

12



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ACATLAN

ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS PUNTOS SINGULARES



T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE: LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION PRESENTA: OSCAR ALEJANDRO ESQUIVEL FLORES

282609

ASESOR: DRA. ANA MARGARITA GUZMAN GOMEZ



STA. CRUZ ACATLAN, EDO. DE MEXICO

ABRIL, 2001



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A su maternal forma de enseñar este magnífico oficio.*

*Y también a todos aquellos que esperan vivir con  
democracia, libertad y justicia...*

Introducción .....	III
Capítulo I: Ecuaciones diferenciales ordinarias .....	1
1. Antecedentes .....	2
2. Caída libre .....	4
2.1. Análisis cualitativo .....	7
3. Crecimiento exponencial .....	10
3.1. Soluciones constantes .....	14
3.2. Campos direccionales .....	15
3.3. Validez del método de separación de variables .....	17
4. Crecimiento logístico .....	18
4.1. Análisis cualitativo .....	19
4.2. Traslaciones horizontales .....	20
5. Predador-presa .....	23
5.1. Análisis cualitativo .....	24
6. Flujo en tanques .....	29
6.1. Análisis de soluciones .....	35
6.2. Principios de unicidad .....	37
7. Curvas ortogonales .....	39
Capítulo II: Energía y movimiento .....	45
1. Trabajo y energía .....	47
1.1. Trabajo .....	47
1.2. Energía cinética .....	48
1.3. Fuerzas conservativas .....	50
1.4. Energía potencial .....	51
1.5. Curvas de energía constante .....	52
1.6. Soluciones de ecuaciones diferenciales que involucran energía .....	54
2. El resorte .....	56
2.1. Descripción del movimiento .....	57
2.2. Análisis de soluciones .....	59
3. El péndulo simple .....	65
3.1. Análisis de soluciones .....	69

Capítulo III: Unicidad de soluciones .....	78
1. Introducción .....	79
2. Teorema de existencia y unicidad de Cauchy .....	82
2.1. Región rectangular .....	84
2.2. Región de definición .....	88
2.3. Condiciones suficientes .....	89
3. Condiciones de Lipschitz y unicidad .....	93
3.1. Condiciones de Lipschitz .....	93
3.2. Funciones Lipschitz continuas .....	94
4. Teorema de existencia y unicidad de Lipschitz .....	99
4.1. Aplicación del teorema de Lipschitz .....	99
4.2. Carácter de las hipótesis del teorema .....	102
5. Ecuaciones diferenciales autónomas particulares .....	104
5.1. Soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma $x' = f_a(x)$ .....	109
5.2. Hipótesis de unicidad .....	111
6. Un criterio completo .....	114
7. Aplicación del criterio de convergencia .....	120
 Conclusiones .....	 124
 Apéndice .....	 127
 Bibliografía .....	 139

Por momentos me pongo a cavilar sobre lo complicado que resulta el oficio de matemático en estos tiempos. Esta reflexión varía según el principio que la motive.

Algunas veces pareciera que este oficio es clandestino, pues rara vez se escucha una conversación en la que se incluyan variables, ecuaciones, teoremas, corolarios, hipótesis; otras ocasiones percibo un ligero menosprecio a quien invierte su concentración en esos "símbolos raros"... Entonces, ¿cómo es que subsiste esta noble actividad? Sobrevive, ya sea en las universidades o en el clandestinaje.

También he llegado a creer que sólo algunas mentes con habilidades especiales pueden lograr la disciplina necesaria para abstraer y razonar de la forma en que la matemática lo requiere.

Sin embargo, más allá de estas concepciones irónicas, es pertinente decir que el estudio de las matemáticas ha sido sustituido por actividades prácticas e inmediatas, en el mejor de los casos, mercantilistas en otros. Menciónese cualquiera.

Todo lo anterior me sirve de argumento para suponer que el oficio de matemático resulta complicado; sin embargo, ser y saberse matemático implica un ejercicio permanente de conciencia. Y esta conciencia es la que me induce a hablar(escribir) acerca de este bello lenguaje con que fue escrita la Naturaleza.

Intento exponer en este trabajo algunas herramientas y conceptos que sirven para comprender temas como solución de una ecuación diferencial ordinaria, puntos singulares y unicidad.

El trabajo se dividirá en tres partes. En la primera se revisarán los fundamentos sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias, se expondrá un conjunto de fenómenos físicos y biológicos que será el punto de partida para abordar los conceptos de solución, puntos singulares, soluciones constantes, curvas integrales, campos direccionales; poniendo el debido cuidado en la interpretación de las soluciones.

En la segunda parte, se discuten las propiedades del movimiento que describen el resorte y el péndulo. Se estudia la ecuación diferencial propia de cada fenómeno y se detalla la forma y características de sus soluciones, utilizando como instrumento principal la energía. Este capítulo motivará la revisión de los teoremas relativos a la existencia y unicidad de soluciones.

En la tercera y última parte se enunciarán dos teoremas que delimitan la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria, enfocándose el análisis en lo correspondiente a unicidad.

Se revisan las características de las condiciones que estos teoremas demandan y se verifica el rango de ecuaciones para las cuales son aplicables. Se expone una familia particular de ecuaciones diferenciales autónomas y sus correspondientes soluciones. Finalmente, se enuncia y demuestra el criterio de convergencia para determinar la unicidad de soluciones de una ecuación diferencial autónoma, criterio suficiente y necesario.

No obstante que este trabajo puede ser calificado de clandestino o bien reposar en cavilaciones amorfas, deseo que sea un motivo que sirva para demostrar formalmente que este oficio, el de matemático, es sabio y que su complejidad dependerá del cariño que se le tenga y de la pasión que nos inspire.

---

# **CAPÍTULO I**

Ecuaciones diferenciales  
ordinarias

# Capítulo I

## Ecuaciones diferenciales ordinarias

### 1. Antecedentes

La filosofía escolástica, prevaeciente en el siglo XVI en Europa, edificaba los principios del pensamiento popular y lo conducía a utilizar ideas inamovibles como única explicación de la existencia humana y de todo aquello que se suscitara a su alrededor. Suponer algún principio diferente a los establecidos constituía una falta gravemente penada y los mecanismos para restablecer el orden de ideas eran reconocidos como no gratos. Sin embargo, este dogmatismo oscurantista presentaba incómodas inconsistencias al tratar de ofrecer una explicación de las causas que motivaban varios fenómenos cotidianos.

Descripciones de movimientos tales como el de una fecha que sale de un arco o la trayectoria de un cuerpo que cae requerían de un análisis cuidadoso, reflexivo y sistemático; actitudes que lentamente fueron motivando a los estudiosos de esa época a desprenderse de los antiguos patrones de pensamiento. Se gestó de esta forma una sólida evolución del conocimiento, una revolución científica que ofrecía los argumentos esenciales para comprender el mundo de los fenómenos naturales.

El sistema de pensamiento aristotélico se pondría en entredicho cuando observaciones meticulosas, apoyadas en experimentaciones sucesivas, contradecían los principios que habían prevalecido durante más de quince siglos. *Galileo Galilei*, quien sistematizó los acontecimientos mecánicos cotidianos, engrandeció la nueva visión del universo de los fenómenos físicos y eliminó finalmente la idea aristotélica según la cual todos los cuerpos pesados tenían un movimiento “natural” y requerían una fuerza que los mantuviera; esta revolución en la perspectiva e interpretación de la naturaleza sería la puerta de la “ciencia moderna”<sup>1</sup>.

Con este nuevo panorama de ideas cambiantes avanzaron los siglos XVI y XVII, apareciendo en 1686 la obra magistral de la creación intelectual realizada

---

<sup>1</sup>James R. Newman. “SIGMA, el mundo de las matemáticas”, pp. 2-5. [20]

por Sir Isaac Newton. Para describir el movimiento y la posición de los cuerpos celestes, Newton ideó el cálculo infinitesimal y a la edad de veinticuatro años ya había conceptualizado la Ley de gravitación universal. Newton repelía la idea según la cual la luna y los planetas recorrían su órbita en el “éter”, sustancia invisible, impalpable e indemostrable.

El sistema que desarrolló Newton, complementado con el de Gottfried W. Leibniz y las brillantes aportaciones de la familia Bernoulli a las matemáticas de los siglos XVII y XVIII, dieron origen a una nueva teoría matemática: La teoría de las “ecuaciones diferenciales ordinarias”. Con esta herramienta se logró justificar la naturaleza fundamental de los fenómenos físicos, disipando cualquier otra idea que no estuviera soportada por la observación y experimentación sistematizada.

La matemática tuvo un desarrollo importante en los siglos XIX y XX hasta nuestro tiempo, donde los principios básicos siguen dando soporte a la estructura conceptual de la física. Un elemento que enriquece la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias es el uso de principios cualitativos que ayudan a profundizar en la concepción de los fenómenos que se modelan. Así, es una tarea obligada dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué representa una ecuación diferencial?
- ¿Qué elementos la constituyen y qué significado adquieren cada uno de ellos?
- ¿Qué son y qué características se observan en sus soluciones?
- ¿Cómo se comportan cualitativamente estas soluciones?

La respuesta adecuada a estas preguntas, junto con diversas consideraciones geométricas constituyen el estudio *cualitativo* de las ecuaciones diferenciales y nos permiten obtener una interpretación completa y concreta sobre distintos procesos evolutivos.

A continuación estudiaremos algunos fenómenos físicos, biológicos y geométricos con los que se ejemplificará el valor del análisis cualitativo de la ecuaciones diferenciales ordinarias, expodremos los conceptos de solución y el de ecuación diferencial autónoma.

## 2. Caída libre

A principios del siglo XVII Galileo Galilei expresó la importancia del concepto “aceleración” en la dinámica, entendiéndola como el cambio de velocidad en magnitud o dirección. Este concepto aparece cuando Galileo da a conocer la ley de caída de los cuerpos, donde “un cuerpo que cae se mueve con aceleración constante excepto por la resistencia impuesta por el aire”.

Al principio de su estudio Galileo consideró que la velocidad de caída de los cuerpos era proporcional a la distancia recorrida en la caída, lo cual no le fue satisfactorio, modificando su apreciación para enunciar que la velocidad era proporcional al tiempo de caída<sup>2</sup>.

Los experimentos realizados por Galileo mostraron que el origen del movimiento de los cuerpos que caen se debe a la gravedad, de tal forma que la aceleración de un cuerpo en caída está influenciado por la fuerza de gravedad cuando el movimiento es cercano a la superficie terrestre. En seguida mostraremos las propiedades de este fenómeno y estudiaremos las ecuaciones diferenciales que lo describen:

Supongamos que el cuerpo o partícula comienza su movimiento desde un punto de referencia inicial  $x_0$  y se desplaza hasta cualquier otra posición  $x$  en un lapso de tiempo  $t$ . Utilicemos un sistema de referencia a lo largo del eje vertical que denotaremos como el eje  $X$ , donde el sentido positivo es hacia abajo. Tomando como origen el punto donde comienza a caer la partícula, podemos describir el movimiento de caída libre por medio de la ecuación:

$$a = g$$

donde  $a$  es la aceleración y  $g$  es la gravedad. Esta igualdad puede escribirse como:

$$\frac{dv}{dt} = g \quad (2.1)$$

y resolverse por medio del teorema fundamental del calculo, obteniendo:

$$v = gt + c_1 \quad (2.2)$$

<sup>2</sup>Galileo Galilei. “*Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*”, p. 362. [13]

Para cada valor de  $c_1$ , la velocidad de la partícula que cae estará determinada por una función de la forma:

$$\psi_{c_1}(t) = gt + c_1 \quad (2.3)$$

Por otra parte, la ecuación 2.2 también puede expresarse como una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = gt + c_1 \quad (2.4)$$

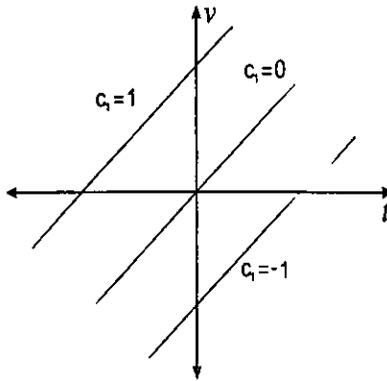
resolviendo se sigue que:

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2 \quad (2.5)$$

La posición de la partícula puede obtenerse por medio de la función:

$$\varphi_{c_1, c_2}(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$$

Con base en lo anterior podemos decir que el movimiento de un cuerpo que cae está determinado por su velocidad y posición inicial, reflejadas en los valores de  $c_1$  y  $c_2$  respectivamente<sup>3</sup>. Consideremos la función 2.3, la cual llamaremos *solución* de la ecuación diferencial ordinaria 2.1, y dibujemos su gráfica proporcionando diferentes valores para  $c_1$ :

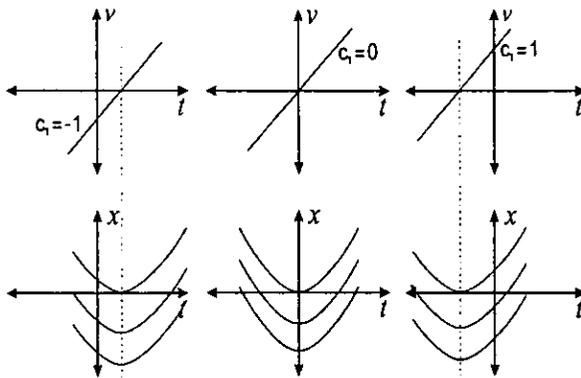


<sup>3</sup>Aunque para este caso fue posible encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales planteadas, no siempre es posible hallar una función explícita de éstas.

el resultado es una familia de curvas con parámetro  $c_1$ .

Reflexionando sobre este comportamiento podemos decir que la velocidad, independientemente de su valor inicial, aumentará de manera constante mientras el tiempo transcurre; además, para cada valor que tome  $c_1$  existirá una ecuación diferencial para la ecuación 2.4.

Si definimos sólo un valor de  $c_1$  (la velocidad inicial que lleva la partícula en el instante  $t_0$ ), la ecuación 2.5 satisface entonces la igualdad 2.4, y al graficarla resulta un conjunto de curvas con parámetro  $c_2$ , es decir, las gráficas de las soluciones de 2.4.



Los valores con los cuales comienza el movimiento los nombraremos *condiciones iniciales* de la ecuación diferencial.

Algunas consideraciones importantes sobre este fenómeno son las siguientes:

Cuando el valor inicial de la velocidad es cero ( $c_1 = 0$ ), la partícula partirá del reposo y se alejará del punto inicial en el momento que inicie el movimiento. Por otro lado, cuando la partícula en el primer instante de la medición se encuentra acelerada ( $c_1 > 0$ ), el movimiento ya ha iniciado y la posición del cuerpo se ha alejado de su punto inicial. Finalmente, cuando el valor de la velocidad es negativo ( $c_1 < 0$ ) en el primer instante de tiempo, se interpreta que la aceleración de la partícula está disminuyendo para llegar a un instante  $t$  en el que llegará al reposo ( $x = 0$ ), punto en el cual comenzará el movimiento de caída; esto puede ejemplificarse mejor al observar la trayectoria de un proyectil que se lanza al cielo: En el momento de ser lanzado tiene una velocidad inicial de salida, durante la trayectoria el proyectil va desacelerando hasta llegar al punto máximo de altura

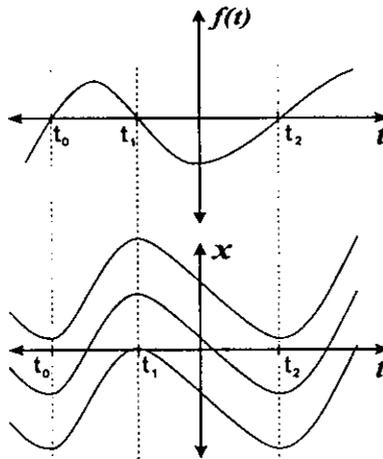
en donde la velocidad es cero, inmediatamente inicia su movimiento de caída libre, aumentando con ello su velocidad.

### 2.1. Análisis cualitativo

El segundo miembro de la ecuación 2.4 es una función sólo de la variable independiente  $t$  y puede generalizarse de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \quad (2.6)$$

La función  $f(t)$  representa el cambio de la variable dependiente  $x$  respecto a la variable independiente  $t$  y expresa el valor de la pendiente de una curva (o familia de curvas<sup>4</sup>) en un punto determinado. Al resolver una ecuación diferencial como la ecuación 2.6 encontramos una familia de curvas cuya peculiaridad se basa en que cada una es la traslación vertical de las demás:

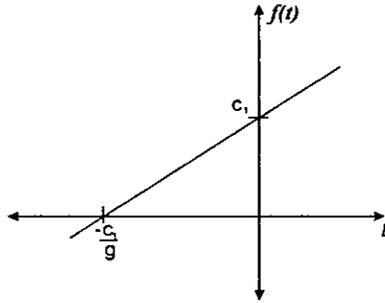


Esto corresponde al hecho de que todas las antiderivadas de  $f(t)$  son de la forma:

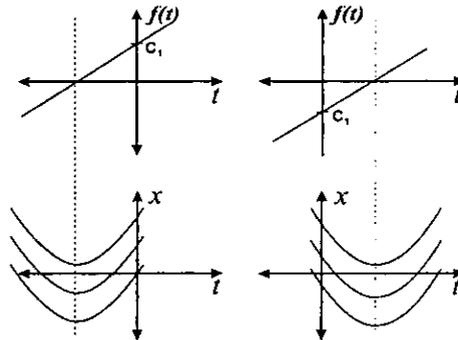
$$x = \varphi(t) + k$$

<sup>4</sup>Estas curvas son las gráficas de las funciones explícitas que obtuvimos y llamamos soluciones.

Para el ejemplo de la caída libre, la gráfica de  $f(t) = gt + c_1$  proporciona información suficiente para determinar las características cualitativas de las gráficas de las soluciones:



- Para cualquier  $t$  contenida en el intervalo  $\left(-\infty, -\frac{c_1}{g}\right)$  el valor de  $\frac{dx}{dt} = f(t)$  es menor que cero, por lo tanto la gráfica de la solución  $x = \varphi(t)$  será decreciente para ese intervalo.
- Para cualquier  $t$  contenida en  $\left(-\frac{c_1}{g}, \infty\right)$  el valor de  $\frac{dx}{dt} = f(t)$  es mayor que cero, la gráfica de la solución  $x = \varphi(t)$  será creciente en tal intervalo.



De todo lo anterior podemos mencionar que:

1. Dada la ecuación diferencial ordinaria  $\frac{dx}{dt} = f(t)$  la gráfica de  $f(t)$  proporciona información cualitativa acerca de la forma de las soluciones: su signo determina los intervalos donde las soluciones son crecientes o decrecientes.
2. Todas las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria 2.4 se presentan en traslaciones verticales, ya que difieren en una constante  $k$  producto de la antiderivada.

Finalmente, subrayemos que las funciones  $\psi_{c_1}(t)$  y  $\varphi_{c_1, c_2}(t)$ , que determinaron la velocidad y posición de la partícula, son soluciones de la ecuación diferencial 2.1 y de la ecuación diferencial 2.4 respectivamente. Las gráficas de estas funciones las nombraremos *curvas integrales*<sup>5</sup> pues surgen como producto de aplicar la operación de integración. Integrar una ecuación diferencial equivale, geoméricamente, a encontrar la gráfica de estas curvas<sup>6</sup>.

En particular, la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = gt + c_1$$

es una ecuación de la forma 2.6 y tiene como soluciones las funciones:

$$\varphi_{c_1, c_2}(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$$

Las gráficas de las soluciones  $x = \varphi_{c_1, c_2}(t)$  son las curvas integrales que existen en el espacio  $(t, x)$ . Dadas las condiciones iniciales del movimiento, podemos encontrar una solución particular cuya gráfica pase por el punto  $(t_0, x_0)$ .

En general, la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

con condiciones iniciales  $(t_0, x_0)$  está dada por la ecuación:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u) du$$

La expresión anterior se debe a los trabajos realizados por el matemático inglés Isaac Barrow y se le conoce como fórmula de Barrow<sup>7</sup>.

<sup>5</sup>Vladimir I. Arnold. *Ordinary differential equations*, p.17. [3]

<sup>6</sup>Sin embargo, el problema de encontrar una curva integral no se reduce a la integración analítica, pues no siempre puede ser representada por medio de una combinación finita de composiciones de funciones elementales.

<sup>7</sup>*Ibid.* p. 18.

### 3. Crecimiento exponencial

La gran capacidad de las poblaciones para reproducirse, no puede ejemplificarse mejor que con la población humana, la cual ha crecido prolíficamente duplicándose aproximadamente cada cuarto de siglo. En cualquier etapa de la humanidad, el crecimiento poblacional ha sido motivo de estudio y preocupación. El economista inglés Thomas Malthus, en su ensayo sobre las poblaciones publicado en 1798, advirtió sobre los daños del crecimiento poblacional descontrolado expresando:

*“Pienso que se pueden considerar dos postulados: Primero, la comida es necesaria para la existencia humana. Segundo, la atracción entre los sexos es necesaria para la reproducción y permanece actualmente”*<sup>8</sup>. Malthus determinó que *“una población desmedida se incrementa de manera geométrica, mientras que los elementos de subsistencia únicamente en forma aritmética. Un sencillo análisis determinará la superioridad de la primera razón sobre la segunda”*.

El contraste entre los crecimientos geométrico y aritmético constituye una de las distinciones básicas realizadas por Malthus referente al crecimiento poblacional. Bajo estas premisas, el incremento exponencial constituye la base de todos los esfuerzos para formular la proyección del tamaño de una población a través del tiempo.

La tasa de crecimiento de una población se define como la diferencia entre la tasa de adición de individuos debida a nacimientos e inmigración y la tasa de sustracción debida a la muerte y emigración:

$$\frac{dx}{dt} = N + I - M - E$$

En el modelo de crecimiento exponencial se supone que ningún individuo entra ni sale, es decir  $I = E = 0$ . Existen además, algunas fertilidades promedio y una probabilidad media de muerte aplicable a todos los individuos de la población, las cuales no dependen del tiempo ni del tamaño de ésta. Lo anterior corresponde a que  $N$  y  $M$  sean proporcionales al número de individuos, explícitamente:

$$\begin{aligned} N &= nx \\ M &= mx \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Robert. E. Ricklefs. *Ecology*, p.302. [22]. Traducción del autor.

donde  $n$  y  $m$  son las tasas medias de natalidad y mortalidad de cualquier individuo por unidad de tiempo. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= nx - mx \\ \frac{dx}{dt} &= (n - m)x \\ \frac{dx}{dt} &= rx\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $r = (n - m)$  es la tasa intrínseca de aumento poblacional o parámetro Malthusiano.

Algunas consideraciones sobre la ecuación diferencial de crecimiento de poblaciones son las siguientes:

1. La tasa de incremento  $\frac{dx}{dt}$  es directamente proporcional al tamaño de la población.
2. La tasa de crecimiento exponencial  $r$  expresa el incremento o decrecimiento poblacional por individuo.
3. Se interpreta como:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Cambio instantáneo} \\ \text{del tamaño de} \\ \text{la población} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Contribución de} \\ \text{cada individuo} \\ \text{de la población} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{individuos de la} \\ \text{población} \end{array} \right]$$

La ecuación 3.1 puede resolverse por el método de separación de variables<sup>9</sup>, procediendo de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{x} = r dt$$

integrando ambos lados se sigue:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= r \int dt \\ \ln |x| &= rt + rc\end{aligned}$$

<sup>9</sup>Leibniz desarrolló este método y lo comunicó a Huygens en una carta en 1691; resolvió una ecuación diferencial de la forma  $y \frac{dx}{dy} = f(x)g(y)$ , escribiendo  $\frac{dx}{f(x)} = \frac{g(y)}{y} dy$ .

resolviendo para  $x$  se tiene:

$$x = \pm e^{(rt+rc)}$$

$$x = \pm e^{rt} e^{rc}$$

$$x = \pm e^{rt} k$$

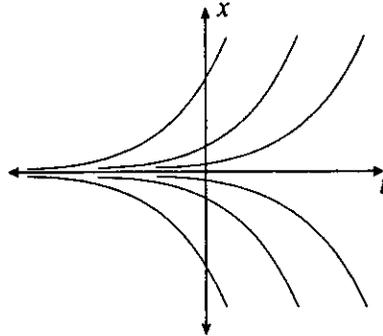
$$x = \pm k e^{rt}$$

Así, las soluciones de la ecuación diferencial planteada son las funciones:

$$\varphi(t) = \pm k e^{rt} \tag{3.2}$$

donde  $k \neq 0$ <sup>10</sup>.

Las gráficas de la función  $\varphi(t)$  tienen la forma<sup>11</sup>:

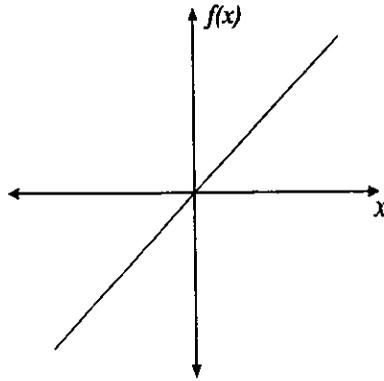


La forma de las gráficas de  $\varphi(t)$  puede obtenerse si observamos el comportamiento geométrico de  $f(x) = rx$ , ya que ésta proporciona información cualitativa suficiente para conocerla<sup>12</sup>:

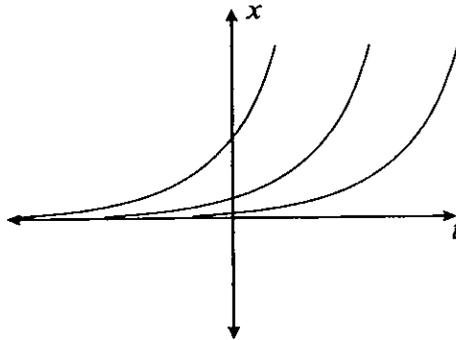
<sup>10</sup>Esto se debe a que  $k = \pm e^{rc}$

<sup>11</sup>Aquí se está suponiendo que  $r > 0$ , lo que corresponde al caso de que la tasa media de natalidad sea mayor a la de mortalidad.

<sup>12</sup>Consideramos el valor de  $\frac{dx}{dt}$  en la ecuación 3.1 como una función  $f(x)$  de la variable dependiente  $x$ , tal que  $f(x) = rx$  donde  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ . En lo sucesivo nos referiremos a la derivada de  $x$  con respecto a  $t$  como un función  $f(x)$  en el caso de que ésta sea autónoma.

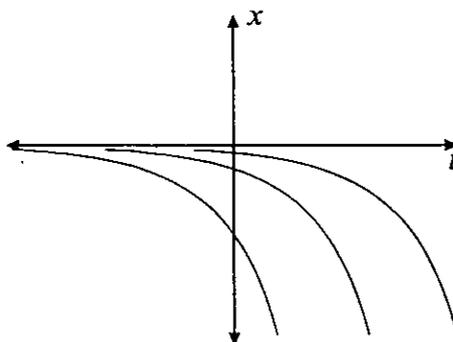


1. Si  $x > 0$ , entonces  $f(x) > 0$ , por lo tanto  $\frac{dx}{dt} > 0$ . La gráfica de  $x = \varphi(t)$  es creciente.



2. Si  $x < 0$ , entonces  $f(x) < 0$ , por lo tanto  $\frac{dx}{dt} < 0$ . La gráfica de  $x = \varphi(t)$

es decreciente.



