UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONJUNTOS ACICLICOS EN TORNEOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

MUCUY-KAK DEL CARMEN GUEVARA AGUIRRE

FACULTAD CE CIENCIAS
U.N.A.M.

DIRECTOR DE TESIS: MAT. VICTOR MANUEL NEUMANN LARA

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Conjuntos Acíclicos en Torneos

realizado por Mucuy-kak del Carmen Guevara Aguirre

con nùmero de cuenta 9561034-0 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Mat. Víctor Manuel Neumann Lara	Neumann
Propietario	Dra. Hortensia Galeana Sanchez	H. Galeana
Propietario	Dr. Francisco Larrión Riveroll	F. Larrión
Suplente	Dr. Juan José Montellano Ballesteros	J. Montellano B.
Suplente	M. en C. Mika Olsen	Mika Olsen

Consejo Departamental de Matemáticas

Héctor Méndez L.
Dr. Hector Mendez Lango

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Índice General

Agradecimientos

Aunque no lo parezca, estas primeras páginas de la tesis han sido las más díficiles de escribir (y eso que toda la tesis fue díficil de escribir) y es que siempre me ha costado mucho esfuerzo el expresar lo que siento y pienso, más cuando son tantas las ideas que tengo en la mente, pero no quiero desaprovechar esta ocasión para decirle a tanta gente, la cual siempre ha estado a mi lado apoyándome, ***GRACIAS***...

... a mi mamá por ser mi madre, mi amiga y mi apoyo en todo momento, pero sobre todo por haber decidido darme la vida, amarme y respetarme no sólo como su hija, sino también como persona.

... a mi hermano y hermana favoritos por darme los ánimos que necesito en todo momento y por amarme tanto a pesar de como soy.

... a mi abuela y mi abuelo por amarme, cuidarme y apoyarme, aunque muchas veces no comprendan lo que hago.

... a mi novio por estar siempre ahí cuidándome, ayudándome, animándome, regañándome, aguantándome y amándome. Gracias, yo también te amo.

... a mis maestros de toda la vida, muy especialmente a mis maestros de matemáticas, que me transmitieron toda su pasión hacia ella. Entre ellos, claro está, se encuentra mi director de tesis, a quien le quiero agradecer por todo lo que me enseño y por la paciencia que me tuvo durante todo este tiempo. Y aunque no todos han sido mis maestros, también quiero agradecer a todo el grupo de combinatoria, entre ellos mis sinodales, pues han logrado que me mantenga firme en esto de la combinatoria y de los cuales he recibido mucho apoyo en todos los sentidos, en especial de Mika Olsen, Gabriela Araujo e Isidoro Gitler, gracias por su porras.

... a mis amigos de todos los tiempos por hacerme más ligero el camino. Y muy especialmente a los que me ayudaron a que ésta tesis se viera así como la ven ahora: Edgar Díaz, Benjamin Gutierrez, Ricardo Strausz y Miguel Angel Pizaña, sin éste último, muy posiblemente, todas las vecindades en los torneos circulantes de ésta tesis no serían tales.

... a dos *seres* muy especiales, a los cuales les debo todo lo que soy y tengo y que no es necesario nombrar, pues saben que son ellos desde antes que escribiera éstas lineas.

Todavía hay mucha gente que de una u otra forma ha contribuido para que haya logrado todo esto, mucha gente que, como dije antes, me apoya para que yo alcance mis sueños y espero tener la oportunidad de agradecérselo muy pronto.

Mucuy-kak.

Introducción

Un torneo transitivo es aquel en el cual se tiene que si las flechas xy y yz están, también lo está la flecha xz, estos torneos tienen la característica de no contener ciclos dirigidos.

Si queremos colorear una digráfica con el menor número posible de colores, de tal manera que no tengamos ciclos dirigidos monocromáticos, pues lo más natural es colorear a la subdigráfica inducida más grande que no contenga ningún ciclo dirigido de un solo color y en el resto intentar lo mismo. En el caso de los torneos, lo que primeramente se colorearía de un solo color es el subtorneo inducido de mayor orden posible tal que sea transitivo. Así que es útil asegurar en que torneos se puede encontrar un torneo transitivo de orden n.

Ésta es una de las principales motivaciones para el estudio de las estructuras de los torneos que contienen *conjuntos acíclicos* de un cierto orden, así como los torneos que no los contienen, aunque no la única.

Una propiedad importante que tienen ciertos torneos T consiste en que siempre que se tengan dos copias T' y T'', isomorfas a T, cuya intersección sea suficientemente grande, existe un isomorfismo de T' a T'' cuya restricción a la intersección es la identidad. Esta propiedad ha mostrado ser muy útil en el estudio de la estructura de los subconjuntos acíclicos en los torneos pequeños. En este trabajo se prueba que los torneos ST_7, ST_{11} y ST_{13} poseen propiedades de ese tipo. Para probar esto es necesario hacer un análisis detallado de los residuos de subtorneos pequeños de ST_7, ST_{11} y ST_{13}.

En la primera parte de este trabajo, capítulos 1 y 2, se dan todas las definiciones y resultados importantes que se usarán a lo largo de la tesis. En la segunda parte se determina el grupo de automorfismos de cada uno de los torneos ST_7, ST_{11} y ST_{13} (capítulo 3) para encontrar así sistemas de representantes de las órbitas de subtorneos de orden a lo más 4 (capítulo 4). Y por último se realiza todo el ánalisis necesario para probar la propiedad arriba mencionada (capítulo 5), así como también se presentan algunas aplicaciones de ésta (capítulo 6). Al final, en un pequeño apéndice, se muestra unas tablas con la semivecindades de cada vértice en los torneos ST_7, ST_{11} y ST_{13}, así como también una lista de todas las órbitas de los subtorneos de orden 3 y 4 en ST_7, ST_{11} y ST_{13} obtenida de un programa de torneos circulantes, para que así el lector pueda ir verificando los resultados, si es que así lo desea.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos los conocimientos necesarios para nuestro trabajo, se darán algunas definiciones básicas y también se darán algunos resultados que se utilizarán frecuentemente en el transcurso del trabajo.

1.1 Definiciones

Definición. Una ***gráfica*** G consiste de un conjunto $V(G)$ finito y no vacío de objetos llamados ***vértices*** y un conjunto $A(G)$ (posiblemente vacío) de parejas de elementos de $V(G)$ llamadas ***aristas***. El conjunto $V(G)$ es llamado el conjunto de vértices de G y $A(G)$ es el conjunto de aristas. Representaremos a las aristas por (u, v) (ó (v, u)). Si $e = (u, v)$ es una arista de la gráfica G , entonces decimos que u y v son ***adyacentes*** en G , y que e une a u y v.

Definición. Al número de vértices en una gráfica G se le llama ***orden*** de la gráfica y al número de aristas, su ***tamaño***. Esto es, el orden de G es $|V(G)|$, y su tamaño es $|A(G)|$. En general, para una gráfica G se usa p para denotar su orden, y q para su tamaño.

Definición. Una gráfica de orden p en la cual cada dos vértices son adyacentes se denomina una ***gráfica completa*** y se denota por K_p.

Definición. La ***vecindad*** de un vértice u en la gráfica G es el conjunto $N(u, G)$ que consiste de todos los vértices v, que son adyacentes a u, esto es

$$N(u, G) = \{v \in V(G) | (u, v) \in A(G)\} ;$$

y su ***grado*** ó ***valencia***, que denotaremos como $d(u)$, es el número de vértices adyacentes a u, es decir, $d(u) = |N(u, G)|$. A la valencia mínima en la gráfica G, la denotamos como $\delta(G)$ y la valencia máxima como $\Delta(G)$.

Definición. Una ***digráfica*** D consta de un conjunto $V(D)$ finito y no vacío de vértices y un conjunto $A(D)$ (posiblemente vacío) de pares ordenados de vértices distintos. Los elementos de $A(D)$ son llamados ***arcos*** ó ***flechas*** y se denota por uv ó (u, v).

Definición. Para un vértice x en la digráfica D, definimos la ***exvecindad*** (resp. la ***invecindad*** de x) como $N^+(x, D) = \{y \in V(D) | (x, y) \in A(D)\}$ (resp. $N^-(x, D) = \{y \in V(D) | (y, x) \in A(D)\}$), y llamaremos a $d^+(x) = |N^+(x, D)|$ y a $d^-(x) = |N^-(x, D)|$. Así también podemos denotar a la invalencia máxima y mínima como Δ^- y δ^- y a la exvalencia máxima y mínima como Δ^+ y δ^-, respectivamente.

Definición. Un ***torneo*** T es una digráfica en la que para cada dos vértices distintos u y v, exactamente uno de los pares (u, v) ó (v, u) es una flecha de T.

Definición. Una gráfica H es una ***subgráfica*** de una gráfica G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Definición. Para cualquier conjunto S de vértices de G, la***subgráfica inducida por*** S es la subgráfica máximal con S como conjunto de vértices.

De manera ánaloga podemos definir ***subdigráficas inducidas*** y ***torneos inducidos***. Para éstos últimos denotaremos como $T[S]$ al subtorneo inducido por S.

Definición. Un torneo T es ***transitivo*** si cada vez que (u, v) y (v, w) son flechas de T, entonces también (u, w) es flecha de T. TT_n denota el torneo transitivo de orden n.

Es fácil ver que TT_n es transitivo si y solo si TT_n es acíclico.

Definición. La ***fuente*** de un torneo T es el vértice que tiene invalencia 0 y el ***pozo***, el vértice que tiene exvalencia 0.

Definición. Sea $\mathbb{Z}_{2n+1}$ el anillo de enteros módulo $2n+1$ y $\mathfrak{J}$ un subconjunto de $\mathbb{Z}_{2n+1}-\{0\}$, tal que $|\mathfrak{J}\cap\{j,-j\}|=1$ para toda $j \in \mathfrak{J}$. El torneo $\overrightarrow{C}_{2n+1}(J)$ tiene como conjunto de vértices a $\mathbb{Z}_{2n+1}$ y como flechas a los pares ordenados (i,k) tales que $k-i \in \mathfrak{J}$. Diremos que un torneo es ***circulante*** si es isomorfo a uno de la forma $\overrightarrow{C}_{2n+1}(J)$.

Llamaremos al número $k-i$ la ***amplitud*** de la flecha (i,k)

Definición. Una gráfica G es ***r-regular***, si cada vértice de G tiene grado r. Una gráfica se le llama ***regular*** si es r-regular para algún entero no negativo r.

Definición. El ***número dicromático*** (D) de una digráfica D es el mínimo número de colores que se necesitan para pintar los vértices de D de tal manera que no se obtengan ciclos dirigidos monocromáticos.

Definición. Un ***grupo*** $(G,*)$ es un conjunto G no vacío con una operación $*$, tal que:

i) $*$ es asociativa

ii) existe un elemento e, tal que $e*a=a*e=a$ para todo $a \in G$

iii) para todo $a \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$$

Definición. Un subconjunto no vacío S de un grupo G es un ***subgrupo*** de G si para todo $s \in S$ tenemos que $s^{-1} \in S$ y si $s,t \in S$ entonces $s*t \in S$.

Definición. Si la congruencia $x^2 \equiv n (mod\, m)$ tiene solución, entonces n es llamado un ***residuo cuadrático módulo m***.

Definición. Si X es un conjunto y G un grupo, entonces X es un ***G-conjunto*** si existe una función $\alpha : G \times X \to X$ llamada ***acción***, dada por $\alpha(g,x) = gx$ tal que:

i) $ex = x$ para todo $x \in X$

ii) $g(hx) = (gh)x$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$

También se dice que G ***actúa*** sobre X.

Definición. Sean $(G, *)$ y $(H, \odot)$ grupos. Una función $f : G \to H$ es un ***homomorfismo*** si para todo $a, b \in G$,

$$f(a * b) = f(a) \odot f(b).$$

Un ***isomorfismo*** es un homomorfismo biyectivo. Si existe un isomorfismo $f : G \to H$, decimos que G es ***isomorfo*** a H y escribimos $G \cong H$.

Definición. Sea D y D' dos digráficas y sea $\phi : D \to D'$. Decimos que ϕ es un ***homomorfismo de digráficas*** si $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \in A(D')$ con $xy \in A(D)$. De manera análoga a la definición anterior, un ***isomorfismo de digráficas*** es un homomorfismo biyectivo.

Definición. Un ***automorfismo*** de D es un homomorfismo de D en si mismo.

Definición. El ***grupo de automorfismos*** de una digráfica D, denotado por $\mathrm{Aut}(D)$, es el conjunto de todos los automorfismos de D, bajo la composición.

Definición. Un ***antiautomorfismo*** en una digráfica D es una función $f : G \to G$, tal que si $(a,b) \in A(D)$, entonces $(f(b), f(a)) \in A(D)$.

Definición. Si X es un G-conjunto y $x \in X$, entonces la ***órbita*** de x con respecto a G es $\{gx | g \in G\}$.

Definición. Un G-conjunto X es ***transitivo*** si tiene una única órbita, esto es, para cada $x, y \in X$ existe $\sigma \in G$ con $y = \sigma x$.

Definición. Sea A un subconjunto de B. Diremos que A es ***invariante*** con respecto a un automorfismo φ de B, si $\varphi(A) = A$, esto es si $\varphi|_A \in \mathbf{Aut}(A)$.

Definición. Una digráfica es ***rígida*** si su grupo de automorfismos es trivial.

Definición. Una subdigráfica D_0 de la digráfica D ***está ligada en*** D si todo automorfismo de D_0 puede extenderse a un automorfismo de D, es decir, para todo $\varphi_0 \in \mathbf{Aut}(D_0)$, existe $\varphi \in \mathbf{Aut}(D)$ tal que $\varphi|_{D_0} = \varphi_0$.

1.2 Algunos hechos básicos

A continuación presento algunas observaciones, lemas y notaciones que se estarán utilizando frecuentemente. Por lo que aconsejo al lector familiarizarse con ello.

Lema 1.1. Sea A un conjunto finito. Si $f : A \to A$ es inqyectiva (resp. suprayectiva), entonces f es biyectiva.

Sólo hay dos torneos de orden 3, salvo isomorfismos, que son el triángulo acíclico, TT_3, y el triángulo cíclico, $\overrightarrow{C}_3$, (fig. 1.1).

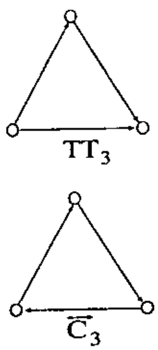

Figura 1.1. Torneos de orden 3, salvo isomorfismos.

Los torneos de orden 4, (salvo isomorfismo), son el torneo acíclico y otros 3 más, que denotaremos como los torneos T_4^1, T_4^2, T_4^3, fig 1.2.

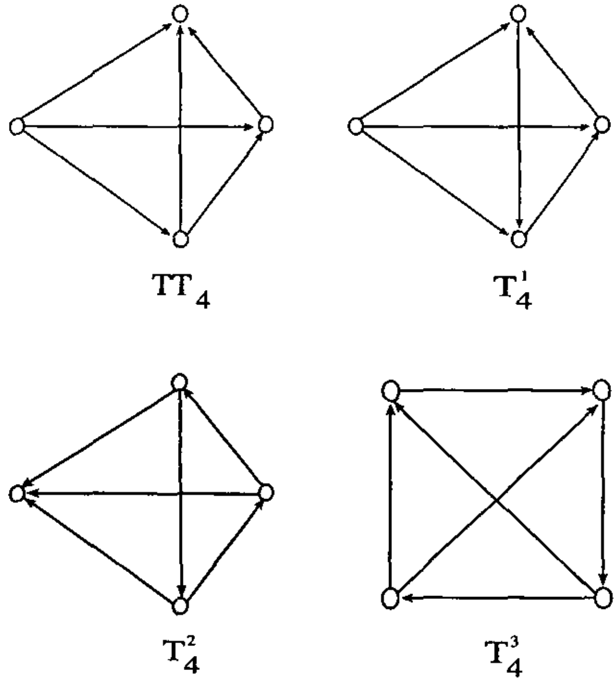

Figura 1.2. Torneos de orden 4, salvo isomorfismos.

Observación 1.2. En el torneo T_4^3 tenemos que hay 2 vértices con invalencia 2 y exvalencia 1 y 2 vértices con exvalencia 2 e invalencia 1, así que, como subtorneos inducidos, permanecen invariantes pero estos subtorneos son isomorfos a K_2, el cual es rígido, por lo que cada vértice en T_4^3 permanece fijo bajo cualquier automorfismo. Por lo tanto T_4^3 es rígido.

Observación 1.3. Sean D y D' dos digráficas isomorfas y sea $\varphi : D \to$

Capítulo 2

Los torneos especiales ST_7, ST_{11} y ST_{13}

En este capítulo se presentan algunos teoremas generales sobre la existencia de conjuntos acíclicos en torneos y se dan algunos resultados relevantes sobre torneos particularmente importantes en el trabajo, a saber: ST_7, ST_{11} y ST_{13}.

Teorema 2.1. Sea k un entero positivo, entonces todo $T_{2^{k-1}}$ contiene un TT_k.

Demostración. La haremos por inducción sobre k. Claramente la afirmación se cumple para $k = 1, 2$.

Supongamos que se cumple para $k < k'$. Sea $T = T_{2^{k'}}$ y $u \in V(T)$; u tiene alguna semivecindad S de cardinalidad al menos $(2^{k'} - 1)/2 > 2^{k'-1} - 1$ y, por lo tanto, $|S| \geq 2^{k'-1}$. $T[S]$ contiene, por hipótesis de inducción, un subtorneo $T[S_0] \cong TT_{k'}$, se sigue que $S_0 \cup \{u\}$ induce un $TT_{k'+1}$. $\square$

Por lo tanto todo T_8 contiene a TT_4, pero no todo T_7 contiene a TT_4 como a continuación lo demostraremos.

Proposición 2.2. *El torneo circulante* $\overrightarrow{C}_7(1,2,4)$*, que denotaremos por* ST_7*, es el único torneo de orden 7 que no contiene a* TT_4*.*

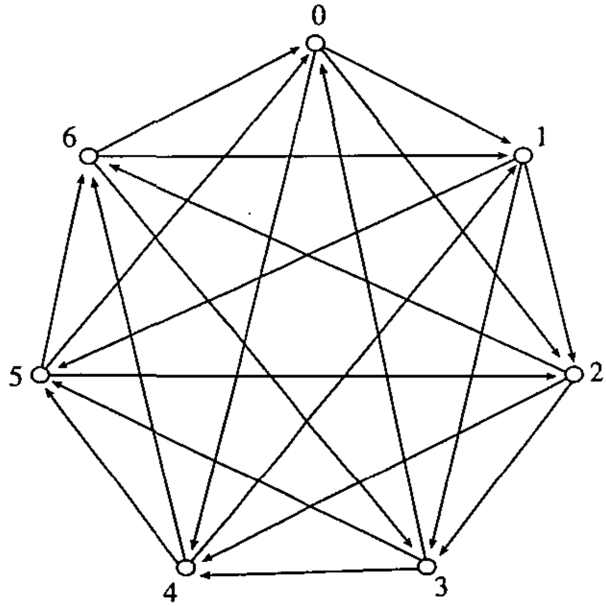

Figura 2.1. ST_7

Demostración. Primero probaremos que ST_7 no contiene TT_4's. Supongamos que ST_7 contiene un subtorneo $T_4 \cong TT_4$, ya que ST_7 es un torneo circulante, se puede ver que ST_7 es transitivo en vértices, podemos suponer que el vértice 0 es fuente de T_4 así que la exvecindad de 0 induce un triángulo acíclico, lo cual es una contradicción, pues $N^+(0, ST_7) = \{1,2,4\} \cong \overrightarrow{C}_3$. Por lo tanto ST_7 no contiene ningún TT_4.

Sea T un torneo de orden sin TT_4, ya que todo torneo de orden 4 contiene

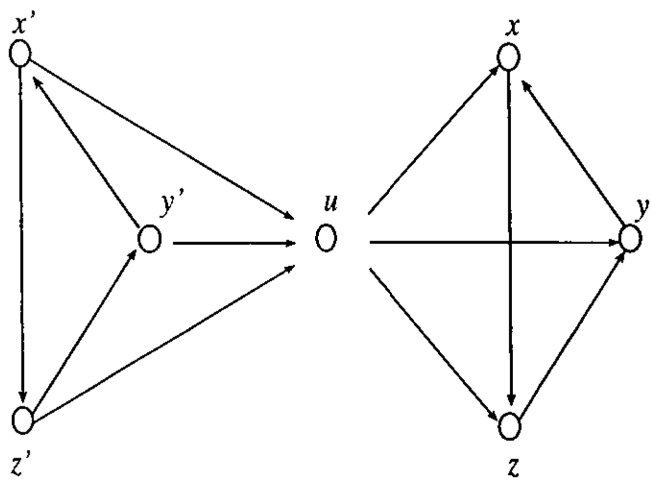

Figura 2.2.

un TT_3, entonces cada vértice en T debe tener sus semivecindades de orden 3.

Sea $S_u{}^+ = \{x, y, z\}$ y $S_u{}^- = \{x', y', z'\}$ la exvecindad e invecindad de u, respectivamente, entonces $T[S_u{}^+]$ y $T[S_u{}^-]$ inducen un triángulo cíclico, (fig. ??). Sean (x, z, y) y (x', y', z') las trayectorias de longitud 2 en $T[S_u{}^+]$ y $T[S_u{}^-]$, respectivamente. Sea $x \in S_u{}^+$ y $x' \in S_u{}^- \cap S_x{}^-$ entonces $y', z' \in S_x{}^+$, por regularidad. Además $y' \notin S_z{}^-$ pues si no, $z' \in S_y{}^-$ y $\{y', z', z, x\}$ inducirían un TT_4, (fig. 2.3), por lo tanto $y' \in S_y{}^-$ y $z' \in S_z{}^-$, por lo que $\{y', z'\} \subset S_x{}^+$, $\{x', z'\} \subset S_y{}^+$, $\{x', y'\} \subset S_z{}^+$.

Además este torneo es isomorfo a ST_7 con el siguiente isomorfismo:

$$f(u) = 0, f(x) = 1, f(y) = 2, f(z) = 4, f(x') = 6, f(y') = 5, f(z') = 3$$

por lo tanto ST_7 es el único.

□

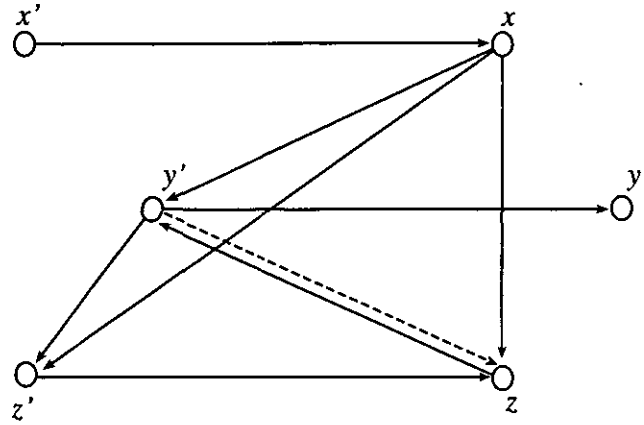

Figura 2.3.

De hecho, existe también un solo torneo de orden 6 que no contiene TT_4, el ST_6, que es el torneo que resulta al quitarle un vértice a ST_7.

También por el teorema 2.1, sabemos que todo T_{16} contiene un TT_5, pero podemos asegurar que:

Proposición 2.3. *Todo T_{14} contiene un TT_5.*

Para demostrar esta proposición primero demostraremos el siguiente lema,

Lema 2.4. Si T_{11} contiene un vértice u tal que $N^-(u, T_{11})$ induce un TT_3, entonces T_{11} contiene un TT_5

Antes de empezar con la prueba del lema 2.4, daremos algunas definiciones y resultados importantes.

Sea D una digráfica y $S \subseteq V(D)$. Definimos la relación de equivalencia $\equiv (S)$ en $V(D) - S$ como sigue: $u \equiv w(S)$ si y solo si $N^+(u, D) \cap S = N^+(w, D) \cap S$ y $N^-(u, D) \cap S = N^-(w, D) \cap S$.

Observación 2.5. Es fácil ver que si $K \subseteq V(ST_7)$ induce un triángulo cíclico en ST_7, entonces existe un único vértice $z \in V(ST_7)$, tal que K es una de la semivecindades de z en ST_7.

Lema 2.6. Supóngase que $T_7 \cong ST_7$. Si $T_7 \cap ST_7 = ST_7 - \{0,1\}$ y $\xi_0\xi_1 \in A(T_7)$ donde ξ_0 y ξ_1 son los vértices de T_7 que no están en ST_7, entonces $\xi_0 \equiv 0$ y $\xi_1 \equiv 1(V(ST_7) - \{0,1\})$.

Demostración. Claramente $\xi_0 2, \xi_1 2, 6\xi_0, 6\xi_1 \in A(T_7)$. Ya que $N^-(2,T_7)$ y $N^+(6,T_7)$ inducen triángulos cíclicos, se sigue que $5\xi_0, \xi_1 5, 3\xi_0, \xi_1 3 \in A(T_{11})$ y entonces $\xi_0 4, 4\xi_1 \in A(T_7)$. □

Daremos ahora la prueba del lema 2.4.

Demostración. Supóngase que $T = T_{11}$ no contiene ningún TT_5 y sea $R = N^+(u,T)$. Obviamente $\delta^+(T) \geq 3$ y $T[R] \cong ST_7$. Sea (u_1,u_2,u_3) la trayectoria de longitud 2 en $T[N^-(u,T)]$ y definimos $R_j = N^+(u_j,T) \cap R$. Tenemos que $|R_j| \leq 3$ para $j = 1,2,3$ de lo contrario, $T[R_j]$ contendría un TT_3 el cual junto con u y u_j induciría un TT_5. Probaremos que $|R_3| = 3$.

Ya que $d^+(u_3,T) \geq 3$, pues si no, en $T[N^-(u_3,T)]$ tendríamos un TT_4 que junto con u_3 induciría un TT_5, entonces $2 \leq |R_3| \leq 3$. Supongamos que $R_3 = \{z_1,z_2\}$ con $z_1 z_2 \in A(T)$; entonces $N^-(u_3,T) = (R \cup \{u_1,u_2\}) - \{z_1,z_2\}$ induce un subtorneo isomorfo a ST_7, de lo contrario contendría un TT_4, que junto con u_3 induciría un TT_5. Por el lema 2.6, $u_j \equiv z_j(R - \{z_1,z_2\})$ para $j = 1,2$, (fig. 2.4).

Como en ST_7 cada vértice tiene semivecindades que inducen triángulos cíclicos, tenemos que hay 3 exvecinos de u_2 en $R - \{z_1,z_2\}$ y por lo tanto z_1 y z_2 son invecinos de u_2, pues si no fuera así el subtorneo inducido por $\{u_2,u,a,b,z_1,z_2\}$ con $a,b \in N^+(u_2, R - \{z_1,z_2\})$ contendría un TT_5.

