

01170
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POST-GRADO

**“CIRCUITO CON
COMPORTAMIENTO CAOTICO”**

T E S I S
PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA
(ELECTRICA)

P R E S E N T A:

ERNESTO ORDUÑA REYES

ASESOR:
**M. EN C. GUILLERMO VAZQUEZ
COUTIÑO.**



MEXICO D.F.

MAYO DEL 2001



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO

Por todas las facilidades en tiempo, económico y materiales que se me brindaron.

GERENCIA DEL LABORATORIO CENTRAL DEL I.M.P.

A todo el personal de la gerencia que de alguna forma contribuyeron a la realización de esta tesis.

M.EN C. GUILLERMO VAZQUEZ COUTIÑO

Al asesor y amigo que tuvo la paciencia de dirigir este trabajo.

AL HONORABLE JURADO

Por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

DEDICATORIAS

A Jesucristo

Que es dios todo poderoso,
es amor y bondad.

A Ernesto Manuel y Marisol

Que son la razón de mi existencia,
mi orgullo y la energía de cada día.

A mi Marce.

Mi compañera, amiga, consejera
que por su amor, comprensión y apoyo
avanzamos juntos en la vida.

A mis Padres:

Jacinto Orduña Mora y Manuelita Reyes Chavez
Por su gran amor y apoyo incondicional en todo
momento de mi vida.

A mis Hermanos:

Ana, Tere, Alfredo
Adriana, Edgar, Miki y Marco Antonio
simplemente por ser ellos.

INDICE

I INTRODUCCION

- 1.1 Antecedentes
- 1.2 Formulación del problema
- 1.3 Objetivos
- 1.4 Organización del trabajo

II LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL

- 2.1 Introducción a la geometría fractal
- 2.2 Medida y dimensión de Hausdorff y conceptos fundamentales asociados
- 2.3 Definiciones alternativas de dimensión
 - 2.3.1 Dimensión de la caja o dimensión de capacidad
 - 2.3.2 Dimensión de similitud

III ANALISIS DE SISTEMAS DINAMICOS Y LA CONEXION ENTRE LA TEORIA DEL CAOS Y LA GEOMETRIA FRACTAL.

- 3.1 Análisis de sistemas dinámicos.
- 3.2 Caracterización y generación de atractores extraños
- 3.3 Cálculo de la dimensión de correlación de Grassberger y Procaccia
- 3.4 Exponente de Lyapunov
- 3.5 Entropía de Kolmogorov
- 3.6 Análisis espectral
- 3.7 Tabulación de resultados

IV ANTECEDENTES DE CIRCUITOS CON COMPORTAMIENTO CAÓTICO

- 4.1 Circuito de Chua
- 4.2 Circuito de Pautex

V PROPUESTA DE UN CIRCUITO CAOTICO

5.1 Simulacion del nuevo circuito

5.2 Primer caso: $C_0 = 10\text{nfd}$

5.3 Segundo caso: $C_0 = 2\text{nfd}$

5.4 Tercer caso: $C_0 = 500\text{ pfd}$

5.5 Cuarto caso: $C_0 = 100\text{ pfd}$

5.6 Quinto caso: $C_0 = 15\text{ pfd}$

VI ANALISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS

6.1 Planteamiento del problema

6.2 Atractor en el espacio de estados

6.3 Mapeo de retorno

6.4 Distribución de probabilidad

6.5 Cálculo de la dimensión fractal

6.6 Cálculo del exponente de Lyapunov

6.7 Análisis espectral

VII CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFIA

CAPITULO I

INTRODUCCION

1.1 Antecedentes.

Desde sus comienzos en la década de 1970, la teoría del caos se ha convertido en uno de los campos de investigación matemática con mayor crecimiento. Hasta ahora, en la física, incluso si se consideran las ramificaciones avanzadas de la teoría cuántica, se ha ocupado principalmente de sistemas en principio predecibles, al menos a gran escala; sin embargo, el mundo natural muestra tendencia al comportamiento caótico. Por ejemplo, los sistemas meteorológicos de gran tamaño tienden a desarrollar fenómenos aleatorios al interactuar con sistemas locales más complejos. Otros ejemplos son la turbulencia en una columna de humo que asciende o el latido del corazón humano [1].

Durante mucho tiempo, los científicos carecieron de medios matemáticos para tratar sistemas caóticos, por muy familiares que resultaran, y habían tendido a evitarlos en su trabajo teórico. A partir de la década de 1970, sin embargo, algunos físicos comenzaron a buscar formas de encarar el caos y determinar ciertos esquemas recurrentes de comportamiento en los sistemas que tienden hacia el caos. Los esquemas del caos están relacionados con los que se observan en la geometría fractal [2].

El término Caos se refiere a una interconexión subyacente que se manifiesta en acontecimientos aparentemente aleatorios.

Esto es una definición del caos aplicada a nuestras vidas, pero en los apartados siguientes el caos se tratará desde diversas materias y perspectivas [3].

En la turbulencia de un arroyo es imposible predecir la trayectoria de una partícula de agua. Sin embargo, ese sistema es, a la vez, *contínuamente cambiante y siempre estable*. Si tiramos una piedra al agua el sistema no se desestabilizará, cosa que sí ocurriría en un sistema no caótico.

Esto es una metáfora de *nosotros mismos* : somos la misma persona que hace diez años, sin embargo hace diez años estábamos formados por unos átomos diferentes y psicológicamente también somos diferentes.

¿Por qué un sistema caótico es tan cambiante? Porque **todo esta influido por todo**. Todo está interconectado con todo.

¿Por qué un sistema caótico es, a la vez, tan estable? Por las interconexiones sutiles que se forman al estar todo influido por todo. Lo siento, doy la misma respuesta que a la pregunta anterior.

En la teoría del caos hay tres temas subyacentes:

- **El control:** La teoría del caos demuestra que el sueño de poder dominar toda la naturaleza es una ilusión. Hemos de aceptar la impredecibilidad del caos en vez de resistirnos inútilmente a las incertidumbres de la vida. De ahí sale el siguiente tema:
- **La creatividad:** Es algo inherente al caos. Pactar con el caos significaría no dominarlo sino ser participantes creativos.
- **La sutileza:** (ver influencia sutil) Más allá de nuestros intentos por controlar y definir la realidad se extiende el infinito reino de la sutileza y la ambigüedad, mediante el cual nos podemos abrir a dimensiones creativas que vuelven más profundas y armoniosas nuestras vidas.

Control

Los sistemas caóticos son muy flexibles. Si tiramos una piedra al río, su choque con las partículas del agua no cambia el cauce del río, sino que el caos se adapta al cambio. Sin embargo, si el río hubiese sido creado por nosotros con un orden artificial, donde cada partícula de agua tuviera una trayectoria determinada, el orden se hubiera derrumbado completamente. El caos en realidad es mucho más perfecto que nuestro orden artificial; hemos de comprender el caos y no intentar crear un orden rígido, que no sea flexible ni abierto a la interacción con el medio.

Siempre hemos estado obsesionados por el control, creemos que cuantas más técnicas creemos, más control tendremos sobre el mundo. Pero con cada tecnología nueva que introducimos se nos echan encima un montón de problemas, para cada uno de los cuales hemos de inventar nueva tecnología. Volvamos al ejemplo del río: si tiramos una piedra el cauce no cambia, pero si tiramos una roca gigante la flexibilidad del sistema caótico no será suficiente. Es lo que ocurre en la Tierra: es un sistema caótico: siempre cambiante y adaptándose, pero si nos pasamos de la raya el sistema se puede romper. De echo lo está haciendo y por eso tenemos problemas con la capa de ozono, el aumento de la temperatura global y el deshielo, problemas con los recursos como el petróleo, etc.

Se ha demostrado, que en el caos determinista de sistemas dinámicos simples subyace un orden oculto tras sus fenómenos manifiestamente complicados y aleatorios. Estos fenómenos caóticos, pese a su carácter determinista, son impredecibles.

En los sistemas no lineales hay propiedades emergentes, que aparecen como resultado de la interacción entre sus partes y que no pueden explicarse a partir de las propiedades de sus elementos componentes.

Pero la complejidad no es, necesariamente, sinónimo de complicación. Sólo habría que enfocar el mundo desde una visión basada en la no linealidad. Tanto la geometría como la dinámica de muchos sistemas naturales se pueden abordar desde enfoques simples.

La hipótesis de la frontera del caos establece que la complejidad aparece en unas condiciones muy especiales, conocidas como puntos críticos, o puntos de bifurcación. En dichos momentos orden y desorden coexisten, formándose estructuras fractales que se caracterizan por presentar un aspecto autosemejante a diferentes escalas.

Intermitencia

En el caos siempre existe la paradoja. Y la paradoja aquí es que lo simple y lo complejo parecen ser reflejos lo uno de lo otro: son dos cosas inseparables. Los fractales matemáticos están generados por fórmulas muy simples, pero son figuras de inagotable complejidad.

Intermitencia es la situación en que lo simple y lo complejo se alternan constantemente. Por ejemplo, incluso en amplificadores electrónicos de gran precisión ocasionalmente se producen cortas descargas de electricidad estática. Eso no se debe a una interferencia externa sino a los resultados de los efectos no lineales dentro del circuito, produciéndose períodos de caos. Con la aparición de relojes atómicos de precisión se descubrió que la Tierra sufría alteraciones en su rotación: el paso del "tiempo" de la tierra no es perfectamente regular porque de vez en cuando aparecen estallidos intermitentes de caos. También el cuerpo humano presenta gran variedad de ejemplos de intermitencia. Uno es que se ha demostrado que un poco de caos es necesario para que el sistema inmunológico funcione de forma eficiente.

La información ausente

La teoría del caos tiene que ver con la incapacidad de predecir y controlar, con la incapacidad para hacer una descripción completa, con lo que algunos científicos han llamado "la información ausente". Esta información ausente puede ser de gran importancia pero... está ausente.

Las paradojas y los *koans* nos llevan al límite del pensamiento lógico, racional y ordenado. Obligan a la mente a moverse en espiral y realizar repeticiones lógicas mientras intenta resolver el problema. Sin embargo, puede que no haya solución desde el contexto en el que están enmarcados. Nos dicen que algo falta, algo es incompleto acerca de nuestro concepto de realidad. Pero solo el hecho de que pensemos en tales paradojas significa que somos superiores al sistema conceptual que hemos creado; puede que *nosotros* seamos la información ausente que estamos buscando. Las paradojas se enfrentan a nuestro deseo de dividir el mundo en dualidades, de colocar los conceptos en sus categorías adecuadas y después levantar fronteras alrededor. Nos crean un caos mental necesario para la creatividad, en el cual la mente cambia y autorreorganiza su percepción de la realidad.

Lorenz ya comprobó qué ocurre al redondear tres decimales. Tanto en la teoría como en la práctica, siempre habrá información ausente, una limitación para nuestro conocimiento. Por un lado un sistema tan complejo como el mundo, no hay una clara división en partes, lo cual ya nos impide conseguir toda la información, por otro lado, nuestra simple acción de intentar obtener información, nuestra mera presencia, perturba un sistema de forma impredecible. Además "no podemos meter la totalidad en el bolsillo, ya que el bolsillo también es parte de esa totalidad".

Siempre queremos acabar las cosas pero nos olvidamos de la información ausente. Nuestro tremendo deseo de controlar la naturaleza humana y el mundo material nos ha creado una sed insaciable de progreso, acompañada de una arrogancia con la que clasificamos a otras civilizaciones como primitivas. Sólo nos preocupa lo conocido y nos olvidamos de la dimensión del misterio. Efectivamente, es sorprendente el progreso tecnológico actual, pero tal vez estemos ignorando algo, que en cualquier momento, podría trastocar todo nuestro conocimiento acreditado. Un ejemplo muy evidente: A principios de siglo, los físicos especulaban con que su materia de estudio se estaba

acabando. Pronto no habría aspectos físicos relevantes que pudieran descubrirse. Sólo les faltaban por resolver tres problemas: por qué la órbita de Mercurio es irregular, una discrepancia entre la teoría y la cantidad de energía liberada por un agujero negro, y el efecto de un tercer cuerpo en el movimiento de otros dos. Pues el intento de completar la información respecto del primer caso condujo a la teoría de la relatividad; el segundo hizo aparecer la teoría cuántica; y del tercero surgió la teoría del caos. Cada una de estas teorías tiene misterios que resolver. Resultó que la naturaleza es bastante más sutil de lo que habíamos imaginado.

Pero las teorías completas no existen. Una teoría es una proyección mental sobre la infinita complejidad de la naturaleza, la que pone énfasis en ciertos matices dentro del flujo de la existencia y de la incertidumbre. Al físico David Bohm le gustaba señalar que las palabras "teoría" y "teatro" proceden de la misma raíz griega que significa "ver". Una teoría científica es un teatro de la mente, es algo provisional que nos abstrae de un contexto muchísimo más amplio. El contexto en el que nacen las teorías cambia permanentemente. Una teoría funciona durante un cierto tiempo y después parece estancarse, por más que hagamos intentos por modificarla, hasta que acaba surgiendo una nueva producción teatral de la mente. Las teorías son como herramientas de la mente y deben poder ser cambiadas cuando haga falta. Lo que a veces ocurre es que acabamos identificándonos tanto a nosotros como a la naturaleza con determinada teoría y hacemos lo posible por adaptar el mundo y la mente a nuestra teoría. No debemos convertirnos en esclavos de una teoría; no hace falta acabar creyéndonos nuestras producciones teatrales.

El caos en la naturaleza

Las formas fractales se observan en todo lo que es natural, y a todas las escalas.

Parece que el mundo de los fractales numéricos y el mundo fractal material forman parte de un mismo fractal, puesto que contienen formas casi idénticas. El mundo entero es un fractal que se autoasemeja a diferentes escalas. Sin embargo los fractales matemáticos son mucho más simplificados. A menudo la naturaleza ofrece un desafío a la descripción: las auto semejanzas de sus formas están combinadas con una inagotable novedad, que no puede ser descrita ni siquiera por algoritmos no lineales.

Tomemos como ejemplo la caída de los árboles de la selva. Cuando un árbol cae deja un claro por donde entra la luz, las condiciones cambian, la vegetación se ve muy afectada. Otras veces, al caer un árbol, arrastra a otros, formándose claros de cientos de metros cuadrados. El dibujo que forman los claros de la selva formados por la caída de árboles representan una estructura fractal de un sistema en punto crítico.

Su comportamiento global sorprende: si contamos el número de individuos activos, a lo largo del tiempo, comprobaremos que el número fluctúa con una periodicidad de unos 25 minutos. Cada cierto tiempo ningún elemento está activo. Ese ciclo de actividad podría ser sólo un reflejo de sincronización, sin embargo la actividad individual es totalmente aperiódica, caótica, sin ningún tipo de regularidad intrínseca.

Al aumentar el número de individuos aparece un comportamiento colectivo hasta que, para cierta densidad de hormigas, comienzan a aparecer oscilaciones regulares. Si artificialmente cambiamos la densidad de las hormigas la colonia redefine sus fronteras, para volver a la densidad óptima para mantenerlas autoorganizadas. En esa densidad crítica el sistema se comporta como un todo, a medio camino entre el orden y el desorden.

El caos aplicado a la inteligencia artificial

El ejemplo de las hormigas se puede comparar con una *red neural fluida* en la inteligencia artificial (IA). La fluidez en un sistema caótico se manifiesta cuando las conexiones entre elementos cambian con el tiempo como consecuencia del movimiento al azar o por otras causas. Un elemento (una hormiga, una neurona) que está inmóvil puede volver a la actividad ya sea por interacción o de forma espontánea, siendo las actividades espontáneas totalmente caóticas. Así, a baja densidad de elementos, las fluctuaciones serían muy irregulares porque habría poca interacción y los elementos no propagan bien sus cambios. A grandes densidades las fluctuaciones del sistema se tornan periódicas: la activación de un elemento se propaga en forma de onda. Pero entre ambos extremos (irregularidad y periodicidad) existe una densidad crítica, un punto de bifurcación, en el cual la información transmitida se hace máxima.

La *computación* (la capacidad de un sistema complejo para captar y procesar información) a menudo aparece en la naturaleza cuando un sistema caótico llega a un punto crítico. (¡Es curioso que todos los sistemas caóticos tienden a evolucionar hacia su punto crítico!). Para procesar información se necesita un cierto grado de orden interno, que permita almacenar temporalmente cierta información. Pero la información ha de ser manipulable, por eso el desorden es necesario, para permitir la fluidez del sistema caótico.

La idea de introducir la aleatoriedad en los sistemas de IA también se puede observar de otro modo. En la teoría del caos *la aleatoriedad es simplemente algo que no comprendemos por qué pasa*, es una pequeña porción del fractal que forma el mundo. Teniendo en cuenta las propiedades de los fractales (autosemejanza a diferentes escalas) es posible coger esa porción de fractal y, estudiándola desde una escala adecuada (es decir, descubriendo un punto crítico), descubrir el contexto de la información dentro del sistema fractal. Tal vez nuestras mentes funcionen así: cada vez más se habla de aleatoriedad en el cerebro.

En estado de normalidad cerebral convergen dos aspectos: orden (en las ondas cerebrales) y desorden. Las ondas son aperiódicas pero permiten, al propagarse por la corteza, sincronizar miles de millones de neuronas de forma ordenada. El cerebro es un sistema caótico en punto crítico, capaz de procesar la información captada (haciendo uso de la aleatoriedad, tal vez...). Para poder entender con más detalle haremos referencia a los sistemas periódicos y aleatorios.

Sistema Periódico:

Cualquier clase de evento, sistema o movimiento que se repita en intervalos de tiempo iguales se denomina periódico, y si el movimiento se efectúa hacia delante y hacia atrás sobre la misma trayectoria, se llama oscilatorio.

La oscilación o vibración completa es el movimiento efectuado hasta volver al punto de partida, es decir de A a B y volver a A, o bien, de 0 a B a 0 a A y volver a 0.

El periodo del movimiento, se designa por T, es el tiempo necesario para realizar una vibración completa.

La frecuencia f, es el número de vibraciones completas que tienen lugar en la unidad de tiempo. Evidentemente, la frecuencia es la inversa del periodo [4], o sea :

$$T = 1/f$$

Una forma matemática de definir una función periódica es la siguiente; es una función para la cual

$$f(t) = f(t+T)$$

para todo valor de t. La constante mínima de T que satisface la ecuación anterior se llama el periodo de la función [5]. Mediante la repetición de la ecuación anterior se obtiene:

$$f(t) = f(t+nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

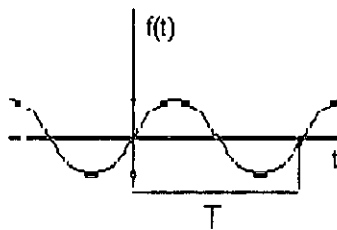


Fig. 1.1 Señal periódica [5]

La función $y = \text{sen } x$ describe la variación del seno de ángulos medidos en radianes. Es continua y periódica de periodo 2π . Se denomina función sinusoidal.



Fig. 1.2 Función seno [5]

Todas las funciones trigonométricas son periódicas: sen, cos, sec y cosec tienen periodo 2π , mientras que tg y cot tienen periodo π [5].

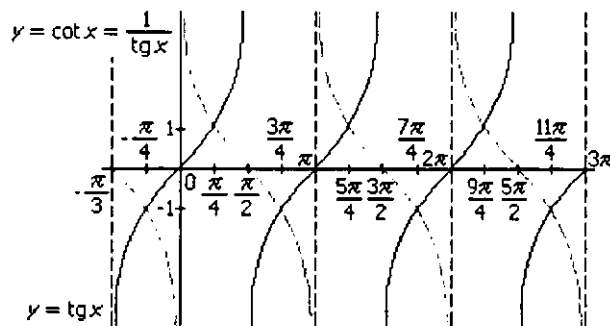


Fig. 1.3 Funciones tangente y cotangente [5]

Sistema aleatorio:

Es aquel que ocurre o no dependiendo del azar. Es, por tanto, el resultado de una experiencia aleatoria [6].

Experiencia aleatoria, es la experiencia cuyo resultado depende del azar. Son experiencias aleatorias el lanzamiento de una moneda, el de un dado, o la extracción de una carta de una baraja. Los elementos de una experiencia aleatoria se llaman sucesos aleatorios o, simplemente, sucesos.

