



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RECONSTRUCCION DEL CONJUNTO CAOTICO A PARTIR DE FUNCIONES DE DISPERSION.

292457

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A:
HORACIO TAPIA McCLUNG

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION BICULAR

DIRECTOR DE TESIS: DR. CHRISTOF JUNG KOHL



2001



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"RECONSTRUCCION DEL CONJUNTO CAOTICO A PARTIR DE FUNCIONES DE DISPERSION"

realizado por TAPIA MC CLUNG HORACIO

con número de cuenta 9218830-5 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. CHRISTOF JUNG KOHL

Propietario

DR. JORGE ANDRES FLORES VALDES

Propietario

DR. ALEJANDRO FRANK HOEFLICH

Suplente

DR. ARTURO OLVERA CHAVEZ

Suplente

DR. HERNAN LARRALDE RIDAURA

Consejo Departamental de Física.

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE

*¿Y de quién aprendí yo mi entereza y mi rebeldía, o de quién
pude heredarlas, sino de mi padre y de mi madre?
José Martí.*

Dedico este trabajo a mis papás
Emily y Horacio,
así como a mi hermano *Rodrigo* y a *Martha,*
quienes siempre han estado junto a mi.
Gracias.

**Reconstrucción del Conjunto
Caótico a partir de
Funciones de Dispersión**

Horacio Tapia McClung

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México,
UNAM.

México, D.F., Abril, 2001

“For want of a nail, the *shoe* was lost;
For want of a shoe, the *horse* was lost;
For want of a horse, the *rider* was lost;
For want of a rider, the *battle* was lost;
For want of a battle, the *kingom* was
lost!”

George Herbert (1593-1633)

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar un especial agradecimiento a mi director de tesis, maestro, tutor y amigo, Christof Jung. Este trabajo no habría sido posible sin su eterna paciencia, interés y conocimiento.

Quiero también agradecer a los amigos de la facultad, compañeros de riesgos y de victorias: Nettel, Mario, Javier, Cruz, Sergio, Adriana, Tiber, Miguel, Diana, y a los que no son de la facultad, pero algo han tenido que ver para que haya llegado hasta aquí, Magalí, Oliverio, Hugo, Alejandro.

Un especial agradecimiento y reconocimiento de mi parte se merecen Alejandro Moreno y Hugo Hernández. Durante todo el tiempo que estuve realizando esta tesis, pude contar con ellos para plantearles todos los problemas, dudas, comentarios, críticas, explicaciones, etc que surgieron durante el camino, y siempre tuve de su parte el apoyo, tiempo, paciencia y en ocasiones también consuelo y motivaciones. Gracias Alejandro y Hugo por esas horas de discusiones y charlas que han dado su fruto. Ojalá esto sea sólo el principio de muchas muchas horas de Física juntos. A Carlos Mejía le debo también dedicar un espacio para agradecerle el que nunca me haya faltado una computadora y por toda la ayuda en los problemas de cálculos y escritura del trabajo, así como las pláticas sobre la tesis.

Agradezco también a los profesores que me han formado con paciencia y amor a ciencias, Christof Jung, Thomas Seligman, Rafael Méndez, Francois Leyvraz, Luis Briseño, Roberto Escudero Derat y Ricardo Lima.

Agradezco a las instituciones de las cuales he recibido apoyo: la Universidad Nacional Autónoma de México, en particular a su

Facultad de Ciencias; al Centro Internacional de Ciencias, CIC, A.C., donde nació y se llevó a cabo gran parte de este trabajo; al Centro de Ciencias Físicas y al Instituto de Física de la UNAM, cuyas puertas siempre han estado abiertas. Al CONACyT y a la Fundación TELMEX por el apoyo económico otorgado.

Por último, agradezco a los profesores que integran el jurado, Jorge Flores, Alejandro Frank, Arturo Olvera y Hernán Larralde, por sus valiosas aportaciones para completar este trabajo.

Ser cultos para ser libres.

J.M.

Índice General

INTRODUCCIÓN	v
1 EL MODELO	1
2 HERRADURAS DE SMALE	13
3 FUNCIONES DE DISPERSIÓN	27
4 DISPERSIÓN Y HERRADURAS DE SMALE	33
5 RESULTADOS	43
5.1 RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ PERFECTO	46
5.2 RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ NO PERFECTO	59
6 CONCLUSIONES	75
A Errores numéricos	79
Bibliografía	89

INTRODUCCIÓN

De la manera más general posible, puede pensarse en el problema de dispersión como aquel en el que se desea obtener una relación entre un conjunto de variables “de entrada”, que caracterizan las condiciones iniciales de un sistema dinámico, con un conjunto de variables “de salida”, que caracterizan el estado final del sistema. El ejemplo más simple es el movimiento de una partícula puntual en un potencial $V(x)$ de rango finito cuya interacción es en una región localizada, denominada región de interacción. Fuera de esta región, la trayectoria de la partícula es una línea recta (o aproximadamente), pues no hay fuerzas que actúen sobre ella. En una órbita que se aproxima a la región de interacción donde $V(x)$ es distinto de cero, la partícula está sujeta al potencial y sale de la región de dispersión hacia la región asintótica. El problema inverso de dispersión consiste en conocer la interacción y/o la dinámica, a partir de mediciones iniciales y finales del sistema puramente asintóticas.

Los problemas de dispersión son muy comunes en muchas de las áreas de la física. Es bien conocido el problema de dispersión de Rutherford, por medio del cual, y usando un análisis rigurosamente clásico (pues cuando Rutherford llevó a cabo su análisis, la mecánica cuántica aún no estaba desarrollada), se propuso un modelo nuclear del átomo. Un ejemplo de dispersión, en donde el problema inverso es importante, es la de cargas eléctricas en el campo de un dipolo magnético (problema de Störmer) [7]. Una de las aplicaciones de estos efectos de dispersión es el radar, que envía una señal electromagnética que es reflejada, y puede conocerse la forma de la superficie sobre la que incidió la onda. Los barcos y submarinos utilizan este dispositivo para conocer la superficie del fondo marino y la profundidad de éste respecto al transporte.

En particular, el ejemplo del submarino o del barco, implican reconstruir el fondo del mar a partir de las ondas reflejadas, es decir, conocer la estructura de la región en la que se lleva a cabo la interacción con los proyectiles, en este

caso las ondas lanzadas. Al inicio, las ondas emitidas son manipuladas por el operador del radar, y las ondas reflejadas detectadas por éste contienen la información sobre la estructura en la región de interacción, el fondo marino.

Muchos otros problemas de dispersión caen dentro de la categoría del problema inverso de dispersión. Cuando se analizan moléculas, es imposible la observación directa, y se llevan a cabo experimentos de dispersión con electrones como proyectiles, que al ser dispersados por la molécula proporcionan información sobre la estructura del blanco.

Usualmente, en los experimentos de dispersión se obtienen resultados sobre las secciones eficaces de dispersión; sin embargo, se desea conocer la fuerza o el potencial de interacción y obtener una expresión para el Hamiltoniano del sistema. Existen ejemplos en los que es posible dar una solución cerrada (ver, por ejemplo, la referencia [8]). En sistemas caóticos, reconstruir la forma del Hamiltoniano a partir de datos de dispersión no es una tarea práctica. Una reconstrucción exacta es imposible, mientras que una reconstrucción aproximada es poco útil. En estos casos, es más importante obtener conocimiento de la dinámica del sistema, en particular, información sobre las estructuras de los conjuntos caóticos invariantes, llamados también *sillas caóticas*. Hasta el momento, no se conoce cómo extraer esta información directamente de la función Hamiltoniana o del potencial, y es en este sentido en el que la construcción de una función analítica para el Hamiltoniano es innecesaria. Una alternativa, propuesta originalmente en [1], es la reconstrucción directa de la estructura topológica y algunas propiedades estadísticas de la silla caótica a partir de datos asintóticos.

El problema inverso consiste en que un observador, sin acceso a la región en la que se da la interacción, pueda obtener, con mediciones puramente asintóticas, información sobre la dinámica en esta región. Este contempla tres partes generales; la elección de las condiciones iniciales del sistema en la región asintótica, sobre las cuales el observador tiene toda la libertad; la evolución a partir de estas condiciones iniciales y la obtención de los datos de dispersión. A partir de éstos, el tercer paso es la evaluación y la reconstrucción de la dinámica en la región de interacción. Los datos de dispersión obtenidos se llaman *funciones de dispersión* y constituyen un conjunto de variables que contienen información sobre lo que sucede en la región donde no hay acceso. En sistemas caóticos, las funciones de dispersión tienen una estructura de intervalos de continuidad y de singularidades, que forman un conjunto fractal para un intervalo de condiciones iniciales. La estructura fractal está relacionada con las estructuras invariantes del conjunto caótico

en la región de interacción. Por lo tanto, las funciones de dispersión contienen información sobre la dinámica en la región de interacción.

Se han llevado a cabo estudios en sistemas caóticos unidimensionales con una dependencia temporal periódica y bidimensionales que poseen una frecuencia interna fija, o casi fija, que sirve como reloj interno para el sistema [1]. En estos casos, es posible utilizar el período como unidad de medición para reconstruir las estructuras invariantes sobre una superficie de Poincaré adecuada. Jung et. al. presentan resultados satisfactorios para la reconstrucción de la silla caótica; sin embargo, no van más allá de sistemas periódicos o con frecuencias fijas.

En esta tesis continuamos con estas investigaciones estudiando un sistema de dispersión caótica con una frecuencia interna variable. El trabajo se divide en cinco capítulos. En el primero describimos el modelo presentando la función Hamiltoniana y las ecuaciones de movimiento que rigen la evolución dinámica del sistema. Asimismo, reconocemos que es posible construir un mapeo, definido sobre una superficie de intersección adecuada, que contiene toda la información del flujo, y que hace posible el estudio de la dinámica. Este mapeo (llamado mapeo de Poincaré) posee conjuntos invariantes que tienen una estructura topológica conocida como *herradura de Smale*. En el capítulo 2 describimos estas estructuras, introduciendo el parámetro de desarrollo β de la herradura. En el capítulo siguiente estudiamos las funciones de dispersión, describiendo con detalle qué son, cómo se obtienen y el significado de la estructura de intervalos de continuidad y singularidades que presentan.

El capítulo 4 es esencial para el trabajo, puesto que describe cuál es la conexión entre las funciones de dispersión y las estructuras invariantes en la región de interacción. En este capítulo se describe el método de reconstrucción a partir de las mediciones asintóticas, las funciones de dispersión, introduciendo los niveles de jerarquía de los intervalos de continuidad y los árboles de ramificaciones de dichos niveles. Los árboles de ramificaciones contienen la información sobre el parámetro de desarrollo de la herradura, así como sobre una posible descripción simbólica de la dinámica en la región de interacción.

El capítulo 5 contiene los resultados de aplicar el método de reconstrucción del capítulo 4 al sistema Hamiltoniano descrito en el capítulo 1. Está dividido en dos partes. La primera de ellas, trata el caso cuando la frecuencia del sistema es constante, y por lo tanto la dependencia temporal es armónica. Esperamos que el método funcione de manera efectiva, como en [1]. La segunda parte está dedicada a un sistema que muestra una pe-

queña anarmonicidad en la frecuencia, y los resultados son importantes en la investigación del problema inverso para sistemas caóticos.

Finalmente, el capítulo 6 presenta las conclusiones y la discusión sobre el trabajo realizado.

Capítulo 1

EL MODELO

En este capítulo presentamos el modelo que usamos como sistema de dispersión. El sistema está descrito por un Hamiltoniano independiente del tiempo para una partícula de masa $m = 1$, momento p y posición q , con un grado de libertad interno vibracional dado por las variables de ángulo φ y acción I . El Hamiltoniano es:

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q, \varphi) + f(I) \quad (1.1)$$

donde $V(q, \varphi)$ es el potencial de interacción, y está dado por

$$V(q, \varphi) = A(q^2 + q + 1) \exp(-q)(1 - \cos(\varphi)). \quad (1.2)$$

A es una constante y la función $f(I)$ determina la dependencia del grado de libertad interno vibracional con la variable acción I . Esta función podemos elegirla como queramos. Para este trabajo, hemos elegido dos casos, el primero cuando la función es lineal en la acción, i.e. $f(I) = \omega I$ y el segundo cuando la función es no lineal, $f(I) = \omega I - \frac{B}{2} I^2$. Definimos la frecuencia efectiva del sistema ω_{ef} como $\omega_{ef} = \partial f(I) / \partial I$. Debido a que la dependencia angular del potencial es oscilatoria, con período 2π , elegimos $\omega = 2\pi$.

El potencial satisface la condición de dispersión, $\lim_{q \rightarrow +\infty} q \cdot V(q) = 0$, y el Hamiltoniano total contiene una parte de partícula libre y una de interacción; entonces, podemos expresarlo como la suma de un Hamiltoniano asintótico y el potencial de interacción: $H = \frac{p^2}{2} + f(I) + V(q, \varphi) = H_0 + V(q, \varphi)$ donde $H_0 = \frac{p^2}{2} + f(I)$ es el Hamiltoniano en la región asintótica.

La energía total de sistema es una cantidad conservada puesto que el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo. La energía está dada

por $E = H_0 + V(q, \varphi) = cte$. En la región asintótica, $E = H_0$, con una contribución del grado externo $p^2/2$ y una del grado interno $f(I)$. En la región asintótica inicial, la energía está distribuida entre los dos grados de libertad siendo constante a lo largo de trayectorias de H_0 . Cuando la trayectoria alcanza la región de interacción, la energía se divide en tres partes, cinética E_{cin} , del grado interno E_{int} y energía potencial, siendo la suma de las tres igual a la energía total, que es constante. Cuando se alcanza la región asintótica final, la interacción con el potencial es otra vez cero y la energía total vuelve a dividirse en dos partes, E_{cin} y E_{int} , manteniéndose la suma constante e igual a la energía total. En general, la energía cinética inicial es diferente a la energía cinética final, y lo mismo sucede para la energía del grado interno; sin embargo, la suma de las energías finales y la suma de las energías iniciales siempre es una constante. La dispersión es inelástica en el sentido en que la energía total se distribuye entre los grados de libertad del sistema durante el proceso, aun cuando la energía total sea una constante.

La dinámica de la partícula está determinada por las ecuaciones de movimiento de Hamilton:

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= p \\
 \dot{p} &= Aq(q-1)\exp(-q)(1-\cos(\varphi)) \\
 \dot{\varphi} &= \omega_{ef} \\
 \dot{I} &= -A(q^2 + q + 1)\exp(-q)\sin(\varphi).
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Como la energía total es constante, la dinámica está restringida a superficies de igual energía, y podemos expresar una de las variables como función de la energía y de las demás variables. Por la forma asintótica del Hamiltoniano, y puesto que estudiaremos la dinámica en el espacio fase restringido $p-q$, es conveniente expresar la acción como función de la energía total, el momento, la posición y la fase, es decir $I = I(E, q, p, \varphi)$. Esta elección de la variable acción nos determina un valor inicial único para cada trayectoria. La fase inicial del ángulo φ la escogemos siempre igual a cero; los demás valores iniciales, el momento y la posición, se eligen según convenga.

En la región asintótica no existe intercambio de energía potencial y cinética y la dinámica está regida por:

$$\dot{q} = p$$

$$\dot{p} = 0$$

$$\dot{\varphi} = \omega_{ef}(I)$$

$$\dot{I} = 0,$$

es decir, la frecuencia efectiva no cambia a lo largo de trayectorias de H_0 . Esta condición nos permite definir como superficie de sección para construir un mapeo de Poincaré, la superficie $\varphi = 0 \bmod 2\pi$. La elección de esta superficie de Poincaré es conveniente para nuestro caso puesto que en la región asintótica la frecuencia efectiva no se altera y cada paso del mapeo corresponde a una revolución de la fase, la cual cambia de acuerdo a la penúltima ecuación. Hay diferencias cuando la trayectoria entra a la región de interacción, puesto que ahí la frecuencia efectiva no es constante, depende del intercambio de energías. La propiedad asintótica de que ω_{ef} sea constante a lo largo de trayectorias de H_0 , nos da un reloj interno para el sistema, que nos mide el tiempo entre cada paso del mapeo, es decir, el tiempo que la fase tarda en completar una revolución e intersectar nuevamente la superficie de sección. Este reloj interno nos da información sobre el tiempo que se requiere para dar un paso más del mapeo. Cuando ω_{ef} no cambia con el tiempo, es decir cuando $\dot{\varphi} = \omega = cte$, decimos que el reloj interno es perfecto puesto que cada paso del mapeo es exactamente igual a la unidad de tiempo que la fase necesita para completar una revolución. Cuando ω_{ef} no es constante, es decir cuando introducimos anarmonicidades en la función $f(I)$, la frecuencia efectiva del sistema es constante a lo largo de las trayectorias de H_0 , pero cuando alcanza la región de interacción, el valor de esta frecuencia depende del intercambio de energías; entonces decimos que el reloj interno no es perfecto.

Existe un umbral de energía para el sistema, la energía de disociación, que es la energía mínima para romper el grado de libertad interno; es igual a $E_{dis} = \omega^2/2B$. Cuando esto sucede, la frecuencia efectiva del grado de libertad interno es igual a cero y el reloj interno deja de funcionar puesto que el grado de libertad se acopla al movimiento.

La figura 1.1 muestra una trayectoria típica de una partícula en el espacio fase restringido $p - q$ que comienza en la región asintótica, se acerca a la región de interacción, realiza una serie de movimientos complicados y finalmente sale de nuevo a la región asintótica. Es conveniente y usual construir un mapeo en dos dimensiones, donde cada trayectoria está determinada por una sucesión de puntos en el espacio fase restringido. El mapeo lo construimos aprovechando que la energía es una constante y podemos determinar

el valor inicial de la variable de acción como función de ésta y con la superficie de sección que definimos antes. Estas condiciones nos restringen la dinámica a superficies de igual energía y nos proporcionan un mapeo bien definido sobre la superficie de sección. Así, tenemos un mapeo similar a un mapeo estroboscópico [1]. De ahora en adelante, trabajaremos con este mapeo, teniendo presente que hemos reducido el flujo dado por el sistema de ecuaciones de movimiento (1.3) a un mapeo en dos dimensiones que contiene toda la información del sistema.

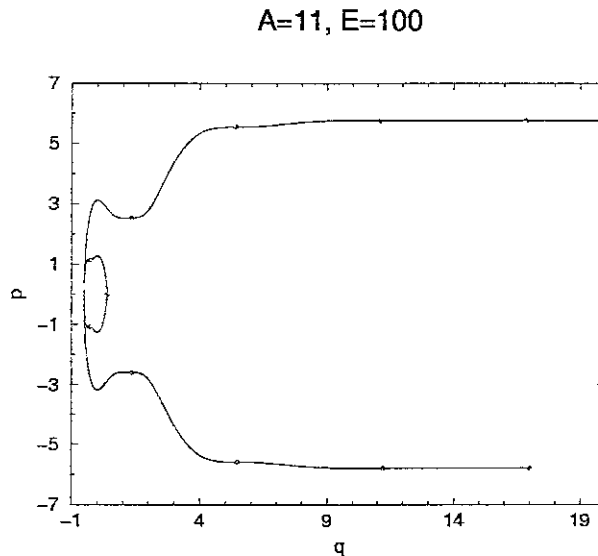


Figura 1.1: Trayectoria típica para el sistema (1.3) en el espacio fase restringido $p-q$. La secuencia de puntos corresponde a las imágenes del mapeo de Poincaré

Es posible reducir el estudio de la dinámica del sistema dado por el Hamiltoniano al análisis en el espacio fase restringido $p-q$, gracias a la conservación de la energía y a la definición de la superficie de sección con la que construimos el mapeo de Poincaré. Puesto que la energía es una cantidad que se conserva durante todo el movimiento, podemos obtener el valor inicial de la variable de acción a partir de ésta y de los valores iniciales de las otras variables, y como definimos a la superficie de sección y hacemos las mediciones siempre sobre esta superficie, sólo es necesario estudiar cómo se desenvuelven las variables de momento y de posición; las otras dos están completamente

determinadas. Así, es claro que empezamos a integrar las ecuaciones de movimiento para valores determinados de los parámetros y de la energía. Con el valor de la energía y los valores iniciales del momento y de la posición, calculamos el valor inicial de la variable acción; el valor inicial de la fase es siempre cero. De este modo, y como estamos midiendo siempre sobre la superficie de sección $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$, sólo es necesario seguir la evolución de las variables dinámicas p y q . La forma asintótica de las ecuaciones de movimiento nos garantiza que en la región lejana a la región de interacción, la partícula realiza una trayectoria en línea recta hasta que alcanza la región de interacción, donde el potencial actúa sobre ella y realiza trayectorias complicadas como la mostrada en la figura 1.1. Esta figura incluye también la secuencia de puntos que se generan del mapeo de Poincaré y que corresponde a la trayectoria mostrada. Como hemos definido un mapeo, el estudio del sistema se reduce a conocer la dinámica del mapeo. Este estudio se inicia con la identificación de puntos fijos del mapeo, y sus correspondientes conjuntos invariantes. Estos puntos, llamados también puntos de equilibrio, son aquellos que permanecen fijos al aplicarles el mapeo. El mapeo que hemos construido posee dos puntos fijos, el punto $(q_1, p_1) = (0, 0)$ y el punto $(q_2, p_2) = (1, 0)$. El primero de ellos es elíptico para valores pequeños de la constante A y se vuelve inverso hiperbólico [5] para valores grandes de A , mientras que el segundo siempre es hiperbólico. Los puntos hiperbólicos tienen asociados conjuntos invariantes del mapeo de Poincaré.

La figura 1.2 muestra una gráfica del potencial de la ecuación (1.2) como función de la posición y el ángulo. En el estudio de la dinámica molecular o nuclear, se encuentran, bajo ciertas condiciones, potenciales parecidos, cuando pensamos en la variable posición como el logaritmo de un radio en un espacio de más dimensiones (transformación de Langer). El potencial presenta un máximo en $q = 1$, que corresponde a un equilibrio inestable, y tiene un mínimo en $q = 0$, un punto de equilibrio estable. Ambos puntos críticos del potencial corresponden a los puntos de equilibrio del mapeo; el mínimo corresponde al punto fijo $(q_1, p_1) = (0, 0)$, y el máximo al punto $(q_2, p_2) = (1, 0)$.

Por medio de un programa computacional calculamos la matriz de linealización alrededor de cada uno de estos puntos de equilibrio del mapeo de Poincaré. A continuación describiremos cómo obtener la matriz de linealización para el mapeo. Primero tomamos condiciones iniciales de la forma $(q_f + \delta, p_f)$ y $(q_f, p_f + \delta)$ cercanas al punto fijo, donde δ es un desplazamiento pequeño. Ya que la matriz de linealización es de 2×2 , aplicamos el mapeo

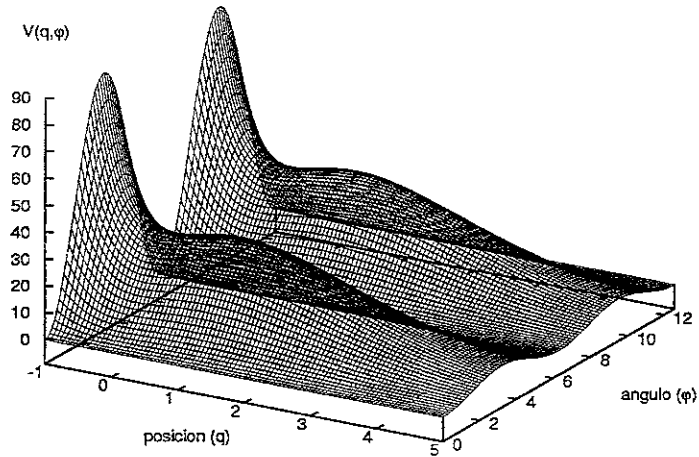


Figura 1.2: Gráfica del potencial $V(q, \varphi)$

a estos puntos para obtener un sistema lineal de ecuaciones simultáneas, que se resuelve ayudándonos del hecho que el mapeo deja fijo al punto (q_f, p_f) . Recordemos que la construcción de nuestro mapeo incluye la integración del sistema de ecuaciones (1.3), y se obtiene cada vez que la variable ángulo φ alcanza el valor 2π . En ese momento, tenemos la imagen del punto en cuestión. De esta manera obtenemos la imagen de los dos puntos desplazados del punto fijo; nótese que el desplazamiento se realiza en la dirección q en un caso y en la dirección p en el otro (figura 1.3), aunque sus imágenes no necesariamente están en la misma dirección. Esto se hace únicamente por simplicidad, pero es importante que el desplazamiento sea pequeño para garantizar que estamos en la región donde la linealización es válida. Con los cálculos anteriores, obtenemos los cuatro elementos de la matriz de linealización del mapeo cerca de los puntos fijos. Cuando tenemos la matriz de linealización, la obtención de los eigenvalores y de los eigenvectores asociados a cada uno de ellos es inmediata. Cuando el punto $(q_1, p_1) = (0, 0)$ es elíptico, existe alrededor de él un escenario conocido como escenario de KAM, mientras que para el punto fijo hiperbólico los eigenvectores determinan dos direcciones, una estable y otra inestable. La primera de ellas, la dirección estable, corresponde al eigen-

vector asociado al eigenvalor con valor absoluto menor a 1, y la segunda, la inestable, corresponde a la dirección del eigenvalor con valor absoluto mayor a 1.

