

01190

16



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**FLUJO A SUPERFICIE LIBRE  
EN FONDOS CURVOS**

29 2001

**GILBERTO SOTELO ÁVILA**

**TESIS DOCTORAL**

Presentada como requisito  
para obtener el grado de

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

Dirigida por:

**DR. CARLOS ESCALANTE SANDOVAL**

CIUDAD UNIVERSITARIA  
2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México,  
y en particular a la Facultad de Ingeniería, las facilidades  
que me brindó para llevar a cabo esta investigación.

A Tracy

A mis hijos:

Gilberto  
Lucía Ingrid †  
Sandra Edith  
Gustavo Andrés

A mi nieta

Ingrid

Como testimonio de mi amor

# INDICE

	Página
<b>CAPITULO 1. ASPECTOS GENERALES</b>	
1.1 FLUJO EN CANALES DE FONDO PLANO Y CURVO	1
1.1.1 Características del flujo rectilíneo	1
1.1.2 Características del flujo curvilíneo	2
1.1.3 Importancia del flujo curvilíneo	2
1.2 MODELO DE FLUJO SOBRE UN FONDO CURVO	3
1.2.1 Necesidad de un modelo de flujo	3
1.2.2 Estado del arte	4
1.3 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN	11
<b>CAPITULO 2. ECUACIONES DIFERENCIALES DEL FLUJO CURVILÍNEO</b>	
2.1 ASPECTOS GENERALES DEL MODELO	14
2.1.1 Antecedentes	14
2.1.2 Hipótesis de partida	16
2.1.3 Principios básicos y metodología empleada	17
2.2 COORDENADAS CURVILÍNEAS	18
2.2.1 Descripción y ecuaciones de transformación	18
2.2.2 Vectores base y jacobiano de la transformación	21
2.2.3 El gradiente	25
2.2.4 La divergencia	26
2.2.5 El rotacional	27
2.2.6 Componentes de la velocidad	27
2.2.7 Componentes de la aceleración	28

2.7	ECUACIONES PARTICULARES PARA ALGUNAS FORMAS DE SECCIÓN	59
2.7.1	Integrales $I_1$ e $I_0$ para el canal trapecial	59
2.7.2	Integral $I_2$ para el canal trapecial	60
2.7.3	Integral $I_f$ para el canal trapecial	60
2.7.4	Ecuaciones para el canal trapecial	61
2.7.5	Ecuaciones para el canal rectangular	63
2.7.6	Ecuaciones para el canal triangular	64
2.7.7	Integrales $I_1$ e $I_0$ para el canal circular	65

### CAPITULO 3. RÉGIMEN CRÍTICO Y PROPIEDADES DE LAS NUEVAS ECUACIONES

3.1	OBJETIVO	67
3.2	RÉGIMEN CRÍTICO	67
3.2.1	Condición general del estado crítico	67
3.2.2	Ecuaciones para el canal trapecial	69
3.2.3	Ecuaciones para el canal circular	78
3.3	CELERIDAD DE LA ONDA	82
3.4	SEPARACIÓN DEL FLUJO Y CAVITACIÓN	85
3.5	NATURALEZA HIPERBÓLICA DE LAS ECUACIONES	86
3.6	LÍMITES PARA LA VALIDEZ DE LA HIPÓTESIS DE FLUJO POCO PROFUNDO	87

## CAPITULO 4. CANALES RECTANGULARES. SOLUCIONES Y COMPROBACIONES EN FLUJO PERMANENTE

4.1	OBJETIVO	89
4.2	ECUACIONES PARA EL CANAL RECTANGULAR	89
4.2.1	Generales	89
4.2.2	Régimen crítico	92
4.2.3	Versión unidimensional	92
4.3	FONDO CÓNCAVO-CONVEXO	99
4.3.1	Solución teórica	99
4.3.2	Resultados experimentales	104
4.3.3	Conclusiones	106
4.4	CURVAS CIRCULARES	111
4.4.1	Descripción	111
4.4.2	Curvas cóncavas de transición	
	a) Antecedentes	112
	b) Ecuaciones particulares	112
	c) Conclusiones	118
4.4.3	Cubetas de lanzamiento	122
	a)Antecedentes	122
	b)Resultados teóricos	126
	c) Conclusiones	127
4.4.4	Curvas convexas	130
4.5	FLUJO SOBRE UN VERTEDOR TIPO CIMACIO	130
4.5.1	Antecedentes	130
4.5.2	Diseño geométrico e hidráulico	131
4.5.3	Solución teórica	132
4.5.4	Análisis de Sivakumaran y coautores	138
4.5.5	Análisis de Sotelo G.	
	a) Antecedentes	140
	b) Solución teórica	142
	c) Resultados y conclusiones	148

## CAPITULO 5. SOLUCIÓN NUMÉRICA EN FLUJO PERMANENTE

5.1	PROPÓSITO	152
5.2	COMPARACIÓN CON LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT	152
5.3	ECUACIONES POR RESOLVER	155
5.3.1	Razones de la selección	155
5.3.2	Ecuación dinámica	155
5.3.3	Ecuaciones adicionales de solución directa	158
5.4	SOLUCIÓN Y VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL	159
5.4.1	Geometría del canal utilizado	159
5.4.2	Solución numérica de la EDO	160
5.4.3	Experimentación	163
5.4.4	Comparación de resultados	164
5.4.5	Inaplicabilidad de la teoría en regiones de variación rápida del fondo	164
5.5	CONCLUSIONES	173

## CAPITULO 6. GENERALIZACIÓN Y CONCLUSIONES

6.1	ANTECEDENTES	174
6.2	PROCEDIMIENTO GENERAL	177
6.2.1	Aspectos a considerar	177
6.2.2	Solución de las integrales para la sección circular	177
6.2.3	Valor de las integrales para cualquier forma de sección	186
6.2.4	Ecuaciones generales	186
6.2.5	Solución de la ecuación diferencial	190
6.3	CONCLUSIONES	191
6.4	RECOMENDACIONES	193

## APÉNDICES DEL CAPITULO 5

A.1	GEOMETRÍA DEL FONDO	194
A.2	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN	198
A.2.1	Descripción	198
A.2.2	Aplicación manual del método a un intervalo	199
A.3	ELABORACIÓN DEL PROGRAMA DE CÓMPUTO	205
A.3.1	Elección del lenguaje de cómputo	205
A.3.2	Desarrollo del programa de cómputo	206
A.4	RESULTADOS NUMÉRICOS DEL PROGRAMA	218

# INDICE DE FIGURAS

Número		Página
<b>CAPÍTULO 1</b>		
1.1	Violación de las condiciones de frontera al aplicar las ecuaciones de Saint-Venant a un flujo curvilíneo	2
<b>CAPÍTULO 2</b>		
2.1	Definición del sistema de coordenadas curvilíneas	19
2.2	Definición de variables en un flujo curvilíneo	27
2.3	Derivación de las ecuaciones básicas	31
2.4	Geometría de la sección normal al fondo	35
2.5	Volumen de control al obtener la fuerza de resistencia al flujo	38
2.6	Esquema para la definición de un perfil de flujo curvilíneo y su línea de energía	49
2.7	Igualdad de resultantes resistivas en capas paralelas	56
<b>CAPÍTULO 3</b>		
3.1	Tirante crítico en canales trapeciales de fondo curvo	72
3.2	Tirante crítico en canales rectangulares de fondo curvo	73
3.3	Tirante crítico en canales triangulares de fondo curvo	74
3.4	Flujo curvilíneo en canales trapeciales. Identificación del tipo de régimen, zonas de separación y cavitación	77
3.5	Tirante crítico en canales circulares de fondo curvo	80
3.6	Flujo curvilíneo crítico en canales circulares. Identificación del tipo de régimen, zonas de separación y cavitación	81
3.7	Celeridad relativa adimensional $c/(gd \cos \theta)^{1/2}$ contra la curvatura adimensional $\kappa d$ . Canal rectangular.	84

## CAPÍTULO 4

4.1	Coefficiente de curvatura $\lambda$	94
4.2	Medición de la carga de presión en un flujo curvilíneo	96
4.3	Solución de $\gamma(x) = A + Bx$ ; $x \pm$ subcrítico, $x_0 \pm$ crítico, $x_0 \pm$ supercrítico. Canal rectangular	101
4.4	Lectura de la presión en el fondo	104
4.5	Tirantes teóricos y experimentales	106
4.6	Flujo permanente sobre el perfil simétrico para $q = 1119.7 \text{ cm}^3/\text{s}$ y $E = 34.8 \text{ cm}$ . Canal rectangular. Según Sivakumaran <i>et al</i> (1983).	107
4.7	Número de Froude local, contra curvatura adimensional para el perfil simétrico. Canal rectangular. Según Sivakumaran <i>et al</i> (1983).	108
4.8	Flujo permanente sobre el perfil asimétrico para $q = 1116.5 \text{ cm}^3/\text{s}$ y $E = 44.7 \text{ cm}$ . Canal rectangular. Según Sivakumaran <i>et al</i> (1983).	110
4.9	Curvas cóncavas	115
4.10	Esquema de solución de la ecuación (4.59)	116
4.11	Solución de la ecuación (4.62) para $\theta_0 = \pi/4$ y $\theta_0 = \pi/8$ . Los puntos experimentales son para $(\theta_0 = \pi/4)$ , según Henderson y Tierney (1963)	120
4.12	Presión centrífuga máxima en función de $d$ , del número de Froude $F_0$ y de $\alpha = 1/\kappa d_0$	121
4.13	Comparación entre valores teóricos y experimentales de presión máxima, según Henderson y Tierney (1963)	121
4.14	Cubeta de lanzamiento con descarga libre; simbología utilizada	122
4.15	Características del funcionamiento hidráulico de una cubeta con descarga sumergida	123
4.16	Presión en el fondo de una cubeta deflectora	124
4.17	Cálculo de la presión en el fondo antes de la cubeta deflectora, según Lenau y Cassidy (1969)	125

4.18	Comparación entre la presión centrífuga máxima del modelo de flujo y de otras teorías	128
4.19	Presión en el fondo de cubetas de lanzamiento, según el U.S. Corps of Engineering (1978)	129
4.20	Obtención de la ecuación de ajuste de los puntos $(H/Hd, F)$ , según Sivakumaran <i>et al</i> (1981). Canal rectangular	137
4.21	Presiones teóricas y experimentales sobre un cimacio con perfil WES (USCE)	138
4.22	Curvas $F = f(x, H/Hd)$ para un cimacio	139
4.23	Coefficiente de gasto en un cimacio tipo WES, con velocidad de llegada despreciable y distintas cargas de operación	141
4.24	Valores experimentales de $F$ y los calculados de $\epsilon$	141
4.25	Pérdida de energía por entrada al cimacio	143
4.26	Valores teórico y experimental para tres cargas de operación	149

## CAPÍTULO 5

5.1	Comparación del flujo según teoría y según Saint -Venant; Dressler y Yevjevich (1983).	154
5.2	Geometría del fondo	160
5.3	Dispositivo experimental	164
5.4a	Valores teóricos y experimentales para las condiciones de flujo (a)	166
5.4b	Comparación de perfiles hidráulicos para las condiciones de flujo (a)	166
5.4c	Valores teóricos y experimentales para las condiciones de flujo (b)	167
5.4d	Valores teóricos y experimentales para las condiciones de flujo (c)	167
5.4e	Valores teóricos para las condiciones de flujo (d)	168
5.4f	Comparación de perfiles hidráulicos para las condiciones de flujo (d )	168
5.5a	Comparación del perfil longitudinal de la presión en el fondo para las condiciones de flujo (a)	169

5.5b	Comparación del perfil longitudinal de la presión en el fondo para las condiciones de flujo (b)	169
5.5c	Comparación de las distribuciones de la presión en el fondo para las condiciones de flujo (c)	170
5.5d	Comparación de las distribuciones de la presión en el fondo para las condiciones de flujo (d)	170
5.6a	Comparación de las distribuciones de la velocidad tangencial en la sección $s = 22.57$ cm para las condiciones de flujo (a)	171
5.6b	Comparación de las distribuciones de la velocidad tangencial en la sección $s = 22.57$ cm para las condiciones de flujo (b)	171

## CAPÍTULO 6

6.1	Obra de excedencias de la Presa El Infiernillo, Gro. y Mich.	175
6.2	Obra de excedencias de la Presa Chicoasén, Chis.	176
6.3a	Valor de la integral $I_2$ en canales de sección circular de fondo cóncavo	184
6.3b	Valor de la integral $I_2$ en canales de sección circular de fondo convexo	185
6.4a	Valor de la integral $I_f$ en canales de sección circular de fondo cóncavo	187
6.4b	Valor de la integral $I_f$ en canales de sección circular de fondo convexo	188

## INDICE DE TABLAS

Número		Página
<b>CAPÍTULO 2</b>		
2.1	Valores de $a_v$ y $a_Q$ para flujos convexo y cóncavo en un canal rectangular	58
<b>CAPÍTULO 4</b>		
4.1	Coefficiente de presión centrífuga de los resultados de Lenau y Cassidy, y de Henderson y Tierney.	127
4.2	Valores experimentales de $F$ para tres cargas de operación.	140
4.3	Posición y características del flujo en la sección crítica para distintos gastos y cargas de operación en el cimacio.	145
4.4	Valores críticos para tres condiciones de operación del cimacio	148
4.5	Cálculo del perfil del flujo y carga de presión sobre la espalda de un cimacio para tres cargas de operación.	150
<b>CAPÍTULO 5</b>		
5.1	Condiciones de frontera aguas arriba (ancho $b = 20.32$ cm)	163

# CAPÍTULO 1

## ASPECTOS GENERALES

### 1.1 FLUJO EN CANALES DE FONDO PLANO Y CURVO

#### 1.1.1 *Características del flujo rectilíneo*

El análisis del perfil de la superficie libre en canales suele realizarse considerando que el flujo es rectilíneo, es decir, con líneas de corriente de escasa o nula curvatura, sin importar si el fondo es plano o curvo en la dirección longitudinal. Los tramos del canal sobre curvas verticales se han manejado hasta ahora como problemas de flujo curvilíneo local y se han tratado por separado.

Los modelos convencionales de análisis admiten las hipótesis tradicionales del flujo rectilíneo en canales, a saber:

- a) Líneas de corriente de escasa o nula curvatura, las cuales se suponen paralelas al fondo plano.
- b) Distribución hidrostática de la presión en la sección ortogonal al fondo.
- c) Velocidad con un solo componente paralelo al fondo.
- d) Conceptos de energía específica, régimen crítico y pérdida de fricción, basados en la consideración de un flujo rectilíneo.

Ninguna de estas hipótesis se cumple en flujo curvilíneo y por ello los modelos convencionales de flujo no son aplicables. Por otra parte, en la figura 1.1, se muestran las líneas de corriente instantáneas que se considerarían al aceptar que el flujo en el canal mostrado fuese rectilíneo. Con líneas de corriente rectas o de poca curvatura, la condición de frontera en el fondo curvo del canal sería continuamente violada, ya que la velocidad no sería tangente a dicho fondo. Asimismo, la condición de frontera en la superficie libre del flujo curvilíneo también se violaría, toda vez que el perfil de dicha superficie no sería horizontal ni de pequeña curvatura.

Dentro de los modelos convencionales que se aplican se pueden mencionar las ecuaciones del flujo gradual y espacialmente variado en canales artificiales y cauces naturales, además de ecuaciones tan generales como las de Saint-Venant para el flujo no permanente. Se reitera que su aplicación a canales de fondo curvo viola todas las hipótesis antes mencionadas.

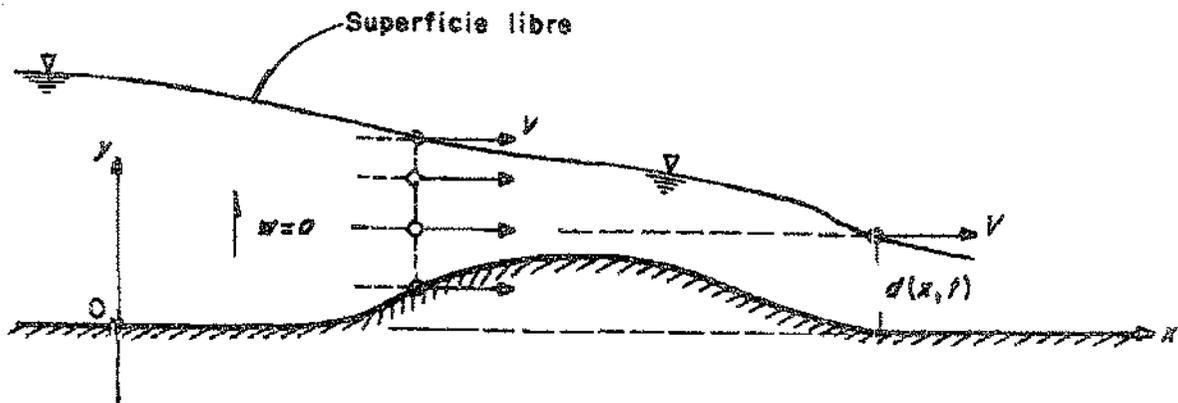


Figura 1.1. Violación de las condiciones de frontera al aplicar las ecuaciones de Saint-Venant a un flujo curvilíneo.

### 1.1.2 Características del flujo curvilíneo

El fondo curvo de un canal ejerce una influencia importante en la forma de las trayectorias de las partículas en cada punto de campo de flujo, al grado que adoptan curvaturas variables que modifican la distribución de la velocidad y de la presión respecto de la observada en un flujo rectilíneo. Esto significa que las trayectorias reales adquieren curvatura cuando el movimiento ocurre sobre un fondo curvo y se desarrollan aceleraciones normales importantes que dan lugar a fuerzas centrífugas, que desvían bastante la distribución de la presión en el seno del flujo respecto de la hidrostática que se acepta en el rectilíneo.

El flujo curvilíneo es frecuente en muchos problemas que debe resolver el ingeniero y por ello es clara la necesidad de conocer mejor las condiciones en que se produce, además de contar con un método de análisis que utilice ecuaciones con términos que contengan, no sólo la inclinación longitudinal del fondo del canal, sino también su curvatura. Esto conduce a que en las soluciones aparezcan los efectos importantes que dicha curvatura tiene en la distribución de la velocidad dentro del campo del flujo, en el perfil de la superficie libre y en la distribución de la presión, con el fin de satisfacer con mayor precisión las condiciones de frontera.

### 1.1.3 Importancia del flujo curvilíneo

Existe una buena cantidad de obras hidráulicas donde el flujo ocurre sobre un fondo curvo, que mantiene o no una curvatura constante en grandes distancias, en las que se desarrolla un flujo curvilíneo con todas sus consecuencias y donde es necesario tomar en cuenta la pérdida de energía por fricción. Es el caso de las obras de excedencia a cielo abierto o en túnel, donde se utilizan curvas, a veces muy forzadas, para producir deflexiones verticales obligadas por el tipo de obra (canal abierto, túnel o cimacio), o por el terreno natural (curvas cóncavas o convexas, circulares o parabólicas). Las curvas verticales se utilizan también para dirigir el flujo y producir el despegue con un ángulo adecuado en cubetas deflectoras de lanzamiento o ahogadas.

Por ello, el análisis del perfil de la superficie libre del agua se tiene que realizar considerando que existe un flujo rectilíneo o curvilíneo, con el fin de conocer también las características hidráulicas de velocidad, presión, etc., a lo largo del canal, sin necesidad de utilizar procedimientos distintos en los tramos de fondo plano y de fondo curvo, como ha sido usual en estos casos.

## 1.2 MODELO DE FLUJO SOBRE UN FONDO CURVO

### 1.2.1 Necesidad de un modelo de flujo

Algunos autores han desarrollado procedimientos específicos aislados para subsanar algunas de las deficiencias antes mencionadas; por ejemplo, los dirigidos a la determinación de la presión en el fondo de una curva circular cóncava (curvatura constante) con métodos aproximados, como es el trazo de una red de flujo. Otros han utilizado métodos analíticos basados en la teoría del potencial, deduciendo fórmulas aproximadas o desarrollos más precisos con el mismo objeto; algunos de ellos han sido comprobados experimentalmente. En estos casos, la omisión del efecto resistivo en el flujo ha sido la hipótesis más común y se han dirigido principalmente a la solución de curvas circulares cóncavas, donde se da mayor importancia al incremento de la presión por efecto centrífugo, con valores muy superiores a la hidrostática.

Sin embargo, no se conocen procedimientos similares que se hayan utilizado para determinar la distribución de la presión en el fondo de curvas convexas, donde se registran descensos de la presión, a veces por debajo de la atmosférica, causando separación del flujo, que puede llegar en caso extremo a la cavitación cuando la curvatura del fondo es importante.

En ninguna de las aportaciones antes mencionadas se plantea la posibilidad del cálculo del perfil del flujo a lo largo del canal tomando en cuenta la influencia de la curvatura en el fondo (constante o variable): tampoco el efecto resistivo en las fronteras rígidas de la conducción, el cual puede llegar a ser muy importante por la gran velocidad que se alcanza en las obras con fondo curvo.

Fue Dressler (1978) el primer autor que desarrolló un modelo de flujo curvilíneo con ese propósito, transformando las ecuaciones diferenciales básicas del flujo bidimensional irrotacional en coordenadas cartesianas, a la forma que adoptan cuando se emplea un sistema de coordenadas curvilineas. Para lograr la integración del sistema de ecuaciones resultante, aceptó la hipótesis de que el flujo era poco profundo, es decir, que el producto  $\kappa d$  era pequeño, donde  $\kappa$  es la curvatura del fondo y  $d$  el tirante del flujo medido en dirección ortogonal a dicho fondo. Dressler comprobó que sus ecuaciones tenían aplicaciones a canales de curvatura positiva o negativa (cóncavos o convexas), pero de sección rectangular, lo cual satisface la geometría de la mayoría de los que se diseñan en la práctica, aunque incluyó posteriormente en forma errónea el efecto de fricción en sus desarrollos.

En una publicación más reciente Khan y Steffler (1996) presentaron un análisis basado en ecuaciones diferenciales con variables promediadas verticalmente, y en ecuaciones del momento de la cantidad de movimiento para el fondo curvo, donde incluyeron el efecto de fricción. Sin embargo, su modelo de flujo está nuevamente dirigido a canales rectangulares y tiene la desventaja de utilizar ocho ecuaciones diferenciales, a diferencia de dos en el modelo de Dressler. Además, utilizan métodos numéricos de solución más avanzados, que consumen mucha memoria de computadora y hacen que el procedimiento sea menos accesible para el ingeniero, aunque el método de solución no se encuentra todavía disponible.

El propósito central del presente trabajo consiste precisamente en establecer un modelo para el análisis del flujo curvilíneo en un canal de sección cualquiera, el cual se genera por la influencia de un fondo curvo, cóncavo o convexo. Con el modelo se subsanan las deficiencias que tiene los modelos convencionales del flujo rectilíneo.

### 1.2.2 Estado del arte

Se expone a continuación un resumen de los avances más importantes sobre el tema, siguiendo un orden cronológico.

Fawer (1937) da un paso en la investigación del flujo sobre un vertedor de cresta redondeada, mediante la construcción de una red de flujo siguiendo los lineamientos muy conocidos de Prasil (1913), comprobando la teoría con resultados experimentales. Concluyó que esta solución gráfica proporciona el gasto máximo para una carga dada de acuerdo con el principio de Belanger ( $\partial Q/\partial y = 0$ ), expresamente limitado a vertedores de cresta ancha, donde las líneas de corriente son rectas.

Las conclusiones de Fawer inspiraron a Jaeger (1939) a utilizar las condiciones simultáneas:  $\partial Q/\partial y = 0$  y  $\partial H/\partial y = 0$  en la determinación analítica del flujo sobre vertedores de cresta redonda. Todas las evidencias, es decir, la concordancia de los resultados analíticos y los experimentales, resultan en la validez del principio de Belanger (1849) y las observaciones de Böss (1919), aun en el caso de tubos de flujo curvos.

El trabajo de Masse (1938) fue más interesante y mostró que el concepto de tirante crítico requería todavía de un mayor estudio. Su trabajo contiene el cálculo de un perfil de la superficie libre en un canal donde cambia gradualmente la pendiente de su plantilla plana, para pasar de una menor que la crítica a una más *pronunciada* y cambiar el régimen de subcrítico a supercrítico, para retomar más adelante al subcrítico. En dicho ejemplo, el tirante crítico del flujo en un canal de fondo ligeramente curvo requirió de una definición más precisa.

Como ha sido plenamente demostrado, el concepto de tirante crítico  $y_c$  se introdujo durante un periodo largo de tres maneras: por un cambio de régimen en el flujo (de subcrítico a supercrítico o viceversa); cuando el gasto es máximo ( $\partial Q/\partial y = 0$ ) (Belanger en vertedores de cresta ancha); o cuando la energía específica es mínima ( $\partial E/\partial y = 0$ ) (Böss, 1919). En el caso de líneas de corriente rectilíneas, los valores numéricos de  $y_c$  son idénticos con las tres definiciones. Se ha comprobado también que la función momentum  $M$  es mínima cuando  $y = y_c$ , con la condición esencial de que se desprece la variación de la velocidad a través de la sección de flujo (Jaeger, 1931).

En aquella época, un número grande de científicos fueron de la opinión -explícita o implícitamente establecida- de que el concepto de tirante crítico podía ser extrapolado al flujo curvilíneo, a pesar de todas las objeciones y la carencia de pruebas matemáticas definitivas.

Jaeger (1939, 1949) establece la conexión entre los conceptos de energía y momentum en canales con la estabilidad del flujo, en el caso de una distribución irregular o *dispersión* de la energía a través de una sección transversal, introduciendo los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  (bien conocidos en la hidráulica) y los coeficientes de presión  $\alpha'$  y  $\beta'$  en las ecuaciones de energía y cantidad de movimiento, respectivamente. Jaeger (1956) presentó en su libro lo que llamó las *ecuaciones básicas del flujo curvilíneo gradualmente variado en canales*. En éstas incluye un término aproximado que toma en cuenta la influencia de la curvatura del fondo en un flujo bidimensional, utilizando la idea de los trabajos de Fawer (1937).

Con base en estos resultados, Jaeger (1949) propuso una solución que se apoya en el método gráfico de Prasil (1939) para dibujar una red de flujo, y mencionó que para lograr una solución analítica del problema era necesaria una hipótesis acorde con las condiciones de frontera, con el fin de obtener la distribución de las velocidades, de las presiones o bien el radio de curvatura de las líneas de corriente que cruzan la sección. También convino en que la elección del radio de curvatura como parámetro secundario ha mostrado ser más ventajoso en ciertos casos. Por ejemplo, si se conoce el radio de curvatura del fondo, Jaeger (1949) admitió considerar en la práctica que la variación de dicho radio en la sección poco afecta los resultados numéricos, de manera que una estimación burda de dicho radio es suficiente en los cálculos.

Con base en las ecuaciones previas, Jaeger (1956) analizó el flujo sobre un vertedor de cresta redondeada, de donde dedujo la distribución de la velocidad en la sección sobre la cresta y la expresión para el gasto vertido. A partir de ella y con el principio de energía específica mínima, obtuvo una expresión para el tirante crítico en dicha sección y una curva teórica para el coeficiente de descarga. Sus resultados fueron comparados con los experimentales obtenidos por varios autores en vertedores con distintos radios de curvatura en la cresta, encontrando algunos puntos de coincidencia.

Rouse (1950) presentó una solución gráfica para calcular la distribución de la presión en el fondo de una cubeta deflectora con el auxilio del trazo de una red de flujo. Su solución partió de las condiciones de un flujo de aproximación supuesto antes de la curva, observando que su efecto sobre la presión se extiende hacia atrás y hacia adelante de los puntos de tangencia.

Gumensky (1953) presentó los resultados experimentales de la presión en el fondo y muros laterales de curvas verticales al pie de rápidas y vertedores de excedencias, deduciendo que la fuerza centrífuga aumenta la presión en ambos. Concluyó que el efecto de este incremento de la presión equivale a que el agua fuera mucho más densa que lo real, en algunos casos, tanto como doce veces la densidad real del agua. Encontró que con velocidades del líquido del orden de 6 m/s se produce el fenómeno del *agua blanca*, signo inequívoco del arrastre de aire en el flujo, creciendo su volumen y aumentando su tirante.

Douma (1953), en la discusión del trabajo de Gumensky, externó que antes de la publicación discutida se habían utilizado métodos de diseño incorrectos de las obras tratadas. Presentó también un procedimiento sencillo para el cálculo de la presión en la cubeta, considerando que las líneas de corriente cerca del fondo son circulares y llegó a determinar expresiones para la velocidad media y la presión en el fondo con base en la ecuación de la línea de corriente inferior.

Knapp (1960) estableció un procedimiento para el cálculo del efecto de curvatura cóncava o convexa en el flujo, principalmente en el valor de la energía total del movimiento y en la distribución de la presión en dirección perpendicular. Para ello aceptó que las líneas de corriente describían círculos concéntricos y que las secciones de flujo podían considerarse ortogonales al fondo. De este modo, generalizó un poco más la teoría de Jaeger (1956) e intentó la aplicación al caso de un vertedor tipo cimacio con el apoyo de los resultados experimentales del U. S. Bureau of Reclamation, cuando las condiciones del flujo coinciden con la carga de diseño. Hubo buena concordancia entre ambos resultados a pesar de las hipótesis utilizadas, pero se trató por primera vez de hacer práctico el cálculo del perfil del flujo curvilíneo en un canal, planteado por Jaeger.

Balloffet (1962) presentó una ecuación para determinar las presiones máximas sobre cubetas cilíndricas de lanzamiento, con la suposición de que el comportamiento del flujo es como en un vórtice irrotacional. Los valores de la presión medida en modelos de rápidas rectas y cubetas de lanzamiento en túneles mostraron buena correlación y fueron cercanos a los valores teóricos de los máximos, de manera que las fórmulas teóricas podían ser corregidas por el uso de coeficientes adecuados, con el fin de ajustarlos a los resultados experimentales. También, opinó que la distribución de las presiones sobre el fondo de la cubeta podía precisarse mejor por procedimientos gráficos sencillos. Finalmente, aceptó la necesidad de más estudios para establecer la relación entre la geometría del vertedor y la distribución de la presión sobre la cubeta.

Henderson (1963) expuso una solución completa del problema de la presión en una curva vertical cóncava, basada en el uso de la teoría matemática del flujo irrotacional. Analizó los casos en que hay una compuerta deslizante abierta transversal al vertedor tipo cimacio antes mencionado, que es más común, donde el pie de la rápida es una superficie curva. Sus resultados teóricos y experimentales muestran el comportamiento de la presión en el fondo de la sección central de la curva, para ángulos de inclinación de la rápida de fondo recto antes de ella de 45° y 90°.

Henderson (1966) analizó el problema del cálculo de la presión en cubetas deflectoras en los casos: a) al pie de la cara inclinada de un vertedor de excedencias para cambiar la dirección hacia un fondo horizontal; b) para lograr el despegue en una cubeta de lanzamiento. El autor señaló que en ambos casos las presiones centrífugas que se desarrollan pueden ocasionar empujes severos sobre los muros laterales de confinamiento, los cuales no pueden calcularse por métodos elementales, pero que ciertas aproximaciones se antojan obvias para obtener la presión centrífuga al centro de la curva. Aceptando una distribución de la velocidad igual que la del vórtice libre en un conjunto de líneas circulares concéntricas, obtuvo una expresión para determinar la presión en el fondo. La opinión de Henderson es que el método conduce a resultados bastante seguros dentro de cierto intervalo, debido a la singularidad que se produce para  $R/y < e$ , donde  $R$  es el radio de curvatura,  $y$  el tirante y  $e$  la base de los logaritmos neperianos.

Se debe anotar un error en la apreciación de Henderson, ya que en realidad la singularidad ocurre para  $R/y < [e/(e-1)] = 1.582$ . Su teoría tiene el defecto de ignorar la acción de la gravedad, ya que la ecuación obtenida para la presión se debe únicamente a la acción centrífuga. Dicho efecto lo incluye a *posteriori* añadiendo la presión hidrostática.

Chen, Tio-Chun; Yu, Yun-Sheng (1965) desarrollaron un método para calcular la distribución de la presión y el perfil de la superficie libre de un flujo potencial bidimensional y permanente sobre una cubeta de lanzamiento al pie de un cimacio, con una solución basada en el método de transformación conforme, sin incluir tampoco la acción de la gravedad. El método se aplicó para calcular la distribución de las presiones sobre dos alternativas de diseño de una presa, con radio de 6 m y ángulos en el labio de despegue de 40° y 20°, respectivamente. Los valores calculados para la primera alternativa coincidieron bastante bien con los experimentales obtenidos en modelo, así como los perfiles de la superficie libre. Sin embargo, los valores calculados para la segunda alternativa fueron más pequeños que los medidos, con discrepancias del orden del 10 por ciento.

Lenau y Cassidy (1969) desarrollaron un procedimiento analítico para predecir con mayor seguridad los perfiles de la superficie libre y presiones en el fondo de una cubeta de lanzamiento, para cualquier combinación de parámetros geométricos e hidráulicos. Su procedimiento se basa en una solución numérica de la teoría del potencial en la curva, con la ventaja de incluir la acción de la gravedad y de presentar un conjunto de curvas que establecen la presión en cada punto de ellas, de acuerdo con el ángulo central de deflexión y el radio de curvatura. El cálculo de la presión se extiende hacia aguas arriba y aguas abajo de los puntos de tangencia, cubriendo completamente la zona de influencia del efecto curvo. El procedimiento fue verificado experimentalmente y tiene a su favor la facilidad de acceso a una gran cantidad de configuraciones geométricas posibles de la curva y del flujo, y de tener mejor precisión en los resultados. La misma información pudo haber sido obtenida experimentalmente pero el estudio habría sido impráctico por el tiempo necesario para su realización. Es el caso de los estudios experimentales llevados a cabo por *U.S. Army Corp of Engineers, Waterways Experiment Station*, para las presas Harwell y Finetlat, que tienen el defecto de su poca generalidad en la aplicación.

Prasad (1948) utilizó la misma solución de perturbación sugerida por Lenau y Cassidy y extendió los resultados para cubrir una mayor amplitud en los valores de los parámetros empleados, efectuando una verificación experimental limitada de los mismos con pruebas en un modelo. Esto le permitió extender el conjunto de curvas de Lenau y Cassidy para cubrir los campos de valores que ocurren en la práctica.

Una recapitulación de los trabajos antes presentados permite concluir que la búsqueda de procedimientos generales de análisis se realizó hasta mediados de la década de los cincuentas, para iniciar después un período de investigación de problemas locales de flujo en cubetas deflectoras, principalmente las de lanzamiento, el cual terminó al final de la década de los setentas. Todos los trabajos tuvieron la finalidad de aplicarse a canales rectangulares

En efecto, fue Dressler (1978) quién reinicia la investigación de procedimientos generales de análisis del flujo en canales de fondo curvo, presentando un sistema de nuevas ecuaciones del flujo bidimensional de poca profundidad que incluyen la curvatura del fondo, con validez únicamente en canales rectangulares. Para ello Dressler utilizó un sistema de coordenadas curvilíneas, una de ellas que se ajusta fielmente a la forma curva del fondo, y transformó las ecuaciones diferenciales básicas del flujo bidimensional irrotacional ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , continuidad y ecuación de Euler) en coordenadas cartesianas, al nuevo sistema de coordenadas curvilíneas. Para ello, siguió el procedimiento matemático convencional y estableció las condiciones de frontera para su solución. Además, siguió un procedimiento matemático muy complicado de valores extremos (difícil de seguir), para simplificar el sistema de ecuaciones exactas en el caso de flujos bidimensionales de poca profundidad y estableció los límites teóricos en que existe solución para el sistema hiperbólico de ecuaciones resultantes.

La publicación de Dressler se caracteriza porque no es de fácil comprensión, pero tiene la virtud de pretender nuevamente una solución general del problema del fondo curvo, cuya validez se extiende al caso del flujo no permanente. Cuando desaparece la curvatura, el canal es de fondo plano y el sistema de ecuaciones se convierte en el sistema de Saint-Venant (1871) para el flujo no permanente, o en la ecuación del flujo gradualmente variado cuando es permanente, siempre con validez únicamente en canales rectangulares.

Sivakumaran *et al* (1981) presentaron un compendio de las ecuaciones de Dressler y las aplicaron al flujo permanente sobre la región de la cresta de un cimacio tipo WES, para obtener la relación carga-gasto y la distribución de la presión en la misma. Encontraron buena concordancia con los experimentos realizados por el Cuerpo de Ingenieros de Ejército con este tipo de vertedores, y concluyeron que las ecuaciones son válidas inclusive para curvatura negativa bastante grande. Por otra parte, la aplicación de las ecuaciones al flujo permanente sobre una cubeta deflectora al pie de un cimacio demostró que su validez es más limitada para curvatura positiva.

Sivakumaran *et al* (1983) examinaron nuevamente la validez de las ecuaciones de Dressler e identificaron soluciones para el flujo permanente en los tres regímenes posibles: subcrítico, crítico y supercrítico, en términos del número de Froude local definido por Dressler. Los experimentos que realizaron con flujo permanente sobre umbrales con perfiles simétrico y asimétrico mostraron que la teoría predice satisfactoriamente los perfiles de la superficie libre y de la línea de distribución de la presión en el fondo, para límites incluso más amplios que los considerados válidos por el propio Dressler.

Dressler y Yevjevich (1983) expusieron que cuando las ecuaciones de Saint-Venant (1871) se aplican al flujo en canales de fondo curvo, se viola la condición de frontera de una velocidad tangente en cada punto a dicho fondo. También mencionaron que esto no ocurre con las ecuaciones de Dressler, las cuales satisfacen dicha condición desde su derivación. Con las aplicaciones realizadas al flujo sobre un vertedor cóncavo-convexo, los autores demostraron que los resultados con las ecuaciones de Saint-Venant son irreales y que los obtenidos con las de Dressler se aproximan tanto a las condiciones del flujo que las correcciones de orden superior son casi cero. Los autores presentaron curvas de tirante, velocidad y presión, prediciendo también la separación a altas velocidades.

Dressler y Yevjevich (1984) presentaron una forma funcional modificada de los términos empíricos bien conocidos de resistencia hidráulica (de uso común en las ecuaciones de Saint-Venant), para emplearse en las ecuaciones de Dressler. Las modificaciones consistieron en la inclusión de dos factores extra, que llamaron  $\alpha_m$  y  $\alpha_v$ . El primero resultó una función de la curvatura del fondo y del tirante y expresa al cambio de masa afectada por el arrastre secundario cuando el flujo ocurre sobre un fondo cóncavo o convexo. El segundo factor resultó una función dada del tirante y el ancho del canal, expresando la modificación necesaria en la velocidad del fondo para ajustarse al perfil variable de la velocidad. Para el comportamiento de pared lisa (dentro del régimen de Blasius), fue necesario el factor  $\alpha_q$  adicional para ajustar la velocidad cerca del fondo a la media sobre el perfil. Los tres factores se reducen a la unidad cuando la curvatura es cero.

Con respecto al último trabajo cabe aclarar que el primer factor no era necesario, es decir,  $\alpha_m \equiv 1$ ; no así el segundo factor. Esto fue demostrado en una publicación posterior de Sivakumaran y Dressler (1986) empleando un procedimiento más adecuado.

Sivakumaran y Yevjevich (1987) presentaron una versión ligeramente modificada de las ecuaciones de Dressler para el canal rectangular de fondo curvo, admitiendo que podía variar ligeramente su ancho en el sentido longitudinal. También derivaron una ecuación generalizada de Bresse para el canal rectangular pero de fondo curvo. Los experimentos que realizaron con flujo permanente sobre la rápida de un vertedor con curvas verticales de gran curvatura, demostraron que las ecuaciones de Dressler predicen con gran precisión la superficie libre, la presión en el fondo y la distribución del componente tangencial de la velocidad, y que los resultados con las ecuaciones de Saint-Venant no tienen prácticamente significancia alguna. También demostraron que ambas teorías requieren variaciones graduales en la geometría del fondo y que las aplicaciones a intervalos donde ocurren cambios rápidos no son válidas. Para la geometría del fondo en la rápida empleada, donde la curvatura y su derivada varían rápidamente, las soluciones de Dressler mostraron variaciones pequeñas pero bruscas, mientras que las mediciones indicaron una variación más gradual sobre intervalos más amplios.

Steffler P. y Jin (1993) extendieron la validez de las ecuaciones de Saint-Venant, *promediadas en el tirante*, al flujo a superficie libre poco profundo, para tratar problemas con distribuciones no hidrostáticas de la presión y no uniformes de la velocidad. El resultado fue un mayor número de ecuaciones diferenciales (ocho), para resolver los grados adicionales de libertad, obteniendo las ecuaciones adicionales por el método del momento de los residuos pesados mediante las ecuaciones de Reynolds. Las nuevas ecuaciones fueron obtenidas con detalle en una dimensión horizontal, es decir, con un sistema cartesiano  $(x, y)$ , y evaluadas para los problemas clásicos de flujo uniforme y ondas de pequeña amplitud, nuevamente en canales rectangulares. Los autores expresaron que con estudios posteriores y aplicaciones, las nuevas ecuaciones podrían ofrecer un medio para obtener mayor detalle en un intervalo amplio de problemas de la práctica.

El método presentado por los autores antes mencionados tiene una concepción distinta de los realizado hasta ahora, ya que utiliza un sistema de coordenadas cartesianas ( $x$ , horizontal;  $y$ , vertical), pero con un número mayor de ecuaciones diferenciales, cuya solución requiere seguramente un método numérico más avanzado y computadoras más poderosas y rápidas.

En efecto, Khan y Steffler (1996) presentaron la aplicación de las ecuaciones definidas en el trabajo de Steffler y Jin (1993), a diferentes casos previamente analizados y comprobados experimentalmente. Presentaron además una comprobación experimental propia con dos curvas verticales, la primera convexa y la segunda cóncava. La solución numérica se basó en un esquema de elementos finitos con carácter disipativo de Galerkin, que ajusta gradualmente los valores de las incógnitas (con variaciones previamente seleccionadas) a las condiciones de frontera en cada caso. Desde luego, hubo discrepancias respecto de los valores obtenidos por los autores y los experimentales propios, mismas que se detallan en el trabajo mediante gráficas de comparación.

### 1.3 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Las últimas aportaciones aquí mencionadas son muy valiosas si se considera que plantean la solución general del problema de un flujo sobre un fondo curvo y no de casos particulares. Sin embargo, tienen el gran defecto de que todas son aplicables a canales rectangulares. Su aplicación sería imposible en el caso de obras excedencias de sección trapezoidal, como son la mayoría, o de sección circular con transiciones en túnel.

El proyecto de investigación que aquí se presenta tiene como objetivo subsanar el defecto de las teorías existentes, obteniendo un modelo general de flujo que sea aplicable a canales con sección distinta de la rectangular sin aumentar drásticamente su complejidad, de manera que sea accesible a un ingeniero que se enfrente con frecuencia a este tipo de problemas. El propósito es establecer un procedimiento general de análisis, de manera que las soluciones satisfagan las condiciones reales en que se produce y que sea aplicable a los problemas de ingeniería.

De las aportaciones antes expuestas se desprende que esto sería posible ajustándolo a un sistema de coordenadas curvilineas, similar al empleado por Dressler, ya que así se elimina el grado de complejidad que tiene el modelo de Steffler. El modelo considera la existencia de un componente radial de la velocidad, en adición al longitudinal comúnmente considerado. Esto elimina la posibilidad de hacerlo totalmente unidimensional, sin embargo, el valor de dicho componente será mayor o menor en la medida que las condiciones del flujo por resolver tenga o no curvas verticales, de curvatura constante o variable, y que los cambios de curvatura también lo sean.

En principio, el modelo contempla el análisis del comportamiento íntimo de las partículas en su movimiento, de manera que las ecuaciones diferenciales del flujo se obtienen aplicando los principios básicos de la Mecánica de Fluidos, con el fin de utilizarlas en un canal artificial con las secciones mas comunes: trapecial (incluida la rectangular y la triangular), o bien circular y de transición. Sin embargo, se puede decir que el modelo sirve para cualquier forma de sección, si se piensa que algunas integrales que aparecen en las ecuaciones no se obtienen a través de una solución directa, pero sí mediante una solución numérica. El modelo incluye de manera correcta el efecto de la fricción y, por su mayor simplicidad, puede pensarse que la solución de las ecuaciones resultantes son tan accesibles para el ingeniero como lo son las ecuaciones del flujo gradualmente variado. Tiene además la suficiente generalidad para ser aplicado a canales de cualquier forma de sección, donde el flujo sea no permanente.

La solución numérica es más sencilla, y de acuerdo con los resultados hasta ahora obtenidos, se puede efectuar con métodos convencionales como el de Runge-Kutta de cuarto orden, más accesible para los ingenieros.

Con el modelo se determinan las variables más importantes del flujo, como son: la distribución de los dos componentes de la velocidad y de la presión en cada sección, así como el perfil del flujo a lo largo del canal.

Las ecuaciones y métodos de análisis que aquí se presentan se pueden aplicar al cálculo del perfil del flujo en un canal largo con varias curvas verticales, e inclusive con tramos rectos intermedios. Además, que dichos métodos tienen la generalidad del flujo no permanente, pero las soluciones se adaptan fácilmente al permanente.

El modelo de flujo incluye las curvas verticales, de curvatura constante o no (cóncavas y convexas), utilizadas para unir dos tramos de pendiente distinta en un canal; también el perfil del flujo sobre un obstáculo curvo construido en el fondo o el que ocurre sobre un cimacio; asimismo, el caso de la formación del régimen crítico en un canal de fondo curvo. Como se ha mencionado, la solución de estos problemas comúnmente se aborda mediante aproximaciones obtenidas experimentalmente para resolver las singularidades del flujo local, o mediante soluciones particulares de la teoría del flujo con potencial obtenidas por métodos matemáticos más complicados, como los que existen para las cubetas deflectoras.

En resumen, fue posible establecer un modelo para el análisis del flujo curvilíneo variado no permanente, de mayor generalidad, que elimina las limitaciones del modelo actual de flujo gradualmente variado y que se destina prácticamente al caso rectilíneo.

## CAPÍTULO 2

### ECUACIONES DIFERENCIALES DEL FLUJO CURVILÍNEO

#### 2.1 ASPECTOS GENERALES DEL MODELO

##### 2.1.1 *Antecedentes*

Es común que un flujo curvilíneo de importancia ocurra en un canal de eje recto con distintas formas de sección, donde el diseño del perfil curvo del fondo interviene y a veces configura parte de la geometría de la sección y del resto del canal. Una de las dificultades importantes del tratamiento radica precisamente en cómo definir la frontera curva del fondo de modo general, para tomar en cuenta su influencia en el campo de flujo y en la frontera superior (superficie libre), así como para incluir posteriormente el efecto de fricción.

Las contribuciones hasta ahora publicadas plantean ciertamente la solución general del problema de un flujo sobre un fondo curvo y no de casos particulares. Sin embargo, tienen el gran defecto de ser aplicables sólo a canales rectangulares, no siendo posible extender la aplicación al caso de obras de excedencia de sección trapecial, como son la mayoría, o de sección circular y de transición en túnel.

La tesis tiene como objetivo subsanar el defecto de las teorías existentes, generalizando un modelo de flujo que sea aplicable a canales con sección distinta de la rectangular sin aumentar drásticamente su complejidad, de manera que sea accesible a un ingeniero que se enfrente con frecuencia a este tipo de problemas.

De la reseña de aportaciones presentada en el primer capítulo se desprende que sería posible cumplir el objetivo si el modelo se ajusta a un sistema de coordenadas curvilíneas, similar al empleado por Dressler, ya que así se elimina el grado de complejidad que tiene el modelo de Steffler. El modelo por desarrollar tiene que considerar la existencia de un componente radial de la velocidad en adición al longitudinal comúnmente considerado. Esto elimina la posibilidad de hacerlo totalmente unidimensional, sin embargo, el valor de dicho componente será mayor o menor en la medida que el canal tenga o no curvas verticales de curvatura constante o variable, y que los cambios de curvatura también lo sean.

Se plantea como objetivo general la concepción de un modelo de flujo aplicable a canales de fondo curvo con las formas de sección más comunes: trapecial y sus casos particulares del rectangular y triangular, además de la circular para canales cerrados en forma de túnel. Es factible la generalización para otras secciones más elaboradas, como las que ocurren en las transiciones graduales que cambian la sección de las obras de excedencia en túnel.

La solución numérica suele ser más sencilla, y según los resultados hasta ahora obtenidos puede efectuarse con métodos convencionales como el de Runge-Kutta de cuarto orden, más accesible para los ingenieros a través de programas ya existentes.

Con el modelo podrán determinarse:

- a) La distribución de los componentes longitudinal y transversal de la velocidad en cada sección del canal.
- b) La distribución de la presión en cada sección y la que se produzca en el fondo de la misma.
- c) Los límites para los que ocurre presión subatmosférica en el fondo de la sección y la posible separación del flujo.
- d) El perfil de la superficie libre del agua a lo largo del canal.
- e) Los ajustes sencillos por realizar para aplicar el modelo a aquellos tramos del canal donde el fondo sea plano pero con pendiente longitudinal.
- f) Los límites de aplicación para cubrir los problemas más comunes de la práctica.
- g) Las condiciones de flujo crítico para conocer el tipo de régimen en cada tramo del canal, así como el valor del tirante crítico y la sección donde se encuentra.
- h) La comprobación del caso particular de canal rectangular, con los modelos y experimentos que han sido ya efectuados.
- i) Las soluciones particulares que se tienen cuando se desprecia, por ejemplo, la fricción en problemas locales de flujo.
- j) La solución numérica de las ecuaciones diferenciales del flujo en un canal rectangular para detectar las dificultades en su aplicación.
- k) La aplicación del modelo a canales con secciones distintas de la rectangular para generalizar los resultados.

- l) Las conclusiones y recomendaciones del caso para tratar nuevos problemas de la práctica.

### 2.1.2 Hipótesis de partida

- a) El fondo posee la misma curvatura (cóncava o convexa) en todo el ancho del canal. Es decir, la curvatura del fondo se basa en que existe un eje transversal único, donde se aloja el centro de curvatura de todos los puntos que constituyen tanto el fondo como las paredes de una sección. Esto es común en la práctica por sencillez constructiva, aun en el caso de cimacios y curvas verticales de transición.
- b) La curvatura del fondo es la única que influye en las líneas de corriente del flujo. Esto elimina el cálculo del flujo curvilíneo que ocurre antes y después de un cambio brusco de pendiente longitudinal plana.
- c) Existen dos componentes de la velocidad: en dirección ortogonal y tangencial al fondo curvo en cada sección, sujetas a la determinación con el modelo propuesto. El tercer componente se desprecia. La suposición de que el flujo se realiza sobre planos paralelos es, por supuesto, una aproximación; es común en la hidráulica que el mezclado turbulento suprime en gran medida la variación en dirección transversal. En cuanto el canal sea más ancho, la suposición será más segura.
- d) El flujo es de poca profundidad, es decir, el cociente del tirante y el radio de curvatura es pequeño. Esto tiene también otras implicaciones en cuanto a la comparación entre las derivadas de los componentes de la velocidad y la proporción entre ellas.
- e) El flujo es incompresible dado que es a superficie libre y en principio, irrotacional y no viscoso. El término de pérdida de fricción se incluye a través del esfuerzo cortante en el fondo y paredes.
- f) Se emplea un sistema de coordenadas curvilíneas, cuyas características y propiedades se analizan previamente con los métodos matemáticos convencionales para la transformación de sistemas coordenados. El fondo del canal puede ser una línea curva cuando la sección es circular y triangular, o una superficie cuando la sección es trapezoidal y rectangular. La coordenada longitudinal sigue fielmente la forma que tiene el fondo y la curvatura existente define un plano ortogonal al fondo en cada punto, que contiene a la sección del canal con la forma que tenga. La tercera coordenada es recta y tangente al plano de la sección.
- g) Las distintas variables dependientes que intervienen en el flujo son continuas y derivables.

### 2.1.3 Principios básicos y metodología empleada

- a) En este capítulo se presentan los aspectos generales del modelo que a continuación se detallan. Las ecuaciones diferenciales se establecen aplicando los principios básicos del flujo irrotacional a un volumen de control diferencial ajustado en forma y tamaño al sistema de coordenadas empleado y a la geometría de la sección. Los principios básicos que se aplican al volumen de control son: a)  $\nabla \times v = 0$ ; b) principio de continuidad; c) principio de cantidad de movimiento. El desarrollo general corresponde al estado de flujo no permanente, pero se particulariza al permanente.
- b) El tratamiento que se emplea es vectorial, utilizando los vectores base variables ajustados al sistema de coordenadas empleado. El resultado es un sistema de tres ecuaciones vectoriales, o bien cuatro, cuando una de ellas se divide en sus componentes.
- c) Las ecuaciones diferenciales resultantes son las exactas y representan una generalización de las tradicionalmente obtenidas para el flujo unidimensional sobre el fondo plano. Cabe decir que el sistema de ecuaciones por emplear cambia su estructura de acuerdo con la geometría de la sección del canal. Es decir, hay un sistema de ecuaciones distinto para cada forma de sección. Sin embargo, esto se elimina cuando se desprecia el componente transversal de la velocidad.
- d) Se establecen las condiciones generales de frontera para una solución directa en los casos sencillos, o numérica en el caso general.
- e) Las ecuaciones diferenciales exactas se simplifican cuando se acepta la condición de flujo poco profundo (somero), obteniendo así un sistema no menos preciso si se cumple dicha condición, pero factible de resolver aun en flujo no permanente.
- f) Las ecuaciones diferenciales generales se simplifican cuando el canal es rectangular y se convierten así en las de Dressler, que constituyen entonces un caso particular de las primeras. Igualmente, cuando la curvatura se hace igual a cero, las ecuaciones obtenidas son válidas para el canal de fondo plano. Finalmente, cuando las derivadas respecto del tiempo se hacen cero, se obtienen las ecuaciones para el flujo permanente.
- g) El efecto resistivo de las fronteras mojadas se valúa posteriormente para ser congruente con las leyes de fricción convencionales en el canal de fondo plano y con validez en flujo cóncavo o convexo.

- h) Las ecuaciones se particularizan para el flujo permanente, con el fin de aplicarse al caso más común que se presenta en los problemas de la práctica.
- i) Se define el número de Froude generalizado en flujo curvilíneo y con él se analiza el flujo crítico en canales de fondo cóncavo y convexo, y su congruencia con el convencional cuando es plano. La definición coincide con la empleada por Henderson, como el cociente de la velocidad superficial del flujo y la celeridad de la onda de translación, y que es común en canales de fondo plano.
- j) Se analiza la condición de separación del flujo y la predicción de cavitación en los casos extremos.
- k) Se establece la naturaleza hiperbólica de las ecuaciones y los límites de validez de las hipótesis aún para el canal trapecial.

## 2.2 COORDENADAS CURVILÍNEAS

### 2.2.1 Descripción y ecuaciones de transformación

El tratamiento que se presenta tiene el propósito de obtener las ecuaciones diferenciales del flujo curvilíneo para un canal de eje recto y cualquier forma de sección (figura 2.1). El eje recto elimina cualquier curvatura horizontal y el efecto del fondo curvo ocurre sobre planos verticales paralelos al que contiene a dicho eje y al propio centro de curvatura. Por ello, la curvatura del fondo es la que tiene el canal sobre su eje y define el centro de curvatura de la sección, el cual mantiene su posición en dirección transversal. Cuando la curvatura cambia en la dirección del eje del canal, lo hace de manera continua. El flujo curvilíneo es el resultado del efecto que produce dicha curvatura a través del componente de la aceleración normal a las líneas de flujo sobre planos verticales (paralelos al plano  $x - z$ ), sin existir componentes del movimiento en la dirección transversal ( $v_y = a_y = 0$ ). Por tanto, las ecuaciones diferenciales del movimiento tienen que incluir términos que contengan dicho efecto.

En el análisis se acepta que el flujo en el canal sea incompresible (dado que es a superficie libre), irrotacional, no viscoso y con fricción. La irrotacionalidad es una hipótesis muy común en la hidráulica y significa que existe un potencial de la velocidad. El escaso valor de la viscosidad del agua y la turbulencia existente justifican que el flujo sea no viscoso.

Para facilitar el análisis se utiliza un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales en el espacio ( $s, c, n$ ), similar al adoptado por Dressler (1978) pero con las modificaciones necesarias para tomar en cuenta la geometría longitudinal del fondo del canal y la que tenga su sección en dirección transversal al movimiento.

Considérese el canal de eje recto y fondo curvo que se muestra en la figura 2.1, donde se produce un flujo de las características ya mencionadas. Su análisis puede realizarse con el sistema fijo de coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) que se muestra en la misma figura, siendo  $x$  el eje horizontal que sirve a su vez como nivel arbitrario de referencia,  $y$  un eje también horizontal y  $z$  el eje vertical. Sobre ellos se alojan los vectores unitarios ( $i, j, k$ ) respectivamente. El origen del sistema coordenado es también arbitrario.

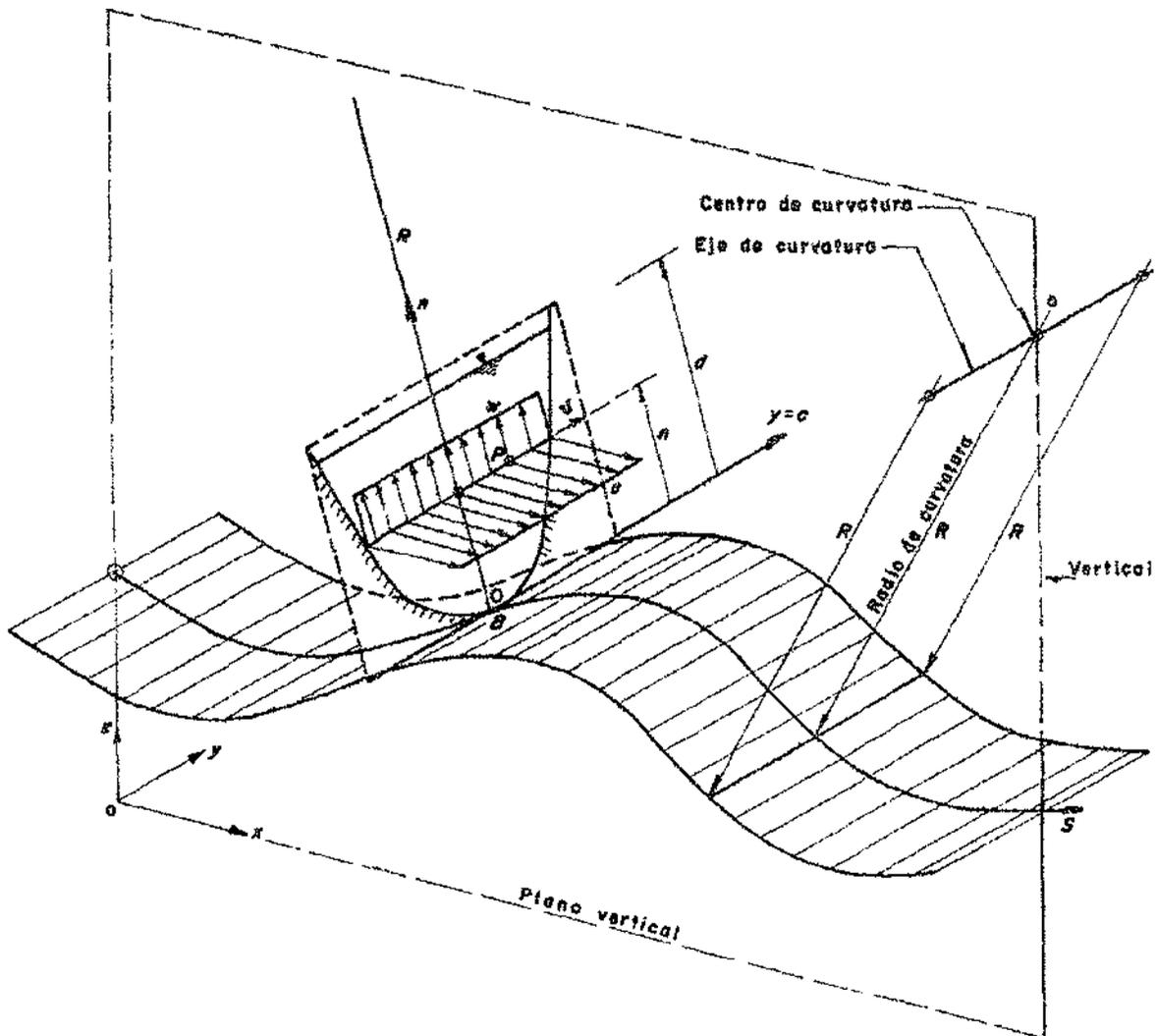


Figura 2.1. Definición del sistema de coordenadas curvilíneas

La coordenada  $s$  del sistema sigue fielmente la forma conocida del fondo curvo y mide la longitud de arco de dicho fondo. Dicha coordenada define la posición de un plano ortogonal al fondo en cada punto, que contiene la sección transversal del canal y sobre el cual se mide la coordenada  $n$ . No habiendo cambio en dirección lateral sobre dicho plano, la coordenada  $c$  es de igual magnitud y dirección que  $y$ , por tanto, el sistema curvilíneo es realmente  $(s, y, n)$  y poco difiere del que se emplea para el flujo unidimensional sobre un fondo plano.

La coordenada  $n$  de un punto P en el campo de flujo se establece desde el punto B en dirección ortogonal al fondo hasta el nivel del punto en cuestión. Finalmente la coordenada  $y$  ubica al punto P. El punto B en el fondo se localiza mediante las coordenadas  $(x = \xi, y = 0, z = \zeta)$ . Asimismo, la curva que representa al fondo se define a través de las funciones (sólo de  $s$ ):

$$x = \xi(s) \quad (2.1)$$

$$y = 0 \quad (2.2)$$

$$z = \zeta(s) \quad (2.3)$$

siendo necesario que la curva sea continua, además de tener pendiente y curvatura también continuas.

El perfil de la superficie libre se desconoce, pero se representa por  $n = d(s, t)$ , donde  $d$  es la distancia ortogonal desde el fondo hasta la superficie libre (según  $n$ ) y es función de  $s$  y la variable  $t$  (tiempo).

Las nuevas variables independientes  $(s, y, n)$  forman un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales como se muestra en la figura 2.1, de donde es fácil deducir que las ecuaciones de transformación entre los dos sistemas coordenados para un punto cualquiera P son:

$$x(s, n) = \xi - \zeta' n \quad (2.4)$$

$$y = y \quad (2.5)$$

$$z(s, n) = \zeta + \xi' n \quad (2.6)$$

donde los términos:

$$\xi'(s) = \frac{\partial \xi}{\partial s} = \cos \theta \quad (2.7)$$

$$\zeta'(s) = \frac{\partial \zeta}{\partial s} = \operatorname{sen} \theta \quad (2.8)$$

son desde luego funciones sólo de  $s$ , siendo  $\theta$  el ángulo de inclinación de la tangente al fondo en el punto B respecto de la horizontal. Por supuesto, se cumple la identidad  $(\xi')^2 + (\zeta')^2 = 1$ .

### 2.2.2 Vectores base y jacobiano de la transformación

Los vectores unitarios base  $e_s$ ,  $e_y$ ,  $e_n$  son tangentes a las líneas que siguen las coordenadas  $(s, y, n)$  y también ortogonales entre sí. Dichos vectores se definen en principio en cada punto P y, por tanto, son funciones de  $s, y$  y  $n$ . Los vectores unitarios  $(i, j, k)$ , según  $(x, y, z)$ , son en cambio fijos cualquiera que sea el punto en cuestión.

El vector de posición del punto P es  $r = x i + y j + z k$ , de manera que los vectores unitarios en dicho punto son:

$$e_s = \frac{\partial r}{\partial s} / \left| \frac{\partial r}{\partial s} \right| \quad (2.9a)$$

$$e_y = \frac{\partial r}{\partial y} / \left| \frac{\partial r}{\partial y} \right| \quad (2.9b)$$

$$e_n = \frac{\partial r}{\partial n} / \left| \frac{\partial r}{\partial n} \right| \quad (2.9c)$$

donde los denominadores se conocen como factores de escala.

Siendo:  $\xi^n = \partial \xi^n / \partial s$ ;  $\zeta^n = \partial \zeta^n / \partial s$ ; de las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) resultan:

$$\frac{\partial r}{\partial s}(s, n) = (\xi^n - \zeta^n n) i + (\zeta^n + \xi^n n) k \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = j \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n}(s, n) = -\zeta^n i + \xi^n k \quad (2.10c)$$

Los vectores base se definen mejor en el fondo ( $n = 0$ ) a partir de las ecuaciones (2.9) y (2.10), de modo que sean función sólo de  $s$ , es decir

$$e_s(s) = \xi^n i + \zeta^n k \quad (2.11)$$

$$e_y = j \quad (2.12)$$

$$e_n(s) = -\zeta^n i + \xi^n k \quad (2.13)$$

ya que para  $n = 0$ , de las ecuaciones (2.10a, b y c) se obtiene

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right| = |\mathbf{j}| = 1$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} \right| = \sqrt{\left( \xi'' \right)^2 + \left( \zeta'' \right)^2} = 1$$

De acuerdo con las ecuaciones de Frenet-Serret, para el punto B en el fondo se cumple:

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial s} = \kappa \mathbf{e}_n \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial s} = \tau \mathbf{e}_n = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial s} = -\kappa \mathbf{e}_s - \tau \mathbf{e}_y = -\kappa \mathbf{e}_s \quad (2.16)$$

ya que la torsión es  $\tau = 0$  en virtud de que la coordenada  $y$  sigue una línea recta, siendo  $\kappa(s) = 1/R(s)$  la curvatura del fondo en el punto B, definida como el recíproco del radio de curvatura  $R$  en dicho punto (figura 2.1) y función sólo de  $s$ . El valor  $\kappa > 0$  describe un fondo cóncavo y el de  $\kappa < 0$  al convexo.