Sea $\xi \in R$ un vértice tal que $z_j\xi \in A(T)$ para $j = 1,2$, pero como $u_j \equiv z_j(R - \{z_1,z_2\})$ entonces $u_j\xi \in A(T)$ para $j = 1,2$. Tenemos que $u_1 z_1, z_2 u_1 \in$

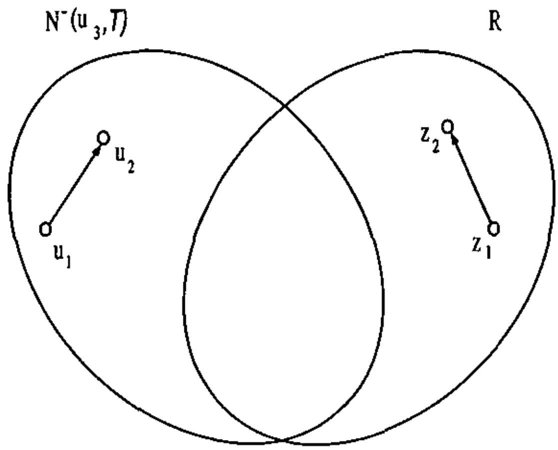

Figura 2.4.

$A(T)$, si no, $\{u_1, u_2, z_1, z_2, \xi\}$ induciría un TT_5. Sea $\eta_j \in N^-(z_1, T[R])$ para $j = 1,2$. Claramente $\eta_j u_1 \in A(T)$ con $j = 1,2$ y $\{\eta_1, \eta_2, u_1, u_3, z_1\}$ induce un TT_5, lo que es imposible, por lo tanto $|R_3| = 3$. Así que $T[N^-(u_3,T)] \cong ST_6$, más aún $T[R_3] \cong \overrightarrow{C}_3$, pues si no fuera así $R_3 \cup \{u, u_3\}$ induciría un TT_5. Por la observación 2.5, R_3 es una semivecindad de algún vértice z en $T[R]$.

Sea T_7 un torneo isomorfo a ST_7 que contiene a $T[N^-(u_3,T)]$ y un nuevo vértice $r \in T$. Como se demostrará posteriormente en la proposición 3.3 y el lema 3.4, ST_7 es transitivo en flechas y la identidad es el único automorfismo de ST_7 que fija cualquier flecha, entonces tenemos que existe un único isomorfismo

$$\Theta : T_7 \to T[R]$$

el cual fija a cualquier flecha que une al vértice z, del cual R_3 es una semivecindad en $T[R]$, con la otra semivecindad $R - (R_3 \cup \{z\})$ que también es una semivecindad en T_7, así que Θ fija todos los vértices en $R - R_3$. Se sigue del lema 2.6 que $u_j \equiv \Theta(u_j)(R - R_3)$ para $j = 1, 2$.

Consideremos dos casos:

Caso 1. $R_3 = N^+(z, T[R])$, entonces $N^+(z, T_7) = \{u_1, u_2, r\}$. Sea

$$\varphi : ST_7 \to T_7$$

el único isomorfismo tal que $\varphi(0) = z$ y $\varphi(1) = u_1$, se sigue que $\varphi(2) = u_2$ y $\varphi(4) = r$. Sea $w_j = \Theta\varphi(j)$ para $j \in \mathbb{Z}_7$. Así que $\Theta(u_j) = w_j$ y por lo tanto $u_j \equiv w_j(R - R_3)$ para $j = 1, 2$. Es más, $z = w_0$ y $\Theta(r) = w_4$ y $N^-(z, T[R]) = \{w_3, w_5, w_6\}$ pues $N^-(0, ST_7) = \{3, 5, 6\}$. Entonces $w_j u_j \in A(T)$ con $j = 1, 2$ de lo contrario $\{u_3, u_j, w_j, w_0, w_{7-j}\}$ induciría un TT_5. Se sigue que $u_2 w_1 \in A(T)$ si no fuera así $\{u_1, u_2, w_1, w_2, w_0\}$ induciría un TT_5. Ya que $u_2 \equiv w_2(R - R_3)$ tenemos que $\{w_1, w_3, w_6\} \subseteq R_2$ y $\{u_1, u_2, w_1, w_3, w_0\}$ induce un TT_5. Por lo que este caso es imposible, (fig. 2.5).

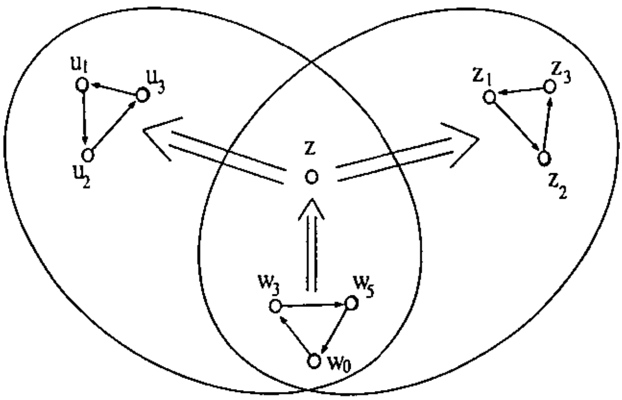

Figura 2.5.

Caso 2. $R_3 = N^-(z, T[R])$, entonces $N^-(z, T_7) = \{u_1, u_2, r\}$. Sea

$$\varphi' : ST_7 \to T_7$$

el único isomorfismo tal que $\varphi'(0) = z$ y $\varphi'(5) = u_1$ se sigue que $\varphi'(6) = u_2$ y $\varphi'(3) = r$. Sea $w_j = \Theta\varphi'(j)$ para $j \in \mathbb{Z}_7$. Así que $\Theta(u_1) = w_5$ y $\Theta(u_2) = w_6$, por lo tanto $u_1 \equiv w_5, u_2 \equiv w_6(R, R_3)$. Además $z = w_0, \Theta(r) = w_3$ y $N^+(z, T[R]) = \{w_1, w_2, w_4\}$. Tenemos que $w_5u_1 \in A(T)$ de lo contrario $\{u, u_1, w_5, w_0, w_2\}$ inducirían un TT_5 y de manera similar, $w_6u_2 \in A(T)$, si no $\{u, u_2, w_6, w_0, w_1\}$ inducirían un TT_5. Ya que $\{u_1, u_2, w_0, w_5, w_0\}$ no es acíclico, $u_2w_5 \in A(T)$ y $R = \{w_0, w_1, w_5\}$. Análogamente tenemos que $\{u_1, u_2, w_0, w_3, w_6\}$ no es acíclico y por lo tanto $u_1w_6 \in A(T)$. Se sigue que $R_1 = \{w_0, w_2, w_6\}$ y por consiguiente $\{u_2, u_3, w_1, w_4, w_5\}$ induce un TT_5.

□

Demostraremos ahora la proposición 2.3

Demostración. Supongamos que $T = T_{14}$ no contiene ningún TT_5. Entonces para todo vértice $u \in V(T)$ sus semivecindades tienen a lo más 7 vértices, podemos asumir que su invecindad tiene 6 vértices. Así que $T[N^+(u,T)] \cong ST_7$ y $T[N^-(u,T)] \cong ST_6$. Sea W un subconjunto de $N^-(u,T)$, tal que $T[N^-(u,T)] - W \cong TT_3$, entonces $T_{11} = T - W$ satisface, claramente, las hipótesis del lema 2.4 y T contiene un TT_5, lo que da una contradicción. □

Sea $v(k)$ el mínimo número tal que todo torneo $T_{v(k)}$ contiene un TT_k, sabemos que $v(k) \leq 2^{k-1}$ pero esta cota no es óptima para $k \geq 5$, como se desprende de la proposición 2.3. De hecho el siguiente teorema nos asegura una mejor cota superior para $v(k)$.

Teorema 2.7. Sean k y m enteros positivos tal que $k \geq 5$ y $m = 7(2^{k-4})$. Entonces cada T_m contiene un TT_k.

Demostración. (Por inducción sobre k).
Para $k = 5$ es la proposición 2.3.
Supongamos que el teorema es cierto para $k < k'$ y sea T un torneo de orden $7(2^{k'-4})$. Cada vértice u de T tiene una semivecindad de orden a lo

menos $7(2^{k'-5})$. Por hipótesis de inducción, $T[S]$ contiene un $TT_{k'-1}$ y por consiguiente T contiene un $TT_{k'}$. □

Sabemos que todo T_{14} contiene un TT_5 y es lo mejor a lo que podemos llegar, pues no todo T_{13} contiene un TT_5, el torneo ST_{13}, el cual es $\overrightarrow{C}_{13}(1,2,3,5,6,9)$, es el único torneo de orden 13 que no contiene TT_5, como veremos a continuación.

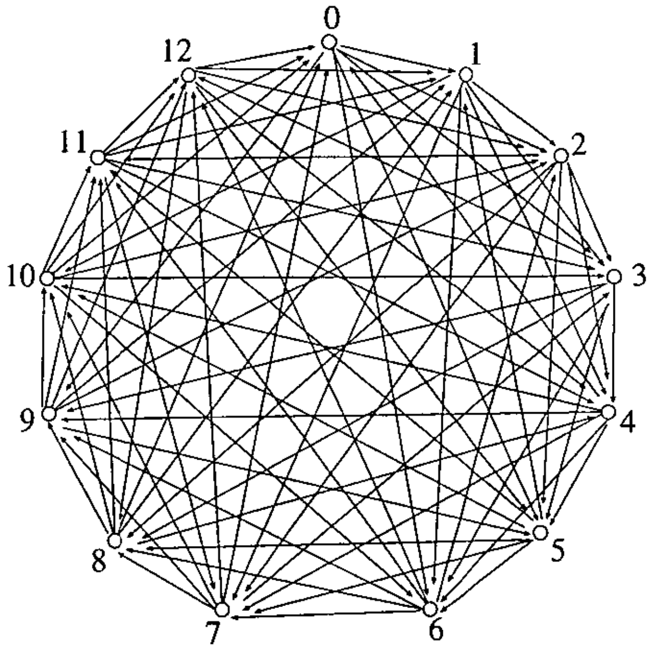

Figura 2.6. ST_{13}

Proposición 2.8. *ST_{13} no contiene ningún TT_5.*

Demostración. Supongamos que ST_{13} contiene un conjunto U de cardinalidad 5 que induce un TT_5. Sea $(u_o, u_1, u_2, u_3, u_4)$ la trayectoria dirigida en $T[U]$. Por la proposición 3.9 que se demostrará en el siguiente capítulo, existe $\varphi \in \mathbf{Aut}(ST_{13})$, tal que, $\varphi(u_o u_1) = 01$ ó $\varphi(u_o u_1) = 02$ y por lo tanto $\varphi(U) = U'$ es un conjunto acíclico, tal que $T[U']$ contiene una trayectoria dirigida de la forma $(0, 1, u_2', u_3', u_4')$ ó de la forma $(0, 2, u_2'', u_3'', u_4'')$ pero como

$$\begin{aligned} N^{++}(\{0,1\}, ST_{13}) = \; & N^{+}(0, ST_{13}) \cap N^{+}(1, ST_{13}) & = \{2,3,6\} \\ N^{++}(\{0,2\}, ST_{13}) = \; & N^{+}(0, ST_{13}) \cap N^{+}(2, ST_{13}) & = \{3,5\} \end{aligned}$$

se obtiene una contradicción. □

Nota. Ésta notación utilizada para la intersección de exvecindades se puede generalizar para la intersección de cualesquiera semivecindades de la siguiente manera:

$$N^{sg(1)\ldots sg(n)}(\{x_1 \ldots x_n\}, T) = N^{sg(1)}(x_1, T) \cap \cdots \cap N^{sg(n)}(x_n, T)$$

donde $sg(i) \in \{+, -\}$.

La demostración de que ST_{13} es único, salvo isomorfismo, se puede encontrar en [8].

Proposición 2.9. *El número dicromático del torneo circulante* $\overrightarrow{C}_{11}(1,3,4,5,9)$, *denotado como* ST_{11}, *es* 4.

Antes de dar prueba de esta proposición, haremos notar lo siguiente,

Observación 2.10. Todo torneo de orden 7 tiene número dicromático a lo más 3. [7]

Demostración. Sea U un conjunto acíclico en ST_{11} de cardinalidad $k \geq 2$. Sea $(u_0, u_1, \ldots u_{k-1})$ trayectoria dirigida en $T[U]$. ST_{11} es transitivo en flechas, como se demostrará en el siguiente capítulo (proposición 3.6), entonces existe un automorfismo que manda a la flecha $u_0 u_1$ a la flecha 01. Ya que $N^{++}(\{0,1\}, ST_{11}) = \{4,5\}$ se concluye que ST_{11} no contiene un TT_5.

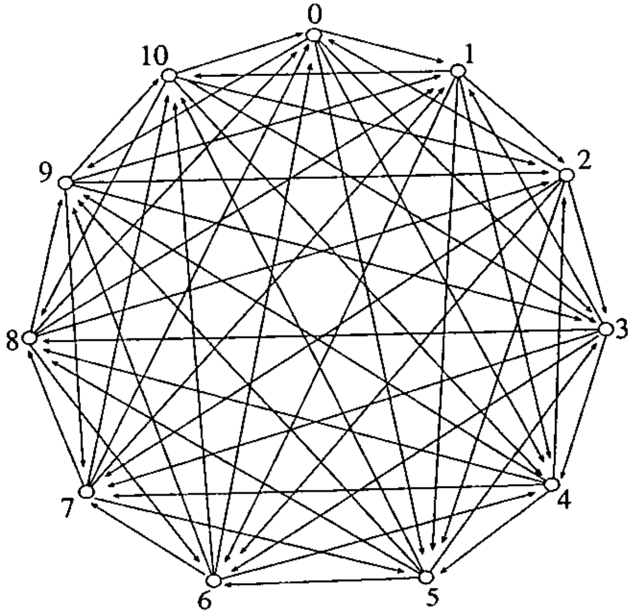

Figura 2.7. ST_{11}

Sea $U_0 = \{0, 1, 4, 5\}$ entonces, por la observación 2.10, $(ST_{11} - \{0, 1, 4, 5\})$ ≤ 3, se sigue que $(ST_{11}) \leq 4$.

Supongamos que $(ST_{11}) < 4$ entonces una 3-coloración acíclica tendría dos clases cromáticas, S_1 y S_2 de cardinalidad 4 y una clase cromática, S_3 de cardinalidad 3. Por lo dicho anteriormente, podemos suponer que S_1 es U_0. Es fácil ver que las únicas posibilidades para S_2 son $\{2, 3, 6, 7\}$, $\{9, 10, 2, 3\}$, $\{6, 9, 7, 10\}$ y $\{9, 2, 3, 7\}$ y entonces S_3 tendría que ser $\{8, 9, 10\}$, $\{6, 7, 8\}$, $\{2, 3, 8\}$ ó $\{6, 8, 10\}$, respectivamente, pero todas estas ternas inducen triángulos cíclicos, lo cual contradice que S_3 es monocromático. □

Otro resultado importante, cuya prueba puede verse en [7], es el siguiente,

Capítulo 3

Automorfismos de ST_7, ST_{11} y ST_{13}

Sea n un número natural y A, un conjunto no vacío contenido en $\mathbb{Z}_n - \{0\}$, cerrado bajo la multiplicación.

Si $a \in A$ y $b \in \mathbb{Z}_n$ definimos

$$\begin{aligned} f_{a,b}: \ \mathbb{Z}_n &\to \ \mathbb{Z}_n \\ x &\mapsto \ ax + b \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{L}_{n,A} = \{f_{a,b} : a \in A, b \in \mathbb{Z}_n\}$$

Teorema 3.1. Sea $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}_n - \{0\}$ y A un subgrupo multiplicativo del grupo de unidades de $\mathbb{Z}_n$, tal que $a * \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$ para toda $a \in A$. Entonces $\mathcal{L}_{n,A}$ es un subgrupo del $\mathbf{Aut}(\overrightarrow{C}_n(\mathcal{J}))$.

Demostración.

1. Sea $f_{a,b} \in \mathcal{L}_{n,A}$, tal que $f_{a,b}(u) = f_{a,b}(v)$, entonces tenemos que $au+b = av + b$ por lo tanto $u = v$, así que $f_{a,b}$ es inyectiva y por el lema 1.1 es biyectiva.

2. Sea $uv \in A(\overrightarrow{C}_n(\mathfrak{J}))$, entonces $v - u \in \mathfrak{J}$, luego $f_{a,b}(v) - f_{a,b}(u) = av + b - (au + b) = a(v - x) \in \mathfrak{J}$. Así que $f_{a,b}(u)f_{a,b}(v) \in A(\overrightarrow{C}_n(\mathfrak{J}))$.

   De 1 y 2 se tiene que $f_{a,b} \in \mathbf{Aut}(\overrightarrow{C}_n(\mathfrak{J}))$.

3. Sea $f_{a,b}$ y $f_{a',b'} \in \mathcal{L}_{n,A}$, tenemos que $f_{a,b} \circ f_{a',b'}(x) = f_{a',b'}(ax + b) = a'(ax + b) + b' = f_{a'a,a'b+b'}$. Por lo tanto $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{a'a,a'b+b'} \in \mathcal{L}_{n,A}$.

□

Corolario 3.2. *Si p es primo y $\mathfrak{J} \subseteq \mathbb{Z}_p - \{0\}$ y A es un subgrupo del grupo multiplicativo de $\mathbb{Z}_p$, tal que, $a * \mathfrak{J} = \mathfrak{J}$ para toda $a \in A$, entonces $\mathcal{L}_{p,A}$ es subgrupo de* $\mathbf{Aut}(\overrightarrow{C}_p(\mathfrak{J}))$.

Ahora vamos a calcular los grupos de automorfismos de los torneos ST_7, ST_{11} y ST_{13}.

3.1 Automorfismos de ST_7

Sea $A_7 = \{1, 2, 4\}$, el conjunto de los residuos cuadráticos de $\mathbb{Z}_7$, entonces tenemos, por el corolario 3.2 que $\mathcal{L}_{7,A_7}$, que denotaremos sólo como $\mathcal{L}_7$, es un subgrupo de $\mathbf{Aut}(ST_7)$.

Proposición 3.3. *$\mathcal{L}_7$ es transitivo en flechas.*

Demostración. Basta ver que cualquier flecha pertenece a la misma órbita de la flecha 01. Sea $u_0u_1 \in A(ST_7)$ y sea

$$\varphi(x) = (u_1 - u_0)x + u_o$$

como $u_1 - u_0 \in \{1, 2, 4\}$ y $u_0 \in \mathbb{Z}_7$, entonces $\varphi \in \mathcal{L}_7$, tal que $\varphi(01) = u_0u_1$, por lo tanto $\mathcal{L}_7$ es transitivo en flechas.

□

Lema 3.4. El único automorfismo que deja fijo cualquier flecha en el ST_7 es la identidad.

Demostración. Por la proposición 3.3, basta probarlo para la flecha 01. Sea $\varphi \in \mathbf{Aut}(ST_7)$, tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$, entonces tenemos que

$$\varphi(\{1,2,4\}) = \varphi(N^+(0, ST_7)) = N^+(0, ST_7) = \{1,2,4\}$$

$$\varphi(\{2,3,5\}) = \varphi(N^+(1, ST_7)) = N^+(1, ST_7) = \{2,3,5\}$$

pero como 1 queda fijo bajo φ y $1 \in N^+(0, ST_7)$, entonces 2 y 4 se quedan fijos. Análogamente, como 2 se queda fijo, 3 y 5 quedan fijos. Por lo tanto $\varphi = Id$.

□

Teorema 3.5. El grupo de automorfismos de ST_7 es $\mathcal{L}_7$.

Demostración. $\mathcal{L}_7$ es subgrupo de $\mathbf{Aut}(ST_7)$, basta probar que $\mathbf{Aut}(ST_7) \subseteq \mathcal{L}_7$. Sea $\varphi \in \mathbf{Aut}(ST_7)$ con $\varphi(01) = ab$, por el lema 3.4, existe $f \in \mathcal{L}_7$, tal que $f(\varphi(01)) = 01$, entonces por el lema anterior $f \circ \varphi = Id$, por lo tanto $\varphi = f^{-1} \in \mathcal{L}_7$. □

3.2 Automorfismos de ST_{11}

Sea $A_{11} = \{1,3,4,5,9\}$, el grupo de los residuos cuadráticos de $\mathbb{Z}_{11}$, entonces denotaremos $\mathcal{L}_{11} = \mathcal{L}_{11,A_{11}}$.

Por el corolario 3.2 tenemos que $\mathcal{L}_{11}$ es un subgrupo de $\mathbf{Aut}(ST_{11})$.

Proposición 3.6. *$\mathcal{L}_{11}$ es transitivo en flechas.*

Demostración. Basta ver que cualquier flecha pertenece a la órbita de la flecha 01. Sea $u_0u_1 \in A(ST_{11})$ y sea

$$\varphi(x) = (u_1 - u_0)x + u_o$$

como $u_1 - u_0 \in \{1,3,4,5,9\}$ y $u_0 \in Z_{11}$, entonces $\varphi \in \mathbf{Aut}(\mathcal{L}_{11})$ y además $\varphi(01) = u_0u_1$, por lo tanto ST_{11} es transitivo en flechas en $\mathcal{L}_{11}$. $\square$

Lema 3.7. El único automorfismo que deja fijo cualquier flecha en el ST_{11} es la identidad.

Demostración. Por la proposición 3.6, basta probarlo para la flecha 01. Sea $\varphi \in \mathbf{Aut}(ST_{11})$, tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$, entonces tenemos que

$$\varphi(N^+(0, ST_{11})) = \varphi(\{1,3,4,5,9\}) = \{1,3,4,5,9\}$$

así que $\{3,4,5,9\}$ es invariante bajo φ, además

$$\varphi(N^+(1, ST_{11})) = \varphi(\{2,4,5,6,10\}) = \{2,4,5,6,10\}$$

por lo que tenemos que $\{3,4,5,9\} \cap \{2,4,5,6,10\} = \{4,5\}$ es invariante, de ahí que 4 y 5 se quedan fijos y, por consiguiente, 3 y 9 también y el conjunto $\{2,6,10\}$ se queda invariante. También tenemos que

$$\varphi(N^+(3, ST_{11})) = \varphi(\{1,4,6,7,8,\}) = \{1,4,6,7,8\}$$

por lo que el conjunto $\{6,7,8\}$ queda invariante bajo φ, entonces 6 queda fijo y, por consiguiente, $2,7,8$ y 10 también, así que $\varphi = Id$. $\square$

Teorema 3.8. El grupo de automorfismo de ST_{11} es $\mathcal{L}_{11}$

Demostración. Sabemos que $\mathcal{L}_{11}$ es subgrupo de $\mathbf{Aut}(ST_{11})$, por lo que basta probar que $\mathbf{Aut}(ST_{11}) \subseteq \mathcal{L}_{11}$.

Sea $\varphi \in \mathbf{Aut}(ST_{11})$, por el lema 3.7, existe $f \in \mathcal{L}_{11}$, tal que $f(\varphi(01) = 01$, entonces por el lema anterior $f \circ \varphi = Id$, por lo tanto $\varphi = f^{-1} \in \mathcal{L}_{11}$. $\square$

3.3 Automorfismos de ST_{13}

Tenemos que $A_{13} = \{1,3,9\}$, un subgrupo del grupo multiplicativo de $\mathbf{Z}_{13}$ y $\mathcal{J} = \{1,2,3,5,6,9\}$ además $\{2,5,6\}$ es una clase lateral módulo $\{1,3,9\}$

en $\mathbb{Z}_{13} - \{0\}$, entonces, por el corolario 3.2, $\mathcal{L}_{13} = \mathcal{L}_{13,A_{13}}$ es subgrupo de $\mathbf{Aut}(ST_{13})$.

Proposición 3.9. *Hay dos órbitas de flechas respecto a* $\mathbf{Aut}(ST_{13})$ *y también respecto a* $\mathcal{L}_{13}$*, representadas por* 01 *y* 02.

Demostración. Obviamente las flechas de una misma amplitud están en un misma órbita respecto a $\mathcal{L}_{13}$. Las flechas de amplitud $1, 3, 9$ pertenecen a una misma órbita y las flechas de amplitud 2,5,6 pertenecen también a una misma órbita respecto a L_{13}. Por consiguiente hay a lo más dos órbitas de flechas en ST_{13} tanto respecto a $\mathcal{L}_{13}$ como a $\mathbf{Aut}(ST_{13})$. Esas órbitas están representadas por 01 y 02.

Supongamos que 01 y 02 pertenecen a una misma órbita respecto a $\mathbf{Aut}(ST_{13})$, entonces existe $\varphi \in \mathbf{Aut}(ST_{13})$, tal que $\varphi(01) = 02$ entonces $\varphi(0) = 0$, por lo que se tiene que $\varphi(N^+(0, ST_{13})) = N^+(0, ST_{13}) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$ además, $\varphi(1) = 2$ por lo que $\varphi(N^+(1, N^+(0, ST_{13}))) = N^+(2, N^+(0, ST_{13}))$, pero $d^+(1, N^+(0, ST_{13})) = 3$ y $d^+(2, N^+(0, ST_{13})) = 2$ lo cual es imposible, por lo que para toda $\varphi \in \mathbf{Aut}(ST_{13})$, $\varphi(01) \neq (02)$. □

Observación 3.10. Por la proposición 3.9 las órbitas de flechas de ST_{13} respecto a $\mathbf{Aut}(ST_{13})$ son las mismas que con respecto a $\mathcal{L}_{13}$.

Proposición 3.11. $ST_{13} - \alpha$*, donde* $\alpha = \{u, v\}$*, es rígido para* $u, v \in V(ST_{13})$*,* $u \neq v$.

Demostración. Por la proposición anterior basta probar la afirmación para $\{u, v\} = \{0, 1\}, \{0, 2\}$.

Caso I. $\alpha = \{0, 1\}$

Ya que $N^{++}(\{0, 1\}, ST_{13}) = \{2, 3, 6\}$ entonces $2, 3$ y 6 son los vértices cuya invecindad tiene orden 4 en $ST_{13} - \{0, 1\}$ y por lo tanto $\{2, 3, 6\}$ queda invariante bajo $\mathbf{Aut}(ST_{13} - \{0, 1\})$.

Análogamente $N^{--}(\{0,1\}, ST_{13}) = \{8,11,12\}$, la invecindad común de 0 y 1, es invariante y $(ST_{13}-\{0,1\})-(N^{--}(\{0,1\}, ST_{13}) \cup N^{++}(\{0,1\}, ST_{13})) = \{4,5,7,9,10\}$ también es invariante bajo $\mathbf{Aut}(ST_{13} - \{0,1\})$. Además

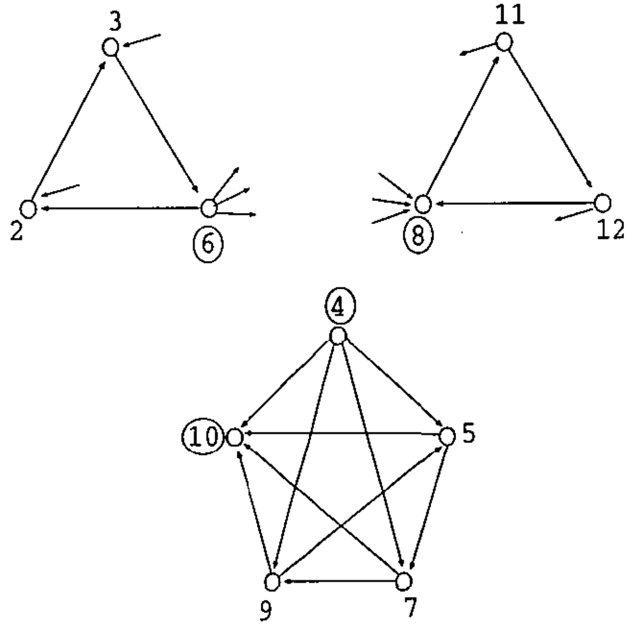

Figura 3.1.

$$|\{8,11,12\} \cap N^+(6, ST_{13} - \{0,1\})| = 3$$
$$|\{8,11,12\} \cap N^+(3, ST_{13} - \{0,1\})| = 2$$
$$|\{8,11,12\} \cap N^+(2, ST_{13} - \{0,1\})| = 2$$

como se ve en la figura 3.1, de donde se deduce que 6 se queda fijo y por consiguiente también 3 y 2.