La gráfica de  $f(t) = rx$  induce la forma de las gráficas de  $\varphi(t) = \pm ke^{rt}$ . Las curvas crecientes determinan que el cambio en la cantidad de población aumenta conforme el tiempo se incrementa; por otro lado, las curvas decrecientes, aunque matemáticamente son válidas, físicamente no lo son pues no tiene sentido pensar en poblaciones negativas, es decir, el dominio de  $f(x)$  está comprendido dentro de  $\mathbb{R}$ , sin embargo en el sentido biológico sólo es válido para  $x \geq 0$ .

Si pensamos en una cantidad de población  $x_0$  definida en un tiempo inicial  $t_0$ , obtendremos una curva que pasará por el punto  $(t_0, x_0)$ ; si tales condiciones iniciales cambian, obtendremos otra curva diferente.

### 3.1. Soluciones constantes

No obstante que se obtuvo una función  $x = \varphi(t)$  como solución del fenómeno de estudio, la expresión 3.2 no reúne todas las posibles soluciones de la ecuación diferencial de crecimiento poblacional. La función constante  $\varphi(t) \equiv 0$  también es solución de la ecuación diferencial 3.1 y describe un crecimiento nulo o no crecimiento mientras el tiempo pasa.

Podemos ver que la gráfica de  $f(x)$  se anula en el punto  $x_0 = 0$ , lo cual determina que  $\frac{dx}{dt} = 0$ ; así, para que una función tenga derivada igual a cero, no deberá ser sino constante<sup>13</sup>.

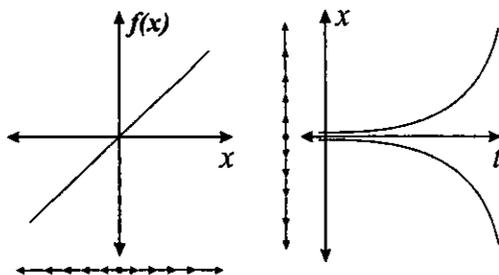
<sup>13</sup>Se recomienda demostrar que la función constante  $\varphi(t) \equiv 0$  es solución de la ecuación diferencial ordinaria  $\dot{x} = rx$ .

A una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

se le denomina ecuación diferencial autónoma, pues  $f$  no depende de  $t$ . Si existe algún  $x_0$  donde  $f(x_0) = 0$ , se generará una solución constante  $\varphi(t) \equiv x_0$ . A tales puntos los denominaremos *puntos singulares*, *puntos de equilibrio* o *puntos estacionarios* del sistema.

En nuestro caso, si el sistema comienza su evolución en un punto donde la población es nula, ésta permanecerá constante siempre; inversamente, el sistema se alejará de manera exponencial del punto de inicio si comienza con un valor de la población superior a cero. Lo mismo se espera para valores negativos de  $x$ , el sistema se alejará de punto estacionario a medida que transcurre el tiempo. Concluimos entonces, que la cantidad de población tiende a alejarse del punto estacionario  $x_0 = 0$  conforme  $t$  avanza, no así en el caso que se inicie con una población nula.



Este esquema de comportamiento es una herramienta auxiliar que nos permite conocer la evolución de un sistema autónomo.

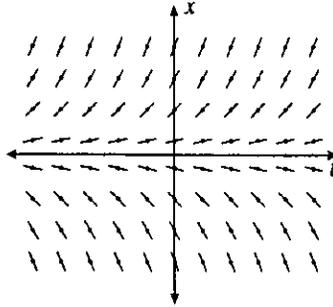
### 3.2. Campos direccionales

Nótese que las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial autónoma:

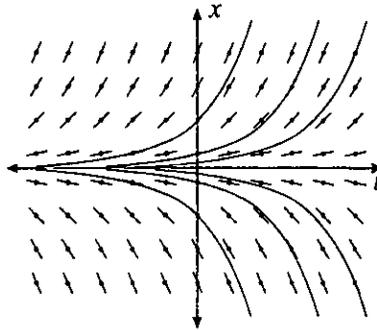
$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

son curvas cuya tangente en cada punto  $(t_0, x_0)$  tienen una dirección determinada por  $f(x_0)$ . A través de  $f(x)$  podemos construir un *campo direccional* asociando

a cada punto  $(t_0, x_0)$  un segmento de recta que pase por  $(t_0, x_0)$  con pendiente<sup>14</sup>  $m = f(x_0)$ .



Los segmentos de recta dentro del campo direccional pueden ser reemplazados por una curva suave tangente a cada segmento, obteniendo así las curvas integrales de la ecuación diferencial planteada.



Las gráficas de las soluciones son las curvas integrales del campo direccional  $(t, x) \mapsto f(x)$ .

El campo direccional construido por medio de  $f(x)$  proporciona una ley de evolución de un proceso<sup>15</sup>.

<sup>14</sup>Los puntos donde  $f(x_0) = 0$  tendrán asociados segmentos de recta con pendiente  $m = 0$ .

<sup>15</sup>La teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias consiste en reconstruir el pasado así como predecir el futuro partiendo del conocimiento de esta ley de evolución.

### 3.3. Validez del método de separación de variables

Al resolver la ecuación diferencial 3.1 por el método de separación de variables no obtuvimos la solución constante  $\varphi(t) \equiv 0$ . ¿Porqué el método “oculta” este tipo de soluciones?. Tratemos de generar una respuesta apropiada:

En general, al resolver la ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{3.3}$$

por este método, es sencillo manipular algebraicamente la expresión y hacer la separación de variables:

$$\frac{dx}{f(x)} = dt$$

lo cual carece de sentido para valores de  $x$  en los cuales  $f(x)$  se anula.

Bajo las características arriba planteadas, es posible justificar el uso del método de separación de variables escogiendo una región donde  $f(x) \neq 0$  con  $x \in I = (a, b)$ . Sea  $x = \varphi(t)$  una solución, se tiene entonces que:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))$$

donde  $f(\varphi(t)) \neq 0$ .

Por el teorema de la función inversa, la función  $x = \varphi(t)$  es invertible y tiene una inversa  $t = \psi(x)$  y su derivada cumple:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)} \tag{3.4}$$

La solución  $t = \psi(x)$  con condiciones iniciales  $(x_0, t_0)$  la podemos calcular por medio de la fórmula de Barrow:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$$

De tal manera, las soluciones de la ecuación 3.3 equivalen a las soluciones de la ecuación 3.4. En resumen, el método de separación de variables no contempla valores donde  $f(x) = 0$ , sin embargo, en el caso que  $f$  no se anule, se garantiza su validez a través del argumento anterior<sup>16</sup>.

<sup>16</sup>Vladimir I. Arnold. op.cit., pp.19-20.

#### 4. Crecimiento logístico

Los argumentos propuestos por Malthus acerca de las poblaciones, habían estimulado considerablemente el interés sobre nuevas formulaciones del crecimiento poblacional; varios estudiantes habían tomado en cuenta que las limitantes de espacio, alimentación y sobrevivencia restringirían la población dentro de un límite. Las más brillantes y exitosas observaciones fueron realizadas por el matemático Pierre Francois Verhulst, quien en 1838 publicó una nueva ecuación que describía el ritmo de crecimiento poblacional. En un segundo trabajo realizado en 1845, Verhulst llamó a su fórmula la ecuación logística debido a su forma logarítmico-exponencial<sup>17</sup>.

Ya que en la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = (n - m)x = rx$$

cualquier valor de  $r$  superior a cero producirá eventualmente más individuos, el modelo de crecimiento exponencial resulta incompleto. El suponer a  $n$  y  $m$  como constantes y sus valores independientes de  $x$  constituye el problema principal; por tal razón, una situación más real propone a  $n$  y  $m$  como funciones lineales de  $x$ :

$$\begin{aligned} n &= n_0 - k_n x \\ m &= m_0 + k_m x \end{aligned}$$

donde los valores de  $n_0$  y  $m_0$  son aproximados a medida que la población se hace mas pequeña,  $k_n$  es la pendiente de la disminución de la tasa de natalidad y  $k_m$  es la pendiente del aumento de la mortalidad. La ecuación establece que la tasa de mortalidad aumente y la de natalidad disminuya a medida que se incrementa la población. Sustituyendo  $n$  y  $m$  por sus nuevos valores, tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = [(n_0 - k_n x) - (m_0 + k_m x)] x$$

Esta es una forma básica para el crecimiento logístico de poblaciones<sup>18</sup>.

<sup>17</sup>Robert E. Ricklefs. op.cit., pp.329. Traducción de autor.

<sup>18</sup>Cfr. Edward O. Wilson. *Sociobiología: La nueva síntesis*, p.84. [29].

Cuando  $n = m$  la población permanece en equilibrio, es decir, se mantiene por sí misma en un valor  $x$  dado por:

$$n_0 - k_n x = m_0 + k_m x$$

$$x = \frac{n_0 - m_0}{k_n + k_m}$$

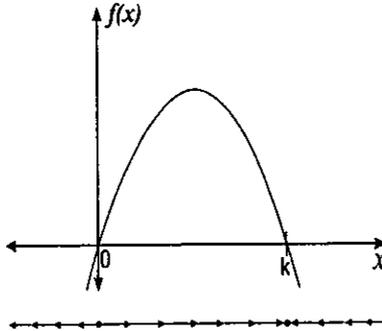
que se denomina "capacidad de carga del ambiente" y se representa por  $k$ . Sea  $k = \frac{n_0 - m_0}{k_n + k_m}$  un valor particular de  $x$  y la tasa de crecimiento  $r = n_0 - m_0$ , la ecuación diferencial del crecimiento logístico de poblaciones, en términos de  $k$  y  $r$ , está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left[ \frac{k-x}{k} \right] \tag{4.1}$$

La expresión anterior se conoce como la forma familiar de la ecuación diferencial para el crecimiento y regulación logístico de poblaciones.

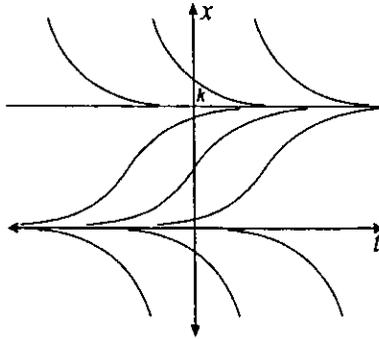
#### 4.1. Análisis cualitativo

Si dibujamos la gráfica de  $f(x) = rx \left[ \frac{k-x}{k} \right]$  podemos notar que en los puntos  $x_0 = 0$  y  $x_1 = k$  ésta se anula:



Para cualquier valor de  $x$  dentro del intervalo  $(0, k)$  el valor de  $f(x)$  tendrá signo positivo y para cualquier  $x$  perteneciente al intervalo  $(-\infty, 0) \cup (k, \infty)$  el valor de  $f(x)$  tendrá signo negativo.

Los puntos de equilibrio, de acuerdo a lo expuesto en la sección anterior, generan dos soluciones constantes:  $\varphi_1(t) \equiv 0$  y  $\varphi_2(t) \equiv k$ . Por otra parte, en el intervalo  $x \in (0, k)$  las gráficas de las soluciones serán crecientes, mientras que para el intervalo  $x \in (-\infty, 0) \cup (k, \infty)$  serán decrecientes.



Para obtener las soluciones analíticas  $x = \varphi(t)$  de la ecuación diferencial de crecimiento logístico por el método de separación de variables, puede usarse la forma reducida de la ecuación logística:  $\dot{x} = ax - bx^2$  donde  $a = r$  y  $b = \frac{r}{k}$  lo que reduce los cálculos considerablemente.

#### 4.2. Traslaciones horizontales

Las soluciones que describen el crecimiento logístico tienen la peculiaridad de presentarse en traslaciones horizontales unas de otras; intuitivamente esto parece claro, sin embargo daremos un argumento más formal de este comportamiento.

En general, la ecuación diferencial 4.1 corresponde a:

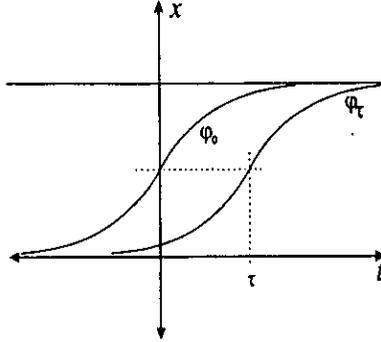
$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{4.2}$$

Tomemos una solución  $\varphi_0(t)$  de esta ecuación y para cada  $\tau$  fija, sea  $\varphi_\tau(t) = \varphi_0(t - \tau)$ . Veremos que  $\varphi_\tau(t)$  también es solución de 4.2:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_\tau}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\varphi_0(t - \tau) \\ \frac{d\varphi_\tau}{dt}(t) &= f(\varphi_0(t - \tau)) \end{aligned}$$

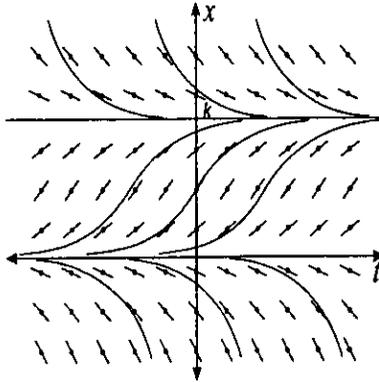
$$\frac{d\varphi_\tau}{dt}(t) = f(\varphi_\tau(t))$$

La relación geométrica entre  $\varphi_0(t)$  y  $\varphi_\tau(t)$  la podemos ver en el siguiente dibujo:



Como la gráfica de  $\varphi_\tau$  es una traslación horizontal de la gráfica de  $\varphi_0$ , lo que hemos demostrado formalmente es que cualquier traslación horizontal de una curva integral de 4.2 es también curva integral de dicha ecuación.

Un argumento geométrico para esta propiedad consiste en que si construimos el campo direccional de la ecuación diferencial 4.1 podemos notar que para  $x_0$  fijo, la inclinación de los segmentos de recta es la misma para cualquier  $(t, x_0)$  con lo que resulta este tipo de comportamiento en las curvas integrales.



Finalmente, el conjunto de posibles estados que el modelo diferencial pueda tomar es denominado como *espacio fase*<sup>19</sup>. En nuestro ejemplo, el espacio fase es el conjunto de números reales  $\mathbb{R}$ , debido a que la variable dependiente  $x$  toma valores contenidos en este conjunto, es decir,  $x \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>19</sup>Vladimir I. Arnold. op. cit., pp. 14-15.

## 5. Predador-presa

En las secciones anteriores, se estudiaron algunos modelos matemáticos acerca del crecimiento de biomásas bajo condiciones ideales de espacio, alimentación y competencia; sin embargo la dinámica de poblaciones se presenta todavía más interesante cuando se estudian dos o más poblaciones biológicas que interactúan en el mismo ambiente<sup>20</sup>. Los primeros modelos matemáticos que incorporaban interacción entre especies fueron propuestos por el biólogo Alfred Lotka<sup>21</sup> en 1925 y el Italiano Vito Volterra en 1926 quienes usaron el modelo logístico como punto de partida.

El modelo Lotka-Volterra describe la interacción entre dos especies dentro de un ecosistema, un predador y una presa. Volterra analizó las variaciones cíclicas observadas en las poblaciones de tiburones y sus peces alimento en el mar Adriático y mencionaba:

*"Una consideración de las asociaciones biológicas o interacciones mutuas entre dos o más especies me ha permitido obtener ciertos resultados matemáticos: Primeramente he considerado dos especies en interacción en la cual una encuentra suficiente comida en su entorno, lo cual la multiplicaría indefinidamente; mientras que otra especie perecería por falta de alimento si se encuentra sola, pero se alimenta de la primera, así las dos especies pueden coexistir juntas. La tasa de incremento de la especie que come disminuye el número de individuos de la especie que es comida. Establecidas las leyes de este incremento y disminución es posible establecer dos ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que pueden ser integradas"*.<sup>22</sup>

Para construir el modelo predador-presa denotemos el número de presas como  $x(t)$  y a  $y(t)$  como el número de predadores en el tiempo  $t$ . El número de presas experimentaría un crecimiento exponencial en ausencia de predadores, lo

<sup>20</sup>La teoría de estabilidad se muestra en este tipo de aplicaciones.

<sup>21</sup>Biofísico estadounidense que formuló las ecuaciones diferenciales Lotka-Volterra. Tales ecuaciones describen la interacción predador-presa y fueron publicadas en 1925 en el libro: *Elementos de biología matemática*, primer libro sobre biología matemática.

<sup>22</sup>Vito Volterra. "Variazioni del numero di individui in specie animali conviventi" en *Foundations of ecology*, p. 283. [28]

que determinaría una tasa natural de crecimiento de:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

En ausencia de presas, los predadores morirían con una tasa natural de:

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

Al juntar ambas especies ocurre una combinación de las tasas naturales de crecimiento y mortalidad, donde las presas experimentarían una mortalidad proporcional al número de encuentros con los predadores resultando una tasa de interacción negativa:

$$-bxy$$

y las presas a su vez se multiplicarán y tendrán una tasa de interacción creciente:

$$dxy$$

Si consideramos una población en equilibrio, justifica prescindir de los términos de regulación intraespecífica (competencia entre la misma especie). Sumando las tasas naturales y de interacción obtenemos las ecuaciones diferenciales del modelo predador-presa:

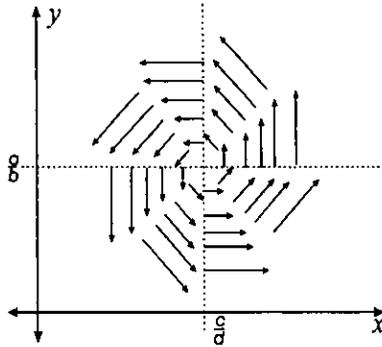
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \end{aligned} \tag{5.1}$$

### 5.1. Análisis cualitativo

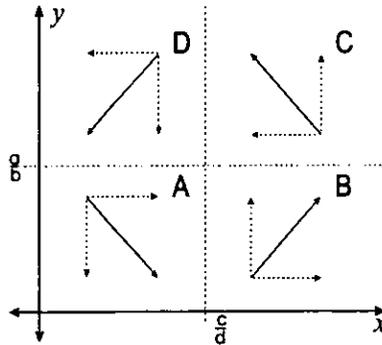
El lado derecho de estas ecuaciones define un *campo vectorial* en el plano, cuyo vector asociado a cada punto  $(x, y)$  tiene componentes  $(ax - bxy, -cy + dxy)$  y está definido en el sector  $x \geq 0, y \geq 0$  debido a que las poblaciones son positivas.

Existen dos puntos singulares en el sistema 5.1, el punto  $(0, 0)$  que determina la extinción de ambas especies y el punto  $(c/d, a/b)$  que es el número de la cantidad de población en las que ambas especies están en equilibrio.

Si hacemos un análisis de signos en las entradas de las componentes del vector asociado, podemos encontrar la forma del campo vectorial del sistema:

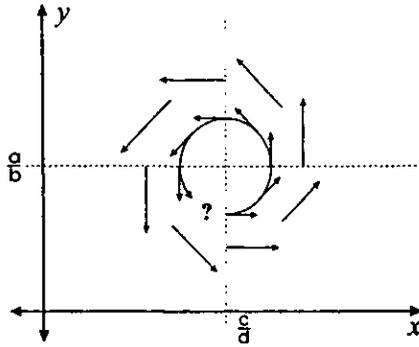


En algún momento de la evolución de este sistema biológico la cantidad de predadores permitirá el aumento del número de presas (región A), originándose al paso del tiempo el aumento de predadores debido a la presencia de suficiente alimento (región B). Si existen las condiciones en las cuales los predadores son más que las presas, motivará la disminución de éstos últimos (región C), finalmente con menos alimento, la cantidad de pedadores se verá afectada y comenzará a disminuir su número (región D).

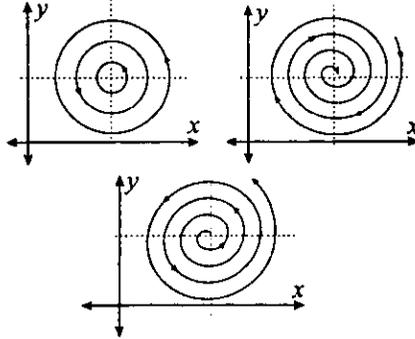


Este campo vectorial proporciona información cualitativa relativa a los cambios de estado del sistema 5.1 en el transcurso del tiempo.

Si dentro del campo vectorial trazamos una curva tangente a cada uno de los vectores obtendremos las curvas integrales del sistema<sup>23</sup>:



**Nota 1.** Con la información que se tiene, no podemos esbozar la forma de las curvas integrales con exactitud. Siendo  $(c/d, a/b)$  un punto singular, no sabemos si las curvas oscilan alrededor él, si son curvas que se alejan o si se van acercando mientras el sistema evoluciona.



Intentemos conocer la forma de las curvas integrales de la siguiente forma:

Tomemos el sistema de ecuaciones diferenciales 5.1 y rescribamos despejando  $x$  y  $y$ :

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by)$$

<sup>23</sup>Para profundizar en este concepto véase: Vladimir I. Arnold. op. cit., pp.28-31.

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dx = y(-c + dx)$$

eliminemos  $dt$  realizando el cociente  $\frac{dx}{dt} \div \frac{dy}{dt}$ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(a - by)}{y(-c + dx)} \tag{5.2}$$

lo cual resulta en una ecuación diferencial ordinaria.

La ecuación diferencial 5.2 puede resolverse separando variables:

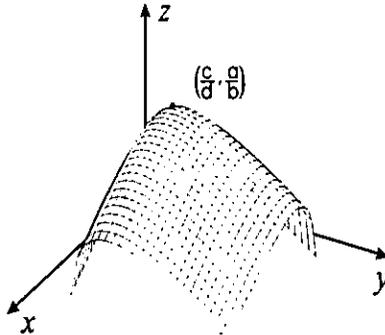
$$\begin{aligned} \frac{(a - by) dy}{y} &= \frac{(-c + dx) dx}{x} \\ \int \left( \frac{a}{y} - b \right) dy &= \int \left( \frac{-c}{x} - d \right) dx \end{aligned}$$

Integrando tenemos:

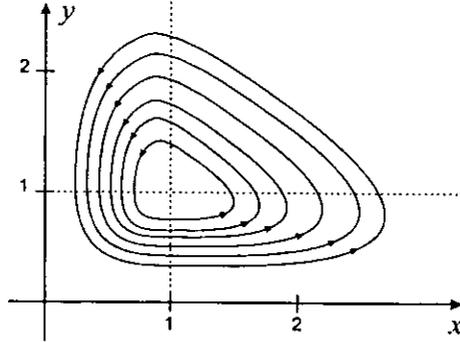
$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + k$$

$$a \ln y + c \ln x - by - dx = k$$

La expresión anterior genera una superficie  $S$  cuya gráfica tiene la forma:



Las curvas de nivel  $z = k$  de la superficie son curvas cerradas:



Podemos revisar analíticamente que el punto  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  es un máximo absoluto de la superficie  $S$ . Definamos las funciones:

$$f(x, y) = a \ln y + c \ln x - by - dx$$

y

$$g(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

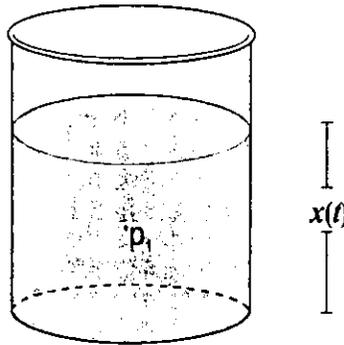
donde  $f_{xx}(x, y)$  y  $f_{yy}(x, y)$  son continuas en una vecindad de  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ . Como el valor del gradiente<sup>24</sup>  $\nabla f\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = 0$  podemos decir que  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  es un máximo local de  $f$  ya que  $g\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) > 0$  y  $f_{xx}\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) < 0$ .

Por la forma de la superficie  $S$  se sigue que  $(x_0, y_0) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  es un máximo absoluto de  $S$ .

<sup>24</sup>El gradiente  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$  equivale a decir que  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$  y  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ .

## 6. Flujo en tanques

Otro fenómeno que puede ser modelado por medio de una ecuación diferencial autónoma es el tiempo de vaciado de un tanque. Supongamos que se tiene un tanque cilíndrico que contiene una cierta cantidad de agua y en el fondo del tanque existe un orificio por donde escapa el agua. Denominaremos a  $x(t)$  la altura que existe entre la superficie del agua y el fondo del tanque en un instante de tiempo. Deseamos conocer el ritmo con el que el tanque se vaciará.



Las consideraciones pertinentes a este fenómeno son las siguientes:

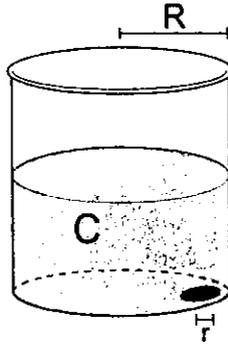
1. La velocidad  $v(p_i)$  que experimenta una partícula de agua que está contenida dentro de un recipiente, está determinada únicamente por la posición  $p_i$  en la que se encuentra y no del tiempo, en este caso se dice que se tiene un flujo estacionario.
2. Al vaciarse el tanque existen algunos factores que condicionan la velocidad de desalojo de agua, uno de estos es la energía potencial cuyo valor en una pequeña región alrededor de  $p_i$  es  $m_i g u(p_i)$ , donde  $m_i$  es la masa del agua,  $g$  la gravedad y  $u(p_i)$  es la altura de la partícula de agua en el punto  $p_i$ . Otro tipo de energía que interviene es la energía cinética o de movimiento con valor de  $\frac{1}{2} m_i (v(p_i))^2$ . La energía  $E_i$  de una partícula será la suma de la energía potencial más la energía cinética; por lo tanto, la energía total  $E$

del sistema será la suma de las energías que experimenta cada partícula de agua dentro del tanque, es decir:

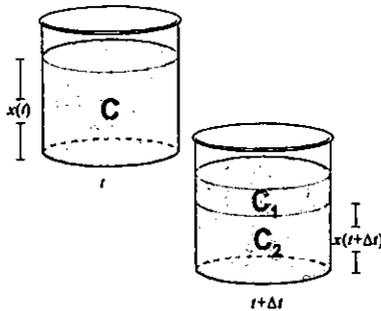
$$E \approx \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i (v(p_i))^2 + m_i g u(p_i) \quad (6.1)$$

y permanecerá constante en todo tiempo.

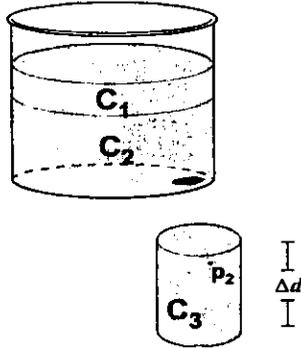
3. El radio del tanque lo denominaremos  $R$ , mientras que el radio del orificio por donde se desaloja el agua lo llamaremos  $r$ . En el instante de tiempo  $t$  existe una cantidad de agua comprendida en una región  $C$ , la altura definida por este volumen de agua en el instante  $t$  es  $x(t)$ .



4. Una vez que comienza a desalojarse el agua y transcurrido un periodo de tiempo  $\Delta t$ , el valor de la altura  $x(t)$  cambiará para ser  $x(t + \Delta t)$  experimentando un decremento  $|\Delta x| = -\Delta x$ , donde  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ .



5. La región inicial  $C$  la podemos dividir en dos regiones  $C_1$  y  $C_2$ , en la que  $C_1$  es la región de agua que se desaloja y  $C_2$  la región de agua que permanece en el instante  $t + \Delta t$ . Dentro  $C_1$  podemos tomar una partícula de agua que se ubica en el punto  $p_1$  con coordenadas  $(x, y, z)$ . La cantidad de agua desalojada estará contenida en una columna de agua que expresaremos como una región  $C_3$  donde una partícula de agua se encontrará en el punto  $p_2$ . La altura de esta columna de agua experimentará un incremento  $\Delta d$  con el paso del tiempo.