De la ecuación (2.11) se obtiene el vector

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial s} = \xi'' \mathbf{i} + \zeta'' \mathbf{k} \quad (2.17)$$

el cual es perpendicular a  $\mathbf{e}_y$  y colineal con  $n$ . Se cumple así que

$$\kappa^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial s} \right|^2 = \left( \xi'' \right)^2 + \left( \zeta'' \right)^2 \quad (2.18)$$

ya que  $|\mathbf{e}_n| = 1$ . Según las reglas del producto escalar, también se cumple que

$$\mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial s} = \mathbf{e}_n \cdot \kappa \mathbf{e}_n = \kappa \quad (2.19)$$

ya que  $e_i \cdot e_n = 1$ . De este modo, con las ecuaciones (2.12) y (2.17) resulta

$$\kappa = \xi' \zeta'' - \zeta' \xi'' \quad (2.20)$$

Finalmente, es obvio que

$$\frac{\partial e_s}{\partial y} = \frac{\partial e_s}{\partial n} = \frac{\partial e_s}{\partial t} = \frac{\partial e_y}{\partial s} = \frac{\partial e_y}{\partial n} = \frac{\partial e_y}{\partial t} = \frac{\partial e_n}{\partial s} = \frac{\partial e_n}{\partial y} = \frac{\partial e_n}{\partial t} = 0 \quad (2.21)$$

Para que (2.4), (2.5) y (2.6) sean las ecuaciones de transformación entre los dos sistemas coordenados, es necesario y suficiente que el jacobiano de la transformación sea distinto de cero, en cuyo caso deben existir ecuaciones similares para la transformación recíproca. El jacobiano de la transformación se expresa como sigue:

$$J \left( \begin{array}{c} x, y, z \\ s, y, n \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial n} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & 0 & \frac{\partial x}{\partial n} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial s} & 0 & \frac{\partial z}{\partial n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial n} \end{vmatrix}$$

$$J \left( \begin{array}{c} x, y, z \\ s, y, n \end{array} \right) = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial z}{\partial s} = (\xi' - \zeta''n) \zeta' + \zeta' (\zeta' + \xi''n)$$

$$J \left( \begin{array}{c} x, y, z \\ s, y, n \end{array} \right) = (\xi')^2 + (\zeta')^2 - (\xi' \zeta'' - \zeta' \xi'') n$$

donde las derivadas parciales se han obtenido de las ecuaciones de transformación (2.4) a (2.6). De acuerdo con las ecuaciones (2.7) y (2.8), la suma de los dos primeros términos en la anterior vale uno y con la ecuación (2.20) el jacobiano se reduce a la forma

$$J \left( \begin{array}{c} x, y, z \\ s, y, n \end{array} \right) = 1 - \kappa n \quad (2.22)$$

Es decir,  $J(s, y, n) \neq 0$  y el mapeo es posible uno a uno siempre que para  $\kappa > 0$ ,  $n \leq 1/\kappa = R$ , lo que es obvio geoméricamente; el caso de  $J(s, y, n) = 0$  haría que el mapeo cesara de ser uno a uno. El valor máximo de  $\kappa n$  es para  $n = d$ , y la condición anterior restringe la dimensión  $d$  en todos los flujos donde  $\kappa > 0$  a que  $\kappa d < 1$ . Por razones obvias, es también  $J(s, y, n) \neq 0$  cuando  $\kappa < 0$ .

El factor de escala en la ecuación (2.9a) es la magnitud del vector expresado por la ecuación (2.10a), como sigue

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right| = \left[ \left( \xi' - \zeta'' n \right)^2 + \left( \zeta' + \xi'' n \right)^2 \right]^{1/2}$$

Al desarrollar los binomios y agrupar términos

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right| = \left[ 1 - 2 \left( \xi' \zeta'' - \zeta' \xi'' \right) n + \left[ \left( \zeta'' \right)^2 + \left( \xi'' \right)^2 \right] n^2 \right]^{1/2}$$

y de las ecuaciones (2.18) y (2.20)

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right| = \left[ 1 - 2 \kappa n + \kappa^2 n^2 \right]^{1/2} = \left[ (1 - \kappa n)^2 \right]^{1/2} = J \quad (2.23)$$

de modo que el factor de escala según  $s$  es el jacobiano de la transformación.

Por el mismo camino, de las ecuaciones (2.10b y c), los factores de escala restantes son:  $\left| \partial \mathbf{r} / \partial y \right| = \left| \partial \mathbf{r} / \partial n \right| = 1$ . Esto significa que un incremento  $ds$  a partir del punto B equivale al incremento diferencial  $J ds$  a partir del punto P y que los incrementos  $dy$  y  $dn$  en B son los mismos que en P. Es decir, el jacobiano es el factor de escala para  $s$  y el valor 1 lo es para  $y$  y  $n$ .

De este modo, el incremento diferencial de arco  $(ds + dy + dn)$  en B equivale al incremento diferencial de arco en el punto P de valor

$$da = \sqrt{(J ds)^2 + (dy)^2 + (dn)^2} \quad (2.24a)$$

En la misma forma, las diferenciales de área y de volumen en coordenadas  $(s, y, n)$  están dadas por:

$$dA = J ds dn \quad (2.24b)$$

$$dv = J ds dy dn \quad (2.24c)$$

Dado el vector de posición del punto P por sus componentes según  $(x, y, z)$ , a través de las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6), los vectores unitarios en las expresiones (2.9a, b y c) son entonces:

$$e_s = \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \quad (2.25a); \quad e_y = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} \quad (2.25b); \quad e_n = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} \quad (2.25c)$$

Para la transformación inversa, del sistema curvilíneo  $(s, y, n)$  al sistema cartesiano  $(x, y, z)$ , se dispone del vector:

$\nabla s = (\partial s / \partial x) \mathbf{i} + (\partial s / \partial y) \mathbf{j} + (\partial s / \partial z) \mathbf{k}$  (y en forma análoga, de los vectores:  $\nabla y$  y  $\nabla n$ ). Se demuestra entonces que los vectores base son los mismos, pero ahora se definen como sigue:

$$e_s = \frac{\nabla s}{|\nabla s|} = J \nabla s \quad (2.26a)$$

$$e_y = \frac{\nabla y}{|\nabla y|} = \nabla y \quad (2.26b)$$

$$e_n = \frac{\nabla n}{|\nabla n|} = \nabla n \quad (2.26c)$$

Esto significa que los factores de escala para transformar el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales elegido al cartesiano  $(x, y, z)$ , son los recíprocos de los antes encontrados:  $|\nabla s| = 1/J$ ;  $|\nabla y| = 1$ ;  $|\nabla n| = 1$ .

### 2.2.3 El gradiente

Sea  $\phi = \phi(s, y, n)$  una función escalar diferenciable y con las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) como las de transformación del sistema coordenado curvilíneo ortogonal, los componentes de gradiente de  $\phi$  en el sistema cartesiano son:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial z}$$

de modo que, con:  $\nabla\phi = (\partial\phi/\partial x)\mathbf{i} + (\partial\phi/\partial y)\mathbf{j} + (\partial\phi/\partial z)\mathbf{k}$ , resulta

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial s} \left( \frac{\partial s}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial s}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial s}{\partial z}\mathbf{k} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k} \right) \\ &\quad + \frac{\partial\phi}{\partial n} \left( \frac{\partial n}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial n}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial n}{\partial z}\mathbf{k} \right)\end{aligned}$$

Por tanto, se reduce a:  $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial s}\nabla s + \frac{\partial\phi}{\partial y}\nabla y + \frac{\partial\phi}{\partial n}\nabla n$

De las ecuaciones (2.26):  $\nabla s = \mathbf{e}_s/J$ ;  $\nabla y = \mathbf{e}_y$ ;  $\nabla n = \mathbf{e}_n$ ; las cuales se substituyen en la anterior y se obtiene finalmente

$$\nabla\phi = \frac{1}{J} \frac{\partial\phi}{\partial s} \mathbf{e}_s + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial n} \mathbf{e}_n \quad (2.27)$$

que expresa al vector gradiente en el sistema de coordenadas curvilíneas elegido.

#### 2.2.4 La divergencia

Sea el vector

$$\vec{\phi} = \phi_1(s, y, n) \mathbf{e}_s + \phi_2(s, y, n) \mathbf{e}_y + \phi_3(s, y, n) \mathbf{e}_n \quad (2.28)$$

una función vectorial diferenciable en el sistema curvilíneo de vectores base  $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_n$ . Se demuestra que la divergencia de dicho vector en coordenadas curvilíneas es

$$\nabla \cdot \vec{\phi} = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial\phi_1}{\partial s} + \frac{\partial J\phi_2}{\partial y} + \frac{\partial J\phi_3}{\partial n} \right]$$

Pero dado que  $J$  no depende de  $y$ , entonces

$$\nabla \cdot \vec{\phi} = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial\phi_1}{\partial s} + \frac{\partial J\phi_3}{\partial n} \right] + \frac{\partial\phi_2}{\partial y} \quad (2.29)$$

### 2.2.5 El rotacional

Se demuestra que el rotacional del mismo vector  $\vec{\phi}$ , dado por la ecuación (2.28), en el sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas elegido está dado por el determinante

$$\nabla \times \vec{\phi} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} J e_s & e_y & e_n \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial n} \\ J \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

### 2.2.6 Componentes de la velocidad

El plano que contiene las coordenadas  $(y, n)$  es ciertamente ortogonal al fondo del canal en cualquier punto de coordenada  $s$ , pero la trayectoria de las partículas que pasan por cualquier punto  $P(s, y, n)$  en el campo de flujo (figura 2.2) no es necesariamente ortogonal a la dirección  $n$  en que se ubica dicho punto. Esto significa que el vector velocidad en el punto  $P$  tiene por lo menos los componentes  $u$  y  $w$ ; el primero es perpendicular al plano que contiene a las coordenadas  $(y, n)$  y el segundo es en la dirección de  $n$ . El tercer componente es  $v = v_y = 0$ , lo que significa que el movimiento se realiza exclusivamente sobre los planos paralelos al  $(x - z)$  en que ocurre la curvatura, con las correcciones del caso, tal como se consideró en las hipótesis de partida.

El vector velocidad en cada sistema coordenado queda entonces expresado en la forma

$$\mathbf{v}(s, n, t) = v_x \mathbf{i} + v_z \mathbf{k} = u \mathbf{e}_s + w \mathbf{e}_n$$

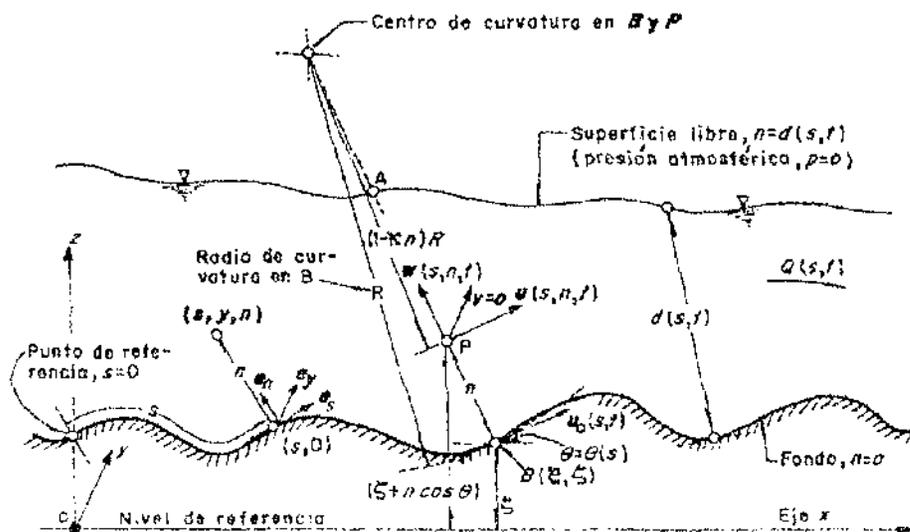


Figura 2.2. Definición de variables en un flujo curvilíneo.

De las ecuaciones (2.7), (2.8), (2.11) y (2.12) se obtienen las relaciones:

$$v_x = u \cos \theta - w \sin \theta \quad (2.31a)$$

$$v_y = v = 0 \quad (2.31b)$$

$$v_z = u \sin \theta + w \cos \theta \quad (2.31c)$$

De acuerdo con las consideraciones del inciso anterior y lo expresado por la ecuación (2.23), los componentes únicos de la velocidad según  $s$  y  $n$  son:

$$u(s, n, t) = J(s, n) \frac{ds}{dt} \quad (2.32a)$$

$$w(s, n, t) = \frac{dn}{dt} \quad (2.32b)$$

### 2.2.7 Componentes de la aceleración

La forma vectorial general de la aceleración en un sistema coordenado cartesiano es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (2.33)$$

donde  $v$  es la magnitud del vector velocidad, es decir,  $v^2 = u^2 + w^2$ . Es necesario encontrar sus componentes en el sistema coordenado elegido. De la ecuación (2.30) y con  $\partial w / \partial y = \partial Ju / \partial y = 0$ , se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} J\mathbf{e}_s & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_n \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial n} \\ Ju & 0 & w \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial Ju}{\partial n} \right) \mathbf{e}_y \quad (2.34)$$

También es

$$\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} J\mathbf{e}_s & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_n \\ 0 & [\nabla \times \mathbf{v}]_y & 0 \\ Ju & 0 & w \end{vmatrix} = w [\nabla \times \mathbf{v}]_y \mathbf{e}_s - u [\nabla \times \mathbf{v}]_y \mathbf{e}_n$$

donde se sustituye el componente dado por la ecuación (2.34) y se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{v} = -\frac{w}{J} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial J u}{\partial n} \right) \mathbf{e}_s + \frac{u}{J} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial J u}{\partial n} \right) \mathbf{e}_n$$

Debido a que  $\partial J / \partial n = -\kappa$ , al desarrollar resulta

$$\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \left[ -\frac{w}{J} \frac{\partial w}{\partial s} + w \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\kappa}{J} u w \right] \mathbf{e}_s + \left[ \frac{u}{J} \frac{\partial w}{\partial s} - u \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\kappa}{J} u^2 \right] \mathbf{e}_n$$

Se sustituye este resultado y el desarrollo del gradiente (ecuación 2.27) en la ecuación (2.33) y resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u^2 + w^2}{2} \right) - \frac{w}{J} \frac{\partial w}{\partial s} + w \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\kappa}{J} u w + \frac{\partial u}{\partial t} \right] \mathbf{e}_s \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{u^2 + w^2}{2} \right) + \frac{u}{J} \frac{\partial w}{\partial s} - u \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\kappa}{J} u^2 + \frac{\partial w}{\partial t} \right] \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

donde  $v$  es la magnitud del vector velocidad, es decir,  $v^2 = u^2 + w^2$ .

Al desarrollar las derivadas y simplificar, resultan finalmente los componentes del vector aceleración en cualquier punto de coordenadas  $(s, n)$ , que es

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left( \frac{u}{J} \frac{\partial u}{\partial s} + w \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\kappa}{J} u w + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \mathbf{e}_s \\ & + \left( \frac{\kappa}{J} u^2 + \frac{u}{J} \frac{\partial w}{\partial s} + w \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (2.35)$$

Esta expresión muestra que la aceleración en todos los puntos del campo de flujo y en cualquier instante  $t$  tiene únicamente dos componentes: uno en la dirección de  $\mathbf{e}_s$  y otro en la dirección de  $\mathbf{e}_n$ , sin existir componente en la dirección de  $\mathbf{e}_y$ .

Dichos componentes son diferentes de los que se obtienen para un sistema natural de coordenadas siguiendo una línea de corriente.

Los componentes se pueden también obtener a partir de la definición de aceleración. En efecto

$$\mathbf{a}(s, n, t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (u \mathbf{e}_s + w \mathbf{e}_n)$$

O bien, dado que  $e_s$  y  $e_n$  dependen sólo de  $s$ , resulta

$$a = \frac{du}{dt} e_s + u \frac{ds}{dt} \frac{\partial e_s}{\partial s} + \frac{dw}{dt} e_n + w \frac{ds}{dt} \frac{\partial e_n}{\partial s}$$

Al desarrollar las derivadas totales de los componentes  $u$  y  $w$ , se obtiene

$$a = \left( \frac{ds}{dt} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{dn}{dt} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) e_s + u \frac{ds}{dt} \frac{\partial e_s}{\partial s} + \left( \frac{ds}{dt} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{dn}{dt} \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) e_n + w \frac{ds}{dt} \frac{\partial e_n}{\partial s}$$

Sustituyendo las ecuaciones de Frenet-Serret (2.14 y 2.16), así como  $ds/dt$  y  $dn/dt$  de las expresiones (2.32), la ecuación anterior se convierte en

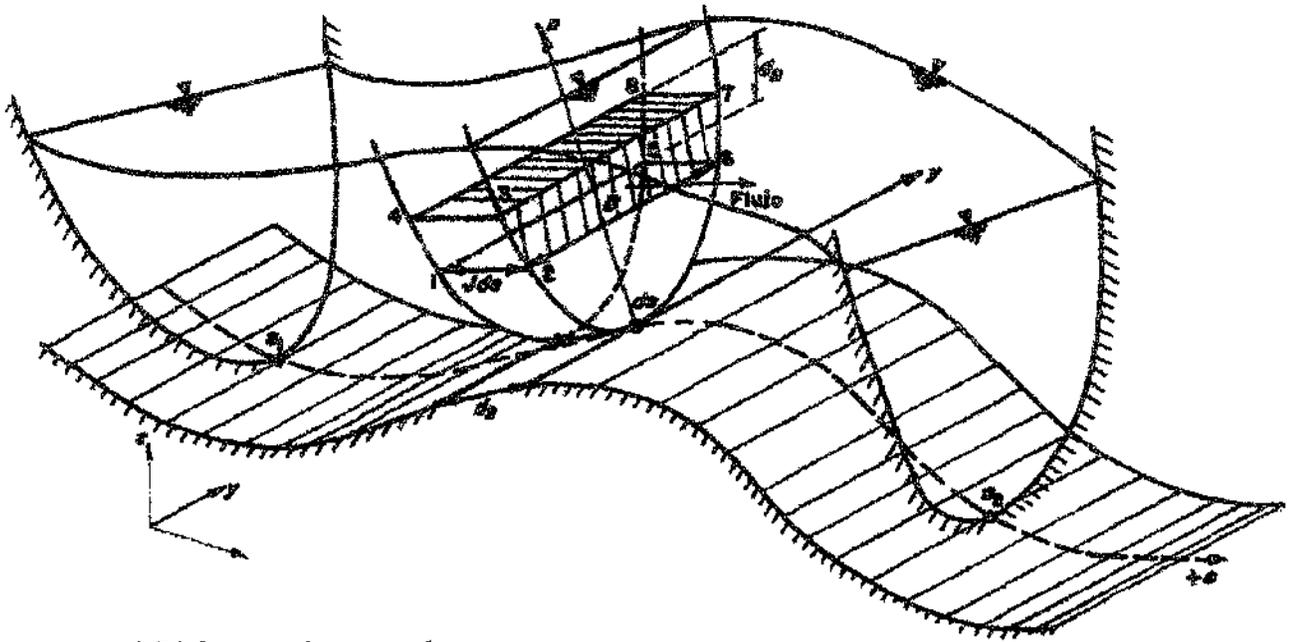
$$a = \left( \frac{u}{J} \frac{\partial u}{\partial s} + w \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) e_s + \frac{\kappa}{J} u^2 e_n + \left( \frac{u}{J} \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) e_n - \frac{\kappa}{J} u w e_s$$

donde al agrupar términos se llega a la ecuación (2.35).

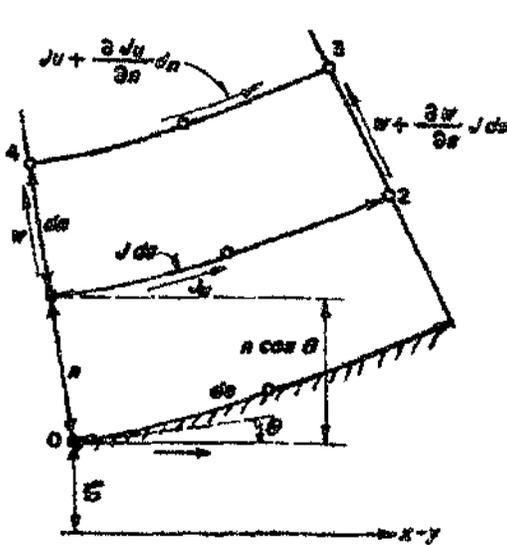
## 2.3 ECUACIONES DIFERENCIALES DEL FLUJO IRROTACIONAL

### 2.3.1 Aspectos generales

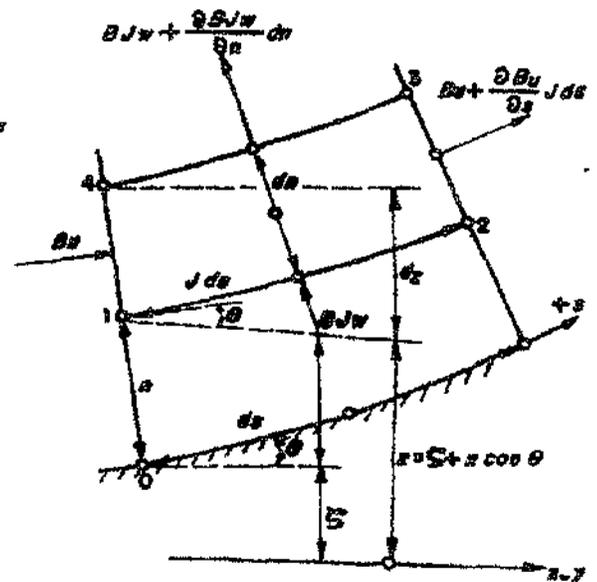
El flujo definido ampliamente en el subcapítulo 2.1 ocurre en forma de capas delgadas de líquido, como se muestra en la figura 2.3a. Se designa por  $B$  a la dimensión horizontal que tiene la sección del canal a la distancia  $n$  en el plano de la sección, como en la figura 2.1, siendo un escalar que depende sólo de  $n$ . Cuando la sección del canal cambia además en el sentido longitudinal, se complica mucho su geometría para fines constructivos y prefiere evitarse. Sin embargo, es necesaria en túneles, ya que la sección se define más fácilmente en dirección perpendicular al fondo, eligiendo cambios graduales en el sentido longitudinal por las grandes velocidades que adquiere el agua. Esto significa que el modelo debe aceptar cambios de  $B$  con  $s$  y  $n$ , de la misma manera que varían los componentes de la velocidad  $u$  y  $w$ , pero los que ocurran con  $s$  deben ser graduales para no modificar las condiciones de curvatura, es decir, para no introducir el tercer componente de la velocidad  $v$  en dirección transversal (según  $y$ ). Por tanto, en algunos casos,  $B$  se puede integrar con los componentes de la velocidad y formar nuevas funciones, como  $B u$  y  $B w$ , para simplificar los desarrollos.



a) Volumen de control



b) Irrotacionalidad



c) Continuidad

Figura 2.3. Derivación de las ecuaciones básicas.

Con las consideraciones y desarrollos antes expuestos, es posible establecer las ecuaciones diferenciales del flujo curvilíneo suponiendo un líquido no viscoso, como se hace en el modelo de Saint-Venant, pero introduciendo desde aquí la fuerza de resistencia por fricción en las fronteras rígidas sin perder rigor ni precisión en los resultados. Es decir, se prefiere el desarrollo completo de las ecuaciones a partir de los principios básicos, en lugar de transformar las ecuaciones de continuidad y de Euler al sistema de coordenadas elegido.

### 2.3.2 Condición de irrotacionalidad

Se obtiene de la ecuación (2.34) haciendo  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  y resulta

$$\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial Ju}{\partial n} = 0 \quad (2.36)$$

Esta expresión también se obtiene mediante el tratamiento que a continuación se explica.

Se define el volumen de control 1234 de tamaño diferencial que muestra la figura 2.3b, donde la condición de irrotacionalidad se logra con el único componente del vector que existe:  $[\nabla \times \mathbf{v}]_y = 0$ . Esto equivale a establecer que la circulación positiva (en dirección contraria a las manecillas del reloj) sea cero.

La velocidad del flujo sobre la cara 1-2 es  $Ju$  para hacer el recorrido sobre el segmento  $J ds$ , de modo que la circulación sobre dicha cara vale:  $+ Ju J ds$ . Por tanto, la circulación sobre la cara paralela 3-4 a la distancia  $dn$  es:

$- [Ju + (\partial Ju / \partial n) dn] J ds$ . En ambas caras se consideró la longitud media  $J ds$  del segmento.

La velocidad del flujo sobre la cara 1-4 es  $w$  y sobre la cara 2-3 es:  $w + (\partial w / \partial s) J ds$  y ambas actúan para efectuar recorridos sobre segmentos de longitud  $dn$ .

La circulación sobre el área 12341 es entonces

$$\oint_{12341} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{1-2} Ju J ds + \int_{2-3} \left( w + \frac{\partial w}{\partial s} J ds \right) dn - \int_{3-4} \left( Ju + \frac{\partial Ju}{\partial n} dn \right) J ds - \int_{4-1} w dn$$

Al efectuar las operaciones resulta

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{2-3} \frac{\partial w}{\partial s} J ds dn - \int_{3-4} \frac{\partial Ju}{\partial n} dn J ds$$

De acuerdo con el teorema de Gauss, el componente del rotacional se obtiene dividiendo la circulación entre el área  $J ds dn$  encerrada durante el recorrido, de manera que la condición de irrotacionalidad es la dada por la ecuación (2.36).

### 2.3.3 Ecuación de continuidad

El mismo volumen de control de la figura 2.3b se utiliza para obtener la ecuación de continuidad, como aparece en las figuras 2.3a y c, donde se representan sus dimensiones y los componentes de la velocidad útiles en la derivación. A dicho volumen de control se aplica la ecuación de transporte de Reynolds para la masa, que está dada por

$$\iint_{sc} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho dV = 0$$

Debido a que la densidad  $\rho$  permanece constante, la masa de líquido que entra al VC por la cara 1-4-8-5 en la unidad de tiempo es:  $-\rho B u dn$ . De igual manera que  $u$ , se considera que la dimensión  $B$  de la sección varía en la dirección  $s$ , de modo que puede integrarse con  $u$  como una sola función  $Bu$ . La masa de líquido que sale por la cara 2-3-7-6 es:  $\rho [(Bu + \frac{\partial Bu}{\partial s}) J ds] dn$ . Por el mismo camino, la masa de líquido que entra por la cara 1-2-6-5 vale:  $(-\rho B J w J ds)$  y la que sale por la cara 3-4-8-7:  $\rho [BJw + (\frac{\partial BJw}{\partial n})] J ds$ . Por tanto, la masa neta de líquido que entra y sale del VC es la suma:

$$\begin{aligned} \Sigma m &= \rho \left[ Bu + \frac{\partial Bu}{\partial s} J ds \right] dn - \rho Bu dn \\ &+ \rho \left[ BJw + \frac{\partial BJw}{\partial n} dn \right] J ds - \rho BJw J ds \\ \iint_{sc} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA) &= \iint_{sc} \left[ \frac{\partial Bu}{\partial s} + \frac{\partial BJw}{\partial n} \right] \rho J ds dn \end{aligned}$$

La variación de la masa dentro del VC en el tiempo ( $dt$ ) es:  $\rho \frac{\partial}{\partial t} (BJ ds dn)$ , pero dado que  $BJ$ ,  $ds$  y  $dn$  no dependen de  $t$ , el principio de conservación de la masa se expresa entonces mediante la ecuación

$$\frac{\partial Bu}{\partial s} + \frac{\partial BJw}{\partial n} = 0 \quad (2.37)$$

la cual también se obtiene de la ecuación (2.29), haciendo:  $\phi_1 = Bu$ ;  $\phi_2 = 0$ ;  $\phi_3 = Bw$ ; de modo que  $\nabla \cdot Bv = 0$ .

Cuando  $B$  no cambia con  $s$ ,  $\partial B / \partial s = 0$  y la ecuación anterior se convierte en

$$B \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial B J_w}{\partial n} = 0 \quad (2.38)$$

Cuando  $B$  tampoco cambia con  $n$  (sección rectangular),  $\partial B / \partial n = 0$  y la ecuación anterior se simplifica a la forma

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial J_w}{\partial n} = 0 \quad (2.39)$$

### 2.3.4 Ecuación del movimiento

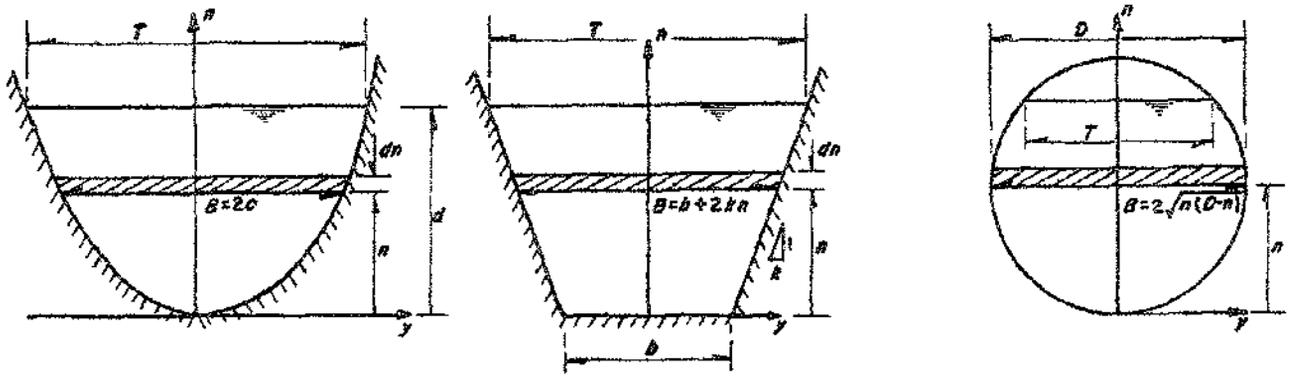
#### a) Ecuación vectorial

Antes de establecer la ecuación de movimiento es necesario precisar el criterio para insertar, desde un principio, el efecto resistivo en ella. Los modelos de flujo convencionales, como el de Saint-Venant, excluyen inicialmente la resistencia ocasionada por fuerzas friccionantes y viscosidad turbulenta ejercida por el fondo y las paredes. El efecto conjunto retardatorio se introduce después mediante el artificio de calcular los esfuerzos tangenciales sobre las fronteras, distribuyendo la fuerza resultante que producen sobre cada capa de líquido desde el fondo hasta la superficie libre. De esta manera, aunque el dominio del líquido así considerado corresponda a un volumen de control de gran tamaño, las ecuaciones diferenciales que gobiernan describen el flujo de una partícula de masa  $dm$  de *pequeño tamaño* con el mismo rigor. En el caso presente se sigue un camino similar pero la resistencia se inserta simultáneamente como una fuerza separada con la magnitud deducida de un análisis adecuado al tipo de flujo, como se explica en los desarrollos que siguen.

Cuando se aplica la ecuación de transporte de Reynolds al principio de conservación de la cantidad de movimiento en el volumen de control de la figura 2.4, se obtiene

$$F_i = \iiint_{vc} \frac{D}{Dt} (\rho v) dV = \iint_{sc} v (\rho v \cdot n dA) + \iiint_{vc} \frac{\partial v}{\partial t} \rho dV$$

donde  $F_i$  es la resultante del conjunto de fuerzas de superficie (externas) y de las fuerzas de cuerpo actuando sobre la masa elemental. El símbolo  $D/Dt$  se interpreta como la derivada total de Stokes del producto de las variables que afecta dentro del volumen de control.



a) Sección cualquiera

b) Sección trapecial

c) Sección circular

Figura 2.4. Geometría de la sección normal al fondo.

En los libros de matemáticas se demuestra que la expresión anterior equivale a la siguiente

$$F_* + F_f = \iiint_{VC} \frac{Dv}{Dt} \rho \, dv \quad (2.40)$$

donde se ha subdividido a  $F_* = F_* + F_f$ , siendo  $F_*$  la resultante de las fuerzas de cuerpo que actúan sobre la masa elemental y de las fuerzas externas que sean distintas de la fricción, ya que  $F_f$  es precisamente la fuerza total de fricción que actúa sobre las fronteras mojadas del volumen de control opuesta al flujo. La ecuación anterior es una expresión de la segunda ley de Newton.

Como se mencionó, las fuerzas  $F_*$  se subdividen en fuerzas de cuerpo  $F_{*c}$  por unidad de masa y en fuerzas de superficie  $F_{*a}$  por unidad de área. Las fuerzas  $F_{*c}$  se deben a la acción de campos magnéticos y gravitacionales que actúan sobre la masa contenida en el volumen de control. Las fuerzas  $F_{*a}$  agrupan a las fuerzas normales a la superficie de control producidas por la presión  $p$  y a las fuerzas tangenciales a dicha superficie generadas por los esfuerzos cortantes atribuidos a la viscosidad del agua que no se consideran. Por tanto, se tiene

$$F_* = \iiint_{VC} \rho F_c \, dv + \iint_{SC} F_{*a} \cdot n \, dA = \iiint_{VC} \rho F_c \, dv - \iint_{SC} n \cdot p \, dA$$

Se considera únicamente el campo gravitacional de modo que  $F_c = \nabla \Omega$ , donde  $\Omega$  es la función potencial de dicho campo. Además, la integral de superficie se transforma en integral de volumen mediante el teorema de Gauss, y resulta

$$F_s = \iiint_{VC} (\rho \nabla \Omega - \nabla p) dv$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.40) y aceptando que  $\Omega = -gz$ , se obtiene

$$\iiint_{VC} \left[ \nabla \left( gz + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{dv}{dt} \right] \rho dv = F_f$$

Por razones geométricas, la altura del volumen diferencial se calcula como:

$z = \zeta + n \cos \theta$ . Además, el vector aceleración se expresa mediante la ecuación (2.33) donde se acepta la condición de irrotacionalidad ( $\nabla \times v = 0$ ); por tanto, la ecuación anterior se convierte en

$$\iiint_{VC} \left[ \nabla \left( g\zeta + gn \cos \theta + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + w^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right] \rho dv = F_f$$

donde el término

$$H(s, n, t) = \zeta + n \cos \theta + \frac{p}{g\rho} + \frac{u^2 + w^2}{2g} \quad (2.41)$$

es la energía total (por unidad de peso) de la capa diferencial de líquido, de modo que la ecuación también es

$$\iiint_{VC} \left[ \nabla gH + \frac{\partial v}{\partial t} \right] \rho dv = F_f \quad (2.42)$$

donde  $F_f$  es la fuerza total de resistencia al flujo producida en la frontera mojada en dirección contraria al movimiento. Cuando  $F_f = 0$  resulta la forma vectorial de la ecuación de Euler

$$\nabla gH + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (2.43)$$

b) *Componentes de la ecuación de movimiento*

Los componentes de la ecuación (2.42) corresponden a las direcciones coordenadas  $s$  y  $n$ . Los vectores base son función sólo de  $s$  y quedaron definidos en cualquier punto del fondo mediante las ecuaciones (2.11) a (2.13); en particular, los que corresponden al punto 0 ( $s = 0$ ) de la figura 2.5, en el instante  $t = 0$ , son:  $e_s(0)$  y  $e_n(0)$ . Por tanto, para obtener el componente según  $s$  en  $s = 0$ , se toma el producto escalar de  $e_s(0)$  por la ecuación (2.42) para que todas las variables se valúen en  $s = 0$  y  $t = 0$ , y se pueda omitir la dependencia respecto de  $s$  y  $t$  por brevedad en los desarrollos. Además, con  $dV = BJ ds dn$ , se obtiene

$$\int_0^d e_s(0) \cdot \left[ g \nabla H + \frac{\partial v}{\partial t} \right] \rho BJ ds dn = dF_{fs}$$

O bien, de acuerdo con el desarrollo de la ecuación (2.27), para el componente según  $s$  se tiene

$$\int_0^d \left[ \frac{g}{J} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \right] \rho BJ ds dn = dF_{fs} \quad (2.44a)$$

De igual manera, al tomar el producto escalar de la ecuación (2.42) con  $e_n(0)$ , resulta el segundo componente (según  $n$ )

$$\int_0^d \left[ g \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial t} \right] \rho BJ ds dn = dF_{fn} \quad (2.44b)$$

donde  $dF_{fs}$  y  $dF_{fn}$  son los componentes respectivos según  $s$  y  $n$  de la fuerza total de resistencia en la longitud  $ds$ .

c) *Efecto resistivo*

Para incluir el efecto total resistivo en las ecuaciones diferenciales, el procedimiento estándar en modelos como el de Saint-Venant consiste en aceptar una fuerza de cuerpo resistiva ficticia (por unidad de masa) distribuida a lo largo de cada capa delgada de líquido. El componente resultante de dicha fuerza para la capa entera debe ser igual al componente de la fuerza producida por los esfuerzos tangenciales actuando sobre el total del perímetro mojado. Una vez que la magnitud  $\mathcal{R}$  de esta fuerza de cuerpo ficticia (con dimensiones fuerza/masa) se determina en cada punto del flujo, se puede agregar como un término restrictivo adicional en el lado derecho de la ecuación del movimiento principal de la partícula elemental  $dm$ .

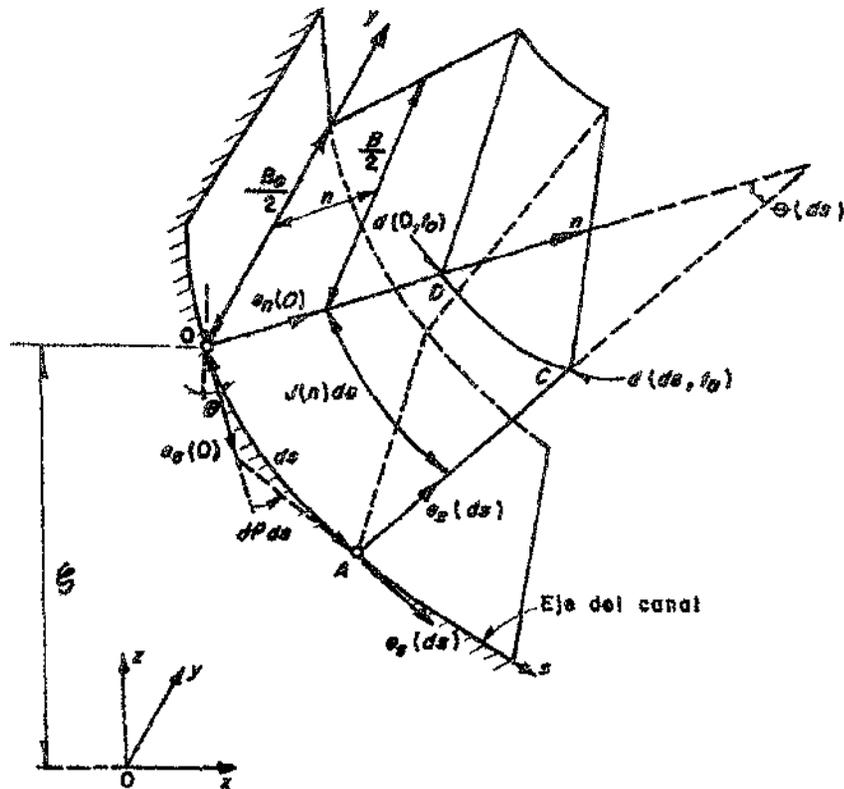


Figura 2.5. Volumen de control al obtener la fuerza de resistencia al flujo.

Por otra parte, la variación en la magnitud  $g$  de la fuerza de cuerpo a través de la capa líquida no presenta problema. En efecto, debido a que cada partícula en cualquier sección vertical del modelo de Saint-Venant se comporta de la misma manera, es obvio que cada una se ve afectada por la misma fuerza de cuerpo resistiva y por ello, la fuerza de cuerpo ficticia  $g(x, y, t)$  debe ser de magnitud constante a lo largo de la capa delgada e igual a  $F_x^i(x, t) / m$ , donde  $F_x^i$  es la fuerza cortante total ejercida por el perímetro mojado de la capa rectangular de longitud  $dx$ , y  $m$  es la masa total de líquido en esa capa.

Dressler y Yevjevich (1984) utilizaron el procedimiento antes descrito para determinar la magnitud apropiada de la fuerza de cuerpo resistiva ficticia e incluirla en las ecuaciones del flujo curvilíneo de Dressler. Para ello supusieron arbitrariamente que la fuerza de cuerpo análoga  $g_e$  debería ser constante en la dirección  $n$  y que su magnitud se podía calcular dividiendo la fuerza tangencial resultante en la frontera entre la masa total afectada en una capa angular delgada (figura 2.5). Sin embargo, en el modelo del flujo curvilíneo, no todas las partículas en una sección transversal plana se comportan idénticamente, ya que existe variación del componente  $w$  de la velocidad con  $(s, n, t)$ . Por tanto, es preferible emplear un análisis matemático sin suposición alguna para encontrar, tanto el valor correcto de  $g$  en las ecuaciones diferenciales del flujo curvilíneo, como su variación funcional a través del flujo.

Se introduce ahora un segundo flujo donde no ocurren esfuerzos tangenciales en las fronteras, pero en cambio actúa una fuerza de cuerpo retardatoria en la dirección  $s$ ,  $\mathcal{J}_s = \mathcal{J}(s, n, t) \cdot e_s(s)$ , distribuida de tal manera que su acción resistiva produce las mismas condiciones en los campos de velocidad y presión que ocurren en el primer flujo, donde el VC está sujeto a esfuerzos tangenciales en las fronteras. La función desconocida  $\mathcal{J}$  se determina mediante otra aplicación de la ecuación de transporte de Reynolds al segundo flujo en la dirección  $s$ , resultando

$$\int_0^d \left[ \frac{g}{J} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \right] \rho B(n) J(n) ds dn = \int_0^d \mathcal{J}_s(n) J(n) B(n) \rho ds dn$$

Dado que la ecuación anterior y la (2.44a) tienen términos idénticos en el lado izquierdo, se deduce que la expresión

$$\int_0^d \mathcal{J}_s(n) J(n) B(n) \rho ds dn = dF_{fs} \quad (2.45)$$

es la condición para integrar  $\mathcal{J}_s$  a partir de  $dF_{fs}$  para que las ecuaciones sean equivalentes.

La ecuación del movimiento principal según  $s$  para este segundo flujo se puede entonces escribir en la forma

$$\frac{g}{J(s, n)} \frac{\partial H(s, n, t)}{\partial s} + \frac{\partial u(s, n, t)}{\partial t} = \mathcal{J}_s(s, n, t)$$

donde aparece ahora la fuerza de cuerpo  $\mathcal{J}_s$ , por unidad de masa. Para las partículas  $dm$  en el plano  $s = 0$  y en  $t = t_0$ , la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{g}{J(n)} \frac{\partial H(n)}{\partial s} + \frac{\partial u(n)}{\partial t} = \mathcal{J}_s(n)$$

donde ambos lados de la ecuación son funciones que varían con  $n$  y se puede también expresar en la forma

$$g \frac{\partial H(0, t_0)}{\partial s} + J(n) \frac{\partial u(0, t_0)}{\partial t} = \mathcal{J}_s(n) J(n) \quad (2.46)$$

Por un camino similar con el componente  $n$ , se encuentran las ecuaciones equivalentes a la (2.45) y (2.46), que son:

$$\int_0^d \mathcal{G}_n(n) J(n) B(n) \rho ds dn = dF_{fn} \quad (2.47)$$

$$g \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{G}_n(n) \quad (2.48)$$

Las ecuaciones correctas del movimiento son entonces la (2.46) y (2.48), donde la fuerza de cuerpo por unidad de masa tiene que calcularse con las ecuaciones (2.45) y (2.47) a partir de la fuerza total de resistencia  $F_f$ .

### 2.3.5 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera a considerar se establecen a continuación. Para un líquido no viscoso, la velocidad de la partícula en cualquier punto del fondo ( $n = 0$ ) debe ser tangencial al mismo, es decir

$$w(s, 0, t) = 0 \quad (2.49)$$

Para un punto en la superficie libre,  $n = d(s, t)$ , y la presión es la atmosférica, es decir

$$p(s, d, t) = 0 \quad (2.50)$$

La única condición cinemática de frontera en la superficie libre consiste en que cualquier partícula en dicha superficie siempre permanece en ella. De este modo, con la función  $\psi(s, n, t) = n - d(s, t) = 0$  se define el movimiento de la superficie libre, de manera que el componente de la velocidad de la partícula superficial en dirección normal a la superficie libre móvil ( $\psi = 0$ ) debe ser igual al componente de la velocidad también normal a dicha superficie.

El vector unitario normal a la superficie libre es

$$\mathbf{e}_n = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}$$

La velocidad en dirección normal a dicha superficie se define por  $-(\partial \psi / \partial t) / |\nabla \psi|$  y es igual a  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_n$ , es decir

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \psi = - \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial d}{\partial t}$$

En el sistema coordenado  $(s, n)$  el vector velocidad en la superficie libre se define en la forma:  $v = u_d e_s + w_d e_n$ . Además, como expresa la ecuación (2.27), el segundo término vale

$$\nabla\psi = \frac{1}{J} \frac{\partial\psi}{\partial s} e_s + \frac{\partial\psi}{\partial n} e_n = -\frac{1}{J_d} \frac{\partial d}{\partial s} e_s + e_n$$

De este modo, al efectuar el producto escalar  $e_s \cdot \nabla\psi$ , se obtiene

$$-\frac{u_d}{J_d} \frac{\partial d}{\partial s} + w_d = \frac{\partial d}{\partial t}$$

donde  $J_d$  es el valor del jacobiano en la superficie libre y la condición de frontera en dicha superficie resulta

$$w_d = \frac{u_d}{1 - \kappa d} \frac{\partial d}{\partial s} + \frac{\partial d}{\partial t} \tag{2.51}$$

El sistema de ecuaciones (2.36), (2.37) y (2.45) a (2.51) es el más preciso para la solución del flujo curvilíneo irrotacional (con fricción).

La dificultad principal en resolver cualquier problema de flujo mediante dicho sistema no es tanto la no linealidad del mismo, si no el hecho de que la posición de la frontera superior del flujo (superficie libre) se desconoce y no se sabe de antemano donde imponer la condición de frontera necesaria dada por las ecuaciones (2.50) y (2.51), lo que constituye un ejemplo típico del llamado *problema de frontera libre*. En cambio, la gran virtud de las ecuaciones de Saint-Venant es que proporcionan un medio de solución para encontrar la posición aproximada de la superficie libre, ya que ésta aparece como una de las incógnitas en ellas.

## 2.4 ECUACIONES DIFERENCIALES DEL FLUJO POCO PROFUNDO

### 2.4.1 Restricciones

Por las razones antes mencionadas, es necesario restringir los flujos definidos por el sistema de ecuaciones antes obtenido a aquellos poco profundos o *someros*. Se puede demostrar que esto equivale a aceptar las condiciones siguientes:

$$\frac{\partial w}{\partial s} \approx 0 \tag{2.52}$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} \approx 0 \tag{2.53}$$

$$|w| \ll |u| \tag{2.54}$$

La condición de frontera expresada por la ecuación (2.51) se debe satisfacer aún cuando se imponga la condición dada por la ecuación (2.54). Para el flujo permanente,  $\partial d / \partial t = 0$ , y la ecuación mencionada se convierte en

$$\frac{\partial d}{\partial s} = (1 - \kappa d) \frac{w_d}{u_d}$$

La hipótesis de flujo poco profundo (ecuación 2.54):  $|w| \ll |u|$ , significa que  $w_d / u_d \ll 1$ , por tanto, de la anterior se cumple la condición

$$\left| \frac{dd}{ds} \right| \ll |1 - \kappa d| \quad (2.55)$$

la cual será más precisa cuando  $\kappa < 0$ , es decir, se esperan mejores resultados de la teoría cuando el fondo sea convexo.

#### 2.4.2 Componente principal de la velocidad (irrotacionalidad)

Con la ecuación (2.52), la (2.36) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial n} (J u) = 0$$

es decir,  $J u = \text{constante}$  a lo largo de  $n$ , de modo que en el fondo ( $n = 0$ ),  $J = 1$  (ecuación 2.22) y  $u = u_0(s, t)$  es el valor de dicha constante. Por tanto, en la sección ortogonal al fondo de coordenada  $s$ , la velocidad en el punto P resulta al integrar la ecuación anterior y se obtiene

$$u(s, n, t) = \frac{u_0(s, t)}{1 - \kappa n} \quad (2.56)$$

que equivale a la distribución típica de la velocidad en un vórtice libre o potencial, donde, al definir una sección  $s = s_0$ , el componente  $u$  depende sólo de  $n$ . En efecto, se tendría que:  $1 - \kappa n = 1 - \frac{n}{R} = \left( \frac{R - n}{R} \right) = \frac{r}{R}$ ; donde  $r$  es la distancia del centro de curvatura al punto P (figura 2.2) y a todos los puntos al mismo nivel de P, es decir,  $u r = u_0 R = \text{constante}$ .

El componente principal de la velocidad en el punto A sobre la superficie libre resulta

$$u_s = \frac{u_0(s, t)}{1 - \kappa d} \quad (2.57a)$$

El componente secundario de la velocidad se debe ajustar a las condiciones de frontera de que en el fondo sea  $w \equiv 0$  y sobre la superficie libre satisfaga la ecuación (2.51) tomando en cuenta la ecuación (2.57a); es decir

$$w_d = \frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial d}{\partial s} + \frac{\partial d}{\partial t} \quad (2.57b)$$

### 2.4.3 Ecuación de continuidad. Componente secundario de la velocidad

El gasto en la sección plana está dado por

$$Q(s, t) = \int_0^d(s, t) u B \, dn = u_0 \int_0^d \frac{B \, dn}{1 - \kappa n} = u_0 \mathbf{I}_Q \quad (2.58)$$

donde se utilizó la ecuación (2.56), siendo  $B(s, n)$  la dimensión horizontal de la sección que es una función conocida de  $s$  y  $n$  (figura 2.4a); por tanto, el valor de la integral  $\mathbf{I}_Q$  depende de la forma de la sección que adopte el canal. Además, con  $Q = UA$  y  $dA = B \, dn$ , la media de la velocidad en la sección cumple con su definición:

$$U = \frac{1}{A} \int_0^d u \, dA = \frac{u_0}{A} \mathbf{I}_Q \quad (2.59)$$

En las dos expresiones anteriores se ha utilizado la representación

$$\mathbf{I}_Q = \int_0^d \frac{B \, dn}{1 - \kappa n} \quad (2.60)$$

La ecuación de continuidad (2.37) se integra en toda la sección como sigue:

$$- \int_0^d d(B J w) = \int_0^d(s, t) \frac{\partial}{\partial s} (Bu) \, dn$$

donde  $Bu = Bu(s, n, t)$ . Siguiendo la regla de Leibniz en la segunda integral, la ecuación anterior se desarrolla en la forma

$$- B_d J_d w_d + B_0 J_0 w_0 = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^d Bu \, dn - B_d u_d \frac{\partial d}{\partial s}$$

Pero:  $J_0 = 1$ ;  $B_d = T(s, n, t)$  (ancho de la superficie libre) y tomando en cuenta las ecuaciones (2.51) y (2.58), resulta

$$-T J_d w_d + B_0 w_0 = \frac{\partial Q}{\partial s} - T J_d w_d + T J_d \frac{\partial d}{\partial t}$$

Además, con  $w_0 = 0$  se obtiene

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + T(1 - \kappa d) \frac{\partial d}{\partial t} = 0 \quad (2.61)$$

Esta ecuación es la de conservación de la masa en el VC, ya que  $(\partial Q / \partial s)$  se interpreta como la tasa neta de variación del gasto que sale del VC en la longitud  $J ds$  y  $T(1 - \kappa d) ds (\partial d / \partial t)$  es la tasa neta de variación del almacenaje superficial en dicho volumen.

La derivada parcial de la ecuación (2.56) es

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u_0}{\partial s} \frac{1}{1 - \kappa n} + u_0 \frac{d\kappa}{ds} \frac{n}{(1 - \kappa n)^2} \quad (2.62)$$

y con ésta se obtiene el término

$$\frac{\partial B u}{\partial s} = B \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial B}{\partial s} u = \frac{\partial u_0}{\partial s} \frac{B}{1 - \kappa n} + u_0 \frac{d\kappa}{ds} \frac{B n}{(1 - \kappa n)^2} + \frac{\partial B}{\partial s} \frac{u_0}{1 - \kappa n}$$

Con éste, la ecuación de continuidad (2.37) se integra también como sigue:

$$B J w = - \int_0^n \frac{\partial B u}{\partial s} dn$$

donde se ha considerado la condición de que  $w = 0$ , para  $n = 0$ . Por tanto

$$B J w = - \frac{\partial u_0}{\partial s} \int_0^n \frac{B dn}{1 - \kappa n} - u_0 \frac{d\kappa}{ds} \int_0^n \frac{B n dn}{(1 - \kappa n)^2} - u_0 \frac{\partial B}{\partial s} \int_0^n \frac{dn}{1 - \kappa n} \quad (2.63a)$$

Al ordenar términos, la ecuación anterior se convierte en

$$B J w = - \mathbf{I}_1 \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{d\kappa}{ds} \mathbf{I}_2 u_0 + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial B}{\partial s} \ln(1 - \kappa n) u_0 \quad (2.63b)$$

donde se efectuaron las sustituciones que a continuación se mencionan. Las dos primeras integrales dependen de la forma de la sección y se designaron como sigue:

$$I_1 = \int_0^n \frac{B \, dn}{1 - \kappa n} \quad (2.64)$$

$$I_2 = \int_0^n \frac{B \, n \, dn}{(1 - \kappa n)^2} \quad (2.65)$$

La tercera integral no depende de la geometría de la sección y se sustituyó por

$$\int_0^n \frac{dn}{1 - \kappa n} = -\frac{1}{\kappa} \ln(1 - \kappa n)$$

La solución de la ecuación (2.63) permite determinar la distribución del componente secundario de la velocidad; para obtenerla es necesario conocer la forma y geometría de la sección del canal (figura 2.4). La sección más común es la trapecial simétrica y ocasionalmente la circular; los valores de las integrales para la primera se obtienen en el subcapítulo 2.6.

Cuando se hace  $n = d$  en la ecuación (2.63b),  $w = w_d$ ,  $J = J_d$ ,  $B = T$ , las integrales deben efectuarse entre los límites 0 y  $d$ , de manera que  $I_1 = I_Q$ . Por tanto, la ecuación se escribe en la forma

$$T J_d w_d = - I_Q \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{d\kappa}{ds} [I_2]_0^d u_0 + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial s} \ln(1 - \kappa d) u_0 \quad (2.66)$$

Se sustituye la ecuación (2.57b) en la anterior, se divide entre  $T(1 - \kappa d)$  y con  $J_d = 1 - \kappa d$ , se obtiene

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial d}{\partial s} + \frac{1}{T} \frac{I_Q}{1 - \kappa d} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{1}{T} \frac{d\kappa}{ds} \frac{[I_2]_0^d}{1 - \kappa d} u_0 - \frac{1}{\kappa T} \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} u_0 = 0 \quad (2.67)$$

donde ya no aparece  $w_d$  y se tienen como incógnitas a  $u_0$  y  $d$ .

#### 2.4.4 Ecuación del movimiento transversal. Distribución de la presión

De la condición (2.54) se deduce que  $F_{jn} = \mathcal{J}_n \approx 0$  en las ecuaciones (2.44b) y (2.48); la ecuación resultante se convierte finalmente en  $\partial H / \partial n = 0$  y de las ecuaciones (2.41), (2.54) y (2.56) resulta la ecuación equivalente a la de Bernoulli para las líneas de flujo que cruzan la sección plana ortogonal al fondo, que es

$$H(s, t) = \zeta + n \cos \theta + \frac{p}{g\rho} + \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \frac{u_0^2}{2g} = \text{constante} \quad (2.68)$$

La presión es cero en cualquier punto sobre la superficie libre, es decir, para  $n = d$ ,  $p = 0$ ; con ello, la energía en la ecuación anterior resulta igual a

$$H(s, t) = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} \frac{u_d^2}{2g} \quad (2.69a)$$

O bien, de la ecuación (2.57a) también es

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{u_d^2}{2g} \quad (2.69b)$$

donde  $H$  es independiente de  $n$  al valuarse sobre la superficie libre y su magnitud es constante en la sección, ya que depende sólo de  $d(s, t)$ . La ecuación (2.69b) significa que la energía cinética del flujo (cóncavo o convexo), calculada con el componente de la velocidad tangente a la superficie libre, separa a dicha superficie de la línea de energía.

Al substituir  $u_0$  de la ecuación (2.58) en la (2.69a), es válido también que

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{\mathbb{I}_0^2 (1 - \kappa d)^2} \frac{Q^2}{2g} \quad (2.70)$$

Por otra parte, de la ecuación (2.68)

$$\frac{p}{g\rho} = H - \zeta - n \cos \theta - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \frac{u_n^2}{2g} \quad (2.71a)$$

O bien, al igualar las ecuaciones (2.68) y (2.69a) resulta la expresión

$$\frac{p}{g\rho} = (d - n) \cos \theta + \left[ \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (2.71b)$$

que define la distribución de la presión en la sección ortogonal al fondo en términos de la parte hidrostática y la debida al efecto centrífugo, éste dado por el último término.

La carga de presión en el fondo del canal se obtiene para  $n = 0$  y resulta

$$\frac{p_0}{g\rho} = d \cos \theta + \left[ (1 - \kappa d)^{-2} - 1 \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (2.72)$$

#### 2.4.5 Ecuación del movimiento principal

De la ecuación (2.56) se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{1 - \kappa n} \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{1}{J} \frac{\partial u_c}{\partial t} \quad (2.73)$$

Con ésta, la ecuación (2.46) se convierte en

$$g \frac{\partial H(0, t_0)}{\partial s} + \frac{\partial u_0(0, t_0)}{\partial t} = \mathcal{Z}_s(n) J(n)$$

que describe la variación de la velocidad en el fondo en términos de la fuerza de resistencia y de  $H$ , ésta valuada mediante la ecuación (2.69b) para la superficie libre e independiente de  $n$ . El lado izquierdo de la ecuación anterior es ahora independiente de la variable  $n$ , lo que significa que debe ser igual a una constante en  $s = 0$ , la que a su vez es la cantidad  $\mathcal{Z}_s(0)$  igual a la fuerza de resistencia actuando sobre las partículas del fondo. De este modo  $\mathcal{Z}_s(n) J(n) = \mathcal{Z}_s(0)$ , lo que define que la variación funcional de  $\mathcal{Z}_s$  debe ser

$$\mathcal{Z}_s(n) = \mathcal{Z}_s(0) / J(n)$$

Por una parte, esto significa que al sustituir esta condición en la ecuación (2.45) e integrar a  $\mathcal{Z}_s(n)$ , resulta que

$$\mathcal{Z}_s(0) = -g N_f = \frac{dF_f}{\rho A ds} \quad (2.74)$$

donde  $A = \int_0^d B dn$  es el área hidráulica de la sección y  $S_f$  se interpreta como la pendiente local del gradiente de fricción. Por otra parte, para incluir la fuerza de resistencia en la ecuación del movimiento principal en flujo curvilíneo poco profundo, sólo se necesita la fuerza  $\mathcal{L}_s(0) = -g S_f$  en el lado derecho de la ecuación; el lado izquierdo permanece sin cambio, es decir

$$g \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = -g S_f \quad (2.75a)$$

El término  $\partial H / \partial s$  es la suma de los tres términos que se indican a continuación:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} = \text{sen } \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (d \cos \theta) = -d \frac{d\theta}{ds} \text{sen } \theta + \cos \theta \frac{\partial d}{\partial s} = -\kappa d \text{sen } \theta + \cos \theta \frac{\partial d}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ (1 - \kappa d)^{-2} \frac{u_0^2}{2g} \right] = (1 - \kappa d)^{-2} \frac{u_0}{g} \frac{\partial u_0}{\partial s} + (1 - \kappa d)^{-3} \left( \kappa \frac{\partial d}{\partial s} + d \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) \frac{u_0^2}{g}$$

Al agrupar los términos, la ecuación (2.75a) se convierte en

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \left[ g \cos \theta + \frac{\kappa u_0^2}{(1 - \kappa d)^3} \right] \frac{\partial d}{\partial s} - \left[ g \kappa \text{sen } \theta - \frac{\partial \kappa / \partial s}{(1 - \kappa d)^3} u_0^2 \right] d + g \text{sen } \theta + g S_f = 0 \quad (2.75b)$$

donde todos los términos representan a distintas fuerzas por unidad de masa.

#### 2.4.6 Interpretación de la línea de energía

En la figura 2.6 se muestra el flujo que ocurre sobre un canal de fondo cóncavo-convexo y la interpretación de las distintas variables que intervienen. El componente  $u_0$  de la velocidad en la superficie libre de una sección ortogonal al fondo de coordenada  $s$ , se determina de la ecuación (2.57a). De acuerdo con la ecuación (2.69b), la carga de velocidad calculada con dicho componente ( $u_0^2 / 2g$ ) separa verticalmente a la superficie libre de la línea de energía en la sección considerada. Para la sección de coordenada  $s + ds$ , de la ecuación (2.75a) se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial s} ds = - \left( S_f ds + \frac{1}{g} \frac{\partial u_0}{\partial t} ds \right)$$

Es decir, la diferencia de niveles de energía entre dos secciones separadas la distancia  $ds$  es igual a la suma de la pérdida por fricción y del término  $(\partial u_0 / \partial t) (ds/g)$ ; el último se interpreta como el cambio de la velocidad en el tiempo como se presenta en la figura 2.6. Cuando el flujo es permanente,  $\partial u_0 / \partial t = 0$  y cuando la pérdida de fricción no se incluye,  $S_f = 0$ .

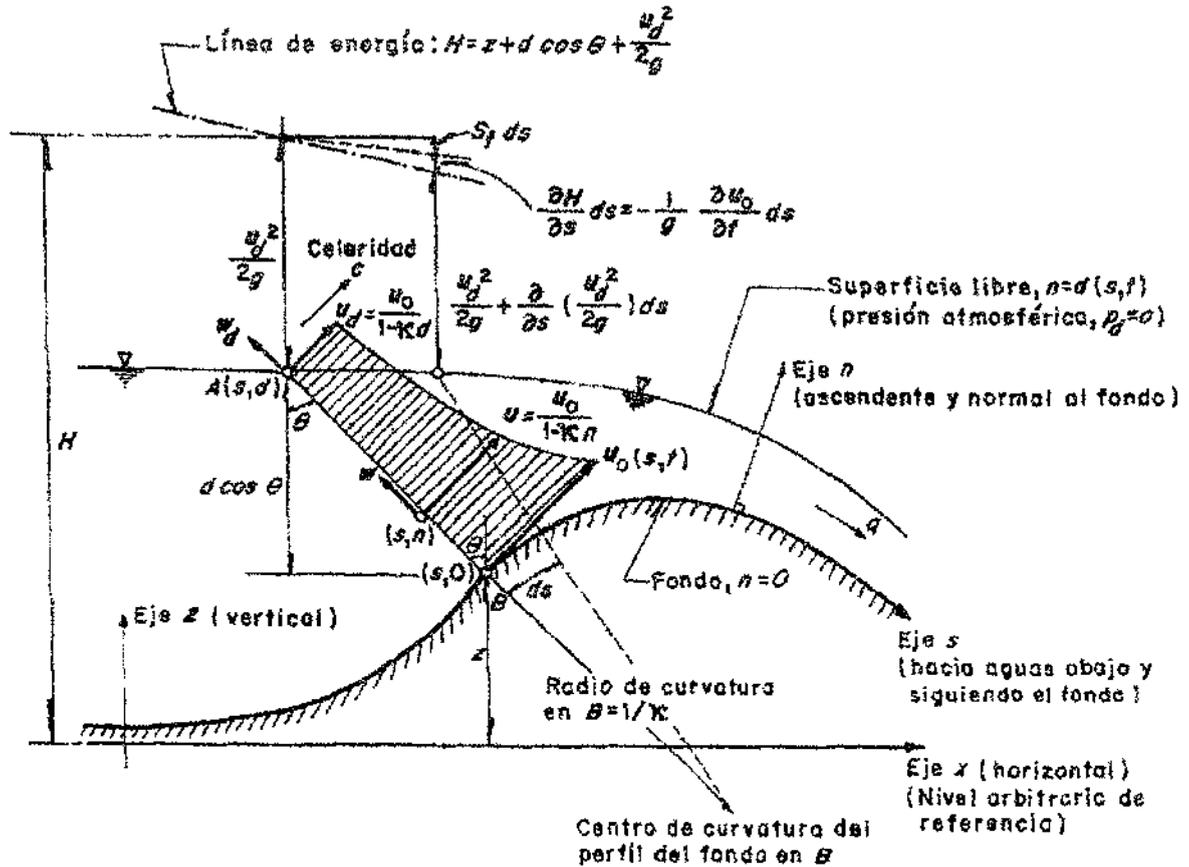


Figura 2.6. Esquema para la definición de un perfil de flujo curvilíneo y su línea de energía.