De igual manera tenemos que

$$\begin{aligned} |\{2,3,6\} \cap N^-(8, ST_{13} - \{0,1\})| &= 3 \\ |\{2,3,6\} \cap N^-(11, ST_{13} - \{0,1\})| &= 2 \\ |\{2,3,6\} \cap N^-(12, ST_{13} - \{0,1\})| &= 2 \end{aligned}$$

por lo tanto 8 queda fijo e igualmente 11 y 12.

En $T' = T[\{4,5,7,9,10\}]$, tenemos que $d^+(4,T') = 4$ y luego 4 queda fijo. $d^+(5,T') = d^+(7,T') = d^+(9,T') = 1$ y $d^+(10,T') = 0$ por lo que 10 se queda fijo y $\{5,7,9\}$ es invariante.

Pero $\{5,7,9\} \cap N^-(2, ST_{13} - \{0,1\}) = \{9\}$, de donde tenemos que 9 queda fijo y consecuentemente 5 y 7 quedan fijos también.Por lo tanto $ST_{13} - \{0,1\}$ es rígido.

Caso II. $\alpha = \{0,2\}$.

De igual manera al caso anterior tenemos que

$$\begin{aligned} N^{++}(\{0,2\}) &= \{3,5\} \\ N^{--}(\{0,2\}) &= \{10,12\} \end{aligned}$$

quedan invariantes como conjuntos bajo todo automorfismo de $ST_{13} - \{0,2\}$, entonces $3, 5, 10$ y 12 se quedan fijos, por lo que $\{1,4,6,7,8,9,11\}$ queda invariante bajo todo automorfismo de $ST_{13} - \{0,2\}$.

Como 3 está fijo, su invecindad debe quedar invariante, $N^-(\{3\}, ST_{13} - \{0,2\}) = \{1,7,10,11\}$, donde 10 está fijo, por lo que $\{1,7,11\}$ es invariante, pero este último induce un 3-conjunto acíclico por lo que $1, 7$ y 11 se quedan fijos.

Como 5 queda fijo $N^-(5, ST_{13} - \{0,2\}) = \{3,4,9,12\}$ es invariante y como 3 y 12 están fijos 4 y 9 también lo estan. Finalmente 6 y 8 también quedan fijos. Así que $ST_{13} - \{0,2\}$ es rígido. $\square$

Proposición 3.12. *El torneo* $ST_{13} - \{0,1\} \not\cong ST_{13} - \{0,2\}$.

Demostración. Sea $T_1 = ST_{13} - \{0,1\}$ y $T_2 = ST_{13} - \{0,2\}$. Tenemos que $N^{++}(\{0,1\}, ST_{13}) = \{2,3,6\}$ es el conjunto de vértices en T_1 cuya invalencia es 4 y $N^{++}(\{0,2\}, ST_{13}) = \{3,5\}$ es el conjunto de vértices en T_2 con invalencia 4. Así que si T_1 fuera isomorfo a T_2 bajo el isomorfismo φ, tendríamos que el conjunto $\{3,5\}$ sería la imagen bajo φ del conjunto $\{2,3,6\}$, lo cual es imposible. □

Teorema 3.13. El conjunto $\mathcal{L}_{13}$ es el grupo de automorfismos de ST_{13}.

Demostración. Como $\mathcal{L}_{13}$ es subgrupo de $\mathbf{Aut}(ST_{13})$, basta ver que $\mathbf{Aut}(ST_{13}) \subseteq \mathcal{L}_{13}$.

Sea $\varphi \in \mathbf{Aut}(ST_{13})$. Tenemos que por la proposición 3.9, $\varphi(01)$ está en la órbita de 01 respecto a $\mathbf{Aut}(ST_{13})$ y por la observación 3.10 está en la órbita de 01 respecto a $\mathcal{L}_{13}$ por lo tanto existe $f_{a,b} \in \mathcal{L}_{13}$, tal que $f_{a,b}(\varphi(0)) = 0$ y $f_{a,b}(\varphi(1)) = 1$, así que por la proposición 3.11, tenemos que $f_{a,b} \circ \varphi|_{ST_{13}-\{0,1\}} = Id$, luego $f_{a,b} \circ \varphi = Id$, por lo tanto $\varphi = f_{a,b}^{-1} \in \mathcal{L}_{13}$. □

Corolario 3.14. *El único automorfismo que deja fijo al* 0 *y al* 1 *es la identidad.*

Demostración. Sea $f_{a,b} \in \mathbf{Aut}(ST_{13})$ tal que $f_{a,b}(0) = 0$ y $f_{a,b}(1) = 1$, entonces tenemos que $a(0) + b = 0$ y $a(1) + b = 1$, de donde se sigue que $a = 1$ y $b = 0$, por lo que $f_{a,b} = Id$. □

Capítulo 4

Órbitas

En el capítulo anterior se obtuvo que los torneos ST_7 y ST_{11} tienen una sola órbita de flechas y que el torneo ST_{13} dos, de las cuales se dio el sistema de representantes $\{01, 02\}$. Cabe señalar que estos tres torneos son transitivos en vértices, puesto que son torneos circulantes. Ahora se encontrarán sistemas de representantes de torneos de orden 3 y 4 en estos mismos torneos.

4.1 Órbitas en ST_7

4.1.1 Órbitas de triángulos

Triángulos acíclicos

Sea T un triángulo acíclico en ST_7 y (u_0, u_1, u_2) la trayectoria dirigida en T, por la proposición 3.3 existe otro triángulo acíclico T' en la órbita de T, tal que contiene la trayectoria dirigida $(0, 1, u_2')$. Ya que

$$N^{++}(\{0,1\}, ST_7) = \{2\}$$

el único valor posible para u_2' es 2. Así que existe una sola órbita de triángulos acíclicos en ST_7, cuyo representante está inducido por $\{0, 1, 2\}$. Dicho de otro modo, $\mathbf{Aut}(ST_7)$ actúa transitivamente en los triángulos acíclicos.

Triángulos cíclicos

Procederemos de manera ánaloga a como se hizo con los triángulos acíclicos. Sea T un triángulo cíclico en ST_7, entonces existe otro triángulo cíclico en la misma órbita de T que contiene a la flecha 01. Y como tenemos que

$$N^{-+}(\{0,1\}, ST_7) = \{3,5\},$$

si $\{0,1,3\}$ y $\{0,1,5\}$ pertenecieran a la misma órbita entonces sus residuos también estarían en la misma órbita, pero $ST_7 - \{0,1,3\} \cong T_4^2$ y $ST_7 - \{0,1,5\} \cong T_4^1$, así que hay dos órbitas de triángulos cíclicos en ST_7, donde un sistema de representantes es $\{\{0,1,3\}, \{0,1,5\}\}$.

4.1.2 Órbitas de TT_4

Como ya se demostró en la proposición 2.2, ST_7 no contiene ningún TT_4. Veamos las órbitas de los otros T_4.

Órbitas de T_4^1

Sea T un subtorneo de ST_7 isomorfo a T_4^1. Procediendo como hasta ahora podemos suponer que el único triángulo cíclico de T está inducido por $\{0,1,3\}$ y puesto que

$$N^{---}(\{0,1,3\}, ST_7) = \{6\}$$

tenemos sólo una órbita de T_4^1's en ST_7.

Órbitas de T_4^2

Antes que otra cosa, hay que notar que T_4^2 es el dual de T_4^1, es decir uno se obtiene del otro invirtiendo el sentido de las flechas. Por lo que también sólo hay una órbita de T_4^2 en ST_7, que está representada por la cuaterna $\{0,1,4,6\}$ que es la imagen de $\{0,1,3,6\}$ bajo el antiautomorfismo $\varphi(x) = -x$ de ST_7.

Órbitas de T_4^3

En primer lugar notemos que T_4^3 contiene un único triángulo acíclico H, tal que el vértice restante u_4 tiene un único invecino en H que es el pozo de H.

Cada T isomorfo a T_4^3 en ST_7 tiene un representante T' en su órbita tal que $T'[H']$ es inducido por $\{0,1,2\}$, puesto que

$$N^{--+}(\{0,1,2\}, ST_7) = \{6\}$$

existe una única órbita de T_4^3's en ST_7 representado por el subtorneo inducido por $\{0,1,2,6\}$.

4.2 Órbitas en ST_{11}

4.2.1 Órbitas de triángulos

Triángulos acíclicos

Sea T un triángulo acíclico en ST_{11} y (u_0, u_1, u_2) la trayectoria dirigida en T, existe un triángulo acíclico T' en la misma órbita que T, que contiene una trayectoria dirigida de la forma $(0, 1, u_2')$ ya que el $\mathbf{Aut}(ST_{11})$ es transitivo en flechas y como

$$N^{++}(\{0,1\}, ST_{11}) = \{4,5\}$$

tenemos que los valores posibles para u_2' son 4 y 5. Por el lema 3.4 existen dos órbitas de triángulos acíclicos en ST_{11} donde tenemos que $\{\{0,1,4\}, \{0,1,5\}\}$ es un sistema de representantes.

Triángulos cíclicos

En forma ánaloga para encontrar un sistema de representantes de los triángulos cíclicos basta considerar de éstos sólo a los que contienen a la flecha 01. Y ya que

$$N^{-+}(\{0,1\}, ST_{11}) = \{2,6,10\}$$

entonces las posibles ternas cíclicas son $(0,1,2),(0,1,6)$ y $(0,1,10)$. Los automorfismos de ST_{11}; $f(x) = x + 10$ y $g(x) = 5x + 1$ mandan la terna $(0,1,2)$ a las ternas $(0,1,10)$ y $(0,1,6)$, respectivamente. Por lo tanto ST_{11} es transitivo en triángulos cíclicos.

4.2.2 Órbitas de T_4

Órbitas de TT_4

Sea T un subtorneo de ST_{11} acíclico de orden 4, por la sección anterior existe un subtorneo acíclico T' de ST_{11} en la misma órbita de T que contiene una trayectoria dirigida de la forma $(0,1,4,u_3')$ ó de la forma $(0,1,5,u_3'')$. Y ya que

$$\begin{aligned} N^{+++}(\{0,1,4\}, ST_{11}) &= \{5\} \text{ y} \\ N^{+++}(\{0,1,5\}, ST_{11}) &= \emptyset, \end{aligned}$$

la única posibilidad es $u_3' = 5$ y la cuaterna ordenada que se obtiene es $\{0,1,4,5\}$ que es un representante de la única órbita de torneos acíclicos en ST_{11}.

Órbitas de T_4^1

Si T, isomorfo a T_4^1, es un subtorneo de ST_{11} entonces puede encontrarse otro representante de la órbita de T, cuyo triángulo cíclico sea inducido por

$\{0,1,2\}$ y como

$$N^{---}(\{0,1,2\}, ST_{11}) = \{8\}$$

entonces existe una sola órbita de T_4^1 en ST_{11}, representada por el subtorneo de ST_{11} inducida por $\{0,1,2,8\}$.

Órbitas de T_4^2

Como T_4^1 consta de una sola órbita en ST_{11} entonces tenemos que ST_{11} también es transitivo en T_4^2's y $\{0,3,9,10\}$ es representante de la única órbita de T_4^2 en ST_{11}.

Órbitas de T_4^3

Como se hizo anteriormente con las órbitas de T_4^3 en ST_7, para encontrar un sistema de representantes de las órbitas de los T_4^3 en ST_{11} basta considerar aquellos T_4^3's que tengan como subtorneo H al subtorneo de ST_{11} inducido por $\{0,1,2\}$. Así que

$$\begin{aligned} N^{+_2-}(\{0,1,2\}, ST_{11}) &= N^{-++}(\{0,1,2\}, ST_{11}) \cup N^{+-+}(\{0,1,2\}, ST_{11}) \\ &\quad \cup N^{++-}(\{0,1,2\}, ST_{11}) \\ &= \{6,3,4\} \end{aligned}$$

Nota. El conjunto $N^{+_n-_m}(\{x_1 \ldots x_n, x_{n+1} \ldots x_{n+m}\}, T)$ denota al conjunto de los vértices que son exvecinos de n vértices del conjunto $\{x_1 \ldots x_n, x_{n+1} \ldots x_{n+m}\}$ e invecinos de los restantes vértices, m, de este conjunto en el torneo T. Por ejemplo:

$$N^{+_2-} = N^{++-} \cup N^{+-+} \cup N^{-++}$$

El único automorfismo de ST_{11} que deja invariante el triángulo $\{0,1,2\}$ es la identidad, pues los otros posibles automorfismos, que son $f(x) =$

$x+1$ y $g(x) = 9x+2$, no lo hacen. Tenemos que un sistema de representantes de las órbitas de T_4^3's en ST_{11} consta de 3 elementos los cuales son $\{0,1,2,6\}, \{0,1,2,3\}$ y $\{0,1,2,4\}$.

4.3 Órbitas en ST_{13}

4.3.1 Órbitas de triángulos

Triángulos acíclicos

Sea T_3 un triángulo acíclico en ST_{13} y (u_0, u_1, u_2) una trayectoria dirigida en ST_{13} por la proposición 3.9, existe otro triángulo acíclico T' en la misma órbita de T, tal que 0 es la fuente y además $T' - \{0\}$ tiene como fuente a 1 ó 2. Sea u_2' el tercer vértice.

Las posibilidades para u_2' en el primer caso son 2, 3 y 6, ya que $N^{++}(\{0,1\}, ST_{13}) = \{2,3,6\}$ y en el segundo caso u_2' puede ser 3 ó 5, por lo tanto, los dos grupos de ternas correspondientes a $V(T')$ son $\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,6\}$ y $\{0,2,3\}, \{0,2,5\}$, respectivamente. Falta ver si no existen dos representantes de una misma órbita dentro de alguno de estos dos grupos de ternas.

La imagen bajo cualquier automorfismo de ST_{13} de una terna del primer grupo manda el 0 en el 0 y el 1 en el 1 y ya que $ST_{13} - \{0,1\}$ es rígido, por la proposición 3.11, la terna queda fija y se sigue que las ternas del primer grupo pertenecen a órbitas distintas.

Análogamente $\{0,2,3\}$ y $\{0,2,5\}$ pertenecen a órbitas distintas.

Así que tenemos un sistema de representantes de órbitas de triángulos acíclicos, $A_3 = \{\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,6\}, \{0,2,3\}, \{0,2,5\}\}$.

Triángulos cíclicos

De manera análoga a como se hizo con los triángulos acíclicos, para cada triángulo cíclico existe otro en la misma órbita que contiene a la flecha 01 ó a la 02.

Ya que

$$\begin{aligned} N^{-+}(\{0,1\}, ST_{13}) = &\ \{4,7,10\} \text{ y} \\ N^{-+}(\{0,2\}, ST_{13}) = &\ \{4,7,8,11\}, \end{aligned}$$

entonces a lo más tenemos 7 órbitas distintas representadas por las ternas $\{0,1,4\}$, $\{0,1,7\}$, $\{0,1,10\}$, $\{0,2,4\}$, $\{0,2,7\}$, $\{0,2,8\}$, $\{0,2,11\}$. Las correspondientes ternas de saltos involucrados (en orden cíclico) son, respectivamente, $\{1,3,9\}$, $\{1,6,6\}$, $\{1,9,3\}$, $\{2,2,9\}$, $\{2,5,6\}$, $\{2,6,5\}$ y $\{2,9,2\}$.

Nótese que si T es un triángulo cíclico y (a,b,c) es su correspondiente terna de amplitudes de saltos involucrados en orden cíclico y φ un automorfismo en ST_{13}, entonces $\varphi(T)$ tiene como correspondiente terna de amplitudes a (ka,kb,kc) para alguna $k \in \{1,3,9\}$.

Para $k=3$ las ternas cíclicas de saltos que se obtienen son las siguientes: $(1,3,9),(3,5,5),(3,1,9),(6,6,1),(6,2,5),(6,5,2)$ y $(6,1,6)$. Es fácil ver que si alguna repetición de ternas se presenta al tomar $k=9$, ésta ya se presentó al tomar $k=3$.

Las únicas ternas que repitieron con $k=3$ son $(1,6,6),(2,2,9)$ y $(2,9,2)$, ya que la otra aparente repetición no es tal pues el orden cíclico no es respetado. Así que tenemos que $\{0,1,7\}, \{0,2,4\}$ y $\{0,2,11\}$ podrían estar en la misma órbita y sí lo están, pues existe $\varphi, \phi \in \mathbf{Aut}(ST_{13})$, donde $\varphi(x) = x+2$ y $\phi(x) = 3(x)+1$, por lo que $\phi(\varphi(\{0,2,11\})) = \phi(\{0,2,4\}) = \{0,1,7\}$. Así que tenemos que $C_3 = \{\{0,1,4\}, \{0,1,10\}, \{0,1,7\}, \{0,2,7\}, \{0,2,8\}\}$ es un sistema de representantes de las órbitas de triángulos cíclicos en ST_{13}.

4.3.2 Órbitas de T_4 en ST_{13}

Torneos acíclicos de orden 4

Sea $T \cong TT_4$ en ST_{13} y existe un subtorneo T' acíclico de ST_{13} en la misma órbita de T que contiene una trayectoria dirigida de la forma (u'_0, u'_1, u'_2, u'_3), donde $T'[u'_0, u'_1, u'_2]$ es uno de los subtorneos de ST_{13} inducidos por un miembro de A_3. Como tenemos que

$$\begin{aligned}
N^{+++}(\{0,1,2\}, ST_{13}) &= \{3\}\,; \\
N^{+++}(\{0,1,3\}, ST_{13}) &= \{6\}\,; \\
N^{+++}(\{0,1,6\}, ST_{13}) &= \{2\}\,; \\
N^{+++}(\{0,2,3\}, ST_{13}) &= \{5\} \text{ y} \\
N^{+++}(\{0,2,5\}, ST_{13}) &= \emptyset,
\end{aligned}$$

las únicas posibilidades para (u'_0, u'_1, u'_2, u'_3) son $(0,1,2,3)$, $(0,1,3,6)$,$(0,1,2,6)$ y $(0,2,3,5)$ las cuales originan a subtorneos que pertenecen claramente a órbitas distintas.

Órbitas de T_4^1

Sea T un subtorneo isomorfo a T_4^1. Procediendo como antes podemos suponer que el triángulo cíclico de T está inducido por un miembro de C_3. Ya que

$$\begin{aligned}
N^{---}(\{0,1,4\}, ST_{13}) &= \{8,11,12\}\,; \\
N^{---}(\{0,1,10\}, ST_{13}) &= \{8\}\,; \\
N^{---}(\{0,1,7\}, ST_{13}) &= \{11\}\,; \\
N^{---}(\{0,2,7\}, ST_{13}) &= \emptyset \text{ y} \\
N^{---}(\{0,2,8\}, ST_{13}) &= \{12\},
\end{aligned}$$

y como las cuaternas $(0,1,4,8)$, $(0,1,4,11)$ y $(0,1,4,12)$ pertenecen a la misma órbita, pues la función $\varphi(x) = 3x + 1$ manda a $(0,1,4,8)$ a $(0,1,4,12)$

y a ésta última a la cuaterna $(0,1,4,11)$, entonces claramente

$$B_{41} = \{\{0,1,4,8\}, \{0,1,8,10\}, \{0,2,8,12\}, \{0,1,7,11\}\}$$

da origen a un sistema de representantes de las órbitas de T_4^1 en ST_{13}.

Órbitas de T_4^2

Puesto que T_4^2 es dual de T_4^1, tenemos que

$$B_{42} = \{\{0,5,9,12\}, \{0,3,5,12\}, \{0,1,5,11\}, \{0,2,6,12\}\}$$

es un sistema de representantes de órbitas de T_4^2 en ST_{13}.

Órbitas de T_4^3

Sea T isomorfo a T_4^3 un subtorneo de ST_{13}, éste tiene un representante T' en su órbita, tal que el torneo H', el único triángulo acíclico en T', es inducido por algún miembro de A_3. Ya que se tiene que

$$\begin{aligned}
N^{--+}(\{0,1,2\}, ST_{13}) &= \{8,11\};\\
N^{--+}(\{0,1,3\}, ST_{13}) &= \{8,12\};\\
N^{--+}(\{0,1,6\}, ST_{13}) &= \{8,11,12\};\\
N^{--+}(\{0,2,3\}, ST_{13}) &= \{12\} \text{ y}\\
N^{--+}(\{0,2,5\}, ST_{13}) &= \{10\},
\end{aligned}$$

las posibilidades para (u_0', u_1', u_2', u_3'), donde (u_0', u_1', u_2') es una trayectoria dirigida en $T'[H']$ son $(0,1,2,8)$, $(0,1,2,11)$, $(0,1,3,8)$, $(0,1,3,12)$, $(0,1,6,8)$, $(0,1,6,11)$, $(0,1,6,12)$, $(0,2,3,12)$ y $(0,2,5,10)$, pero por el corolario 3.14

$$\begin{aligned}
B_{43} = \ &\{\{0,1,2,8\}, \{0,1,2,11\}, \{0,1,3,12\}, \{0,1,6,8\}, \{0,1,6,11\},\\
&\{0,1,6,12\}, \{0,2,3,12\}\ \{0,2,5,10\}\}
\end{aligned}$$

es un sistema de representantes de T_4^3 en ST_{13}.

Capítulo 5

Subtorneos Ligados y Distinción Fuerte de Residuos

Definamos T_r el conjunto de todos los torneos de orden r, salvo isomorfismo. Sea T un torneo y τ_r un conjunto de torneos de orden r y sea $\Omega(\tau_r, T)$ un sistema de representantes de las órbitas de los subtorneos de T orden r que son isomorfos a un miembro de τ_r. Diremos que $\Omega(\tau_r, T)$ distingue fuertemente residuos en T si para todo $\alpha, \beta \in \Omega(\tau_r, T)$, con $\alpha \neq \beta$, se tiene que $T - \alpha \ncong T - \beta$, donde $T - \alpha$ y $T - \beta$ son llamados los residuos de α y β en T, respectivamente.

En este capítulo probaremos que para $r \in \{2,3,4\}$, $r \in \{2,3\}$ y $T \in \{ST_{11}, ST_{13}\}$, $T = ST_7$, respectivamente, $\Omega(\mathbf{T}_r, T)$ distingue fuertemente residuos y que para todo α un miembro de $\Omega(\mathbf{T}_r, T)$, $T - \alpha$ está ligado en T.

Observación 5.1. Nótese que si $\Omega(\tau_r, T)$ distingue fuertemente residuos en Ty $\tau_r' \subseteq \tau_r$, entonces $\Omega(\tau_{r'}, T)$ distinguefuertemente residuos en T.

5.1 Distinción Fuerte de Residuos

5.1.1 ST_7

Sistema de representantes de triángulos en ST_7

Como se vió en el capítulo anterior, tenemos que

$$\Omega(\mathbf{T}_3, ST_7) = \{\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,5\}\}.$$

Puesto que:

$$\begin{aligned} N^{---}(\{0,1,2\}, ST_7) &= \emptyset; \\ N^{---}(\{0,1,3\}, ST_7) &= \{6\}; \\ N^{---}(\{0,1,5\}, ST_7) &= \emptyset \end{aligned}$$

y por la observación 1.3, el residuo de $\{0,1,2\}$ en ST_7 se distingue de los otros residuos. Además tenemos que $ST_7 - \{0,1,2\}$ es isomorfo a T_4^3 y $ST_7 - \{0,1,5\}$ lo es a T_4^2, por lo tanto $\Omega(\mathbf{T}_3, ST_7)$ distingue fuertemente residuos en ST_7.

Sistema de representantes de torneos de orden 4 en ST_7

Tenemos que $\Omega(\mathbf{T}_4, ST_7) = \{\{0,1,3,6\}, \{0,1,4,6\}, \{0,1,2,6\}\}$ y además

$$\begin{aligned} T[ST_{13} - \{0,1,3,6\}] &= T[\{2,4,5\}] \cong \overrightarrow{C}_3, \\ T[ST_{13} - \{0,1,4,6\}] &= T[\{2,3,5\}] \cong \overrightarrow{C}_3 \text{ y} \\ T[ST_{13} - \{0,1,2,6\}] &= T[\{3,4,5\}] \cong TT_3. \end{aligned}$$

Así que tenemos que $\Omega(\mathbf{T}_4, ST_7)$ no distingue fuertemente residuos en ST_7, pero si $\tau_4 = \{T_4^1, T_4^3\}$, entonces $\Omega(\tau_4, ST_7)$ distingue fuertemente residuos en ST_7.

5.1.2 ST_{11}

Sistema de representantes de triángulos en ST_{11}

Por la sección 4.2.1 tenemos que $\Omega(\mathbf{T}_3, ST_{11}) = \{\{0,1,4\}, \{0,1,5\}, \{0,1,2\}\}$ es un sistema de representantes de triángulos en ST_{11}. Como tenemos que:

$$\begin{aligned} N^{+++}(\{0,1,4\}, ST_{11}) &= \{5\}; \\ N^{+++}(\{0,1,5\}, ST_{11}) &= \emptyset \text{ y} \\ N^{+++}(\{0,1,2\}, ST_{11}) &= \{5\}, \end{aligned}$$

podemos distinguir al residuo de $\{0,1,5\}$ en ST_{11} de los residuos de $\{0,1,4\}$ y de $\{0,1,2\}$ en ST_{11}, puesto que en estos últimos hay un vértice en cada uno que no es exvecino de ningún otro vértice y en $ST_{11} - \{0,1,5\}$ no hay tal vértice. Y ya que

$$\begin{aligned} N^{---}(\{0,1,4\}, ST_{11}) &= \emptyset \text{ y} \\ N^{---}(\{0,1,2\}, ST_{11}) &= \{8\}, \end{aligned}$$

en $ST_{11} - \{0,1,2\}$ hay un único vértice con exvecindad vacía y en $ST_{11} - \{0,1,4\}$ ningún vértice cumple tal condición, así que el residuo de $\{0,1,4\}$ se distingue del residuo de $\{0,1,2\}$ en ST_{11}. Por lo que $\Omega(\mathbf{T}_3, ST_{11})$ distingue fuertemente residuos.