También se consideran experiencias aleatorias algunos acontecimientos relacionados con la sociología, la demografía, la economía u otras ciencias cuyos resultados se estudian más eficazmente si se consideran como aleatorios que si se pretende estudiar las causas concretas que los provocan; es el caso, por ejemplo, del número de accidentes de tráfico que se producen en un fin de semana en una cierta carretera.

Una experiencia aleatoria se llama compuesta si se puede considerar como resultado de concatenar dos o más experiencias simples. Así, extraer tres cartas de una baraja es una experiencia que se puede considerar compuesta por tres experiencias sencillas consistentes cada una de ellas en extraer una carta.

Las experiencias simples que dan lugar a una compuesta se llaman independientes si el resultado de cada una de ellas no influye en el de las siguientes. La experiencia consistente en lanzar dos dados, uno tras otro, se compone de dos experiencias independientes, pues el resultado que se obtenga en el primero no afecta a las probabilidades en el segundo.

Dos o más experiencias consecutivas son dependientes si el resultado de cada una afecta a las probabilidades de los sucesos en las siguientes. Por ejemplo, en la experiencia consistente en sacar dos cartas de una baraja, al extraer la primera se modifica la composición de la baraja. Por tanto, las probabilidades en la segunda dependerán de lo que ocurrió en la primera. Cada uno de los casos que se pueden dar al realizar una experiencia aleatoria se llama suceso elemental. El conjunto formado por todos los sucesos se llama espacio muestral y se designa por E . Por ejemplo, al lanzar una moneda, los sucesos elementales son C (cara) y $+$ (cruz) y el espacio muestral el conjunto $\{C, +\}$; al lanzar un dado, los sucesos elementales son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, y el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

En general, los sucesos son conjuntos formados por sucesos elementales. Es decir, cada suceso es un subconjunto del espacio muestral. En el lanzamiento del dado son sucesos, entre otros, $PAR = \{2, 4, 6\}$, $MAYOR QUE 4 = \{5, 6\}$, $MÚLTIPLO DE 3 = \{3, 6\}$. También son sucesos los sucesos elementales $\{5\}$, $\{1\}$, y el propio espacio muestral E .

El grado de posibilidad de que un suceso ocurra es su probabilidad. La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre cero y uno.

El espacio muestral se llama suceso seguro porque es seguro que ocurre. Es decir, su probabilidad es 1. Se llama suceso imposible al conjunto vacío, \emptyset , que no tiene ningún suceso elemental. Recibe este nombre porque es imposible que ocurra. Su probabilidad es cero.

La unión de dos sucesos, A y B , que se designa $A \cup B$, es otro suceso formado con todos los elementos de A y los de B . El suceso $A \cup B$ ocurre cuando ocurre A , B o ambos.

Se llama intersección de dos sucesos, y se designa $A \cap B$, a otro suceso formado con los elementos comunes a A y a B . El suceso $A \cap B$ ocurre cuando ocurren simultáneamente A y B .

Dos sucesos son incompatibles si no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, A y B son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$. En la experiencia del dado, los sucesos $\{1, 3\}$ y $\{2, 4, 5, 6\}$ son incompatibles.

Dos sucesos se dice que son contrarios si siempre ocurre uno u otro, pero no ambos simultáneamente. El contrario de un suceso A se designa por A' . Es decir, A y A' son contrarios si $A \cup A' = E$ y $A \cap A' = \emptyset$. En la experiencia del dado, los sucesos $\{1, 3\}$ y $\{2, 4, 5, 6\}$ son contrarios.

El profesor Leon Chua del departamento de Ingeniería Eléctrica y Ciencias Computacionales de la Universidad de California en Berkeley realizó interesantes investigaciones sobre el análisis de sistemas dinámicos no lineales como por ejemplo: Redes Neuronales Celulares, Circuitos y Sistemas No Lineales, Modelación de Sistemas No lineales, Aplicación del Caos en la ingeniería y el circuito caótico de Chua, este último fue el que lo hizo que recibiera gran cantidad de reconocimientos alrededor del mundo. También es autor del libro "Introducción a la teoría de redes no lineales" [7].

A partir del circuito de Chua diferentes investigadores alrededor del mundo han tratado de estudiarlo, mejorarlo o simplemente darle una aplicación desde el punto de vista artístico ya que las diferentes imágenes que se pueden producir o la generación de diferentes tonos musicales han sido de gran interés.

1.2 Formulación del problema.

Frecuentemente nos encontramos con el hecho de que determinado sistema presenta diferentes tipos de comportamiento: caótico, aleatorio y periódico. Un problema que se presenta en el análisis de circuitos no lineales es el de clasificar su comportamiento dinámico dentro de una de las tres categorías antes mencionadas, esto no es fácil y requiere del uso de las técnicas del análisis de sistemas dinámicos (ASD).

El problema principal de esta tesis consiste básicamente en tratar de hallar la topología de un circuito que exhiba comportamiento caótico (sin ser el circuito de Chua [8] o el de Pautex [9])y que tenga una estructura sencilla.

Los circuitos caóticos existentes (Chua, Pautex, etc.) contienen un gran número de componentes y una topología o estructura que los hacen difíciles de entender y analizar.

Finalmente los sistemas actuales con los que se cuenta para el análisis de sistemas caóticos, aunque explican su manejo son difíciles de comprender si no se tienen las bases teóricas suficientes y ejemplos claros que ayuden a motivar a los estudiosos del tema a seguir en la investigación de los sistemas dinámicos no lineales, ya que existe una diversidad de áreas para su posible aplicación.

1.3 Objetivos.

El presente trabajo se propone cubrir los siguientes objetivos:

- Proponer un nuevo circuito con comportamiento caótico con una topología más sencilla que aquellos propuestos con anterioridad, y que sea más fácil de analizar y comprender.
- Mostrar las diferentes etapas por las que puede pasar el circuito, es decir desde periódico hasta caótico (ruta al caos), con sólo pequeñas variaciones en el valor de uno de sus componentes (parámetro de bifurcación).
- Demostrar mediante el análisis de sistemas dinámicos y con ayuda de programas de cómputo que dicho circuito es un generador universal de señales.
- Poder explicar con claridad cada uno de los diferentes métodos de análisis con la ayuda de los resultados obtenidos del nuevo circuito.

1.4 Organización del trabajo.

En el capítulo II se darán los fundamentos de la geometría fractal y una discusión de las diferentes formas de métodos para el cálculo de la dimensión fractal (dimensión de similitud y dimensión de capacidad) que serán base para el entendimiento del siguiente capítulo.

En el capítulo III se discutirán algunas definiciones referentes al Análisis de Sistemas Dinámicos (ASD) como Difeomorfismo, Movimiento Caótico, Clases de atractores, que nos servirán de marco de referencia para diferenciar el tipo de comportamiento de las señales de salida de los circuitos electrónicos bajo análisis, dichos conceptos se aplicarán en el capítulo VI.

En el capítulo IV se verán algunos antecedentes de circuitos con comportamiento caótico, como: El circuito de Chua, el circuito de Pautex y se verán diferencias y similitudes.

En el capítulo V se hará el planteamiento de un nuevo circuito con comportamiento caótico pero con una topología más sencilla, que la de los circuitos de Chua y Pautex, además de que la simulación del circuito para cada uno de los diferentes valores del parámetro de bifurcación, en lo que se conoce como la ruta al caos; mediante la ayuda del programa de cómputo Electronics Workbench[10] se harán las simulaciones de los circuitos y se mostrarán cada una de sus señales de salida, haciendo las comparaciones respectivas.

En el capítulo VI se hará un análisis de los resultados mediante la ayuda del programa de cómputo CDA (Chaos Data Analyzer)[11]. Las técnicas de análisis consideradas son: Atractor en el espacio de estados, Mapeo de retorno, Distribución de probabilidad, Dimensión fractal, Exponente de Lyapunov y Análisis espectral.

En el capítulo VII se presentan las conclusiones.

CAPITULO II

LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL

2.1 INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL

En este capítulo se introducirán las ideas y conceptos básicos de la Geometría Fractal, sentando las bases para poder efectuar el Análisis de Sistemas Dinámicos (ASD) de circuitos con comportamiento caótico; esto es, altamente sensibles a las condiciones iniciales. La conexión entre la Geometría Fractal y la Teoría del Caos dentro del contexto del ASD se discutirá en el capítulo III. En el capítulo IV se ilustrarán algunos ejemplos ya clásicos de circuitos con comportamiento caótico, y es sólo hasta el capítulo V, en el cual se introduce la propuesta de un circuito cuyo comportamiento se presume que es caótico, en donde se utilizarán algunos de los conceptos desarrollados en este capítulo (en particular, el de dimensión fractal que se puede aproximar como dimensión de capacidad y como dimensión de correlación) para analizar los atractores generados a partir de la solución de las ecuaciones que modelan el circuito propuesto considerándolo como un sistema dinámico.

Para comprender la importancia de la Geometría Fractal puede ser ilustrativo el recordar un poco de historia: Galileo, hacia 1623 [12] mencionaba que “la filosofía escrita en este gran libro (el de la naturaleza) está abierto continuamente a nuestra mirada pero, no puede ser entendido a menos que uno aprenda primero a comprender el lenguaje en el que está escrito; y está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son los triángulos, los círculos y otras figuras geométricas sin las cuales sería humanamente imposible entender una sola palabra de él; sin lo anterior, uno estaría (continuamente) vagabundeando por un laberinto oscuro”.

Benoit Mandelbrot, el matemático que acuñó la palabra *fractal*, y quien es considerado como el iniciador de la GEOMETRÍA FRACTAL, liberó a la geometría de la tiranía de las líneas rectas, las formas geométricas convencionales (o euclidianas) y los sólidos regulares.

Mandelbrot se atrevió a evidenciar lo que parecía obvio [13]: “Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, la corteza (terrestre) no es suave y ni siquiera la luz viaja en línea recta”. Galileo tenía razón en parte pero, se había equivocado de dialecto geométrico, pues el dialecto preferido por el “gran libro de la naturaleza” y el que corresponde a las formas irregulares del mundo real es precisamente el de la GEOMETRÍA FRACTAL.

Pero, ¿qué es un fractal? En términos muy técnicos puede mencionarse la siguiente definición debida a Mandelbrot y propuesta en 1982 [14]: **“Un fractal es por definición un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica”**.

Esta definición requiere de una detallada discusión de qué es lo que se entiende por dimensión de Hausdorff-Besicovith (d_H), lo cual se hará más adelante; y de una manera más simple y fácil de calcular, conocida como dimensión de similitud (d_s) que se utiliza frecuentemente para estimar la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

De hecho, hacia 1986, Mandelbrot propuso una nueva definición de fractal que está íntimamente relacionada con el concepto de “auto-similitud”: **“Un fractal, es una forma (geométrica) hecha de partes similares al todo de alguna manera”** [15]

En los fractales se pueden observar figuras geométricas que consisten en motivos idénticos, que se repiten dentro de sí mismos a escalas cada vez más reducidas.

Es importante mencionar que la primera definición de Mandelbrot es poco satisfactoria, dado que, si bien se ajusta a la descripción de un cierto número de fractales, también excluye a otro gran número de conjuntos que deberían ser considerados como fractales [16].

En una comunicación personal de Mandelbrot a Feder (1989), el “inventor” de la GEOMETRÍA FRACTAL confesó que **“aún falta una nítida y completa caracterización de los fractales”** [15].

K. Falconer (1990) en su libro “FRACTAL GEOMETRY: MATHEMATICAL FOUNDATIONS AND APPLICATIONS”, hace notar que la definición de “fractal” debería ser considerada de la misma forma que

un biólogo intenta dar una definición de “vida”; en realidad no hay una definición simple y rápida de “vida”, mas bien, una lista de propiedades características de los seres vivos, tales como su habilidad para reproducirse, para moverse o para existir, hasta cierto punto, de manera independiente de su ambiente. Siguiendo esta filosofía y en analogía con la forma de asignar ciertas propiedades características al concepto “vida”, nos referimos al conjunto F (que puede ser considerado como un conjunto de puntos contenido en cierto espacio) como a un fractal cuando se observen las siguientes características [16]:

- i) F tiene una estructura fina; esto es, detalle a escalas arbitrariamente pequeñas.
- ii) F es demasiado irregular como para ser descrito en el lenguaje geométrico tradicional, tanto local como globalmente.
- iii) A menudo F tiene o exhibe alguna forma de autosimilitud, tal vez en forma aproximada o estadística. Un objeto auto-similar tiene la propiedad de que una parte de él, cuando se amplifica, luce como el todo.

Cuando un fractal es exactamente auto-similar, cada pequeña porción de F al ser amplificada, reproducirá exactamente una porción más grande; si se consideran fractales estadísticamente auto-similares, una amplificación de F lucirá o se parecerá a F pero, no será exactamente como F .

El concepto unificador que se “oculta” detrás de la conexión entre la geometría fractal, la teoría del caos (teoría de los sistemas altamente sensibles a las condiciones iniciales, teoría que se verá en detalle en el capítulo siguiente) y las leyes de potencias, es precisamente el de autosimilitud o invarianza frente a cambios de dimensión o escala; es un atributo de muchas leyes de la naturaleza y de innumerables fenómenos del mundo que nos rodea. La autosimilitud es una de las simetrías que modelan (en forma decisiva) nuestro universo y nuestros esfuerzos para comprenderlo [17].

- iv) Usualmente, la “dimensión fractal” de F (que tiene que ser definida de alguna manera) es mayor que su dimensión topológica. Existen fractales para los cuales se requiere de más de un exponente de escalamiento para

ser caracterizados; de tales exponentes, la dimensión de Hausdorff es solo uno; A dichos fractales generalizados se les conoce como multifractales [17].

- v) En la mayor parte de los casos F se define por medio de un algoritmo recursivo.

2.2 MEDIDA Y DIMENSIÓN DE HAUSDORFF Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES ASOCIADOS

Anteriormente, se definió un fractal [14], en términos de la llamada dimensión de Hausdorff-Besicovitch; para entender las matemáticas asociadas al concepto de fractal, es esencial tener cierta familiaridad con la medida y la dimensión de Hausdorff. A su vez, será necesario recordar algunos conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos, de la topología general y de la teoría de la medida. Comenzaremos por introducir algunas operaciones elementales de la teoría de los conjuntos [18].

Sean A o B conjuntos arbitrarios: se llama unión $A \cup B$ de estos conjuntos al conjunto compuesto de todos los elementos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos A o B . En forma análoga se define la suma de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos: si A_α son conjuntos arbitrarios, su suma $\cup A_\alpha$ es la colección de elementos, cada uno de los cuales pertenece por lo menos a uno de los conjuntos.

Se denominará intersección $A \cap B$ de los conjuntos A y B al conjunto compuesto por todos los elementos pertenecientes tanto al conjunto A como al conjunto B , la intersección de un número cualquiera (finito o infinito) de conjuntos A_α es la colección $\cap A_\alpha$ de elementos pertenecientes a cada uno de los conjuntos A_α .

La operación de resta o diferencia $A \setminus B$ de los conjuntos A y B consiste en la colección de aquellos elementos de A que no pertenecen a B . A veces se escribe $A - B$ en vez de $A \setminus B$ para denotar la diferencia de los conjuntos A y B .

La diferencia simétrica $A \Delta B$ de los conjuntos A y B se define mediante:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Se denomina “**sistema de conjuntos**” a todo conjunto cuyos elementos son en sí ciertos conjuntos.

Denotaremos con letras tipo “**Brush Script**” mayúsculas a los sistemas de conjuntos.

Un sistema no vacío de conjuntos \mathcal{R} se llama **anillo** si de $A \in \mathcal{R}$ y $B \in \mathcal{R}$ se deduce que $A \Delta B \in \mathcal{R}$ y $A \cap B \in \mathcal{R}$. Como para cualesquiera dos conjuntos A y B

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$
$$\text{y } A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$$

Resulta que si $A \in \mathcal{R}$ y $B \in \mathcal{R}$, también pertenecen a \mathcal{R} los conjuntos $A \cup B$ y $A \setminus B$. En consecuencia, un anillo de conjuntos es un sistema de conjuntos invariante respecto a las operaciones de unión, intersección, resta y diferencia simétrica. Todo anillo es, además, invariante respecto a las operaciones siguientes:

$$C = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad D = \bigcap_{k=1}^n A_k$$

Por otro lado, todo anillo contiene al conjunto vacío ϕ dado que $A \setminus A = \phi$. El sistema que solo consta del conjunto vacío representa el menor anillo de conjuntos posible.

A un conjunto E , se le denominará unidad del sistema de conjuntos \mathcal{G} si $E \in \mathcal{G}$ y además $\forall A \in \mathcal{G}$ se verifica la siguiente igualdad.

$$A \cap E = A$$

σ -anillo. Un anillo de conjuntos se llama σ -anillo si junto con toda sucesión de conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n contiene la unión:

$$S = \bigcup_n A_n$$

δ -anillo. Un anillo de conjuntos se llama δ -anillo si junto con toda sucesión de conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n contiene la intersección:

$$D = \bigcap_n A_n$$

Naturalmente, se le denomina σ -álgebra a todo σ -anillo con unidad y δ -álgebra a todo δ -anillo con unidad. En realidad ambos conceptos coinciden: toda σ -álgebra es al mismo tiempo una δ -álgebra y toda δ -álgebra, una σ -álgebra. Lo anterior se deduce de las siguientes relaciones de dualidad.

$$\cup_n A_n = E \setminus \cup_n (E \setminus A_n)$$

$$\cap_n A_n = E \setminus \cap_n (E \setminus A_n)$$

Las δ -álgebras, o equivalentemente las σ -álgebras se conocen comúnmente como **álgebras de Borel** o sencillamente **B-álgebras**.

En particular, si se designa con (X^1, X^2, \dots, X^m) a las coordenadas del punto $X \in \mathfrak{R}^m$, siendo \mathfrak{R}^m el espacio euclidiano m -dimensional; podemos asociar con un conjunto σ una σ -álgebra que contenga a los conjuntos de puntos del tipo [19]:

$$(\bar{X} : a_1 < X^1 < b_1 \dots a_m < X^m < b_m)$$

Donde $-\infty \leq a_i < b_i < +\infty$ son números reales.

A tales conjuntos se les denomina paralelepípedos semiabiertos a la derecha. Las sumas finitas de paralelepípedos semiabiertos a la derecha forman el álgebra μ_o en \mathfrak{R}^m . La mínima σ -álgebra U , que contiene el álgebra μ_o , coincide con la mínima σ -álgebra de los conjuntos que contienen todos los conjuntos abiertos y cerrados de \mathfrak{R}^m . Esta σ -álgebra se denomina boreliana (o de Borel) y a los conjuntos de U , borelianos. Para propósitos de aplicación se considerará entonces que la clase de los conjuntos de Borel es la colección más pequeña de los subconjuntos de \mathfrak{R}^m que reúne las siguientes propiedades [16]:

- i) Cada conjunto abierto y cada conjunto cerrado es un conjunto de Borel.
- ii) La unión de cada colección finita o contable de conjuntos de Borel, es un conjunto de Borel; además, la intersección de cada colección finita o contable de conjuntos de Borel es también un conjunto de Borel.

Concepto de medida. No sería posible llegar muy lejos en la teoría de fractales si no se estudian los conceptos básicos de la teoría de la medida. Se denominará a μ medida sobre \mathcal{R}^n , si μ asigna un número no negativo (inclusive ∞) a cada subconjunto de \mathcal{R}^n , tal que [16,18].

- a) $\mu(\emptyset) = 0$
- b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$
- c) Si A_1, A_2, \dots es una secuencia infinita de conjuntos, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

- d) Si $\{A_i\}$ es una sucesión de conjuntos de Borel medibles disjuntos dos a dos, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

A esta propiedad de la medida se le conoce como aditividad numerable o σ -aditividad [18].

