$ (más ciertas condiciones de frontera o inclusive ciertos grados de libertad en la frontera [24]) es equivalente a la teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills en un espacio de Minkowski de cuatro dimensiones. Es decir, en la primera descripción, bajo el límite de bajas energías (3.34) y N grande, las teorías desacopladas son supergravedad y $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills, mientras que para la segunda descripción, también tenemos supergravedad tanto fuera de la garganta, como dentro de la misma. Por

^{††}Claramente hemos tomado el llamado límite del horizonte cercano de este sistema de N D 3-branas, por lo que no tenemos descripciones del sistema completo.

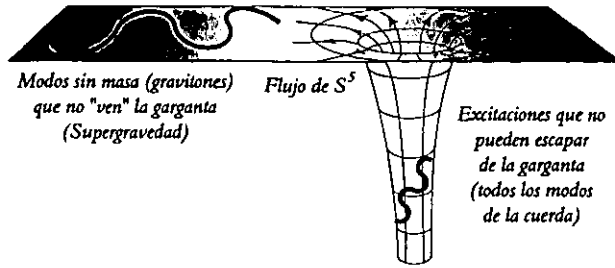


Figura 3.3: Bajo el límite de bajas energías, los dos sistemas se desacoplan, dejando gravitones fuera de la garganta (supergravedad en 10 dimensiones planas), y todos los estados de la supercuerdas en un espacio $AdS_5 \times S^5$ dentro de la garganta. Por otro lado, el flujo de la cinco-esfera que sale de la garganta es proporcional a la variable N .

consiguiente, se puede suponer que si ambas descripciones tienen supergravedad sobre un espacio plano como una de las teorías, las otras dos teorías deben de ser equivalentes, dado que ambas son descripciones de un cierto límite del sistema de N D 3-branas. Dada esta equivalencia entre $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills y supergravedad en $AdS_5 \times S^5$, Maldacena [24] conjeturó que la dualidad es entre $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills y supercuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$. El esquema de la figura (3.4) resume la idea de la Conjetura. Al colocar la teoría de Yang Mills en cuatro dimensiones planas sobre la frontera del espacio AdS, algunas formulaciones resultan más sencillas, como veremos más adelante.

3.3.1 Rangos de Validez y Evidencias de la Conjetura

Hemos tomado algunas aproximaciones y ahora es el momento de analizar los diferentes rangos de validez de las mismas. Por un lado, la teoría de Yang Mills se puede resolver perturbativamente[†] si la constante de acoplamiento es pequeña ($g_{YM} \ll 1$), o bien

$$\lambda \ll 1, \tag{3.42}$$

[†]Cabe señalar también que, bajo el límite llamado de 't Hooft, en donde $N \rightarrow \infty$ y el producto $\lambda \equiv Ng_{YM}^2$ permanece fijo, la teoría de Yang Mills puede ser resuelta, dado que en el cálculo de amplitudes (1.12) sólo los diagramas de Feynman planos sobreviven; y aunque la serie es infinita si converge bajo estas condiciones.

Sistema de ND 3-branas

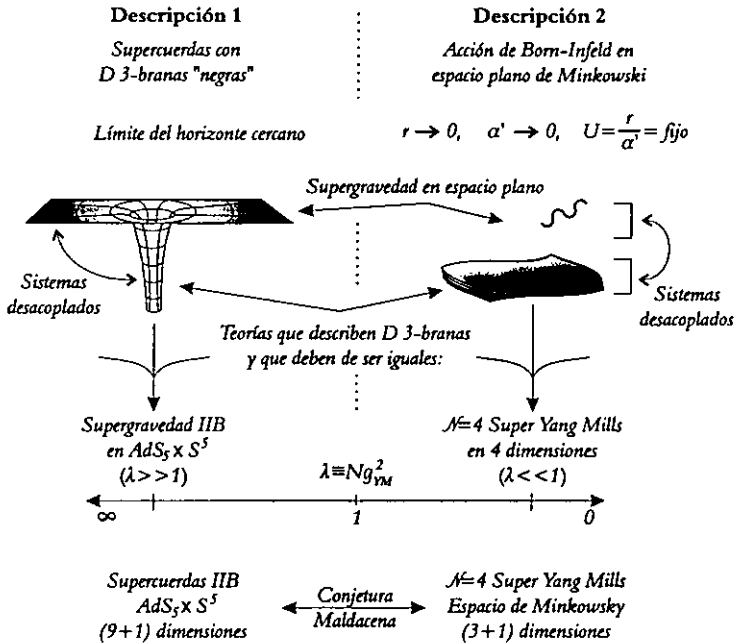


Figura 3.4: Esquema de la conjetura de Maldacena.

para N grande. Por otro lado, sabemos que supergravedad es válida cuando el radio de curvatura del espacio de Anti De Sitter y de la esfera es grande, esto es

$$\lambda \gg 1. \tag{3.43}$$

Por lo tanto, vemos que los límites en donde ambas teorías se vuelven perturbativas, son perfectamente incompatibles, lo cual es de esperarse dado que las dos teorías lucen muy distintas. Sin embargo, un hecho importante es que cuando una teoría está fuertemente acoplada la otra lo está débilmente, y viceversa[†]. Esto hace a la conjetura difícil de probar, pero a su vez, muy útil.

Es importante señalar que ambas teorías se encuentran en espacios diferentes, dado que por un lado, supercuerdas está en un espacio $AdS_5 \times S^5$ que tiene 10 dimensiones, y por el otro lado, Super Yang Mills se encuentra en un espacio de cuatro dimensiones sobre la frontera del espacio de Anti De Sitter AdS_5 . Aunque no se conoce el mapeo que lleva de una teoría y su espacio a la otra, podemos dar algunas evidencias que sugieren la veracidad de esta conjetura, como las simetrías en ambos espacios, o bien, las equivalencias de las funciones de correlación calculadas en ambas teorías (sólo para ciertos casos en donde es posible calcular funciones de correlación en regímenes fuertemente acoplados).

Una de las evidencias de la existencia de esta relación esta dada por la idea de que ambas teorías, con sus respectivos espacios de compactificación, tienen el mismo número de simetrías. Empecemos comparando las simetrías globales en ambas teorías. Por un lado, en la teoría de cuerdas IIB, compactificada sobre $AdS_5 \times S^5$, se tiene un grupo de isometría $SO(2,4)$ del espacio AdS_5 , y un grupo de rotaciones $SO(6)$ para la esfera S_5 . Inclusive, dado que trabajamos con espinores, los grupos de invarianza, isomorfos a los anteriores, para el espacio AdS_5 y S^5 son el $SU(2,2)$ y el $SU(4)$ respectivamente. El equivalente del primer grupo en la teoría de $\mathcal{N}=4$ Super Yang Mills es el grupo conforme en la frontera del espacio AdS_5 , es decir, $SU(2,2)$. Por otro lado, el equivalente del grupo de rotaciones de la esfera en la teoría de $\mathcal{N}=4$ Super Yang Mills es la llamada simetría-R ($SU(4)$). Esta simetría es menos evidente, y aunque no daremos los detalles de la misma, podemos afirmar que está presente [24], dado que deja invariante al lagrangiano de $\mathcal{N}=4$ Super Yang Mills; aun cuando los 8 grados de libertad bosónicos (que corresponden a 6 campos escalares φ_i y un campo de norma A^μ) y a los 8 campos fermiónicos $Q_\alpha^a, \bar{Q}_\alpha^a$ (con

[†]Dado que la teoría de Super Yang Mills es invariante ante transformaciones conformes esta aseveración del acoplamiento fuerte o débil no está del todo bien, pero ya veremos adelante como se puede solucionar.

$a = 1, 2$ y $\alpha = 1, 2, 3, 4$) si se transforman bajo la representación fundamental de $SU(4)$ [‡].

A su vez, existen otras dos simetrías globales, pero discontinuas, en ambos espacios. Por el lado de supergravedad de tipo IIB existe una invarianza bajo el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$, que se puede apreciar al compatificar la teoría de cuerdas sobre un 2-toro [21] con parámetro modular τ , y donde la teoría es invariante bajo $SL(2, \mathbb{Z})$, es decir, bajo la transformación $\tau \rightarrow (a\tau + b)/(c\tau + d)$, donde a, b, c y d son enteros con $ad - bc = 1$. A su vez, Super Yang Mills también contiene al grupo $SL(2, \mathbb{Z})$ basado en la dualidad de Montonen-Olive [19].

Por otro lado, el número de supercargas fermiónicas (o bosónicas, ya que hay supersimetría) también es igual. Para el caso de supercuerdas del tipo IIB en 10 dimensiones tenemos $2^{D/2} = 2^5 = 32$ componentes complejas para los espinores fermiónicos. Dado que son espinores de Weyl y Majorana, el número de restricciones por espinor es de cuatro (dos para Weyl y dos para Majorana). Por lo tanto tenemos $32/4 = 8$ componentes complejas, y por lo tanto, 16 reales. Tomando en cuenta que tenemos dos supersimetrías, dado que la teoría de cuerdas del tipo II siempre tiene dos supersimetrías, tenemos al final un factor de 2 supercargas. Por lo tanto, tenemos $16 \times 2 = 32$ supercargas fermiónicas en la teoría de supergravedad IIB. Del mismo modo, para la teoría de $\mathcal{N}=4$ Super Yang Mills se tienen $2^{D/2} = 2^2 = 4$ componentes complejas para los espinores. Si ahora consideramos que los espinores son únicamente de Weyl (o de Majorana) tenemos 2 restricciones, y por ende sólo $4/2 = 2$ componentes complejas, es decir, 4 reales. Al considerar las 4 supersimetrías que tenemos en esta teoría, el total es de $4 \times 4 = 16$ supercargas reales. Sin embargo, ahora nos podríamos preguntar dónde están las otras 16 supercargas faltantes, y la respuesta está en el hecho de que la teoría de Yang Mills es supersimétrica y conforme. Cuando tenemos una teoría supersimétrica conforme, existen dos variables distintas α y β en las transformaciones de supersimetría, relacionadas entre que sí por $\alpha = \gamma^\mu x_\mu \beta$ (donde γ^μ son las matrices de Dirac). Partiendo del hecho de que las dos variables son distintas (ya que por ejemplo si β no depende de las coordenadas, entonces α si lo hará) y de que generan la misma transformación de supersimetría, tenemos 16 supercargas asociadas con cada una de las variables [20], y por ende, al final sumamos un total de 32 supercargas, que concuerda con el resultado encontrado en la teoría de supergravedad IIB.

[‡]Los campos bosónicos φ_i se transforman como un tensor antisimétrico, el campo de norma A^μ como un singlete, y los campos fermiónicos Q_α^a como vectores ante el grupo $SU(4)$ de la simetría R.

3.3.2 Funciones de Correlación (Definición Matemática de la Conjetura)

Otra de las pruebas que confirman la conjetura es aquella que compara las funciones de correlación en supergravedad IIB y en Super Yang Mills. En una teoría de campos, las funciones de correlación u operadores son los objetos naturales a considerar, y por ende, si las dos teorías son equivalentes, estos operadores deben de tener una relación con las funciones de correlación de la teoría de supergravedad IIB. La manera más sencilla de ver que hay una relación sería comparando la función de partición de ambas teorías, pero esto no es posible. Ahora bien, si se hace para cierta función de correlación en particular uno puede comparar los resultados en los valores de expectación encontrados en ambas teorías, y ver que efectivamente son iguales; por ejemplo, se podría realizar el cálculo para funciones de correlación de dos puntos ($\langle O_1 O_2 \rangle$). Por lo tanto, vemos que si uno cambia el valor de expectación de un campo en la teoría de cuerdas, debe de existir un cambio asociado en la teoría de Yang Mills para el valor de expectación del operador equivalente, y viceversa.

En el espacio que describen las 3-branas negras separamos dos regiones: dentro de la garganta $r \rightarrow 0$ y el espacio plano fuera de la garganta $r \rightarrow \infty$. Sin embargo, si deseamos tener una teoría completa dentro de la garganta (como es la teoría de cuerdas IIB compactificada sobre el espacio $AdS_5 \times S^5$) y desacoplada del resto del espacio, tenemos que dar condiciones a la frontera, y que de manera explícita serían condiciones de frontera sobre los campos donde comienza la garganta, es decir, en $r \sim b$. De este modo, un campo $\Phi(\vec{x}, r)$ tendría un valor en la frontera bien definido dado por $\Phi_0(\vec{x})$. Partiendo de esta idea, la relación entre un operador $O(\vec{x})$ en Super Yang Mills, y un campo $\Phi(\vec{x})$ en la teoría de cuerdas, cuyo valor en la frontera $r \sim b$ es $\Phi(\vec{x})|_{fr} = \Phi_0(\vec{x})$, está dada por [38], [39]

$$Z(\Phi_0)_{IIB} = \langle e^{\int d^4x \Phi_0(\vec{x}) O(\vec{x})} \rangle_{SYM}; \quad (3.44)$$

donde el lado derecho de la igualdad corresponde a la función de partición del operador O en la teoría de Yang Mills, y que es simplemente la función generadora de correlaciones del campo O con una fuente arbitraria Φ_0 . Por lo tanto, podemos obtener cualquier función de correlación del operador O tomando derivadas funcionales de esta función generatriz con respecto al campo Φ_0 . A su vez, el lado izquierdo de la igualdad (3.44) es la función

de partición completa de la teoría de cuerdas IIB, esto es

$$Z(\Phi_0)_{IIB} \equiv \int_{\Phi \rightarrow \Phi_0} D\Phi e^{-S[\Phi]}, \quad (3.45)$$

pero con la condición de $\Phi(\vec{x})|_{fr} = \Phi_0(\vec{x})$. Esta función de partición de cuerdas resulta más sencilla de calcular bajo el límite de supergravedad ($\lambda \gg 1$), donde sólomente se toma el orden cero en α' , es decir, $Z(\Phi_0)_{IIB} \simeq e^{-S_{SUGRA}(\Phi_0)}$.

