



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA PROPAGACION DE LAS  
ONDAS DE ESFUERZO EN UNA INTERFACE  
ELASTICA - VISCOELASTICA

292920

T E S I S  
Que para obtener el título de  
F I S I C A  
presenta

INGRID ESCOBEDO ESTRADA



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:  
FIS. ANDRES VALENTIN PORTA CONTRERAS



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



VIIVERIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**  
**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:  
**"ESTUDIO DE LA PROPAGACION DE ONDAS DE ESFUERZOS EN UNA INTERFACE ELASTICA-  
 VISCOELASTICA"**

realizado por **ESCOBEDO ESTRADA INGRID**  
 con número de cuenta **3605032-7**, pasante de la carrera de **Física**.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
 Propietario

FIS. ANDRES VALENTIN PORTA CONTRERAS

Propietario

DR. GUILLERMO PULOS CARDENAS

Propietario

DR. ALFONSO HUANOSTA TERA

Suplente

FIS. ROSALBA CASTANEDA GUZMAN

Suplente

DRA. MARIA DE LOS ANGELES ORTIZ FLORES

Consejo Departamental de Física



*Patricia Golustein*  
 DRA. PATRICIA GOLUSTEIN  
 Coordinadora de Licenciatura

FACULTAD DE CIENCIAS  
 DEPARTAMENTO DE FISICA

## CON CARINO

Aquel amor que comenzó con unas hojas muertas posteriormente se convirtió en una cosa esplendorosa que más adelante dio dos frutos, uno de ellos fui yo.

Esta tesis está dedicada a aquellas personas que han influido tanto en mi vida a tal grado que han dejado un poco de ellas en mí.

A mis padres porque siempre han sido un ejemplo a seguir, un matrimonio excepcional y dos seres humanos que realmente valen lo que pesan en oro.

A mi hermano quien es casi igual a mí pero al mismo tiempo muy diferente.

A mi esposo a quien amo infinitamente y me ha soportado en estos días tan difíciles para mí.

A mis abuelos quienes siempre estarán en mi corazón y cuyos consejos, enseñanzas y valores siempre los tendré en mente.

A todos ellos les doy las gracias por quererme, apoyarme y estar conmigo siempre que los necesito.

Los quiero mucho.

## AGRADECIMIENTOS

Principalmente le doy las gracias a mi director de tesis quien se merece un trofeo por haberme aguantado tanto tiempo.

También quiero agradecer a todas aquellas personas que han contribuido con su granito de arena para que este trabajo fuera realidad. A Luis, a mi tío Juan y a mi gran amiga Guadalupe y también a todos aquellos que de una u otra forma me apoyaron.

Gracias.

# INDICE

TEMA	PAGINA
Introducción	1
Capítulo 1	
1.1 Características de los sólidos elásticos	4
1.2 Ondas de esfuerzo en los sólidos elásticos	14
1.2.1 Ecuaciones de movimiento	16
1.2.2 Soluciones	22
1.3 Características de los sólidos viscoelásticos	24
1.4 Ondas de esfuerzo en los sólidos viscoelásticos	35
1.5 Discusión	41
Capítulo 2	
2.1 Transmisión en una interface elástica- elástica	44
2.2 Transmisión en una interface elástica - viscoelástica	50
2.3 Transmisión en un medio elástico con una franja viscoelástica	55
Capítulo 3	
3.1 Aplicaciones	74
3.2 Conclusiones	78
3.3 Sugerencias para continuar con la investigación de la propagación de las ondas de esfuerzos en fronteras elásticas- viscoelásticas	81

## INDICE DE FIGURAS

FIGURA	PAGINA
1.1.1 Componentes de esfuerzo aplicado a un elemento de volumen.	6
1.2.1 Ondas superficiales.	15
1.2.2 Deformación ocasionada por un esfuerzo aplicado a un sólido.	17
1.3.1 (a) Sólido de Maxwell, (b) sólido de Voigt, (c) ambas teorías.	25
1.4.1 Representación de la modificación de Hillier en un sólido de Voigt.	39
2.1.1 Dos sólidos elásticos diferentes, unidos en la frontera $x = 0$ .	45
2.2.1 Sólido elástico y sólido viscoelástico unidos en la frontera $x = 0$ .	51
2.3.1 Amplitud de las ondas propagadas en los tres medios.	55
3.1.1 Transductor unido a un sólido con aire en medio.	75
3.1.2 Transductor unido a un sólido con grasa en medio.	75
3.1.3 Propagación de las ondas en especímenes compuestos.	76
3.1.4 Campos de esfuerzo atravesando una lente.	77

## GLOSARIO

$\alpha$	Función compleja que depende del modelo con el que se está trabajando (Voigt, Maxwell o ambos)
$\Delta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$	Dilatación
$\Delta'$	Decremento logarítmico
$\epsilon$	Deformación
$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$	Cambios fraccionales de longitud en la dirección de la deformación
$\epsilon_{yz} + \epsilon_{xy} + \epsilon_{zx}$	Deformación cortante
$\eta_v$	Viscosidad del amortiguador de Voigt
$\eta^*$	Viscosidad equivalente
$\lambda$	Constante de Lamé
$\lambda'$	Constante viscoelástica
$\nu^*$	Razón de Poisson
$\xi$	Desplazamiento de la partícula del medio
$\rho$	Densidad
$\sigma$	Esfuerzo
$\tau$	Tiempo de relajación
$\phi$ y $\Phi$	Desfasamiento
$\omega$	Frecuencia angular
$\omega_1$	Frecuencia angular de oscilación del sistema
$2\omega_x, 2\omega_y, 2\omega_z$	Rotación
$\nabla^2$	Laplaciano



$a_{rs}$	Constante viscoelástica
$C_{rs}$	Constante elástica
$c$	Velocidad de la onda
$E$	Modulo de Young
$E_1$	Constante elástica equivalente
$E_v$	Rigidez del resorte del modelo de Voigt
$E^*$	Constante elástica del modelo de Maxwell
$E'$	Coefficiente de viscosidad
$E'_a$	Rigidez del resorte auxiliar
$E'_c$	Inverso del resorte auxiliar
$f$	Función compleja que depende del modelo que se esté empleando (Voigt, Maxwell o ambos)
$F_1$	Función compleja que depende de los valores de $f$ y $\alpha$
$f_r$	Frecuencia de oscilación del sistema
$G$	Modulo de corte y constante de Lamé
$G'$	Constante viscoelástica
$h$	Función arbitraria con argumento $(ct - x)$
$H$	Función arbitraria con argumento $(ct + x)$
$k$	Modulo volumétrico o de compresibilidad
$k$	Número de onda
$L$	Longitud de la barra
$M$	Masa
$p$	Presión
$R_{12}$	Coefficiente de reflexión entre la interfaz de dos sólidos elásticos

$R^*_{12}$	Coefficiente de reflexión entre la interfaz de un sólido elástico y uno viscoelástico
$R^*_{23}$	Coefficiente de reflexión entre la interfaz de un sólido viscoelástico y uno elástico
S	Sección transversal
$T_{12}$	Coefficiente de transmisión entre la interfaz de dos sólidos elásticos
$T^*_{12}$	Coefficiente de transmisión entre la interfaz de un sólido elástico y uno viscoelástico
t	Tiempo
v	Velocidad del desplazamiento de las partículas

## TABLA DE ESPECIFICACIONES

Sustancia	Modulo de Young E (Pa)	Viscosidad $\eta$ (Pa.s)	Densidad (Kg/m <sup>3</sup> )	Velocidad de fase c (m/s)
Acero	$220 \times 10^9$	-	7800	5940
Agua	0	$1 \times 10^{-3}$	1000	1496.7
Aluminio	$70 \times 10^9$	-	2700	6320
Nylon 6	$2.35 \times 10^9$	$1 \times 10^2$	1080	2620
Poliestireno	$3.4 \times 10^9$	$5 \times 10^3$	1050	2350
Polietileno (baja densidad)	$0.2 \times 10^9$	$3 \times 10^2$	900	1950
Poly (metyl - methacrylate)	$3.2 \times 10^9$	$5 \times 10^4$	1170	1260
Rubber	$10.5 \times 10^5$	$1 \times 10^4$	950	1550
Vidrio	$60 \times 10^9$	$1 \times 10^2$	2320	5640
Ytterbium	$23.9 \times 10^9$	$2.67 \times 10^{-3}$	6210	3500

# INTRODUCCIÓN

La propagación de las ondas acústicas puede estudiarse con dos enfoques distintos: el primero, para el conocimiento del fenómeno "per se", en donde se investiga el comportamiento y la propagación de un campo de esfuerzos en un medio de características conocidas y el segundo, como una herramienta para determinar las características de otros fenómenos en materiales en los que se supone conocido el comportamiento de los campos acústicos. Ambos enfoques son interesantes en el campo de la investigación, el primero como parte de la investigación pura; el segundo como una técnica de investigación en otras áreas del conocimiento de ciertos fenómenos de la naturaleza. En ambos la formalidad del tratamiento de los campos acústicos es indispensable.

La presente tesis, forma parte de un proyecto más amplio cuya finalidad se encuadra en el segundo enfoque, esto es, suponer conocido el comportamiento de las ondas en un medio de propagación, sólidos en este caso particular, y determinar ciertas características del comportamiento del medio o medios donde se produce la propagación en condiciones de control.

El estudio que se reporta en la presente tesis, se concreta a describir el comportamiento de ondas de esfuerzos en la interfaz entre medios sólidos elásticos y viscoelásticos a partir de modelos conocidos, con el objeto de encontrar los coeficientes de transmisión y reflexión para obtener los valores de las intensidades de las ondas reflejadas y transmitidas en estos arreglos. Estos resultados son importantes, por ejemplo, para entender la

función de los agentes que se emplean para acoplar un transductor ultrasónico a un material sólido donde se debe propagar el campo sonoro o para el análisis de adhesividad de ciertos pegamentos en metales y cerámicos o para el diseño de lentes acústicas de mayor eficiencia para enfocar haces ultrasónicos en equipos de pruebas no destructivas.

El trabajo se ha dividido en tres capítulos. En el primero se considera la descripción matemática de las características de un medio elástico y la propagación de ondas de esfuerzos longitudinales, encontrando la forma explícita de la función de onda correspondiente; de igual forma se analiza la propagación de esfuerzos en un medio viscoelástico, recurriendo a los modelos de Maxwell y de Voigt.

El segundo capítulo se considera el análisis de la propagación de ondas de esfuerzos longitudinales en tres casos particulares: primero en la región de frontera entre dos sólidos elásticos. Segundo en la frontera entre un medio elástico y uno viscoelástico. Tercero en una región que comprende un sólido elástico en el cual se ha insertado una franja viscoelástica de espesor  $\delta L$ . Para cada caso se han calculado los correspondientes coeficientes de reflexión y de transmisión.

En el tercer capítulo se plantean algunas posibles aplicaciones de los resultados obtenidos, se presentan las conclusiones generales del trabajo realizado y se realizan algunas sugerencias para el trabajo posterior de esta investigación.

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION

En este capítulo se establecen los conceptos necesarios y las herramientas adecuadas para comprender como se da la propagación de las ondas de esfuerzo en los sólidos, tanto elásticos como viscoelásticos.

En la primer parte, se caracteriza a los sólidos elásticos empleando sólo aquellos conceptos que son de utilidad para la comprensión del tema, en la segunda, las ondas se estudian según la forma en la que se propagan en el medio elástico y se presentan sus ecuaciones de movimiento correspondientes, en la tercera se caracteriza a los sólidos viscoelásticos, en la cuarta se discute el movimiento de las ondas de esfuerzo en un sólido viscoelástico y en la quinta y última parte se hace una discusión general del fenómeno.

Cuando se le aplica fuerza a un sólido ésta no siempre es normal a la superficie, por lo que dicha fuerza debe de estudiarse en tantas componentes como el sistema tridimensional lo indique. Al deformarse físicamente un cuerpo, éste puede o no regresar a su forma original; esto está estrechamente relacionado con la rapidez con la que se propaga la onda en el medio, ya que la elasticidad es la que se encarga de regresar a su posición original a la parte desplazada del medio mientras que la inercia es la

resistencia que presenta dicha parte para volver a su posición original, factores de este tipo se estudian en este trabajo y se toman en cuenta para el análisis de las ondas de esfuerzo tanto en un sólido elástico como en un sólido viscoelástico.

## **1.1 CARACTERISTICAS DE SOLIDOS ELASTICOS**

La propiedad de mayor interés en este trabajo es la elasticidad del sólido. Esta propiedad es la capacidad que tiene un cuerpo para deformarse y volver a su forma original sin presentar cambio alguno cuando el agente que produce la deformación cesa; sin embargo, cuando el límite hasta donde los sólidos pueden deformarse (conocido como límite elástico) se excede, su forma cambia permanentemente.

Otra de las propiedades físicas que caracterizan al material, es la homogeneidad del mismo, al hablar de ésta se entiende que todas las partes del sólido tienen las mismas características, es decir, que sus partículas se hallan igualmente mezcladas e igualmente distribuidas. Por otro lado, un cuerpo inhomogéneo es aquel en el que sus partículas no están igualmente distribuidas o bien, sus elementos no están igualmente relacionados y sus características cambian con la posición.

Una propiedad más, es la isotropía, que es aquella en la que no importa la dirección en la que se analiza el fenómeno producido en el material ya que en cualquier dirección se comportará de igual manera. Por otro lado, un

medio es anisótropo cuando al analizar un fenómeno, éste depende de la dirección del mismo.

La elasticidad se describe por medio de la ley de Hooke, la cual no se expresa en este trabajo como la ecuación que define el comportamiento de un resorte, sino como una combinación lineal de esfuerzos y deformaciones que caracterizan el comportamiento de las ondas producidas en el sólido elástico.

Así, el **esfuerzo** ( $\sigma$ ), se define como la fuerza por unidad de área que se aplica sobre una superficie y es expresado como un tensor de rango dos, por lo que necesita nueve componentes para quedar definido, mientras que la **deformación** ( $\epsilon$ ), es el cambio fraccional o por unidad de longitud a lo largo del sólido.

Al aplicar una fuerza a un sólido, ésta no siempre es normal a la superficie, por lo que en un espacio tridimensional se tienen dos componentes tangenciales y una normal para cada plano, así,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{zy}$  y  $\sigma_{zz}$ , son todas las componentes de la fuerza por unidad de área (llamadas esfuerzos), donde el primer subíndice indica la dirección de la componente y el segundo, el plano en el cual actúa dicho esfuerzo (ver Fig. 1.1.1).

Sin embargo, por equilibrio:



$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$

y así, de nueve componentes, el número se ha reducido a seis.