## 2.4.7 Conclusiones

El sistema de ecuaciones no lineales (2.56), (2.57a), (2.58), (2.63), (2.66), (2.67), (2.71b), (2.72) y (2.75b) se puede resolver, pero antes habría que precisar algunos aspectos. Por ejemplo, habría que sustituir la solución de las integrales en las ecuaciones (2.67) y (2.75b) de acuerdo con la forma de la sección. Además, la ecuación (2.61) es una forma simplificada de la (2.63) cuando se usa el gasto en lugar de la velocidad en el fondo. La ecuación (2.75a) es también una forma más compacta de la (2.75b) y según el tipo de problema puede ser más conveniente. Finalmente, la ecuación (2.75b) es todavía incompleta ya que es la única en la que se tiene que valorar la resistencia que oponen las fronteras rígidas al flujo, como se expone en el siguiente subcapítulo.

Después de resolver el par de ecuaciones diferenciales (2.67) y (2.75b) para  $u_0$  y  $d$ , las restantes expresiones permiten valuar a  $u$ ,  $w$  y  $p$ . Los términos que contienen a  $(d\kappa/ds)/\kappa^2$  en las dos ecuaciones diferenciales se mantienen finitos aun para  $\kappa = 0$ . En las ecuaciones de Saint-Venant se considera  $w \equiv 0$ , pero en el desarrollo de las ecuaciones presentadas se usó la condición de frontera de que una partícula que viaja sobre la superficie libre siempre permanece sobre ella. Esto significa que la condición de frontera dada por la ecuación (2.51) no queda satisfecha cuando se utiliza  $w \equiv 0$  para  $n < d$ , al aceptar la ecuación (2.54). Sin embargo, el valor de  $w_d$  obtenido con la ecuación (2.66) y de  $u_d$  con la (2.57a) modifican el vector velocidad total lo suficiente para que la condición en la superficie libre se satisfaga. En el caso de flujo permanente esto significa que la línea de corriente más elevada coincide con el perfil de la superficie libre obtenido en la solución de las ecuaciones (2.67) y (2.75b).

La magnitud de  $w_d$  es en general muy pequeña y poco afecta el valor de la carga de velocidad empleado en la ecuación (2.69b). Sin embargo, una vez conocido, se puede calcular un valor más preciso de  $H$  mediante la ecuación (2.41), pero con los componentes al nivel de la superficie libre; es decir

$$H(s, t) = \zeta + d \cos \theta + \frac{u_d^2 + w_d^2}{2g}$$

## 2.5 TÉRMINO DE RESISTENCIA AL FLUJO

### 2.5.1 Magnitud de la fuerza de resistencia

Las ecuaciones (2.75a) o (2.75b) incluyen un término de resistencia que es necesario valuar. La cuña angular de líquido mostrada en la figura 2.5 está sujeta a esfuerzos tangenciales friccionantes en toda la superficie de contacto del agua con el fondo y paredes. Dichos esfuerzos tangenciales se calculan mediante las expresiones empíricas:

$$|\tau_{ns}| = \lambda_0 \rho u_0^2 (s, t)$$

$$|\tau_{ns}| = \lambda_0 \rho u^2 (s, n, t)$$

donde las velocidades se toman justo fuera de la subcapa laminar del flujo viscoso turbulento real, siendo  $\lambda_0$  un factor adimensional dependiente de varios parámetros que miden la rugosidad efectiva en la frontera.

Los valores medidos de  $\lambda_0$  o los factores relacionados con el mismo (como el factor de fricción  $f$  de Darcy-Weisbach o el factor equivalente  $C$  de Chezy), se dan a través de diagramas como el de Moody. En este análisis se conserva igualmente un  $\lambda_0$  general sin considerar la forma específica que adquiere según sea el comportamiento de la pared. En los desarrollos que se hacen a continuación todas las variables se valúan en la sección  $s = 0$  y en el instante  $t = t_0$ , a menos que se indique lo contrario, por ello la dependencia respecto de  $s$  y  $t$  se omite por brevedad en la simbología.

La fuerza de fricción resultante  $F_f$  es la ejercida por las fronteras del fondo y paredes de la SC, siendo  $F_{f_s}$  su componente según  $s$  (en  $s = 0$ ). De acuerdo con la condición (2.54) de los flujos poco profundos, no es necesario considerar la contribución a  $F_f$  de otros esfuerzos tangenciales  $\tau_{yn}$  en las paredes; es decir, el componente  $F_{f_n}$  según  $n$  (en  $s = 0$ ) es nulo. Por tanto,  $F_{f_s}$  es la magnitud de la fuerza  $F_f$ .

Integrando la fuerza  $F_f$  con las dos expresiones anteriores de  $\tau$  tomando en cuenta la ecuación (2.56), se hace el producto escalar de dicha fuerza con  $e_s(0)$  y al integrar, la diferencial de la fuerza  $F_f$  para una sección simétrica se calcula como sigue

$$dF_f = -\lambda_0 \rho u_0^2 B_0 ds - 2 \lambda_0 \rho u_0^2 ds \int_0^d \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial n}\right)^2 + 1} \left[ \frac{J dn}{(1 - \kappa n)^2} \right]$$

Sustituyendo  $J$  de la ecuación (2.22) y con la representación:

$$\mathbf{I}_f = \int_0^d \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial n}\right)^2 + 1} \left[ \frac{dn}{1 - \kappa n} \right] \quad (2.76)$$

se obtiene

$$dF_f = -\lambda_0 \rho u_0^2 [B_0 + 2 \mathbf{I}_f] ds \quad (2.77)$$

donde  $B_0$  es el ancho en el fondo de la sección (para  $n = 0$ ).

Sustituyendo la ecuación (2.77) en la (2.74), se obtiene finalmente

$$\mathcal{L}(0) = -g S_f = -\frac{dF_f}{\rho A ds} = -\frac{\lambda_c}{A} \frac{u_0^2}{g} [B_0 + 2 \mathbf{I}_f] \quad (2.78a)$$

O bien, con  $P$  el perímetro mojado de la sección y  $R_h$  el radio hidráulico,  $A = PR_h$ , y otra versión resulta

$$S_f = - \frac{\lambda_0}{g} a_v \frac{u_0^2}{R_h} \quad (2.78b)$$

donde

$$a_v = \frac{B_0 + 2 I_f}{P} \quad (2.79)$$

se convierte en un factor de amplificación de la velocidad, ya que mide el incremento o decremento necesario de  $u_0^2$  para generar la misma fuerza de resistencia que la velocidad variable  $u$ .

### 2.5.2 Valor de $\lambda_0$ según el comportamiento de la pared

El valor de  $\lambda_0$  en la ecuación (2.78) para flujos turbulentos separa tres tipos de comportamiento de una pared rugosa, a saber: a) de Prandtl-von Kármán para superficies hidráulicamente lisas (del cual la parte lineal se conoce como de Blasius); b) de Colebrook-White para el régimen hidráulico de transición; c) de Chezy o de Manning para superficies hidráulicamente rugosas.

En la Hidráulica se considera a la ecuación de Darcy-Weisbach como una ley universal de la fricción, en la que interviene el factor de fricción  $f$  del mismo nombre. Para dicha ecuación, la expresión empírica de  $\lambda_0$  es

$$\lambda_0 = \frac{v_*}{U} = \frac{f}{8} \quad (2.80)$$

donde  $v_*$  es la velocidad de fricción (o del esfuerzo cortante) y  $U$  la velocidad media.

Para el comportamiento de pared lisa en canales se utiliza la expresión de Blasius:  $f = 0.2237/R_c^{0.25}$ , con la cual

$$\lambda_0 = \frac{0.028}{R_c^{0.25}} \quad (2.81a)$$

donde el número de Reynolds es  $R_c = UR_h/\nu$ , y es válida en el intervalo  $750 < R_c < 25000$ . El símbolo  $\nu$  representa a la viscosidad cinemática del agua.

La velocidad media  $U$ , asociada con el gasto  $Q$ , está dada por la ecuación (2.59) y depende de la geometría de la sección, de manera que

$$\lambda_0 = \frac{0.028 \nu^{0.25}}{U^{0.25} R_h^{0.25}} = \frac{0.028 \nu^{0.25} P^{0.25}}{Q^{0.25}} \quad (2.81b)$$

la cual se sustituye en la ecuación (2.78b).

Para el régimen hidráulico de transición de una frontera rugosa, es suficiente emplear equivalencias similares de  $f$  como la expresada por Colebrook-White, la cual es

$$\lambda_0 = -\frac{1}{8} \left[ \alpha_1 \log \left( \frac{a}{R_e \sqrt{f}} + \frac{k_s/R_h}{c} \right) \right]^{-2} \quad (2.82)$$

donde  $\alpha_1$ ,  $a$  y  $c$  son coeficientes; los dos últimos varían con la forma de la sección. Sus valores, según los autores de la ecuación, son:  $\alpha_1 = 2$ ;  $a = 0.6275$ ;  $c = 14.84$  para un canal rectangular. El número de Reynolds queda definido como antes.

Para el comportamiento de frontera hidráulicamente rugosa son comunes las ecuaciones de Chezy y Manning, y el valor de  $\lambda_0$  para cada una resulta

$$\lambda_0 = \frac{g}{C^2} = \frac{g n_M^2}{R_h^{1/3}} \quad (2.83)$$

donde se ha usado la equivalencia  $C = R_h^{1/6} / n_M = \sqrt{8g/f}$ , siendo  $C$  el factor de fricción de Chezy y  $n_M$  el coeficiente de Manning; éste no debe confundirse con la coordenada  $n$  empleada en los desarrollos.

### 2.5.3 Pendiente local de fricción

El procedimiento consiste entonces en substituir los valores de  $\lambda_0$  antes encontrados en el valor de la pendiente local de fricción  $S_f$  dado por la ecuación general (2.78b), y después en las ecuaciones (2.75a) o (2.75b). Por ejemplo, con la ecuación (2.83) de Chezy y para el comportamiento de pared hidráulicamente rugosa se tendría

$$S_f = \alpha \frac{u_*^2}{C^2 R_h} \quad (2.84)$$

Si se adopta la ecuación de Manning y se sustituye en la ecuación (2.78b), resulta

$$S_f = a_v \frac{n_M^2 u_0^2}{R_h^{4/3}} \quad (2.85)$$

#### 2.5.4 Comparación de resultados

Conviene analizar la analogía del desarrollo presentado con el convencional que se sigue para obtener la ecuación de Chezy aplicable al flujo rectilíneo. El esfuerzo tangencial medio de resistencia se considera como  $\tau_0 = \lambda_0 \rho V^2$ , donde  $V$  es la velocidad media del flujo, de manera que la fuerza total de resistencia es común que se escriba en la forma

$$F_{fR} = -\tau_0 P ds = -\lambda_0 \rho V^2 P ds \quad (2.86)$$

Siendo  $\rho A ds$  la masa del elemento y  $R_h = A/P$  el radio hidráulico de la sección, la fuerza de resistencia por unidad de masa vale

$$F_{fB} = -\lambda_0 \frac{V^2}{R_h} \quad (2.87)$$

Además, con  $\tau_0 = \lambda_0 \rho V^2 = g \rho R_h S_f$ , entonces:  $\lambda_0 V^2 = g R_h S_f$ ; y la ecuación anterior resulta

$$F_{fB} = -g S_f \quad (2.88)$$

donde  $S_f$  tiene el mismo significado de antes. Al comparar la magnitud de  $\mathcal{J}(0)$  dada por la ecuación (2.78a) y la que resulta de la ecuación (2.87), se observa que el radio hidráulico del flujo aquí tratado se interpreta como el recíproco del término dentro del paréntesis rectangular en la primera ecuación, el cual puede designarse como radio hidráulico efectivo en la forma

$$R_{he} = \frac{A}{B_0 + 2 I_f} \quad (2.89)$$

Los mismos resultados se obtienen cuando  $\kappa < 0$ . Puede también verificarse que para  $\kappa = 0$ , el denominador de la ecuación (2.89) se convierte en el perímetro mojado de la sección; es decir, el radio hidráulico efectivo  $R_{he}$  coincide con el radio hidráulico convencional  $R_h$  cuando el fondo es plano, además,  $\alpha_v = 1$  y la ecuación (2.78a) se vuelve idéntica a la (2.87).

Para un canal rectangular de ancho  $b$  (constante) se tiene que  $\partial B / \partial n = 0$ , y según la ecuación (2.76) la integral  $I_f$  vale

$$I_f = \int_0^d \frac{dn}{1 - \kappa n} = -\frac{1}{\kappa} [\ln(1 - \kappa n)]_0^d = -\frac{1}{\kappa} \ln(1 - \kappa d) \quad (2.90)$$

Por tanto, con  $B_0 = b$  y  $A = bd$  en la ecuación (2.78a), se obtiene la expresión para el canal rectangular

$$\mathcal{J}_s(0) = -g S_f = \frac{dF_f}{\rho b d ds} = -\lambda_0 u_0^2 \left[ \frac{1}{d} - \frac{2}{b \kappa d} \ln(1 - \kappa d) \right] \quad (2.91)$$

El resultado de Dressler y Yevjevich (1984) fue obtenido para un canal rectangular con la suposición de fuerza de cuerpo constante  $\mathcal{J}$ , es decir, independiente de  $n$ . Con la simbología aquí utilizada, dichos autores obtuvieron la expresión

$$\mathcal{J}_s(0) = \frac{dF_f}{dm} = \left(1 - \frac{\kappa d}{2}\right)^{-1} \frac{dF_f}{\rho b d ds} \quad (2.92)$$

que al comparar con la ecuación (2.91), se observa que contiene el factor espurio extra  $\left(\frac{\kappa d}{2}\right)^{-1}$ . Por tanto, la ecuación (2.78a) prueba que la suposición de fuerza de cuerpo constante empleada por los autores no se justificaba y que el efecto resistivo que produce la ecuación (2.92) se sobreestima para fondos cóncavos y se subestima para los convexos, por la presencia del factor mencionado. En efecto, la fuerza resistiva dada por la ecuación (2.91), aumenta con la distancia  $n$  en el caso de un fondo cóncavo ( $\kappa > 0$ ) y disminuye en el caso de un fondo convexo ( $\kappa < 0$ ), de manera que su resultante es la misma al actuar sobre cada capa delgada de espesor  $dn$ , tomada paralela al fondo, como se muestra en la figura 2.7.

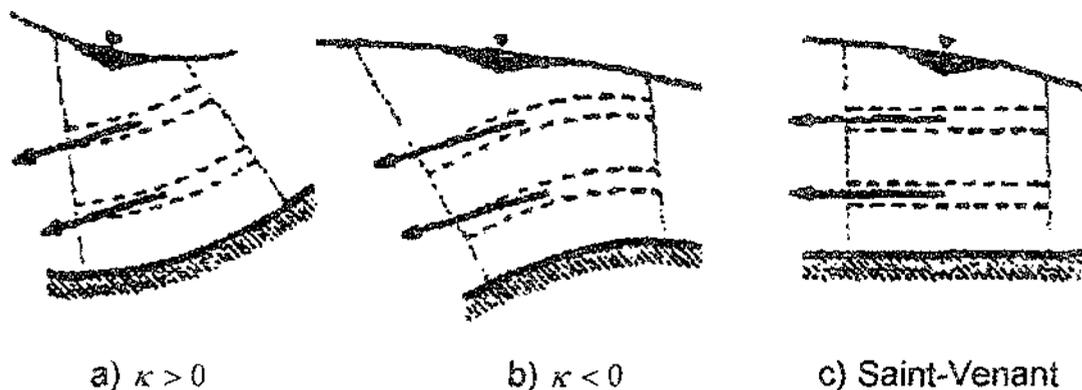


Figura 2.7. Igualdad de resultantes resistivas en capas paralelas

### 2.5.5 Conclusiones

Los modelos de flujo para fondo plano, como el de Saint-Venant, utilizan la ecuación (2.87) para determinar la fuerza de resistencia. El nuevo modelo utiliza la ecuación (2.78b) con el mismo propósito. Si se comparan ambos resultados, para la misma velocidad en el fondo  $u_0 = V$  y el mismo radio hidráulico, en flujos con fronteras de comportamiento rugoso, se observa como única diferencia al coeficiente  $a_v$  dado por la ecuación (2.79). En el caso de frontera con comportamiento liso se tendría que agregar la dependencia de  $Q$  en el flujo curvilíneo, como se considera en la ecuación (2.81b). Para  $\kappa = 0$  (fondo plano) dichas correcciones valen uno.

Un cálculo sencillo para observar el comportamiento de  $a_v$  en un fondo curvo puede hacerse para un canal rectangular de diferentes anchos  $b$ , utilizando las leyes de Chezy, Manning y de Blasius. Para la sección rectangular, la ecuación (2.59) permite obtener la velocidad media y se convierte en

$$U = \frac{u_0}{bd} \int_0^d \frac{b \, dn}{1 - \kappa n} = -u_0 \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa d}$$

De la ecuación de Blasius (2.81a), al sustituir el número de Reynolds se obtiene

$$\lambda_0 = 0.028 \left[ - \frac{\kappa d}{\ln(1 - \kappa d)} \right]^{1/4} \left[ \frac{v}{u_0 R_h} \right]^{1/4}$$

O bien

$$\lambda_0 = 0.028 a_\varrho \left[ \frac{\nu}{u_0 R_h} \right]^{1/4} \quad (2.93)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del líquido y

$$a_\varrho = \left[ - \frac{\kappa d}{\ln(1 - \kappa d)} \right]^{1/4} \quad (2.94)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.78b), la fuerza de resistencia adopta cualquiera de las formas:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s(0) &= - 0.028 a_\nu a_\varrho \left[ \frac{\nu}{u_0 R_h} \right]^{1/4} \frac{u_0^2}{R_h} \\ \mathcal{J}_s(0) &= - 0.028 \nu^{1/4} a_\nu a_\varrho \frac{u_0^{7/4}}{R_h^{5/4}} \end{aligned} \quad (2.95)$$

De la ecuación (2.79), el valor de  $a_\nu$  resulta

$$a_\nu = \frac{b + 2 \int_0^d \frac{dn}{1 - \kappa n}}{P} = \frac{b - \frac{2 \ln(1 - \kappa d)}{\kappa}}{b + 2d} \quad (2.96a)$$

o bien

$$a_\nu = \frac{1 - \frac{2 \ln(1 - \kappa d)}{\kappa b}}{1 + 2 \frac{d}{b}} \quad (2.96b)$$

En el canal rectangular se consideran los casos de fondo convexo donde  $\kappa d = -0.4$  y otro cóncavo donde  $\kappa d = +0.4$ . En cada caso,  $a_\varrho = 1.0442$  para el primero y  $a_\varrho = 0.9407$  para el segundo, ambos calculados con la ecuación (2.94). El coeficiente  $a_\nu$  depende del ancho del canal y sus valores se obtienen en la tabla 2.1, además de los productos  $a_\nu a_\varrho$ .

Tabla 2.1 Valores de  $a_v$  y  $a_Q$  para flujos convexo y cóncavo en un canal rectangular

Flujo convexo ( $\kappa d = -0.4$ ; $a_Q = 1.0442$ )			Flujo cóncavo ( $\kappa d = +0.4$ ; $a_Q = 0.9407$ )	
$b$	$a_v$ (Chezy, Manning)	$a_v a_Q$ (Blasius)	$a_v$ (Chezy, Manning)	$a_v a_Q$ (Blasius)
0.5 d	0.8729	0.9115	1.2217	1.2756
d	0.8941	0.9336	1.1847	1.1144
2 d	0.9206	0.9613	1.1385	1.0710
20 d	0.9856	1.0291	1.0252	0.9644

Los valores que se muestran en la tabla ilustran que, en general, el efecto de resistencia en el flujo disminuye en fondos convexos y aumenta en fondos cóncavos respecto del que tienen en fondos planos (excepto en canales muy anchos), como se muestra en la figura 2.7. Estas diferencias son mayores en canales angostos que en canales anchos.

Es evidente la necesidad de verificar en laboratorio las nuevas leyes de resistencia, ya que ninguna de las experimentales obtenidas para tubos circulares ha tenido una verificación adecuada en canales, aun las del modelo de Saint-Venant. Por otra parte, la mayoría se basa en experimentos realizados con flujo permanente en tubos circulares rectos totalmente llenos con rugosidad artificial. La curvatura apreciable en el flujo y las presiones no hidrostáticas pueden influir en dichas leyes, lo que justifica la experimentación. A esto hay que agregar la necesidad de definir una ley empírica segura que se pueda aplicar a los flujos no permanentes, ya que esto no ha ocurrido ni en el modelo de Saint-Venant, el cual emplea leyes para el flujo permanente.

## 2.6 CASOS PARTICULARES DE LAS ECUACIONES

### 2.6.1 Ecuaciones para el fondo plano

Cuando el fondo del canal es plano y de inclinación  $\theta$ , se tienen los valores:  $\kappa = 0$ ;  $J_0 = 1$ ;  $u_0 = 0$ ;  $u_0 = U$  (velocidad media), ya que para  $n = d$ ,  $p = 0$  y la distribución de la presión (ecuación 2.71) se convierte en la hidrostática. El término  $a_v$ , según la ecuación (2.79), se convierte en uno,  $\partial \zeta / \partial x = -S_0$  (pendiente del fondo) y la (2.75b) se convierte en la ecuación dinámica del flujo rectilíneo gradualmente variado, ya que no incluye los efectos de curvatura.

## 2.6.2 Ecuaciones del flujo curvilíneo permanente

Para obtener las ecuaciones del flujo curvilíneo permanente es suficiente considerar que todas las variables son independientes del tiempo, cancelando los términos donde aparezcan derivadas parciales respecto de  $t$  en las ecuaciones (2.52) a (2.75b).

Así, la ecuación (2.56) para la distribución del componente principal de la velocidad en flujo no permanente, se convierte para el permanente en

$$u(s, n) = \frac{u_0(s)}{1 - \kappa n}$$

La ecuación de continuidad compacta (2.61) para el no permanente se convierte en

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Es decir, para el flujo permanente resulta que el gasto  $Q$  es constante a lo largo de  $s$ .

## 2.7 ECUACIONES PARTICULARES PARA ALGUNAS FORMAS DE SECCIÓN

### 2.7.1 Integrales $I_1$ e $I_2$ para el canal trapecial

Antes de establecer las ecuaciones particulares, se presenta la solución de las integrales que las afecta.

Para la sección trapecial, el ancho  $B$  de la figura 2.4b, a cualquier distancia  $n$ , está dado por  $B = b + 2kn$ , donde  $b$  es el ancho de la plantilla y  $k$  el talud del canal. Por tanto, la integral  $I_1$  de la ecuación (2.64) se expresa como sigue:

$$I_1 = \int_0^n \frac{B \, dn}{1 - \kappa n} = \int_0^n \frac{(b + 2kn) \, dn}{1 - \kappa n} = b \int_0^n \frac{dn}{1 - \kappa n} + 2k \int_0^n \frac{n \, dn}{1 - \kappa n}$$

cuya solución es

$$I_1 = -\frac{b}{\kappa} \ln(1 - \kappa n) + \frac{2k}{\kappa^2} [1 - \kappa n - \ln(1 - \kappa n)] - \frac{2k}{\kappa^2}$$

$$I_1 = -\frac{1}{\kappa} \left[ \left( b + \frac{2k}{\kappa} \right) \ln(1 - \kappa n) + 2kn \right] \quad (2.97)$$

Esta solución permite obtener  $I_0$ , según la ecuación (2.60), haciendo  $n = d$ , es decir

$$I_0 = -\frac{1}{\kappa} \left[ \left( b + \frac{2k}{\kappa} \right) \ln(1 - \kappa d) + 2kd \right] \quad (2.98)$$

la cual interviene en las ecuaciones (2.58), (2.66) y (2.67).

### 2.7.2 Integral $I_2$ para el canal trapezoidal

La solución de la segunda integral (ecuación 2.65) es como sigue:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^n \frac{B n \, dn}{(1 - \kappa n)^2} = \int_0^n \frac{(b + 2\kappa n) n \, dn}{(1 - \kappa n)^2} = b \int_0^n \frac{n \, dn}{(1 - \kappa n)^2} + 2k \int_0^n \frac{n^2 \, dn}{(1 - \kappa n)^2} \\ I_2 &= \frac{b}{\kappa^2} \left[ \frac{1}{1 - \kappa n} + \ln(1 - \kappa n) \right] - \frac{2k}{\kappa^3} \left[ 1 - \kappa n - \frac{1}{1 - \kappa n} - 2 \ln(1 - \kappa n) \right] - \frac{b}{\kappa^2} \\ I_2 &= \frac{b}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa n}{1 - \kappa n} + \ln(1 - \kappa n) \right] - \frac{2k}{\kappa^3} \left[ \frac{\kappa n (\kappa n - 2)}{1 - \kappa n} - 2 \ln(1 - \kappa n) \right] \end{aligned} \quad (2.99)$$

por tanto, con  $n = d$

$$\left[ I_2 \right]_0^d = \frac{b}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa d}{1 - \kappa d} + \ln(1 - \kappa d) \right] - \frac{2k}{\kappa^3} \left[ \frac{\kappa d (\kappa d - 2)}{1 - \kappa d} - 2 \ln(1 - \kappa d) \right] \quad (2.100)$$

Las ecuaciones (2.97) a (2.100) son válidas aún para una sección asimétrica de taludes desiguales  $k_1$  y  $k_2$ , siendo entonces:  $k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ .

### 2.7.3 Integral $I_f$ para el canal trapezoidal

En la sección trapezoidal,  $\partial B / \partial n = k$  (talud) es constante. Además, para  $n = 0$ ,  $B_0 = b$ , por tanto, para una forma simétrica, de la ecuación (2.76) se tiene

$$I_f = \sqrt{k^2 + 1} \int_0^d \frac{dn}{1 - \kappa n} = -\frac{\sqrt{k^2 + 1}}{\kappa} \ln(1 - \kappa d) \quad (2.101)$$

Además, con  $P = b + 2\sqrt{k^2 + 1}d$ , de la ecuación (2.79)

$$a_v = \frac{b - \frac{2\sqrt{k^2 + 1}}{\kappa} \ln(1 - \kappa d)}{b + 2\sqrt{k^2 + 1}d} = \frac{1 - 2\sqrt{k^2 + 1} \frac{d \ln(1 - \kappa d)}{b \kappa d}}{1 + 2\sqrt{k^2 + 1} \frac{d}{b}} \quad (2.102)$$

Esta expresión vale sólo para la sección trapezoidal simétrica, pero puede deducirse la correspondiente a una asimétrica de taludes desiguales.

#### 2.7.4 Ecuaciones para el canal trapezoidal

A manera de ejemplo, se presenta la formulación de las ecuaciones particulares de un canal con sección trapezoidal, rectangular o triangular.

Para el canal trapezoidal de taludes desiguales  $k_1$  y  $k_2$ , el ancho de superficie libre es  $T = b + 2\kappa d$ , siendo  $\kappa = 0.5(k_1 + k_2)$ ; además,  $\partial T / \partial s = \partial b / \partial s + 2\kappa (\partial d / \partial s)$ . Sustituyendo estos valores y las ecuaciones (2.98) y (2.100) en la (2.67), se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} u_0 \frac{\partial d}{\partial s} - \frac{1}{\kappa T} \left[ \left( b + \frac{2\kappa}{\kappa} \right) \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} + \frac{2\kappa d}{1 - \kappa d} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} \\ + \frac{1}{T} \frac{d\kappa}{ds} \left[ \frac{b}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa d}{(1 - \kappa d)^2} + \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} \right] - \frac{2\kappa}{\kappa^3} \left[ \frac{\kappa d(\kappa d - 2)}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{2 \ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} \right] \right] u_0 \\ - \frac{1}{\kappa T} \frac{\partial b}{\partial s} \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} u_0 - \frac{2\kappa}{\kappa T} \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} u_0 \frac{\partial d}{\partial s} = 0 \end{aligned}$$

Reagrupando términos

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial t} + \left[ \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{2\kappa}{\kappa T} \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} \right] u_0 \frac{\partial d}{\partial s} - \frac{1}{\kappa T} \left[ \left( b + \frac{2\kappa}{\kappa} \right) \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} + \frac{2\kappa d}{1 - \kappa d} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} \\ + \frac{1}{T} \frac{d\kappa}{ds} \left[ \frac{b}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa d}{(1 - \kappa d)^2} + \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} \right] - \frac{2\kappa}{\kappa^3} \left[ \frac{\kappa d(\kappa d - 2)}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{2 \ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} \right] \right] u_0 \\ - \frac{1}{\kappa T} \frac{\partial b}{\partial s} \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} u_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

La ecuación (2.75b) no cambia y  $S_f$  se determina con la ecuación (2.85), siendo la expresión:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \left[ g \cos \theta + \frac{\kappa u_0^2}{(1 - \kappa d)^3} \right] \frac{\partial d}{\partial s} - \left[ g \kappa \sin \theta - \frac{\partial \kappa / \partial s}{(1 - \kappa d)^3} u_0^2 \right] d + g \sin \theta + g a_v \frac{h_M^2 u_0^2}{R_h^{4/3}} = 0 \quad (2.104)$$

donde  $a_v$  se determina con la ecuación (2.102).

Las ecuaciones (2.103) y (2.104) se resuelven para obtener los valores de  $u_0$  y  $d$  en cualquier sección del canal y cualquier instante, atendiendo a las condiciones de frontera del flujo.

La distribución del componente secundario de la velocidad se obtiene de la ecuación (2.63b) y es

$$B(1 - \kappa n) w = -I_1 \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{d\kappa}{ds} I_2 u_0 + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial B}{\partial s} \ln(1 - \kappa n) u_0$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  son las integrales expresadas mediante las ecuaciones (2.97) y (2.99).

El componente  $w_d$  al nivel de la superficie libre está dado por la ecuación 2.66, donde se sustituyen las ecuaciones (2.98) y (2.100) y resulta

$$w_d = - \frac{I_Q}{T(1 - \kappa d)} \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{d\kappa/ds}{T(1 - \kappa d)} [I_2]_0^d u_0 + \frac{\partial T / \partial s}{\kappa T (1 - \kappa d)} \ln(1 - \kappa d) u_0$$

Las ecuaciones para calcular las restantes variables no cambian, así el gasto se obtiene de la ecuación (2.58) y vale

$$Q(s, t) = u_0 I_Q$$

donde  $I_Q$  es la integral dada por la ecuación (2.98). Por tanto, la distribución del componente principal de la velocidad se obtiene de la ecuación (2.56) y es

$$u(s, n, t) = \frac{u_0(s, t)}{1 - \kappa n}$$

Dicho componente se obtiene para  $n = d$  al nivel de la superficie libre y vale

$$u_d (s, t) = \frac{u_0 (s, t)}{1 - \kappa d}$$

La distribución de la presión en cualquier sección ortogonal al fondo se calcula con alguna de las formas de la ecuación (2.71), que son:

$$\frac{P}{g\rho} = H - \zeta - n \cos \theta - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \frac{u_0^2}{2g}$$

$$\frac{P}{g\rho} = (d - n \cos \theta) + \left[ \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \right] \frac{u_0^2}{2g}$$

La presión en el fondo de la sección se obtiene para  $n = 0$  y según la ecuación (2.72) es

$$\frac{P_0}{g\rho} = d \cos \theta + \left[ \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} - 1 \right] \frac{u_0^2}{2g}$$

### 2.7.5 Ecuaciones para el canal rectangular

Es suficiente hacer  $k = 0$  en las ecuaciones (2.97) a (2.104) para determinar las integrales u otros términos en el canal trapecial. De acuerdo con lo anterior, resulta:

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{b}{\kappa} \ln(1 - \kappa n) \quad (2.105)$$

$$\mathbf{I}_0 = -\frac{b}{\kappa} \ln(1 - \kappa d) \quad (2.106)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{b}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa n}{1 - \kappa n} + \ln(1 - \kappa n) \right] \quad (2.107)$$

$$[\mathbf{I}_2]_0^d = \frac{b}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa d}{1 - \kappa d} + \ln(1 - \kappa d) \right] \quad (2.108)$$

$$a_s = \frac{1 - 2 \frac{d}{b} \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa d}}{1 + 2 \frac{d}{b}} \quad (2.109)$$

La última coincide con la (2.96b) previamente empleada y la ecuación (2.103) se convierte en la siguiente

$$\frac{\partial d}{\partial T} + \frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial d}{\partial s} - \left[ \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa(1 - \kappa d)} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} \left[ \frac{\kappa d}{(1 - \kappa d)^2} + \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} \right] u_0 - \frac{1}{\kappa b} \frac{\partial b}{\partial s} \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} u_0 = 0 \quad (2.110)$$

La ecuación (2.104) es la misma, excepto que el factor de amplificación  $a_v$  está dado por la ecuación (2.109).

### 2.7.6. Ecuaciones para el canal triangular

Es suficiente hacer  $b = 0$  en las ecuaciones (2.97) a (2.102) para determinar las integrales en el canal triangular. Con lo anterior, resulta que:

$$I_1 = -\frac{2k}{\kappa} \left[ \frac{\ln(1 - \kappa n)}{\kappa} + n \right] \quad (2.111)$$

$$I_2 = -\frac{2k}{\kappa} \left[ \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa} + d \right] \quad (2.112)$$

$$I_3 = -\frac{2k}{\kappa^3} \left[ \frac{\kappa n (\kappa n - 2)}{1 - \kappa n} - 2 \ln(1 - \kappa n) \right] \quad (2.113)$$

$$[I_3]_0^d = -\frac{2k}{\kappa^3} \left[ \frac{\kappa d (\kappa d - 2)}{1 - \kappa d} - 2 \ln(1 - \kappa d) \right] \quad (2.114)$$

$$a_v = -\frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa d} \quad (2.115)$$

La ecuación (2.103) se convierte en la siguiente

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \left[ \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{2k \ln(1 - \kappa d)}{\kappa l' (1 - \kappa d)} \right] u_0 \frac{\partial d}{\partial s} - \frac{2k}{\kappa l'} \left[ \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa(1 - \kappa d)} + \frac{d}{1 - \kappa d} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{l} \frac{\partial \kappa}{\partial s} \frac{2k}{\kappa^3} \left[ \frac{\kappa d (\kappa d - 2)}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{2 \ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} \right] u_0 = 0 \quad (2.116)$$

### 2.7.7 Integrales $I_1$ e $I_0$ para el canal circular

Para la sección circular de diámetro  $D$ , el ancho  $B$  de la figura 2.4c, a cualquier distancia  $n$ , está dado por la expresión

$$B = 2 \sqrt{n(D-n)} = D \operatorname{sen} \theta$$

donde  $\theta = \cos^{-1} (1 - 2n/D)$ .

Por tanto, según la ecuación (2.64), la integral  $I_1$  se resuelve como sigue

$$I_1 = \int_0^n \frac{B \, dn}{1 - \kappa n} = 2 \int_0^n \frac{\sqrt{Dn - n^2}}{1 - \kappa n} \, dn$$

la cual se integra según las partes que a continuación se indican:

$$I_1 = - \frac{2 \sqrt{n(D-n)}}{\kappa} + \frac{2 - \kappa D}{\kappa^2} \int_0^n \frac{dn}{\sqrt{nD - n^2}} + \frac{2(\kappa D - 1)}{\kappa^2} \int_0^n \frac{dn}{(1 - \kappa n) \sqrt{nD - n^2}} \quad (2.117)$$

donde la primera integral resulta

$$\int_0^n \frac{dn}{\sqrt{nD - n^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{2n - D}{D} \right) + \frac{\pi}{2}$$

La segunda es

$$\int_0^n \frac{dn}{(1 - \kappa n) \sqrt{nD - n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa D}} \left[ \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{(-\kappa D + 2)(1 - \kappa n) + 2(\kappa D - 1)}{-\kappa D(-\kappa n + 1)} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

la cual al simplificar se convierte en

$$\int_0^n \frac{dn}{(1 - \kappa n) \sqrt{nD - n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa D}} \left[ \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{1 + \kappa n - 2 \frac{n}{D}}{\kappa n - 1} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

Sustituyendo los valores de las dos integrales en la ecuación (2.117), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 = & -\frac{2D}{\kappa} \sqrt{\frac{n}{D} \left(1 - \frac{n}{D}\right)} + \frac{2 - \kappa D}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2n}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\ & - \frac{2\sqrt{1 - \kappa D}}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2\frac{n}{D} - (1 + \kappa n)}{1 - \kappa n} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.118)$$

Esta solución permite obtener  $\mathbf{I}_Q$  haciendo  $n = d$  y resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_Q = [\mathbf{I}_Q]_0^d = & -\frac{2D}{\kappa} \sqrt{\frac{d}{D} \left(1 - \frac{d}{D}\right)} + \frac{2 - \kappa D}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2\frac{d}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\ & - \frac{2\sqrt{1 - \kappa D}}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2\frac{d}{D} - (1 + \kappa d)}{1 - \kappa d} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.119a)$$

O bien

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_Q = & \left\{ -\frac{2}{\kappa D} \sqrt{\frac{d}{D} - \left(\frac{d}{D}\right)^2} + \frac{2 - \kappa D}{(\kappa D)^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2\frac{d}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] \right. \\ & \left. - \frac{2\sqrt{1 - \kappa D}}{(\kappa D)^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2\frac{d}{D} - (1 + \kappa d)}{1 - \kappa d} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \right\} D^2 \end{aligned} \quad (2.119b)$$

la cual interviene en la ecuación (2.58).

## CAPÍTULO 3

### RÉGIMEN CRÍTICO Y PROPIEDADES DE LAS NUEVAS ECUACIONES

#### 3.1 OBJETIVO

Es conveniente analizar las condiciones en que se produce el régimen crítico de un flujo curvilíneo y presentar después las propiedades generales de las nuevas ecuaciones, antes de exponer más adelante las distintas soluciones de casos particulares y los métodos de análisis de tipo general.

#### 3.2 RÉGIMEN CRÍTICO

##### 3.2.1 Condición general del estado crítico

La energía específica en una sección se obtiene de la ecuación (2.70)

$$E = d \cos \theta + \frac{1}{\mathbf{I}_Q^2 (1 - \kappa d)^2} \frac{Q^2}{2g} \quad (3.1)$$

Para encontrar la condición de flujo curvilíneo permanente crítico (o no permanente en un instante  $t$ ) se sigue el procedimiento convencional de energía específica mínima. Es decir, se deriva la ecuación anterior respecto de  $d$  para cualquier forma de sección, donde  $\zeta$ ,  $\theta$ ,  $\kappa$  y  $Q$  permanecen constantes, y se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial d} = \cos \theta + (-2) \left[ \mathbf{I}_Q (1 - \kappa d) \right]^{-3} \left[ -\kappa \mathbf{I}_Q + (1 - \kappa d) \frac{d\mathbf{I}_Q}{dd} \right] \frac{Q^2}{2g}$$

De la ecuación (2.60) y siguiendo la regla de Leibniz para derivar una integral, se obtiene

$$(1 - \kappa d) \frac{d\mathbf{I}_Q}{dd} = (1 - \kappa d) \frac{d}{dd} \int_0^d \frac{B}{1 - \kappa n} dn = (1 - \kappa d) \frac{f}{1 - \kappa d} = f$$

donde  $T$  es el ancho de la superficie libre. Por tanto, se tiene

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial E}{\partial d} = 1 + \mathbf{I}_Q^{-2} (1 - \kappa d)^3 \left[ \kappa - \frac{T}{\mathbf{I}_Q} \right] \frac{Q^2}{g \cos \theta} \quad (3.2a)$$

Al despejar

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta}} = \left[ \frac{\mathbf{I}_Q^2 (1 - \kappa d)^3 \left( 1 - \frac{\partial E / \partial d}{\cos \theta} \right)}{\kappa \left[ 1 - \frac{T}{\kappa \mathbf{I}_Q} \right]} \right]^{1/2} \quad (3.2b)$$

O bien, de la ecuación (2.58) se llega a la expresión

$$\mathcal{F} = \frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} = \left[ \frac{(1 - \kappa d)^3 \left[ 1 - \frac{\partial E / \partial d}{\cos \theta} \right]}{\kappa d - \frac{Td}{\mathbf{I}_Q}} \right]^{1/2} \quad (3.2c)$$

donde  $\mathcal{F}$  es un parámetro adimensional del flujo curvilíneo relacionado con el número de Froude, como se explica más adelante.

Cuando  $\partial E / \partial d = 0$ , las variables adoptan el valor crítico y las ecuaciones (3.2b y c) se convierten en las siguientes:

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta}} = \left[ \frac{\mathbf{I}_Q^2 (1 - \kappa d)^3}{\kappa \left[ 1 - \frac{T}{\kappa \mathbf{I}_Q} \right]} \right]_c^{1/2} \quad (3.3a)$$

$$\mathcal{F}_c = \left[ \frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} \right]_c = \left[ \frac{(1 - \kappa d)^3}{\kappa d - \frac{Td}{\mathbf{I}_Q}} \right]_c^{1/2} \quad (3.3b)$$

expresiones que representan la condición que debe cumplirse para que haya régimen crítico en una sección ortogonal al fondo, siendo  $\mathcal{F}_c$  el valor crítico del parámetro  $\mathcal{F}$  de la ecuación (3.2c).

De lo anterior, se puede definir un número de Froude generalizado para el flujo curvilíneo que, según las ecuaciones (3.2c y 3.3b), sería

$$F = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_c} = \frac{u_0 / \sqrt{g d \cos \theta}}{\left[ \frac{(1 - \kappa d)^3}{\kappa d - \frac{T d}{I_Q}} \right]^{1/2}} \quad (3.4)$$

de manera que cuando  $\kappa = 0$  (fondo plano),  $I_Q = A$ , la ecuación se simplifica y el número de Froude recupera la forma convencional del flujo rectilíneo, que es:  $F = u_0 / \sqrt{g \cos \theta A/T}$ , donde  $u_0 = U$  (velocidad media del flujo) y  $\alpha = 1$  (coeficiente de Coriolis).

Es sencillo concluir que con la ecuación (3.4), la (3.2c) se escribe en cualquiera de las formas:

$$\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_c^2 \left( 1 - \frac{\partial E / \partial d}{\cos \theta} \right) \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial d} = \cos \theta (1 - F^2) \quad (3.5b)$$

que es un resultado idéntico al que se obtiene para el flujo rectilíneo.

### 3.2.2 Ecuaciones para el canal trapecial

Es conveniente presentar los resultados para la sección trapecial. Según la ecuación (2.98), vale que

$$I_Q = - \left( b + \frac{2k}{\kappa} \right) \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa} - \frac{2kd}{\kappa}$$

De modo que resultan las cantidades:

$$T = b + 2kd$$

$$\frac{T}{\kappa I_Q} = - \frac{b + 2kd}{(b + 2k/\kappa) \ln(1 - \kappa d) + 2kd}$$

$$1 - \frac{T}{\kappa I_Q} = \frac{b + 2kd}{(b + 2k/\kappa) \ln(1 - \kappa d) + 2kd} = 1$$

Las ecuaciones de  $I_Q$  y la anterior se sustituyen en la (3.3a) y resulta

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta}} = \left[ \frac{\left[ \left( b + \frac{2k}{\kappa} \right) \ln (1 - \kappa d) + 2kd \right]^2 (1 - \kappa d)^3}{\kappa^3 \left[ \frac{b + 2kd}{\left( b + 2k/\kappa \right) \ln (1 - \kappa d) + 2kd} + 1 \right]} \right]^{1/2}_c$$

Se multiplica y divide por  $\left[ \left( b + 2k/\kappa \right) \ln (1 - \kappa d) + 2kd \right]^{1/2}$  y se obtiene la condición crítica

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta}} = \left[ \frac{\left[ \left( b + \frac{2k}{\kappa} \right) \ln (1 - \kappa d) + 2kd \right]^3 (1 - \kappa d)^3}{\kappa^3 \left[ b + 4kd + \left( b + \frac{2k}{\kappa} \right) \ln (1 - \kappa d) \right]} \right]^{1/2}_c \quad (3.6a)$$

la cual también se expresa en términos adimensionales en cualquiera de las formas:

$$\frac{Q k^{3/2}}{b^{5/2} \sqrt{g \cos \theta}} = \left[ \frac{\left[ \frac{kd}{b} \frac{1}{\kappa d} \right]^3 \left[ \left( 1 + 2 \frac{kd}{b} \frac{1}{\kappa d} \right) \ln (1 - \kappa d) + 2 \frac{kd}{b} \right]^3 (1 - \kappa d)^3}{1 + 4 \frac{kd}{b} + \left( 1 + 2 \frac{kd}{b} \frac{1}{\kappa d} \right) \ln (1 - \kappa d)} \right]^{1/2}_c \quad (3.6b)$$

$$\frac{Q k^{3/2}}{b^{5/2} \sqrt{g \cos \theta}} = \left[ \frac{\left[ \frac{k}{b\kappa} \right]^3 \left[ \left( 1 + 2 \frac{k}{b\kappa} \right) \ln (1 - \kappa d) + 2 \left( \frac{k}{b\kappa} \right) \kappa d \right]^3 (1 - \kappa d)^3}{1 + 4 \left( \frac{k}{b\kappa} \right) \kappa d + \left( 1 + 2 \frac{k}{b\kappa} \right) \ln (1 - \kappa d)} \right]^{1/2}_c \quad (3.6c)$$

El parámetro en el lado izquierdo de la última ecuación es constante en flujo permanente. El término del lado derecho es función de los parámetros:  $k/b\kappa$  y  $\kappa d$ ; el primero depende únicamente de la geometría del canal y el segundo del tirante, que sería también el crítico. Por estas razones, se prefiere usar esta ecuación para fines de cálculo en lugar de la (3.6b).

La figura 3.1 muestra la representación gráfica de la ecuación (3.6c) y permite determinar con suficiente precisión el tirante crítico relativo  $\kappa d_c$  en un canal trapecial, en términos de parámetros que son constantes para una condición dada de geometría y gasto. La figura es útil cuando se desea efectuar un cálculo rápido sin tener que resolver la ecuación mencionada.

Para el canal rectangular,  $k = 0$ , y de la ecuación (3.6a) resulta

$$\frac{Q}{b \sqrt{g \cos \theta}} = \left[ - \frac{[\ln(1 - \kappa d)(1 - \kappa d)]^3}{\kappa^3 [1 + \ln(1 - \kappa d)]} \right]_c^{1/2}$$

O bien, con  $q = Q/b$  (gasto unitario), se obtiene

$$\frac{q \kappa^{3/2}}{\sqrt{g \cos \theta}} = \left[ - \frac{[\ln(1 - \kappa d)(1 - \kappa d)]^3}{1 + \ln(1 - \kappa d)} \right]_c^{1/2} \quad (3.7)$$

La figura 3.2 muestra la representación gráfica de la ecuación anterior para determinar el tirante crítico relativo  $\kappa d_c$  en un canal rectangular, con la misma explicación de la figura 3.1.

Para el canal triangular,  $b = 0$ , y de la ecuación (3.6a) resulta

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta}} = \left[ \frac{\left[ \frac{2k}{\kappa} \ln(1 - \kappa d) + 2kd \right]^3 (1 - \kappa d)^3}{\kappa^3 \left[ 4kd + \frac{2k}{\kappa} \ln(1 - \kappa d) \right]} \right]_c^{1/2}$$

O bien

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta}} = \left[ - \frac{\left( \frac{2k}{\kappa} \right)^3 [\ln(1 - \kappa d) + \kappa d]^3 (1 - \kappa d)^3}{2k\kappa^2 [2\kappa d + \ln(1 - \kappa d)]} \right]_c^{1/2}$$

Finalmente queda

$$\frac{Q \kappa^{5/2}}{k \sqrt{g \cos \theta}} = \left[ - \frac{4 [\ln(1 - \kappa d) + \kappa d]^3 (1 - \kappa d)^3}{2\kappa d + \ln(1 - \kappa d)} \right]_c^{1/2} \quad (3.8)$$

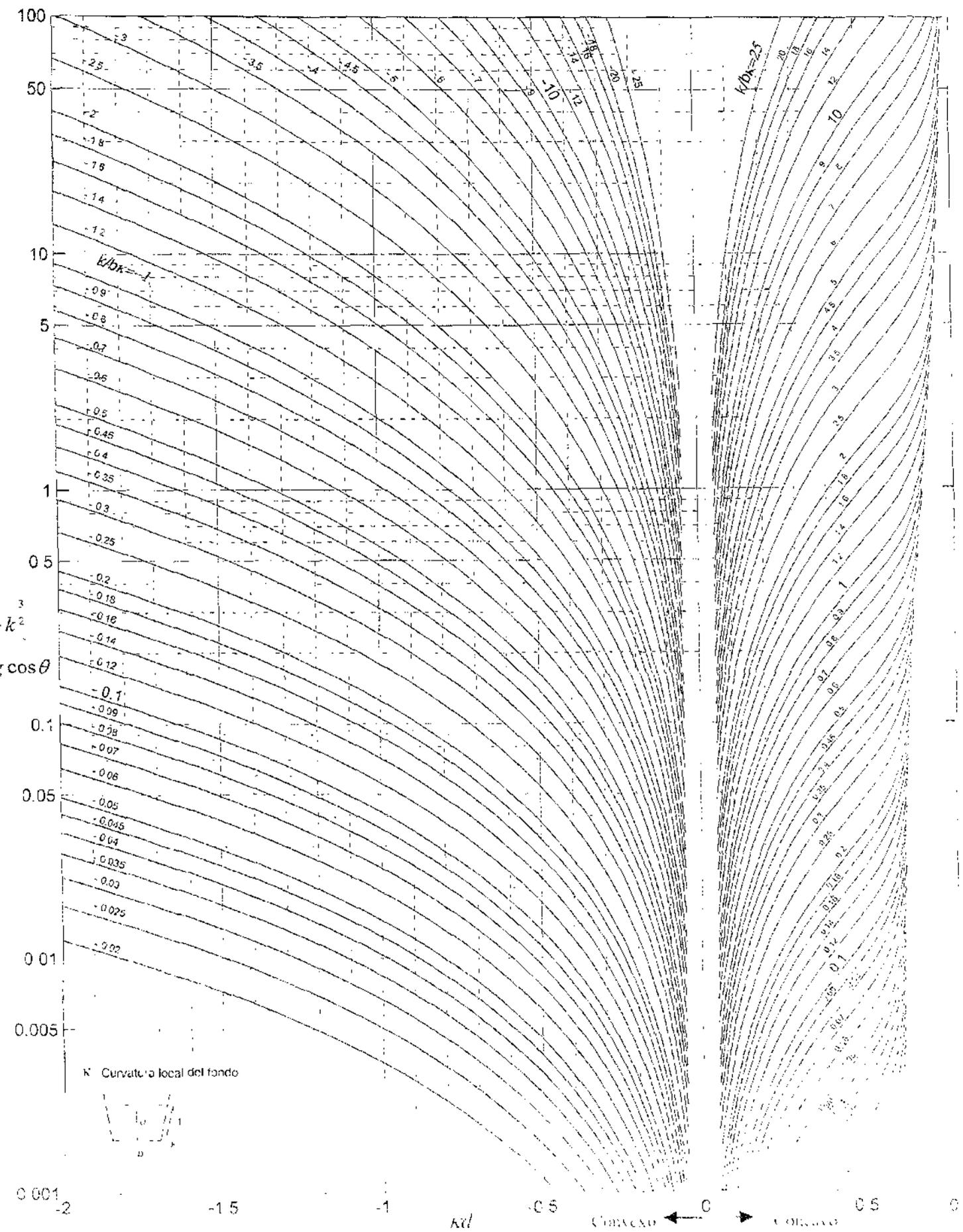


Figura 3.1 Tirante crítico en canales trapeciales de fondo curvo

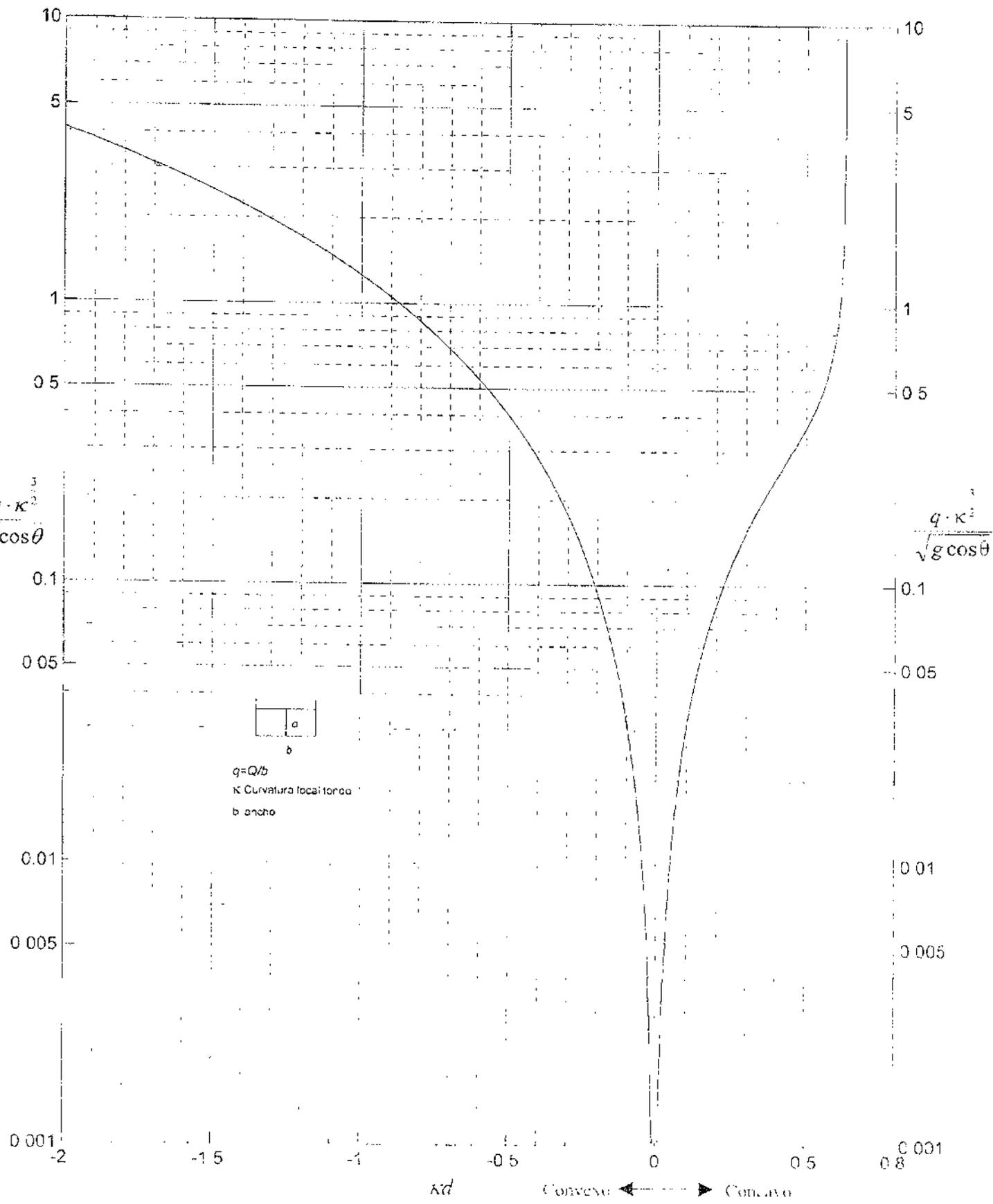


Figura 3.2 Tirante crítico en canales rectangulares de fondo curvo

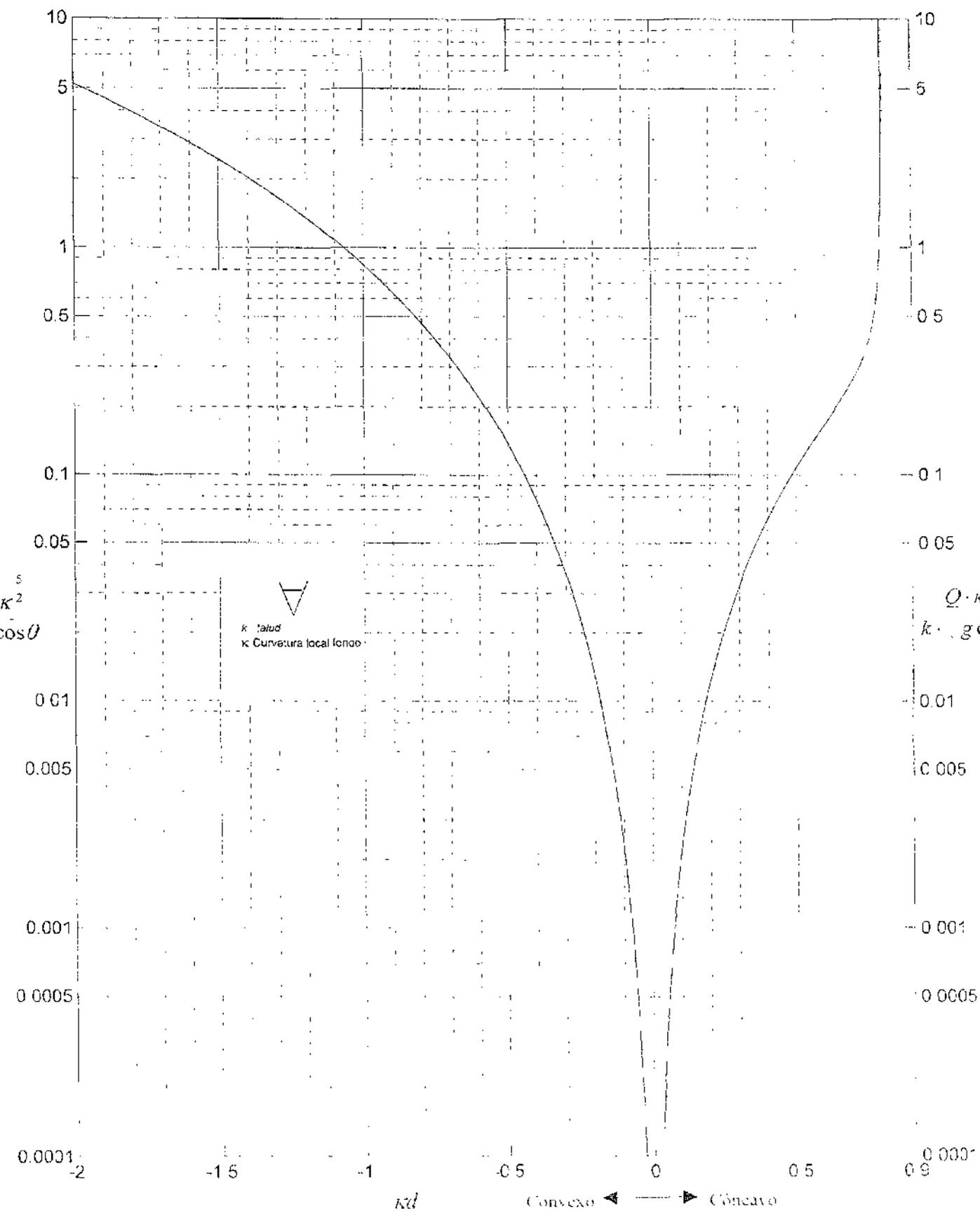


Figura 3.3 Tirante crítico en canales triangulares de fondo curvo

La figura 3.3 muestra la representación gráfica de la ecuación anterior y permite obtener el tirante crítico relativo  $\kappa d_c$  en un canal triangular, con la misma explicación de la figura 3.1.

La condición crítica se puede también obtener siguiendo un camino similar al de la ecuación (3.3a), pero con la (3.3b); resulta

$$\mathcal{F}_c = \left[ - \frac{(1 - \kappa d)^3}{\kappa d \left[ \frac{b + 2 \kappa d}{(b + 2k/\kappa) \ln(1 - \kappa d) + 2 \kappa d} + 1 \right]} \right]_c^{1/2} \quad (3.9a)$$

O bien, en función de términos adimensionales y por un camino similar al de la ecuación (3.6b), se tiene

$$\mathcal{F}_c = \left[ - \frac{(1 - \kappa d)^3 \left[ \left(1 + 2 \frac{\kappa d}{b} \frac{1}{\kappa d}\right) \ln(1 - \kappa d) + 2 \frac{\kappa d}{b} \right]}{\kappa d \left[ \left(1 + 2 \frac{\kappa d}{b} \frac{1}{\kappa d}\right) \ln(1 - \kappa d) + 1 + 4 \frac{\kappa d}{b} \right]} \right]_c^{1/2} \quad (3.9b)$$

Cuando el canal es rectangular,  $k=0$ , y la ecuación (3.9b) se convierte en

$$\mathcal{F}_c = \left[ \frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} \right]_c = \left[ - \frac{(1 - \kappa d)^3 \ln(1 - \kappa d)}{\kappa d [\ln(1 - \kappa d) + 1]} \right]_c^{1/2} \quad (3.10)$$

Cuando el canal es triangular,  $b=0$ , y la ecuación (3.9a) se simplifica a la forma

$$\mathcal{F}_c = \left[ \frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} \right]_c = \left[ - \frac{(1 - \kappa d)^3 [\ln(1 - \kappa d) + \kappa d]}{\kappa d [\ln(1 - \kappa d) + 2 \kappa d]} \right]_c^{1/2} \quad (3.11)$$

En la ecuación (3.9b) se observa que el parámetro crítico  $\mathcal{F}_c$  en el canal trapecial depende de  $\kappa d$ , pero también de  $\kappa d/b$ . Cuando el canal es muy ancho y  $\kappa d/b$  es muy pequeño o nulo, es válida la ecuación (3.10), donde dicho parámetro ya no depende de  $\kappa d/b$ .

El número de Froude en un canal trapecial, cualquiera que sea su talud o ancho de sección, se puede desarrollar de acuerdo con la ecuación (3.4), utilizando las ecuaciones (3.9b), (3.10) o (3.11), según sea el caso.

Los resultados se examinan a continuación para los dos casos posibles.

a) Fondo convexo ( $\kappa < 0$ )

En este caso es necesario considerar que  $\kappa = -|\kappa|$  en la ecuación adecuada a la forma de la sección. Para la sección trapezoidal, la ecuación (3.9b) se convierte en

$$\mathcal{F}_c = \frac{\left[ (1 + |\kappa|d)^3 \left[ \left( 1 - 2 \frac{kd}{b} \frac{1}{|\kappa|d} \right) \ln (1 + |\kappa|d) + 2 \frac{kd}{b} \right] \right]^{1/2}}{\left[ \left( 1 - 2 \frac{kd}{b} \frac{1}{|\kappa|d} \right) \ln (1 + |\kappa|d) + 1 + 4 \frac{kd}{b} \right]_c} \quad (3.12)$$

Es también útil y muy interesante la discusión y la representación gráfica de la ecuación (3.12), que contiene parámetros distintos a los de la (3.6c).

Con objeto de tener una amplitud mayor en la representación gráfica, se usa el parámetro  $\mathcal{F}$  en el eje vertical como se explica a continuación. El eje horizontal de la figura 3.4 contiene los valores de  $kd$  (negativos en fondo convexo), pero el eje vertical corresponde directamente a los valores de  $\mathcal{F}_c$  dados por la ecuación (3.12), es decir, el eje vertical contiene los valores de  $\mathcal{F} = u_0 / \sqrt{g d \cos \theta}$ . Esto tuvo por objeto mostrar intervalos de variación más amplios y unificar la presentación con la de otras curvas que se comentan más adelante.

Las curvas mostradas en la figura 3.4 representan la condición de régimen crítico para cada valor del parámetro  $kd/b$  entre 0 y 100 y sirven de frontera entre el régimen subcrítico y el supercrítico. La curva  $kd/b = 0$  es la única que pasa por  $\mathcal{F} = 1$ ; las restantes no lo hacen debido a que  $\mathcal{F}_c$  depende de  $kd/b$ . La curva para  $kd/b = 0$  corresponde al canal rectangular y la rama EF de dicha curva ocurre para  $1 \leq \mathcal{F} \leq 2.6584$ , dentro del intervalo:  $-2 \leq kd \leq 0$  para el fondo convexo.

b) Fondo cóncavo ( $\kappa > 0$ )

Las curvas para el canal trapezoidal se prolongan hacia el lado de curvatura cóncava.