Se cree que la fórmula (3.44) es válida en general para cualquier campo Φ , y por ende, cada función de correlación en la teoría de cuerdas tiene una correspondencia uno a uno con su similar en la teoría de campos. Es importante señalar que la fórmula (3.44) prácticamente es la definición matemática de la Conjetura y aunque la relación no ha sido demostrada en general para cualquier propagador; se ha probado para ciertos casos. Como habíamos señalado, en la dualidad, cuando una teoría está en el régimen $\lambda \gg 1$. la otra lo está en el régimen $\lambda \ll 1$, y viceversa. Por consiguiente, una comparación directa entre las funciones de correlación en ambas teorías resulta, en general, imposible. sin embargo, existen algunas funciones de correlación que se han calculado, en Super Yang Mills, para $\lambda \gg 1$ y $\lambda \ll 1$, o bien, para funciones de correlación que no tienen correcciones cuánticas que dependan de λ . Algunos de los casos en los que se han mostrado la equivalencia son:

- Funciones de correlación de 2 puntos: para campos escalares con o sin masa [38], [39]; para gravitones [40] y gravitinos sin masa [41]; para espinores libres de Dirac con masa [42]; para p-formas [45]; para tensores de rango dos anti-simétricos [43] y simétricos [44]; para campos de Rarita-Schwinger (espín 3/2) [46], [47], [48], [49]; y para corrientes de la simetría R [50].
- Funciones de correlación de 3 puntos: para para campos escalares [52], y con auto-interacción [54]; para campos escalares, de norma y fermiónicos con corrientes del grupo $SU(4)$ [51]; para vectores y campos libres de Dirac [53]; para dos espinores y n escalares [55]; y para corrientes de la simetría R [50].
- Funciones de correlación de 4 puntos: para campos escalares con auto-interacción [54]; para campos escalares con masa [52], [56]; para campos escalares masivos, campos vectoriales sin masa e intercambios de un gravitón [57], [58], y además vectores masivos [59]; para dilatones y axiones [60], [61]; para propagadores del

gravitón y del bosón de norma [62]; o bien, para intercambios de un bosón de norma entre campos escalares [63], [64].

Existen también trabajos relacionados, como los de [65] - [75]; pero sobre todo, en funciones de correlación de 4 puntos [76] - [79].

3.3.3 Implicaciones de la Conjetura

Bajo estas evidencias, la conjetura parece ser muy sólida y abre un nuevo panorama dentro de la teoría de cuerdas, dado que relaciona teorías con difícil corroboración experimental, como lo es la teoría de cuerdas, con teorías de campos cuyas predicciones y comprobaciones están al nivel de los aceleradores de partículas de hoy en día. Es importante volver a mencionar una de las mayores utilidades de estas dualidades propuestas por Maldacena y que radica en poder realizar cálculos en la teoría de supergravedad en su aspecto perturbativo, que después serán interpretarlos como resultados de la teoría de Yang Mills fuertemente acoplada. Esto abre un nuevo panorama para el estudio de teorías de campo fuertemente acopladas, y cuyas técnicas, hasta antes de la Conjetura, eran bastante aproximadas.

En este mismo sentido, dentro de las propuestas de Maldacena [24], la dualidad entre supercuerdas IIB sobre $AdS_5 \times S^5$ y $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills no es la única, pero si es la más sólida y la que se tiene mejor estudiada. Sin embargo, en esta dualidad, dado que la teoría de Yang Mills es conforme, la constante de acoplamiento g_{YM} puede estar en la fase de confinamiento o de Coulomb, y sin evolucionar con respecto a la energía, dado que todas las funciones beta (1.27) son cero para todos los órdenes en la teoría de perturbaciones. Sin embargo, los problemas en teoría de campos con constante de acoplamiento fuerte son muy interesantes y no se pueden resolver analíticamente, por lo que nos gustaría poder utilizar la conjetura de Maldacena en este sentido. Para esto necesitamos que la teoría de Yang Mills este fuertemente acoplada, y el mecanismo más sencillo es tomando la teoría de $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills a temperatura constante, esto es, considerando su versión euclídeana con la coordenada temporal compactificada. Sin embargo, esto reduciría la teoría a ser tridimensional, lo cual ya no es deseable dado que no refleja el mundo que vemos actualmente. No obstante, existen generalizaciones de la Conjetura de Maldacena que permite tener una teoría de campos en 3+1 dimensiones acoplada fuertemente. Una

de estas generalizaciones es la $M_{AdS_7 \times S^4} \rightarrow YM$, y donde la idea es la misma que en la conjetura de Maldacena, pero con modificaciones en la teoría inicial y en su espacio de compactificación, como veremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Aplicaciones de la Correspondencia AdS / Teorías de Campo

Existen varias “dualidades de Maldacena” dependiendo de las teorías que lo integran, así como de los espacios de compactificación. Entre estas correspondencias AdS / Teorías de Campo, encontramos una que fue propuesta por Maldacena [24] y trabajada posteriormente por Witten [25], y que nos permite resolver el problema $U(1)$ y del confinamiento.

Antes de continuar es importante recordar al lector que en el apéndice A se encuentra un resumen de las principales fórmulas y definiciones utilizadas en los capítulos 3 y 4.

4.1 Correspondencia: Teoría M en $AdS_7 \times S^4 \rightarrow$ Yang Mills

En el trabajo de Witten [25] se pretende hacer de la conjetura de Maldacena algo más práctico, dado que en lugar de expresar la equivalencia que ya hemos visto, señala que la teoría M (que está en 11 dimensiones) con un sistema de N 5-branas, en un espacio $AdS_7 \times S^4$, es equivalente a la teoría de Super Yang Mills en 5 dimensiones. Sin embargo, al tomar la versión euclideana con coordenada temporal compactificada (i.e. temperatura constante), la dualidad cambia a una teoría de Yang Mills en 4 dimensiones[†]. La

[†]Al compactificar la coordenada temporal euclideana sobre un círculo de radio pequeño (i.e. temperatura grande) el espacio en la teoría dual prácticamente pierde una dimensión.

diferencia es que ahora la equivalencia es con teoría de campos en 4 dimensiones y sin supersimetría[†], lo cual es más útil, dado que se parece al espacio que nosotros vemos hoy en día en los aceleradores de partículas, donde sabemos no hay supersimetría. En esta nueva equivalencia, a la que llamaremos $M_{AdS_7 \times S^4} \rightarrow YM$, los radios del espacio de Anti De Sitter y de la esfera son

$$R_{AdS_7} \equiv b, \quad R_{S^4} \equiv L_{11} = \frac{b}{2} = l_{11} (\pi N)^{1/3}, \quad (4.1)$$

donde l_{11} es la longitud de Planck en once dimensiones, y está dada por $l_{11} = \sqrt{\alpha'}$.

A primera instancia parecería que partimos de una teoría M completamente desconocida; pero hay que pensar que aunque no conozcamos todos los objetos y las propiedades de esta teoría, si sabemos que uno de sus límites es la teoría de cuerdas IIA. Como hemos visto en el capítulo 2, la dualidad S nos dice que la teoría M (o el límite de supergravedad en 11 dimensiones), compactificada sobre un círculo de radio $R_1 = g_s \sqrt{\alpha'}$, es equivalente a las cuerdas de tipo IIA. A diferencia del caso de la conjetura de Maldacena donde se partía de D 3-branas, ahora se utilizan las 5-branas dentro de la teoría M, para que cuando la compactifiquemos sobre R_1 , obtengamos una teoría de cuerdas IIA con D 4-branas.

Otra de las soluciones interesantes de las branas negras son las 5-branas no-extremas en 11 dimensiones, y donde la métrica que describen está dada por la fórmula (2.24) para $p = 5$, $D = 11$ y $r_0 \neq 0$, esto es

$$(ds^2)_{11} = \frac{r_{11}}{l_{11}(\pi N)^{1/3}} \left\{ \left(1 - \frac{r_{0,11}^3}{r_{11}^3} \right) dt_{11}^2 + \sum_{i=1}^5 d(x_{11})_i^2 \right\} + \frac{(l_{11})^2 (\pi N)^{2/3}}{r_{11}^2} \left\{ \frac{dr_{11}^2}{1 - \left(\frac{r_{0,11}}{r_{11}} \right)^3} + r_{11}^2 d\Omega_4^2 \right\}; \quad (4.2)$$

donde las variables y constantes de la ecuación tienen un subíndice 11 que representa la dimensión del espacio-tiempo. Las coordenadas $(t_{11}, (x_{11})_i)$ describen el volumen espacio-temporal de la brana, y el resto son coordenadas ortogonales a la misma, que en este caso, están en coordenadas polares (r_{11}, Ω_4) . De esta manera, el valor del radio vector dado por $r_{11} = r_{0,11}$ corresponde al horizonte de eventos. Si realizamos el cambio de variables

$$U_{11}^2 \equiv \frac{r_{11}}{(l_{11})^3}, \quad (4.3)$$

[†]A su vez, al compactificar sobre un círculo, uno tiene la libertad de escoger la condición de frontera anti-periódica para los fermiones, y por ende, romper supersimetría.

donde la variable U_{11} tiene unidades de longitud inversa, entonces la métrica (4.2) toma la forma

$$(ds^2)_{11} = (l_{11})^2 \left[\frac{U_{11}^2}{(\pi N)^{1/3}} \left\{ \left(1 - \frac{U_{0,11}^6}{U_{11}^6} \right) dt_{11}^2 + \sum_{i=1}^5 d(x_{11})_i^2 \right\} + \frac{(\pi N)^{2/3}}{U_{11}^2} \left(\frac{4dU_{11}^2}{1 - \left(\frac{U_{0,11}}{U_{11}} \right)^6} + U_{11}^2 d\Omega_4^2 \right) \right]. \quad (4.4)$$

En esta representación de la métrica de una M 5-brana, veamos lo que sucede con los modos energéticos dentro de la garganta, vistos por un observador que se encuentra en infinito (i.e. $r_{11} \rightarrow \infty$). Para empezar, la diferencia en las energías E_∞ y E_{11} , que miden un observador en infinito y otro a una distancia r respectivamente, está dada por (3.40), y que en nuestro caso toma la forma de

$$E_\infty = (G_{tt})^{1/2} E_{11} \sim \left(\frac{(l_{11})^2 U_{11}^2}{(\pi N)^{1/3}} \right)^{1/2} \frac{1}{l_{11}} \sim \left(\frac{U_{11}^2}{(\pi N)^{1/3}} \right)^{1/2} \sim U_{11}; \quad (4.5)$$

donde hemos supuesto que los estados energéticos dentro de la teoría son proporcionales a la única constante, es decir, a l_{11} . Para conservar todos los estados de energía dentro de la garganta necesitamos definir los nuevos límites del horizonte cercano (3.34), dados por

$$r_{11} \rightarrow 0 \quad l_{11} \rightarrow 0 \quad U_{11}^2 = r_{11}/(l_{11})^3 = \text{fijo}. \quad (4.6)$$

Por otro lado, si reescalamos las coordenadas sobre la brana por

$$t_{11} \rightarrow t'_{11} = (4\pi N)^{-1/2} t_{11}, \quad (x_{11})_i \rightarrow (x'_{11})_i = (4\pi N)^{-1/2} (x_{11})_i; \quad (4.7)$$

la métrica (4.4) se escribe de la siguiente manera

$$(ds^2)_{11} = b^2 \left[\frac{U_{11}^2}{4} \left\{ \left(1 - \frac{U_{0,11}^6}{U_{11}^6} \right) d(t'_{11})^2 + \sum_{i=1}^5 d(x'_{11})_i^2 \right\} + \frac{1}{U_{11}^2} \left(\frac{dU_{11}^2}{1 - \left(\frac{U_{0,11}}{U_{11}} \right)^6} + \frac{U_{11}^2}{4} d\Omega_4^2 \right) \right]. \quad (4.8)$$

Es fácil notar que la métrica (4.8) representa un espacio $AdS_7 \times S^4$, dado que los primeros términos corresponden a la métrica del espacio de Anti De Sitter de 7 dimensiones (ver ecuación (3.30) para $n = 6$) con radio b ; y el último término representa una esfera unitaria de 4 dimensiones de radio $L_{11} = b/2$.