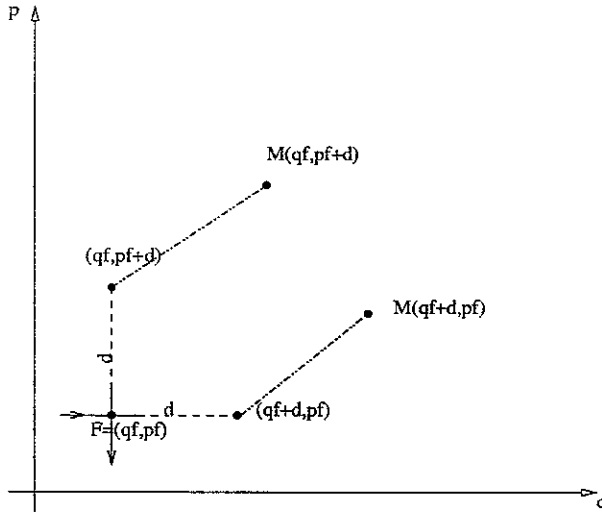


Figura 1.3: Método usado para construir el mapeo lineal

El mapeo que estamos estudiando es un mapeo no lineal y caótico. En general, no es posible resolver este tipo de sistemas mas que de manera aproximada y utilizando métodos numéricos. Sin embargo, es posible tener una idea geométrica del comportamiento del sistema. Esta visión geométrica, que discutiremos con detalle más adelante, se obtiene de las gráficas de las variedades de los puntos fijos. En particular, el punto fijo hiperbólico es de importancia, puesto que divide el espacio fase en la región de interacción y la región libre. Las estructuras que se forman en las eigendirecciones estable e inestable del punto hiperbólico, en las cuales el movimiento se acerca o se aleja del punto fijo, corresponden a las variedades invariantes del punto fijo. Si colocamos varias condiciones iniciales en la dirección inestable del punto fijo y las iteramos bajo el mapeo de Poincaré, obtenemos la variedad inestable. Si colocamos las condiciones iniciales en la dirección estable y las iteramos bajo el mapeo inverso, obtenemos la variedad estable. En general, las variedades son conjuntos invariantes que, en una vecindad del punto fijo donde la linealización es válida, las imágenes de sus elementos (puntos que representan una trayectoria) se acercan al punto fijo en una dirección, mientras que en la otra

se alejan de él exponencialmente. Para sistemas no lineales, estos conjuntos pueden ser muy complicados; sin embargo, una observación importante es que una variedad estable o inestable no puede intersectarse con ella misma, pues esto violaría la unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales. Más adelante discutiremos ampliamente las estructuras de estas curvas.

Como dijimos antes, el mapeo de Poincaré genera una secuencia de puntos que corresponde a la trayectoria de la partícula en el espacio fase. A continuación estudiaremos más a fondo este mapeo para el sistema (1.3) tal y como lo definimos arriba, pues es de vital importancia entenderlo completamente para el desarrollo de este trabajo. Como lo hemos mencionado, dada la dependencia angular del Hamiltoniano, el mapeo de Poincaré lo hemos definido cuando $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$. En esta superficie, el valor del potencial se anula, y aprovechamos que la parte angular posee una simetría de reflexión en el tiempo -simetría especular-, que se transforma en simetría especular de la superficie de Poincaré. Al elegir esta superficie de sección, además de esta simetría, que se refleja en las gráficas de las variedades invariantes, podemos utilizar el tiempo en cada paso del mapeo como un reloj interno para el sistema.

Veamos por qué con el caso más simple: cuando la función $f(I)$ es lineal en la acción, la derivada temporal de la variable ángulo φ , es decir, la frecuencia efectiva, es constante e igual a la frecuencia de oscilación ω , que hemos elegido igual a 2π . Integrando la ecuación de movimiento para el ángulo, obtenemos $\varphi(t) = 2\pi t + \varphi_0$, donde φ_0 es el valor inicial del ángulo. Puesto que hemos elegido la superficie de Poincaré cuando $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$, es ahora claro por qué el valor inicial del ángulo es siempre cero, ya que garantizamos así que nuestras trayectorias empiecen siempre sobre la superficie de sección y que todas las mediciones posteriores que realicemos del sistema serán en esta superficie. Cuando la función $f(I)$ es lineal, el mapeo de Poincaré coincide con el mapeo estroboscópico.

En la figura 1.4 graficamos la frecuencia efectiva de oscilaciones para el caso armónico como función del tiempo, a lo largo de la trayectoria de una partícula. Tal y como lo esperamos, es una línea recta con pendiente cero y ordenada al origen igual a 2π . Puesto que es una línea recta, en cada unidad de tiempo el ángulo φ aumenta en 2π por lo que el sistema vuelve a intersectar la superficie de sección cada unidad de tiempo. Esto quiere decir que cada uno de los puntos de la secuencia generada por el mapeo de Poincaré distan uno de otro en exactamente una unidad de tiempo, esto es, $T = \omega/\omega_{ef} = 1$, puesto que $\omega_{ef} = 2\pi$, donde T es el tiempo de retorno

a la superficie de sección. Cuando hablamos de un reloj interno perfecto, queremos decir que el tiempo para cada paso del mapeo es exactamente una unidad de tiempo del sistema. De esta manera, el observador asintótico puede saber exactamente el número de pasos del mapeo que cada trayectoria necesita para ser detectada en la región asintótica de salida.

$$E = 197, A = 11, B = 0$$

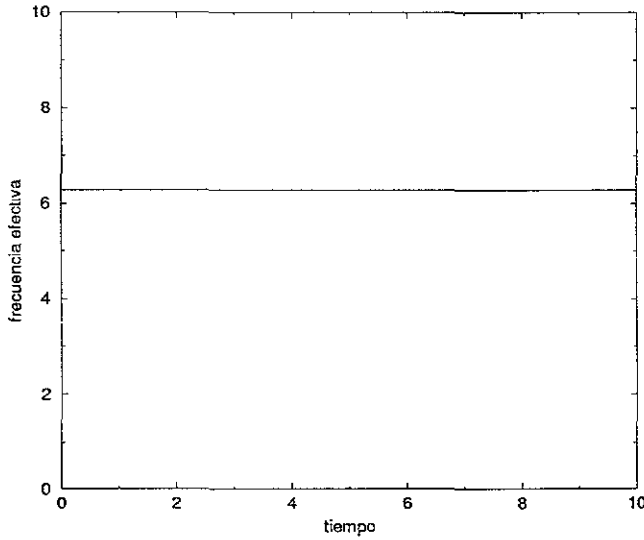


Figura 1.4: Frecuencia efectiva contra tiempo para las trayectorias de (1.3) con $f(I) = 2\pi I$

Cuando la dependencia de la variable acción no es lineal, la ecuación de movimiento para la variable ángulo se modifica y la velocidad angular depende de la variable acción I . La consecuencia de esta dependencia de la acción en la velocidad angular, es que el sistema no intersecta a la superficie de sección en unidades de tiempo iguales como en el caso anterior, sino que el tiempo para que el sistema regrese a esta superficie puede cambiar dependiendo de los parámetros de anarmonicidad que se hayan introducido. En las regiones asintóticas, donde la dinámica se rige por el Hamiltoniano libre $H = H_0$, el tiempo entre cada paso del mapeo sí es igual, puesto que la frecuencia efectiva no cambia; sin embargo, cuando se alcanza la región de interacción, la frecuencia efectiva cambia con la acción, y el tiempo entre cada paso del mapeo ya no es igual. En este caso, decimos que el reloj interno

no es perfecto. En la figura 1.5 mostramos la dependencia de la frecuencia efectiva como función del tiempo para la trayectoria de una partícula cuando la velocidad angular depende de la acción, en un caso en que la energía del sistema es $E = 197$ y el valor de la anarmonicidad es $B = 0.1$.

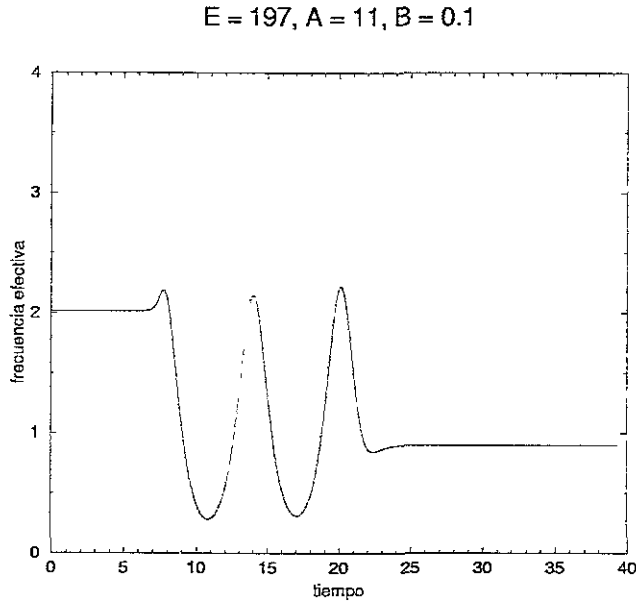


Figura 1.5: Frecuencia efectiva contra tiempo para una trayectoria típica de (1.3) con $f(I) = 2\pi I - \frac{B}{2}I^2$

Antes de concluir esta sección, es importante hacer notar la siguiente observación para cálculos y discusiones posteriores. El sistema (1.3) depende de los parámetros A , B y la energía. El primero de ellos, la constante A , corresponde a la fuerza de la interacción con el potencial; si ésta es muy pequeña, la interacción también lo es, y el punto fijo $(q_1, p_1) = (0, 0)$ es elíptico. Conforme aumenta esta constante, el punto se vuelve inverso hiperbólico y las estructuras de las variedades invariantes en el espacio fase cambian. La constante B corresponde a la magnitud de la anarmonicidad que hemos introducido en (1.3). Cuando ésta vale cero, recuperamos el caso armónico. En este trabajo estamos interesados en anarmonicidades pequeñas, y hemos elegido para todos los cálculos el valor $B = 0.1$. Sin embargo esta elección no es del todo arbitraria. Como hemos discutido, existe una energía de disociación $E_{dis} = 2\pi^2/B$ que depende del valor del parámetro B . Cuando

el parámetro es muy pequeño, esta energía es grande. Si el parámetro de anarmonicidad es cero, la energía de disociación es simplemente infinita. La observación importante es que podemos estudiar al sistema con diferentes valores de energía total, desde energías muy bajas, lejos de la energía de disociación, hasta energías cercanas a E_{dis} , y obtener todo el escenario del sistema como si cambiáramos el parámetro de anarmonicidad; es decir, no necesitamos cambiar el parámetro B puesto que, con sólo cambiar la energía total, tenemos todo el comportamiento del sistema. Por este motivo, en todos los cálculos que realizamos, hemos dejado fijo el parámetro de anarmonicidad con el valor $B = 0.1$, cambiando los valores de la energía total y del parámetro A , mientras que para el caso armónico, $B = 0$, esta observación es irrelevante.

Capítulo 2

HERRADURAS DE SMALE

La herradura de Smale tiene su origen en la visión geométrica de los sistemas dinámicos. En 1960, mientras realizaba una estancia de investigación en el Instituto da Matematica Pura e Aplicada (IMPA) en Río de Janeiro, Brasil, Steve Smale descubrió la transformación de la herradura. Es interesante y motivante que este descubrimiento lo hizo en las playas de Río de Janeiro. Smale tiene una formación matemática en topología y fue por casualidad que se interesó en los sistemas dinámicos. Su formación como topólogo le permitió encontrar una explicación geométrica de lo que sucede en los sistemas caóticos. La transformación de la herradura permite comprender como es el mecanismo del caos y proporciona una liga a la impredecibilidad en la dinámica.

La forma más simple de entender la transformación de la herradura es tomar un cuadrado R con esquinas A , B , C y F , como lo muestra la figura 2.1a, y en cada unidad de tiempo realizar la transformación que a continuación se describe. Primero se estira en una dirección y se contrae en la otra, de manera que se obtiene un rectángulo como lo muestra la figura 2.1b, y después se dobla para obtener una herradura, figura 2.1c. La dinámica de la transformación está descrita por el movimiento de un punto del cuadrado original R a un punto en la herradura. Así, las esquinas A , B , C y F se mueven como lo muestra la figura 2.1c. En esta descripción, la esquina F se mantiene fija por razones que más adelante detallaremos.

Si nos imaginamos que solamente tenemos como campo de visión al cuadrado original, y colocamos a la herradura sobre éste, tal y como lo hicimos en la figura 2.1, vemos que la imagen del cuadrado bajo la transformación son dos bandas verticales V_1 y V_2 , figura 2.2a. Si volvemos a realizar la

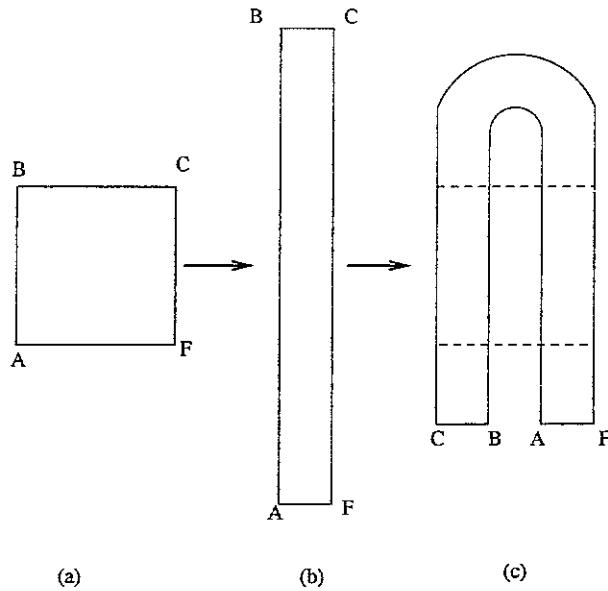


Figura 2.1: Transformación de la herradura de Smale

transformación sobre este nuevo cuadrado, obtenemos la segunda imagen del cuadrado original, como se muestra en la figura 2.2b, donde vemos que la imagen de las bandas verticales V_1 y V_2 son cuatro bandas verticales $V_{1.1}$, $V_{2.1}$, $V_{1.2}$ y $V_{2.2}$. Es fácil convencerse que la preimagen de las bandas V_1 y V_2 son dos bandas horizontales H_1 y H_2 , como se muestra en la figura 2.2c, y sus preimágenes son cuatro bandas horizontales $H_{1.1}$, $H_{2.1}$, $H_{1.2}$ y $H_{2.2}$. Restringido al conjunto de la intersección entre las bandas horizontales H_1 y H_2 , la transformación es lineal. Es claro que bajo esta transformación, algunos puntos del cuadrado salen de él, mientras que otros permanecen dentro. Si colocamos las imágenes y preimágenes sobre el cuadrado original, obtenemos un patrón de intersecciones interesante, figura 2.2d, que nos indica cuáles son los puntos del cuadrado que permanecen dentro de él al aplicar la transformación y la transformación inversa. La intersección de las imágenes y preimágenes del cuadrado original, después de n aplicaciones de la transformación de la herradura, forman un conjunto de Cantor cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $\bigcap_n f^n(R)$ es un conjunto de Cantor. La descripción completa de este conjunto y de la dinámica a la que da lugar, puede darse en términos de una dinámica simbólica como se explica ampliamente en [5].

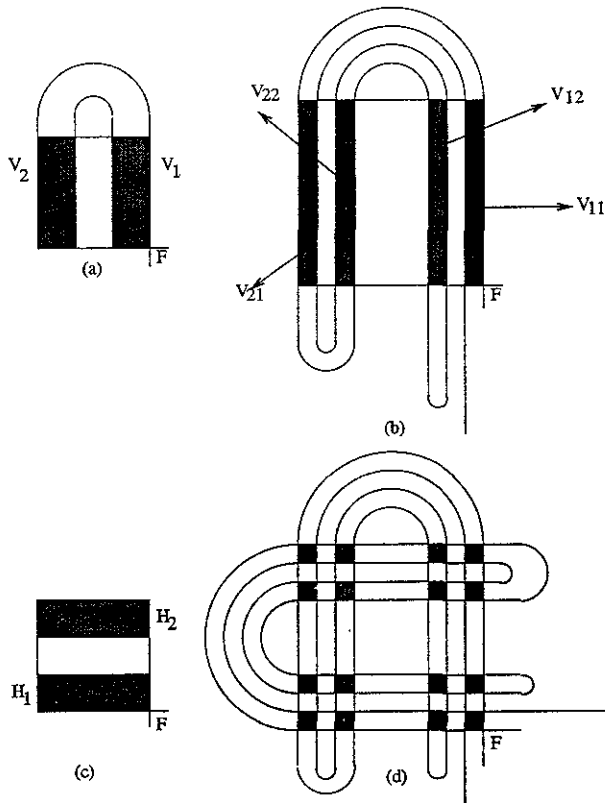


Figura 2.2: Imágenes, a) y b), y preimágenes, c) y d), del cuadrado bajo la transformación de la herradura

La herradura de Smale es un ejemplo de un conjunto hiperbólico con una infinidad de órbitas periódicas. Las intersecciones entre las imágenes y preimágenes del cuadrado original, cuando n va de $-\infty$ a $+\infty$, donde n es la n -ésima aplicación de la transformación, corresponden a puntos que permanecen dentro del cuadrado por un tiempo infinito, es decir, son órbitas periódicas localizadas del sistema. Como puede verse claramente de la transformación, existen puntos del cuadrado que salen de él en un número finito de pasos del mapeo. Aquí el mapeo consiste en aplicar la transformación de la herradura una vez en una unidad de tiempo; así, al tiempo $t = 0$, tenemos el cuadrado original, al tiempo $t = 1$ tenemos la primera imagen del cuadrado, a $t = 2$ la segunda, etc., y de la misma manera en la aplicación de la transformación inversa.

Si regresamos a la figura 2.2, vemos que, cuando colocamos la herradura sobre el cuadrado original R , existen huecos (o vacíos) dentro de R que son los puntos del cuadrado que, para un paso del tiempo, salen de él, mientras que la intersección entre el cuadrado original y la herradura son puntos que permanecen dentro de R después de aplicar la transformación. Es claro entonces que en iteraciones subsecuentes algunos de los puntos de R no regresarán a él. Al obtener la intersección de la segunda imagen del cuadrado con R (figura 2.2b), vemos que algunos puntos salen de R y nunca regresan, mientras que otros se quedan; de los que permanecen en el cuadrado original, algunos más saldrán en la siguiente iteración; sin embargo, siempre habrá un número infinito de puntos del cuadrado original que permanezcan en él después de muchas iteraciones. De éstos puntos pueden surgir las órbitas periódicas.

De hecho, el conjunto de órbitas periódicas es numerable, y forman un subconjunto denso en el conjunto de todas las órbitas localizadas. La herradura como la hemos descrito tiene una dinámica simbólica binaria completa [1, 5]. Entonces, podemos caracterizar cada una de las trayectorias localizadas por medio de una secuencia binaria infinita en ambas direcciones, cuando $n \rightarrow \infty$ y cuando $n \rightarrow -\infty$. Si la trayectoria es periódica, la secuencia de símbolos es la repetición infinita de un bloque básico irreducible, cuya longitud es el período de la trayectoria. El número de órbitas periódicas es igual al número de bloques básicos irreducibles y éstos son numerables, así que las órbitas periódicas son numerables.

Las órbitas localizadas no periódicas realizan secuencias simbólicas no periódicas, que pueden aproximarse por medio de secuencias periódicas, es decir por medio de órbitas periódicas, con la siguiente idea: de la secuencia de cualquier órbita localizada no periódica, cortamos, al nivel n , un bloque de tamaño $n/2$. Existe una órbita periódica que realiza repetidamente este bloque. Si aumentamos n hasta el infinito haciendo este procedimiento cada vez, vemos que podemos aproximar a la trayectoria no periódica por medio de secuencias periódicas en intervalos cada vez más largos. Con esta construcción, probamos que las órbitas periódicas son densas en el conjunto de órbitas localizadas. Es claro que el número de órbitas no periódicas es no numerable, pero es común aproximar conjuntos no numerables por medio de subconjuntos numerables. La construcción es muy similar a la aproximación de los números reales por los racionales.

Acabamos de describir la dinámica de los puntos de un cuadrado bajo la transformación de la herradura, y nos convencimos de la existencia de una infinidad de puntos que permanecen dentro de él después de un tiempo

infinito y que el conjunto de órbitas periódicas es denso y numerable en el conjunto de todas las trayectorias localizadas. Sin embargo, nuestra descripción ha tocado el caso más simple: cuando la herradura es completa. Es posible imaginarse que al colocar la herradura sobre el cuadrado original, el arco no atraviese completamente la frontera del cuadrado, como se muestra en la figura 2.3. Cuando el arco de la herradura no atraviesa completamente el cuadrado original, decimos que la herradura es incompleta y la dinámica cambia completamente. Es útil introducir un parámetro de desarrollo de la herradura [6, 1] de acuerdo a la distancia relativa de la punta del arco del primer tentáculo que entra en el rectángulo fundamental respecto al caso completo. Volveremos a esta situación más adelante.

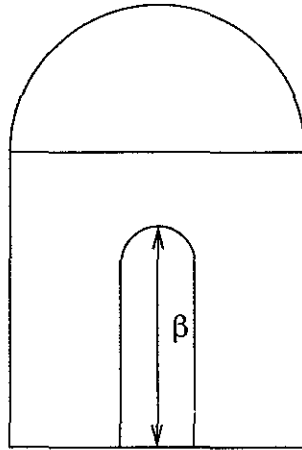


Figura 2.3: Herradura incompleta. El arco interno no atraviesa completamente R

Smale demostró la existencia de estructuras de herradura en sistemas dinámicos [3] cuando existen lo que se conoce como puntos homoclínicos y/o heteroclínicos, los cuales aparecen en sistemas que sufren un doblamiento y corresponden a las intersecciones entre las diferentes variedades invariantes del mismo punto fijo (puntos homoclínicos) o de puntos fijos distintos (heteroclínicos). Para esto, es necesario que el sistema sea no lineal. Una condición necesaria para la existencia de la herradura es que exista un punto hiperbólico; sin embargo, no es suficiente para garantizar que haya intersecciones homo/heteroclínicas. Tampoco existe una condición analítica que deban cumplir las ecuaciones de movimiento. Para encontrar estas in-

tersecciones, es necesario buscar de manera numérica si las variedades se intersectan o no; sin embargo, en sistemas caóticos siempre existen intersecciones homoclínicas y/o heteroclínicas de las variedades invariantes de un punto fijo en el espacio fase. A continuación describiremos cómo aparecen las herraduras como una consecuencia de estas intersecciones.

Primero, es claro que por unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, la variedad estable o inestable no puede intersectarse con ella misma; sin embargo, pueden existir intersecciones entre ellas. Supongamos que la variedad estable intersecta a la variedad inestable, es decir, supongamos que existe un punto homoclínico. Siempre que se hable de intersecciones homoclínicas, estamos pensando en puntos homoclínicos transversales, lo cual es necesario para excluir separatrices.

Llamemos x a este punto de intersección entre las variedades, x' al punto sobre la variedad estable justo antes de x , y x'' al punto sobre la variedad inestable justo antes de x . Esta idea se muestra gráficamente en la figura 2.4. La imagen de x' bajo el mapeo que genera la dinámica, que llamaremos M , debe ser un punto sobre la variedad estable "adelante" de x , mientras que la imagen bajo el mapeo de x'' debe ser un punto sobre la variedad inestable "adelante" de x . Por la continuidad del mapeo, la imagen de x debe ser un punto "adelante" de estas dos imágenes, puesto que x está adelante de x' y x'' . Como se ve en la figura 2.4, esto es imposible a menos que la variedad se doble y forme un arco, como se muestra en la figura 2.4, y la imagen de x sea otro punto homoclínico, es decir, una intersección entre las variedades estable e inestable. Así, la imagen de un punto homoclínico es otro punto homoclínico que se acerca al punto fijo sobre la variedad estable pero a la vez se aleja de él sobre la variedad inestable. Es claro, entonces, que el punto homoclínico del que partimos debe ser la imagen de otro punto homoclínico, lo cual muestra que existen una infinidad de estas intersecciones. En sistemas Hamiltonianos independientes del tiempo, el volumen en el espacio fase es conservado por el flujo. Esta propiedad la hereda el mapeo de Poincaré cuando se emplean coordenadas canónicas, por lo que en el espacio fase restringido $p - q$, el área se conserva bajo el mapeo. Por esta razón, el área comprendida entre x y $M(x)$ determinada por el arco de la variedad (figura 2.4), debe ser igual al área entre $M(x)$ y $M^2(x)$ delimitada por el segundo arco. La única manera que existe para que el área se conserve es que los siguientes arcos sean cada vez más largos y que las intersecciones entre las variedades sean cada vez más cercanas entre ellas. Esto último es claro si pensamos que estas intersecciones tienen que converger en la dirección es-

table al punto fijo y debe preservarse el área y la continuidad del mapeo. Una discusión similar muestra que existen una infinidad de intersecciones heteroclínicas. La existencia de estas intersecciones está relacionada con la transformación de la herradura debido a las estructuras que se generan. En adelante limitaremos nuestra descripción a intersecciones homoclínicas.