6. En una pequeña porción de agua existirá una cantidad casi infinita de moléculas de agua; así, la masa  $m$  de esa porción de agua será la densidad  $\rho$  por el volumen  $V$ , tal que  $m = \rho V$ .

La energía total  $E$  (ecuación 6.1) en cualquier región  $C_i$  la podemos calcular haciendo:

$$E = \int_{C_i} \left[ \frac{1}{2} \rho (v(p_i))^2 + \rho g u(p_i) \right] dp$$

$$E = \rho \int_{C_i} \left[ \frac{1}{2} (v(p_i))^2 + g u(p_i) \right] dp$$

Para simplificar los cálculos, sustituiremos la expresión contenida entre corchetes por  $f(p)$ .

Debido a que en el instante  $t$  el agua está en la región  $C = C_1 \cup C_2$  y en el instante  $t + \Delta t$  el agua está en  $C = C_2 \cup C_3$  tenemos, por la conservación de la

energía, que:

$$\rho \int_C f(p) dp = \rho \int_{C_1} f(p) dp + \rho \int_{C_2} f(p) dp$$

$$\rho \int_C f(p) dp = \rho \int_{C_2} f(p) dp + \rho \int_{C_3} f(p) dp$$

de donde se sigue:

$$\int_{C_1} f(p) dp = \int_{C_3} f(p) dp \quad (6.2)$$

Por el teorema del valor medio para integrales se tiene:

$$\int_{C_i} f(p) dp = \text{vol}(C_i) \cdot f(\hat{p})$$

para algún  $\hat{p} \in C_i$ .

Podemos estimar entonces el valor de las integrales contenidas en la expresión 6.2:

Para  $\int_{C_1} f(p) dp$  hacemos:

$$\int_{C_1} f(p) dp = \frac{1}{2} (v(p_1))^2 \cdot \pi R^2 (-\Delta x) + g\pi R^2 (-\Delta x) u$$

$$\int_{C_1} f(p) dp = -\frac{1}{2} (v(p_1))^2 \cdot \pi R^2 (\Delta x) - g\pi R^2 (\Delta x) u$$

para algún  $u \in (x(t), x(t + \Delta t))$  y algún  $p_1 \in C_1$ .

Para  $\int_{C_3} f(p) dp$  se tiene:

$$\int_{C_3} f(p) dp = \frac{1}{2} (v(p_2))^2 \cdot \pi r^2 (\Delta d) + g\pi r^2 (\Delta d) \bar{u}$$

para algún  $p_2 \in C_3$  donde  $p_2 = (x_2, y_2, \bar{u})$ .

Como el ritmo con que se desaloja el agua es igual al ritmo con que se crea la columna de agua desalojada, es válido escribir:

$$\pi r^2 (\Delta d) = \pi R^2 (-\Delta x)$$

por lo tanto

$$\int_{C_3} f(p) dp = -\frac{1}{2} (v(p_2))^2 \cdot \pi R^2 (\Delta x) - g\pi R^2 (\Delta x) \bar{u}$$

donde  $\bar{u} \in (-\Delta d, 0)$ .

Por todo lo anterior, la ecuación 6.2 se expresa como:

$$-\frac{1}{2} (v(p_1))^2 \cdot \pi R^2 (\Delta x) - g\pi R^2 (\Delta x) u = -\frac{1}{2} (v(p_2))^2 \cdot \pi R^2 (\Delta x) - g\pi R^2 (\Delta x) \bar{u}$$

Dividiendo entre  $\Delta x$  tenemos

$$-\frac{1}{2} (v(p_1))^2 \cdot \pi R^2 - g\pi R^2 u = -\frac{1}{2} (v(p_2))^2 \cdot \pi R^2 - g\pi R^2 \bar{u} \quad (6.3)$$

Debido a que deseamos conocer el ritmo con el que el tanque se vaciará, es decir, la forma en que  $x(t)$  cambia mientras el tiempo varía, es preciso verificar qué sucede si el tiempo de desalojo de agua es muy pequeño. Por una parte el valor de la velocidad de la partícula  $v(p_1)$  corresponderá al valor de la altura  $x(t)$  del agua<sup>25</sup>, conforme  $\Delta t \rightarrow 0$ , lo cual puede escribirse como:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v(p_1)$$

con esto expresamos que  $x'(t) = v(p_1)$ . Como la energía potencial depende de la posición de la partícula, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  el punto  $p_1$  tenderá a estar a la altura  $x(t)$ , tomando así  $u$  el valor de  $x(t)$ . Se puede escribir el lado izquierdo de la ecuación 6.3 como:

$$-\frac{1}{2} (v(p_1))^2 \cdot \pi R^2 - g\pi R^2 u = -\frac{1}{2} (x'(t))^2 \cdot \pi R^2 - g\pi R^2 x(t) \quad (6.4)$$

Por otra lado, al ser el tiempo de desalojo muy pequeño, la columna de agua desalojada también será pequeña, con ello  $\bar{u}$  se anulará, evaluándose la velocidad en un punto  $p_2 = (x, y, 0)$ . El lado derecho de la igualdad 6.3 queda:

$$-\frac{1}{2} (v(p_2))^2 \cdot \pi R^2 - g\pi R^2 \bar{u} = -\frac{1}{2} (v(p_2))^2 \cdot \pi R^2$$

---

<sup>25</sup>Debido a que la velocidad de la partícula está determinada únicamente por la posición en que se encuentra, mientras la altura del agua experimente un cambio muy pequeño la posición (y por lo tanto la velocidad de la partícula de agua) corresponderá al valor de  $x(t)$ .

Además, la expresión:

$$-R^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} = r^2 \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , tomará el valor de  $-R^2 x'(t) = r^2 v(p_2)$ . Lo anterior es válido ya que si la columna de agua es muy pequeña, la velocidad de la partícula en un punto muy cercano a cero corresponderá al valor que adquiera  $d$  en ese instante de tiempo. Reescribiendo obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (v(p_2))^2 \cdot \pi R^2 - g\pi R^2 \bar{u} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{-R^2}{r^2} x'(t) \right)^2 \cdot \pi R^2 \\ -\frac{1}{2} (v(p_2))^2 \cdot \pi R^2 - g\pi R^2 \bar{u} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{r^2} \right)^2 (x'(t))^2 \cdot \pi R^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Al sustituir en la ecuación 6.3 los valores obtenidos en las ecuaciones 6.4 y 6.5 se sigue que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (x'(t))^2 \cdot \pi R^2 - g\pi R^2 x(t) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{r^2} \right)^2 (x'(t))^2 \cdot \pi R^2 \\ -\frac{1}{2} (x'(t))^2 \cdot \pi R^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{r^2} \right)^2 (x'(t))^2 \cdot \pi R^2 &= g\pi R^2 x(t) \\ -\frac{1}{2} (x'(t))^2 \cdot \pi R^2 \left[ 1 - \left( \frac{R^2}{r^2} \right)^2 \right] &= g\pi R^2 x(t) \end{aligned}$$

Esta igualdad se puede simplificar haciendo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (x'(t))^2 [1 - k] &= gx(t) \\ \frac{1}{2} (x'(t))^2 [k - 1] &= gx(t) \\ (x'(t))^2 &= \frac{2gx(t)}{[k - 1]} \end{aligned}$$

por sencillez tomaremos el coeficiente  $[k - 1]$  como 1.

De esta forma, es posible expresar el ritmo de vaciado de un tanque por medio de la ecuación diferencial ordinaria autónoma:

$$(x'(t))^2 = 2gx(t)$$

que se puede escribir como:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gx$$

Como la altura del agua disminuye con el paso del tiempo, se tiene finalmente:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2gx} \quad (6.6)$$

### 6.1. Análisis de soluciones

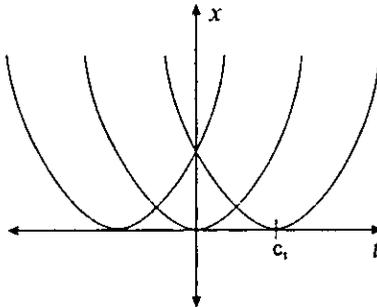
Resolviendo la ecuación diferencial 6.6 separando variables tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{2gx}} &= \int -dt \\ \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int -dt \\ \frac{1}{\sqrt{2g}} 2\sqrt{x} &= -t + c \end{aligned}$$

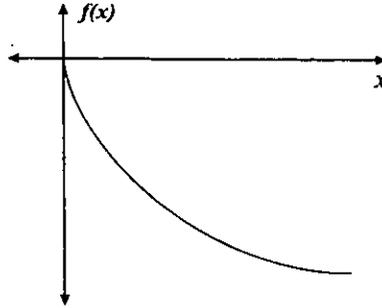
resolviendo para  $x$  tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \frac{\sqrt{2g}}{2} (-t + c) \\ x &= \frac{g}{2} (-t + c)^2 \end{aligned}$$

La función  $x = \varphi(t)$  es una familia de curvas con parámetro  $c$ .



El comportamiento de la función  $f(x) = -\sqrt{2gx}$  para diferentes valores de  $x$ , se esquematiza de la siguiente forma:



Este gráfico nos indica que las curvas generadas por  $x = \varphi(t)$ , tendrán un comportamiento decreciente con el paso del tiempo; existe además, una posición de equilibrio  $x_0 = 0$  lo cual generará la solución constante  $\varphi(t) \equiv 0$ . Sin embargo, las parábolas generadas por  $\varphi(t) = \frac{g}{2}(-t + c)^2$  sólo son decrecientes dentro del intervalo  $(-\infty, c)$ , mientras que en el segmento  $(c, \infty)$  son crecientes. ¿Dónde se perturba el razonamiento que hemos construido hasta el momento?...

Observemos cuidadosamente el procedimiento utilizado para obtener  $\varphi(t)$  y notemos que al resolver por el método de separación de variables existió un momento en el cual:

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{2g}}{2}(-t + c)$$

El lado izquierdo de esta igualdad es la raíz cuadrada de una cantidad, la cual nunca podrá ser menor que cero, por lo tanto:

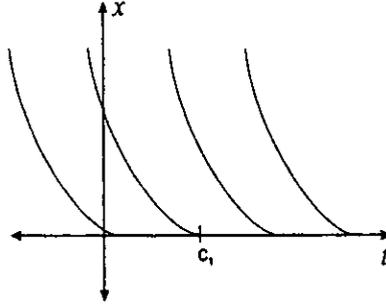
$$\frac{\sqrt{2g}}{2}(-t + c) \geq 0$$

Resolviendo la desigualdad tenemos:

$$t \leq c$$

Agregando la restricción anterior a la función  $\varphi(t) = \frac{g}{2}(-t + c)^2$  obtendremos como válidas únicamente las ramas izquierdas de las parábolas; así, las gráficas

de las soluciones de la ecuación diferencial 6.6 tienen la forma:



## 6.2. Principios de unicidad

Una vez halladas las soluciones a la ecuación diferencial que describe el ritmo de vaciado de un tanque, podemos conocer el ritmo con que evoluciona el sistema a partir de un tiempo  $t$  por medio de la función  $x = \varphi(t)$ . Dando valores iniciales es posible aproximar el tiempo en que el tanque se vaciará o la cantidad de agua que permanece en él pasado un lapso de tiempo; el comportamiento del sistema puede, de esta forma, ser descrito de manera global.

Sin embargo, resaltemos algunas características particulares de este fenómeno:

1. Sabemos que  $x \equiv 0$  también es solución de la ecuación diferencial 6.6.
2. Invariablemente existirá un tiempo  $\hat{t}$  en el que se vaciará el tanque sin ningún cambio posterior.

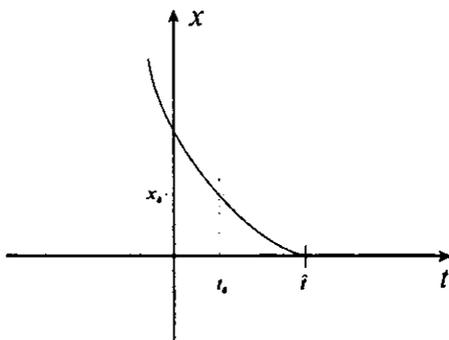
Ahora bien, si tomáramos como referencia algún instante en el que el tanque esta vacío, ¿Podríamos describir un tipo de comportamiento en particular?...

Definitivamente, planteando estas características, no es posible expresar con certeza ningún juicio que determine la evolución completa del sistema. Al intentar describir el fenómeno tomando como punto inicial de observación esta posición estacionaria del sistema, se tendrían que considerar dos posibilidades:

- Que el tanque hubiera comenzado con una cantidad de agua y después de un tiempo se vació
- Que el tanque hubiera estado vacío y al transcurrir el tiempo continuó en este estado.

Las observaciones anteriores nos permiten interpretar de manera más rigurosa el comportamiento del fenómeno y nos sirven para introducir el concepto de *unicidad de soluciones*.

La forma decreciente de las gráficas de  $x = \varphi(t)$  puede interpretarse diciendo que el nivel de agua disminuye a medida que el tiempo pasa, transcurrido un tiempo  $\hat{t}$  el tanque estará completamente vacío, a partir de  $\hat{t}$  el nivel de agua permanecerá en cero hasta  $t$ 's infinitamente grandes.



La solución  $x \equiv 0$  determina que el tanque no tiene ninguna cantidad de agua y al sucederse  $\hat{t}$  el valor de  $x$  continúa sin cambio.

Podemos definir entonces, al menos dos soluciones que pasan por el punto  $(\hat{t}, 0)$ :

$$\varphi_1(t) = \frac{g}{2} (-t + c)^2$$

$$\varphi_2(t) \equiv 0$$

donde  $c = \hat{t}$ .

Se dice que una ecuación diferencial presenta unicidad de soluciones si y sólo si para un punto  $(t_0, x_0)$  pasa únicamente una solución. En este caso particular, existen más de una solución que cumplen las condiciones iniciales  $\varphi(\hat{t}) = 0$ .

## 7. Curvas ortogonales

No obstante que varios fenómenos físicos eran discutidos con intensa pasión y brillante destreza por los investigadores y matemáticos del siglo XVII, muchos problemas geométricos continuaban captando el interés de la comunidad científica. Paulatinamente fue creciendo la necesidad de crear las herramientas matemáticas adecuadas para describir el movimiento de los planetas, los problemas de hidráulica o la composición de la luz. A finales del siglo XVII y principios del XVIII era común el intercambio de epístolas entre los matemáticos, discutiendo resultados de problemas tratados por medio de ecuaciones diferenciales; cuando no existía este tipo de comunicación solían publicarse los problemas para que fueran resueltos por cualquier estudioso del tema utilizando la herramienta recién inventada o proponiendo nuevos métodos.

En el año de 1694 Gottfried Wilhelm Leibniz junto con Johann Bernoulli dieron a conocer el problema de encontrar la curva o familia de curvas que cortaran con un ángulo dado una familia de curvas proporcionada. Este problema no fue publicado sino hasta 1697, cuando Johann desafió a su hermano Jacob Bernoulli a dar una respuesta.

Johan Bernoulli y Leibnitz obtuvieron la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales a una familia particular de curvas en 1698 y el problema continuó como tema de discusión hasta 1715. Datos históricos mencionan que Leibnitz “desafió a los matemáticos ingleses a descubrir el método general para encontrar las trayectorias ortogonales a una familia de curvas”<sup>26</sup>. Newton resolvió el problema publicándolo en “*Philosophica transactions*” en 1716.

Varios fenómenos son descritos usando una función  $f(x, y)$  llamada “potencial”, la cual es una cantidad de temperatura, presión, altura, etc. Las curvas  $f(x, y) = c$  son llamadas “curvas equipotenciales” o “curvas de nivel”, dado que el potencial es constante para toda la curva. Por ejemplo, las líneas que conectan puntos de igual presión son llamadas isobaras, las curvas que conectan lugares de igual temperatura son conocidas como isotermas. Un potencial, varias veces provoca una acción perpendicular a las curvas equipotenciales; estas curvas perpendiculares a las equipotenciales son nombradas “curvas de corriente” o “curvas flujo”. En el caso de una isoterma, la curva flujo describe el flujo de calor; por

<sup>26</sup>Morris Kline. *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días*, p.631. [15]

lo tanto, dada una curva equipotencial podemos encontrar las curvas de corriente que son ortogonales<sup>27</sup> a ésta.

Dada una familia de curvas  $f(x, y) = c$ , al derivar implícitamente obtenemos:

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (7.1)$$

resolviendo para  $\frac{dy}{dx}$  tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

esta ecuación proporciona la pendiente de la recta tangente al punto  $(x, y)$  de la curva equipotencial<sup>28</sup>.

Las curvas flujo tendrán tangentes perpendiculares a las de una curva equipotencial, satisfaciendo la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{\frac{-f_x(x, y)}{f_y(x, y)}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Analicemos un ejemplo tomando el potencial  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  y expresemos la siguiente familia curvas:

$$2x^2 + y^2 = c^2 \quad (7.3)$$

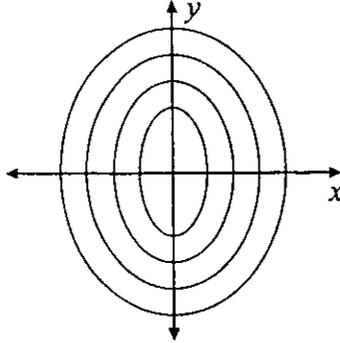
En un sistema de ejes cartesiano donde  $x$  está en el eje horizontal y  $y$  en el vertical,

---

<sup>27</sup>Una curva es ortogonal a otra si se intersectan perpendicularmente; es decir, si el ángulo que forman las dos curvas, tomando el punto de intersección como vértice es un ángulo recto.

<sup>28</sup>Stephen L. Cambell. *An introduction to differential equations and their applications*, p.79 [6]

la ecuación 7.3 describe una familia de elipses con el eje focal sobre el eje vertical:



El cálculo de las derivadas parciales es:

$$f_x(x, y) = 4x$$

$$f_y(x, y) = 2y$$

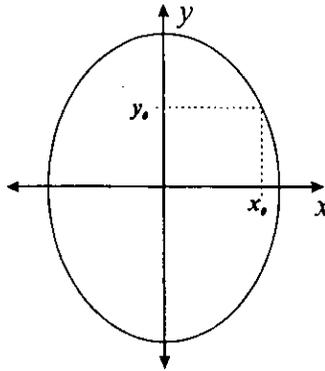
Sustituyendo estos valores en la ecuación 7.1 obtendremos la ecuación diferencial:

$$4x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

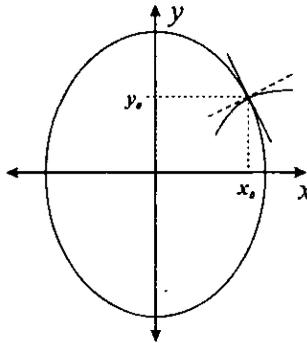
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y}$$

En cualquier punto  $(x, y)$  sobre la trayectoria de las elipses existirá una recta

tangente con pendiente  $m = \frac{-2x}{y}$ .



Conocido lo anterior, podemos encontrar la ecuación de las curvas de correinte o curva flujo, así como la pendiente de sus rectas tangentes en cualquier punto  $(x, y)$ :



La pendiente de las rectas tangentes se obtiene directamente de la igualdad 7.2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Para conocer la ecuación de las curvas flujo resolvamos la ecuación diferencial anterior separando variables:

$$2 \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$2 \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$2 \ln |y| = \ln |x| + c$$

$$|y|^2 = \exp(\ln |x| + c)$$

$$|y|^2 = e^c \cdot |x|$$

resolviendo para  $x$  tenemos:

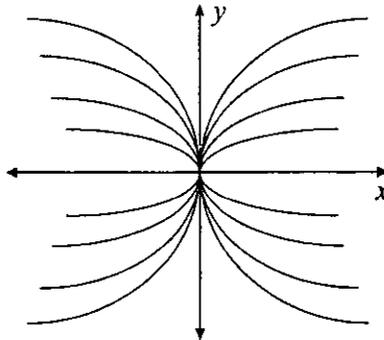
$$x = \pm e^{-c} y^2$$

y puede ser escrita como:

$$x = ky^2$$

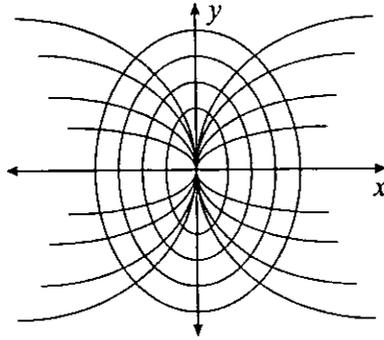
donde  $k \neq 0$ .

Esta expresión genera la siguiente familia de curvas:



A partir de las curvas equipotenciales  $2x^2 + y^2 = c^2$  hemos encontrado las curvas

de corriente que son ortogonales a éstas:



Con el ejemplo anterior hemos estudiado un problema geométrico surgido a finales del siglo XVII que involucra el manejo de una ecuación diferencial ordinaria.

---

# **CAPÍTULO II**

## **Energía y movimiento**

## Capítulo II

# Energía y movimiento

Edmund Halley, científico y astrónomo real, acudió a Newton para pedirle ayuda en el cálculo de la órbita de los planetas hasta entonces conocidos, éste sin problema alguno los realizó con toda rapidez. Halley se percató del valioso conjunto de conocimientos y técnicas desarrolladas por Isaac Newton y se ofreció a publicarlos, logrando como resultado los "*Principia*". Los fundamentos que describen la naturaleza del movimiento de los cuerpos son expuestos en la obra "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*"; en éste se presentan las tres leyes planteadas por Newton que permiten dar una explicación al porqué y de qué manera los cuerpos cambian de posición, tales leyes constituyen la columna vertebral de la mecánica clásica.

Los conceptos de masa, fuerza, energía vienen a completar este marco de referencia y determinan formas particulares de movimiento, conformándose así la dinámica de partículas como una disciplina adicional en el estudio de los fenómenos naturales. Un concepto fundamental en la dinámica de los cuerpos, es averiguar cómo se desplaza el cuerpo cuando se conocen las fuerzas que actúan sobre él, es decir, la forma cualitativa como cambiará de posición. El movimiento de una partícula dependerá principalmente, dentro del contexto de la mecánica clásica, del tipo de fuerza que obra sobre éste: si es una fuerza constante, si es variable, si depende del tiempo; o bien, si depende de la posición en algún instante de tiempo.

En este capítulo nos auxiliaremos de fenómenos físicos donde el movimiento involucra fuerzas que varían según la posición del cuerpo, poniendo especial énfasis en la ley de la conservación de la energía; con ello se continua el estudio acerca de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias, mostrando que por medio de este análisis es posible reducir la complejidad en el modelado y solución de distintos fenómenos.

## 1. Trabajo y energía

### 1.1. Trabajo

Si el movimiento de un cuerpo es en una sola dimensión y está influenciado por una fuerza constante, la expresión  $W = Fd$  denota al trabajo  $W$  hecho por la fuerza como el producto de la magnitud de la fuerza  $F$  por la distancia  $d$ . El trabajo puede ser positivo o negativo en virtud de la fuerza que obra sobre el cuerpo<sup>29</sup>.

Suponemos que un cuerpo se mueve bajo la influencia de una fuerza que está dada como una función de la posición  $F(x)$ . Durante un pequeño desplazamiento de la partícula, la fuerza  $F$  permanece casi constante y el trabajo  $\Delta w$  que realiza es aproximadamente:

$$\Delta w = F \Delta x$$

El trabajo total hecho por  $F$  al desplazarse el cuerpo de  $x_0$  a  $x$  es aproximadamente:

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) \Delta x$$

donde  $\Delta x = \frac{x - x_0}{n}$  y  $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ .

Si se toma el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  tenemos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) \Delta x = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

Podemos escribir el trabajo total hecho por  $F$  al desplazar a un cuerpo desde  $x_0$  hasta  $x$  como:

$$W = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (1.1)$$

<sup>29</sup>Si la partícula sobre la cual obra una fuerza tiene una componente de movimiento opuesta al sentido de la fuerza, el trabajo hecho por esta fuerza será negativo.

### 1.2. Energía cinética

Supóngase que una partícula se encuentra en movimiento, la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo de masa  $m$  y aceleración  $a$ , está definida por la segunda ley de Newton y es el producto de la masa por la aceleración:

$$F = ma.$$

Podemos sustituir la fuerza  $F(x)$  por el producto  $ma$  en la ecuación 1.1 obteniendo:

$$W = \int_{x_0}^x madx$$

Si tomamos a la aceleración como la derivada de la velocidad  $v$  con respecto al tiempo  $t$  tenemos:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

aplicando la regla de la cadena para el operador  $\frac{dv}{dt}$  tenemos:

$$\begin{aligned} F &= m \frac{dv}{dt} \\ F &= m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \\ F &= mv \frac{dv}{dx} \end{aligned} \tag{1.2}$$

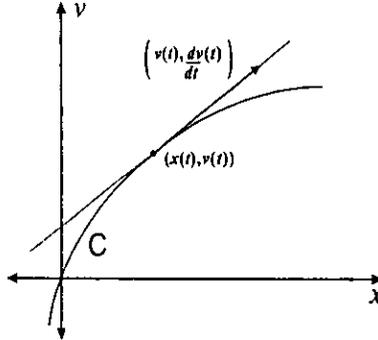
**Nota 2.** ¿Por qué podemos hablar de  $\frac{dv}{dx}$  si  $v$  es una función de  $t$  y no de  $x$ ?...

Esta observación es muy importante y vale la pena hacer una pausa para dar una justificación adecuada sobre el uso de  $\frac{dv}{dx}$ . A manera de paréntesis se ofrece a continuación una razón por la cual  $v$  puede tomarse como función de  $x$ :

Sea  $C$  la curva parametrizada por:

$$t \mapsto (x(t), v(t))$$

donde  $v(t) = \frac{dx}{dt}$ , la tangente a  $C$  en el punto  $(x(t), v(t))$  es la recta con dirección  $\left[ v(t), \frac{dv}{dt}(t) \right]$ .



Por lo tanto si  $v(t) \neq 0$ , entonces  $C$  tiene una tangente que no es vertical y localmente  $C$  es la gráfica de una función, con lo cual  $v$  puede ser tomada como una función de  $x$ . Por lo tanto se toma como válida la expresión<sup>30</sup>:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

En resumen, si  $v(t) \neq 0$ , localmente puede expresarse  $v$  como función de  $x$ .