Como podemos ver a partir de la ecuación (3.28) la variable $U_{0,11}$ se relaciona con

la temperatura T'_{11} ⁵ como $U_{0,11} = 4\pi T'_{11}/3$; sin embargo, si nos quedamos con la métrica (4.4), la relación (3.28) ya no permanece igual dado que ahora interviene T_{11} y no T'_{11} ; y en cambio tenemos que

$$U_{0,11} = \frac{8\pi}{3}(\pi N)^{1/2}T_{11}. \quad (4.9)$$

Ahora bien, pretendemos compactificar la onceava dimensión en el círculo de radio $R_1 = g_s \sqrt{\alpha'}$ sobre la coordenada $(x_{11})_5$, para obtener una métrica en 10 dimensiones. La métrica en 10 dimensiones se consigue a partir de la ecuación siguiente [33]

$$(ds^2)_{11} = e^{4\phi/3} \left(d(x_{11})_5 - A_\mu d(x_{11})^\mu \right)^2 + e^{-2\phi/3} (ds^2)_{10}; \quad (4.10)$$

donde el campo A_μ y el dilatón ϕ provienen de una combinación de las componentes de la métrica, de once dimensiones, $G_{\mu x_5}$ y $G_{x_5 x_5}$. En esta expresión vemos que efectivamente la métrica correspondiente a las 10 dimensiones se obtiene cuando el término relacionado con la dimensión $(x_{11})_5$ se hace muy pequeño. Del mismo modo, si comparamos el coeficiente de $(x_{11})_5$ de la ecuación (4.4) con la ecuación anterior, vemos que el valor del dilatón es

$$e^\phi = g_s \frac{(l_{11} U_{11})^{3/2}}{(\pi N)^{1/4}}, \quad (4.11)$$

donde el factor g_s lo hemos incluido para que el valor del dilatón en la frontera de AdS_7 sea $e^{\phi_0} = g_s$ (ecuación (2.21)); que a su vez se puede comprobar al tomar r_{11} como el radio del espacio de Anti De Sitter b en la expresión (4.11). Por lo tanto, obtenemos una métrica en 10 dimensiones cuando la dimensión $(x_{11})_5$ se hace muy pequeña, esto es

$$ds^2_{11} \xrightarrow{R_1 \rightarrow 0} g_s^{-2/3} \frac{(\pi N)^{1/6}}{l_{11} U_{11}} (ds^2)_{10}; \quad (4.12)$$

y que de manera explícita resulta ser

$$ds^2_{10} = (l_{10})^3 \left[\frac{U^3}{(\pi N)^{3/2}} \left\{ \left(1 - \frac{U_0^6}{U^6} \right) dt^2 + \sum_{i=1}^4 dx_i^2 \right\} + \frac{(\pi N)^{1/2}}{U} \left(\frac{4dU^2}{1 - \frac{U_0^6}{U^6}} + U^2 d\Omega_4^2 \right) \right]; \quad (4.13)$$

donde ahora las variables U, t, x_i y l_{10} se relacionan con sus semejantes de la métrica en 11 dimensiones por

$$\begin{aligned} U &= g_s^{-1/3} U_{11} & t &= g_s^{1/3} U_{11} \\ x_i &= g_s^{1/3} (x_{11})_i & l_{10} &= g_s^{1/3} l_{11} \\ L &\equiv L_{10} = g_s^{1/3} L_{11} = \sqrt{\alpha'} (\pi g_s N)^{1/3}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

⁵De la misma manera que l_{11} está definida (4.7), la variable T'_{11} se define por $T'_{11} = (4\pi N)^{1/2} T_{11}$; para que sea autoconsistente con la idea de que $T'_{11}{}^{-1} = f dt'_{11}$.

Bajo estas redefiniciones tanto el dilatón (4.11) como la relación entre la constante U_0 y temperatura T (4.9) lucen igual en las variables U, t, x_i y l_{10} , es decir,

$$e^\phi = g_s \frac{(l_{10}U)^{3/2}}{(\pi N)^{1/4}}, \quad U_0 = \frac{8\pi}{3}(\pi N)^{1/2}T. \quad (4.15)$$

Por otro lado, L también se puede expresar en términos de la constante gravitacional en 10 dimensiones κ_{10} como

$$L^9 = \frac{\kappa_{10}^2 N^3 l_{10} g_s^{2/3}}{2^6 \pi^4} = \frac{\kappa_{10}^2 N^3 \sqrt{\alpha'} g_s}{2^6 \pi^4}, \quad (4.16)$$

donde κ_{10}^2 está relacionada con α' de la siguiente manera

$$2\kappa_{10}^2 = (2\pi)^7 g_s^{-2/3} (l_{10})^8 = (2\pi)^7 g_s^2 (\alpha')^4. \quad (4.17)$$

4.2 La Susceptibilidad Topológica (El Problema $U(1)$)

Como mencionamos en la sección anterior, empezamos con un sistema de N 5-branas en la teoría M, para que después de compactificada la 11^{ava} dimensión (x_5), obtengamos N D 4-branas en la teoría de cuerdas IIA sobre 10 dimensiones. La acción de Dirac-Born-Infeld para las N D 4-branas es

$$S = \tau_4 \int d^5 \xi \left(e^{-\phi} \text{STr} \sqrt{\det(\mathbf{G}_{\alpha\beta} + \mathbf{B}_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' \mathbf{F}_{\alpha\beta})} + \frac{1}{8} \epsilon^{\rho\mu\nu\alpha\beta} A_\rho F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right), \quad (4.18)$$

que se obtiene a partir de la expresión (2.22) para $p = 4$, y de un término extra que es el símil, en la teoría de campos o de Yang Mills, del término $\theta T\tau(F\tilde{F})$ en (1.1). En este caso, la tensión de las 4-branas, dada por (2.23) para $p = 4$, es

$$\tau_4 = \frac{1}{(2\pi)^4 (\alpha')^{5/2}}. \quad (4.19)$$

Como vimos en la sección 3.2, el espacio de Anti De Sitter puede escribirse en una métrica cuyo tiempo t sea euclideo. Si ahora compactificamos esta coordenada temporal en un círculo de radio R_2 , obtenemos una expresión de la acción de Dirac-Born-Infeld (4.18) para las N D 4-branas en la forma de

$$S = \frac{\tau_4}{T g_s} \int d^4 x \left(\text{STr} \sqrt{\det(\mathbf{G}_{\alpha\beta} + \mathbf{B}_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' \mathbf{F}_{\alpha\beta})} + \frac{1}{8} \epsilon^{0\mu\nu\alpha\beta} A_0 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right), \quad (4.20)$$

donde la constante g_s proviene del dilatón e^ϕ (2.21); y T es la temperatura, que a su vez, está dada por

$$T^{-1} \equiv \int dt = 2\pi R_2. \quad (4.21)$$

En la ecuación (4.20) hemos considerado que el único término importante en el potencial A_μ es A_0 , dado que esta componente (integrada sobre el círculo de radio R_2) es igual a la constante θ que va frente al término $Tr(F\tilde{F})$ [31], es decir

$$\theta = \int_{R_2} A_0 dt. \quad (4.22)$$

Si expandimos la acción (4.20) en términos de α' , a segundo orden encontramos los términos

$$S = \frac{\tau_4}{T g_s} (2\pi\alpha')^2 \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} Tr(F^2) + \frac{1}{8} g_s A_0 Tr(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \right\}; \quad (4.23)$$

donde hemos despreciado los demás términos de la expansión dado que no contribuyen en la solución del problema $U(1)$.

Resumiendo, lo que tenemos es un espacio de 11 dimensiones que hemos compactificado dos veces, la primera con la coordenada x^5 en un círculo de radio $R_1 = g_s \sqrt{\alpha'}$, y la segunda (el tiempo euclideo) en un círculo ortogonal al primero y de radio $2\pi R_2 = T^{-1}$. Para que la acción (4.23) sea equivalente a la de Yang Mills (i.e. como el término F^2 del lagrangiano (1.1)), el coeficiente que está enfrente de la integral en la ecuación (4.23) debe de ser inversamente proporcional al cuadrado de la constante de acoplamiento de Yang Mills g_{YM}^2 , es decir,

$$\frac{1}{g_{YM}^2} = \frac{\tau_4}{T g_s} (2\pi\alpha')^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 g_s T \sqrt{\alpha'}} \quad (4.24)$$

donde hemos utilizado (4.19). Por lo tanto, de la ecuación anterior y de los radios R_1 y R_2 , podemos obtener los siguientes vínculos

$$g_{YM}^2 = (2\pi g_s \sqrt{\alpha'}) (2\pi T) = (2\pi R_1) (2\pi T) = \frac{2\pi R_1}{R_2}. \quad (4.25)$$

Utilizando la definición del parámetro $\lambda \equiv N g_{YM}^2 / (2\pi)$, encontramos las relaciones

$$\frac{N g_{YM}^2}{2\pi} = \lambda = 2\pi R_1 T N, \quad \frac{\lambda}{T N} = 2\pi g_s \sqrt{\alpha'}. \quad (4.26)$$

A partir de las ecuaciones (4.19) y (4.26), tenemos que

$$\frac{\tau_4(2\pi\alpha')^2}{Tg_s} = \frac{1}{(2\pi)^2 T \sqrt{\alpha'} g_s} = \frac{N}{2\pi\lambda}; \quad (4.27)$$

por lo que la acción (4.23) puede reescribirse de la siguiente manera

$$S = \frac{N}{2\pi\lambda} \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr}(F^2) + \frac{1}{8} g_s A_0 \text{Tr}(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \right\}. \quad (4.28)$$

Para resolver el problema $U(1)$ utilizaremos la relación entre los operadores y los campos de la conjetura de Maldacena, que se muestra en la ecuación (3.44), pero ahora en el contexto de la dualidad $M_{AdS_7 \times S^4} \rightarrow YM$. Definiendo el operador

$$\tilde{O}_4 = \left(\frac{N}{2\pi\lambda} \right) \cdot \frac{1}{4} \text{Tr}(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}), \quad (4.29)$$

la susceptibilidad topológica (1.24) ahora toma la forma de

$$\chi_t = \left(\frac{\lambda}{2\pi N} \right)^2 \int d^4x < \tilde{O}_4(x) \tilde{O}_4(0) >. \quad (4.30)$$

De esta manera la relación entre el operador \tilde{O}_4 y el campo $g_s A_0$ (que corresponde al campo Φ_0 de la relación (3.44) y que se identifica a partir de la ecuación (4.23)) toma la forma:

$$Z(g_s A_0)_{IIA} = < e^{\int d^4x g_s A_0(\vec{x}) \tilde{O}_4(\vec{x})} >_{YM}; \quad (4.31)$$

donde el campo $g_s A_0$ está evaluado en la frontera del espacio de Anti De Sitter para ambos lados de la igualdad anterior.

Trabajando con cuerdas IIA y en el ámbito de pura supergravedad, la parte cinética del lagrangiano del campo $g_s A_\mu$ está dada por

$$S_{IIA} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{G} \frac{g_s^2}{2} G^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} \partial_\mu A_\alpha \partial_\nu A_\beta, \quad (4.32)$$

donde $G^{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo de 10 dimensiones, es decir, la métrica (4.13).

Los términos de la métrica distintos de cero son

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{(l_{10}U)^3}{(\pi N)^{1/2}} \left(1 - \left(\frac{U_0}{U} \right)^6 \right), & G_{UV} &= \frac{4(l_{10})^3 (\pi N)^{1/2}}{U \left(1 - \frac{U_0^6}{U^6} \right)}, \\ G_{x_1 x_1} = G_{x_2 x_2} = G_{x_3 x_3} = G_{x_4 x_4} &= \frac{(l_{10}U)^3}{(\pi N)^{1/2}}, & G_{\Omega_i^2} &= \frac{(l_{10}U)^4}{(\pi N)^{2/3}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

De estos términos se obtiene fácilmente el determinante de la métrica

$$\det(G_{\mu\nu}) = G = 4 \frac{(l_{10})^{22} U^{18}}{(\pi N)^{8/3}}. \quad (4.34)$$

Dado que ahora sólo requerimos la componente temporal del campo A_μ , es decir, la componente $g, A_0 \equiv h$, el lagrangiano (4.32) se reduce a

$$S_{IIA} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10} \sqrt{G} \frac{1}{2} G^{\mu\nu} G^{00} \partial_\mu h \partial_\nu h. \quad (4.35)$$

La función h se determina en base a la ecuación de Euler-Lagrange de la acción anterior

$$\partial_\mu [\sqrt{G} G^{\mu\nu} G^{00} \partial_\nu h] = 0. \quad (4.36)$$

Por otro lado, h sólo depende de la coordenada U , dado que las otras variables no contribuyen a una divergencia total, y este término, como ya lo habíamos mencionado antes, es un término de frontera. Bajo la métrica (4.13) la ecuación de movimiento para h toma la forma

$$\partial_U \left[\frac{(l_{10})^5 U^7}{2(\pi N)^{4/3}} \partial_U h \right] = 0. \quad (4.37)$$

Si integramos la ecuación anterior con las condiciones a la frontera

$$\lim_{U \rightarrow \infty} h(U) = h^\infty, \quad h(U_0) = 0, \quad (4.38)$$

llegamos a la siguiente solución

$$h(U) = h^\infty \left[1 - \left(\frac{U_0}{U} \right)^6 \right]. \quad (4.39)$$

Reinsertando la solución anterior en la acción (4.35) obtenemos

$$\begin{aligned} S_{IIA} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10} x \sqrt{G} \frac{1}{2} G^{\mu\nu} G^{00} \partial_\mu h \partial_\nu h \\ &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10} x \partial_U \left[\frac{\sqrt{G}}{2} G^{UU} G^{00} h \partial_U h \right] \\ &= \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int L^4 d\Omega_4 \int d^4 x \int dt (\sqrt{G} G^{UU} G^{00} h \partial_U h) \Big|_\infty \end{aligned} \quad (4.40)$$

Utilizando la métrica (4.13) y la solución (4.39) obtenemos

$$(\sqrt{G} G^{UU} G^{00} h \partial_U h) \Big|_\infty = \frac{-3U_0^6 (h^\infty)^2 (l_{10})^5}{(\pi N)^{4/3}}. \quad (4.41)$$

Mediante las relaciones

$$\int d\Omega_4 = \frac{8\pi^2}{3}, \quad \int d^4x \equiv V_4, \quad \int dt = \frac{1}{T}, \quad (4.42)$$

y la ecuación (4.41), la expresión (4.40) se reescribe como

$$S_{IIA} = -V_4 \left(\frac{2\pi^2 U_0^6 (l_{10})^5 L^4}{\kappa_{10}^2 (\pi N)^{4/3} T} \right) (h^\infty)^2. \quad (4.43)$$

Como vimos la susceptibilidad topológica χ_t está dada por el producto de dos operadores \tilde{O}_4 módulo constantes (ver (4.30)); y por lo tanto, para generar dicho operador en base a la fórmula (4.31) es necesario diferenciar dos veces con respecto a h y eliminar el factor de volumen V_4 , esto es,

$$\int d^4x \langle \tilde{O}_4(x) \tilde{O}_4(0) \rangle = \frac{4\pi^2 U_0^6 (l_{10})^5 L^4}{\kappa_{10}^2 (\pi N)^{4/3} T} = \frac{2^{13} \pi^3 N^2 T^4 \lambda}{3^6}, \quad (4.44)$$

y donde hemos utilizado las relaciones (4.16), (4.17) y (4.26) en la última igualdad. Finalmente la susceptibilidad topológica, (4.30), es

$$\chi_t = \frac{2^{11} \pi \lambda^3 T^4}{3^6}. \quad (4.45)$$

4.3 El Confinamiento

El cálculo de la energía de confinamiento puede realizarse de dos maneras, una es mediante un bucle (“loop”) de Wilson y la otra es utilizando la relación entre las funciones de correlación de la Conjetura de Maldacena.