Si en particular $A \subset B$ y A puede expresarse como la unión disjunta $A = B \cup (A \setminus B)$, si A y B son conjuntos de Borel entonces una consecuencia inmediata de ésta ecuación es:

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$$

- e) Si $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$$

Nótese aquí que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$, de modo que:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i))$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

De manera más general, si para $\delta > 0$, A_δ son conjuntos de Borel crecientes cuando δ decrece, esto es, si $A_{\delta'} \subset A_\delta$ para $0 < \delta < \delta'$, entonces:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(A_\delta) = \mu\left(\bigcup_{\delta > 0} A_\delta\right).$$

Una clase especial y muy importante de medida es la llamada **medida de Lebesgue en \mathcal{R}^n** . Si el conjunto $A = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{R}^n : a_i \leq X_i \leq b_i\}$ es un paralelepípedo en \mathcal{R}^n , el volumen n-dimensional de A está dado por

$$vol^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

La medida de Lebesgue n-dimensional L^n puede considerarse como una extensión del volumen n-dimensional para una gran clase de conjuntos. En esta tesis, será de utilidad definir la medida de Lebesgue en \mathcal{R}^n mediante.

$$L^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\sigma} vol^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\sigma} A_i \right\}$$

Donde el infimo se toma sobre todas las cubiertas de A por los paralelepípedos A_i .

En la teoría de los fractales, la **medida de Hausdorff** [16] juega un papel crucial, como tendremos oportunidad de ver más adelante.

Sea U un subconjunto no vacío del espacio euclidiano n-dimensional, \mathcal{R}^n , el diámetro de U se define como:

$$|U| = \sup \{|x-y| : x, y \in U\}$$

Si $\{U_i\}$ es una colección contable de conjuntos cuyo diámetro es a lo más δ , que cubren F: esto es:

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

Con $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada i, se dirá que $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de F.

Supóngase que F es un subconjunto de \mathcal{R}^n y que s es un número no negativo. Para cualquier $\delta > 0$, se define:

$$H_\delta^s(F) = \inf \left(\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right)$$

Aquí se ve que en tanto δ sufre un decremento, la clase de cubiertas permisibles de F se reduce, y por lo tanto, el infimo $H_\delta^s(F)$ se incrementa aproximándose al límite cuando $\delta \rightarrow 0$. Así:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

Se denominará a $H^s(F)$ la medida de Hausdorff s -dimensional de F .

No es difícil demostrar, que en efecto H^s es una medida; en primer lugar:

$$H^s(\emptyset) = 0$$

Si A está contenido en F , entonces:

$$H^s(A) \leq H^s(F)$$

Además, si $\{F_i\}$ es cualquier colección contable de conjuntos de Borel disjuntos, entonces:

$$H^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i)$$

La medida de Hausdorff s -dimensional H^s sobre subconjuntos de \mathfrak{R}^n , con $0 \leq s \leq n$, es en realidad una generalización de la medida de Lebesgue L^n a dimensiones que no son necesariamente enteras. De hecho, es posible mostrar [16] que, para subconjuntos de \mathfrak{R}^n la medida de Hausdorff n -dimensional es igual a la medida de Lebesgue L^n (esto es, el volumen n -dimensional) multiplicado por una constante; así, si F es un subconjunto de Borel de \mathfrak{R}^n :

$$H^n(F) = C_n \text{ vol}^n(F)$$

Siendo $C_n = \pi^{(1/2)^n} / 2^n (n/2)!$ el volumen de una bola n -dimensional de diámetro 1. Una propiedad, básica en la teoría de fractales, de la medida de Hausdorff s -dimensional, es la llamada **propiedad de escalamiento**.

$$\text{Si } F \subset \mathbb{R}^n \text{ y } \ell > 0$$

$$H^s(\ell F) = \ell^s H^s(F)$$

Donde $\ell F = \{\ell x : x \in F\}$; esto es, el conjunto F está “escalado” por un factor ℓ .

Otra propiedad importante de la medida de Hausdorff es la llamada condición de Hölder del exponente α : Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y $f: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo tal que:

$$|f(x)-f(y)| \leq C |x-y|^\alpha \quad x,y \in F$$

Para las constantes $C > 0$ y $\alpha > 0$. Entonces para cada s

$$H^{s+\alpha}(f(F)) \leq C^{s+\alpha} H^s(F)$$

El caso $\alpha=1$ es particularmente importante:

$$|f(x)-f(y)| \leq C |x-y| \quad x,y \in F$$

Aquí f se denomina el mapeo de Lipschitz, y

$$H^s(f(F)) \leq C^s H^s(F)$$

Si f es una isometría, esto es, si

$$|f(x)-f(y)| = |x-y| \text{ entonces } H^s(f(F)) = H^s(F);$$

Como caso particular, es importante hacer notar que la medida de Hausdorff es invariante ante translaciones, esto es:

$$H^s(F+a) = H^s(F)$$

$$\text{Donde } F+z = \{x+a : x \in F\}$$

En forma análoga, puede demostrarse que la medida de Hausdorff es también “invariante ante rotaciones”.

DIMENSIÓN DE HAUSDORFF. Si $t > s$ y $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de F , entonces:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

Después de tomar el infimo a ambos lados de dicha desigualdad, se obtiene:

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$$

Haciendo $\delta \rightarrow 0$ se ve que si $H^s(F) < \infty$ entonces $H^t(F) = 0$ para $t > s$. En un gráfico de $H^s(F)$ vs s (Fig. 2.1) se muestra que hay un valor crítico de s para el cual $H^s(F)$ “salta” de ∞ a 0 . A este valor crítico se le denomina dimensión de Hausdorff de F , y se escribe $\dim_H F$; algunos autores se refieren a esta dimensión como la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

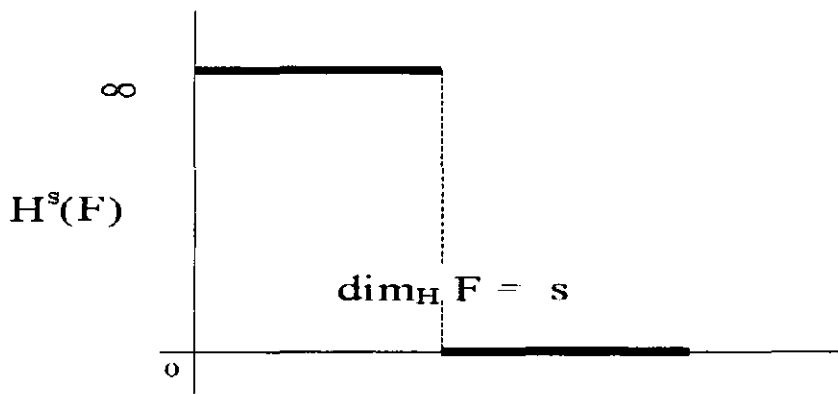


Fig. 2.1 Gráfica de $H^s(F)$ vs s , para un conjunto F . La dimensión de Hausdorff es el valor de s para el cual $H^s(F)$ “salta” de ∞ a 0 [16].

La dimensión de Hausdorff se define fundamentalmente como:

$$\dim_H F = \inf \{s: H^s(F) = 0\} = \sup \{s: H^s(F) = \infty\} \text{ de modo que,}$$

$$H^s(F) = \{ \infty \text{ si } s < \dim_H F \} \text{ y } \{0 \text{ si } s > \dim_H F \}$$

En particular, si $s = \dim_{\mathbb{H}} F$, entonces $H^s(F)$ puede ser 0 o ∞ o puede satisfacer

$$0 < H^s < \infty$$

Un conjunto de Borel que satisfaga la última condición se denomina un s -conjunto.

La dimensión de Hausdorff satisface las siguientes propiedades:

- i) Propiedad de los conjuntos abiertos. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\dim_{\mathbb{H}} F = n$, puesto que F contiene una bola de volumen n -dimensional positivo.
- ii) Propiedad de los conjuntos suaves. Si F es, una subvariedad m -dimensional continuamente diferenciable (esto es, una superficie m -dimensional) de \mathbb{R}^n , entonces $\dim_{\mathbb{H}} F = m$. En particular, las curvas suaves tienen dimensión 1 y las superficies suaves tienen dimensión 2. Esto puede deducirse de la relación entre la medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue.
- iii) Monotonicidad. Si $A \subset F$, entonces $\dim_{\mathbb{H}} A \leq \dim_{\mathbb{H}} F$. Esto se deduce en forma inmediata de la propiedad $H^s(A) \leq H^s(F)$ para cada s .
- iv) Estabilidad contable. Si F_1, F_2, \dots es una secuencia contable de conjuntos, entonces:

$$\dim_{\mathbb{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_{\mathbb{H}} F_i \}$$

De hecho, $\dim_{\mathbb{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_{\mathbb{H}} F_j$

Por otro lado, si $s > \dim_{\mathbb{H}} F_i \quad \forall i$, entonces $H^s(F_i) = 0$, de modo que $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$

- v) Propiedad de los conjuntos contables. Si F es contable, entonces $\dim_{\mathbb{H}} F = 0$, dado que si F_i es un punto simple, $H^0(F_i)=1$ y $\dim_{\mathbb{H}} F_i = 0$; así por la propiedad de estabilidad contable:

$$\dim_{\mathbb{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$$

- vi) Invariancia geométrica. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y supóngase que $f: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Hölder.

$$|f(x)-f(y)| \leq C |x-y|^\alpha \quad x,y \in F$$

$$\text{Entonces } \dim_{\mathbb{H}} f(F) \leq (1/\alpha) \dim_{\mathbb{H}} F$$

Corolario a) Si $f:F \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación de Lipschitz, entonces

$$\dim_{\mathbb{H}} f(F) \leq \dim_{\mathbb{H}} F$$

Corolario b) Si $f:F \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una bi-transformación de Lipschitz, esto es si:

$$C_1 |x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C_2 |x-y|, \quad x,y \in F$$

Donde $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, entonces, $\dim_{\mathbb{H}} f(F) = \dim_{\mathbb{H}} F$

Se tiene aquí una propiedad fundamental de la dimensión invariante ante bi-transformaciones de Lipschitz.

- vii) Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ con $\dim_{\mathbb{H}} F < 1$ es totalmente inconexo.

2.3 DEFINICIONES ALTERNATIVAS DE DIMENSIÓN

Aunque la dimensión de Hausdorff es la definición básica con la que se trabaja en la Geometría Fractal, existen otras definiciones que se usan ampliamente y que resultan más prácticas desde el punto de vista de su implementación para el tratamiento de datos en una computadora. Resulta fundamental la idea de “medida a escala δ ”. Así, para cada δ , se mide un conjunto de modo que se ignoren las irregularidades de tamaño menor a δ , y luego se observa cómo se comportan tales mediciones cuando $\delta \rightarrow 0$. En particular, puede suceder que una dimensión de F sea determinada por una ley de potencias obedecida por la medida $M_\delta(F)$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Si $M_\delta^s(F) \approx C \delta^{-s}$ para C y s constantes; puede decirse que F tiene dimensión s , con C vista como la longitud s -dimensional de F . Tomando logaritmos,

$$\log M_\delta(F) \approx \log c - s \log \delta$$

Si la diferencia de los dos lados tiende a 0 con δ , entonces:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log M_\delta(F) / (-\log \delta)$$

2.3.1 Dimensión de la caja o dimensión de capacidad (d_c)

Esta definición data de los años 50's y también se le conoce como dimensión métrica [16,20].

Sea F subconjunto acotado no vacío de \mathbb{R}^n y sea $N_\delta(F)$ el número más pequeño de conjuntos de diámetro de a lo más δ que pueden cubrir F . Entonces, las dimensiones de la caja (box counting dimensions) inferiores y superiores de F se definen respectivamente como:

$$\dim_s F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / (-\log \delta)$$

$$\dim_s F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / (-\log \delta)$$

Si ambas dimensiones son iguales, nos referiremos a dicho valor común, como a la dimensión de la caja de F (también denominada dimensión de capacidad):

$$\dim_s F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta (F) / (-\log \delta)$$

En la ecuación anterior $N_\delta (F)$ puede ser:

- i) el número mínimo de bolas cerradas de radio δ que cubren F.
- ii) el número mínimo de cubos de lado δ que cubren F.
- iii) el número máximo de bolas distintas de radio δ con centros en F.

La lista anterior se podría extender aún más; en la práctica se adopta la definición que sea más conveniente para una aplicación dada.

En particular, y dentro del contexto de la teoría del caos , que se discutirá detalladamente en el capítulo III; se evaluará la dimensión fractal d_F (asociándola con la dimensión de la caja) de un atractor extraño (concepto que se tratará en el capítulo III) mediante:

$$d_F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log N(\epsilon) / \log(1/\epsilon) \text{ donde } N(\epsilon) \text{ es el número de esferas } p\text{-dimensionales de radio } \epsilon \text{ requeridos para cubrir el atractor extraño, el cual como se verá en el siguiente capítulo es en esencia un conjunto fractal.}$$

2.3.2 Dimensión de similitud (d_s)

Ya antes se mencionó que “un fractal, es una forma (geométrica) hecha de partes similares al todo” y que es posible observar en los fractales, figuras geométricas que consisten en motivos idénticos, que se repiten dentro de sí mismos a escalas cada vez más reducidas. Lo anterior está íntimamente relacionado con el concepto de autosimilitud; esto es, si se toma una pequeña porción de un fractal y se amplifica, será posible reproducir una porción más grande de dicho fractal.

Formalmente, la **autosimilitud** es la propiedad de los objetos o conjuntos en donde por magnificación, amplificación o aumento, los

subconjuntos de un conjunto lucen como el todo (cualquiera que sea la escala).

Antes de obtener una expresión que nos permita calcular la dimensión de similitud d_s de un objeto fractal se comenzará por asociar una dimensión topológica d_T a ciertos objetos geométricos bien conocidos. Por ejemplo, la dimensión topológica de un punto es $d_T = 0$, la dimensión topológica de las costas, los círculos y en general de las curvas es $d_T = 1$, dado que consisten únicamente de líneas sin área. Análogamente, en el caso de superficies se tendrá que $d_T = 2$, y para objetos con volumen $d_T = 3$, etc.

La dimensión d_E es la dimensión euclideana y esta asociada con el número de coordenadas que se requieren para definir un conjunto geométrico. Ya Mandelbrot había propuesto en 1982 que “un fractal es por definición un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica”. Con las definiciones anteriores resulta natural incluir como casos límite para la dimensión fractal (o de Hausdorff-Besicovitch) a la dimensión topológica d_T y a la dimensión euclidiana.

$$d_T < d_F < d_E$$

Además Pfeifer y Obert [21,22] propusieron que la diferencia $d_F - d_T$ es algo así, como una medida del desorden del sistema. Si $d_F = d_T$ el sistema está ordenado o ligeramente desordenado; si $d_T < d_F$ el sistema estará fuertemente desordenado. Ver fig. 2.2, en la cual se presenta de manera contrastante el papel que juegan la dimensión topológica d_T , la dimensión fractal d_F y la dimensión euclidiana d_E .

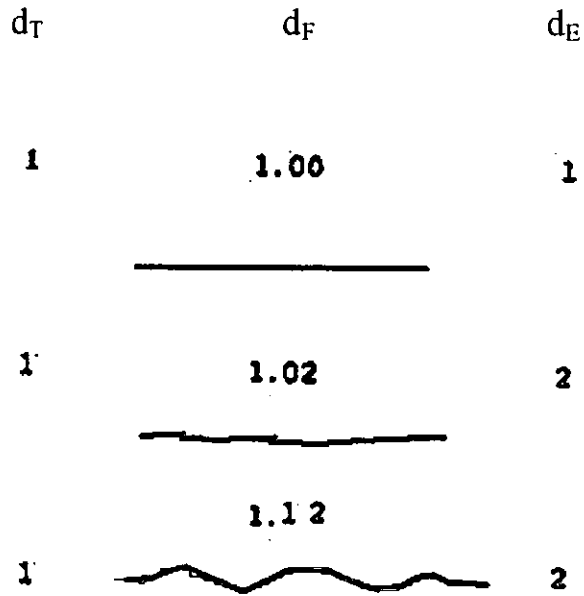


Fig. 2.2 Comparación entre dimensión topológica, dimensión fractal y dimensión euclidiana [22]

Para obtener una expresión para el cálculo de la dimensión de similitud nos ayudaremos de la Fig. 2.3, en la cual se representan una línea, un área y un volumen respectivamente. Para la línea, las 3 dimensiones discutidas anteriormente resultan ser iguales a 1, esto es, $d_T = d_F = d_E = 1$; algo análogo se tiene en el caso del cuadrado en donde $d_T = d_F = d_E = 2$. De manera similar, para el cubo $d_T = d_F = d_E = 3$.

En la Fig.2.3 se comenzará por considerar la línea de longitud L , a la cual se dividirá en $N=q$ partes, cada una de las cuales tiene longitud ℓ , entonces:

$$N=L/\ell=q \quad \text{y} \quad \ell=L/q$$

Además conviene definir una razón de escalamiento r como el inverso del número de partes en las que se ha dividido la línea, el cuadrado, el cubo, etc., esto es: $r = 1/q$

Y en el caso de la línea, como $N=q$, entonces

$$r = l/q = 1/N \text{ con lo cual } Nr^1=1$$

En el caso del cuadrado

$$l = L/q \text{ y } N = (L/l)^2 = q^2$$

Con lo cual

$$r = l/q = 1/N^{1/2} \text{ y } Nr^2=1$$

Para el cubo de lado L,

$$l = L/q \text{ y } N = (L/l)^3 = q^3 \text{ por lo tanto}$$

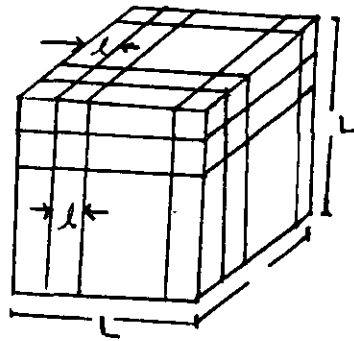
$$r = l/q = 1/N^{1/3} \text{ con lo que } Nr^3=1$$

Si continuáramos con dimensiones superiores a 3, hallaríamos una ecuación del tipo $Nr^D = 1$

El genio de Mandelbrot consistió en reconocer que dicha ecuación (aparentemente tan sencilla), podía extenderse a dimensiones no enteras. Después de aplicar logaritmos la ecuación anterior queda:

$$d_s = D = \log N / \log (1/r)$$

Aquí d_s es la dimensión de similitud la cual se utiliza frecuentemente para estimar la dimensión fractal o de Hausdorff-Besicovitch, por la facilidad con que es posible calcularla en el caso de algunos fractales deterministas.



$$d_T = d_F = d_E = 3$$

$$N = q^3 \text{ partes}$$

$$N = (L/l)^3 = q^3$$

$$r = 1/q = 1/N^{1/3}$$

$$Nr^3 = 1$$

$$d_T = d_F = d_E = 1$$

$$N = q \text{ partes}$$

$$N = L/l = q$$

$$r = 1/q = 1/N$$

$$Nr = 1$$

$$d_T = d_F = d_E = 2$$

$$N = q^2 \text{ partes}$$

$$N = (L/l)^2 = q^2$$

$$r = 1/q = 1/N^{1/2}$$

$$Nr^2 = 1$$

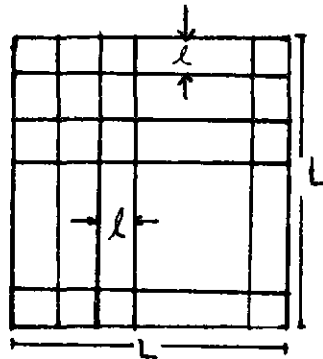
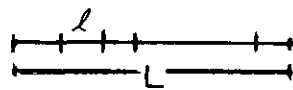


Fig. 2.3 Dimensión de similitud [22].

Generalizando: $Nr^D = 1$ y $D = d_s = \log N / \log (1/r)$

La dimensión de similitud (d_s) y la de capacidad (d_c) están relacionadas; si se parte de la ecuación que define la dimensión de similitud (d_s):

$$N = l/r^{d_s} = (L/\ell)^{d_s} = (L/\varepsilon)^{d_s} = N(\varepsilon)$$

Donde N depende de ε obteniéndose para d_s

$$d_s = \log N(\varepsilon) / (\log L + \log 1/\varepsilon)$$

Si se considera en dicha ecuación el límite cuando ε es muy pequeño, el término que involucra L se hace despreciable; esto sugiere definir la dimensión de capacidad (como ya antes se había hecho) como:

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log N(\varepsilon) / (\log (1/\varepsilon))$$

Existen aún otras definiciones de dimensión, tales como la dimensión de la información d_i , la dimensión de correlación d_G (o de Grassberger y Procaccia) y la dimensión de orden q , d_q [23]; las cuales serán discutidas más adelante en relación con el concepto atractor; que es de fundamental importancia en la teoría del caos.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS Y LA CONEXIÓN ENTRE LA TEORÍA DEL CAOS Y LA GEOMETRÍA FRACTAL.