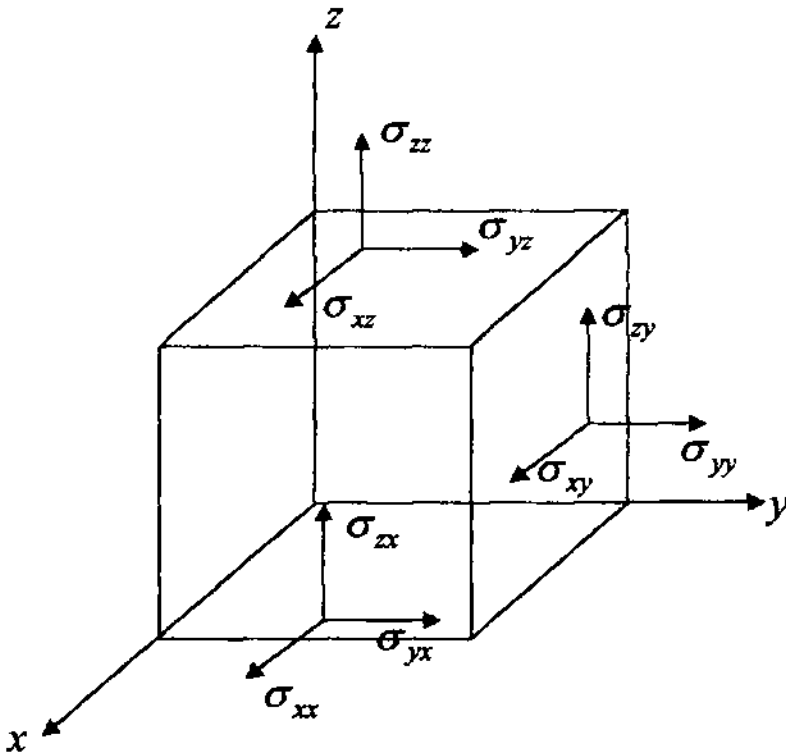


Fig. 1.1.1. Componentes de esfuerzo aplicado a un elemento de volumen

El desplazamiento de cualquier punto está en función del desplazamiento de sus puntos adyacentes

Si un punto que está en la posición  $(x, y, z)$  se desplaza a  $(x + u, y + v, z + w)$  mientras que un punto muy cercano localizado en  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  se desplaza relativamente una distancia  $(u + du, v + dv, w + dw)$  y si  $dx, dy$  y  $dz$  son lo suficientemente pequeñas se tiene:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

De este último conjunto de ecuaciones las cantidades:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

se reagrupan de la siguiente forma.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

1.1.1

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 1.1.1$$

Las primeras tres cantidades,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\varepsilon_{zz}$ , son cambios fraccionales de longitud en la dirección de la deformación, ya que corresponden a la expansión ó contracción de la línea infinitesimal de elementos alrededor del punto de interés.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \varepsilon_{yx} \end{aligned} \quad 1.1.2$$

Las cantidades  $\varepsilon_{yz}$ ,  $\varepsilon_{zx}$  y  $\varepsilon_{xy}$ , corresponden a la deformación cortante en los planos indicados por los subíndices.

$$\begin{aligned} 2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ 2\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad 1.1.3$$

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad 1.1.3$$

Y las tres últimas cantidades corresponden a la rotación de un elemento alrededor del punto de interés.

Si cada una de las ecuaciones del conjunto 1.1.3 es igual a cero se tiene una **deformación pura**, ya que si bien, la rotación no es estrictamente una deformación; cuando  $1.1.3 \neq 0$  se presenta una deformación y una rotación combinadas, que dependiendo de la relación de las magnitudes con que cada una se presenta, pueden enmascarar el efecto de la otra.

Así, la ley de Hooke se puede explicar de la siguiente forma: cada una de las seis componentes de esfuerzo es en cualquier punto una función lineal de las seis componentes de deformación, lo que significa que las deformaciones observadas en los sólidos elásticos son proporcionales a la fuerza, siempre y cuando no se exceda el límite elástico y entonces la ley de Hooke ya no se cumple.

Al expresar entonces a la ley de Hooke como una combinación lineal de las deformaciones, matemáticamente queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= C_{11}\epsilon_{xx} + C_{12}\epsilon_{yy} + C_{13}\epsilon_{zz} + C_{14}\epsilon_{yz} + C_{15}\epsilon_{zx} + C_{16}\epsilon_{xy} \\
\sigma_{yy} &= C_{21}\epsilon_{xx} + C_{22}\epsilon_{yy} + C_{23}\epsilon_{zz} + C_{24}\epsilon_{yz} + C_{25}\epsilon_{zx} + C_{26}\epsilon_{xy} \\
\sigma_{zz} &= C_{31}\epsilon_{xx} + C_{32}\epsilon_{yy} + C_{33}\epsilon_{zz} + C_{34}\epsilon_{yz} + C_{35}\epsilon_{zx} + C_{36}\epsilon_{xy} \\
\sigma_{yz} &= C_{41}\epsilon_{xx} + C_{42}\epsilon_{yy} + C_{43}\epsilon_{zz} + C_{44}\epsilon_{yz} + C_{45}\epsilon_{zx} + C_{46}\epsilon_{xy} \\
\sigma_{zx} &= C_{51}\epsilon_{xx} + C_{52}\epsilon_{yy} + C_{53}\epsilon_{zz} + C_{54}\epsilon_{yz} + C_{55}\epsilon_{zx} + C_{56}\epsilon_{xy} \\
\sigma_{xy} &= C_{61}\epsilon_{xx} + C_{62}\epsilon_{yy} + C_{63}\epsilon_{zz} + C_{64}\epsilon_{yz} + C_{65}\epsilon_{zx} + C_{66}\epsilon_{xy}
\end{aligned}
\tag{1.1.4}$$

donde los coeficientes  $C_{rs}$  son las constantes elásticas del material.

Sin embargo, se puede demostrar (Love 1927, pág.99) que:

$$C_{rs} = C_{sr}$$

ya que esto es una condición para que la energía elástica sea una función univaluada del esfuerzo. Así, de treinta y seis constantes elásticas que se tenían en un principio quedan ahora veintiún constantes distintas.

En un **sólido isótropo** los valores de los coeficientes no dependen de la orientación que éste tenga con respecto al sistema de referencia por lo que aplicando esta condición al conjunto de ecuaciones (1.1.4) quedan únicamente dos constantes independientes denotadas por  $\lambda$  y  $G$ , que se conocen como las constantes de Lamé y definen completamente el comportamiento elástico del material, así:

$$\begin{aligned}
C_{12} = C_{13} = C_{23} = C_{21} = C_{31} = C_{32} &= \lambda \\
C_{44} = C_{55} = C_{66} &= G \\
C_{11} = C_{22} = C_{33} &= 2G + \lambda
\end{aligned}$$

las veinticuatro constantes que faltan son iguales a cero (Love, pág. 151).

Así, la ley de Hooke (1.1.4) para un sólido elástico puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\Delta \\
\sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\Delta \\
\sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\Delta \\
\sigma_{yz} &= G\varepsilon_{yz} \\
\sigma_{zx} &= G\varepsilon_{zx} \\
\sigma_{xy} &= G\varepsilon_{xy}
\end{aligned}
\tag{1.1.5}$$

donde:

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

representa la **dilatación**, que es el **cambio fraccional del volumen**.

En términos de las constantes de Lamé se pueden representar las cuatro propiedades que caracterizan el comportamiento de un sólido elástico, las cuales son las siguientes.

El módulo de corte ( $G$ ): el cuál es una de las constantes de Lamé y se define como la razón entre el esfuerzo de corte y la deformación de corte es decir:

$$G = \frac{\sigma_{xy}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \quad \text{donde } i \neq j$$

El módulo de Young ( $E$ ): es la razón entre el esfuerzo aplicado en una dirección y la deformación producida en la misma dirección. Esta cantidad es una constante de proporcionalidad y en ocasiones se le llama módulo de elasticidad. Casi siempre se conoce su valor. Para medirlo se emplea una muestra que tiene forma de cilindro o de prisma y se somete a un esfuerzo constante, además de que sus caras laterales, se supone, no sufren perturbación alguna. Si el eje  $x$  es paralelo al eje principal del cilindro o del prisma el esfuerzo aplicado es  $\sigma_{xx}$  y todos los demás son cero, así que aplicando esto al conjunto de ecuaciones (1.1.5) se tiene:

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$$

La razón de Poisson ( $\nu^*$ ): se define como **la razón entre la contracción lateral y la extensión longitudinal** de la muestra, es decir:

$$\nu^* = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

El módulo volumétrico ( $k$ ): también conocido como módulo de compresibilidad de volumen, se define **como la razón de cambio de presión entre el cambio fraccional de volumen** cuando el sólido se expone a una compresión hidrostática uniforme, es decir:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P \quad y \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} = 0$$

Así que aplicando estas condiciones al conjunto de ecuaciones (1.1.5) se tiene que:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{P}{3\lambda + 2G}$$

De este último resultado se tiene que:

$$k = \frac{P}{\Delta} = \lambda + \frac{2G}{3}$$



## 1.2 ONDAS DE ESFUERZO EN SÓLIDOS ELÁSTICOS

En esta sección se caracteriza a las ondas de acuerdo a como se originan y propagan en el medio sólido elástico. Todas las ondas que aquí se mencionan se engloban en un solo tipo, las **ondas de esfuerzo**, que son **aquellas perturbaciones ocasionadas mecánicamente en un sólido**.

La onda **longitudinal** que en ocasiones se llama onda **irrotacional** o bien onda de **dilatación**, se caracteriza porque el movimiento de las partículas del medio donde se propaga se produce en el mismo sentido de la onda.

Una onda es **transversal**, también conocida como onda **equivoluminal** o bien, onda de **distorsión**, porque el movimiento de las partículas que transportan a la onda es perpendicular al sentido de propagación, sin cambio local de volumen.

Los dos tipos de ondas anteriormente mencionados se llaman en general **ondas de volumen** debido a que se propagan en el interior de un medio material ilimitado.

Otro tipo de ondas que también debe mencionarse son las llamadas **ondas superficiales**, las cuales como su nombre lo indica, se propagan solamente sobre la superficie libre del sólido y dependen de la dirección de

propagación de la onda, éstas se subdividen en tres tipos y propagando la onda en la dirección y se tiene:

a) **Ondas Rayleigh:** se llaman así porque el primero en estudiarlas fue Lord Rayleigh en 1887. Cuando estas ondas se generan en la superficie libre de un sólido, conforme van penetrando en el mismo su amplitud es considerablemente menor, se puede decir entonces, que son ondas rotacionales que se propagan en la superficie libre del plano  $yz$  (ver Fig.1.2.1).

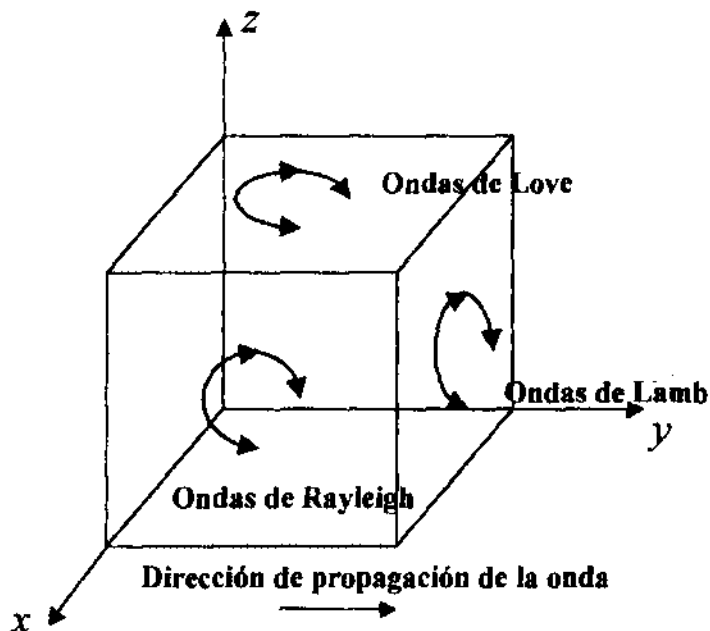


Fig. 1.2.1. *Ondas superficiales*

**b)Ondas de Love:** éstas también son ondas rotacionales que se propagan a través del plano  $xy$ , sin penetrar al interior del sólido, además de que viajan perpendicularmente a las ondas Rayleigh (ver Fig. 1.2.1).

**c)Ondas de Lamb:** estas ondas son también de tipo rotacional y se propagan en la superficie del sólido determinado por el plano  $zx$ , sólo que a diferencia de las dos ondas anteriores, éstas son perpendiculares tanto a las ondas de Rayleigh como a las ondas de Love (ver Fig.1.2.1).

Las ondas **rotacionales** son aquellas en las que su rotacional es diferente de cero.

Por último, las **ondas por flexión** se ocasionan cuando el sólido está sujeto a fuerzas transversales distribuidas en toda su longitud, por ejemplo, cuando se pone a vibrar una regla a la cual se le sujeta en uno de sus extremos con firmeza mientras que el otro extremo se levanta y se deja caer libremente.

## 1.2.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Para obtener las ecuaciones de movimiento de un medio elástico se considera la variación en el esfuerzo a través de un pequeño elemento de volumen, el cual por simetría con respecto al sistema de referencia tridimensional y para fines prácticos y sencillos se escoge cúbico (ver Fig. 1.2.2).

Basándose en la figura (1.2.2) se puede ver que al aplicar una fuerza a un pequeño elemento de volumen, ésta se subdivide en nueve componentes llamados esfuerzos, los cuales, por condiciones de equilibrio se reducen a seis.

Si se considera que la fuerza está actuando en la dirección  $x$  y teniendo en mente la segunda ley de Newton, se llega a lo siguiente:

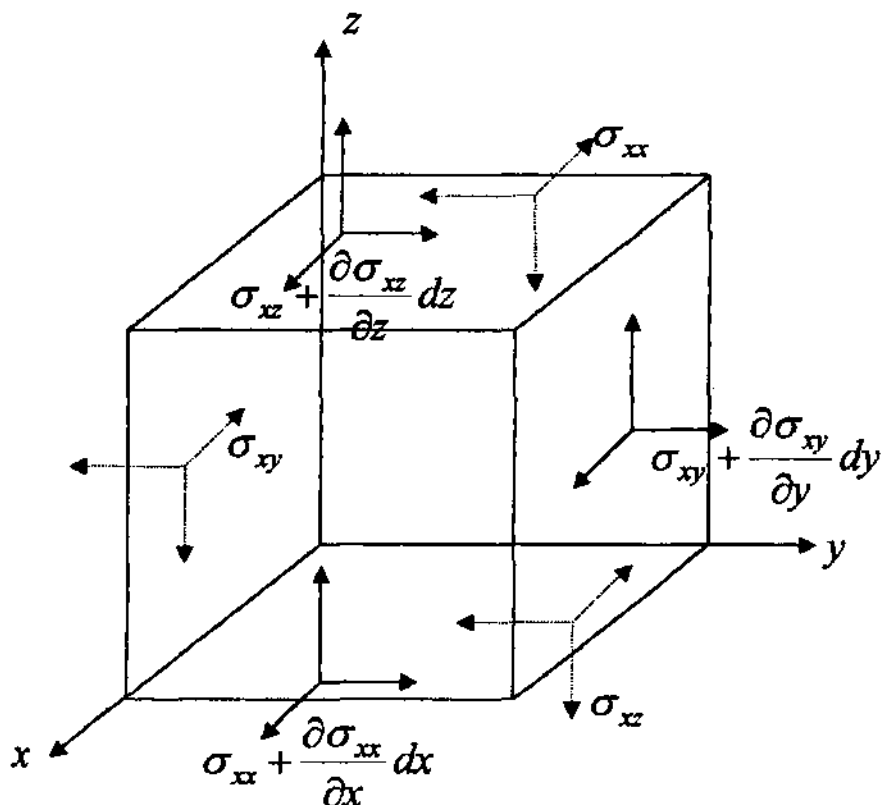


Fig. 1.2.2. Deformación ocasionada por un esfuerzo aplicado a un sólido

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \\ & + \left( \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_{xy} dx dz + \\ & + \left( \sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_{xz} dx dy = (\rho dx dy dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Simplificando:

$$(\rho dx dy dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad 1.2.1$$

donde  $\rho$  es la densidad del elemento o material y  $u$  es el desplazamiento en la dirección  $x$ , además de que se hace la suposición de que no se toman en cuenta fuerzas externas tales como la gravedad. Análogamente para los desplazamientos  $v$  y  $w$  se procede de la misma forma, obteniendo:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \end{aligned} \quad 1.2.2$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad 1.2.2$$

las cuales pueden representarse en términos de las constantes de Lamé empleando las ecuaciones (1.1.1) y (1.1.5)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G \nabla^2 v \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \nabla^2 w \end{aligned} \quad 1.2.3$$

Estas son las ecuaciones de movimiento que caracterizan el comportamiento elástico de un sólido cuando se somete a una fuerza, de éstas se puede demostrar que se generan dos tipos de ondas.