4.3.1 Cálculo Mediante el Bucle de Wilson

El potencial, o la energía de interacción, entre un cuarc y un anticuarc puede ser calculada a partir de el valor de expectación de un bucle de Wilson. En el caso de cuerdas y utilizando la correspondencia $M_{AdS_7 \times S^4} \rightarrow YM$ los cuarcs serían cuerdas en el espacio de Anti De Sitter, y que de manera más esquemática se verían como en la figura (4.1). El cuarc estaría representado por una cuerda que se encuentra adherida a una brana solitaria[¶]

[¶]Esta brana solitaria la hemos mandado a infinito para que genere un cuarc pesado (para que no influya en la dinámica del resto de los campos), dado que recordemos existen campos en el espectro de la cuerda cuya masa depende de la distancia entre branas.

por un extremo y por el otro a una de las branas en el sistema de N branas. Al tomar un cuarc y un anticuarc (en donde la orientación es inversa a la cuerda que representa al cuarc), la interacción se da de manera tal que se minimiza la acción del sistema, y de manera pictórica se vería como si una sola cuerda tuviese al cuarc y al anticuarc en cada extremo (ver la figura (4.1)). En las teorías que presentan confinamiento, calcular el valor de expectación de un bucle de Wilson se reduce a calcular el área espacio temporal (mínima) que barre una cuerda en el espacio de Anti De Sitter [34], [35]. De esta manera, calculando la energía de la cuerda que minimiza la acción y restando la energía de cada cuerda por separado (pensando en el cuarc y el anticuarc por separado como dos cuerdas independientes que se terminan en infinito sobre una brana solitaria), obtenemos el valor de la energía de confinamiento.

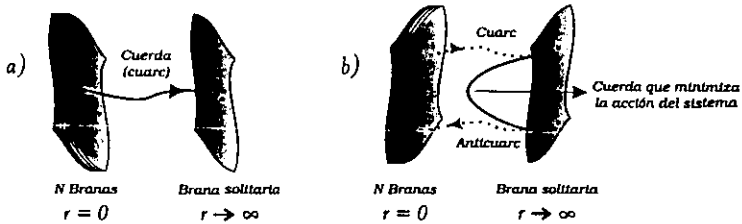


Figura 4.1: Representación en la teoría de cuerdas IIA de a) un cuarc, b) un cuarc, anticuarc y la interacción entre ambos descrita por la cuerda que minimiza la acción de la cuerda.

Calcular el área de la cuerda es equivalente a calcular la acción de la cuerda (2.1) o (2.3); que a su vez, puede reescribirse de la siguiente manera

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{\det(G_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu)}, \quad (4.46)$$

que se deriva de la relación de α' con la tensión de la cuerda T_c vista en el capítulo 2 ($T_c = 1/(2\pi\alpha')$), y de la relación:

$$\det[G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu] = \frac{1}{4} h[-h^{\alpha\beta'} G_{\mu\nu} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X^\nu]^2; \quad (4.47)$$

que se sigue de la ecuación de constricción (2.4). La métrica $G_{\mu\nu}$ corre sobre todas las dimensiones del espacio-tiempo, y que en nuestro caso corresponde a la métrica (4.13), o bien, a la forma explícita (4.33).

Es importante recalcar que estamos trabajando con la teoría M en un espacio $AdS_7 \times$

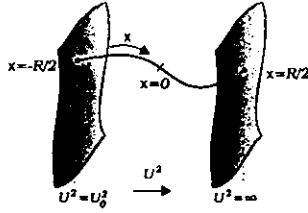


Figura 4.2: El sistema que planteamos para llegar al resultado del confinamiento consta de dos cuarcas en los extremos de la cuerda IIA que se encuentra pegada a las D 4-branas. La coordenada x corre sobre la cuerda, mientras que la U^2 es la coordenada del espacio-tiempo que mide la distancia entre branas. De este modo, U es función únicamente de x .

S^4 , y donde ha sido compactificada una de las dimensiones del espacio de Anti De Sitter (x_5), para llegar a las cuerdas del tipo IIA. Empezamos con N 5-branas, que generan un volumen espacio temporal de 6 dimensiones, y dado que compactificamos sobre una de las dimensiones de la brana, ahora son N D 4-branas. Además, una de las coordenadas temporales del espacio AdS ha sido compactificada y cuyo radio de compactificación es el inverso de la temperatura T (módulo constantes). Ahora, supongamos que tenemos un cuarc al principio y un anticuarc al final de la cuerda (cabe señalar que el principio y final son irreconocibles y por lo tanto se pueden permutar). El caso más sencillo es cuando esta cuerda es paralela a la coordenada U , y por lo mismo, sólo es función de la variable espacial de la cuerda, es decir, de σ (ver figura (4.2)). A su vez, escogiendo la norma estática donde $x \equiv x_1 = \sqrt{\alpha'}\sigma$, $x_2 = \sqrt{\alpha'}\tau$, la acción de cuerdas (4.46) toma la forma de

$$S = \frac{X_2(l_{10})^3}{2\pi\alpha'} \int_{-R/2}^{R/2} dx \left\{ \frac{U^6}{\pi N} + \left[1 - \left(\frac{U_0}{U} \right)^6 \right]^{-1} \left(\frac{d(U^2)}{dx} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (4.48)$$

donde ya hemos integrado sobre la coordenada x_2 (la coordenada temporal) y el segmento que equivale a dicha integración es X_2 . La distancia entre los dos cuarcas suponemos que es R , y como son indistinguibles la posición cero para la coordenada x está a la mitad, es decir, que para cada partícula hay una distancia de $R/2$ (ver figura (4.2)). Debido a que la acción, y de manera más precisa el lagrangiano, no depende explícitamente de la variable x , existe una cantidad conservada C al tomar la ecuación de Euler-Lagrange para

dicha variable, y que está dada por

$$\frac{U^6}{\pi N} \left\{ \frac{U^6}{\pi N} + \left[1 - \left(\frac{U_0}{U} \right)^6 \right]^{-1} \left(\frac{d(U^2)}{dx} \right)^2 \right\}^{-1/2} = C. \quad (4.49)$$

El valor de $C^2 = U_1^6/(\pi N)$ es para $U = U_1$ y que corresponde al valor de la función U^2 en el mínimo, es decir, hemos minimizado la energía, o bien, tomado la solución que representa una geodésica en el espacio AdS. Debido a la simetría de esta función U^2 con respecto a x , el mínimo se encuentra en $x = 0$. De esta manera, podemos despejar, para luego resolver la siguiente ecuación diferencial a partir de la ecuación anterior

$$\left(\frac{d(U^2)}{dx} \right)^2 = \frac{1}{\pi N} (\bar{U}^6 - \bar{U}_0^6) \left(\frac{U^6}{U_1^6} - \bar{1} \right), \quad (4.50)$$

y que integrándola se llega a

$$x = \frac{(\pi N)^{1/2}}{U_1} \int_1^{U^2/U_1^2} \frac{dw}{\left[(w^3 - 1) \left(w^3 - \left(\frac{U_0}{U_1} \right)^6 \right) \right]^{1/2}}, \quad (4.51)$$

donde hemos introducido la variable $w = U^2/U_1^2$. Si nos vamos a la frontera, que corresponde el mandar $U^2 \rightarrow \infty$ y $x = R/2$, entonces de la integral anterior obtenemos

$$\frac{R}{2} = \frac{(\pi N)^{1/2}}{U_1} \int_1^\infty \frac{dw}{\left[(w^3 - 1) \left(w^3 - \left(\frac{U_0}{U_1} \right)^6 \right) \right]^{1/2}}. \quad (4.52)$$

Sabemos que el lagrangiano esta relacionado con la energía, y por ende la energía correspondiente a la solución mínima (a la geodésica) es

$$\begin{aligned} E &\equiv \frac{S}{X_2} = \frac{(l_{10})^3}{2\pi\alpha'} \int_{-R/2}^{R/2} dx \left(\frac{wU_1}{(\pi N)^{1/6}} \right)^3 = \\ &= \frac{U_1^2 (l_{10})^3}{\pi\alpha'} \int_1^\infty \frac{w^3 dw}{\left[(w^3 - 1) \left(w^3 - \left(\frac{U_0}{U_1} \right)^6 \right) \right]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Es claro ver que la integral es divergente, ya que el integrando tiende a 1 cuando $w \rightarrow \infty$ y por lo mismo, el área bajo la curva tiende también a infinito. El modo de regularizar la integral es quitándole la energía que hace que diverga. Esta energía es la que el sistema lleva de entrada y que corresponde a la energía del cuarc y el anticuarc por separado. Es similar a la energía de vacío de un campo eléctrico. El proceso para quitar esta energía

divergente es mediante la siguiente técnica matemática: primero se tiene que cortar la integral hasta un límite de integración dado por $U^2 = U_{MAX}^2$, para después restarle el factor divergente $(U_{MAX}^2 - U_0^2)(l_{10})^3/(\pi\alpha')$; y por último, se debe de volver a tomar el límite de integración hasta infinito, de donde obtenemos la expresión

$$E = \frac{U_1^2(l_{10})^3}{\pi\alpha'} \int_1^\infty dw \left\{ \frac{w^3}{\sqrt{(w^3 - 1)(w^3 - (\frac{U_0}{U_1})^6)}} - 1 \right\} + \frac{(U_0^2 - U_1^2)(l_{10})^3}{\pi\alpha'}. \quad (4.54)$$

Utilizando la ecuación (4.52) podemos escribir la expresión anterior para la energía como

$$E = \frac{U_1^2(l_{10})^3}{\pi\alpha'} \int_1^\infty dw \left\{ \left[\frac{w^3 - 1}{w^3 - (\frac{U_0}{U_1})^6} \right]^{1/2} - 1 \right\} + \frac{(U_0^2 - U_1^2)(l_{10})^3}{\pi\alpha'} + \frac{U_1^3(l_{10})^3}{2\pi\alpha'(\pi N)^{1/2}} R. \quad (4.55)$$

De la ecuación (4.52) se puede observar que cuando $U_1^2 \rightarrow U_0^2$, entonces $R \rightarrow \infty$. Dado que R es una función de U_1^2 continua, el límite puede tomarse en orden inverso, esto es, que si $R \rightarrow \infty$ entonces $U_1^2 \rightarrow U_0^2$. Tomando este límite de distancias grandes entre los cuarks en la expresión anterior de la energía, obtenemos que

$$\frac{E}{R} \equiv \sigma = \frac{U_0^3(l_{10})^3}{2\pi\alpha'(\pi N)^{1/2}}. \quad (4.56)$$

Y usando las relaciones (4.16)(4.17)(4.26), llegamos a la ecuación

$$\sigma = \frac{2^7 \pi^2}{3^3} \lambda T^2. \quad (4.57)$$

Si observamos bien, ésto es lo que esperábamos encontrar para explicar el confinamiento, dado que la energía E es proporcional a la distancia entre cuarks R . De este resultado es fácil ver que tenemos una fuerza $\mathcal{F} \sim E/R$ que es constante con respecto a la distancia, y por lo tanto, explica el confinamiento. Es decir, los dos cuarks sobre los extremos de la cuerda sienten una fuerza constante independiente de la distancia a la que se encuentren, o bien, tienen una energía potencial de amarre que crece de manera proporcional a la distancia que los separa.

4.3.2 Cálculo Mediante la Relación entre las Funciones de Correlación de la Conjetura de Maldacena

Extensión del rango de energías de la correspondencia AdS / Teorías de Campo

La Conjetura de Maldacena (3.44) relaciona a las funciones de correlación de una teoría de Yang Mills sin gravedad con la función de partición de la teoría de cuerdas o de supergravedad (en el límite de bajas energías $\alpha' \rightarrow 0$ y acoplamiento fuerte $\lambda \gg 1$). Esta conjetura fue establecida a la energía de compactificación de la cuerda E_c , es decir,

$$Z(\Phi_0)_{IIB \circ IIA} \Big|_{E_c} = \langle e^{\int d^4x \Phi_0(\vec{x}) O(\vec{x})} \rangle_{SYM} \Big|_{E_c}. \quad (4.58)$$

Sin embargo, si se siguen cumpliendo las condiciones impuestas por la Conjetura de Maldacena, entonces podemos generalizar la ecuación (4.58) para diferentes energías E , esto es,

$$Z(\Phi_0)_{IIB \circ IIA} \Big|_E = \langle e^{\int d^4x \Phi_0(\vec{x}) O(\vec{x})} \rangle_{SYM} \Big|_E; \quad (4.59)$$

y en particular, para energías menores a la energía de condensación o confinamiento del grupo de norma de Yang Mills. Esta generalización puede tener consecuencias relevantes en el cálculo a la escala de confinamiento, como veremos más adelante.