Sistema de representantes de torneos de orden 4 en ST_{11}

Sabemos que

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{T}_4, ST_{11}) = \; & \{\{0,1,4,5\}, \{0,1,2,8\}, \{0,3,9,10\}, \{0,1,2,6\}, \{0,1,2,3\}, \\ & \{0,1,2,4\}\}. \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
N^{++++}(\{0,1,4,5\},ST_{11}) &= \emptyset;\\
N^{++++}(\{0,1,2,8\},ST_{11}) &= \emptyset;\\
N^{++++}(\{0,3,9,10\},ST_{11}) &= \emptyset;\\
N^{++++}(\{0,1,2,6\},ST_{11}) &= \emptyset;\\
N^{++++}(\{0,1,2,3\},ST_{11}) &= \emptyset \text{ y}\\
N^{++++}(\{0,1,2,4\},ST_{11}) &= \{5\}.
\end{aligned}$$

Así que, claramente, $ST_{11} - \{0,1,2,4\}$ se distingue de los residuos de los demás $T_4 \in \Omega(\mathbf{T}_4, ST_{11})$. Además tenemos que:

$$\begin{aligned}
N^{----}(\{0,1,4,5\},ST_{11}) &= \emptyset;\\
N^{----}(\{0,1,2,8\},ST_{11}) &= \emptyset;\\
N^{----}(\{0,3,9,10\},ST_{11}) &= \emptyset;\\
N^{----}(\{0,1,2,6\},ST_{11}) &= \{8\} \text{ y}\\
N^{----}(\{0,1,2,3\},ST_{11}) &= \emptyset.
\end{aligned}$$

De igual manera a como distinguimos $ST_{11} - \{0,1,2,4\}$ lo hacemos ahora con $ST_{11} = \{0,1,2,6\}$ de los restantes residuos. Para distinguir a los residuos de $\{0,1,4,5\}, \{0,1,2,8\}, \{0,3,9,10\}$ y $\{0,1,2,3\}$ vamos a ver cuántos vértices hay en cada residuo con invecindad vacía.

Así tenemos que:

$$\begin{aligned}
N^{+3-}(\{0,1,4,5\},ST_{11}) &= \{9\};\\
N^{+3-}(\{0,1,2,8\},ST_{11}) &= \{5,6\};\\
N^{+3-}(\{0,3,9,10\},ST_{11}) &= \{1,4\} \text{ y}\\
N^{+3-}(\{0,1,2,3\},ST_{11}) &= \{4,5,6\}.
\end{aligned}$$

de donde, se puede ver que $ST_{11} - \{0,1,4,5\}$ y $ST_{11} - \{0,1,2,3\}$ se distinguen entre sí y de los demás, puesto que en el primero hay un sólo vértice con invecindad vacía, en el segundo hay 3 y en los dos restantes hay 2. Si $ST_{11} - \{0,1,2,8\}$ no se distinguiera de $ST_{11} - \{0,3,9,10\}$ entonces tendríamos que $\{5,6\}$ en $ST_{11} - \{0,1,2,8\}$ iría a dar bajo un isomorfismo φ a $\{1,4\}$ en $ST_{11} - \{0,3,9,10\}$ de donde se tiene que $\varphi(5) = 1$ y $\varphi(6) = 4$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
\varphi(\{6,9,10,3\}) &= \varphi(N^+(5, ST_{11} - \{0,1,2,8\})) \\
&= N^+(1, ST_{11} - \{0,3,9,10\}) \\
&= \{2,4,5,6\}.
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que $\varphi(\{9,10,3\}) = \{2,5,6\}$ pero tanto $\{9,10,3\}$ como $\{2,5,6\}$ inducen triángulos acíclicos, cuyas trayectorias de longitud 2 son $(9,10,3)$ y $(2,5,6)$, respectivamente, por lo tanto $\varphi(3) = 6$, pero $d^+(3, ST_{11} - \{0,1,2,8\}) = 3$ y $d^+(6, ST_{11} - \{0,3,9,10\}) = 2$ por lo tanto los residuos de $\{0,1,2,8\}$ y $\{0,3,9,10\}$ se distinguen entre sí. Así que $\Omega(\mathbf{T}_4, ST_{11})$ distingue fuertemente residuos en ST_{11}.

5.1.3 ST_{13}

Sistema de representantes de triángulos en ST_{13}

Como se puede ver en la sección de órbitas de triángulos, sección 4.3.1, en ST_{13},

$$\begin{aligned}
A_3 &= \{\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,6\}, \{0,2,3\}, \{0,2,5\}\} \\
C_3 &= \{\{0,1,4\}, \{0,1,10\}, \{0,1,7\}, \{0,2,7\}, \{0,2,8\}\}
\end{aligned}$$

son sistemas de representantes de órbitas de triángulos acíclicos y cíclicos, respectivamente, así que $\Omega(\mathbf{T}_3, ST_{13}) = A_3 \cup C_3$. Puesto que se tiene que:

$$\begin{array}{rclrcl}
N^{+++}(\{0,1,2\}) &=& \{3\}; & N^{+++}(\{0,1,4\}) &=& \{6\}; \\
N^{+++}(\{0,1,3\}) &=& \{6\}; & N^{+++}(\{0,1,10\}) &=& \{2,3,6\}; \\
N^{+++}(\{0,1,6\}) &=& \{2\}; & N^{+++}(\{0,1,7\}) &=& \{3\}; \\
N^{+++}(\{0,2,3\}) &=& \{5\}; & N^{+++}(\{0,2,7\}) &=& \{3\}; \\
N^{+++}(\{0,2,5\}) &=& \emptyset \text{ y} & N^{+++}(\{0,2,8\}) &=& \emptyset.
\end{array}$$

Es fácil ver que $ST_{13} - \{0,1,10\}$ se distingue de los demás residuos y que los residuos de $\{0,2,5\}$ y $\{0,2,8\}$ pueden confundirse entre sí, pero sí se distingue del resto aunque algunos de los residuos restantes pueden ser isomorfos entre sí. Distingamos primero los residuos de $\{0,2,5\}$ y de $\{0,2,8\}$ entre ellos. Ya que

$$\begin{aligned} N^{---}(\{0,2,5\}, ST_{13}) &= \{12\} \text{ y} \\ N^{---}(\{0,2,8\}, ST_{13}) &= \{12\}, \end{aligned}$$

la exvecindad de 12 en $ST_{13} - \{0,2,5\}$ iría, bajo el isomorfismo, a la exvecindad de 12 en $ST_{13} - \{0,2,8\}$ en caso de no distinguirse, pero se tiene que

$$\begin{aligned} T[N^{+}(12, ST_{13} - \{0,2,5\})] &\cong TT_3 \text{ y} \\ T[N^{+}(12, ST_{13} - \{0,2,8\})] &\cong \overrightarrow{C}_3, \end{aligned}$$

por lo que $ST_{13} - \{0,2,5\}$ se distingue de $ST_{13} - \{0,2,8\}$.

Ahora veamos que los residuos de los triángulos $\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$, $\{0,1,6\}$, $\{0,2,3\}$, $\{0,1,4\}$, $\{0,1,7\}$ y $\{0,2,7\}$ son mutuamente no isomorfos. Nótese que en todos estos residuos existe un único vértice v con invecindad de cardinalidad 3, que es el exvecino de la terna correspondiente. Supongamos que dos de los residuos no se distinguen. Claramente, las exvecindades de v para esos dos residuos serían isomorfos. Observemos que

$$\begin{aligned} T[N^{-}(\{3\}, ST_{13} - \{0,1,2\})] &= T[\{7,10,11\}] &&\cong \overrightarrow{C}_3; \\ T[N^{-}(\{6\}, ST_{13} - \{0,1,3\})] &= T[\{4,5,10\}] &&\cong TT_3; \\ T[N^{-}(\{2\}, ST_{13} - \{0,1,6\})] &= T[\{9,10,12\}] &&\cong TT_3; \\ T[N^{-}(\{5\}, ST_{13} - \{0,2,3\})] &= T[\{4,9,12\}] &&\cong \overrightarrow{C}_3; \\ T[N^{-}(\{6\}, ST_{13} - \{0,1,4\})] &= T[\{3,5,10\}] &&\cong \overrightarrow{C}_3; \\ T[N^{-}(\{3\}, ST_{13} - \{0,1,7\})] &= T[\{2,10,11\}] &&\cong TT_3 \text{ y} \\ T[N^{-}(\{3\}, ST_{13} - \{0,2,7\})] &= T[\{1,10,11\}] &&\cong \overrightarrow{C}_3, \end{aligned}$$

por lo que se sigue que los residuos de los miembros de

$$R_1 = \{\{0,1,2\}, \{0,2,3\}, \{0,1,4\}, \{0,2,7\}\}$$

en ST_{13} se distinguen de cualquier residuo de miembros de

$$R_2 = \{\{0,1,3\},\{0,1,6\},\{0,1,7\}\}$$

así que basta distinguir entre los residuos de miembros de R_1 y entre los residuos de miembros de R_2.

Empecemos por distinguir los residuos de los miembros de R_1 entre sí. Para ello consideremos la siguiente tabla.

T_3	$+_3$	$-(+_3)$	$-_3(-(+_3))$
$\{0,1,2\}$	$\{3\}$	$\{7,10,11\}$	$\{5\}$
$\{0,1,4\}$	$\{6\}$	$\{3,5,10,\}$	$\emptyset$
$\{0,2,3\}$	$\{5\}$	$\{4,9,12\}$	$\emptyset$
$\{0,2,7\}$	$\{3\}$	$\{1,10,11\}$	$\{5,8,9\}$

Nota. En la tabla denotamos a la exvecindad de las ternas como $+_3$, es decir, $N^+(T_3, ST_{13}) = +_3$, y en las columnas siguientes denotamos la invecindad o exvecindad de la columna anterior como $-(*)$ ó $+(*)$ donde $*$ se refiere al conjunto considerado en la columna anterior.

Observando la cuarta columna de la tabla concluimos, por la observación 1.3, que la primera terna se distingue de la cuarta y ambas se distinguen de las restantes. Así que ahora distinguiremos entre sí los residuos de $\{0,1,4\}$ y $\{0,2,3\}$.

Consideremos los residuos Q_1 y Q_2 de $\{0,1,4\}$ y $\{0,2,3\}$, respectivamente. Un posible isomorfismo entre ellos debe mandar el vértice 6 al 5; la terna $\{3,5,10\}$ a la $\{4,9,12\}$ y el conjunto $Q_1 - \{6,3,5,10\}$ al $Q_2 - \{5,4,9,12\}$. La exvecindad de cada uno de los vértices $3,5$ y 10 en $Q_1 - \{6,3,5,10\}$ es de orden 3 y en cambio el vértice 12 tiene sólo 2 exvecinos en $Q_2 - \{5,4,9,12\}$ por lo que se sigue que 12 no puede ser imagen de uno de los vértices $3,5$ ó 10 bajo el isomorfismo, lo que da una contradicción.

Ahora distingamos entre sí a los miembros de R_2. Utilicemos la siguiente tabla:

T_3	$+_3$	$-(+_3) = (u_0, u_1, u_2)$	$N^-(u_0) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$	$N^-(x_2)$
$\{0,1,3\}$	$\{6\}$	$(4,5,10)$	$(2,8,11,12)$	$\{2,5,6,7,12\}$
$\{0,1,6\}$	$\{2\}$	$(9,10,12)$	$(3,8,7,4)$	$\{2,3,5,7,12\}$
$\{0,1,7\}$	$\{3\}$	$(10,2,11)$	$(4,9,8,5)$	$\{3,4,6,8\}$

Nota. La segunda columna, (u_0, u_1, u_2), es la trayectoria dirigida de longitud 2 en la invecindad de la exvecindad de la terna. Además los conjuntos que se encuentran en la cuarta columna inducen un T_4^3, el cual es rígido y los vértices están colocados de tal forma que los primeros son imagen uno del otro bajo el isomorfismo entre los T_4^3, análogamente los segundos,terceros y cuartos.

Observando la última columna de la tabla podemos saber que el residuo de la última terna se diferencia de las demás, mientras que los residuos de la primera y de la segunda terna podrían ser isomorfos, pero si fuera así, de la última columna concluiríamos que el vértice 5 iría, bajo el isomorfismo a uno de los vértices $2, 3, 5, 7$ ó 12 lo cual contradice con lo que obtenemos de la tercera columna, que nos dice que el isomorfismo manda el vértice 5 al 10, por lo tanto $\Omega(\mathrm{T}_3, ST_{13})$ distingue fuertemente residuos en ST_{13}.

Sistema de representantes de torneos de orden 4 en ST_{13}

Como se puede ver en el capítulo anterior en sección 4.3.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
B_4 &= \{\{0,1,2,3\}, \{0,1,3,6\}, \{0,1,6,2\}, \{0,2,3,5\}\} \\
B_{41} &= \{\{0,1,4,8\}, \{0,1,8,10\}, \{0,2,8,12\}, \{0,1,7,11\}\} \\
B_{42} &= \{\{0,5,9,12\}, \{0,3,5,12\}, \{0,1,5,11\}, \{0,2,6,12\}\} \\
B_{43} &= \{\{0,1,2,8\}, \{0,1,2,11\}, \{0,1,3,8\}, \{0,1,3,12\}, \{0,1,6,8\}, \\
&\quad \{0,1,6,11\}, \{0,1,6,12\}, \{0,2,3,12\}, \{0,2,5,10\}\}
\end{aligned}$$

son sistemas de representantes de órbitas de TT_4's, T_4^1's, T_4^2,s y T_4^3's, respectivamente, en ST_{13}, así que $\Omega(\mathrm{T}_4, ST_7) = B_4 \cup B_{41} \cup B_{42} \cup B_{43}$ es un sistema de representantes de órbitas de $\mathbf{T}_4$. Para esto veamos las siguientes vecindades:

T_4	$+_4$	$-_4$	T_4	$+_4$	$-_4$
$\{0,1,2,3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0,2,6,12\}$	$\emptyset$	$\{10\}$
$\{0,1,3,6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0,1,2,8\}$	$\emptyset$	$\{12\}$
$\{0,1,2,6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0,1,2,11\}$	$\{3\}$	$\emptyset$
$\{0,2,3,5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0,1,3,8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0,1,4,8\}$	$\emptyset$	$\{12\}$	$\{0,1,3,12\}$	$\emptyset$	$\{11\}$
$\{0,1,8,10\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0,1,6,8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0,1,7,11\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	$\{0,1,6,11\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0,2,8,12,\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0,1,6,12\}$	$\{2\}$	$\emptyset$
$\{0,5,9,12\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{0,2,3,12\}$	$\{5\}$	$\{10\}$
$\{0,3,5,12\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0,2,5,10\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0,1,5,11\}$	$\emptyset$	$\emptyset$			

Sea

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\{0,1,2,3\},\{0,1,3,6\},\{0,1,2,6\},\{0,2,3,5\},\{0,1,8,10\}, \\ &\quad \{0,2,8,12\},\{0,3,5,12\},\{0,1,5,11\},\{0,1,3,8\},\{0,1,6,8\}, \\ &\quad \{0,1,6,11\},\{0,2,5,10\}\} \end{aligned}$$

el conjunto de las cuaternas que tiene exvecindad e invecindad vacía;

$$D_2 = \{\{0,1,7,11\},\{0,5,9,12\},\{0,1,2,11\},\{0,1,6,12\}\}$$

el conjunto de las cuaternas con invecindad vacía y exvecindad de orden 1 y

$$D_3 = \{\{0,1,4,8\},\{0,2,6,12\},\{0,1,2,8\},\{0,1,3,12\}\}$$

las cuaternas con exvecindad vacía e invecindad de orden 1. Tenemos que los residuos de miembros de un mismo conjunto D_i pueden no diferenciarse entre sí, pero si se diferencian de los residuos de un miembro de otro D_j. Claramente el residuo de la cuaterna $\{0,2,3,12\}$ se diferencia de todos los demás. Así que distinguiremos los residuos de miembros de cada D_i.

Empecemos con D_1:

T_4	$+_3$	$T[+_3]$	$-_3$	$T[-_3]$
$\{0,1,2,3\}$	$\{4,5,6\}$	TT_3	$\{10,11,12\}$	TT_3
$\{0,1,3,6\}$	$\{9,2\}$	K_2	$\{10,11\}$	K_2
$\{0,1,6,2\}$	$\{7,3\}$	K_2	$\{10,12\}$	K_2
$\{0,2,3,5\}$	$\{6,8\}$	K_2	$\{10,12\}$	K_2
$\{0,1,8,10\}$	$\{2,3,6\}$	$\vec{C}_3$	$\{5,7,12\}$	$\vec{C}_3$
$\{0,2,8,12\}$	$\{1,4,5\}$	$\vec{C}_3$	$\{6,7,10\}$	$\vec{C}_3$
$\{0,3,5,12\}$	$\{1,6,8\}$	$\vec{C}_3$	$\{7,10,11\}$	$\vec{C}_3$
$\{0,1,5,11\}$	$\{3,6,7\}$	$\vec{C}_3$	$\{8,9,12\}$	$\vec{C}_3$
$\{0,1,3,8\}$	$\{4,6,9\}$	TT_3	$\{11,7,12\}$	TT_3
$\{0,1,6,8\}$	$\{9,2\}$	K_2	$\{12,5\}$	K_2
$\{0,1,6,11\}$	$\{2,7,3\}$	TT_3	$\{5,8,10\}$	TT_3
$\{0,2,5,10\}$	$\{3,6,11\}$	$\vec{C}_3$	$\{4,9,12\}$	$\vec{C}_3$

Así que podemos subdividir a D_1 en subconjuntos D_{1i} de tal manera que en miembros de D_{1i} distintos sus residuos se distingan.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \{\{0,1,2,3\},\{0,1,3,8\},\{0,1,6,11\}\},\\
D_{12} &= \{\{0,1,3,6\},\{0,1,6,2\},\{0,2,3,5\},\{0,1,6,8\}\}\\
D_{13} &= \{\{0,1,8,10\},\{0,2,8,12\},\{0,3,5,12\},\{0,1,5,11\},\{0,2,5,10\}\}
\end{aligned}$$

son dichos subconjuntos.

Si los residuos de miembros de D_{11} fueran isomorfos existirían $\varphi : ST_{13} - \{0,1,2,3\} \to ST_{13} - \{0,1,3,8\}$ y $\gamma : ST_{13} - \{0,1,3,8\} \to ST_{13} - \{0,1,6,11\}$, tal que tendríamos lo siguiente.

$(u, ST_{13} - \{0,1,2,3\})$	$\varphi(u)$	$\gamma(\varphi(u))$
4	4	2
5	6	7
6	9	3
10	11	5
11	7	8
12	12	10

pero $ST_{13} - \{0,1,2,3,4,5,6,10,11,12\} = \{7,8,9\}$ que induce un TT_3 y los conjuntos $ST_{13} - \{0,1,2,3,4,6,7,8,9,11,12\} = \{2,5,10\}$ y $ST_{13} - \{0,1,2,3,5,6,7,8,10,11\} = \{4,9,12\}$ inducen triángulos cíclicos. Así que basta distinguir entre los residuos de $\{0,1,3,8\}$ y de $\{0,1,6,11\}$. Como $\varphi(4) = 2$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(\{5,6,7,9,10\}) &= \varphi(N^+(4, ST_{13} - \{0,1,3,8\})) \\
&= N^+(2, ST_{13} - \{0,1,6,11\}) \\
&= \{3,4,5,7,8\}
\end{aligned}$$

de donde

$$\varphi(\{5,10\}) = \{4,5\} \not\subseteq \{4,9,12\}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, todo residuo de algún miembro de D_{11} se distingue de cualquier otro.

Supongamos ahora que todos los miembros de D_{12} son isomorfos. Así que existen isomorfismos

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: ST_{13} - \{0,1,3,6\} \to ST_{13} - \{0,1,6,2\}\,; \\
\varphi_2 &: ST_{13} - \{0,1,6,2\} \to ST_{13} - \{0,2,3,5\} \text{ y} \\
\varphi_3 &: ST_{13} - \{0,2,3,5\} \to ST_{13} - \{0,1,6,8\}\,,
\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$(u, ST_{13} - \{0,1,3,6\})$	$\varphi_1(u)$	$\varphi_2(\varphi_1(u))$	$\varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(u)))$
9	7	6	9
2	3	8	2
10	10	10	12
11	12	12	5

Pero

$$\begin{aligned} d^+(9, ST_{13} - \{0,1,3,6\}) &= d^+(7, ST_{13} - \{0,1,6,2\}) \\ &= 4 \\ \text{y } d^+(6, ST_{13} - \{0,2,3,5\}) &= d^+(9, ST_{13} - \{0,1,6,8\}) \\ &= 5, \end{aligned}$$

por lo que los residuos de $\{0,1,3,6\}$ y de $\{0,1,6,2\}$ se diferencian de los residuos de $\{0,2,3,5\}$ y de $\{0,1,6,8\}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_1(\{10,11,12,5\}) &= \varphi_1(N^+(9, ST_{13} - \{0,1,3,6\}) \\ &= N^+(7, ST_{13} - \{0,1,6,2\}) \\ &= \{10,11,12,5\} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \varphi_1(\{4,7,8\}) &= \varphi_1(ST_{13} - \{0,1,2,3,5,6,9,10,11,12\}) \\ &= ST_{13} - \{0,1,2,3,5,6,7,10,11,12\}) \\ &= \{4,8,9\} \end{aligned}$$

pero $T[\{4,7,8\}] \cong \overrightarrow{C}_3$ y $T[\{4,8,9\}] \cong TT_3$. Por lo tanto $ST_{13} - \{0,1,3,6\}$ no es isomorfo a $ST_{13} - \{0,1,6,2\}$.

Ahora, si $\varphi_1(\{7,8,9,11,12\}) = \varphi_1(N^+(6, ST_{13} - \{0,2,3,5\}) = N^+(9, ST_{13} - \{0,1,6,8\}) = \{10,11,12,2,5\}$, entonces

$$\varphi_1(\{7,9,11\}) = \{10,11,12\}$$

pero $T[\{7,9,11\}] \cong \overrightarrow{C}_3$ y $T[\{10,11,12\}] \cong TT_3$, por lo que se distinguen entre sí los residuos de los miembros de D_{12}.

Veamos ahora que sucede con los residuos de los miembros de D_{13}. Para eso utilicemos la siguiente tabla.

T_4	$+_3$	$-_3$	$+_3(+_3)$	$-_3(-_3)$
$\{0,1,8,10\}$	$\{2,3,6\}$	$\{5,7,12\}$	$\{7\}$	$\emptyset$
$\{0,2,8,12\}$	$\{1,4,5\}$	$\{6,7,10\}$	$\{6,7,10\}$	$\{4,5\}$
$\{0,3,5,12\}$	$\{1,6,8\}$	$\{7,10,11\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0,1,5,11\}$	$\{3,6,7\}$	$\{8,9,12\}$	$\{8,9,12\}$	$\{3,6,7\}$
$\{0,2,5,10\}$	$\{3,6,11\}$	$\{4,9,12\}$	$\{12\}$	$\{3\}$

De las últimas dos columnas podemos ver claramente que todos los residuos de los miembros de D_{13} se distinguen entre sí.

Ahora distinguiremos entre los residuos de los miembros de D_2. Veamos la siguiente tabla.

T_4	$+_3$	$-_3$
$\{0,1,4,8\}$	$\{6,9,10\}$	$\{11\}$
$\{0,2,6,12\}$	$\{5,8\}$	$\emptyset$
$\{0,1,3,12\}$	$\{2,5,6\}$	$\{7,10\}$

De la segunda columna podemos decir que los residuos de las cuaternas $\{0,2,6,12\}$ se distinguen entre sí y de los dos restantes. De la tercera columna se sigue que los dos residuos restantes se distinguen entre sí. Por lo que los residuos de cada miembro de D_3 se distinguen de cualquier otro. Por lo tanto $\Omega(\mathbf{T}_4, ST_7)$ distingue fuertemente residuos.

Ahora estamos listos para el siguiente teorema.

Teorema 5.2. Sean T y T' torneos con $T = \{ST_7, ST_{11}, ST_{13}\}$, $T' \cong T$ y τ_k tal que $\Omega(\tau_k, T)$ distingue fuertemente residuos. Sean Q_1 y Q_2 dos τ_k-residuos en T'. Entonces Q_1 y Q_2 son isomorfos si y sólo si están en la misma órbita.

Demostración. El recíproco es obvio, así que probaremos sólo la ida.

Sea $\varphi : T \to T'$ un isomorfismo, obviamente $\varphi^{-1}(Q_1)$ y $\varphi^{-1}(Q_2)$ son τ_k-residuos en T. Si $Q_1 \cong Q_2$ entonces $\varphi^{-1}(Q_1) \cong \varphi^{-1}(Q_2)$ de donde se sigue que $T - \varphi^{-1}(Q_1)$ y $T - \varphi^{-1}(Q_2)$ pertenecen a la misma órbita y se sigue que $\varphi^{-1}(Q_1)$ y $\varphi^{-1}(Q_2)$ pertenecen a la misma órbita.

Sea $\sigma \in \mathbf{Aut}(T)$ tal que $\sigma(\varphi^{-1}(Q_1)) = \varphi^{-1}(Q_2)$ entonces $\varphi\sigma\varphi^{-1} \in \mathbf{Aut}(T')$ tal que

$$\varphi\sigma\varphi^{-1}(Q_1) = \varphi\varphi^{-1}(Q_2) = Q_2$$

por lo tanto Q_1 y Q_2 están en la misma órbita. □

5.1.4 Ligamiento de los τ_k-residuos

Antes de empezar veamos el siguiente lema.

Lema 5.3. Sea W un subtorneo de un torneo T y $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{Aut}(W)$ un conjunto de generadores de $\mathbf{Aut}(W)$, entonces W está ligado en T si y sólo si para todo $\sigma \in \mathcal{S}$ existe $\hat{\sigma} \in \mathbf{Aut}(T)$ tal que $\hat{\sigma}|_W = \sigma$.

Demostración. $\Rightarrow$) Es obvia, pues si W está ligado en T implica que todo automorfismo de W se puede extender a un automorfismo de T, es particular cualquier elemento de $\mathcal{S}$

$\Leftarrow$) Supongamos que para todo $\sigma \in \mathcal{S}$ tal que $\hat{\sigma} \in \mathbf{Aut}(T) \ni \hat{\sigma}|_W = \sigma$. Sea $\varphi \in \mathbf{Aut}(W)$, entonces $\varphi = \sigma_1, \ldots, \sigma_k$, con $\sigma_i \in \mathcal{S}$, así que existen $\hat{\sigma}_i \in \mathbf{Aut}(T)$ tal que $\hat{\sigma}_i|_W = \sigma_i$. Entonces tenemos que $\hat{\varphi} = \hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_k$ es la extensión a T de φ, pues $\hat{\varphi}|_W = (\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_k)|_W = \sigma_1, ..., \sigma_k = \varphi$. □

Ligamiento en ST_7

Residuos de T_3 en ST_7

Recordemos que $\Omega(T_3, ST_7) = \{\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,5\}\}$. El residuo de $\{0,1,2\}$ induce un T_4^3, que es rígido por lo que, claramente, es ligado en ST_7.

$ST_7 - \{0,1,3\} = \{2,4,5,6\}$, el cual induce un T_4^2 no es rígido pero si está ligado en ST_7, pues tenemos que los automorfismos de este residuo dejan fijo al 6 y giran al triángulo cíclico $\{4,5,6\}$ así que por el lema 5.3, basta ver que un automorfismo generador del grupo de automorfismo del $\{0,1,3\}$-residuo se puede extender a un automorfismo de ST_7. Sea $\varphi(x) = 2x+1$, se puede ver que $\varphi(6) = 6$, $\varphi(\{3,4,6\}) = \{3,4,6\}$ y $\varphi(\{0,1,3\}) = \{0,1,3\}$.