3.1 ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS

El análisis de sistemas dinámicos (ASD) constituye una poderosa herramienta en el estudio de fenómenos que exhiben un comportamiento multiperíodico, caótico o aleatorio [23]. En este capítulo, se establecerá la conexión entre la teoría del caos y la geometría fractal vía el concepto de atractor extraño. Sin embargo, el concepto de ASD es aún más general, pues no se limita únicamente al cálculo de la dimensión fractal del atractor extraño, sino que comprende un análisis más completo de la señal digital dependiente del tiempo, que va desde la generación del Espectro de Fourier [24,25], pasando por la generación del histograma de la distribución de probabilidad del sistema (un circuito en el caso que nos ocupa) hasta la caracterización completa del atractor (extraño o no extraño y caótico o no caótico) mediante las técnicas de análisis propias del ASD de sistemas con comportamiento caótico. A continuación se darán algunas definiciones y conceptos que son importantes en el ASD, dichas definiciones fueron tomadas o adaptadas del glosario de [26,27].

Espacio de estados. Espacio matemático abstracto cuyas coordenadas son las variables de estado o las componentes de un vector de estado. También es usual referirse al “espacio-fase”, debido a que en mecánica clásica dicho espacio es un espacio matemático abstracto cuyas coordenadas corresponden a las coordenadas generalizadas y a los momentos generalizados. En los sistemas dinámicos, el espacio-fase, tiene usualmente como variables de estado, a la variable X , a su primer derivada \dot{X} y a las derivadas de orden superior.

Sistema dinámico. Es un sistema cuyo estado cambia con el tiempo t . En las aplicaciones se encuentran dos tipos principales de sistemas dinámicos: aquellos para los cuales la variable de tiempo es discreta ($t \in \mathbf{Z}$ o \mathbf{N}) y aquellas para las cuales t es continua ($t \in \mathbf{R}$).

Los sistemas dinámicos discretos pueden representarse mediante una función iterativa del tipo:

$$\vec{\xi}_{t+1} = \vec{f}(\vec{\xi}_t), t \in \mathbf{Z} \text{ o } \mathbf{N}$$

Aquí, $\vec{\xi}_t$ representa el estado del sistema a un tiempo t . Además t pertenece al dominio de los números enteros \mathbf{Z} o al de los naturales \mathbf{N} . Cuando t es continua, la dinámica se representa usualmente mediante un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$(d/dt) \vec{\xi} = \vec{\xi}' = \vec{\Xi}(\vec{\xi}), t \in \mathbf{R}$$

Algunas veces el espacio de estado es euclidiano o un conjunto del espacio euclidiano pero, también puede tener una estructura no euclidiana; tal como la del círculo, la esfera, el toroide o cualquier otra variedad diferenciable.

Por lo general se consideran 2 casos especiales de las ecuaciones anteriores [28]:

- i) Para los sistemas discretos, \vec{f} es un difeomorfismo.
- ii) Las soluciones del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales que sirven para modelar un sistema dinámico pueden ser descritas por un “flujo” cuya velocidad está dada por el campo vectorial $\vec{\Xi}$.

Como cualquier descripción de la teoría de i) e ii) involucra mapeos o aplicaciones diferenciables, conviene dar algunas definiciones adicionales.

Sea U un subconjunto abierto de \mathcal{R}^n , entonces una función $g: U \rightarrow \mathcal{R}$, se dice que es de clase C^r , si es r -veces continuamente diferenciable, $1 \leq r \leq \infty$.

Sea además V un subconjunto abierto de \mathcal{R}^m y $G: U \rightarrow V$. Dadas las coordenadas (x_1, \dots, x_n) en U y (y_1, \dots, y_m) en V ; G puede ser expresado en los términos de las funciones componentes $g_i: U \rightarrow \mathcal{R}$, donde:

$$y_i = g_i(x_1, \dots, x_n) \quad i=1, \dots, m$$

El mapeo G se denomina un C^r -mapeo si g_i es C^r para cada $i=1, \dots, m$. Se dice además que G es diferenciable si es un C^r -mapeo para algún $1 < r < \infty$, y que es suave si es C^∞ . Los mapeos que son continuos pero no diferenciables se denominan convencionalmente C^0 -mapeos.

Difeomorfismo. Se dice que G es un difeomorfismo si es una biyección y tanto G como G^{-1} son mapeos diferenciables. G se denominará C^k -difeomorfismo si tanto G como G^{-1} son C^k -mapeos[29].

En particular, la biyección $G: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo si y solo si $m = n$ y si la matriz de las derivadas parciales (esto es el jacobiano)

$$D G (x_1, \dots, x_n) = [\partial g_i / \partial x_j]_{i,j}^{n \times n}$$

es no singular para cada $x \in U$. Si G cumple con la definición de difeomorfismo siendo G y G^{-1} mapeos continuos en vez de diferenciables, entonces se dirá que G es un **homomorfismo**.

Sistema dinámico determinista. Sistema dinámico cuyas ecuaciones de movimiento, parámetros y condiciones iniciales son conocidos y no son estocásticos o aleatorios. Algunos sistemas deterministas pueden llegar a exhibir movimientos aperiódicos que aparentan ser aleatorios.

Movimiento caótico. Denota básicamente un tipo de movimiento que es altamente sensible a las condiciones iniciales. Es un movimiento para el cual las trayectorias de un sistema que parte de condiciones iniciales ligeramente diferentes, divergen exponencialmente. A este tipo de movimiento se le asocian exponentes de Lyapunov y entropías de Kolmogorov positivas (ambos conceptos se discutirán en detalle más adelante).

Contrariamente a lo que se pudiera pensar, el movimiento o comportamiento caótico no es un fenómeno raro. Si se considera un sistema dinámico descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, se tendrán que tomar en cuenta las siguientes condiciones para que se pueda tener comportamiento caótico [30]:

El sistema tiene al menos tres variables dinámicas independientes.

Las ecuaciones de movimiento contienen al menos un término no lineal que acopla a varias de las variables dinámicas en las ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales pueden expresarse en la forma:

$$dx_1/dt = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$dx_2/dt = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$dx_n/dt = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Un ejemplo histórico de un sistema dinámico determinista lo constituye el modelo meteorológico de Lorentz, que fue propuesto hacia 1963 [31] para simular el comportamiento del clima. Dicho modelo consiste en un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acopladas.

$$\dot{x}/dt = \dot{X} = \sigma (y-x)$$

$$\dot{y}/dt = \dot{Y} = rx-y-xz$$

$$\dot{z}/dt = \dot{Z} = xy-bz$$

Donde σ, r y b son parámetros positivos. La solución de dicho sistema y similares se ha vuelto una tarea bastante accesible desde que comenzaron a aparecer en el mercado del software internacional, paquetes tan sofisticados como “Mathematica” de Stephen Wolfram o “Maple” e incluso “Reduce” que es un programa no tan moderno escrito en LISP pero, que tiene ciertas ventajas con respecto a otros sistemas. Solo a manera de ilustración, se darán las instrucciones que requiere Mathematica V.2.1, para resolver el modelo de Lorentz, con $\sigma = 3$, $r = 26.5$ y $b = 1.0$ y $b=1.0$ y las siguientes condiciones iniciales $x(0) = z(0) = 0$, $y(0) = 1$.

```
In[ ] := NDSolve [(x'[t] == -3* (x[t]-y[t]),
```

```
y' [t] == -x* [t]*z [t] +26.5 * x[t] -y[t],
```

```
z' [t] == -x [t]*y [t] - z[t],
```

```
x [0] == z [0] == 0, y [0] ==1),
```

```
{x,y,z}, {t,0,20}, Max Steps → 3000]
```

```

Out [28] = {{x → Interpolating Function [ {0.,20.}, <>],
y → Interpolating Function [ {0.,20.}, <>],
z → Interpolating Function [ {0.,20.}, <>]}}

```

NDSolve permite hallar la solución numérica del sistema de EDO's (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) considerado. Para graficar la solución del modelo de Lorentz, se seleccionan como variables de estado x, y & z.

En los términos de Mathematica,

```

In[ ] = ParametricPlot3D [Evaluate[{x[t], y[t], z[t]}/.%], {t, 0, 20}, Plot
Points 1000]

```

Para más detalles ver Manual de Mathematica [32](#3.9.7 pág. 702-703 y Fig. 3.1).

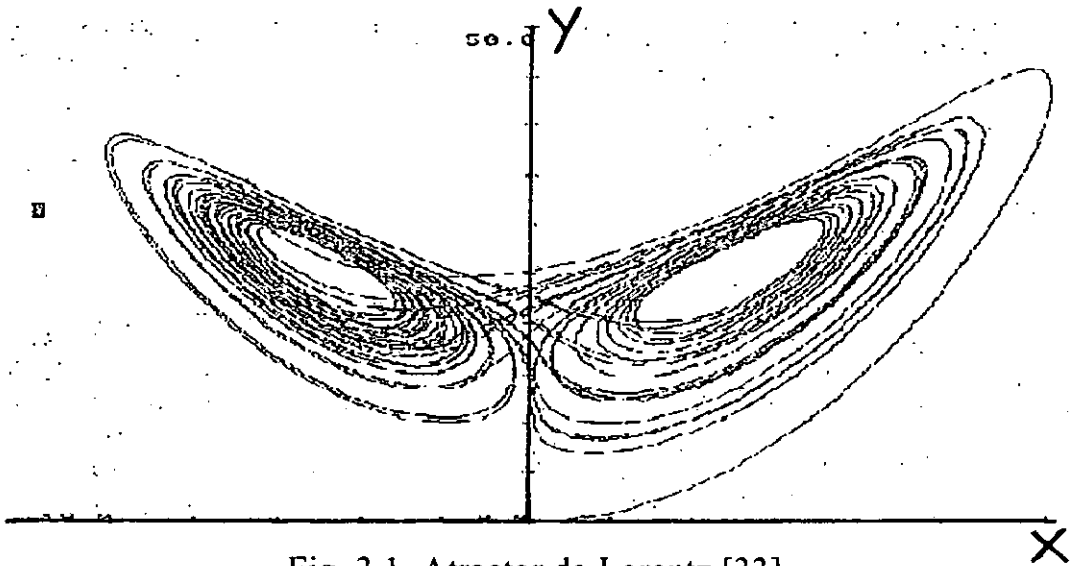


Fig. 3.1 Atractor de Lorentz [33].

En la Fig. 3.2 se representa esquemáticamente una sola de las variables (x, y o z) del modelo de Lorentz, a lo que denominaremos sencillamente "CLIMA". Obsérvese que una ligera variación en las condiciones iniciales provoca una fuerte divergencia (de tipo exponencial) en el comportamiento del CLIMA a partir de un cierto tiempo crítico t^* .

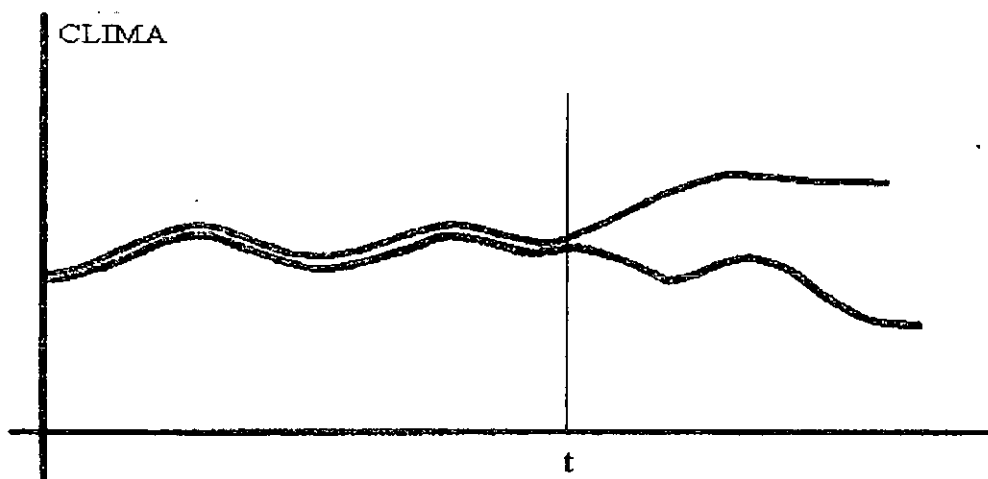


Fig. 3.2 Sensibilidad a las condiciones iniciales, un ejemplo tomado de la meteorología [34].

Efecto mariposa. Se refiere a la dependencia sensible a las condiciones iniciales en la solución de ecuaciones diferenciales o en diferencias asociadas a la modelación matemática de un sistema dinámico.

El primer ejemplo de este tipo de sistemas fue descubierto por H. Poincaré (1892) [35] durante el estudio de un problema conocido como de los 3 cuerpos. Ya hacia 1903, Poincaré había notado que "... pequeñas diferencias en las condiciones iniciales, pueden provocar grandes diferencias en el fenómeno final". Así, pequeños errores en las condiciones iniciales, provocan grandes errores en el fenómeno final. De esta forma la predicción se vuelve imposible, al menos de un tiempo crítico t en adelante como lo descubriría (o redescubriría) Lorentz en su modelo meteorológico hacia 1961-1963. Hasta ahora, se ha ilustrado la manera de generar un atractor particular pero, cuya importancia es histórica, dado que con él comenzó prácticamente la moderna teoría del caos: El atractor de Lorentz. Sin embargo, no se ha dado aún una definición formal del concepto de atractor. Se comenzará por dar las siguientes definiciones:

Atractor. [36]: Es un subespacio de algún espacio ordinario N -dimensional hacia el cual la solución de un sistema dinámico N -dimensional se acerca asintóticamente a tiempos largos.

Otra definición de atractor debida a F. Moon [26], es la siguiente: Un atractor es un conjunto de puntos o un subespacio en el espacio de estados hacia el cual una “historia de tiempo” se aproxima asintóticamente. Los siguientes son ejemplos clásicos de atractores dinámicos:

- los puntos fijos
- los ciclos límite (denotan periodicidad)
- una superficie toroidal asociada a movimientos cuasiperiódicos

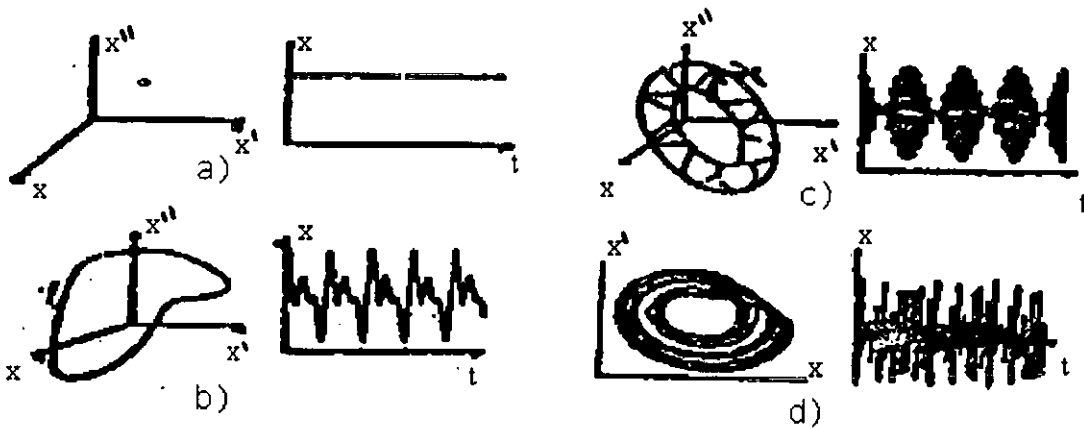


Fig.3.3 Tipos de Atractores [37].

- a) Atractor de punto fijo, representativo de un estado estable.
- b) Atractor de ciclo límite, representativo de un régimen periódico.
- c) Atractor toroidal, representativo de un régimen cuasiperiódico.
- d) Atractor extraño, el cual puede representar un régimen caótico (no todos los atractores extraños son caóticos).

Conjunto Compacto. Un conjunto A es compacto si cualquier colección de conjuntos abiertos, los cuales cubren A , tienen una subcolección finita la cual también cubre A ; es decir, un conjunto compacto es un conjunto que es cerrado y acotado.

Atractor. [33] es un conjunto compacto de valores A , con la propiedad de que hay un vecindario de valores A , tales que para casi cualquier condición inicial, el conjunto límite de las órbitas del sistema es A . Así, casi cualquier trayectoria en este vecindario de A , pasa arbitrariamente cerca de cualquier punto A .

Atractor extraño.[26] se refiere a un conjunto atractor en el espacio de estados sobre el cual se mueven órbitas caóticas. Es un atractor que no es un punto fijo (en equilibrio), no es un ciclo límite, ni un atractor cuasiperiódico (toroidal). Un atractor extraño, es un atractor en el espacio de estados al que se le puede asociar una dimensión fractal.

Hay que hacer notar que en la definición anterior debida a Moon, se supone que todos los atractores extraños, por el hecho de serlos, son también caóticos.

Sin embargo, Brindley en 1991 [27] llamó la atención sobre el hecho de que “aunque por algún tiempo los conceptos de atractor extraño y comportamiento caótico eran vistos como sinónimos, se ha reconocido la existencia de atractores extraños no caóticos en osciladores forzados no lineales cuasiperiódicos.

Para evitar confusión, hay que definir de manera precisa los términos usados. Así, “extraño” se refiere a la estructura del atractor y un atractor extraño es un atractor el cual no es:

- Un conjunto finito de puntos
- Una curva cerrada
- Una superficie suave o suave por partes
- Un volumen acotado por una superficie suave o suave por partes

La palabra “caótico” se refiere al comportamiento de las trayectorias sobre el atractor; el atractor es caótico si las órbitas cercanas al mismo divergen con el tiempo, lo cual implica sensibilidad infinita con respecto a las condiciones iniciales. Dicha divergencia se mide en términos del exponente (o del espectro de exponentes) de Lyapunov (el cual definiremos con precisión más adelante), y de hecho un atractor extraño no caótico, es un objeto cuya geometría no corresponde a ninguno de los casos anteriormente citados y para el cual, las órbitas típicas tienen exponentes de Lyapunov negativos.

3.2 CARACTERIZACIÓN Y GENERACIÓN DE ATRACTORES EXTRAÑOS

La caracterización de los atractores como extraños o no extraños, puede en principio hacerse generando el atractor en un espacio de estados cuyas variables de estado corresponden a variables con retardo; esto es, dada la sucesión de datos de tiempo $x(t)$, es posible generar el atractor del sistema dinámico en estudio, graficando $x(t)$ vs $x(t+\Delta t)$ (lo anterior sucede si se desea ver la forma del atractor en dimensión euclidiana $d_E=2$). En $d_E=3$, se tendría que graficar $x(t)$.vs $x(t+\Delta t)$. vs $x(t+2\Delta t)$).

Una alternativa para generar atractores a partir de una sucesión de datos de tiempo $x(t)$, consiste en graficar en el espacio-fase $x(t)$. vs $x'(t)$, donde $x'(t)$ corresponde a la primera derivada (calculada por lo general numéricamente). Lo anterior es válido en $d_E=2$. Si se quiere generar el atractor en $d_E=3$ se tendrá que graficar $x(t)$. vs $x'(t)$. vs $x''(t)$, donde $x''(t)$ se refiere a la segunda derivada con respecto a t (la cual también se calcula numéricamente). Un simple análisis visual en el espacio de estados o en el espacio-fase, podría ser suficiente para caracterizar un atractor como extraño o no extraño; aunque un análisis más detallado de la estructura de un atractor generado en $d_E=3$, puede conducirnos a tomar cortes transversales de dicho atractor, los cuales reciben el nombre técnico de “Secciones de Poincaré” y permiten evidenciar la estructura interna (por ejemplo en $d_E=2$) de dicho atractor (ver Fig. 3.4).

Si la Sección de Poincaré (Ver Fig. 3.4) forma un patrón geométrico bien definido, digamos una curva cerrada, esto podría indicar comportamiento periódico o cuasiperiódico; si el patrón geométrico formado es complicado, pero aún puede considerarse como un patrón de reconocimiento bien definido, tendremos la posibilidad de estar ante la presencia de un atractor extraño caótico. Si no se observa ninguna estructura en la sección de Poincaré, esto indicará comportamiento aleatorio o estocástico.