El potencial del dilatón y su relación con la energía de confinamiento

El primer término de la acción (4.28) esta dado por:

$$S = \frac{N}{2\pi\lambda} \int d^4x \frac{1}{4} Tr(F^2) = \frac{1}{4g_{YM}^2} \int d^4x Tr(F^2). \quad (4.60)$$

Este término es el que describe la fuerza de amarre entre las partículas que sienten la fuerza del grupo $U(N)$, y aunque define el amarre entre gluones, más que entre cuarks, la energía de amarre, en principio, debe de ser equivalente, dado que los cuarks están amarrados por estos campos de norma llamados gluones. En este sentido, el cálculo del valor de expectación de este término proporcionaría la energía^{||} de confinamiento

^{||}En la convención $c = \hbar = 1$ el valor de expectación $\langle Tr(F^2) \rangle$ tiene unidades de energía a la cuarta potencia.

entre partículas con color. Para utilizar la Conjetura de Maldacena tenemos primero que identificar al campo de la teoría de cuerdas IIA que se relaciona, mediante la ecuación (4.59), con el operador

$$\mathcal{O}_4 = \frac{1}{4} \text{Tr}(F^2). \quad (4.61)$$

Si tomamos las ecuaciones (4.25) y (2.21) vemos que la acción (4.60) toma la forma

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4g_{YM}^2} \int d^4x \text{Tr}(F^2) = \frac{1}{4(2\pi)^2 T g_s \sqrt{\alpha'}} \int d^4x \text{Tr}(F^2) \\ &= \frac{e^{-\phi_0}}{4(2\pi)^2 T \sqrt{\alpha'}} \int d^4x \text{Tr}(F^2). \end{aligned} \quad (4.62)$$

De esta manera, utilizando la definición

$$\mathcal{S}_0 \equiv \frac{e^{-\phi_0}}{(2\pi)^2 T \sqrt{\alpha'}} \quad \left(\mathcal{S}_0 = \frac{1}{g_{YM}^2} \right); \quad (4.63)$$

podemos ver claramente que el campo de cuerdas que corresponde al operador \mathcal{O}_4 es \mathcal{S}_0 , que a su vez, es función del dilatón ϕ_0 .

En la teoría de cuerdas en 10 dimensiones el dilatón (o bien, el campo \mathcal{S}_0) tiene un potencial nulo, i.e. $V(\mathcal{S}_0) \equiv 0 \quad \forall \mathcal{S}_0$, y es debido a esto que el dilatón es uno de los campos modulares de la teoría. Incluso, al compactificar 6 de las 10 dimensiones de la teoría esta propiedad en el potencial del dilatón no se pierde. Sin embargo, por el estudio de condensados de gauginos en supergravedad, por medio de diferentes métodos matemáticos (simetrías, instantones, métodos de NJL dinámicos [37]) se ha determinado que el potencial tiene una dependencia en el dilatón no trivial (i.e. $V = V(\mathcal{S}_0)$) para energías E menores a la escala de confinamiento del grupo de norma. Cabe mencionar que este condensado no sólo se forma dinámicamente sino también rompe espontáneamente supersimetría.

Dentro del contexto de la Conjetura de Maldacena, si queremos determinar las funciones de correlación en la teoría de Yang Mills asociadas al dilatón a escalas de energía menores que la escala de confinamiento, tenemos que utilizar el potencial no trivial en \mathcal{S}_0 .

Ahora bien, considerando al valor de expectación del operador \mathcal{O}_4 como proporcional a la energía de amarre E (o de confinamiento) a la cuarta potencia**, esto es

$$E^4 = \langle \mathcal{O}_4(x) \rangle; \quad (4.64)$$

**El que sea una energía a la cuarta potencia es debido al análisis dimensional de esta función de correlación.

podemos obtener mediante la Conjetura (4.59)) el valor de la energía de confinamiento. Considerando el límite de bajas energías, la función de partición de la teoría de cuerdas (ecuación (4.59)) se reduce simplemente a la acción de supergravedad S_{IIA} del campo \mathcal{S}_0 . Ahora bien, para formar la función de correlación (4.64) hay que tomar la primera derivada y dividir sobre la función generatriz $e^{-S_{IIA}(\mathcal{S}_0)}$, esto es

$$\begin{aligned} \int d^4x \langle \mathcal{O}_4(x) \rangle &= \frac{1}{e^{-S_{IIA}(\phi_0)}} \frac{\partial}{\partial \mathcal{S}_0} e^{-S_{IIA}(\mathcal{S}_0)} \\ &= -\frac{\partial S_{IIA}}{\partial \phi_0}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

La forma de $V(\mathcal{S}_0)$ es conocida y tiene varios términos en \mathcal{S}_0 , pero por simplicidad y dado que no esperamos que cambien sustancialmente los resultados finales, tomaremos la expresión [37]

$$V(\mathcal{S}_0) = \Lambda_0^4 \exp\left\{-\frac{2}{b_0} \mathcal{S}_0\right\}, \quad (4.66)$$

donde Λ_0^4 es una constante que contiene la información de las otras 6 dimensiones espaciales que tiene la teoría de cuerdas IIA. Aplicando el resultado de (4.65) a la acción $S_{IIA} = -\int d^4x V(\phi)$, obtenemos

$$\int d^4x \langle \mathcal{O}_4(x) \rangle = \int d^4x V(\mathcal{S}_0) \left(\frac{2}{b_0}\right). \quad (4.67)$$

Por otro lado, tenemos la relación $V(\phi_0) \sim \Lambda_{QCD}^4$. Como último paso para encontrar la función de correlación (4.64) se tiene que eliminar el factor de volumen $\int d^4x$ del resultado (4.67), es decir,

$$E^4 = \langle \mathcal{O}_4(x) \rangle = \Lambda_{QCD}^4 \left(\frac{2}{b_0}\right). \quad (4.68)$$

Finalmente, la energía de confinamiento E es

$$E = \Lambda_{QCD} \left(\frac{2}{b_0}\right)^{1/4}. \quad (4.69)$$

Resultados cuantitativos preliminares al problema $U(1)$ y a la energía de confinamiento para el potencial del dilatón no trivial

De las últimas dos secciones tenemos un grupo de variables (E , χ_t , T , R y λ) y tres fórmulas que las relacionan, estas son

$$E = \Lambda_{QCD} \left(\frac{2}{b_0} \right)^{1/4} \quad (4.70)$$

$$E = \frac{2^7 \pi^2}{3^3} \lambda T^2 R, \quad (4.71)$$

$$\chi_t = \frac{2^{11} \pi \lambda^3 T^4}{3^6}. \quad (4.72)$$

De esta manera, tenemos que fijar dos de las variables (R y $\lambda \equiv g_{YM}^2 N / 2\pi$) para poder calcular las otras tres (E , χ_t , T). Retomando la constante de acoplamiento corrida a la escala de QCD dada por la ecuación (1.33), $g_{YM}^2 = 8.603$, y los valores de $N_c = 3$ y $N_f = 2$ (considerando una b_0 para grupos supersimétricos dada por (1.30)) ; obtenemos de la ecuación (4.70) un valor para la energía de confinamiento de

$$E = 518.3 \text{ MeV}, \quad (4.73)$$

o bien, de 596.2 MeV para el caso con $N_f=5$. Si ahora tomamos a R como el radio de un pion (i.e. $R = 321 \text{ MeV} = 6.210^{-14} \text{ cm}$. [8]^{††}), entonces despejando T de la ecuación (4.71) llegamos a un valor de la temperatura de

$$T = \left(\frac{3^3 E}{2^7 \pi^2 R \lambda} \right)^{1/2} = 29.4 \text{ MeV}, \quad (4.74)$$

o bien, de 31.5 MeV para $N_f = 5$. Finalmente, la susceptibilidad se obtiene a partir de substituir el valor de la temperatura anterior en la ecuación (4.72), esto es,

$$\chi_t = (146.3 \text{ MeV})^4, \quad (4.75)$$

o bien, de $(156.9 \text{ MeV})^4$ para $N_f = 5$. Aunque el primer resultado no parece sorprendente, dado que la masa de un pion es del orden de 140 MeV (i.e. $\left(\frac{E}{140 \text{ MeV}} = 3.70 \text{ o } 4.26 \text{ para } N_f = 5 \right)$, si está dentro del rango de masas para un mesón. A su vez, el valor

^{††}El valor del radio del pion se obtiene a partir del factor de forma llamado segundo vector axial $R = 0.059 + 0.009 - 0.008$, que se encuentra ligado con el radio electromagnético del pion por $\langle r_\pi^2 \rangle = m_\pi F_\pi R$, donde $m_\pi = 139.57 \text{ MeV}$ es la masa del pion y $F_\pi = 130.7 \pm 0.46 \text{ MeV}$ es la llamada constante (experimental) de decaimiento del pion.

de la susceptibilidad se aproxima bien al valor (1.25), y esto se observa en el cociente: $\frac{\chi^2}{180 \text{ MeV}} = 0.81$ (o de 0.87 para $N_f = 5$). Este último valor corresponde a una masa del pseudo bosón de Goldstone ζ , dada por la formula de Witten-Veneziano (1.22), de aproximadamente $m_\zeta = 743 \text{ MeV}$ para $N_f=2$, o de $m_\zeta = 807 \text{ MeV}$ para $N_f=5$.

Aunque los resultados son aceptables, el potencial que tomamos ya se encuentra integrado sobre las dimensiones del espacio-tiempo, y por ende, no contiene información sobre el espacio de Anti De Sitter. Sin embargo, podemos construir una acción que contenga la información de dicho espacio, como veremos a continuación.

— — — Energía de confinamiento para un potencial que tome en cuenta el espacio de Anti De Sitter

En esta sección pretendemos recalculamos todos los resultados de la sección anterior, pero ahora para un potencial que tome en cuenta el espacio en el que se encuentra la teoría de supergravedad, es decir, el espacio $AdS_7 \times S^4$ (pero con la coordenada x^5 compactificada sobre un círculo). En este sentido, hay que integrar la acción completa sobre las 10 dimensiones, como lo hicimos en el caso de la susceptibilidad. Para ello, primero tenemos que establecer que el potencial que tomaremos será equivalente en la dependencia exponencial a (4.66), pero con modificaciones: la constante que va enfrente debe de ser inversamente proporcional^{††} a la única constante de la teoría, es decir, a α' ; y el campo del dilatón no ha adquirido aún su valor a la frontera (i.e. S_0), y por lo tanto, el campo más general S ; estaría definido por

$$S(U, t, x_i, \Omega_4) = \frac{(l_{10}U)^{3/2}}{(\pi N)^{1/4}} S_0(x_i), \quad (4.76)$$

que se deriva de la relación entre el dilatón ϕ y su valor en la frontera ϕ_0 (ver ecuación (4.15)). De esta manera proponemos un potencial dado por

$$V(S) = \frac{1}{\alpha'} e^{-\frac{2}{b_0} S} = \frac{1}{\alpha'} \exp \left[- \frac{(l_{10}U)^{3/2} S_0}{(\pi N)^{1/4} b_0} \right]. \quad (4.77)$$

^{††}El factor de proporcionalidad está dado de manera que la acción de supergravedad sea adimensional, y que se traduce en un factor de $1/\alpha'$ por delante del potencial.

Por consiguiente la acción que tenemos que integrar para después utilizar la Conjetura de Maldacena se reduce a

$$\begin{aligned}
S_{IIA} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{G} [-V(S)] \\
&= \frac{-1}{2\kappa_{10}^2 \alpha'} \int L^4 d\Omega_4 \int d^4x \int dt \int_{U_0}^{\infty} dU \sqrt{G} e^{-U^{3/2} B(S)} \\
&= -\frac{(\lambda)_c^2 (l_{10})^3 V_4}{2^5 \pi^7 3 (T)_c^2 N^2} \int_{U_0}^{\infty} dU [U^9 e^{-U^{3/2} B(S)}], \tag{4.78}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la métrica (4.33); las relaciones (4.26), (4.14), (4.16), (4.17), (4.42) y la definición

$$B(S) = B \equiv \frac{(l_{10})^{3/2}}{(\pi N)^{1/4} b_0} S_0. \tag{4.79}$$

Antes de continuar, es importante señalar que las diversas cantidades que involucra la acción (4.78) están definidas a las escalas típicas de compactificación de la teoría de cuerdas, y de ahí, que contengan un subíndice c para diferenciarlas de aquellas cantidades dadas a escalas de energía inferiores. Por ejemplo: $(\lambda)_c = (g_{YM}^2)_c N/2\pi$; donde $(g_{YM}^2)_c$ es la constante de acoplamiento de Yang Mills a la energía de compactificación de la cuerda.