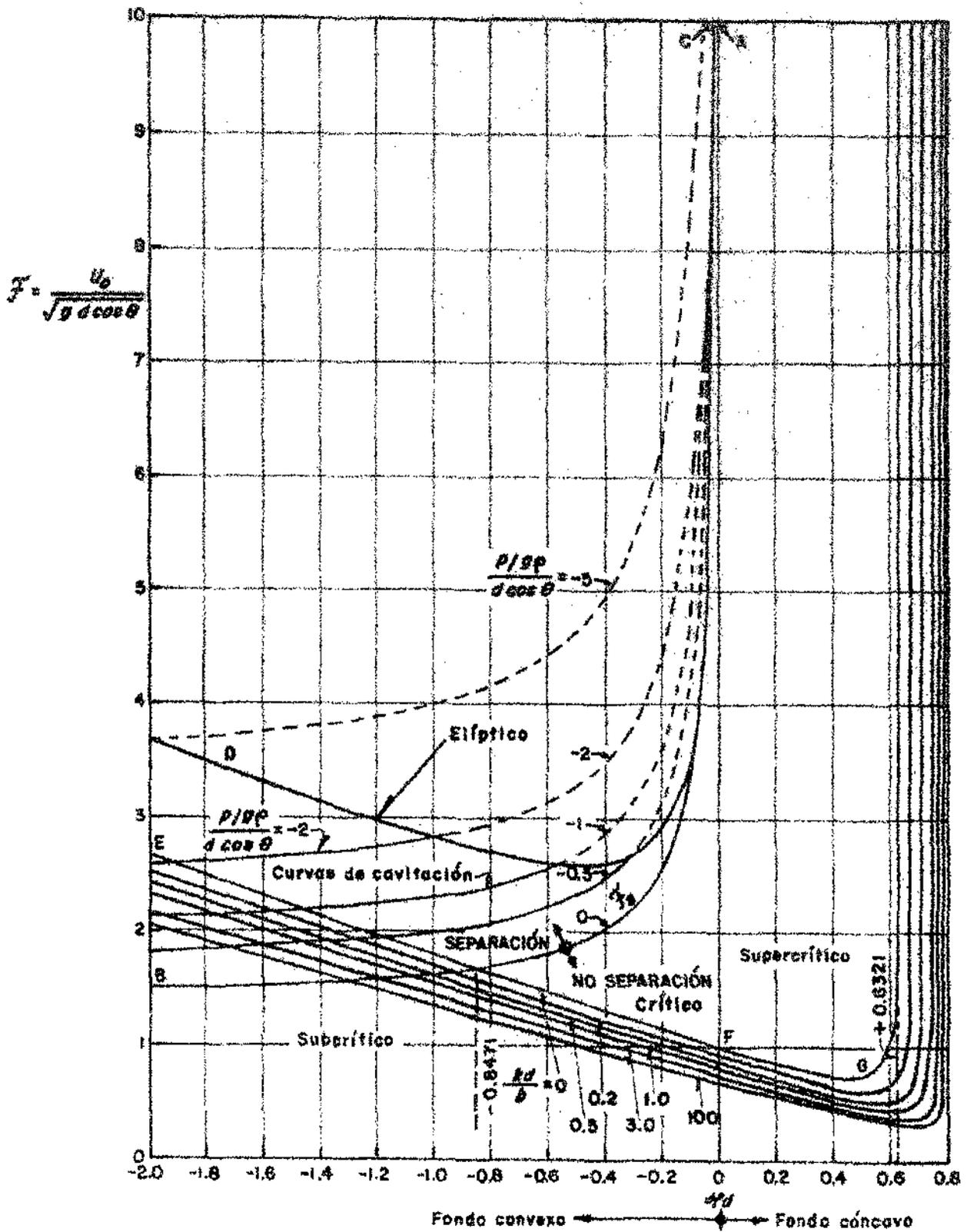


Figura 3.4. Flujo curvilíneo en canales trapeciales. Identificación del tipo de régimen, zonas de separación y cavitación.

Analizando el caso de la sección rectangular,  $\mathcal{F}_c$  está dado por la ecuación (3.10) y siempre se mantiene positivo. Sin embargo, se debe cumplir que  $\ln(1 - \kappa d) > -1$ , lo que significa que  $\kappa d < 0.6321$ . Con este límite superior, la rama FG en la figura 3.4 es la continuación de la curva de frontera entre régimen subcrítico y supercrítico en un canal rectangular para curvatura positiva. A medida que  $\kappa d$  aumenta, de valores negativos (a través de cero) hasta valores positivos, el de  $\mathcal{F}_c$  continúa disminuyendo en forma continua y monótonica hasta el valor mínimo  $\mathcal{F}_c = 0.74124$  para  $\kappa d = 0.456$ . Después, la curva se eleva bruscamente de manera que los regímenes crítico y subcrítico no son posibles más allá de  $\kappa d = 0.6321$ , ya que  $\ln(1 - \kappa d) \rightarrow -1$  y  $\mathcal{F}_c$  sería imaginario.

La influencia de  $\kappa d/b$  se acentúa en flujo cóncavo para  $\kappa d > 0.55$  y cada curva queda limitada hasta un valor dentro del intervalo:  $0.6321 \leq \kappa d \leq 0.7961$ , como muestra la figura 3.4.

Es interesante también mencionar que los resultados serían idénticos para el flujo no permanente, si bien las condiciones críticas cambiarían con el tiempo.

### 3.2.3 Ecuaciones para el canal circular

En este caso es más conveniente expresar la ecuación (3.3a) en términos de parámetros adimensionales, como sigue

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta} D^{5/2}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{I_Q}{D^2} \left[ \frac{(1 - \kappa d)^3}{\kappa - \frac{T}{D} \frac{1}{(I_Q/D^2)} \frac{1}{D}} \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

y al simplificar se obtiene

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta} D^{5/2}} = \frac{(1 - \kappa d)^{3/2} (I_Q/D^2)}{\sqrt{\frac{T/D}{I_Q/D^2} - \kappa D}} \quad (3.14)$$

donde

$$T = 2\sqrt{d(D-d)} \quad (3.15)$$

$$\frac{T}{D} = \frac{2}{D} \sqrt{d(D-d)} = 2 \sqrt{\frac{d}{D} \left(1 - \frac{d}{D}\right)} \quad (3.16)$$

La integral  $I_Q$  se expresa mediante la ecuación (2.119a) y es

$$I_Q = -\frac{2D}{\kappa} \sqrt{\frac{d}{D} \left(1 - \frac{d}{D}\right)} + \frac{2 - \kappa D}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2 \frac{d}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] - \frac{2 \sqrt{1 - \kappa D}}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2 \frac{d}{D} - (1 + \kappa d)}{1 - \kappa d} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.17)$$

O bién, en términos de los parámetros adecuados, resulta

$$\frac{I_Q}{D^2} = -\frac{2}{\kappa D} \sqrt{\frac{\kappa d}{\kappa D} \left(1 - \frac{\kappa d}{\kappa D}\right)} + \frac{(2 - \kappa D)}{(\kappa D)^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2 \frac{\kappa d}{\kappa D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] - \frac{2 \sqrt{1 - \kappa D}}{(\kappa D)^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2 \frac{\kappa d}{\kappa D} - (1 + \kappa d)}{1 - \kappa d} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (3.18a)$$

O bien en la forma

$$\frac{I_Q}{D^2} = -\frac{2}{\kappa d} \frac{d}{D} \sqrt{\frac{d}{D} \left(1 - \frac{d}{D}\right)} + \frac{2 \frac{d}{D} - \kappa d}{(\kappa d)^2 \frac{D}{d}} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2 \frac{d}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] - \frac{2 \sqrt{\frac{d}{D} - \kappa d}}{(\kappa d)^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2 \frac{d}{D} - (1 + \kappa d)}{1 - \kappa d} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.18b)$$

Las ecuaciones (3.16b) y (3.18b) se sustituyen en la ecuación (3.14) para determinar la condición crítica en un canal circular, similar a la (3.6c) para el trapecial y con las mismas aclaraciones.

La figura 3.5 muestra la representación gráfica de la ecuación (3.14) para el canal circular y permite determinar el tirante crítico relativo,  $\kappa d_c$ , en términos de parámetros que son constantes para una condición dada de geometría y gasto.

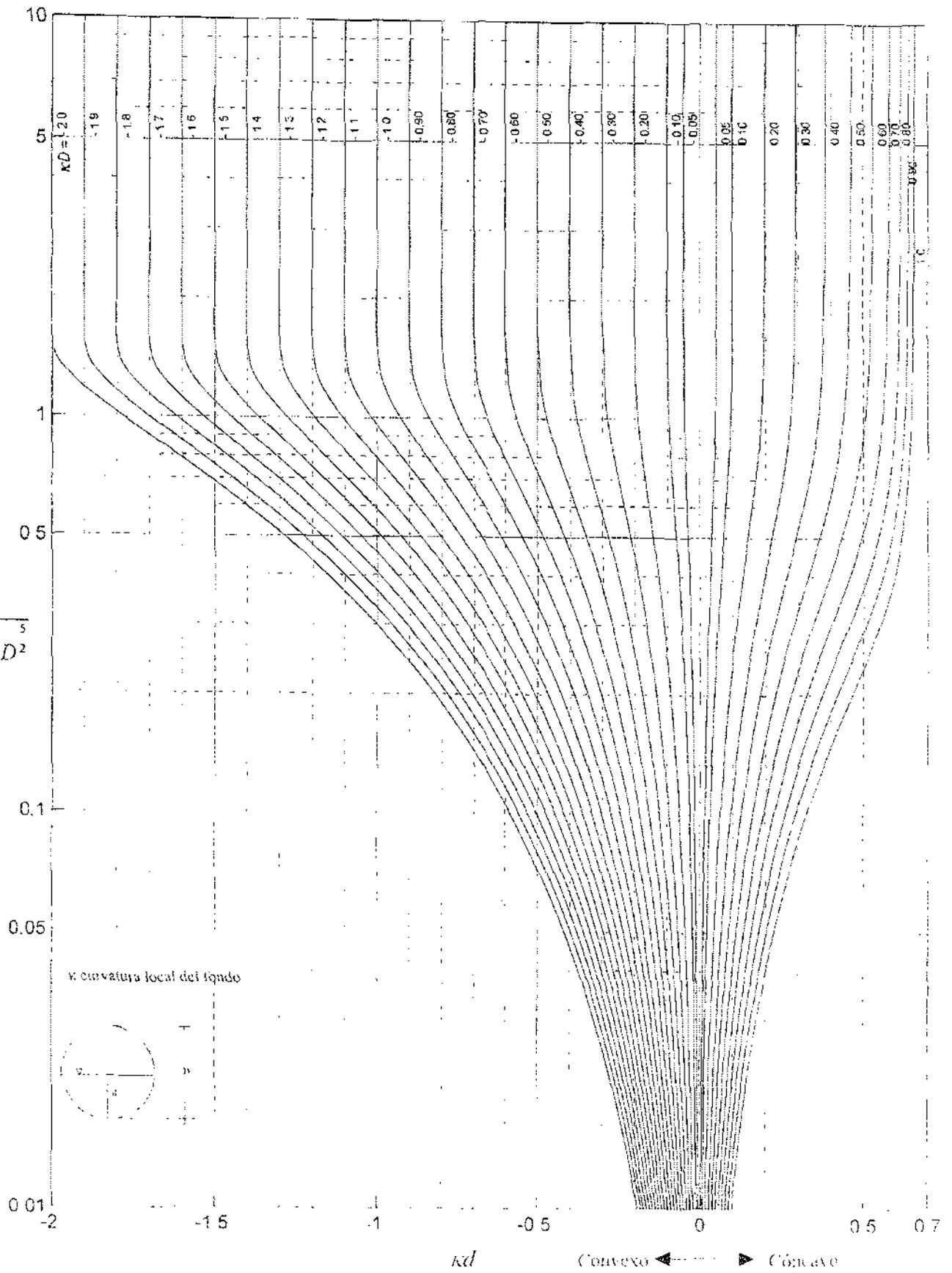


Figura 3.5. Frente crítico en canales circulares de fondo curvo

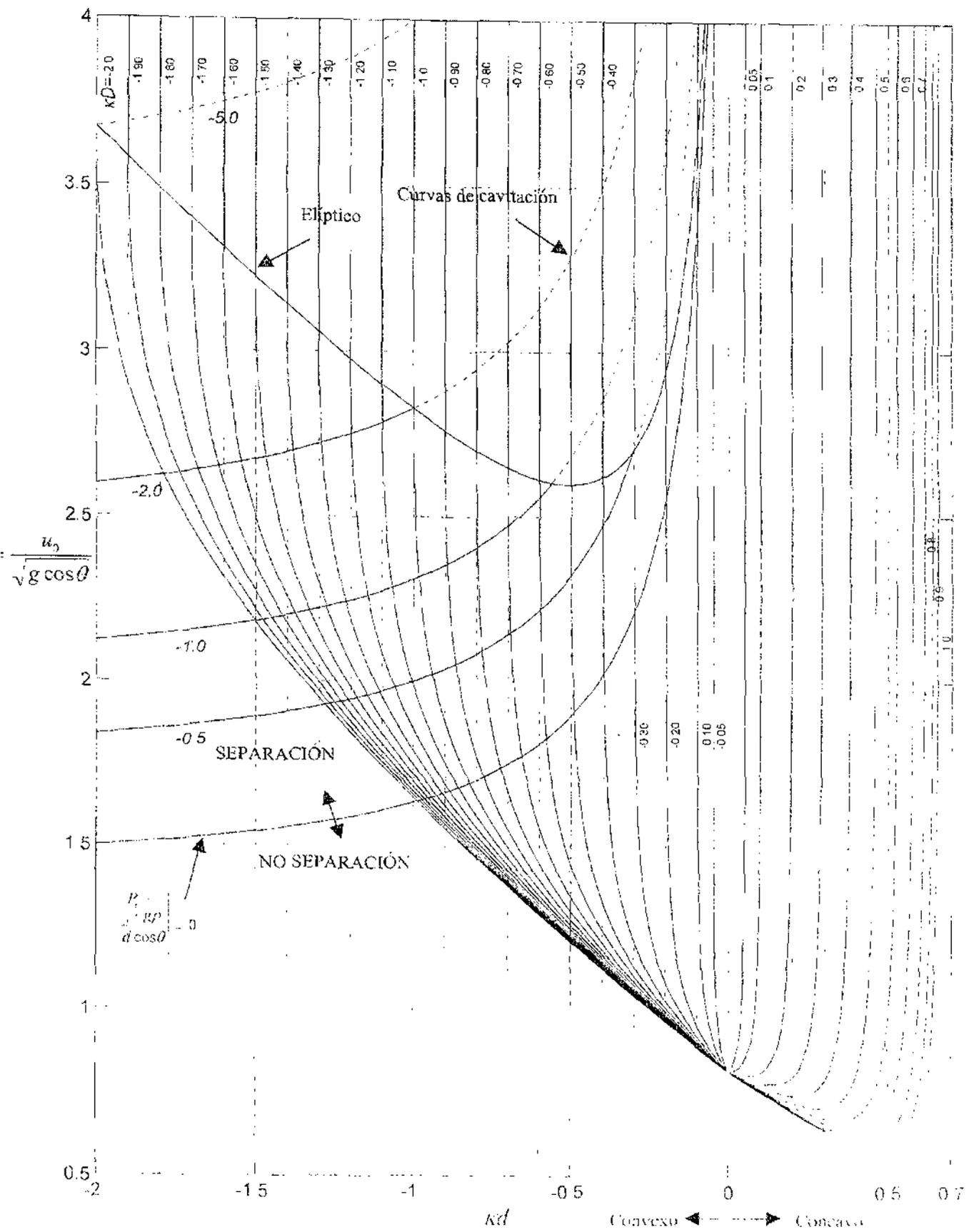


Figura 3.6 Flujo curvilíneo crítico en canales circulares. Identificación del tipo de régimen, zonas de separación y cavitación

La condición crítica se puede también obtener de la ecuación (3.3b) y las ecuaciones (3.16) y (3.18b). Para hacerlo en términos de parámetros adimensionales, se utiliza la ecuación (3.3b) en la forma

$$\mathcal{F}_c = \left[ \frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} \right]_c = \left[ - \frac{(1 - \kappa d)^3}{\kappa d - \frac{T D^2 d}{D \mathbf{I}_Q D}} \right]_c^{1/2} \quad (3.19)$$

donde se sustituyen las ecuaciones (3.16) y (3.18b). El parámetro  $\mathcal{F}_c$  depende únicamente de  $\kappa d$  y  $\kappa D$  y la figura 3.6 muestra la representación gráfica de las condiciones del flujo crítico en un canal circular, del todo similar al mostrado en la figura 3.4 para el trapecial.

### 3.3 CELERIDAD DE LA ONDA

La condición de régimen sobre el umbral curvo mostrado en la figura 2.7 está expresada por la ecuación (3.4). El término en el numerador representa el parámetro  $\mathcal{F}$  y el denominador el valor  $\mathcal{F}_c$  que adquiere cuando alcanza la condición crítica. Esto equivale a que  $\mathbf{F} = u_d/c$ .

El componente de la velocidad en la superficie libre  $u(s, d) = u_d$  (de la 2.57a) es

$$|u_d| = \left[ \frac{u_0}{1 - \kappa d} \right] \quad (3.20)$$

Para definir el número de Froude, dicho componente se compara con la celeridad  $c$  de propagación de una onda superficial cuando el flujo alcanza las condiciones críticas. Es decir, sustituyendo la ecuación (3.20) en la (3.4), dicha celeridad vale

$$c = \left[ - \frac{(1 - \kappa d)^3 g \cos \theta}{\kappa d - \frac{T d}{\mathbf{I}_Q}} \right]^{1/2} \quad (3.21)$$

Ésta es la celeridad o rapidez con que se propaga una onda de pequeña amplitud sobre la superficie libre del flujo sobre un fondo curvo (figura 2.7). Por ejemplo, la ecuación correspondiente a un canal trapecial se obtiene de la (3.9a) y la del rectangular haciendo  $k=0$ . Ambas expresiones respectivamente son:

$$c = \left[ \frac{\left[ \left( b + \frac{2k}{\kappa} \right) \ln (1 - \kappa d) + 2kd \right] [1 - \kappa d] g d \cos \theta}{\kappa d \left[ \left( b + \frac{2k}{\kappa} \right) \ln (1 - \kappa d) + b + 4kd \right]} \right]^{1/2} \quad (3.22)$$

$$c = \left[ \frac{(1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d)}{\kappa d [1 + \ln (1 - \kappa d)]} g d \cos \theta \right]^{1/2} \quad (3.23)$$

Cuando el fondo es plano,  $\kappa=0$  y en la ecuación general,  $I_\rho = A$ , de modo que la ecuación (3.21) se convierte en

$$c = \sqrt{g A \cos \theta / T}$$

En el canal trapecial:  $A = (b + kd) d$ ;  $T = b + 2kd$ ; y en el rectangular:  $A = bd$ ;  $T = b$  y las ecuaciones (3.22) y (3.23) para el fondo plano se convierten respectivamente en:

$$c = \sqrt{\frac{g (b + kd) d \cos \theta}{b + 2kd}}$$

$$c = \sqrt{g d \cos \theta}$$

Esto significa que cuando  $\kappa \rightarrow 0$  se recuperan las expresiones conocidas para la celeridad de la onda sobre un fondo plano y se justifica la definición dada para el número de Froude (ecuación 3.4).

Cuando el flujo es crítico,  $u_f = c$ , y cualquier pequeño disturbio sobre la superficie viaja con la misma velocidad con que se mueve el agua sobre dicha superficie.

Un análisis sencillo de la ecuación (3.23) para el canal rectangular muestra que la celeridad es singular cuando  $[1 + \ln (1 - \kappa d)] = 0$ , o bien, cuando  $\kappa d = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$ , valor que define un limite superior absoluto en la validez de las ecuaciones para el flujo de poca profundidad en el canal rectangular.

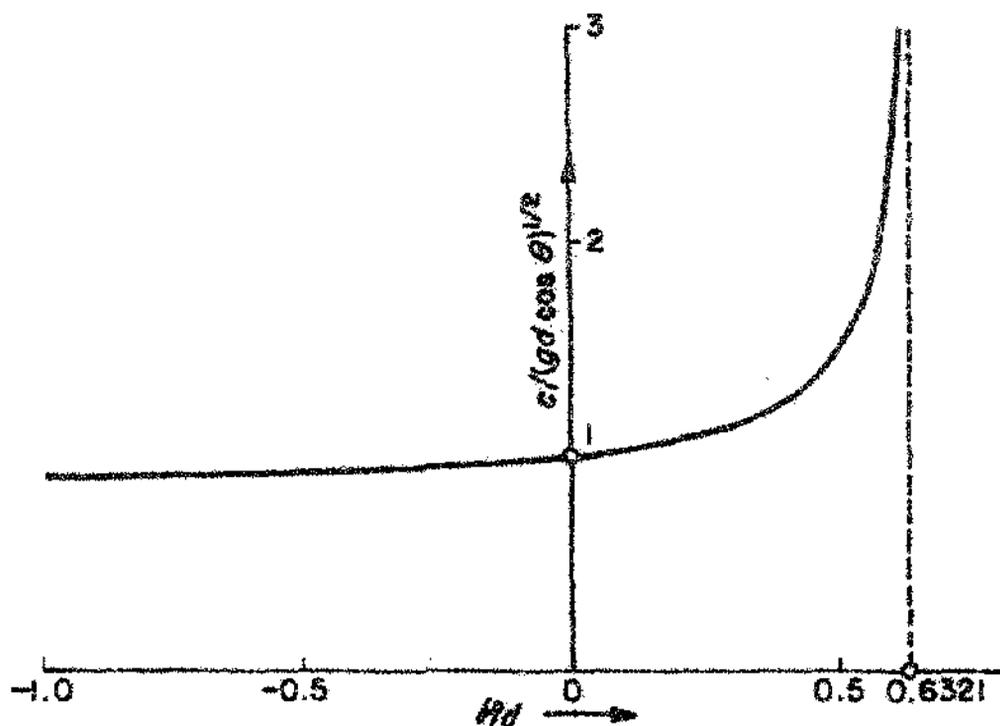


Figura 3.7. Celeridad relativa adimensional  $c/\sqrt{g d \cos \theta}$  contra la curvatura adimensional  $\kappa d$ . Canal rectangular. El valor de la celeridad relativa es imaginario para  $\kappa d > 0.6321$  y alcanza el mínimo 0.8776 para  $\kappa d = -5.0091$ .

La figura 3.7 muestra el lugar geométrico de la ecuación (3.23) y representa la variación de celeridad relativa adimensional:  $c/\sqrt{g d \cos \theta}$  con la curvatura  $\kappa d$  (también adimensional). Dentro del intervalo antes señalado se aprecia que cualquier disturbio en la superficie viaja más rápido sobre un fondo cóncavo ( $\kappa > 0$ ) o más lento sobre uno convexo ( $\kappa < 0$ ), que si lo hace sobre un fondo plano ( $\kappa = 0$ ).

Los razonamientos anteriores son válidos en flujo permanente o impermanente, ya que la definición de número de Froude también vale en ambos.

### 3.4 SEPARACIÓN DEL FLUJO Y CAVITACIÓN

La presión en el fondo del canal se valúa con la ecuación (2.72). Se observa que dicha presión siempre permanece positiva cuando el fondo es cóncavo ( $\kappa > 0$ ), pero puede haber separación del flujo cuando es convexo ( $\kappa < 0$ ) si la velocidad es suficientemente grande y  $p < 0$ .

El límite  $p = 0$  se introduce con la curvatura negativa en la ecuación antes mencionada y se obtiene la condición de separación:

$$d \cos \theta + \left[ (1 + |\kappa| d)^{-2} - 1 \right] \frac{u_0^2}{2g} = 0 \quad (3.24a)$$

o bien

$$\mathcal{F}_s = \left[ \frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} \right]_s = \sqrt{\frac{2}{1 - (1 + |\kappa| d)^{-2}}} \quad (3.24b)$$

El término a la izquierda de la ecuación anterior se aplica para cualquier forma de sección, siempre que  $d$  sea el tirante y se desee establecer la condición de separación en el fondo.

El lugar geométrico de la ecuación (3.24b) es la curva AB mostrada en las figuras 3.4 y 3.6, la cual limita la zona en que el flujo se separa sin que haya necesariamente cavitación. Es decir, la ecuación sólo establece que la presión en el fondo ha llegado al valor de la presión atmosférica local. La curva AB se interseca con la EF en el punto para el que  $\kappa d = -0.8471$ . Para alcanzar la cavitación sería necesario que  $p_0 = -|p_c|$ , donde  $-(p_c)$  es la presión de cavitación del agua (por debajo de la atmosférica), la cual depende de su temperatura. Según esta explicación, la ecuación (3.24a) se convierte en

$$d \cos \theta + \left[ (1 + |\kappa| d)^{-2} - 1 \right] \frac{u_0^2}{2g} = - \frac{|p_c|}{g\rho} \quad (3.25a)$$

$$\frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} = \left[ \frac{2 \left[ 1 + \left( |p_c| / g\rho d \cos \theta \right) \right]}{1 - (1 + |\kappa| d)^{-2}} \right]^{1/2} \quad (3.25b)$$

O bien, eliminando el denominador con el auxilio de la ecuación 3.24b, se obtiene

$$\mathcal{F}_{sa} = \mathcal{F}_s \sqrt{1 + \frac{|p_c| / g\rho}{d \cos \theta}} \quad (3.25c)$$

En la figura 3.4 se muestran las curvas para valores del parámetro  $(p_c / g\rho) / d \cos \theta$  entre 0 y 5, todas a la izquierda de la curva AB de separación. Esta última curva corresponde al valor cero de dicho parámetro.

La separación del flujo en una curva convexa ocurre cuando la presión es igual a cero y se representa en la figura 3.4 mediante la curva AB. La cavitación por efecto de curvatura sólo puede ocurrir en una curva vertical convexa siempre que la presión en uno o varios puntos del fondo sea negativa (por debajo de la atmosférica) y alcance el valor de la presión de cavitación, la cual depende de la temperatura e impurezas del agua. Esta situación se representa mediante las curvas de la figura 3.4 a la izquierda de la AB, cada una identificada por el valor del parámetro:  $(p_c / g\rho) / d \cos \theta$ , con valores entre  $-0$  y  $-5$ . Si para fines prácticos se acepta que  $p_c / g\rho = -6$  m, el parámetro alcanza valores de  $(d \cos \theta)$  entre 12 y 1.2 m. Explicaciones similares se dan para la figura 3.6.

### 3.5 NATURALEZA HIPERBÓLICA DE LAS ECUACIONES

Para averiguar la naturaleza hiperbólica de las ecuaciones, por ejemplo, la (2.103) y (2.104), se sigue el procedimiento de Courant y Friedrichs (1948) de valorar la desigualdad discriminante. Las ecuaciones son hiperbólicas si y sólo si

$$\frac{b/T}{\kappa (1 - \kappa d)} \left[ \ln (1 - \kappa d) \left( 1 + \frac{2k}{b\kappa} \right) + \frac{2kd}{b} \right] \left[ g \cos \theta + \frac{\kappa u_0^2}{(1 - \kappa d)^3} \right] < 0 \quad (3.26)$$

Es fácil verificar que esta igualdad siempre se satisface cuando  $\kappa \geq 0$ . Para el caso  $\kappa < 0$ , se sustituye de nuevo a la curvatura por  $-|\kappa|$  en la desigualdad anterior y ésta, al simplificar, se convierte en el parámetro:

$$\mathcal{F} = \frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} < \frac{(1 + |\kappa| d)^{3/2}}{\sqrt{|\kappa| d}}$$

Esto significa que las nuevas ecuaciones son hiperbólicas para cualquier valor positivo de la curvatura o igual a cero. Para la negativa ocurre lo mismo, a menos que

$$\frac{u_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} \geq \frac{(1 + |\kappa| d)^{3/2}}{\sqrt{|\kappa| d}} \quad (3.27)$$

La curva CD de la figura 3.4 es la definida por el signo de igualdad en la ecuación (3.27), es decir,  $\mathcal{F}$  como una función de  $\kappa d < 0$ . Esto significa que las ecuaciones diferenciales nunca son elípticas en su intervalo útil debido a que la separación del flujo siempre ocurre antes, cuando el parámetro  $\mathcal{F}$  es pequeño y no hay presión constante mayor que la atmosférica ( $p_a = 0$ ) actuando sobre la superficie libre. Si ocurre una presión distinta de la atmosférica, su valor se debe agregar a la ecuación 2.72 y la separación no se produce a menos que se alcancen números de Froude muy grandes.

Se tienen los mismos resultados para el flujo no permanente excepto que las variables dependen también del tiempo.

### 3.6 LÍMITES PARA LA VALIDEZ DE LA HIPÓTESIS DE FLUJO POCO PROFUNDO

Dentro de las hipótesis impuestas al flujo quedó excluida cualquier discontinuidad en  $\kappa$  para el fondo del canal. La cantidad  $\kappa d$  se puede considerar como un indicador de la pequeñez de la profundidad, ya que es el cociente del tirante del flujo y el radio de curvatura del fondo. Sus valores límite se pueden obtener de la curva FG en la figura 3.4 para el canal rectangular.

Debido a que la curva de régimen crítico para el canal rectangular manifiesta una inversión brusca inesperada para  $\kappa d = 0.5$ , esto sugiere que las ecuaciones pierden validez más allá de este valor. En igual forma, la curva AB se interseca con la EF para  $\kappa d = -0.8471$ ; para valores negativos mayores el régimen crítico y el supercrítico no pueden ocurrir ya que el flujo se separaría del fondo, (siempre que no se sobreponga una presión mayor que la atmosférica sobre la superficie libre).

Por las razones anteriores, Dressler (1978) sugirió que las ecuaciones para el flujo curvilíneo en un canal rectangular, permanente o no, se aplicaran tentativamente dentro del intervalo  $-0.85 \leq \kappa d \leq +0.5$  hasta que esta cuestión se definiera experimentalmente. Los experimentos realizados por Sivakumaran *et al* (1983) mostraron que el intervalo se puede ampliar (con buena concordancia entre la teoría y los experimentos), hasta los valores

$$-2 \leq \kappa d \leq 0.54 \quad (3.28)$$

es decir, hasta fondos convexos de gran curvatura, casi igual que en los cóncavos.

Si se analiza la ecuación (3.9a) para el canal trapecial se observa que la singularidad de denominador cero ocurre para  $kd \geq 0.6321$  siempre que  $kd/b \geq 0.15735$ . Esto significa que el intervalo de validez para flujo cóncavo en canales trapeciales se amplía en la medida que  $kd/b$  crece; sin embargo, dicho incremento no es significativo, dado que dicho parámetro es generalmente pequeño en la práctica.

## CAPÍTULO 4

# CANALES RECTANGULARES SOLUCIONES Y COMPROBACIONES EN FLUJO PERMANENTE

### 4.1 OBJETIVO

Algunos autores han obtenido ecuaciones o bien soluciones particulares para el canal rectangular, incluyendo o no el efecto resistivo por fricción, algunas de las cuales se han verificado experimentalmente. Es el caso de las ecuaciones presentadas por Dressler (1978), que resultaron de la transformación de las ecuaciones de Euler para el flujo bidimensional en coordenadas cartesianas a un sistema de coordenadas curvilíneas y son por ello sólo aplicables al canal rectangular. Constituyen un caso particular de las ecuaciones diferenciales generales presentadas en el capítulo anterior.

El propósito de este capítulo es de exponer la aplicación de dichas ecuaciones con la finalidad de validar la teoría para el flujo permanente, además de introducir algunos conceptos y cálculos adicionales que se requieren para aplicarla a cualquier canal. Se busca también presentar aplicaciones a problemas típicos en la hidráulica, como el de la determinación de la presión en el fondo de cubetas deflectoras de solución teórico-experimental, o el de la presión sobre la espalda de un cimacio, que ha sido tradicionalmente experimental.

### 4.2 ECUACIONES PARA EL CANAL RECTANGULAR

#### 4.2.1 *Generales*

Se presenta a continuación un resumen de las ecuaciones para el canal rectangular y flujo permanente.

La ecuación (2.56) para la distribución del componente principal de la velocidad se mantiene igual y es

$$u(s, n) = \frac{u_0(s)}{1 - \kappa n} \quad (4.1)$$

Sustituyendo la ecuación (2.106) en la (2.58) resulta el gasto unitario  $q$  en la forma

$$q(s) = \frac{Q}{b} = - \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa} u_0 \quad (4.2a)$$

O bien

$$u_0 = - \frac{\kappa}{\ln(1 - \kappa d)} q(s) \quad (4.2b)$$

La distribución del componente secundario de la velocidad se obtiene sustituyendo las ecuaciones (2.105) y (2.107) en la (2.63b) y dado que  $B = b$  resulta

$$\begin{aligned} w(s, n) = & \left[ \frac{\ln(1 - \kappa n)}{\kappa(1 - \kappa n)} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} \left[ \frac{\ln(1 - \kappa n)}{1 - \kappa n} + \frac{\kappa n}{(1 - \kappa n)^2} \right] u_0 \\ & + \frac{\partial b / \partial s}{\kappa b} \ln(1 - \kappa n) u_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

De manera que el componente en la superficie libre  $w_d$  se obtiene haciendo  $n = d$  en la ecuación anterior.

Para el canal rectangular de ancho constante,  $\partial b / \partial s = 0$ , y la ecuación (2.110) se convierte en

$$\frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial d}{\partial s} - \left[ \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa(1 - \kappa d)} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial \kappa}{\partial s} \left[ \frac{\kappa d}{(1 - \kappa d)^2} + \frac{\ln(1 - \kappa d)}{1 - \kappa d} \right] u_0 = 0 \quad (4.4)$$

Las ecuaciones (2.71a y b) y la (2.72), para la distribución de la presión en la sección y la presión en el fondo, se mantienen igual y son:

$$\frac{P}{\rho g} = H - \zeta - n \cos \theta - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \frac{u_0^2}{2g} \quad (4.5a)$$

$$\frac{p}{g\rho} = (d - n) \cos \theta + \left[ \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (4.5b)$$

$$\frac{p_0}{g\rho} = d \cos \theta + \left[ (1 - \kappa d)^{-2} - 1 \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (4.6)$$

La energía total por unidad de peso en una sección ortogonal al fondo se obtiene de la ecuación (2.69a) y es

$$H = \zeta + d \cos \theta + \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} \frac{u_0^2}{2g} \quad (4.7a)$$

O bien, si se substituye la ecuación (4.2b) en la anterior, se obtiene

$$H = \zeta + d \cos \theta + \left[ (1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d) \right]^{-2} \frac{\kappa^2 q^2}{2g} \quad (4.7b)$$

donde  $\zeta$ ,  $\theta$  y  $\kappa$  sólo dependen de la geometría del fondo;  $\kappa$  es independiente de  $d$  y de  $q$ .

La ecuación (2.75b) se mantiene idéntica

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \left[ g \cos \theta + \frac{\kappa u_0^2}{(1 - \kappa d)^3} \right] \frac{\partial d}{\partial s} - \left[ g \kappa \sin \theta - \frac{\partial \kappa / \partial s}{(1 - \kappa d)^3} u_0^2 \right] d \\ + g (\sin \theta + S_f) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

pero  $S_f$  resulta de las ecuaciones (2.109) y (2.85), como sigue

$$S_f = \frac{1 - 2 \frac{\ln (1 - \kappa d)}{\kappa b}}{1 + \frac{2d}{b}} \frac{n_M^2 u_0^2}{R_h^{4/3}} \quad (4.9)$$

Por otra parte, la condición cinemática de frontera (ecuación 2.51) se mantiene igual

$$\frac{w_d}{u_d} = \frac{1}{1 - \kappa d} \frac{dd}{ds} \quad (4.10)$$

#### 4.2.2 Régimen crítico

La ecuación (3.7) para el tirante crítico se mantiene igual

$$\frac{q \kappa^{3/2}}{\sqrt{g \cos \theta}} = - \frac{[(1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d)]^{3/2}}{[\ln (1 - \kappa d) + 1]^{1/2}} \quad (4.11)$$

donde  $q = Q/b$ . La curva mostrada en la figura 3.2 muestra la representación gráfica de la ecuación (4.11) y permite un cálculo sencillo del tirante crítico.

La condición crítica para el canal rectangular queda expresada en términos del parámetro  $\mathcal{F}_c$  por la ecuación (3.10)

$$\mathcal{F}_c = \left[ - \frac{(1 - \kappa d)^3 \ln (1 - \kappa d)}{\kappa d [\ln (1 - \kappa d) + 1]} \right]_c^{1/2} \quad (4.12)$$

cuya representación gráfica se presentó con la curva de la figura 3.4.

#### 4.2.3 Versión unidimensional

La teoría presentada por Sotelo G. y Ruiz (1994) es congruente con el modelo de flujo cuando se particulariza para el canal rectangular. En efecto, con  $n = d$  en la ecuación (4.1) se obtiene

$$u_o = (1 - \kappa d) u_d \quad (4.13)$$

Por tanto, con  $q = Ud$ , la ecuación (4.2a) se escribe

$$Ud = - \frac{1}{\kappa} (1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d) u_d$$

donde  $U$  es la velocidad media en la sección. Con  $\kappa = 1/R$  ( $R$  el radio local de curvatura), resulta

$$U = \left(1 - \frac{R}{d}\right) \ln \left(1 - \frac{d}{R}\right) u_d = \lambda u_d \quad (4.14)$$

de manera que la ecuación (4.13) también se escribe

$$u_c = \frac{1 - \kappa d}{\lambda} u \quad (4.15)$$

En ambas ecuaciones, al término

$$\lambda = \left(1 - \frac{R}{d}\right) \ln \left(1 - \frac{d}{R}\right) \quad (4.16a)$$

se le designa como coeficiente de curvatura para el flujo cóncavo y sólo depende del tirante  $d$  del flujo, el cual cambia en cada sección.

Por un razonamiento semejante se llegaría a las mismas ecuaciones para el flujo convexo, pero la curvatura negativa cambia el signo de los términos que contienen a  $d/R$  en la ecuación (4.16a), de manera que para el convexo resulta

$$\lambda = \left(1 + \frac{R}{d}\right) \ln \left(1 + \frac{d}{R}\right) \quad (4.16b)$$

La representación gráfica de  $\lambda$  se muestra en la figura 4.1 para ambos tipos de flujo en términos de  $d/R$ ; en el cóncavo  $\lambda < 1$  y en el convexo  $\lambda > 1$ . En cualquier caso,  $\lambda$  tiende a uno cuando  $d/R$  tiende a cero; con ello,  $u_d$  tiende a  $V$ , es decir, a la distribución uniforme de la velocidad unidimensional en flujo rectilíneo de un líquido ideal.

La energía  $H = \zeta + p/g\rho + u_0^2/2g$  de las partículas (respecto del fondo) es constante para todas las líneas de corriente en la sección, pero su valor se obtiene con más facilidad en la superficie libre ( $\zeta = d \cos \theta$ ) donde la presión es la atmosférica ( $p_a = 0$ ) y de la ecuación (4.12),  $u_d = U/\lambda$ ; por tanto, la energía específica en la sección es

$$E = d \cos \theta + \frac{1}{\lambda^2} \frac{U^2}{2g} \quad (4.17)$$

sea el flujo cóncavo o convexo.

El coeficiente  $\lambda$  corrige el defecto de considerar la velocidad media en la sección en lugar de la velocidad  $u_d$  sobre la superficie libre, de manera que el último término de la ecuación (4.17) representa la distancia vertical que separa la línea de energía de dicha superficie libre en ambos tipos de flujo.

Un hecho importante es que, para calcular la energía en una sección del flujo con curvatura, no es necesario conocer la distribución de la presión ni la que hay en el fondo, sólo el coeficiente de curvatura. Si  $d/R$  es pequeño o el flujo es rectilíneo,  $\lambda = 1$ , y la ecuación (4.17) se convierte en la expresión convencional para el líquido ideal.

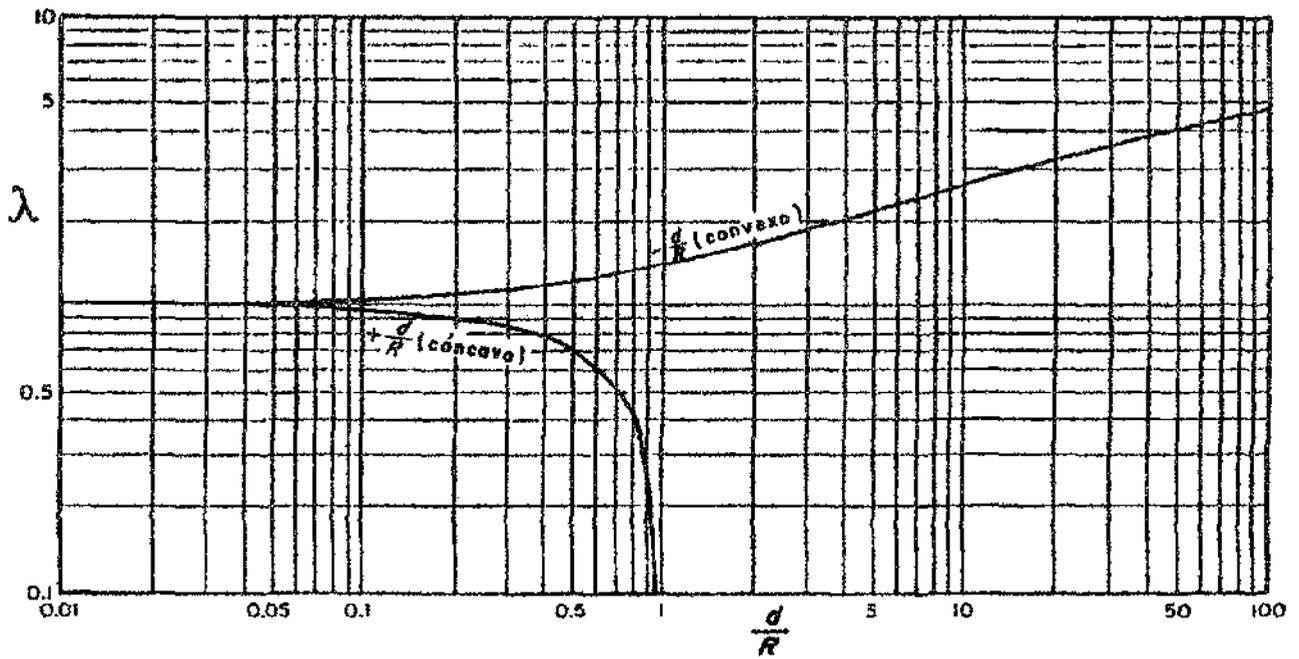


Figura 4.1. Coeficiente de curvatura  $\lambda$

Para conocer la distribución de la presión en la sección y sobre todo la presión que hay en el fondo, se utiliza la ecuación (4.5b), donde se sustituye la ecuación (4.15) y resulta

$$\frac{p}{g\rho} = (d - n) \cos \theta + \left[ 1 - \left( \frac{1 - \kappa d}{1 - \kappa n} \right)^2 \right] \frac{1}{\lambda^2} \frac{U^2}{2g} \quad (4.18a)$$

O bien

$$\frac{p}{g\rho} = (d - n) \cos \theta + \left[ 1 - \left( \frac{R - d}{R - n} \right)^2 \right] \frac{1}{\lambda^2} \frac{U^2}{2g} \quad (4.18b)$$

expresión que permite conocer la presión en cualquier punto de la sección, sea el flujo cóncavo o convexo. Para el cóncavo, con  $n = 0$  se obtiene la carga de presión en el fondo

$$\frac{p_c}{g\rho} = d \cos \theta + \left[ 1 - \left( 1 - \frac{d}{R} \right)^2 \right] \frac{1}{\lambda^2} \frac{U^2}{2g} \quad (4.19a)$$

O bien

$$\frac{p_c}{g\rho} = d \cos \theta + \left[ 2 \frac{d}{R} - \left( \frac{d}{R} \right)^2 \right] \frac{1}{\lambda^2} \frac{U^2}{2g} \quad (4.19b)$$

Para el flujo convexo  $d/R$  es negativo y el signo del último término de la ecuación anterior cambia a menos, por lo que se usa el doble signo como sigue

$$\frac{p_0}{g\rho} = d \cos \theta \pm \frac{d}{R} \left( 2 - \frac{d}{R} \right) \frac{1}{\lambda^2} \frac{U^2}{2g} \quad (4.20a)$$

O bien

$$\frac{p_0}{g\rho} = d \cos \theta \pm \left[ \frac{1 - \left( \frac{d}{2R} \right)}{\lambda^2} \right] \frac{U^2 d}{gR} \quad (4.20b)$$

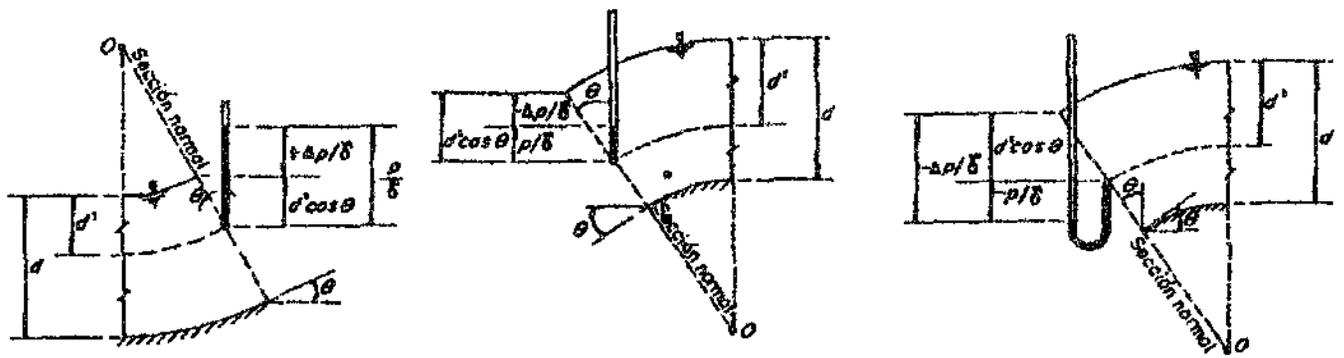
Cuando  $d/R = 0.1$ ,  $\lambda \approx 0.948$  y el paréntesis rectangular es casi igual a 1, de modo que la ecuación anterior se simplifica a la forma

$$\frac{p_0}{g\rho} \approx d \cos \theta \pm \frac{U^2 d}{gR} \quad (4.21)$$

que es la ecuación aproximada obtenida por Douma (1953) para una curva circular a partir de un razonamiento distinto. El término  $[1 - (d/2R)]/\lambda^2$  es siempre menor de uno en flujo cóncavo, de modo que la ecuación (4.21) conduce a resultados mayores que los obtenidos con la (4.20b). Lo contrario acontece en el flujo convexo. Las diferencias son menores del 6 por ciento cuando  $d/R < 0.10$  en flujo cóncavo, pero son mucho mayores en el convexo.

El primer término en las ecuaciones antes obtenidas corresponde a la carga de presión hidrostática y el segundo a la desviación de la presión por efecto de la curvatura de las líneas de flujo. Dicha desviación se agrega a la hidrostática cuando el flujo es cóncavo resultando presiones siempre positivas. La presión en flujo convexo disminuye a valores que pueden ser mayores o menores que la atmosférica. Las tres posibilidades se representan en la figura 4.2 con la medición en puntos ubicados a la distancia  $d$ , medida desde la superficie libre en dirección normal al flujo, donde los piezómetros registran los valores que se muestran.

Según la ecuación (4.17), la carga de presión en el fondo de la sección no interviene en la magnitud de la energía, como ocurre en el flujo rectilíneo. Por ejemplo, para el fondo de la sección resulta  $E = p_c/g\rho + u_0^2/2g$ , pero  $p_c/g\rho$  se obtiene de la ecuación (4.20b) y de la (4.15):  $u_0 = \left( 1 - \frac{d}{R} \right) \frac{U}{\lambda}$ ; ambas se sustituyen en la ecuación de  $E$  y esto lleva nuevamente a la ecuación (4.17).



a) Flujo cóncavo

b) Flujo convexo; presión mayor que la atmosférica

c) Flujo convexo; presión menor que la atmosférica

Figura 4.2. Medición de la carga de presión en un flujo curvilíneo.

Cuando la distribución de la presión en un flujo difiere de la hidrostática, es común utilizar el coeficiente de corrección  $\alpha^2$  de la carga de presión, definido en la forma

$$\alpha^2 = 1 \pm \frac{1}{Q d \cos \theta} \iint_A \frac{\Delta p}{g\rho} u dA \quad (4.22)$$

donde  $\Delta p/g\rho$  es la desviación de la carga de presión real respecto de la hidrostática e igual al último término de la ecuación (4.18b). Es decir, en flujo cóncavo y convexo dicha desviación es

$$\frac{\Delta p}{g\rho} = \left[ 1 - \left( \frac{r_d}{r} \right)^2 \right] \frac{1}{\lambda^2} \frac{U^2}{2g}$$

donde  $r_d = R - d$  y  $r = R - n$ . Pero  $r_d / r = u / u_d$  y la integral en  $\alpha^2$  resulta

$$\iint_A \frac{\Delta p}{g\rho} u dA = \left[ \iint_A u dA - UA \left( \frac{U}{u_d} \right)^2 \frac{1}{A} \iint_A \left( \frac{u}{U} \right)^3 dA \right] \frac{1}{\lambda^2} \frac{U^3}{2g}$$

La primera integral después del signo igual representa el gasto, y el producto de  $1/A$  por la segunda integral es el coeficiente de corrección de la energía cinética por efecto de la curvatura en la distribución de la velocidad y se designa por  $\alpha_c$ ; además,  $\lambda = U/u_d$  y se obtiene

$$\iint_A \frac{\Delta p}{g\rho} u dA = Q \left[ \frac{1}{\lambda^2} \frac{U^3}{2g} - \alpha_c \frac{U^3}{2g} \right]$$

por tanto

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{d \cos \theta} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \alpha_c \right) \frac{U^2}{2g} \quad (4.23)$$

de manera que la carga de presión media en términos de la velocidad media resulta en la forma

$$\alpha' d \cos \theta = d \cos \theta + \left( \frac{1}{\lambda^2} - \alpha_c \right) \frac{U^2}{2g}$$

La ecuación para la energía específica del flujo curvilíneo es

$E = \alpha' d \cos \theta + \alpha U^2/2g$ , donde se sustituye el valor de  $\alpha'$  y resulta

$$E = d \cos \theta + \left( \frac{1}{\lambda^2} - \alpha_c + \alpha \right) \frac{U^2}{2g} \quad (4.24)$$

donde  $\alpha \equiv \alpha_c$ , si bien en un flujo rectilíneo se calcula con la distribución de la velocidad con efecto de fricción en la pared. El coeficiente  $\alpha_c$  para el flujo curvilíneo se calcula con la distribución de la velocidad por efecto de curvatura, ya que el flujo irrotacional no incluye la fricción. Puesto que la distribución de la velocidad sigue la ley del vórtice libre  $u = u_d r_d/r$  y la media es  $U = \lambda u_d$ , para el flujo cóncavo se tiene

$$\alpha_c = \frac{1}{d} \int_{r_d}^R \left( \frac{u}{U} \right)^3 dr = \frac{1}{\lambda^3} \frac{r_d^3}{d} \int_{r_d}^R \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{r_d^3}{d} \left[ -\frac{1}{2r^2} \right]_{r_d}^R$$

$$\alpha_c = \frac{1}{\lambda^3} \frac{r_d^3}{2d} \left( \frac{1}{r_d^2} - \frac{1}{R^2} \right) = \frac{1}{\lambda^3} \frac{r_d}{2d} \left( \frac{R^2 - r_d^2}{R^2} \right) = \frac{1}{\lambda^3} \frac{r_d}{R} \left[ \frac{(R + r_d)(R - r_d)}{2 d R} \right]$$

Con  $R - r_d = d$  y sustituyendo  $r_d = R - d$ , se tiene

$$\alpha_c = \frac{1}{\lambda^3} \left( 1 - \frac{d}{R} \right) \left( 1 - \frac{d}{2R} \right) \quad (4.25)$$

Puesto que  $\lambda$  es función de  $d/R$ ,  $\alpha_c$  también lo es. Cuando el flujo es convexo,  $d/R$  cambia de signo en las ecuaciones de  $\lambda$  y  $\alpha_c$ , y si  $d/R$  tiende a cero, los dos coeficientes tienden a uno. Se puede considerar que  $\alpha_c < 1.07$  cuando  $d/R \leq 0.4$  en flujo cóncavo o convexo, lo que cubre la mayoría de los casos en la práctica. En otras palabras, la distribución de la velocidad por el efecto de curvatura casi no tiene influencia en el valor de  $\alpha_c$  y el coeficiente de curvatura es el único que influye en el cálculo de la energía total en flujo curvilíneo; es decir, la ecuación (4.17) puede aplicarse en lugar de la (4.24) sin ningún error.

Es posible usar la teoría incluyendo la pérdida de fricción. En efecto, cuando la curva es larga, es posible determinar el perfil de la superficie libre en las distintas secciones perpendiculares al fondo por la aplicación reiterada de la ecuación de energía entre ellas. La ecuación entre dos secciones normales al flujo curvilíneo vertical se expresa en la forma

$$\Delta z + E_1 = E_2 + \frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \Delta s \quad (4.26)$$

donde  $E_i$  es la energía específica en cada sección ( $i = 1$  o  $2$ ), calculada con la ecuación (4.17) ( $\lambda$  de la 4.16a) y  $S_{fi}$  es la pendiente de fricción en la sección  $i$ , calculada con la ecuación (4.9). Por último,  $\Delta s$  es la distancia entre las dos secciones, medida siguiendo el fondo del canal, siendo  $\Delta z$  el desnivel del fondo entre ambas.

Por último, con la interpretación de la ecuación (4.16a), son posibles los siguientes desarrollos:

$$(1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d) = - \kappa d \left(1 - \frac{1}{\kappa d}\right) \ln (1 - \kappa d) = - \frac{d}{R} \left(1 - \frac{R}{d}\right) \ln (1 - \kappa d)$$

$$(1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d) = - \lambda d/R \quad (4.27)$$

También

$$\ln (1 - \kappa d) + 1 = \ln \left(1 - \frac{d}{R}\right) + 1 = \frac{\lambda}{1 - R/d} + 1 = \frac{\lambda + 1 - R/d}{1 - R/d}$$

$$\ln (1 - \kappa d) + 1 = \frac{[R/d - (\lambda + 1)]}{R/d - 1} \quad (4.28)$$

Con estos resultados, la ecuación (4.11) se escribe en la forma

$$\frac{q \kappa^{3/2}}{\sqrt{g \cos \theta}} = \frac{(\lambda d/R)^{3/2} \left(\frac{R}{d} - 1\right)^{1/2}}{[R/d - (\lambda + 1)]^{1/2}}$$

o bien

$$\frac{q \kappa^{3/2}}{\sqrt{g \cos \theta}} = \frac{d}{R} \left[ \frac{\lambda^3 (1 - d/R)}{R/d - (\lambda + 1)} \right]^{1/2} \quad (4.29)$$

con la misma limitación de que:  $R \cdot d > (\lambda + 1)$ .

Igual que antes, la ecuación (4.12) se escribe en la forma

$$\mathcal{F}_c = \left[ - \frac{(1 - d/R)^3 [\lambda/(1 - R/d)] (d/R - 1)}{(d/R)^2 [R/d - (\lambda + 1)]} \right]^{1/2}$$

$$\mathcal{F}_c = \frac{R}{d} \left[ \frac{(1 - d/R)^3 \lambda}{R/d - (\lambda + 1)} \right]^{1/2} \quad (4.30)$$

Las ecuaciones (4.29) y (4.30) son equivalentes a la (4.11) y (4.12), pero en términos del coeficiente de curvatura.

### 4.3 FONDO CÓNCAVO-CONVEXO

#### 4.3.1 Solución teórica

La interpretación de la línea de energía y del perfil de la superficie libre sobre el canal de fondo cóncavo-convexo mostrado en la figura 2.7, es similar en flujo permanente, pero las variables que intervienen son independientes del tiempo. La carga de velocidad, calculada con el componente  $u_d$  en la superficie libre de una sección ortogonal al fondo, separa verticalmente a dicha superficie de la línea de energía. Cuando el flujo cambia de subcrítico a supercrítico se establece una sección crítica y es de gran interés determinar la condición necesaria para su localización.

Para facilitar los cálculos, el perfil del fondo se conoce a través de la función  $\zeta(x)$  referida al sistema cartesiano  $(x, z)$ , de modo que la coordenada  $s$  hasta un punto cualquiera B en el fondo se obtiene de la integral de línea

$$s = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left( \frac{d\zeta(x)}{dx} \right)^2} dx \quad (4.31)$$

donde  $x_B$  representa la abscisa del punto B, medida desde el punto origen en que se inicia la curvatura en el fondo.

El ángulo de inclinación  $\theta$  de una recta tangente al fondo en cualquier punto B resulta

$$\tan \theta = \frac{d\zeta(x_B)}{dx} = \frac{\zeta - z}{x_B - x} \quad (4.32)$$

que define otra recta ortogonal al fondo, de ecuación

$$\left( \frac{\zeta - z}{x_B - x} \right) \frac{d\zeta(x_B)}{dx} + 1 = 0 \quad (4.33)$$

La curvatura en cualquier punto B del fondo es

$$\kappa = \frac{d^2\zeta/dx^2}{[1 + (d\zeta/dx)^2]^{3/2}} = \frac{d^2\zeta/dx^2}{[1 + (\text{sen } \theta/\text{cos } \theta)^2]^{3/2}} = \text{cos}^3 \theta \frac{d^2\zeta}{dx^2} \quad (4.34)$$

como puede verse en los libros de Matemáticas. Por tanto, para un radio de curvatura  $R = 1/\kappa$ , las coordenadas del centro de curvatura son:

$$x_0 = x_B + (\text{sen } \theta/\kappa); \quad z_0 = \zeta - (\text{cos } \theta/\kappa)$$

Finalmente, al calcular  $d$  en la sección ortogonal al fondo en el punto B, las coordenadas del punto A sobre la superficie libre resultan:

$$x_A = x_B - d \text{sen } \theta; \quad z_A = \zeta + d \text{cos } \theta. \quad \text{Dicho punto y el centro de curvatura se alojan sobre la recta de ecuación (4.33).}$$

Cuando  $\kappa \neq 0$ , la ecuación (4.7b) ( $H = \text{constante}$ ) permite determinar el perfil de la superficie libre del flujo. Para ello, con  $\chi = \kappa d$ , el paréntesis en dicha ecuación resulta

$$\gamma(\chi) = A + B \chi \quad (4.35)$$

donde

$$A = \frac{2g(H - z)}{q^2 \kappa^2} \quad (4.36)$$

$$B = - \frac{2g \text{cos } \theta}{q^2 \kappa^3} \quad (4.37)$$

$$\gamma(\chi) = [(1 - \chi) \ln(1 - \chi)]^2 \quad (4.38)$$

La solución gráfica de la ecuación (4.35) se muestra en la figura 4.3 para los valores:  $\kappa > 0$  en el primer cuadrante del sistema coordenado  $[\chi, \gamma(\chi)]$  y  $\kappa < 0$  en el segundo. Las rectas de pendiente  $\pm B$  intersecan a la curva de ecuación (4.38) en dos puntos de cada cuadrante:  $\chi^*$  en régimen subcrítico;  $\chi_0^*$  en supercrítico; pero sólo el punto  $\chi_0^*$  corresponde a la condición crítica. Para determinarla se obtiene la derivada de la ecuación (4.38), como sigue

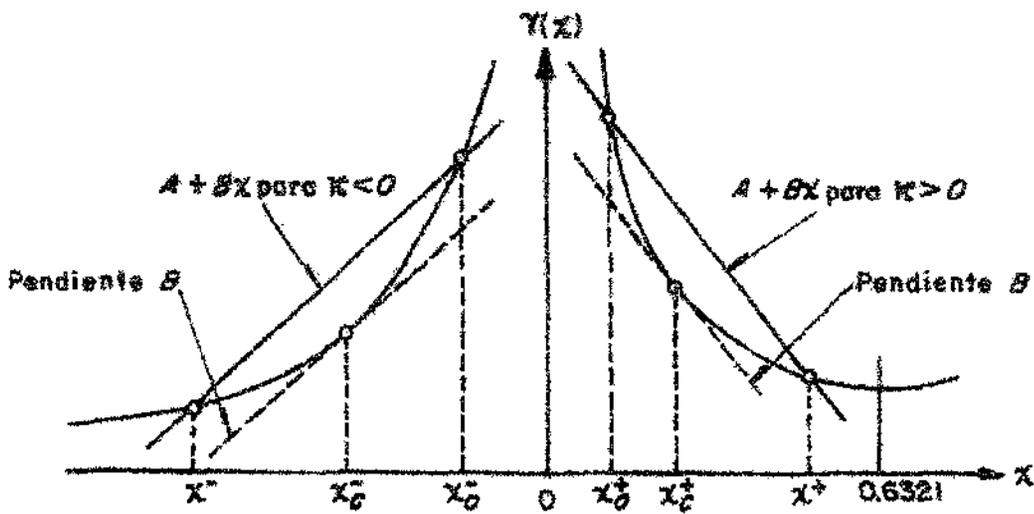


Figura 4.3. Solución de  $y(x) = A + Bx$ ;  $x^\pm$  subcrítico,  $x_c^\pm$  crítico,  $x_0^\pm$  supercrítico. Canal rectangular.

$$\frac{dy(x)}{dx} = -2 [(1-x) \ln(1-x)]^{-3} \left[ -\frac{(1-x)}{(1-x)} - \ln(1-x) \right]$$

O bien

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{2 [1 + \ln(1-x)]}{[(1-x) \ln(1-x)]^3} \quad (4.39)$$

Cuando  $dy(x)/dx = 0$ , la solución es  $x = 0.6321$ , como se indica en la figura 4.3, y corresponde al mínimo de  $y(x)$ .

Al sustituir la ecuación (4.2b) en la definición de número de Froude ( $F = \mathcal{F}$ ), con  $x = \kappa d$  resulta

$$\mathcal{F}_c = \frac{v_0}{\sqrt{g d \cos \theta}} = -\frac{q \kappa / \ln(1-x)}{\sqrt{g d \cos \theta}} \quad (4.40)$$

y  $\mathcal{F}_c$  está definido por el término a la derecha de la ecuación (4.12). Es posible establecer entonces que cuando  $x > 0$ , la condición  $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_c$  equivale a

$$\frac{[-q \kappa / \ln(1-x)]}{\sqrt{g d \cos \theta}} \leq \left[ \frac{(1-x)^3 \ln(1-x)}{x [1 + \ln(1-x)]} \right]^{1/2}$$

O bien, con los valores recíprocos de los términos y con  $d = \chi/\kappa$ , la desigualdad también es

$$\frac{2g \cos \theta}{q^2 \kappa^3} \chi \geq - \frac{2 [1 + \ln (1 - \chi)]}{[(1 - \chi) \ln (1 - \chi)]^3} \chi$$

O bien, de las ecuaciones (4.37) y (4.39) se obtiene

$$- B \chi \geq \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \chi$$

Siendo el mismo desarrollo cuando  $\chi > 0$ , la condición  $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_c$  equivale a

$$- B \chi \leq - \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \chi$$

De este modo, cuando se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} \chi > 0 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} \leq \mathcal{F}_c \Leftrightarrow -B \geq - \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \\ \mathcal{F} \geq \mathcal{F}_c \Leftrightarrow -B \leq - \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \end{array} \right. \\ \chi < 0 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} \leq \mathcal{F}_c \Leftrightarrow B \geq \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \\ \mathcal{F} \geq \mathcal{F}_c \Leftrightarrow B \leq \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |B| \geq \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \\ |B| \leq \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \end{array} \right.$$

hay equivalencia en las condiciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{|B|} \left| \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \right| \leq 1 \\ \mathcal{F} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{|B|} \left| \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \right| \geq 1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

para obtener el valor de  $\chi_c$ , pero éste no ubica a la sección crítica.

Al sustituir la ecuación (4.38) en la (4.7b), la energía total se expresa en la forma

$$H = \zeta + d \cos \theta + \gamma(\chi) \frac{q^2 \kappa^2}{2g} \quad (4.42)$$

En una misma sección  $\kappa$  es constante e independiente de  $d$ , pero  $\theta$  es función de  $x$  y la derivada resulta

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} + \cos \theta \frac{dd}{dx} - d \sin \theta \frac{d\theta}{dx} + \gamma(\chi) \frac{q^2 \kappa}{g} \frac{d\kappa}{dx} + \frac{q^2 \kappa^2}{2g} \frac{d\gamma(\chi)}{dx} \quad (4.43)$$

Pero con:  $\kappa = 1/R$ ;  $R d\theta = \sqrt{(dx)^2 + (d\zeta)^2} = dx \sqrt{1 + (dz)^2 / (d\zeta)^2}$ ; se tiene

$$d \sin \theta \frac{d\theta}{dx} = d \sin \theta \kappa \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \chi \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \chi \tan \theta = \chi \frac{d\zeta}{dx}$$

Además

$$\frac{dd}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\chi}{\kappa} \right) = \frac{1}{\kappa} \frac{d\chi}{dx} - \frac{\chi}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{dx}$$

$$\frac{d\gamma(\chi)}{dx} = \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dx}$$

Al sustituir y agrupar términos en la ecuación (4.43), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} = & (1 - \chi) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ 1 + \frac{q^2 \kappa^3}{2g \cos \theta} \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \right] \frac{\cos \theta}{\kappa} \frac{d\chi}{dx} \\ & + \frac{q^2 \kappa}{2g} \left[ 2 \gamma(\chi) - \frac{2g \cos \theta}{q^2 \kappa^3} \chi \right] \frac{d\kappa}{dx} \end{aligned}$$

Pero de las ecuaciones (4.35) a (4.37), resulta

$$\frac{dH}{dx} = (1 - \chi) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ 1 - \frac{1}{B} \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi} \right] \frac{\cos \theta}{\kappa} \frac{d\chi}{dx} + \frac{q^2 \kappa}{2g} [2A + 2B\chi + B\chi] \frac{d\kappa}{dx}$$

Cuando  $dH/dx = 0$ ,  $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}$ , pero según la ecuación (4.41) equivale a que  $(1/B) (d\gamma(\chi)/d\chi) = 1$ , por tanto, se tiene que

$$(1 - \chi) \frac{d\zeta}{dx} + \frac{q^2 \kappa}{2g} (2A + 3B\chi) \frac{d\kappa}{dx} = 0 \quad (4.44)$$

es la expresión que permite localizar la sección crítica. Para perfiles convexos de fondo simétrico,  $d\zeta/dx = dx/dx = 0$  en la sección de simetría, de manera que la ecuación (4.44) se satisface trivialmente; es decir, el flujo crítico ocurre en la sección de simetría del perfil del fondo. Para perfiles convexos asimétricos, la sección crítica se desplaza aguas abajo de la cresta.