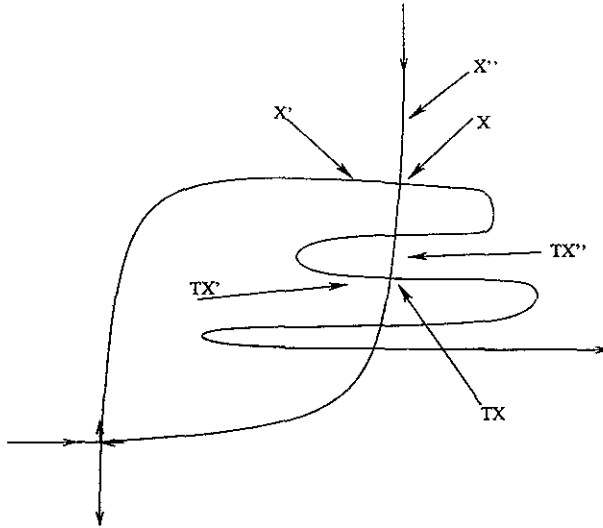


Figura 2.4: Intersecciones homoclínicas de variedades de un punto fijo hiperbólico

Sabemos del capítulo anterior que para estudiar la dinámica de un sistema de ecuaciones diferenciales, empleamos el mapeo de Poincaré. Los puntos fijos de este mapeo corresponden a órbitas periódicas del flujo dado por las ecuaciones diferenciales. Las variedades invariantes de los puntos fijos se obtienen iterando un conjunto de condiciones iniciales bajo este mapeo. En consecuencia, si tenemos un punto fijo hiperbólico, arreglamos un conjunto de condiciones iniciales en las direcciones de los vectores propios del punto fijo dados por la linearización del sistema cerca del punto fijo en cuestión y obtenemos, bajo aplicaciones del mapeo y del mapeo inverso, las variedades invariantes inestable y estable del punto fijo, respectivamente. La figura 2.5 muestra las variedades invariantes del punto fijo hiperbólico del sistema que describimos en el capítulo anterior. Podemos ver en la figura que las variedades invariantes dan lugar a una estructura de herradura. Esta figura la obtuvimos iterando condiciones iniciales en la dirección de los vectores

propios del punto fijo bajo el mapeo de Poincaré descrito en el capítulo anterior. Debido a la elección de simetría respecto a reflexiones del tiempo de la superficie de Poincaré, el mapeo hereda esta propiedad de reflexión y basta obtener la variedad invariante en una dirección, por ejemplo, la dirección inestable, y al intercambiar $p \rightarrow -p$, obtenemos la variedad estable.

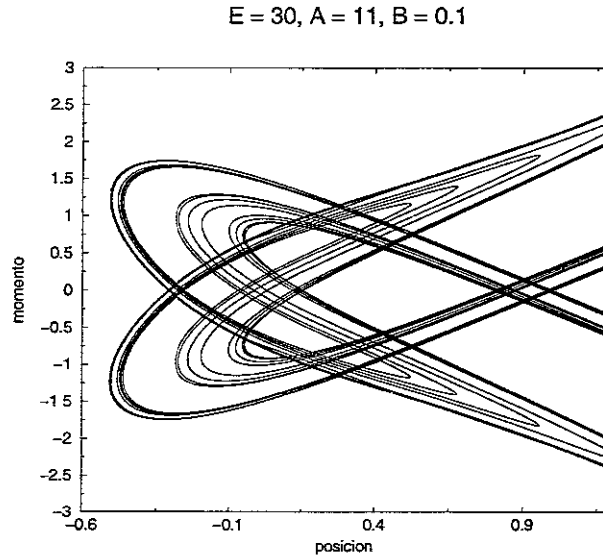


Figura 2.5: Variedades invariantes del punto fijo para el sistema 1.3

De la gráfica de las variedades invariantes, podemos reconocer claramente la estructura de la herradura tal y como la describimos al principio de esta sección. Vemos que existe una región generada por la primera intersección de las variedades invariantes que determina un rectángulo fundamental (figura 2.6(a)), una de cuyas esquinas es precisamente el punto fijo. Ahora queda claro por qué cuando describimos la herradura al inicio de la sección, llamamos F a una de las esquinas del cuadrado original y lo mantuvimos fijo bajo la transformación. A este rectángulo fundamental lo denotamos por \mathbf{R} .

La figura 2.6(b) muestra la primera imagen de las variedades invariantes bajo el mapeo de Poincaré y vemos que las variedades regresan formando arcos y dando lugar a nuevas intersecciones entre ellas. El segundo arco de la variedad estable que regresa y entra a \mathbf{R} , corta un hueco dentro de \mathbf{R} , atraviesa toda la frontera, se dobla y crea otro hueco, y vuelve a atravesar \mathbf{R} completamente, dando lugar a la herradura.

Vemos que, precisamente dentro de \mathbf{R} , se crean dos bandas y un hueco. Las bandas son puntos que pueden ser visitados en iteraciones subsecuentes por la variedad estable y el hueco corresponde a condiciones que nunca más pueden ser tocadas por las siguientes imágenes de la variedad. En la dirección inestable tenemos un comportamiento idéntico, pero las variedades se alejan del punto fijo. La figura 2.6(c) muestra la segunda imagen, en donde vemos que la variedad estable vuelve a atravesar completamente al rectángulo fundamental, y corta en él otros dos huecos dando lugar a dos bandas dentro de cada una de las que ya existen. Estos nuevos huecos son puntos del interior de \mathbf{R} que nunca más serán visitados por la variedad bajo imágenes subsecuentes del mapeo.

Cuando graficamos las variedades estable e inestable, vemos que obtenemos exactamente el patrón de intersección que se crean con la transformación de la herradura. Así, tenemos cerca del punto fijo una descripción del sistema dada por la transformación de la herradura de Smale. La figura 2.6(d) muestra la siguiente imagen de las variedades. En ella podemos observar que la malla de intersecciones homoclínicas puede ser muy complicada.

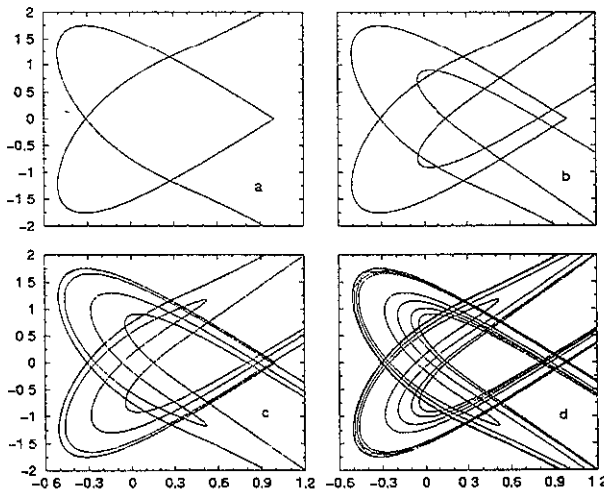


Figura 2.6: Imágenes de las variedades invariantes de la figura 2.5

La herradura mostrada en la figura 2.6, con los patrones de intersecciones descritos arriba, se obtuvo con el mapeo de Poincaré del sistema dinámico dado por las ecuaciones de movimiento de Hamilton que describen un sistema de dispersión. Las estructuras que se forman cerca del punto fijo tienen una

interpretación física: la dinámica en la región de interacción. Si entendemos cómo se generan estas estructuras, podemos entender la dinámica de las partículas bajo el potencial. La conexión se hace poco a poco más evidente: cada uno de los puntos dentro del rectángulo fundamental \mathbf{R} corresponden a trayectorias de partículas que de manera complicada interactúan con el potencial. Si entendemos bien la construcción de la herradura, podemos acercarnos al entendimiento de la dinámica en esta región. Recordemos que en nuestra imagen, cada una de las trayectorias está representada por puntos en el espacio fase restringido, cada uno de ellos con el mismo valor de la fase. Por tanto, si una trayectoria entra en el primer hueco de los que crea la variedad estable en el rectángulo fundamental \mathbf{R} , su imagen saldrá de \mathbf{R} en un paso más del mapeo y estará en la región determinada por el primer arco de la variedad estable. A este hueco le asignamos el nivel 1. Si un punto de la trayectoria se encuentra en alguno de los dos huecos generados por la segunda intersección de la variedad estable con \mathbf{R} , la imagen del punto estará todavía dentro de \mathbf{R} , su segunda imagen saldrá de \mathbf{R} y estará en la región del primer arco de la variedad estable y luego se alejará del punto fijo en la dirección inestable. A estos huecos les asignamos el nivel 2.

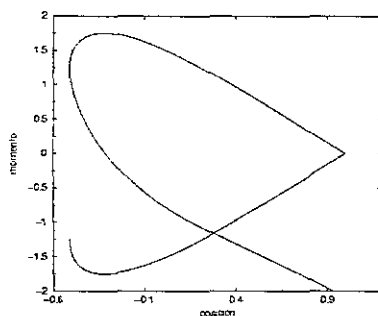


Figura 2.7: Región fundamental \mathbf{Rf}

Vemos que existe una relación entre lo que llamaremos el nivel de jerarquía de los huecos creados por las intersecciones de las imágenes de la variedad estable con \mathbf{R} y el número de pasos del mapeo que la trayectoria necesita para salir de la región determinada por \mathbf{R} y el primer arco de la variedad estable. A esta última región la llamaremos región fundamental y la denotaremos por \mathbf{Rf} (figura 2.7). Así, el primer hueco creado en \mathbf{R} por la variedad estable tiene nivel de jerarquía uno, pues las trayectorias que están en esta región tienen una sola imagen dentro de \mathbf{Rf} , mientras que los dos huecos creados por

la segunda intersección de la variedad estable con \mathbf{R} tienen nivel de jerarquía dos, pues si la trayectoria se encuentra en uno de estos dos huecos, su imagen está dentro de \mathbf{R} , la segunda en la región del arco de la variedad, es decir, aún está en \mathbf{R}_f y la tercera imagen sale de \mathbf{R}_f alejándose en la dirección inestable hacia la región asintótica.

Es evidente de la descripción realizada hasta ahora, que existen, dentro de \mathbf{R} , una infinidad de huecos, dados por bandas interiores cada vez más delgadas, pero que corresponden a trayectorias que eventualmente saldrán de \mathbf{R}_f en un número finito de aplicaciones del mapeo. Existen también una infinidad de trayectorias dentro de \mathbf{R} que permanecerán por un tiempo infinito en \mathbf{R}_f : aquéllas que están exactamente sobre la variedad estable. En la figura 2.8 (tomada de [1]) se muestra gráficamente una herradura completa, donde se marcan los respectivos vacíos de nivel k creados por los tentáculos correspondientes.

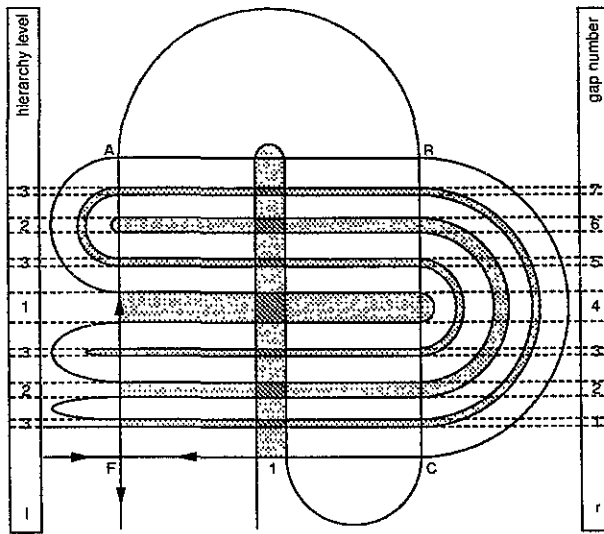


Figura 2.8: Figura esquemática de una herradura completa

Hemos reducido toda la discusión en esta sección al caso en el que la herradura es completa; es importante dejar claro que en nuestro sistema, y en general, podemos tener herraduras que no sean completas, es decir que el primer arco que entra en el rectángulo fundamental no lo atraviese completamente, como en la figura 2.3. Entonces es útil introducir el parámetro

de desarrollo que mencionamos anteriormente. Cuando la herradura es completa, su parámetro de desarrollo es $\beta = 1$ y la dinámica simbólica binaria es completa, es decir, todas las trayectorias localizadas pueden describirse por medio de una secuencia binaria infinita, y todos los bloques de símbolos están permitidos. Si la herradura es incompleta, nos fijamos en cuál vacío de los que crea la variedad estable al cortar el rectángulo fundamental, cae la punta del primer tentáculo de la variedad inestable. Es claro que en el caso incompleto la punta del primer tentáculo de la variedad inestable está dentro de \mathbf{R} . Ayudándonos de la figura 2.9 (tomada de [1]), marcamos los vacíos que crean los tentáculos de la variedad estable dentro de \mathbf{R} . En la figura, estos vacíos son las bandas sombreadas que intersectan a \mathbf{R} .

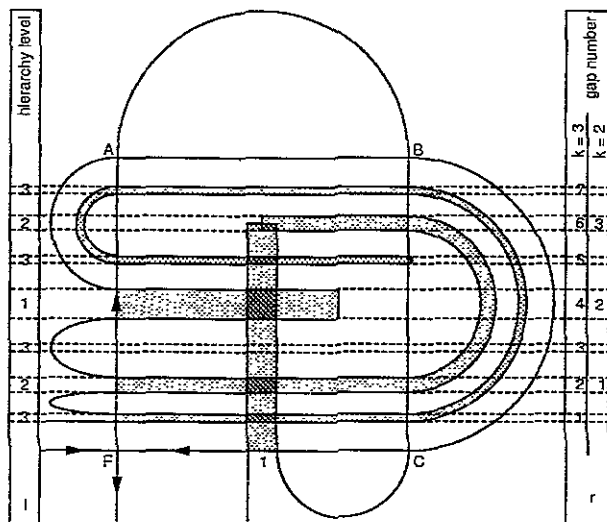


Figura 2.9: Figura esquemática de una herradura incompleta

La columna izquierda corresponde a los niveles de jerarquía de los vacíos que están determinados por el correspondiente tentáculo que lo genera dentro de \mathbf{R} ; así, el primer tentáculo que entra en \mathbf{R} tiene nivel 1 y el vacío correspondiente es de nivel 1; el segundo tentáculo, que corresponde a la segunda imagen bajo el mapeo de Poincaré, crea dos vacíos dentro de \mathbf{R} , ambos tienen nivel de jerarquía 2 y así sucesivamente. Es importante notar que en el caso incompleto, el tentáculo de nivel 2 atraviesa el rectángulo fundamental menos que dos veces, pero si crea vacíos dentro de \mathbf{R} . La columna del lado derecho en la figura 2.9, cuenta los vacíos dentro de \mathbf{R} de manera consecutiva.

respecto al caso completo. Si la herradura sólo está formada por las primeras dos iteraciones ($k = 2$), en esta columna tenemos los valores de jerarquía del uno al tres de manera consecutiva; si tenemos más iteraciones, existen más vacíos dentro de \mathbf{R} y tenemos más números en la columna derecha. Si la punta del arco del primer tentáculo que entra en \mathbf{R} se encuentra en el r -ésimo vacío, el parámetro de desarrollo de la herradura está dado por $\beta = r2^{-k}$ [1].

$$E = 150, A = 9.4, B = 0$$

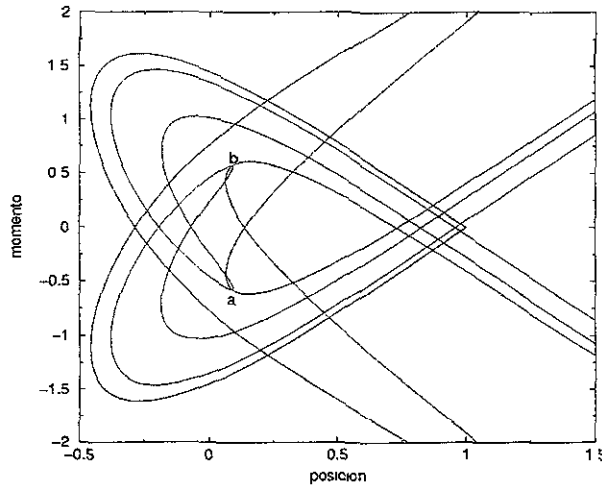


Figura 2.10: Herradura incompleta formada por las variedades del sistema 1.3

La figura 2.10 muestra una herradura cuyo parámetro de desarrollo es de $3/4$. Como podemos ver, la punta del segundo arco de la variedad estable, marcada con **a** en la figura, no alcanza a atravesar por completo a \mathbf{R} por segunda vez, se queda dentro a cierta distancia de la frontera dentro del vacío de nivel 1 de la variedad inestable. La punta del arco de la variedad estable que crea el primer hueco en el rectángulo fundamental, marcada con **b** en la figura, está dentro del hueco creado por la segunda imagen de la variedad inestable. Usando la convención de la figura 2.9, la punta del arco (**b** en la figura) se encuentra en el vacío $r = 3$, y es de nivel $k = 2$, así que el parámetro de desarrollo de la herradura de la figura 2.10 es $\beta = 3 \cdot 2^{-2} = 3/4$.

Capítulo 3

FUNCIONES DE DISPERSIÓN

Cuando es posible la observación en la región de interacción, la reconstrucción de la herradura a partir de estas mediciones se hace de manera inmediata. El problema inverso de dispersión contempla reconstruir la dinámica a partir de datos obtenidos sin observar el movimiento dentro de la región de interacción, es decir, cuando el observador no tiene acceso directo a lo que está sucediendo con el sistema dentro de esta región y únicamente tiene a su disposición información sobre las condiciones iniciales y mediciones de las condiciones finales en la región asintótica. Estos datos son las funciones de dispersión, que dan propiedades de las condiciones asintóticas finales como función de las condiciones asintóticas iniciales. Para obtenerlas, el observador fija la energía del sistema y prepara un conjunto de condiciones iniciales de las otras variables en la región asintótica, variando una de ellas, por ejemplo, un parámetro de impacto, alguna coordenada de momento, una fase, etc., mientras el resto permanecen fijas. Para cada una de las trayectorias lanzadas, el observador espera a que el sistema llegue a la región asintótica de salida, detectándola cuando alguna variable alcance algún valor determinado, por ejemplo, cuando la coordenada de posición pase a la posición inicial.

Uno de los ejemplos de funciones de dispersión más importantes en cuanto al problema inverso, son las funciones de tiempo de retardo o *time delay* en inglés, que relacionan el tiempo que una partícula permanece dentro de la región de interacción con condiciones iniciales convenientes. Para cada una de las trayectorias lanzadas, el observador espera a que el sistema llegue a la región asintótica de salida y mide el tiempo T que la trayectoria necesitó

para llegar a la región en la que es detectada, obteniendo así el tiempo como función del parámetro variado al principio. Este tiempo medido es el tiempo que cada una de las trayectorias que empiezan en la región asintótica inicial necesita para ser detectada en la región asintótica final. El observador está interesado en conocer el tiempo que cada trayectoria permaneció dentro de la región de interacción, para lo cual es necesario restar del tiempo total el tiempo que la trayectoria tarda en llegar a la región de interacción, y el tiempo que la trayectoria necesita para llegar a la parte asintótica una vez que dejó la región de interacción.

La función de tiempo de retardo es el tiempo que la trayectoria de la partícula permanece dentro de la región de interacción:

$$\Delta T = T - \frac{q_{en}}{v_{en}} - \frac{q_{sal}}{v_{sal}} \quad (3.1)$$

donde v_{en} y v_{sal} son las velocidades de entrada y de salida del proyectil, q_{en} y q_{sal} son las posiciones de entrada y salida, y T es el tiempo que tarda en llegar a la región asintótica. Para propósitos de nuestro trabajo, es irrelevante cuál de las dos funciones utilizemos, el tiempo de retardo o el tiempo total, puesto que los puntos singulares de ambos coinciden. Es importante hacer notar que la función de tiempo de retardo no depende de la selección de q_{en} o q_{sal} .

La propiedad esencial de estas funciones de dispersión, para el desarrollo de este trabajo, es que cuando la línea asintótica de condiciones iniciales interseca un segmento de la variedad estable en la región asintótica inicial, esta condición inicial converge a una órbita localizada en la región de interacción, por lo que permanece dentro de esta región por un tiempo infinito y la función de tiempo de retardo tiene una singularidad. La estructura singular de la función de dispersión muestra cómo la imagen iterada de la línea de condiciones iniciales parte la frontera fractal de la variedad estable, y de ahí podemos obtener información para reconstruir la estructura de la herradura.

La figura 3.1 es un ejemplo típico de una función de tiempo de retardo. En esta figura, se mantuvo fija la coordenada posición q_{in} y se varió p_{in} sobre una línea vertical paralela al eje p , que interseca en la región asintótica a la variedad estable del punto fijo. La partícula se detecta en la región asintótica de salida cuando $q_{fin} \geq q_{in}$, y usando la fórmula (3.1), se obtiene la gráfica del retardo temporal. En la gráfica de la figura 3.1 se aprecian intervalos de continuidad y singularidades. Estas singularidades están presentes en todas las escalas de condiciones iniciales y revelan una estructura similar a un conjunto de Cantor. Como dijimos antes, estas singularidades corresponden

a trayectorias que quedan atrapadas en la región de interacción por tiempos largos.

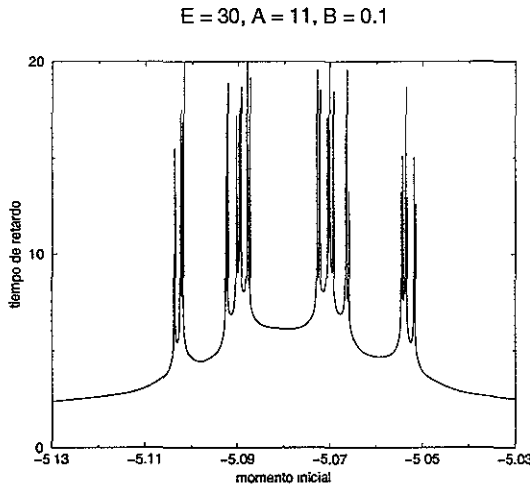


Figura 3.1: Función de dispersión *time delay*

Para aclarar la estructura singular de la gráfica 3.1, hemos incluido en la figura 3.2 la imagen bajo el mapeo de Poincaré de la línea de condiciones iniciales L_0 usada para obtener la función de tiempo de retardo de la figura 3.1. Las líneas sucesivamente marcadas como L_n son las n -ésimas iteraciones de la línea inicial. Las iteraciones convergen en la dirección estable a la frontera de \mathbf{R} , se doblan en la dirección inestable y convergen al segmento local de la variedad inestable del punto fijo. Es claro que las intersecciones de L_0 con la variedad estable se mapean a intersecciones de L_n con la misma variedad, puesto que la imagen de un tentáculo de la variedad estable es el siguiente tentáculo en esa misma dirección. La estructura singular de la función de dispersión tiene su origen en estas intersecciones de las imágenes de la línea de condiciones iniciales con el segmento local de la variedad inestable. La línea de condiciones iniciales intersecta algún tentáculo de la variedad estable, y en cada una de las subsecuentes imágenes, intersecta al siguiente tentáculo en la dirección estable hasta llegar a la región de interacción, donde las imágenes de la línea de condiciones iniciales sufren los efectos de estiramiento y doblamiento propios del sistema y característicos de la transformación de la herradura. Esta transformación hace que aquellas condiciones iniciales que se encontraban sobre el segmento de la variedad estable en la región asintótica

converjan a intersecciones entre la variedad estable y la inestable en la región de interacción, por lo que permanecen un tiempo mayor dentro de esta región, mientras que aquellas condiciones que inicialmente se encontraban dentro de algún hueco del segmento de la variedad estable en la región de interacción, convergen a los huecos que corta la variedad estable dentro de \mathbf{R} . Como lo puntualizamos en el capítulo anterior, estas son trayectorias que permanecen un tiempo finito dentro de la región de interacción, es decir, realizan un número finito de pasos del mapeo dentro de \mathbf{R}_f antes de salir y alejarse hacia la región asintótica. Estas trayectorias, que son una infinidad puesto que para cada imagen se crea dentro de cada tentáculo una estructura más de huecos y segmentos de la variedad, dan lugar a los intervalos de continuidad de la función de dispersión.

$$E = 30, A = 11, B = 0.1$$

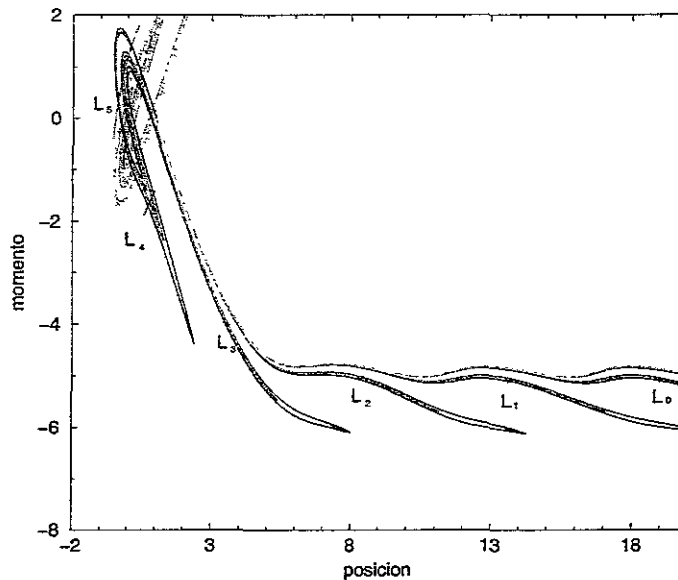


Figura 3.2: Imágenes sucesivas de la línea de condiciones iniciales

Así, los intervalos de continuidad corresponden a los diferentes huecos que la variedad estable corta dentro del rectángulo fundamental, y son órbitas que permanecen un tiempo finito dentro de la región de interacción antes de ser detectadas. El número de pasos dentro de \mathbf{R}_f de trayectorias que se encuentran en un intervalo de continuidad, permanece constante dentro de

todo el intervalo [6]. Cuando conocemos éste número de pasos para trayectorias representativas de cada intervalo de continuidad, podemos contruir una gráfica en la cual los números de pasos dividen la estructura fractal de la función de dispersión de acuerdo al intervalo de continuidad al que corresponde. A esta gráfica la llamaremos el árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía de los intervalos de continuidad.

Ahora que hemos entendido la naturaleza de las singularidades en las funciones de dispersión, estamos en condiciones de extraer de ellas la información necesaria para reconstruir las estructuras caóticas en la región de interacción, tema que tratamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

DISPERSIÓN Y HERRADURAS DE SMALE

En el problema inverso, las funciones de dispersión constituyen toda la información posible que el observador tiene para estudiar el sistema. A partir de ellas, este observador quisiera reconstruir la dinámica en la región de interacción. En este capítulo explicaremos cómo extraer la información necesaria para reconstruir la dinámica en la región de interacción a partir de las funciones de dispersión. Para poder obtener esta información es necesario entender bien como se crean las herraduras en la región de interacción y cuál es el origen de las singularidades en las funciones de dispersión, ideas que hemos discutido en los capítulos anteriores.