Retomando el análisis sobre la energía cinética, habíamos expresado que:

$$F = mv \frac{dv}{dx}$$

de tal forma, es posible escribir el trabajo  $W$  como:

$$W = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

$$W = \int_{x_0}^x mv \frac{dv}{dx} dx$$

<sup>30</sup>Abusando de notación escribiremos  $v(t)$  o  $v(x)$  para denotar la velocidad de la partícula en el tiempo  $t$  o su velocidad cuando pasa por la posición  $x$ .

$$W = \int_{v_0}^v m v dv$$

Al evaluar la integral se obtiene el valor del trabajo realizado:

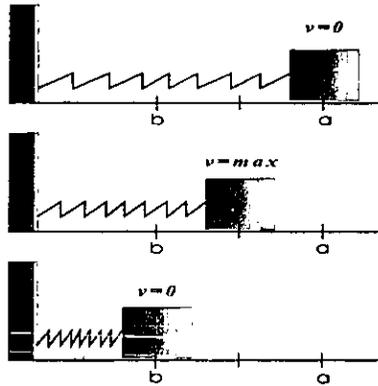
$$W = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (1.3)$$

La mitad del producto de la masa de un cuerpo por el cuadrado de su velocidad le llamaremos *energía cinética* o energía de movimiento de la partícula y la denotaremos por  $K$ . La igualdad 1.3 la podemos expresar como<sup>31</sup>:

$$W = K(v) - K(v_0)$$

### 1.3. Fuerzas conservativas

Una fuerza es conservativa si el trabajo hecho por la fuerza sobre un partícula que se mueve siguiendo un circuito completo cualquiera, es cero. Imaginemos un resorte fijo que obedece la ley de Hooke:  $F = -kx$ , siendo  $F$  la fuerza ejercida por el resorte cuando su extremo libre sufre una deformación, y consideremos un bloque de masa  $m$  en alguno de los extremos del resorte. Si jalamos el bloque y lo dejamos libre, el bloque se moverá con velocidad  $v$ , disminuyendo el movimiento y la velocidad hasta quedar en reposo, perdiendo en este trayecto energía cinética; en este mismo instante el bloque invierte su movimiento y conforme el resorte se dilata gana velocidad y energía cinética.



<sup>31</sup>El trabajo efectuado por la fuerza resultante que obra sobre una partícula es igual al cambio de la energía cinética:  $W = \Delta K$ .

Cuando el bloque llega de nuevo a la posición desde la que inició el movimiento, encontramos que tiene la misma velocidad y energía cinética que tenía originalmente, sólo ha cambiado el sentido del movimiento. El bloque pierde energía cinética durante una parte de su movimiento pero la recupera durante la otra parte, cuando regresa a su punto de partida. La energía cinética de un cuerpo la interpretamos como su capacidad para hacer trabajo en virtud de su movimiento. Al terminar un viaje redondo la capacidad del bloque para hacer trabajo permanece igual, se ha conservado.

#### 1.4. Energía potencial

Se expresó al trabajo como:

$$W = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

sea entonces  $U(x)$  una primitiva de  $-F(x)$ , es decir:

$$\frac{dU}{dx}(x) = -F(x)$$

entonces:

$$W = U(x_0) - U(x)$$

Debido a que también  $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ , es posible escribir:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) \quad (1.4)$$

Supongamos que una partícula se mueve desde el punto  $a$  con posición  $x_0$  y velocidad  $v_0$  iniciales, hasta un punto  $b$  con posición  $x$  y velocidad  $v$  finales; entonces, en la ecuación 1.4 el valor del segundo miembro dependerá exclusivamente de los valores iniciales  $(x_0, v_0)$  y por lo tanto tomará un valor constante durante el movimiento de la partícula:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E_0 \quad (1.5)$$

Este valor constante  $E_0$  constituye la energía mecánica total, cumpliéndose con ello la ley de la conservación de la energía cinética más la potencial cuando la fuerza sólo depende de la posición. Cabe mencionar que para diferentes condiciones

iniciales  $(x_1, v_1)$  el valor de la energía durante el movimiento es otra constante  $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1)$ .

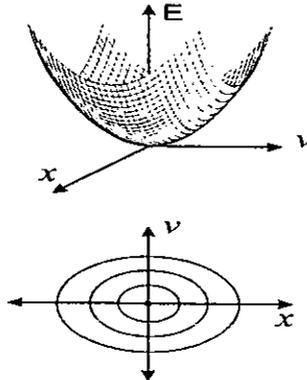
Si fijamos el valor de la energía mecánica total  $E = E_0$ , podemos expresar la ecuación 1.5 como una ecuación diferencial implícita<sup>32</sup> de primer orden sustituyendo la velocidad  $v$  por  $\frac{dx}{dt}$ :

$$\frac{1}{2}m \left[ \frac{dx}{dt} \right]^2 + U(x) = E_0$$

### 1.5. Curvas de energía constante

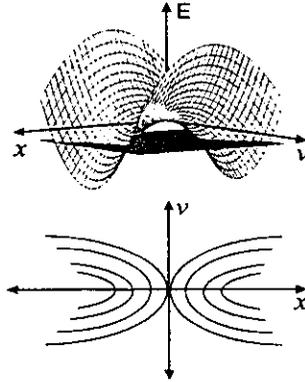
El conjunto de conceptos que hemos desarrollado hasta el momento nos permite expresar a la energía mecánica total como la suma de la energía cinética más la potencial. Durante el movimiento, el valor de la energía cinética dependerá de la velocidad de la partícula, mientras que la energía potencial dependerá de la posición; por lo tanto, el valor de la energía mecánica total estará en función de la velocidad  $v$  y la posición  $x$  que adquiera la partícula en cualquier instante de tiempo.

Cada valor que tomen  $x$  y  $v$  corresponderá a un valor de la energía mecánica total  $E(x, v)$ , tal comportamiento lo podemos expresar gráficamente como un superficie  $S$  dentro del espacio  $(x, v, E)$ . El conjunto de puntos  $(x, v)$  para los cuales  $E(x, v) = k$  representa una curva, la cual llamaremos *curva de energía constante*.

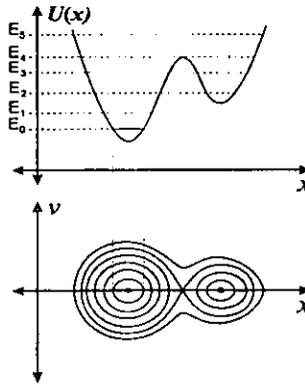


<sup>32</sup>Se dice implícita, pues no se puede despejar  $\frac{dx}{dt}$  de manera única.

Geoméricamente, las curvas de energía constante son las proyecciones de  $S$  sobre el espacio  $(x, v)$  al ser cortadas por el plano  $E(x, v) = k$ .



Podemos decir también que, dado un potencial fijo en la expresión  $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$  para cada valor de  $k$  de la energía total, se generará una curva de energía constante:



Es sencillo y útil este tipo de estudio cualitativo basado en la energía, proporcionando una idea bastante aproximada sobre la dinámica de las partículas<sup>33</sup>.

<sup>33</sup>Para obtener mayor información véase Vladimir I. Arnold, op.cit., pp. 140-142.

### 1.6. Soluciones de ecuaciones diferenciales que involucran energía

La descripción del movimiento de una partícula bajo un sistema conservativo, donde la fuerza que obra sobre el cuerpo depende de la posición, puede realizarse a través de una ecuación diferencial implícita de primer orden. Debido a que la segunda ley de Newton  $F = ma$  también describe este tipo de movimiento, podemos expresar la siguiente proposición:

**Proposición 1.1.** Si  $x = \varphi(t)$  es una solución de la ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \quad (1.6)$$

que cumple  $\varphi(t_0) = x_0$  y  $\varphi'(t_0) = v_0$ , entonces  $\varphi(t)$  es solución de:

$$\frac{1}{2}m \left[ \frac{dx}{dt} \right]^2 + U(x) = E_0 \quad (1.7)$$

donde  $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0)$ .

Para demostrar la proposición anterior consideremos que, dada la función  $x = \varphi(t)$  su energía en cada instante  $t$  es:

$$E(t) = K \left( \frac{d\varphi}{dt}(t) \right) + U(\varphi(t))$$

Usando la energía potencial  $U(x)$  como una primitiva de  $-F(x)$  se sigue que:

$$E(t) = \frac{1}{2}m (\varphi'(t))^2 - F(\varphi(t))$$

derivando tenemos:

$$\begin{aligned} E'(t) &= m\varphi'(t)\varphi''(t) - F(\varphi(t))\varphi'(t) \\ E'(t) &= \varphi'(t) [m\varphi''(t) - F(\varphi(t))] \end{aligned}$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) \left[ m \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t) - F(\varphi(t)) \right]$$

Si  $\varphi(t)$  es solución a la ecuación diferencial 1.6, la energía  $E(t)$  permanecerá constante. Lo anterior puede verificarse ya que:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

entonces:

$$m\varphi''(t) = F(\varphi(t))$$

de ahí tenemos que:

$$E'(t) = \varphi'(t) [m\varphi''(t) - m\varphi''(t)]$$

$$E'(t) = 0$$

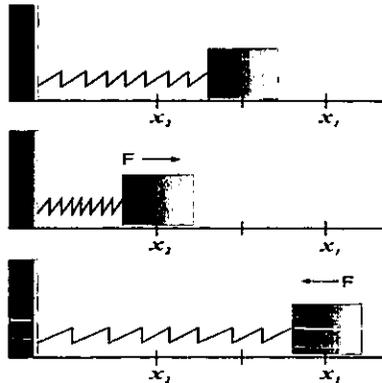
Usando las condiciones iniciales marcadas se sigue que  $\varphi(t)$  es solución a 1.7.

Cabe destacar que no todas las soluciones de la ecuación 1.7 son soluciones de la ecuación 1.6, un ejemplo de esto son las soluciones constantes.

## 2. El resorte

Supongamos que contamos con un resorte que tiene un extremo fijo y en el otro extremo está unido a un cuerpo de masa  $m$ . Cuando el resorte no está ni comprimido ni extendido adquiere una longitud determinada que llamaremos la longitud de equilibrio en la que no se ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Convendrá tomar un sistema de coordenadas cuyo eje  $X$  esté en sentido horizontal, a lo largo del resorte, con la finalidad de cuantificar la posición del cuerpo en cada momento y tomar el origen  $O$  cuando el resorte se encuentre en equilibrio. El sentido positivo estará a la derecha del origen y el negativo a la izquierda.

El resorte ejerce una fuerza, que denotaremos como  $F$ , con dirección a lo largo del eje  $X$ . En caso de ser estirado el resorte, el sentido que experimentará la fuerza será hacia la posición de equilibrio, es decir, negativa; si el resorte se comprime el sentido será positivo dirigiéndose también hacia la posición de equilibrio. La magnitud de la fuerza en ambos casos depende de la distancia de separación desde la posición de equilibrio a la posición actual que denotaremos como  $x$ . En virtud del crecimiento del valor de  $x$ , la magnitud de la fuerza también aumentará, de tal forma que la fuerza ejercida por el resorte es proporcional a la magnitud de la distancia  $x$ . La magnitud de la fuerza también está influenciada por las características del resorte, manifestadas en una constante de proporcionalidad  $k$ .



Como la fuerza que se ejerce sobre el resorte es una fuerza restitutiva, podemos

expresarla de la siguiente forma:

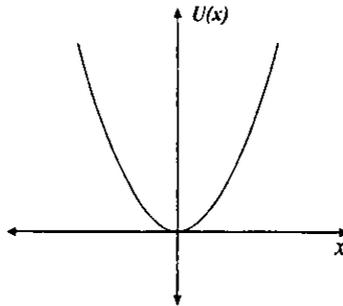
$$F(x) = -kx$$

### 2.1. Descripción del movimiento

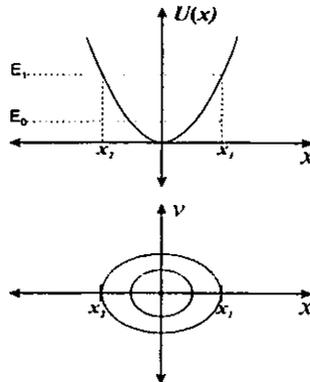
Para estudiar el movimiento que sigue el cuerpo o partícula unido al resorte bajo la acción de la fuerza, usamos la información que proporciona la gráfica de la energía potencial  $U(x)$ . La energía potencial para el resorte es una primitiva de  $-F(x) = kx$ , con lo que:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

La gráfica  $U(x)$  tiene la forma:



Las curvas de energía constante que se generan son curvas cerradas:



Si el valor de la energía es cero, digamos  $E_0 = 0$ , la partícula sólo podrá estar en reposo; con esto el resorte permanecerá en su posición de equilibrio sin experimentar algún desplazamiento y la velocidad será nula. Para un valor  $E_1$  ligeramente superior a  $E_0$ , la partícula se moverá de  $x_1$  a  $x_2$ , a tales puntos les llamaremos *puntos de retorno*. Si el resorte se estira hacia la derecha del origen hasta el punto  $x_1$ , donde  $v = 0$ , al soltarlo la rapidez máxima será precisamente al pasar por el origen  $O$  e irá disminuyendo hasta llegar a  $x_2$ , presentándose una oscilación cuando regresa al mismo punto inicial  $x_1$ . El movimiento es oscilatorio y se conoce con el nombre de *movimiento armónico simple*.

La ecuación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E$$

para el caso de resorte adquiere la forma:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (2.1)$$

Los puntos de retorno donde la partícula tiene velocidad nula pueden calcularse sustituyendo  $v$  por 0 en 2.1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx^2 &= E \\ x^2 &= \frac{2E}{k} \end{aligned}$$

con lo que:

$$\begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{\frac{2E}{k}} \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{2E}{k}} \end{aligned}$$

Este comportamiento está descrito en las curvas de energía constante: A medida que el bloque se dirige a un punto de retorno, la velocidad comienza a disminuir y en el momento en que alcanza los puntos de retorno  $x_1, x_2$  el valor de la velocidad se anula.

## 2.2. Análisis de soluciones

La relación entre el tiempo que transcurre y la posición de la partícula la podemos hallar por medio de la ecuación 2.1, que podemos reescribir como:

$$\frac{1}{2}m \left[ \frac{dx}{dt} \right]^2 = E - \frac{1}{2}kx^2$$

Fijando el valor de la energía<sup>34</sup>  $E > 0$ , la ecuación anterior será una ecuación diferencial implícita de primer orden. De ahí, es posible considerar dos ecuaciones diferenciales:

$$1. \frac{dx}{dt} = +\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{1}{2}kx^2 \right)}$$

$$2. \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{1}{2}kx^2 \right)}$$

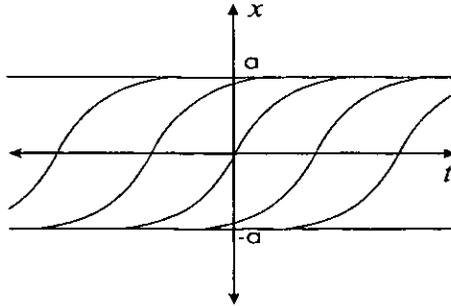
Para analizar el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial 2.1 consideraremos por separado la primera ecuación, de donde se tiene que:

- a) Es una ecuación diferencial autónoma definida para  $|x| \leq \sqrt{\frac{2E}{k}} = a$ , cuando la velocidad es cero<sup>35</sup>.
- b) Tiene dos soluciones constantes  $\varphi(t) \equiv a$  y  $\varphi(t) \equiv -a$ .
- c) Si  $|x| < a$  entonces  $\frac{dx}{dt} > 0$ , con lo que las soluciones  $x = \varphi(t)$  serán crecientes mientras  $|\varphi(t)| < a$ .

La gráfica de las soluciones analizadas se presenta en el siguiente dibujo:

<sup>34</sup>El valor de la energía total será siempre mayor que cero y nunca menor al valor de la energía potencial.

<sup>35</sup>Para que la raíz cuadrada tenga sentido es necesario que  $x^2 \leq \frac{2E}{k}$ , lo cual podemos expresar como  $|x| \leq \sqrt{\frac{2E}{k}}$ .



Al observar el comportamiento de las soluciones no constantes, podemos reflexionar un poco y preguntarnos qué sucede cerca de los límites  $a$  y  $-a$ , más específicamente: ¿Sus gráficas tocan a las soluciones constantes?; de ser así, ¿Cómo comprobarlo?.

Es importante resaltar que cuando el bloque alcanza un punto de retorno habrá transcurrido un tiempo  $t$  perfectamente cuantificable, en abstracto esto significa que para cualquier solución  $x = \varphi(t)$  existe un tiempo  $\hat{t}$  finito en el cual  $\varphi(\hat{t}) = a$ . Lo anterior lo podemos verificar analíticamente utilizando la siguiente proposición:

**Proposición 2.1.** *El valor de  $t$  es el tiempo en el cual la partícula que en  $t_0$  estaba en el punto  $x_0$ , estará ahora en la posición  $x$ , y se calcula por medio de la expresión:*

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{1}{2}ku^2 \right)}} \quad (2.2)$$

La ecuación 2.2 generará una función  $\psi(x) = t$  que determinará el tiempo que transcurre para que la partícula alcance la posición  $x$ . Si utilizamos las condiciones iniciales  $\psi(x_0) = t_0$  y haciendo las sustituciones:

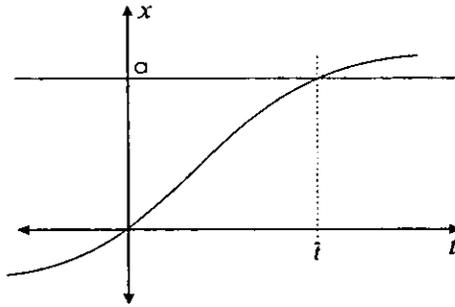
$$W_0^2 A^2 = \frac{2E}{m}$$

$$\frac{k}{m} = W_0^2$$

podemos resolver la ecuación:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{du}{W_0 \sqrt{(A^2 - u^2)}} \quad (2.3)$$

Si se halla el valor de la ecuación 2.3 podremos cuantificar el tiempo  $\hat{t}$  en el cual la partícula ocupa la posición  $x = a$ . Evaluemos entonces la ecuación con las condiciones iniciales  $\varphi(0) = 0$  y calculemos el tiempo que tarda la partícula en llegar al punto de retorno  $a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ .



Sea la ecuación:

$$\hat{t} = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{du}{W_0 \sqrt{(A^2 - u^2)}}$$

al utilizar las condiciones iniciales planteadas puede escribirse como:

$$\hat{t} = \frac{1}{W_0} \int_0^a \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}}$$

Evaluando la integral tenemos:

$$\hat{t} = \frac{1}{W_0} \arcsin \frac{x}{A} \Big|_0^a$$

$$\hat{t} = \frac{1}{W_0} \arcsin \frac{a}{A} - \frac{1}{W_0} \arcsin 0$$

Debido a que  $A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = a$  nos queda:

$$\hat{t} = \frac{1}{W_0} \arcsin 1 - \frac{1}{W_0} \arcsin 0$$

que corresponde a:

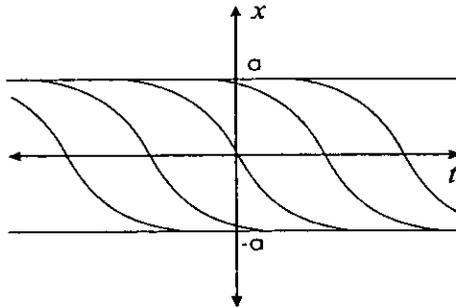
$$\hat{t} = \frac{1}{W_0} \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo  $W_0^2 = \frac{k}{m}$  obtenemos:

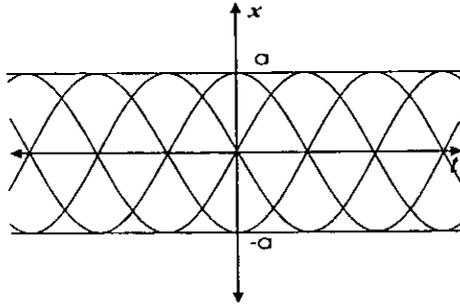
$$\hat{t} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Desde el punto de vista geométrico, lo anterior nos dice que la gráfica de  $\varphi(t) = x$  con condiciones iniciales  $t_0 = 0$  y  $x_0 = 0$  en un tiempo finito "toca" a la recta  $\varphi(t) \equiv a$ ; es decir, ambas gráficas se juntan en un tiempo  $\hat{t} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$ . Puesto que existen por lo menos dos soluciones que pasan por el punto  $(\hat{t}, a)$  no existe unicidad de soluciones.

Análogamente se puede analizar la segunda ecuación para conocer la forma de las soluciones de la ecuación diferencial 2.1. Esta ecuación generará las mismas soluciones constantes  $\varphi(t) \equiv a$  y  $\varphi(t) \equiv -a$ . Si  $|x| < a$ , la derivada  $\frac{dx}{dt} < 0$ , con lo que las soluciones  $x = \varphi(t)$  serán decrecientes mientras  $|\varphi(t)| < a$ .



Uniendo las soluciones de ambos casos se tiene:



Es importante hacer notar que las soluciones constantes  $\varphi(t) \equiv a$  y  $\varphi(t) \equiv -a$  no son un fenómeno físico debido a que la partícula no puede llegar a un punto de retorno y permanecer ahí siempre.

Una interpretación sobre las gráficas que se obtuvieron al final consiste en decir que si la partícula comienza el movimiento desde el punto de retorno situado a la izquierda de la posición de equilibrio, la posición que el cuerpo adquiera comenzará a acercarse al otro punto de retorno  $x_1 = a$  en el cual la velocidad es cero. Seguido, la partícula comienza el camino de retorno disminuyendo la posición y pasando nuevamente por el punto de equilibrio hasta alcanzar el punto de retorno inicial  $x_2 = -a$ .

Por último, cabe subrayar dos puntos importantes:

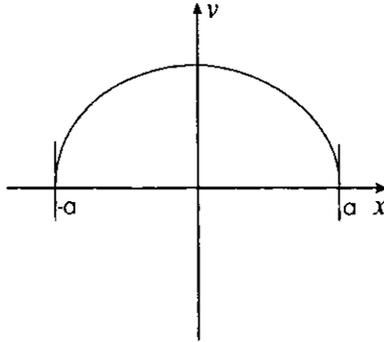
1. La integral:

$$\int_0^a \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{1}{2}ku^2 \right)}}$$

está acotada, por lo tanto converge a un valor finito<sup>36</sup>.

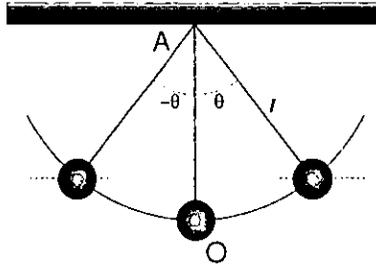
<sup>36</sup>La convergencia o divergencia de esta integral, como veremos más adelante, implica la unicidad o no de soluciones.

2. La gráfica de  $\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)}$  tiene tangentes verticales en los puntos  $a$  y  $-a$ .



### 3. El péndulo simple

Un péndulo simple consiste de una partícula de masa  $m$  soportada por una cuerda o hilo inelástico de largo  $l$  y de masa despreciable, la partícula durante su movimiento describe un arco de circunferencia con radio  $l$ . Denotaremos a  $\theta$  como el ángulo que describe la amplitud comprendida entre la vertical  $AO$  y su posición extrema, cuando la partícula está a la derecha de la vertical  $\theta > 0$  y cuando está a la izquierda  $\theta < 0$ .

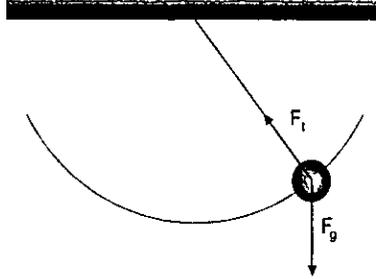


La posición  $x(t)$  de la partícula en cada instante de tiempo corresponde a calcular el ángulo  $\theta(t)$  que también variará respecto al tiempo.

Nuestro objetivo es deducir la ecuación diferencial para  $\theta(t)$  partiendo de la segunda ley de Newton. Para esto es conveniente, por un lado, expresar los vectores fuerza y aceleración como combinaciones lineales de un vector tangente al movimiento y otro perpendicular a éste; por otro lado, expresar  $x(t)$  en términos de  $\theta$ .

Primeramente, mientras la partícula está en movimiento dos fuerzas actúan

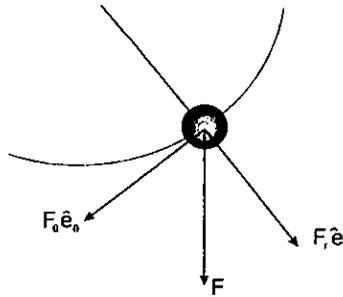
sobre ella: La fuerza de tensión  $F_t$  y la fuerza debida a la gravedad  $F_g$ .



Para calcular el valor de estas dos fuerzas comencemos diciendo que en general cualquier fuerza  $F$  puede expresarse como:

$$F = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta$$

donde  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$  son dos vectores unitarios ortogonales entre sí.  $\hat{e}_r$  es perpendicular al círculo (a la trayectoria) y apunta hacia afuera,  $\hat{e}_\theta$  es tangente al círculo y es una rotación de  $\frac{\pi}{2}$ , en el sentido contrario a las manecillas del reloj, de  $\hat{e}_r$ .



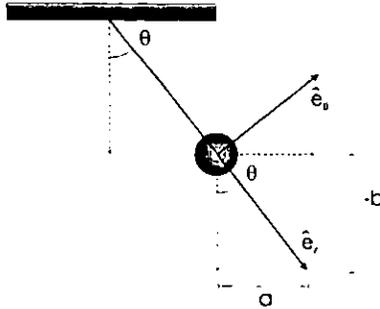
Los vectores  $\hat{e}_r$  y  $\hat{e}_\theta$  tienen las propiedades siguientes:

$$\|\hat{e}_r\| = \|\hat{e}_\theta\| = 1$$

$$\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_r = 0$$

$$\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = 1$$

Tomando un sistema de referencia auxiliar, trigonométricamente podemos calcular las componentes de los vectores  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ .



Obtenemos de esta manera que:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= (\sin \theta, -\cos \theta) \\ \hat{e}_\theta &= (\cos \theta, \sin \theta)\end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, podemos expresar la fuerza de tensión  $F_t$  aplicada al movimiento de la partícula como:

$$F_t = F_{t_r} \hat{e}_r + F_{t_\theta} \hat{e}_\theta$$

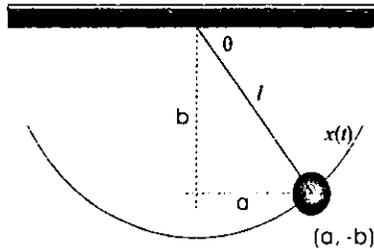
Debido a que la fuerza de tensión es perpendicular al movimiento del péndulo y apunta hacia adentro del círculo, la componente tangencial  $F_{t_\theta}$  se anula, quedando:

$$F_t = -\|F_{t_r}\| \hat{e}_r$$

Entonces, la fuerza total está dada por:

$$F_T = F_g - \|F_{t_r}\| \hat{e}_r \tag{3.1}$$

Por otro lado, el valor de  $x(t)$  lo podemos calcular determinando las coordenadas de la partícula sobre el semicírculo descrito por el movimiento.