La distribución de la presión en cualquier sección ortogonal al fondo se obtiene de la ecuación (4.5).

### 4.3.2 Resultados experimentales

Sivakumaran *et al* (1983) realizaron una serie de experimentos sobre dos modelos de fondo curvo; el primero formado con un perfil simétrico que seguía la geometría de la curva de distribución normal y el otro con un perfil asimétrico. Las tomas piezométricas se instalaron en el fondo sobre el eje del canal, con espaciamiento uniforme y en dirección perpendicular a dicho fondo. Como se muestra en la figura 4.4, la diferencia del nivel piezométrico registrado entre el flujo permanente y la condición sin flujo dió la carga de presión  $p_o/g\rho$ , donde el nivel de referencia considerado correspondió a la presión atmosférica  $p_a = 0$ .

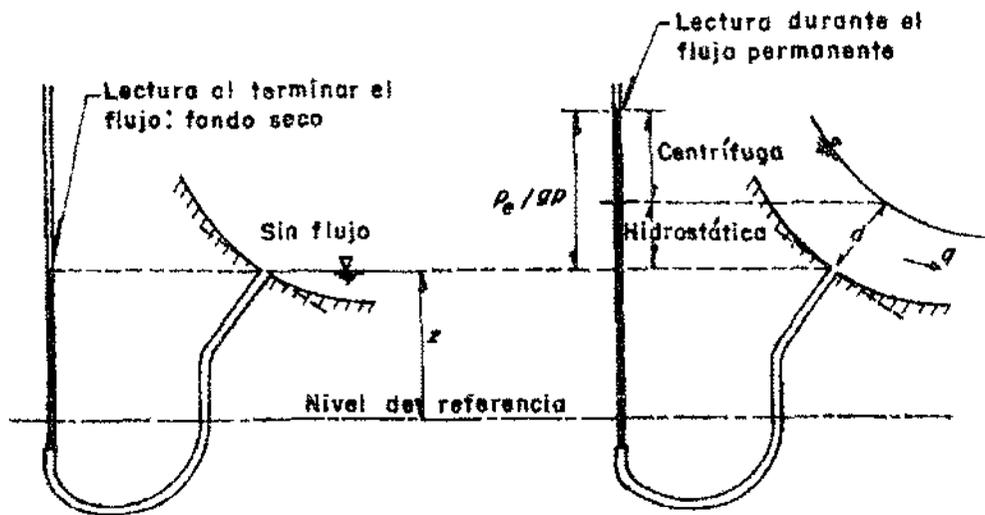


Figura 4.4. Lectura de la presión en el fondo

Los autores expresaron que el desarrollo de la capa límite turbulenta desde la cresta hacia aguas abajo no significó alteraciones en el tirante del flujo para la rugosidad de material empleado en la construcción del fondo del modelo.

En las pruebas resultó más sencillo medir sobre un sistema coordinado de eje  $x$  horizontal y  $z$  vertical, y la predicción del perfil teórico tuvo que efectuarse para el mismo sistema. Como se muestra en la figura 4.5, el tirante vertical  $h$  en el punto de medición piezométrica de abscisa  $x_1$  da las coordenadas experimentales de la superficie libre  $(x_{e1}, z_{e1} = \zeta_1 + h_{e1})$ . Con ellas es posible calcular la posición teórica de la superficie libre  $(x_{t1}, z_{t1})$  sobre la misma normal al fondo que pasa por el punto  $(x_{e1}, z_{e1})$ , como se expone a continuación.

La ecuación de una recta ortogonal al fondo en el punto  $(x, z = \zeta)$  está dada por la ecuación (4.33), la cual se expresa ahora en la forma

$$\frac{\zeta - z_{e1}}{x - x_{e1}} \frac{d\zeta(x)}{dx} + 1 = 0 \quad (4.45)$$

Ésta se ha obtenido en términos de las coordenadas del punto  $(x_{e1}, z_{e1})$  sobre el perfil experimental del flujo y sirve de base para localizar el punto  $(x_2, \zeta_2)$  sobre la normal al fondo que pasa por dicho punto. En éste, la ecuación (4.34) sería

$$\kappa_2 = \cos^3 \theta \frac{d^2 \zeta(x_2)}{dx^2} \quad (4.46)$$

El tirante experimental y  $\chi$  en el punto 2 están dados por

$$d_{e2} = [(x_1 - x_2)^2 + (z_{e1} - \zeta_2)^2]^{1/2} \quad (4.47)$$

$$\chi_{e2} = \kappa_2 d_{e2} \quad (4.48)$$

El valor de  $\chi_t$  es el teórico obtenido de la ecuación (4.38), es decir

$$\gamma(\chi_t) = A_2 + B_2 \chi_t \quad (4.49)$$

donde  $A_2 = 2g(H - \zeta_2)/(g \kappa_2)^2$  y  $B_2 = -2g \cos \theta_2 / g^2 \kappa_2^3$ . El tirante teórico vale

$$d_{t2} = \chi_t / \kappa_2 \quad (4.50)$$

de modo que la posición de la superficie libre teórica está dada por

$$\begin{aligned} x_t &= x_2 - d_{t2} \sin \theta_2 \\ z_{t1} &= \zeta_2 + d_{t2} \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

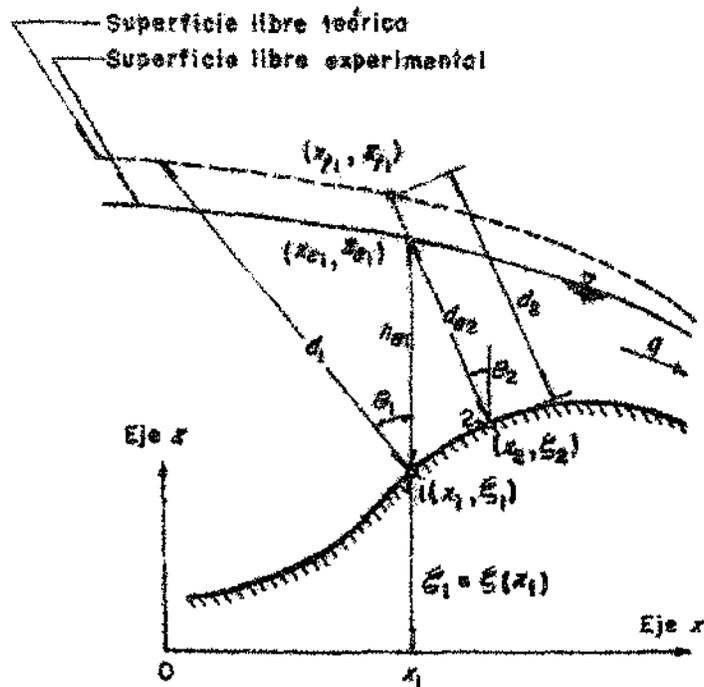
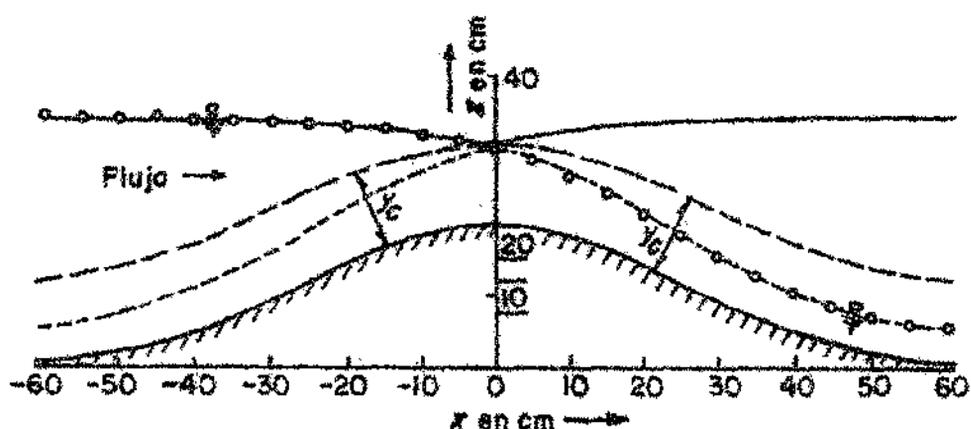


Figura 4.5. Tirantes teóricos y experimentales

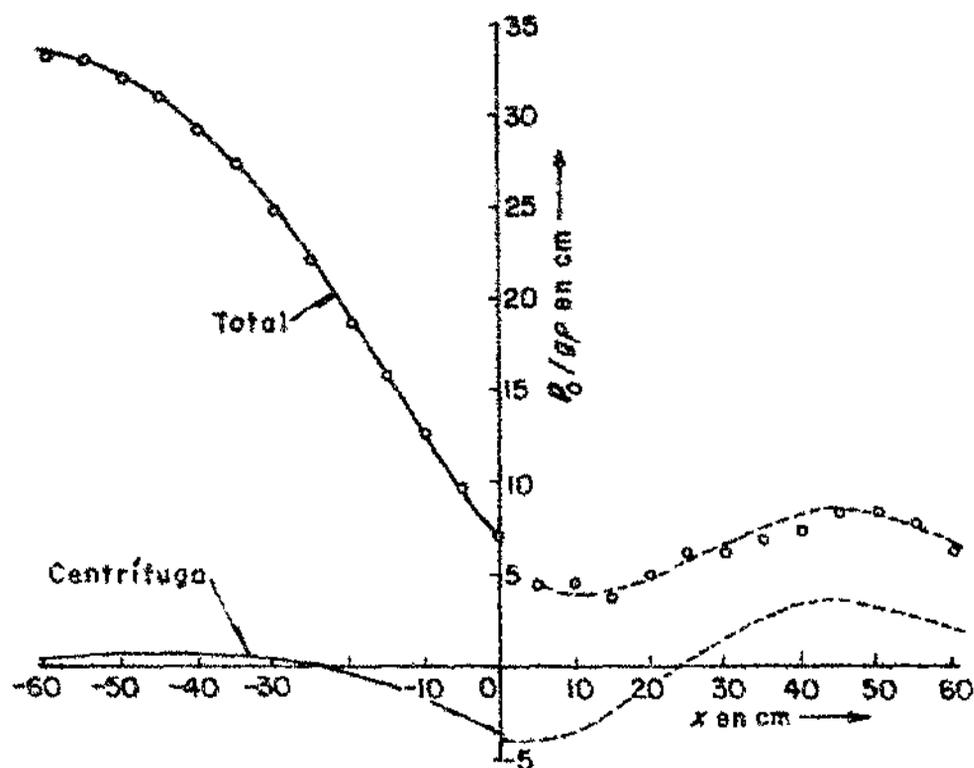
El método de iteración de Newton-Raphson se usó para resolver las ecuaciones (4.45) y la ecuación del perfil para localizar el punto de coordenadas  $(x_2, \zeta_2)$ , y con la (4.49) se obtuvo  $\chi_1$ .

### 4.3.3 Conclusiones

Las figuras 4.6a y b muestran las curvas teóricas y los puntos experimentales para la superficie libre y la presión en el fondo sobre el perfil simétrico, ambas para el gasto máximo. Los valores teóricos del perfil de la superficie libre corresponden a régimen subcrítico antes de la cresta y supercrítico después de ella, como es lo propio. La concordancia es excelente no obstante que la superficie libre teórica para dicho gasto queda ligeramente abajo de los puntos experimentales en la región subcrítica; esto se debe probablemente a lo inadecuado de la aproximación de flujo poco profundo en una región donde es profundo. El flujo crítico ocurre exactamente sobre la cresta, como se predijo con la ecuación (4.44). En la región subcrítica cerca de la cresta los puntos experimentales quedan debajo de la superficie libre teórica en la medida que el flujo se acelera en una región de transición de flujo subcrítico a supercrítico.



a) Perfil de la superficie libre



b) Presión en el fondo

Figura 4.6. Flujo permanente sobre el perfil simétrico para  $q = 1119.7 \text{ cm}^3/\text{s}$  y  $h = 34.8 \text{ cm}$ . Canal rectangular. De la teoría: \_\_\_\_\_ subcrítico; ..... crítico; -.-.-.-.- supercrítico. Experimental:  $\circ$ . Según Sivakumaran et al (1983).

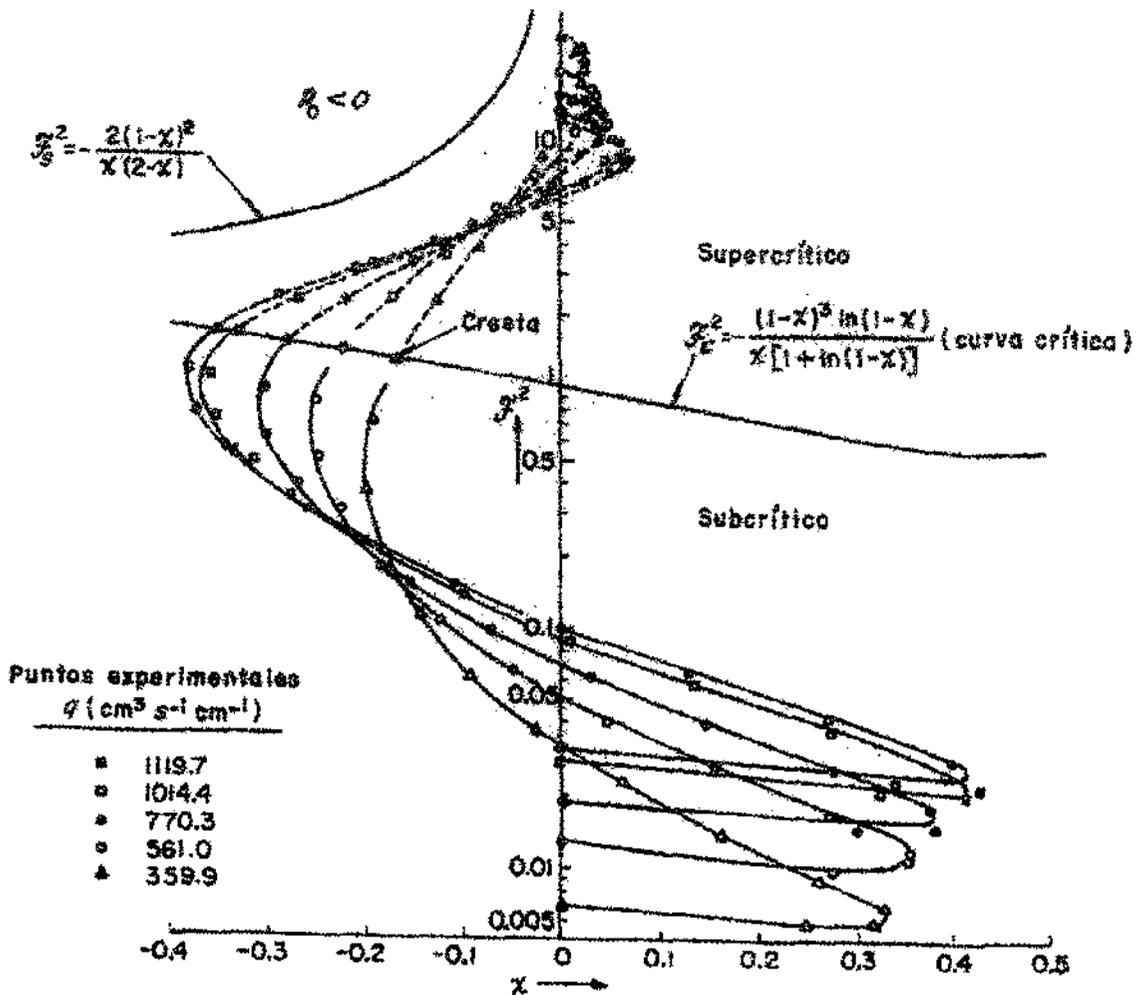


Figura 4.7. Número de Froude local: teórico y experimental, contra curvatura adimensional para el perfil simétrico. Canal rectangular. Según Sivakumaran *et al* (1983).

Los resultados experimentales para gastos menores tuvieron mejor concordancia con los teóricos en la región subcrítica cerca de la cresta, pero para los más bajos no existe solución de la ecuación (4.35) antes y después de la cresta. Esto se visualiza mejor en la figura 4.7, donde se presentan las curvas de variación teórica del número de Froude elevado al cuadrado y la curvatura adimensional  $\chi$  (ecuación 4.40 y las soluciones de la 4.35), así como los puntos experimentales. Sin embargo, las intersecciones de las curvas con la que corresponde al flujo crítico (ecuación 3.10) coincidieron con los experimentales sobre la cresta en todos los casos. Los autores atribuyeron la discontinuidad del perfil a que el gran cambio en el gradiente de la velocidad en la región de transición propició que las suposiciones básicas de flujo poco profundo, así como las de flujo no viscoso e irrotacional, fueran cuestionables en dicha región.

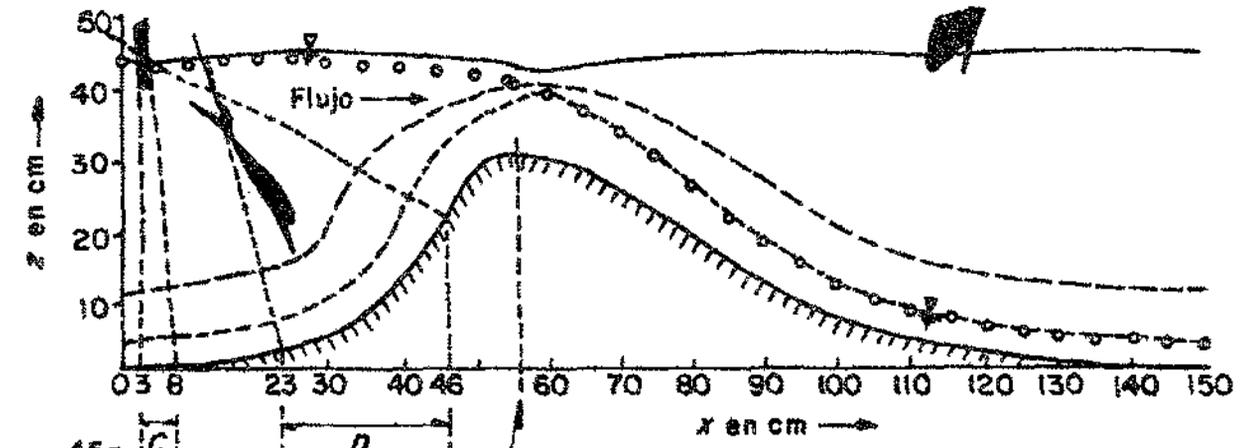
Los valores extremos de  $\chi$  para los que tuvieron  $q$  y  $H$  en las pruebas con el perfil simétrico quedaron dentro del intervalo sugerido por Dressler:  $-0.85 \leq \chi \leq 0.5$ . La presión total en el fondo se predice con seguridad principalmente aguas arriba, donde la presión centrífuga es pequeña. Los errores en la curvatura local y la turbulencia resultante por la presencia de los piezómetros, pudieron ser la causa de errores sistemáticos en los perfiles de la presión medida en el fondo de la región supercrítica aguas abajo de la cresta.

Para probar la validez del intervalo propuesto por Dressler, los autores diseñaron y probaron un perfil asimétrico con distintos gastos. Los resultados se presentan en la figura 4.8 donde se observa que la curva teórica de presión en el fondo no es continua en la región de la cresta. La zona de transición en que el flujo cambia de subcrítico a supercrítico es más extensa en este caso y aparentemente el flujo crítico no ocurre en la cresta sino ligeramente aguas abajo de ella, como se esperaba. Los valores extremos de  $\chi$  quedaron fuera del intervalo sugerido por Dressler, sobre todo los negativos. La presión en el fondo no se pudo predecir para ciertos intervalos de  $x$  con el gasto máximo debido a que los valores de  $\chi$  quedaron fuera del límite teórico  $\chi = 0.6321$ . Las áreas sombreadas en la figura 4.8 muestran los dominios donde no existe solución teórica y la predicción de la superficie libre no es única para ciertos valores de  $x$  cerca del origen. Por ejemplo, las rectas ortogonales al fondo, para  $x$  entre los intervalos  $C$  y  $D$ , dan la superficie libre marcada por  $A$ , y para  $x$  más allá del intervalo  $D$ , dan a  $B$ . Esto sería un *cruce de normales* ya que corresponden a normales al fondo que se cruzan unas con otras. Si el cruce de normales ocurre dentro del flujo, las normales al fondo entre las respectivas que se cruzan parecen redundantes para predecir la superficie libre, pero son necesarias para la presión en el fondo. Si el dominio en que no hay solución ( $\chi \geq 0.6321$ ) no existe cruce de normales, éstas dan una tercera predicción de la superficie libre (las dos primeras son en flujo subcrítico y supercrítico). La condición del Jacobiano distinto de cero en la superficie libre, es decir

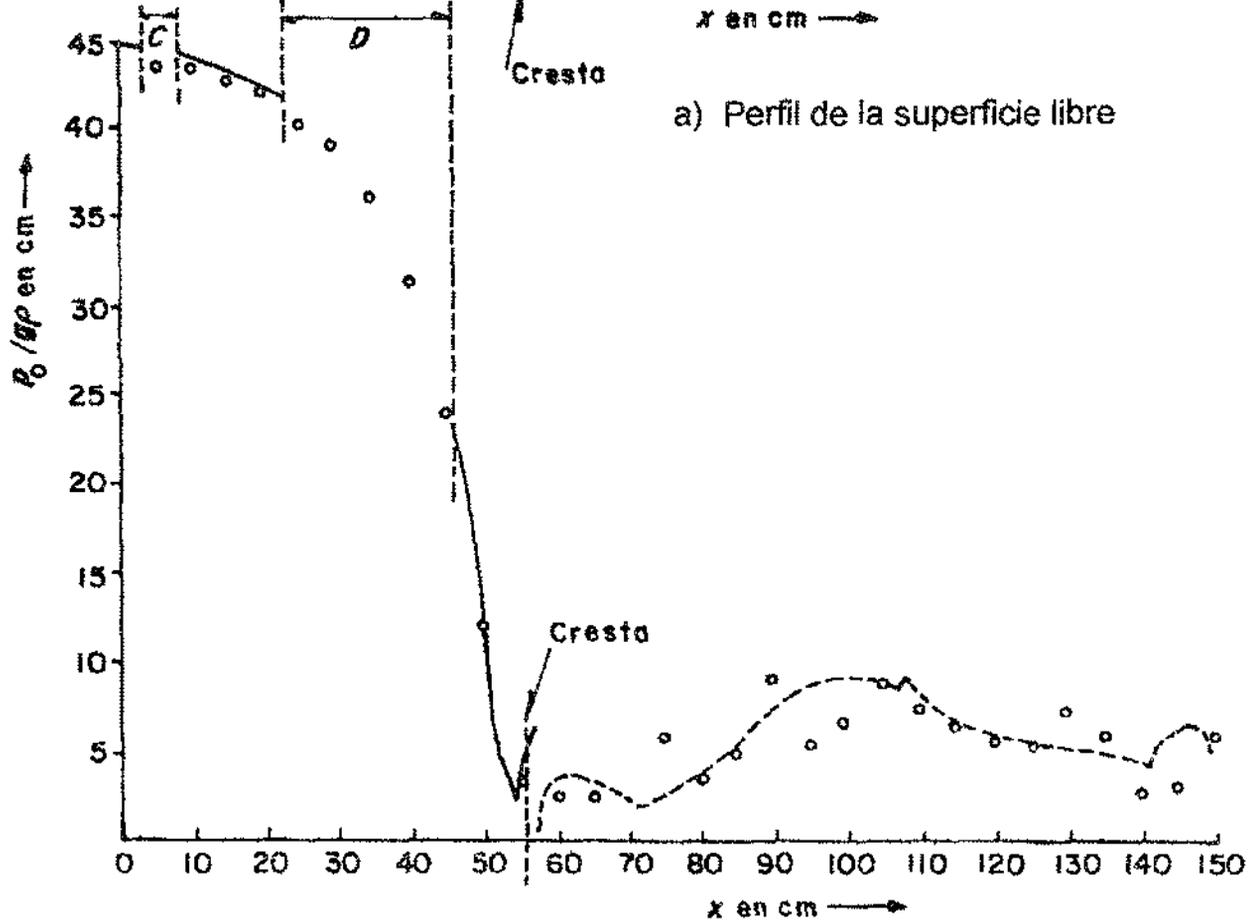
$$J_d \left( \frac{x, z}{s, n} \right) = 1 - \chi > 0$$

parece insuficiente para predecir una superficie libre única.

No existe una predicción continua de la superficie libre ni de la presión en el fondo, a través del punto de transición cerca de la cresta, como puede apreciarse en la figura 4.8. Además del error de curvatura introducido en las tomas de los piezómetros, así como otros errores de curvatura en la fabricación del modelo, produjeron probablemente grandes errores sistemáticos al medir la presión en el fondo aguas abajo.



a) Perfil de la superficie libre



b) Presión en el fondo

Figura 4.8. Flujo permanente sobre el perfil asimétrico para  $q = 1116.5 \text{ cm}^3/\text{s}$  y  $B = 44.7 \text{ cm}$ . Canal rectangular. De la teoría: — subcrítico; - - - crítico; - · - · - supercrítico. Experimental:  $\circ$ ,  $\blacksquare$  dominio donde  $n \geq \frac{0.6321}{\mu}$ . C y D intervalos en que no se pudo predecir la presión en el fondo. Según Sivakumaran *et al* (1983).

Los valores teóricos de  $\chi = \kappa d$ , comprobados con los experimentales de los perfiles simétrico y asimétrico, tuvieron buena concordancia dentro del intervalo  $-2 \leq \kappa d \leq 0.54$ , más allá del recomendado por Dressler. Asimismo, la localización del flujo crítico se predice con seguridad en ambos perfiles. Cualquier error en la curvatura dentro de la región de flujo supercrítico afecta bastante a la presión en el fondo. Cerca del punto singular o de transición las suposiciones básicas de las ecuaciones aproximadas para flujo poco profundo son cuestionables.

## 4.4 CURVAS CIRCULARES

### 4.4.1 Descripción

El perfil del fondo de un canal se diseña de modo que se ajuste a las condiciones topográficas y geológicas del terreno, mediante tramos rectos de pendiente distinta unidos por curvas verticales, cóncavas o convexas. El diseño puede también satisfacer la necesidad de lograr cambios adecuados en la dirección del flujo sobre planos verticales, como ocurre en las curvas cóncavas circulares (de curvatura constante), comúnmente empleadas al pie de un cimacio o como cubetas de lanzamiento, y también en las convexas que sirven de transición entre una pendiente subcrítica y otra supercrítica. En cualquier caso el fondo curvo obliga a que las líneas de corriente adquieran curvatura apreciable y a que haya una aceleración normal, lo cual modifica la distribución de la presión y la aparta de la hidrostática que habría en cada sección si el flujo fuese rectilíneo.

La distribución de la presión en curvas cóncavas circulares ha sido el problema que más autores han analizado, como se mencionó en el subcapítulo 1.2. En cambio, la información disponible en curvas convexas es muy escasa, excepto en los cimacios, que son curvas convexas de curvatura variable con un propósito distinto a los que se han mencionado y para las que existe mayor información,

En la mayoría de los casos analizados el flujo ocurre en un canal rectangular con el fondo de curvatura constante, por ello, la información existente es para dicha sección. El propósito de este subcapítulo es de verificar, hasta donde sea posible, la bondad o los defectos del modelo de flujo desarrollado en el caso específico de curvas circulares.

#### 4.4.2 Curvas cóncavas de transición

##### a) Antecedentes

Varios autores han obtenido soluciones analíticas para el flujo ideal permanente en curvas circulares cóncavas al pie de un cimacio, suponiendo que la energía potencial es despreciable. Entre ellos se puede mencionar a Douma (1953) y Balloffet (1962), quienes usaron una aproximación de vórtice libre; a Henderson & Tierney (1963) y también a Dobson (1967), quienes utilizaron soluciones de cómputo por diferencias finitas de las ecuaciones del flujo con potencial.

Lenau y Cassidy (1969) propusieron un método analítico sencillo basado en la existencia de un flujo bidimensional no viscoso e irrotacional en una curva circular cóncava al pie de un cimacio. En su extremo final el chorro se lanza con un ángulo de despegue distinto al que hay en la entrada de la curva. En este análisis los autores también omitieron la acción de la gravedad y obtuvieron que las variables que conducen al cálculo de la presión en el fondo de la curva dependen de su geometría y son función del tirante, de la energía al inicio y del gasto unitario.

##### b) Ecuaciones particulares

Las ecuaciones para el canal rectangular obtenidas del modelo de flujo desarrollado se ajustan a los casos particulares analizados por otros autores. Considerando un flujo irrotacional en una curva cóncava, como las mostradas en la figura 4.9, se analizan las condiciones en una sección cualquiera a partir de las que existen antes de la inicial.

En la sección inicial 0 existe la misma distribución uniforme de la velocidad que posee el flujo rectilíneo antes de ella y la energía total se obtiene de la expresión convencional:  $H = \zeta + d \cos \theta_0 + q^2/2g d_0^2$ . En cualquier otra sección localizada por el ángulo de inclinación  $\theta$ , la energía total se expresa mediante la ecuación (4.7b). Sin considerar la pérdida por fricción, ambas energías deben ser iguales, es decir

$$\zeta_0 + d_0 \cos \theta_0 + \frac{q^2}{2g d_0^2} = \zeta + d \cos \theta + [(1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d)]^{-2} \frac{\kappa^2 q^2}{2g} \quad (4.52)$$

De la geometría de la curva,  $\zeta_0 - \zeta = R (\cos \theta - \cos \theta_0)$ ; además,  $q = V_0 d_0$ , donde  $V_0$  es la velocidad media; así la ecuación anterior se convierte en

$$R (\cos \theta - \cos \theta_0) + d_0 \cos \theta_0 - d \cos \theta = \left[ \left( \frac{\kappa}{(1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d)} \right)^2 - \frac{1}{d_0^2} \right] \frac{V_0^2 d_0^2}{2g}$$

que también se escribe en la forma

$$R (\cos \theta - \cos \theta_0) + d_0 \cos \theta_0 - d \cos \theta = \left[ \left( \frac{\kappa d_0}{(1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d)} \right)^2 - 1 \right] \frac{d_0}{2} \frac{V_0^2}{g d_0}$$

Se representa por:

$$\Omega = 1 - \kappa d \quad (4.53)$$

$$a = \frac{1}{\kappa d_0} \quad (4.54)$$

$$F_0 = \frac{V_0}{\sqrt{g d_0}} \quad (4.55)$$

donde  $F_0$  es el número de Froude en la sección 0, y la ecuación anterior se convierte en

$$2a (\cos \theta - \cos \theta_0) + 2 \left( \cos \theta_0 - \frac{d}{d_0} \cos \theta \right) = \left[ \frac{1}{a^2 (\Omega \ln \Omega)^2} - 1 \right] F_0^2 \quad (4.56a)$$

Al multiplicar esta expresión por  $a^2/F_0^2$  y despejar, se obtiene

$$\frac{1}{(\Omega \ln \Omega)^2} = 2a^3 F_0^{-2} (\cos \theta - \cos \theta_0) + 2a^2 F_0^{-2} \left( \cos \theta_0 - \frac{d}{d_0} \cos \theta \right) + a^2$$

Reagrupando términos

$$\frac{1}{(\Omega \ln \Omega)^2} = 2a^3 F_0^{-2} \cos \theta \left( 1 - \frac{1}{a} \frac{d}{d_0} \right) + a^2 - 2a^2 (a - 1) F_0^{-2} \cos \theta_0 \quad (4.56b)$$

Uno de los términos se desarrolla como sigue

$$1 - \frac{1}{a} \frac{d}{d_0} = 1 - \kappa d_0 \frac{\kappa d}{\kappa d_0} = 1 - \kappa d = \Omega$$

y con

$$\alpha_\theta = 2a^3 F_0^{-2} \cos \theta \quad (4.57)$$

$$\beta_0 = a^2 - 2a^2(a - 1) F_0^{-2} \cos \theta_0 \quad (4.58)$$

Se obtiene finalmente la expresión

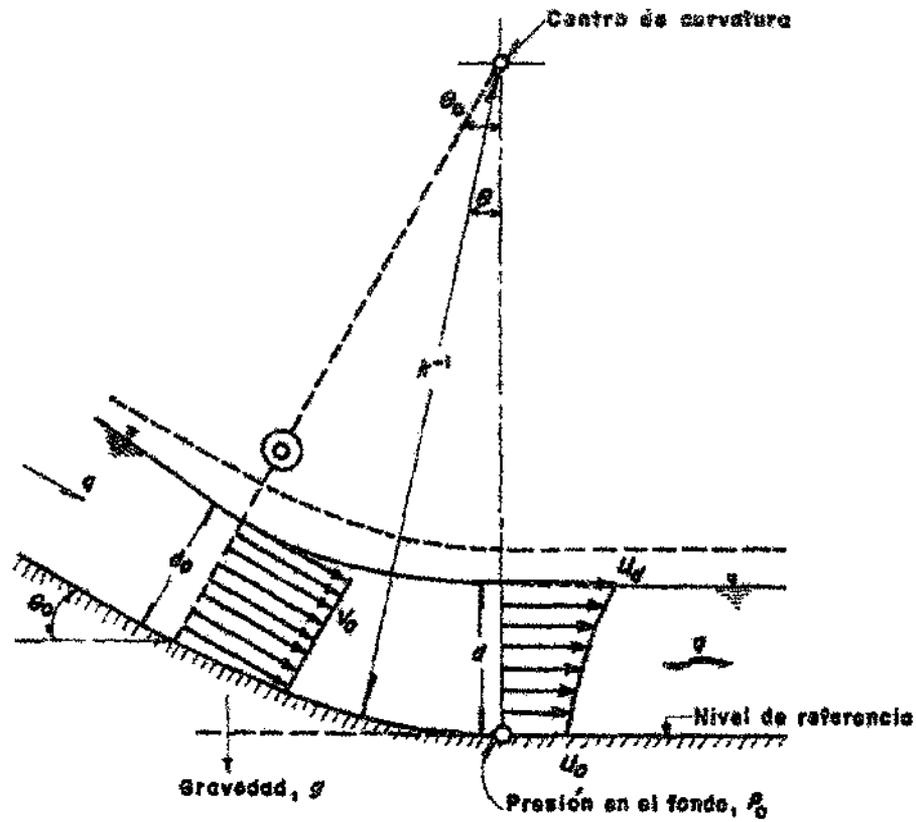
$$(\Omega \ln \Omega)^{-2} = \alpha_\theta \Omega + \beta_0 \quad (4.59)$$

En esta ecuación  $\alpha_\theta$  varía con la ubicación de la sección donde se desea calcular el tirante, pero depende finalmente de la geometría de la curva. Por ejemplo, una sección de mucho interés es a la mitad de la curva, como se muestra en la figura 4.9, por que en ella se produce el valor máximo de la presión en el fondo; en este caso,  $\theta$  sería igual a  $\theta_0/2$  y  $\alpha_\theta = 2a^3 F_0^{-2} \cos(\theta_0/2)$ . El término  $\Omega$  es el único que depende del tirante  $d$  en la sección y es posible calcularlo mediante iteraciones a partir de los valores conocidos de  $a$  y de  $F_0$  en la sección inicial. Una vez que se conoce  $\Omega$ , el tirante  $d$  se calcula con la ecuación (4.53).

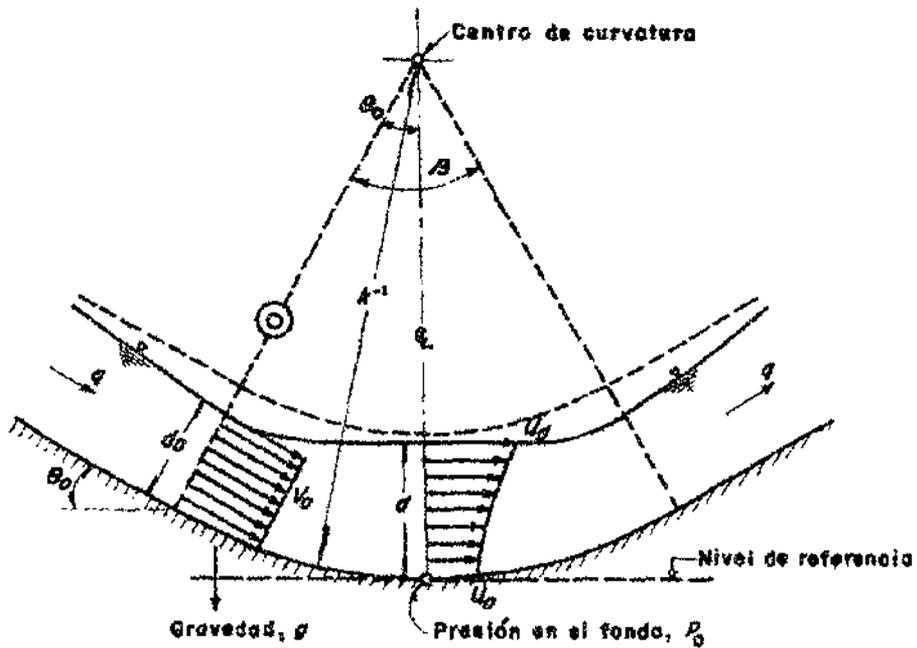
La figura 4.10 muestra la representación gráfica del primer término de la ecuación (4.59). La curva tiene un mínimo para  $\Omega = -1$  y  $a = e$  (base de los logaritmos naturales). El segundo término de la ecuación se representa en la figura mediante una línea recta de pendiente  $\alpha_\theta$  y ordenada al origen  $\beta_0$ , de manera que la raíz  $\Omega$  de la ecuación (4.59) depende de los valores que adquieran  $\alpha_\theta$  y  $\beta_0$ .

La carga de presión en el fondo de cualquier sección se obtiene de la ecuación (4.5) donde se sustituyen las expresiones (4.2b), (4.53) a (4.55) y la ecuación de continuidad ( $q$  constante), de modo que se convierten en

$$\begin{aligned} \frac{p}{g\rho} &= d \cos \theta + \left[ (1 - \kappa d)^{-2} - 1 \right] \frac{u_0^2}{2g} = d \cos \theta \\ &+ \left[ (1 - \kappa d)^{-2} - 1 \right] \left[ \frac{\kappa d_0}{\ln(1 - \kappa d)} \right] \frac{d_0}{2} \frac{q^2}{g d_0^3} \end{aligned}$$



a) Cambio de pendiente del canal a una horizontal



b) Cambio de pendiente de positiva a negativa

Figura 4.9. Curvas cóncavas

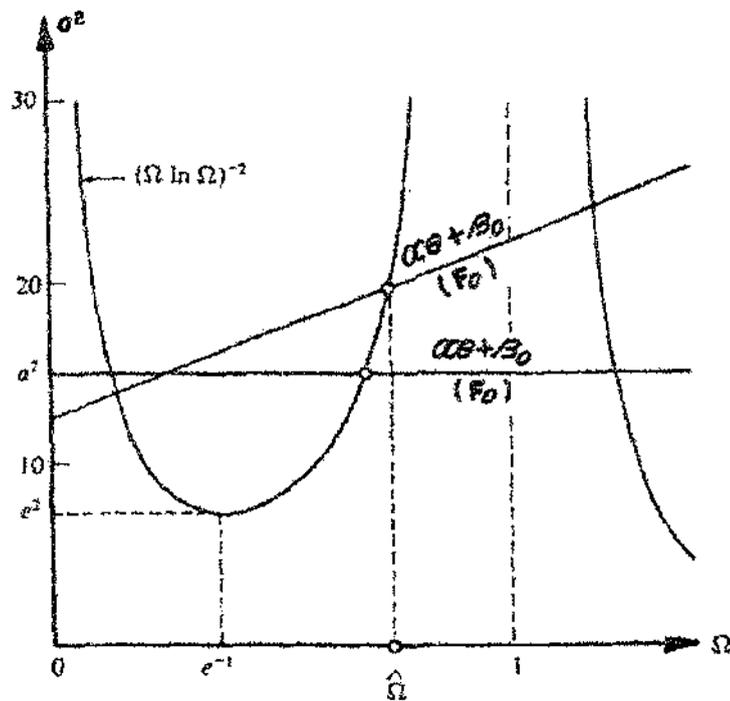


Figura 4.10. Esquema de solución de la ecuación (4.59)

Con  $V_0 = q/d_0$ , resulta

$$\frac{p}{g\rho} = d \cos \theta + \frac{1 - \Omega^2}{(a \Omega \ln \Omega)^2} \frac{d_0}{2} F_0^2 \quad (4.60)$$

que al multiplicar por  $2/d_0 F_0^2$  y simplificar, la presión  $p_0$  en el fondo de cualquier sección queda representada a través del coeficiente de presión total  $C_p$  en la forma

$$C_p = \frac{p}{(1/2) \rho V_0^2} = \frac{2a}{F_0^2} (1 - \Omega) + \frac{1 - \Omega^2}{(a \Omega \ln \Omega)^2} \quad (4.61a)$$

O bien

$$C_p = C_h + C_c \quad (4.61b)$$

donde  $C_h$  y  $C_c$  son los coeficientes de presión hidrostática y de presión centrífuga, respectivamente, definidos en la forma

$$C_h = \frac{p_h}{(1/2) \rho V_0^2} = \frac{2a}{F_0^2} (1 - \Omega) \quad (4.62)$$

$$C_c = \frac{p_c}{(1/2) \rho V_0^2} = \frac{1 - \Omega^2}{(a \Omega \ln \Omega)^2} \quad (4.63)$$

Ambos dependen de  $a$  y de  $\Omega$ , pero el primero es el único que depende de  $F_0$ . Por tanto, el no incluir el efecto de gravedad equivale a que  $C_h = 0$ , o bien, a que  $F_0 = \infty$  y con ello, que  $C_p = C_c$ . Obsérvese, sin embargo, que esto no es una limitación ya que  $C_h$  se puede agregar a *posteriori*, calculando  $d$  y la presión en el fondo de cualquier sección radial en la curva mediante las ecuaciones (4.59) y (4.60) o (4.61).

Por otra parte, eliminar la acción de la gravedad implica despreciar también el cambio de energía potencial y a su vez que se cumpla:

$\zeta_0 + d_0 \cos \theta - (\zeta + d \cos \theta) = 0$  en la ecuación (4.52). Según la (4.7a), esto equivale a

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} \frac{u_0^2}{2g} = \frac{u_d^2}{2g} \quad (4.64)$$

es decir, la velocidad  $u_d$  en cualquier punto de la superficie libre dentro de la curva se mantiene constante e igual a la velocidad  $V_0$  en la sección inicial. También, de la ecuación anterior y la (4.2b) se tiene

$$q = V_0 d_0 = \frac{u_0 d_0}{1 - \kappa d} = - \frac{\kappa d_0 q}{(1 - \kappa d) \ln (1 - \kappa d)}$$

Con  $F_0 = \infty$ ,  $\alpha_0 = 0$  y  $\beta_0 = a^2$  (figura 4.10), la ecuación (4.59) se convierte en

$$1 = - \frac{1}{a \Omega \ln \Omega} = - a \Omega \ln \Omega = a \Omega \ln \Omega^{-1} \quad (4.65a)$$

O bien

$$a = - \frac{1}{\Omega \ln \Omega} \quad (4.65b)$$

$$\Omega \ln \Omega = - \frac{1}{a} \quad (4.65c)$$

donde  $\Omega$  sólo depende de  $a$  y la raíz debe quedar en el intervalo:  $e^{-1} \leq \hat{\Omega} < 1$ , es decir, hay solución sólo si  $a = 1/\kappa d_0 \geq e$ , donde  $e = 2.7183$  es la base de los logaritmos naturales. Además, de las ecuaciones (4.57) y (4.58) se tiene también que  $\alpha_0 = 0$  y  $\beta_0 = a^2$ . Por tanto, la ecuación (4.63) se convierte en

$$C_c = \frac{p_1}{(1/2) \rho V_0^2} = 1 - \Omega^2 \quad (4.66)$$

Las ecuaciones (4.65a) y (4.66) expresan que tanto  $d$  como el coeficiente  $C_c$  son independientes de  $\theta_0$  y de  $\theta$ , sólo dependen de  $\alpha$  y son constantes en toda la curva.

### c) Conclusiones

Con objeto de comparar los resultados del modelo de flujo con los obtenidos por otros autores, se resolvieron las ecuaciones (4.59) y (4.61), haciendo  $\theta_0 = 45^\circ$  y  $\theta = \theta_0/2$  para que las condiciones del flujo correspondieran a los resultados experimentales de Henderson y Tierney (1963). Al considerar que la sección se ubica para  $\theta = \theta_0/2$ , se acepta que en ella ocurre la presión centrífuga máxima. Las curvas mostradas en la figura 4.11 corresponden al coeficiente de presión centrífuga obtenido para distintos valores de  $\alpha$  y de  $F_0$ . La curva inferior ( $F_0 = \infty$ ) representa el comportamiento del modelo de flujo cuando no se considera el efecto de gravedad, o sea, el cambio de energía potencial, cualesquiera que sean los valores de  $\theta_0$  y  $\theta$ . Se observa que los resultados teóricos coinciden con los experimentales para  $R/d_0 \geq 6$  pero fallan para valores  $R/d_0 < 6$ .

Por otra parte, se elaboró la figura 4.12 con las mismas condiciones y resultados de la anterior y en ella se muestra que el cociente  $p_c/p_h$  crece con  $d_1/d_0$  y también con  $F_0$  y  $\alpha$ , al grado que con  $F_0 > 20$ , la presión hidrostática es ya insignificante en comparación con la centrífuga, de modo similar a lo que ocurre cuando no se considera el efecto de gravedad ( $F_0 = \infty$ ).

Cuando no se incluye la acción de la gravedad en el análisis, la ecuación (4.65c) es válida y en ella se sustituyen las ecuaciones (4.53) y (4.54), además de  $\kappa = 1/R$ . Resulta así

$$\left(1 - \frac{d}{R}\right) \ln \left(1 - \frac{d}{R}\right) = -\frac{d_0}{R}$$

que también es

$$\frac{d}{R} \left(1 - \frac{d}{R}\right) \ln \left(1 - \frac{d}{R}\right) = \frac{d_0}{R} \quad (4.67a)$$

O bien, de acuerdo con la ecuación (4.16), se simplifica a

$$\frac{d}{R} \lambda = \frac{d_0}{R} \quad (4.67b)$$

de la cual se deduce que el tirante  $d$  dentro de la curva es mayor que en el inicio, ya que el coeficiente de curvatura es  $\lambda \leq 1$ . Cuando  $d/R = 0.02$ ,  $\lambda \approx 0.99$  y  $d/R \approx d_0/R$ .

En ausencia de la gravedad, la ecuación (4.66) resulta

$$C_c = 1 - \left(1 - \frac{d}{R}\right)^2 = 1 - \left[1 - 2 \frac{d}{R} + \left(\frac{d}{R}\right)^2\right]$$

$$C_c = \frac{p_c}{(1/2) \rho V_0^2} = \frac{d}{R} \left(2 - \frac{d}{R}\right) \quad (4.68)$$

O bien, de la ecuación (4.67b) se tiene

$$C_c = \frac{p_c}{1/2 \rho V_0^2} = \frac{d_0}{R} \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{d_0}{R}\right) \quad (4.69)$$

Las ecuaciones (4.67) y (4.68) fueron obtenidas por Balloffet (1962) a partir de la teoría por él llamada del *vórtice irrotacional* y fue reportada también por Henderson (1966) como del *vórtice libre*.

En la ecuación (4.68b), para  $d/R \leq 0.2$ ,  $\lambda \geq 0.892574$  y el término entre paréntesis es:  $1.9897 \leq (2/\lambda - d_0/\lambda^2 R) \leq 2$ ; por tanto

$$C_c = \frac{p_c}{1/2 \rho V_0^2} \approx \frac{2 d_0}{R} = 2 \kappa d_0 \quad (4.70a)$$

O bien

$$\frac{p_c}{g\rho} \approx \frac{V_0^2 d_0}{g R} \quad (4.70b)$$

que es la solución aproximada obtenida por Douma (1953) para la presión centrífuga.

La figura 4.13 es similar a la 4.11 y fue elaborada por Henderson y Tierney (1963). Ella contiene los resultados del coeficiente de presión centrífuga máxima, obtenido mediante la teoría completa de estos dos autores para una curva como la mostrada en la figura 4.9a y dos ángulos  $\theta_0 = \pi/4$  y  $\pi/2$ . En ella se repiten los valores experimentales que aparecen en la figura 4.11, además de los resultados obtenidos con el modelo de flujo (curva para  $F_0 = \infty$ ) y los de la ecuación (4.70).

En la figura 4.13 se observa que hay mejor coincidencia entre el modelo de flujo y la curva  $\theta_c = \pi/2$ , así como con la ecuación (4.69), inclusive para valores  $R/d_0 \geq 4$ .

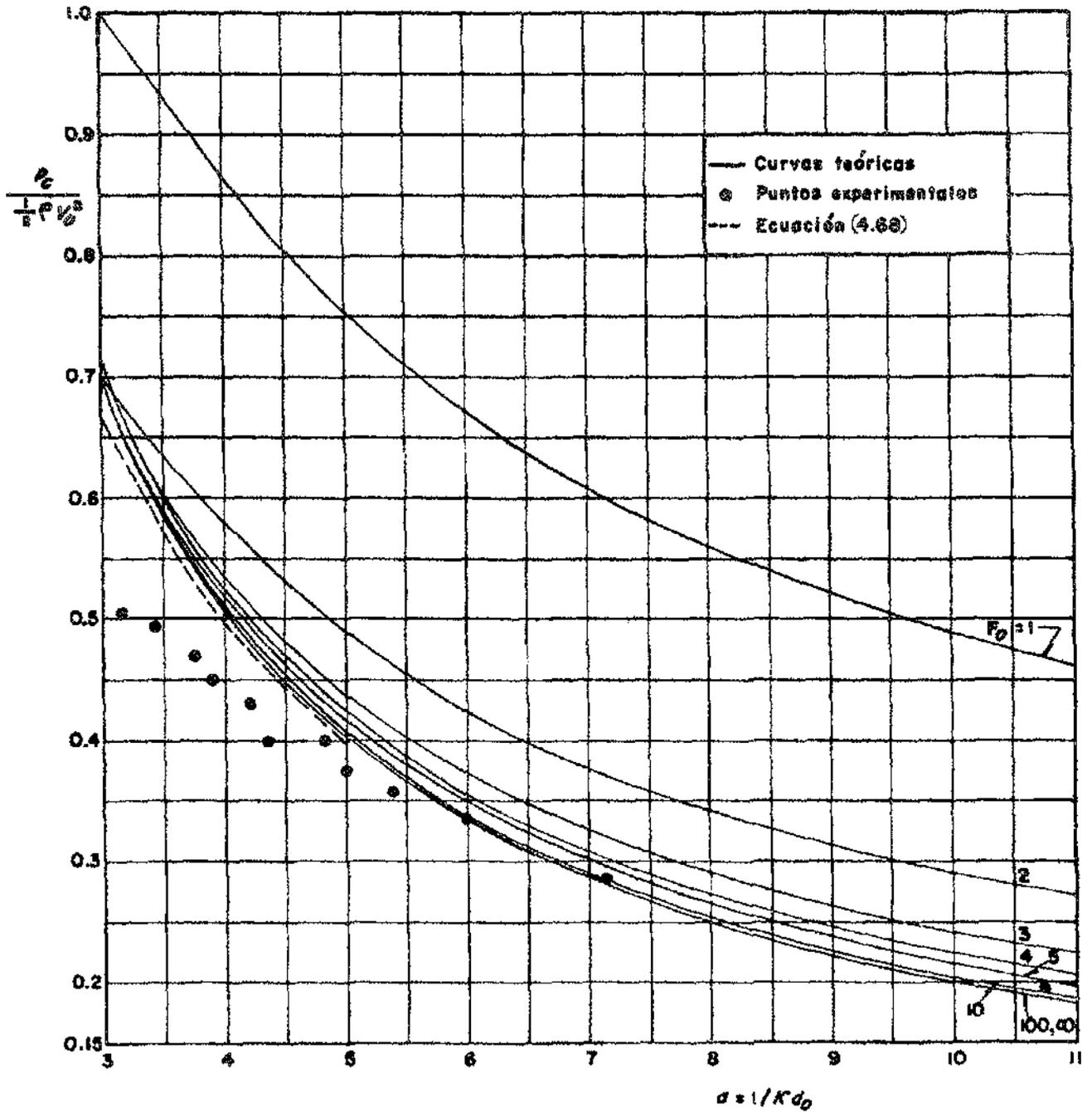


Figura 4.11. Solución de la ecuación (4.62) para  $\theta_0 = \pi/4$  y  $\theta = \pi/8$   
 Los puntos experimentales son para  $(\theta_0 = \pi/4)$ , según Henderson y Tierney (1963)

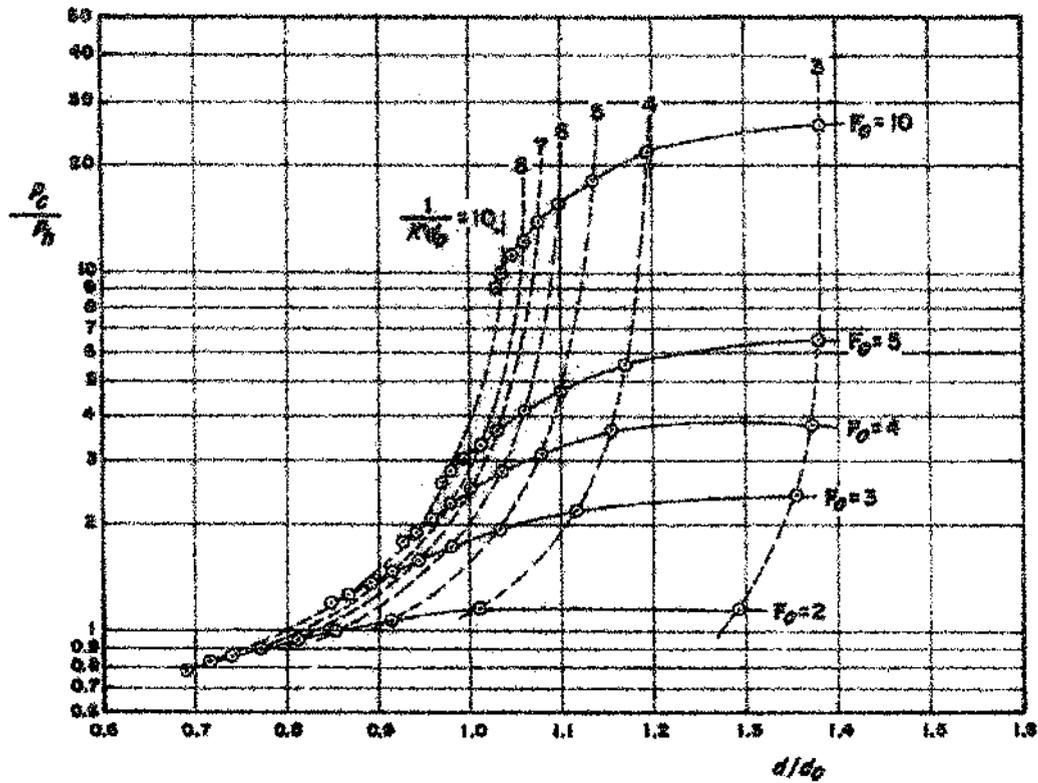


Figura. 4.12 Presión centrífuga máxima en función de  $d$ , del número de Froude  $F_0$  y de  $a = 1/kd_0$ .

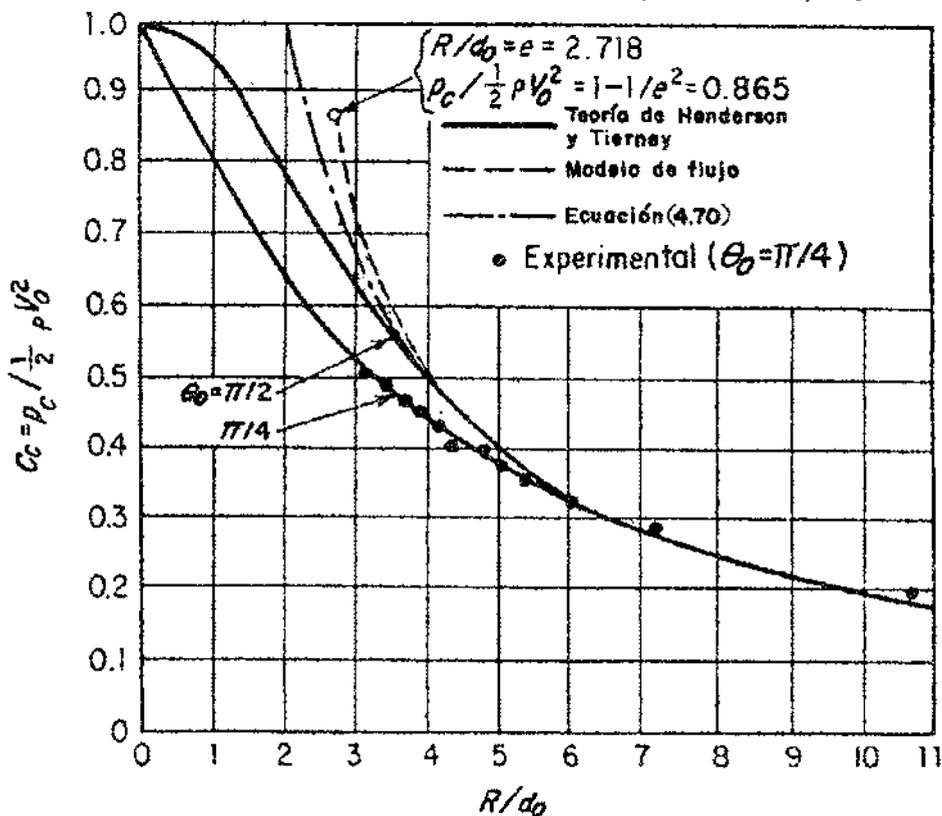


Figura 4.13. Comparación entre valores teóricos y experimentales de presión máxima, según Henderson y Tierney (1963).

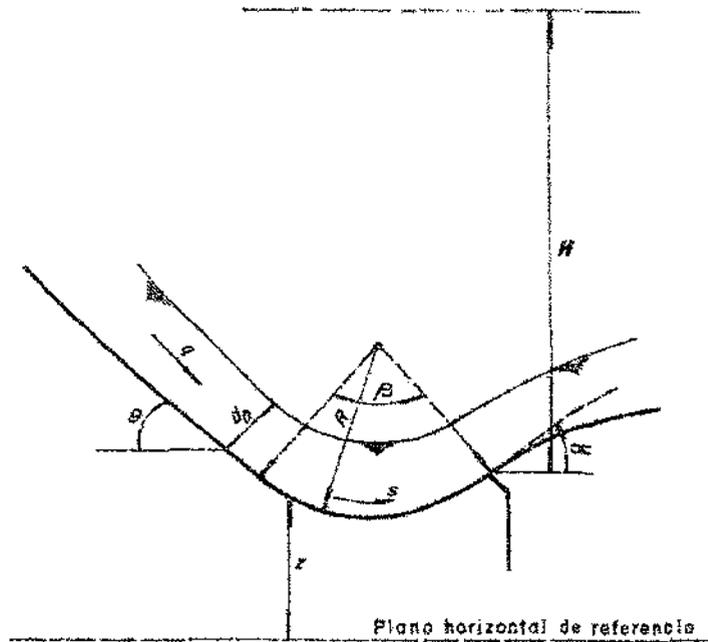


Figura 4.14. Cubeta de lanzamiento con descarga libre; simbología utilizada.

#### 4.4.3 Cubetas de lanzamiento

##### a) Antecedentes

Las cubetas de lanzamiento (figura 4.14) se utilizan para lanzar libremente el caudal proveniente de una rápida hasta un sitio donde no produzca daños a otras estructuras, incluyendo la propia cubeta. También se usan para dispersar el flujo y evitar en lo posible erosiones en el fondo del cauce. Tienen normalmente la forma de una curva circular vertical, por lo cual los desarrollos presentados en las secciones 4.4.2a son aplicables a ella, excepto que en el punto en que el chorro despegar hay que satisfacer la condición de frontera de que  $p_b = 0$ . Esta condición tiene un efecto reductor de la presión en una distancia del orden de 1.2 a 2.3 veces el tirante, aguas arriba del punto de despegue. Los desarrollos mencionados se basan en que la presión sobre la superficie libre del agua en la curva es la atmosférica. Cuando el chorro queda sumergido por el nivel del agua en el canal de salida (figura 4.15a), la carga de presión en la línea de corriente superior de la sección vertical de la cubeta no es la atmosférica, sino la que impone el nivel del agua en dicho canal, es decir,  $p_u/g\rho = h_2$ , por tanto la carga de presión en el fondo se obtiene de la ecuación (4.60), pero se suma el valor de  $h_2$ . En la figura 4.15b se muestra la distribución de la presión con descarga libre y sumergida.

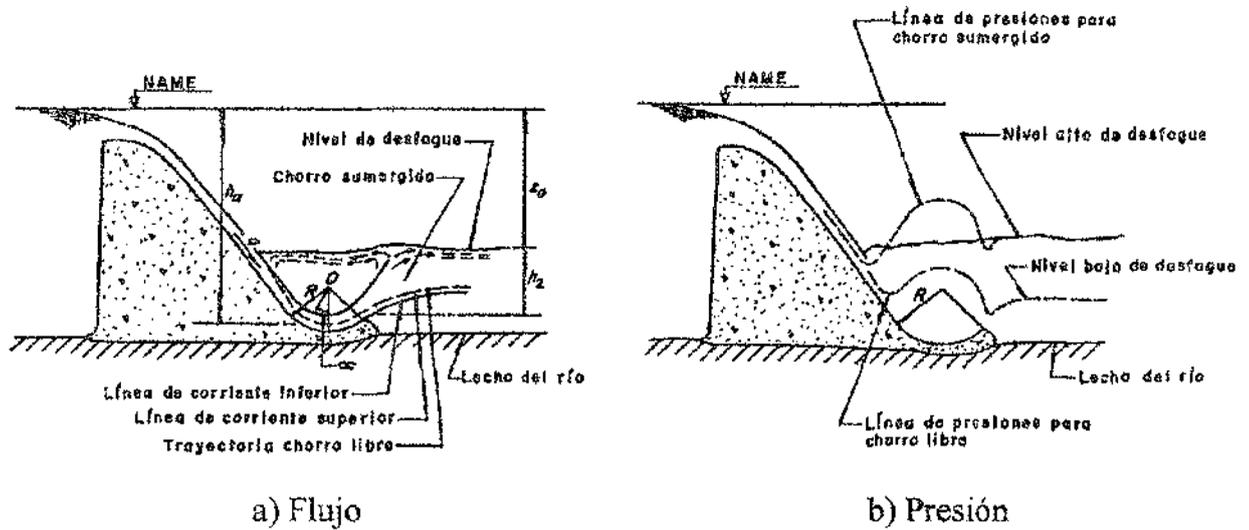


Figura 4.15. Características del funcionamiento hidráulico de una cubeta con descarga sumergida.

Debido a las razones mencionadas, se han desarrollado métodos específicos para el análisis de la distribución de la presión en una cubeta de lanzamiento con descarga libre. Un buen resumen fue presentado por Camargo y Franco (1986).