En la región asintótica, el observador puede ver pedazos de los tentáculos de las variedades invariantes del punto fijo y puede preparar las condiciones iniciales de manera que éstas intersectan a los tentáculos de la variedad estable. Midiendo el tiempo que cada trayectoria tarda en ser detectada en la región asintótica de salida y graficándolo como función de la variable inicial elegida (por ejemplo, la posición inicial de las partículas), el observador obtiene la función de dispersión. Como hemos dicho, en sistemas caóticos las singularidades de las funciones de dispersión forman conjuntos fractales en un intervalo, debido a que ciertas condiciones iniciales que se encuentran sobre la variedad estable en la región asintótica inicial convergen a órbitas localizadas y permanecen atrapadas por un tiempo infinito dentro de la región de interacción, dando lugar a las singularidades. Este patrón se presenta a todas las escalas de condiciones iniciales, revelando un conjunto fractal de singularidades y de intervalos de continuidad.

El observador asintótico sabe que la trayectoria de cada una de las partículas está completamente determinada por una secuencia de puntos, todos con el mismo valor de la fase, generada por el mapeo de Poincaré. Si una partícula empieza sobre algún tentáculo de la variedad estable, es claro que su imagen bajo el mapeo estará sobre la misma variedad estable pero en el siguiente tentáculo, de manera que se acerca al punto fijo. Si la línea de condiciones iniciales que el observador eligió intersecta algún tentáculo de la variedad estable, sus imágenes estarán siempre sobre los tentáculos de la variedad estable acercándose a la región de interacción en cada paso del mapeo (figura 3.2). Cuando las trayectorias alcanzan la región de interacción y entran al rectángulo fundamental \mathbf{R} , realizan un número de pasos del mapeo dentro de la región \mathbf{R}_f , salen y son detectadas por el observador en la región asintótica. Por supuesto, suponemos que el observador no tiene conocimiento sobre el número de pasos que la trayectoria realizó dentro de \mathbf{R}_f .

Para reconstruir la dinámica en la región de interacción, la función ideal sería aquella que nos diera directamente el número de pasos que la trayectoria permanece dentro de la región fundamental \mathbf{R}_f en la región de interacción; así la reconstrucción de la dinámica es inmediata cuando sabemos el tipo fundamental de la herradura [1]. El número de pasos dentro de la región \mathbf{R}_f es constante en los intervalos de continuidad de la función y da directamente el nivel de jerarquía del intervalo. En la figura 4.1 se muestra la misma función de dispersión de la figura 3.1 pero se incluyen los números de los niveles de jerarquía de cada uno de los intervalos de continuidad que pueden resolverse a esta escala. Como podemos observar, en general los intervalos de continuidad no tienen una relación simple con el número de pasos del mapeo que cada trayectoria realiza dentro de \mathbf{R}_f que pueda ser determinada directamente de la función de dispersión, así que debemos idear un método indirecto para conocer este número.

Si como observadores tuviéramos acceso a la región de interacción, sería muy sencillo conocer el número de pasos que cada una de las trayectorias que dan lugar a la función de dispersión realiza dentro de \mathbf{R}_f . Sin embargo, supongamos que no tenemos esta ventaja y sólo contamos con las funciones de dispersión como información del sistema. Lo primero que hacemos como observadores asintóticos, es definir dos regiones de observación en la parte asintótica de entrada y de salida F_{en} y F_{sal} , tales que cada una de las trayectorias iniciales se encuentre una sola vez en F_{en} antes de entrar a la región de interacción, y pase una sola vez por F_{sal} luego de salir de \mathbf{R}_f . Debido a la forma asintótica del sistema, esto es posible si definimos a F_{en} y F_{sal} si

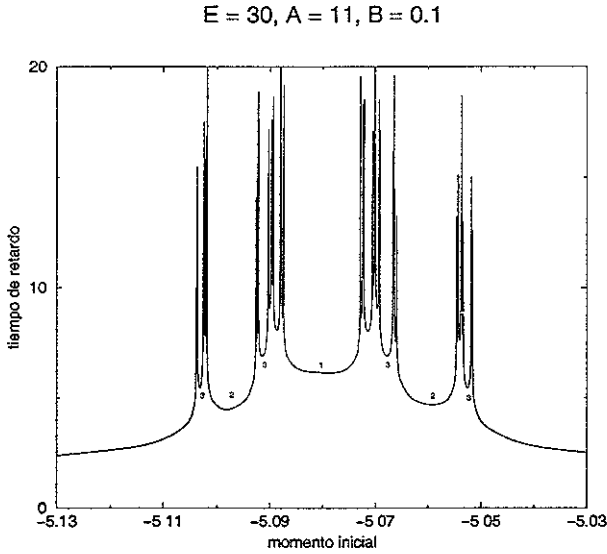


Figura 4.1: Función de tiempo de retardo. Los número sobre los intervalos de continuidad corresponden a los niveles de jerarquía

fijamos la coordenada de posición igual a la posición inicial q_0 y consideramos las rectas $q = q_0 \pm p$, donde p es la coordenada momento. Estas regiones son triángulos en el espacio fase restringido y tienen la propiedad antes mencionada para cada una de las trayectorias. Los tentáculos correspondientes a las variedades estable e inestable forman varias tiras dentro de las regiones F_{en} y F_{sal} , las cuales numeramos empezando con las de mayor valor absoluto del momento. Estas tiras numeradas consecutivamente corresponden a los tentáculos consecutivos de las variedades. La tira marcada con $n + 1$ corresponde al tentáculo que es la preimagen (si la tira está en F_{en}) o la imagen (si la tira está en F_{sal}) del tentáculo que genera la tira que hemos marcado con n . La figura 4.2 muestra esta construcción en la región F_{en} . Por simetría, la correspondiente región F_{sal} la obtenemos por medio de una reflexión sobre el eje q .

Para describir la idea central de la reconstrucción de los niveles de jerarquía nos ayudamos de la gráfica esquemática mostrada en la figura 4.3, donde hemos denotado el n -ésimo tentáculo de la variedad estable como T_n^{es} y el n -ésimo tentáculo de la variedad inestable como T_n^{in} . Los n -ésimos huecos que las variedades estable e inestable cortan dentro de \mathbf{R} los denotamos, en

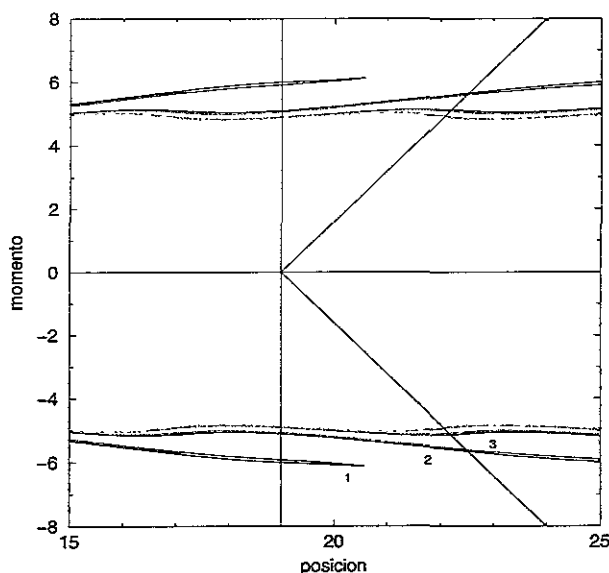


Figura 4.2: Regiones de observación en la región asintótica

la figura 4.3, por G_n^{es} y G_n^{in} respectivamente. Tomemos un punto inicial p_0 en algún tentáculo de la variedad estable y estudiemos su trayectoria bajo aplicaciones iteradas del mapeo de Poincaré M , siguiendo la figura 4.3. A la n -ésima imagen de p_0 la denotamos por p_n .

Para ejemplificar, supongamos que el punto en cuestión se encuentra en el tentáculo T_2^{es} .

Por la forma en que se construye la herradura, es claro que la imagen de cualquier punto de T_n^{es} está en T_{n-1}^{es} y la imagen de cualquier punto en T_k^{in} está en T_{k+1}^{in} . Es importante tener en cuenta que la imagen de la región determinada por el primer arco de la variedad estable, que identificamos como el tentáculo de nivel cero T_0^{es} , es G_1^{in} , el primer hueco que la variedad inestable corta en \mathbf{R} . El tentáculo que hemos marcado como T_0^{es} determina la región \mathbf{R}_f . Con esta construcción, el punto inicial que hemos elegido tiene su primera imagen p_1 en T_1^{es} , y su segunda imagen p_2 se encuentra en T_0^{es} . Puesto que la imagen de T_0^{es} es G_1^{in} , todos los puntos de T_0^{es} que no se encuentran dentro de la pequeña región sombreada que se muestra en la figura 4.3, son mapeados hacia dentro de \mathbf{R} . Las trayectorias (representadas por puntos) que pertenecen a la región sombreada nunca entrarán a \mathbf{R} , pero sí se encuentran dentro de la región fundamental \mathbf{R}_f ; la imagen de esta región

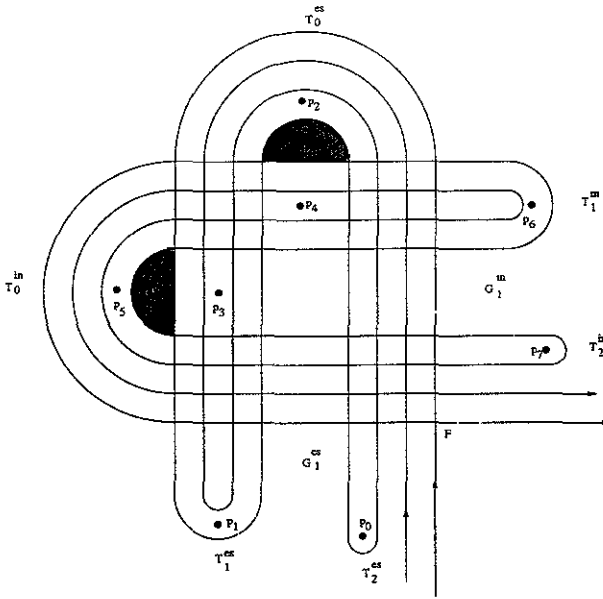


Figura 4.3: Figura esquemática de la reconstrucción de los niveles de jerarquía

es la región sombreada en G_1^{in} , por lo que basta un solo paso del mapeo M antes de que estas trayectorias salgan de \mathbf{Rf} . Lo que necesitamos saber es el número de pasos del mapeo que cada una de las trayectorias realiza dentro de \mathbf{Rf} .

Observemos que M mapea G_m^{es} en G_{m-1}^{es} siempre que $m > 1$. La imagen de G_1^{es} es T_0^{in} . A cualquier punto que se encuentre en la intersección de \mathbf{R} con G_m^{es} le debemos aplicar M exactamente m veces para que el punto sea mapeado a T_0^{in} y, por lo tanto, sea mapeado fuera de \mathbf{Rf} por primera vez. Lo mismo es válido para los puntos que se encuentran en la intersección de G_1^{in} con G_m^{es} . Para la trayectoria que hemos escogido como ejemplo, la tercera imagen del punto inicial p_3 se encuentra en la intersección de G_1^{in} con G_2^{es} , de tal manera que esta trayectoria tiene dos puntos dentro del rectángulo fundamental \mathbf{R} , p_3 y p_4 , y tres dentro de la región \mathbf{Rf} , p_2 , p_3 y p_4 .

De la discusión anterior y del ejemplo que hemos presentado, podemos hacer la siguiente observación: si el primer punto de la trayectoria del punto inicial p_0 que entra en \mathbf{R} está en la intersección de G_1^{in} y G_m^{es} , entonces la trayectoria tiene exactamente m puntos dentro de \mathbf{R} y $m+1$ puntos dentro de

Rf y el vacío al que pertenece el punto inicial tiene nivel de jerarquía $m + 1$. Los vacíos en T_n^{es} y, por lo tanto los intervalos de continuidad de la función de dispersión (recordemos que son estos vacíos que la variedad estable corta en la región **R** los que dan lugar a los intervalos de continuidad), son preimágenes de los vacíos que los G_m^{es} cortan en G_1^{in} . Si determinamos los niveles de jerarquía de los distintos vacíos, obtenemos el patrón de intersecciones de los huecos que las variedades crean dentro de **R**, lo cual es equivalente al árbol de ramificaciones.

Ahora sabemos que el punto p_{n+m+1} está en T_0^{in} . Para que el punto sea observado en la región asintótica, digamos en el tentáculo T_k^{in} que intersecciona a F_{sal} , el punto necesita $k - 1$ aplicaciones más de M , es decir, en la región de salida observamos el punto $p_{n+m+1+k-1} (= p_{n+m+k})$ que está en la intersección de T_k^{in} con F_{sal} , lo cual nos da el siguiente resultado: un punto inicial p_0 es elegido en la intersección de F_{en} con T_n^{es} al tiempo $t = 0$, y al tiempo $t_{fin} = j \cdot T$ la trayectoria es observada en la región asintótica de salida en la intersección de F_{sal} con T_k^{in} . La trayectoria empleó un total de j aplicaciones del mapeo para llegar del punto inicial al punto final observado, necesitó $n - 1$ pasos para entrar en **Rf**, n para entrar en **R** y $k - 1$ pasos para ser observado luego de salir de **Rf**. Así que la trayectoria tiene $m = j - n - k$ puntos dentro de **Rf** y $m' = j - n - k - 1$ puntos dentro de **R** por lo que el vacío del tentáculo T_n^{es} al que pertenece p_0 , es decir, el intervalo de continuidad de la función de dispersión al que pertenece p_0 , tiene nivel de jerarquía m .

En la trayectoria de la figura 4.3, los números son $n = 2$, $j = 8$, $k = 3$, de donde obtenemos que el número de pasos que la trayectoria realiza dentro del rectángulo fundamental **R** es $m = 2$. Tomamos como nivel de jerarquía el número de pasos que la trayectoria realiza dentro de la región **Rf** y entonces el nivel de jerarquía de la trayectoria del ejemplo es $m = 3$, exactamente el número de pasos que la trayectoria realiza dentro de **Rf**. Ambos son correctos y podemos elegir cualquiera como nivel de jerarquía de acuerdo a nuestra conveniencia. Para este trabajo decidimos elegir como nivel de jerarquía el número de pasos que la trayectoria realiza dentro de la región **Rf** por razones de operatividad en cuanto a los cálculos numéricos.

En la reconstrucción que acabamos de presentar existe un problema que no tiene mayores consecuencias para los números de niveles de jerarquía, que, sin embargo, es conveniente puntualizar. Cuando elegimos el n -ésimo tentáculo de la variedad estable en el que se encuentra el punto inicial, no sabemos exactamente que número de tentáculos de la variedad estable estamos viendo, puesto que dentro de la región en la parte asintótica solamente

vemos algunos de los tentáculos; nuestro campo de visión no abarca a todos ellos, es decir, la elección del número de tentáculo es arbitraria, y empezamos a numerarlos a partir del que tiene mayor valor absoluto del momento y no sabemos cuantos tentáculos faltan dentro de las regiones F_{en} y F_{sal} . Los primeros tentáculos son demasiado cortos para alcanzar estas regiones. Sin embargo, de lo que estamos seguros es que la diferencia entre el verdadero nivel del tentáculo y el número que le hemos asignado en las regiones F_{en} y F_{sal} es la misma para todos los tentáculos en cada una de estas regiones. Usando los números con los que marcamos los tentáculos en las regiones F_{en} y F_{sal} en lugar del número correcto del tentáculo correspondiente, cometemos el mismo error para todos los tentáculos y para todas las trayectorias: el resultado que se obtiene es la diferencia correcta entre los niveles de jerarquía para todos los vacíos. Con esta observación, podemos dar la siguiente generalización: una trayectoria empieza en un vacío de algún tentáculo con número n en F_{en} . Luego de un número j de pasos, es decir al tiempo $t = j \cdot T$, la trayectoria se detecta en la región F_{sal} en el tentáculo k y sabemos que necesitó $n + l$ pasos para entrar a \mathbf{Rf} $n + 1 + l$ para entrar a \mathbf{R} y realizó $k + l - 1$ pasos después de salir de \mathbf{R} donde l es la corrección debida a que no conocemos la diferencia entre el verdadero nivel del tentáculo y el nivel que le asignamos dentro de F_{en} y F_{en} . De estos números, sabemos que la trayectoria hizo $m = j - n - l - k - l + 1$ pasos dentro de \mathbf{Rf} . Somos capaces de obtener únicamente el número $z = m + 2 \cdot l = j - n - k + 1$ que es el número de jerarquía que asignamos al vacío en el que empezó la trayectoria. Si aplicamos este método a un conjunto de trayectorias representativas para cada vacío, es decir para cada intervalo de continuidad de la función de dispersión, obtenemos los niveles jerárquicos de toda la estructura de vacíos del tentáculo, salvo por una constante $2 \cdot l$. La diferencia entre los números de cualesquiera dos vacíos distintos da la diferencia correcta de sus niveles de jerarquía. En esta diferencia la constante desaparece y podemos reconstruir el árbol de ramificaciones de las jerarquías.

La descripción anterior detalla el método para reconstruir los niveles de jerarquía de los vacíos creados por las variedades invariantes a partir de trayectorias representativas de los intervalos de continuidad de las funciones de dispersión, es decir, hemos explicado cómo extraer la información necesaria de las mediciones asintóticas para reconstruir las estructuras de la región de interacción. Con ello completamos este capítulo.

Antes de presentar el siguiente capítulo, dedicado a la aplicación de este método al sistema de dispersión descrito por el conjunto de ecuaciones

dinámicas (1.3), es necesario hacer algunos comentarios. La reconstrucción de los niveles de jerarquía de los intervalos de continuidad, y, por lo tanto, de los vacíos que crean los diferentes tentáculos de las variedades invariantes en \mathbf{R} está basada, como hemos descrito, sólo en observaciones asintóticas del sistema; el observador prepara las condiciones iniciales de manera conveniente y sólo puede observar las partículas cuando éstas se encuentran en la región asintótica de salida. De esta información, desea conocer la dinámica en la región de interacción a la que no tiene acceso. La única información disponible son las funciones de dispersión. Veamos por qué es la función de tiempo de retardo la que es más conveniente para nuestro trabajo. Como explicamos, nuestra reconstrucción está basada en el tiempo que cada partícula permanece dentro de la región de interacción; cada paso del mapeo de Poincaré es una unidad de tiempo en la que la partícula intersecta la superficie de sección y nos interesa saber cuantos pasos del mapeo, cuantas unidades de tiempo del sistema, la trayectoria realiza dentro de \mathbf{R}_f . El observador sabe exactamente que la trayectoria tardó un tiempo $t = j \cdot T$ para ser detectada. Este tiempo lo conoce, porque puede medir el tiempo de la partícula de manera continua, desde que es lanzada hasta que la detecta. Si el sistema posee un reloj interno perfecto, el observador sabe que cada paso del mapeo de Poincaré es exactamente una unidad de tiempo de manera que el tiempo total que la partícula empleó desde que sale hasta que se detecta, es exactamente el número de pasos del mapeo de Poincaré que la partícula realizó en unidades de tiempo del sistema. Éste es exactamente el número j en nuestra descripción. El observador sabe también en cuál tentáculo se encuentra inicialmente la trayectoria y en qué tentáculo termina (n y k en nuestra descripción) y sabe que, a cada paso del mapeo, la trayectoria avanza, en la dirección estable, del tentáculo n al $n - 1$ cuando $n > 1$ y, en la dirección inestable, del tentáculo $k - 1$ al k , hasta que es detectada. Esto último, junto con el conocimiento por parte del observador del tiempo total que la trayectoria necesita para llegar a la región de salida, es general para todo sistema, pues así es la construcción de la herradura, y el tiempo puede medirse de manera continua. Sin embargo, si el sistema no posee un reloj interno perfecto, el observador no sabe con precisión si el tiempo total que la partícula empleó es exactamente un número entero de pasos del mapeo, debido a que el reloj interno no garantiza que cada paso del mapeo sea igual a una unidad de tiempo del sistema. La contribución de esta tesis a la investigación en sistemas de dispersión es, precisamente, estudiar un sistema cuyo reloj interno no sea perfecto, y ver cuáles son las modificaciones en la

reconstrucción del árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía.

Capítulo 5

RESULTADOS

En la descripción del método para extraer la información para reconstruir los niveles de jerarquía de las funciones de dispersión, no empleamos un sistema en particular. Es claro entonces que el método es general y aplicable a cualquier sistema de dispersión que posea un reloj interno. Lo que nos interesa en este trabajo es estudiar la posibilidad de reconstruir los niveles de jerarquía, con el método anterior, para sistemas cuyo reloj interno no sea perfecto. En este capítulo presentamos los resultados de aplicar el método descrito en el capítulo anterior al sistema (1.3), en los casos cuando el reloj interno es perfecto y cuando no lo es. El capítulo está dividido en dos secciones: la primera de ellas está dedicada al sistema (1.3) cuando el reloj interno es perfecto, y la segunda al mismo sistema cuando existen anarmonicidades en la frecuencia efectiva. En [1], los autores muestran que el método funciona para sistemas cuyo reloj interno es periódico, así que en nuestro trabajo esperamos que el método funcione cuando $B = 0$, pues en este caso la frecuencia efectiva permanece constante durante todo el movimiento y sirve como reloj interno.

El reloj interno proporciona al observador asintótico una manera efectiva de contar el número de pasos del mapeo que cada trayectoria necesita para llegar a la región donde se le detecta. Como el observador realiza todas sus mediciones sobre la superficie de sección, tiene la seguridad que cada paso del mapeo es exactamente una revolución de la fase del sistema. En la región asintótica final, el observador sabe que el número de pasos del mapeo que la trayectoria necesitó para ser detectada, es el número de revoluciones de la fase, que siempre es un número entero, independientemente de si el reloj es perfecto o no. La reconstrucción que utilizamos exige el conocimiento de

este número de pasos del mapeo. La pregunta es entonces, ¿Cómo puede el observador asintótico conocer el número de pasos del mapeo que la trayectoria hizo?

Es evidente que parte del método de reconstrucción consiste en determinar el número de pasos del mapeo que la trayectoria realiza, desde que es lanzada hasta que es detectada. Esta información debe extraerse de datos asintóticos, pues el observador no tiene acceso a la región interna. Es claro que si el observador pudiera contar, durante toda la trayectoria, las revoluciones de la fase del sistema sin tener acceso a la región de interacción entonces el problema estaría resuelto y tendría toda la información necesaria para reconstruir los niveles de jerarquía. Supongamos que no es así, que como observadores no tenemos manera de contar cada una de las revoluciones de la fase durante toda la trayectoria, únicamente sabemos que cada punto del mapeo es una revolución, pero al detectar la partícula en la región asintótica no sabemos cuántos pasos del mapeo realizó durante su trayectoria.

¿Como obtener esta información? El observador asintótico puede conocer el tiempo total que cada una de las trayectorias necesita para llegar a la región en la que es detectada. También puede saber exactamente con que velocidad llega la partícula y su posición al momento de ser detectada. Si el reloj interno del sistema es perfecto, el observador sabe que cada paso del mapeo es exactamente una unidad de tiempo, y el número total de pasos que la trayectoria empleó será un múltiplo entero del período de revolución de la fase. En general, la frecuencia efectiva en la región asintótica no cambia. Su valor, a lo largo de las trayectorias asintóticas depende de la energía y del momento asintótico, de manera que el observador puede ver las combinaciones de tiempo total de cada una de las trayectorias con la variable momento de salida o acción de salida. Como hemos estado estudiando el espacio fase restringido $p - q$, elegiremos la variable momento de salida. Si la frecuencia efectiva no cambia durante todo el movimiento ($B = 0$), las combinaciones del tiempo total con el momento de salida se organizarán en líneas horizontales igualmente espaciadas, cuya separación corresponde a la frecuencia efectiva del sistema. En el caso anarmónico, el valor de la frecuencia efectiva fuera de la región de interacción depende del valor del momento asintótico y de la energía. Si esta dependencia no es muy fuerte, las combinaciones de tiempo total y momento de salida mantendrán su organización en líneas horizontales, que se perderán conforme el tiempo de regreso de la trayectoria a la superficie de sección cambie con los valores asintóticos del momento.

Todas las mediciones que hemos realizado hasta ahora son puramente

asintóticas. Con esta información, el número de pasos del mapeo que cada trayectoria realiza para llegar a la región donde es detectada, el número de pasos antes de entrar a la región de interacción y el número de pasos cuando sale de esta región, dados por el número de tentáculo de las variedades en las que empieza y termina la trayectoria respectivamente, podemos construir el árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía de los intervalos de continuidad de la función de dispersión y podemos obtener el esqueleto de la estructura en la región de interacción.

Cuando la herradura es completa, el árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía es un árbol binario, independientemente de si el sistema posee un reloj perfecto o no. Esta ramificación binaria del árbol se pierde cuando la herradura es incompleta. Sin embargo, no es evidente con sólo mirar las funciones de dispersión, que el árbol de jerarquías sea incompleto. Para tener una idea del tipo de herradura es necesario reconstruir el árbol al menos hasta los niveles en los que es posible resolver directamente la función de dispersión.

Si suponemos que la herradura es binaria podemos conocer el valor del parámetro de desarrollo a partir de la reconstrucción de los niveles de jerarquía de los intervalos de continuidad de las funciones de dispersión [1]. En el sistema que estamos estudiando, sabemos que la herradura es binaria cuando la energía del sistema es pequeña comparada con el energía de disociación.