El subtorneo $ST_7 - \{0,1,5\} = \{2,3,4,6\}$ que induce un T_4^1, análogamente que el residuo de $\{0,1,3\}$ no es rígido pero se tiene que el isomorfismo generador $\varphi(x) = 2x+5$ se extiende en ST_7.

Residuos de T_4 en ST_7

Tenemos que $\Omega(T_4, ST_7) = \{\{0,1,3,6\}, \{0,1,4,6\}, \{0,1,2,6\}\}$.

$ST_7 - \{0,1,3,6\} = \{2,4,5\}$ es un triángulo cíclico, donde el automorfismo $\varphi(x) = 4x+3$ es un generador del grupo de automorfismo de $\{2,4,5\}$ que se extiende a ST_7 pues $\varphi(\{0,1,3,6\}) = \{3,0,1,6\}$.

$ST_7 - \{0,1,4,6\} = \{2,3,5\}$ también induce un triángulo cíclico y el automorfismo generador que se extiende a ST_7 es $\varphi(x) = 2x+6$.

El subtorneo $ST_7 - \{0,1,2,6\} = \{3,4,5\}$ es un triángulo acíclico así que es rígido y por lo tanto está ligado en ST_7.

Ligamiento en ST_{11}

Residuos de $\mathbf{T}_3$ en ST_{11}

Sabemos que $\Omega(\mathbf{T}_3, ST_{11}) = \{\{0,1,4\}, \{0,1,5\}, \{0,1,2\}\}$. Como en $ST_{11} - \{0,1,4\}$ tiene un único vértice de invalencia 2, el vértice 5, éste debe quedarse fijo bajo cualquier automorfismo de $ST_{11} - \{0,1,4\}$, así como también queda invariante la invecindad de 5, $\{2,7\}$, lo cual implica que 2 y 7 también quedan fijos. Como 5 y 2 están fijos entonces tenemos que $N^{++}(\{2,5\}, ST_{11} - \{0,1,4\}) = \{3,6\}$ queda invariante, por lo tanto 3 y 6 quedan fijos. De aquí tenemos que $\{8,9,10\}$ también queda invariante pero este induce un triángulo acíclico por lo tanto $ST_{11} - \{0,1,4\}$ es rígido.

Como en $ST_{11} - \{0,1,5\}$ el vértice 7 es el único vértice con exvalencia 2, éste y sus exvecinos 8 y 10 se quedan fijos, de aquí se sigue que $N^{--}(\{7,8\}, ST_{11} - \{0,1,5\}) = \{3,4\}$ queda invariante, por lo que 3 y 4 están fijos, así que $\{2,6,9\}$ quedan invariante, pero $N^{+}(10, ST_{11} - \{0,1,5\}) \cap \{2,6,9\} = \{6,9\}$ también es un conjunto invariante, por lo tanto todos los vértices quedan fijos.

En $ST_{11} - \{0,1,2\}$ tenemos que 5 es el único vértice con invalencia 2 y 8 el único con exvalencia 2 por lo que 5, sus invecinos 4 y 7, 8 y sus exvecinos 6 y 9, quedan fijos de donde se sigue que los 2 vértices restantes también están fijos.

Residuos de $\mathbf{T}_4$ en ST_{11}

Tenemos que

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{T}_4, ST_{11}) &= \{\{0,1,4,5\}, \{0,1,2,8\}, \{0,3,9,10\}, \{0,1,2,6\}, \{0,1,2,3\}, \\ &\quad \{0,1,2,4\}\}\end{aligned}$$

En $ST_{11} - \{0,1,4,5\}$, 9 es el único vértice con invalencia 2 y 7 el único vértice con exvalencia 2. Así que 9 con sus respectivos invecinos, 6 y 8, y el

7 y sus exvecinos, 8 y 10 se quedan fijos, por lo que los dos vértices restantes también se fijan.

En $ST_{11} - \{0,1,2,8\}$, hay sólo dos vértices, 6 y 5, con invalencia 2 y también sólo 2, 7 y 10, con exvalencia 2, 7 por lo que se quedan fijos, pero $N^-(5, ST_{11} - \{0128\}) = \{3,9\}$ es un conjunto invariante, por lo tanto $ST_{11} - \{0,1,2,8\}$ es rígido.

Análogamente que en el caso anterior, en $ST_{11} - \{0,3,9,10\}$ hay únicamente dos vértices, que son 1 y 4, con invalencia 2 y sólo 2 con exvalencia 2, a saber 5 y 6. Así que $N^-(1, ST_{11} - \{0,3,9,10\}) = \{7,8\}$ es invariante por lo que se sigue que $ST_{11} - \{0,3,9,10\}$ también es rígido.

Como en $ST_{11} - \{0,1,2,6\}$ el vértice 8 es el único vértice con exvalencia 1 y su exvecino es 9, estos dos vértices se quedan fijos y como también existen sólo dos vértices con invalencia 2, los cuales son 5 y 4, estos y sus invecinos 7, 10 y 3 permanecen fijos. Por lo tanto es rígido.

En $ST_{11} - \{0,1,2,3\}$ tenenos a $\{4,5,6\}$ invariante, pues cada uno de los vértices en este conjunto tiene invalencia 2, de igual modo $\{8,9,10\}$ queda invariante pues es el conjunto de los vértices con exvalencia 2. Así que el vértice 7 se queda fijo, pero $N^+(7, ST_{11} - \{0,1,2,3\}) \cap \{4,5,6\} = 5$ y $N^-(7, ST_{11} - \{0,1,2,3\}) \cap \{8,9,10\} = 9$, lo cual implica que $ST_{11} - \{0,1,2,3\}$ es rígido.

Como 5 es el único vértice con un sólo invecino, el cual es el vértice 7, en $ST_{11} - \{0,1,2,4\}$, estos dos vértices están fijos, así como también los únicos vértices con exvalencia 2, el 8 y el 10, se quedan fijos, pero $N^+(10, ST_{11} - \{0,1,2,4\}) = \{3,8\}$ es invariante, por lo que 3 queda fijo y de igual modo 6 y 9. $ST_{11} - \{0,1,2,4\}$ es rígido.

Ligamiento en ST_{13}

Residuos de T_3 en ST_{13}

Recordemos que

$$\begin{aligned}\Omega(T_3, ST_{13}) = & \{\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,1,6\},\{0,2,3\},\{0,2,5\},\{0,1,4\},\\ & \{0,1,10\},\{0,1,7\},\{0,2,7\},\{0,2,8\}\}\end{aligned}$$

En $ST_{11} - \{0,1,2\}$ el único vértice con invalencia 3 es el vértice 3, por lo que queda fijo bajo cualquier automorfismo. Como su invecindad $\{7,10,11\}$ queda invariante así también la exvecindad común de $\{7,10,11\}$, es decir, el conjunto $\{3,12\}$. De aquí tenemos que 12 también queda fijo. Por lo que la exvecindad de 12, $N^+(12, ST_{13} - \{0,1,2\}) = \{4,5,8\}$, es un conjunto invariante, así como también $N^{+++}(\{4,5,8\}, ST_{13} - \{0,1,2\}) = 10$ de donde se tiene que 10 queda fijo y, por consiguiente, 7 y 11. Otro conjunto invariante es $N^+(11, ST_{13} - \{0,1,2\}) = \{3,4,7,12\}$, de donde todos sus elementos a excepción del vértice 4, estaban fijos por lo que 4 también queda fijo y esto implica que 5 y 8 están fijos y por lo tanto el vértice restante, 6, también lo está. Así que $ST_{13} - \{0,1,2\}$ es rígido.

Análogamente que en el caso anterior, en $ST_{13} - \{0,1,3\}$, 6 es el único vértice con invalencia 3, pero su invecindad $\{4,5,10\}$ induce un triángulo acíclico, por lo que tenemos que $4,5,6$ y 10 están fijos. Veamos ahora a la exvecindad del vértice 4. $N^+(4, ST_{13} - \{0,1,3\}) = \{5,6,7,9,10\}$ es un conjunto invariante con $5,6$ y 10 vértices fijos, por lo tanto 7 y 9 también lo están. Los restantes vértices $\{2,8,11,12\}$ inducen un T_4^3, el cual es rígido. Por lo tanto $ST_{13} - \{0,1,3\}$ es rígido.

También en $ST_{13} - \{0,1,6\}$, 2 es el único vértice con invalencia 3 y su invecindad $\{9,10,12\}$ es un triángulo acíclico, así que $2,9,10$ y 12 son vértices que permanecen fijos bajo cualquier automorfismo. Tenemos que la exvecindad del 9, $\{2,5,10,11,12\}$, es un conjunto invariante, por lo que se tiene que 5 y 11 están fijos y el conjunto restante de vértices, $\{3,4,7,8\}$ es rígido por ser un T_4^3. Así que $ST_{13} - \{0,1,6\}$ es rígido.

El vértice 5 es el único con invalencia 3 en $ST_{13} - \{0,2,3\}$ y el vértice 10 el único con exvalencia 3, así que permanecen fijos así como permanecen invariantes los conjuntos $N^+(5, ST_{13} - \{0,2,3\}) = \{1,6,7,8,10,11\}$ y $N^-(10, ST_{13} - \{0,2,3\}) = \{1,4,5,7,8,9\}$, por lo que su intersección $\{1,7,8\}$ también queda invariante, de esto se sigue que los vértices 6, 11, 4 y 9 están fijos así como también el vértice 12. Pero tenemos que $N^+(\{9\}, ST_{13} - \{0,2,3\}) \cap \{1,7,8\} = \{1\}$, lo que implica que $1,7$ y 8 estan fijos y por consiguiente 12. Por lo tanto $ST_{13} - \{0,2,3\}$ es rígido.

En el residuo de $\{0,2,5\}$ hay un único vértice, 12, con exvalencia 3 y cuya invecindad, $\{1,4,8\}$, induce un triángulo acíclico. Por lo que tenemos que $1,4,8$ y 12 están fijos bajo cualquier automorfismo del residuo. Además la exvecindad del 8, $\{9,10,11\}$, induce un triángulo acíclico por lo que $9,10$ y 11 también se quedan fijos. Tenemos también que $N^+(4, ST_{13} - \{0,2,5\}) = \{6,7,9,10\}$ queda invariante, de donde se tiene que 6 y 7 están fijos y por lo tanto 3. De nuevo tenemos que $ST_{13} - \{0,2,5\}$ es rígido.

En $ST_{13} - \{0,1,4\}$, 6 es el único vértice que tiene invalencia 3, así que queda fijo y su invecindad, $\{3,5,10\}$, invariante. Ahora tenemos que $N^{---}(\{0,1,4\}, ST_{13}) = \{8,11,12\}$ es el conjunto de vértices con exvalencia 3, por lo que queda invariante y por consiguiente el conjunto restante $\{2,7,9\}$ también. Además tenemos que $B_1 = \{8,11,12\}$, $B_2 = \{3,5,10\}$ y $B_3 = \{3,5,10\}$ son triángulos cíclicos. Nótese que los únicos posibles automorfismos de $ST_{13} - \{0,1,4\}$ quedan determinados por un automorfismo del triángulo cíclico B_1, ya que existe una única flecha que va de cada vértice de B_1 a B_2 (respect. B_3) y tales flechas son independientes. Si σ es un automorfismo que manda a 8 en 11 entonces $\overline{\sigma}(x) = 9x + 4$ extiende a σ a todo ST_{13}. Los otros automorfismos son generados por $\sigma, (\sigma^2, I\sigma)$, por lo tanto $ST_{13} - \{0,1,4\}$ está ligado en ST_{13}.

En $ST_{13} - \{0,1,10\}$, hay un único vértice con exvalencia 3, el cual es el

8. Su exvecindad $\{4, 9, 11\}$ es invariante bajo cualquier automorfismo. El conjunto $N^{+++}(\{0, 1, 10\}, ST_{13}) = \{2, 3, 6\}$ es el conjunto de vértices con invalencia 3, así que es invariante y también lo es el conjunto restante $\{5, 7, 12\}$. Todos estos inducen triángulos cíclicos. Sea $B_1 = \{4, 9, 11\}$, $B_2 = \{2, 3, 6\}$ y $B_3 = \{5, 7, 12\}$. Así que análogamente al caso anterior los automorfismos de $ST_{13} - \{0, 1, 4\}$ están, determinados por un automorfismo de B_1. Así que si σ es un automorfismo tal que $\sigma(4) = 9$ entonces $\overline{\sigma}(x) = 3x + 10$ es el automorfismo que extiende a σ en todo ST_{13}. Así que $ST_{13} - \{0, 1, 10\}$ está ligado en ST_{13}.

3 es el único vértice en $ST_{13} - \{0, 1, 7\}$ que tiene invalencia 3, además de que su invecindad, $\{2, 10, 11\}$, induce un triángulo acíclico, por lo tanto los vértices $2, 3, 10$ y 11 quedan fijos bajo cualquier automorfismo. Tenemos entonces que $N^+(10, ST_{13} - \{0, 1, 7\}) = \{2, 3, 6, 11, 12\}$ es invariante por lo que los vértices 6 y 12 también están fijos. Pero el conjunto de los vértices restantes induce un T_4^3, por lo tanto $ST_{13} - \{0, 1, 7\}$ es rígido.

En el subtorneo $ST_{13} - \{0, 2, 7\}$, hay un único vértice, el vértice 3, con invalencia 3, por lo cual se queda fijo. Sea $B_1 = N^-(3, ST_{13} - \{0, 2, 7\}) = \{1, 10, 11\}$, $B_2 = N^{---}(\{1, 10, 11\}, ST_{13} - \{0, 2, 7\}) = \{5, 8, 9\}$ y $B_3 = \{4, 6, 12\}$. Todos ellos inducen triángulos cíclicos y además son conjuntos invariantes bajo cualquier automorfismo. Procedemos de forma análoga a como lo hicimos anteriormente y vemos que cualquier automorfismo de B_3 determina un automorfismo en $ST_{13} - \{0, 2, 7\}$, puesto que cada vértice en B_3 tiene un único exvecino (resp. invecino)en B_1 (resp. B_2) y en particular el automorfismo $\overline{\sigma}(x) = 2x + 11$ de B_2 que manda el 4 al 6 se extiende a un automorfismo de ST_{13}. Por lo que el residuo de $\{0, 2, 7\}$ está ligado.

En $ST_{13} - \{0, 2, 8\}$, el vértice 12, es el único con exvalencia 3, por lo que está fijo. Tenemos que $B_1 = N^+(12, ST_{13} - \{0, 2, 8\}) = \{1, 4, 5\}$, $B_2 = N^{+++}(\{1, 4, 5\}, ST_{13} - \{0, 2, 8\}) = \{6, 7, 10\}$ y $B_3 = \{3, 9, 11\}$ son triángulos cíclicos invariantes bajo cualquier automorfismo. Como cada vértice de B_3 tiene un sólo invecino de B_1 y un solo exvecino de B_2, entonces un automorfismo de B_3 determina un automorfismo de $ST_{13} - \{0,2,8\}$. En particular un automorfismo de B_3 que manda el 4 al 6 se extiende al automorfismo $\overline{\sigma}(x) = 3x + 7$ de ST_{13}. Por lo tanto $ST_{13} - \{0,2,8\}$ está ligado.

Residuos de $\mathbf{T}_4$ en ST_{13}

Sabemos que

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{T}_4, ST_{13}) \quad = \quad & \{\{0,1,2,3\}, \{0,1,3,6\}, \{0,1,2,6\}, \{0,2,3,5\},\\ & \{0,1,4,8\}, \{0,1,8,10\}, \{0,1,7,11\}, \{0,2,8,12\},\\ & \{0,5,9,12\}, \{0,3,5,12\}, \{0,1,5,11\}, \{0,2,6,12\},\\ & \{0,1,2,8\}, \{0,1,2,11\}, \{0,1,3,8\}, \{0,1,3,12\},\\ & \{0,1,6,8\}, \{0,1,6,11\}, \{0,1,6,12\}, \{0,2,3,12\},\\ & \{0,2,5,10\}\}\end{aligned}$$

En $ST_{13} - \{0,1,2,3\}$, tenemos que $N^{+_3-}(\{0,1,2,3\}, ST_{13}) = \{6,4,5\}$ es el conjunto de los vértices con invalencia 3, así que queda invariante, de igual manera el conjunto $N^{-_3+}(\{0,1,2,3\}, ST_{13} - \{0,1,2,3\}) = \{10,11,12\}$ también es invariante, pero estos dos conjuntos inducen triángulos acíclicos por lo que los vértices $4,5,6,10,11$ y 12 quedan fijos y el conjunto $\{7,8,9\}$ también es invariante e induce un triángulo acíclico, por lo tanto $ST_{13} - \{0,1,2,3\}$ es rígido.

En $ST_{13} - \{0,1,3,6\}$, hay dos únicos vértices, 2 y 9, que tiene invalencia 3 y sólo dos vértices, 10 y 11, con exvalencia 3. Por lo que quedan fijos. Así que $N^+(9, ST_{13} - \{0,1,3,6\}) = \{2,5,10,11,12\}$ queda invariante, de donde se tiene que 5 y 12 están fijos y además $N^+(11, ST_{13} - \{0,1,3,6\}) = \{4,7,12\}$ es invariante también, por lo que 4 y 7 están fijos y 8 también. Así que $ST_{13} - \{0,1,3,6\}$ es rígido.

En el residuo de $\{0,1,2,6\}$ en ST_{13}, hay sólo dos vértices, 3 y 7, que tienen invalencia 3 y únicamente $2,10$ y 12 con exvalencia 3, los cuales se quedan fijos. El conjunto $N^+(7, ST_{13} - \{0,1,2,6\}) = \{3,8,9,10,12\}$ es invariante, así que los vértices 8 y 9 están fijos. Análogamente $N^+(3, ST_{13}-\{0,1,2,6\}) = \{4,5,8,9,12\}$ es invariante, de donde se sigue que los vértices 4 y 5 son fijos y por consiguiente el vértice restante. Así que este residuo es rígido.

Los vértices 6 y 8, y los vértices 10 y 12 se quedan fijos en $ST_{13}-\{0,2,3,5\}$ pues los primeros son los únicos vértices con invalencia 3 y los segundos los únicos con exvalencia 3. Así que $N^-(6, ST_{13} - \{0,2,3,5\}) = \{7,8,9,11,12\}$ es invariante, por lo que el conjunto $\{7,9,11\}$ es invariante. Además el conjunto $N^+(8, ST_{13} - \{0,2,3,5\}) = \{1,4,9,10,11\}$ es invariante, pero como $\{1,4,9,10,11\} \cap \{7,9,11\} = \{9,11\}$, el 9 y el 11 están fijos y por consiguiente los vértices $1, 4$ y 7. Por lo tanto $ST_{13} - \{0,2,3,5\}$ es rígido.

En $ST_{13} - \{0,1,4,8\}$, 12 es el único vértice con exvalencia 2, así que 12 y sus exvecinos 2 y 5 están fijos bajo cualquier automorfismo de $ST_{13} - \{0,1,4,8\}$. Así que $N^+(2, ST_{13} - \{0,1,4,8\}) = \{3,5,7,11\}$ queda invariante por lo que el conjunto $\{3,7,11\}$ es invariante también, pero éste induce un triángulo acíclico, por lo que 6 y 9 están fijos y por lo tanto 10. Así que es rígido.

En $ST_{13} - \{0,1,8,10\}$, los conjuntos $B_1 = N^{+3-}(\{0,1,8,10\}, ST_{13}) = \{2,3,6\}$ y $B_2 = N^{-3+}(\{0,1,8,10\}, ST_{13}) = \{5,7,12\}$ son invariantes pues el primero es el conjunto de los vértices con invalencia 3 y el segundo el de vértices de exvalencia 3, así que $B_3 = \{4,9,11\}$ también lo es. Como procedimos anteriormente, cada automorfismo de $ST_{13} - \{0,1,8,10\}$ es determinado por un automorfismo de B_1, puesto que cada vértice de B_1 sólo tiene un único invecino en B_2 y en B_3, respectivamente. Así que el automorfismo σ de B_1 que manda el 2 al 3, el cual genera a cualquier otro automorfismo, puede ser extendido por el automorfismo $\overline{\sigma}(x) = 3x + 10$ de ST_{13}. Así que está ligado en ST_{13}.

El vértice 3 es el único vértice en $ST_{13} - \{0,1,7,11\}$ que tiene invalencia 2, por lo que 3 y sus invecinos, 2 y 10 se quedan fijos. Así que $N^+(10, ST_{13} - \{0,1,7,11\}) = \{2,3,6,12\}$ es invariante por lo que 6 y 12 están fijos. Pero el conjunto de los vértices restantes, $\{4,5,8,9\}$ inducen un T_4^3 por lo tanto $ST_{13} - \{0,1,7,11\}$ es rígido.

En el residuo de la cuaterna $\{0,2,8,12\}$, tenemos que los conjuntos $B_1 = N^{+s-}(\{0,2,8,12\}, ST_{13}) = \{1,4,5\}$ y $B_2 = N^{-s+}(\{0,2,8,12\}, ST_{13}) = \{6,7,10\}$ son conjuntos invariantes e inducen triángulos cíclicos, por consiguiente, $B_3 = \{3,9,11\}$ también es invariante, además de que induce un triángulo cíclico. Como lo hicimos anteriormente, determinamos cualquier automorfismo de $ST_{13} - \{0,2,8,12\}$ por una potencia del automorfismo σ de B_3 que manda el 3 al 9, pues cada vértice de B_3 tiene un exvecino en B_2 y un invecino en B_1 y se puede extender al automorfismo $\overline{\sigma}(x) = 9x + 8$ de ST_{13}. Por lo tanto $ST_{13} - \{0,2,8,12\}$ es ligado.

En $ST_{13} - \{0,5,9,12\}$ hay un único vértice con invecindad 2, el cual es el vértice 1, por lo que 1 y sus invecinos, 8 y 11, están fijos. Así que el conjunto $N^+(8, ST_{13} - \{0,5,9,12\}) = \{1,4,10,11\}$ es invariante, de donde se sigue que 4 y 10 también están fijos. Pero el conjunto de los vértices restantes inducen un T_4^3. Así que este residuo es rígido.

Los conjuntos $B_1 = N^{+s-}(\{0,3,5,12\}, ST_{13}) = \{1,6,8\}$ y $B_2 = (\{0,3,5,12\}, ST_{13}) = \{7,10,11\}$ son triángulos cíclicos invariantes en $ST_{13} - \{0,3,5,12\}$ por lo que $B_3 = \{2,4,9\}$, también lo es. Como cada vértice de B_1 tiene un sólo invecino en B_2 y B_3 respectivamente, nos fijamos en el automorfismo σ que manda el 1 al 6 el cual se extiende al automorfismo $\overline{\sigma}(x) = 3x + 3$. Por lo que $ST_{13} - \{0,3,5,12\}$ es ligado.

En $ST_{13} - \{0,1,5,11\}$ los conjuntos $B_1 = N^{+s-}(\{0,1,5,11\}, ST_{13}) = \{3,6,7\}$ y $B_2 = N^{-s+}(\{0,1,5,11\}, ST_{13}) = \{8,9,12\}$ permanecen invariantes, así que $B_3 = \{2,4,10\}$ también. Como cada vértice de B_3 tiene un único exvecino en B_1 y B_2, respectivamente, entonces nos fijamos en el automorfismo σ que manda el 2 al 10, el cual se extiende al automorfismo $\overline{\sigma}(x) = 9x+5$. Así que está ligado en ST_{13}.

El único vértice en $ST_{13} - \{0,2,6,12\}$ con exvecindad 2 es el vértice 10, así que él y sus exvecinos 3 y 11 se quedan fijos. Por lo que $N^+(11, ST_{13} - \{0,2,6,12\}) = \{1,3,4,7\}$ es invariante, por lo que $\{1,4,7\}$ también lo es, pero éste induce un triángulo acíclico por lo que 1, 4 y 7 están fijos. También $N^+(4, ST_{13} - \{0,2,6,12\}) = \{5,7,9,10\}$ es invariante, de donde se tiene que 5 y 7 están fijos y por lo tanto 8 también lo está. Así que es rígido.

En $ST_{13} - \{0,1,2,8\}$ hay un único vértice, 12, con exvecindad 2. Así que queda fijo al igual que 4 y 5, que son sus exvecinos. El conjunto $N^+(4, ST_{13} - \{0,1,2,8\}) = \{5,6,7,9,10\}$ es invariante por lo que $\{6,7,9,10\}$ también lo es, pero además induce un T_4^3, por lo que cada vértice de este conjunto está fijo, así que los dos vértices restantes, 3 y 11, también lo está. Por lo tanto es rígido.

El vértice 3 es el único vértice en $ST_{13} - \{0,1,2,11\}$ con invalencia 2, por lo que está fijo así como también 7 y 10, sus invecinos.Tenemos también que $N^+(10, ST_{13} - \{0,1,2,11\}) = \{3,6,12\}$ que es invariante por lo tanto 6 y 12 están fijos. Pero los vértices restantes $\{4,5,8,9\}$ inducen un T_4^3 por lo que $ST_{13} - \{0,1,2,11\}$ es rígido.

En el residuo de $\{0,1,3,8\}$ los conjuntos $N^{+_3-}(\{0,1,3,8\}, ST_{13}) = \{4,6,9\}$ y $N^{-_3+}(\{0,1,3,8\}, ST_{13}) = \{7,11,12\}$ aparte de ser conjuntos invariantes, inducen triángulos acíclicos, por lo que cada vértice en estos conjuntos están fijos. Ahora tenemos que $N^+(4, ST_{13} - \{0,1,3,8\}) = \{5,6,7,9,10\}$ es invariante, por lo que 5 y 10 están fijos. Y así mismo 2. Así que $ST_{13} - \{0,1,3,8\}$ es rígido.

El vértice 11 en $ST_{13} - \{0,1,3,12\}$ es el único vértice con exvalencia 2, así que 11, 4 y 7, estos dos últimos exvecinos de 11, se quedan fijos. Tenemos que $N^+(4, ST_{13} - \{0,1,3,12\}) = \{5,6,7,9,10\}$ es invariante, por lo que $\{5,6,9,10\}$ es invariante, pero induce un T_4^3, por lo que los vértices 5, 6, 9 y 10 están fijos. Así que los dos vértices restantes también lo están. Por lo tanto también es rígido.

Los conjuntos $N^{+_3-}(\{0,1,6,8\}, ST_{13}) = \{2,9\}$ y $N^{-_3+}(\{0,1,6,8\}, ST_{13})$

$= \{5,12\}$ en $ST_{13} - \{0,1,6,8\}$ quedan invariantes bajo cualquier automorfismo, así que cada vértice en estos conjuntos está fijo. Entonces $N^+(9, ST_{13} - \{0,1,6,8\}) = \{2,5,10,11,12\}$ es invariante por lo que 10 y 11 se quedan fijos. Además $N^+(5, ST_{13} - \{0,1,6,8\}) = \{7,10,11\}$ es invariante, lo que implica que 7 es fijo y por consiguiente 3 y 4. Así que es rígido.