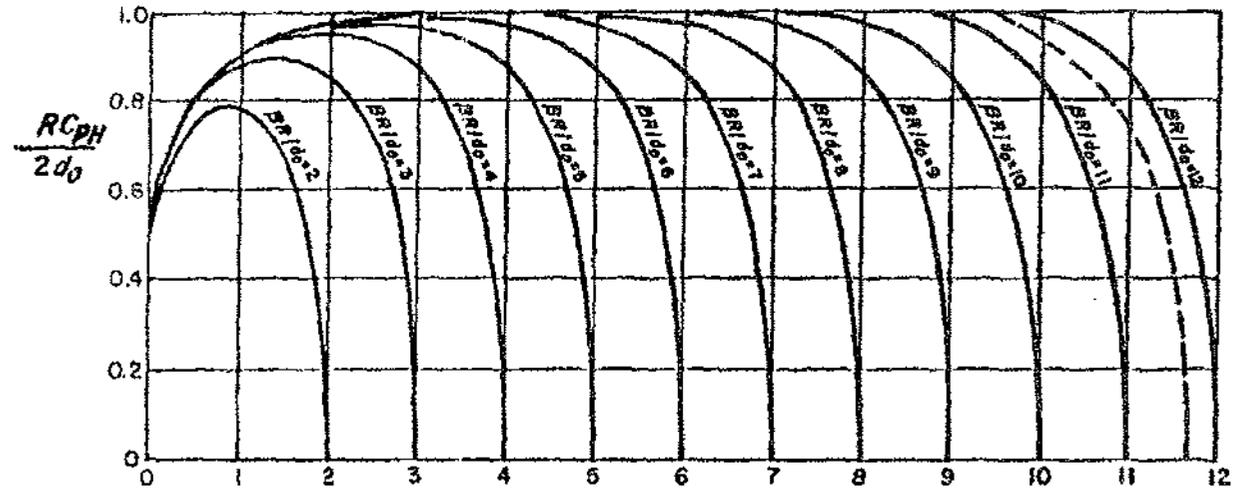
Lenau y Cassidy (1969) propusieron un método analítico basado en la existencia de un flujo bidimensional, no viscoso e irrotacional, donde no se considera la acción de la gravedad. El flujo fue descrito a través de un potencial complejo cuya solución numérica se muestra en la figura 4.16a, donde se relacionan los parámetros adimensionales  $RC_{PH}/2d_0$  y  $s/d_0$ , que permiten conocer la presión que el flujo ejerce a lo largo de la cubeta según la simbología de la figura 4.14. Para ello, los parámetros anteriores en la sección de despegue valen:  $s/d_0 = \beta R/d_0$  y  $RC_{PH}/2d_0 = 0$ , por quedar el fondo en contacto con la atmósfera. Con estos valores se obtiene un punto en el eje horizontal de la figura 4.16a que identifica la curva con la que se valúa el coeficiente adimensional  $C_{PH}$  para otros puntos; la posición de la curva está dada por

$$\frac{s}{d_0} = \frac{(\beta - \phi) R}{d_0} \quad (4.71)$$

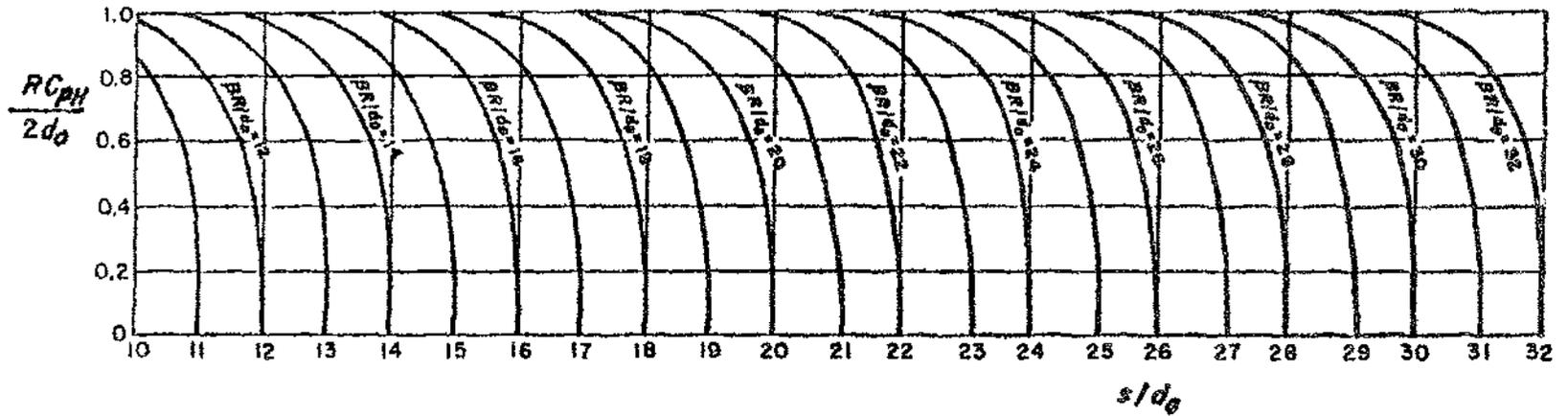
Con el valor de  $s/d_0$  correspondiente a cada sección y con la curva seleccionada, se determina el valor de  $RC_{PH}/2d_0$  y como  $C_{PH} = p_c/g\rho H$ , la presión centrífuga en el punto deseado se obtiene a partir de  $H$ , que es el desnivel entre la línea de energía y la sección donde finaliza la cubeta. La velocidad y el tirante en la sección inicial se pueden aproximar con las expresiones:

$$V_0 = \sqrt{2g H} \quad (4.72)$$

$$d_0 = \frac{q}{\sqrt{2g H}} \quad (4.73)$$



a) Parte propuesta por Lenau-Cassidy (1969)



b) Ampliación propuesta por Prasad (1984)

Figura 4.16. Presión en el fondo de una cubeta deflectora.

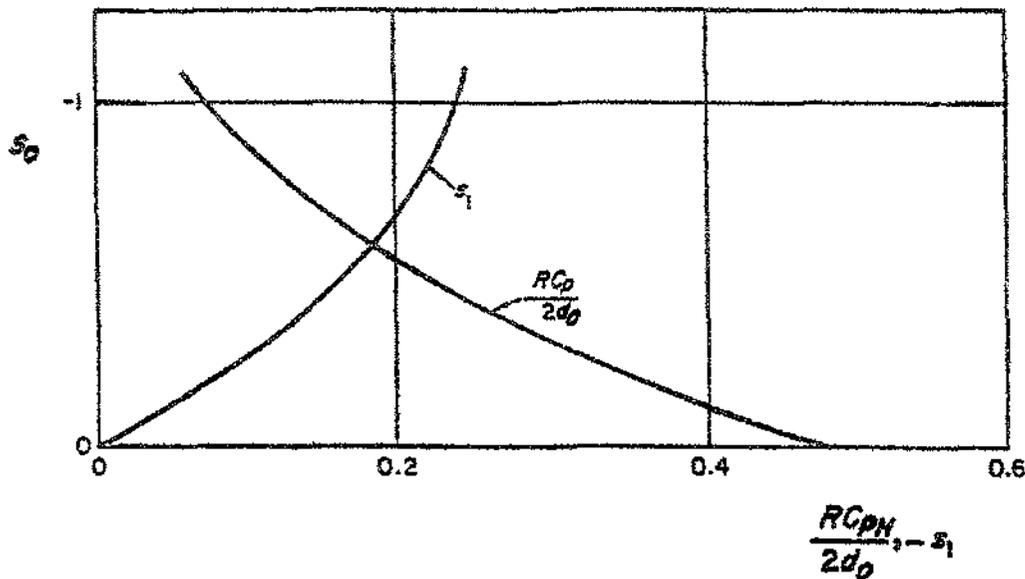


Figura 4.17. Cálculo de la presión en el fondo antes de la cubeta deflectora, según Lenau y Cassidy (1969).

La presión centrífuga en el fondo aguas arriba de la cubeta deflectora se obtiene con ayuda de la figura 4.17 al suponer diferentes valores de  $s_0$  y obtener los correspondientes a  $s_1$  y  $RC_{PH}/2d_0$ ; con ello se calculan los valores de  $s/d_0 = s_0 - (s_1 d_0/R)$ , así como los de  $C_{PH}$ . De esta manera se obtiene la distancia  $s$  y la correspondiente presión centrífuga  $p_c = g\rho H C_{PH}$ .

Los resultados de Lenau y Cassidy (1969) cubrieron valores de  $\beta R/d_0$  entre 2 y 9, pero hay casos bastante comunes donde  $\beta R/d_0$  excede de 10. Prasad (1984) extendió los resultados hasta  $\beta R/d_0 = 32$  y propuso ecuaciones más sencillas para límites todavía mayores. La figura 4.16b muestra los resultados combinados de Lenau-Cassidy y de Prasad que fueron corroborados con mediciones experimentales. Es interesante observar que la envolvente de todas las curvas de  $\beta R/d_0$  en la figura 4.14 tiene por ecuación  $RC_{PH}/2d_0 = 1$ , que es el valor máximo, además de ser independiente de  $\beta R/d_0$ . En otras palabras, cuando  $\beta R/d_0 \geq 7$ , el valor máximo de la presión centrífuga desarrollada en una cubeta deflectora no depende del ángulo central de la curva y vale

$$\left[ \frac{p_c}{g\rho} \right]_M = \frac{V_0^2 d_0}{g R}$$

donde  $V_0$  y  $d_0$  son velocidad y tirante del flujo de aproximación a la curva. La ecuación anterior coincide con la (4.70), atribuida a Douma (1953), la cual, como se ha demostrado, adquiere validez aun para valores de  $\beta R/d_0 \geq 6$ .

La teoría de Lenau-Cassidy y Prasad es más completa que la de Henderson y Tierney ya que, además del valor máximo de la presión centrífuga, proporciona la variación que ella tiene antes y después de dicho máximo, e inclusive antes de la propia curva. El máximo ocurre para valores del parámetro  $s/d_0 = \beta R/2d_0$  y después se mantiene constante cuando  $\beta R/d_0 \geq 6$ , o bien decae cuando  $2 < \beta R/d_0 < 6$ . Ambas teorías tienen el defecto de no precisar el procedimiento para calcular el tirante a lo largo de la curva.

b) *Resultados teóricos*

La equivalencia de los parámetros de Lenau-Cassidy con los aquí utilizados se presenta a continuación. Para  $\beta = \theta_0$ , se tiene que:

$$\frac{s}{d_0} = \frac{\theta R}{d_0} = \frac{\theta}{\kappa d_0} = a \theta \quad (4.74)$$

$$\frac{\beta R}{d_0} = \frac{\beta}{\kappa d_0} = a \beta \quad (4.75)$$

$$\frac{R C_{PH}}{2 d_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa d_0} \frac{P_c}{g\rho H} = \frac{a}{2} \frac{P_c}{g\rho} \frac{2g}{V_0^2} = a \frac{P_c}{\rho V_0^2} = \frac{a}{2} C_c \quad (4.76)$$

La comparación de los resultados de Lenau y Cassidy con los de Henderson y Tierney se puede hacer sólo para los dos únicos ángulos centrales que utilizaron los últimos:  $\beta = \pi/4$  y  $\beta = \pi/2$ . Por tanto, se tendría que:  $\beta R/d_0 = \pi a/4$  para el primero y  $\beta R/d_0 = \pi a/2$  para el segundo, o bien:  $a = (4/\pi) (\beta R/d_0)$  y  $a = 2 \beta R/\pi d_0$  para  $\beta = \pi/2$ . Eligiendo valores cerrados del parámetro  $\beta R/d_0$ , se leen los máximos de  $RC_{PH}/2d_0$  para cada curva y después se determina a qué valores de  $a$  corresponden. En efecto, la tabla 4.1 ilustra los cálculos realizados.

Tabla 4.1 Coeficiente de presión centrífuga de los resultados de Lenau y Cassidy y de Henderson y Tierney.

$\frac{\beta R}{d_0}$	$\frac{R C_{PH}}{2 d_0}$ de la fig. 4.16	$a = \frac{4}{\pi} \frac{\beta R}{d_0}$ para $\beta = \pi/4$	$C_c$ de la ec. 4.76	$C_c$ de la fig. 4.13 para $\theta_0 = \pi/4$	$a = \frac{2}{\pi} \frac{\beta R}{d_0}$ para $\beta = \pi/2$	$C_c$ de la ec. 4.76	$C_c$ de la fig. 4.13 para $\theta_0 = \pi/2$
2	0.79	2.546	0.621	0.565	1.273	1.241	0.9
3	0.9	3.82	0.471	0.46	1.91	0.942	0.795
4	0.96	5.093	0.377	0.38	2.546	0.754	0.69
5	0.98	6.366	0.308	0.31	3.183	0.616	0.6
6	0.99	7.639	0.259	0.26	3.82	0.518	0.52
7	1.0	8.913	0.224	0.225	4.456	0.449	0.45
8	1.0	10.186	0.196	0.19	5.093	0.393	0.395
9	1.0	11.459	0.175		5.73	0.349	0.35
10	1.0				6.366	0.314	0.31
11	1.0				7.003	0.286	0.28
12	1.0				7.639	0.261	0.26
13	1.0				8.276	0.242	0.24
14	1.0				8.913	0.224	0.22
15	1.0				9.549	0.209	0.21
16	1.0				10.186	0.196	0.19
17	1.0				10.823	0.185	0.18

### c) Conclusiones

La figura 4.18 muestra los resultados de la tabla 4.1, a los que se agregan los del modelo de flujo y los de la ecuación (4.70). De la comparación de los valores máximos de  $C_c$  obtenidos se derivan las siguientes conclusiones.

- Los resultados con la teoría de Lenau-Cassidy y de Henderson y Tierney son muy similares, al menos para los valores del ángulo  $\theta$  con que es posible la comparación.
- Los resultados del modelo de flujo coinciden con los de los autores antes mencionados (para  $\beta = \theta_0 = \pi/2$ ) y con los de la ecuación (4.70) para  $a = R/d_0 \geq 5$ . Puede decirse que el modelo de flujo predice bastante bien los resultados cuando en la cubeta hay un ángulo de deflexión total  $\beta \geq \pi/2$  y cuando  $R/d_0 \geq 4$ , valores que por otra parte son muy comunes en la práctica.
- El modelo de flujo produce mayores errores cuando  $\beta < \pi/2$ , excepto si  $R/d_0 > 6$ . Sin embargo, para  $R/d_0 \geq 5$  el error es menor del 7 por ciento.
- El modelo de flujo permite calcular el tirante a lo largo de la curva y con éste el coeficiente de presión hidrostática  $C_p$ , lo cual no es posible con ninguna de las teorías existentes. Por ello, no se puede efectuar la comparación del coeficiente de presión total, con el cual podría tenerse mayor coincidencia.

- e) En el caso de cubetas de lanzamiento es necesario considerar en el modelo de flujo la condición de frontera de que  $C_c = C_h = C_t = 0$  en la sección final de la cubeta.
- f) Las conclusiones antes expuestas confirman lo que se había mencionado al final del inciso 2.6.2, de que los mejores resultados había que esperarlos para el flujo convexo y no para el cóncavo

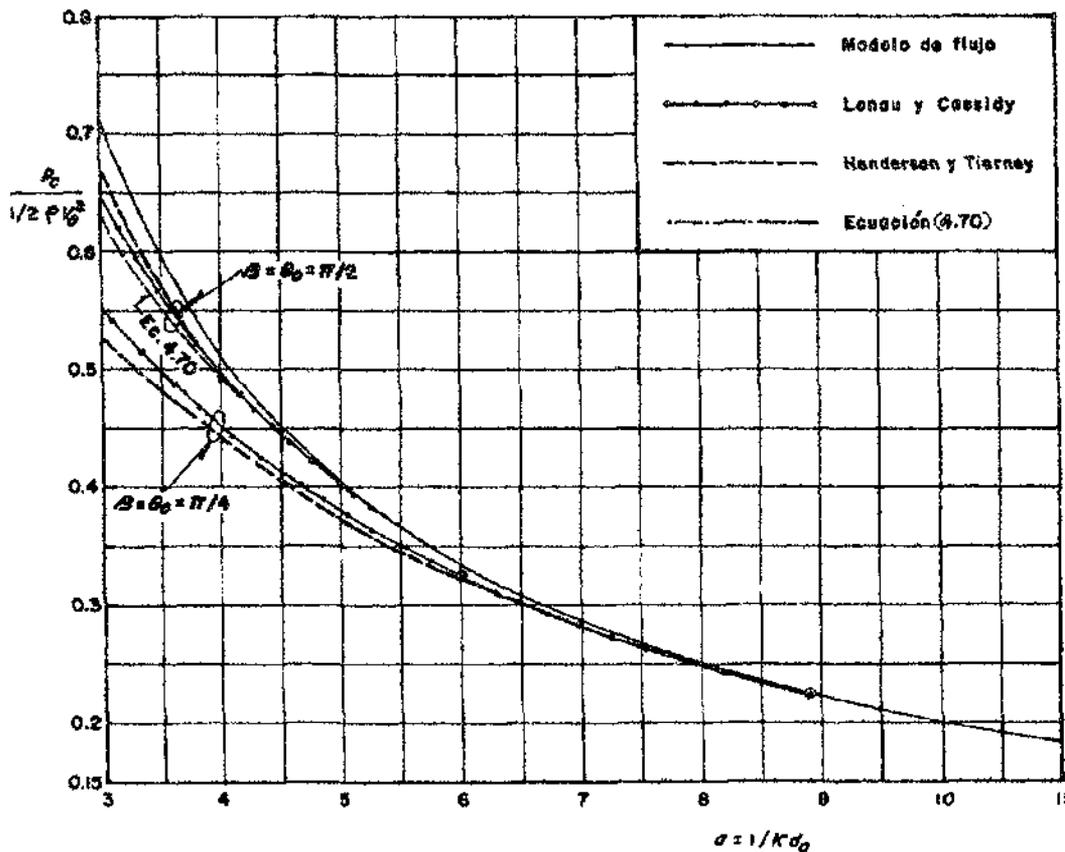
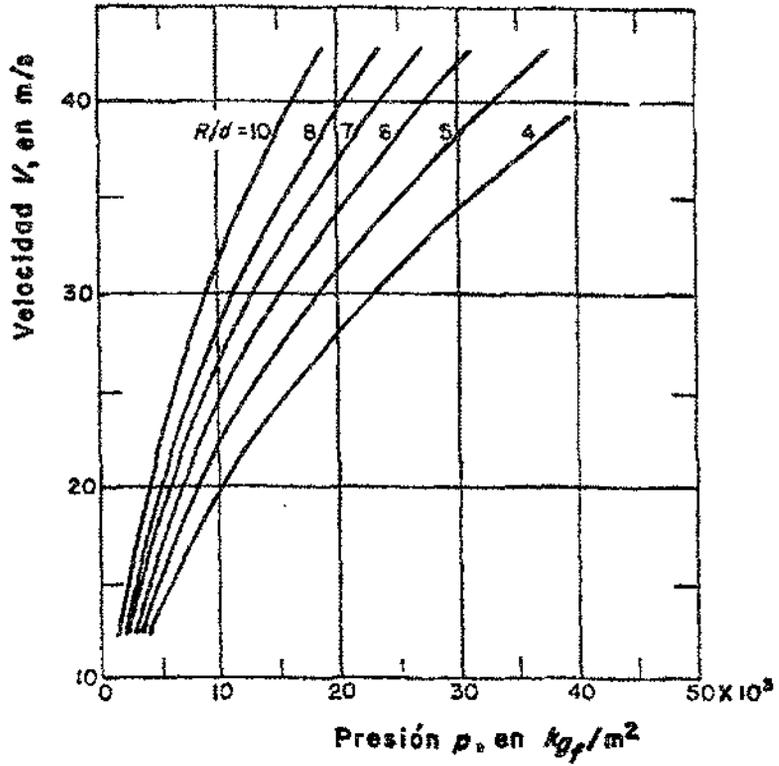
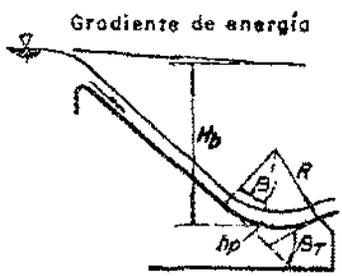
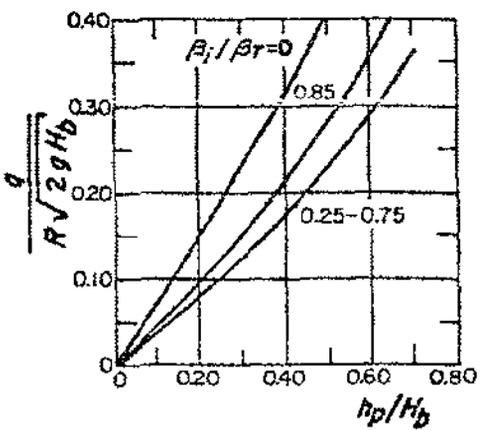


Figura 4.18. Comparación entre la presión centrífuga máxima del modelo de flujo y de otras teorías.

Otro criterio es el propuesto por el U.S Corps of Engineering (1978) de los Estados Unidos de Norteamérica. Es de aplicación sencilla y presenta la ventaja de apoyarse tanto en mediciones de laboratorio como de prototipo. La presión máxima que ocurre en la parte más baja de la cubeta depende de la velocidad y del parámetro  $R/d$  en dicha sección, y se obtiene directamente de la figura 4.19a. La distribución de la carga de presión  $h_p = p/g\rho$  a lo largo de la cubeta se expresa con el parámetro  $h_p/H_b$  en función de  $q/R\sqrt{2gH_b}$ , y de  $\beta/\beta_b$ , como se muestra en la figura 4.19b.  $H$  representa la energía específica al fondo de la sección más profunda de la cubeta y el resto de la simbología se muestra en la figura 4.19c.



a) Presión máxima en el punto más bajo



a) Presión a lo largo de la cubeta

b) Simbología

Figura 4.19. Presión en el fondo de cubetas de lanzamiento, según el U.S. Corps of Engineering (1978).

#### 4.4.4 Curvas convexas

En la literatura técnica no existen resultados teóricos ni experimentales aplicables a curvas circulares convexas y por ello no se presentan. En cuanto al modelo de flujo, deben tenerse mejores resultados para la curvatura  $\kappa < 0$  que para  $\kappa > 0$ .

Los parámetros son ahora:

$$\Omega = 1 + \kappa d$$

$$a = -1/\kappa d_0$$

$$\alpha_\theta = -2 a^3 F_0^{-2} \cos \theta$$

siendo válidas las ecuaciones (4.58), (4.59), (4.62) y (4.63) y cuando no se considera la acción de la gravedad vale la ecuación (4.66).

Una curva convexa muy importante es la que se diseña para la espalda de un cimacio y también antes de los tanques amortiguadores. Ambas son muy parecidas pero de curvatura variable con perfil parabólico grado  $n$ , y se analizan en el siguiente subcapítulo.

### 4.5 FLUJO SOBRE UN VERTEDOR TIPO CIMACIO

#### 4.5.1 Antecedentes

El flujo sobre un cimacio equivale al que ocurre en un canal rectangular con fondo de curvatura convexa variable conocida, donde el análisis se dirige principalmente a la determinación del coeficiente de descarga, del perfil de la superficie libre del agua y de la distribución de la presión en el fondo para diversas condiciones de operación, es decir, para cargas o gastos de vertido iguales o distintos a los que se utilizan para su diseño.

El diseño consiste en determinar la geometría del perfil del cimacio de manera que la presión en la región de la cresta sea igual a la atmosférica cuando la carga de operación (o de vertido) coincide con la de diseño. Para otras condiciones de vertido, la presión es mayor o menor que la atmosférica según que la carga de operación sea menor o mayor que la de diseño, respectivamente.

El procedimiento de diseño a seguir emplea datos experimentales obtenidos por distintas dependencias. Los perfiles del cimacio más utilizados son el tipo WES (*Water Experiment Station*) y los tipo USBR (*U.S. Bureau of Reclamation*), entre los más conocidos. Para establecerlos se realizaron pruebas exhaustivas en modelo hidráulico y se obtuvieron una buena cantidad de datos para cubrir distintos aspectos del diseño y la operación.

El propósito de este subcapítulo consiste en aplicar la teoría aquí desarrollada a las diversas condiciones de operación del cimacio, para obtener resultados que puedan compararse con los publicados por las entidades antes citadas y comprobar o no la bondad del modelo de flujo. Algunas de las variables importantes por verificar son las ya mencionadas, pero se requiere predecir de modo confiable el perfil del flujo sobre el cimacio, además del valor de la presión en la región de la cresta.

#### 4.5.2 Diseño geométrico e hidráulico

Chow (1959) presentó un resumen de resultados de las pruebas en modelo realizadas en la Estación Experimental de Vías Fluviales de la Armada de los Estados Unidos de Norteamérica, con los llamados perfiles tipo WES que se adoptan en el diseño de cimacios vertedores de gran caída. Se considera aquí sólo el caso en que el cimacio posee un paramento vertical aguas arriba, sin pilas y con la velocidad del flujo de aproximación casi cero antes del mismo, tal como se describe en el subcapítulo 14-16 de la referencia antes mencionada. La ecuación adimensional que define el perfil geométrico del cimacio para estas condiciones es

$$\frac{\zeta}{H_d} = -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.85} \quad (4.77)$$

con el origen del sistema coordenado  $(x, \zeta)$  en la cresta ( $x$  sobre el eje horizontal y  $\zeta$  sobre el vertical), siendo  $H_d$  la carga adoptada para el diseño (geométrico), medida a partir de dicha cresta hasta la superficie libre aguas arriba.

Un parámetro adimensional relacionado con el flujo y la geometría del fondo es

$$F = \frac{q}{\sqrt{2g} H_d^{3/2}} \quad (4.78)$$

el cual debe ser constante para cada gasto unitario vertido,  $q = Q/b$ , donde  $Q$  es el gasto total vertido y  $b$  la longitud del cimacio. El valor de  $q$  y por ende de  $F$ , varía con la carga  $H_0$  de vertido o de operación del cimacio, medida también desde la cresta hasta la superficie libre aguas arriba.

El término  $C = q/H^{3/2}$  se conoce como coeficiente de gasto o de vertido del cimacio y, según la ecuación (4.78), se relaciona con  $F$  mediante cualquiera de las siguientes expresiones:

$$F = \frac{q}{\sqrt{2g} H_0^{3/2}} \left( \frac{H_0}{H_d} \right)^{3/2} = \frac{C}{\sqrt{2g}} \left( \frac{H_0}{H_d} \right)^{3/2} \quad (4.79a)$$

$$C = \frac{\sqrt{2g}}{\left( H_0/H_d \right)^{3/2}} F \quad (4.79b)$$

de manera que si se conoce el valor experimental de  $C$  para cada uno de  $H_0/H_d$ , se puede obtener el de  $F$ .

### 4.5.3 Solución teórica

Se aplican las ecuaciones particulares del canal rectangular al flujo permanente que se produce sobre un vertedor tipo cimacio, cuyo diseño geométrico sigue los lineamientos estándar que usan una carga  $H_d$  de diseño. El perfil de la superficie libre de la lámina vertiente queda definido por la ecuación (4.7b), la cual se divide entre  $H_d$  y se expresa de manera adimensional en cualquiera de las formas:

$$\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} = \frac{\cos \theta}{\kappa H_d} \chi + \left[ \frac{F \kappa H_d}{(1 - \chi) \ln (1 - \chi)} \right]^2 \quad (4.80a)$$

$$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left[ \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right] = \chi + \frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left[ \frac{F \kappa H_d}{(1 - \chi) \ln (1 - \chi)} \right]^2 \quad (4.80b)$$

donde la suma de términos antes del signo igual representa a la energía específica (adimensional) en cada sección, siendo  $H$  la altura de la línea de energía respecto del nivel de referencia, en este caso, el de la cresta. La posición de dicha línea de energía es invariable para cualquier punto del campo de flujo.

Como ocurre en los canales de fondo plano, la ecuación anterior tiene dos raíces  $\chi_i$  para cada valor de  $H/H_d$  y de  $x/H_d$ : una en régimen subcrítico y otra en supercrítico. Estas equivalen a los llamados valores alternos en el canal de fondo plano, la primera mayor y la segunda menor que el crítico existente en cada sección.

Con la función dada por la ecuación (4.38):

$$\gamma(\chi) = [(1 - \chi) \ln (1 - \chi)]^{-2}$$

se tiene que

$$G = \chi + \frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2 \gamma(\chi) - \frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left[ \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right] \quad (4.81)$$

Además

$$G' = \frac{dG}{d\chi} = 1 + \frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2 \frac{d\gamma(\chi)}{d\chi}$$

Pero  $dy(\chi)/d\chi$  quedó expresada por la ecuación (4.38) en la forma

$$\frac{dy(\chi)}{d\chi} = \frac{2 [1 + \ln(1 - \chi)]}{[(1 - \chi) \ln(1 - \chi)]^3} = 2 [1 + \ln(1 - \chi)] [y(\chi)]^{3/2}$$

Por tanto

$$G' = 1 + 2 \frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2 [1 + \ln(1 - \chi)] [y(\chi)]^{3/2} \quad (4.82)$$

Para resolver la ecuación (4.81) se recurre a un procedimiento de iteraciones basado en el método de Newton-Raphson, de manera que siendo  $i$  la iteración, se tiene

$$\chi_{i+1} = \chi_i - \left( \frac{G}{G'} \right)_i \quad (4.83)$$

Con el mismo proceso, la carga de presión adimensional en el fondo ( $n = 0$ ) resulta de las ecuaciones (4.2b) y (4.6) como sigue

$$\frac{p_0}{g\rho H_d} = \frac{\cos \theta}{\kappa H_d} \chi + (F \kappa H_d)^2 \frac{(1 - \chi)^{-2} - 1}{[\ln(1 - \chi)]^2}$$

donde se elimina el término  $(\cos \theta / \kappa H_d) \chi$  mediante la ecuación (4.80a) y resulta

$$\frac{p_0}{g\rho H_d} = \left[ \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right] - \left[ \frac{F \kappa H_d}{\ln(1 - \chi)} \right]^2 \quad (4.84)$$

donde  $p_0$  es la presión en cualquier punto sobre el perfil sólido del cimacio (de ordenada  $x$  y abscisa  $\zeta$ ), y  $F$  está definido por la ecuación (4.78).

Por otra parte, se sustituye la ecuación (4.40), que define al número de Froude ( $\mathcal{F} = F$ ) en un canal rectangular, en la (4.7a) y se obtiene

$$H = \zeta + \left[ 1 + \frac{\mathcal{F}^2}{2(1 - \chi)^2} \right] d \cos \theta$$

de la cual se despeja  $\mathcal{F}$  y en términos adimensionales queda

$$\mathcal{F} = \sqrt{2(1 - \chi)} \left[ \frac{\kappa H_d}{\chi \cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) - 1 \right]^{1/2} \quad (4.85)$$

La sección crítica se localiza donde  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ , siendo  $\mathcal{F}_c$  el número de Froude crítico expresado por la ecuación (4.12). Es decir, se debe cumplir

$$2(1 - \chi_c)^2 \left[ \frac{\kappa H_d}{\chi_c \cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) - 1 \right] = - \frac{(1 - \chi_c)^3 \ln(1 - \chi_c)}{\chi_c [\ln(1 - \chi_c) + 1]}$$

O bien

$$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) = \chi_c - \frac{1}{2} \frac{(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)}{\ln(1 - \chi_c) + 1} \quad (4.86)$$

Esta ecuación permite calcular  $\chi_c$  para cada valor del término a la izquierda del signo igual, el cual depende a su vez de  $H/H_d$  y de  $x/H_d$ . Para resolver la ecuación anterior se sigue el método de Newton-Raphson estableciendo la función

$$J = \chi_c - \frac{1}{2} \frac{(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)}{\ln(1 - \chi_c) + 1} - \frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) \quad (4.87)$$

y la función derivada

$$J' = 1 + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\ln(1 - \chi_c)}{[\ln(1 - \chi_c) + 1]^2} \right] \quad (4.88)$$

De este modo, el proceso de iteraciones sigue la ecuación

$$(\chi_c)_{i+1} = (\chi_c)_i - \left( \frac{J}{J'} \right)_i$$

hasta que  $J = 0$ .

La ecuación (4.86) no ubica a la sección crítica y para localizarla se utiliza la ecuación (4.44), donde se sustituyen los valores de  $A$  y  $B$  tomados de las ecuaciones (4.36) y (4.37) y resulta

$$(1 - \chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \frac{q^2 \kappa}{2g} \left[ \frac{4g}{q^2 \kappa^2} (H - \zeta) - \frac{6g \cos \theta}{q^2 \kappa^3} \chi_c \right] \frac{d\kappa}{dx} = 0$$

que al simplificar es

$$(1 - \chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ \frac{2 H_d^2}{\kappa H_d} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) - \frac{3 \cos \theta}{(\kappa H_d)^2} H_d^2 \chi_c \right] \frac{d\kappa}{dx} = 0$$

Finalmente, en términos de parámetros adimensionales se obtiene que

$$f\left(\frac{x}{H_d}, \frac{H}{H_d}\right) = (1 - \chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \left[ 2 \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right) - 3 \frac{\cos \theta}{\kappa H_d} \chi_c \right] \frac{H_d^2}{\kappa H_d} \frac{d\kappa}{dx} = 0 \quad (4.89)$$

es la condición que debe cumplirse para encontrar la posición de la sección crítica. Los términos que en ella intervienen se determinan de la geometría y condiciones de operación durante el vertido. En efecto, de la ecuación (4.77) se tiene

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = - \frac{1.85}{2 H_d^{0.85}} x^{0.85} = - 0.925 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{0.85} \quad (4.90)$$

Por tanto

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = - \frac{0.85 (0.925)}{H_d^{0.15} H_d^{0.85}} \left( \frac{x}{H_d} \right)^{-0.15} = - \frac{0.78625}{H_d} \left( \frac{x}{H_d} \right)^{-0.15} \quad (4.91)$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en la ecuación (4.34), resulta

$$\kappa H_d = - \frac{0.78625}{\left( \frac{x}{H_d} \right)^{0.15} \left[ 1 + 0.855625 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.7} \right]^{3/2}} \quad (4.92)$$

La expresión anterior también se escribe

$$\kappa H_d = - \frac{0.78625}{\left[ \left( \frac{x}{H_d} \right)^{0.1} + 0.855625 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.8} \right]^{3/2}}$$

Al derivar, se obtiene

$$H_d \frac{d\kappa}{dx} = \frac{\frac{3}{2} (0.78625) \left[ \frac{0.1}{H_d^{0.1}} x^{-0.9} + \frac{1.8 (0.855625)}{H_d^{1.8}} x^{0.8} \right]}{\left[ \left( \frac{x}{H_d} \right)^{0.1} + 0.855625 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.8} \right]^{5/2}}$$

Efectuando las operaciones indicadas y simplificando, resulta

$$\begin{aligned}
 H_d \frac{d\kappa}{dx} &= \frac{1.179375 \left[ \frac{0.1}{H_d} \left( \frac{x}{H_d} \right)^{-0.9} + \frac{1.540125}{H_d} \left( \frac{x}{H_d} \right)^{0.8} \right]}{\left[ \left( \frac{x}{H_d} \right)^{0.1} \left[ 1 + 0.855625 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.7} \right] \right]^{5/2}} \\
 &= \frac{\frac{0.1179375}{H_d} \left( \frac{x}{H_d} \right)^{-0.9} \left[ 1 + 15.40125 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.7} \right]}{\left( \frac{x}{H_d} \right)^{0.25} \left[ 1 + 0.855625 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.7} \right]^{5/2}}
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$H_d^2 \frac{d\kappa}{dx} = \frac{0.1179375 \left[ 1 + 15.40125 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.7} \right]}{\left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.15} \left[ 1 + 0.855625 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.7} \right]^{5/2}}$$

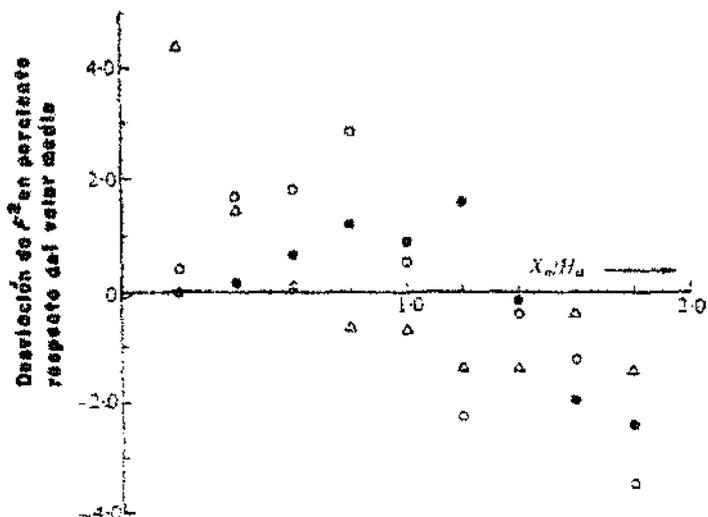
Con esta ecuación y la (4.92) resulta el término

$$\frac{H_d^2 \frac{d\kappa}{dx}}{\kappa H_d} = - \frac{0.15}{\frac{x}{H_d}} \left[ \frac{1 + 15.40125 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.7}}{1 + 0.855625 \left( \frac{x}{H_d} \right)^{1.7}} \right] \quad (4.93)$$

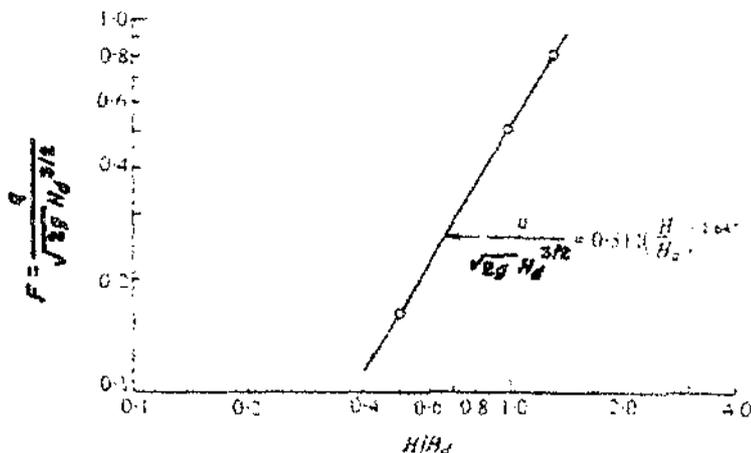
el cual interviene en la ecuación (4.89).

La curvatura adopta dos valores sobre la cresta del cimacio ( $x = \zeta = 0$ ), como se observa de su geometría, ( $\kappa H_d = -2; 0$ ) y de la ecuación (4.92), y la solución de la ecuación (4.80) en ese punto cambia para cada valor. Además, hay que localizar la sección crítica en la vecindad de la cresta. El perfil del cimacio es convexo y asimétrico, y de acuerdo con lo explicado después de la ecuación (4.44), la sección crítica se desplaza hacia aguas abajo de la cresta y para localizarla se debe satisfacer la ecuación (4.89).

Para comprobar la ecuación (4.80) por la vía experimental utilizando un cimacio de geometría diseñada con la carga  $H_d$ , es necesario establecer el gasto en la instalación con una carga adimensional de operación  $H/H_d$ , para después medir el perfil de la superficie libre con diferentes abscisas  $x$ , calcular  $F$  con la ecuación (4.80) y después comprobarla con  $q$  y la definición dada por la (4.78). También se puede medir  $q$  para conocer  $F$ , así como el perfil de la superficie libre para obtener  $\chi$ ; después, con  $\cos \theta$ ,  $\kappa H_d$  y la ecuación (4.80), se calcula la carga relativa de operación  $H/H_d$ , misma que se comprueba con las mediciones.



a) Desviación de  $F^2$  en porciento :  $\circ$ ,  $H/H_d = 0.50$ ,  $F_m^2 = 0.0266$ ;  
 $\square$ ,  $H/H_d = 1.00$ ,  $F_m^2 = 0.2622$ ;  $\triangle$ ,  $H/H_d = 1.33$ ,  $F_m^2 = 0.6647$ .

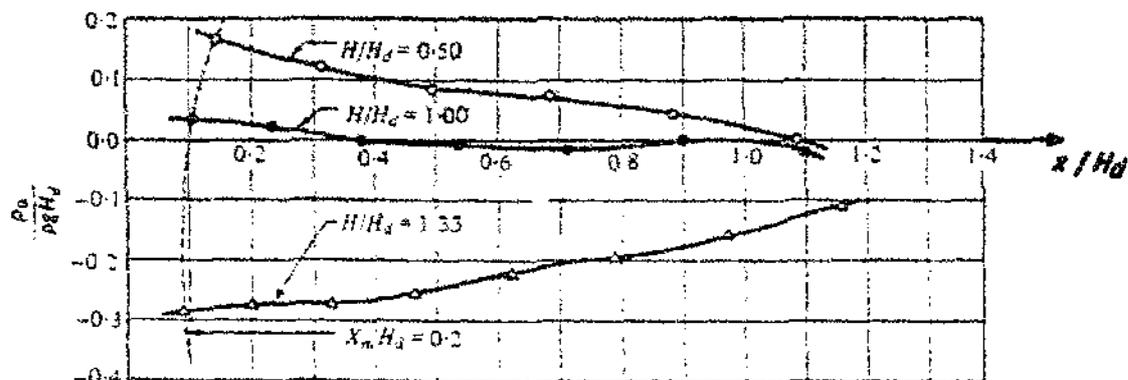


b) Gasto contra carga de operación

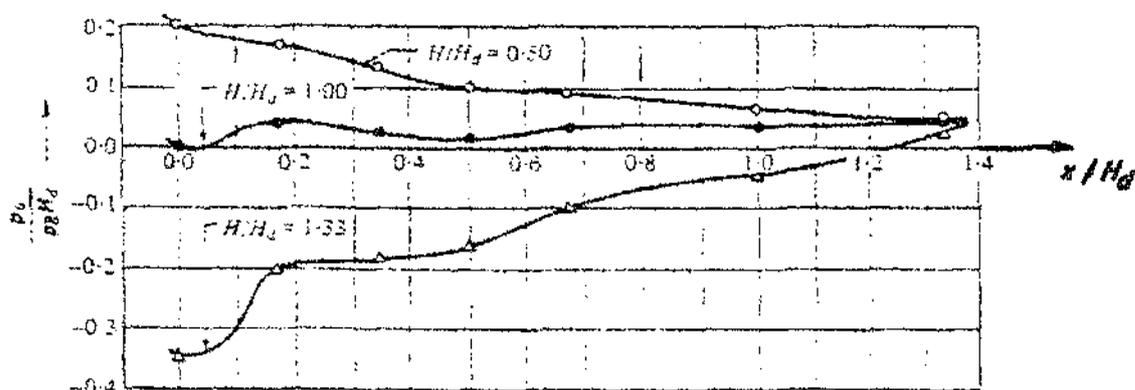
Figura 4.20. Obtención de la ecuación de ajuste de los puntos  $\{H/H_d, F\}$ , según Sivakumaran et al (1981). Canal rectangular.

#### 4.5.4 Análisis de Sivakumaran y coautores

Sivakumaran *et al* (1981) analizaron parcialmente el caso y eligieron el primer camino antes planeado, aceptando el nivel de la superficie libre aguas arriba como el de la energía en todo el campo de flujo. Los valores calculados de  $F$  en todos los puntos del perfil, para cada uno de  $H/H_d$ , no resultaron constantes si no que adoptaron un promedio que desde luego cambiaba para cada valor de  $H/H_d$ . Los puntos representados en la figura 4.20a muestran las desviaciones de los valores calculados de  $F^2$  respecto de los promedios  $F_m^2$  adoptados, con respecto de los de  $H/H_d$  asociados. Sólo un punto registró una desviación un poco mayor del 4 por ciento, pero los demás fueron siempre menores. Las desviaciones se atribuyeron a la pérdida de energía debida a la formación de la capa límite turbulenta, desde la cresta y hacia aguas abajo, que no se incluyó en las ecuaciones.



a) Presión teórica



b) Presión experimental

Figura 4.21. Presiones teóricas y experimentales sobre un cimacio con perfiles WES (USCE).

Los valores promedio de  $F_m$  adoptados que se anotan en la figura 4.20a, resultaron  $F_m = 0.1631, 0.5121$  y  $0.8153$ , para  $H/H_d = 0.50, 1.00$  y  $1.33$ , respectivamente. Al llevar los valores promedio  $F_m$  y los asociados de  $H/H_d$  sobre un papel logarítmico (figura 4.20b), la ecuación de mejor ajuste de los puntos resultó

$$F = 0.511 \left[ \frac{H}{H_d} \right]^{1.647} \quad (4.94)$$

Utilizando los valores promedio de  $F$  adoptados, los autores calcularon las cargas adimensionales de la presión con la ecuación (4.84) en distintos puntos sobre la espalda del cimacio, dentro del intervalo  $0 < x/H_d < 1.2$  y para  $H/H_d = 0.50, 1.00$  y  $1.33$ . En la figura 4.21a se presentan los valores calculados de la presión y en la 4.21b los experimentales, reproducidos ambos por Chow (1959) para el perfil del cimacio utilizado. Al comparar ambas figuras se observan pequeñas diferencias que los autores atribuyeron a la influencia que puede esperarse de la velocidad de aproximación al cimacio, considerada nula en el cálculo de las cargas  $H$  y  $H_d$ .

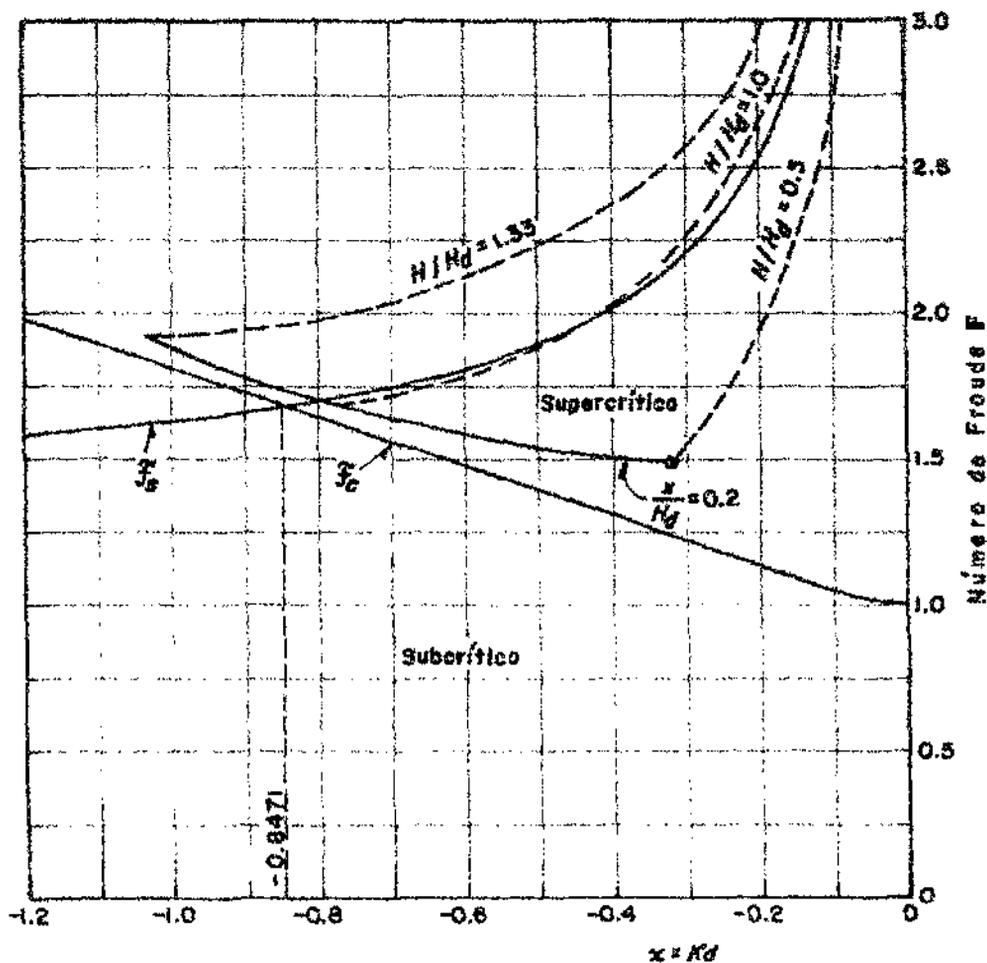


Figura 4.22 Curvas  $F = f(x, H/H_d)$  para un cimacio.

Finalmente, en la figura 4.22 se presenta la variación de  $\mathcal{S}$  con  $\chi$  calculada con la ecuación (4.85) y con el auxilio de los perfiles de la superficie libre reproducidos por Chow, donde todas las curvas se ubican en la región de flujo supercrítico. La curva que corresponde a  $H/H_d = 1.00$  prácticamente coincide con la de separación del flujo en el fondo, definida por la ecuación (3.24b) ( $\mathcal{S} = \mathcal{S}_s$ ), lo cual concuerda con la premisa básica en el diseño geométrico del perfil según la ecuación (4.77), de que se ajuste al inferior de la lámina vertiente.

Según los autores, cuando se hace el mejor ajuste de las curvas que unen los puntos experimentales de la presión y se sustituyen en la (4.80), se obtienen nuevos valores del parámetro  $F$ , que son:  $F_c = 0.160$ ;  $0.507$  y  $0.797$ ; para las correspondientes cargas adimensionales  $H/H_d = 0.50$ ,  $1.00$  y  $1.33$ . Los puntos tienen a su vez el mejor ajuste con la ecuación

$$F = 0.502 \left[ \frac{H}{H_d} \right]^{1.65} \quad (4.95)$$

con errores menores del 1 por ciento.

Los autores no hicieron ninguna comprobación adicional, ni de los valores de  $F_c$ , ni de la ecuación anterior, si bien ella es posible de manera sencilla.

#### 4.5.5 Análisis de Sotelo G.

##### a) Antecedentes

La figura 4.23 muestra los valores experimentales de  $C$  obtenidos por el U.S. Corps of Engineering para el perfil WES en cuestión y en la figura 4.24 se muestra la curva de los valores de  $F$  calculados con la ecuación (4.79a) a partir de los experimentales de  $C$ . En la tabla 4.2 se presentan como ejemplo los valores de  $F$  calculados para tres cargas adimensionales  $H_0/H_d$  de operación.

Tabla 4.2 Valores experimentales de  $F$  para tres cargas de operación.

$\frac{H_c}{H_d}$	$C$ m <sup>1/2</sup> /s	$F$ exp.
0.5	2.004	0.16
1.0	2.222	0.5016
1.33	2.28	0.7895

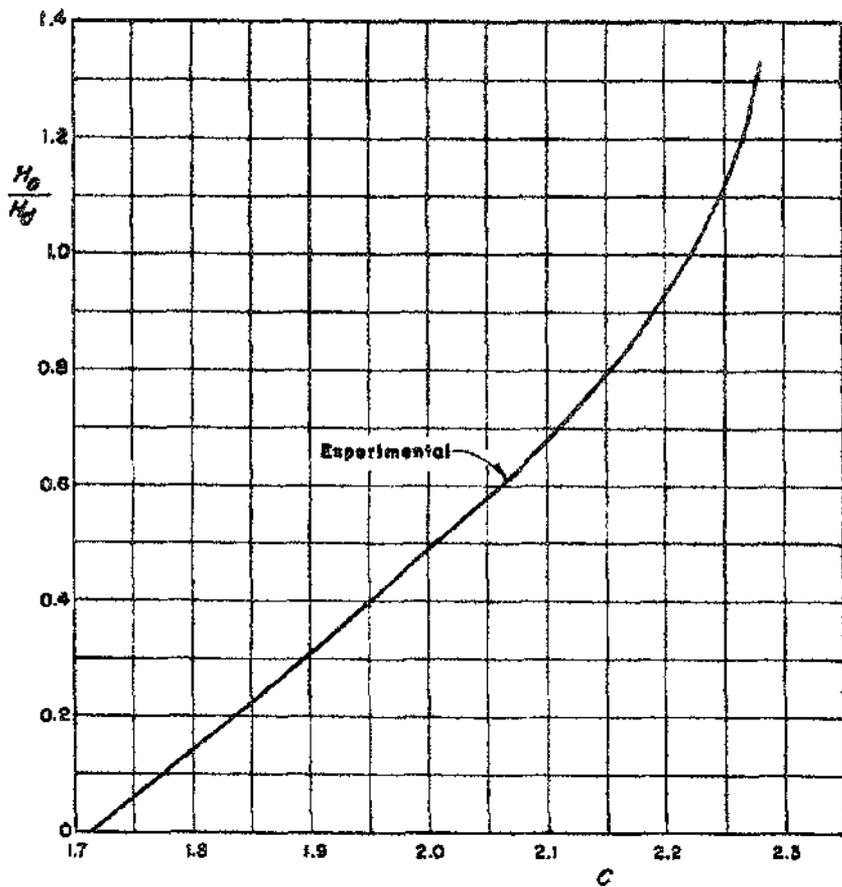


Figura 4.23. Coeficiente de gasto en un cimacio tipo WES, con velocidad de llegada despreciable y distintas cargas de operación.

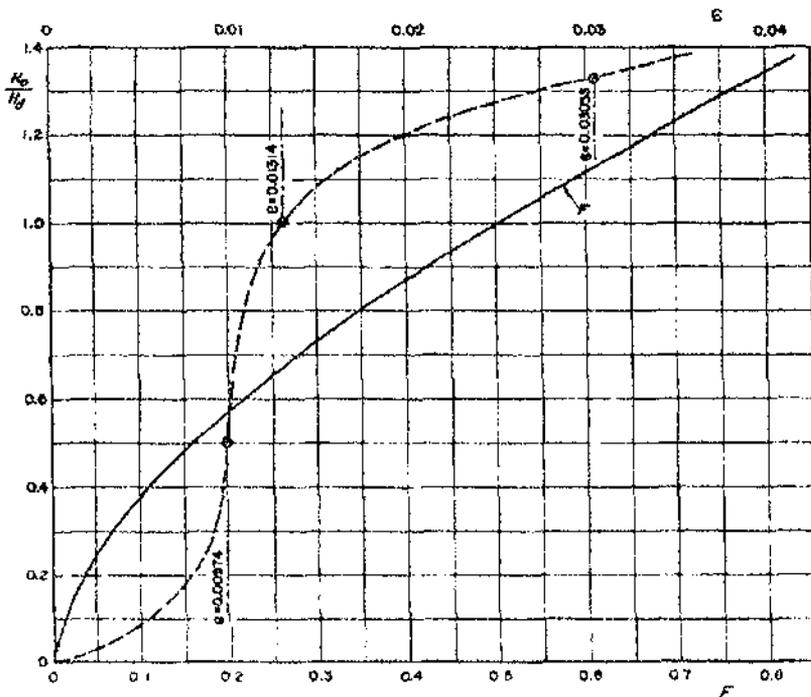


Figura 4.24. Valores experimentales de  $F$  y los calculados de  $s$ .

Chow (1959) también presenta las coordenadas experimentales de los perfiles de la superficie libre de la lámina vertiente para tres cargas adimensionales de operación:  $H/H_d = 0.5, 1.0$  y  $1.33$ .

La curva de los valores experimentales de  $C$  en la figura 4.23 se ajusta bien a la ecuación

$$C = 0.49867 \sqrt{2g} \left( \frac{H_o}{H_d} \right)^{0.1316} \quad (4.96)$$

con errores menores del 0.6 por ciento en el intervalo:  $0.3 \leq \frac{H_o}{H_d} \leq 1.33$ . Esta expresión se sustituye en la ecuación (4.79a) y se obtiene la correspondiente a  $F$  con validez en el mismo intervalo, y que es

$$F = 0.49867 \left( \frac{H_o}{H_d} \right)^{1.6316} \quad (4.97)$$

Esta expresión difiere de las dadas por Sivakumaran *et al* (1981), que son la (4.94) y (4.95).

#### b) *Solución teórica*

El autor de este trabajo hizo un análisis distinto del antes descrito, siendo el primer propósito encontrar la ubicación y características de la sección crítica que se forma en la proximidad de la cresta, para determinar la relación que hay entre el gasto y la energía. Para ello es común encontrarse dos modos de calcular el régimen crítico en la sección de un canal y que son:

- a) Obtener la energía específica mínima (crítica) necesaria para que fluya un gasto dado.
- b) Determinar el gasto máximo que puede fluir con una energía específica dada.

La solución de ambos es equivalente ya que el gasto máximo fluye con la energía específica mínima, como es común en el desarrollo de la teoría de los vertedores con base en este principio. Esto significa que ambos modos se pueden utilizar en el cimacio para localizar la sección crítica y determinar las variables hidráulicas que definen la relación entre el gasto  $q$  y la carga  $H_o$  sobre la cresta, como se muestra en la figura 4.25, aceptando que  $H_o$  es diferente de la energía  $H$  que posee el flujo en la región del cimacio.

Con objeto de demostrar la bondad de la teoría se utilizaron ambos modos de solución siguiendo el mismo orden con que antes se enunciaron, pero sólo para tres condiciones de operación. a) Para el primer modo se eligieron los gastos (representados por  $F$ ) que se muestran en la tabla 4.2 y se calcularon las alturas de energía  $H/H_d$  correspondientes a la sección crítica. b) Para el segundo se eligieron las cargas adimensionales:  $H/H_d = 0.5, 1.0$  y  $1.33$  y se calcularon los gastos críticos (máximos) correspondientes representados por  $F$ .

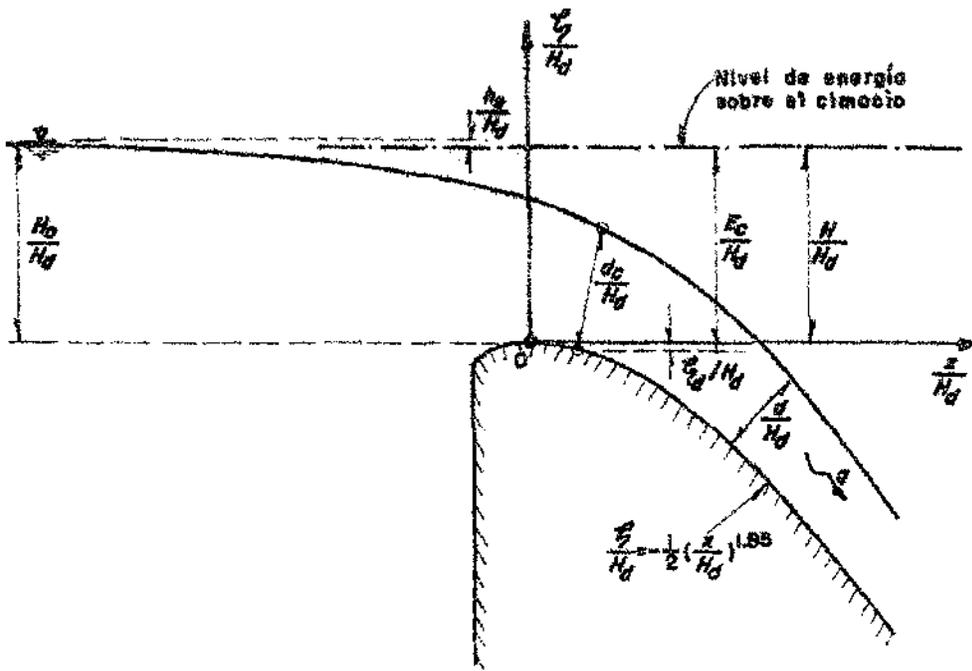


Figura 4.25. Pérdida de energía por entrada al cimacio.

En ambos casos son válidas las ecuaciones (4.80) a (4.93), pero para el primer modo es conveniente combinar las ecuaciones (4.80) y (4.86). De la primera se obtiene

$$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left[ \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right] = \chi_c + \frac{\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2}{[(1 - \chi) \ln(1 - \chi)]^2}$$

que sustituida en la (4.86) resulta

$$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2 = -\frac{1}{2} \frac{[(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)]^3}{\ln(1 - \chi_c) + 1} \quad (4.98a)$$

donde el primer miembro es constante. Para su solución se emplea nuevamente el método de Newton-Raphson, haciendo

$$J = \frac{1}{2} \frac{[(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)]^3}{\ln(1 - \chi_c) + 1} + \frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2 \quad (4.98b)$$

siendo su derivada

$$J' = \frac{1}{2} \frac{[(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)]^3}{(1 - \chi_c) [\ln(1 - \chi_c) + 1]^2} - \frac{3}{2} [(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)]^2 \quad (4.99)$$

expresiones aplicables en cada iteración:  $(\chi_c)_{i+1} = (\chi_c)_i - (J/J')_i$ , para una sección donde previamente se calculó  $\kappa H_d$  con la ecuación (4.92). La sección donde se satisface la ecuación (4.89) es la crítica para el valor de  $F$  considerado.

Para el segundo modo  $H/H_d$  es constante, siendo preferible usar las ecuaciones (4.86) a (4.88) para las iteraciones en cada sección hasta encontrar aquella en la cual se satisface la ecuación (4.89), para después calcular  $F$  de la ecuación (4.80), que corresponde a la energía  $H/H_d$  dada.

Un resumen de los cálculos se presenta en la tabla 4.3, sin incluir el total de iteraciones que fue necesario hacer, destacando sólo los resultados finales obtenidos para cada modo. Por ejemplo, para el primero y con  $F = 0.16$ , la sección crítica se localiza en  $x/H_d = 0.059302$ ; para ella:  $\chi_c = -0.41249$ ;  $H/H_d = 0.495128$ , al cumplirse la condición  $f=0$  de la ecuación (4.89).

El valor  $F = 0.16$  se obtuvo experimentalmente para  $H_0/H_d = 0.5$ , como puede verse en la tabla 4.2 o la figura 4.24; la diferencia que se observa respecto del teórico ( $H/H_d = 0.495128$ ) antes mencionado puede interpretarse de tres maneras distintas:

- Que exista un error como resultado de imperfecciones en la teoría y el experimento; para los valores anteriores, del orden del 1 por ciento.
- Que se produzca una pérdida de energía por efecto de la aceleración del agua, la turbulencia y el desarrollo de la capa límite, la cual no fue considerada en la teoría.
- Que ocurra un efecto combinado de los dos anteriores.

Tabla 4.3 Posición y características del flujo en la sección crítica para distintos gastos y cargas de operación en el cimacio.

$\frac{y}{H_c}$	$\frac{\zeta}{H_d}$ ec. (4.77)	$\tan \theta$ ec. 4.90	$\cos \theta$	$\kappa H_d$ ec. 4.92	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta}$	$\frac{H_d^2 \frac{d\kappa}{dx}}{\kappa H_d}$ ec. (4.93)	$Q = \text{const.}; H = H_c$		$H = \text{const.}; Q = Q_{\text{máx}}$		
							$F = 0.16$		$H/H_d = 0.5$		
							$(F \kappa H_d)^2$ $\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)^2$	$\chi_o$ $H/H_d$ $f$ en la ec. (4.89)	$\frac{H}{H_d} \frac{\zeta}{H_d}$ $\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} \left( \frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right)$	$\chi_o$ $f$ en la ec (4.89)	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta} (F \kappa H_d)$ $(F \kappa H_d)$
0.05	-0.001959	-0.072488	0.997383	-1.222647	-1.225855	-3.266579	0.038269 -0.046912	-0.423443 0.49497 -0.043386	0.501959 0.615329	-0.427837 0.037336	
0.06	-0.002745	-0.084639	0.996437	-1.186282	-1.190523	-2.802294	0.036026 -0.04289	-0.411739 0.495127 0.002815	0.502745 0.59853	-0.415869 -0.000856	
0.059302	0.002686	-0.083801	0.996507	-1.188616	-1.192782	-2.829297	0.036168 -0.04314	-0.41249 0.495128 0.0			
0.059748	-0.002724	-0.084337	0.996462	-1.187120	-1.191335	-2.811953			0.502724 -0.598912	-0.416141 0.0	-0.04437 0.037246 $F = 0.1625$

Tabla 4.3 (continúa)

							$F = 0.5016$		$H/H_d = 1.0$		
0.098	-0.006804	-0.128435	0.991853	-1.086972	-1.095901	-1.952869	0.297271 -0.325779	-0.768045 0.986855 0.002339	1.006804 -1.103357	-0.778452 -0.501545	
0.099	-0.006933	-0.129548	0.991713	-1.084859	-1.093924	-1.940299			1.006933 -1.101508	-0.777116 0.002840	
0.097375	-0.006724	-0.127739	0.99194	-1.088302	-1.097145	-1.960876	0.297998 -0.326947	-0.768876 0.986856 0.0			
0.09824	-0.006834	-0.128702	0.991819	-1.086464	-1.095425	-1.949829			1.006834 -1.102912	-0.778131 0.0	-0.340176 0.310546 $F = 0.512915$
							$F = 0.7895$		$H/H_d = 1.33$		
0.11	-0.008425	-0.141686	0.990111	-1.062683	-1.073297	-1.819848	0.703901 -0.755495	-0.988031 1.289330 0.010679	1.338425 -1.436526	-1.019683 -0.031353	
0.12	-0.009896	-0.152562	0.988562	-1.043986	-1.056066	-1.733346	0.679351 0.717439	-0.972969 1.289360 0.015046	1.339896 -1.415019	-1.004086 0.007038	
0.115796	-0.009264	-0.148007	0.989224	-1.051695	-1.063152	-1.76744	0.689420 -0.732959	-0.97918 1.28939 0.0			
0.118059	0.009602	-0.150462	0.988869	-1.047520	-1.059311	-1.748709			1.339602 -1.419055	-1.007013 0.0	-0.805506 0.760405 $F = 0.832453$

La segunda es la única manera factible de valuar numéricamente, englobando a las otras dos; es decir, se acepta que ocurre la pérdida de energía  $h_e/H_d$  que se acota en la figura 4.25. Dicha pérdida se puede valuar como:  $h_e = \epsilon H_0$ , de manera que si  $H_0 = H + h_e$ , se tiene:  $H_0 = H + \epsilon H_0$ ;  $\epsilon = 1 - (H/H_0)$ ; o bien, en la forma adimensional:

$$\epsilon = 1 - \frac{H/H_d}{H_0/H_d} \quad (4.100a)$$

$$\frac{H}{H_d} = (1 - \epsilon) \frac{H_0}{H_d} \quad (4.100b)$$

donde  $\epsilon$  debe ser un factor siempre menor de 1.

Para el segundo modo de abordar el problema, en la tabla 4.3 se observan los valores calculados de  $F$  para las cargas  $H/H_d$  utilizadas, los cuales son mayores que los que se muestran en la tabla 4.2. Por ejemplo, cuando el nivel de la energía para el flujo sobre el cimacio es  $H/H_d = 0.5$ , se obtiene  $F = 0.162573$ , que es mayor al valor dado en la tabla 4.2. Esto significa que dicho gasto es posible solo si la carga aguas arriba es mayor, es decir, si  $H_0/H_d > H/H_d = 0.5$ , debiendo interpretarse la diferencia entre ambas como la pérdida antes expuesta para después calcular  $\epsilon$  de la misma manera que en el modo anterior.