Para cualesquiera valores de los parámetros, el mapeo definido por medio de la intersección con la superficie de sección, tiene el mismo punto fijo $(q_f, p_f) = (1, 0)$ que siempre es hiperbólico, y existe una estructura de herradura en las intersecciones de las variedades invariantes en la región de interacción. Asimismo, las variedades se extienden en forma de tentáculos hacia la región de interacción debido a la conservación del volumen en el espacio fase. Existen una infinidad de estructuras de herraduras para todos los posibles valores de los parámetros. En los ejemplos que mostraremos, hemos elegido diferentes valores tanto de la energía como de los parámetros A y B que son interesantes e ilustrativos para el problema que estamos estudiando.

5.1 RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ PERFECTO

El sistema (1.3) posee un reloj interno perfecto cuando la función $f(I)$ es lineal en la acción, es decir, cuando $B = 0$. En este caso, la dependencia temporal de la variable conjugada ángulo φ es

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{df(I)}{dI} = \frac{d}{dI} 2\pi I = 2\pi = \omega_{ef} . \quad (5.1)$$

Recordemos que nuestro sistema posee una integral de movimiento, la energía total. Esto nos permite expresar a una de las variables como función de las demás. Hemos elegido a la variable acción por ser la más sencilla de expresar en términos de las otras, y por la siguiente razón. Las ecuaciones de movimiento son independientes de la variable acción, esto es, las trayectorias no dependen de los cambios en esta variable. Puesto que la energía total determina el valor inicial de la acción, y la dinámica dada por las ecuaciones de movimiento no dependen de la acción, las ecuaciones de movimiento no dependen del valor de la energía total del sistema, dependen únicamente del valor del parámetro A . La consecuencia de esto es que si dejamos fijo el valor de A y cambiamos la energía total del sistema, la dinámica será exactamente la misma en todos los casos, puesto que las ecuaciones no cambian cuando cambiamos la energía.

La consecuencia de lo descrito en el párrafo anterior es que podemos conocer el escenario completo del sistema únicamente cambiando los valores del parámetro A y dejando fijo el valor de la energía. Por las razones anteriores, elegimos para la presentación de los resultados de esta sección el valor $E = 150$. La elección es arbitraria en el sentido descrito en los párrafos superiores, pero es útil para obtener los resultados.

En el primer caso que se presenta, la herradura formada por las variedades invariantes es completa (parámetro de desarrollo $\beta = 1$) y corresponde a los valores $E = 150$, $A = 13$ y $B = 0$.

La figura 5.1 muestra la estructura obtenida de graficar las variedades invariantes del punto fijo del mapeo. La figura 5.2 muestra cómo las variedades se extienden hacia $q \rightarrow \infty$ en el espacio fase restringido. De la gráfica 5.2 es claro que el observador asintótico sólo ve algunos tentáculos de las variedades.

La figura 5.3 es una ampliación, en la región asintótica, de un tentáculo

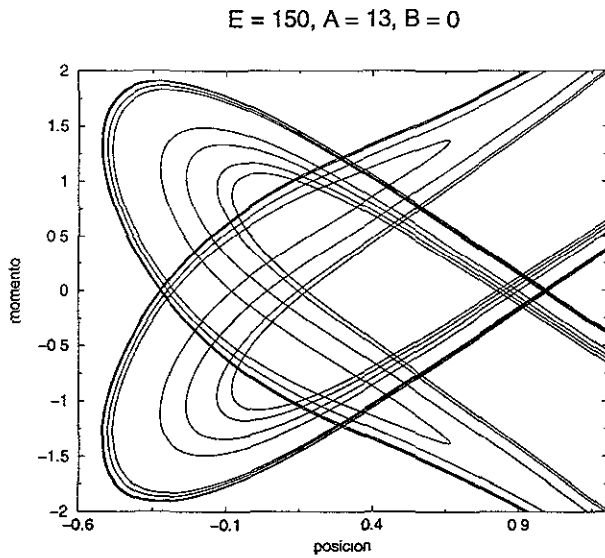


Figura 5.1: Herradura del sistema (1.3) para $E = 150$, $A = 13$ y $B = 0$.

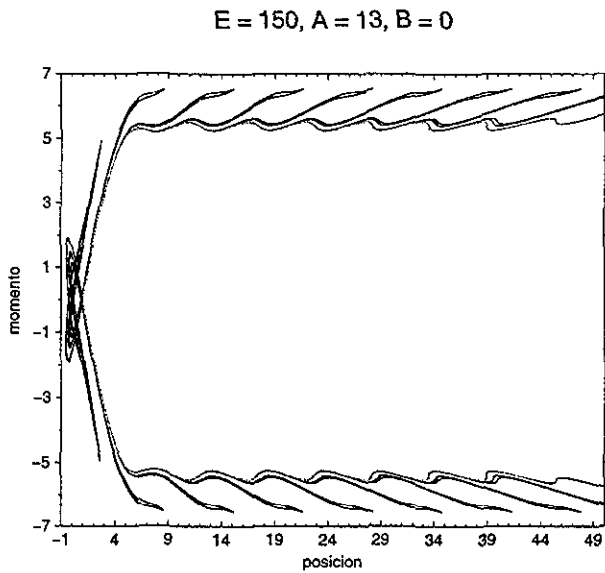


Figura 5.2: Variedades invariantes que dan lugar a la herradura de la figura 5.1.

de la variedad estable de la figura 5.2. Pueden observarse las estructuras interiores de los tentáculos, que dan lugar a los vacíos en las intersecciones de la variedad estable con el segmento local de la variedad inestable en la región de interacción. La línea que interseca este tentáculo es la línea de condiciones iniciales usada para calcular la función de dispersión (figura 5.4).

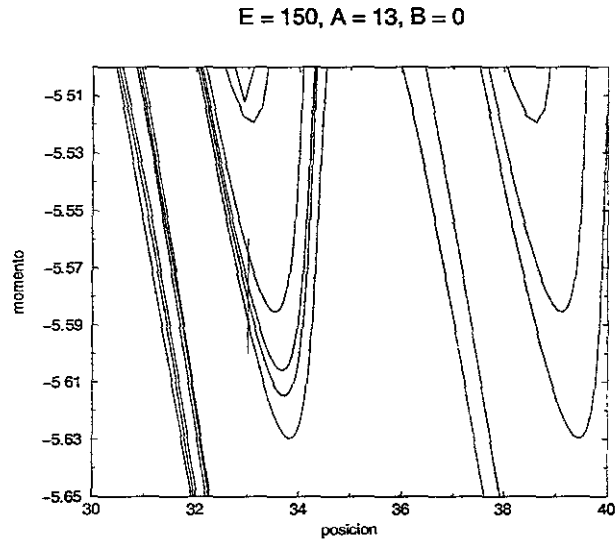


Figura 5.3: Ampliación de un tentáculo de la variedad estable de la figura 5.2.

La función de dispersión de tiempo de retardo, calculada con la fórmula (3.1), usando la línea de condiciones iniciales mostrada en la figura 5.3, cuya posición inicial es $q_0 = 33$ se muestra en la gráfica 5.4. Como lo describimos antes, la función tiempo de retardo tiene una estructura fractal de singularidades e intervalos de continuidad, situación que es común en sistemas caóticos.

La función de dispersión, y por lo tanto el árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía, no dependen de qué tentáculo sea intersectado por la línea de condiciones iniciales. Para la reconstrucción, es útil elegir condiciones iniciales que se encuentren en uno de los tentáculos de mayor momento en valor absoluto. Así, cuando se detecten las trayectorias de salida, los puntos se encuentran en tentáculos que son fáciles de observar. Si la línea de condiciones iniciales se coloca cerca de la acumulación de los tentáculos, las trayectorias de salida son más difíciles de detectar, donde detectar significa,

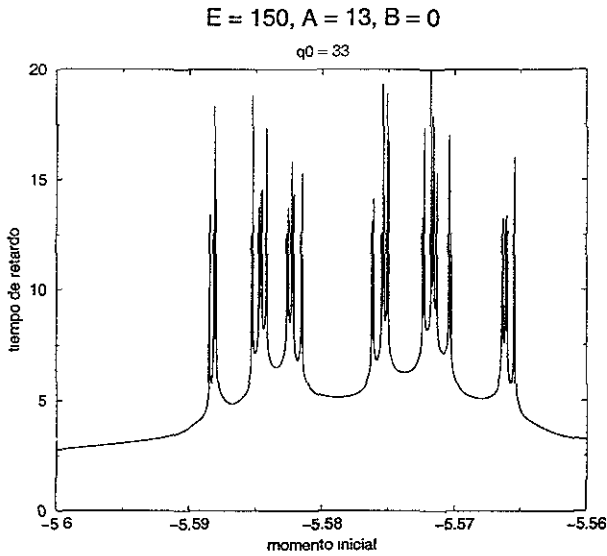


Figura 5.4: Función de tiempo de retardo. $E = 150, A = 13, B = 0$.

en este caso, saber en que número de tentáculo termina la trayectoria. Otra observación importante para la construcción de las funciones de dispersión es que la línea de condiciones iniciales debe evitar intersecciones tangenciales con los arcos interiores del tentáculo de la variedad estable, y es recomendable que la intersección sea de manera que se incluya toda la estructura del interior del tentáculo para que la función de dispersión contenga todos los intervalos de continuidad.

Con la función de dispersión, obtenemos el árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía de los intervalos de continuidad, tomando una condición inicial representativa de cada uno de los intervalos de continuidad que podemos resolver en la función de dispersión. Lanzamos la trayectoria correspondiente a esta condición inicial, contando el número de tentáculo en el que empieza. Nótese que este número es el mismo para todas las trayectorias que lanzamos para obtener los niveles de jerarquía de los intervalos de continuidad, y es el tentáculo al cual intersecta la línea de condiciones iniciales. Al detectar la trayectoria, contamos también el número de tentáculo de la variedad inestable en el que termina. Estos son los números k y n de la fórmula para obtener el nivel de jerarquía. Nos falta conocer el número total de pasos de la trayectoria desde que es lanzada, hasta que termina. Como dijimos al

principio del capítulo, este número lo podemos obtener observando que las combinaciones de los momentos finales de las trayectorias y el tiempo total de cada una de ellas se organizan en líneas horizontales, separadas todas ellas por la misma distancia, que es exactamente el período de la fase. En esta forma el observador sabe que cada trayectoria realiza un tiempo total que es un múltiplo entero de este período, y este número entero es el número de pasos del mapeo que la trayectoria necesitó para llegar a la región asintótica de salida. La figura 5.5 muestra esta organización en líneas horizontales con los mismos valores de los parámetros que hemos usado.

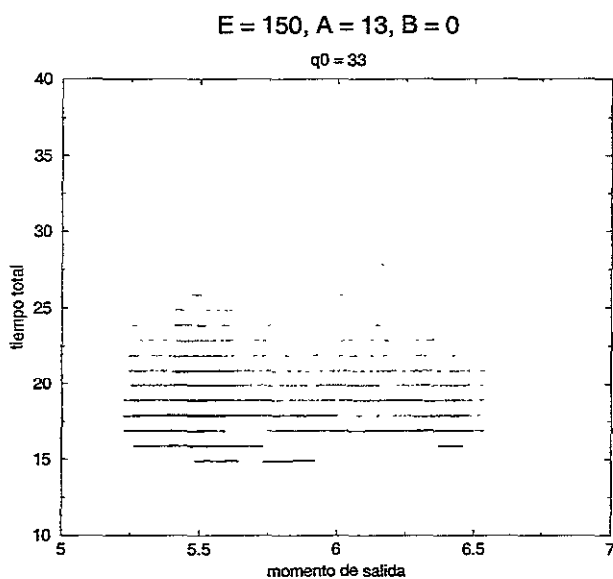


Figura 5.5: Organización de las combinaciones de tiempo total y momento de salida.

Conociendo el número total de pasos que cada una de las trayectorias necesita para llegar a la región en la que es detectada, el observador puede reconstruir inmediatamente los niveles de jerarquía de cada uno de los intervalos de continuidad.

El árbol de ramificaciones se muestra esquemáticamente en la figura 5.6. Las líneas horizontales son los segmentos que permanecen en cada nivel y que cubren el fractal. Estos segmentos son los complementos de los intervalos de continuidad. Los números del lado izquierdo corresponden al nivel de jerarquía. En el nivel 0, el segmento de la variedad inestable aún no es

intersectado por el hueco de nivel uno de la variedad estable y tenemos el intervalo completo. En el nivel 1, el tentáculo de la variedad estable corta un hueco en \mathbf{Rf} ; entonces, el segmento de la variedad inestable se divide en dos intervalos que pueden ser visitados nuevamente. Éstos son los segmentos mostrados en el nivel 1 en la figura 5.6. En el siguiente nivel, el tentáculo de la variedad estable que entra en \mathbf{Rf} corta dos huecos en el rectángulo fundamental, dentro de los intervalos que sobreviven en nivel 1, y en total, permanecen 4 segmentos que cubren el fractal. Así sucesivamente hasta el nivel $n \rightarrow \infty$ los intervalos se dividen de manera binaria. Si usamos el símbolo 0 para denotar el intervalo más cercano al punto fijo que el hueco de la variedad estable corta en el segmento de la variedad inestable que determina la frontera de \mathbf{Rf} , y el símbolo 1 para el segundo intervalo (el que está mas alejado del punto fijo) que se forma cuando la variedad estable atraviesa el rectángulo fundamental, los números sobre cada uno de los intervalos en el árbol de ramificaciones de la figura 5.6 (ceros y unos) dan la dinámica simbólica para las trayectorias que permanecen un tiempo infinito en la región de interacción.

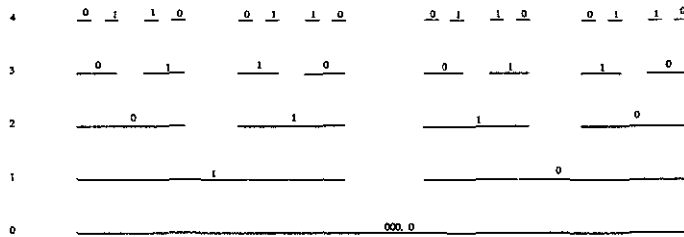


Figura 5.6: Árbol de ramificaciones de la función de dispersión de la figura 5.4.

El árbol de ramificaciones tiene una estructura binaria en todos los niveles de jerarquía. El caso completo ($\beta = 1$), siempre tiene esta estructura binaria de niveles. Si encontramos un árbol de ramificaciones exactamente binario en la función de dispersión, podemos afirmar que la estructura invariante en la región de interacción corresponde a una herradura completa, (pues la herradura es binaria). En este caso, el conjunto es hiperbólico y puede darse una dinámica simbólica exacta [5]. Hemos logrado reconstruir la estructura caótica a partir de la función de dispersión.

El siguiente caso corresponde a valores de $E = 150$, $A = 10.6$ y $B = 0$. La figura 5.7 muestra la estructura de las intersecciones de las variedades

invariantes en la región de interacción. Podemos observar que la punta del primer tentáculo de la variedad estable que entra en el rectángulo fundamental no alcanza el otro extremo. En este caso, el parámetro de desarrollo de la herradura es menor que uno, es incompleta.

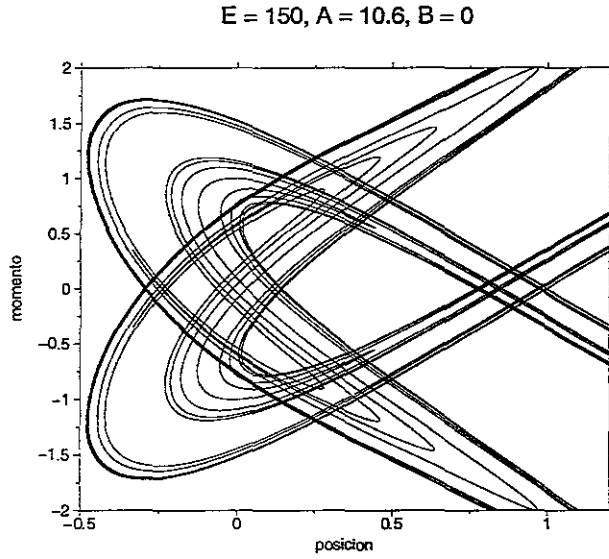


Figura 5.7: Herradura del sistema (1.3) para $E = 150$, $A = 10.6$ y $B = 0$.

La figura 5.8 muestra la función de dispersión construida de la misma manera que en el caso anterior y en la que puede observarse la estructura fractal característica. Sin embargo, no podemos decir directamente si corresponde a un árbol binario. En la figura 5.9 se muestran las combinaciones de tiempo total contra momento de salida. En ésta se observa, al igual que en el caso anterior, una organización de líneas horizontales separadas la misma distancia. Esto nuevamente nos indica que la frecuencia efectiva se mantiene constante a la salida y durante todo el movimiento, por lo que el observador asintótico puede, sin ninguna dificultad, obtener el número de pasos totales que cada trayectoria representativa de los intervalos de continuidad de la función de dispersión realiza, y puede obtener los niveles de jerarquía y el árbol de ramificaciones.

El árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía para este caso, mostrado en la figura 5.10a, no contiene el hueco de nivel 1. Es decir, la punta del primer tentáculo de la variedad estable no atraviesa \mathbf{R} . Por lo tanto,

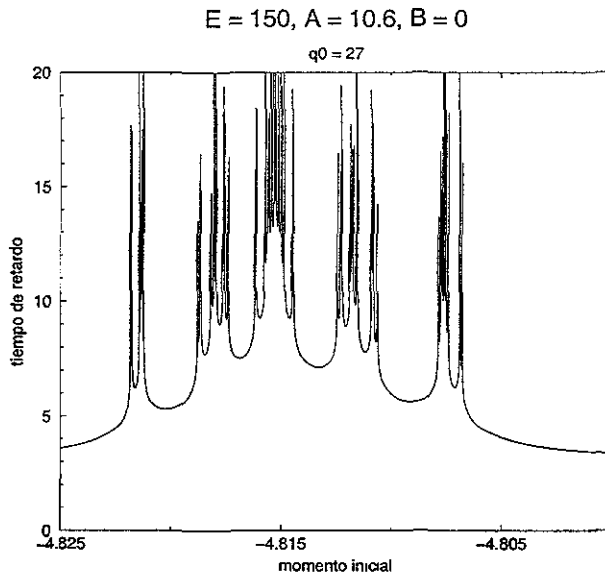


Figura 5.8: Función de tiempo de retardo. $E = 150, A = 10.6, B = 0$

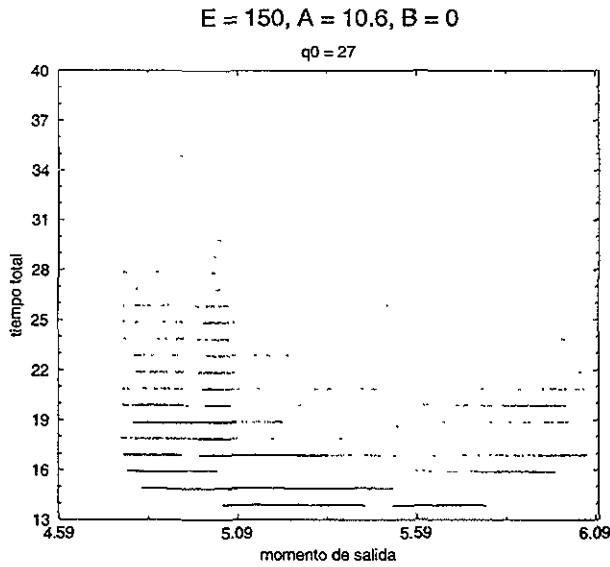


Figura 5.9: Organización de las combinaciones de tiempo total y momento de salida

en el nivel 1 tenemos una línea completa que corresponde a la frontera del rectángulo fundamental. Esto significa que no existen trayectorias provenientes de la región asintótica que tengan un solo paso del mapeo dentro de \mathbf{R} .

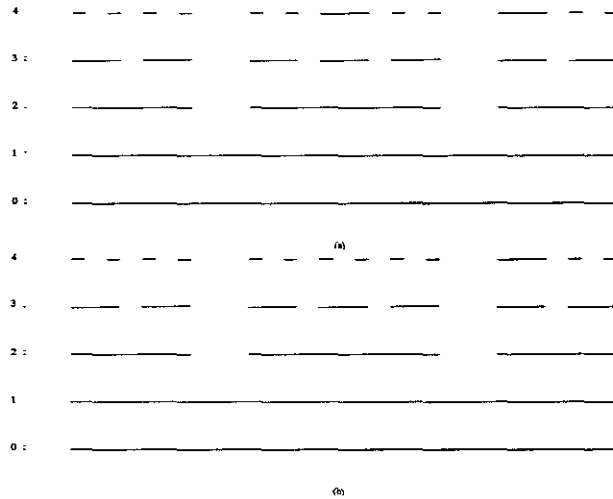


Figura 5.10: Árbol de ramificaciones. a) Árbol obtenido de la función de dispersión de la figura 5.8 y b) árbol correcto.

La primera conclusión que obtenemos es que la ramificación no es binaria pues si lo fuera, habría un intervalo con nivel de jerarquía 1. Por ello la estructura en la región de interacción no puede corresponder a una herradura completa. Por tanto, el parámetro de desarrollo β debe ser menor que la unidad. El siguiente hueco en el nivel de jerarquía, el hueco de nivel 2, corta la frontera de \mathbf{R} en tres intervalos que pueden ser visitados en iteraciones subsecuentes; por tanto, el árbol de ramificaciones tiene tres segmentos en el nivel 2, es decir dos intervalos de continuidad en la función de dispersión tienen nivel de jerarquía 2. El nivel de jerarquía 3 crea cuatro huecos en la frontera de \mathbf{R} dando lugar a siete segmentos. En la función de dispersión encontramos que hay cinco intervalos de continuidad cuyas trayectorias realizan cuatro pasos del mapeo dentro de la región fundamental. Esto quiere decir que en el árbol de ramificaciones habrá doce segmentos, creados por las intersecciones de los tentáculos de nivel 1 hasta 4 con la frontera de \mathbf{R} , tal y como se muestra en la figura. Cuando el parámetro de desarrollo es exactamente igual a $7/8$, la función de dispersión contiene seis intervalos de

continuidad cuyas trayectorias tienen nivel de jerarquía 4, y por tanto, la frontera de \mathbf{R} debe dividirse en trece segmentos que permanecen después de las intersecciones de los tentáculos de nivel 1 a 4. En nuestro caso, desaparece uno de los huecos de nivel 4, puesto que la imagen de la línea de condiciones iniciales usada para construir nuestra función de dispersión no es intersectada por el arco correspondiente al tentáculo de nivel 4.

Sin embargo, esto no causa problemas para la reconstrucción, pues podemos tomar un subintervalo de la función de dispersión y obtener toda la estructura resolviendo a niveles cada vez más altos. Debido a la autosimilaridad de las funciones de dispersión, lo único que cambia en la estructura del árbol de ramificaciones es que existe un corrimiento en los niveles de jerarquía, que sólo modifica las ramificaciones por una constante global que depende de qué nivel de jerarquía sea el primero que se resuelve al tomar un subintervalo de la línea original de condiciones iniciales. Cuando se lleva a cabo la reconstrucción, podemos obtener el árbol de ramificaciones correcto y encontramos que, efectivamente, existen seis intervalos de continuidad con nivel de jerarquía 4, es decir, el árbol correcto contiene trece segmentos cortados por los huecos que crean los tentáculos de nivel 1 a 4. El árbol correcto se muestra en la figura 5.10(b). La reconstrucción nos da un valor para el parámetro de desarrollo igual a $\beta = 7/8$, que coincide con la herradura mostrada en la figura 5.7.

El último caso que analizamos en esta sección, corresponde a los valores $E = 150$, $A = 5.8$ y $B = 0$. En este caso, la estructura de intersecciones de las variedades invariantes forman una herradura incompleta, como puede observarse en la figura 5.11. Podemos notar que el arco del primer tentáculo que entra en \mathbf{R} alcanza aproximadamente la mitad de éste, por lo que imaginamos que el parámetro de desarrollo de la herradura es $\beta = 1/2$. El vacío creado por el primer tentáculo de la variedad estable que entra en \mathbf{R} intersecta al primer tentáculo de la variedad inestable que entra en \mathbf{R} en exactamente dos puntos, por esto tenemos la seguridad que el parámetro de desarrollo es $\beta = 1/2$.

En la figura 5.12 se muestra la función de tiempo de retardo para este caso, donde se reconoce nuevamente la estructura fractal de intervalos de continuidad y de singularidades. Utilizando el mismo procedimiento que en los casos anteriores, y notando que las combinaciones de tiempo total de las trayectorias con el momento de salida se organizan en líneas horizontales con una separación regular entre ellas (figura 5.13), es posible reconstruir los niveles de jerarquía de los intervalos de continuidad. El árbol de ramificaciones

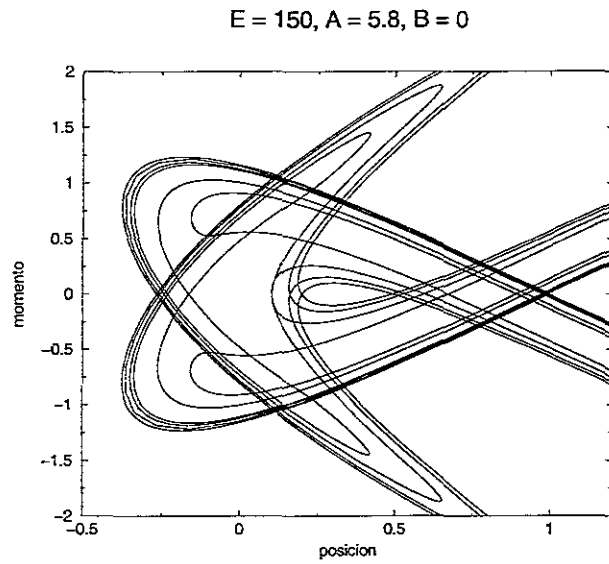


Figura 5.11: Herradura del sistema (1.3) para $E = 150, A = 5.8, B = 0$

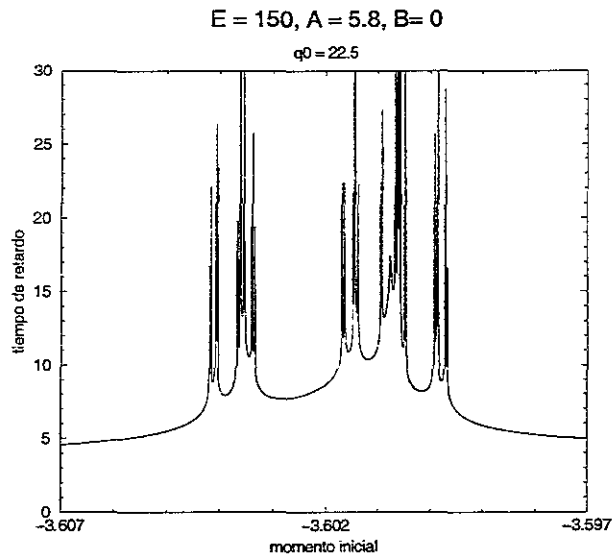


Figura 5.12: Función de tiempo de retardo. $E = 150, A = 5.8, B = 0$

se muestra en la figura 5.14.