En $ST_{13} - \{0,1,6,11\}$ los conjuntos $N^{+s-}(\{0,1,6,11\}, ST_{13}) = \{2,7,3\}$ y $N^{-s+}(\{0,1,6,11\}, ST_{13}) = \{5,8,10\}$ son invariantes y también inducen triángulos acíclicos y por lo tanto se quedan fijos cada vértice de estos conjuntos. Tenemos que el conjunto $N^+(2, ST_{13} - \{0,1,6,11\}) = \{3,4,5,7,8\}$ es invariante lo que implica que 4 está fijo. De igual manera tenemos $N^+(7, ST_{13} - \{0,1,6,11\}) = \{3,8,9,10,12\}$ es invariante e implica que 9 y 12 están fijos. Por lo que también $ST_{13} - \{0,1,6,11\}$ es rígido.

El único vértice de invalencia 2 en $ST_{13} - \{0,1,6,12\}$ es el vértice 2, así que 2 y sus invecinos, 9 y 10, estan fijos. Así que $N^+(10, ST_{13} - \{0,1,6,12\}) = \{2,3,11\}$ es invariante, de donde se tiene que 3 y 11 están fijos. Además el conjunto de los vértices restantes $\{4,5,7,8\}$ inducen un T_4^3. Por lo tanto $ST_{13} - \{0,1,6,12\}$ es rígido.

Los vértices 5 y 10 son los únicos en $ST_{13} - \{0,2,3,12\}$ que tienen invalencia y exvalencia 2, respectivamente. Así que 5 y sus invecinos, 4 y 9, y 10 y sus exvecinos, 6 y 11, están fijos. Tenemos que el conjunto $N^+(4, ST_{13} - \{0,2,3,12\}) = \{5,6,7,9,10\}$ es invariante, lo que implica que 7 está fijo y por consiguiente los dos vértices que restan, 1 y 8. Así que $ST_{13} - \{0,2,3,12\}$ es rígido.

Y por último, en el subtorneo $ST_{13} - \{0,2,5,10\}$ los conjuntos $B_1 = N^{+s-}(\{0,2,5,10\}, ST_{13}) = \{3,6,11\}$ y $B_2 = N^{-s+}(\{0,2,5,10\}, ST_{13}) = \{4,9,12\}$ quedan invariantes y por consiguiente $B_3 = \{1,7,8\}$ también. Como 3 es el único vértice en B_1 que tiene un solo exvecino en B_2 por lo tanto fija cada vértice en B_1 y 12 es el único vértice de B_2 que es invecino de todos los vértices de B_1, por lo que cada vértice de B_2 se queda fijo e implica que cada vértice de B_3 se fija. Por lo tanto también es rígido.

Lema 5.4. Todo τ_k-residuo en T está ligado en T si y solo si todos los residuos de miembros de $\Omega(\tau_k, T)$ están ligado en T.

Demostración. $\Longrightarrow$) es trivial.

$\Longleftarrow$) Sea Q un τ_k-residuo de T y $\alpha \in \Omega(\tau_k, T)$ en la misma órbita de $T - Q$, entonces existe $\sigma \in \mathbf{Aut}(T)$ tal que $\sigma(\alpha) = T - Q$ lo que nos lleva a que $\sigma(T - \alpha) = Q$, además $T - \alpha$ está ligado en T.

Sea $f \in \mathbf{Aut}(Q)$ entonces $\sigma^{-1} f \sigma \in \mathbf{Aut}(T - \alpha)$ y sea $\varphi \in \mathbf{Aut}(T)$ tal que $\varphi|_{T-\alpha} = \sigma^{-1} f \sigma$ de donde se sigue que $\sigma\varphi\sigma^{-1} \in \mathbf{Aut}(T)$ y $\sigma\varphi\sigma^{-1}|_Q = f$, pues para todo $x \in Q$, $\sigma\varphi\sigma^{-1}(x) = \sigma(\sigma^{-1} f \sigma)\sigma^{-1}(x) = f(x)$. □

De este lema se tiene como consecuencia directa el siguiente teorema.

Teorema 5.5. Sean T y T' torneos, con $T \in \{ST_7, ST_{11}, ST_{13}\}$ y T' isomorfo a T, entonces todo τ_k-residuo en T' está ligado en T' si y solo si todo miembro de $\Omega(\tau_k, T)$ está ligado en T.

Capítulo 6

Aplicaciones

Después del ánalisis hecho en el capítulo anterior queda probado el siguiente teorema.

Teorema 6.1. Sean $T \in \{ST_7, ST_{11}, ST_{13}\}$, T' y T'' dos torneos isomorfos a T tales que $T' \cap T''$ es un τ_k-residuo de ambos. Si $\Omega(\tau_k, T)$ distingue residuos y todos los residuos de los miembros de $\Omega(\tau_k, T)$ están ligados en T, entonces existe un isomorfismo $\varphi : T' \to T''$ tal que $\varphi|_{T' \cap T''} = Id_{T' \cap T''}$.

Demostración. Sea $\Psi : T' \to T''$ un isomorfismo y $Q = T' \cap T''$, entonces $\Psi(Q)$ es un τ_k-residuo de T' isomorfo a Q, por el teorema 5.2 están en la misma órbita, entonces existe $\sigma \in \mathbf{Aut}(T'')$ tal que $\sigma(Q) = \Psi(Q)$. Se sigue que $\sigma^{-1}\Psi|_Q \in \mathbf{Aut}(Q)$. Por el teorema 5.5, Q está ligado en T'' por lo que existe $\gamma \in \mathbf{Aut}(T'')$ tal que $\gamma|_Q = \sigma^{-1}\Psi|_Q$. Ahora sea $\varphi = \gamma^{-1}\sigma^{-1}\Psi$. φ es el isomorfismo que andamos buscando, pues $\gamma^{-1}\sigma^{-1}\Psi(q) = q$ ya que $\gamma(q) = \sigma^{-1}\Psi(q)$ por lo tanto $\varphi|_Q = Id_Q$ □

Como resultados directos de este teorema y de nuestro análasis hecho en el capítulo anterior se desprenden los siguientes corolarios.

Corolario 6.2. *Sean T' y T'' dos torneos isomorfos a ST_7 tal que $|T' \cap T''| \leq 5$. Si $\Omega(\tau_k, ST_7) = \Omega(\mathrm{T}_k, ST_7)$ con $k = 1,2,3,5$ y $\Omega(\tau_4, ST_7) =$*

$\{\{0,1,4,6\},\{0,1,2,6\}\}$, *entonces existe un isomorfismo* $\varphi : T' \to T''$ *tal que* $\varphi|_{T' \cap T''} = Id_{T' \cap T''}$.

Corolario 6.3. *Sean* T' *y* T'' *dos torneos isomorfos a* ST_{11} *tal que* $7 \leq |T' \cap T''| \leq 10$. *Si* $\Omega(\tau_k, ST_{11}) = \Omega(\mathbf{T}_k, ST_{11})$ *con* $k = 1,2,3,4$ *y entonces existe un isomorfismo* $\varphi : T' \to T''$ *tal que* $\varphi|_{T' \cap T''} = Id_{T' \cap T''}$.

Corolario 6.4. *Sean* T' *y* T'' *dos torneos isomorfos a* ST_{13} *tal que* $9 \leq |T' \cap T''| \leq 12$. *Si* $\Omega(\tau_k, ST_{13}) = \Omega(\mathbf{T}_k, ST_{13})$ *con* $k = 1,2,3,4$, *entonces existe un isomorfismo* $\varphi : T' \to T''$ *tal que* $\varphi|_{T' \cap T''} = Id_{T' \cap T''}$.

Observación 6.5. Para todo $x \in V(T' - Q)$, sea $z \in V(Q)$ si $(x,z) \in A(T')$ entonces $(\varphi(x), z) \in A(T'')$. Análogamente, si $(z,x) \in A(T')$ tenemos que $(z, \varphi(x)) \in A(T'')$, esto es que x y $\varphi(x)$ se comportan de la misma manera con respecto a los vértices de Q. Esto lo denotaremos de la siguiente manera $x \equiv \varphi(x)\, mod(Q)$.

A continuación se enunciarán y probarán tres teoremas, los cuales son una aplicación directa de este resultado. Antes de continuar necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 6.6. Todo T_{15} contiene dos subtorneos acíclicos de orden 5, T_5' y T_5'' que se intersectan en tres vértices.

La demostración de este lema puede verse en [6].

Lema 6.7. Para cada par de vértices u, w en ST_{11} existen dos conjuntos acíclicos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ de orden 4 ajenos, tal que $u \in \mathcal{U}$ y $w \in \mathcal{W}$.

Demostración. Como ST_{11} es transitivo en flechas, basta probarlo para los vértices 0 y 1. Tales conjuntos son $\mathcal{U}_0 = \{0,7,8,10\}$ y $\mathcal{U}_1 = \{1,2,5,6\}$. □

Una aplicación del corolario 6.3, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.8. Todo T_{16} tiene número dicromático a lo más 4.

Demostración. Sea T un torneo de orden 16 y supongamos que $(T) \geq 5$, por el lema 6.6, T contiene dos subtorneos acíclicos de orden 5, T_5' y T_5'' que se intersectan en exáctamente tres vértices. Además $T - T_5' \cong T - T_5'' \cong ST_{11}$ pues de otro modo, por la proposición 2.11, se tendría que $(T) \leq 4$. Sean $T' = T - T_5'$ y $T'' = T - T_5''$ nótese que T' y T'' son copias isomorfas de ST_{11} que se intersectan en 9 elementos. Sean (x', y') y (x'', y'') los arcos de $T_5' - T_5''$ y $T_5'' - T_5'$, respectivamente. Entonces, por el teorema 6.1

$$\begin{aligned} x' &\equiv x''\, mod(T - (T_5' - T_5'')\ \text{y} \\ y' &\equiv y''\, mod(T - (T_5' - T_5''). \end{aligned}$$

Sean W_1' y W_2' dos subtorneos acíclicos de orden 4 ajenos tales que $x' \in W_1'$ y $y' \in W_2'$ entonces $W_1 = W_1' \cup \{x''\}$ y $W_2 = W_2' \cup \{y''\}$ son dos subtorneos acíclicos de orden 5 ajenos. Así que a W_1 lo pintamos un color y a W_2 de otro y el residuo de $W_1 \cup W_2$ que tiene orden 6 lo puedo colorear con dos colores exactamente, lo cual es una contradicción, por lo tanto $(T_{16}) \leq 4$. □

Otra aplicación, corolario 6.4, es la siguiente.

Teorema 6.9. Sea T un torneo de orden 18 y $S \subset V(T)$ con cardinalidad 15, entonces existen dos subtorneos T_5' y T_5'' acíclicos, ajenos tales que $T_5' \subset T[S]$.

Demostración. Sea $\overline{T}_5'$ y $\overline{T}_5''$ dos subtorneos acíclicos de T de orden 5 con exáctamente 3 vértices en común. Sean $(x', y'), (x'', y'')$ las flechas que aparecen en $\overline{T}_5' - \overline{T}_5''$ y en $\overline{T}_5'' - \overline{T}_5'$ respectivamente. Si alguno de los residuos de $\overline{T}_5'$ ó $\overline{T}_5''$ contiene un TT_5 pues ya no hay nada que demostrar, en caso contrario ambos residuos son isomorfos a ST_{13} y $x' \equiv x''\, mod(T - (\overline{T}_5' \cup \overline{T}_5''))$ y $y' \equiv y''\, mod(T - (\overline{T}_5' \cup \overline{T}_5''))$ Como $T[S] - (\overline{T}_5' \cup \overline{T}_5'')$ tiene cardinalidad 8, existe un conjunto U acíclico de orden 4 que contiene a x' y 3 vértices de $T[S] - (\overline{T}_5' \cup \overline{T}_5'')$ y similarmente existe otro conjunto acíclico de cardinalidad 4, W, que contiene a y' ajeno a U,[4], y contenido en todo $T - (\overline{T}_5' \cup \overline{T}_5'')$ se sigue que $T[U \cup \{x''\}]$ y $T[W \cup \{y''\}]$ son los dos TT_5 requeridos. □

Por último tenemos una teorema que se desprende del teorema 6.1.

Teorema 6.10. Sean T' y T'' dos torneos isomorfos a $T \in \{ST_7, ST_{11}, ST_{13}\}$ y Q'_0 y Q''_0 dos $\mathbf{T}_k$-residuos en T' y T'', respectivamente, tal que existe un isomorfismo $\varphi_0 : Q'_0 \to Q''_0$ entonces existe un isomorfismo $\varphi : T' \to T''$ que extiende a φ_0.

Demostración. Sea $\gamma' : T \to T'$ y $\gamma'' : T \to T''$ isomorfismos. Tenemos que

$$\gamma'^{-1}(Q'_0) \cong \gamma''^{-1}(\varphi_0(Q'_0)) = \gamma''^{-1}(Q''_0)$$

Además $\gamma'^{-1}(Q'_0)$ y $\gamma''^{-1}(\varphi_0(Q'_0))$ son $\mathbf{T}_k$-residuos en T entonces están en la misma órbita por lo que existe $\sigma \in \mathbf{Aut}(T)$ tal que $\sigma(\gamma'^{-1}(Q'_0)) = \gamma''^{-1}(\varphi_0(Q'_0))$. Así que sea $\varphi = \gamma''\sigma\gamma'^{-1}$, entonces tenemos que

$$\varphi : T' \to T''$$

$$\text{tal que } \; \varphi|_{Q'_0} = \gamma''\sigma\gamma'^{-1}|_{Q'_0} = \varphi_0$$

pues $\gamma''\sigma\gamma'^{-1}(Q'_0) = \varphi(Q'_0)$. □

Apéndice

Tabla de las semivecindades de cada vértice en ST_7

u	$N^+(u, ST_7)$	$N^-(u, ST_7)$
0	$\{1,2,4\}$	$\{3,5,6\}$
1	$\{2,3,5\}$	$\{0,4,6\}$
2	$\{3,4,6\}$	$\{0,1,5\}$
3	$\{0,4,5\}$	$\{1,2,6\}$
4	$\{1,5,6\}$	$\{0,2,3\}$
5	$\{0,2,6\}$	$\{1,3,4\}$
6	$\{0,1,3\}$	$\{2,4,5\}$

Tabla de las semivecindades de cada vértice en ST_{11}

u	$N^+(u, ST_{11})$	$N^-(u, ST_{11})$
0	$\{1,3,4,5,9\}$	$\{2,6,7,8,10\}$
1	$\{2,4,5,6,10\}$	$\{0,3,7,8,9\}$
2	$\{0,3,5,6,7\}$	$\{1,4,8,9,10\}$
3	$\{1,4,6,7,8\}$	$\{0,2,5,9,10\}$
4	$\{2,5,7,8,9\}$	$\{0,1,3,6,10\}$
5	$\{3,6,8,9,10\}$	$\{0,1,2,4,7\}$
6	$\{0,4,7,9,10\}$	$\{1,2,3,5,8\}$
7	$\{0,1,5,8,10\}$	$\{2,3,4,6,9\}$
8	$\{0,1,2,6,9\}$	$\{3,4,5,7,10\}$
9	$\{1,2,3,7,10\}$	$\{0,4,5,6,8\}$
10	$\{0,2,3,4,8\}$	$\{1,5,6,7,9\}$

Tabla de las semivecindades de cada vértice en ST_{13}

u	$N^+(u, ST_{13})$	$N^-(u, ST_{13})$
0	$\{1,2,3,5,6,9\}$	$\{4,7,8,10,11,12\}$
1	$\{2,3,4,6,7,10\}$	$\{0,5,8,9,11,12\}$
2	$\{3,4,5,7,8,11\}$	$\{0,1,6,9,10,12\}$
3	$\{4,5,6,8,9,10\}$	$\{1,2,7,10,11\}$
4	$\{0,5,6,7,9,10\}$	$\{1,2,3,8,11,12\}$
5	$\{1,6,7,8,10,11\}$	$\{0,2,3,4,9,12\}$
6	$\{2,7,8,9,11,12\}$	$\{0,1,3,4,5,10\}$
7	$\{0,3,8,9,10,12\}$	$\{1,2,4,5,6,11\}$
8	$\{0,1,4,9,10,11\}$	$\{2,3,5,6,7,12\}$
9	$\{1,2,5,10,11,12\}$	$\{0,3,4,6,7,8\}$
10	$\{0,2,3,6,11,12\}$	$\{1,4,5,7,8,9\}$
11	$\{0,1,3,4,7,12\}$	$\{2,5,6,8,9,10\}$
12	$\{0,1,2,4,5,8\}$	$\{3,6,7,9,10,11\}$