En la tabla 4.4 se presenta el resumen de las condiciones críticas y los valores del factor  $\epsilon$  de pérdida. Puede observarse que la energía del flujo en la zona del cimacio ( $H/H_d$ ) es, en cualquier caso, siempre menor que la que existe como carga aguas arriba ( $H_0/H_d$ ). La figura 4.24 muestra también los puntos representativos de los valores  $\epsilon$  según la tabla 4.4, observando que existe congruencia entre ambos modos de solución.

El cálculo de los perfiles del flujo debe entonces realizarse para los valores mostrados en la tabla 4.4a, ya que corresponden a los obtenidos experimentalmente para las tres cargas de operación. Dicho cálculo se presenta en la tabla 4.5, donde las características geométricas del perfil del cimacio se obtuvieron de las ecuaciones (4.90) a (4.92), las raíces  $\chi_i$  de las ecuaciones (4.98a) y (4.99), y los valores de la presión de la ecuación (4.84).

c) *Resultados y conclusiones*

Los perfiles del flujo calculados para las tres cargas de operación se muestran con línea llena en la figura 4.26a, donde aparecen también los puntos que fueron obtenidos experimentalmente. Se observa una excelente concordancia entre los perfiles teóricos y los experimentales para la región aguas abajo de la cresta, no así para la región antes de ella, donde ocurren pequeñas diferencias. A pesar de que en esta región los valores de  $\chi_c$  son mayores de 2 para  $x/H_d = -0.2$ , se observa una buena concordancia con los valores experimentales al efectuar el trazo dentro de la figura.

Tabla 4.4 Valores críticos para tres condiciones de operación del cimacio

a) Para  $Q = \text{const.}, H = H_c$ .

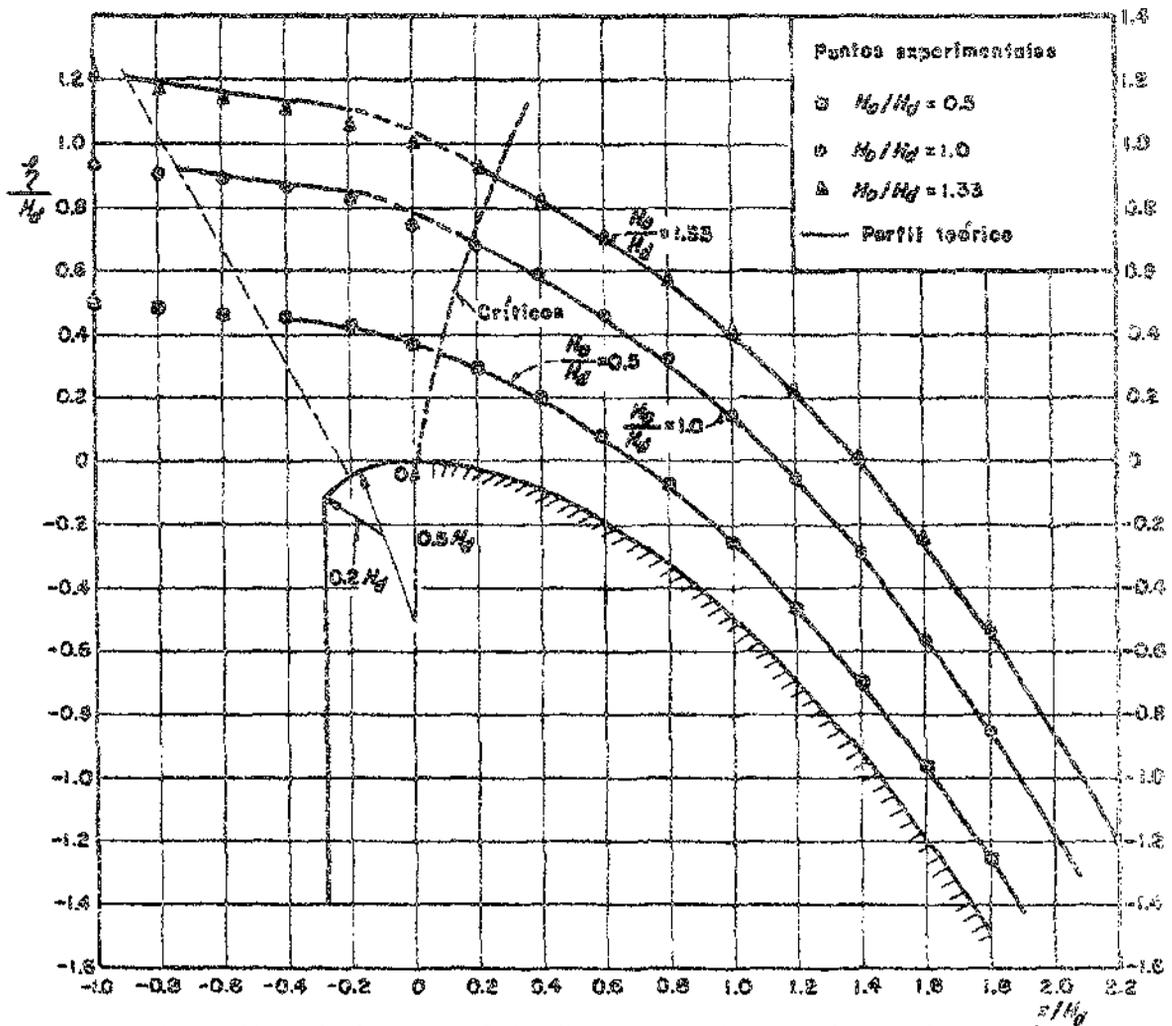
$\frac{H_o}{H_d}$	$F$	$\frac{x_c}{H_d}$	$\chi_c = \kappa d_c$	$\frac{H}{H_d}$	$\epsilon$ ec. 4.98	$\kappa H_d$	$\frac{d_c}{H_d}$	$C$
0.5	0.16	0.059302	-0.41249	0.495128	0.009743	-1.188615633	0.347034	2.0342
1.0	0.5016	0.097375	-0.768876	0.986856	0.013144	-1.088301875	0.70649	2.2663
1.33	0.7895	0.115796	-0.97918	1.28939	0.030534	-1.051695345	0.931049	2.3885

b) Para  $H \text{ const.}, Q = Q_c$ .

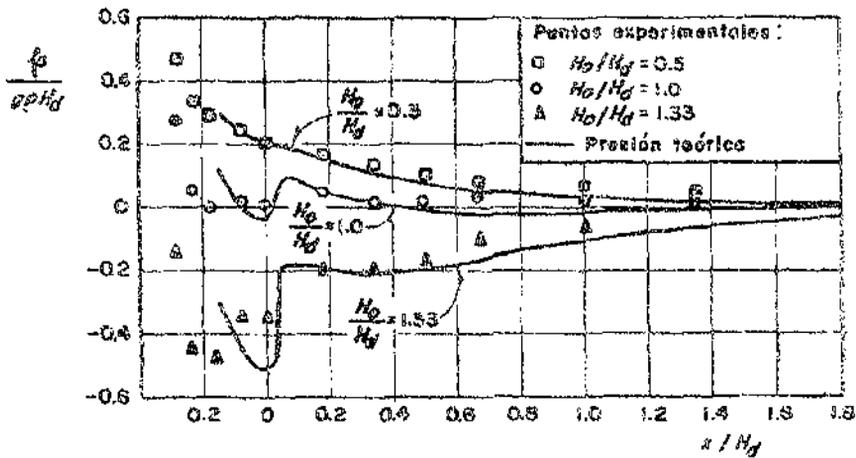
$\frac{H}{H_d}$	$\frac{x_c}{H_d}$	$\chi_c = \kappa d_c$	$F_c$	$\frac{H_o}{H_d}$	$\epsilon$ ec. 4.100a
0.5	0.059748	-0.416141	0.162573	0.504995	0.009891
1.0	0.09824	-0.778131	0.512915	1.0134	0.01322
1.33	0.118059	-1.007013	0.832453	1.379	0.0355

En la figura 4.26b se muestra la comparación gráfica entre los valores teóricos y los experimentales de la presión relativa para las mismas tres cargas de operación, donde nuevamente se observan mayores discrepancias antes de la cresta que después de ella, ya que los valores de  $\chi$  se acercan o rebasan el valor límite (-2) acordado para la validez de la hipótesis de flujo poco profundo. Se observa que las mayores discrepancias se presentan ligeramente detrás de la cresta, pero una vez alcanzada la sección crítica existe una gran coincidencia entre los valores teóricos y los experimentales.

Pudo así constatar que la aplicación de la teoría a las curvas convexas conduce efectivamente a buenos resultados, ya que a pesar de las pequeñas diferencias, habría que pensar que los resultados experimentales son también imperfectos.



a) Perfiles de la superficie libre sobre la espalda del cimacio



b) Presión sobre la espalda del cimacio

Figura 4.25. Valores teórico y experimental para tres cargas de operación:

Tabla 4.5 Cálculo del perfil del flujo y carga de presión sobre la espalda de un cimacio para tres cargas de operación.

$\frac{x}{H_d}$	$\frac{\zeta}{H_d}$	$\tan \theta$ $d\zeta/dx$	$\cos \theta$	$\kappa H_d$	$\frac{\kappa H_d}{\cos \theta}$	$F = 0.16$ $H/H_d = 0.495128$		$F = 0.5016$ $H/H_d = 0.986856$		$F = 0.7895$ $H/H_d = 1.28939$	
						$\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d}$ $(F \kappa H_d)^2$	$\chi$ $d/H_d$ $p/g\rho H_d$	$\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d}$ $(F \kappa H_d)^2$	$\chi$ $d/H_d$ $p/g\rho H_d$	$\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d}$ $(F \kappa H_d)^2$	$\chi$ $d/H_d$ $p/g\rho H_d$
-0.2	-0.042978	0.539781	0.879986	-5.0	-5.68191	0.538106 0.640000	-2.931999 0.5864 0.196694	1.029834 0.290064	-5.623513 1.124703 -0.729887	1.332368 15.582756	-7.281528 1.456306 -2.154400
-0.15	-0.023030	0.314485	0.953939	-2.0	-2.09657	0.518158 0.1024	-0.964279 0.482139 0.293496	1.009885 1.006410	-1.894269 0.947135 0.118785	1.312420 2.493241	-2.471585 1.235792 -0.297101
-0.1	-0.010102	0.204124	0.979796	-2.0	-2.041241	0.505230 0.1024	-0.884856 0.442428 0.250357	0.996958 1.006410	-1.781193 0.890596 0.035067	1.299492 2.493241	-2.338312 1.169156 -0.416261
-0.05	-0.002506	0.100504	0.994987	-2.0	-2.010076	0.497635 0.1024	-0.833849 0.416924 0.219178	0.989362 1.006410	-1.712621 0.856310 -0.021258	1.291896 2.493241	-2.258586 1.129293 -0.494792
0.0	0.0	0.0	1.00	-2.0	-2.0	0.495128 0.1024	-0.815595 0.407797 0.207252	0.986856 1.006410	-1.689368 0.844684 -0.041429	1.28939 2.493241	-2.231832 1.115916 -0.522501
0.059302 crítico	-0.002686	-0.083801	0.996507	-1.188616	1.192782	0.497815 0.036167	-0.412490 0.347034 0.19457	0.989542 0.355466	-0.875635 0.736685 0.090935	1.292076 0.880617	-1.167732 0.982431 -0.179093
0.097375 crítico	-0.006723	-0.127739	0.99194	-1.088302	-1.097145	0.501852 0.030321	-0.358121 0.329064 0.178254	0.993579 0.296993	-0.768876 0.706491 0.077486		

Tabla 4.5 (continúa)

0.115796 critico	-0.009264	--0.148007	0.989224	-1.051695	-1.063152					1.298654 0.689420	-0.97918 0.931049 -0.180614
0.2	-0.025461	-0.235514	0.973369	-0.92308	--0.948334	0.520589 0.021813	-0.270981 0.293562 0.141222	1.012317 0.214384	-0.598773 0.648668 0.03865	1.314851 0.531108	-0.809320 0.876761 -0.195733
0.4	-0.091787	--0.424515	0.920492	--0.703576	--0.764348	0.586915 0.012673	-0.173367 0.246408 0.091135	1.078643 0.124548	-0.403248 0.573141 -0.006475	1.381118 0.308551	-0.554756 0.78848 -0.203069
0.6	-0.194334	-0.599198	0.857796	-0.535785	-0.624606	0.689463 0.007349	-0.114149 0.213049 0.060470	1.181190 0.072226	-0.277725 0.518351 -0.021288	1.483724 0.178931	-0.388431 0.724975 -0.177686
0.8	-0.330892	-0.765188	0.794173	-0.407233	0.512776	0.826020 0.004245	-0.076339 0.187457 0.041542	1.317748 0.041725	-0.193003 0.473939 -0.022047	1.620282 0.103369	-0.274013 0.672867 -0.142268
1.0	-0.5000	-0.925	0.734099	-0.311047	-0.423712	0.995128 0.002477	-0.051953 0.167025 0.029599	1.486856 0.024343	-0.135634 0.436056 -0.017856	1.7894 0.060305	0.195120 0.627302 -0.108677
1.2	-0.700576	-1.080055	0.679389	-0.239905	-0.353119	1.195704 0.001473	-0.036063 0.150323 0.02183	1.687432 0.014481	-0.096681 0.402997 -0.012766	1.989966 0.035874	-0.140672 0.586366 -0.080911
1.4	-0.931766	-1.231262	0.630440	-0.187316	0.297118	1.426894 0.000898	-0.025538 0.136445 0.016604	1.918622 0.008828	-0.07003 0.373861 -0.008267	2.221156 0.021870	-0.102884 0.549254 -0.059364
1.6	-1.192867	-1.379252	0.586984	-0.148191	-0.252461	1.687995 0.000562	-0.018489 0.124765 0.012972	2.179723 0.005525	-0.051579 0.348059 -0.004731	2.482257 0.013688	-0.0764 0.515551 -0.043150
1.8	-1.483283	-1.524486	0.548486	-0.118787	0.216572	1.978412 0.000361	-0.013640 0.114828 0.010372	2.470139 0.003550	-0.038522 0.325137 -0.002113	2.772673 0.008795	-0.057606 0.484950 -0.031128

## CAPÍTULO 5

### SOLUCIÓN NUMÉRICA EN FLUJO PERMANENTE

#### 5.1 PROPÓSITO

En el capítulo anterior se comprobó que las ecuaciones de Dressler (1978), caso particular de las aquí presentadas, son suficientemente seguras para predecir el comportamiento del flujo en un canal rectangular de fondo curvo. La predicción de las variables que intervienen fue verificada con los resultados experimentales de Sivakumaran *et al* (1983) y con los de otros autores, para los casos de vertedores, curvas circulares verticales y cimacios, empleando el menor orden de aproximación de las ecuaciones. Los resultados muestran que las ecuaciones son más seguras en un intervalo amplio de los parámetros, cuando se comparan con los datos experimentales asociados a los mismos.

Sin embargo, en todo lo anterior, las ecuaciones no han sido aplicadas a un canal con una o varias curvas donde pudiera haber puntos singulares con discontinuidades en  $\kappa$  y en  $d\kappa/ds$ , ni se han expuesto las dificultades de cálculo que pueden presentarse en su solución numérica. Por ello, el propósito de este capítulo consiste en plantear la solución de dichos casos y hacer las aplicaciones con un mayor orden de aproximación, si es necesario, para comparar los resultados con los experimentales disponibles.

#### 5.2 COMPARACIÓN CON LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT

En el capítulo 4 se presentó la aplicación de las nuevas ecuaciones (sin incluir la resistencia por fricción) a distintos casos de flujo en un canal rectangular de fondo curvo, donde ellas se convierten en las ecuaciones de Dressler (1978). Éstas fueron derivadas mediante la transformación de las ecuaciones de Euler al sistema coordenado aquí empleado, usando un método asintótico del tipo capa límite, y en su momento, se consideró que constituían una generalización de las ecuaciones de Saint-Venant (1871).

Éstas gobiernan el flujo transitorio en canales y utilizan la altura vertical  $h$  de la superficie libre desde el fondo, así como el componente horizontal  $v_x$  de la velocidad, ambos referidos a la distancia horizontal  $x$  en dirección del flujo en el canal y al tiempo  $t$ . Las ecuaciones de Saint-Venant para el canal rectangular son:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \tan \theta = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

Éstas contienen un solo término en  $\theta$ , que es el ángulo de inclinación del fondo del canal, pero en ellas no figura el componente vertical de la velocidad propio del flujo curvilíneo, ni se satisface la condición de frontera de que dicha velocidad sea tangente al fondo, ni contienen algún término relacionado con la curvatura del fondo. A pesar de ello se utilizan con frecuencia para predecir el comportamiento del flujo en canales de fondo curvo.

En cambio, las nuevas ecuaciones ya contienen desde el orden más bajo de aproximación (cero), no solo el ángulo  $\theta$ , sino también la curvatura  $\kappa$  del fondo y su derivada ( $\partial\kappa/\partial s$ ), además de que satisfacen las ecuaciones de frontera en el fondo y la superficie libre. En el siguiente orden de aproximación (uno), se calcula la distribución de los componentes  $u$  y  $w$  de la velocidad. Por estas razones se considera, y así se ha demostrado experimentalmente, que las nuevas ecuaciones son más seguras que las de Saint-Venant cuando el fondo es curvo.

Para incluir la curvatura del fondo y su derivada en el enfoque de Saint-Venant, se dispone de soluciones que utilizan correcciones de primero y segundo orden en la expansión asintótica del caso, como fue demostrado por Keller (1948). Dicha solución, aunque sistemática, se vuelve tediosa y por ello es impopular entre los ingenieros hidráulicos que la utilizan. Además, cualquier corrección de orden superior mejora el resultado sólo si la solución de orden cero es ya muy próxima a la solución exacta, de otra manera, se pierde la validez asintótica de la expansión.

Dressler y Yevjevich (1983), Sivakumaran *et al.* (1983) demostraron que las soluciones en flujo permanente de las ecuaciones de Saint-Venant (5.1 y 5.2) de orden cero, no son realistas cuando el fondo del canal tiene curvatura apreciable. La figura 5.1 muestra el perfil del fondo del vertedor empleado por Dressler y Yevjevich (1983) para llevar a cabo la solución del sistema de ecuaciones de Saint-Venant y el suyo propio sólo para el flujo permanente, ya que existen diferencias en los términos de ambos sistemas únicamente para este tipo de flujo. En la solución se empleó el método estándar de Runge-Kutta.

En el planteamiento de las ecuaciones de Saint-Venant no existen discontinuidades, ya que ellas no contienen los términos  $\kappa$  y  $d\kappa/ds$ , no así en las nuevas ecuaciones donde sí aparecen en los puntos B, C y D. Para evitar este inconveniente, los autores introdujeron dos intervalos de gradualización alrededor de los puntos B, C y D. En cada intervalo se hizo variar a  $d\kappa/ds$ , como un triángulo con área igual a la función delta original, de manera que  $\kappa$  varió cuadráticamente y  $\theta$  varió cúbicamente.

La figura 5.1 muestra los perfiles de la superficie libre del agua calculados en las secciones marcadas en el fondo al resolver los dos sistemas de ecuaciones. En la sección donde inicia el canal se consideró un tirante  $d_0 = 0.76$  m, velocidad  $u_0 = 3.35$  m/s y parámetro  $\mathcal{F}_0 = 1.22$  (en este caso igual al número de Froude). En el extremo final del canal se determinó que  $\mathcal{F} = 4.61$ .

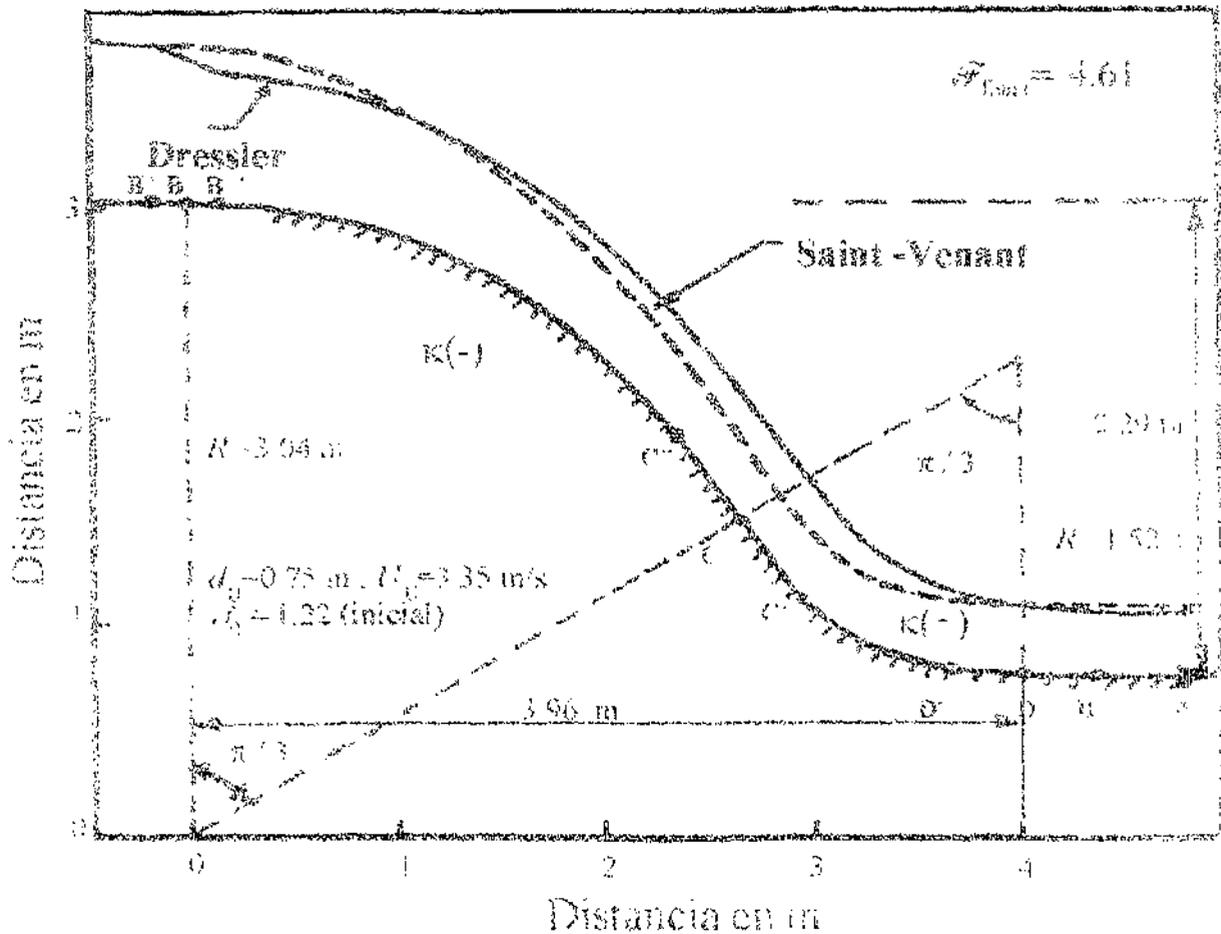


Figura 5.1. Comparación del flujo según teoría y según Saint-Venant; Dressler y Yevjevich (1983).

Las modificaciones geométricas introducidas por los intervalos de *gradualización* casi no produjeron cambios en los resultados con el modelo de Saint-Venant. Por el contrario, a pesar de las discontinuidades y el tamaño tan reducido de los intervalos de *gradualización*, los resultados de los modelos de Dressler son menos bruscos y convergen después de los intervalos. Se observa además que con la solución de Saint-Venant, el flujo en una sección a la mitad del canal es del orden de 50 por ciento menos profundo que con la solución de Dressler, si bien ambas soluciones casi coinciden al final del canal. Además, el espesor del flujo sufre un incremento de un 10 por ciento en la solución de Dressler al descender del punto  $C^-$  a  $C^+$  y ninguno en la de Saint-Venant.

Diferencias más importantes entre ambas soluciones se observan al comparar variables como la velocidad o la presión en el fondo. Con la primera, los componentes utilizados en cada sistema de ecuaciones son distintos. La presión en el fondo con la solución de Dressler registra variaciones según que la curva sea cóncava o convexa y es posible detectar la separación; en cambio, con la de Saint-Venant la distribución de la presión es siempre hidrostática, cualquiera que sea la concavidad.

## 5.3 ECUACIONES POR RESOLVER

### 5.3.1 Razones de la selección

El conjunto de ecuaciones obtenido se caracteriza porque contiene términos donde figuran  $\kappa$  y  $d\kappa/ds$  y se convierte en las convencionales cuando dichos términos tienden a cero. Estos aparecen sólo como factores de las derivadas parciales con respecto de las coordenadas en el espacio y no con respecto de la coordenada tiempo. De esta manera, la verificación que quisiera hacerse entre la teoría y los resultados que se obtuvieran con las ecuaciones de Saint-Venant o de observaciones experimentales, puede restringirse al flujo permanente, ya que es más sencillo que el no permanente, sobre todo por la vía experimental. En efecto, una verificación experimental completa en flujo no permanente no se ha efectuado ni siquiera para canales de fondo plano.

### 5.3.2 Ecuación dinámica

Cuando el flujo es permanente,  $\partial d/\partial t = 0$ , y las variables que intervienen en las ecuaciones diferenciales sólo dependen de  $s$ . Además, de la ecuación de continuidad (2.51),  $Q$  se vuelve constante y resulta

$$u_0 = \frac{Q}{L} \quad (5.1)$$

Por otra parte, de las ecuaciones (2.69a) y (2.75a) se tiene

$$\frac{d\zeta}{ds} + \frac{dE}{ds} + S_f = 0 \quad (5.2)$$

donde  $E$  es la energía específica en la sección del canal, definida mediante la ecuación (3.1) y  $\zeta$  es la elevación del fondo ( $n=0$ ) medida a partir de un plano arbitrario de referencia, de manera que  $d\zeta/ds = \text{sen } \theta$ .

De acuerdo con la ecuación (3.5b), se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial d} = \cos \theta (1 - F^2) \quad (5.3)$$

donde  $F$  es el número de Froude generalizado, definido por la ecuación (3.4) como sigue

$$F = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_c} = \frac{u_0 / \sqrt{g d \cos \theta}}{\left[ \frac{(1 - \kappa d)^3}{\kappa d - \frac{Td}{I_0}} \right]^{1/2}} \quad (5.4)$$

Toda vez que:  $\frac{d\zeta}{ds} = \frac{\partial E}{\partial d} \frac{dd}{ds}$ , la ecuación (5.2) se escribe entonces

$$\text{sen } \theta + \cos \theta (1 - F^2) \frac{dd}{ds} + S_f = 0$$

O bien, en la forma

$$\frac{dd}{ds} = \frac{-\text{sen } \theta - S_f}{\cos \theta (1 - F^2)} \quad (5.5a)$$

En la Hidráulica de Canales se acostumbra designar por  $S_b = -\text{sen } \theta$  a la pendiente del fondo plano, confundiénola con  $\tan \theta$  debido a que el ángulo  $\theta$  suele ser pequeño. En estas condiciones se obtiene la llamada ecuación dinámica convencional. Sin embargo, la consideración ya no es cierta para el caso presente y se prefiere hacer mejor la designación correcta de pendiente local del fondo:  $S_b = -\tan \theta$ ; la ecuación (5.4a) se presenta entonces en la forma

$$\frac{dd}{ds} = \frac{S_b - S_f \sec \theta}{1 - F^2} \quad (5.5b)$$

La ecuación (5.5) en cualquiera de sus formas es una expresión generalizada para calcular el perfil del flujo curvilíneo, de la misma manera que la ecuación dinámica se usa para el rectilíneo. En ambos casos se acepta que el flujo sea poco profundo y gradualmente variado, ya que cuando  $\kappa$  y  $d\kappa/ds$  tienden a cero, la ecuación (5.4a) se convierte en la ecuación dinámica convencional.

El parámetro para caracterizar a un flujo como somero sería la relación entre el tirante  $d$  y su radio  $R$  de curvatura local del fondo, es decir,  $d/R = \kappa d$ . El flujo es gradualmente variado cuando

$$\left( \frac{d_{max}}{L_{mbn}} \right)^2 = \sigma \ll 1 \quad (5.6)$$

donde  $d_{max}$  es el tirante máximo y  $L_{mbn}$  es una longitud  $s$  adyacente, característica del perfil de la superficie libre en el plano  $(s, n)$ . Un valor pequeño de  $\sigma$  se interpreta como una pendiente pequeña (o sólo moderada) de la superficie libre y requiere que la geometría del fondo no cambie rápidamente.

El cálculo se circunscribe a la solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDC) (5.5b) por algún método numérico, utilizando como condiciones de frontera los valores conocidos de  $d = d_0$  y  $Q = Q_0$  en un punto dado  $s = s_0$ . La pendiente de fricción queda expresada por la ecuación (2.78b)

$$S_f = - \frac{\lambda}{g} a_v \frac{u_0^2}{R_h} \quad (5.7)$$

donde  $\lambda$  depende del comportamiento hidráulico de la pared y para una pared lisa se propuso la ecuación (2.81b) generalizada de Blasius:

$$\lambda = \frac{0.028}{R_v^{0.25}} = \frac{0.028 v^{0.25} P^{0.25}}{Q^{0.25}} \quad (5.8)$$

La ecuación (2.82) se propuso para el comportamiento hidráulico de transición:

$$\lambda = - \frac{1}{8} \left[ \alpha_1 \log \frac{\alpha}{R_v \sqrt{f}} + \frac{k_s / R_h}{c} \right]^2 \quad (5.9)$$

y la ecuación (2.83) generalizada de Manning

$$\lambda = \frac{g}{R_h^{1/3}} \quad (5.10)$$

para el comportamiento de pared rugosa. En estas expresiones  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $n_M$  es el coeficiente de Manning,  $P$  el perímetro mojado y  $R_h$  el radio hidráulico de la sección. El factor  $a_v$  está dado por la ecuación (2.79), es decir

$$a_v = \frac{B_0 + 2\mathbb{I}_f}{P} \quad (5.11)$$

La solución de la ecuación (5.4) lleva a los valores de  $d$  en distintas secciones de un canal ubicadas mediante la coordenada  $s$ .

### 5.3.3 Ecuaciones adicionales de solución directa.

La distribución de los componentes de la velocidad en dirección paralela y normal a  $u_0$  en un punto  $(s, n)$ , así como de la presión en el mismo punto, están dadas por las ecuaciones (2.56), (2.63b) y (2.71b), que son:

$$u(s, n, t) = \frac{u_0(s)}{1 - \kappa n} \quad (5.12)$$

$$B J w = - \mathbb{I}_1 \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{d\kappa}{ds} \mathbb{I}_2 u_0 + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial B}{\partial s} \ln(1 - \kappa n) u_0 \quad (5.13)$$

$$\frac{p}{g\rho} = (d - n) \cos \theta + \left[ \frac{1}{(1 - \kappa d)^2} - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (5.14)$$

En estas expresiones,  $\mathbb{I}_1$  e  $\mathbb{I}_2$  son las integrales definidas por las ecuaciones (2.64) y (2.65), y se valúan de acuerdo con la forma de la sección.

Cuando se desea calcular sólo la presión en el fondo del canal, la ecuación (5.14) se convierte en la (2.72) y es

$$\frac{p_0}{g\rho} = d \cos \theta + \left[ (1 - \kappa d)^{-2} - 1 \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (5.15)$$

El sistema de ecuaciones (5.5) a (5.15) tiene la ventaja de que se puede resolver primero la ecuación (5.5) con las condiciones de frontera disponibles, y con los resultados calcular después las restantes variables de manera directa mediante las ecuaciones (5.12) a (5.15).

## 5.4 SOLUCIÓN Y VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

### 5.4.1 Geometría del canal utilizado

Con objeto de enfrentar las posibles dificultades que pudiera tener la solución numérica de la ecuación dinámica (EDO), se quiso ejemplificar mediante su aplicación a un canal donde hubiese suficientes observaciones experimentales para confrontarlas con los resultados teóricos.

El canal fue el utilizado por Sivakumaran y Yevjevich (1987) con una sección rectangular de ancho  $b = 20.32$  cm y una geometría del fondo como se presenta en la figura 5.2, elegida a propósito con las tres partes siguientes:

1. Un fondo plano horizontal en el inicio, donde  $\theta = 0$ ,  $\kappa = 0$  y  $d\kappa/ds = 0$  ( $s \leq 0$ ).
2. Un arco circular convexo intermedio, de radio  $R = 0.381$  m y ángulo del sector  $\phi = 75.17^\circ$  (1.311964 rad), donde  $\theta = -s/R$ ,  $\kappa = -1/R$ ,  $d\kappa/ds = 0$  ( $0 \leq s \leq \phi R$ ).
3. Un arco circular concavo al final, de radio  $R = 0.381$  m y ángulo del sector  $\psi = 120.09^\circ$  (2.095965899 rad), donde  $\theta = s/R - 2\phi$ ,  $\kappa = 1/R$  y  $d\kappa/ds = 0$  ( $\phi R \leq s \leq \phi R + \psi R$ ).

Al final, donde  $s = \phi R + \psi R$ , hay una caída libre.

Estas partes se unen tangencialmente en los puntos O ( $s = 0$ ) y A ( $s = \phi R = 0.4999$  m) y forman una curva continua clase 1, donde sólo  $\zeta(s)$  y  $\theta(s)$  son continuas. La curvatura  $\kappa$  en los puntos O y A tiene las discontinuidades de la función paso, que cambia bruscamente de un valor cero a uno negativo y después (también bruscamente) a uno positivo. Su derivada ( $d\kappa/ds$ ) tiene a su vez las singularidades de la función delta  $\delta(s)$  en los mismos puntos, como derivada de la función paso.

Estas dificultades en la solución afectan únicamente la solución numérica de la ecuación (5.5), ya que contiene términos en que intervienen  $\kappa$  y  $d\kappa/ds$ . De querer resolver la ecuación convencional correspondiente, derivada de la de Saint-Venant, la geometría elegida no afectaría su solución.

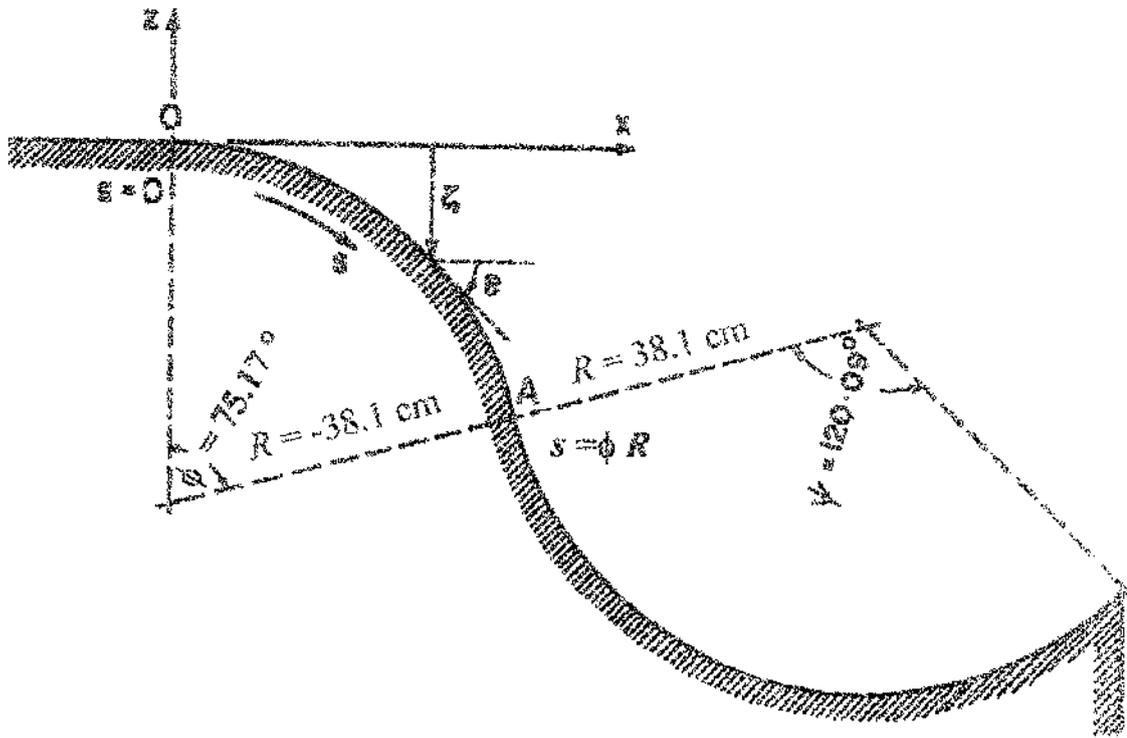


Figura 5.2 Geometría del fondo

#### 5.4.2 Solución numérica de la EDO

La ecuación diferencial ordinaria (EDO, 5.5) del flujo permanente variado es la que debe resolverse para el canal rectangular con la geometría propuesta. La ecuación para la pendiente del fondo en la parte convexa y para  $\sec \theta$  son:

$$S_0 = - (1 - \kappa d) \tan \theta \quad (5.16)$$

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{-s}{R}\right) \quad (5.17a); \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos(-s/R)} \quad (5.17b)$$

La ecuación para la velocidad en el fondo es

$$u_0(s) = - \frac{\kappa Q_0}{b \ln(1 - \kappa d)} \quad (5.18)$$

El cuadrado del número de Froude en la ecuación (5.4) se obtiene con el auxilio de la ecuación (3.10) y vale

$$F^2 = \frac{u_0^2}{g d \cos \theta} = \frac{\kappa^2 Q_0^2}{g d \cos \theta b^2 \ln^2(1 - \kappa d)} \quad (5.19)$$

Para la pendiente de fricción según la ecuación (5.7),  $\alpha$ , está dado por la ecuación (2.78b) y  $\lambda$  por la ecuación (5.8) para el plexiglass, de manera que  $S_f$  se obtiene de la expresión

$$S_f = a_v a_Q \left( \frac{U^{1/4}}{\sqrt{2} K^2} \right) \frac{u_0^{7/4}}{R_0^{5/4}} \quad (5.20)$$

donde  $K$  agrupa las constantes y se define al factor

$$a_v = \frac{b - \frac{2 \ln(1 - \kappa d)}{\kappa}}{b + 2d} \quad (5.21)$$

$$a_Q = \left[ - \frac{\kappa d}{\ln(1 - \kappa d)} \right]^{1/4} \quad (5.22)$$

El valor  $b = B$  es el que se usa en la ecuación (5.13) y de las ecuaciones (2.105) y (2.107), los valores de  $I_1$  e  $I_2$  son:

$$I_1 = - \frac{b}{\kappa} \ln(1 - \kappa n) \quad (5.23)$$

$$I_2 = \frac{b}{\kappa^2} \left[ - \frac{\kappa n}{1 - \kappa n} + \ln(1 - \kappa n) \right] \quad (5.24)$$

La ecuación diferencial ordinaria (5.5) se expresa también en la forma general

$$\frac{dd}{ds} = \alpha(s, d(s), Q_0) \quad (5.25)$$

Ésta se integra numéricamente utilizando la condición de frontera con valores conocidos:  $d(s_0) = h_0$  y  $Q = Q_0$  en el punto  $s_0 = -0.25 \text{ m}$ . La integración se efectúa desde  $s_0$  y a lo largo del fondo, utilizando algún procedimiento que determine la solución  $d(s)$  en puntos equidistantes sobre dicho fondo. Para calcular el valor de las integrales se utilizaron las ecuaciones (5.23) y (5.24) para la sección rectangular. Las restantes variables se obtuvieron de las ecuaciones (5.12) y (5.15). Debido a que las paredes y fondo del canal experimental se construyeron de plexiglas, se consideró prudente obtener la solución con y sin fricción, utilizando en el primer caso la ecuación empírica modificada de Blasius (5.8) para el cálculo de la pendiente de fricción apropiada. Se encontró que la diferencia entre los valores de cada variable calculada fue menor del 1 por ciento en ambos casos.

Las discontinuidades en  $\kappa$  del tipo de función paso y las singularidades en  $d\kappa/ds$  del tipo de función delta en los puntos  $O(s=0)$  y  $A(s=\phi R)$  hacen que  $\alpha$  en la ecuación (5.25) sea indefinida en dichos puntos. Esto implica que la integración de dicha ecuación no puede continuar más allá de dichos puntos. Para vencer esta dificultad en el cálculo, se utilizó el artificio de introducir curvas continuas de transición para la geometría del fondo de modo que en los intervalos de gradualización:  $-L_1 \leq s \leq L_1$  para el punto  $O$ ; y  $\phi R - L_2 \leq s \leq \phi R + L_2$  para el punto  $A$ ; de modo que los valores de  $\kappa$ ,  $d\kappa/ds$  y  $\theta$  varíen continuamente y conduzcan a los valores respectivos en las fronteras de los intervalos. De esta manera, el perfil entero del fondo se modifica y cambia a una curva con valores continuos de  $\theta$ ,  $\kappa$  y  $d\kappa/ds$ , si bien la geometría del fondo varía *rápidamente*, ya que el valor usado para las longitudes del intervalo de gradualización,  $2L_1 = 2L_2 = 2$  cm, es pequeño.

Los resultados obtenidos del cálculo con este artificio muestran siempre transiciones rápidas en las soluciones dentro de los intervalos reducidos de gradualización insertados, debido a que éstos definen una geometría que no varía gradualmente, pero que sí evita la singularidad infinita en  $d\kappa/ds$  y la dificultad del cálculo numérico a través de ella.

Las curvas de transición y los intervalos de gradualización introducidos tuvieron un propósito puramente computacional; con ellos no se pretendió describir con mayor seguridad el flujo, ya que de arranque se violaba una suposición básica de la teoría; además, no tuvieron obviamente ningún efecto en los experimentos. Las ecuaciones utilizadas para describir la geometría del fondo en los intervalos uniformes y de gradualización se presentan con mayor detalle en el Apéndice A.1 de este capítulo.

Para efectuar la integración numérica de la ecuación (5.1b) se empleó el método de Runge-Kutta de 4° orden reconocido por su exactitud, y para ello se emplearon intervalos uniformes  $\Delta s = 2$  cm. Para su aplicación se pensó en utilizar un programa de cómputo que condujera a los valores de las variables hidráulicas en cada punto, pero también a su representación gráfica para facilitar la interpretación del comportamiento del flujo. Por ello se decidió utilizar el lenguaje de programación MATLAB, el cual se puede considerar, como el FORTRAN o el C, todavía importante en la computación de alto rendimiento, si bien con una velocidad de cómputo mayor que el FORTRAN. Aunque se dispuso del lenguaje MATLAB mencionado, fue necesario elaborar además los subprogramas de cómputo necesarios para introducir la geometría modificada del canal dentro de los intervalos de las partes convexa y cóncava del fondo. El detalle conjunto de esta actividad se describe en el Apéndice A.2 de este capítulo.

La integración se efectuó para las cuatro condiciones de frontera que se presentan en la tabla 5.1, si bien en Sivakumaran y Yevjevich (1987) sólo se presentan los resultados experimentales para los dos primeros flujos, utilizando en todos ellos el mismo intervalo uniforme  $\Delta s = 2$  cm.

Tabla 5.1 Condiciones de frontera aguas arriba (ancho  $b = 20.32$  cm)

Flujo	$d_0$ cm	$U_0$ cm/s	$Q_0 = b h_0 U_0$ cm <sup>3</sup> /s	$U_0 / \sqrt{g h_0}$ Froude
a	17.4	140.21	49573.77	1.073
b	13.0	118.87	31400.70	1.053
c	10.0	100.58	20437.86	1.0116
d	6.5	80.77	10668.10	1.012

\* $d_0$  es el tirante vertical en la sección  $s_0 = -25$  cm,  $U_0$  es la velocidad media y  $Q_0$  es el gasto en la misma sección.

Además del valor  $d(s)$  para cada condición de flujo, se calcularon también los componentes  $u_0$  (tangencial) y la distribución del componente normal  $w$  de la velocidad en los mismos puntos. También se obtuvo la variación de la presión en el fondo sobre el eje del canal.

### 5.4.3 Experimentación

La instalación experimental utilizada se presenta en la figura 5.3. Después de establecer una condición de operación fija de la bomba, se midieron los perfiles de distribución de la velocidad horizontal (promediada en el tiempo) en la sección X-X ( $s = s_0 = -25$  cm) de la figura, en puntos ubicados a distancias iguales de 1 cm. Para ello se utilizó un tubo de Pitot (conectado a un tubo U vertical con agua, cuya precisión era de 1 mm). Los resultados permitieron obtener la gráfica de distribución de la velocidad horizontal del flujo, la cual se encontró prácticamente uniforme, excepto por el brusco decremento que se registra en la vecindad del fondo por efecto de la capa límite. Esto permitió obtener la velocidad media  $U_0$  en la sección X - X. El tirante del flujo  $d_0$  en dicha sección se midió con un limnómetro vertical de punta y con ambos se calculó el gasto. El experimento se diseñó de manera que el flujo fuese estrictamente supercrítico en la sección  $s = s_0$  (X - X), es decir,  $U_0 / \sqrt{g d_0} > 1$ .

Los autores adoptaron el mismo procedimiento de medición descrito en Sivakumaran *et al* (1983) para obtener las cargas de presión promediadas en el tiempo,  $[p(0)_i - p(d)]/g\rho$ , en los puntos  $s = 5i$  cm ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) a lo largo del eje de simetría del fondo, utilizando piezómetros verticales con agua (precisión de 2.54 mm) previamente dispuestos en dichos puntos. Los tirantes  $d_i$  del flujo (promediados en el tiempo) en dichos puntos se midieron en dirección normal al fondo usando una escala milimétrica y repitiendo el procedimiento para las cuatro condiciones del flujo de la tabla 5.1, mismas que se usaron como condiciones de frontera en el cómputo. Para los casos de flujo *a* y *b*, las distribuciones variables del componente de la velocidad  $u(n)$  en la dirección *s* (promediados en el tiempo) se midieron nuevamente en la sección Y-Y de la figura 5.3 ( $s = 22.57$  cm), utilizando el mismo tubo de Pitot usado en la medición de la velocidad.

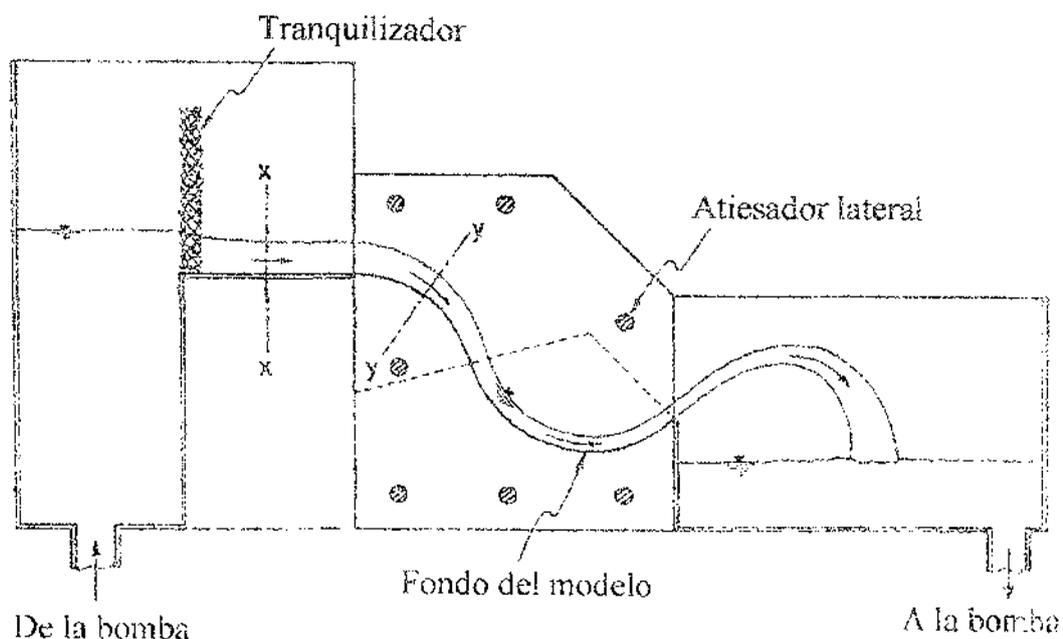


Figura 5.3 Dispositivo experimental

Las variables relativas al tirante y distribución de la velocidad se obtuvieron con la seguridad que admitían las fluctuaciones turbulentas del flujo de acuerdo con los instrumentos usados. Las mediciones se omitieron cuando las fluctuaciones fueran excesivas, lo cual ocurrió en la parte cóncava de la instalación con los flujos de mayor velocidad.

#### 5.4.4 Comparación de resultados

La superficie libre calculada mediante la teoría y la obtenida experimentalmente se presentan en las figuras 5.4 ( a a la f) para las cuatro condiciones de flujo de la tabla 5.1 ( a a d, respectivamente). En ellas aparecen los resultados obtenidos por los autores de los experimentos mediante las ecuaciones de Saint - Venant, en las figuras 5.5 a a d se muestra también la comparación de los perfiles longitudinales de la presión en el fondo para las cuatro condiciones de flujo de la tabla 5.1. Los resultados de la presión en el fondo con la teoría de Saint - Venant se presenta únicamente para el caso de las condiciones que se indican en la figura 5.5a.

En las figuras 5.6 a y b se compara la distribución de la velocidad tangencial calculada con la ecuación (5.12) y la obtenida experimentalmente. La teoría de Saint - Venant prevé una distribución uniforme de dicha velocidad y por ello no se muestra. Debe observarse que la diferencia entre los valores medidos y los calculados es realmente pequeña, ya que el cero de la escala de velocidades se muestra muy a la izquierda y no aparece en las figuras.

#### 5.4.5 Inaplicabilidad de la teoría en regiones de variación rápida del fondo

El artificio introducido de gradualizar el fondo solventó la dificultad de manejar una singularidad en el cálculo numérico. Las figuras 5.4 a a la d muestran que el flujo real cerca de los puntos singulares se comporta bastante diferente de las soluciones obtenidas mediante la teoría. En particular, el flujo calculado en las inmediaciones de A varía rápidamente dentro de los 2 cm del intervalo de gradualización en el fondo, pero el flujo real varía lentamente en un intervalo mucho más amplio, entre  $s = 40$  cm y  $s = 70$  cm.

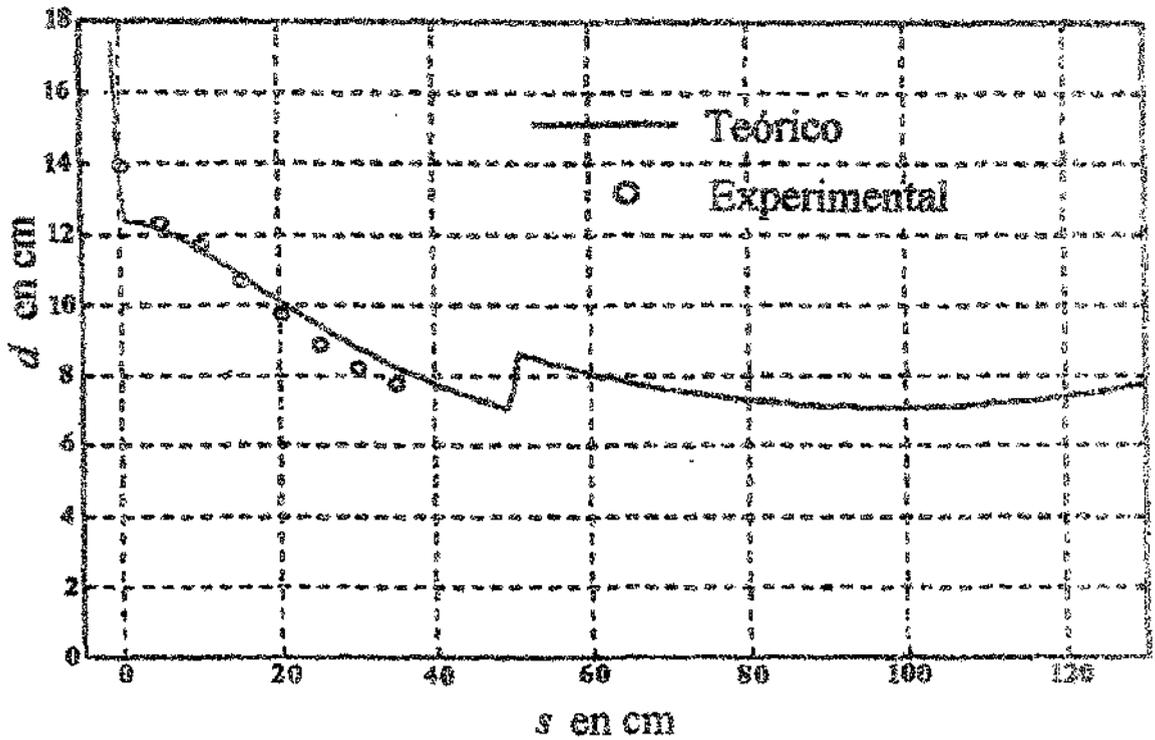


Figura 5.4a Valores teóricos y experimentales para las condiciones de flujo (a)

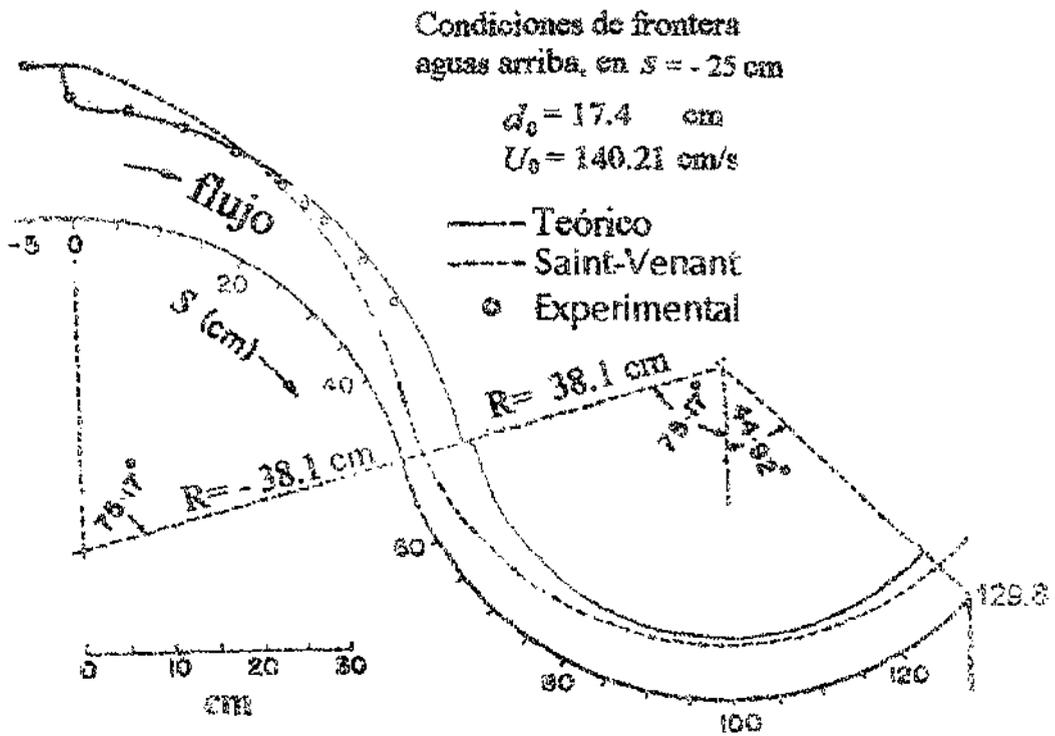


Figura 5.4b Comparación de perfiles hidráulicos para las condiciones de flujo (a)

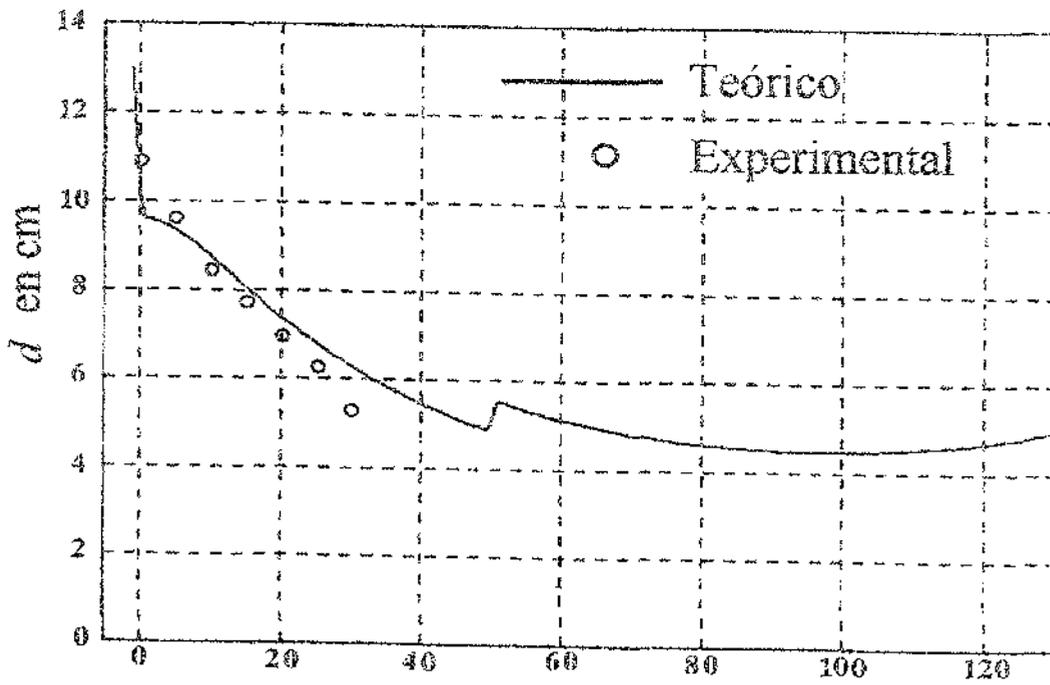


Figura 5.4c. Valores teóricos y experimentales para las condiciones de flujo (b)

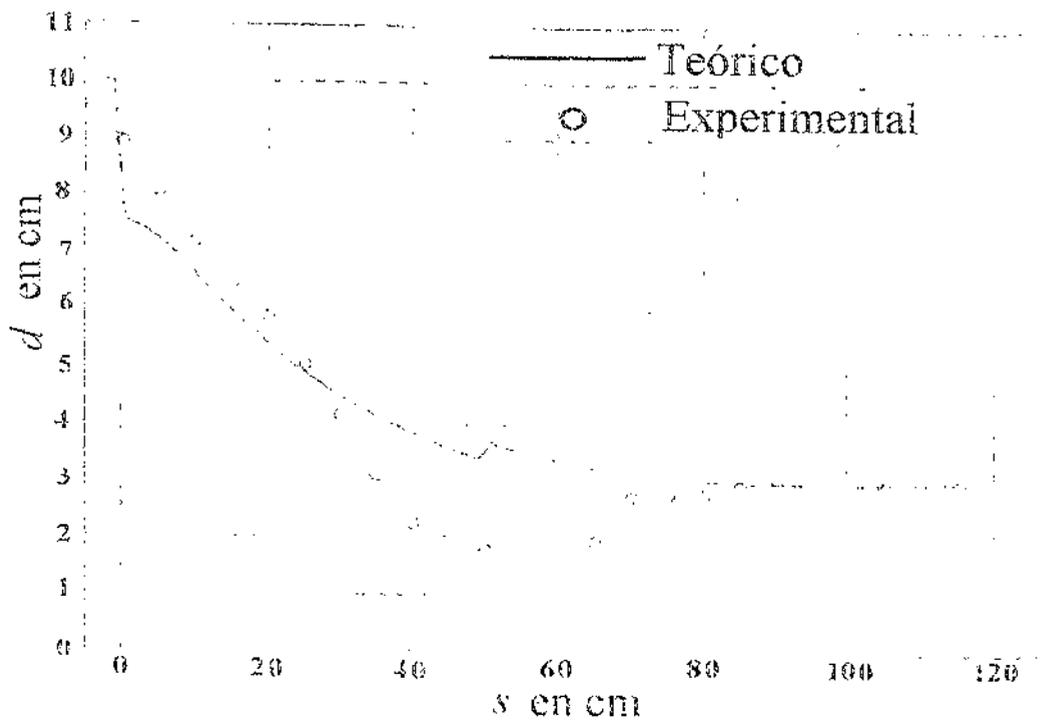


Figura 5.4d. Valores teóricos y experimentales para las condiciones de flujo (c)

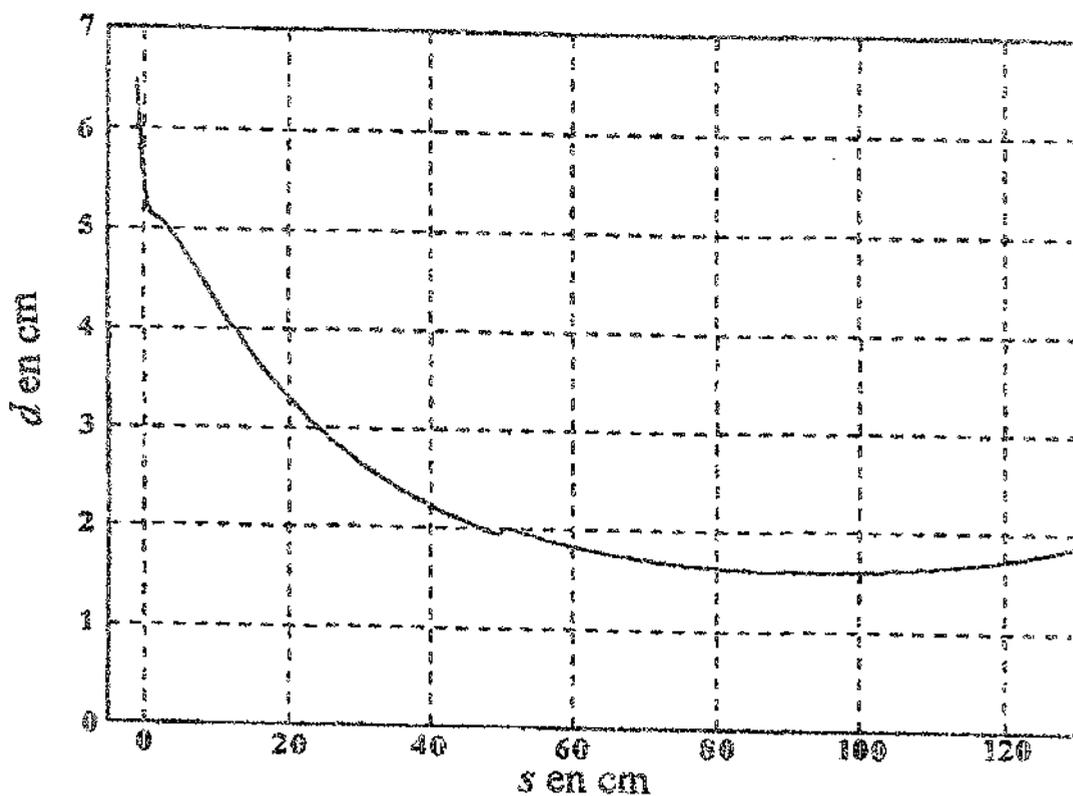


Figura 5.4e. Valores teóricos para las condiciones de flujo (d)

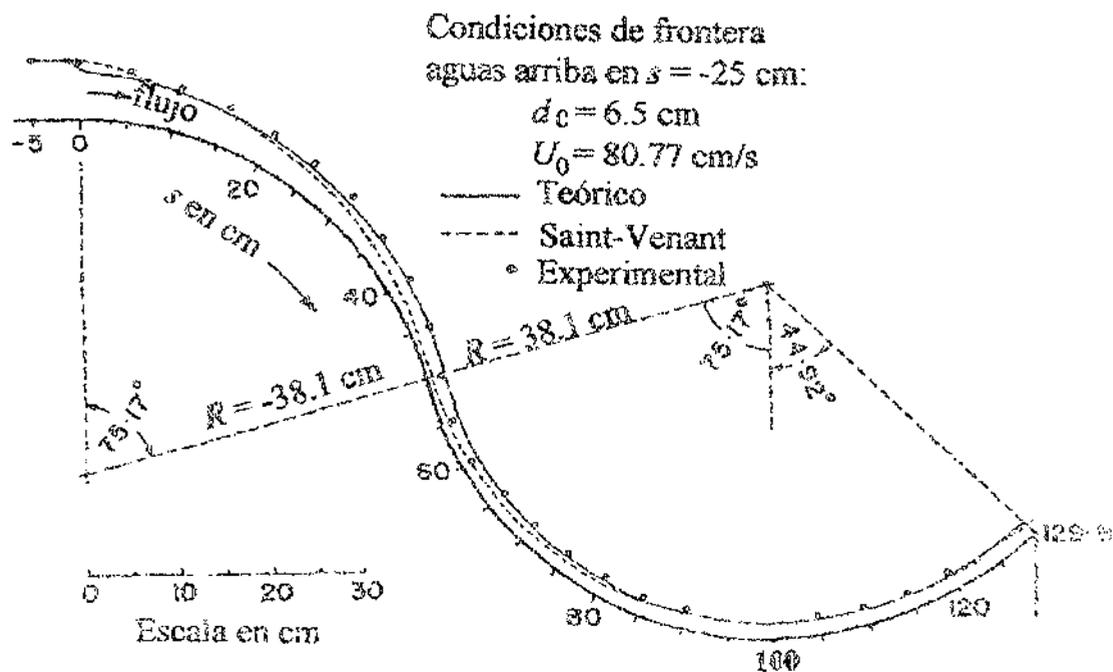


Figura 5.4f. Comparación de perfiles hidráulicos para las condiciones de flujo (d)