El árbol de ramificaciones hasta nivel cuatro no contiene ningún hueco en

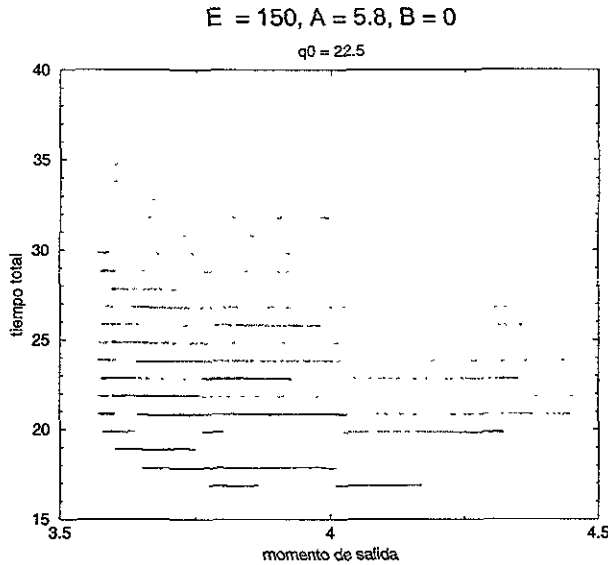


Figura 5.13: Organización de las combinaciones de tiempo total y momento de salida.

el nivel 1. La herradura es incompleta. Sólo existe un intervalo de nivel 2 en la función de dispersión que separa en dos intervalos la frontera de R , lo cual indica que en la estructura invariante solo existe un vacío de nivel 2. El nivel 3 aparece en dos intervalos de continuidad de la función de dispersión al igual que el nivel 4. Por lo tanto, en nivel 3 se corta la frontera de R en cuatro nuevos intervalos, y en nivel 4, los dos intervalos de los extremos vuelven a abrirse formando cuatro nuevos subintervalos. Este árbol de ramificaciones, a nivel cuatro, corresponde a un parámetro de desarrollo de $1/2$, [7].

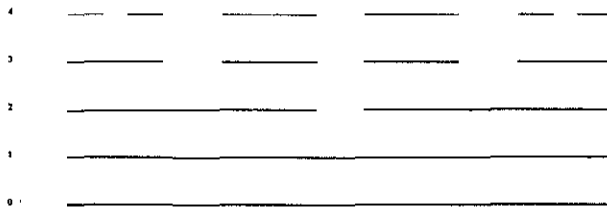


Figura 5.14: Árbol de ramificaciones.

Los casos que se han presentado pueden ser resueltos usando el método de reconstrucción sin mucha dificultad. La razón principal es que el reloj interno es periódico y esto nos permite conocer el número de pasos totales del mapeo que cada una de las trayectorias representativas de los intervalos de continuidad de la función de dispersión necesita para llegar a la región en la que es detectada. Es importante tener en cuenta que los casos que se presentan son tres escalones en el escenario de desarrollo, comunes en sistemas caóticos, en los cuales podemos aplicar este método de reconstrucción de manera efectiva.

Es conveniente mencionar que la reconstrucción de las estructuras en casos de herraduras poco desarrolladas (cuando el primer arco de la variedad está muy cerca del segmento local de la variedad inestable), en los que además existe un escenario de KAM alrededor del punto fijo $(0, 0)$, se vuelve poco efectiva con este método, debido a que la presencia de islas de KAM y las intersecciones de las variedades invariantes, exigen mayor resolución en los intervalos de continuidad de las funciones de dispersión. En estos casos, es necesario resolver cada vez más los intervalos de singularidades para tener una idea de la estructura del árbol de ramificaciones. El método de reconstrucción es inconveniente en los casos poco desarrollados. Sin embargo, la reconstrucción en estos casos es posible, como lo plantean en [4], si puede extraerse a partir de mediciones asintóticas el número de rotación de la frontera exterior de la isla más grande alrededor del punto central elíptico.

Hemos mostrado cómo el método de reconstrucción del árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía nos indica el valor del parámetro de desarrollo de la estructura en la región de interacción para el caso en el que el reloj interno es perfecto. Siempre esperamos que este método funcione cuando el reloj interno sea perfecto, aun cuando la estructura que deseamos reconstruir sea poco desarrollada y presente un escenario de islas de KAM. En estos casos la extracción del número de nivel de jerarquía se complica, pero la reconstrucción sigue siendo posible.

A continuación estudiaremos el sistema cuando introducimos anarmoniedades en el grado de libertad adicional, es decir, cuando el reloj interno no es periódico.

5.2 RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ NO PERFECTO

Cuando la función $f(I)$ no es lineal en la variable acción, la frecuencia efectiva del sistema depende de la acción de manera lineal:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{df(I)}{dI} = \frac{d}{dI}\left(2\pi I - \frac{BI^2}{2}\right) = 2\pi - BI = \omega_{ef} \quad (5.2)$$

Al igual que en el caso armónico, podemos determinar el valor inicial de la acción a partir de los valores iniciales de las otras variables y de la energía total del sistema. En este caso, las ecuaciones de movimiento sí dependen de la acción, por lo que toda la discusión que hicimos respecto de la energía en el caso anterior no es válida, excepto que ésta sigue siendo una constante durante todo el movimiento. El hecho de que las ecuaciones sí dependen de la energía total del sistema aumenta los posibles escenarios para el desarrollo de estructuras; sin embargo, la energía total del sistema tiene un límite natural, que es la energía de disociación $E_{dis} = \omega^2/2B = 2\pi^2/B$.

Cuando la energía total rebasa E_{dis} , la oscilación de la fase del sistema deja de servir como un reloj y existe la posibilidad de destruir el grado interno. En este caso, las ecuaciones de movimiento dependen de la energía del sistema, pero ésta, a su vez, está determinada por la restricción que sea menor a la energía de disociación. La consecuencia de que las ecuaciones dependan de la energía es que ahora las estructuras serán diferentes para diferentes valores de los parámetros A y E . Sin embargo, también es posible obtener el escenario cambiando los valores de los parámetros de manera conveniente. Así, si la constante de anarmonicidad B es la misma, entonces tenemos una energía máxima posible E_{dis} , y podemos intercambiar valores de A con valores de E para obtener el comportamiento del sistema. Otra vez, hemos observado que es posible obtener el escenario dejando fijo el parámetro A y variando la energía, o dejando la energía fija y cambiando el parámetro A . Sin embargo, debido a que en este caso la energía juega un papel importante en la dinámica, es más ilustrativo e interesante para los objetivos del trabajo variar la energía manteniendo fijo el parámetro A .

Los resultados siguientes se obtuvieron con el parámetro $A = 11$, y variando la energía total del sistema. El valor del parámetro de anarmonicidad B también lo mantenemos fijo. Estamos interesados principalmente en conocer las consecuencias de introducir anarmonicidades pequeñas en el sistema,

por lo cual elegimos el valor de $B = 0.1$, con lo que la energía de disociación es $E_{dis} = 2\pi^2/0.1 \approx 197.39$. Los casos interesantes de estudiar son cuando la energía del sistema es pequeña comparada con E_{dis} , cuando es intermedia, y cuando estamos cerca de E_{dis} .

Para los valores de los parámetros que hemos elegido, $A = 11$, $B = 0.1$, las herraduras formadas por las variedades invariantes del punto fijo hiperbólico son completas para valores de la energía mayores o iguales a 16 y hasta aproximadamente $E = 80$. Para energías $E \leq 16$, el parámetro de desarrollo es menor que la unidad, y para energías muy pequeñas la herradura converge a aquella que le correspondería en el caso armónico $B = 0$. Conforme la energía total se incrementa, los tentáculos se hacen más y más largos, y aproximadamente en $E = 70$, comienza a notarse un doblamiento del primer arco de las variedades que se acentúa conforme E se acerca a E_{dis} . Este doblamiento es considerable cuando la energía total es muy cercana a la de disociación, y el sistema atraviesa por un escenario de islas antes de sufrir un doblamiento completo, en el cual los tentáculos se duplican como consecuencia de una triplicación de los puntos homoclínicos. Esta situación no es particular del sistema usado en este trabajo; en [7] se presenta una situación similar de un doblamiento en espiral de las variedades del punto fijo hiperbólico.

Esta discusión nos lleva a elegir tres casos interesantes para aplicar nuestro método de reconstrucción. El primero de ellos, cuando la energía total es $E = 80$, todavía lejos de E_{dis} . El segundo, el primer caso extremo, en el que $E = 50$, y finalmente algunos casos en los que E es cercano a E_{dis} . El caso en el que la energía es muy pequeña comparada con E_{dis} no es de interés pues sabemos que cuando $B = 0$ la reconstrucción es posible.

Los resultados se presentan de la misma manera que en la sección anterior. Primero se muestra la estructura en la región de interacción; luego, las variedades invariantes extendiéndose a todo el espacio fase reducido; después, las funciones de dispersión y, finalmente, las combinaciones de tiempo total contra momento de salida.

El primer caso que presentamos es para una energía total de $E = 80$. La figura 5.15 muestra las intersecciones de las variedades invariantes en la región de interacción. La función de tiempo de retardo se muestra en la figura 5.16. En este caso, las combinaciones de tiempo total y momento de salida también se organizan en líneas horizontales, como puede observarse en la figura 5.17. Esto nos permite, al igual que en el caso armónico $B = 0$, obtener el número de pasos totales del mapeo de cada una de las trayectorias representativas de los intervalos de continuidad de la función de dispersión.

5.2. RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ NO PERFECTO 61

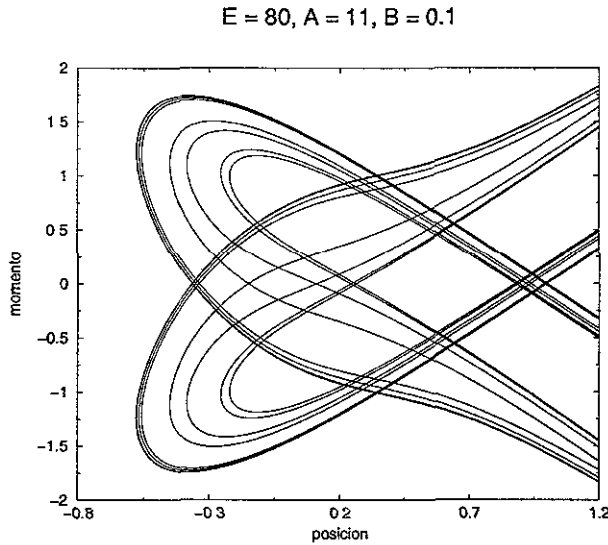


Figura 5.15: Herradura del sistema (1.3) para $E = 80, A = 11, B = 0.1$.

Cuando hacemos el árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía, figura 5.18, inmediatamente reconocemos la estructura binaria correspondiente a una herradura completa en la región de interacción. Exactamente lo mismo sucede en el caso $E = 50$. La estructura invariante en la región de interacción se muestra en la figura 5.19; el árbol de ramificaciones obtenido de la función de dispersión que se muestra en la figura 5.20, corresponde exactamente a una herradura completa que es posible reconstruir pues podemos conocer el número de pasos totales de cada trayectoria ya que la frecuencia efectiva se mantiene constante a la salida, como lo muestran las combinaciones de tiempo total y momento de salida en la figura 5.21. La figura 5.22 es el árbol de ramificaciones correspondiente.

Estos dos casos no son muy ilustrativos en cuanto al estudio de los efectos que produce la anarmonicidad del reloj interno, puesto que la frecuencia efectiva no depende mucho de los valores asintóticos del momento y el sistema sigue comportándose como en el caso armónico. El árbol de ramificaciones es un árbol exactamente binario en ambos casos y corresponde a una herradura completa. Mencionamos al principio que al introducir las anarmonicidades, el escenario de desarrollo depende de los valores de la energía y el parámetro A , para B fijo. Para los valores que hemos estado utilizando, la herradura

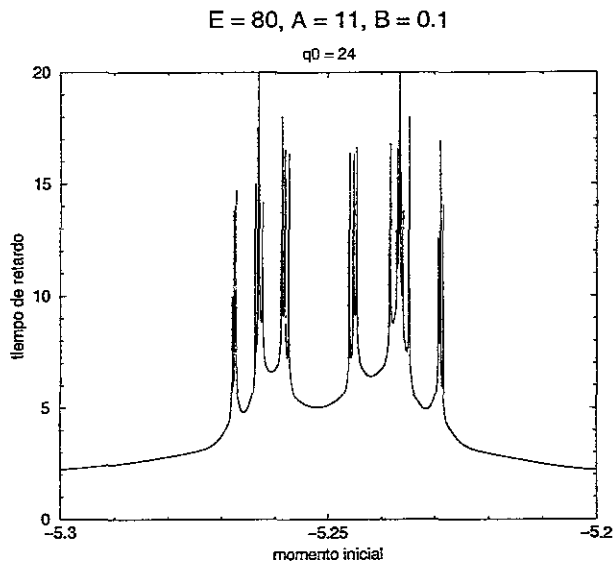


Figura 5.16: Función de tiempo de retardo. $E = 80, A = 11, B = 0.1$

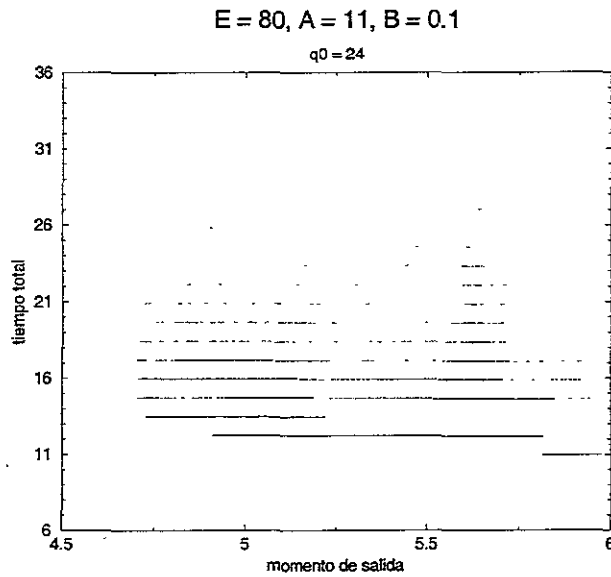


Figura 5.17: Combinaciones de tiempo total y momento de salida.

5.2. RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ NO PERFECTO63

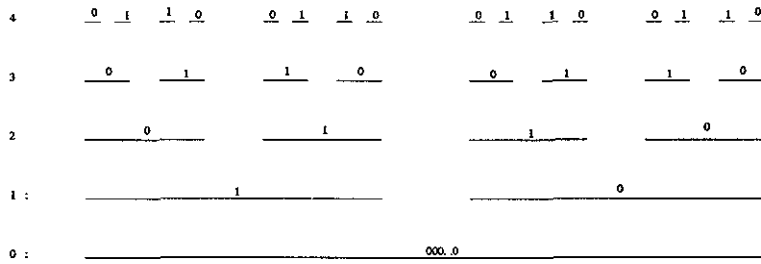


Figura 5.18: Árbol de ramificaciones.

nunca alcanza un desarrollo menor que $7/8$. Si hacemos menor el parámetro A , tendremos un escenario en el que la herradura sí puede tener un desarrollo menor. Sucesivamente podemos tener todos los posibles escenarios fijando el parámetro A y cambiando la energía.

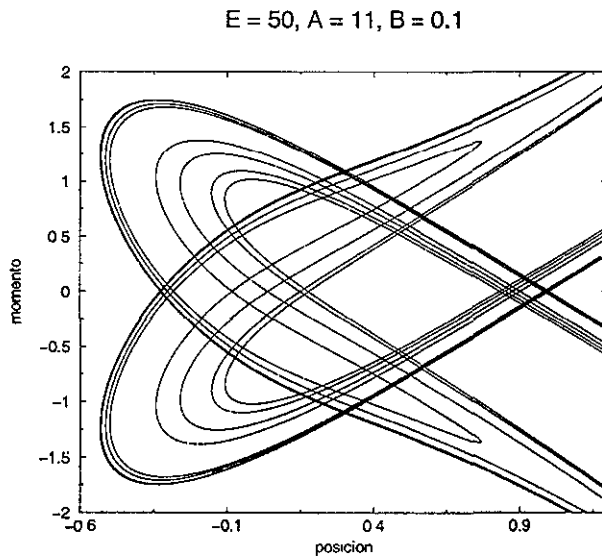


Figura 5.19: Herradura del sistema (1.3) para $E = 50, A = 11, B = 0.1$.

Es interesante que para valores de la energía pequeños comparada con E_{dis} , las combinaciones de tiempo total con el momento de salida de las trayectorias se organizan en líneas horizontales, y siempre es posible, como lo hicimos ver en la sección anterior, reconstruir las estructuras en la región

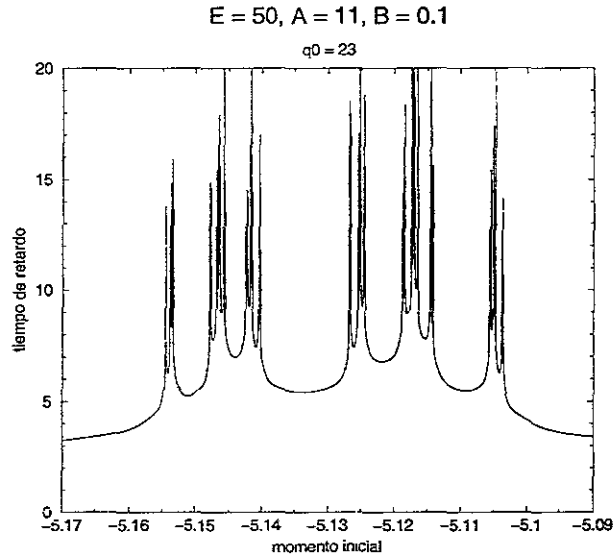


Figura 5.20: Función de tiempo de retardo. $E = 50, A = 11, B = 0.1$

de interacción. En estos casos ($E < E_{dis}$) el reloj interno del sistema se comporta como si fuera periódico, al menos en las regiones asintóticas. En la región de interacción, la frecuencia efectiva oscila rápidamente, pero al salir de ella permanece constante a lo largo de las trayectorias asintóticas. Es en el régimen de energías cercanas a E_{dis} donde los efectos de la anarmonicidad se hacen presentes.

En la siguiente figura se muestran las variedades inestables en orden de incremento en la energía total, manteniendo los mismos valores de los parámetros A y B . Puede observarse que las herraduras comienzan a sufrir un doblamiento en el arco del primer tentáculo, que es ya perceptible en $E = 80$. En el caso $E = 50$, que también es completo, no se observa este doblamiento. Conforme se aumenta la energía del sistema, el doblamiento del primer arco comienza a notarse más, como lo podemos ver en la figura 5.23, donde hemos incluido cuatro situaciones: a) $E = 100$, b) $E = 115$, c) $E = 150$ y d) $E = 180$. Podemos observar que el punto fijo interior se vuelve elíptico (en el caso completo el punto fijo interior es inverso hiperbólico), y existe un escenario de islas de KAM alrededor de él.

Estudiamos ahora algunos casos en los que la energía total del sistema es cercana a E_{dis} . La figura 5.24 muestra las estructuras en la región de interac-

5.2. RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ NO PERFECTO 65

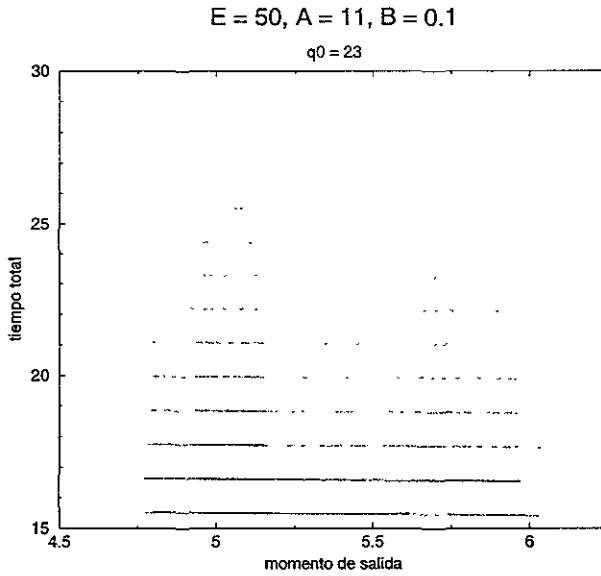


Figura 5.21: Combinaciones de tiempo total y momento de salida.

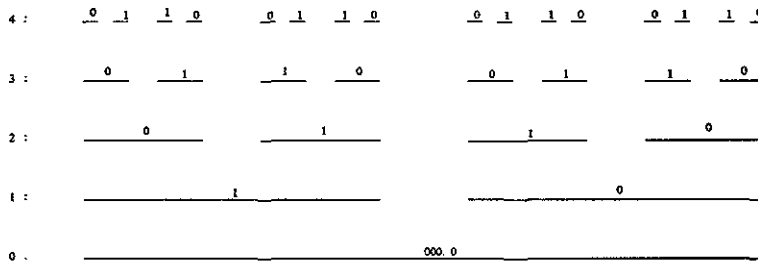


Figura 5.22: Árbol de ramificaciones.

ción y la figura 5.25 las variedades que se extienden hacia la región asintótica, para el caso en que el sistema tiene una energía de $E = 185$. Puede observarse la complicada estructura de intersecciones de las variedades originadas por la triplicación de los puntos homoclínicos. En la región asintótica, los tentáculos se duplican, también como resultado de las triplicaciones de los puntos homoclínicos. Un observador asintótico tendrá que tomar una línea de condiciones iniciales de manera que intersecte ambos tentáculos en la región asintótica. Al hacer esto, obtenemos la función de dispersión mostrada en la figura 5.26.

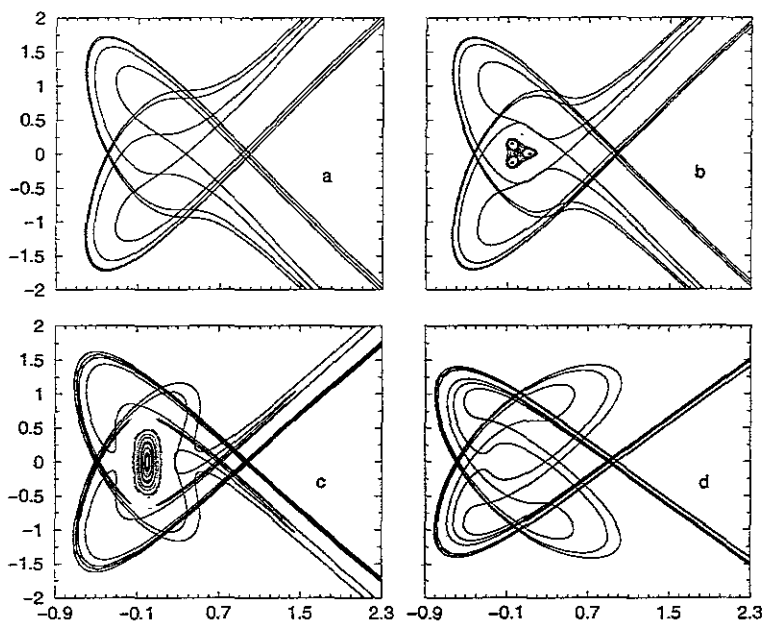


Figura 5.23: Escenario de desarrollo de la herradura para $100 \leq E < E_{dis}$. Los valores de la energía son: a) 100, b) 115, c) 150 y d) 180.

Lo primero que debe hacerse como observador asintótico para intentar reconstruir la estructura en la región de interacción, es verificar si el reloj interno del sistema sirve para contar el número total de pasos del mapeo que cada trayectoria realiza hasta que es detectada. Para esto, observamos las combinaciones del tiempo total de las trayectorias con el momento de salida. Estas combinaciones se muestran en la figura 5.27.

Podemos observar que la organización de las combinaciones de tiempo total y momento de salida no es exactamente en líneas horizontales como en los casos anteriores. Sin embargo, vemos una organización suficientemente regular como para que el observador pueda lanzar trayectorias cuyos momentos finales están en la región de mejor organización y así obtener el nivel de jerarquía de los intervalos de continuidad a los que pertenecen las trayectorias iniciales. En principio, tenemos el problema resuelto.

El siguiente caso corresponde a una energía $E = 190$. Ahora, la estructura de las intersecciones en la región de interacción también es extremadamente complicada. Una vez más, las triplicaciones de los puntos homoclínicos producen un doblamiento de los tentáculos.