La siguiente lista es obtenida a través de un programa de computación que calcula las órbitas de subtorneos en Torneos Circulantes. A continuación se dan todas las órbitas de los subtorneos de orden 3 y 4 en los torneos circulantes ST_7, ST_{11} y ST_{13}.

```
**** Particiones en orbitas de conjuntos de vertices en ST7 y ST11 *****

**** Orbitas en ST7

gap> OrbsOfGraphs(ST7,3); ** 3 vértices:

[ [ [ 1, 2, 3 ], [ 1, 2, 5 ], [ 1, 2, 7 ], [ 1, 3, 5 ], [ 1, 3, 6 ],
      [ 1, 4, 5 ], [ 1, 4, 6 ], [ 1, 4, 7 ], [ 1, 6, 7 ], [ 2, 3, 4 ],
      [ 2, 3, 6 ], [ 2, 4, 6 ], [ 2, 4, 7 ], [ 2, 5, 6 ], [ 2, 5, 7 ],
      [ 3, 4, 5 ], [ 3, 4, 7 ], [ 3, 5, 7 ], [ 3, 6, 7 ], [ 4, 5, 6 ],
      [ 5, 6, 7 ] ],
  [ [ 1, 2, 4 ], [ 1, 3, 7 ], [ 1, 5, 6 ], [ 2, 3, 5 ], [ 2, 6, 7 ],
      [ 3, 4, 6 ], [ 4, 5, 7 ] ],
  [ [ 1, 2, 6 ], [ 1, 3, 4 ], [ 1, 5, 7 ], [ 2, 3, 7 ], [ 2, 4, 5 ],
      [ 3, 5, 6 ], [ 4, 6, 7 ] ] ]

gap> OrbsOfGraphs(ST7,4); ** 4 vertices

[ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 1, 2, 3, 7 ], [ 1, 2, 4, 5 ], [ 1, 2, 4, 6 ],
      [ 1, 2, 5, 6 ], [ 1, 2, 6, 7 ], [ 1, 3, 4, 6 ], [ 1, 3, 4, 7 ],
      [ 1, 3, 5, 6 ], [ 1, 3, 5, 7 ], [ 1, 4, 5, 7 ], [ 1, 5, 6, 7 ],
      [ 2, 3, 4, 5 ], [ 2, 3, 5, 6 ], [ 2, 3, 5, 7 ], [ 2, 3, 6, 7 ],
      [ 2, 4, 5, 7 ], [ 2, 4, 6, 7 ], [ 3, 4, 5, 6 ], [ 3, 4, 6, 7 ],
      [ 4, 5, 6, 7 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 5 ], [ 1, 2, 4, 7 ], [ 1, 3, 6, 7 ], [ 1, 4, 5, 6 ],
      [ 2, 3, 4, 6 ], [ 2, 5, 6, 7 ], [ 3, 4, 5, 7 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 6 ], [ 1, 2, 5, 7 ], [ 1, 3, 4, 5 ], [ 1, 4, 6, 7 ],
      [ 2, 3, 4, 7 ], [ 2, 4, 5, 6 ], [ 3, 5, 6, 7 ] ] ]

*** Orbitas de 2 y de 5 vertices en ST7 solo hay una de cada una porque ST7
es
*** transitivo en flechas

####################################################################

*** Orbitas en ST11 ***

gap> OrbsOfGraphs(ST11,3); *** 3 vertices

[ [ [ 1, 2, 3 ], [ 1, 2, 7 ], [ 1, 2, 11 ], [ 1, 3, 5 ], [ 1, 3, 10 ],
      [ 1, 4, 7 ], [ 1, 4, 8 ], [ 1, 4, 9 ], [ 1, 5, 8 ], [ 1, 5, 9 ],
      [ 1, 6, 7 ], [ 1, 6, 9 ], [ 1, 6, 11 ], [ 1, 8, 10 ], [ 1, 10, 11 ],
      [ 2, 3, 4 ], [ 2, 3, 8 ], [ 2, 4, 6 ], [ 2, 4, 11 ], [ 2, 5, 8 ],
      [ 2, 5, 9 ], [ 2, 5, 10 ], [ 2, 6, 9 ], [ 2, 6, 10 ], [ 2, 7, 8 ],
      [ 2, 7, 10 ], [ 2, 9, 11 ], [ 3, 4, 5 ], [ 3, 4, 9 ], [ 3, 5, 7 ],
      [ 3, 6, 9 ], [ 3, 6, 10 ], [ 3, 6, 11 ], [ 3, 7, 10 ], [ 3, 7, 11 ],
      [ 3, 8, 9 ], [ 3, 8, 11 ], [ 4, 5, 6 ], [ 4, 5, 10 ], [ 4, 6, 8 ],
      [ 4, 7, 10 ], [ 4, 7, 11 ], [ 4, 8, 11 ], [ 4, 9, 10 ], [ 5, 6, 7 ],
      [ 5, 6, 11 ], [ 5, 7, 9 ], [ 5, 8, 11 ], [ 5, 10, 11 ], [ 6, 7, 8 ],
      [ 6, 8, 10 ], [ 7, 8, 9 ], [ 7, 9, 11 ], [ 8, 9, 10 ], [ 9, 10, 11 ]
 ],
  [ [ 1, 2, 4 ], [ 1, 2, 5 ], [ 1, 2, 8 ], [ 1, 3, 6 ], [ 1, 3, 8 ],
      [ 1, 3, 11 ], [ 1, 4, 10 ], [ 1, 4, 11 ], [ 1, 5, 6 ], [ 1, 5, 7 ],
      [ 1, 6, 10 ], [ 1, 7, 9 ], [ 1, 7, 11 ], [ 1, 8, 9 ], [ 1, 9, 10 ],
      [ 2, 3, 5 ], [ 2, 3, 6 ], [ 2, 3, 9 ], [ 2, 4, 7 ], [ 2, 4, 9 ],
      [ 2, 5, 11 ], [ 2, 6, 7 ], [ 2, 6, 8 ], [ 2, 7, 11 ], [ 2, 8, 10 ],
      [ 2, 9, 10 ], [ 2, 10, 11 ], [ 3, 4, 6 ], [ 3, 4, 7 ], [ 3, 4, 10 ],
      [ 3, 5, 8 ], [ 3, 5, 10 ], [ 3, 7, 8 ], [ 3, 7, 9 ], [ 3, 9, 11 ],
      [ 3, 10, 11 ], [ 4, 5, 7 ], [ 4, 5, 8 ], [ 4, 5, 11 ], [ 4, 6, 9 ],
      [ 4, 6, 11 ], [ 4, 8, 9 ], [ 4, 8, 10 ], [ 5, 6, 8 ], [ 5, 6, 9 ],
      [ 5, 7, 10 ], [ 5, 9, 10 ], [ 5, 9, 11 ], [ 6, 7, 9 ], [ 6, 7, 10 ],
      [ 6, 8, 11 ], [ 6, 10, 11 ], [ 7, 8, 10 ], [ 7, 8, 11 ], [ 8, 9, 11 ]
 ],
  [ [ 1, 2, 6 ], [ 1, 2, 9 ], [ 1, 2, 10 ], [ 1, 3, 4 ], [ 1, 3, 7 ],
      [ 1, 3, 9 ], [ 1, 4, 5 ], [ 1, 4, 6 ], [ 1, 5, 10 ], [ 1, 5, 11 ],
      [ 1, 6, 8 ], [ 1, 7, 8 ], [ 1, 7, 10 ], [ 1, 8, 11 ], [ 1, 9, 11 ],
      [ 2, 3, 7 ], [ 2, 3, 10 ], [ 2, 3, 11 ], [ 2, 4, 5 ], [ 2, 4, 8 ],
```

```
      [ 2, 4, 10 ], [ 2, 5, 6 ], [ 2, 5, 7 ], [ 2, 6, 11 ], [ 2, 7, 9 ],
      [ 2, 8, 9 ], [ 2, 8, 11 ], [ 3, 4, 8 ], [ 3, 4, 11 ], [ 3, 5, 6 ],
      [ 3, 5, 9 ], [ 3, 5, 11 ], [ 3, 6, 7 ], [ 3, 6, 8 ], [ 3, 8, 10 ],
      [ 3, 9, 10 ], [ 4, 5, 9 ], [ 4, 6, 7 ], [ 4, 6, 10 ], [ 4, 7, 8 ],
      [ 4, 7, 9 ], [ 4, 9, 11 ], [ 4, 10, 11 ], [ 5, 6, 10 ], [ 5, 7, 8 ],
      [ 5, 7, 11 ], [ 5, 8, 9 ], [ 5, 8, 10 ], [ 6, 7, 11 ], [ 6, 8, 9 ],
      [ 6, 9, 10 ], [ 6, 9, 11 ], [ 7, 9, 10 ], [ 7, 10, 11 ], [ 8, 10, 11 ]
    ] ]

gap> OrbsOfGraphs(ST11,4); *** 4 vertices

[ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 1, 2, 3, 11 ], [ 1, 2, 5, 9 ], [ 1, 2, 6, 7 ],
      [ 1, 2, 7, 8 ], [ 1, 2, 10, 11 ], [ 1, 3, 5, 7 ], [ 1, 3, 5, 10 ],
      [ 1, 3, 6, 9 ], [ 1, 3, 8, 10 ], [ 1, 4, 5, 8 ], [ 1, 4, 6, 9 ],
      [ 1, 4, 7, 9 ], [ 1, 4, 7, 10 ], [ 1, 4, 8, 11 ], [ 1, 5, 6, 11 ],
      [ 1, 5, 8, 9 ], [ 1, 6, 7, 11 ], [ 1, 6, 8, 10 ], [ 1, 9, 10, 11 ],
      [ 2, 3, 4, 5 ], [ 2, 3, 6, 10 ], [ 2, 3, 7, 8 ], [ 2, 3, 8, 9 ],
      [ 2, 4, 6, 8 ], [ 2, 4, 6, 11 ], [ 2, 4, 7, 10 ], [ 2, 4, 9, 11 ],
      [ 2, 5, 6, 9 ], [ 2, 5, 7, 10 ], [ 2, 5, 8, 10 ], [ 2, 5, 8, 11 ],
      [ 2, 6, 9, 10 ], [ 2, 7, 9, 11 ], [ 3, 4, 5, 6 ], [ 3, 4, 7, 11 ],
      [ 3, 4, 8, 9 ], [ 3, 4, 9, 10 ], [ 3, 5, 7, 9 ], [ 3, 5, 8, 11 ],
      [ 3, 6, 7, 10 ], [ 3, 6, 8, 11 ], [ 3, 6, 9, 11 ], [ 3, 7, 10, 11 ],
      [ 4, 5, 6, 7 ], [ 4, 5, 9, 10 ], [ 4, 5, 10, 11 ], [ 4, 6, 8, 10 ],
      [ 4, 7, 8, 11 ], [ 5, 6, 7, 8 ], [ 5, 6, 10, 11 ], [ 5, 7, 9, 11 ],
      [ 6, 7, 8, 9 ], [ 7, 8, 9, 10 ], [ 8, 9, 10, 11 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 5 ], [ 1, 2, 3, 8 ], [ 1, 2, 4, 7 ], [ 1, 2, 4, 11 ],
      [ 1, 2, 5, 8 ], [ 1, 2, 7, 11 ], [ 1, 3, 5, 8 ], [ 1, 3, 6, 10 ],
      [ 1, 3, 6, 11 ], [ 1, 3, 10, 11 ], [ 1, 4, 7, 11 ], [ 1, 4, 8, 9 ],
      [ 1, 4, 8, 10 ], [ 1, 4, 9, 10 ], [ 1, 5, 6, 7 ], [ 1, 5, 6, 9 ],
      [ 1, 5, 7, 9 ], [ 1, 6, 7, 9 ], [ 1, 6, 10, 11 ], [ 1, 8, 9, 10 ],
      [ 2, 3, 4, 6 ], [ 2, 3, 4, 9 ], [ 2, 3, 5, 8 ], [ 2, 3, 6, 9 ],
      [ 2, 4, 6, 9 ], [ 2, 4, 7, 11 ], [ 2, 5, 9, 10 ], [ 2, 5, 9, 11 ],
      [ 2, 5, 10, 11 ], [ 2, 6, 7, 8 ], [ 2, 6, 7, 10 ], [ 2, 6, 8, 10 ],
      [ 2, 7, 8, 10 ], [ 2, 9, 10, 11 ], [ 3, 4, 5, 7 ], [ 3, 4, 5, 10 ],
      [ 3, 4, 6, 9 ], [ 3, 4, 7, 10 ], [ 3, 5, 7, 10 ], [ 3, 6, 10, 11 ],
      [ 3, 7, 8, 9 ], [ 3, 7, 8, 11 ], [ 3, 7, 9, 11 ], [ 3, 8, 9, 11 ],
      [ 4, 5, 6, 8 ], [ 4, 5, 6, 11 ], [ 4, 5, 7, 10 ], [ 4, 5, 8, 11 ],
      [ 4, 6, 8, 11 ], [ 4, 8, 9, 10 ], [ 5, 6, 7, 9 ], [ 5, 6, 8, 11 ],
      [ 5, 9, 10, 11 ], [ 6, 7, 8, 10 ], [ 7, 8, 9, 11 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 6 ], [ 1, 2, 4, 8 ], [ 1, 2, 4, 9 ], [ 1, 2, 5, 7 ],
      [ 1, 2, 5, 11 ], [ 1, 2, 8, 10 ], [ 1, 3, 4, 10 ], [ 1, 3, 5, 6 ],
      [ 1, 3, 7, 11 ], [ 1, 3, 8, 9 ], [ 1, 3, 8, 11 ], [ 1, 4, 5, 7 ],
      [ 1, 4, 6, 11 ], [ 1, 4, 10, 11 ], [ 1, 5, 6, 8 ], [ 1, 5, 9, 10 ],
      [ 1, 6, 7, 10 ], [ 1, 6, 9, 10 ], [ 1, 7, 8, 9 ], [ 1, 7, 9, 11 ],
      [ 2, 3, 4, 7 ], [ 2, 3, 5, 9 ], [ 2, 3, 5, 10 ], [ 2, 3, 6, 8 ],
      [ 2, 3, 9, 11 ], [ 2, 4, 5, 11 ], [ 2, 4, 6, 7 ], [ 2, 4, 9, 10 ],
      [ 2, 5, 6, 8 ], [ 2, 6, 7, 9 ], [ 2, 6, 10, 11 ], [ 2, 7, 8, 11 ],
      [ 2, 7, 10, 11 ], [ 2, 8, 9, 10 ], [ 3, 4, 5, 8 ], [ 3, 4, 6, 10 ],
      [ 3, 4, 6, 11 ], [ 3, 4, 7, 9 ], [ 3, 5, 7, 8 ], [ 3, 5, 10, 11 ],
      [ 3, 6, 7, 9 ], [ 3, 7, 8, 10 ], [ 3, 9, 10, 11 ], [ 4, 5, 6, 9 ],
      [ 4, 5, 7, 11 ], [ 4, 5, 8, 10 ], [ 4, 6, 8, 9 ], [ 4, 7, 8, 10 ],
      [ 4, 8, 9, 11 ], [ 5, 6, 7, 10 ], [ 5, 6, 9, 11 ], [ 5, 7, 9, 10 ],
      [ 5, 8, 9, 11 ], [ 6, 7, 8, 11 ], [ 6, 8, 10, 11 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 7 ], [ 1, 2, 3, 10 ], [ 1, 2, 6, 9 ], [ 1, 2, 6, 11 ],
      [ 1, 2, 7, 10 ], [ 1, 2, 9, 11 ], [ 1, 3, 4, 5 ], [ 1, 3, 4, 9 ],
      [ 1, 3, 5, 9 ], [ 1, 3, 7, 10 ], [ 1, 4, 5, 9 ], [ 1, 4, 6, 7 ],
      [ 1, 4, 6, 8 ], [ 1, 4, 7, 8 ], [ 1, 5, 8, 10 ], [ 1, 5, 8, 11 ],
      [ 1, 5, 10, 11 ], [ 1, 6, 7, 8 ], [ 1, 6, 9, 11 ], [ 1, 8, 10, 11 ],
      [ 2, 3, 4, 8 ], [ 2, 3, 4, 11 ], [ 2, 3, 7, 10 ], [ 2, 3, 8, 11 ],
      [ 2, 4, 5, 6 ], [ 2, 4, 5, 10 ], [ 2, 4, 6, 10 ], [ 2, 4, 8, 11 ],
      [ 2, 5, 6, 10 ], [ 2, 5, 7, 8 ], [ 2, 5, 7, 9 ], [ 2, 5, 8, 9 ],
      [ 2, 6, 9, 11 ], [ 2, 7, 8, 9 ], [ 3, 4, 5, 9 ], [ 3, 4, 8, 11 ],
      [ 3, 5, 6, 7 ], [ 3, 5, 6, 11 ], [ 3, 5, 7, 11 ], [ 3, 6, 7, 11 ],
      [ 3, 6, 8, 9 ], [ 3, 6, 8, 10 ], [ 3, 6, 9, 10 ], [ 3, 8, 9, 10 ],
      [ 4, 5, 6, 10 ], [ 4, 6, 7, 8 ], [ 4, 7, 9, 10 ], [ 4, 7, 9, 11 ],
      [ 4, 7, 10, 11 ], [ 4, 9, 10, 11 ], [ 5, 6, 7, 11 ], [ 5, 7, 8, 9 ],
      [ 5, 8, 10, 11 ], [ 6, 8, 9, 10 ], [ 7, 9, 10, 11 ] ],
```

```
[ [ 1, 2, 3, 9 ], [ 1, 2, 4, 6 ], [ 1, 2, 5, 10 ], [ 1, 2, 6, 10 ],
      [ 1, 2, 7, 9 ], [ 1, 2, 8, 11 ], [ 1, 3, 4, 7 ], [ 1, 3, 4, 8 ],
      [ 1, 3, 5, 11 ], [ 1, 3, 6, 7 ], [ 1, 3, 9, 10 ], [ 1, 4, 5, 6 ],
      [ 1, 4, 5, 10 ], [ 1, 4, 9, 11 ], [ 1, 5, 7, 8 ], [ 1, 5, 9, 11 ],
      [ 1, 6, 8, 9 ], [ 1, 6, 8, 11 ], [ 1, 7, 8, 10 ], [ 1, 7, 10, 11 ],
      [ 2, 3, 4, 10 ], [ 2, 3, 5, 7 ], [ 2, 3, 6, 11 ], [ 2, 3, 7, 11 ],
      [ 2, 3, 8, 10 ], [ 2, 4, 5, 8 ], [ 2, 4, 5, 9 ], [ 2, 4, 7, 8 ],
      [ 2, 4, 10, 11 ], [ 2, 5, 6, 7 ], [ 2, 5, 6, 11 ], [ 2, 6, 8, 9 ],
      [ 2, 7, 9, 10 ], [ 2, 8, 9, 11 ], [ 3, 4, 5, 11 ], [ 3, 4, 6, 8 ],
      [ 3, 4, 9, 11 ], [ 3, 5, 6, 9 ], [ 3, 5, 6, 10 ], [ 3, 5, 8, 9 ],
      [ 3, 6, 7, 8 ], [ 3, 7, 9, 10 ], [ 3, 8, 10, 11 ], [ 4, 5, 7, 9 ],
      [ 4, 6, 7, 10 ], [ 4, 6, 7, 11 ], [ 4, 6, 9, 10 ], [ 4, 7, 8, 9 ],
      [ 4, 8, 10, 11 ], [ 5, 6, 8, 10 ], [ 5, 7, 8, 11 ], [ 5, 7, 10, 11 ],
      [ 5, 8, 9, 10 ], [ 6, 7, 9, 11 ], [ 6, 9, 10, 11 ] ],
  [ [ 1, 2, 4, 5 ], [ 1, 2, 4, 10 ], [ 1, 2, 5, 6 ], [ 1, 2, 6, 8 ],
      [ 1, 2, 8, 9 ], [ 1, 2, 9, 10 ], [ 1, 3, 4, 6 ], [ 1, 3, 4, 11 ],
      [ 1, 3, 6, 8 ], [ 1, 3, 7, 8 ], [ 1, 3, 7, 9 ], [ 1, 3, 9, 11 ],
      [ 1, 4, 5, 11 ], [ 1, 4, 6, 10 ], [ 1, 5, 6, 10 ], [ 1, 5, 7, 10 ],
      [ 1, 5, 7, 11 ], [ 1, 7, 8, 11 ], [ 1, 7, 9, 10 ], [ 1, 8, 9, 11 ],
      [ 2, 3, 5, 6 ], [ 2, 3, 5, 11 ], [ 2, 3, 6, 7 ], [ 2, 3, 7, 9 ],
      [ 2, 3, 9, 10 ], [ 2, 3, 10, 11 ], [ 2, 4, 5, 7 ], [ 2, 4, 7, 9 ],
      [ 2, 4, 8, 9 ], [ 2, 4, 8, 10 ], [ 2, 5, 7, 11 ], [ 2, 6, 7, 11 ],
      [ 2, 6, 8, 11 ], [ 2, 8, 10, 11 ], [ 3, 4, 6, 7 ], [ 3, 4, 7, 8 ],
      [ 3, 4, 8, 10 ], [ 3, 4, 10, 11 ], [ 3, 5, 6, 8 ], [ 3, 5, 8, 10 ],
      [ 3, 5, 9, 10 ], [ 3, 5, 9, 11 ], [ 4, 5, 7, 8 ], [ 4, 5, 8, 9 ],
      [ 4, 5, 9, 11 ], [ 4, 6, 7, 9 ], [ 4, 6, 9, 11 ], [ 4, 6, 10, 11 ],
      [ 5, 6, 8, 9 ], [ 5, 6, 9, 10 ], [ 5, 7, 8, 10 ], [ 6, 7, 9, 10 ],
      [ 6, 7, 10, 11 ], [ 6, 8, 9, 11 ], [ 7, 8, 10, 11 ] ] ]

gap> OrbsOfGraphs(ST11,5); *** 5 vertices

[ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 1, 2, 3, 4, 11 ], [ 1, 2, 3, 7, 8 ],
      [ 1, 2, 3, 10, 11 ], [ 1, 2, 4, 7, 10 ], [ 1, 2, 5, 6, 9 ],
      [ 1, 2, 5, 8, 9 ], [ 1, 2, 6, 7, 8 ], [ 1, 2, 6, 7, 11 ],
      [ 1, 2, 9, 10, 11 ], [ 1, 3, 4, 6, 9 ], [ 1, 3, 5, 7, 9 ],
      [ 1, 3, 5, 7, 10 ], [ 1, 3, 5, 8, 10 ], [ 1, 3, 6, 8, 10 ],
      [ 1, 3, 6, 9, 11 ], [ 1, 4, 5, 8, 9 ], [ 1, 4, 5, 8, 11 ],
      [ 1, 4, 6, 7, 9 ], [ 1, 4, 6, 8, 10 ], [ 1, 4, 7, 8, 11 ],
      [ 1, 4, 7, 9, 10 ], [ 1, 5, 6, 7, 11 ], [ 1, 5, 6, 10, 11 ],
      [ 1, 8, 9, 10, 11 ], [ 2, 3, 4, 5, 6 ], [ 2, 3, 4, 8, 9 ],
      [ 2, 3, 5, 8, 11 ], [ 2, 3, 6, 7, 10 ], [ 2, 3, 6, 9, 10 ],
      [ 2, 3, 7, 8, 9 ], [ 2, 4, 5, 7, 10 ], [ 2, 4, 6, 8, 10 ],
      [ 2, 4, 6, 8, 11 ], [ 2, 4, 6, 9, 11 ], [ 2, 4, 7, 9, 11 ],
      [ 2, 5, 6, 9, 10 ], [ 2, 5, 7, 8, 10 ], [ 2, 5, 7, 9, 11 ],
      [ 2, 5, 8, 10, 11 ], [ 3, 4, 5, 6, 7 ], [ 3, 4, 5, 9, 10 ],
      [ 3, 4, 7, 8, 11 ], [ 3, 4, 7, 10, 11 ], [ 3, 4, 8, 9, 10 ],
      [ 3, 5, 6, 8, 11 ], [ 3, 5, 7, 9, 11 ], [ 3, 6, 7, 10, 11 ],
      [ 3, 6, 8, 9, 11 ], [ 4, 5, 6, 7, 8 ], [ 4, 5, 6, 10, 11 ],
      [ 4, 5, 9, 10, 11 ], [ 5, 6, 7, 8, 9 ], [ 6, 7, 8, 9, 10 ],
      [ 7, 8, 9, 10, 11 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 4, 6 ], [ 1, 2, 3, 5, 11 ], [ 1, 2, 3, 8, 9 ],
      [ 1, 2, 4, 5, 8 ], [ 1, 2, 4, 7, 9 ], [ 1, 2, 4, 10, 11 ],
      [ 1, 2, 5, 6, 7 ], [ 1, 2, 5, 9, 10 ], [ 1, 2, 6, 8, 10 ],
      [ 1, 2, 7, 8, 11 ], [ 1, 3, 4, 7, 11 ], [ 1, 3, 4, 8, 10 ],
      [ 1, 3, 5, 6, 10 ], [ 1, 3, 5, 7, 8 ], [ 1, 3, 6, 7, 9 ],
      [ 1, 3, 6, 8, 11 ], [ 1, 3, 9, 10, 11 ], [ 1, 4, 5, 6, 11 ],
      [ 1, 4, 5, 7, 10 ], [ 1, 4, 6, 9, 10 ], [ 1, 4, 8, 9, 11 ],
      [ 1, 5, 6, 8, 9 ], [ 1, 5, 7, 9, 11 ], [ 1, 6, 7, 10, 11 ],
      [ 1, 7, 8, 9, 10 ], [ 2, 3, 4, 5, 7 ], [ 2, 3, 4, 9, 10 ],
      [ 2, 3, 5, 6, 9 ], [ 2, 3, 5, 8, 10 ], [ 2, 3, 6, 7, 8 ],
      [ 2, 3, 6, 10, 11 ], [ 2, 3, 7, 9, 11 ], [ 2, 4, 5, 9, 11 ],
      [ 2, 4, 6, 7, 11 ], [ 2, 4, 6, 8, 9 ], [ 2, 4, 7, 8, 10 ],
      [ 2, 5, 6, 8, 11 ], [ 2, 5, 7, 10, 11 ], [ 2, 6, 7, 9, 10 ],
      [ 2, 8, 9, 10, 11 ], [ 3, 4, 5, 6, 8 ], [ 3, 4, 5, 10, 11 ],
      [ 3, 4, 6, 7, 10 ], [ 3, 4, 6, 9, 11 ], [ 3, 4, 7, 8, 9 ],
      [ 3, 5, 7, 9, 10 ], [ 3, 5, 8, 9, 11 ], [ 3, 7, 8, 10, 11 ],
```