Las coordenadas  $(a, b)$  están dadas por:

$$\begin{aligned} l \sin \theta &= a \\ l \cos \theta &= b \end{aligned}$$

con lo que:

$$x(t) = (l \sin \theta(t), -l \cos \theta(t))$$

De la expresión anterior podemos hallar las ecuaciones que cuantifiquen la velocidad y la aceleración de la partícula al pasar por algún punto de la trayectoria. Para la velocidad se tiene:

$$x'(t) = (l \cos \theta(t) \theta'(t), l \sin \theta(t) \theta'(t))$$

y para la aceleración:

$$x''(t) = \begin{bmatrix} -l \sin \theta(t) (\theta'(t))^2 + l \cos \theta(t) \theta''(t), \\ l \cos \theta(t) (\theta'(t))^2 + l \sin \theta(t) \theta''(t) \end{bmatrix}$$

Notemos que la ecuación anterior también se puede expresar en términos de  $\hat{e}_\theta$  y  $\hat{e}_r$ :

$$x''(t) = -l (\theta'(t))^2 \hat{e}_r + l \theta''(t) \hat{e}_\theta \quad (3.2)$$

Es posible expresar en términos de la segunda ley de Newton  $mx'' = F$  la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo utilizando las ecuaciones 3.1 y 3.2:

$$m \left[ -l (\theta'(t))^2 \hat{e}_r + l \theta''(t) \hat{e}_\theta \right] = F_g - \|F_{t_r}\| \hat{e}_r$$

Realizando el producto punto por  $\hat{e}_\theta$  en ambos lados de la igualdad tenemos:

$$m \left[ -l (\theta'(t))^2 \hat{e}_r + l \theta''(t) \hat{e}_\theta \right] \cdot \hat{e}_\theta = [F_g - \|F_{t_r}\| \hat{e}_r] \cdot \hat{e}_\theta$$

de lo que se sigue:

$$\begin{aligned} ml \theta''(t) &= F_g \cdot \hat{e}_\theta \\ ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= (0, -mg) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

La ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mg}{l} \sin \theta$$

expresa la misma relación que plantea la segunda ley de Newton, por lo que podemos estudiarla bajo la perspectiva de la energía desarrollada anteriormente y describir así las propiedades del movimiento pendular.

### 3.1. Análisis de soluciones

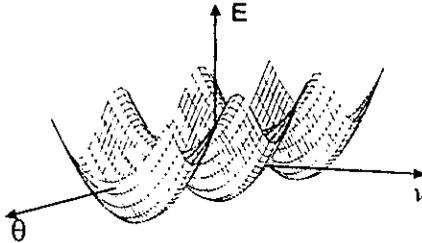
La energía potencial se calcula tomando la primitiva de  $-F(\theta) = \frac{mg}{l} \sin \theta$ , tal que:

$$U(\theta) = -\frac{mg}{l} \cos \theta$$

La ecuación de la energía para el péndulo simple es:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mg}{l} \cos \theta$$

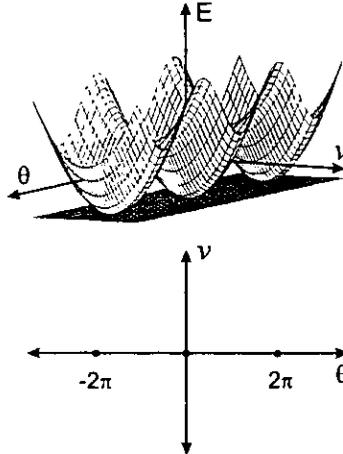
Las superficie  $S$  generada por esta ecuación tiene la forma:



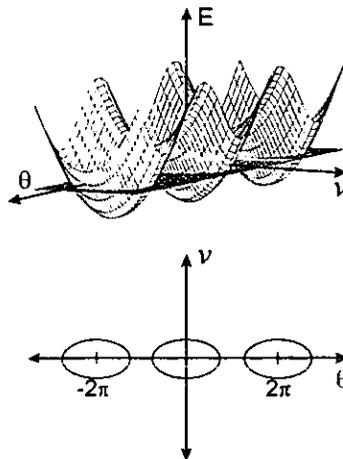
Si tomamos  $E(\theta, v) = k$  obtendremos las curvas de nivel de la superficie  $S$ , que son las curvas de energía constante:

1. Si fijamos a  $E_0 = -\frac{mg}{l}$ , entonces  $E = E_0$  es un plano horizontal que toca a  $S$  en sus valores mínimos, lo cual generará sobre el espacio  $(\theta, v)$  los puntos

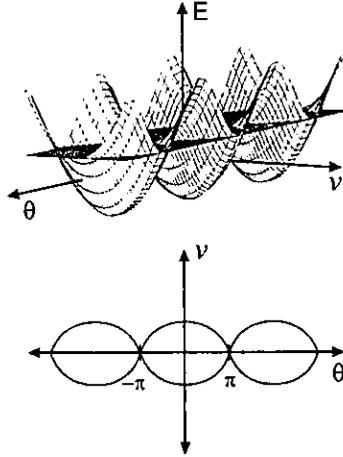
de la forma  $(2n\pi, 0)$  para  $n \in \mathbb{N}$ :



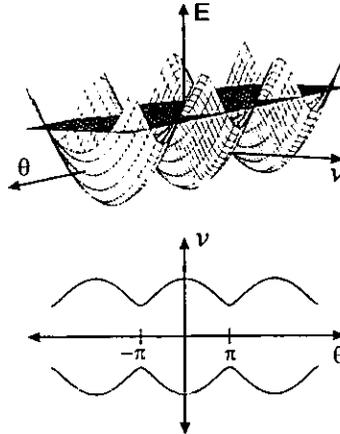
2. Si tomamos la energía  $E_1$  comprendida en el intervalo  $\left(-\frac{mg}{l}, \frac{mg}{l}\right)$ , las curvas generadas serán curvas cerradas como se ilustra en la siguiente figura:



3. Al tomar el valor  $E_2 = \frac{mg}{l}$ , las curvas de energía constante generarán otro tipo de curvas cerradas como las siguientes:

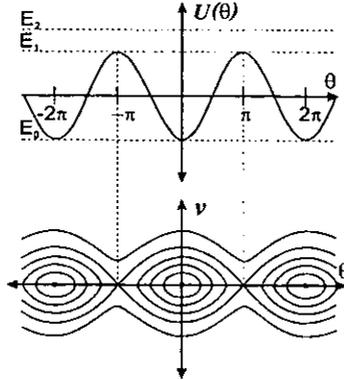


4. Por último, las proyecciones generadas al tomar cualquier valor  $E_3 > \frac{mg}{l}$  resultan ser:



Al fijar distintos valores de energía, las proyecciones en el espacio  $(\theta, v)$  son las curvas de energía constante, estas curvas nos muestran la relación existente entre

la posición de la partícula  $\theta$  y la velocidad  $v$  que experimenta en ese punto<sup>37</sup>.



Las interpretaciones físicas de acuerdo a los valores que toma  $E$  son las siguientes:

1. El mínimo valor de la energía<sup>38</sup> es  $E_0 = -\frac{mg}{l}$ . Para este nivel de energía el péndulo permanece en reposo sin que haya ningún desplazamiento.
2. Si la energía  $E_1 \in \left(-\frac{mg}{l}, \frac{mg}{l}\right)$ , el movimiento será oscilatorio.
3. Cuando la energía es  $E_2 = \frac{mg}{l}$  el movimiento ya no es oscilatorio, el péndulo experimenta un movimiento en el cual la velocidad disminuye muy lentamente cuando se acerca a un punto de retorno
4. Para valores de energía  $E_3 > \frac{mg}{l}$  el péndulo tendrá energía suficiente para describir más de una revolución completa.

<sup>37</sup>Nótese que cada curva de nivel es la representación de las propiedades de  $\frac{d\theta}{dt}$  proporcionada por la ecuación diferencial  $\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left( E_0 + \frac{mg}{l} \cos \theta \right)}$ .

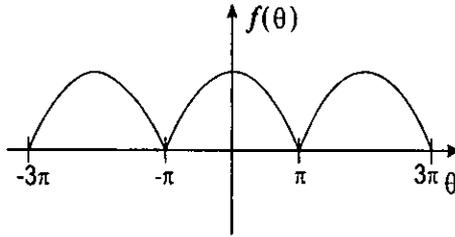
<sup>38</sup>Se descartan los valores de  $E < -\frac{mg}{l}$ , dado que el valor total de la energía no puede ser menor al mínimo valor de la energía potencial  $U(\theta)$ , lo cual corresponde a los valores del dominio en que está definida la función  $f(\theta) = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{mg}{l} \cos \theta \right)}$ .

Analicemos qué sucede en el caso particular cuando la energía toma el valor de  $E_2 = \frac{mg}{l}$ . La ecuación diferencial correspondiente al péndulo simple para este nivel de energía será:

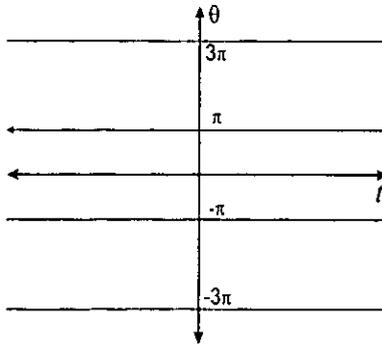
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 - \frac{mg}{l} \cos \theta &= \frac{mg}{l} \\ \frac{1}{2}m \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 &= \frac{mg}{l} (1 + \cos \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (1 + \cos \theta)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Analizando sólo la expresión con signo positivo, tenemos que:

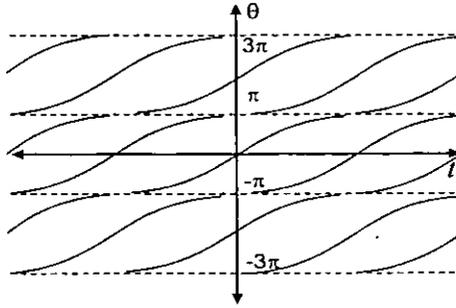
1. La gráfica de  $f(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{l} (1 + \cos \theta)}$  tiene la forma:



2. De acuerdo a la información cualitativa proporcionada por la gráfica de  $f(\theta)$ , se tienen soluciones constantes  $\varphi(t) \equiv (2n - 1)\pi$ .



3. Como  $\frac{d\theta}{dt} > 0$ , entonces las soluciones  $\theta = \varphi(t)$  son crecientes.



Análogamente, podemos calcular las soluciones de la ecuación diferencial con signo negativo<sup>39</sup>.

Como en el caso del movimiento armónico simple, es posible calcular el tiempo  $\hat{t}$  que tarda la partícula en llegar a una posición de equilibrio  $a$ . Para dicho fenómeno el valor obtenido fue finito y se interpretó geoméricamente diciendo que sus gráficas se tocaban en el punto  $(\hat{t}, a)$ .

En el caso del péndulo, la ecuación diferencial autónoma correspondiente al nivel de energía  $E = \frac{mg}{l}$  (ecuación 3.3) nos permitirá conocer el tiempo en que la partícula tardará en llegar a una posición de equilibrio. Si el péndulo comienza a moverse desde la posición inicial  $\theta = 0$ , ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la posición de equilibrio  $\theta_0 = \pi$ ?

Este tiempo lo podemos calcular haciendo:

$$\hat{t} = \int_0^\pi \frac{du}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos u)}}$$

$$\hat{t} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \frac{du}{\sqrt{1 + \cos u}}$$

<sup>39</sup>En este caso las curvas generadas por  $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos \theta)}$  no complementan la dinámica global del péndulo con un nivel de energía  $E = \frac{mg}{l}$  como veremos más adelante.

$$\hat{t} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \frac{du}{\sqrt{2 \cos^2 \frac{u}{2}}}$$

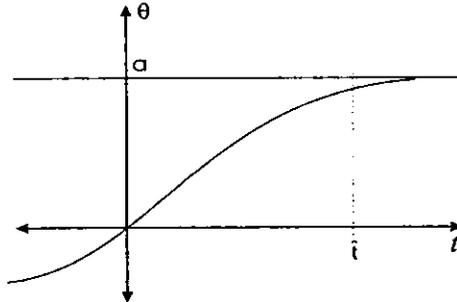
$$\hat{t} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[ \sec \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \right] \Bigg|_0^\pi$$

Evaluando las cotas tenemos:

$$\hat{t} = \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} \left[ \ln \left( \sec \frac{\pi}{2} + \tan \frac{\pi}{2} \right) - \ln (\sec 0 + \tan 0) \right]$$

como la  $\tan \frac{\pi}{2} = \infty$ , entonces  $\hat{t} = \infty$ .

Interpretando el resultado anterior podemos decir que no existe un tiempo finito en el cual la gráfica de  $\theta = \varphi(t)$  con condiciones iniciales  $\varphi(0) = 0$  toque a la posición de equilibrio  $\varphi(t) \equiv \pi$ .



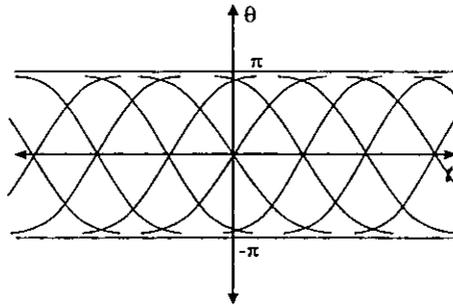
En este caso se dice que la ecuación diferencial planteada presenta unicidad en sus soluciones, debido a que solamente pasa una solución por el punto  $(t, \pi)$ . Desde este punto de vista el movimiento pendular puede interpretarse de la siguiente forma:

Con el nivel de energía  $E = \frac{mg}{l}$  la velocidad del péndulo disminuye muy lentamente mientras se dirige al punto de retorno y no existirá un tiempo finito en el que la partícula llegará la posición de equilibrio. La consecuencia inmediata de lo anterior es que la dinámica propuesta por la ecuación complementaria:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}} (1 + \cos \theta)$$

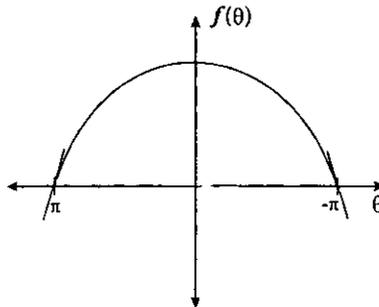
no forma parte de la descripción completa del movimiento del péndulo para el nivel de energía mencionado. Cuando estudiamos el movimiento armónico simple, el análisis geométrico de las soluciones correspondientes a las ecuaciones diferenciales (tomando ambos signos) que describían su dinámica mostraba que las soluciones para ambos casos podían complementarse puesto que se alcanzaba la posición de equilibrio. Las gráficas de las soluciones para cada ecuación diferencial podían formar parte de una sola curva que describiese la evolución global del sistema.

En el caso particular que estamos revisando, la dinámica propuesta por cada ecuación no se complementa, debido a que las gráficas de las soluciones no tocan la posición de equilibrio.



Finalmente, cabe destacar los siguientes puntos:

1. La gráfica de  $f(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{l}}(1 + \cos\theta)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , no tiene tangentes verticales para los puntos de equilibrio  $-\pi, \pi$ .



2. La integral:

$$\int_0^{\pi} \frac{du}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos u)}}$$

no está acotada, por tanto diverge.

Después de haber estudiado algunos procesos evolutivos donde la fuerza que obra sobre una partícula está en función de la posición en la que se encuentra, fue posible resaltar las particularidades que sobre unicidad presentaban sus soluciones. La presencia o no de unicidad de soluciones representa una herramienta muy valiosa para la interpretación completa de la evolución de los fenómenos que se modelan; por lo tanto, es necesario estudiar dicho concepto con más profundidad y plantear los criterios que determinan la unicidad de soluciones para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

---

# **CAPÍTULO III**

Unicidad de  
soluciones

## Capítulo III

# Unicidad de soluciones

### 1. Introducción

Los matemáticos del siglo XVIII admitían sin discusión la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias o de sus derivadas parciales, sin precisar los dominios de definición de estas soluciones. A lo más, justificaban su confianza al determinar los coeficientes de una serie entera que verificaba formalmente las ecuaciones propuestas. Este procedimiento mostraba en particular que para una ecuación diferencial de orden “ $n$ ”:

$$x^{(n)} = f(x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

dado un punto  $t_0$  con valores  $x_0, x'_0, x''_0, \dots, x_0^{(n-1)}$  de la función desconocida y de sus  $(n-1)$  primeras derivadas, debían determinar los valores de todas las derivadas siguientes en ese punto y por lo tanto la función misma.

Debido a que las ecuaciones diferenciales surgieron de problemas físicos y geométricos, era intuitivamente claro que estas ecuaciones tuvieran soluciones. Fue August Louis Cauchy quien en sus cursos alrededor del año 1820 aborda el problema de “existencia y unicidad” de manera rigurosa y proporciona dos métodos. El primero aplicable a una ecuación diferencial de primer orden  $x' = f(t, x)$  y el segundo el método de las funciones dominantes o mayorantes como es conocido.

Para una ecuación diferencial de primer orden:

$$x' = f(t, x)$$

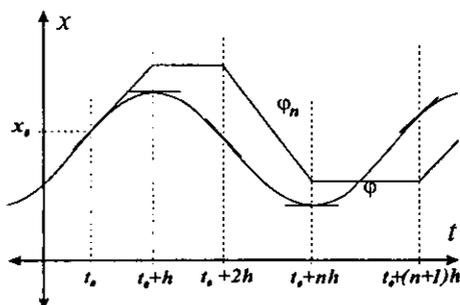
dónde  $f$  se supone *continua y diferenciable*, Cauchy se centra en probar que para valores dados  $(t_0, x_0)$  de  $t$  y  $x$ , existe una *solución única*  $x = \varphi(t)$  dentro de un intervalo suficientemente pequeño con centro en  $t_0$ , tal que  $x_0 = \varphi(t_0)$ . Aparece por primera vez un estudio de carácter *local* que se limita a afirmar la existencia y unicidad de la solución dentro de una vecindad de  $t_0$ , sin mencionar sus prolongaciones posibles, es decir el estudio *global* de las soluciones.

La idea de Cauchy consiste en retomar el método de Euler para calcular una solución aproximada. Dividía un intervalo con origen en  $t_0$  en segmentos  $t_0 + nh$  donde  $h > 0$  es arbitrariamente pequeño y  $n$  toma los valores enteros mayores o

iguales a cero, determinando por recurrencia una función  $\varphi_n$  continua y lineal en cada intervalo  $t_0 + nh \leq t \leq t_0 + (n + 1)h$  con la condición de que la pendiente de  $x = \varphi_n(t)$  dentro del intervalo sea igual a  $f(t_0 + nh, \varphi_n(t_0 + nh))$ . La novedad es que se utilizaba el teorema de la media o valor medio.

Cauchy mejora dentro de un intervalo fijo suficientemente pequeño (dependiente de  $f$  y de  $(t_0, x_0)$ , mas no de  $h$ ), la diferencia  $\varphi_n - \varphi'_m$  para  $h$  y  $h'$  pequeñas; él prueba así que cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $\varphi_n(t)$  tiende en cada punto del intervalo fijado hacia una función  $\varphi(x)$  que es la única solución de la ecuación  $x' = f(t, x)$  que satisface la condición  $x_0 = \varphi(t_0)$ .

Cauchy supuso que  $f(t, x)$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}$  son continuas para todos los valores reales de  $t$  y  $x$ , en el rectángulo determinado por  $(t_0, t)$  y  $(x_0, x)$ .



Para 1868, Rudolph Lipschitz sin conocer aparentemente el trabajo de Cauchy, retoma este método y añade que la continuidad de la derivada de  $f$  no es necesaria: Es suficiente que  $f$  satisfaga dentro de una vecindad de  $(t_0, x_0)$  la condición (de Lipschitz), de que exista una constante  $k > 0$  tal que para  $(t, x)$  dentro de esta vecindad:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

Con esto, Lipschitz debilita las hipótesis del teorema de Cauchy y el teorema de existencia y unicidad es llamado el *Teorema de Cauchy-Lipshitz*<sup>40</sup>.

El segundo método de Cauchy para establecer la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, fue llamado por Cauchy "*Calcule des limites*" ya que proporciona los límites dentro de los cuales converge la solución cuya existencia

<sup>40</sup>Jean Dieudonné. "L'analyse fonctionnelle" en *Abregé d'histoire mathematiques: 1700-1900*, pp. 115-118. [9]

se establece. Este método fue presentado en una serie de ensayos en las "*Comptes Rendus*" durante los años 1839-1842. Otros métodos para demostrar la existencia local de soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden son desarrollados y utilizados por primera vez en 1837.

## 2. Teorema de existencia y unicidad de Cauchy

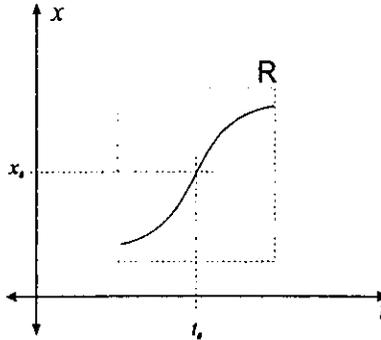
Cuando consideramos una ecuación diferencial ordinaria de primer orden surgen de inmediato diversas preguntas sobre la existencia de soluciones o bien, de su unicidad; cuestionamientos tan importantes que requirieron de especial atención y estudio por parte de muchos matemáticos de la época para darles una respuesta satisfactoria. Nuestro objetivo en este capítulo consiste en estudiar el concepto de unicidad, resaltando las condiciones y propiedades bajo las cuales una solución se dice que es única<sup>41</sup>.

Pensemos en la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

sujeta a las condiciones iniciales  $\varphi(t_0) = x_0$ .

De las gráficas de las soluciones que cumplen con esta igualdad y que están delimitadas por una región  $R$ , ¿Cuáles y cuántas son las que pasan por el punto  $(t_0, x_0)$ ?



Es correcto afirmar que no todas las ecuaciones diferenciales tienen solución pero si éstas existen puede ser que más de una cumpla con las condiciones iniciales propuestas<sup>42</sup>. Así, en varias aplicaciones es importante considerar un criterio

<sup>41</sup>Aunque en este capítulo se expone el concepto de existencia y las condiciones para que se presente, nos enfocaremos con mayor énfasis en el estudio de la unicidad.

<sup>42</sup>Esto adquiere mayor relevancia cuando se estudian fenómenos físicos o biológicos donde se requiere una interpretación precisa del fenómeno.

que delimite la existencia y unicidad de soluciones, lo cual da paso a mencionar el siguiente teorema de existencia y unicidad:

**Teorema 2.1.** Dada la ecuación diferencial ordinaria:

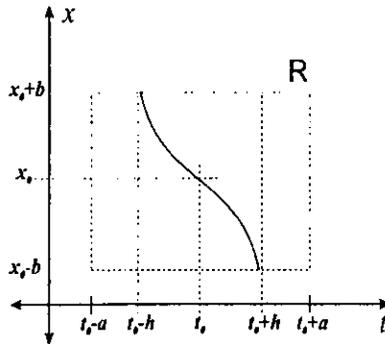
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

denotemos por  $R$  la región rectangular definida por:

$$|t - t_0| \leq a \text{ y } |x - x_0| \leq b$$

Supóngase que  $f(t, x)$  y  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  son funciones continuas de  $t$  y  $x$  en  $R$ , entonces existe un intervalo alrededor de  $t_0$  dado por  $|t - t_0| \leq h$  y existe una función  $x = \varphi(t)$  la cual tiene las propiedades:

- i)  $x = \varphi(t)$  es una solución de la ecuación  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$  sobre el intervalo  $|t - t_0| \leq h$ .
- ii) En el mismo intervalo  $\varphi(t)$  satisface la desigualdad  $|\varphi(t) - x_0| \leq b$ .
- iii)  $\varphi(t_0) = x_0$ .
- iv)  $x = \varphi(t)$  es la única en el intervalo  $|t - t_0| \leq h$ , en el sentido de que ésta es la única función que satisface las proposiciones anteriores.



El teorema anterior se basa en los planteamientos realizados por Cauchy y le llamaremos aquí *Teorema de existencia y unicidad de Cauchy*<sup>43</sup>.

<sup>43</sup>La demostración de este teorema no la desarrollaremos aquí, sin embargo puede consultarse

A continuación, se expondrán algunas consideraciones importantes respecto a este teorema.

### 2.1. Región rectangular

A pesar de escoger una región rectangular  $R$  con centro en  $(t_0, x_0)$  en la que se restrinja el análisis de soluciones de una ecuación diferencial es posible que para ésta existan varias funciones  $\varphi(t)$  que satisfacen las condiciones iniciales  $\varphi(t_0) = x_0$ . Por tanto, una región  $R$  que asegure la unicidad de soluciones lo hará sólo de manera local sin proporcionar más información sobre el comportamiento de las soluciones fuera de ella. A continuación detallaremos esta situación:

Sea la ecuación diferencial ordinaria autónoma:

$$\frac{dx}{dt} = x^{2/3} \tag{2.1}$$

tomemos a  $f(x) = x^{2/3}$ .

Las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &\equiv 0 \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{27}(t+c)^3 \end{aligned}$$

Se desea conocer las gráficas de las soluciones que pasan por el punto  $(t_0, 0)$ . Para la ecuación diferencial 2.1 existe una infinidad de soluciones que cumplen con las condiciones iniciales  $\varphi(t_0) = x_0$  que se puede verificar haciendo:

Para cada  $c \leq -t_0$ , es posible construir la función:

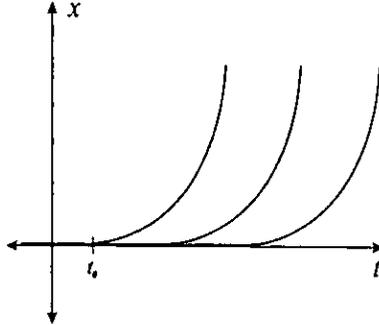
$$\varphi_c(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -c \\ \frac{1}{27}(t+c)^3 & t > -c \end{cases}$$

la cual es solución y cumple las condiciones iniciales planteadas.

La gráfica de  $\varphi_c(t)$  se muestra a continuación:

---

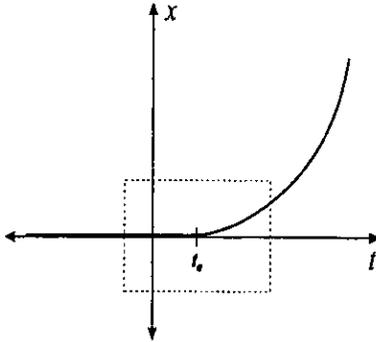
en William Boyce, Richard Diprima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valor en la frontera*, pp. 99-112.[5]



Cualquier gráfica generada por  $\varphi_c(t)$  pasará por el punto  $(t_0, 0)$  y existe más de una gráfica que pasa por este punto.

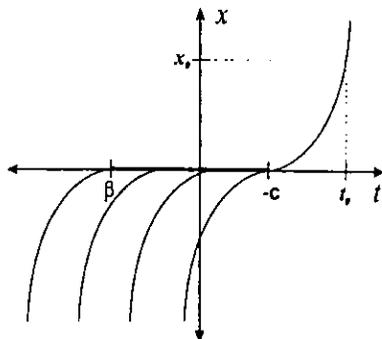
Es importante mencionar que la derivada  $f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$  está definida para  $\forall x$  excepto para  $x = 0$ .

Observemos que aún restringiéndose a cualquier rectángulo  $R$  con centro en  $(t_0, 0)$ , hay una infinidad de soluciones para la ecuación diferencial 2.1



Consideremos ahora el punto  $(t_0, x_0)$  donde  $x_0 > 0$  y veamos que también

existe una infinidad de gráficas de soluciones que pasan a través de él:



Tomemos al parámetro  $\beta \leq -c$  y determinemos el valor de  $c$  en la expresión  $\varphi(t) = \frac{1}{27}(t+c)^3$  con condiciones iniciales  $\varphi(t_0) = x_0$ :

$$c = 3\sqrt[3]{x_0} - t_0$$

o bien:

$$-c = t_0 - 3\sqrt[3]{x_0}$$

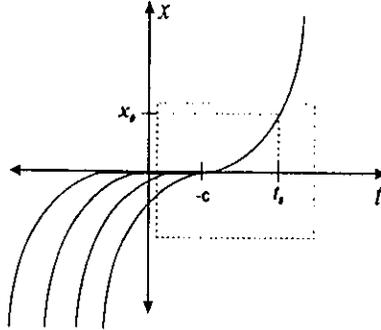
Con lo anterior podemos expresar la función:

$$\varphi_\beta(t) = \begin{cases} \frac{1}{27}(t + 3\sqrt[3]{x_0} - t_0)^3 & t > t_0 - 3\sqrt[3]{x_0} \\ 0 & t \in [\beta, t_0 - 3\sqrt[3]{x_0}] \\ \frac{1}{27}(t - \beta)^3 & t < \beta \end{cases}$$

la cual también es solución de la ecuación diferencial 2.1 y define una infinidad de soluciones que pasan por  $(t_0, x_0)$ , una para cada valor del parámetro  $\beta \leq t_0 - 3\sqrt[3]{x_0}$ . Notamos que en este caso  $f'(x)$  es continua en  $x = x_0$ .