Si se diferencia el conjunto de ecuaciones (1.2.3) con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente y por último se suman:

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \Delta \quad 1.2.4$$

lo cual indica que la onda de dilatación se propaga a través del medio con velocidad :

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

Si se diferencia la segunda ecuación del conjunto (1.2.3) con respecto a  $z$  y la tercera con respecto a  $y$ , y por último se resta el segundo resultado al primero:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

como:

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

entonces:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \omega_x = G \nabla^2 \omega_x$$

Lo cual quiere decir que al encontrar las otras dos ecuaciones restantes que son:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

y

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = G \nabla^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

pero como:

$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad y \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

entonces:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \omega_y = G \nabla^2 \omega_y \quad y \quad \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \omega_z = G \nabla^2 \omega_z$$

por lo tanto hay una rotación que se propaga a través del medio con velocidad:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$



Estos dos últimos resultados implican que en el interior del sólido se propaga en el primer caso, una onda longitudinal y en el segundo, una onda transversal.

## 1.2.2 SOLUCIONES

La velocidad de las ondas transversales depende solamente de la densidad del material y del módulo de corte, mientras que la velocidad de las ondas longitudinales depende de la densidad y de una combinación de las dos constantes de Lamé.

Las ecuaciones:

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \Delta$$

y

$$\rho \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = G \nabla^2 \omega_x$$

son iguales a la ecuación de onda general:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \xi$$

Tomando en cuenta que la propagación estudiada en este trabajo es función de una dirección, como por ejemplo x, la ecuación queda como:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad 1.2.5$$

para la cual la solución es de la forma  $\xi = h(x - ct) + H(-x - ct)$  donde h y H son funciones arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales, algunos ejemplos de dichas funciones incluyen,  $\log(x-ct)$ ,  $\text{sen}(kx-\omega t)$  y  $\text{expj}(kx-\omega t)$ .

Ahora se va a demostrar que en efecto estas dos funciones planteadas en un principio arbitrariamente, son las soluciones a dicha ecuación.

Si al argumento de la función h se le llama,  $m = x - ct$  y se deriva parcialmente dos veces con respecto a t:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -c \left( \frac{d^2 h}{dm^2} \right) \frac{\partial m}{\partial t} = c^2 \frac{d^2 h}{dm^2} \quad 1.2.6$$

Por otro lado, derivando parcialmente a la función h dos veces con respecto de x:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dh}{dm} \right) = \frac{d^2 h}{dm^2} \quad 1.2.7$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.2.6) y (1.2.7) en la ecuación (1.2.5) se demuestra que cualquier función con argumento  $(x - ct)$  es una solución de dicha ecuación. En forma similar se demuestra que  $H(-x + ct)$  es también una solución. Entonces la suma de estas dos funciones es la solución completa de la ecuación de onda.

Si  $\xi$  representa al desplazamiento de la partícula del sólido elástico y  $c$  es la velocidad de la onda que se propaga en dicho sólido, entonces se puede establecer una solución particular para cada una, es decir, si el desplazamiento de la onda es transversal al de las partículas y  $c$  su correspondiente velocidad en el medio, entonces la ecuación representa a una onda transversal, en forma similar se hace un análisis para la onda longitudinal.

### 1.3 CARACTERISTICAS DE SÓLIDOS VISCOELÁSTICOS

En esta sección se estudia el comportamiento de los sólidos viscoelásticos, para los que hay tres teorías, los autores de las dos primeras son Maxwell y Voigt, la última es una combinación de ambas. La forma en la que se representan los sólidos viscoelásticos para estas teorías se muestra en la figura (1.3.1).

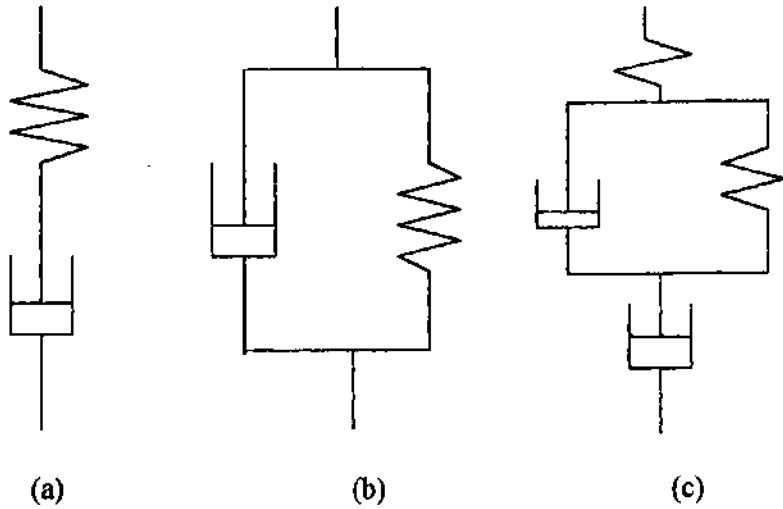


Fig. 1.3.1 (a) Sólido de Maxwell, (b) sólido de Voigt, (c) combinación de las dos teorías.

Mientras Maxwell estudiaba la naturaleza viscosa en los gases sugirió que el comportamiento de un sólido real difiere del de uno elástico en que para el segundo la relación entre esfuerzo-deformación está dada por  $\sigma = E^* \varepsilon$  donde  $E^*$  es la constante elástica apropiada, mientras que para el primero la relación es:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E^* \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{\tau} \quad 1.3.1$$

donde  $\tau$  es el tiempo de relajación del medio y se define como el tiempo en el cual la velocidad con la que decrece una función de la forma  $y = D \exp[-dt]$  se aproxima a  $1/e$ , donde  $D$  y  $d$  son constantes que dependen

del problema con el que se esté trabajando. Esta relación implica que para tiempos pequeños comparados con  $\tau$  el sólido se comporta como un sólido elástico, mientras que para tiempos grandes comparados con  $\tau$  el sólido se comporta como un líquido viscoso de viscosidad  $E^*\tau$ . Un sólido que obedece a esta relación se llama “sólido de Maxwell” y se representa mediante un resorte puesto en serie con un pistón que se desliza a través de un líquido, el cual hace las veces de un amortiguador (ver Fig. 1.3.1 (a)); el resorte obedece a la ley de Hooke y el amortiguador a la ley de viscosidad de Newton.

Al considerar Maxwell un sistema con una masa  $M$  la cual se encuentra suspendida de una barra delgada de longitud  $L$  y de área de sección transversal  $S$ , encontró que la ecuación de movimiento de la masa se puede expresar como la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple despreciando la inercia de la barra, por lo que se tiene:

$$M\ddot{\xi} + S\sigma = 0 \quad 1.3.2$$

como la deformación es el cambio por unidad de longitud a lo largo de la barra se tiene entonces que  $\epsilon = \xi / L$ , por lo que la ecuación (1.3.1) queda de la siguiente forma:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{E^*}{L} \frac{d\xi}{dt} - \frac{\sigma}{\tau} \quad 1.3.3$$

Eliminando  $\sigma$  y  $d\sigma/dt$  de las ecuaciones (1.3.2) y (1.3.3) respectivamente se tiene:

$$\frac{M}{S} \frac{d^3 \xi}{dt^3} + \frac{M}{S\tau} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{E^*}{L} \frac{d\xi}{dt} = 0 \quad 1.3.4$$

Integrando (1.3.4) con respecto a  $t$  y multiplicando por  $S/M$  toda la expresión se tiene:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\xi}{dt} + \frac{E^* S}{LM} \xi = cte. \quad 1.3.5$$

Esta última ecuación es equivalente a la de un oscilador armónico libre y es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes por lo que al resolverse como tal, su solución es:

$$\xi = A \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4 \frac{E^* S}{LM}} \right] \frac{t}{2} \right\} +$$

$$+ B \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{\tau} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4 \frac{E^* S}{LM}} \right] \frac{t}{2} \right\}$$

Analizando esta ecuación se observan tres posibles casos.

El primero cuando  $4E^*S/LM$  es mayor que  $1/\tau^2$  y al cual se le llama subamortiguamiento, el segundo, cuando  $1/\tau^2$  es mayor que  $4E^*S/LM$  y recibe el nombre de sobreamortiguamiento y el último cuando ambos términos son iguales y se le da el nombre de amortiguamiento crítico, sin embargo, en este trabajo se considera el primero porque es en el que se da la propagación de la onda.

Representando la solución como una forma alternativa (amplitud –fase) se tiene:

$$\xi = C \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \cos(\omega_1 t + \phi)$$

donde  $C$  y  $\phi$  son constantes que dependen de  $A$  y  $B$ .  $\phi$  recibe el nombre de ángulo de fase.

La solución completa demuestra que la onda va disminuyendo conforme va avanzando a través del sólido viscoelástico.

Así, la frecuencia de este oscilador subamortiguado está dada por la relación:

$$\omega_1^2 = \frac{E^*S}{ML} - \frac{1}{4\tau^2}$$

Si la frecuencia de oscilación del sistema está dada por:

$$f_r = \frac{\omega_1}{2\pi}$$

la amplitud de la onda es una función dependiente del tiempo, i.e., se considera como una onda modulada por la exponencial de  $\omega_1$ :

$$C \exp\left(-\frac{\pi}{\tau\omega_1}\right)$$

Esta última ecuación se relaciona con el decremento logarítmico ( $\Delta'$ ), el cual representa una medida de la fricción interna, de la siguiente forma:

$$\Delta' = \frac{\pi}{\tau\omega_1}$$

pero si el tiempo de relajación  $\tau$ , se define como la razón entre la “viscosidad equivalente”  $\eta^*$  y el módulo elástico  $E^*$ , entonces:

$$\Delta' = \frac{\pi E^*}{\eta^* \omega_1} \quad 1.3.9$$



De este último resultado se puede ver que el decremento logarítmico es inversamente proporcional a la frecuencia de oscilación del sistema y que está relacionado con el tiempo de relajación o bien con la viscosidad efectiva y el módulo elástico.

Por otro lado, Voigt relaciona a las componentes de esfuerzo en un sólido viscoelástico sumando los términos que corresponden a la deformación, con los de la razón de cambio de la deformación, esto implica que a las ecuaciones (1.1.4) se le agregan seis términos más a cada una de las ellas, es decir, además de los:

$$C_{rs} \varepsilon_{ij}$$

se le agregan:

$$a_{rs} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ij})$$

donde los coeficientes  $a_{rs}$  corresponden a las constantes viscosas del material.

Como anteriormente se había visto, para un sólido isótropo elástico las ecuaciones de movimiento de las partículas se reducen a seis y todas en términos de las dos constantes de Lamé, en este caso sucede lo mismo, sólo

que ahora aparecen dos constantes más,  $\lambda'$  y  $G'$  que son las constantes de viscosidad, así que  $\lambda$  se sustituye por:

$$\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}$$

y  $G$  por:

$$G + G' \frac{\partial}{\partial t}$$

Un sólido que obedece a estas relaciones se conoce como un “sólido de Voigt” y se representa mediante un resorte y un amortiguador puestos en paralelo (ver Fig. 1.3.1 (b)).

Thompson demostró (Kolsky, pág 111) que para un sólido de Voigt, la relación entre el esfuerzo y la deformación está dada por:

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} + E' \frac{d\epsilon_{xx}}{dt} \quad 1.3.6$$

donde  $E'$  es el coeficiente de viscosidad normal y está dado por:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\lambda G \tau_1 + (3\lambda^2 + 4\lambda G + 2G^2) \tau_2}{(\lambda + G)(3\lambda + 2G)}$$

donde:

$$\tau_1 = \frac{\lambda'}{\lambda} \quad y \quad \tau_2 = \frac{G'}{G}$$

Para un sólido de Voigt, el análisis es equivalente al que se hizo para un sólido de Maxwell, ya que también se estudia el movimiento de una masa  $M$  sujeta a una barra de longitud  $L$ .

La ecuación que representa al movimiento de la masa ahora es:

$$M_1 \ddot{\xi} + BE' \dot{\xi} + BE = 0 \quad 1.3.7$$

donde  $B$  es una cantidad que tiene que ver con la disipación de la energía (aunque en realidad depende de la geometría de la muestra, entre otros factores, el cuadrado de la longitud de la barra).

La solución para esta ecuación es la siguiente:

$$\xi = A \exp \left\{ \frac{-BE + \sqrt{(BE')^2 - 4M_1 BE}}{2M_1} \right\} t + B \exp \left\{ \frac{-BE - \sqrt{(BE')^2 - 4M_1 BE}}{2M_1} \right\} t$$

Aquí también se presentan los tres casos mencionados en el análisis del método de Maxwell pero de la misma forma que anteriormente solo se estudia el primero.

Representando la solución nuevamente en la forma amplitud-fase se llega a:

$$\xi = C \exp\left(-\frac{BE'}{2M_1}\right) \cos(\omega_1 t + \phi)$$

donde ahora la frecuencia de oscilación del sistema está dada por:

$$\omega_1^2 = \frac{BE}{M_1} - \frac{(BE')^2}{4M_1^2}$$

Y si la frecuencia de oscilación se define de la misma forma que para un sólido de Maxwell, entonces la amplitud de la onda está dada por:

$$C \exp\left(-\frac{BE'\pi}{M_1 \omega_1}\right)$$

Para obtener el decremento logarítmico se considera que para amortiguamientos pequeños:

$$(BE')^2 \ll 4BEM_1$$

así que:

$$\omega_1^2 \approx \frac{BE}{M_1}$$

entonces el decremento logarítmico queda como:

$$\Delta' = \frac{\omega_1 \pi E'}{E} \quad 1.3.10$$

De este último resultado se ve que el decremento es directamente proporcional a la frecuencia de oscilación del sistema y que está relacionado con el módulo de Young y con el coeficiente de viscosidad normal.

La representación de la combinación de ambas teorías se muestra en la figura (1.3.1 (c)) por lo que también es una combinación en su descripción matemática, sin embargo no se da un análisis más detallado debido a que esta teoría no retribuye muy buenos resultados salvo en pequeños intervalos de frecuencia.