Al calcular la última integral de la acción (4.78), obtenemos los siguientes términos

$$\begin{aligned}
\int_{U_0}^{\infty} dU [U^9 e^{-U^{3/2} B(\phi)}] &= \left\{ \frac{209440}{729 B^6} U_0 e^{-U_0^{3/2} B} + \frac{41888}{243 B^5} U_0^{5/2} e^{-U_0^{3/2} B} + \frac{5236}{81 B^4} U_0^4 e^{-U_0^{3/2} B} \right. \\
&\quad + \frac{476}{27 B^3} U_0^{11/2} e^{-U_0^{3/2} B} + \frac{34}{9 B^2} U_0^7 e^{-U_0^{3/2} B} + \frac{2}{3 B} U_0^{17/2} e^{-U_0^{3/2} B} \\
&\quad + \frac{1}{B^{20/3}} \left(\frac{2}{3} \Gamma[20/3] + \frac{418880}{729} \Gamma[2/3, BU_0^{3/2}] \right) \\
&\quad \left. - \frac{209440}{729} \Gamma[5/3] \right\}; \tag{4.80}
\end{aligned}$$

donde $\Gamma[x]$ es la función gama estándar y $\Gamma[x, y]$ es la función gama incompleta. Al reinserter estos términos en la acción (4.78), vemos que únicamente el término con coeficiente B^{-2} queda independiente de l_{10} , es decir, bajo los límites del horizonte cercano ($l_{10} \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ con $U^2 = r/l_{10}^3 = \text{fijo}$) el único término que es finito es el que tiene el factor de B^{-2} (recordando que B es proporcional a $l_{10}^{3/2}$ como lo muestra su definición en (4.79)). Los términos que tiene factores de B como denominador más grandes a 2, tienden a cero y por lo tanto no son importantes. Sin embargo, hay algunos términos que tienden a infinito y estos los podemos entender como los infinitos que aparecen en un potencial del tipo Coulomb cuando uno se encuentra en el mismo punto que la partícula que genera el campo.

De esta manera, si tomamos el límite del horizonte cercano y únicamente consideramos el término con B^2 , encontramos una acción para el campo del dilatón dada por

$$S_{IIA} = \frac{-1}{2\kappa_{10}^2 \alpha'} \int d^{10}x \sqrt{G} V(S) = -\frac{(\lambda)_c^2 (l_{10})^3 V_4}{2^5 \pi^7 3 (T)_c^3 N^2} \left[\frac{34}{9B^2} U_0^7 \right] \left[e^{-U_0^{3/2} B} \right] \quad (4.81)$$

$$\xrightarrow{l_{10} \rightarrow 0} -\frac{17(\lambda)_c^2 (T)_c^4 2^{15} \pi^4 N^2 V_4}{3^{10} S_0^2} \left[e^{-\frac{2}{b_0} S_0} \right],$$

donde en la última igualdad hemos substituido el valor del campo S en la frontera del espacio del Anti De Sitter (i.e. $S = S_0$), que como sabemos es uno de los requisitos para emplear la Conjetura de Maldacena (4.59). Esta consideración tiene como consecuencia el que el argumento de la exponencial ya no dependa de l_{10} , y por lo tanto que se mantenga invariante al tomar el límite del horizonte cercano.

Ahora bien, utilizando la relación (4.65) para obtener el valor de expectación del operador $\langle \mathcal{O}_4(x) \rangle$ encontramos que

$$E^4 = \langle \mathcal{O}_4(x) \rangle = \frac{17(\lambda)_c^2 (T)_c^4 2^{16} \pi^4 N^2 b_0^2}{3^{10} S_0^2} \left(\frac{1}{S_0} + \frac{1}{b_0} \right) \left(e^{-\frac{2}{b_0} S_0} \right)$$

$$= \frac{17(\lambda)_c^4 2^{18} \pi^6 b_0^2}{3^{10}} \left((g_{YM}^2)_c + \frac{1}{b_0} \right) \left((T)_c^4 e^{-\frac{2}{b_0 (g_{YM}^2)_c}} \right); \quad (4.82)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado el que nuestro campo S en la frontera está relacionado con $(g_{YM})_c$ por (4.63).

Como ya hemos mencionado la temperatura que aparece en la fórmula tiene sentido a las escalas de compactificación de la teoría de cuerdas. Sin embargo, el producto expresado en el último paréntesis puede ser considerado como una energía del orden de la escala de QCD, tal y como lo vemos a partir de la ecuación (1.31); es decir,

$$(T)_c e^{-\frac{1}{2b_0 (g_{YM}^2)_c}} \sim \Lambda_{QCD}. \quad (4.83)$$

Mediante esta igualdad, ahora si tenemos una fórmula para la energía de confinamiento, y ésta se encuentra dada por

$$E^4 = \frac{17(\lambda)_c^4 2^{18} \pi^6 b_0^2 \Lambda_{QCD}^4}{3^{10}} \left((g_{YM}^2)_c + \frac{1}{b_0} \right). \quad (4.84)$$

4.4 Resultados Cuantitativos al Problema $U(1)$ y a la Energía de Confinamiento para el Potencial del Dilatón No Trivial

Las ecuaciones obtenidas en las últimas secciones de este capítulo para la susceptibilidad topológica, y para la energía de confinamiento por medio del bucle de Wilson o de las funciones de correlación (tomando en cuenta el espacio de Anti De Sitter), son

$$E = \left[\frac{17(\lambda)_c^4 2^{18} \pi^6 b_0^2}{3^{10}} \left((g_{YM}^2)_c + \frac{1}{b_0} \right) \right]^{1/4} \Lambda_{QCD}, \quad (4.85)$$

$$E = \frac{2^7 \pi^2}{3^3} \lambda T^2 R, \quad (4.86)$$

$$\chi_t = \frac{2^{11} \pi \lambda^3 T^4}{3^6}. \quad (4.87)$$

Fijando de nueva cuenta las variables R , C , $(\lambda)_c$ y λ podemos calcular E , χ_t y T . Por lo tanto, consideremos el valor de la constante de acoplamiento de Yang Mills g_{YM}^2 como el corrido a la escala de QCD, $g_{YM}^2 = 8.603$ (dado por la ecuación (1.33)). A su vez, fijemos $N_c = 3$, y tomemos el valor de espectación del campo del dilatón como $\langle S_0 \rangle = 1/(g_{YM}^2)_c = 2$; que se deriva del valor que adquiere el campo en el mínimo del potencial no trivial $V(S)$ [37].

De esta manera, se obtienen diferentes resultados en E , χ_t y T para diversos valores de N_f , como se muestra en la tabla (4.1) para una R equivalente al radio de un pion ($R = 321 \text{ MeV} = 6.2 \times 10^{-14} \text{ cm}$. [8][†]), o bien, para el radio de un protón ($R = 842 \text{ MeV} = 1.63 \times 10^{-13} \text{ cm}$. [1]) en la tabla (4.2[†]).

En ambas tablas observamos que la energía de confinamiento es del orden de dos veces la masa del pion. Sin embargo, en la tabla (4.1) para una R equivalente al radio electromagnético del pion, la susceptibilidad magnética y la masa del pseudo bosón de

[†]El valor del radio del pion se obtiene a partir del factor de forma llamado segundo vector axial $R = 0.059 + 0.009 - 0.008$, que se encuentra ligado con el radio electromagnético del pion por $\langle r_\pi^2 \rangle = m_\pi F_\pi R$, donde $m_\pi = 139.57 \text{ MeV}$ es la masa del pion y $F_\pi = 130.7 \pm 0.46 \text{ MeV}$ es la llamada constante (experimental) de decaimiento del pion.

[†]El valor del radio del protón r_p está definido como aquel valor del radio vector r donde el argumento en la exponencial de la distribución de carga $\rho(r) \approx \exp(-M_q r)$ se hace uno (1), es decir, el radio del protón se define por $r_p \equiv 1/M_q$.

N_f	E (MeV)	T (MeV)	$\chi_t^{1/4}$ (MeV)	$\frac{\chi_t^{1/4}}{180 \text{ MeV}}$	$m_{\zeta'}$ (MeV)	$\frac{m_{\zeta'}}{950 \text{ MeV}}$
2	361.5	24.57	122.2	0.68	627.7	0.66
3	347.6	24.09	119.8	0.67	618.6	0.65
4	331.9	23.54	117.1	0.65	608.6	0.64
5	313.6	22.89	113.8	0.63	597.4	0.63

Tabla 4.1: Diferentes resultados en la energía de confinamiento E , la temperatura T , la susceptibilidad topológica χ_t y la masa del pseudo escalar de Goldstone $m_{\zeta'}$ para una R equivalente al radio del pion $R=321$ MeV. También se muestran las discrepancias contra los valores aproximados, basados en resultados experimentales, de $(180 \text{ MeV})^4$ para la susceptibilidad y de 950 MeV para el bosón η' .

N_f	E (MeV)	T (MeV)	$\chi_t^{1/4}$ (MeV)	$\frac{\chi_t^{1/4}}{180 \text{ MeV}}$	$m_{\zeta'}$ (MeV)	$\frac{m_{\zeta'}}{950 \text{ MeV}}$
2	361.5	39.81	198.0	1.10	1131.1	1.19
3	347.6	39.04	194.1	1.08	1095.9	1.15
4	331.9	38.14	189.7	1.05	1056.6	1.11
5	313.6	37.08	184.4	1.02	1011.4	1.06

Tabla 4.2: Diferentes resultados en la energía de confinamiento E , la temperatura T , la susceptibilidad topológica χ_t y la masa del pseudo escalar de Goldstone $m_{\zeta'}$ para una R equivalente al radio del protón $R=842$ MeV. También se muestran las discrepancias contra los valores aproximados, basados en resultados experimentales, de $(180 \text{ MeV})^4$ para la susceptibilidad y de 950 MeV para el bosón η' .

Goldstone son algo bajas comparadas con los valores experimentales. En cambio, si tomamos un radio mayor, como el del protón, vemos que la susceptibilidad y la masa del pseudo bosón toman valores cercanos a los encontrados por el experimento, como se puede observar en la tabla (4.2).

Conclusiones

A través de este trabajo hemos mostrado una de las revoluciones más recientes dentro de la teoría de cuerdas; y mediante el uso de la misma, hemos obtenido resultados que describen fenómenos del modelo estándar, tales como el problema $U(1)$ y el confinamiento de cuarks.

La revolución a la que nos referimos es la llamada Conjetura de Maldacena, o bien, correspondencia AdS/CFT; donde la idea central es que dos teorías muy distintas son equivalentes o duales. Explícitamente, la Conjetura propone que un conjunto de N D 3-branas en la teoría de cuerdas del tipo IIB, sobre un espacio especial de compactificación (el producto cartesiano de un espacio de Anti De Sitter de 5 dimensiones y una esfera unitaria de 5 dimensiones), es equivalente a la teoría de Yang Mills con 4 supersimetrías en un espacio de Minkowski de 4 dimensiones. Un aspecto muy importante que cabe resaltar es que en el límite de $\alpha' \rightarrow 0$ la Conjetura de Maldacena relaciona a una teoría cuántica de campos sin gravedad con una teoría clásica de gravedad (sin efectos cuánticos). A su vez, esta Conjetura dice que cuando una de las teorías está fuertemente acoplada, la dual lo está débilmente, y viceversa. Desde el punto de vista de la teoría de campos en cuatro dimensiones, vemos esta correspondencia como una fuerte herramienta que permite calcular resultados donde la constante de acoplamiento es grande. El gran problema de la teoría de Yang Mills es que resulta imposible encontrar soluciones analíticas cuando la constante de acoplamiento es grande, pero mediante esta nueva idea sólo basta con calcular en la teoría de cuerdas débilmente acoplada. Siguiendo esta línea es que nos planteamos exponer dos de los muchos cálculos que se han realizado utilizando la Conjetura. Para ello primero partimos del conocimiento de otra dualidad más general, y en donde se proponen como equivalentes a la teoría M con 5-branas en un espacio de Anti De Sitter de 7 dimensiones producto cartesiano con una esfera de 4 dimensiones; y a

la teoría de Yang Mills en 4 dimensiones. Esta dualidad, aunque menos estudiada que la original de Maldacena, permite llegar a resultados en la teoría de campos cuatridimensional sin supersimetrías, es decir, a soluciones que pueden ser comparadas con los resultados experimentales de hoy en día, y en donde sabemos no hay evidencias de la supersimetría. El primero de los problemas se resume en calcular la susceptibilidad topológica, es decir, el valor de expectación del término $F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu}$ del lagrangiano en teoría de campos, y que se traduce por la Conjetura en encontrar la acción del campo escalar que acompaña a este término $F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu}$. El valor que obtenemos para la susceptibilidad topológica χ_t es de entre $(198 \text{ MeV})^4$ y $(184 \text{ MeV})^4$. Este valor representa entre el 1.10 y 1.02 del valor experimental de $(180 \text{ MeV})^4$. A su vez, con el valor de la susceptibilidad topológica obtenemos una masa para el pseudobosón de Goldstone del Problema $U(1)$ de entre 1131 MeV y 1011 MeV, lo que representa el 1.19 o el 1.06 de valor experimental de 950 MeV respectivamente. El segundo problema, tiene como propósito obtener una fórmula para la energía de confinamiento entre dos cuarks. Para ello, se construye un esquema de dos cuarks (que se encuentran en los extremos de una cuerda), y mediante el cálculo a un bucle de Wilson se calcula la energía de la configuración. En este caso el resultado fue el deseado, dado que encontramos que la energía de confinamiento es proporcional a la distancia entre los cuarks R , o bien, que el cociente $\frac{E}{R}$ (que se puede ver como una especie de fuerza) es constante con respecto a la separación.

En este punto, nuestro trabajo contempla la idea de calcular la energía de confinamiento, pero ahora, desde otro acercamiento. Para ello, consideramos que la energía de confinamiento entre cuarks debe de ser proporcional al valor de expectación del término $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ del lagrangiano en teoría de campos. Sin embargo, para obtener resultados a las energías de confinamiento proponemos extender la Conjetura de Maldacena a todo el espectro energético, y no sólo a la energía típica de compactificación de la teoría de cuerdas como se postulo en un principio por Maldacena. Bajo esta nueva hipótesis el campo que acompaña al término $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ (el dilatón) adquiere un potencial no trivial, de donde se deduce la energía de confinamiento. Teniendo esta expresión para la energía de confinamiento, obtenemos los valores de entre 361 MeV y 314 MeV.