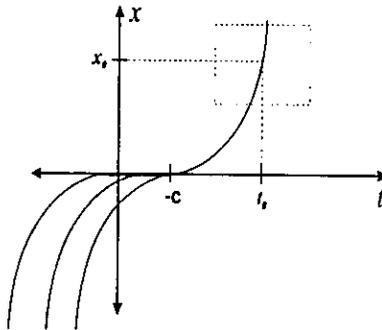
Este análisis *global* de soluciones revela que no hay unicidad de soluciones para la ecuación diferencial 2.1 con condiciones iniciales  $\varphi(t_0) = x_0$  para una región

rectangular que contenga a  $x_0 = 0$ .



Sin embargo, restringiendo el análisis a una región rectangular adecuada, es posible determinar una sola gráfica que pase por  $(t_0, x_0)$ .

Definamos una región  $R$  dada por  $[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$  donde  $b < |x_0|$ , en la cual existirá únicamente una gráfica que cumple con las condiciones iniciales planteadas.



Como el teorema de existencia y unicidad de Cauchy puede ser aplicado dentro de un rectángulo  $R$  que contenga a  $(t_0, x_0)$  que no interseque al eje  $t$  y donde  $f'(x)$  es continua, la unicidad de soluciones se garantiza de manera *local*. Debido a lo anterior, dicho teorema se dice que es de carácter meramente local.

### 2.2. Región de definición

Otra consideración importante y que está fuertemente relacionada con la anterior, se presenta cuando el dominio de la función  $x = \varphi(t)$  no está definido dentro de los límites de  $R$ ; por lo tanto, es necesario tomar un intervalo  $|t - t_0| \leq h$  contenido dentro de la proyección de  $R$  sobre el eje  $t$ , donde  $\varphi(t)$  pueda estar definido.

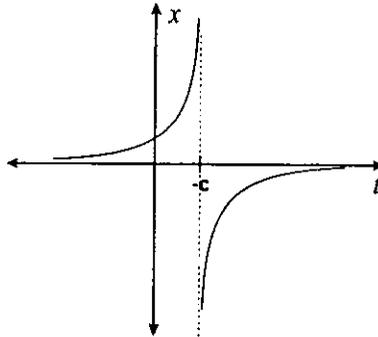
Para aclarar lo anterior tomemos la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

la cual tiene como solución la familia de funciones:

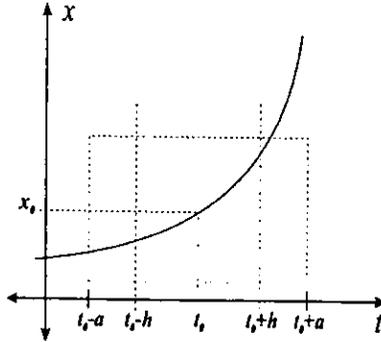
$$\varphi(t) = -\frac{1}{(t+c)}$$

Al fijar un valor de  $c$ , podremos determinar el dominio de la función dentro del intervalo  $(-\infty, -c)$  o el intervalo  $(-c, \infty)$ :



Si definimos una región que contenga a  $-c$ , entonces el dominio de  $\varphi(t)$  no estará definido dentro de esta región, es necesario reducir la proyección de  $R$  sobre

$t$  a un intervalo menor en el cual esté definida  $\varphi(t)$ .



### 2.3. Condiciones suficientes

Según el teorema de existencia y unicidad de Cauchy, la continuidad de  $f(t, x)$  y  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  son condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

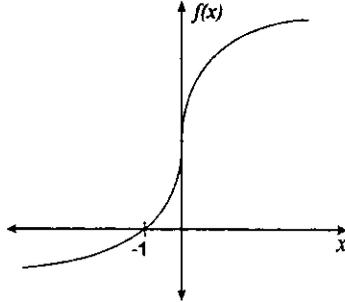
en algún intervalo  $t_0 - h < t < t_0 + h$ .

Sin embargo, puede ser difícil la determinación de un valor para  $h$ . Incluso, si  $f$  no satisface la hipótesis del teorema, todavía así puede existir una solución única; por lo tanto es apropiado discutir las características de las condiciones del teorema de Cauchy.

Analicemos la ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/3} + 1 \tag{2.2}$$

La gráfica de  $f(x) = x^{1/3} + 1$  tiene la forma:

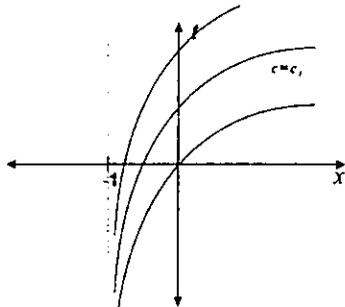


Podemos ver que  $f(x)$  es continua para toda  $x$ , mientras que  $f'(x)$  no lo es para el valor de  $x_0 = 0$ . La hipótesis de unicidad del teorema de Cauchy no se cumple lo que conduce necesariamente a conocer qué sucede bajo estas características.

Restringiéndonos a la región  $B$  dada por  $x > -1$  en la cual  $f(x) \neq 0$ , la ecuación diferencial 2.2 puede resolverse separando variables<sup>44</sup>, obteniendo la expresión<sup>45</sup>:

$$t = 3 \left[ \frac{x^{2/3}}{2} - x^{1/3} + \ln(x^{1/3} + 1) \right] + c \quad (2.3)$$

La expresión 2.3 tiene la forma  $t = \psi(x)$  y las gráficas generadas para valores de  $x \in (-1, \infty)$  son las siguientes:



<sup>44</sup>Si se consulta la sección 3.3 del capítulo I observaremos que para la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dt} = x^{1/3} + 1$  definida en la región  $B$ , el método de separación de variables es válido.

<sup>45</sup>Hágase la sustitución  $u = x^{1/3}$  y considere la división  $\frac{u^2}{u+1}$ .

Si hacemos la sustitución  $u = x^{1/3}$  podemos calcular la derivada  $\psi'(x)$  de la siguiente manera:

$$t = 3 \left[ \frac{x^{2/3}}{2} - x^{1/3} + \ln(x^{1/3} + 1) \right]$$

$$t = 3 \left[ \frac{u^2}{2} - u + \ln(u + 1) \right]$$

diferenciando ambos lados tenemos:

$$dt = 3 \left[ \frac{2u}{2} - 1 + \frac{1}{u+1} \right] du$$

$$dt = 3 \left[ u - 1 + \frac{1}{u+1} \right] du$$

$$dt = 3 \left[ \frac{u^2 + u - u - 1 + 1}{u+1} \right] du$$

de donde se sigue que:

$$dt = 3 \left[ \frac{u^2}{u+1} \right] du$$

como  $dx = 3u^2$ , se tiene entonces:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dx}{x^{1/3} + 1}$$

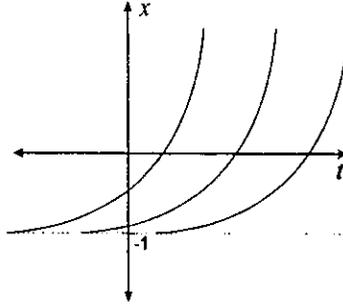
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^{1/3} + 1}$$

que se puede expresar como:

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^{1/3} + 1}$$

Como  $\psi'(x) \neq 0$  el teorema de la función inversa nos garantiza que  $\psi(x)$  tiene una función  $\psi^{-1}$  que es su inversa. En este caso,  $t = \psi(x)$  tiene como inversa a la función  $x = \varphi(t)$  definida en  $\mathbb{R}$ , la cual es solución de la ecuación 2.3. Las

siguientes curvas son las soluciones de la ecuación diferencial 2.2 en la región  $B$ :



Por tanto, podemos decir que la ecuación diferencial planteada presenta unicidad de soluciones.

En resumen, la condición de unicidad mencionada en el teorema de existencia y unicidad de Cauchy no es una condición necesaria para que se dé lugar la unicidad sino únicamente suficiente.

### 3. Condiciones de Lipschitz y unicidad

La unicidad de soluciones para ciertas ecuaciones diferenciales puede ser determinada por medio de las condiciones del teorema de Cauchy; sin embargo, la suficiencia de tales hipótesis *fuertes* limita de manera amplia la posibilidad de enunciar con certeza si una ecuación diferencial presenta o no unicidad. Por lo tanto, es necesario afinar un poco más las hipótesis del mencionado teorema para conocer el comportamiento cualitativo de las gráficas de las soluciones.

A continuación estudiaremos las condiciones planteadas por Lipschitz para asegurar la unicidad de soluciones y veremos como la hipótesis del teorema de Lipschitz demanda menos que la de Cauchy.

#### 3.1. Condiciones de Lipschitz

Como mencionamos en la sección introductoria a este capítulo, *Rudolph Lipschitz* estudió el problema de unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias y determinó otras condiciones que afinarían este concepto.

Si  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  es continua en un rectángulo cerrado  $R$ , entonces está acotada, es decir:

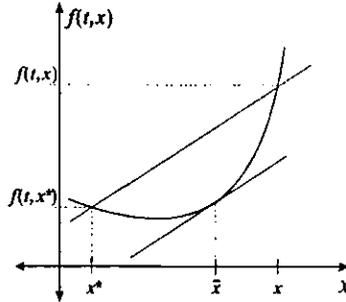
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq k$$

para  $\forall (t, x) \in R$ .

Por otro lado, debido al teorema del valor medio, se cumple que:

$$\left| \frac{f(t, x) - f(t, x^*)}{x - x^*} \right| = \left| \frac{\partial f(t, \bar{x})}{\partial x} \right|$$

para alguna  $\bar{x} \in (x^*, x)$ .



Por lo tanto, al estar  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  acotada se sigue que:

$$\left| \frac{f(t, x) - f(t, x^*)}{x - x^*} \right| \leq k$$

$$|f(t, x) - f(t, x^*)| < k|x - x^*| \quad (3.1)$$

a esta expresión le denominaremos *condición de lipschitz*<sup>46</sup>.

Se dice entonces, que una función  $f$  es *Lipschitz-continua* respecto a  $x$  en una región  $R$  del plano, si existe una constante  $k > 0$  tal que para cualquier  $(t, x) \in R$  y  $(t, x^*) \in R$  se cumple la ecuación 3.1. En estos términos, acabamos de demostrar

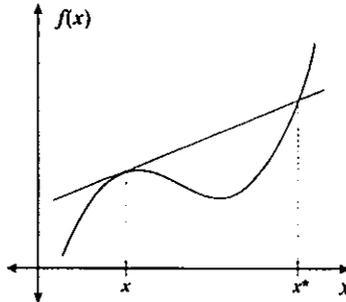
que si  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  es continua en una región  $R$  entonces  $f$  es una función Lipschitz-continua con respecto a  $x$ .

### 3.2. Funciones Lipschitz-Continuas

Es posible interpretar el sentido geométrico de la condición de Lipschitz diciendo que dada una función  $f$ , el valor absoluto de la pendiente de la secante

<sup>46</sup>Se sugiere consultar para mayor detalle: Lotar Collatz, *Differential equations: An introduction with applications*. pp. 24-25. [8]

para cualesquiera dos puntos  $x, x^*$  siempre será menor o igual a una constante  $k$ .



A continuación ejemplificaremos algunas de estas funciones.

Sea  $f$  la función que depende sólo de la variable  $x$ :

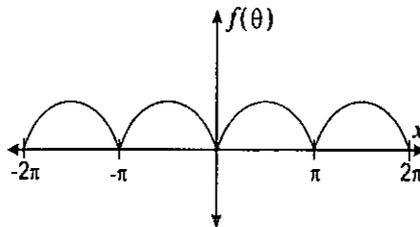
$$f(x) = |\sin x| \quad (3.2)$$

Para demostrar que se cumple la condición de Lipschitz:

$$\left| \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \right| \leq k$$

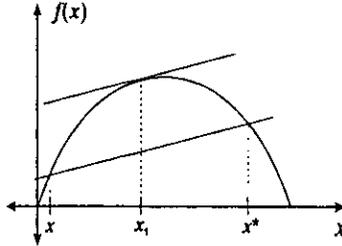
será necesario encontrar la secante más inclinada<sup>47</sup> y determinar si está acotada por una constante  $k$ .

La gráfica de la función 3.2 tiene la forma:



<sup>47</sup>Si se cuantificara sólo la pendiente de la secante entre  $(x, x^*)$  con alguno de estos puntos fijos (o ambos), no encontraríamos aquella secante con mayor inclinación. Por lo tanto es necesario evaluar varias secantes construidas para diferentes puntos dentro de este intervalo.

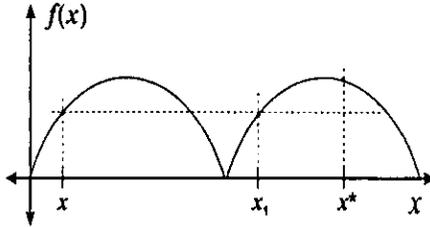
Si tomamos una pareja de puntos  $x, x^*$ , ambos dentro de un intervalo de la forma  $[n\pi, (n+1)\pi]$  para  $n \in \mathbb{N}$ ; por el teorema del valor medio la pendiente de la secante para estos puntos será igual a la derivada de  $f$  evaluada en  $x_1 \in (x, x^*)$ .



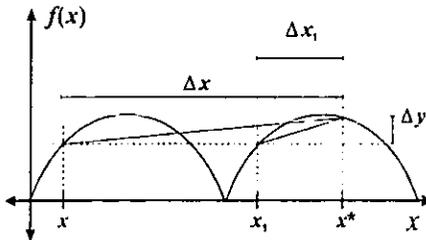
por lo tanto:

$$|m| = |\cos x_1| \leq 1$$

Tomemos ahora a  $x, x^*$  de forma tal que no estén contenidos en un intervalo como el que se tomó anteriormente:



Supongamos que  $x^* \in [n\pi, (n+1)\pi]$  y sea  $x_1 \in [n\pi, (n+1)\pi]$  tal que  $|\sin x_1| = |\sin x|$  el más cercano a  $x$  con estas propiedades. Ahora, tomemos a  $\Delta x = x^* - x$  y  $\Delta x_1 = x^* - x_1$ .



Notemos que  $|\Delta x| > |\Delta x_1|$ , por lo que se cumple:

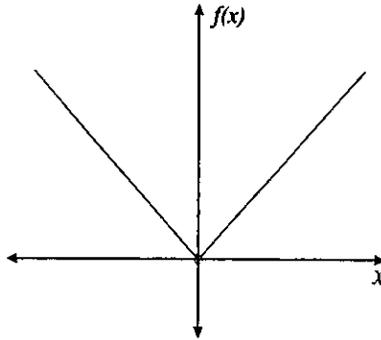
$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| < \left| \frac{\Delta y}{\Delta x_1} \right| = |\cos x_1| \leq 1$$

así, todas las pendientes de las secantes definidas por puntos tomados bajo las condiciones anteriores, estarán acotadas por  $k = 1$ . Se sigue entonces, que la función 3.2 es una función Lipschitz-continua o función de Lipschitz.

Analicemos la función:

$$f(x) = |x| \tag{3.3}$$

La gráfica de  $f(x)$  es la siguiente:



Inmediatamente notamos que la pendiente de las rectas generadas están perfectamente acotadas; así, para cualquier  $x, x^*$  sobre alguna de estas rectas definirá una secante con pendiente  $m = 1$ .

Al tomar un par de puntos situados cada uno en distintas rectas definidas por  $f$ , notamos que el incremento  $\Delta x = x^* - x$  será siempre mayor al incremento



## 4. Teorema de existencia y unicidad de Lipschitz

Una vez planteada la condición de Lipschitz y su significado geométrico, podemos enunciar el siguiente teorema de existencia y unicidad<sup>48</sup>:

**Teorema 4.1.** Sea  $f(t, x)$  una función continua en un rectángulo  $R$  definido por:

$$|t - t_0| \leq a \text{ y } |x - x_0| \leq b$$

que cumple la condición de Lipschitz:

$$\left| \frac{f(t, x) - f(t, x^*)}{x - x^*} \right| \leq k$$

en  $R$ . Entonces para la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

existe un intervalo alrededor de  $t_0$  dado por  $|t - t_0| \leq h$  y una función  $x = \varphi(t)$  la cual tiene las propiedades:

- i)  $x = \varphi(t)$  es una solución de la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$  sobre el intervalo  $|t - t_0| \leq h$ .
- ii) En el mismo intervalo  $\varphi(t)$  satisface la desigualdad  $|\varphi(t) - x_0| \leq b$ .
- iii)  $\varphi(t_0) = x_0$ .
- iv)  $x = \varphi(t)$  es la única en el intervalo  $|t - t_0| \leq h$ , en el sentido de que ésta es la única función que satisface las proposiciones anteriores.

### 4.1. Aplicación del teorema de Lipschitz

Cabe subrayar que el teorema de existencia y unicidad de Lipschitz es un teorema que plantea hipótesis que demandan menos que las planteadas en el

<sup>48</sup>La demostración del teorema puede consultarse en: L. Elgoltz. *Differential equations: An introduction with applications*, pp. 45-50. [12]

teorema de Cauchy, en este sentido el teorema de Lipschitz es "mas fuerte" que el de Cauchy.

Notemos que para la función  $f(x) = |\sin x|$  no se cumple la continuidad de  $\frac{d}{dx}(|\sin x|)$ , es decir  $f(x)$  no es una función de clase<sup>49</sup>  $C^1$ ; sin embargo, cumple la condición de Lipschitz. Veamos como se traduce esto en la unicidad de soluciones. Tómese la ecuación diferencial ordinaria autónoma:

$$\frac{dx}{dt} = |x| \tag{4.1}$$

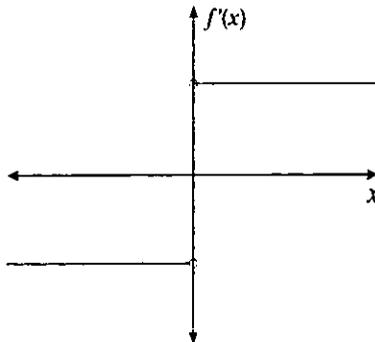
y definimos a  $f(x)$  como:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Si aplicásemos la condición de Cauchy para determinar la unicidad de soluciones, notamos que  $f(x)$  no es de clase  $C^1$ . Esto lo podemos notar viendo que la derivada de  $f$  es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

la cual no es continua:



El teorema de unicidad de Cauchy no proporciona información para determinar la unicidad de soluciones de la ecuación diferencial.

<sup>49</sup>Una función  $f$  se dice que es de clase  $C^k$  si  $f', f'', \dots, f^{(k)}$  son continuas.

Por otra parte  $f(x)$  es una función Lipschitz-continua, entonces el criterio del teorema de unicidad de Lipschitz se cumple. Resolvamos analíticamente la ecuación diferencial 4.1 y veamos cuales son sus soluciones.

Tal como se definió a  $f(x) = |x|$ , se determinan dos ecuaciones diferenciales a resolver:

$$\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} = x & \frac{dx}{dt} = -x \\ \text{para } x \geq 0 & \text{para } x < 0 \end{array}$$

para ambos casos tenemos:

$$\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} = x & \frac{dx}{dt} = -x \\ \int \frac{dx}{x} = \int dt & \int \frac{dx}{x} = - \int dt \\ \ln x = t + c & \ln x = -t + c \\ x = ce^t & x = ce^{-t} \\ \varphi_1(t) = ce^t & \varphi_2(t) = ce^{-t} \end{array}$$

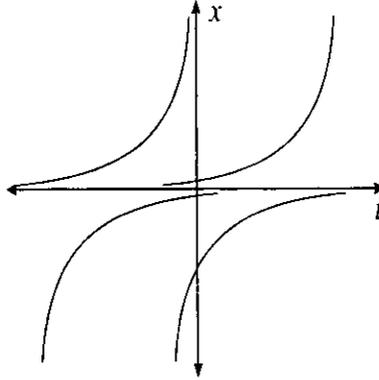
Puntualicemos las siguientes consideraciones:

- Para  $\varphi_1(t) = ce^t$ ,  $x \geq 0$ ; por lo tanto  $ce^t \geq 0$ , lo cual sólo se cumple si  $\varphi_1(t) = |c|e^t$ .
- Para  $\varphi_2(t) = ce^{-t}$ ,  $x < 0$ ; por lo tanto  $ce^{-t} < 0$ , que se satisface si  $\varphi_2(t) = -|c|e^{-t}$ .
- La curva  $\varphi(t) \equiv 0$  también satisface la ecuación diferencial planteada

Las soluciones de la ecuación diferencial autónoma 4.1 tienen alguna de las siguientes formas:

$$\begin{array}{l} \varphi_1(t) = |c|e^t \\ \varphi_2(t) = -|c|e^{-t} \\ \varphi_3(t) = 0 \end{array}$$

Las gráficas de estas soluciones se presentan a continuación:



Las curvas no se tocan, por lo tanto existe unicidad de soluciones.

#### 4.2. Carácter de las hipótesis del teorema

En este instante es pertinente preguntarnos si puede existir unicidad de soluciones para una ecuación diferencial si la condición del teorema de Lipschitz no se cumple; la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

Es posible que una solución  $x = \varphi(t)$  de una ecuación diferencial autónoma pueda ser la única que cumplan las condiciones  $\varphi(t_0) = x_0$  aún si la hipótesis del teorema no se cumple.

La ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/3} + 1$$

utilizada para mostrar que la hipótesis del teorema de Cauchy es una condición suficiente para determinar la unicidad de soluciones, nos servirá para sostener el mismo argumento para la hipótesis del teorema de Lipschitz.

Si observamos la gráfica de  $f(x) = x^{1/3} + 1$  y tomamos la pendiente de la secante entre dos puntos  $(x, x^*)$  cualquiera, notamos que está acotada por alguna  $k$  constante. Sin embargo, si tomamos dos puntos contenidos en una vecindad cada vez mas pequeña alrededor de  $x = 0$ , la condición de Lipschitz no se cumple ya que no hay un valor que acote la pendiente de la secante para dos puntos cualesquiera contenidos dentro de esta región.

Como vimos, las soluciones de la ecuación diferencial planteada presentaban unicidad y como consecuencia de esto se dice que las hipótesis del teorema de unicidad de Lipschitz también son condiciones suficientes para determinar la unicidad de soluciones de una ecuación diferencial.

No obstante lo anterior, las hipótesis del teorema proporciona un criterio más sencillo de cumplir que la continuidad de  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  propuesta por el teorema de Cauchy.

## 5. Ecuaciones diferenciales autónomas particulares

A continuación estudiaremos las propiedades de un conjunto particular de ecuaciones diferenciales autónomas, con la finalidad de mostrar algunos puntos de relevancia sobre la unicidad de soluciones de estas ecuaciones.

Sea la ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dx}{dt} = f_{\alpha}(x)$$

donde  $f_{\alpha}(x)$  es una familia de funciones de la forma:

$$f_{\alpha}(x) = x^{\alpha}$$

con  $\alpha > 0$ .

En particular, tomemos la ecuación:

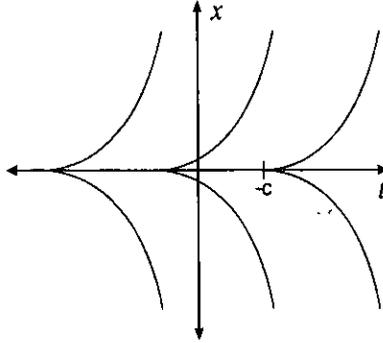
$$\frac{dx}{dt} = x^{1/3} \tag{5.1}$$

que tiene como solución alguna de las funciones:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &\equiv 0 \\ \varphi_2(t) &= +\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t+c)\right)^3} \\ \varphi_3(t) &= -\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t+c)\right)^3} \end{aligned}$$

donde  $t \geq -c$ .

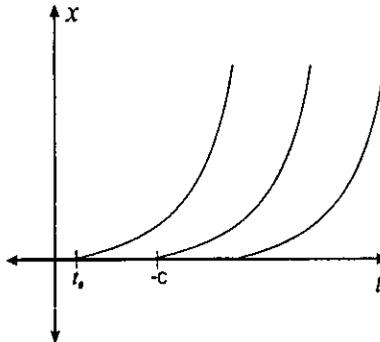
El dibujo de las gráficas de las funciones anteriores es:



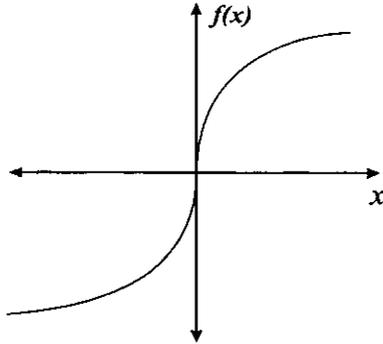
Para cada  $c \leq -t_0$  la función:

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -c \\ \sqrt{\left(\frac{2}{3}(t+c)\right)^3} & t \geq -c \end{cases}$$

es solución y cumple la condiciones iniciales  $\varphi_c(t_0) = 0$ . Por lo tanto no hay unicidad de soluciones para el punto  $(t_0, 0)$ .

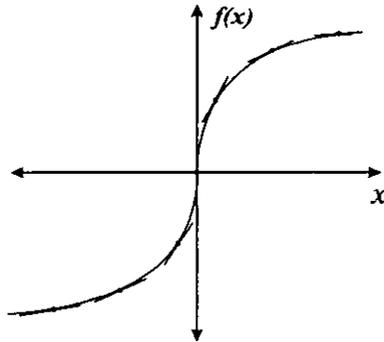


La gráfica de la función  $f = x^{1/3}$  es la siguiente:



Notemos que  $f(x)$  tiene derivada  $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ .  $f(x)$  no es de clase  $C^1$  ya que  $f'(x)$  no es continua en  $x_0 = 0$ .

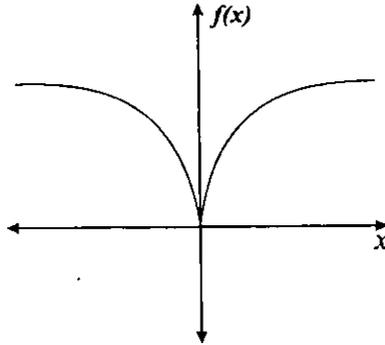
Geoméricamente, la recta vertical es tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto  $(0, 0)$ .



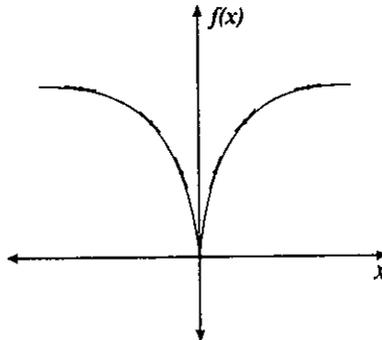
Analicemos de nueva cuenta la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = x^{2/3}$$

La función  $f(x) = x^{2/3}$  tiene la gráfica siguiente:



Debido a que  $f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$  es infinita en  $x = 0$ , geoméricamente existe una tangente vertical en ese punto<sup>50</sup>.  $f(x)$  no es de clase  $C^1$ .