## 1.4 ONDAS DE ESFUERZO EN SÓLIDOS VISCOELÁSTICOS

La ecuación de las ondas de esfuerzo en un sólido viscoelástico, en la dirección  $x$  se deduce de las ecuaciones de movimiento para un sólido elástico (1.2.3) y está descrita por:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[ (\lambda + G) + (\lambda' + G') \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \left( G + G' \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 u$$

Pero para una onda longitudinal la ecuación de movimiento se obtiene de la ecuación (1.2.4), así:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 u + (\lambda' + 2G') \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Sin embargo según Hillier (Kolsky, pág. 118), para una onda longitudinal propagándose a través de una barra la cual se comporta como un sólido de Voigt la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E' \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \quad 1.4.1$$

donde  $E'$  es el coeficiente de viscosidad ya descrito anteriormente sin embargo, también se define como  $E'=E\tau'$  (Kolsky, pág 110). La solución de esta última ecuación es diferente a la solución general  $h(x - ct)$  o  $H(-x - ct)$  por lo que se propone una solución armónica de la siguiente forma:

$$A \exp j(f_1 x - \omega t)$$

donde  $\omega$  corresponde a la frecuencia angular del sistema y  $f_1$  a una función compleja que depende de  $f$  y  $\alpha$  que a su vez son funciones arbitrarias que se determinan dependiendo del modelo con el que se esté trabajando. Queda entonces  $f_1$  determinada en forma general de la siguiente manera:

$$f_1 = f + j\alpha \quad 1.4.2$$

Así para un sólido que es considerado como un sólido de Voigt se tiene que al sustituir  $f_1$  en la ecuación (1.4.1):

$$\rho\omega^2 = E f_1^2 + jE' f_1^2 \omega \quad 1.4.3$$

Sustituyendo la ecuación (1.4.2) en la ecuación (1.4.3) y separando la parte real de la parte imaginaria se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 &= E(f^2 - \alpha^2) - 2E'\omega f\alpha \\ 2Ef\alpha &= -E'\omega(f^2 - \alpha^2) \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se llega a las soluciones correspondientes para  $f$  y  $\alpha$ , así:

$$\begin{aligned}
 f^2 &= \frac{E\rho\omega^2}{2(E + E'\omega^2)} \left\{ \sqrt{1 + \frac{(E'\omega)^2}{E^2}} + 1 \right\} \\
 \alpha^2 &= \frac{E\rho\omega^2}{2(E + E'\omega^2)} \left\{ \sqrt{1 + \frac{(E'\omega)^2}{E^2}} - 1 \right\}
 \end{aligned}
 \tag{1.4.4}$$

Hillier también investigó la propagación de las ondas de esfuerzo a lo largo de un filamento viscoelástico para un sólido de Maxwell, la relación entre el esfuerzo y la deformación está dada por:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E^* \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\sigma}{\tau}
 \tag{1.4.5}$$

donde  $\tau$  es el tiempo de relajación y si se llama a  $\eta^*$  la “viscosidad equivalente” del sólido,  $\tau = \eta^*/E^*$ .

De la segunda ley de Newton la ecuación de movimiento en una barra es:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}
 \tag{1.4.6}$$



Derivando la ecuación (1.4.5) con respecto a  $x$  y sustituyendo este resultado en la ecuación (1.4.6), se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - E^* \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial t} + \left( \frac{\rho}{\tau} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad 1.4.7$$

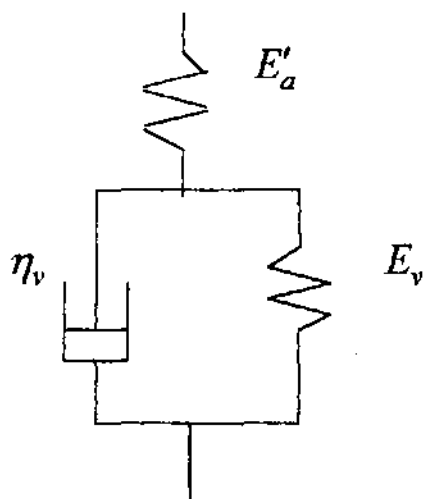
La ecuación anterior tiene una solución equivalente a la de la ecuación (1.4.1) en donde las condiciones son las mismas así que:

$$f^2 = \frac{\rho \omega^2}{2E^*} \left[ \sqrt{1 + \omega^{-2} \tau^{-2}} + 1 \right]$$

$$\alpha^2 = \frac{\rho \omega^2}{2E^*} \left[ \sqrt{1 + \omega^{-2} \tau^{-2}} - 1 \right] \quad 1.4.8$$

Hillier, sin embargo consideró otro modelo más el cual se muestra en la figura (1.4.1), el cual consiste en un modelo de Voigt colocado en serie con un resorte auxiliar.

$E'_a$ ,  $E_v$  y  $\eta_v$ , corresponden a la rigidez del resorte auxiliar, la rigidez del resorte del modelo de Voigt y a la viscosidad del amortiguador respectivamente.



**Fig. 1.4.1** Representación de la modificación de Hillier en un sólido de Voigt

La relación esfuerzo-deformación para un modelo de este tipo está dado por la siguiente relación:

$$(E'_a + E_v)\sigma + \eta_v \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \eta_v E'_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - E'_a E_v \varepsilon = 0$$

Si se diferencia esta última ecuación con respecto a  $x$  y se sustituye en la ecuación (1.4.6):

$$\begin{aligned} & \rho \eta_v \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \rho (E'_a + E_v) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \\ & - \eta_v E'_a \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - E'_a E_v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad 1.4.9$$

Si se sustituye  $\eta_v / E_v$  por  $\tau$ , el "tiempo de relajación", del modelo de Voigt, y empleando nuevamente la solución (1.4.1) esta última ecuación será satisfecha si:

$$f^2 = \frac{\rho \omega^2}{E_c E'_a} \left\{ \sqrt{\frac{E'_a{}^2 + E_c \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}} + \frac{E'_a{}^2 + E_c \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right\} \quad 1.4.10$$

$$\alpha^2 = \frac{\rho \omega^2}{E_c E'_a} \left\{ \sqrt{\frac{E'_a{}^2 + E_c \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}} - \frac{E'_a{}^2 + E_c \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right\}$$

donde:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E'_a} + \frac{1}{E_v}$$

es la suma de la rigidez del sólido de Maxwell y la rigidez del sólido de Voigt.

Si el resorte auxiliar es muy rígido entonces las ecuaciones (1.4.10) se simplifican de tal manera que se obtendría el primer conjunto de fórmulas vistas al comienzo de esta sección, es decir, como el conjunto de ecuaciones (1.4.4), si por otro lado, el resorte del modelo de Voigt tiene un a rigidez insignificante, entonces la ecuación (1.4.9) quedaría como la ecuación (1.4.6), es decir, como la de un sólido de Maxwell.

## **1.5 DISCUSION**

Se comenzó estudiando la propagación de las ondas de esfuerzo en un sólido elástico porque es el caso más sencillo, generando así las bases necesarias para después pasar al estudio de las ondas en un sólido viscoelástico.

Se analizan básicamente las ondas de dilatación porque son las que interesan en este trabajo.

Por el análisis presentado para la propagación de las ondas se puede ver claramente que dicha ecuación indica que tipo de onda es la que se estudia, siempre y cuando se especifique cada uno de los términos que involucra dicha ecuación.

En cuanto al análisis hecho acerca de los sólidos viscoelásticos se puede decir que ésta es una parte muy interesante ya que se toman en cuenta diversos factores que repercuten grandemente en su estudio, como las constantes de viscosidad.

Un aspecto importante es que a pesar de que tanto Voigt como Maxwell presentan teorías completamente opuestas, cada una de ellas sirve para describir bien el comportamiento del sólido viscoelástico que mejor se ajusta a sus condiciones, mejor incluso que la última teoría, que combina a ambas y solo sirve para determinadas frecuencias.

Maxwell, al desarrollar su teoría, comprobó que el decremento logarítmico (o la medida de la fricción interna) es inversamente proporcional a la frecuencia de oscilación del sistema, lo cual quiere decir que entre mayor sea la vibración de este último, menor será la disipación de la energía.

Voigt por su lado, comprobó que el decremento logarítmico en un sólido viscoelástico que se comporta bajo sus condiciones previamente establecidas, es directamente proporcional a la frecuencia de oscilación del sistema, lo cual implica, que a mayor vibración, mayor será la cantidad de la energía disipada.

Sin embargo, en ambos casos el factor relevante es el de la viscosidad del sólido. En el caso de Maxwell resulta ser un factor favorable, ya que la viscosidad atenúa o minimiza la disipación de la energía, mientras que para Voigt, resulta ser todo lo contrario, entre más viscoso sea el sólido, la cantidad de la energía disipada será cada vez mayor. Claro está, que ambos resultados sólo son válidos en intervalos determinados para ciertas frecuencias.

Otro factor que es importante destacar, es que Maxwell emplea un tiempo de relajación ( $\tau$ ) para relacionarlo con la disipación de la energía , mientras que Voigt, emplea un coeficiente de viscosidad normal ( $E'$ ) con el mismo objeto.

# CAPITULO 2

En este capítulo se examina la propagación de una onda de dilatación que incide normalmente a través de un sólido homogéneo y elástico así como en un sólido viscoelástico combinándose ambos de diferentes formas.

El objetivo de este capítulo es encontrar los coeficientes de reflexión ( $R$ ) y de transmisión ( $T$ ) para las condiciones dadas. En la primer sección se trabaja con dos capas de materiales distintos pero elásticos, homogéneos y semi-infinitos, en la segunda, una capa es de un sólido elástico y homogéneo y la otra de un sólido viscoelástico, ambos también semi-infinitos. En la última sección se estudian tres capas, la primera y la última son iguales, es decir, del mismo material sólido, elástico, homogéneo y semi-infinitos mientras que la de en medio tiene un grosor  $\delta L$  y es de un sólido viscoelástico.

## **2.1 TRANSMISION EN UNA INTERFAZ ELASTICA - ELASTICA**

Al producir una onda longitudinal en un sistema formado por dos medios elásticos y homogéneos, diferentes entre sí, se generan otras dos ondas longitudinales, la que se refleja y la que se transmite (ver Fig. 2.1.1), el desplazamiento de cada una de las ondas está dado de la siguiente forma:

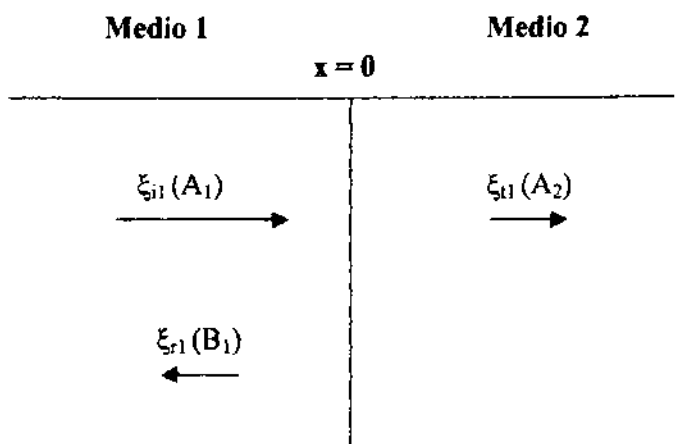


Fig. 2.1.1 Dos sólidos elásticos diferentes unidos en la frontera  $x=0$

- i) para la onda incidente, la cual viaja hacia la derecha, en el primer sólido homogéneo y elástico:

$$\xi_{i1} = A_1 e^{j(k_1 x - \omega t)}$$

donde  $k_1$  es el número de onda en el medio 1.

- ii) para la onda reflejada, que viaja hacia la izquierda, en el mismo sólido homogéneo y elástico:

$$\xi_{r1} = B_1 e^{j(-k_1 x - \omega t)}$$



- iii) para la onda transmitida, propagándose hacia la derecha, al segundo sólido, también elástico y homogéneo:

$$\xi_{t2} = A_2 e^{j(k_2 x - \omega t)}$$

donde  $k_2$  es el número de onda en el medio 2.

Para encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión, otros factores que deben de tomarse en cuenta son, la presión y la velocidad.

Para relacionar la **presión** con la densidad, la velocidad de la onda en el medio y la derivada del desplazamiento de la partícula en la dirección de propagación, que por simplicidad se considera  $x$ , se emplea la segunda ley de Newton, la definición de la aceleración en términos de la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo y la ecuación de la onda, es decir:

$$F = ma = \rho V \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow P = \frac{\rho V}{A} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right)$$

de la ecuación de onda se tiene:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Rightarrow dP = \rho dx c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

por lo tanto se llega a que:

$$p = \rho c^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Para la velocidad, que es la que indica la dirección del movimiento se emplea la siguiente relación:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

obtenida al derivar una vez con respecto a  $t$  y a  $x$ , la función  $h$  definida en la sección 1.2.2.

Así:

$$v = \pm \frac{p}{\rho c}$$

Tomando en cuenta todo lo anterior, tanto para la presión como para la velocidad en la frontera  $x = 0$  se tiene:

Para la onda incidente:

$$p_{i1} = j\rho_1 c_1^2 k_1 A_1 e^{j\omega t} \quad y \quad v_{i1} = j c_1 k_1 A_1 e^{j\omega t}$$

Para la onda reflejada:

$$p_{r1} = j\rho_1 c_1^2 k_1 B_1 e^{j\omega t} \quad y \quad v_{r1} = -j c_1 k_1 B_1 e^{j\omega t}$$

Para la onda transmitida:

$$p_{t2} = j\rho_2 c_2^2 k_2 A_2 e^{j\omega t} \quad y \quad v_{t2} = j c_2 k_2 A_2 e^{j\omega t}$$

Los subíndices indican el medio en el cual se están propagando las ondas y si es incidente (i), reflejada (r) o transmitida (t).

Para obtener los coeficientes de reflexión ( $R_{12}$ ) y el de transmisión ( $T_{12}$ ) se utilizan las condiciones de frontera (Kinsler, Fundamentos de acústica, pág. 177) que tanto para las presiones como para las velocidades está dado de la siguiente forma:

$$p_{i1} + p_{r1} = p_{t2} \quad y \quad v_{i1} + v_{r1} = v_{t2}$$

Así, para las presiones:

$$\rho_1 c_1^2 k_1 A_1 + \rho_1 c_1^2 k_1 B_1 = \rho_2 c_2^2 k_2 A_2 \quad 2.1.1$$

Para las velocidades:

$$c_1 k_1 A_1 - c_1 k_1 B_1 = c_2 k_2 A_2 \quad 2.1.2$$

Para obtener el coeficiente de reflexión  $R_{12}$  se despeja de la ecuación (2.1.2)  $A_1$  y al sustituirlo en la ecuación (2.1.1) se llega a:

$$R_{12} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

Al término  $\rho c$  se le conoce como la **impedancia de un sólido elástico**

Este coeficiente de reflexión obtenido indica que la onda reflejada se desfasa  $180^\circ$  cuando la impedancia del segundo medio es mayor a la del primero, cuando sucede lo contrario, la onda reflejada se encuentra en fase con la incidente y cuando son iguales se tiene una transmisión completa al segundo medio.

Los subíndices colocados en cada uno de los coeficientes indicarán las fronteras entre las cuales está incidiendo la onda de interés.

Para obtener el coeficiente de transmisión  $T_{12}$  se toma en cuenta que  $T=1+R$ . Así:

$$T_{12} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$$

El coeficiente de transmisión obtenido siempre es positivo, lo cual implica que la onda transmitida siempre está en fase con la onda incidente. Además de que no hay disipación de la energía cuando pasa de un medio a otro por que ambos sólidos son elásticos.

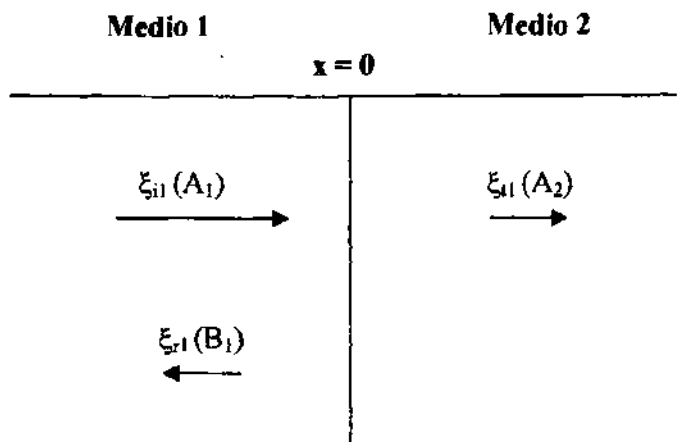
Se puede observar que ambos coeficientes dependen de la impedancia de cada uno de los medios.