La caracterización de los atractores extraños, como caóticos o aleatorios requiere del cálculo de todo un conjunto de parámetros, entre los cuales se encuentran: la dimensión fractal, el exponente (o el espectro de exponentes) de Lyapunov y la entropía de Kolmogorov.

Por lo que respecta a la dimensión fractal del atractor, d_F , esta se puede estimar haciendo uso de la definición de dimensión de la caja o de capacidad d_c , la cual es aproximadamente igual a la dimensión fractal.

$$d_F = d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log N(\varepsilon) / (\log 1/\varepsilon)$$

Donde $N(\varepsilon)$ es el número de cubos de lado ε , o de esferas p -dimensionales de radio ε requeridas para cubrir el atractor.

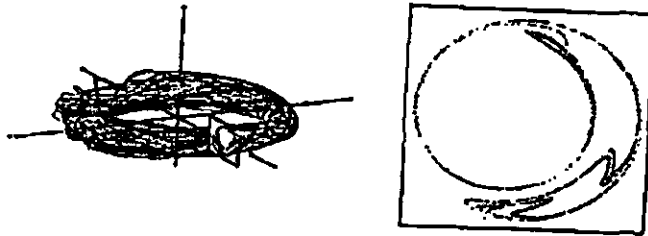


Fig. 3.4 Sección de Poincaré [34].

3.3 CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN DE GRASSBERGER Y PROCACCIA

Aunque es posible implementar el llamado algoritmo de la “dimensión de la caja” o dimensión de capacidad (d_c); en las aplicaciones comerciales se prefiere hacer el cálculo de la dimensión de correlación d_G o dimensión de Grassberger y Procaccia [23]; quienes para calcularla a partir de una serie de tiempo propusieron el siguiente algoritmo.

Dada una serie de tiempo escalar $x(t)$, el primer paso es reconstruir un espacio de pseudofase para el sistema de interés. La señal experimental $x(t)$ se digitaliza con un retardo de tiempo Δt ; los valores de la señal $x(i\Delta t)$ y $x(i\Delta t + r)$, se consideran para $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Definiendo así el vector de la serie de tiempo como:

$$X_i(t) = (X(i\Delta t), X(i\Delta t+r), \dots, X(i\Delta t+(p-1)r))$$

con $i = 0, 1, 2, \dots, (m - (p-1)k)$

donde $r = k \bullet \Delta t$, $k = 1, 2, \dots$ y p es la dimensión $X_i(t)$.

Por consiguiente, con el paso del tiempo t , se obtiene una serie de vectores p -dimensionales que representan el retrato p -dimensional del sistema; p se refiere a la dimensión del espacio de fase donde se encuentra incrustado el atractor. Debido a la divergencia de trayectorias, muchos pares (x_i, x_j) con $i \neq j$ serán pares de puntos, esencialmente aleatorios, dinámicamente no correlacionados. No obstante, si los puntos se encuentran sobre el atractor, estarán especialmente correlacionados. Esta correlación espacial puede medirse con la correlación integral $C(r)$ definida como:

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \times$$

(número de pares (i, j) cuya distancia $|X_i(t) - X_j(t)| < r$)

Formalmente

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m H(r - |X_i(t) - X_j(t)|)$$

Esta correlación, se relaciona con la función de correlación estándar donde $H(\bullet)$ es la función de Heavyside.

Grassberger y Procaccia [23,38] establecieron que para pequeñas r 's, la correlación se escala como una potencia que es función de r :

$$C(r) = r^v$$

El exponente de correlación $v = d_G$ es igual a la dimensión fractal del atractor dada por:

$$d_G = v = \frac{\ln C(r)}{\ln(r)}$$

Dimensión Generalizada

Existen varias definiciones de dimensión, tales como la de capacidad, la de información, la de correlación o de Grassberger y Procaccia, etc., que pueden compactarse en una sola definición general [30]:

$$d^{(q)} = 1 / (q-1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\text{Ln} \sum_{i=1}^n (p_i)^q / \text{Ln} \epsilon]$$

Donde p_i es la i -ésima probabilidad y q es el orden de la dimensión a calcular.

3.4 EXPONENTE DE LYAPUNOV

En un sistema caótico las predicciones a largo plazo del estado del sistema son imposibles, porque la incertidumbre se incrementa con una rapidez exponencial en el tiempo.

La pérdida del poder predictivo se debe a la propiedad de que las órbitas (trayectorias) resultantes de condiciones iniciales cercanas divergen en promedio con rapidez exponencial. Órbitas cercanas corresponden a sistemas cuya separación es muy pequeña. Así, esos sistemas cuyas diferencias no se resuelven desde el inicio, dan como resultado comportamientos totalmente diferentes.

Los coeficientes de divergencia o convergencia de las órbitas, llamados exponentes de Lyapunov, son de fundamental importancia en el estudio del caos. Cuando los exponentes de Lyapunov son positivos, indican la divergencia de las órbitas y caos y establecen la escala de tiempo en la cual la predicción de estado es posible.

Cuando los exponentes de Lyapunov son negativos, establecen la escala de tiempo en la cual el estado transiente del sistema decaerá.

Para ilustrar las propiedades de los exponentes de Lyapunov, se emplea la siguiente ecuación del mapeo unidimensional generado por la ecuación en diferencias.

$$X(n+1) = rX(n)(1-X(n))$$

Se puede obtener la ecuación que describe el comportamiento del exponente de Lyapunov a partir de la resolución de la ecuación de diferencias tomando el parámetro r , siendo la solución.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 f'(x(i))$$

El límite superior $n-1$ es necesario, si se obtiene una cantidad que describa ambos comportamientos a largo plazo y es independiente de la condición inicial. La densidad probable del mapeo, es simplemente, la colección normalizada de funciones delta que señala la ubicación $x(i)$ visitada por una trayectoria.

$$p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta(x - x(i))$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\lambda = \int p(X) \log_2 |f'(X)| dx$$

Donde la integral se toma sobre el dominio del mapeo. El exponente de Lyapunov se entiende como “la deformación (estiramiento local) determinada por el logaritmo de la magnitud de la pendiente y, es ponderada mediante la probabilidad de encontrar la cantidad de deformación” [31].

Para el cálculo de este parámetro en ésta tesis se utilizó el programa Chaos Data Analyzer (CDA) [11].

La palabra caótico se refiere al comportamiento de las trayectorias sobre el atractor; el atractor es caótico si las órbitas cercanas al mismo divergen con el tiempo, lo cual implica alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Dicha divergencia se mide en términos del exponente (o del espectro de exponentes) de Lyapunov.

Por tanto el exponente de Lyapunov (λ) es una medida de la divergencia exponencial de un sistema. En sistemas multidimensionales (≥ 3), un exponente de 0 indica sistemas periódicos o aleatorios (no existe divergencia

neta de trayectorias) y un exponente positivo indica la existencia de un sistema caótico (divergencia exponencial). Considérese un sistema dinámico de dimensión N y una bola infinitesimal de radio $\varepsilon(0)$ al tiempo $t = 0$. Al evolucionar esta bola bajo la acción de un flujo no uniforme se distorsionará en la forma de un elipsoide. Denominemos a los ejes principales de este elipsoide al tiempo t , $\varepsilon_i(t)$. Así, el espectro de exponentes de Lyapunov λ_i para una determinada posición de inicio esta dado por:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon(0)}$$

Hay N exponentes de Lyapunov en el espectro del atractor de un sistema dinámico N-dimensional.

Exponentes positivos se asocian con alta sensibilidad a condiciones iniciales (caos), exponentes negativos miden la convergencia exponencial de las trayectorias sobre el atractor. El máximo exponente de Lyapunov se puede calcular mediante [22].

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{\varepsilon(t_k)}{\varepsilon(t_{k-1})}$$

donde M es el número máximo de pasos de reemplazo considerados. El criterio para caos es

$\lambda_{\max} > 0$ indica caos

$\lambda_{\max} \leq 0$ indica movimiento regular

Las magnitudes de los exponentes de Lyapunov cuantifican la dinámica del atractor desde el punto de vista de la “información” en bits. Dichos exponentes miden la rapidez con la cual en un proceso se crea o destruye información, expresando la misma en bits de información por unidad de tiempo. Así, p. ej. si $\lambda_{\max} = 0.01$ bits/s, todo el conocimiento del estado inicial del sistema, en términos de bits de información, se perderá después de $1/0.01 = 100$ s. Por ésta razón a $1/\lambda_{\max}$ se le denomina el límite de predecibilidad de un sistema [31]. Hay que hacer notar que aún si $\lambda_{\max} > 0$, no se puede distinguir entre comportamiento caótico o estocástico, para lo cual es necesario calcular la dimensión de correlación y la entropía de Kolmogorov.

Criterios de diagnóstico de periodicidad, caoticidad y aleatoriedad.

Uno de los problemas básicos de la ingeniería fractal de “señales” (no necesariamente dependientes del tiempo) es el de diagnosticar la regularidad (y posible periodicidad), la caoticidad o la aleatoriedad de las mismas. El cálculo de la dimensión fractal, el espectro de exponentes de Lyapunov y la entropía de Kolmogorov, es solo parte del análisis. En la Tabla 3.1 se presenta un recuadro que permite diagnosticar el tipo de comportamiento seguido por una señal dependiente de una sola variable (p.ej. el tiempo). En [27,38] es posible hallar más detalle sobre las técnicas de diagnóstico descritas en la Tabla 3.1. En realidad dicha tabla es solo preliminar y refleja el hecho de que para diagnosticar el tipo de comportamiento de una señal, es necesario tomar en cuenta no solo las propiedades métricas de la señal (dimensión fractal, exponente de Lyapunov, entropía de Kolmogorov, etc.) sino que además es necesario tomar en cuenta la estructura topológica del atractor mismo. El problema de dilucidar dicha estructura es más complejo que el de calcular las propiedades métricas del atractor. De hecho, es un problema cuya solución aún se encuentra en su infancia y requiere en buena parte de la herramienta de la teoría de nudos y trenzas [39].

3.5 ENTROPÍA DE KOLMOGOROV

Cualitativamente, la entropía de Kolmogorov (K), permite distinguir entre sistemas regulares e irregulares. K es cero en sistemas deterministas, finita y positiva en sistemas caóticos e infinita en sistemas aleatorios.

J.D. Farmer [33] define a la entropía de Kolmogorov de la siguiente manera:

“Considere un sistema dinámico con F grados de libertad. Suponiendo que el espacio de fase F-dimensional se divide en cajas de tamaño ε^F y que existe un atractor cuya trayectoria $x(t)$ se encuentra en la cuenca de atracción; si el sistema se mide a intervalos regulares de tiempo τ , entonces, la probabilidad de que $x(t=\tau)$ visite la caja i_1 , $x(t=2\tau)$ visite la caja i_2, \dots , y $x(t=d\tau)$ visite la caja i_d es $p(i_1, \dots, i_d)$ Luego entonces, la entropía de Kolmogorov se define como:

$$K = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{d\tau} \sum_{i_1, \dots, i_d} p(i_1, \dots, i_d) \cdot \ln p(i_1, \dots, i_d)$$

El conjunto de entropías de Reyni de orden q introducen la noción de entropías generalizadas $K(q)$, las cuales se definen como:

$$K_q = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{d\tau} (1/q - 1) \ln \sum_{i_1, \dots, i_d} p^{(q)}(i_1, \dots, i_d)$$

De todas las cantidades K_q , K_2 es la más simple de calcular a partir de una serie de tiempo, la cual tiene las siguientes propiedades:

1. $K_2 \geq 0$,
2. $K_2 \leq K$
3. K_2 es infinita para sistemas aleatorios y,
4. $K_2 \neq 0$ para sistemas caóticos

Para efectos de este trabajo, se consideró que la entropía de Kolmogorov está representada por la suma de los exponentes de Lyapunov positivos. Expresado en forma algebraica:

$$K = \sum \lambda^+$$

3.6 ANÁLISIS ESPECTRAL

El análisis espectral consiste en tomar una señal continua y en separar las frecuencias que la componen mostrando la contribución de cada una de ellas en la señal total. Este análisis sirve para diagnosticar comportamiento periódico o multiperíodico.

Los espectros discretos, característicos de señales periódicas y algunas caóticas, contienen uno o más picos pequeños. Los picos de mayor frecuencia son múltiplos exactos de algunos picos de baja frecuencia. Un espectro continuo, característico de señales aleatorias y algunas caóticas, exhiben curvas que encierran un gran número de frecuencias que no guardan relación numérica entre ellas.

Para distinguir un espectro continuo y un espectro discontinuo, se usa la transformada de Fourier.

Transformada de Fourier:

En 1822, Fourier publicó en el libro “The analytical theory of heat” un teorema clásico en el cual establece que cualquier señal puede descomponerse en una suma de señales sinusoidales.

Cada componente sinusoidal varía desde un máximo a un mínimo, siendo la variación del ciclo sinusoidal conocido como armónica fundamental: la función matemática que describe la fase y el máximo para cada una de las armónicas es la transformada de Fourier.

La transformada de Fourier como instrumento matemático, es una función que describe la amplitud y fase de cada senoide: La amplitud define la altura del senoide y la fase específica el punto inicial en el ciclo de la senoide.

La transformada de Fourier de una función $f(t)$, se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Donde $F(\omega)$ es llamado espectro en frecuencia de $f(t)$, en general, $F(\omega)$ es una función compleja de ω , por lo que:

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta\omega}$$

Donde el valor absoluto de $F(\omega)$ es la magnitud y θ es el ángulo de fase, el cuadrado de la transformada de Fourier nos define la potencia, la cual muestra la amplitud de las frecuencias de una serie de tiempo. La potencia del espectro es una función real definida para la transformada de Fourier como:

$$S(\omega) = |F(\omega)|^2$$

El cálculo de la transformada y el de la potencia de Fourier, para una serie de tiempo, se realizan actualmente mediante la ayuda de programas de computadora que permiten reducir considerablemente el tiempo de cálculo.

La ventaja de este método es que sirve para analizar una función cuyas propiedades periódicas son totalmente desconocidas.

El análisis espectral es insensible al ruido pero, su aplicación está limitada a determinar la presencia o ausencia de señales periódicas. El análisis espectral, por sí solo, no puede distinguir un proceso caótico de uno aleatorio. Pero sí permite distinguir entre señales con comportamiento periódico y señales no periódicas.

3.7 TABULACIÓN DE RESULTADOS

En la tabla 3.1 se muestran los resultados que se pueden obtener de cada una de las pruebas sobre señales periódicas, caóticas y aleatorias a partir de una señal desconocida.

TÉCNICA	PERIÓDICO	CAÓTICO	ALEATORIO
Espacio de fase	Trayectorias traslapadas	Bandas, espacios vacíos, dependencia sensible al estado inicial	Ninguna estructura
Mapeo de retorno	Puntos traslapados	Bandas, espacios vacíos, dependencia sensible al estado inicial	Ninguna estructura
Sección de Poincaré	Distribución uniforme de puntos	Distribución no aleatoria de puntos	Distribución aleatoria de puntos
Exponente de Lyapunov	Cero	Positivo	Cero

Dimensión fractal	Usualmente baja	Usualmente baja	Frecuentemente alta pero, puede ser baja
Análisis espectral	Discreto	Discreto o continuo	Continuo
Entropía de Kolmogorov	Cero	Finita y positiva	Infinita
Distribución de Probabilidad	Cuasi tipo "U"	Sin forma Definida	Gaussiana o de Lévy

Tabla 3.1 Resultados esperados de las técnicas analíticas sobre señales estándar[27,39].

Con las definiciones y conceptos vistos en los capítulos II y III, se tienen las bases para poder entender con mayor claridad los diferentes análisis a los que se someterán las señales de salida del nuevo circuito electrónico propuesto. En el siguiente capítulo veremos una breve reseña de algunos circuitos con comportamiento caótico.

CAPÍTULO IV

ANTECEDENTES DE CIRCUITOS CON COMPORTAMIENTO CAÓTICO

En este capítulo se hará una breve reseña de algunos de los circuitos más representativos de los últimos años cuyo objetivo era generar comportamiento caótico, este comportamiento se representaba por medio de señales de voltaje vs. tiempo o por medio de audio. También era usual representar el caos generando atractores extraños en el espacio-fase.

Uno de los circuitos más populares en la actualidad que presentan comportamiento caótico, es el que fue propuesto por el profesor León O. Chua de la Universidad de California; El profesor Chua ha investigado en general circuitos y sistemas teóricos no-lineales [8].

4.1 CIRCUITO DE CHUA

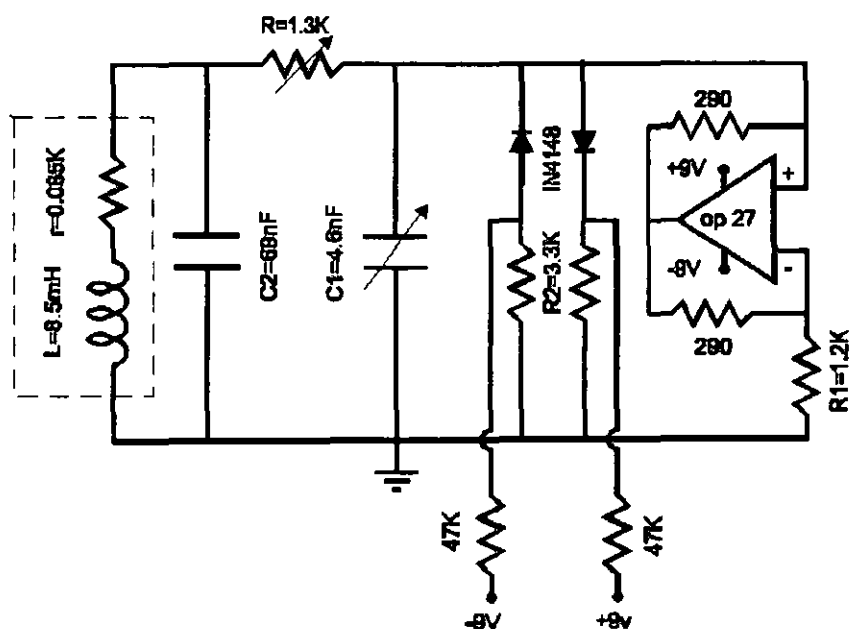


Fig. 4.1 Circuito de Chua [8].

Como funciona el circuito.

El circuito puede dividirse en tres secciones:

A.- El inductor L con una resistencia asociada (interna) r , el resistor R , y los condensadores $C1$ y $C2$ forman un circuito convencional oscilador. Con el resto del circuito puesto en corto nos genera una oscilación amortiguada.

B.- El amplificador operacional, asociado con los resistores, tiene un efecto de resistencia negativa, esta es una resistencia de tamaño $-R1$. Se tiene un circuito lineal elemental. Recuérdese que los circuitos lineales no generan comportamiento caótico.

C.- El par de diodos hace que el circuito sea no lineal. Los diodos simplemente sirven de interruptores en la resistencia $R2$ en paralelo con la resistencia $-R1$ cuando el voltaje llega a ser más grande que el voltaje máximo.

Los efectos combinados de las partes de B y C dan una resistencia negativa no lineal de valor $-R1$ para $V < V_c$ y $-R1R2/(R2-R1)$ para $V > V_c$, por lo tanto el circuito efectivo es:

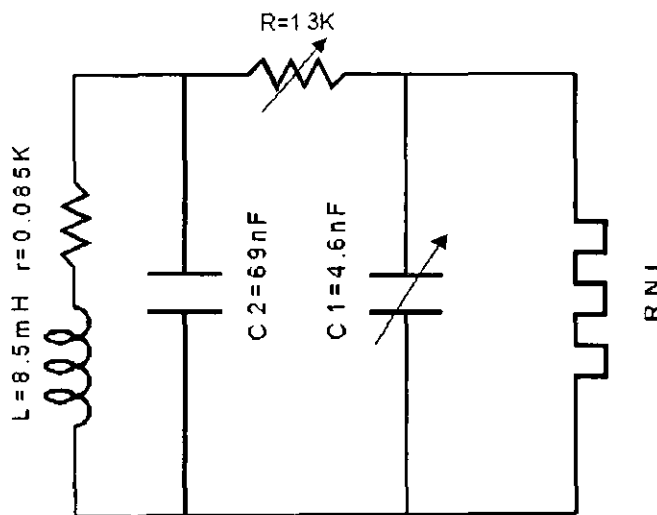


Fig. 4.2 Circuito equivalente [8].