************ Orbitas de conjuntos de vertices en ST13 ********

```
gap> OrbsOfGraphs(ST13,3); *** 3 vertices
[ [ [ 1, 2, 3 ], [ 1, 2, 13 ], [ 1, 4, 7 ], [ 1, 4, 11 ], [ 1, 5, 9 ],
      [ 1, 5, 10 ], [ 1, 6, 10 ], [ 1, 8, 11 ], [ 1, 12, 13 ], [ 2, 3, 4 ],
      [ 2, 5, 8 ], [ 2, 5, 12 ], [ 2, 6, 10 ], [ 2, 6, 11 ], [ 2, 7, 11 ],
      [ 2, 9, 12 ], [ 3, 4, 5 ], [ 3, 6, 9 ], [ 3, 6, 13 ], [ 3, 7, 11 ],
      [ 3, 7, 12 ], [ 3, 8, 12 ], [ 3, 10, 13 ], [ 4, 5, 6 ], [ 4, 7, 10 ],
      [ 4, 8, 12 ], [ 4, 8, 13 ], [ 4, 9, 13 ], [ 5, 6, 7 ], [ 5, 8, 11 ],
      [ 5, 9, 13 ], [ 6, 7, 8 ], [ 6, 9, 12 ], [ 7, 8, 9 ], [ 7, 10, 13 ],
      [ 8, 9, 10 ], [ 9, 10, 11 ], [ 10, 11, 12 ], [ 11, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 4 ], [ 1, 2, 10 ], [ 1, 3, 13 ], [ 1, 4, 10 ], [ 1, 5, 6 ],
      [ 1, 5, 8 ], [ 1, 7, 11 ], [ 1, 9, 13 ], [ 1, 11, 12 ], [ 2, 3, 5 ],
      [ 2, 3, 11 ], [ 2, 5, 11 ], [ 2, 6, 7 ], [ 2, 6, 9 ], [ 2, 8, 12 ],
      [ 2, 12, 13 ], [ 3, 4, 6 ], [ 3, 4, 12 ], [ 3, 6, 12 ], [ 3, 7, 8 ],
      [ 3, 7, 10 ], [ 3, 9, 13 ], [ 4, 5, 7 ], [ 4, 5, 13 ], [ 4, 7, 13 ],
      [ 4, 8, 9 ], [ 4, 8, 11 ], [ 5, 6, 8 ], [ 5, 9, 10 ], [ 5, 9, 12 ],
      [ 6, 7, 9 ], [ 6, 10, 11 ], [ 6, 10, 13 ], [ 7, 8, 10 ], [ 7, 11, 12
],
      [ 8, 9, 11 ], [ 8, 12, 13 ], [ 9, 10, 12 ], [ 10, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 5 ], [ 1, 4, 13 ], [ 1, 10, 11 ], [ 2, 3, 6 ], [ 2, 11, 12 ],
      [ 3, 4, 7 ], [ 3, 12, 13 ], [ 4, 5, 8 ], [ 5, 6, 9 ], [ 6, 7, 10 ],
      [ 7, 8, 11 ], [ 8, 9, 12 ], [ 9, 10, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 6 ], [ 1, 2, 12 ], [ 1, 3, 4 ], [ 1, 4, 8 ], [ 1, 5, 11 ],
      [ 1, 5, 13 ], [ 1, 7, 10 ], [ 1, 9, 10 ], [ 1, 11, 13 ], [ 2, 3, 7 ],
      [ 2, 3, 13 ], [ 2, 4, 5 ], [ 2, 5, 9 ], [ 2, 6, 12 ], [ 2, 8, 11 ],
      [ 2, 10, 11 ], [ 3, 4, 8 ], [ 3, 5, 6 ], [ 3, 6, 10 ], [ 3, 7, 13 ],
      [ 3, 9, 12 ], [ 3, 11, 12 ], [ 4, 5, 9 ], [ 4, 6, 7 ], [ 4, 7, 11 ],
      [ 4, 10, 13 ], [ 4, 12, 13 ], [ 5, 6, 10 ], [ 5, 7, 8 ], [ 5, 8, 12 ],
      [ 6, 7, 11 ], [ 6, 8, 9 ], [ 6, 9, 13 ], [ 7, 8, 12 ], [ 7, 9, 10 ],
      [ 8, 9, 13 ], [ 8, 10, 11 ], [ 9, 11, 12 ], [ 10, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 7 ], [ 1, 3, 10 ], [ 1, 3, 11 ], [ 1, 4, 6 ], [ 1, 5, 7 ],
      [ 1, 6, 13 ], [ 1, 8, 9 ], [ 1, 8, 12 ], [ 1, 9, 12 ], [ 2, 3, 8 ],
      [ 2, 4, 11 ], [ 2, 4, 12 ], [ 2, 5, 7 ], [ 2, 6, 8 ], [ 2, 9, 10 ],
      [ 2, 9, 13 ], [ 2, 10, 13 ], [ 3, 4, 9 ], [ 3, 5, 12 ], [ 3, 5, 13 ],
      [ 3, 6, 8 ], [ 3, 7, 9 ], [ 3, 10, 11 ], [ 4, 5, 10 ], [ 4, 6, 13 ],
      [ 4, 7, 9 ], [ 4, 8, 10 ], [ 4, 11, 12 ], [ 5, 6, 11 ], [ 5, 8, 10 ],
      [ 5, 9, 11 ], [ 5, 12, 13 ], [ 6, 7, 12 ], [ 6, 9, 11 ], [ 6, 10, 12
],
      [ 7, 8, 13 ], [ 7, 10, 12 ], [ 7, 11, 13 ], [ 8, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 8 ], [ 1, 3, 5 ], [ 1, 3, 12 ], [ 1, 4, 9 ], [ 1, 6, 9 ],
      [ 1, 6, 11 ], [ 1, 7, 8 ], [ 1, 7, 13 ], [ 1, 10, 12 ], [ 2, 3, 9 ],
      [ 2, 4, 6 ], [ 2, 4, 13 ], [ 2, 5, 10 ], [ 2, 7, 10 ], [ 2, 7, 12 ],
      [ 2, 8, 9 ], [ 2, 11, 13 ], [ 3, 4, 10 ], [ 3, 5, 7 ], [ 3, 6, 11 ],
      [ 3, 8, 11 ], [ 3, 8, 13 ], [ 3, 9, 10 ], [ 4, 5, 11 ], [ 4, 6, 8 ],
      [ 4, 7, 12 ], [ 4, 9, 12 ], [ 4, 10, 11 ], [ 5, 6, 12 ], [ 5, 7, 9 ],
      [ 5, 8, 13 ], [ 5, 10, 13 ], [ 5, 11, 12 ], [ 6, 7, 13 ], [ 6, 8, 10
],
      [ 6, 12, 13 ], [ 7, 9, 11 ], [ 8, 10, 12 ], [ 9, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 9 ], [ 1, 3, 6 ], [ 1, 3, 7 ], [ 1, 4, 12 ], [ 1, 5, 12 ],
      [ 1, 6, 7 ], [ 1, 8, 10 ], [ 1, 8, 13 ], [ 1, 9, 11 ], [ 2, 3, 10 ],
      [ 2, 4, 7 ], [ 2, 4, 8 ], [ 2, 5, 13 ], [ 2, 6, 13 ], [ 2, 7, 8 ],
      [ 2, 9, 11 ], [ 2, 10, 12 ], [ 3, 4, 11 ], [ 3, 5, 8 ], [ 3, 5, 9 ],
      [ 3, 8, 9 ], [ 3, 10, 12 ], [ 3, 11, 13 ], [ 4, 5, 12 ], [ 4, 6, 9 ],
      [ 4, 6, 10 ], [ 4, 9, 10 ], [ 4, 11, 13 ], [ 5, 6, 13 ], [ 5, 7, 10 ],
      [ 5, 7, 11 ], [ 5, 10, 11 ], [ 6, 8, 11 ], [ 6, 8, 12 ], [ 6, 11, 12
],
      [ 7, 9, 12 ], [ 7, 9, 13 ], [ 7, 12, 13 ], [ 8, 10, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 11 ], [ 1, 4, 5 ], [ 1, 10, 13 ], [ 2, 3, 12 ], [ 2, 5, 6 ],
      [ 3, 4, 13 ], [ 3, 6, 7 ], [ 4, 7, 8 ], [ 5, 8, 9 ], [ 6, 9, 10 ],
      [ 7, 10, 11 ], [ 8, 11, 12 ], [ 9, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 3, 8 ], [ 1, 6, 12 ], [ 1, 7, 9 ], [ 2, 4, 9 ], [ 2, 7, 13 ],
      [ 2, 8, 10 ], [ 3, 5, 10 ], [ 3, 9, 11 ], [ 4, 6, 11 ], [ 4, 10, 12 ],
      [ 5, 7, 12 ], [ 5, 11, 13 ], [ 6, 8, 13 ] ],
  [ [ 1, 3, 9 ], [ 1, 6, 8 ], [ 1, 7, 12 ], [ 2, 4, 10 ], [ 2, 7, 9 ],
```

```
      [ 2, 8, 13 ], [ 3, 5, 11 ], [ 3, 8, 10 ], [ 4, 6, 12 ], [ 4, 9, 11 ],
      [ 5, 7, 13 ], [ 5, 10, 12 ], [ 6, 11, 13 ] ] ]


gap> OrbsOfGraphs(ST13,4); *** 4 vertices

[ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 1, 2, 3, 13 ], [ 1, 2, 6, 10 ], [ 1, 2, 12, 13 ],
      [ 1, 4, 7, 10 ], [ 1, 4, 7, 11 ], [ 1, 4, 8, 11 ], [ 1, 5, 6, 10 ],
      [ 1, 5, 8, 11 ], [ 1, 5, 9, 10 ], [ 1, 5, 9, 13 ], [ 1, 11, 12, 13 ],
      [ 2, 3, 4, 5 ], [ 2, 3, 7, 11 ], [ 2, 5, 8, 11 ], [ 2, 5, 8, 12 ],
      [ 2, 5, 9, 12 ], [ 2, 6, 7, 11 ], [ 2, 6, 9, 12 ], [ 2, 6, 10, 11 ],
      [ 3, 4, 5, 6 ], [ 3, 4, 8, 12 ], [ 3, 6, 9, 12 ], [ 3, 6, 9, 13 ],
      [ 3, 6, 10, 13 ], [ 3, 7, 8, 12 ], [ 3, 7, 10, 13 ], [ 3, 7, 11, 12 ],
      [ 4, 5, 6, 7 ], [ 4, 5, 9, 13 ], [ 4, 7, 10, 13 ], [ 4, 8, 9, 13 ],
      [ 4, 8, 12, 13 ], [ 5, 6, 7, 8 ], [ 6, 7, 8, 9 ], [ 7, 8, 9, 10 ],
      [ 8, 9, 10, 11 ], [ 9, 10, 11, 12 ], [ 10, 11, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 5 ], [ 1, 2, 4, 13 ], [ 1, 2, 5, 8 ], [ 1, 2, 5, 10 ],
      [ 1, 3, 12, 13 ], [ 1, 4, 7, 13 ], [ 1, 4, 9, 13 ], [ 1, 4, 10, 11 ],
      [ 1, 5, 6, 9 ], [ 1, 6, 10, 11 ], [ 1, 7, 8, 11 ], [ 1, 10, 11, 12 ],
      [ 2, 3, 4, 6 ], [ 2, 3, 6, 9 ], [ 2, 3, 6, 11 ], [ 2, 5, 11, 12 ],
      [ 2, 6, 7, 10 ], [ 2, 7, 11, 12 ], [ 2, 8, 9, 12 ], [ 2, 11, 12, 13 ],
      [ 3, 4, 5, 7 ], [ 3, 4, 7, 10 ], [ 3, 4, 7, 12 ], [ 3, 6, 12, 13 ],
      [ 3, 7, 8, 11 ], [ 3, 8, 12, 13 ], [ 3, 9, 10, 13 ], [ 4, 5, 6, 8 ],
      [ 4, 5, 8, 11 ], [ 4, 5, 8, 13 ], [ 4, 8, 9, 12 ], [ 5, 6, 7, 9 ],
      [ 5, 6, 9, 12 ], [ 5, 9, 10, 13 ], [ 6, 7, 8, 10 ], [ 6, 7, 10, 13 ],
      [ 7, 8, 9, 11 ], [ 8, 9, 10, 12 ], [ 9, 10, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 6 ], [ 1, 2, 5, 9 ], [ 1, 2, 5, 12 ], [ 1, 2, 5, 13 ],
      [ 1, 3, 4, 7 ], [ 1, 4, 8, 13 ], [ 1, 4, 11, 13 ], [ 1, 4, 12, 13 ],
      [ 1, 5, 10, 11 ], [ 1, 6, 7, 10 ], [ 1, 8, 10, 11 ], [ 1, 9, 10, 11 ],
      [ 2, 3, 4, 7 ], [ 2, 3, 6, 10 ], [ 2, 3, 6, 13 ], [ 2, 4, 5, 8 ],
      [ 2, 6, 11, 12 ], [ 2, 7, 8, 11 ], [ 2, 9, 11, 12 ], [ 2, 10, 11, 12
],
      [ 3, 4, 5, 8 ], [ 3, 4, 7, 11 ], [ 3, 5, 6, 9 ], [ 3, 7, 12, 13 ],
      [ 3, 8, 9, 12 ], [ 3, 10, 12, 13 ], [ 3, 11, 12, 13 ], [ 4, 5, 6, 9 ],
      [ 4, 5, 8, 12 ], [ 4, 6, 7, 10 ], [ 4, 9, 10, 13 ], [ 5, 6, 7, 10 ],
      [ 5, 6, 9, 13 ], [ 5, 7, 8, 11 ], [ 6, 7, 8, 11 ], [ 6, 8, 9, 12 ],
      [ 7, 8, 9, 12 ], [ 7, 9, 10, 13 ], [ 8, 9, 10, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 7 ], [ 1, 2, 6, 13 ], [ 1, 2, 9, 12 ], [ 1, 3, 4, 11 ],
      [ 1, 3, 6, 10 ], [ 1, 4, 6, 7 ], [ 1, 4, 8, 12 ], [ 1, 5, 7, 10 ],
      [ 1, 5, 9, 11 ], [ 1, 5, 12, 13 ], [ 1, 8, 9, 10 ], [ 1, 8, 11, 13 ],
      [ 2, 3, 4, 8 ], [ 2, 3, 10, 13 ], [ 2, 4, 5, 12 ], [ 2, 4, 7, 11 ],
      [ 2, 5, 7, 8 ], [ 2, 5, 9, 13 ], [ 2, 6, 8, 11 ], [ 2, 6, 10, 12 ],
      [ 2, 9, 10, 11 ], [ 3, 4, 5, 9 ], [ 3, 5, 6, 13 ], [ 3, 5, 8, 12 ],
      [ 3, 6, 8, 9 ], [ 3, 7, 9, 12 ], [ 3, 7, 11, 13 ], [ 3, 10, 11, 12 ],
      [ 4, 5, 6, 10 ], [ 4, 6, 9, 13 ], [ 4, 7, 9, 10 ], [ 4, 8, 10, 13 ],
      [ 4, 11, 12, 13 ], [ 5, 6, 7, 11 ], [ 5, 8, 10, 11 ], [ 6, 7, 8, 12 ],
      [ 6, 9, 11, 12 ], [ 7, 8, 9, 13 ], [ 7, 10, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 8 ], [ 1, 2, 7, 13 ], [ 1, 3, 5, 10 ], [ 1, 3, 8, 11 ],
      [ 1, 3, 8, 12 ], [ 1, 4, 6, 11 ], [ 1, 4, 7, 9 ], [ 1, 5, 7, 9 ],
      [ 1, 6, 9, 12 ], [ 1, 6, 10, 12 ], [ 1, 6, 12, 13 ], [ 1, 7, 8, 9 ],
      [ 2, 3, 4, 9 ], [ 2, 4, 6, 11 ], [ 2, 4, 9, 12 ], [ 2, 4, 9, 13 ],
      [ 2, 5, 7, 12 ], [ 2, 5, 8, 10 ], [ 2, 6, 8, 10 ], [ 2, 7, 10, 13 ],
      [ 2, 7, 11, 13 ], [ 2, 8, 9, 10 ], [ 3, 4, 5, 10 ], [ 3, 5, 7, 12 ],
      [ 3, 5, 10, 13 ], [ 3, 6, 8, 13 ], [ 3, 6, 9, 11 ], [ 3, 7, 9, 11 ],
      [ 3, 9, 10, 11 ], [ 4, 5, 6, 11 ], [ 4, 6, 8, 13 ], [ 4, 7, 10, 12 ],
      [ 4, 8, 10, 12 ], [ 4, 10, 11, 12 ], [ 5, 6, 7, 12 ], [ 5, 8, 11, 13
],
      [ 5, 9, 11, 13 ], [ 5, 11, 12, 13 ], [ 6, 7, 8, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 9 ], [ 1, 2, 8, 13 ], [ 1, 3, 5, 9 ], [ 1, 3, 6, 9 ],
      [ 1, 3, 7, 12 ], [ 1, 4, 7, 12 ], [ 1, 4, 9, 11 ], [ 1, 5, 10, 12 ],
      [ 1, 6, 7, 8 ], [ 1, 6, 8, 10 ], [ 1, 6, 8, 11 ], [ 1, 7, 12, 13 ],
      [ 2, 3, 4, 10 ], [ 2, 4, 6, 10 ], [ 2, 4, 7, 10 ], [ 2, 4, 8, 13 ],
      [ 2, 5, 8, 13 ], [ 2, 5, 10, 12 ], [ 2, 6, 11, 13 ], [ 2, 7, 8, 9 ],
      [ 2, 7, 9, 11 ], [ 2, 7, 9, 12 ], [ 3, 4, 5, 11 ], [ 3, 5, 7, 11 ],
      [ 3, 5, 8, 11 ], [ 3, 6, 11, 13 ], [ 3, 8, 9, 10 ], [ 3, 8, 10, 12 ],
      [ 3, 8, 10, 13 ], [ 4, 5, 6, 12 ], [ 4, 6, 8, 12 ], [ 4, 6, 9, 12 ],
      [ 4, 9, 10, 11 ], [ 4, 9, 11, 13 ], [ 5, 6, 7, 13 ], [ 5, 7, 9, 13 ],
```

```
      [ 5, 7, 10, 13 ], [ 5, 10, 11, 12 ], [ 6, 11, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 10 ], [ 1, 2, 4, 7 ], [ 1, 2, 9, 13 ], [ 1, 3, 6, 13 ],
      [ 1, 3, 7, 11 ], [ 1, 4, 6, 10 ], [ 1, 4, 11, 12 ], [ 1, 5, 6, 7 ],
      [ 1, 5, 8, 10 ], [ 1, 5, 9, 12 ], [ 1, 8, 9, 11 ], [ 1, 8, 12, 13 ],
      [ 2, 3, 4, 11 ], [ 2, 3, 5, 8 ], [ 2, 4, 8, 12 ], [ 2, 5, 7, 11 ],
      [ 2, 5, 12, 13 ], [ 2, 6, 7, 8 ], [ 2, 6, 9, 11 ], [ 2, 6, 10, 13 ],
      [ 2, 9, 10, 12 ], [ 3, 4, 5, 12 ], [ 3, 4, 6, 9 ], [ 3, 5, 9, 13 ],
      [ 3, 6, 8, 12 ], [ 3, 7, 8, 9 ], [ 3, 7, 10, 12 ], [ 3, 10, 11, 13 ],
      [ 4, 5, 6, 13 ], [ 4, 5, 7, 10 ], [ 4, 7, 9, 13 ], [ 4, 8, 9, 10 ],
      [ 4, 8, 11, 13 ], [ 5, 6, 8, 11 ], [ 5, 9, 10, 11 ], [ 6, 7, 9, 12 ],
      [ 6, 10, 11, 12 ], [ 7, 8, 10, 13 ], [ 7, 11, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 11 ], [ 1, 2, 4, 11 ], [ 1, 2, 7, 11 ], [ 1, 2, 10, 13 ],
      [ 1, 3, 10, 13 ], [ 1, 4, 5, 6 ], [ 1, 4, 5, 7 ], [ 1, 4, 5, 10 ],
      [ 1, 5, 8, 9 ], [ 1, 6, 10, 13 ], [ 1, 8, 11, 12 ], [ 1, 9, 12, 13 ],
      [ 2, 3, 4, 12 ], [ 2, 3, 5, 12 ], [ 2, 3, 8, 12 ], [ 2, 5, 6, 7 ],
      [ 2, 5, 6, 8 ], [ 2, 5, 6, 11 ], [ 2, 6, 9, 10 ], [ 2, 9, 12, 13 ],
      [ 3, 4, 5, 13 ], [ 3, 4, 6, 13 ], [ 3, 4, 9, 13 ], [ 3, 6, 7, 8 ],
      [ 3, 6, 7, 9 ], [ 3, 6, 7, 12 ], [ 3, 7, 10, 11 ], [ 4, 7, 8, 9 ],
      [ 4, 7, 8, 10 ], [ 4, 7, 8, 13 ], [ 4, 8, 11, 12 ], [ 5, 8, 9, 10 ],
      [ 5, 8, 9, 11 ], [ 5, 9, 12, 13 ], [ 6, 9, 10, 11 ], [ 6, 9, 10, 12 ],
      [ 7, 10, 11, 12 ], [ 7, 10, 11, 13 ], [ 8, 11, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 3, 12 ], [ 1, 2, 6, 11 ], [ 1, 2, 8, 11 ], [ 1, 2, 11, 13 ],
      [ 1, 3, 4, 5 ], [ 1, 4, 5, 9 ], [ 1, 4, 5, 11 ], [ 1, 4, 7, 8 ],
      [ 1, 5, 10, 13 ], [ 1, 6, 9, 10 ], [ 1, 7, 10, 13 ], [ 1, 10, 12, 13
],
      [ 2, 3, 4, 13 ], [ 2, 3, 7, 12 ], [ 2, 3, 9, 12 ], [ 2, 4, 5, 6 ],
      [ 2, 5, 6, 10 ], [ 2, 5, 6, 12 ], [ 2, 5, 8, 9 ], [ 2, 7, 10, 11 ],
      [ 3, 4, 8, 13 ], [ 3, 4, 10, 13 ], [ 3, 5, 6, 7 ], [ 3, 6, 7, 11 ],
      [ 3, 6, 7, 13 ], [ 3, 6, 9, 10 ], [ 3, 8, 11, 12 ], [ 4, 6, 7, 8 ],
      [ 4, 7, 8, 12 ], [ 4, 7, 10, 11 ], [ 4, 9, 12, 13 ], [ 5, 7, 8, 9 ],
      [ 5, 8, 9, 13 ], [ 5, 8, 11, 12 ], [ 6, 8, 9, 10 ], [ 6, 9, 12, 13 ],
      [ 7, 9, 10, 11 ], [ 8, 10, 11, 12 ], [ 9, 11, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 4, 5 ], [ 1, 2, 5, 6 ], [ 1, 2, 5, 11 ], [ 1, 2, 10, 11 ],
      [ 1, 2, 11, 12 ], [ 1, 3, 4, 13 ], [ 1, 4, 5, 8 ], [ 1, 4, 5, 13 ],
      [ 1, 4, 10, 13 ], [ 1, 7, 10, 11 ], [ 1, 9, 10, 13 ], [ 1, 10, 11, 13
],
      [ 2, 3, 5, 6 ], [ 2, 3, 6, 7 ], [ 2, 3, 6, 12 ], [ 2, 3, 11, 12 ],
      [ 2, 3, 12, 13 ], [ 2, 5, 6, 9 ], [ 2, 8, 11, 12 ], [ 3, 4, 6, 7 ],
      [ 3, 4, 7, 8 ], [ 3, 4, 7, 13 ], [ 3, 4, 12, 13 ], [ 3, 6, 7, 10 ],
      [ 3, 9, 12, 13 ], [ 4, 5, 7, 8 ], [ 4, 5, 8, 9 ], [ 4, 7, 8, 11 ],
      [ 5, 6, 8, 9 ], [ 5, 6, 9, 10 ], [ 5, 8, 9, 12 ], [ 6, 7, 9, 10 ],
      [ 6, 7, 10, 11 ], [ 6, 9, 10, 13 ], [ 7, 8, 10, 11 ], [ 7, 8, 11, 12
],
      [ 8, 9, 11, 12 ], [ 8, 9, 12, 13 ], [ 9, 10, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 4, 6 ], [ 1, 2, 7, 10 ], [ 1, 2, 8, 12 ], [ 1, 3, 4, 10 ],
      [ 1, 3, 5, 13 ], [ 1, 3, 11, 12 ], [ 1, 4, 8, 9 ], [ 1, 5, 6, 11 ],
      [ 1, 5, 7, 8 ], [ 1, 6, 9, 13 ], [ 1, 7, 11, 13 ], [ 1, 9, 10, 12 ],
      [ 2, 3, 5, 7 ], [ 2, 3, 8, 11 ], [ 2, 3, 9, 13 ], [ 2, 4, 5, 11 ],
      [ 2, 4, 12, 13 ], [ 2, 5, 9, 10 ], [ 2, 6, 7, 12 ], [ 2, 6, 8, 9 ],
      [ 2, 10, 11, 13 ], [ 3, 4, 6, 8 ], [ 3, 4, 9, 12 ], [ 3, 5, 6, 12 ],
      [ 3, 6, 10, 11 ], [ 3, 7, 8, 13 ], [ 3, 7, 9, 10 ], [ 4, 5, 7, 9 ],
      [ 4, 5, 10, 13 ], [ 4, 6, 7, 13 ], [ 4, 7, 11, 12 ], [ 4, 8, 10, 11 ],
      [ 5, 6, 8, 10 ], [ 5, 8, 12, 13 ], [ 5, 9, 11, 12 ], [ 6, 7, 9, 11 ],
      [ 6, 10, 12, 13 ], [ 7, 8, 10, 12 ], [ 8, 9, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 4, 8 ], [ 1, 2, 6, 9 ], [ 1, 2, 10, 12 ], [ 1, 3, 4, 12 ],
      [ 1, 3, 5, 6 ], [ 1, 3, 7, 13 ], [ 1, 4, 9, 10 ], [ 1, 5, 8, 13 ],
      [ 1, 5, 11, 12 ], [ 1, 6, 7, 11 ], [ 1, 7, 8, 10 ], [ 1, 9, 11, 13 ],
      [ 2, 3, 5, 9 ], [ 2, 3, 7, 10 ], [ 2, 3, 11, 13 ], [ 2, 4, 5, 13 ],
      [ 2, 4, 6, 7 ], [ 2, 5, 10, 11 ], [ 2, 6, 12, 13 ], [ 2, 7, 8, 12 ],
      [ 2, 8, 9, 11 ], [ 3, 4, 6, 10 ], [ 3, 4, 8, 11 ], [ 3, 5, 7, 8 ],
      [ 3, 6, 11, 12 ], [ 3, 8, 9, 13 ], [ 3, 9, 10, 12 ], [ 4, 5, 7, 11 ],
      [ 4, 5, 9, 12 ], [ 4, 6, 8, 9 ], [ 4, 7, 12, 13 ], [ 4, 10, 11, 13 ],
      [ 5, 6, 8, 12 ], [ 5, 6, 10, 13 ], [ 5, 7, 9, 10 ], [ 6, 7, 9, 13 ],
      [ 6, 8, 10, 11 ], [ 7, 9, 11, 12 ], [ 8, 10, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 4, 9 ], [ 1, 2, 8, 10 ], [ 1, 3, 5, 8 ], [ 1, 3, 6, 12 ],
      [ 1, 3, 7, 8 ], [ 1, 3, 8, 13 ], [ 1, 4, 10, 12 ], [ 1, 5, 6, 12 ],
      [ 1, 6, 7, 9 ], [ 1, 6, 11, 12 ], [ 1, 7, 9, 11 ], [ 1, 7, 9, 13 ],
```

```
      [ 2, 3, 5, 10 ], [ 2, 3, 9, 11 ], [ 2, 4, 6, 9 ], [ 2, 4, 7, 13 ],
      [ 2, 4, 8, 9 ], [ 2, 5, 11, 13 ], [ 2, 6, 7, 13 ], [ 2, 7, 8, 10 ],
      [ 2, 7, 12, 13 ], [ 2, 8, 10, 12 ], [ 3, 4, 6, 11 ], [ 3, 4, 10, 12 ],
      [ 3, 5, 7, 10 ], [ 3, 5, 9, 10 ], [ 3, 8, 9, 11 ], [ 3, 9, 11, 13 ],
      [ 4, 5, 7, 12 ], [ 4, 5, 11, 13 ], [ 4, 6, 8, 11 ], [ 4, 6, 10, 11 ],
      [ 4, 9, 10, 12 ], [ 5, 6, 8, 13 ], [ 5, 7, 9, 12 ], [ 5, 7, 11, 12 ],
      [ 5, 10, 11, 13 ], [ 6, 8, 10, 13 ], [ 6, 8, 12, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 4, 10 ], [ 1, 3, 9, 13 ], [ 1, 5, 6, 8 ], [ 1, 7, 11, 12 ],
      [ 2, 3, 5, 11 ], [ 2, 6, 7, 9 ], [ 2, 8, 12, 13 ], [ 3, 4, 6, 12 ],
      [ 3, 7, 8, 10 ], [ 4, 5, 7, 13 ], [ 4, 8, 9, 11 ], [ 5, 9, 10, 12 ],
      [ 6, 10, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 4, 12 ], [ 1, 2, 6, 7 ], [ 1, 2, 9, 10 ], [ 1, 3, 4, 6 ],
      [ 1, 3, 7, 10 ], [ 1, 3, 11, 13 ], [ 1, 4, 8, 10 ], [ 1, 5, 6, 13 ],
      [ 1, 5, 7, 11 ], [ 1, 5, 8, 12 ], [ 1, 8, 9, 13 ], [ 1, 9, 11, 12 ],
      [ 2, 3, 5, 13 ], [ 2, 3, 7, 8 ], [ 2, 3, 10, 11 ], [ 2, 4, 5, 7 ],
      [ 2, 4, 8, 11 ], [ 2, 5, 9, 11 ], [ 2, 6, 8, 12 ], [ 2, 6, 9, 13 ],
      [ 2, 10, 12, 13 ], [ 3, 4, 8, 9 ], [ 3, 4, 11, 12 ], [ 3, 5, 6, 8 ],
      [ 3, 5, 9, 12 ], [ 3, 6, 10, 12 ], [ 3, 7, 9, 13 ], [ 4, 5, 9, 10 ],
      [ 4, 5, 12, 13 ], [ 4, 6, 7, 9 ], [ 4, 6, 10, 13 ], [ 4, 7, 11, 13 ],
      [ 5, 6, 10, 11 ], [ 5, 7, 8, 10 ], [ 6, 7, 11, 12 ], [ 6, 8, 9, 11 ],
      [ 7, 8, 12, 13 ], [ 7, 9, 10, 12 ], [ 8, 10, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 5, 7 ], [ 1, 3, 10, 11 ], [ 1, 4, 6, 13 ], [ 1, 8, 9, 12 ],
      [ 2, 3, 6, 8 ], [ 2, 4, 11, 12 ], [ 2, 9, 10, 13 ], [ 3, 4, 7, 9 ],
      [ 3, 5, 12, 13 ], [ 4, 5, 8, 10 ], [ 5, 6, 9, 11 ], [ 6, 7, 10, 12 ],
      [ 7, 8, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 6, 8 ], [ 1, 2, 7, 12 ], [ 1, 3, 4, 9 ], [ 1, 3, 5, 11 ],
      [ 1, 3, 9, 10 ], [ 1, 3, 9, 12 ], [ 1, 4, 6, 8 ], [ 1, 5, 7, 13 ],
      [ 1, 6, 8, 9 ], [ 1, 6, 11, 13 ], [ 1, 7, 8, 12 ], [ 1, 7, 10, 12 ],
      [ 2, 3, 7, 9 ], [ 2, 3, 8, 13 ], [ 2, 4, 5, 10 ], [ 2, 4, 6, 12 ],
      [ 2, 4, 10, 11 ], [ 2, 4, 10, 13 ], [ 2, 5, 7, 9 ], [ 2, 7, 9, 10 ],
      [ 2, 8, 9, 13 ], [ 2, 8, 11, 13 ], [ 3, 4, 8, 10 ], [ 3, 5, 6, 11 ],
      [ 3, 5, 7, 13 ], [ 3, 5, 11, 12 ], [ 3, 6, 8, 10 ], [ 3, 8, 10, 11 ],
      [ 4, 5, 9, 11 ], [ 4, 6, 7, 12 ], [ 4, 6, 12, 13 ], [ 4, 7, 9, 11 ],
      [ 4, 9, 11, 12 ], [ 5, 6, 10, 12 ], [ 5, 7, 8, 13 ], [ 5, 8, 10, 12 ],
      [ 5, 10, 12, 13 ], [ 6, 7, 11, 13 ], [ 6, 9, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 6, 12 ], [ 1, 3, 4, 8 ], [ 1, 5, 11, 13 ], [ 1, 7, 9, 10 ],
      [ 2, 3, 7, 13 ], [ 2, 4, 5, 9 ], [ 2, 8, 10, 11 ], [ 3, 5, 6, 10 ],
      [ 3, 9, 11, 12 ], [ 4, 6, 7, 11 ], [ 4, 10, 12, 13 ], [ 5, 7, 8, 12 ],
      [ 6, 8, 9, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 7, 8 ], [ 1, 2, 8, 9 ], [ 1, 3, 5, 7 ], [ 1, 3, 5, 12 ],
      [ 1, 3, 6, 11 ], [ 1, 3, 10, 12 ], [ 1, 4, 6, 9 ], [ 1, 4, 9, 12 ],
      [ 1, 6, 7, 13 ], [ 1, 6, 9, 11 ], [ 1, 7, 8, 13 ], [ 1, 8, 10, 12 ],
      [ 2, 3, 8, 9 ], [ 2, 3, 9, 10 ], [ 2, 4, 6, 8 ], [ 2, 4, 6, 13 ],
      [ 2, 4, 7, 12 ], [ 2, 4, 11, 13 ], [ 2, 5, 7, 10 ], [ 2, 5, 10, 13 ],
      [ 2, 7, 10, 12 ], [ 2, 9, 11, 13 ], [ 3, 4, 9, 10 ], [ 3, 4, 10, 11 ],
      [ 3, 5, 7, 9 ], [ 3, 5, 8, 13 ], [ 3, 6, 8, 11 ], [ 3, 8, 11, 13 ],
      [ 4, 5, 10, 11 ], [ 4, 5, 11, 12 ], [ 4, 6, 8, 10 ], [ 4, 7, 9, 12 ],
      [ 5, 6, 11, 12 ], [ 5, 6, 12, 13 ], [ 5, 7, 9, 11 ], [ 5, 8, 10, 13 ],
      [ 6, 7, 12, 13 ], [ 6, 8, 10, 12 ], [ 7, 9, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 7, 9 ], [ 1, 3, 6, 8 ], [ 1, 3, 7, 9 ], [ 1, 3, 8, 9 ],
      [ 1, 3, 8, 10 ], [ 1, 3, 9, 11 ], [ 1, 4, 6, 12 ], [ 1, 5, 7, 12 ],
      [ 1, 6, 7, 12 ], [ 1, 6, 8, 12 ], [ 1, 6, 8, 13 ], [ 1, 7, 9, 12 ],
      [ 2, 3, 8, 10 ], [ 2, 4, 7, 9 ], [ 2, 4, 8, 10 ], [ 2, 4, 9, 10 ],
      [ 2, 4, 9, 11 ], [ 2, 4, 10, 12 ], [ 2, 5, 7, 13 ], [ 2, 6, 8, 13 ],
      [ 2, 7, 8, 13 ], [ 2, 7, 9, 13 ], [ 2, 8, 10, 13 ], [ 3, 4, 9, 11 ],
      [ 3, 5, 8, 10 ], [ 3, 5, 9, 11 ], [ 3, 5, 10, 11 ], [ 3, 5, 10, 12 ],
      [ 3, 5, 11, 13 ], [ 4, 5, 10, 12 ], [ 4, 6, 9, 11 ], [ 4, 6, 10, 12 ],
      [ 4, 6, 11, 12 ], [ 4, 6, 11, 13 ], [ 5, 6, 11, 13 ], [ 5, 7, 10, 12
],
      [ 5, 7, 11, 13 ], [ 5, 7, 12, 13 ], [ 6, 8, 11, 13 ] ],
  [ [ 1, 2, 9, 11 ], [ 1, 3, 6, 7 ], [ 1, 4, 5, 12 ], [ 1, 8, 10, 13 ],
      [ 2, 3, 10, 12 ], [ 2, 4, 7, 8 ], [ 2, 5, 6, 13 ], [ 3, 4, 11, 13 ],
      [ 3, 5, 8, 9 ], [ 4, 6, 9, 10 ], [ 5, 7, 10, 11 ], [ 6, 8, 11, 12 ],
      [ 7, 9, 12, 13 ] ] ]


gap> OrbsOfGraphs(ST13,5); *** 5 vertices
```

Bibliografía

[1] Chartrand, G., Oellermann, O.R., *Applllied and Algoritmic Graph Theory*, McGraw-Hill, Inc. 1993.

[2] Harary, F. *Graph Theory*, Addison-Wesley.1969.

[3] Landau, E. *Elementary Number Theory*, Chelsea, 1966.

[4] Neumann-Lara, V. *Acyclic Combinatorics in Tournaments*, Versión Preliminar.

[5] Neumann-Lara, V. *A short proof of a theorem of Reid and Parker on tournaments*, Graphs and Combinatorics,(1994)10 363-366.

[6] Neumann-Lara, V. *Intersecting acyclic sets in Tournaments*, Versión Preliminar.

[7] Neumann-Lara, V., *The 3 and 4-dichromatic tournaments of minimun order*, Discrete Math. 135 (1994) 233-243.

[8] Parker, E.T., Reid, K.B. *Disproof of a conjecture of Erdos and Moser on Tournaments.* Journal Combinatorics Theory 9 (1970) 225-238.

[9] Rotman, J.J. *An Introduccion to the Theory of Groups*, Springer-Verlag. 1995.