En la mayoría de la bibliografía consultada los coeficientes se presentan en diferentes términos, sin embargo, este trabajo se apoyó en aquella persona que tiene ya un amplio camino recorrido en cuanto a este tema se refiere como lo es el Dr. Kinsler.

## **2.2 TRANSMISION EN UNA INTERFAZ ELASTICA – VISCOELASTICA**

En esta sección, se considera un sistema formado también por dos medios, sin embargo, la diferencia entre ésta y la sección anterior es que el medio 1 es elástico y el medio 2 es viscoelástico, (ver Fig. 2.2.1)

Al hacer incidir la onda longitudinal en el medio elástico, se generan nuevamente dos ondas longitudinales más, la onda reflejada propagándose hacia la izquierda en dicho medio (medio 1) y la transmitida, propagándose hacia la derecha en el medio viscoelástico (medio2).



**Fig. 2.2.1.** *Sólido elástico y sólido viscoelástico unidos en la frontera  $x=0$*

La expresión para el desplazamiento de las partículas en cada medio es la siguiente:

- i) Para la onda incidente en el sólido homogéneo y elástico:

$$\xi_{i1} = A_1 e^{j(k_1 x - \omega t)}$$

- ii) Para la onda reflejada en el mismo sólido homogéneo y elástico:

$$\xi_{r1} = B_1 e^{j(-k_1 x - \omega t)}$$

- iii) Para la onda transmitida al sólido viscoelástico:

$$\xi_{12} = A_2 e^{j(f_1 x - \omega t)}$$

donde  $f_1$  ya fue definido en la sección 1.4. 2.

La presión y la velocidad para el medio 1 son las que se establecieron en la sección anterior y para el medio 2 (sólido viscoelástico) se obtienen de la siguiente forma:

La presión sigue siendo la misma que en un sólido elástico, así que:

$$p = \rho_2 c_2^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Sin embargo, la velocidad cambia un poco al derivar con respecto a  $x$ , la solución del desplazamiento de la partícula, así:

$$v = \pm \frac{p}{j \rho_2 c_2 f_1}$$

Tomando en cuenta todo lo anterior, tanto la presión como la velocidad para cada solución de onda en la frontera donde  $x = 0$ , es:

Para la onda incidente:

$$p_{i1} = j\rho_1 c_1^2 k_1 A_1 e^{j\omega t} \quad y \quad v_{i1} = jc_1 k_1 A_1 e^{j\omega t}$$

Para la onda reflejada:

$$p_{r1} = j\rho_1 c_1^2 k_1 B_1 e^{j\omega t} \quad y \quad v_{r1} = -jc_1 k_1 B_1 e^{j\omega t}$$

para la onda transmitida:

$$p_{t2} = -j\rho_2 c_2^2 f_1 A_2 e^{j\omega t} \quad y \quad v_{t2} = c_2 A_2 e^{j\omega t}$$

El signo menos en la presión de la onda transmitida al medio 2 indica que ésta se desfasa de la onda incidente en el medio 1.

Empleando nuevamente las condiciones de frontera para las presiones y las velocidades, se tiene respectivamente que:

$$p_{i1} + p_{r1} = p_{t2} \quad y \quad v_{i1} + v_{r1} = v_{t2}$$

por lo que:

$$\rho_1 c_1^2 k_1 A_1 + \rho_1 c_1^2 k_1 B_1 = \rho_2 c_2^2 f_1 A_2 \quad 2.2.1$$

$$jc_1 k_1 A_1 - jc_1 k_1 B_1 = c_2 A_2 \quad 2.2.2$$



empleando el mismo procedimiento que en la sección (2.1) , de las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) se puede ver que los coeficientes de reflexión ( $T_{12}^*$ ) y de transmisión ( $R_{12}^*$ ) se expresan de la siguiente forma:

$$R_{12}^* = \frac{B_1}{A_1} = - \left[ \frac{(\rho_1 c_1 + j\rho_2 c_2 f_1)^2}{(\rho_1 c_1)^2 + (\rho_2 c_2 f_1)^2} \right]$$

$$T_{12}^* = \frac{A_2}{A_1} = [2\rho_1 c_1]^* \left[ \frac{\rho_1 c_1 + j\rho_2 c_2 f_1}{(\rho_1 c_1)^2 + (\rho_2 c_2 f_1)^2} \right]$$

La presencia del término  $j$  en ambos coeficientes implica que la onda se atenúa en su paso por el sólido viscoelástico ya que no se debe olvidar que este se comporta como un resorte y un amortiguador relacionados en cierto orden. De hecho más adelante se demostrará que dicha atenuación es muy grande, por lo menos para algunos materiales, polímeros en general.

Al comparar estos dos resultados con los de los dos coeficientes obtenidos en la sección anterior, destacan dos cosas, la primera, que son muy similares y la segunda que estos dos últimos coeficientes son complejos además de que dependen de las densidades, las velocidades y de la función compleja  $f_1$ , lo cual resalta la presencia del sólido viscoelástico.

El \* colocado en la parte superior de los coeficientes indicará que pertenecen a una situación en donde se involucra un medio viscoelástico.

### 2.3 TRANSMISION EN UN MEDIO ELASTICO CON UNA FRANJA VISCOELASTICA

Ahora el sistema está formado por tres medios, dos elásticos y uno viscoelástico de grosor  $\delta L$ , como se ha agregado un elemento más, el número de ondas transmitidas y reflejadas aumenta. Sin embargo, un análisis detallado del comportamiento de dichas ondas demostró que la onda transmitida hasta el tercer medio tiene una amplitud casi nula, lo que indica que la onda que se está propagando en el segundo medio es atenuada tanto por el sólido viscoelástico que transmite muy poco también al primer medio.

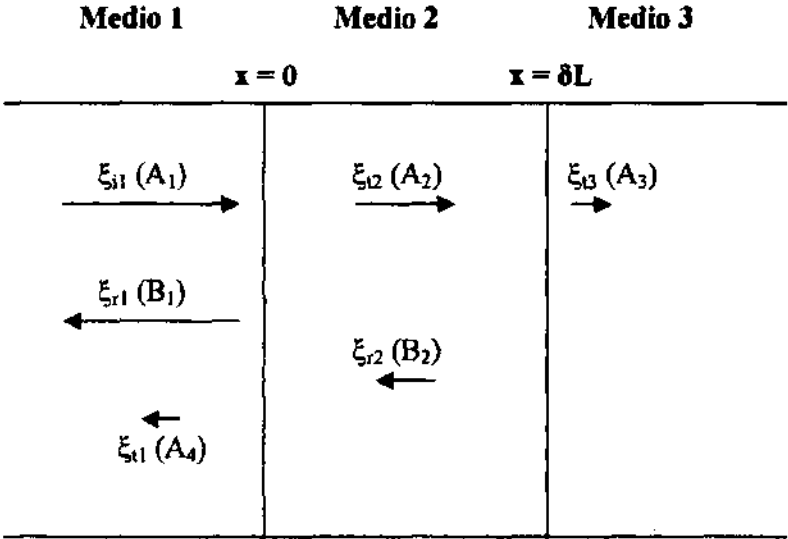


Fig.2.3.1. Amplitud de las ondas propagadas en los tres medios

Por lo mencionado en el párrafo anterior, además de los dos coeficientes obtenidos en la sección anterior solamente se especificará uno más. El coeficiente que se obtiene cuando la onda transmitida  $\xi_{2}$ , incide en la frontera entre el medio 2 y el medio 3, generando así una onda reflejada  $\xi_{r2}$ , además de la transmitida al medio 3 (con una amplitud casi nula), en el mismo medio 2, pero claro está que con características diferentes, así a este último coeficiente se le llamará  $R^*_{23}$ .

Tomando en cuenta todo lo anterior, tanto la presión como la velocidad para cada onda en la frontera donde  $x = \delta L$ , es:

Para la onda incidente:

$$p_{i2} = -j\rho_2 c_2^2 f_1 A_2 e^{j\delta L f_1} \quad y \quad v_{i2} = c_2 A_2 e^{j\delta L f_1}$$

Para la onda reflejada:

$$p_{r2} = j\rho_2 c_2^2 f_1 B_2 e^{-j\delta L f_1} \quad y \quad v_{r2} = -c_2 B_2 e^{j\delta L f_1}$$

Por último, para la onda transmitida:

$$p_{t3} = j\rho_1 c_1^2 k_1 A_3 e^{j\delta L k_1} \quad y \quad v_{t3} = j c_1 k_1 A_3 e^{j\delta L k_1}$$

Empleando las condiciones de frontera se tiene:

$$-\rho_2 c_2^2 f_1 A_2 e^{if_1 \delta L} + \rho_2 c_2^2 f_1 B_2 e^{-if_1 \delta L} = \rho_1 c_1^2 k_1 A_3 e^{if_1 \delta L} \quad 2.3.1$$

$$c_2 A_2 e^{if_1 \delta L} - c_2 B_2 e^{-if_1 \delta L} = j c_1 k_1 A_3 e^{jk_3 \delta L} \quad 2.3.2$$

Manejando las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2) se llega a lo siguiente:

$$R_{23}^* = \frac{B_2}{A_2} = \text{Exp}[2j \times \delta L \times f_1]$$

Es importante mencionar que en la frontera entre el medio elástico y el viscoelástico hay un desfase tanto de la onda transmitida como de la onda reflejada.

Existen 3 coeficientes más que podrían tomarse en cuenta siempre y cuando la atenuación no sea nula,  $T_{23}$ ,  $R_{21}$  y  $T_{21}$ , en esta ocasión no fue posible ya que el sólido viscoelástico atenúa demasiado la señal, pero en el caso de los sólidos elásticos si es posible.

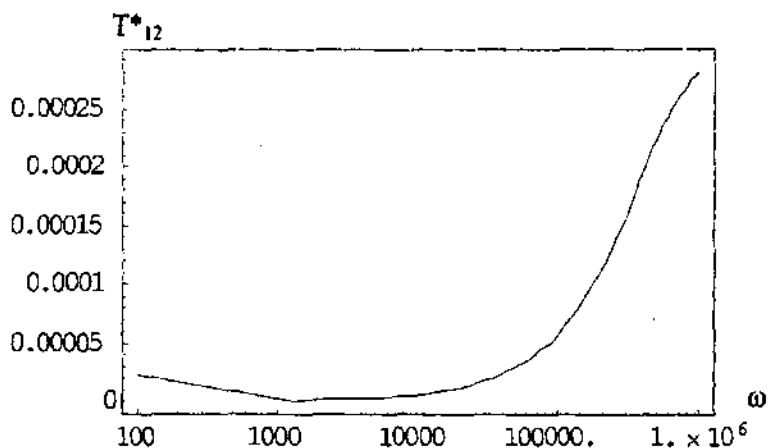
A continuación se presentan las gráficas que muestran el comportamiento de dos materiales a los cuales se les aplicaron las relaciones de los coeficientes de reflexión y transmisión encontradas, tanto para el modelo de Voigt como para el modelo de Maxwell. El análisis fue

hecho para varios materiales, sin embargo, se presentan como ejemplos, las obtenidas para el polietileno a baja densidad y nylon 6.

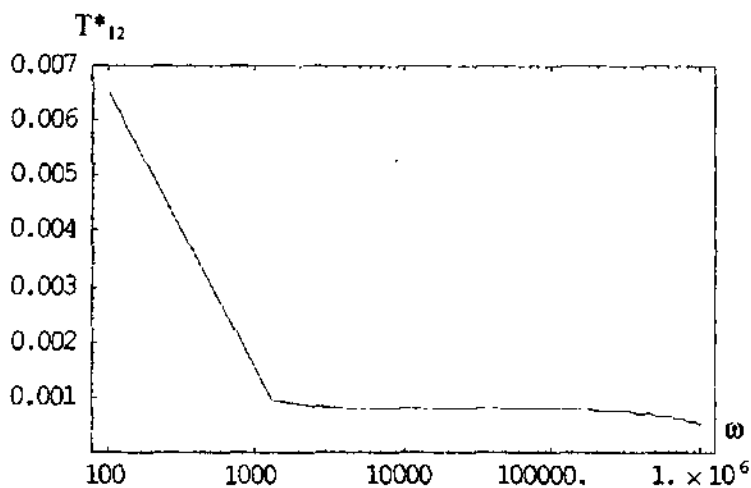
Es necesario especificar que los coeficientes fueron evaluados en frecuencias de 100 Hz hacia arriba ya que sobre todo el modelo de Maxwell no es válido para frecuencias bajas. De hecho la mayoría de los polímeros, ya no presenta ningún valor a 1 o menor a  $-1$  a partir de aproximadamente 1,000 Hz.

Antes de mostrar las gráficas es necesario recordar que el término  $f_1$  (definido en la sección 1.4.2) es el que determina si el modelo empleado en el coeficiente es el de Maxwell o el de Voigt.

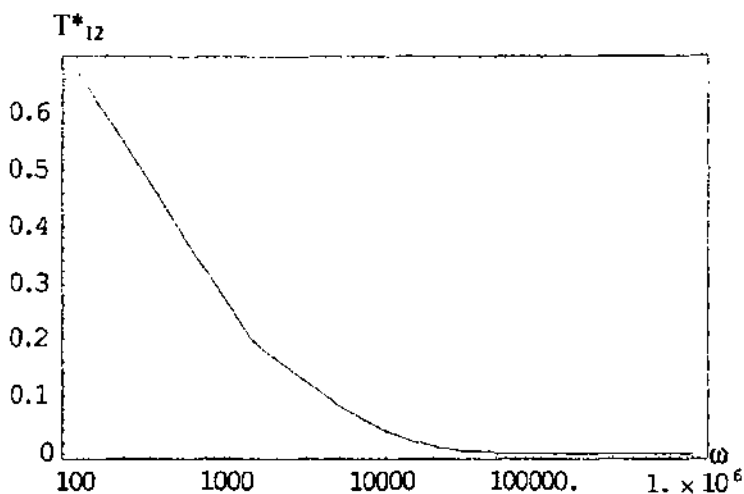
La función  $f_1$  es una función compleja que dependerá solamente de  $\omega$ , ya que todos los demás términos serán previamente especificados, por lo tanto cualquiera de los coeficientes mencionados en las gráficas dependerá de  $\omega$ .