5.2. RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ NO PERFECTO67

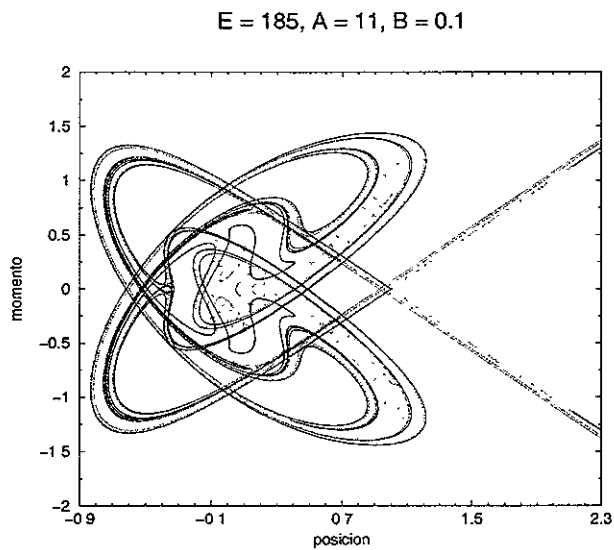


Figura 5.24: Herradura del sistema (1.3) para $E = 185, A = 11, B = 0.1$

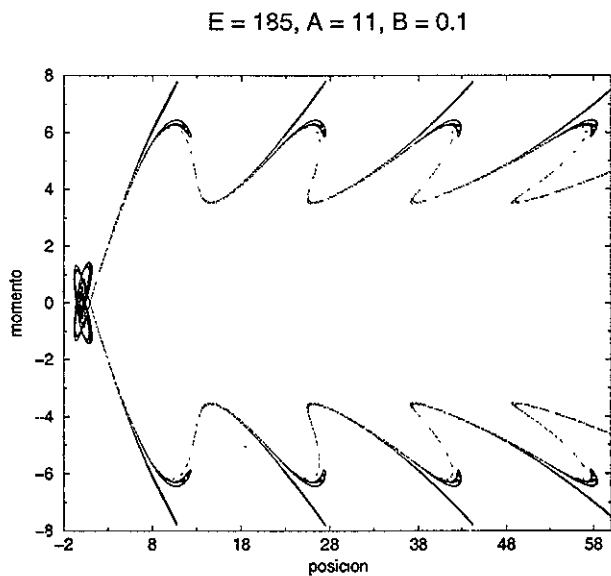


Figura 5.25: Variedades invariantes que dan lugar a la herradura de la figura anterior.

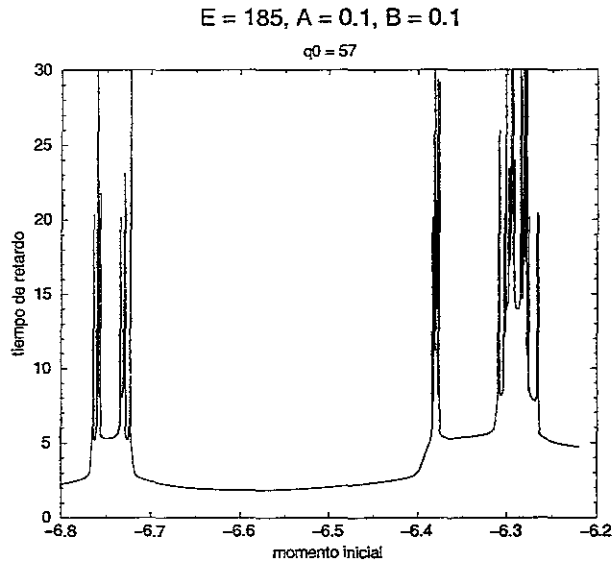


Figura 5.26: Función de tiempo de retardo.

La figura 5.28 muestra las estructuras en la región de interacción y la figura 5.29 la función de dispersión. Otra vez, la función de dispersión se construye usando una línea de condiciones iniciales que intersecta ambos tentáculos.

Las combinaciones de tiempo total con momento de salida se muestran en la figura 5.30. Podemos observar que la organización no es en líneas, sino que los diferentes valores de los momentos finales se organizan en el tiempo de manera que existe un traslape entre los tiempos de cada trayectoria con el mismo momento al proyectar sobre el eje del tiempo, es decir, la organización de las combinaciones tiene una ligera curvatura. Sin embargo, la separación entre las curvas es aproximadamente constante, y aún es posible resolver algunas trayectorias cuyos momentos de salida se encuentran en la región de la esquina inferior izquierda. Si los momentos finales son mayores, observamos que es más difícil determinar el tiempo de la trayectoria y cuando el tiempo total es mayor, perdemos resolución en la organización de líneas. Es importante notar que la organización de las combinaciones es ahora en curvas separadas de una manera aproximadamente constante y regular, suficiente para numerar las franjas sucesivamente e identificar este número con el número total de pasos del mapeo, excepto por una constante global, de

5.2. RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ NO PERFECTO69

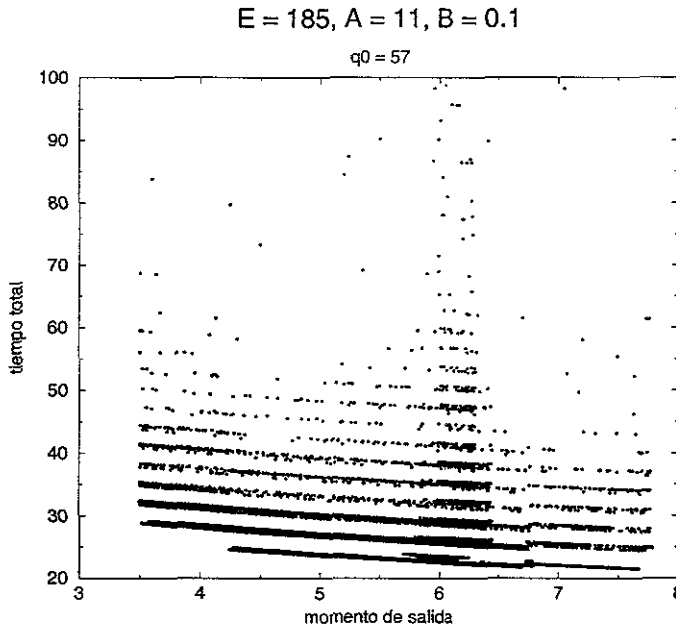


Figura 5.27: Combinaciones de tiempo total y momento de salida.

cada una de las trayectorias.

El siguiente caso es cuando el sistema tiene una energía $E = 197$, muy cercana a E_{dis} . La figura 5.31 muestra la silla caótica en la región de interacción, y la figura 5.32 muestra cómo se extienden en el espacio fase restringido. Una vez más observamos que los tentáculos en la región asintótica se presentan en pares, de manera que un observador debe intersectar ambos tentáculos con la línea de condiciones iniciales. Al hacer esto, obtenemos una función de dispersión como la de la figura 5.33.

Para reconstruir el árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía, observamos las combinaciones de tiempo total y momento de salida. Éstas se encuentran graficadas en la figura 5.34. Ahora podemos observar con mayor claridad que la organización en líneas horizontales se ha perdido completamente. En este caso, si sólo miramos las proyecciones sobre el eje del tiempo, encontramos un traslape, por lo que es necesario ver las combinaciones entre la variable momento de salida y el tiempo para extraer la información necesaria. Las franjas en las que se organizan las combinaciones también son suficientemente regulares para numerarlas sucesivamente y obtener el número

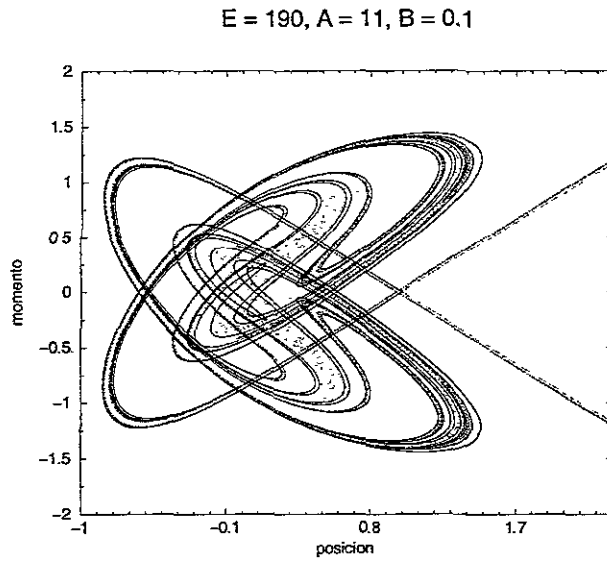


Figura 5.28: Herradura del sistema (1.3) para $E = 190, A = 11, B = 0.1$.

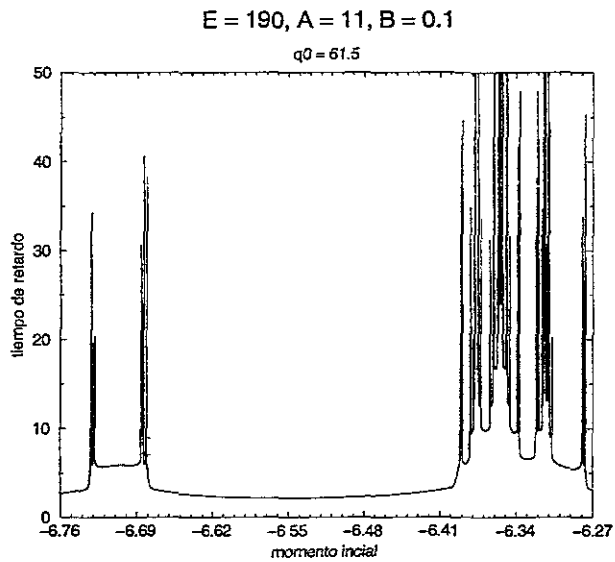


Figura 5.29: Función de tiempo de retardo.

total de pasos del mapeo.

En estos últimos resultados, podemos observar que cuando la energía to-

5.2. RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ NO PERFECTO 71

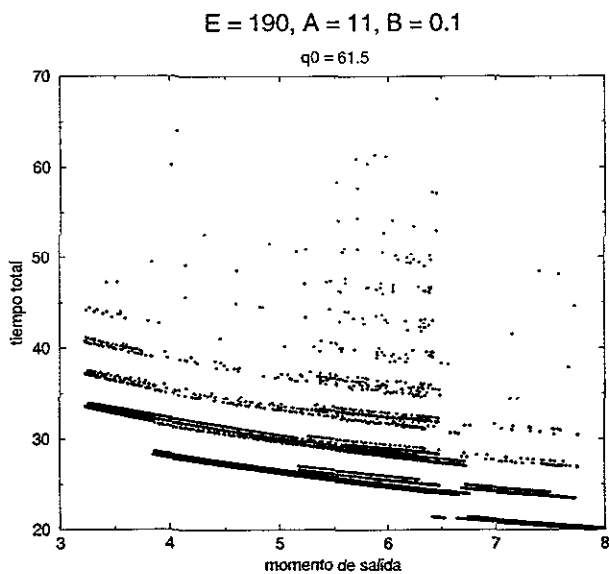


Figura 5.30: Combinaciones de tiempo total y momento de salida

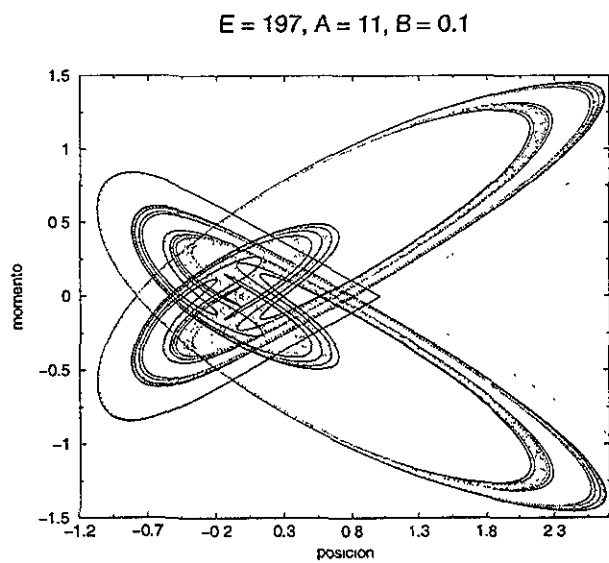


Figura 5.31: Herradura del sistema (1.3) para $E = 197, A = 11, B = 0.1$.

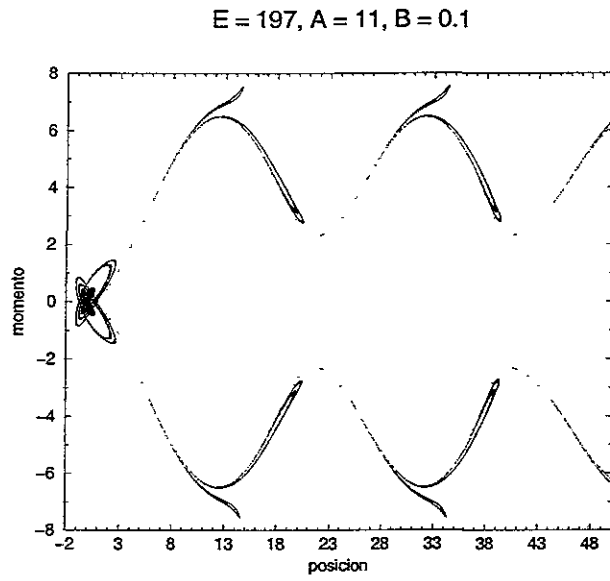


Figura 5.32: Variedades invariantes que dan lugar a la herradura de la figura anterior.

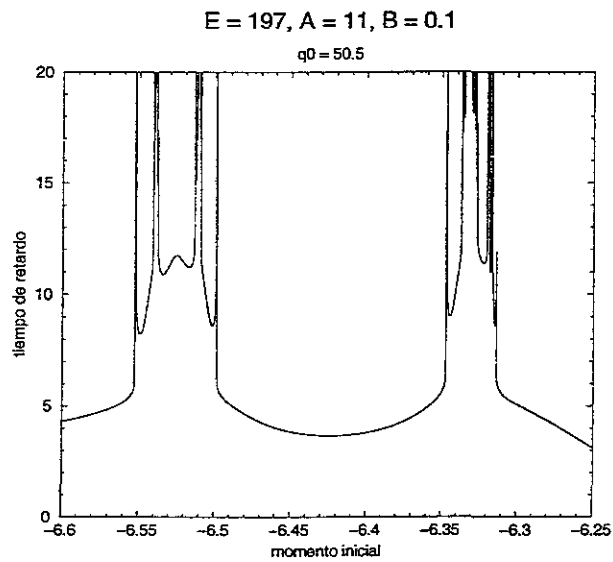


Figura 5.33: Función de tiempo de retardo.

5.2. RESULTADOS PARA UN SISTEMA CON RELOJ NO PERFECTO 73

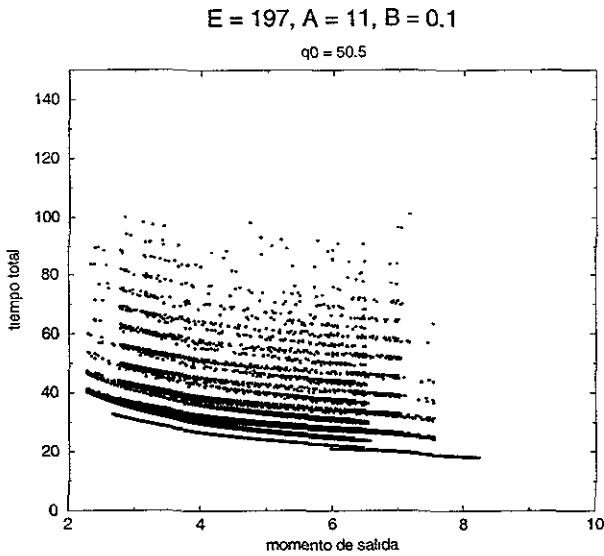


Figura 5.34: Combinaciones de tiempo total y momento de salida

tal del sistema es muy cercana a E_{dis} , el grado interno aún sirve como reloj para contar el número de pasos totales de cada una de las trayectorias representativas de los intervalos de continuidad. Esto lo mostramos observando que las combinaciones de tiempo total y momento de salida de las trayectorias, se organizan de manera que la diferencia en el tiempo para trayectorias con el mismo momento de salida es constante, aun cuando las combinaciones pierden la estructura ordenada de líneas horizontales como en el caso armónico o de energía pequeña comparada con E_{dis} .

En el caso en que $E = 185$, el tiempo que el reloj interno necesita para completar una revolución no depende mucho de los valores asintóticos del momento. En este caso, como se puede observar en la figura 5.27, las líneas en las que se organizan las combinaciones de tiempo y momento no son constantes en los valores del momento, es decir, tienen una ligera pendiente, pero la separación entre ellas permanece constante, por lo que podemos conocer el número de pasos del mapeo para las trayectorias.

Cuando la energía se incrementa a $E = 190$, las combinaciones se organizan en curvas que, proyectadas sobre el eje del tiempo, se traslapan. Sin embargo, la separación entre franjas es regular y podemos numerarlas sucesivamente. El tiempo que el grado interno necesita para completar una revo-

lución, depende de los valores asintóticos del momento conforme la energía total del sistema se acerca a la energía de disociación. Por esta razón, la organización de estas combinaciones es en curvas.

Las regularidades en las combinaciones del tiempo total con el momento de salida, nos permiten obtener el número de pasos totales que cada trayectoria realiza para alcanzar la región asintótica, aun cuando la energía del sistema sea muy cercana a la energía de disociación. Sin embargo, para poder reconstruir el nivel de jerarquía de los intervalos de continuidad de las funciones de dispersión, es necesario saber el número de tentáculo de la variedad estable en el que empiezan las trayectorias, y el número de tentáculo de la variedad inestable en la que terminan. Debido a que en la región asintótica los tentáculos aparecen en parejas, y las funciones de dispersión han sido construidas intersectando ambos tentáculos, nos encontramos con el problema de asignar el número de tentáculo al que pertenece la trayectoria. El observador debe decidir si asigna el mismo número a los dos tentáculos, o si asigna números distintos. Como vimos cuando hicimos la descripción del método de reconstrucción, la asignación de estos números depende de si el tentáculo es la imagen (si es la variedad inestable) o preimagen (si es la variedad estable) del tentáculo siguiente en la misma dirección. En el caso de los pares de tentáculos, cada pareja debe ser la imagen o preimagen de la pareja siguiente en la dirección correspondiente. Esto hace más complicada la situación pues el observador debe tener alguna información sobre el tipo de estructuras que producen este efecto de doblamiento de los tentáculos. Así, podemos llevar a cabo la reconstrucción de los niveles de jerarquía de los intervalos de continuidad; sin embargo, el reconocimiento del tipo de la herradura es una labor que no podemos llevar a cabo con las herramientas que hemos desarrollado en este trabajo.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo ha sido la reconstrucción de las estructuras invariantes en la región de interacción para un sistema de un grado de libertad externo y un grado de libertad interno adicional, donde éste último sirve como reloj interno para el sistema. La situación en la que el grado de libertad interno es periódico es una extensión de las investigaciones realizadas previamente [1, 2] y su principal objetivo fue conocer el método de reconstrucción así como reconocer su utilidad para situaciones en las que la estructura es hiperbólica y puede establecerse una dinámica simbólica completa que es válida hasta el nivel de desarrollo infinito [6, 5]. La contribución de este trabajo al estudio del problema inverso de dispersión consiste en el análisis de un sistema que también posee un reloj interno que no es periódico, sino que presenta pequeñas anarmonicidades. Inicialmente se tenía la idea que las anarmonicidades en el sistema imposibilitarían la obtención del número total de pasos del mapeo de las trayectorias, ya que el tiempo del reloj interno no es constante. Sin embargo, hemos encontrado que sí es posible obtener esta información y que la presencia de la anarmonicidad en el sistema tiene otras consecuencias que no se presentan en el caso armónico, como son el doblamiento de tentáculos cuando el sistema tiene una energía cercana a la energía de disociación correspondiente a una triplicación de las intersecciones homoclínicas, la fuerte dependencia de los escenarios de desarrollo de las estructuras caóticas con la energía total del sistema relacionada con la dependencia de las ecuaciones de movimiento con la variable acción, que podemos determinar a partir de la energía total. Para energías bajas, el tiempo que el sistema necesita para regresar a la superficie de sección no depende mucho de los valores asintóticos del momento. En todos los casos, la frecuen-

cia efectiva permanece constante en la región asintótica donde la partícula es detectada, aun cuando en la región de interacción oscila rápidamente. Cuando la energía total es cercana a la energía de disociación, el tiempo del reloj interno para completar una revolución depende mucho de los valores asintóticos del momento. Conforme la energía se acerca a E_{dis} , el tiempo del reloj para completar una revolución se hace cada vez más largo. De hecho, cuando la energía es exactamente igual a E_{dis} , el tiempo del reloj es infinito. Las combinaciones de tiempo y momento de salida de las trayectorias no se organizan en líneas, sino en curvas que, proyectadas sobre el eje temporal, se traslapan entre si. Para valores fijos del momento, la separación entre ellas es constante, de modo que puede obtenerse el número de pasos totales considerando las franjas completas como un escalón en el número de pasos para las trayectorias que, a la salida, se encuentran sobre alguna de éstas.

Si el observador decide tomar como tiempo para los niveles de jerarquía las franjas en las que se organizan las trayectorias, como lo describimos en el párrafo anterior, entonces puede obtener el número de pasos de las trayectorias representativas de los intervalos de continuidad. El problema para la reconstrucción es que el observador debe decidir qué número tiene que asignar a las parejas de tentáculos que observa en la región asintótica. Este número es esencial para la reconstrucción de los niveles de jerarquía, y debido a la presencia de parejas de tentáculos y a la falta de conocimiento sobre la estructura interna, no es claro cómo asignar los números correspondientes a cada pareja de tentáculos o a cada tentáculo de manera individual.

A este problema se suma otro. El concepto de parámetro de desarrollo que hemos introducido corresponde a herraduras binarias y fue definido en función de la distancia, respecto al caso completo, que la punta del primer tentáculo que entra en el rectángulo fundamental alcanza. En el caso en que existan dos tentáculos, este concepto de parámetro de desarrollo es incompleto, pues ahora el primer vacío creado por el tentáculo de la variedad estable que entra en \mathbf{R} , lo atraviesa más de una vez. Entonces, si obtuviéramos un árbol de ramificaciones de los niveles de jerarquía, nos enfrentaríamos al problema de interpretarlo y obtener un parámetro de desarrollo adecuado. Para describir el estado de desarrollo de una herradura con tentáculos dobles, necesitamos dos parámetros de desarrollo independientes.

Nuestro método es práctico cuando no es necesario conocer niveles muy altos del árbol de ramificaciones. En el caso armónico siempre es posible obtener toda la información necesaria para obtener los niveles de jerarquía. Éste es el tipo de situaciones que hemos presentado en este trabajo, ya que

nos interesa saber cuándo es posible llevar a cabo la reconstrucción vía este método. En particular, un caso que es interesante es el correspondiente a $E = 150$, $A = 10.6$ y $B = 0$. Encontramos que el parámetro de desarrollo obtenido de las mediciones asintóticas es $\beta = 7/8$. El caso de un parámetro de desarrollo igual a $7/8$ se encuentra ampliamente discutido en [6, 7]. Aquí señalaremos únicamente que cuando la herradura tiene este valor de desarrollo, tiene ventanas de hiperbolicidad y de tangencias homoclínicas en las cuales la herradura sigue teniendo el valor $7/8$ en su parámetro de desarrollo. Cuando la estructura se encuentra en una de las ventanas de hiperbolicidad, es posible dar una dinámica simbólica exacta con un número finito de reglas gramaticales, mientras que cuando encuentra una tangencia homoclínica, esta dinámica deja de ser válida.

Para el problema inverso de dispersión, hemos encontrado que el método de reconstrucción de las estructuras de la región de interacción a partir de mediciones asintóticas, es posible siempre que el tiempo del reloj interno permanezca aproximadamente constante, y para energías pequeñas comparadas con la energía de disociación, en donde no exista una triplicación de los puntos homoclínicos. Para sistemas con un reloj interno periódico siempre es posible, en principio, obtener el árbol de ramificaciones de las funciones de dispersión y saber el parámetro de desarrollo de la herradura. Cuando el reloj interno no es periódico, hemos visto que podemos obtener parte de la información necesaria para llevar a cabo la reconstrucción del árbol de ramificaciones; si la energía es baja comparada con la disociación, podemos obtener toda la información necesaria, pero conforme la energía del sistema se acerca a la energía de disociación, perdemos información sobre el número de pasos que las trayectorias necesitan para entrar a la región de interacción y para salir de ella y ser detectadas, de modo que, en este momento, no tenemos todas las herramientas necesarias para llevar a cabo una reconstrucción completa en el escalón de desarrollo de las estructuras caóticas.

Podemos concluir dejando el camino abierto para continuar las investigaciones en sistemas de dispersión que posean un mecanismo que pueda ser empleado como reloj interno, que permita relacionar el número de pasos de un mapeo definido en una superficie de sección adecuada con el tiempo que el sistema necesita para regresar a esta superficie. Hemos encontrado, estudiando un sistema particular, que el introducir pequeñas anarmonicidades en el mecanismo que hace de reloj interno, no complica de manera considerable la relación entre el número de pasos y el tiempo, gracias a que en la región asintótica la diferencia en el tiempo para las trayectorias se mantiene aproxi-

madamente constante, aun cuando la energía total del sistema sea cercana a la energía de disociación. En el caso armónico basta conocer el tiempo total que las trayectorias emplearon para llegar a la región asintótica para obtener el número de pasos totales del mapeo que cada una de ellas realiza, dado que el tiempo del reloj es constante. En el caso anarmónico, es necesario observar las combinaciones de tiempo total y momento de salida, pues conforme la energía se acerca a la de disociación, los tiempos para diferentes trayectorias se traslapan y no bastan para saber el número de pasos. Sin embargo, conociendo los valores del momento de salida puede obtenerse la energía cinética de la partícula y, como sabemos que en la región asintótica la energía total es la suma de energía cinética y energía del grado interno, podemos conocer el valor de la acción y determinar el valor de la frecuencia efectiva, de modo que podemos conocer el número total de pasos. Para obtener la silla caótica a partir del árbol, necesitamos estudiar más a fondo las estructuras formadas por las intersecciones de las variedades, y desarrollar otras herramientas que nos ayuden a reconstruirlas.