Para señales de corriente directa los capacitores actúan como circuitos abiertos; y los inductores como un corto circuito, así que en el punto I_o , V_o se da una de las dos intersecciones de la línea de pendiente $-1/R$ (la línea de carga) con la característica no lineal $I-V$. (Este punto de operación estacionario puede ser visto haciendo una simulación del circuito con

$C2=75\text{nf}$. Por ejemplo, cuando las oscilaciones van decayendo). Para sustituir los valores de $C1$, $C2$ y L estas soluciones estacionarias (puntos fijos) llegan a producir oscilaciones inestables, produciendo una dinámica caótica primero oscilando alrededor del punto I_0 , V_0 , y después oscilando entre los puntos $+I_0$, $+V_0$ y $-I_0$, $-V_0$.

El efecto de la resistencia negativa se puede ver en la siguiente gráfica:

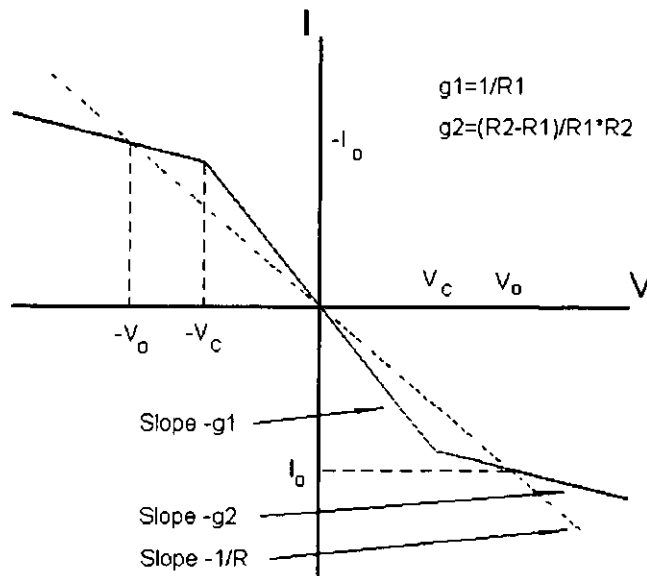


Fig. 4.3 Efecto de la resistencia negativa [8].

Para ver las características del circuito hay que trazar el voltaje medido por $C1$ contra el voltaje medido por $C2$. Esto corresponde al oscilograma en un osciloscopio en X-Y con las puntas conectadas por estos condensadores.

Los valores iniciales de los parámetros usados en el diagrama corresponden a los valores de los componentes en el diagrama del circuito, y muestran una simple órbita periódica (oscilación). La transición a la dinámica caótica puede ser encontrada por decrecimiento cuidadoso en R o $C1$; Ej. al disminuir R en pasos de 0.01 a $1.2 \text{ k}\Omega$ la simulación es comparable con lo que realmente se ve en un osciloscopio. El caos parece desarrollarse vía una subarmónica que cae en forma de cascada.

Si no se tiene acceso a un osciloscopio se puede usar el voltaje asociado a C1 o C2 como la entrada a un amplificador de audio de alta impedancia con los valores del componente mostrados. La frecuencia de las oscilaciones está en el intervalo del audio. Resulta que el oído es muy sensible al desarrollo de una subarmónica débil. La subarmónica se vuelve en principio una octava debajo del tono original, y el oído oye la caída de la nota una octava incluso cuando la intensidad es muy débil. Las primeras dos o tres transiciones están en la cascada subarmónica hacia la ruta del caos, y la presencia del caos en forma de ruido es muy audible.

Ecuaciones del circuito:

V1 es el voltaje a través del capacitor C1

V2 es el voltaje a través del capacitor C2 (y el voltaje a través del inductor)

I es la corriente que pasa por el inductor.

Las leyes de Kirchoff por lo tanto están dadas por:

$$C_1 \frac{dV_1}{dt} = R^{-1}(V_2 - V_1) - g \cdot V_1$$

$$C_2 \frac{dV_2}{dt} = R^{-1}(V_2 - V_1) + I$$

$$L \frac{dI}{dt} = -rI - V_2$$

Donde g es la conductancia (I / V) para una resistencia no lineal (y es una cantidad negativa para el circuito)

El circuito “tanque” LC tiene una gran selectividad, por lo que se reducen al mínimo las desviaciones de frecuencia en el oscilador. Además, puesto que las señales las genera el “tanque” mismo, se pueden obtener ondas sinusoidales perfectas u ondas complejas (en el sentido de ondas de Fourier).

4.2 CIRCUITO DE PAUTEX

Otro circuito propuesto y tomado de [40] pero utilizado por el francés Pautex JF en su artículo L'oscillateur chaotique [9] es el siguiente:

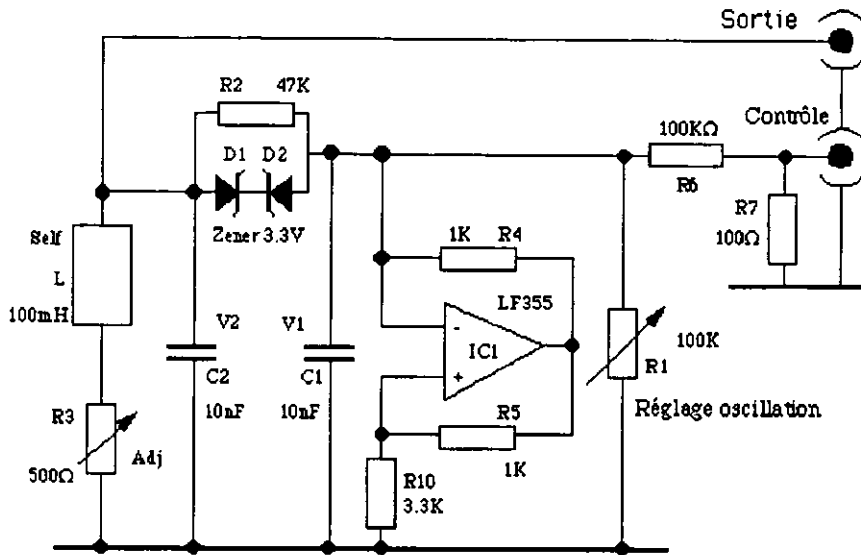


Fig. 4.4 Circuito caótico adaptado por Pautex [9].

Este circuito lo utilizó en su laboratorio para diversas pruebas, el potenciómetro de 100K permite la regulación de su funcionamiento. En la siguiente figura se muestra la oscilación en régimen estable, esta señal tiene componentes armónicos.

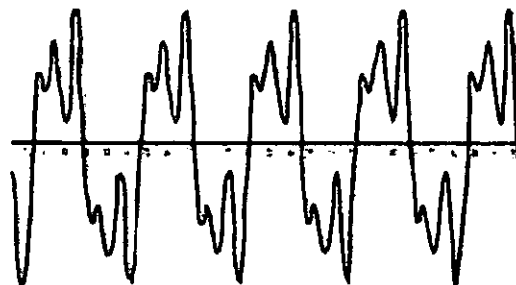


Fig. 4.5 Oscilación en régimen estable [9].

En la siguiente figura se muestra la oscilación en régimen caótico:

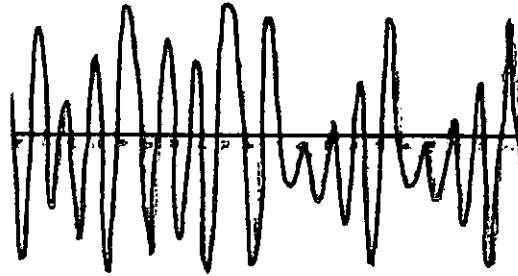


Fig. 4.6 Oscilación en régimen caótico [9].

Del circuito mostrado anteriormente, sus ecuaciones de estado son:

$$C_1 V_1 = V_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) - f(V_1 - V_2) + I_C$$

$$C_2 V_2 = f(V_1 - V_2) - I_3$$

$$L I_3 = -I_3 R_3 + V_2$$

Donde V_1 es el voltaje a través del capacitor, V_2 es el voltaje a través del capacitor C_2 e I_3 es la corriente a través de L. La impedancia negativa será creada en la operación del amplificador operacional TL071; esto puede ser aproximado por una resistencia lineal con resistencia negativa $-R$ en el rango de trabajo del voltaje V. La resistencia en paralelo R_1 compensa la pendiente negativa de la impedancia negativa como un control básico de parámetros del oscilador. La no-linealidad en el sistema tiene su origen en los dos diodos zener.

Cabe señalar que los circuitos mostrados anteriormente, están entre los más representativos del comportamiento caótico. Existen otros más, que utilizan como base para sus oscilaciones el Amplificador Operacional y casi los mismos componentes con pequeñas variaciones. Algunos de los circuitos propuestos en la literatura usan un doble Amplificador Operacional [9].

En el capítulo siguiente se hace una propuesta de un nuevo circuito con una estructura más simple, que sin ser el de Chua o el de Pautex exhibe, como se demostrará en el capítulo V, comportamiento caótico.

CAPÍTULO V

PROPUESTA DE UN CIRCUITO CAOTICO

5.1 SIMULACION DEL NUEVO CIRCUITO

En la figura siguiente, tenemos un circuito que tiene las siguientes características, genera una señal de salida, la cual se repite continuamente, y puede ser de CA o bien de CC fluctuante. Cabe hacer notar que la señal de salida de este circuito la genera él mismo. Muchos otros circuitos pueden proporcionar una salida igual a la de un oscilador pero, en estos casos, la salida es una versión amplificada o modificada de una señal aplicada a la entrada del circuito. Un oscilador no necesita una señal de entrada, porque produce su salida usando únicamente la potencia de CC suministrada por una fuente de potencia. Así pues, se puede considerar que un oscilador es un circuito que convierte potencia de CC a una señal de CA o bien de CC fluctuante [41].

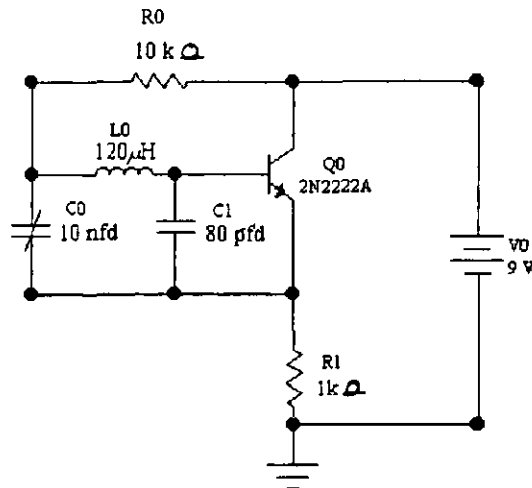


Fig. 5.1 Circuito nuevo con comportamiento caótico

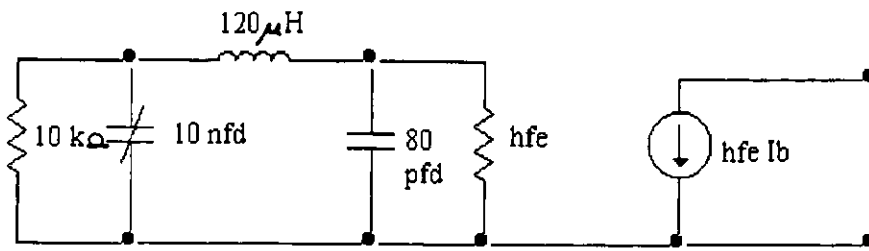


Fig. 5.2 Circuito equivalente

Una de las características de un resistor normal es que ofrece una resistencia estable a la corriente, por lo cual, de acuerdo con la ley de ohm, la corriente aumenta cuando se incrementa la caída de voltaje entre sus terminales. Pero algunos dispositivos como el transistor, en ciertas condiciones de operación presentan una característica esencialmente opuesta; es decir, su resistencia aumenta rápidamente al incrementarse el voltaje de manera que la corriente se reduce. Estos dispositivos se dice que tienen resistencia negativa. Los dispositivos que pueden presentar resistencia negativa, se pueden utilizar para suministrar la retroalimentación regenerativa al circuito "tanque" de un oscilador [42].

Tomando en cuenta que el transistor presenta un efecto de resistencia negativa, podríamos simplificar el circuito de la siguiente manera:

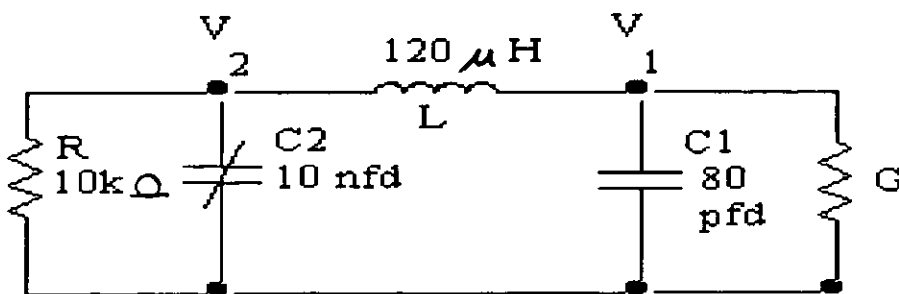


Fig.5.3 Circuito Equivalente con resistencia negativa

Las ecuaciones que describen el circuito oscilador anterior son las siguientes:

$$C_2 \frac{dV_2}{dt} = V_2 R^{-1} - I_L$$

$$C_1 \frac{dV_1}{dt} = I_L - G \bullet V_1$$

$$L \frac{dI_L}{dt} = V_2 - V_1$$

$$V_R = V_2$$

Las ecuaciones anteriores que describen el circuito están tomadas sobre la base del circuito equivalente y con base en las leyes de Kirchoff.

$G \bullet V_1$ es la corriente a través del resistor no lineal como una función del voltaje a través de este.

En la mayor parte de los osciladores LC la combinación sintonizada inductor-condensador tiene la forma de un circuito resonante en paralelo o circuito "tanque", conectado en la entrada de un transistor. En este tipo de oscilador el circuito resonante genera una señal sinusoidal o sin forma. La función principal del transistor es suministrar la ganancia y retroalimentación necesarias para sostener las oscilaciones en el circuito resonante.

Por lo tanto, con un solo pulso del voltaje aplicado a este circuito, se establece en el "tanque" una intensa corriente que empieza a circular, debido a la acción del inductor y el condensador, los cuales almacenan la energía y la liberan alternadamente. La frecuencia de la corriente está determinada por la frecuencia resonante del "tanque" f es:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

La amplitud de la corriente depende del valor que tenga el factor $Q = XL/R$ del "tanque". Al circular la corriente, se genera un voltaje de CA en el condensador y alrededor del inductor se establece un campo magnético alterno. Sin embargo, todo circuito de "tanque" tiene cierta resistencia, constituida principalmente por la resistencia de CA del inductor. Por lo tanto, puede ser muy grande la corriente inicial producida en el "tanque" por el pulso del voltaje aplicado, pero de todas maneras disminuirá gradualmente o se amortiguará. Para mantener al mismo nivel la circulación de la corriente y, por

consiguiente, el voltaje de CA en el condensador, así como el campo magnético alterno alrededor del inductor, se necesita agregar periódicamente energía al circuito “tanque”. Esta proviene de la parte del oscilador constituida por el transistor. [42].

El nuevo circuito electrónico propuesto se simulara en forma ideal (ajeno de perturbaciones externas, falsos contactos, etc.) por medio de un programa de computadora: el Electronics Workbench EDA 5.0a [10].

En el primer caso tenemos el circuito oscilador, el cual es el mismo para todos los casos; lo único que va cambiando es el condensador C_0 , al cual le llamaremos parámetro de bifurcación, puesto que es el componente que hace que la salida (esto es, explícitamente el voltaje vs. tiempo) exhiba un comportamiento que va de periódico a caótico. En la ruta al caos se observa que al ir aumentando C_0 se pasa de un pequeño número de estados a un gran número de estados (caos).

5.2 PRIMER CASO: $C_0 = 10 \text{ nfd}$

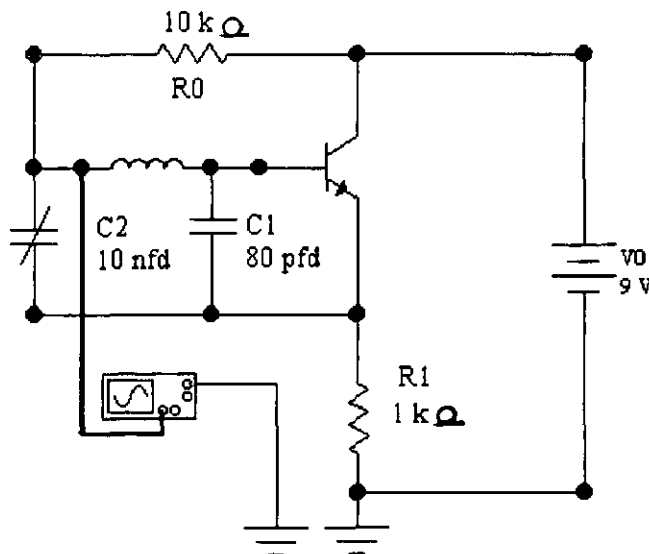


Fig. 5.4 Circuito nuevo con conexión a osciloscopio.

Señal de salida obtenida en el osciloscopio:

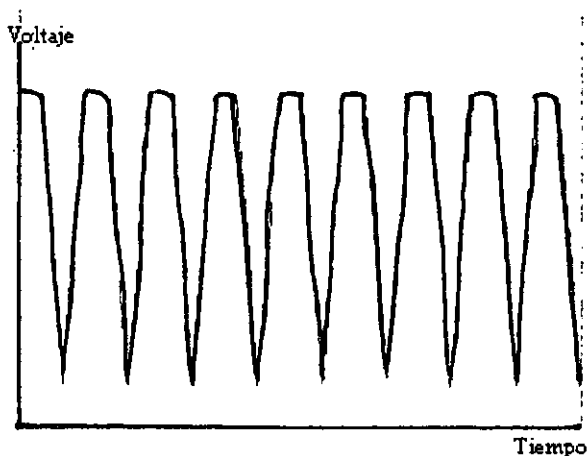


Fig.5.5 Parámetro de bifurcación $C0 = 10 \text{ nfd}$

En la gráfica se puede observar como la señal es totalmente periódica y que se compone de tres estados; con referencia al cero de la gráfica dos de estos estados son positivos y el tercero es negativo, además de que sus valores son constantes; es decir en el tiempo no sufren ninguna variación. Es importante también observar que su frecuencia también es constante.

5.3 SEGUNDO CASO: $C0 = 2 \text{ nfd}$

Señal de salida obtenida en el osciloscopio:

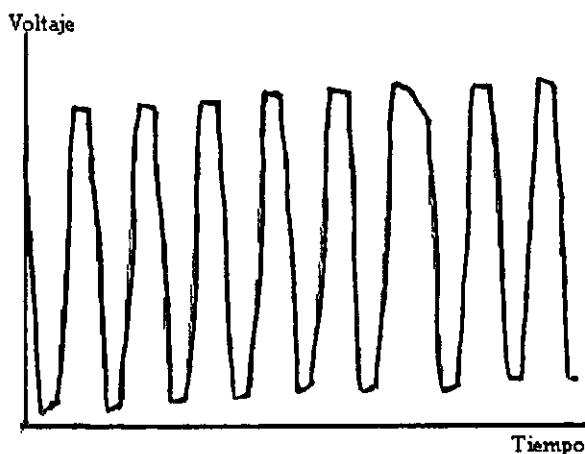


Fig. 5.6 Parámetro de bifurcación $C0 = 2 \text{ nfd}$

En este segundo caso en la gráfica se puede observar que la señal parece casi periódica, pero presenta unas pequeñas deformaciones, aquí se aprecian cuatro estados: dos positivos (con respecto al cero de la gráfica) y otros dos negativos, como si fuera una señal cuadrada. También se puede observar que estos valores no parecen permanecer constantes ya que la señal tiende a desplazarse hacia arriba, la frecuencia ya no es constante.