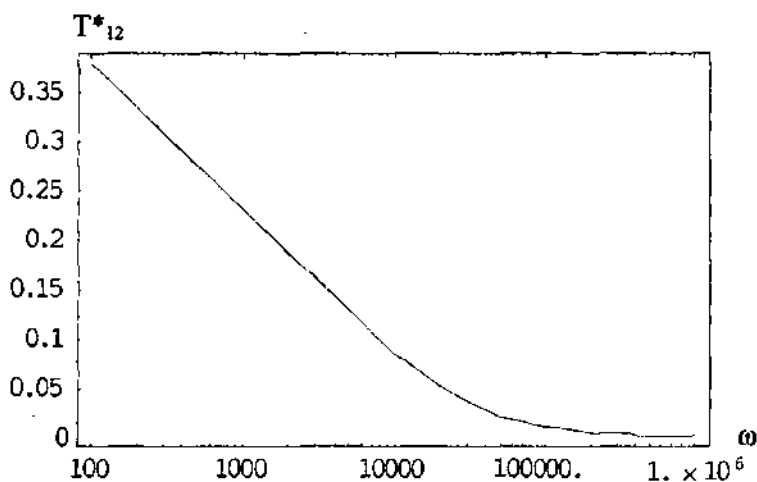
**Grafica 2.3.1**  $Re \{T^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte real del coeficiente de transmisión para el modelo de Voigt en una interfaz aluminio-polietileno(L.D)



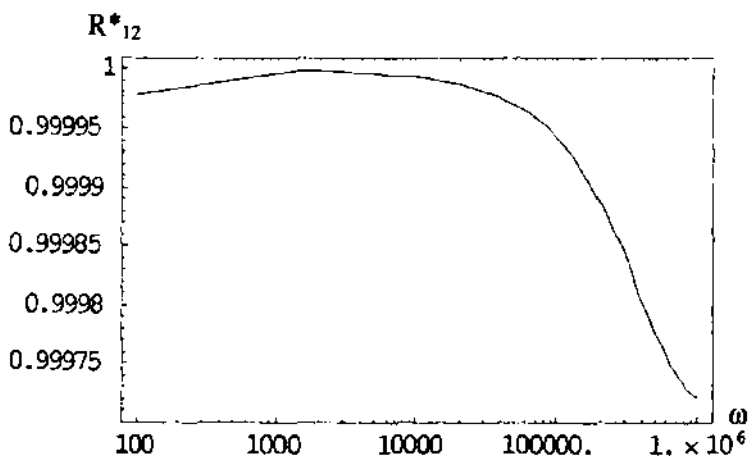
**Grafica 2.3.2**  $Im \{T^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de transmisión para el modelo de Voigt en una interfaz aluminio-polietileno(L.D)



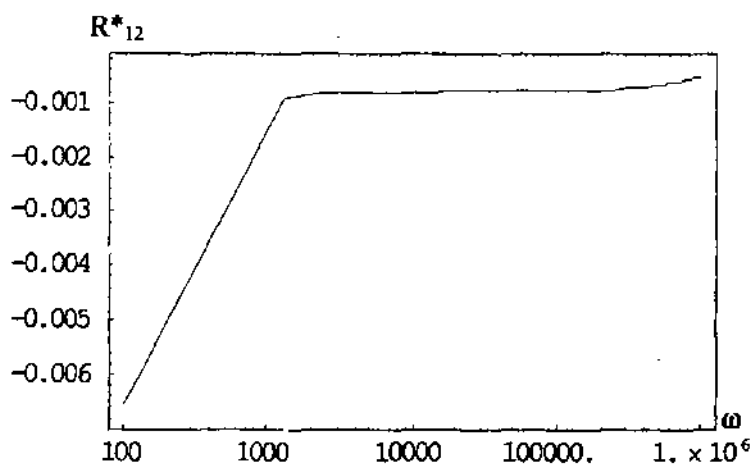
**Gráfica 2.3.3  $Re\{T_{12}^*\}$ .** Comportamiento de la parte real del coeficiente de transmisión para el modelo de Maxwell en una interfaz aluminio-polietileno(L.D)



**Gráfica 2.3.4  $Im\{T_{12}^*\}$ .** Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de transmisión para el modelo de Maxwell en una interfaz aluminio-polietileno(L.D)

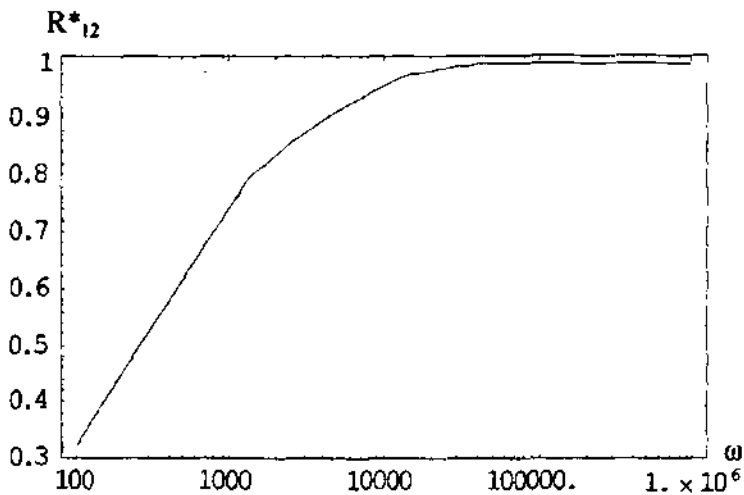


**Grafica 2.3.5**  $Re \{R^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte real del coeficiente de reflexión para el modelo de Voigt en una interfaz aluminio-polietileno(L.D)

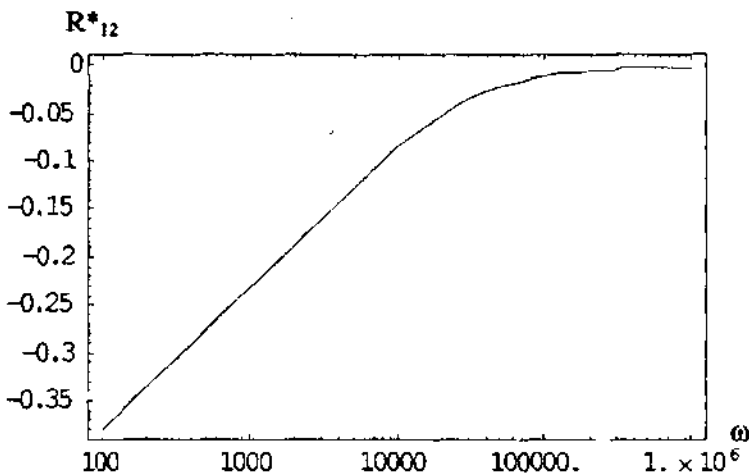


**Grafica 2.3.6**  $Im \{R^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de reflexión para el modelo de Voigt en una interfaz aluminio-polietileno(L.D)

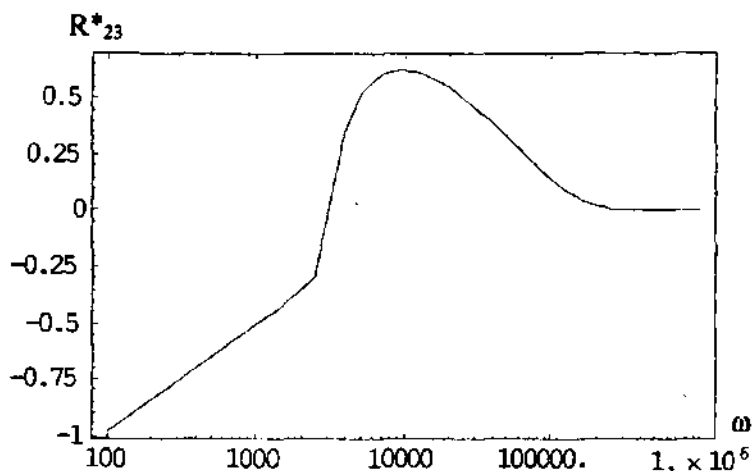




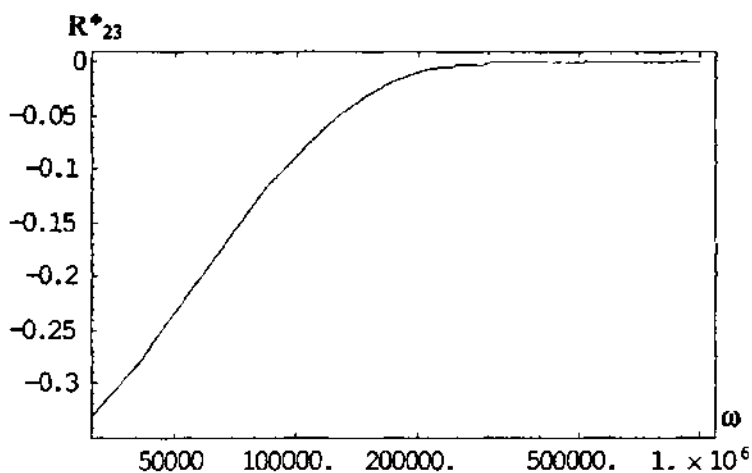
**Grafica 2.3.7  $Re \{R^*_{12}\}$ .** Comportamiento de la parte real del coeficiente de reflexión para el modelo de Maxwell en una interfaz aluminio-polietileno(L,D)



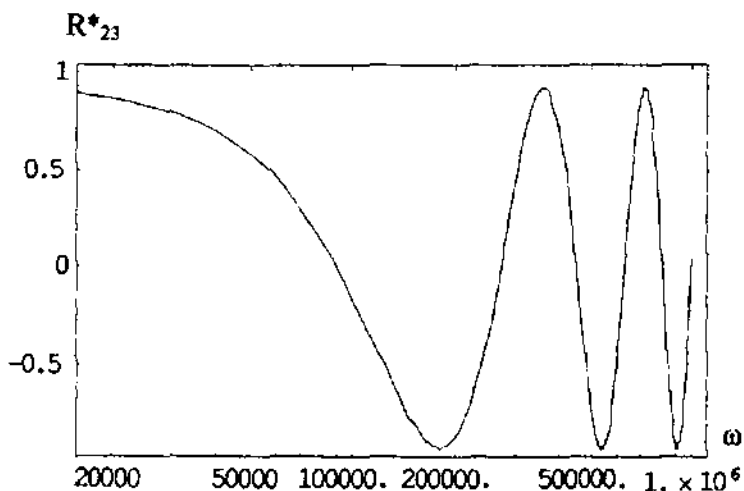
**Grafica 2.3.8  $Im \{R^*_{12}\}$ .** Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de reflexión para el modelo de Maxwell en una interfaz aluminio-polietileno(L,D)



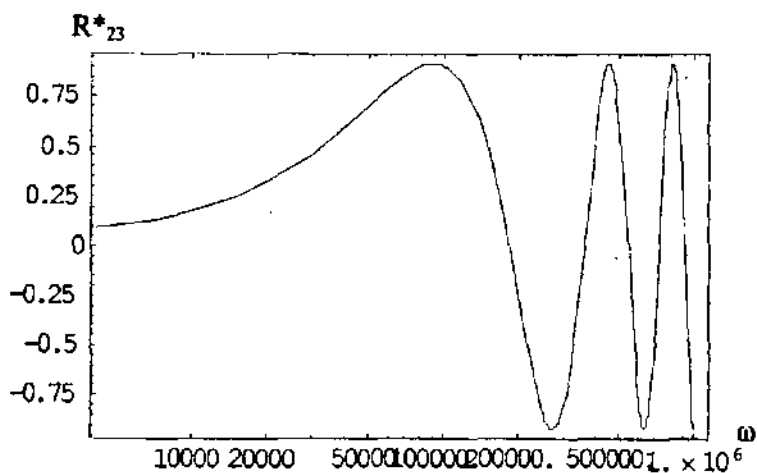
**Grafica 2.3.9  $Re \{R_{23}^*\}$ .** Comportamiento de la parte real del coeficiente de reflexión para el modelo de Voigt en una interfaz polietileno(L.D)-aluminio.



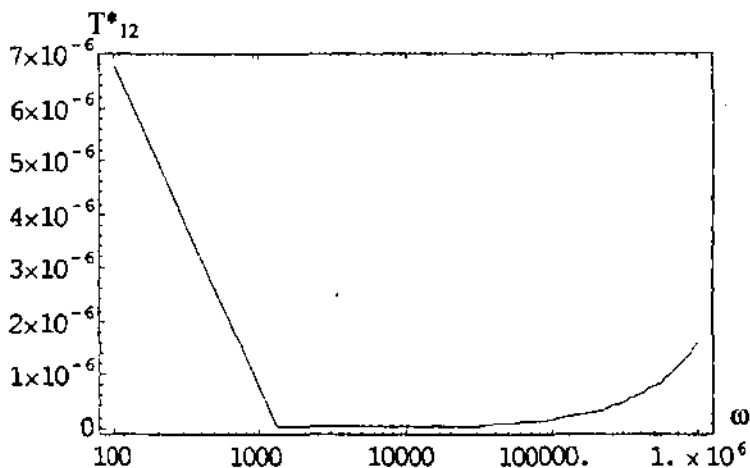
**Grafica 2.3.10  $Im \{R_{23}^*\}$ .** Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de reflexión para el modelo de Voigt en una interfaz polietileno(L.D)-aluminio.



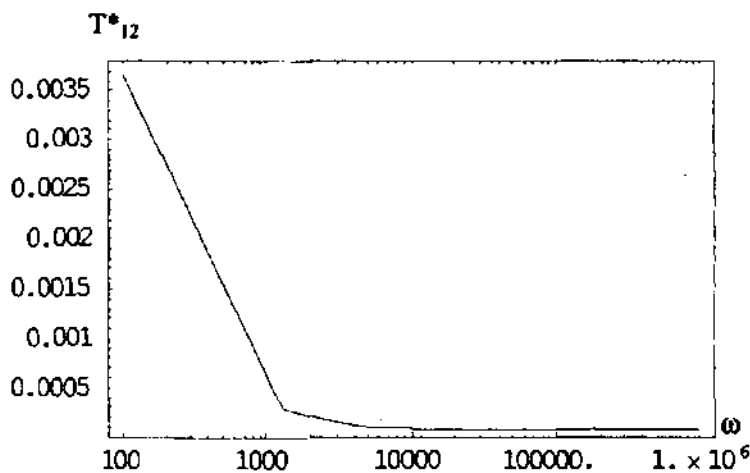
**Grafica 2.3.11**  $Re \{R^*_{23}\}$ . Comportamiento de la parte real del coeficiente de reflexión para el modelo de Maxwell en una interfaz polietileno(L.D)-aluminio.



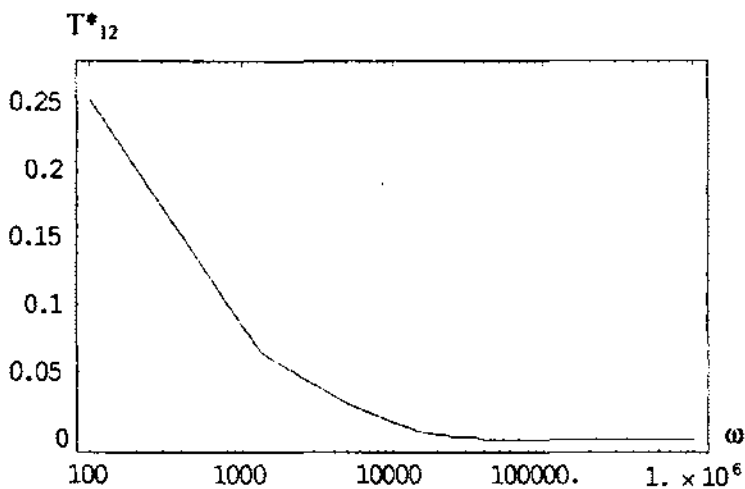
**Grafica 2.3.12**  $Im \{R^*_{23}\}$ . Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de reflexión para el modelo de Maxwell en una interfaz polietileno(L.D)-aluminio.



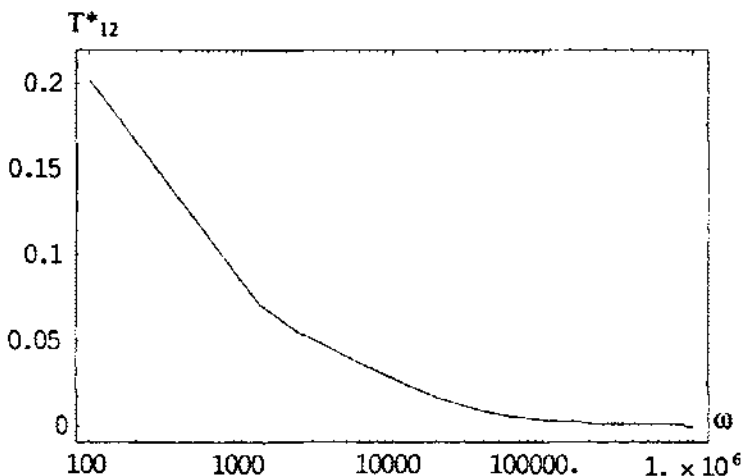
**Grafica 2.3.13**  $Re \{T^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte real del coeficiente de transmisión para el modelo de Voigt en una interfaz aluminio-nylon6.