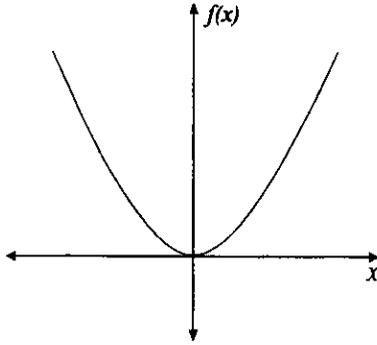
Como vimos en la sección 2.1 de este capítulo, no hay unicidad de soluciones para la ecuación diferencial  $x' = x^{2/3}$ .

Como último ejemplo expondremos las propiedades de la ecuación diferencial:

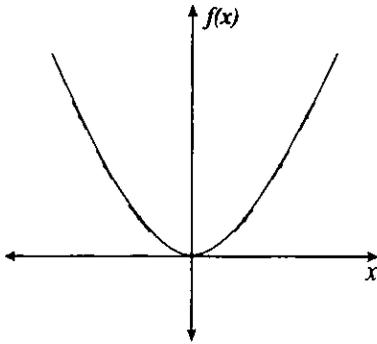
$$\frac{dx}{dt} = x^{4/3}$$

<sup>50</sup>Notemos que la gráfica de  $f(x) = x^{2/3}$  decrece muy rápidamente cuando se aproxima a la posición de equilibrio  $x_0 = 0$ .

La gráfica de  $f(x) = x^{4/3}$  tiene la forma:



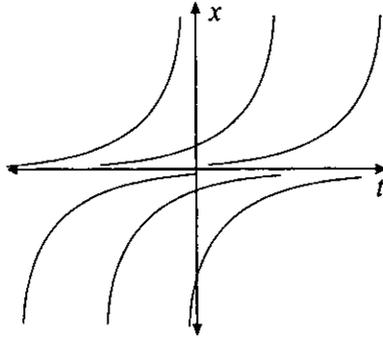
La derivada  $f'(x) = \frac{4x^{1/3}}{3}$  es continua  $\forall x$ , siendo por ello  $f(x)$  de clase  $C^1$ . No existen tangentes verticales en la gráfica de  $f(x)$ .



Las funciones:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &\equiv 0 \\ \varphi_c(t) &= \frac{-27}{(t+c)^3} \text{ para } t < -c \\ \tilde{\varphi}_c(t) &= \frac{-27}{(t+c)^3} \text{ para } t > -c \end{aligned}$$

son las únicas soluciones de la ecuación diferencial, dándose lugar la unicidad.



### 5.1. Soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma $x' = f_\alpha(x)$

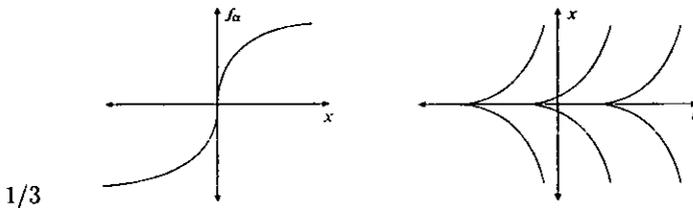
Las ecuaciones diferenciales autónomas de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f_\alpha(x)$$

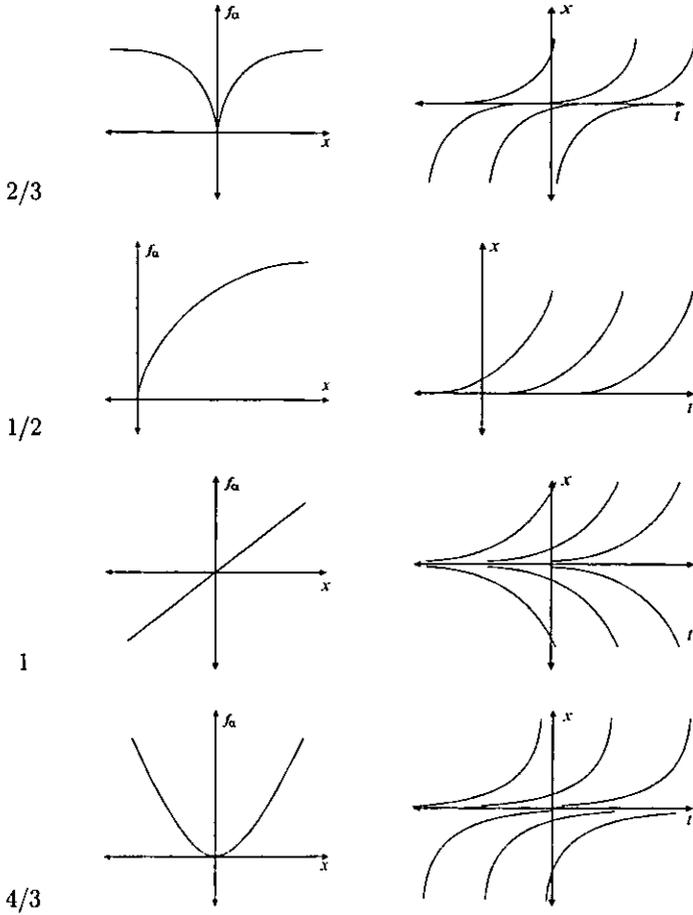
donde  $f_\alpha(x) = x^\alpha$ , constituyen un buen ejemplo para el estudio de las características de soluciones de una ecuación diferencial autónoma, además de reunir diversos elementos de análisis sobre unicidad.

A continuación se muestran las gráficas de las soluciones de estas ecuaciones diferenciales, así como las gráficas de  $f_\alpha(x)$ , para distintos valores de  $\alpha$ .

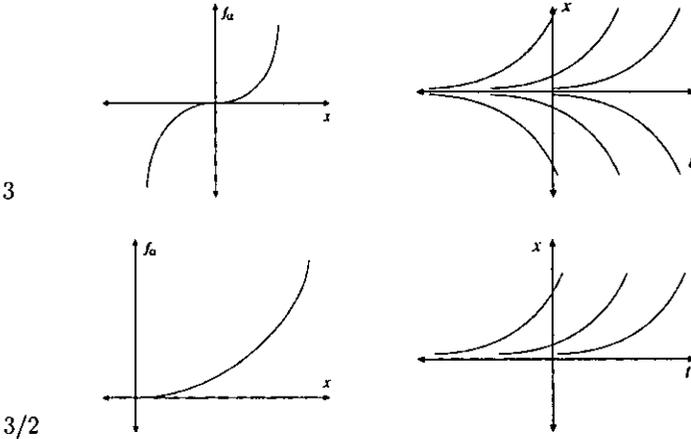
$\alpha$       Gráfica de  $f_\alpha(x) = x^\alpha$       Gráfica de las soluciones de  $x' = f_\alpha$



$\alpha$  Gráfica de  $f_\alpha(x) = x^\alpha$  Gráfica de las soluciones de  $x' = f_\alpha$



$\alpha$  Gráfica de  $f_\alpha(x) = x^\alpha$  Gráfica de las soluciones de  $x' = f_\alpha$



### 5.2. Hipótesis de unicidad

Expuestos los conceptos anteriores, podemos enunciar la siguiente proposición sobre unicidad para ecuaciones diferenciales autónomas:

**Proposición 5.1.** Sea la ecuación diferencial autónoma de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f_\alpha(x) \tag{5.2}$$

donde  $f_\alpha(x)$  corresponde a la familia de funciones<sup>51</sup>  $f_\alpha(x) = x^\alpha$ , se tiene que:

- a) Si  $\alpha \in (0, 1)$ , entonces:  
 i) El  $\lim_{x \rightarrow 0} f'_\alpha(x) = \pm\infty$ .

<sup>51</sup>El dominio de  $f_\alpha$  es  $\mathbb{R}$  si  $\alpha = \frac{p}{q}$  para algún  $p \in \mathbb{N}$  y  $q \in \mathbb{N}$  tales que con  $(p, q) = 1$  y  $q$  impar, y es  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  en otro caso.

ii) Para la ecuación diferencial 5.2 existe una infinidad de soluciones con condiciones iniciales  $\varphi(t_0) = x_0$ .

b) Si  $\alpha \geq 1$ , entonces:

i)  $f'_\alpha(x)$  es continua.

ii) Para cualquier  $t_0$  y  $x_0$  hay una única solución de la ecuación 5.2 con condiciones iniciales  $\varphi(t_0) = x_0$ .

**Demostración:**

Para valores de  $\alpha$  contenidos en el intervalo  $(0, 1)$ , la propiedad i) es inmediata ya que:

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x^{(1-\alpha)}}$$

Por otra parte, la ecuación diferencial 5.2 tiene las soluciones<sup>52</sup>:

$$\varphi_1(t) \equiv 0$$

$$\varphi_2(t) = [(1 - \alpha)(t + c)]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

Tomando una  $c$  fija que cumpla  $-c \geq t_0$ , la función:

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} [(1 - \alpha)(t + c)]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} & t \geq -c \\ 0 & t \leq -c \end{cases}$$

también es solución y determina una cantidad infinita de soluciones que cumplen las condiciones iniciales  $\varphi(t_0) = 0$ ; con esto demostramos ii).

Para valores de  $\alpha \geq 1$ , la propiedad i) también es inmediata debido a que:

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{(\alpha-1)}$$

es continua para  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Para demostrar la propiedad ii) tomemos a  $x_0 > 0$  (el caso  $x_0 < 0$  es análogo), entonces la ecuación diferencial 5.2 puede resolverse por el método de separación de variables el cual es válido dentro de la región  $\{x | f_\alpha(x) \neq 0\}$  y proporciona

---

<sup>52</sup>La ecuación diferencial  $x = f_\alpha(x)$  presenta más soluciones, éstas sólo son algunas.

todas las soluciones de la ecuación diferencial que cumplen  $f_\alpha(\varphi(t)) \neq 0$ , en este caso  $\varphi(t) \neq 0$ .

Así, la función:

$$\varphi(t) = \left[ (1 - \alpha)(t - t_0) + (x_0)^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

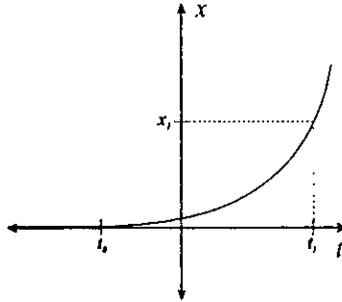
definida para  $t < t_0 + \frac{(x_0)^{1-\alpha}}{(\alpha - 1)}$ , es solución y cumple las condiciones iniciales  $\varphi(t_0) = x_0$ . Como  $\varphi(t) > 0$  para todo  $t$  en su dominio, es la única solución que cumple  $\varphi(t_0) = x_0$ .

Ahora, si tomamos a  $x_0 = 0$ , claramente la función:

$$\varphi(t) \equiv 0$$

es solución y cumple  $\varphi(t_0) = 0$ .

Para demostrar que es la única, supongamos que existiera otra solución que pasa por  $(t_0, 0)$ , entonces ésta cumpliría que  $\varphi(t_0) = 0$  y  $\varphi(t_1) = x_1$  para algún  $t_1, x_1 \neq 0$ .



Sin embargo, como vimos en el párrafo anterior, si la gráfica de  $\varphi(t)$  pasa por un  $x \neq 0$ , entonces  $\varphi(t) \neq 0$  lo cual contradice que pueda pasar también por  $(t_0, 0)$ . La función  $\varphi(t) \equiv 0$  es solución y es la única que pasa por el punto  $(t_0, 0)$ . ■

## 6. Un criterio completo

No obstante que las hipótesis estudiadas para determinar la unicidad de soluciones son válidas y son aplicables en varios casos, es importante asumir que no son una herramienta lo bastante fina para proveer un criterio suficiente y necesario sobre la unicidad de soluciones. A continuación subrayaremos algunas consideraciones que se han vertido en nuestro estudio, con la finalidad de exponer un criterio completo sobre la unicidad.

Retomemos la unicidad de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria autónoma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (6.1)$$

y recordemos que aquellos valores donde  $f(x_0) = 0$  determinaban soluciones que no variarían respecto al tiempo. Con frecuencia nos encontramos que tales soluciones constantes  $\varphi(t) \equiv x_0$  comparten un punto  $(t_0, x_0)$  cualquiera con otra solución  $\varphi(t) = x$  también de 6.1; así, pensar en soluciones constantes nos conduce a sospechar sobre la no unicidad de soluciones alrededor de  $x_0$ .

Es posible sugerir, bajo este marco de ideas, que en presencia de soluciones constantes puede ser trasgredida la unicidad; no así, para ecuaciones diferenciales donde  $f(x)$  no se anula en ningún punto.

Todo lo anterior se intuye como válido más fácilmente que en el principio de este tema, sin embargo nos queda como tarea sustentarlo.

Hagamos una retrospectiva sobre los fenómenos físicos estudiados, en los cuales se involucra la energía. Mencionamos que la igualdad:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{\hat{x}} \frac{du}{f(u)} \quad (6.2)$$

determinaba el tiempo en que una partícula que oscila llegaba a una posición de equilibrio  $\hat{x}$ . En el caso del movimiento armónico simple existían posiciones de equilibrio del sistema (que se denominaron con la letra  $a$ ), planteándose la interrogante si las soluciones no constantes *tocaban* a las soluciones constantes. Para discernir sobre este hecho utilizamos la ecuación 6.2 y obteníamos que la integral:

$$\int_0^a \frac{1}{w_0 \sqrt{A^2 - u^2}} du$$

convergía al valor de  $\hat{t} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$ , lo anterior determinaba un tiempo finito en el que ambas soluciones compartían el punto  $(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}, \pi)$ .

Si un fenómeno físico descrito por medio de una ecuación diferencial autónoma presenta soluciones que varían respecto al tiempo y soluciones constantes, la unicidad de tales soluciones puede conocerse por medio de la convergencia o divergencia de la integral 6.2.

Esta afirmación se sostiene en el caso del péndulo simple, donde la integral:

$$\int_0^{\pi} \frac{du}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos u)}}$$

divergía, por lo tanto  $\hat{t} = \infty$ . La unicidad de soluciones se presentaba sin ningún argumento en contra.

En suma, la unicidad de soluciones de la ecuación 6.1 puede ser trasgredida en presencia de soluciones constantes y la convergencia o divergencia de:

$$\int_{x_0}^{\hat{x}} \frac{du}{f(u)}$$

será un criterio *suficiente y necesario* para determinar la presencia o no de unicidad. Paso seguido, mencionaremos el siguiente teorema que ofrece un criterio suficiente y necesario sobre la unicidad de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria autónoma.

**Teorema 6.1.**      *Sea la ecuación diferencial autónoma de la forma:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{6.3}$$

a) *Si  $f(x) \in C^0$  y  $f$  no se anula en ningún punto, entonces las soluciones de 6.3 son únicas.*

b) *Si  $f(x) \in C^0$  y existe un  $\hat{x}$  tal que  $f(\hat{x}) = 0$ , entonces las soluciones de la ecuación diferencial 6.3 son únicas si y sólo si la integral:*

$$\int_{x_0}^{\hat{x}} \frac{du}{f(u)}$$

*diverge.*

**Demostración:**

Para el inciso a) supongamos que  $\varphi(t) = x$  es solución a 6.3 y sea  $(t_0, x_0)$  un punto cualquiera tal que  $\varphi(t_0) = x_0$ , como  $\varphi(t)$  es solución entonces:

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \neq 0$$

por lo tanto  $\varphi(t)$  tiene una inversa  $\psi(x)$  cuya derivada cumple:

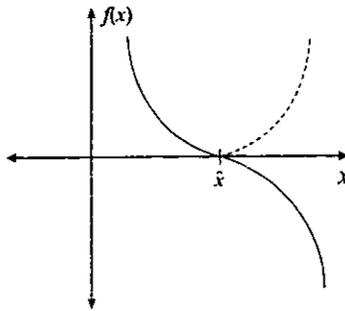
$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{f(x)}$$

y  $\psi(x_0) = t_0$  es solución de la ecuación diferencial pues  $\psi$  es la inversa de  $\varphi$ , además es la única que pasa por  $(x_0, t_0)$  y está dada por:

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$$

$$\psi(x) = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$$

Para el inciso b) la demostración no la haremos en general, vamos a suponer que  $\hat{x}$  es el único punto donde se anula  $f$ . Comenzaremos por la implicación de la convergencia de la integral. Como  $f$  no se anula en  $(-\infty, \hat{x})$ , tiene signo constante, tomaremos el caso en que  $f(x) > 0$  para  $x < \hat{x}$ <sup>53</sup>.

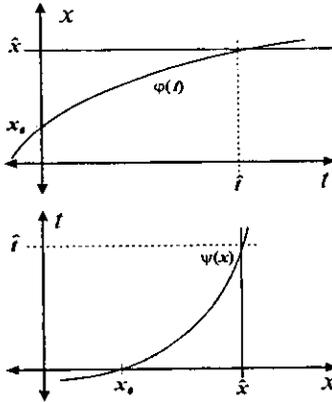


<sup>53</sup>La demostración para el caso  $f(x) < 0$  con  $x > \hat{x}$  es análoga.

Sea  $x_0 < \hat{x}$  y  $\psi(x) = \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$ , además:

$$\hat{t} = \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$$

Definimos a  $\psi$  como una función tal que  $\psi : (-\infty, \hat{x}) \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual es creciente porque  $\psi'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0$ ; por lo tanto  $\psi$  tiene una inversa definida como  $\varphi : (a, \hat{t}) \rightarrow \mathbb{R}$  para algún  $a \in \mathbb{R}$  o  $a = \infty$ .



Dos soluciones a la ecuación diferencial 6.3 que cumplen con  $\varphi_1(\hat{t}) = \hat{x}$  son:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t < \hat{t} \\ \hat{x} & t > \hat{t} \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \hat{x}$$

Veremos que  $\varphi_1(t)$  es continua y diferenciable.

Para la continuidad:

- i) En cualquier  $t \neq \hat{t}$  lo es.
- ii) El  $\lim_{t \rightarrow \hat{t}^-} \varphi_1(t) = \sup \{ \varphi_1(t) \mid t \in (a, \hat{t}) \}$  pues  $\varphi$  es creciente, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \hat{t}^-} \varphi_1(t) &= \sup(\text{imagen } \varphi) \\ &= \sup(\text{dominio } \psi) \\ &= \hat{x} \end{aligned}$$

además,

$$\lim_{t \rightarrow \hat{t}^+} \varphi_1(t) = \hat{x}$$

por lo tanto  $\varphi_1(t)$  es continua.

Para la diferenciabilidad:

Para  $t < \hat{t}$ ,  $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ . Así

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))}$$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\frac{1}{f(\varphi(t))}}$$

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t))$$

con lo que:

$$\lim_{t \rightarrow \hat{t}^-} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow \hat{t}^-} f(\varphi(t))$$

$$\lim_{t \rightarrow \hat{t}^-} \varphi'(t) = f(\hat{x}) = 0$$

además:

$$\lim_{t \rightarrow \hat{t}^+} \varphi_1'(t) = 0$$

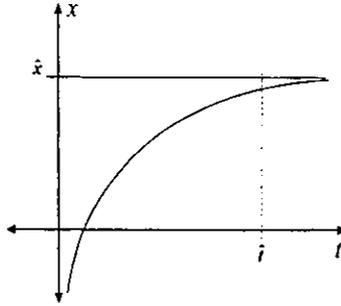
pues en esta región  $\varphi_1(t)$  es constante.

Como ambos límites son iguales,  $\varphi_1(t)$  es diferenciable en  $\hat{x}$ .

Finalmente, para la implicación de la divergencia de la integral del inciso b) tomemos  $f(\hat{x}) = 0$  y  $f(x) \neq 0 \forall x \neq \hat{x}$  donde  $f(x) > 0$  para  $x < \hat{x}$ . Sea  $x_0 < \hat{x}$  y  $\varphi(t)$  una función que es solución a 6.3 que cumple  $\varphi(t_0) = x_0$  y tiene como inversa a:

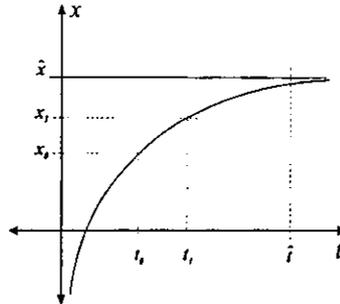
$$\psi(x) = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$$

Si  $\int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$  diverge, entonces  $\varphi(t) < \hat{x}$  para  $\forall t \in \mathbb{R}$ .



De forma análoga se ve que cualquier solución  $\varphi$  a 6.3 que cumpla  $\varphi(t_0) = x_0$  con  $x_0 > \hat{x}$ , cumple que  $\varphi(t) > \hat{x} \forall t \in \mathbb{R}$ .

Si tomamos ahora a  $x = \hat{x}$ , entonces  $\varphi_1(t) \equiv \hat{x}$  es solución a 6.3 y cumple  $\varphi(\hat{t}) = \hat{x}$ . La unicidad de soluciones supondría que no existen dos soluciones que pasen por el mismo punto; de manera opuesta, supongamos que existe otra solución  $\varphi_2(\hat{t}) = \hat{x}$ , entonces existiría un  $t_1$  tal que  $\varphi_2(t_1) = x_1$ .



Pero como demostramos en el párrafo anterior que  $\varphi(t) < \hat{x}$  para  $\forall t \in \mathbb{R}$ , entonces  $\varphi_2(\hat{t}) \neq \hat{x}$ . Por lo tanto, no existe otra solución que pase por  $(\hat{t}, \hat{x})$  que no sea la solución constante  $\varphi_1(t) \equiv \hat{x}$ . ■

El criterio de convergencia constituye un criterio suficiente y necesario para evaluar la unicidad de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria autónoma.

## 7. Aplicación del criterio de convergencia

Al iniciar este capítulo revisamos las hipótesis sobre unicidad expuestas por August Louis Cauchy en 1820, continuamos con los criterios de Lipschitz, revisamos los criterios de ecuaciones diferenciales del tipo  $f_\alpha(x)$  y finalmente nos situamos en el criterio de convergencia. Si bien, la unicidad de soluciones de diversas ecuaciones diferenciales puede ser asegurada por los teoremas de Cauchy y Lipschitz, otras ecuaciones que no cumplan las condiciones de dichos teoremas permanecerán sin ninguna aproximación sobre su unicidad debido a que los criterios de Lipschitz y Cauchy son criterios únicamente suficientes. Sin embargo un criterio suficiente y necesario para evaluar la unicidad de soluciones está dado por la divergencia de la integral mencionada.

Hasta el momento los ejemplos que hemos dado para mostrar que el criterio de Lipschitz es únicamente suficiente, son de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

donde  $f$  es una función continua que no es de Lipschitz en la cercanía de un punto  $x_0$  en el cual  $f$  no se anula. Como vimos en el teorema 6.1 esta sola hipótesis garantiza la unicidad de soluciones.

Cabe preguntarnos si para ecuaciones autónomas y bajo la hipótesis de que  $f(x_0) = 0$  el criterio de Lipschitz es necesario y suficiente. La respuesta es no. Daremos un ejemplo de una de estas ecuaciones cuyas soluciones al problema de valor inicial son únicas y sin embargo  $f$  no es de Lipschitz.

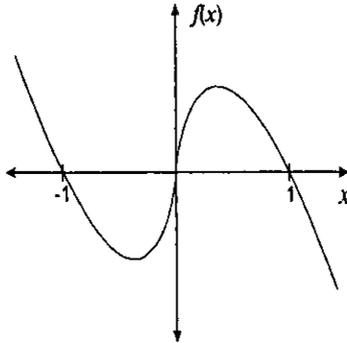
Evaluemos la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -x \ln x^2 \tag{7.1}$$

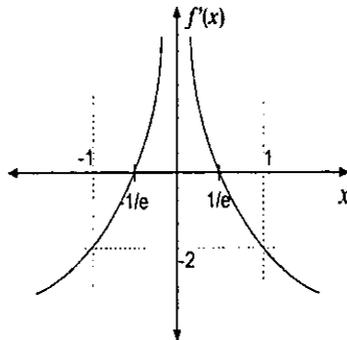
de la cual podemos puntualizar lo siguiente:

1.  $f(x) = -x \ln x^2$ .
2. Existen los puntos de equilibrio  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$ .
3.  $f(x) \in C^0$  pero  $f(x) \notin C^1$ .
4.  $f(x)$  no es una función Lipschitz-continua.

5. La gráfica de  $f(x)$  es:



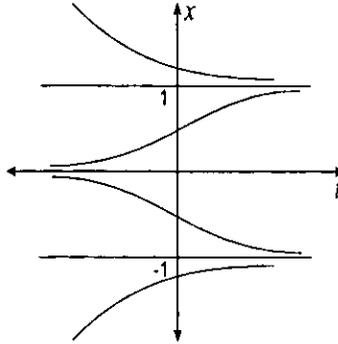
6.  $f'(x) = -(\ln x^2 + 2)$  es discontinua en  $x_0 = 0$ .



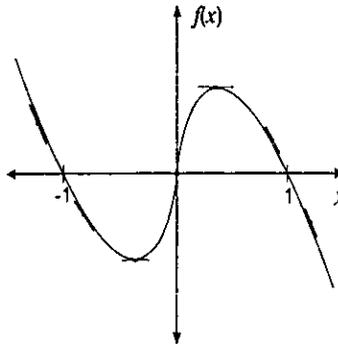
Los elementos anteriores son parte fundamental del análisis que nos permitirá describir el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial 7.1.

De principio, la forma de la gráfica de  $f(x)$  nos da una aproximación sobre la forma de las soluciones: En los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(0, 1)$  el valor de  $f(x)$  es positivo, existiendo soluciones  $x = \varphi(t)$  crecientes para estos intervalos; a su vez, en los intervalos  $(-1, 0)$  y  $(1, \infty)$  se presenta  $f(x)$  negativa, esto determina soluciones  $x = \varphi(t)$  decrecientes. Los puntos de equilibrio generarán las soluciones

constantes  $\varphi_0(t) \equiv 0$ ,  $\varphi_1(t) \equiv -1$  y  $\varphi_2(t) \equiv -1$ .

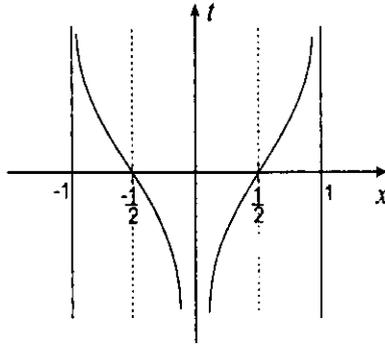


Al evaluar la unicidad de estas soluciones, vemos que el criterio de Lipschitz, aún el de Cauchy, puede aplicarse alrededor de  $\varphi_1(t) \equiv -1$  y  $\varphi_2(t) \equiv -1$  ya que se cumple de manera local que  $f(x)$  sea una función de Lipschitz y  $f(x) \in C^1$  alrededor de  $x_1 = 1, x_2 = -1$ . En estos puntos, la gráfica de  $f(x)$  no presenta tangentes verticales. Sin embargo, tales criterios no son aplicables para evaluar la unicidad en las cercanías de  $x_0 = 0$ , ya que en este punto,  $f'(x_0)$  no es continua, tal que  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = \infty$ ; geoméricamente, existe una tangente vertical en la gráfica de  $f(x)$ .



El criterio aplicable es el de convergencia, evaluándose la unicidad de soluciones

contenidas dentro del intervalo  $(-1, 1)$ .