Apéndice A

Errores numéricos

Para obtener soluciones de las ecuaciones de movimiento 1.3 es necesario integrarlas numéricamente. Es claro que este tipo de método para obtener soluciones puede presentar errores del tipo numérico. El objetivo de este apéndice es proporcionar una estimación del error cometido al integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento y convencer al lector que este error no altera en buena medida los resultados obtenidos.

El método de integración utilizado es el *Runge-Kutta* de orden cuatro, con un ajuste automático del paso de integración, tomado de [14]. Este método es de los más usuales y convenientes para integrar sistemas de ecuaciones, y se encuentra ampliamente discutido en la referencia [14]. Por esta razón, no lo discutiremos aquí, en su lugar, enfocaremos la atención en las fuentes de errores presentes dentro de los cálculos realizados, y sus posibles consecuencias para la obtención de los resultados y su validez.

En primer lugar, es necesario reconocer que ningún tipo de cálculo numérico se encuentra exento de errores que, por su naturaleza, es prácticamente imposible hacerlos desaparecer. En particular en sistemas como el descrito por el Hamiltoniano 1.1 que es caótico, los errores numéricos pueden cambiar completamente las soluciones de las ecuaciones dinámicas. Es importante asegurar que las posibles fuentes de errores y los errores producidos por éstas no alteran los resultados.

Partiremos del hecho que los sistemas caóticos son extremadamente sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales. Esto significa que si tomamos dos trayectorias que inicialmente se encuentran separadas por una distancia pequeña, y las dejamos evolucionar con las ecuaciones de movimiento, después de un tiempo finito, la separación entre las trayectorias se

hace grande. Esto puede ser el primer factor importante de errores en los cálculos numéricos. Si se está utilizando una precisión numérica pequeña (consideraremos en éste apéndice como precisión numérica el número de cifras significativas después del punto decimal, con las que una computadora es capaz de realizar operaciones), la sensibilidad a las condiciones iniciales puede ser un factor importante de errores numéricos, puesto que usualmente las computadoras redondean las últimas cifras significativas.

Si la precisión es tal que, por ejemplo, $0.12789 \approx 0.128$, los puntos 0.12789 y 0.128 tendrán una evolución temporal completamente distinta, es decir, no siguen la misma trayectoria del flujo dado por las ecuaciones de movimiento, incluso cuando son puntos que están muy cercanos uno del otro. Afortunadamente, el día de hoy contamos con computadoras capaces de realizar operaciones con una precisión de hasta 14 (catorce) cifras significativas, de manera que es posible seguir una trayectoria con una precisión extremadamente buena. Los cálculos que aquí se realizaron fueron hechos con una computadora capaz de realizar operaciones con una precisión del orden mencionado arriba. Sin embargo, para trayectorias de sistemas caóticos, el error debido a la precisión sí se incrementa después de un tiempo. Volveremos a este punto más adelante.

La primera observación que es importante tener en cuenta, es que las soluciones del sistema 1.3 son continuas y únicas para una condición inicial dada (Teorema de existencia y unicidad de soluciones). Esta unicidad de las soluciones garantiza que trayectorias correspondientes a diferentes condiciones iniciales no pueden intersectarse entre ellas, puesto que la unicidad se vería violada. En el sistema que hemos usado, las soluciones corresponden a órbitas en un espacio fase de cuatro dimensiones dado por $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$. Es evidente que no tenemos la posibilidad de visualizar geoméricamente este espacio fase; sin embargo, el teorema anterior nos garantiza que las curvas soluciones del sistema de ecuaciones, que se encuentran en este espacio fase, no se intersectan entre ellas. Una trayectoria puede intersectarse con ella misma tangencialmente, entonces la trayectoria es una órbita periódica del sistema, es decir, después de un cierto tiempo, la trayectoria regresa al mismo punto en donde empezó.

La imposibilidad de tener una visualización geométrica del espacio fase del sistema y por lo tanto de las trayectorias que son soluciones, puede sortearse de la siguiente manera. Sabemos que el Hamiltoniano 1.1 posee una cantidad invariante debido a que no depende explícitamente del tiempo. Es-to es, la energía total del sistema es una cantidad conservada durante todo

el movimiento. La existencia de ésta cantidad conservada permite reducir el estudio de la dinámica en el espacio fase de cuatro dimensiones, a superficies de tres dimensiones en las que la energía es constante. En el trabajo, esto se hizo expresando la variable de acción I como función de la energía y de las demás variables. De esta manera hemos reducido el espacio fase de cuatro dimensiones a un subespacio de tres dimensiones del espacio fase, en el que todavía la dinámica del sistema es extremadamente complicada. Para reducir aún más el espacio fase, construimos el mapeo de Poincaré tomando las intersecciones de las trayectorias con una superficie de sección adecuada, lo cual reduce el número de dimensiones por uno y por lo tanto basta estudiar la dinámica de las intersecciones de las trayectorias con la superficie de sección. Evidentemente la construcción de la superficie de sección debe realizarse de manera numérica y debe reconocerse la existencia de errores numéricos que pueden alterar los resultados.

Como hemos mencionado, la obtención de las soluciones de las ecuaciones de movimiento se obtuvieron con una de las subrutinas de integración más usuales y mejor conocidas que existen. Los errores debidos a la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales pueden alterar los datos numéricos al calcular las trayectorias de un sistema caótico. Después de un tiempo $\tau = (13 \cdot \ln(10))/\lambda$, donde λ es el exponente de Lyapunov, la precisión de 10^{-13} cifras se incrementa en 1. Es decir, si inicialmente $x(0) = 10^{-13}$, entonces $x(t) = x(0) \cdot \exp(t \cdot \lambda)$ y en $t = \tau$, $x(\tau) = 1$. Por esta razón, en sistemas caóticos sólo es posible continuar las trayectorias con certeza durante un tiempo corto. El exponente de Lyapunov λ puede aproximarse por el logaritmo natural del eigenvalor del punto fijo exterior ([5]).

Por ejemplo, tomemos como condición inicial una trayectoria muy cercana al punto fijo:

$x_i = (q_i, p_i) = (0.999999999999580, -6.3e - 012)$ cuando los parámetros del sistema son $E = 80, A = 11, B = 0.1$. Con estos parámetros, se obtiene el valor aproximado de

$$\lambda \approx \ln(10.9698801864422) \approx 2.39515335229879773550$$

para el exponente de Lyapunov. El error cometido en la posición respecto al punto fijo es de 10^{-13} , por lo tanto, el tiempo en el que el error en la posición se incrementa al valor 1 es $\tau = 12.49757397796395756135$, es decir, únicamente podemos seguir la trayectoria con certeza durante tiempos menores a éste tiempo τ . Evidentemente cada condición inicial en la región de las

intersecciones homoclínicas tiene su propio tiempo máximo durante el cual podemos seguir la trayectoria antes de que el error se incremente y perdamos el control sobre ella. El crecimiento exponencial del error en las condiciones iniciales sólo ocurre dentro de la región donde existen las intersecciones homoclínicas, fuera de ésta región el crecimiento en el error es lineal.

La conclusión importante que se extrae del ejemplo anterior es que podemos tener control sobre las trayectorias que permanecen dentro de la región de las intersecciones homoclínicas por un tiempo menor que τ , si el tiempo por el que permanece en ésta región es del orden de τ , habremos perdido la trayectoria debido a los errores. Nuevamente enfatizamos que cada trayectoria tiene su propio tiempo, de manera que siempre es posible determinar durante cuánto tiempo se puede tener control sobre cada una de las trayectorias que entran en la región donde el error se incrementa de manera exponencial.

Para las condiciones iniciales que se encuentren sobre la variedad estable los tiempos que permanecen dentro de la región de intersecciones son claramente mayores a los tiempos durante los cuales podemos tener un control sobre las trayectorias antes de que el error domine. Por esta razón, aquéllas trayectorias que permanecen tiempos largos en la región de intersecciones homoclínicas son trayectorias sobre las que hemos perdido el control. Sin embargo, sabemos que cada punto en la región de la maraña homoclínica proviene de alguna trayectoria asintótica, y aunque no podemos seguirla puesto que los tiempos son suficientemente grandes para que el error domine, existe un resultado conocido como "lema de sombra" que nos garantiza que incluso cuando no se está calculando la trayectoria exacta, si se obtiene una aproximación a una trayectoria real del sistema [5, 11].

Ahora vemos que cuando una trayectoria permanece por un tiempo infinito en la región de interacción, no sólo perdemos la trayectoria debido a que se está aproximando al punto fijo sobre la variedad estable, sino que también estamos perdiendo el control sobre ella debido a que el tiempo que permanece es mayor que el tiempo τ que le corresponde. De todas maneras la trayectoria (con errores) es "sombreada" por otra trayectoria, y esto se aplica para todas las trayectorias.

Las trayectorias que detectamos en la región asintótica de salida son trayectorias que permanecen un tiempo finito e incluso un tiempo menor que su τ correspondiente, de modo que todavía tenemos control sobre ellas. Con estas trayectorias determinamos el nivel de jerarquía de los intervalos de continuidad de las funciones de dispersión. En un sentido poco riguroso,

podemos pensar que las singularidades de las funciones de dispersión corresponden a las trayectorias que hemos perdido debido a que el tiempo que permanecen en la región de intersecciones es mucho mayor que τ , de manera equivalente, cuando una trayectoria está sobre la variedad estable, el tiempo que permanece dentro de la región de intersecciones es mucho mayor que el tiempo τ por lo que la función de dispersión tiene una singularidad y perdemos el control sobre la trayectoria.

Las condiciones iniciales que se encuentran dentro de los intervalos de continuidad de la función de dispersión corresponden a trayectorias cuyo tiempo dentro de la región de intersecciones homoclínicas es suficientemente pequeño de tal manera que el error no incrementa sobre ellas podemos tener la certeza que cuando las estamos detectando el error sobre ellas es mínimo.

Existen mas fuentes de posibles errores que describiremos a continuación.

Cada paso de integración arroja un punto que debe satisfacer una condición importante, el punto debe ser tal que la energía total del sistema (dada por el Hamiltoniano) permanece constante durante toda la trayectoria. Otra alternativa de hacer una estimación del error numérico en los datos obtenidos al integrar las ecuaciones de movimiento, es calculando la energía en cada paso de la integración y observando las desviaciones de la energía calculada con la energía total del sistema (el valor de la energía total es proporcionada inicialmente por el observador asintótico). En los cálculos realizados, se llevó a cabo un registro de la energía calculándose en cada paso de integración y no se observaron desviaciones del valor original sobre las trayectorias; sin embargo si observamos fluctuaciones de la energía cuando se construye la superficie de sección, de modo que discutiremos esta situación a continuación.

Hemos visto que es conveniente y suficiente estudiar la dinámica del sistema sobre la superficie de sección, la cual se construye con las intersecciones de las trayectorias en el espacio fase con una superficie adecuada. Las intersecciones generan un mapeo del espacio fase restringido en él mismo, conocido como mapeo de Poincaré, que contiene toda la información sobre la dinámica del sistema completo. En general, para sistemas con tres o más grados de libertad el mapeo de Poincaré debe construirse numéricamente a partir de la integración de las ecuaciones de movimiento. La manera de hacerlo es elegir la superficie de intersección cuando alguna de las variables dinámicas alcance un valor determinado. Por ejemplo, en el desarrollo de esta tesis hemos elegido la superficie particular $\varphi = 0 \bmod 2\pi$, pero bien pudo haberse elegido la superficie $p = 0$ ó $\varphi = 0 \bmod \pi/2$. La razón por la que se eligió la superficie usada se discute en el capítulo 1. Lo importante es que es necesario

integrar las ecuaciones de movimiento hasta que la variable ángulo φ alcance el valor de 2π . En ese momento, registramos el punto de la trayectoria de tal manera que el valor de su variable ángulo es 2π . Evidentemente con una integración numérica, la variable (cualquiera) nunca tendrá exactamente el valor deseado. Es claro que siempre es posible registrar el punto sobre la trayectoria (obtenido de la integración numérica) cuyo valor del ángulo es menor que el valor deseado, y el punto sobre la trayectoria cuyo valor del ángulo es mayor que el deseado. Llamaremos a estos puntos de la trayectoria $x_a = (q_a, p_a, \varphi_a, I_a)$ y $x_d = (q_d, p_d, \varphi_d, I_d)$ respectivamente, los cuales satisfacen $\varphi_a < 2\pi < \varphi_d$.

Dado que en general no es posible obtener el punto de la trayectoria que intersecta la superficie en cuestión, es necesario realizar un cálculo adicional para obtener el punto sobre la superficie conociendo los puntos antes y después de ella. Es decir, es necesario llevar a cabo una interpolación para calcular el punto de interés. La primera idea para obtener este punto es haciendo un refinamiento del intervalo entre el punto después de la superficie y el punto antes, y llevando a cabo la integración numérica en pasos cada vez más pequeños para aproximar el punto deseado. Lo anterior es común y adecuado pero aumenta demasiado el tiempo de cálculo y los resultados no son mejores. La manera más útil de realizarlo es reconociendo que los valores de la variable ángulo para los puntos antes y después de la intersección difieren entre ellos por una cantidad suficientemente pequeña (debido a la precisión numérica de la computadora y al tamaño de los pasos de integración) y podemos llevar a cabo una interpolación lineal entre los puntos antes y después para encontrar el punto de intersección.

La figura A.1 muestra de manera esquemática este argumento. Aun cuando no tengamos conocimiento exacto de la forma de la trayectoria entre los dos puntos que conocemos de ella, sabemos que por la continuidad de las soluciones, debe de existir el punto de intersección, que en nuestro caso, es el punto cuyo valor en la variable ángulo es de 2π . Es decir, para ir del punto x_a al punto x_b de la trayectoria, es necesario pasar por el punto x_s donde el subíndice s se refiere al punto sobre la superficie de sección. Si la diferencia entre los valores de las variables del punto antes y el punto después son suficientemente pequeñas, la diferencia entre el punto exacto de la trayectoria que intersecta la superficie y el punto que se aproxima por medio de la interpolación es suficientemente pequeña y podemos tomarlo como el punto de la intersección. La validez de una interpolación lineal de este tipo (en nuestro trabajo) la garantizan las ecuaciones de movimiento: Un punto x_s sobre la

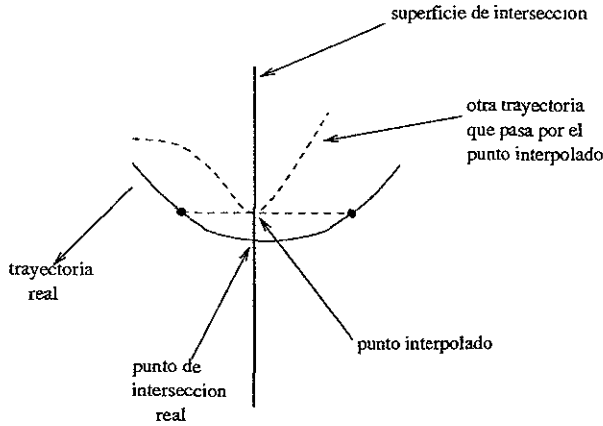


Figura A.1: Construcción esquemática de la superficie de Poincaré

superficie de Poincaré obedece las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \dot{q}_s &= p = p_s \\ \dot{p}_s &= 0 \\ \dot{\varphi}_s &= 2\pi - BI = 2\pi - BI_s \\ \dot{I}_s &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se obtienen poniendo el valor $\varphi = 2\pi$ en el sistema 1.3 y son válidas para la dinámica local de un punto sobre la superficie de sección. Entonces la interpolación lineal es válida si garantizamos que numéricamente la diferencia entre los valores de las variables de los puntos antes y después de la superficie son suficientemente pequeñas. De esta forma es como se contruye la superficie de sección y cada punto obtenido de la interpolación es un punto del mapeo de Poincaré, cuya imagen y preimagen son también puntos del mapeo sobre la misma superficie y que se obtienen de manera similar.

Es importante subrayar varios aspectos sobre la construcción del mapeo de Poincaré que son importantes. El primero de ellos es que la interpolación numérica introduce errores numéricos a los que se les debe prestar especial atención. La presencia del error que se comete es clara debido a que, como se observa en la figura A.1, la trayectoria original puede intersectar la superficie de sección en un punto diferente al que calculamos. Nótese que como el punto calculado no necesariamente pertenece a la trayectoria, la diferencia

entre el punto real y el punto interpolado es una medida del error que se está cometiendo cuando se contruye la superficie de intersección. Es posible y útil tener una estimación de este error cometido al construir el punto del mapeo. La manera de hacerlo es aprovechando que la energía se conserva. Sabemos que el punto antes y el punto después son tales que la energía total del sistema es la misma. Es claro que por continuidad el punto real de la trayectoria que intersecta a la sección de Poincaré también debe ser tal que la energía total se conserve. Entonces, calculemos la energía con el punto que hemos interpolado. Debido a que este punto de intersección difiere del punto real de la trayectoria, el valor de la energía en general no será el mismo que el valor original. Las fluctuaciones alrededor del valor original de la energía de los puntos del mapeo obtenidos por medio de la interpolación nos proporcionan una estimación del error que se ha cometido al construir la superficie de sección y el mapeo de Poincaré, independiente de la estimación del tiempo en el que el error se incrementa que discutimos previamente. Si las fluctuaciones de la energía son despreciables, y los errores provenientes de la integración de las ecuaciones que hemos discutido son pequeños, podemos tomar al punto interpolado como el punto del mapeo y hemos construido satisfactoriamente la superficie de sección.

La figura A.2 muestra las fluctuaciones de la energía en los puntos de intersección sobre la superficie de sección para la trayectoria del ejemplo discutido al inicio. Podemos observar que las fluctuaciones de la energía son del orden de 10^{-3} .

El segundo aspecto importante sobre la construcción del mapeo se refiere a la propagación del error que se comete cuando se obtiene el punto de intersección. Es importante asegurar que cada interpolación del punto sobre la superficie de sección sea independiente de la interpolación anterior. Es decir, una vez construido el punto del mapeo, es necesario continuar la integración de la trayectoria sobre ella misma. Reconocemos que el punto del mapeo difiere del punto real, entonces no es exactamente un punto de la trayectoria. Si tomamos como nueva condición inicial para la integración de la trayectoria al punto que hemos interpolado, debido a la alta sensibilidad del sistema a pequeños cambios en las condiciones iniciales, estaremos integrando una trayectoria diferente y cuando ésta nueva trayectoria vuelva a intersectar la superficie de sección (es decir cuando calculemos la imagen del punto), el error numérico se habrá propagado. Luego de algunas imágenes del primer punto bajo el mapeo, la diferencia entre la intersección de la trayectoria real y el punto interpolado (ver la figura A.1) aumentará de manera considerable

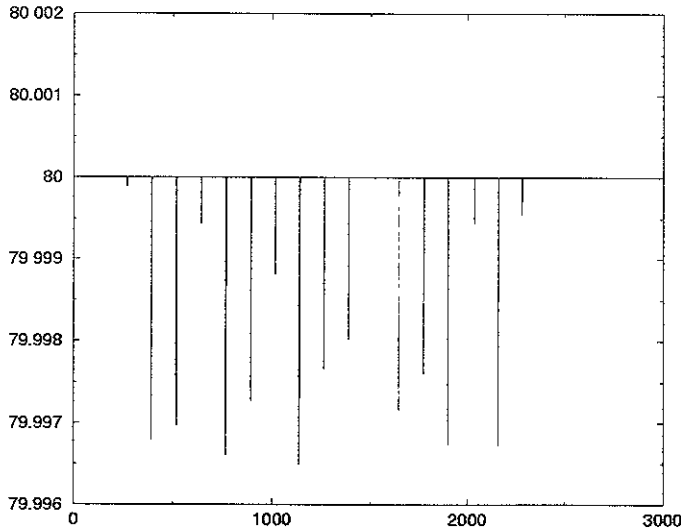


Figura A.2: Fluctuaciones de la energía sobre la superficie de sección.

puesto que desde el principio no seguimos integrando la trayectoria original. Es importante tener cuidado con este detalle puesto que entonces los resultados son completamente erróneos. En este sentido es que indicamos que las interpolaciones sucesivas deben ser independientes una de otra. Es necesario tomar como condición inicial exactamente el último punto de la trayectoria, es decir, continuar la integración sobre la trayectoria. De esta manera, el error no se propaga puesto que en la siguiente intersección con la superficie, la diferencia entre el punto obtenido de la interpolación con el punto real es suficientemente pequeña y no se suma al error cometido en la intersección anterior.

Si tomamos la precaución anterior, podemos asegurarnos que, incluso cuando tenemos errores numéricos, éstos son suficientemente pequeños y los resultados no se modifican por su presencia, es decir, el mapeo de Poincaré que hemos construido es correcto.

Es interesante considerar la situación en la que se continua la integración de las ecuaciones de movimiento a partir del punto sobre la superficie de sección, es decir, tomando como condición inicial el punto interpolado. Como hemos hecho ver, este punto corresponde a una trayectoria diferente, de modo que si la integración se realiza a partir de este punto, estaremos obteniendo una trayectoria distinta a la que inicialmente estábamos siguiendo. También

hicimos ver que al obtener la imagen de este punto, es decir, al volver a intersectar la superficie con esta trayectoria, el error numérico aumenta y por lo tanto, el valor de la energía sobre la superficie de sección no es igual al valor original después de algunas intersecciones. Esto significa que la trayectoria está cambiando de una superficie de energía constante a otra, y los resultados no son correctos, puesto que la trayectoria original está sobre una superficie de energía constante diferente. Por lo tanto los resultados serán incorrectos.

Finalmente, cuando los valores de los parámetros físicos del sistema son tales que el parámetro de desarrollo de la herradura correspondiente tiene un valor $r/2^n$, las intersecciones de niveles bajos tienen una propiedad llamada *estabilidad estructural*, lo cual quiere decir que ante pequeñas perturbaciones del sistema, la topología de la estructura no cambia. En este trabajo nos hemos enfocado a extraer el parámetro de desarrollo de la herradura a partir de las mediciones asintóticas. Este parámetro puede conocerse sin tener que observar todas las intersecciones en el desarrollo de la herradura, basta conocer los niveles bajos de intersecciones. En estos primeros niveles de intersecciones de las variedades, las estructuras todavía no presentan tangencias homoclínicas y son estructuralmente estables.

De este modo, si aproximamos las variedades por franjas cuya anchura está determinada por una estimación del error numérico que se tiene al construirlas, el patrón de intersecciones permanece igual para franjas suficientemente delgadas, al menos a niveles bajos de intersecciones. Por esta razón, si el error es suficientemente pequeño, queda garantizada la estabilidad estructural de las intersecciones homoclínicas.

Una vez que hemos dado los argumentos para determinar que los errores numéricos naturales que existen cuando se llevan a cabo estudios de este tipo no alteran los resultados, estamos en la posición de dar validez a las estructuras obtenidas con las intersecciones de las trayectorias en la superficie de Poincaré elegida. Estas estructuras son las variedades invariantes del punto fijo exterior que tienen la forma de herradura de Smale. Asimismo, podemos asegurarnos que las funciones de dispersión serán correctas para un conjunto de condiciones iniciales cuyos tiempos de demora son menores que el tiempo τ discutido previamente. De esta forma, reconociendo la existencia de errores en los cálculos, vemos que si llevamos a cabo las construcciones numéricas de manera cuidadosa, podemos tener la certeza que son mínimos y obtener resultados correctos y consistentes.

Bibliografía

- [1] Jung C., Lipp C. and Seligman T.H., The inverse scattering problem for chaotic Hamiltonian systems, *Ann. of Phys.* 275 (1999), 151.
- [2] Lipp C., Jung C., From scattering singularities to the partition of a horseshoe, *CHAOS* 9 (1999) 706
- [3] Smale S., Differentiable Dynamical Systems, *Bull. Am. Math. Soc.* 73 (1967) 747
- [4] Jung C., Mejía-Monasterio C. and Seligman T.H., Quantum and classical echoes in scattering systems described by simple Smale horseshoes, nlin.CD/0101025
- [5] Guckenheimer et. al., Nonlinear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of vector field Springer Verlag, 1983.
- [6] B. Ruckerl and C. Jung, Scaling properties of a scattering system with an incomplete horseshoe, *J. Phys. A* 27 (1994), 55.
- [7] B. Ruckerl and C. Jung, Hierarchical structure in the chaotic scattering off a magnetic dipole, *J. Phys. A* 27 (1994), 6741.
- [8] Jose, J.V. et. al., Classical Dynamics : A contemporary approach, New York: Cambridge University, 1998.
- [9] Ozorio de Almeida, Hamiltonian systems, Chaos and Quantization, Cambridge University Press, 1992.
- [10] Goldstein H., Classical Mechanics, 2a. ed., Addison-Wesley, 1980.

- [11] Lichtenberg A. J. and Lieberman M.A., Regular and Chaotic Dynamics, 2a. ed., Springer Verlag, 1992.
- [12] Tabor M., Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics, John Wiley & Sons, 1989.
- [13] *CHAOS* 3 (4), 1993. (Número especial de la revista *CHAOS* dedicado al problema inverso de dispersión)
- [14] Numerical Recipes, William H. Press (Editor), 2a. ed. Cambridge University Press, 1992.