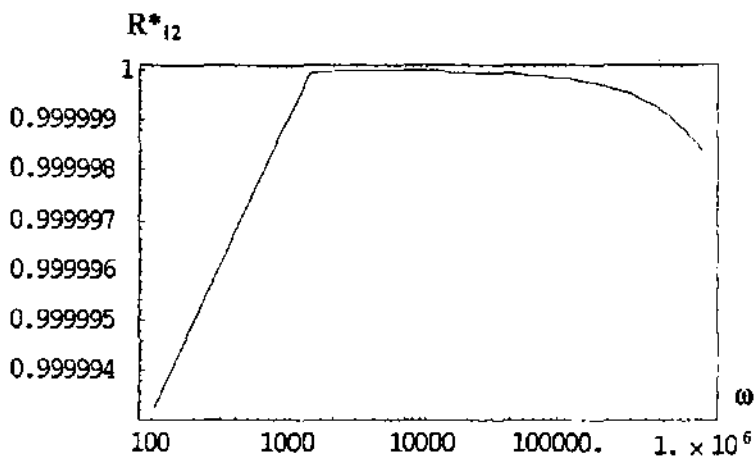
**Grafica 2.3.14**  $Im \{T^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de transmisión para el modelo de Voigt en una interfaz aluminio-nylon6.



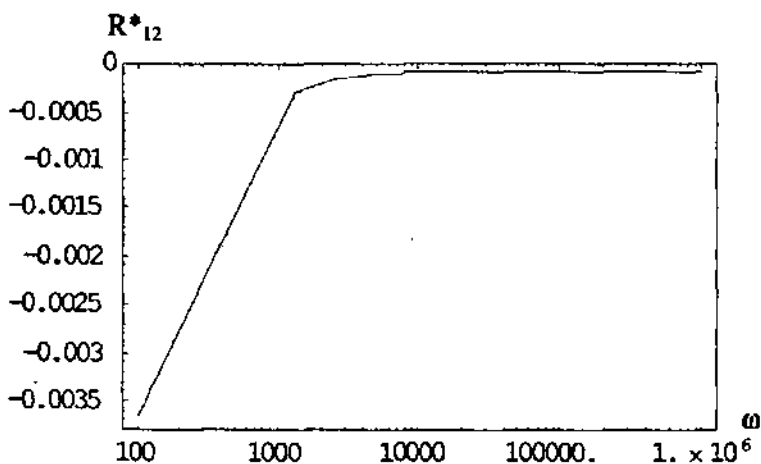
**Grafica 2.3.15  $Re\{T^*_{12}\}$ .** Comportamiento de la parte real del coeficiente de transmisión para el modelo de Maxwell en una interfaz aluminio-nylon6.



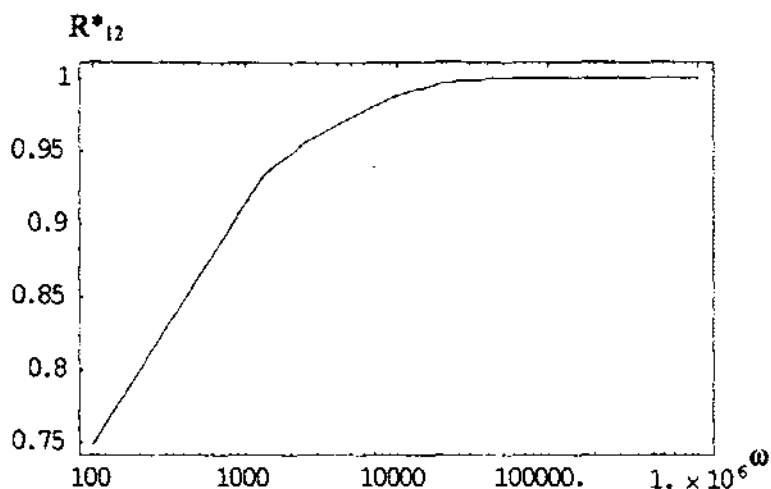
**Grafica 2.3.16  $Im\{T^*_{12}\}$ .** Comportamiento de la parte imaginara del coeficiente de transmisión para el modelo de Maxwell en una interfaz aluminio-nylon6.



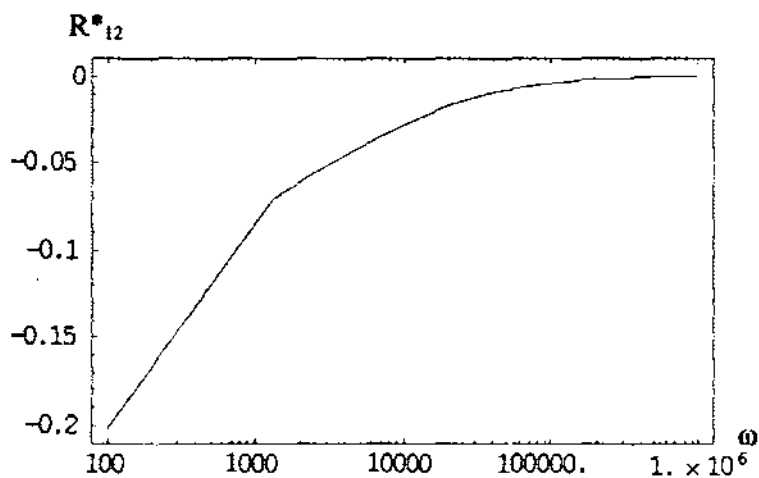
**Grafica 2.3.17**  $Re \{R^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte real del coeficiente de reflexión para el modelo de Voigt en una interfaz aluminio-nylon6.



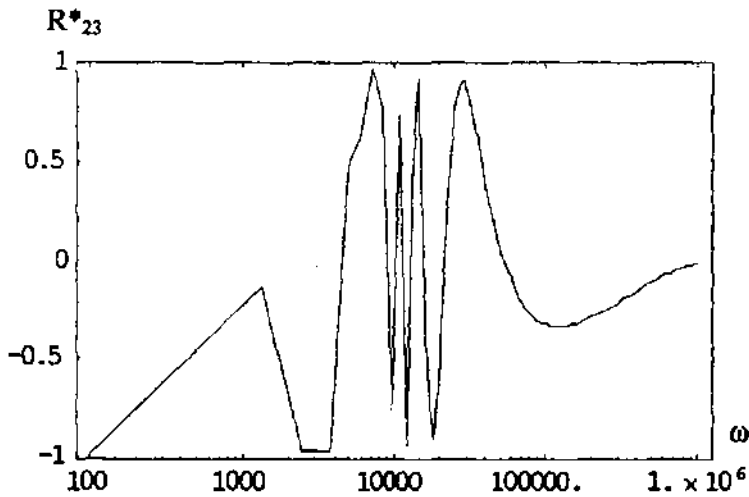
**Grafica 2.3.18**  $Im \{R^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de reflexión para el modelo de Voigt en una interfaz aluminio-nylon6.



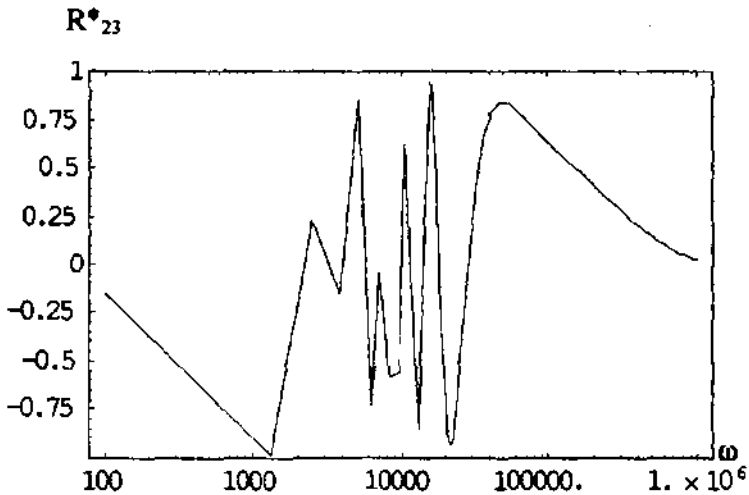
**Grafica 2.3.19**  $Re \{R^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte real del coeficiente de reflexión para el modelo de Maxwell en una interfaz aluminio-nylon6.



**Grafica 2.3.20**  $Im \{R^*_{12}\}$ . Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de reflexión para el modelo de Maxwell en una interfaz aluminio-nylon6.

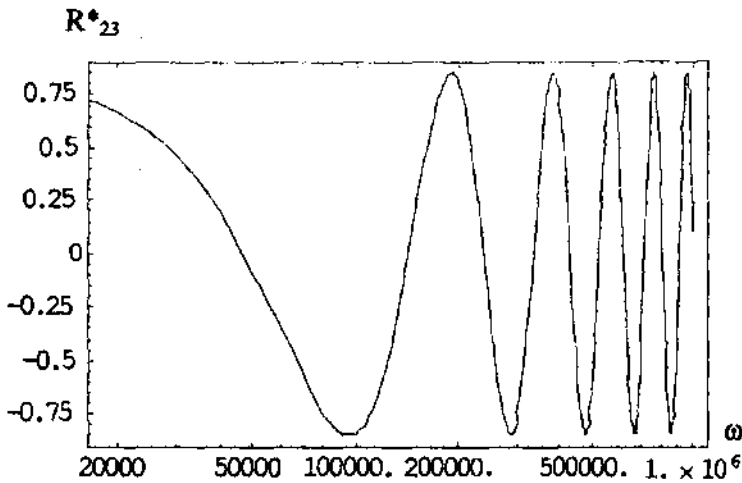


**Grafica 2.3.21**  $Re \{R^*_{23}\}$ . Comportamiento de la parte real del coeficiente de reflexión para el modelo de Voigt en una interfaz nylon6- aluminio

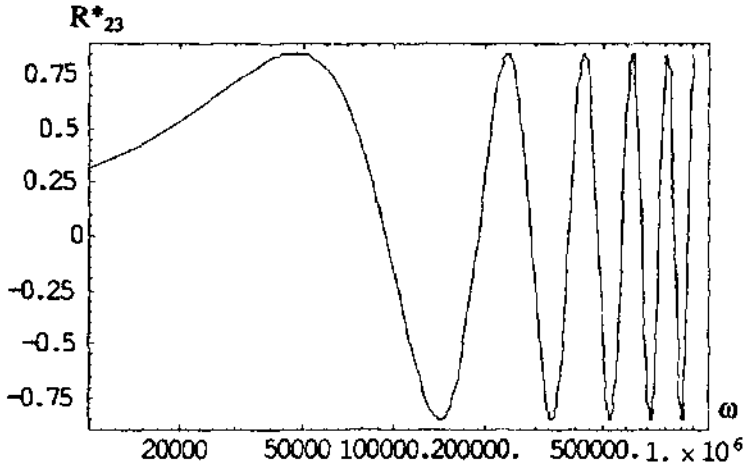


**Grafica 2.3.22**  $Im \{R^*_{23}\}$ . Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de reflexión para el modelo de Voigt en una interfaz nylon6- aluminio





**Grafica 2.3.23  $Re \{R^*_{23}\}$ .** Comportamiento de la parte real del coeficiente de reflexión para el modelo de Maxwell en una interfaz nylon6-aluminio.



**Grafica 2.3.24  $Im \{R^*_{23}\}$ .** Comportamiento de la parte imaginaria del coeficiente de reflexión para el modelo de Maxwell en una interfaz nylon6-aluminio.

Haciendo una discusión general de las gráficas obtenidas se puede decir lo siguiente teniendo en mente que la parte compleja de las gráficas se relaciona con la atenuación de la onda mientras que la parte real se relaciona con la reflexión o transmisión de dicha onda.

#### En el modelo de Voigt:

Se observa que el coeficiente de transmisión  $T^*_{12}$  en ambos materiales en la atenuación (es decir, en su parte imaginaria) presenta atenuación alta a frecuencias bajas, mientras que para frecuencias altas, la atenuación es baja. Mientras que en la transmisión (parte real del coeficiente), para el polietileno se observa un ligero decaimiento en un intervalo de entre 100 Hz y 1,000 Hz aproximadamente y después comienza a aumentar conforme la frecuencia también aumenta. Sin embargo en el Nylon 6 el comportamiento es similar pero la disminución en el intervalo anteriormente mencionado es bastante notable y después de 1,000 Hz comienza a elevarse pero muy lentamente.

Si el sólido viscoelástico (medio 2) atenúa demasiado la señal en la transmisión es porque la mayor parte de la onda se ha reflejado y debido a que lo hace al medio I (material elástico) como no hay casi pérdida de energía la atenuación es mínima. Las gráficas muestran que en dicha reflexión la atenuación a frecuencias bajas va aumentando hasta aproximarse a cero y después se mantiene constante en dicho valor. Sin embargo, al igual que en el coeficiente de transmisión, arriba mencionado, hay algunas diferencias entre ambos materiales en la parte real del

coeficiente de reflexión  $R^*_{12}$ . En el polietileno se observa una ligera elevación entre 100 Hz y 1,000 Hz, después se estabiliza un poco para posteriormente comenzar a disminuir conforme la frecuencia angular aumenta. En el nylon 6 el aumento es muy notable entre 100 Hz y 1,000 Hz, se estabiliza un poco y después desciende conforme la frecuencia aumenta pero no tan rápido como con el polietileno.

En el último de los coeficientes  $R^*_{23}$ , se tiene un comportamiento muy diferente entre ambos materiales. En el polietileno la atenuación aumenta conforme la frecuencia aumenta hasta aproximarse a cero, mientras que en la parte real del coeficiente de reflexión se observa que conforme dicha frecuencia va aumentando hay por ahí un pico, llega aproximadamente a 0.60 y vuelve a disminuir. En el nylon 6 la gráfica presenta muchos picos, lo cual indica que el coeficiente varía demasiado, sin embargo, permanece dentro del intervalo de valores permitido.

#### **En el modelo de Maxwell:**

En el coeficiente  $T^*_{12}$  la transmisión va disminuyendo conforme la frecuencia aumenta pero la atenuación también disminuye.

La reflexión entre los medios 1 y 2 es casi completa, sobre todo para frecuencias altas y claramente se ve en las gráficas que la atenuación tiende a cero conforme dicha frecuencia va aumentando. A frecuencias bajas tal y como se había explicado anteriormente, el modelo se dispara y entonces  $R^*_{12}$  presenta valores que no son ni posibles ni creíbles y esto se debe a que

en dicho modelo la atenuación es inversamente proporcional a la frecuencia angular de oscilación del sistema.

En el coeficiente de reflexión  $R_{23}^*$  ambos materiales presentan un comportamiento muy similar, además de que son claramente senosoidales se desfazan aproximadamente  $180^\circ$ , es decir, cuando la reflexión es máxima la atenuación tiende a ser mínima.