Analicemos las soluciones contenidas en el intervalo<sup>54</sup>  $(0, 1)$ . Usando la integral:

$$\int_{x_0}^x \frac{du}{-u \ln u^2}$$

y tomando a  $x_0 = \frac{1}{2}$ , verificaremos si:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{du}{-u \ln u^2}$$

converge o diverge.

Así,

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{du}{-u \ln u^2} = \left[ -\frac{1}{2} \ln (|\ln u^2|) \right]_{\frac{1}{2}}^x$$

donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{2} \ln (|\ln x^2|) + \frac{1}{2} \ln \left( \left| \ln \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right| \right) \right] = \infty$$

La integral diverge, por lo tanto existe unicidad de soluciones para la ecuación diferencial 7.1 alrededor de  $x_0 = 0$ .

<sup>54</sup>De forma similar podemos evaluar las soluciones contenidas en el intervalo  $(-1, 0)$ .

---

# **CONCLUSIONES**

Una vez finalizado este trabajo deseo resaltar algunos conceptos que fueron expuestos a lo largo del estudio:

- El valor del análisis cualitativo y la importancia de la valoración geométrica para la obtención de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- La revisión de conceptos básicos como curva integral, solución, punto singular, solución constante, campo direccional, el método de separación de variables, entre otros; es el pretexto para diferenciar el mero cálculo de soluciones analíticas, de la comprensión clara y precisa de las particularidades que éstas puedan presentar.  
 Cuando se obtienen soluciones por métodos analíticos, sin profundizar en un análisis completo, se restringe el estudio del fenómeno a enumerar funciones que, en el mejor de los casos, sólo describen el comportamiento local de éste; en cambio, el análisis cualitativo va dibujando un panorama completo en el que son incluidas las propiedades de las soluciones constantes y los distintos estados de evolución del proceso.
- La exposición de la dinámica de partículas, más específicamente la del resorte y la del péndulo, muestra que evaluar geoméricamente las propiedades de la función propia de la ecuación diferencial permite determinar algunas propiedades importantes sobre el movimiento.
- Incluir la energía durante la formulación de distintos modelos diferenciales pareciera confuso en principio, sin embargo, es un instrumento que ayuda a aproximar la forma de las gráficas de sus soluciones, sin recurrir inmediatamente a un método analítico. El estudio de las características del movimiento de ambos fenómenos, desde el punto de vista de su unicidad, muestra que se trata de dos tipos diferentes de dinámica debido a las peculiaridades de las soluciones de cada ecuación diferencial.
- Es imprescindible reflexionar sobre el alcance que se desea lograr cuando se estudian ecuaciones diferenciales ordinarias. Si bien es cierto que los teoremas de unicidad de Cauchy y Lipschitz son aplicables a un considerable conjunto de ecuaciones diferenciales, no los son para otras, tales como las incluidas en la familia  $x' = f_{\alpha}(x)$ .
- La convergencia o divergencia de la integral expresada en el último teorema es una hipótesis suficiente y necesaria para evaluar la unicidad de una ecuación diferencial autónoma.

## CONCLUSIONES

---

Sirva pues este trabajo para ayudar a comprender mejor la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, sus soluciones y los teoremas que determinan la unicidad.

Espero que lo contenido aquí sea un motivo que aliente el estudio formal de las matemáticas que, a pesar de las dificultades para que sea valorado, siempre será una disciplina científica y fundamentalmente reflexiva.

*Oscar Alejandro Esquivel Flores*

---

# APÉNDICE

## A. Teoremas

### A.1. Teorema fundamental del cálculo

Sea  $f$  continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  :

a) Si la función  $G$  está definida por:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

para todo  $x \in [a, b]$ , entonces  $G$  es una *antiderivada* de  $f$  en  $[a, b]$ .

b) Si  $F$  es cualquier antiderivada de  $f$  en  $[a, b]$ , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### A.2. Teorema de la función inversa

Si una función  $f$  es monótona creciente en  $[a, b]$  entonces para todo número real  $\eta$  tal que  $f(a) \leq \eta \leq f(b)$  existe exactamente un  $\xi$  tal que  $a \leq \xi \leq b$  para el cual  $f(\xi) = \eta$ . Sea  $\alpha = f(a)$  y  $\beta = f(b)$ . Puesto que  $\xi$  está determinado de manera única por  $\eta$ , se tiene una función  $\xi = \phi(\eta)$  definida para argumentos  $\eta$  en el intervalo cerrado  $[\alpha, \beta]$ . Esta función  $\phi$  se denomina la *inversa de  $f$* . Puesto que a valores más grandes de  $\xi$  corresponden valores más grandes de  $\eta = f(\xi)$ , la función  $\phi$  es también monótona creciente.

Si  $a \leq x \leq b$  es un intervalo en el cual la función continua  $y = f(x)$  es monótona, y si  $\alpha = f(a)$  y  $\beta = f(b)$ , entonces  $f$  posee una función inversa que es monótona y continúa entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

Si la función  $y = f(x)$  es derivable en el intervalo  $a < x < b$  y si  $f'(x) > 0$ , o bien  $f'(x) < 0$ , en todo el intervalo, entonces la función inversa  $x = \phi(y)$  posee también una derivada en cada punto interior de su intervalo de definición: la derivada de  $y = f(x)$  y la de su inversa  $x = \phi(y)$  satisfacen la relación:

$$f'(x) \cdot \phi'(y) = 1$$

en valores  $x, y$  correspondientes (es decir,  $y = f(x)$  o  $x = \varphi(y)$ ). Esta relación puede expresarse como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

## B. Biografías



### Isaac Barrow

Nace: Octubre de 1630 en Londres, Inglaterra

Muere: 4 Mayo de 1677 en Londres, Inglaterra

Isaac Barrow tuvo como padres a Thomas Barrow y a Ann Buggin, sólo tuvo un hermano llamado Kent. La madre de Isaac muere en 1634 lo cual motiva a Thomas para enviar a Isaac con su abuelo. Dos años después Thomas se casa de nueva cuenta con la intención de tener de regreso a su hijo. Thomas envía a Isaac al Colegio de Charterhouse pagando una cuota extra para que obtenga una atención especial, sin embargo Isaac no recibe tal atención. Thomas, al enterarse de esto, transfiere a Isaac a Felstead, Essex en 1640.

Isaac desarrolla rápidamente su carácter y progresa en sus conocimientos, aprende griego, latín, hebreo y lógica como disciplina necesaria para ingresar a la Universidad. Después de permanecer dos años en Felstead, el padre de Isaac incurre en pérdidas económicas debido a la rebelión Irlandesa y le es imposible pagar las colegiaturas de Isaac. Aún así, el director de Felstead reconoce el potencial de Isaac ofreciéndole alojamiento y un tutor en la persona de Thomas Fairfax.

Con el apoyo de Fairfax, Isaac viaja a Londres en 1643. Fairfax muy pronto agota sus recursos y no puede ayudar más a Isaac; en estas circunstancias Barrow busca a un antiguo amigo de escuela quien le promete ayuda para entrar a Trinity College, Cambridge. Barrow ingresa en 1646 y trabaja como mozo a cambio de instrucción, escaso pago y alojamiento. Su amigo continua ayudándole por seis

meses, mientras que en este tiempo se levanta el estado de sitio en Oxford, lo que obliga a Isaac Barrow a pedir ayuda a su padre.

Dupor, el riguroso profesor de griego en Cambridge, es tutor de Barrow sin recibir ningún honorario y a él se debe el talento de Isaac y su ingreso en la Realeza. Con Dupor, Isaac estudió griego, latín, hebreo, francés, español, italiano, literatura, cronología, geografía, y teología, además de aritmética, geometría y óptica. Barrow forma parte de la comunidad escolar y se gradúa en 1649.

En una conversación que sostiene Isaac alababa los clásicos pero critica la carencia de temas como la matemática y la ciencia, disciplinas que comienza a estudiar a fondo inmediatamente después de graduarse. Barrow tiene algunos problemas de índole política que casi le cuestan la expulsión de Cambridge en 1648.

En 1652 Barrow se gradúa de la Universidad. Sus estudios sobre la historia de la Iglesia le conducen a la astronomía, la cual cambia por la geometría (disciplina que aprende por sí mismo) escribiendo una edición simplificada sobre los elementos Euclidianos que es impresa en 1655 y que sigue el estándar del libro de texto de mediados de siglo. Durante este periodo Barrow es nombrado conferencista en humanidades. Cuando la cátedra en griego estuvo disponible se esperaba que Barrow fuera nombrado para reemplazar a Duport quien había sido forzado a dejarla por motivos políticos, de cualquier manera, Barrow decía no tener la suficiente experiencia en la docencia ni había viajado lo suficiente.

En 1655 Barrow emprende un viaje a Francia, en el que conoce a Roberval. En febrero de 1656 se dirige a Florencia, donde permanece por 8 meses, pero no le es posible visitar Roma debido a un brote de plaga. Durante su estancia en Florencia conoce a Carolo Renaldini quien había escrito algunos artículos sobre álgebra, también conoce a Vincenzo Viviani, último pupilo de Galileo.

Barrow decide viajar a Turquía pero durante el trayecto el barco es atacado por piratas; posteriormente visita Smyra donde permanece por 7 meses. Isaac llega a Constantinopla donde permanece un año y medio, gracias al embajador Inglés en ese lugar. Barrow pasa mucho tiempo estudiando teología y en particular la Iglesia griega. Con algunas dificultades financieras Barrow comienza el viaje de regreso a Inglaterra al final de 1658; durante el viaje el barco atraca en Venice donde el fuego arrasa con las posesiones de Isaac y tiene que volver a Inglaterra a través de Alemania y Holanda, finalmente llegar a Cambridge en 1659.

A su regreso, Isaac se encuentra con varios cambios políticos en Inglaterra debido al restablecimiento del régimen monárquico de Carlos II. En Cambridge, el profesor de griego reconoce voluntariamente que existen varios profesores que

podrían impartir mejor esa cátedra, entre ellos el mismo Barrow; a Duport le es ofrecido el puesto (que le habían forzado a abandonar 6 años antes) pero declina el ofrecimiento, de esta forma deja el camino abierto a Barrow quien es electo para el cargo.

El pago que recibe Barrow como profesor consiste de 40 libras, además no le es permitido ocupar ningún otro cargo dentro de la Universidad. El Colegio sugiere una situación económica difícil lo cual impide que Isaac reciba algún ingreso extra, sin embargo el mismo Barrow emprende una exitosa campaña junto con otros profesores para captar recursos.

El interés de Barrow en las matemáticas y su mínimo ingreso le conducen a tomar en 1662 el puesto de profesor de geometría en Gresham College, Londres, con un salario de 50 libras por año. Se desempeña en este puesto al tiempo que continua como profesor de griego en Cambridge. En Gresham enseña geometría dos horas a la semana, una en inglés y la otra en latín. Barrow toma muy en serio sus deberes y forma parte de los 150 científicos elegidos como miembros de la Royal Society el 20 de mayo de 1663 en una de las primeras reuniones de la Sociedad.

La contribución de Isaac a la Royal Society es mínima y pudo muy bien haber sido influenciado por la relación entre la Sociedad y las Universidades. La Sociedad intenta asignarlo al comité astronómico y óptico, sin embargo Isaac no incrementa su contribución, con lo que la Sociedad decide suspenderlo.

En el verano de 1663 es creado el puesto de profesor lucasiano de matemáticas en Cambridge, gracias a Henry Lucas. Barrow es un obvio candidato para el puesto. En la primavera de 1664 Barrow entrega el primero de seis artículos matemáticos que consistía de material básico de análisis. Para el otoño tenía 9 artículos más y para la primavera de 1665 realiza el primero de cinco artículos sobre geometría. Después de impartir un pequeño curso sobre Arquímedes (el cual consistía de 4 clases), la Universidad tiene que cerrar debido a los brotes de plaga. Se abre en abril de 1666, lo que aprovecha Isaac para presentar otros 8 artículos, pero después de Junio se tiene que cerrar de nueva cuenta. La Universidad vuelve a abrir por segunda vez en la Semana Santa de 1667 y Barrow realiza nuevos artículos sobre geometría antes de presentar sus trabajos sobre óptica en el periodo 1668-1669. Isaac Newton revisa estos trabajos y entabla discusiones privadas con Barrow. A Newton le entusiasma demasiado estas conversaciones de forma tal que las toma como referencia en sus investigaciones.

John Collins publica bastantes artículos de Barrow: "*Lectiones Opticae*" en 1669, "*Lectiones Geometricae*" en 1670, y "*Lectiones Mathematicae*" en 1683.

Barrow no había preparado sus artículos para que fueran publicados, tal tarea la realiza Newton junto con otros profesores. La mayoría de la matemática de Barrow fue realizada durante 1663-1669.

*Lectiones Mathematicae* fue un artículo diseñado para reavivar el interés en las matemáticas en Cambridge, cubre temas como divisibilidad, congruencia, igualdades, tiempo y espacio. En los últimos artículos escritos por Barrow, se tocan temas como proporción y radio. *Lectiones Geometricae* contiene importantes conceptos sobre tangentes los cuales forman parte de los fundamentos del trabajo de Newton sobre el cálculo. *Lectiones Opticae* es un trabajo más teórico que práctico, lo cual es inusual en ese tiempo, el contenido es principalmente de óptica geométrica.

En 1669 Barrow renuncia a la Cátedra Lucasiana para cederla a Isaac Newton y hacerse cargo de otros trabajos matemáticos. Barrow es nombrado Capellán Real de Carlos II de Salisbury en 1673. Carlos II premia a Barrow declarándolo el mejor estudiante de Inglaterra y maestro de Trinity. Mientras fue maestro de Trinity, se le encomendaron dos empresas mayores: La primera de éstas es la de limitar la cantidad de intervenciones reales y la segunda consiste en la construcción de la biblioteca de Wren. En el primer cargo tiene algo de éxito, mientras que en el segundo invierte mucho tiempo y esfuerzo para lograr el interés en el proyecto y la recaudación de fondos. De cualquier forma, no vive para ver el resultado de su trabajo.

En abril de 1667 Barrow viaja a Londres donde contrae la fiebre maligna. Trata de curarse tomando opio, una fórmula que previamente le había funcionado cuando estuvo grave en Constantinopla, sin embargo agrava y muere. Es enterrado algunos días después en la Abadía de Westminster.



### Augustin Louis Cauchy

Nace: 21 de Agosto de 1789 en París, Francia

Muere: 23 de Mayo de 1857 en Sceaux, Francia

Augustin Luis Cauchy fue pionero del estudio del análisis y la teoría de permutaciones de grupos. Investigó sobre la convergencia y divergencia de series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y fisico-matemáticas.

Debido a los eventos que acontecen en París, motivados por revolución francesa, la familia Cauchy se cambia a Arcueil, sin embargo regresan pronto. El padre de Cauchy participa en la educación su joven hijo, además Laplace y Lagrange visitan con frecuencia a la familia Cauchy. Lagrange parecía tener un particular interés en la educación matemática del joven Augustin. En 1802 Augustin ingresa al Ecole Centrale du Panthéon donde estudia por dos años lenguajes clásicos.

Desde 1804 Cauchy asiste a clases de matemáticas, realiza el examen de admisión para ingresar al Ecole Polytechnique en 1805. En ésta asiste a clases con Lacroix, De Prony y Hachette, su tutor de análisis es Ampère. En 1807 se gradúa de la Ecole Polytechnique e ingresa a la escuela de ingeniería: Ecole des Ponts et Chaussées. Fue un estudiante sobresaliente y por sus trabajos prácticos se le asigna al proyecto del canal de Ourcq donde trabaja junto con Pierre Girard. En 1810 Cauchy obtiene su primer trabajo en Cherbourg laborando en las instalaciones portuarias, acostumbrando llevar consigo una copia de la "*Mechanique Céleste*" de Laplace y una de "*Théorie des Fonctions*". Fue una etapa donde Cauchy permanece muy ocupado. Cauchy tenía una devoción Católica que le causaría problemas posteriormente.

Cauchy realiza diversas investigaciones sobre matemáticas y prueba en 1811 que los ángulos de poliedros convexos están determinados por sus caras, lo que le sirve para presentar sus primeros escritos. Motivado por Legendre y Malus presenta un nuevo trabajo sobre polígonos y poliedros en 1812. En Septiembre de 1812, en París, Cauchy investiga sobre funciones simétricas y da a conocer una memoria de estos conceptos en Noviembre del mismo año, la cual se publica en la revista de la Ecole Polytechnique en 1815.

Cauchy solicita a De Prony el puesto de profesor asociado en la École des Ponts et Chaussées, tal solicitud fue rechazada pero se le permite continuar como ingeniero en el proyecto del canal de Ourcq en lugar de regresar a Cherbourg. Cauchy busca un puesto académico en el Bureau des Longitudes sin conseguirlo, dicho cargo es ocupado por Legendre. En un nuevo intento, Cauchy busca obtener un sitio en la sección de geometría del instituto, el puesto es concedido a Poinot. Cauchy enferma y le conceden un permiso de nueve meses pero sin pago. Los eventos políticos evitan a Cauchy laborar en Ourcq con lo que le es imposible dedicarse a la investigación por un par de años.

La producción matemática de Cauchy continúa y en 1814 publica "*Memoir on definite integrals*" que más tarde llega a ser la base de su teoría sobre funciones complejas. En 1815 Binet gana a Cauchy la cátedra de mecánica en la Ecole Polytechnique, pero le es asignada la de profesor asistente de análisis. En 1816 Cauchy gana el gran premio de la Academia Francesa de Ciencias por un trabajo sobre ondas. En 1817 cuando Biot deja París, Cauchy ocupa su puesto en el Collège de France, ahí imparte clases sobre los métodos de integración que había descubierto. Cauchy es el primero en hacer estudios rigurosos sobre las condiciones de convergencia de series infinitas junto con su rigurosa definición de integral. Su texto "*Cours d'analyse*" en 1821 es diseñado por los estudiantes de la Ecole Polytechnique y consiste en desarrollar los teoremas básicos tan rigurosamente como fuera posible. Comienza a exponer el estudio del cálculo de residuos en 1826 en "*Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitesimal*", mientras que en 1829 en "*Leçons sur le calcul différentiel*" define por primera vez una función de variable compleja.

Un ejemplo de cómo Cauchy trató a sus colegas lo ofrece Poncelet cuyo trabajo sobre geometría descriptiva, realizado en 1820, había sido criticado por Cauchy:

"Me las arreglé para acercarle mis conjeturas en su residencia... Sin dejarme decir algo, abruptamente se marchó remitiéndome a su próxima publicación *Leçons à Ecole Polytechnique* donde, según él, mis preguntas serían convenientemente explicadas".

La relación de Cauchy con Galois y Abel fueron desafortunadas. Abel, quien visitó el Instituto en 1826, escribió de él:

“Cauchy está loco y no hay nada que se pueda hacer por él, aunque, claro está, él es el único que conoce cómo las matemáticas deber ser hechas”.

Para Septiembre de 1830 Cauchy deja París después de la revolución de Julio y permanece un corto tiempo en Suiza. Ahí fue un entusiasta colaborador en el establecimiento de la “Académie Helvétique” pero su proyecto sucumbe como consecuencia de la situación política prevaleciente. En 1831 Cauchy viaja a Turín, poco después acepta un ofrecimiento del Rey de Piedmont para ocupar la cátedra de física teórica. Cauchy enseña en Turín desde 1832, asiste a sus clases Menabrea quien escribe a cerca de éstas:

“Eran muy confusas, de repente pasaban de una idea a otra, de una fórmula a otra, sin dar la relación entre ellas. Sus presentaciones eran como una nube oscura, iluminada de vez en cuando por chispazos de genio puro... de treinta participantes, únicamente yo las terminé”.

En 1833 Cauchy deja Turín a solicitud de Bolzano. Cauchy regresa a París en 1838 y recobra una posición en la Academia, pero no como profesor debido a que rehusa tomar el juramento de lealtad. De Prony muere en 1839 y su puesto en el “Bureau des Longitudes” está vacante. Cauchy es apoyado por Biot y Arago pero Poisson se opone contundentemente. Cauchy es elegido a pesar de no haber jurado lealtad, lo cual le impide ser nombrado como titular y no puede asistir a reuniones ni obtener ningún salario. En 1843 Lacroix muere y Cauchy es candidato para ocupar la cátedra de matemáticas en el Collège de France. Liouville y Libri son también candidatos. Cauchy debió haber sido elegido por sus habilidades matemáticas pero sus ideas políticas y sus actividades religiosas (como apoyar a los Jesuitas), influyeron en el resultado. Libri fue elegido, claramente el menos convincente de los tres matemáticos.

Durante este periodo, la producción matemática de Cauchy es mucho menor que en su autoexilio. Realiza importantes trabajos sobre ecuaciones diferenciales y aplicaciones físicomatemáticas, escribe sobre astronomía matemática debido principalmente a su candidatura para ocupar un puesto en el Bureau des Longitudes. El texto de cuatro volúmenes “*Exercices d'analyse et de physique mathématique*” publicado entre 1840 y 1847 prueba ser extremadamente valioso.

Cuando Louis Philippe es destronado en 1848, Cauchy recobra su posición en la Universidad; de cualquier forma no hubo cambio y continúan los problemas. Libri deja el puesto obtenido anteriormente y huye de Francia, en parte por haber sido acusado de robar valiosos libros. En 1850 Liouville y Cauchy fueron nuevamente

candidatos para ocupar la cátedra, tal como lo habían sido en 1843. Después de una cerrada pelea, Liouville es electo. Los intentos de Cauchy por revertir esa decisión dan como resultado una mala relación entre él y Liouville.

Otro malentendido con Duhamel ensombrece los últimos años de la vida de Cauchy. Esta disputa resulta cuando se trata de determinar la prioridad sobre los resultados de los choques inelásticos. Duhamel argüía sobre la mención de Cauchy que consideraba ser el primero en dar dichos resultados, alrededor de 1832. Poncelet muestra su trabajo (realizado en 1826) sobre este tema y demuestra que Cauchy estaba equivocado. Cauchy nunca lo aceptó.

En una carta escrita por la hija de Cauchy describe la muerte de su padre:

“Permanece completamente atento, con un completo control de su capacidad mental, hasta las 3:30 a.m. Mi padre repentinamente pronuncia los benditos nombres de Jesús, María y José. En primera instancia parece ser que está consciente de su condición. Alrededor de las cuatro su alma se encamina al cielo. Conoció la muerte en completa calma, lo que nos hizo avergonzarnos de nuestra infelicidad”

Numerosos términos llevan el nombre de Cauchy: El teorema de la integral de Cauchy en la teoría de funciones complejas, el teorema de Cauchy-Kovalevskaya sobre la existencia de una solución de una ecuación diferencial parcial, las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las secuencias de Cauchy.

Produjo 789 artículos matemáticos. Las obras completas de Cauchy están recopiladas en “Oeuvres complètes d’Augustin Cauchy” las cuales fueron publicadas en 27 volúmenes.



**Rudolf Otto Sigismund Lipschitz**

Nace: 14 Mayo de 1832 en Königsberg, Alemania (ahora Kaliningrad, Rusia)

Muere: 7 Octubre 1903 en Bonn, Alemania

Rudolf Lipschitz trabajó sobre formas cuadráticas diferenciales y mecánicas. Sus trabajos sobre el método de Hamilton-Jacobi para integrar ecuaciones de movimiento de sistemas dinámicos generales fueron utilizados en importantes aplicaciones de mecánica celestial.

Lipschitz es recordado por la “*Condición de Lipschitz*”, una desigualdad que garantiza la unicidad de una solución para una ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$ . Peano proporciona un teorema de existencia para una ecuación diferencial dando condiciones que al menos garantizan una solución.

Lipschitz redescubre el álgebra de Clifford y es el primero en aplicarlo para representar rotaciones de espacios euclidianos, de este modo introduce los grupos de giro (spin groups) con notación:  $Spin(n)$ .

**Bibliografía**

- [1] Abraham Ralph H.; Shaw, Christopher D. *Dynamics: The geometry behavior*, 2a., E.U.A., Adison Wesley, 1992.
- [2] Alonso, Marcelo; Finn, Edward J. *Física*, Vol. Mecánica, México, Addison-Wesley, 1986.
- [3] Arnold, Vladimir I. *Ordinary differential Equations*, 3a., Moscú, Springer-Verlag, 1984.
- [4] Braum, Eliezer. *Mecánica*, México, Trillas, 1998.
- [5] Boyce, William E.; Diprima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valor en la frontera*, 3a., México, Noriega Limusa, 1991.
- [6] Cambell, Stephen L. *An introduction to differential equations and their applications*, 2a., E.U.A., Wodsworth Pub. Co., 1986.
- [7] Carmona Jover, Isabel. *Ecuaciones diferenciales*, México, Alahambra Universidad, 1985.
- [8] Collatz, Lothar. *Differential equations: An introduction with applications*, E.U.A., J. Willey, 1986.
- [9] Dieudonne, Jean Alexandre. *Abregé d'histoires athematiques:1700-1900*. Jean Dieudonne con la colaboración de Pierre Dugac et al., Paris, Hermann, 1978,
- [10] Del Cosso Celso, Máximo. *Mecánica técnica*, Madrid, Dossat, 1965.
- [11] Edwards, C. H.; Penney, David E. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, México, Prentice Hall, 1986.
- [12] Elgoltz, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, 2a., U.R.S.S., Mir Moscú, 1977.
- [13] Galilei, Galileo. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Trad. Carlos Solís y Javier Sábada, Madrid, Nacional, 1974.
- [14] Kells, Lyman M., *Ecuaciones diferenciales elementales*, 5a., México, Mc. Graw Hill, 1970.

- 
- [15] Kline, Morris. *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días*, Madrid, Alianza Universidad, 1992.
- [16] Krebs, Charles J. *Ecology. The experimental analysis of distribution and abundance*, 3a., U.S.A., Harper and Row Pub., 1985.
- [17] Margalef, Ramón. *Ecología*, Barcelona, Omega, 1974.
- [18] Martínez Perez, Mariano. *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910. Una introducción histórica*. Compilación I. Graham Guinness, Madrid, Alianza Universidad, 1984.
- [19] Motz, Lloyd; Weayer, Jefferson H. *The story of mathematics*, Nueva York, Plenum Pub. Co., 1993.
- [20] Newman, James R. *SIGMA, el mundo de las matemáticas*, Trad. Simimon and Schuster, Vol. II, Barcelona, Grijalbo, 1983.
- [21] Resnick, Halladay Krame. *Física*, Vol. I, 4a., México, Continental, 1997.
- [22] Ricklefs, Robert E. *Ecology*, 3a., Nueva York, W.H. Freeman and Co., 1990.
- [23] Ross, Shepley. *Introducción a las ecuaciones diferenciales*, 3a., México, 1982.
- [24] Smith, P. *Mechanics*, E.U.A., J. Willey, 1990.
- [25] Smith, Robert L. *Ecology and field Biology*, 4a., Harper Collins, E.U.A., 1990.
- [26] Spiegel, Murray R. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, 3a., México, Prentice Hall, 1993.
- [27] Strother, Robert et al. *Grandes vidas, grandes obras*, México, Selecciones del Reader's Digest, 1967.
- [28] Volterra, Vito. "Variazioni del número di individui in specie animali converti" en *Foundations of ecology. Classic papers with commentaries*, E.U.A., Univ. Chicago Press, 1991.
- [29] Wilson, Edward O. *Sociobiología: La nueva síntesis*, Barcelona, Omega, 1980.
- [30] Zill, Denis G. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, 2a., México, Iberoamericana, 1985.