5.4 Tercer caso: $C_0 = 500$ pfd

La señal de salida obtenida del osciloscopio para este caso es:

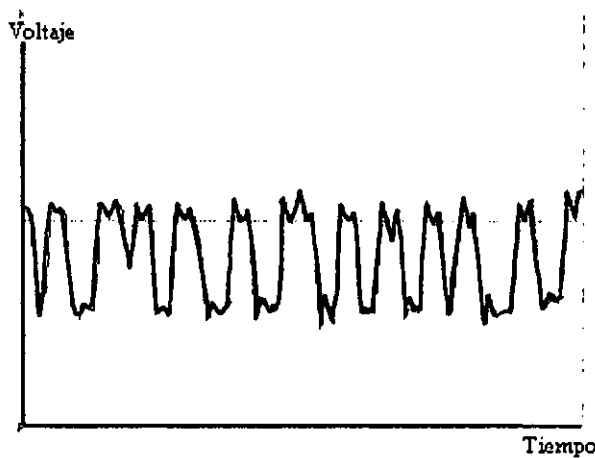


Fig. 5.7 Parámetro de bifurcación $C_0 = 500$ pfd

En la gráfica podemos observar que aunque la señal parece o tiende en lo general a una señal de tipo cuadrado, en sus extremos tiene otros dos o tres estados más; además parece exhibir periodicidad, pero en ciertas partes de la señal se “rompe” esta periodicidad con respecto a la frecuencia. Aparentemente se tiene una señal portadora con otras frecuencias asociadas.

5.5 CUARTO CASO: $C_0 = 100$ pfd

Señal de salida obtenida en el osciloscopio:

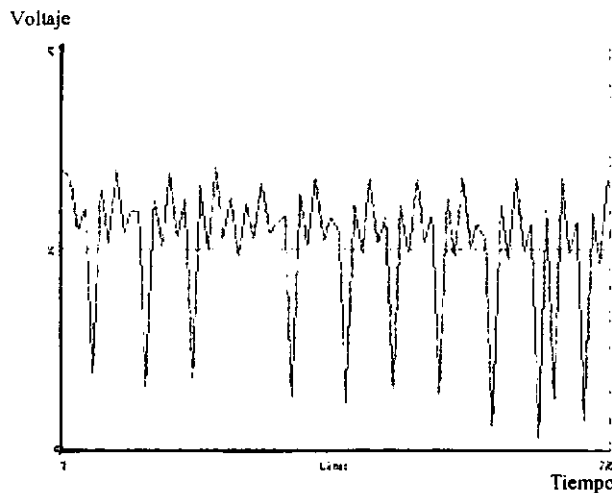


Fig. 5.8 Parámetro de bifurcación $C_0 = 100$ pfd

En la gráfica observamos que la señal ha dejado de ser cuadrada, además de presentar una gran cantidad de estados, por lo regular positivos con respecto al cero de la gráfica y varios estados negativos. En esta etapa se ha perdido aparentemente la periodicidad, la señal en lo general, presenta una tendencia a desplazarse hacia abajo. Una técnica que permite identificar comportamiento periódico o multiperiodico es la potencia del espectro de Fourier.

5.6 QUINTO CASO: $C_0 = 15$ pfd

La señal de salida obtenida en el osciloscopio, correspondiente a este caso es:

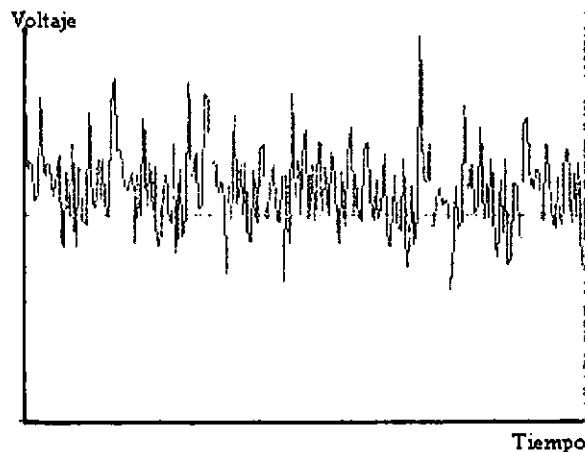


Fig. 5.9 Parámetro de bifurcación $C_0 = 15$ pfd

En la gráfica podemos observar que la señal pare ser ruido blanco *, pero hay que recordar que esta señal fue generada por un circuito ideal; es decir, esta ajeno de cualquier perturbación externa, por lo que es imposible que se trate de ruido blanco. Aún así, ya no parece existir ninguna periodicidad y se observa una gran cantidad de estados, tanto positivos como negativos. De hecho solo puede tratarse de comportamiento caótico. Sin embargo esta aseveración tendrá que probarse mediante el ASD de la señal cuando $C0 = 15$ pfd.

En este capítulo se propuso un diseño de circuito más simple que el de Chua y el de Pautex, pero que también exhibe comportamiento caótico, como se pudo observar mediante el simple análisis del número de estados que se fueron generando al incrementar el parámetro de bifurcación $C0$. En el siguiente capítulo se hará un análisis más detallado del circuito propuesto siguiendo la filosofía del Análisis de Sistemas Dinámicos (ASD) y se demostrará que arriba de cierto valor de $C0$, el circuito es, en efecto, caótico.

*Señal externa aleatoria, que se suma a la señal esperada.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El interés de ésta tesis, consiste en encontrar un circuito electrónico diferente a los que se han propuesto en la literatura (Chua y Pautex). En el capítulo anterior se presentó un circuito con cinco diferentes valores de C_0 , de las cuales se va a analizar un comportamiento que va desde totalmente periódico hasta totalmente caótico, que es lo que se conoce como la ruta al caos; pero esto lo comprobaremos en este capítulo mediante el uso del Chaos Data Analyzer (CDA) [11]. El CDA también nos ayuda a identificar comportamiento periódico, cuasiperiódico, multiperiódico, caótico y estocástico; el análisis de la señal que genera el circuito se hará con cinco diferentes valores del parámetro de bifurcación C_0 a lo largo de la ruta al caos, comprobando que efectivamente se genera comportamiento caótico.

Obtención y generación de la información.

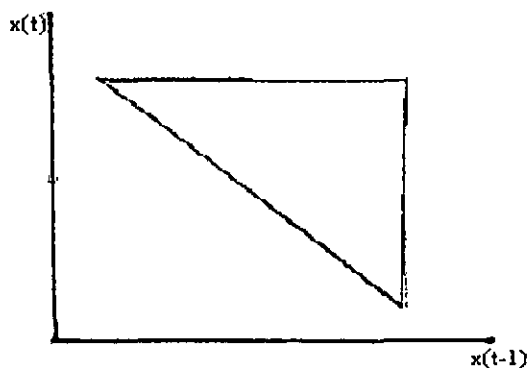
El análisis se lleva a cabo sobre el circuito que se propuso, el cual tiene la característica de tener diferentes comportamientos dependiendo del valor del parámetro de bifurcación, el cual es C_0 . Se obtuvieron más de 2000 datos por cada una de las salidas del circuito oscilador; para verificar que su comportamiento fuera periódico ó caótico, el análisis fue realizado mediante las siguientes técnicas del ASD.

- Atractor en el espacio de estados
- Mapeo de retorno
- Distribución de probabilidad
- Cálculo de la dimensión fractal
- Cálculo del exponente de Lyapunov
- Análisis espectral (espectro de Fourier)

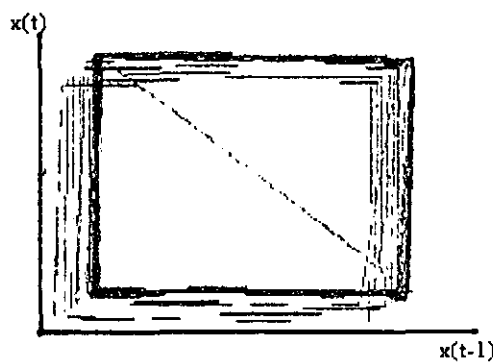
6.2 ATRACTOR EN EL ESPACIO DE ESTADOS

Esta gráfica nos muestra el valor de $x(t)$ en el eje vertical y en el eje horizontal nos presenta $x(t-1)$. Aquí podemos ver un atractor en el espacio de estados el cual puede ser construido a partir de una simple serie de tiempo sin la necesidad de calcular las derivadas de $x(t)$.

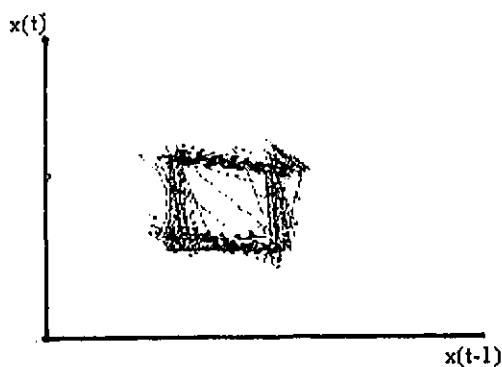
Un sistema periódico exhibe un ciclo límite y un sistema caótico (como en el caso de la ecuación logística) genera un atractor con una estructura discernible. Existen atractores más complicados, con regiones totalmente "rellenas" en dos o tres dimensiones y con una estructura difícil de discernir.



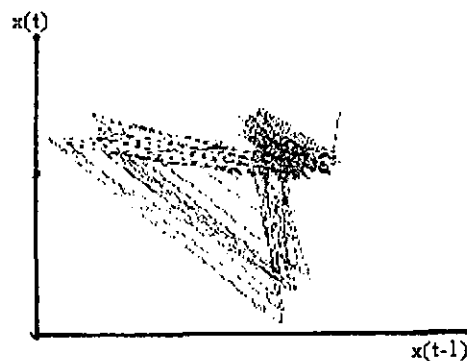
$C0 = 10$ nfd



$C0 = 2$ nfd



$C0 = 500$ pfd



$C0 = 100$ pfd



$$C0 = 15 \text{ pfd}$$

Fig. 6.1 Espacio de Estados

Como se puede observar para $C0 = 10$ nfd se ve claramente un ciclo límite y la existencia de trayectorias totalmente traslapadas lo que es una característica común de un comportamiento periódico.

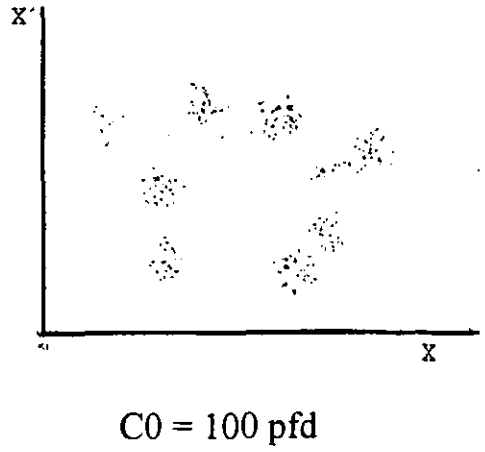
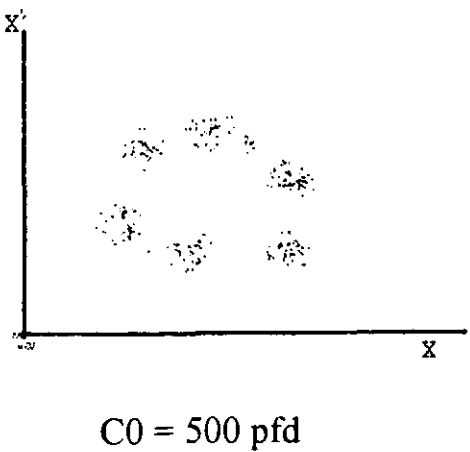
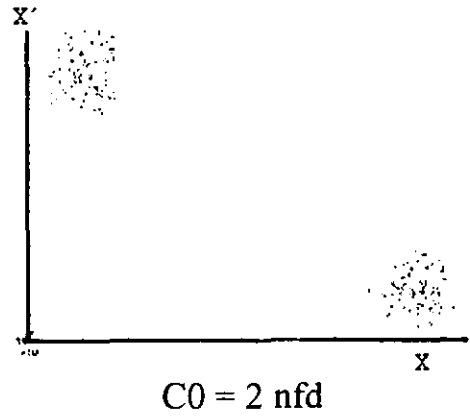
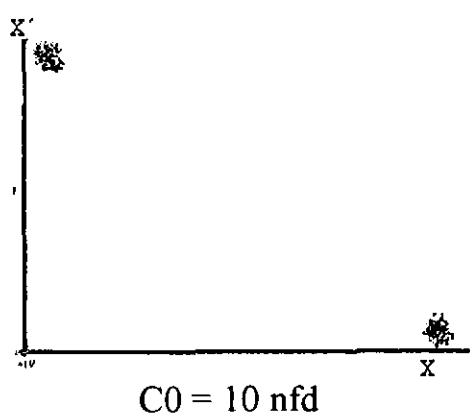
Para $C0 = 2$ nfd se puede observar un ciclo límite en las trayectorias y no todas estas se sobreponen. Lo que se puede decir es que su comportamiento se considera cuasi-periódico.

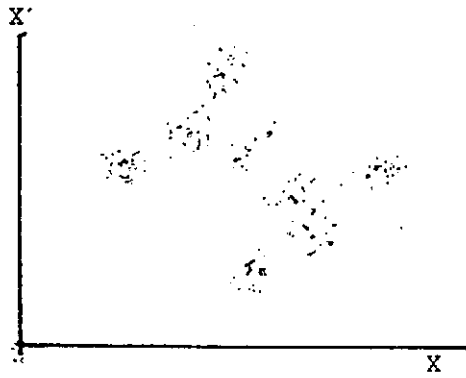
En las siguientes figuras, se observa como se va transformando el atractor con el simple hecho de ir variando en pequeños valores el parámetro de bifurcación $C0$. Finalmente llegamos a un valor de $C0 = 15$ pfd, donde se observa que su trayectoria o comportamiento no es una trayectoria traslapada puesto que toda la gráfica esta casi completamente "llena", pero esta limitada y acotada (esto es, es un conjunto compacto) y es claramente un atractor extraño (como se vera más adelante, el exponente de Lyapunov correspondiente a dicho atractor resultó ser positivo).

6.3 MAPEO DE RETORNO

Es una gráfica en el espacio de estados de dos dimensiones; aquí generalmente no se distingue entre un dato aleatorio y un dato caótico. Para este propósito, es útil tomar una parte de su sección transversal del plano-fase para reducir su dimensión a una sola. Después de tal operación, un dato caótico, aparecerá frecuentemente en la forma de un atractor extraño teniendo una estructura fractal con dimensión fractal.

La figura 6.2 muestra el valor de x en un tiempo en el cual $x'=0$ versus el valor de x en un tiempo previo en el cual ocurre un extremo.





$C0 = 15$ pfd

Fig. 6.2 Mapeo de retorno

Para $C0 = 10$ nfd se puede observar que solamente en dos puntos aparecen concentrados todos los valores; una característica muy común del comportamiento periódico.

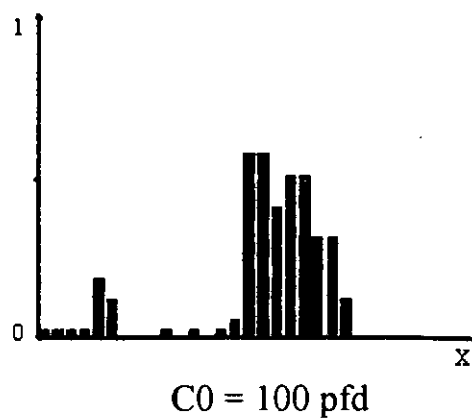
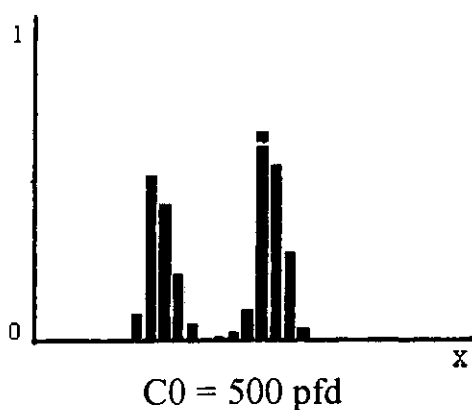
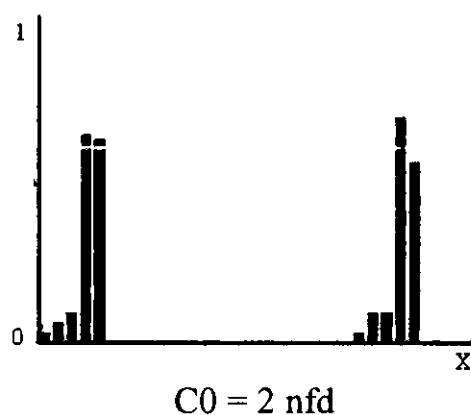
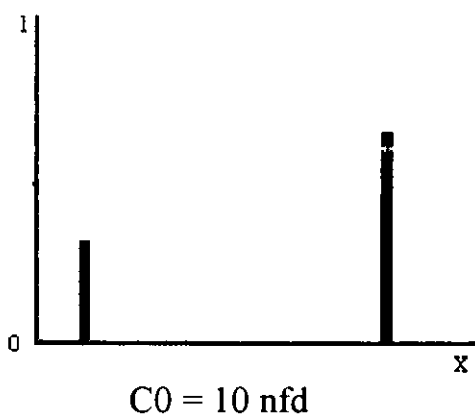
En las figuras siguientes se observa como entre más se reduce el valor de $C0$ los puntos en las gráficas tienden a expandirse.

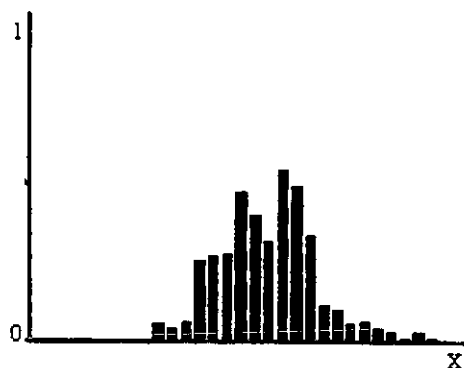
Finalmente para $C0 = 15$ pfd los puntos en el espacio fase forman un atractor que tiene una estructura complicada pero discernible, lo cual es típico de un comportamiento caótico.

6.4 DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

La distribución de probabilidad, muestra la frecuencia de los datos obtenidos, y se ordenan de acuerdo a su valor.

El histograma para un comportamiento puramente estocástico corresponde a una distribución Gaussiana la cual se muestra como una simple curva en forma de campana; esto también puede ser el caso para un comportamiento caótico, pero no llega a ser una regla general. Los comportamientos periódicos suelen dar un simple histograma con picos en las orillas.





$C0 = 15$ pfd

Fig. 6.3 Distribución de Probabilidad

Para $C0 = 10$ nfd se observa como todos los valores que se generan están concentrados en solamente dos estados, que es una de las características típicas de los comportamientos periódicos o multiperiodicos

Para $C0=2$ nfd podemos observar que la concentración de los valores se reparten en aproximadamente 5 estados.

En las siguientes figuras se observa que el número de estados se va incrementando, hasta llegar con $C0 = 15$ pfd donde se presentan la mayor cantidad de estados; además el histograma no tiene una distribución simétrica, sino que presenta un sesgo hacia la izquierda, por lo que no se tiene un comportamiento normal; estas dos características son típicas de un comportamiento caótico.

6.5 DIMENSION FRACTAL

Tendremos que decir que la dimensión de correlación es una aproximación a la dimensión fractal.

La dimensión de correlación se comporta de tal forma que cada vez que pasa a través de un dato, se toma un nuevo punto y se centra en este punto una esfera de dimensión D y de radio r . La fracción subsecuente de puntos de datos se “graba” en la esfera y entonces se hacen calculos para varios valores de r . Finalmente se hace una gráfica del logaritmo de este número contra el logaritmo del radio.

La dimensión de correlación, se toma como el promedio de la pendiente de la curva acumulada sobre la mitad de un cuarto en la escala vertical, y el error se toma como la mitad de las diferencias de la máxima y la mínima pendiente sobre el mismo intervalo.

$C0 = 10\text{nfd}$	$df = 0.0$
$C0 = 2\text{nfd}$	$df = 0.0$
$C0 = 500\text{pfd}$	$df = 1.371 \pm 0.399$
$C0 = 100\text{pfd}$	$df = 2.063 \pm 0.407$
$C0 = 15\text{pfd}$	$df = 2.564 \pm 0.397$

Tabla 6.1

En la tabla anterior se observa que para $C0 = 10 \text{ nfd}$ y $C0 = 2 \text{ nfd}$ el valor de df es 0.0, un valor de $C0$ muy pequeño nos sugiere que su comportamiento es regular (periódico o multiperódico).