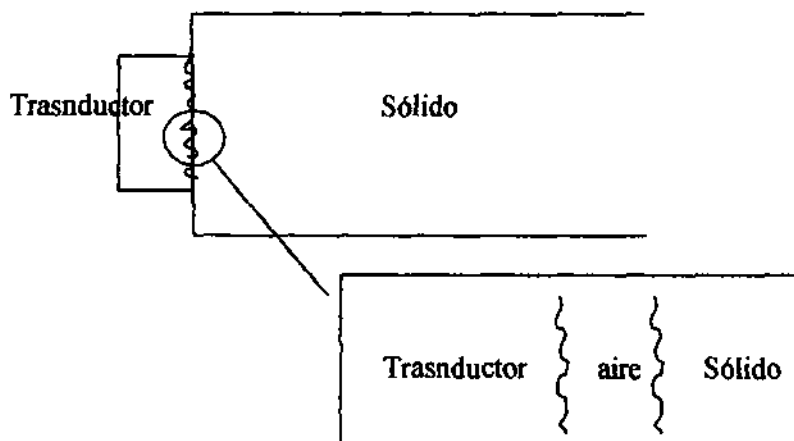
No se puede precisar demasiado respecto a los resultados numéricos que muestran las gráficas ya que ningún algoritmo es exacto ni lo suficientemente preciso. También es necesario mencionar que conseguir  $E$ ,  $\rho$ ,  $\eta$  y  $c$  para materiales viscoelásticos no es nada fácil, además de que en los pocos libros en donde se presentan algunas tablas varían los datos y en algunos de ellos no es tan poca la diferencia.

# CAPITULO 3

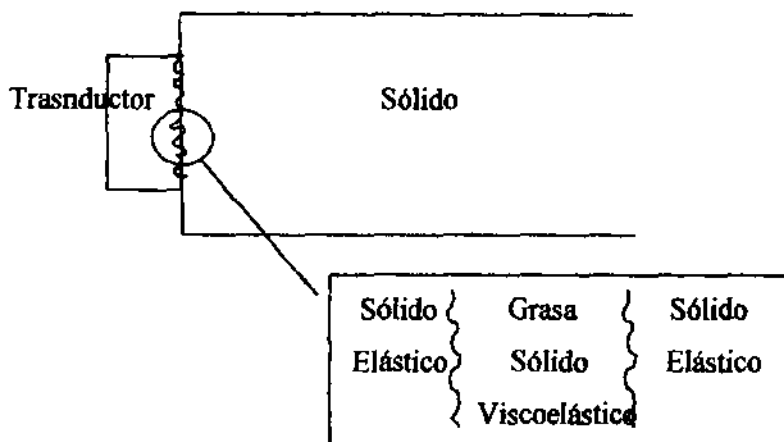
## 3.1 APLICACIONES

Los resultados obtenidos en el capítulo anterior, donde se tienen las expresiones completas de los coeficientes de reflexión y de transmisión sobretodo para la frontera entre un medio elástico y un medio viscoelástico, pueden aplicarse para casos específicos en los cuales tales situaciones son reales.

El primer caso tiene que ver con el acoplamiento de un transductor ultrasónico con un cuerpo sólido en donde debe producir un campo acústico. Si el transductor se coloca sobre un sólido la cantidad de energía acústica que se transfiere al sólido depende de la presión estática que se aplica al transductor, de la cantidad de aire que queda entre las dos superficies y de la rugosidad que cada superficie presenta (ver Fig. 3.1.1). Para evitar tal problema con frecuencia se recurre a "substancias acopladoras" como el aceite de castor, de linaza o grasas de origen vegetal o mineral como la grasa a base de silicio usada en los sellos de los sistemas de vacío (ver Fig. 3.1.2). Este procedimiento da magníficos resultados para acoplar las impedancias y producir una transferencia de la energía acústica, pero no se puede determinar con exactitud la cantidad de energía transferida. Lo anterior es consecuencia de que en general no se conocen los coeficientes de transmisión de las substancias acopladoras.



**Fig. 3.1.1.** *Trasnductor unido a un sólido con aire en medio*

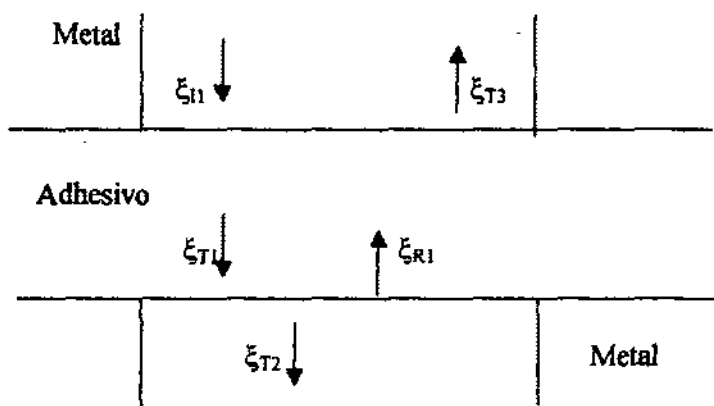


**Fig. 3.1.2** *Trasnductor unido a un solido con grasa en medio*

Sin embargo como se puede observar, los casos anteriormente mencionados, corresponden al de un sistema elástico con una franja

viscoelástica de espesor  $\delta L$  y en consecuencia puede tratarse de acuerdo al formalismo empleado en el caso tres del capítulo anterior.

El segundo caso, se refiere al análisis de propagación de ondas en especímenes compuestos de diferentes materiales elásticos pegados con diferentes adhesivos, que en general tienen un comportamiento viscoelástico (ver Fig. 3.1.3). Dichos materiales con frecuencia deben someterse a pruebas destructivas para investigar la calidad del cementado.

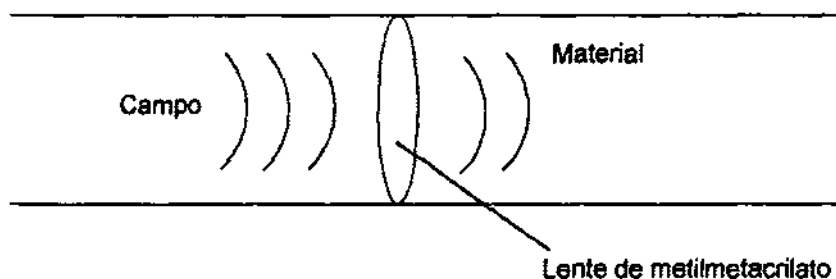


**Fig. 3.1.3.** *Propagación de ondas en especímenes compuestos*

Sin embargo en la actualidad se están realizando investigaciones para obtener una serie de pruebas con ultrasonido, ya sea con onda continua o con técnicas de pulso-eco con la intención de evaluar de forma no destructiva la calidad del material compuesto. Tales pruebas no son concluyentes por no considerar en las señales la cantidad de energía que se transmite o se refleja. Si se puede avanzar en las técnicas de pruebas no

destructivas con ultrasonido de forma que los resultados permitan garantizar la calidad del proceso de cementado comparando los patrones de reflexión o de transmisión de las ondas de los sistemas con buena adhesión con los que tienen un cementado defectuoso, las técnicas de prueba destructivas no serán ya necesarias. Por otro lado, la descripción completa de las ondas reflejadas, incluyendo su espectro de energía serán útiles en otros procesos de detección de fallas.

El tercer caso que puede tener mejoras con un adecuado conocimiento de los coeficientes de reflexión y de transmisión es el diseño de lentes acústicas para lograr un adecuado enfoque de los campos de esfuerzos en este caso, los materiales que normalmente se emplean para el diseño de tales dispositivos son plásticos (con frecuencia el metilmetacrilato, un derivado del ácido acrílico) que tienen buenas propiedades para la propagación de ondas mecánicas, pero que sin embargo presenta un comportamiento viscoelástico apreciable para ciertas frecuencias (ver Fig. 3.1.4).



**Fig. 3.1.4.** Campos de esfuerzo atravesando una lente



Los procesos de refracción en dichos materiales pueden describirse mejor si se introduce en ellos el factor correspondiente  $f_1$  que aparece en el tratamiento de interfaces viscoelásticas.

### 3.2 CONCLUSIONES:

1. Validez del modelo de Maxwell: Después de haber graficado varios materiales (de los cuales no se mostraron las gráficas porque con dos materiales es suficiente) se observó que el modelo no es válido para frecuencias bajas, de hecho para algunos materiales es válido a partir de 100 Hz., mientras que para otros, los resultados son creíbles a partir de 1,000 Hz.

El coeficiente de transmisión entre los medios 1 y 2 aumenta conforme la frecuencia aumenta tanto en su parte real como en su parte imaginaria (la cual no se debe de olvidar que está estrechamente relacionada con la atenuación de la onda).

En el coeficiente de reflexión  $R^*_{12}$ , la parte real aumenta conforme la frecuencia aumenta pero en la parte imaginaria se observó un comportamiento completamente contrario al de la real, es decir, para frecuencias altas la atenuación disminuye.

El coeficiente de reflexión  $R^*_{23}$  presenta un comportamiento senoidal tanto en la parte real como en la parte imaginaria, pero con un desfase de aproximadamente  $180^\circ$ .

2. Validez del modelo de Voigt: Generalizando este modelo, sin precisar demasiado en las gráficas mostradas en la sección anteriores puede concluir lo siguiente:

El coeficiente de transmisión  $T_{12}^*$  comienza a aumentar en su parte real a partir de una frecuencia de 1,000 Hz aproximadamente, mientras que en su parte imaginaria, el comportamiento es inverso, es decir, a mayor frecuencia menor atenuación.

Para el coeficiente de reflexión  $R_{12}^*$ , en la parte real dicha reflexión es casi completa, aunque para frecuencias mayores a 10,000 Hz se comienza a observar un ligero decaimiento. En la parte imaginaria para valores menores a 1,000 Hz, la atenuación aumenta y después se mantiene constante en un valor próximo a cero.

El más difícil de generalizar es el coeficiente de reflexión entre los medios 2 y 3 (sólido viscoelástico-sólido elástico), es decir,  $R_{23}^*$ , ya que para cada material empleado es diferente, en algunos no completamente, pero en otros sí, debido a esto se puede concluir que este coeficiente depende mucho del material con el que se esté tabajando.

3. Impedancia acústica para un sólido viscoelástico: después de haber desarrollado las ecuaciones correspondientes para la propagación de las ondas de esfuerzo en un sólido viscoelástico, se llegó a la conclusión de que la impedancia acústica correspondiente es compleja ( $z = f_1 \rho_2 c$ ) y depende de una  $f_1$  que a su vez depende de las condiciones con las que se

esté trabajando es decir, queda determinada por el modelo que se esté empleando, además de que también involucra a la densidad del medio y a la velocidad de la onda.

Puede entenderse que la parte real de la impedancia, está asociada al efecto disipativo del medio, en tanto que la parte imaginaria, tiene que ver con el efecto reactivo del medio, esto es, el almacenamiento de energía debido al tiempo de relajamiento.

4. Coeficiente de reflexión en la frontera viscoelástica: se comprobó que la reflexión entre los medios 1 y 2 es casi completa, lo que indica que la franja viscoelástica actúa como si fuera una pared muy rígida que impide la mayor parte de la transmisión de cualquier onda que incida sobre ella. El coeficiente de reflexión  $R_{23}^*$ , en cuanto al modelo de Maxwell se refiere, el comportamiento resultó ser muy general, sin embargo, el modelo de Voigt resultó muy inestable.

Sin embargo, para ambos modelos y para ambos coeficientes de reflexión, la onda reflejada se desfasa de la incidente.

5. La presencia de una expresión compleja implica una disipación de energía: la presencia del término complejo en cualquier coeficiente, ya sea de reflexión o de transmisión, implica que existe una pérdida de energía por parte de la onda que se está propagando, sin embargo, ésta puede ir decreciendo poco a poco o drásticamente en forma exponencial (según muestran las gráficas del capítulo anterior).

6. Por último se concluye que el modelo de Maxwell fue mucho más estable que el modelo de Voigt, para el análisis hecho en este trabajo, pero el modelo de Voigt no tuvo tantos problemas para las frecuencias bajas como el modelo de Maxwell. Por lo tanto, ambos modelos tienen sus ventajas y sus desventajas, así que ninguno de ellos es mal modelo.

### **3.3 SUGERENCIAS PARA CONTINUAR CON LA INVESTIGACIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS DE ESFUERZO EN FRONTERAS ELÁSTICAS - VISCOELÁSTICAS**

1. Es necesario en un futuro trabajo considerar la incidencia oblicua de las ondas en la frontera de los dos medios. Se sabe que la energía que se transmite al segundo medio depende del ángulo de incidencia. En el presente trabajo, esta situación no se consideró.

2. De igual forma es necesario pensar en la generación de ondas transversales que se producen durante la reflexión y la refracción y que si se conoce la descripción completa de este proceso y se determinan analíticamente los coeficientes respectivos para casos similares a los tratados en esta tesis, se puede emplear una técnica de ondas transversales para completar la caracterización de pruebas no destructivas.

3. Hasta ahora solo se han considerado los casos isótropos y homogéneos, pero en el futuro es posible que se puedan hacer descripciones analíticas para sólidos inhomogéneos en los cuales las constantes elásticas varíen por ejemplo, de acuerdo a una función lineal de la posición o bien con perfiles de carácter parabólico o exponencial.

4. Es clara la necesidad de contrastar estos resultados teóricos con datos experimentales, razón por la cual se sugiere que antes de continuar con la parte teórica, o tal vez, simultáneamente con esta, se empiecen a realizar experimentos controlados que permitan verificar los intervalos de validez, para los desarrollos presentados aquí.

## BIBLIOGRAFIA

- Alonso y Finn, Campos y ondas, Vol. II, Ed. SITESA, primera edición, 1985, México D.F.
- Andrew N. Norris, J.A.S.A., Vol. 94, No. 1  
Pág. 359, 1993.
- Charles A. y Charles E., J.A.S.A., Vol. 91, No. 2,  
Pág. 696, 1992.
- Charles A. y Charles E., J.A.S.A., Vol. 91, No. 2,  
Pág. 704, 1992.
- C. Yu, Maynard, Mckenna y White, J.A.S.A., Vol. 91, No. 2,  
Pág. 868, 1992.
- Dense Nicoletti, Nihat y Banu, J.A.S.A., Vol. 91, No. 6,  
Pág. 3278, 1992.
- Denis G. Zill, Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones,  
Ed. Iberoamérica, segunda edición, 1988, México D.F.
- Martín Ochmann y Sergey Makarov, J.A.S.A., Vol. 94, No. 6  
Pág. 3392, 1993..
- Michael T. y Murli H., J.A.S.A., Vol. 89, No. 6,  
Pág. 2689, 1991.
- M. I. Kham, T. Sun y G. J., J.A.S.A., Vol. 93, No. 3  
Pág. 1417, 1993.
- Peter M., W. Scott y C. Fehler, J.A.S.A., Vol. 91, No. 6  
Pág. 3291, 1992.

- Quang Huy Tran, Jannaud y Adler, J.A.S.A., Vol. 94, No. 4  
Pág. 2397, 1993.
- Stephen L. y Richard H., *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de valor a la Frontera*, Ed. Mc Graw Hill, primera edición, 1997, México D.F.
- Kinsler, *Fundamentos de acústica*, Ed. Limusa  
Cuarta reimpresión, 1995, México D.F.
- Koslky, H, *Stress Waves in Solids*, Ed. Dover Publications Inc,  
Primer edición, 1963, New York.
- Y. C. Angel y J. D. Achenbach, J.A.S.A, Vol. 90, No. 5  
Pág. 2757, 1991.
- Vinay Dayal, J.A.S.A., Vol. 93, No. 3  
Pág. 1249, 1993