La idea de extender la Conjetura de Maldacena y sus generalizaciones a energías que no son propias de la teoría de cuerdas, abre un todo un nuevo campo para fenómenos de la teoría de campos fuertemente acoplada. Como un posible planteamiento a futuro, esta el escoger un potencial más completo del dilatón, y calcular la energía de confinamiento

que se obtiene a partir del mismo.

Por último, cabe señalar que en los últimos dos o tres años han habido grandes avances en lo que se refiere a la comprensión de la teoría de cuerdas, la teoría M, y los diferentes alcances o límites de la mismas. A su vez, las nuevas percepciones que se tienen, también proporcionan un mayor entendimiento de las teorías de campo con N grande: y aunque todavía resultan oscuros muchos de los principios que mantienen estas dualidades entre teorías pura gravedad (en más de cuatro dimensiones) con teorías de campo en cuatro o menos dimensiones; los avances recientes hacen muy promisorio el campo de trabajo. Del mismo modo, estos resultados ayudan a establecer a la teoría de cuerdas como una de las propuestas para ser la teoría fundamental y unificadora de las fuerzas de la naturaleza, o también, podrían simplemente ser utilizados como técnicas matemáticas para las teorías de norma fuertemente acopladas.

Apéndice A

Resumen de Fórmulas

En este apéndice pretendemos ayudar al lector en la comprensión de las fórmulas y ecuaciones, mediante una breve muestra de las definiciones, relaciones entre variables y fórmulas más utilizadas a lo largo de este trabajo.

Constantes y tensiones de la teoría de cuerdas

- La masa y longitud de Planck son

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_4}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}, \quad l_p = \sqrt{\frac{G_4 \hbar}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm.} \quad (\text{A-1})$$

- El Parámetro libre de la teoría de cuerdas α' (con unidades de longitud al cuadrado) es fijado por

$$\sqrt{\alpha'} \sim l_p; \quad (\text{A-2})$$

- l_{11} es la unidad de longitud característica de supergravedad en 11 dimensiones y que para su consistencia con la teoría de cuerdas IIA en 10 dimensiones toma el valor

$$l_{11} = \sqrt{\alpha'}. \quad (\text{A-3})$$

- Definimos l_{10} como otra longitud característica de la teoría de cuerdas IIA definida por

$$l_{10} = g_s^{1/3} \sqrt{\alpha'} = g_s^{1/3} l_{11}^2; \quad (\text{A-4})$$

- La constante de acoplamiento de cuerdas g_s se relaciona con el dilatón por

$$g_s \equiv e^{\phi_0}. \quad (\text{A-5})$$

- La tensión de una cuerda T_c es

$$T_c = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad \Rightarrow \quad T_c \sim m_p^2. \quad (\text{A-6})$$

- La tensión de una D p-brana τ_p es

$$\tau_p = \frac{(2\pi\sqrt{\alpha'})^{1-p}}{2\pi\alpha'} \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = T_c. \quad (\text{A-7})$$

- La constante de gravitación en 10 dimensiones κ_{10}^2 se define como

$$\kappa_{10}^2 = \kappa_{10}^{2(0)} g_s^2 = (2\pi)^7 g_s^{-2/3} (l_{10})^8 = (2\pi)^7 g_s^2 (\alpha')^4. \quad (\text{A-8})$$

Acciones importantes de la teoría de cuerdas

- Dos representaciones equivalentes de la acción de una cuerda

$$S = -\frac{T_c}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \quad (\text{A-9})$$

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{\det(G_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu)}; \quad (\text{A-10})$$

donde $G^{\mu\nu}$ es la métrica del espacio tiempo, $h^{\alpha\beta}$ es el equivalente pero sobre la hoja de mundo (i.e. el área barrida por la cuerda), y (σ, τ) son las coordenadas sobre la hoja de mundo.

- La acción de una D p-brana (también llamada acción de Dirac-Born-Infeld) está dada por

$$S = -\tau_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{\det(G_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta})}; \quad (\text{A-11})$$

donde $G^{\alpha\beta}$ y $B^{\alpha\beta}$ son los jalamientos ("pullback") de las métricas simétrica $G^{\mu\nu}$ y antisimétrica $B^{\mu\nu}$ del espacio-tiempo respectivamente; y por otro lado, el término $F_{\alpha\beta}$ es el que contienen la información de los campos de norma, y ϕ el campo del dilatón. Del mismo modo, las coordenadas ξ son las que corren sobre el espacio barrido por la p-brana.

- La acción de Dirac-Born-Infeld a segundo orden en α' para una D 4-brana, con una de las coordenadas temporales t del espacio de Anti De Sitter compactificada, es

$$S = \frac{\tau_4}{T g_s} (2\pi\alpha')^2 \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \text{Tr}(F^2) + \frac{1}{8} g_s A_0 \text{Tr}(e^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \right\}; \quad (\text{A-12})$$

donde

$$\frac{1}{T} = \int dt. \quad (\text{A-13})$$

- La relación entre la constante de acoplamiento de cuerdas g_s y la de Yang Mills g_{YM} para una D p-brana es

$$\frac{g_{YM}^2}{4\pi} = g_s (2\pi\sqrt{\alpha'})^{p-3}. \quad (\text{A-14})$$

Espacio de Anti De Sitter

El espacio de Anti De Sitter es la solución con energía positiva de la ecuación de Einstein, sin presencia de masa y con constante cosmológica Λ .

- La métrica de un espacio de Anti De Sitter de $n + 1$ dimensiones está dada por

$$(ds^2)_{AdS_{n+1}} = b^2 \left(U^2 d\vec{X}^2 + \frac{dU^2}{U^2} \right); \quad (\text{A-15})$$

cuyo radio al cuadrado es $b^2 = \frac{n(n+1)}{\Lambda}$.

- La solución de Anti De Sitter que contiene una singularidad de tipo hoyo negro es

$$(ds^2)_{AdS_{n+1}}^{HN} = b^2 \left\{ \frac{1}{U^2} \frac{dU^2}{1 - \left(\frac{U_0}{U}\right)^n} + U^2 \left[\left(1 - \frac{U_0^n}{U^n}\right) dt^2 + \sum_{i=1}^{n-1} dX_i^2 \right] \right\}, \quad (\text{A-16})$$

donde $U_0 = \frac{4\pi T}{n}$ es el horizonte del hoyo negro.

Solución extrema de una D 3-brana

- La solución extrema de una D 3-brana en 10 dimensiones es

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-1/2} d\vec{X}^2 + H^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \\ H &= 1 + \frac{R^4}{r^4} \quad R^4 \equiv 4\pi g_s N (\alpha')^2. \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

- Los límites del horizonte cercano para una D 3-brana son

$$r \rightarrow 0, \quad \alpha' \rightarrow 0, \quad U \equiv \frac{r}{\alpha'} = \text{fijo}. \quad (\text{A-18})$$

- La métrica de una D 3-brana extrema en los límites del horizonte cercano es

$$ds^2 = \alpha' \left[\frac{U^2}{\sqrt{4\pi g_s N}} d\vec{X}^2 + \sqrt{4\pi g_s N} \frac{dU^2}{U^2} + \sqrt{4\pi g_s N} d\Omega_5^2 \right]; \quad (\text{A-19})$$

donde

$$U^2 \equiv \frac{r}{\alpha'} \quad (\text{A-20})$$

tiene dimensiones de longitud inversa. La métrica (A-19) representa un espacio $AdS_5 \times S^5$ como se ve a partir de la ecuación (A-15) para $n = 4$, cuyos radios son

$$R^2 = R_{AdS}^2 = R_{S^5}^2 \equiv b^2 = \alpha' \sqrt{4\pi g_s N}. \quad (\text{A-21})$$

- La relación entre la constante de acoplamiento de cuerdas g_s y la de Yang Mills g_{YM} para una D 3-brana es

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s. \quad (\text{A-22})$$

Solución no-extrema de una M 5-brana

11 dimensiones (con una variable temporal con periodo T^{-1})

- La solución no-extrema de una M 5-brana en 11 dimensiones es

$$(ds^2)_{11} = \frac{r_{11}}{l_{11}(\pi N)^{1/3}} \left\{ \left(1 - \frac{r_{0,11}^3}{r_{11}^3} \right) dt_{11}^2 + \sum_{i=1}^5 d(x_{11})_i^2 \right\} \\ + \frac{(l_{11})^2 (\pi N)^{2/3}}{r_{11}^2} \left\{ \frac{dr_{11}^2}{1 - \left(\frac{r_{0,11}}{r_{11}} \right)^3} + r_{11}^2 d\Omega_4^2 \right\}, \quad (\text{A-23})$$

donde $r_{11} = r_{0,11}$ corresponde al horizonte de la singularidad.

- Los límites del horizonte cercano para una M 5-brana son

$$r_{11} \rightarrow 0, \quad l_{11} \rightarrow 0, \quad U_{11}^2 \equiv \frac{r_{11}}{l_{11}^3} = \text{fijo}. \quad (\text{A-24})$$

- La métrica de una M 5-brana no-extrema en los límites del horizonte cercano es

$$(ds^2)_{11} = (l_{11})^2 \left[\frac{U_{11}^2}{(\pi N)^{1/3}} \left\{ \left(1 - \frac{U_{0,11}^6}{U_{11}^6} \right) dt_{11}^2 + \sum_{i=1}^5 d(x_{11})_i^2 \right\} + \frac{(\pi N)^{2/3}}{U_{11}^2} \left(\frac{4dU_{11}^2}{1 - \left(\frac{U_{0,11}}{U_{11}} \right)^6} + U_{11}^2 d\Omega_4^2 \right) \right]. \quad (\text{A-25})$$

donde

$$U_{11}^2 \equiv \frac{r_{11}}{l_{11}^3} \quad (\text{A-26})$$

tiene dimensiones de longitud inversa. Al reescalar esta métrica por $[t'_{11}, (x_{11})'_i] = (4\pi N)^{1/2} [t_{11}, (x_{11})_i]$ vemos que corresponde a un espacio de $AdS_7 \times S^4$ como se ve en la ecuación (A-16) para $n = 6$, y cuyos radios son

$$R_{AdS_7} \equiv b, \quad R_{S^4} \equiv L_{11} = \frac{b}{2} = l_{11} (\pi N)^{1/3}. \quad (\text{A-27})$$

Con este reescalamiento la temperatura T_{11} y $U_{0,11}$ se relacionan por

$$U_{0,11} = \frac{8\pi}{3} (\pi N)^{1/2} T_{11}. \quad (\text{A-28})$$

10 dimensiones (con una variable temporal con periodo T^{-1})

- El radio de compactificación R_1 para pasar de 11 a 10 dimensiones es

$$R_1 = g_s \sqrt{\alpha'}. \quad (\text{A-29})$$

- El radio de compactificación R_2 que hace periódica la variable temporal t es

$$T^{-1} \equiv \int dt = 2\pi R_2. \quad (\text{A-30})$$

- La métrica de una D 4-brana que proviene de la M 5-brana no extrema en 11 dimensiones es

$$ds_{10}^2 = (l_{10})^3 \left[\frac{U^3}{(\pi N)^{1/3}} \left\{ \left(1 - \frac{U_0^6}{U^6} \right) dt^2 + \sum_{i=1}^4 dx_i^2 \right\} + \frac{(\pi N)^{1/3}}{U} \left(\frac{4dU^2}{1 - \left(\frac{U_0}{U} \right)^6} + U^2 d\Omega_4^2 \right) \right] \quad (\text{A-31})$$

donde ahora las variables U, t, x_i y l_{10} están dadas en 10 dimensiones, y se relacionan con sus semejantes en 11 dimensiones por

$$\begin{aligned} U &= g_s^{-1/3} U_{11} & t &= g_s^{1/3} U_{11} \\ x_i &= g_s^{1/3} (x_{11})_i & l_{10} &= g_s^{1/3} l_{11} \\ L &\equiv L_{10} = g_s^{1/3} L_{11}. \end{aligned} \quad (\text{A-32})$$

- El determinante de la métrica anterior es

$$\det(G_{\mu\nu}) = G = 4 \frac{(l_{10})^{22} U^{18}}{(\pi N)^{8/3}}. \quad (\text{A-33})$$

- El valor del dilatón dada la compactificación es

$$e^\phi = g_s \frac{(l_{10} U)^{3/2}}{(\pi N)^{1/4}}. \quad (\text{A-34})$$

- La relación entre la temperatura y U_0 después de la compactificación es

$$U_0 = \frac{8\pi}{3} (\pi N)^{1/2} T. \quad (\text{A-35})$$

- El valor de L después de la compactificación es

$$L = \sqrt{\alpha'} (\pi g_s N)^{1/3}. \quad (\text{A-36})$$

- La relación entre la constante de acoplamiento de cuerdas g_s y la de Yang Mills g_{YM} para una D 4-brana (que proviene de la M 5-brana), y con coordenada temporal periódica, es

$$g_{YM}^2 = 4\pi^2 T g_s \sqrt{\alpha'}. \quad (\text{A-37})$$

Otras relaciones importantes

- La variable L está relacionada con la constante de gravitación en 10 dimensiones por

$$L^9 = \frac{\kappa_{10}^2 N^3 l_{10} g_s^{2/3}}{2^6 \pi^4} = \frac{\kappa_{10}^2 N^3 \sqrt{\alpha'} g_s}{2^6 \pi^4}. \quad (\text{A-38})$$

- Con la definición del parámetro $\lambda \equiv N g_{YM}^2 / (2\pi)$ encontramos la relación

$$\frac{\lambda}{TN} = 2\pi g_s \sqrt{\alpha'}. \quad (\text{A-39})$$

- El campo S_0 se define por

$$S_0 \equiv \frac{e^{-\phi_0}}{(2\pi)^2 T \sqrt{\alpha'}} \quad \left(S_0 = \frac{1}{g_{YM}^2} \right). \quad (\text{A-40})$$