En los siguientes tres valores de la tabla se observa que con cada parámetro de bifurcación se asocia una dimensión fractal, y este valor va aumentando al disminuir el valor de $C0$; es decir es mayor en $C0=15 \text{ pfd}$, le sigue $C0=100 \text{ pfd}$ y el menor de todos es $C0=500 \text{ pfd}$.

6.6 EXPONENTE DE LYAPUNOV

El exponente de Lyapunov, es la medida de la razón con la cual las trayectorias cercanas divergen en el espacio fase. Las órbitas caóticas tienen por lo menos un exponente de Lyapunov positivo. Para órbitas periódicas todos los exponentes de Lyapunov son negativos. El exponente de Lyapunov es cero cerca de una bifurcación. En general hay tantos exponentes como ecuaciones dinámicas. En el CDA se calcula solo el máximo exponente de Lyapunov.

Hay tres parámetros a considerar en el cálculo del exponente de Lyapunov. La dimensión de incrustamiento (embedding) D que debe ser más alta que la dimensión esperada en el atractor. El parámetro n que es el número de intervalos de muestra sobre el cual cada par de puntos es seguido después por un nuevo par que se ha escogido. Si n es muy grande, la trayectoria llega muy lejos y el exponencial diverge de las órbitas y se pierde. Si n es demasiado

pequeño, el cálculo llega hacer muy lento. Estos son detalles técnicos propios del software utilizado (CDA) [11].

C0 = 10nfd	$\lambda_{MAX} = 0.033 \pm 0.137$
C0 = 2nfd	$\lambda_{MAX} = 0.174 \pm 0.227$
C0 = 500pfd	$\lambda_{MAX} = 0.691 \pm 0.236$
C0 = 100pfd	$\lambda_{MAX} = 0.593 \pm 0.253$
C0 = 15pfd	$\lambda_{MAX} = 0.747 \pm 0.195$

Tabla 6.2

En este caso empezaremos por C0 = 15 pfd. Ya que la definición nos indica que el movimiento caótico u órbitas caóticas tienen exponentes positivos y tomando en cuenta las incertidumbres, el exponente de Lyapunov que se obtiene está entre: 0.552 y 0.942, ambos valores son positivos lo cual indica que el comportamiento es totalmente caótico, dado que no se tienen perturbaciones externas que generen ruido estocástico.

Para C0 = 100 pfd los valores obtenidos son: 0.340 y 0.846, como son positivos, esto nos indica que para este valor de C0 su comportamiento también es caótico.

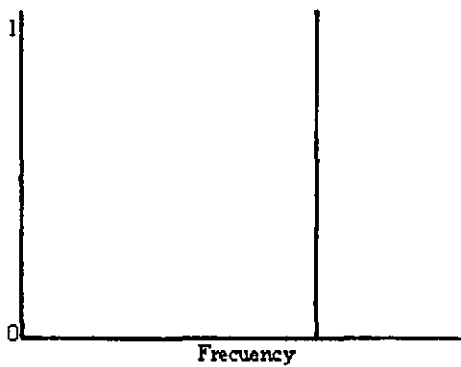
Para C0 = 500 pfd los valores obtenidos para el exponente de Lyapunov son: 0.455 y 0.927 lo que nos indica que su comportamiento es caótico.

Para C0 = 2 nfd y tomando en cuenta las incertidumbres obtenemos los siguientes datos: -0.053 y 0.401. En este caso tenemos un valor negativo, por lo que su comportamiento es regular y predecible, como se puede corroborar en la Fig. 6.1, en donde se observa un atractor cuasiperiódico para este caso.

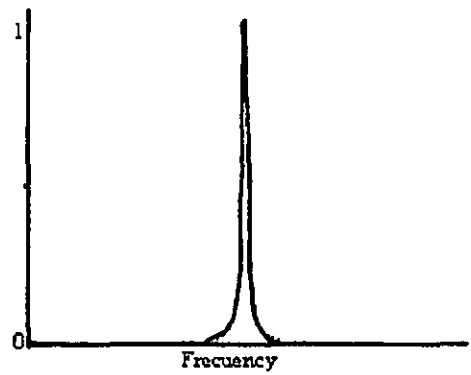
Para C0 = 10 nfd los resultados que se obtienen tomando en cuenta las incertidumbres son: -0.104 y 0.17 de donde se observa que existe un valor negativo; pero este valor es más negativo que el correspondiente para C0 = 2 nfd. También se tiene un valor positivo (0.17), pero al considerar las incertidumbres en C0 = 10 nfd se observa una tendencia a cero. Del análisis del exponente de Lyapunov es difícil afirmar que el comportamiento del circuito es periódico; sin embargo, del análisis del atractor en el espacio de estados, el cual es un ciclo límite para C0 = 10 nfd se puede afirmar, sin lugar a dudas que es periódico y que en 2 nfd es cuasiperiódico.

6.7 ANALISIS ESPECTRAL

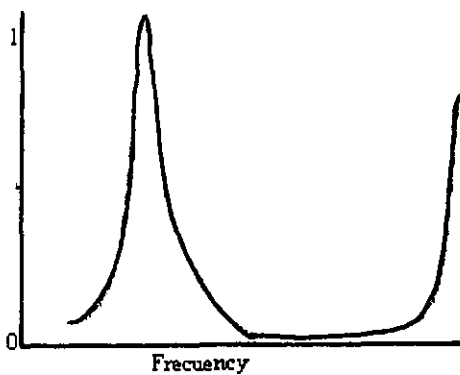
En esta sección se efectuó el cálculo de la transformada rápida de Fourier y lo que se muestra en las gráficas es el cuadrado de la amplitud como una función de la frecuencia. La frecuencia está dada en unidades críticas de frecuencia de Nyquist (la cual es el recíproco a dos veces el intervalo entre cada punto). La gráfica que resulta de un sistema caótico y aleatorio tiene una tendencia a subir y es ancha. En el caso de un sistema periódico y cuasi-periódico se producen pocos picos o uno solo y estos son prácticamente discretos.



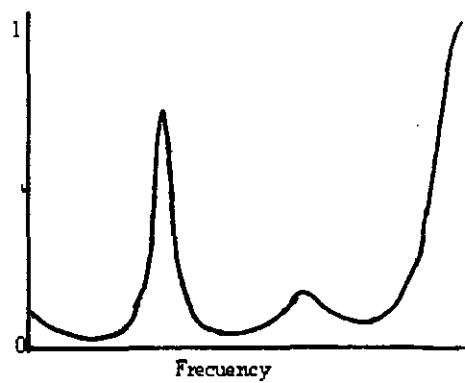
$C_0 = 10 \text{ nfd}$



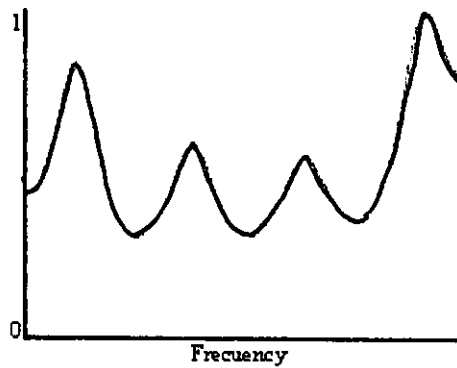
$C_0 = 2 \text{ nfd}$



$C_0 = 500 \text{ pfd}$



$C_0 = 100 \text{ pfd}$



$$C0 = 15 \text{ pfd}$$

Fig. 6.4 Análisis Espectral

Como se puede apreciar para $C0 = 10 \text{ nfd}$, la señal es casi una recta perpendicular al eje de las abscisas, lo que nos indica que todos los valores se encuentran concentrados en una sola frecuencia, este es el caso típico de una señal totalmente periódica.

Para $C0 = 2 \text{ nfd}$ la señal anterior parece ampliarse en la base, lo que nos indica que ciertos valores tienden a separarse, pero no en gran cantidad.

Para $C0 = 500 \text{ pfd}$ y $C0 = 100 \text{ pfd}$ se ve como la base de la señal se amplia más y se generan más picos, lo que nos indica mayor cantidad de datos esparcidos y concentrados en estos picos.

Finalmente para $C0 = 15 \text{ pfd}$ ya no se observan picos definidos sino que se generan ondas, lo que nos indica que los valores obtenidos de la señal de salida, se encuentran dispersos en casi todo el rango de frecuencias que abarca la gráfica, lo que es sin duda un comportamiento clásico de los sistemas caóticos.

Como se pudo comprobar en este capítulo, a lo largo de los diferentes análisis para cada una de los diferentes valores de $C0$ del circuito propuesto; es indiscutible que con $C0 = 10 \text{ nfd}$ el comportamiento es periódico y para $C0 = 15 \text{ pfd}$ el comportamiento es caótico.

Debido a los análisis hechos en este capítulo para los distintos valores de $C0$, se puede decir sin lugar a dudas que el circuito se comporta como un generador universal de señales ya que tiene la facilidad de comportarse desde periódico hasta caótico, es decir cubre toda la ruta al caos.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

Se ha propuesto un circuito electrónico con comportamiento caótico, el cual tiene la característica de tener una topología más sencilla que los circuitos con comportamiento caótico existentes hasta ahora. Además, el circuito tiene la característica de que para ciertos valores del parámetro de bifurcación ($C0$) puede ser totalmente periódico o totalmente caótico. Para valores intermedios de $C0$ se observa la ruta al caos. Esto se realizó solo con una pequeña variación en uno de sus componentes, que para nuestro caso fue un condensador o capacitor y su valor vario desde 10×10^{-9} faradios hasta 15×10^{-12} faradios.

La mayoría de los circuitos caóticos clásicos (Chua y Pautex) utilizan un amplificador operacional como base para su retroalimentación; es decir, para producir un efecto de resistencia negativa, el circuito también requiere de dos fuentes de tensión, mayor cantidad de componentes pasivos y otros componentes activos.

El circuito propuesto utiliza un transistor para producir el efecto de resistencia negativa, además de una sola fuente de alimentación, ningún otro componente activo y mucho menor cantidad de componentes pasivos, por lo que lo hace más sencillo de comprender y analizar .

Es importante mencionar que las diferentes señales de salida generadas por el nuevo circuito caótico son ajenas a perturbaciones externas estocásticas o ruido electrónico debido a que estas señales son producidas por medio de un programa de computadora: el Electronics Workbench [10] lo que hace que el circuito sea ideal.

La utilización del programa de cómputo Chaos Data Analyzer [11] nos ayuda a identificar perfectamente los diferentes comportamientos que va teniendo el nuevo circuito propuesto; esto es, desde totalmente periódico pasando por los diferentes valores intermedios del parámetro de bifurcación $C0$ hasta llegar a ser totalmente caótico.

ESTAS PAGES NO SON
DE LA BIBLIOTECA

Cuando el parámetro de bifurcación es $C0 = 10$ nfd, se tiene sin lugar a dudas un comportamiento totalmente periódico, basta solamente mencionar que su atractor en el espacio de estados es un ciclo límite con trayectorias totalmente traslapadas.

Último caso en $C0 = 15$ pfd el comportamiento del circuito propuesto es totalmente caótico. Todos los análisis lo confirman; por ejemplo su atractor en el espacio de estados es claramente extraño, el análisis del exponente de Lyapunov máximo da un valor positivo. Además en el análisis espectral se generan bandas anchas que no indican la existencia de comportamiento periódico. Finalmente la curva de distribución de probabilidad no es típica de comportamiento aleatorio (ni Gaussiano), lo que se tiene más bien una curva de distribución de probabilidad típica de comportamiento caótico.

De todo lo anterior se concluye que el nuevo circuito propuesto es un generador universal de señales con la topología más sencilla hasta ahora conocida de la literatura que se consulto.

El nuevo circuito electrónico propuesto facilita el entendimiento de los sistemas dinámicos y en especial los sistemas caóticos debido a que contiene menor cantidad de componentes en su topología y un solo control de ajuste para poder llevar el circuito de periódico hasta caótico y viceversa, al contrario de los circuitos propuestos por Chua y Pautex que contienen mayor cantidad de componentes en su topología y dos controles de ajuste para lograr el mismo efecto lo que los hace más complicados de controlar.

El nuevo circuito por lo tanto permite una más rápida estabilización de señales inestables o caóticas a un sistema estable (regular) con una pequeña variación en solamente uno de sus componentes (parámetro de bifurcación).

Estas características del nuevo circuito lo hacen un mejor candidato para futuras aplicaciones. Ya que lo que se pretende realizar en un corto tiempo es llevar procesos o sistemas reales sensibles a condiciones iniciales (de los cuales existen una gran cantidad, cabe mencionar como ejemplos los procesos económicos, químicos, fabricación de semiconductores, control de calidad de procesos de manufactura, etc.) a tener una analogía con el circuito propuesto, donde las diferentes variables de los sistemas reales sean los componentes del circuito y la variable más sensible sea nuestro parámetro de bifurcación $C0$; por lo tanto, el nuevo circuito sería el simulador de sistemas dinámicos reales.

En el nuevo circuito se igualaría el mismo comportamiento del sistema real con el atractor y las diferentes técnicas del ASD, una vez que se a logrado esto se observan o analizan las tendencias cuando se modifica en diferentes sentidos la variable que se ha seleccionado como parámetro de bifurcación y así tomar las decisiones pertinentes para proyectar el comportamiento del proceso.

En la actualidad se empiezan a utilizar las diferentes técnicas del ASD para observar el comportamiento de los procesos reales y poder detectar algunos problemas [27], el inconveniente es el tiempo, ya que para poder apreciar la pertinencia de las modificaciones en un sistema hay que esperar meses si no es que años, y si no se cumplieron las expectativas, hay que volver a analizar el sistema, hacer correcciones y esperar. La ventaja de tener un simulador, es que el tiempo del ASD se reduce considerablemente.

En la siguiente figura se hace una propuesta de un modelo el cual serviría para analizar cualquier sistema dinámico real, el simulador sería el nuevo circuito propuesto.

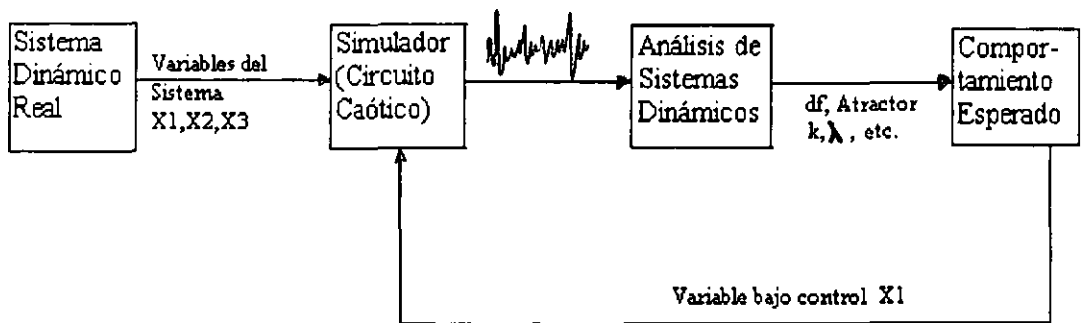


Fig. 7.1 Propuesta de un modelo de análisis de un sistema dinámico real

BIBLIOGRAFIA

1. Begley Sharon, Service Robert and Underhil William. "Finding Order in Chaos", Newsweek, May 25, 1992, pp 48-50.
2. Ditto William L., Pecora Louis M, "Mastering Chaos", Scientific American, August 1983, pp 62-68
3. <http://elcaos.tripod.com>
4. Sears F., Zemansky M., "Física General", Ed.Aguilar,1957
5. Hweip H., "Análisis de Fourier", Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1973
6. William G.A., Otis U., "Probabilidad y Estadística Elemental con Aplicaciones Opcionales al Ordenador", Ed. Fondo de Cultura Económica, 1976
7. <http://trixie.eecs.berkeley.edu/cv-chua.html>
8. <http://www.ccsr.uiuc.edu/People/gm...s/ChuaSoundMusic/ChuaCompCiDi.html>
9. <http://ftp.lpmi.u-nancy.fr/physique/chaos/oscillateur.html>
10. Interactive Image Technologies Ltd., "Electronics Workbench EDA version 5.0a", Copyright 1996
11. Sprott J.C., "Chaos Data Analyzer", University of Wisconsin, 1992
12. Peitgen H.O. and Saupe D.(Eds.), "The Science of Fractal Images" Ed. Springer-Verlag, 1988
13. Mandelbrot B.B., "Les Objets Fractals: Forme, Hassard et Dimension", Ed. Flammarion, Paris, 1975
14. Mandelbrot B.B., "The Fractal Geometry of Nature", Ed.Freeman, San. Francisco, 1982
15. Feder Jens "Fractals" Ed. Plenum Press. 1989
16. Falconer Kennet. "Fractal Geometry". Ed. John Wiley Sons.1990
17. Schroeder Manfred. "Fractals, Chaos, Power Laws". Ed. W.H.Freeman and Company. 1991
18. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. "Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional". Ed. Mir-Moscu. 1975
19. Koroliuk V.S. "Manual de la teoría de probabilidades y estadística matemática", Ed.Mir-Moscu, Primera reimpresión, 1986
20. Liebert W., "Chaos und Herzdynamik", Reihe. Physik Bd.4, Verlag Harri Deutsch, 1991
21. Pfeifer ,P.J. and Obert ,M., Fractals: Basic Concepts and Terminology", in The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry, D. Avnir, Ed.,pp. 11-52, John Wiley and Sons, Chichester, Great Britain, 1989
22. Fan L.T., Neogi D., Yashima M., "Elementary Introduction to Spatial and Temporal Fractals". Ed. Springer-Verlag. 1991
23. Grassberger Peter, Procaccia Itamar "Measuring the Strangeness of Strange Attractors" Physica 9D. 1983, pp189-208
24. Hsu, H.P., "Análisis de Fourier", Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987

25. Aljama Corrales T., Cadena Méndez M., Charleston Villalobos S., Yañez Suárez O., *Procesamiento Digital de Señales*, Ed. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 1992
26. Moon Francis C., "Chaotic Vibrations". Ed. John Wiley Sons. 1987
27. Noriega Crespo Manuel Crescenciano, "Aplicación de la teoría de las bolas de control de la calidad a los procesos de pintura electroforética automotriz".. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-UNAM, Tesis de grado de Maestría en Fisicoquímica, 1998
28. Arrowsmith D.K. and Place C.M., "An Introduction to Dynamical Systems", Ed. Cambridge University Press, 1991
29. Goldberg Ary L., Rigney David R., West., Bruce J. "Chaos and Fractals in Human Physiology", *Scientific American*, February 1990, pp 43-84
30. Baker G.L., Gollub, J.P., "Chaotic Dynamics". Ed. Cambridge University Press, 1990
31. Holden Arun V., "Chaos". Ed. Princeton University Press. 1986
32. Wolfram S., "Mathematica a system for doing mathematics by computer", Ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1991
33. Farmer J. Doyno "Chaotic Attractors of an Infinite-Dimensional Dynamical System" Ed. *Physica 4D*. 1982, pp 366-393
34. Gleick James, "Chaos, Making a New Science", Ed. Penguin Books, 1988
35. Crutchfield James P., Farmer, J. Doyno. Packard Norman H, Shaw Roberts "Chaos", *Scientific American*, 1986, pp. 46-56
36. Russel, D.A., Hanson J.D., and Ott, E., "Dimension of Strange Attractors", *Phys. Rev. Lett.*, 45 (14), 1980, pp 1175-1178
37. Costa J.M., "Portugaliae Electrochimica", *Acta*, V.9, 1991
38. Denton A. et al. "A primer on Chaos Theory and its Application on Cardiology", *American Heart Journal*, December 1990. pp 1420-1440
39. Tufillaro Nicholas B., Abbot Tyler, Reilly Jeremiah, "An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos" Ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1992
40. Kittel A., Pyragas K, Richter, R. "Prerecorder History of a System as an Experimental Tool to Control Chaos", *Physical Review E*, Volume 50, Number 1, July 1994, pp 262-268.
41. Hartley T.T, Lorenzo C.F., Qammer H.K., "Chaos in Fractional Order Chua's system" Ed. *IEEE Trans on Circuits and System.-I: Fundamental Theory and Applications*, V1 42 no.8, 1995, pp.485-490.
42. Boylestad Robert, Nashelsky Louis, "Electrónica Teoría de Circuitos", Ed. Prentice Hall, 1989