- El campo S , cuyo valor en la frontera del espacio AdS es S_0 , se define por

$$S = \frac{(l_{10} U)^{3/2}}{(\pi N)^{1/4}} S_0, \quad (\text{A-41})$$

Índice de Figuras

1	Equivalentes de los diagramas de Feynman para las cuerdas	3
2	¿Por qué no vemos cuarks aislados?	9
1.1	Suma de diagramas de Feynman en teoría de campos	14
1.2	Apantallamiento de la carga de un electrón por pares de partículas y anti- partículas	20
1.3	Gráficas de la constante de acoplamiento como función de la energía	22
2.1	Cuerdas que empiezan y acaban sobre las D p-branas	32
2.2	Grupos de norma formados por los campos de norma de las cuerdas que descansan sobre D p-branas	33
2.3	Esquema de la teoría M y de sus límites como teorías de cuerdas o de supergravedad pura	40
3.1	Dependencia de las dos soluciones de Anti De Sitter como función de la temperatura	47
3.2	Espacio solución en la teoría de supergravedad de una D 3-brana	51
3.3	Efecto de tomar el límite del horizonte cercano en el espacio solución en supergravedad de una D 3-brana	54
3.4	Esquema de la conjetura de Maldacena	55
4.1	Esquema de la interacción de dos cuarks en la teoría de cuerdas IIA	72
4.2	Posible configuración de dos cuarks en la teoría de cuerdas IIA	73

Bibliografía

- [1] Lweis H. Ryder, *Quantum Field Theory* (1985)
- [2] Te-Pei Cheng y Ling-Fong Li, *Gauge Theory of elementary particle physics* (1984)
- [3] Paul H. Frampton, *Gauge Field Theories* (1943) 450-460.
- [4] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Vol. 3 (1987)
- [5] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B156** (1979) 269.
- [6] G. Veneziano, "U(1) without instantons", *Nucl. Phys.*, **B159** (1979) 213.
- [7] M. J. Teper, "Physics from the Lattice: Glueball in QCD; Topology; SU(N) for all N", (1997) [hep-lat/9711011](#).
- [8] D. E. Groom et al., *Review of Particle Physics*, *The European Physical Journal C* **15** (2000) 1.
- [9] M. B. Gree, J. H. Schwarz & E. Witten, *Superstring Theory*, Vol. 1 (1987).
- [10] J. Polchinski, "String Theory", Cambridge University Press (1998).
- [11] A. Giveon & D. Kutasov, "Brane Dynamics and Gauge Theory", *Rev. Mod. Phys.* **71-4** (1999) 983-1084.
- [12] J. Polchinski, "TASI Lectures on D-Branes", (1997) [hep-th/9611050](#).
- [13] Clifford Johnson, "D-Brane Primer", (2000) [hep-th/0007170](#).
- [14] W. I. Taylor, "Lectures on D-branes, Gauge Theory and M(atrices)". [hep-th/9801182](#).

- [15] A. Hashimoto y Y. Oz, "Aspects of QCD Dynamics from String Theory", *Nucl. Phys.* **B548** (1999) 167. hep-th/9809106.
- [16] J. Dai, R. G. Leigh and J. Polchinski, "New Connections Between String Theories", *Mod. Phys. Lett. A4* (1989) 2073.
- [17] E. Witten, "Bound States of Strings and p-Branes", *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 335-350, hep-th/9510135.
- [18] G. Horowitz & A. Strominger, "Black Strings and p-Branes" *Nucl. Phys.* **B360** (1991) 197-209.
-
- [19] C. Montonen y D. Olive, "Magnetic Monopoles As Gauge Particles?", *Phys. Lett.* **B72** (1977) 117.
- [20] R. Haag, J. T. Lopuszanski y M. Sohnius, "All Possible Generators of Supersymmetries of the S Matrix", *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.
- [21] C. M. Hull y P. K. Townsend, "Unity of Superstring Dualities", *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 109-137, hep-th/9410167.
- [22] J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges", *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724, hep-th/9510017.
- [23] J. Day, R. G. Leigh y J. Polchinski, "New Connections Between String Theories", *Mod. Phys. Lett. A4* (1989) 2073.
- [24] J. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231. hep-th/9711200.
- [25] E. Witten, "Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, and Confinement in Gauge Theories", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505. hep-th/9803131.
- [26] I. R. Klebanov, "World-volume Approach to Absorption by Non-dilatonic Branes," *Nucl. Phys.* **B496** (1997), 231. hep-th/9702076
- [27] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. A. Tseytlin, "String Theory and Classical Absorption by Three-branes", *Nucl. Phys.* **B499** (1997), 217. hep-th/9703040.

- [28] J. L. Petersen, "Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS/CFT", *Int. J. Mod. Phys. A* **14** (1999) 3597-3672. hep-th/9902131.
- [29] Paolo Di Vecchia, "An Introduction to AdS/CFT Equivalence", (1999) hep-th/9903007.
- [30] Paolo Di Vecchia, "Large N Gauge Theories and AdS/CFT Correspondance", (1999) hep-th/9908148.
- [31] O. Aharony, S.S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri y Y. Oz, "Large N Field Theories, String Theory and Gravity", (1999) hep-th/9905111.
- [32] Igor R. Klebanov, "TASI Lectures: Introduction to the AdS/CFT Correspondence", (2000) hep-th/0009139.
- [33] E. Witten, "String theory dynamics in various dimensions," *Nucl. Phys. B* (1995) 85. hep-th/9503124.
- [34] S. Rey and J. Yee, "Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity,". hep-th/9803001.
- [35] J. Maldacena, "Wilson loops in large N field theories" *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4859. hep-th/9803002.
- [36] A. Brandhuber, N. Itzhaki, J. Sonnenschein y S. Yankielowicz, "Wilson Loops in the Large N Limit at Finite Temperature". hep-th/9803137.
- [37] M. B. Green y J. H. Schwarz, "Anomaly Cancellation in Supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory", *Phys. Lett.* **B149** (1984) 117; L. E. Ibáñez y H. P. Nilles, "Low-Energy Remnants of Superstring Anomaly Cancellation Terms", *Phys. Lett.* **B169** (1986) 354; J. P. Derendinger, L. E. Ibáñez y H. P. Nilles, "On the Low-Energy Limit of Superstring Theories", *Nucl. Phys.* **B267** (1986) 365; G. Veneziano y S. Tankielowicz, "An Effective Lagrangian for the Pure N=1 Supersymmetric Yang-Mills Theory", *Phys. Lett.* **113B** (1982) 231.

Funciones de correlación de 2 puntos

- [38] E. Witten, "Anti De Sitter Space and Holography", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253. hep-th/9802150.
- [39] S. S. Gubser, I. R. Klebanov y A. M. Polyakov, "Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory", *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105. hep-th/9802109
- [40] W. Muck y K. S. Viswanathany, "The Graviton in the AdS-CFT correspondence: Solution via the Dirichlet boundary value problem", (1998) hep-th/9810151
- [41] Steven Corley, "The massless gravitino and the AdS/CFT correspondence", (1998) hep-th/9808184
- [42] Måns Henningson y Konstadinos Sfetsos, "Spinors and the AdS/CFT correspondence", (1998) hep-th/9803251
- [43] G. E. Arutyunov y S. A. Frolov, "Antisymmetric tensor field on AdS₅", (1998) hep-th/9807046
- [44] Aleksey Polishchuk, "Massive symmetric tensor field on AdS", (1999) hep-th/9905048
- [45] W. S. Yi, "Correlators of currents corresponding to the massive p-form fields in AdS/CFT correspondence", (1998) hep-th/9811097
- [46] Anastasia Volovich, "Rarita-Schwinger Field in the AdS/CFT Correspondence", (1998) hep-th/9809009
- [47] A. S. Koshelevx y O. A. Rytchkov, "Note on the Massive Rarita-Schwinger Field in the AdS/CFT Correspondence", (1998) hep-th/9812238
- [48] R. C. Rashkov, "Note on the boundary terms in AdS/CFT correspondence for Rarita-Schwinger field", (1999) hep-th/9904098
- [49] P. Matlock y K. S. Viswanathany, "The AdS/CFT Correspondence for the Massive Rarita-Schwinger Field", (1999) hep-th/9906077

Funciones de correlación de 3 puntos

- [50] Gordon Chalmers, Horatiu Nastase, Koenraad Schalm y Ruud Siebelink, "R-Current Correlators in $N = 4$ Super Yang Mills Theory from anti-de Sitter Supergravity", (1998) hep-th/9805105
- [51] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis y L. Rastelli, "Correlation functions in the $CFT_d = AdS_{d+1}$ correspondence", (1998) hep-th/9804058
- [52] W. Muck y K. S. Viswanathan, "Conformal Field Theory Correlators from Classical Scalar Field Theory on AdS_{d+1} ", (1998) hep-th/9804035
- [53] W. Muck y K. S. Viswanathan, "Conformal Field Theory Correlators from Classical Field Theory on Anti-de Sitter Space II. Vector and Spinor Fields", (1998) hep-th/9805145
- [54] I.Ya. Aref'eva y I.V. Volovich, "On Large N Conformal Theories, Field Theories in Anti-De Sitter Space and Singletons", (1998) hep-th/9803028
- [55] Amir M. Ghezelbasha, Kamran Kaviania, Shahrokh Parvizib y AmirH. Fattollahib, "Interacting Spinors-Scalars and AdS/CFT Correspondence", (1998) hep-th/9805162

Funciones de correlación de 4 puntos

- [56] Francisco Gonzalez-Rey, Inyong Park y Koenraad Schalm, "A note on four-point functions of conformal operators in $N = 4$ Super-Yang Mills", (1998) hep-th/9811155
- [57] Hong Liu y A.A. Tseytlin, "On Four-point Functions in the CFT/AdS Correspondence", (1998) hep-th/9807097
- [58] Eric D'Hoker, Daniel Z. Freedman, Samir D. Mathur, Alec Matusis y Leonardo Rastelli, "Graviton exchange and complete four point functions in the AdS/CFT correspondence", (1999) hep-th/9903196
- [59] Eric D'Hoker, Daniel Z. Freedman y Leonardo Rastelli, "AdS/CFT 4point functions: How to succeed at zintegrals without really trying", (1999) hep-th/9905049
- [60] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis y L. Rastelli, "Comments on 4-point functions in the AdS/CFT correspondance", (1998) hep-th/9808006

- [61] Christopher P. Herzog, "OPEs and 4-point Functions in AdS/CFT Correspondence", (2000) hep-th/0002039
- [62] Eric D'Hoker, Daniel Z. Freedman, Samir D. Mathur, Alec Matusis y Leonardo Rastelli, "Graviton and gauge boson propagators in AdS_{d+1}", (1999) hep-th/9902042
- [63] Eric D'Hoker y Daniel Z. Freedman, "Gauge Boson Exchange", (1998) hep-th/9809179
- [64] Eric D'Hoker y Daniel Z. Freedman, "General Scalar Exchange in AdS_{d+1}", (1998) hep-th/9811257
-

Funciones de correlación - otros trabajos

- [65] Hong Liu y A.A. Tseytlin, "D = 4 Super Yang-Mills, D = 5 gauged supergravity, and D = 4 conformal supergravity", (1998) hep-th/9804083
- [66] Sergey N. Solodukhin, "Correlation functions of boundary field theory from bulk Green's functions and phases in the boundary theory", (1998) hep-th/9806004
- [67] G.E.Arutyunov y S.A.Frolov, "On the origin of supergravity boundary terms in the AdS/CFT correspondence", (1998) hep-th/9806216
- [68] W. S. l'Yi, "Coordinate-space holographic projection of fields and an application to massive vector fields", (1998) hep-th/9808051
- [69] W. S. l'Yi, "Generating functionals of correlation functions of p-form currents in AdS/CFT correspondence", (1998) hep-th/9809132
- [70] Gordon Chalmers y Koenraad Schalm, "The large N_c limit of four-point functions in N = 4 Super Yang Mills theory from anti-de Sitter Supergravity", (1998) hep-th/9810051
- [71] L. Chekhov, "AdS/CFT correspondence on torus", (1998) hep-th/9811146
- [72] Gordon Chalmers y Koenraad Schalm, "Holographic Normal Ordering and Multi-particle States in the AdS/CFT Correspondence", (1999) hep-th/9901144

- [73] Eric D'Hoker, Daniel Z. Freedman y Witold Skiba, "Field Theory Tests for Correlators in the AdS/CFT Correspondence", (1999) [hep-th/9807098](#)
- [74] Pablo Minces y Victor O. Rivelles, "Chern-Simons Theories in the AdS/CFT Correspondence", (1999) [hep-th/9902123](#)
- [75] Sze-Shiang Feng y Mu-Lin Yan, "Conformal Field Theory Correlators From sine-Gordon Model on AdS Spacetime", (2000) [hep-th/0008179](#)
- [76] Hong Liu, "Scattering in Anti-de Sitter Space and Operator Product Expansion", (1999) [hep-th/9811152](#)
- [77] Eric D'Hoker, Samir D. Mathur, Alec Matusis y Leonardo Rastelli, "The Operator Product Expansion of $N = 4$ SYM and the 4point Functions of Supergravity", (1999) [hep-th/9911222](#)
- [78] G. Arutyunov y S. Frolov, "Four-point Functions of Lowest Weight CPOs in $N = 4$ SYM₄ in Supergravity Approximation", (2000) [hep-th/0002170](#)
- [79] Gleb Arutyunov, Sergey Frolov y Anastasios C. Petkouy, "Operator Product Expansion of the Lowest Weight CPOs in $N = 4$ SYM₄ at Strong Coupling", (2000) [hep-th/0005182](#)