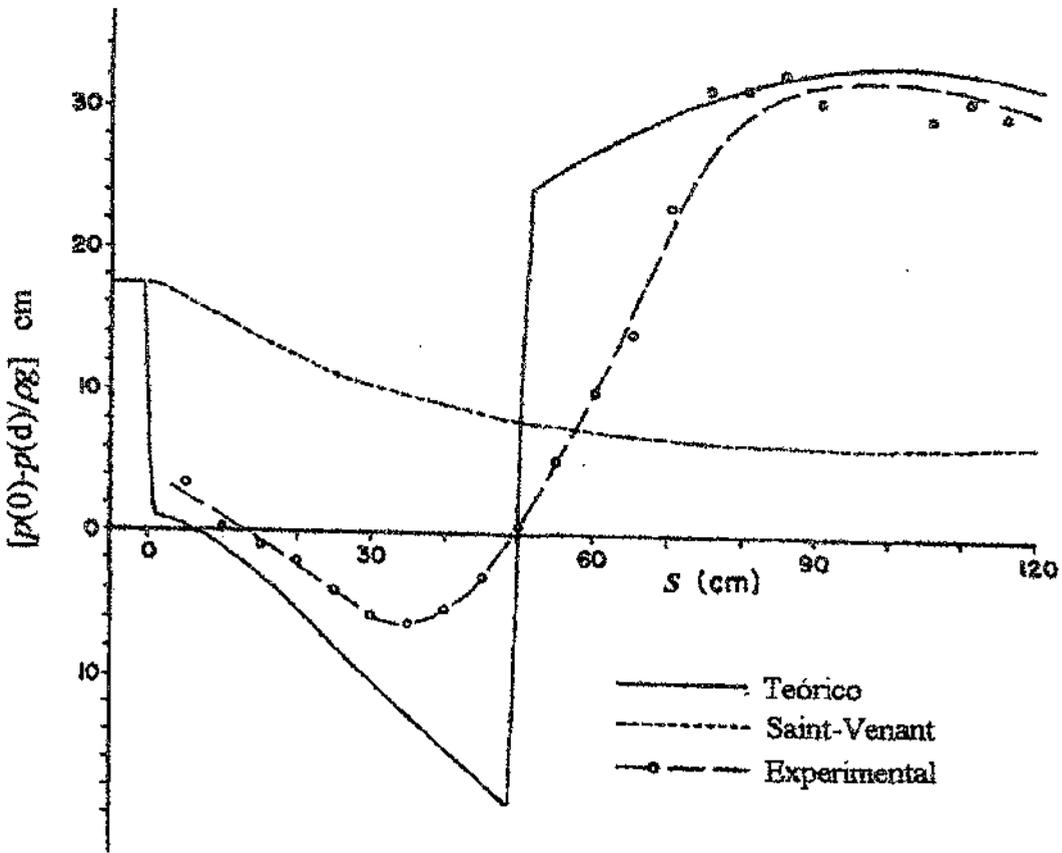


Figura 5.5a. Comparación del perfil longitudinal de la presión en el fondo para las condiciones de flujo (a)

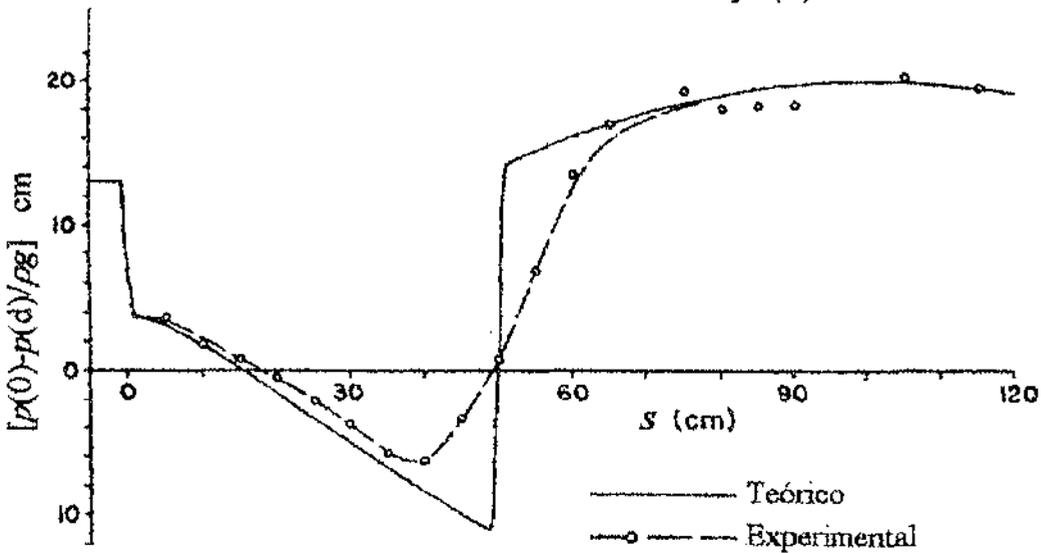


Figura 5.5b. Comparación del perfil longitudinal de la presión en el fondo para las condiciones de flujo (b)

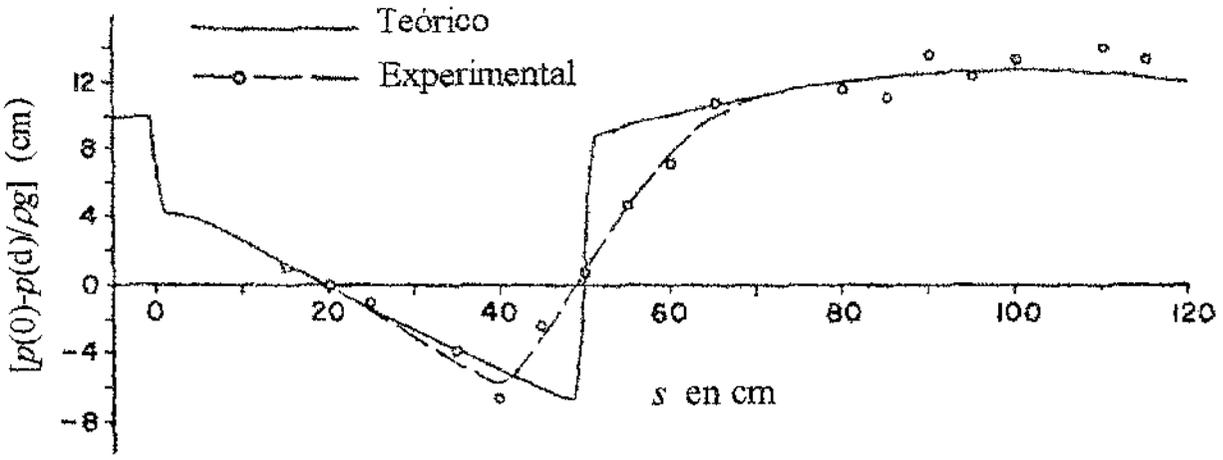


Figura 5.5c Comparación de las distribuciones de la presión en el fondo para las condiciones de flujo (c)

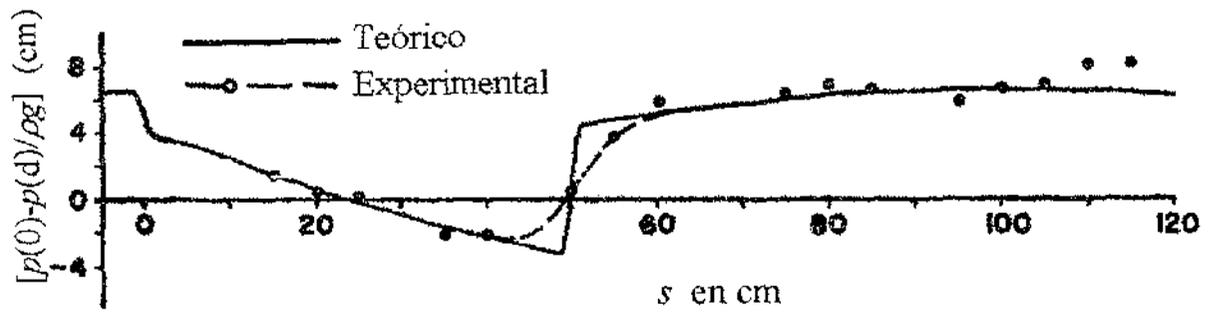


Figura 5.5d Comparación de las distribuciones de la presión en el fondo para las condiciones de flujo (d)

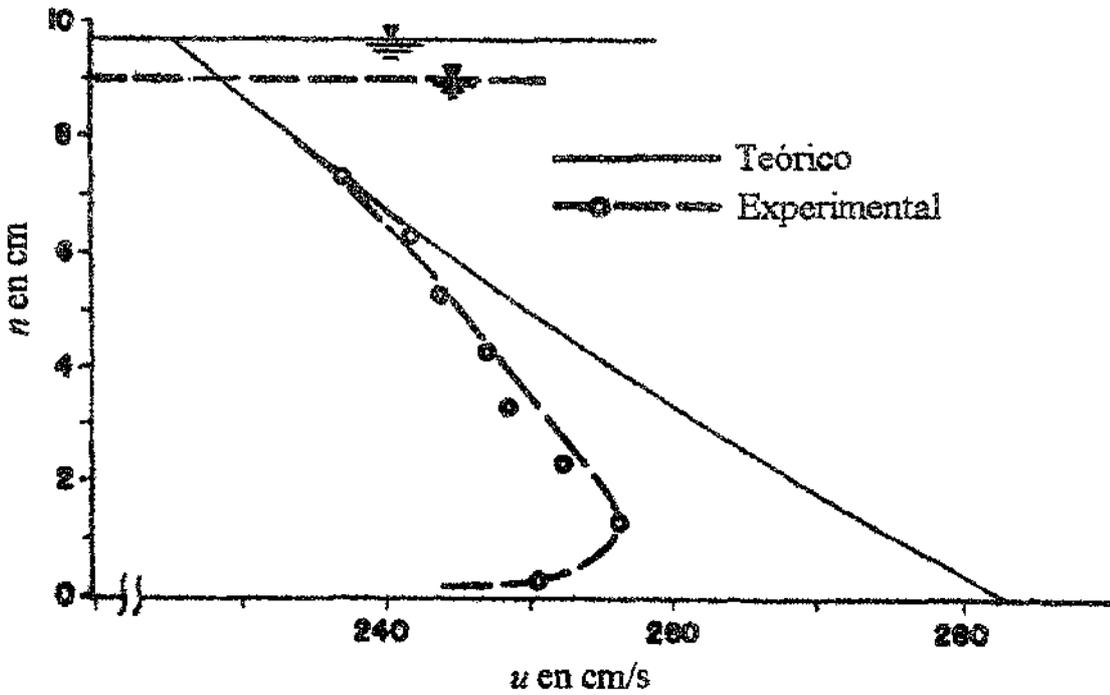


Figura 5.6a Comparación de las distribuciones de la velocidad tangencial en la sección  $s = 22.57$  cm para las condiciones de flujo (a)

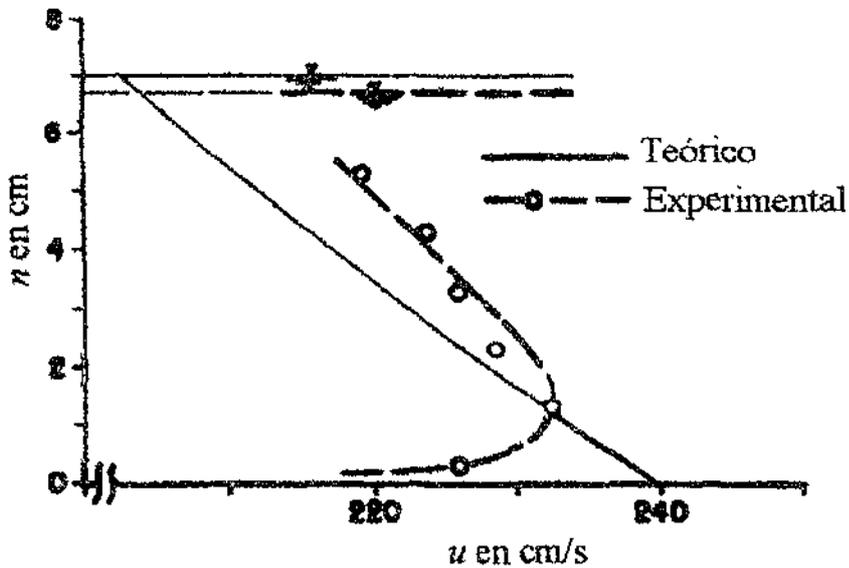


Figura 5.6b Comparación de las distribuciones de la velocidad tangencial en la sección  $s = 22.57$  cm para las condiciones de flujo (b)

## CAPÍTULO 6

### GENERALIZACIÓN Y CONCLUSIONES

#### 6.1 ANTECEDENTES

En el subcapítulo 2.7 se expuso la necesidad de disponer de un conjunto particular de ecuaciones para cada forma de la sección del canal. Se obtuvo así el conjunto que corresponde al canal trapecial y a sus casos particulares, el rectangular y el triangular, resolviendo por separado las integrales  $I_1$ ,  $I_Q$ ,  $I_2$  e  $I_f$  que figuran en las ecuaciones generales expuestas en el subcapítulo 2.4. Se obtuvo también la solución de las integrales  $I_1$  e  $I_Q$  para la sección circular, con objeto de aplicarlas en el análisis del régimen crítico (capítulo 3), pero sin llegar al planteamiento completo del sistema de ecuaciones correspondiente. Este sistema sería aplicable a obras de excedencia que descargan a túneles con perfil de fondo curvo, como es el caso de grandes obras como los vertedores de la Presa El Infiernillo (figura 6.1) y de Chicoasén (figura 6.2), que por su magnitud e importancia ameritan un diseño cuidadoso de sus distintas partes. Para ello habría que destacar que aún cuando fuese posible determinar el conjunto de ecuaciones para la sección circular, su aplicación a las obras mencionadas resultaría incompleta, toda vez que existen secciones distintas de la circular en los tramos de transición, ya que éstos se forman con geometrías compuestas, como las que se muestran en las figuras antes mencionadas, que necesitan de ecuaciones particulares para cada sección de geometría distinta.

El propósito de este capítulo consiste en plantear un enfoque más general en la solución de las ecuaciones para extender su aplicación a cualquier forma de sección sin perder precisión, utilizando para ello los desarrollos y deducciones ya efectuadas. Se presentan también las conclusiones generales más importantes del trabajo y se mencionan aquellos aspectos que faltarían por resolver, los cuales podrían ser motivo de nuevos trabajos de investigación sobre el tema.

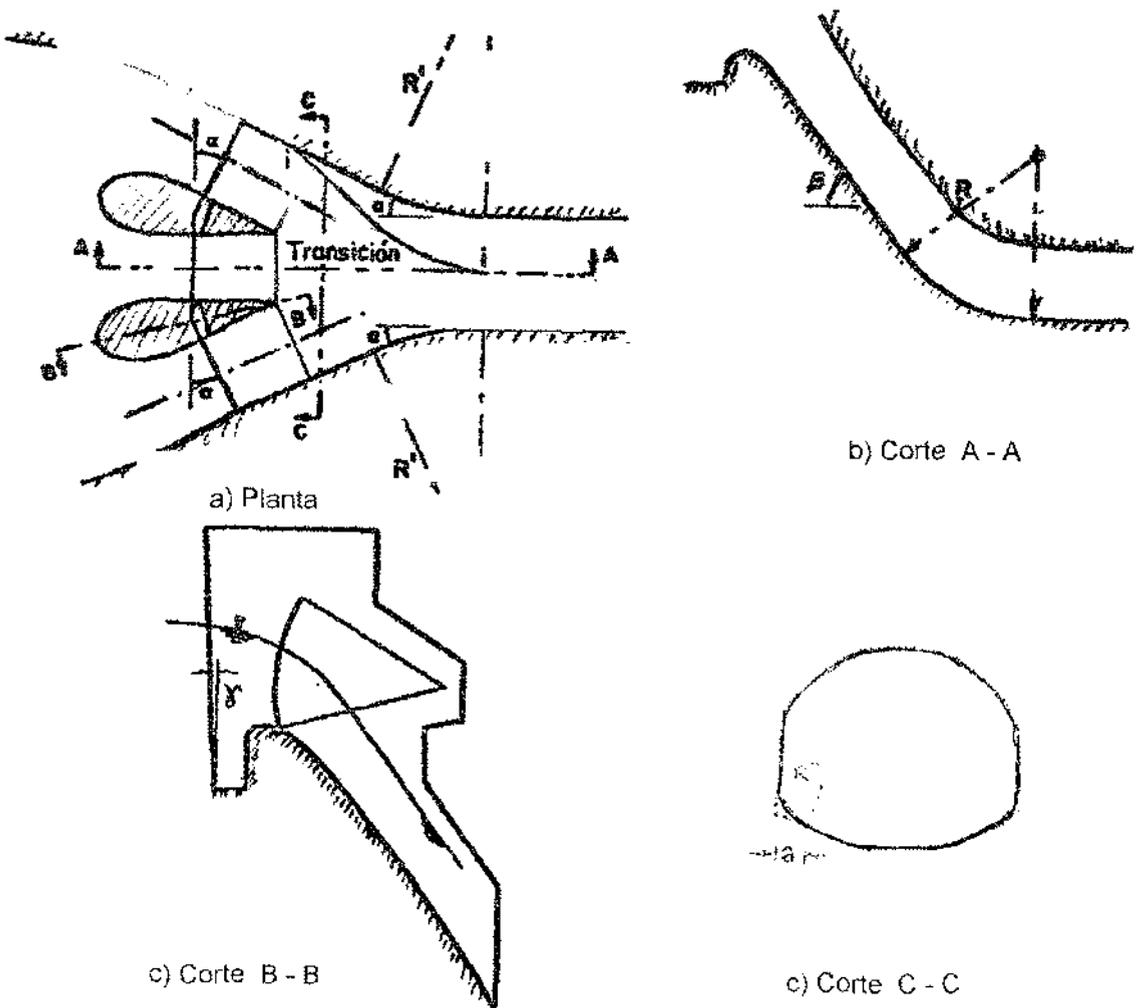
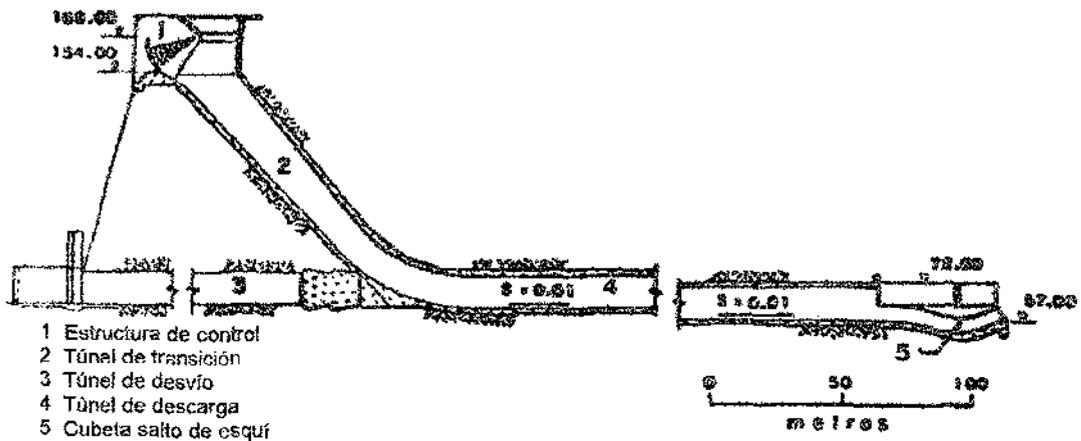
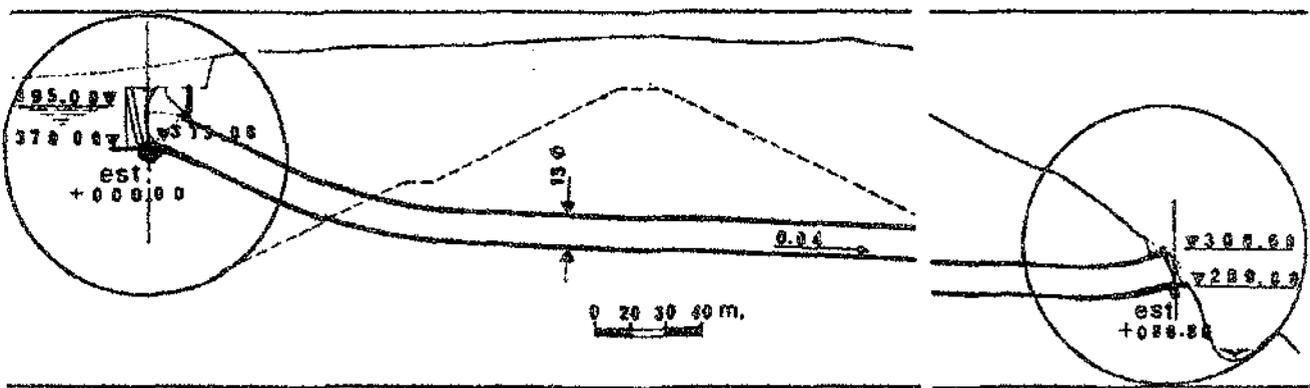


Fig. 6.1 Obra de excedencia de la Presa El Infiernillo, Gro. y Mich.



corte longitudinal

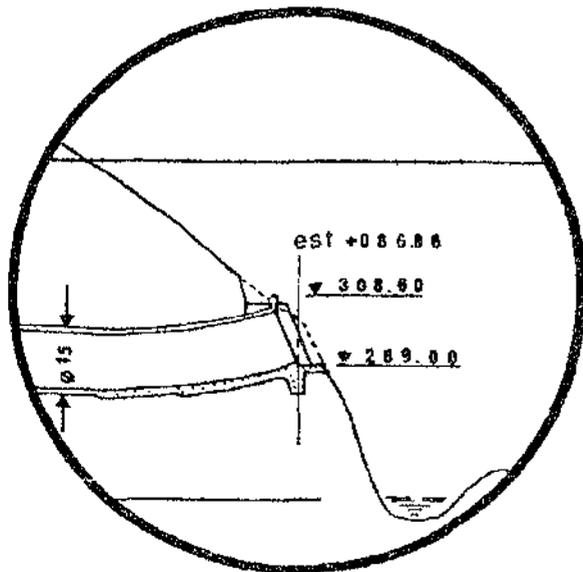
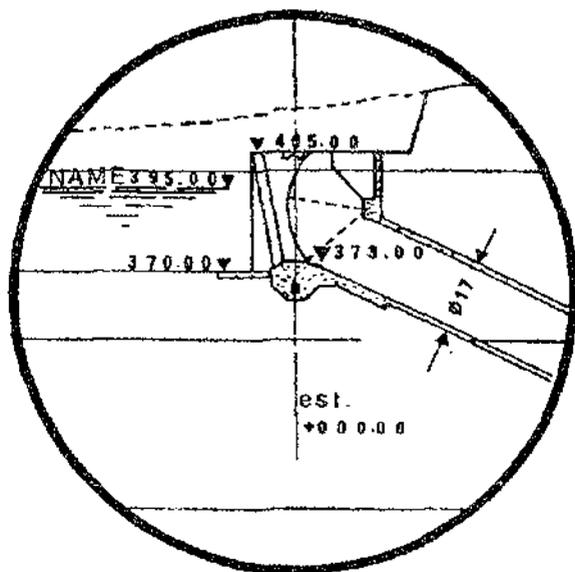


Fig. 6.2 Obra de excedencia de la Presa Chicoasen Chis.

## 6.2 PROCEDIMIENTO GENERAL

### 6.2.1 Aspectos a considerar.

Las ecuaciones que aquí se manejan son para flujo permanente, debido a que es el caso general en obras como las antes mencionadas. Sin embargo, ya se ha indicado que el tratamiento del flujo impermanente implica únicamente agregar términos dependientes del tiempo deducidos en los desarrollos generales, los cuales harían más elaborada la solución aunque no imposible.

La solución numérica presentada en el capítulo anterior mostró la poca importancia que tiene la magnitud del componente transversal  $w_d$  de la velocidad, respecto del componente normal  $u_d$  de la misma, ambos al nivel de la superficie libre. El valor de  $w_d$  poco afecta la magnitud de la velocidad en la superficie libre y tiene menor efecto en los restantes términos. Por esta razón, la distribución del componente  $w$  en la sección del canal tiene menos importancia en los resultados finales y puede eliminarse de los cálculos. Esto cancela la necesidad de encontrar la solución directa de las integrales  $I_1$  e  $I_2$  para cualquier forma de sección, pero se puede determinar el valor numérico de ellas entre los límites 0 y  $d$ , así como el de las integrales  $I_Q$  e  $I_r$  para secciones de geometría igualmente complicada. Para los restantes cálculos las cuatro integrales se vuelven definidas y su valor puede determinarse más fácilmente con programas de cómputo sin importar la complejidad en la geometría de la sección.

### 6.2.2. Solución de las integrales para la sección circular

#### a) Integral $I_1$

Para plantear el sistema de ecuaciones de cada sección, es necesario resolver las integrales  $I_1$ ,  $I_Q$  e  $I_2$  según la geometría que ella tenga. En el inciso 2.7.7 fueron resueltas  $I_1$  e  $I_Q$  para la sección circular (figura 3.5) de diámetro  $D$  y curvatura  $\kappa$  en el fondo. La primera integral es

$$I_1 = 2 \int_0^n \frac{\sqrt{Dn - n^2}}{1 - \kappa n} dn$$

y según la ecuación (2.118), resultó

$$\begin{aligned}
 I_1 = & -\frac{2D}{\kappa} \sqrt{\frac{n}{D} \left(1 - \frac{n}{D}\right)} + \frac{2 - \kappa D}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2n}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\
 & - \frac{2\sqrt{1 - \kappa D}}{\kappa^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2\frac{n}{D} - 1 - \kappa n}{1 - \kappa n} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (6.1a)
 \end{aligned}$$

la cual se escribe también como sigue

$$\begin{aligned}
 \frac{I_1}{2D^2} = & -\frac{1}{\kappa D} \sqrt{\frac{n}{D} \left(1 - \frac{n}{D}\right)} + \frac{2 - \kappa D}{2(\kappa D)^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2n}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\
 & - \frac{\sqrt{1 - \kappa D}}{(\kappa D)^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 1 - \frac{2\left(1 - \frac{n}{D}\right)}{1 - \kappa n} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (6.1b)
 \end{aligned}$$

b) Integral  $I_0$

La segunda integral es :  $I_0 = 2 \int_0^d \frac{\sqrt{Dn - n^2}}{1 - \kappa n} dn$ , cuya solución se obtiene haciendo  $n = d$  en la integral  $I_1$  y resulta

$$\begin{aligned}
 \frac{I_0}{2D^2} = & -\frac{1}{\kappa D} \sqrt{\frac{d}{D} \left(1 - \frac{d}{D}\right)} + \frac{2 - \kappa D}{2(\kappa D)^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2\frac{d}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\
 & - \frac{\sqrt{1 - \kappa D}}{(\kappa D)^2} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 1 - \frac{2\left(1 - \frac{d}{D}\right)}{1 - \kappa d} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

c) Integral  $I_2$

En los desarrollos del capítulo 2 quedó pendiente la integral.

$$I_2 = 2 \int_0^n \frac{n \sqrt{Dn - n^2}}{(1 - \kappa n)^2} dn = 2 \int_0^n \frac{\sqrt{Dn^3 - n^4}}{(1 - \kappa n)^2} dn \quad (6.3)$$

cuya solución se presenta a continuación.

Se utiliza el método de integración por partes, con las designaciones siguientes:

$$u = \sqrt{Dn^3 - n^4} = \sqrt{Dn^3 \left(1 - \frac{n}{D}\right)} = Dn \sqrt{\frac{n}{D} \left(1 - \frac{n}{D}\right)}$$

$$du = \frac{3Dn^2 - 4n^3}{2n\sqrt{Dn - n^2}} dn = \frac{3Dn - 4n^2}{2\sqrt{Dn - n^2}} dn$$

$$v = \frac{1}{\kappa(1 - \kappa n)}; \quad dv = \frac{-\kappa(-\kappa dn)}{\kappa^2(1 - \kappa n)^2} = \frac{dn}{(1 - \kappa n)^2}$$

Por tanto, la integral se convierte en

$$\frac{I_2}{2} = \int_0^n u dv = \frac{Dn \sqrt{\frac{n}{D} \left(1 - \frac{n}{D}\right)}}{\kappa(1 - \kappa n)} - \frac{1}{2\kappa} \int_0^n \frac{3Dn - 4n^2}{(1 - \kappa n) \sqrt{Dn - n^2}} dn$$

que también es

$$\frac{I_2}{2D^3} = \frac{\left(\frac{n}{D}\right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{n}{D}}}{\kappa D (1 - \kappa n)} - \frac{2}{\kappa D^3} \int_0^n \frac{\left(Dn - n^2 - \frac{Dn}{4}\right)}{(1 - \kappa n) \sqrt{Dn - n^2}} dn$$

O bien, como sigue

$$\frac{I_2}{2D^3} = \frac{\left(\frac{n}{D}\right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{n}{D}}}{\kappa D (1 - \kappa n)} - \frac{2}{\kappa D^3} \int_0^n \frac{\sqrt{Dn - n^2}}{1 - \kappa n} dn + \frac{1}{2\kappa D^3} \int_0^n \frac{n dn}{(1 - \kappa n) \sqrt{Dn - n^2}}$$

donde la primera integral quedó resuelta con  $I_1$ , es decir

$$\frac{I_2}{2D^3} = \frac{\left(\frac{n}{D}\right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{n}{D}}}{\kappa D(1 - \kappa n)} - \frac{I_1}{\kappa D^3} + \frac{1}{2\kappa D^2} \int_0^n \frac{n \, dn}{(1 - \kappa n) \sqrt{Dn - n^2}} \quad (6.4)$$

La última integral se designa como  $I_3$  y para resolverla se procede nuevamente con una integración por partes. Considerando que:

$u = n$ ;  $du = dn$ ; y con:  $dv = \frac{dn}{(1 - \kappa n) \sqrt{Dn - n^2}}$ ; de una tabla de integrales resulta

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa D}} \operatorname{sen}^{-1} \left[ \frac{(-\kappa D + 2)(-\kappa n + 1) + 2(\kappa D - 1)}{-\kappa(-\kappa n + 1)D} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa D}} \operatorname{sen}^{-1} \left[ \frac{-(2 - \kappa D)(1 - \kappa n) + 2(1 - \kappa D)}{\kappa D(1 - \kappa n)} \right]$$

Desarrollando el numerador y simplificando, se tiene

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa D}} \operatorname{sen}^{-1} \left[ \frac{1 - \kappa n + 2n/D - 2}{1 - \kappa n} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa D}} \operatorname{sen}^{-1} \left[ 1 - \frac{2 \left(1 - \frac{n}{D}\right)}{1 - \kappa n} \right]$$

Por tanto, tomando límites la integral  $I_3$  resulta

$$I_3 = \frac{n}{\sqrt{1 - \kappa D}} \left[ \operatorname{sen}^{-1} \left[ 1 - \frac{2 \left(1 - \frac{n}{D}\right)}{1 - \kappa n} \right] + \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa D}} \int_0^n \operatorname{sen}^{-1} \left[ 1 - \frac{2 \left(1 - \frac{n}{D}\right)}{1 - \kappa n} \right] dn \quad (6.5)$$

Al sustituir las ecuaciones (6.1b) y (6.5) en la (6.4) , se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{I_2}{2D^3} = & \frac{\left(\frac{n}{D}\right)^{3/2} \sqrt{1-\frac{n}{D}}}{\kappa D(1-\kappa n)} + \frac{2}{(\kappa D)^2} \sqrt{\frac{n}{D} \left(1-\frac{n}{D}\right)} - \frac{2-\kappa D}{(\kappa D)^3} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2\frac{n}{D}-1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\
 & + \frac{2\sqrt{1-\kappa D}}{(\kappa D)^3} \left[ \text{sen}^{-1} \left[ 1 - \frac{2\left(1-\frac{n}{D}\right)}{1-\kappa n} \right] + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{n}{2\kappa D^2 \sqrt{1-\kappa D}} \text{sen}^{-1} \left[ 1 - \frac{2\left(1-\frac{n}{D}\right)}{1-\kappa n} \right] \\
 & - \frac{1}{2\kappa D^2 \sqrt{1-\kappa D}} \int_0^n \text{sen}^{-1} \left[ 1 - \frac{2\left(1-\frac{n}{D}\right)}{1-\kappa n} \right] dn \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

Factorizando y haciendo  $n = d$ , resulta

$$\begin{aligned}
 \frac{I_2}{2D^3} = & \frac{1}{\kappa D} \left(\frac{d}{D}\right)^{3/2} \sqrt{1-\frac{d}{D}} \left[ \frac{1}{1-\kappa d} + \frac{2}{\kappa d} \right] - \frac{(2-\kappa D)}{(\kappa D)^3} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2\frac{d}{D}-1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\
 & - \frac{2\sqrt{1-\kappa D}}{(\kappa D)^3} \left[ \text{sen}^{-1} \left( \frac{2\left(1-\frac{d}{D}\right)}{1-\kappa d} - 1 \right) - \frac{\pi}{2} \right] - \frac{d/D}{2\kappa D \sqrt{1-\kappa D}} \text{sen}^{-1} \left[ \frac{2\left(1-\frac{d}{D}\right)}{1-\kappa d} - 1 \right] \\
 & + \frac{1}{2\kappa D^2 \sqrt{1-\kappa D}} \int_0^{d/D} \text{sen}^{-1} \left[ \frac{2\left(1-\frac{n}{D}\right)}{1-\kappa n} - 1 \right] d\left(\frac{n}{D}\right) \tag{6.7}
 \end{aligned}$$

La última integral no tiene solución directa y la única manera de obtener su valor es mediante una integración numérica, si bien, en ese caso, es preferible resolver la integral original por el mismo procedimiento. Un valor aproximado de la última integral se obtiene a través del teorema fundamental del calculo integral, con base en un valor medio  $\bar{\Theta}$  de la función que aparece en el integrando, es decir

$$\int_0^{d/D} \text{sen}^{-1} \left[ \frac{2\left(1-\frac{n}{D}\right)}{1-\kappa n} - 1 \right] d\left(\frac{n}{D}\right) = \left[ \bar{\Theta} \frac{n}{D} \right]_0^{d/D}$$

El integrando es una función de la geometría a través de  $\kappa n = \kappa D(n/D)$  y de  $n/D$ . La función varía casi linealmente con  $n/D$  dentro del intervalo  $0 \leq n/D \leq d/D$  en que es útil, de manera que el valor medio entre 0 y  $n/D$  se puede obtener para  $0.5n/D$ , es decir

$$\bar{\Theta} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{n}{D} \right)}{1 - \frac{1}{2} \kappa n} - 1 \right] = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{2 \left( 2 - \frac{n}{D} \right)}{2 - \kappa n} - 1 \right]$$

De la ecuación (6.7) se podría por tanto obtener un valor aproximado de la integral  $I_2$ , que sería

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{2D^3} &= \frac{1}{\kappa D} \left( \frac{d}{D} \right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{d}{D}} \frac{2 - \kappa d}{\kappa d(1 - \kappa d)} - \frac{2 - \kappa D}{(\kappa D)^3} \left[ \text{sen}^{-1} \left( 2 \frac{d}{D} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\ &- \frac{2 \sqrt{1 - \kappa D}}{(\kappa D)^3} \left[ \text{sen}^{-1} \left[ \frac{2 \left( 1 - \frac{d}{D} \right)}{1 - \kappa d} - 1 \right] - \frac{\pi}{2} \right] \\ &- \frac{d/D}{2 \kappa D \sqrt{1 - \kappa D}} \left[ \text{sen}^{-1} \left[ \frac{2 \left( 1 - \frac{d}{D} \right)}{1 - \kappa d} - 1 \right] + \text{sen}^{-1} \left[ \frac{2 \left( 2 - \frac{d}{D} \right)}{2 - \kappa d} - 1 \right] \right] \quad (6.8) \end{aligned}$$

Un sondeo para cuantificar el orden de magnitud de los distintos términos a la izquierda del signo igual en la ecuación anterior muestra que ellos varían bastante con los de  $d/D$  y de  $\kappa d$ , de modo que se prefirió seguir el camino de integrar numéricamente la ecuación (6.3) con el límite superior  $n/D = d/D$ , expresándola previamente en términos de parámetros adimensionales, como sigue:

$$I_2 = 2 \int_0^d \frac{n \sqrt{Dn - n^2}}{(1 - \kappa n)^2} dn = 2D^3 \int_0^{d/D} \frac{\frac{n}{D} \sqrt{\frac{n}{D} \left( 1 - \frac{n}{D} \right)}}{(1 - \kappa n)^2} d \left( \frac{n}{D} \right)$$

O bien

$$\frac{I_2}{2D^3} = \int_0^{d/D} \frac{\left(\frac{n}{D}\right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{n}{D}}}{\left(1 - \kappa D \frac{n}{D}\right)^2} d\left(\frac{n}{D}\right) = f\left(\kappa D, \frac{d}{D}\right) \quad (6.9)$$

es decir, función de  $d/D$ , de la geometría de la sección y de la curvatura del fondo a través de  $\kappa D$ .

Las figuras 6.3a y b muestran la solución gráfica de la ecuación (6.9) en el intervalo de valores  $-1 \leq \kappa D \leq 0.5$  y  $0 \leq d/D \leq 1$ . Con ello es factible valorar  $I_2$ , para calcular el componente de la velocidad  $w_d$  y compararlo con  $u_d$ , ambos al nivel de la superficie libre.

d) Integral  $I_f$ .

La última integral por resolver quedó definida por la ecuación (2.76) y es

$$I_f = \int_0^d \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial n}\right)^2 + 1} \left[ \frac{dn}{1 - \kappa n} \right] \quad (6.10)$$

Siendo  $B = 2\sqrt{n(D-n)}$ , la derivada vale

$$\frac{\partial B}{\partial n} = \frac{D - 2n}{\sqrt{n(D-n)}}$$

El radical del integrando resulta

$$\sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial n}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{(D-2n)^2}{n(D-n)} + 1} = \sqrt{\frac{D^2 - 3Dn + 3n^2}{n(D-n)}} = \sqrt{\frac{D^2 - 3n(D-n)}{n(D-n)}} = \sqrt{\frac{D^2}{n(D-n)}} = 3$$

y la integral se convierte en

$$\frac{I_f}{D} = \int_0^{d/D} \sqrt{\frac{1}{\frac{n}{D} \left(1 - \frac{n}{D}\right)}} = 3 \frac{d\left(\frac{n}{D}\right)}{1 - \kappa D \frac{n}{D}} \quad (6.11)$$

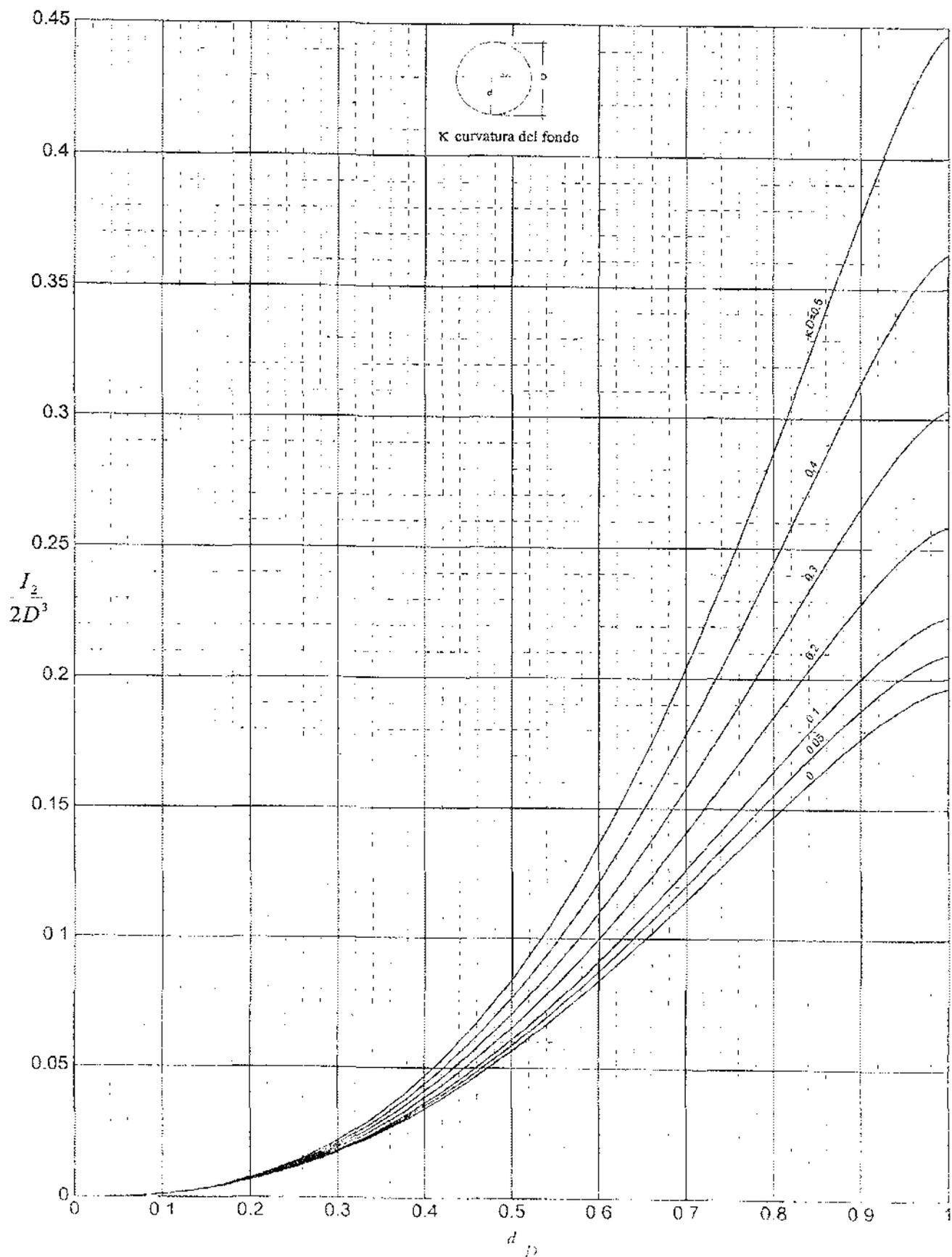


Figura 6.5a Valor de la integral  $I_2$  en emales de sección circular de fondo cóncavo

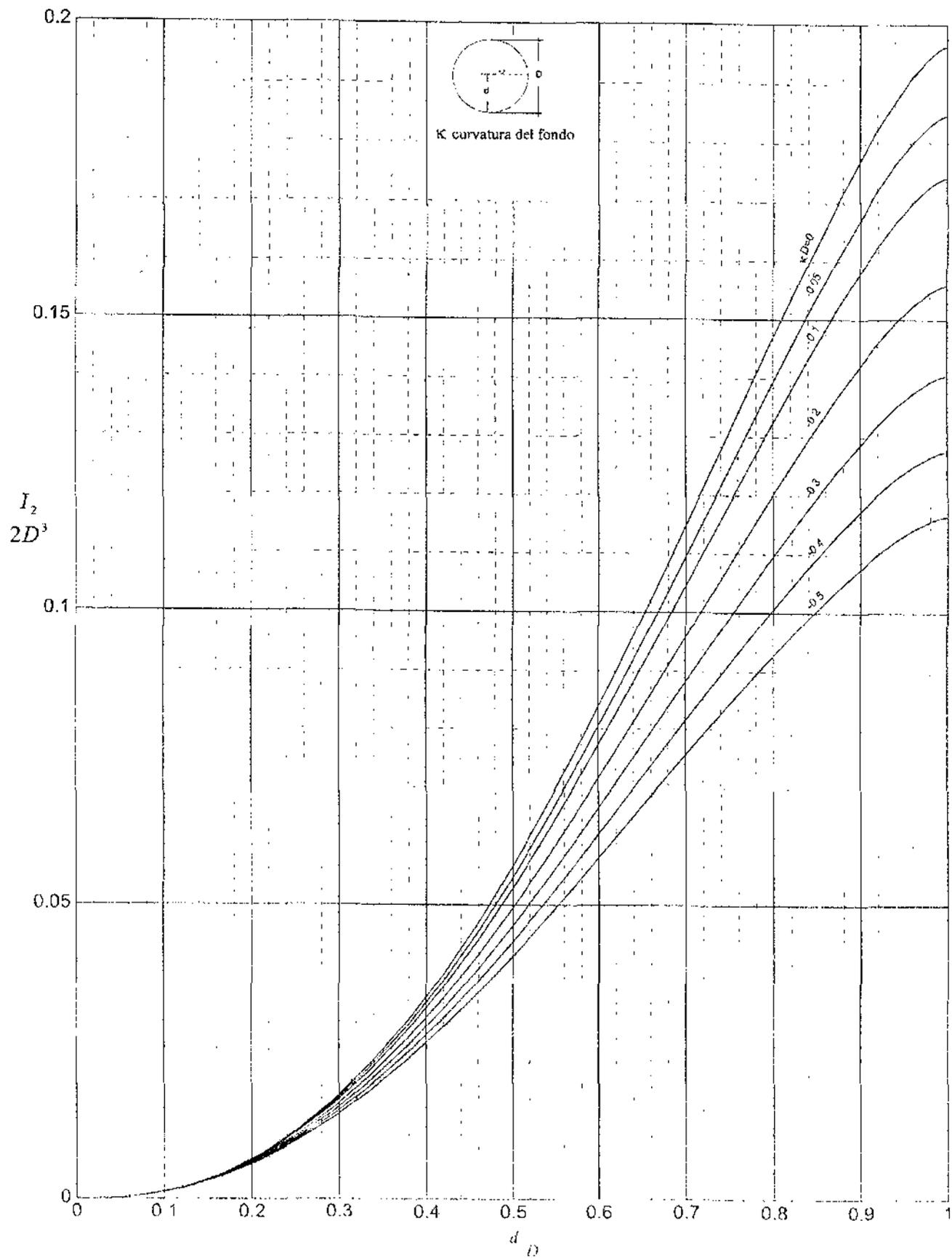


Figura 6.3b Valor de la integral  $I_2$  en canales de sección circular de fondo convexo

Como en el caso anterior, la integral no tiene solución directa y tendrá que utilizarse un procedimiento numérico. Como ocurre también en el caso anterior, la integral  $I_f$  es función de  $d/D$ , de la geometría de la sección y de la curvatura del fondo a través de  $\kappa D$ . Las figuras 6.4a y b muestran su solución gráfica en el intervalo de valores  $-1 \leq \kappa D \leq 0.5$  y  $0 \leq d/D \leq 1$ .

### 6.2.3 Valor de las integrales para cualquier forma de sección

Para valuar las integrales que se requieren es necesario conocer completamente la geometría de la o las secciones que se van a emplear en el canal. Por ejemplo, secciones complicadas, como la que se muestra en la figura 6.2b, tienen que ubicarse y definir primero su geometría en forma gráfica, para relacionar después analíticamente su dimensión horizontal  $B$  con la distancia  $n$  al fondo. Esto es generalmente posible, ya que la geometría tiene que elegirse con una forma que se preste a una interpretación geométrica lo más sencilla posible, para facilitar su construcción. Aunque dicha labor no es tarea fácil, tiene que hacerse cualquiera que sea el procedimiento de cálculo que se emplee.

Con la expresión matemática que relaciona a  $B$  con  $n$  es factible calcular los valores de las integrales  $I_Q$  e  $I_f$  en cada sección mediante un procedimiento numérico y una subrutina incorporada al programa general de cómputo, para proceder como se presentó en capítulo 5. El valor de la integral  $I_Q$  se obtiene con  $I_f$  y se calcula el de  $I_2$  sólo si se desea determinar el componente  $w_d$  de la velocidad al nivel de la superficie libre, lo cual es poco probable ya que se demostró que adquiere valores muy pequeños. Los valores de las integrales  $I_Q$  e  $I_f$  tienen que determinarse para cada valor del tirante  $d$  que resulte en los cálculos, de acuerdo con el gasto para el cual se obtiene el perfil del flujo.

Para el cálculo del perfil del flujo se utilizan las mismas ecuaciones que se presentan en el siguiente inciso y el método numérico que se haya adoptado, como el de Runge-Kutta de cuarto orden empleado en el capítulo 5.

### 6.2.4 Ecuaciones generales

La ecuación (5.5b) es la que debe resolverse y se escribe en la forma

$$\frac{dd}{ds} = \frac{S_0 - S_f \sec \theta}{1 - F^2} \quad (6.12)$$

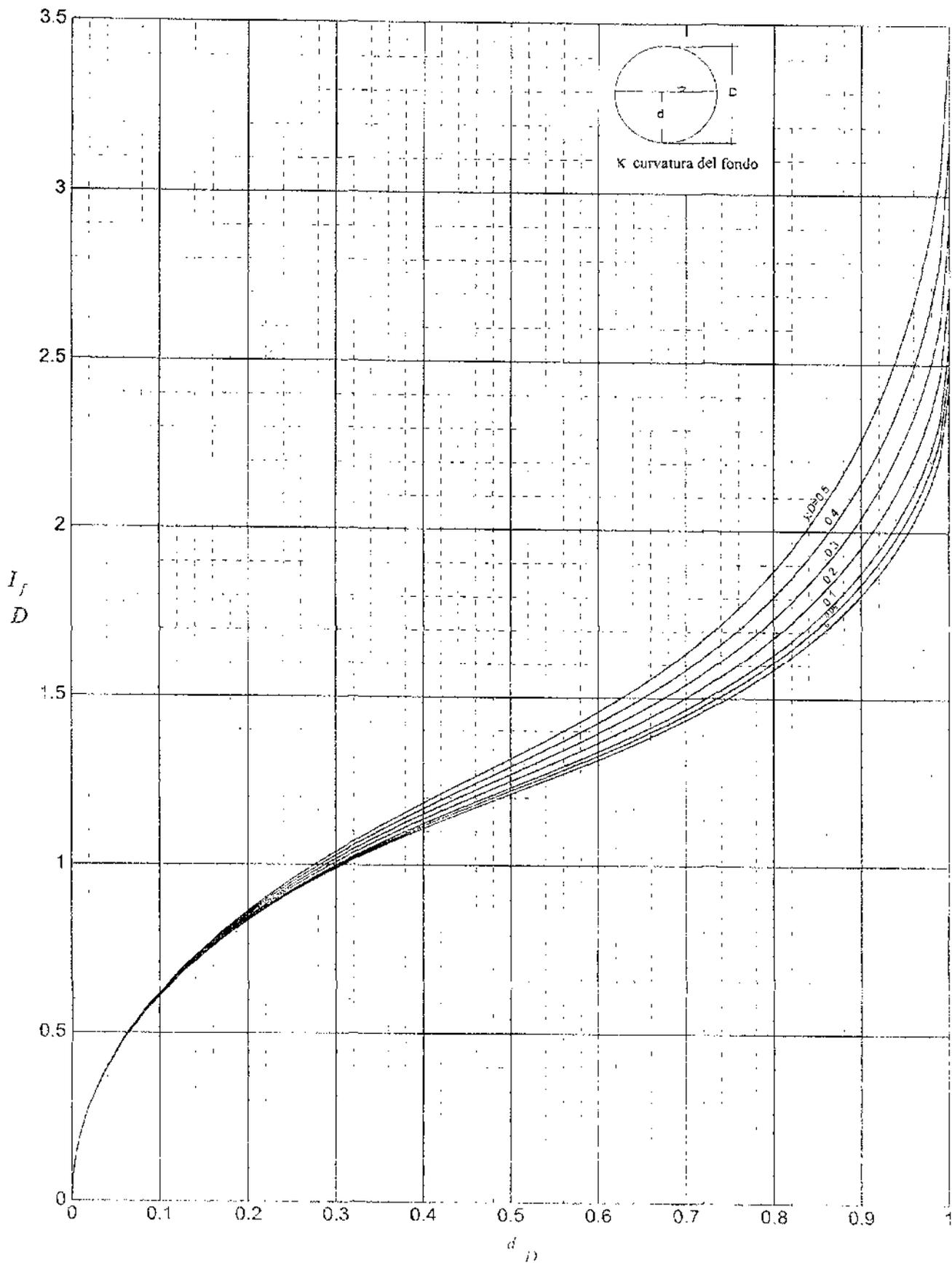


Figura 6.4a. Valor de la integral  $I_f$  en canales de sección circular de fondo cóncavo

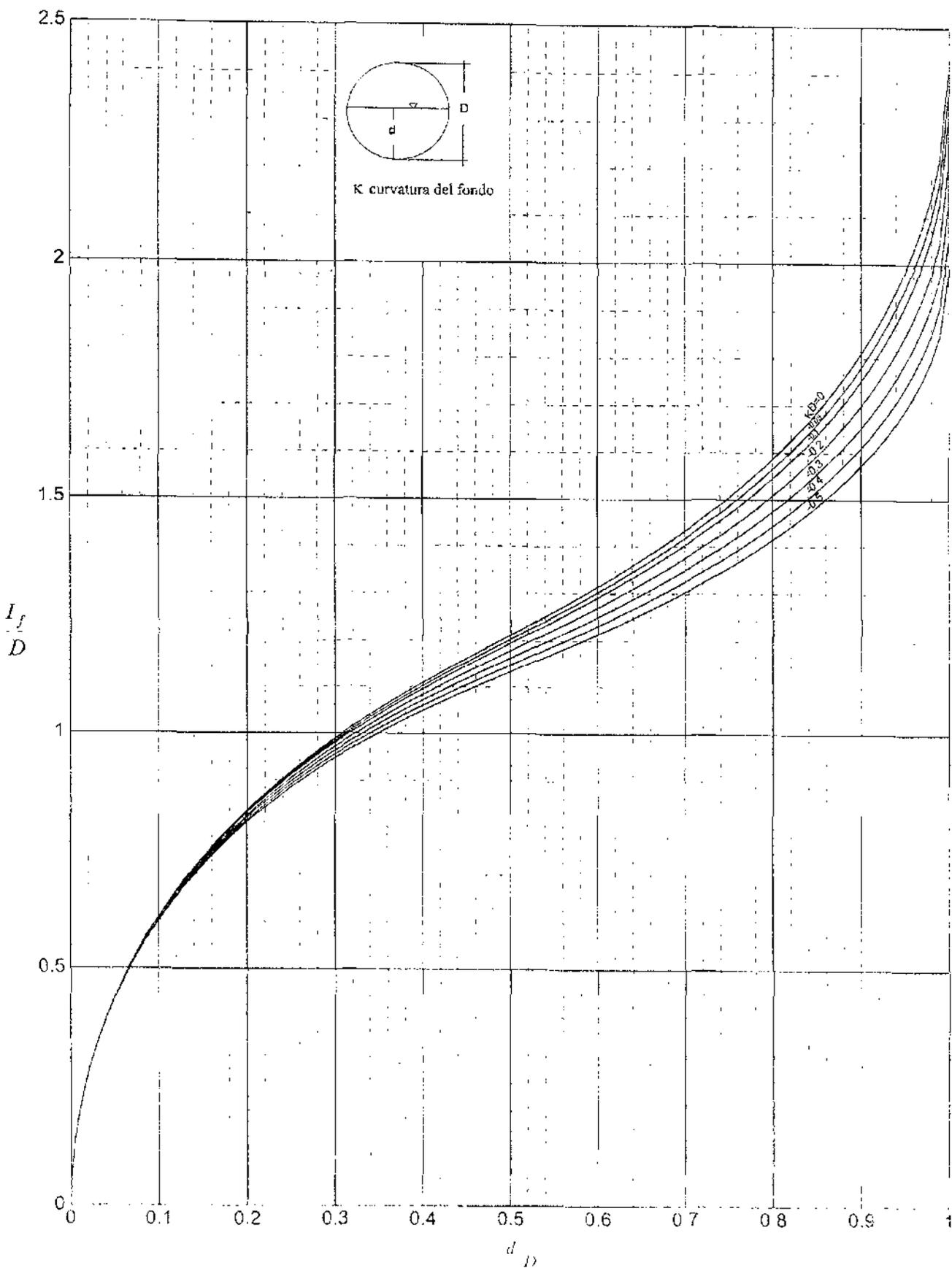


Figura 6-4b Valor de la integral  $I_f$  en canales de sección circular de fondo convexo

donde los distintos términos se interpretan a continuación. El tirante  $d$  en la sección del fondo de coordenada  $s$  y  $S_0 = -\tan\theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo de inclinación de la tangente al fondo de dicha sección,  $F$  el número de Froude en la misma, dado en forma general por la ecuación (3.4) (o la 5.4), como sigue

$$F = \frac{u_0 / \sqrt{gd \cos\theta}}{\left[ \frac{(1 - \kappa d)^3}{\kappa d - \frac{Td}{I_Q}} \right]^{-1/2}} \quad (6.13)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura del fondo,  $T$  el ancho de la superficie libre e  $I_Q$  el valor de la integral obtenida de la ecuación (2.60), ambos para el tirante  $d$  según la geometría de la sección;  $S_f$  es la pendiente de fricción expresada por la ecuación (2.78b)

$$S_f = - \frac{\lambda}{g} \alpha_v \frac{u_0^2}{R_h} \quad (6.14)$$

donde  $\lambda$  depende del comportamiento de la pared. Para el caso de comportamiento rugoso es válida la ecuación

$$\lambda = \frac{g n_M^2}{R_h^{1/3}} \quad (6.15)$$

En ésta,  $n_M$  es el coeficiente de Manning  $R_h$  el radio hidráulico de la sección.

El componente  $u_0$  de la velocidad que aparece en las ecuaciones (6.13) y (6.14), corresponde al fondo de la sección y está dado por la ecuación (2.58), que es

$$u_0 = \frac{Q}{I_Q} \quad (6.16)$$

donde  $Q$  es el gasto en la sección e  $I_Q$  el valor de la integral que ya se ha mencionado.

El factor de amplificación  $\alpha_v$  en la ecuación (6.14) está dado por la (2.79) y es

$$\alpha_v = \frac{B_v + 2I_Q}{p} \quad (6.17)$$

donde  $B_0$  es el ancho que tiene la sección en el fondo (puede ser cero),  $P$  el perímetro mojado de la sección e  $I_f$  la integral expresada por la ecuación (2.76)

$$I_f = \int_0^d \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial n}\right)^2 + 1} \left[ \frac{dn}{1 - \kappa n} \right] \quad (6.18)$$

y que se discutió en el inciso anterior. Las dos ecuaciones anteriores (6.17 y 6.18) son válidas para secciones simétricas respecto de un plano vertical, como ocurre comúnmente en la práctica. Si no es el caso, lo que se expone en el desarrollo de la ecuación (2.79) permitiría definir de manera sencilla ambas ecuaciones en caso de asimetría, ya que sería necesario calcular la integral  $I_f$  para cada lado de la sección.

### 6.2.5 Solución de la ecuación diferencial

La solución de la ecuación (6.12) es posible sólo numéricamente y para ello pueden utilizarse distintos procedimientos, desde el método estándar por pasos hasta el de Runge-Kutta de cuarto orden, que fue el empleado en el capítulo 5. Cualquiera que sea el procedimiento, es necesario identificar las secciones del canal que se van a utilizar, conocer completamente su geometría y ubicación, además de disponer de algún procedimiento (gráfico, numérico o analítico) que permita determinar el valor de las integrales  $I_0$  e  $I_f$  en cada sección para cualquier valor del tirante. Sólo en caso de querer corregir el efecto del componente tangencial de la velocidad sería necesario calcular la integral  $I_2$ .

Para la solución se utiliza alguna condición de frontera, que puede ser una o más secciones de control (crítica, compuerta, vertedor o cimacio, de aforos, etc.), es decir, secciones donde se conoce el tirante para cualquier valor del gasto. En el cálculo se siguen los mismos criterios que se utilizan en los canales de fondo plano, en cuanto a secciones críticas, dirección del cálculo, pendientes medias de fricción, etc. De igual manera, la precisión de la solución dependerá del número de secciones que se utilicen (de la distancia entre ellas) y del procedimiento numérico que se emplee, además del efecto que tiene la precisión en la geometría, la selección adecuada del coeficiente de Manning y la adecuación del método en los puntos con singularidades (donde cambia la curvatura o la rugosidad de la pared). El ejemplo de cálculo que se presenta en el capítulo 5 orienta en el tratamiento de los dos últimos casos y sobre la importancia que puedan tener en los valores numéricos.

### 6.3 CONCLUSIONES.

En la exposición del trabajo se han presentado diversas conclusiones particulares de los resultados, de manera que a continuación se incluyen sólo las de carácter general.

1. El modelo de flujo que se propone satisface el objetivo planteado en el capítulo 1, de ser aplicable a cualquier forma de sección del canal sin aumentar drásticamente su complejidad.
2. Se establece un procedimiento general de análisis, de manera que las soluciones satisfagan las condiciones reales en que se produce el flujo y sea aplicable a problemas prácticos de la ingeniería.
3. El modelo es unidimensional, pero permite el cálculo del componente transversal de la velocidad, para corregir el propio modelo cuando se considere importante dicho efecto. Se comprobó que el componente transversal de la velocidad carece de importancia cuando se compara con la magnitud que tiene el componente longitudinal, por esta razón, puede eliminarse dicho componente y trabajar únicamente con el longitudinal. De cualquier manera, queda abierta la posibilidad de incluirlo.
4. Se incluye de manera correcta el efecto de fricción, por lo cual es posible analizar canales de gran longitud con cualquier comportamiento de la rugosidad en la pared. Aún así las ecuaciones resultantes son tan accesibles para el ingeniero como las de Saint-Venant o las del flujo gradualmente variado.
5. Con el modelo se determinan las variables más importantes del flujo, como son : la distribución de los dos componentes de la velocidad y de la presión en cada sección , así como la variación del gasto y del tirante a lo largo del canal, tanto en flujo no permanente como en el permanente.
6. El canal puede formarse por tramos de fondo plano y por otros de fondo curvo, y establecer las mismas ecuaciones para ambos, pero haciendo que la curvatura sea nula para los de fondo plano. Las curvas verticales pueden ser de curvatura constante o variable pero debe conocerse completamente su geometría.
7. El flujo sobre un cimacio o sobre cualquier curva vertical puede tratarse con suficiente precisión utilizando el modelo de flujo para las formas geométricas que se utilizan en la práctica. Esto elimina abordar estos casos mediante soluciones particulares de flujo local o mediante resultados puramente experimentales.

8. La geometría de la sección define la magnitud de cuatro integrales que forman parte de las ecuaciones. Su valor fue obtenido para las secciones: trapecial, rectangular, triangular y circular que son las que más se emplean en la práctica, pero se plantea que el procedimiento numérico es el más adecuado para su obtención en otras secciones más complicadas sin menoscabo de la precisión.
9. La teoría para el régimen crítico se desarrolla utilizando los conceptos de energía específica mínima y la definición de un número de Froude generalizado. Los resultados obtenidos son congruentes con los que se usan en canales de fondo plano cuando en las ecuaciones se hace que la curvatura valga cero. Dichas ecuaciones no son sencillas de manejar, pero se presentan gráficas para una solución aproximada. Para formas de sección que no sean las comunes se presentan las ecuaciones generales, cuya solución será la que prefiera el usuario.
10. La verificación experimental de resultados se ha realizado aprovechando la información disponible, como la publicada por el Cuerpo de Ingenieros del Ejército en el caso de cimacios, de Henderson y Tierney en curvas circulares, de Sivakumaran *et al* en canales con curvas convexo-cóncavas, etc. En otros casos, como el de Lenau-Cassidy y Prasad en curvas circulares, la comprobación se intentó comparando con los resultados obtenidos de teorías distintas, quizá más precisas, pero menos generales.
11. Las comprobaciones son muy aceptables mientras la geometría del canal se mantenga dentro de los intervalos que ocurren en la práctica, es decir, con valores de:  $-2 \leq \kappa d \leq 0.6$ . Parece existir mayor precisión para la curvatura convexa que para la cóncava, como se detecta con la teoría.
12. Mediciones experimentales para flujos supercríticos son de cualquier manera difíciles de realizar con precisión y en ese caso, no hay otro camino que apoyarse en la teoría, la que seguramente aporta resultados más claros y confiables. Fue el caso del modelo experimental del vertedor de la Presa Infiernillo en el Instituto de Ingeniería, en el cual se hicieron observaciones del buen funcionamiento, más no mediciones detalladas por la dificultad de hacerlas.
13. En el caso de flujo permanente, la rutina de cálculo puede ser tan variada como la que se dispone para la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado; es decir, desde hacerlo en forma manual con calculadora y ayudas gráficas para las integrales, hasta disponer de un programa de cómputo que permita la aplicación del método a un canal de cualquier geometría y forma de sección. Este programa no se realizó por que no fue ese el propósito de la investigación.

14. Se han querido cubrir los aspectos más importantes en la fortaleza y debilidad del método, pero resulta difícil pensar que el tema se haya agotado. Hay mucho por hacer y ésta parece una línea de investigación para el futuro. Se han publicado ya ecuaciones que difieren en la concepción de las aquí planteadas y que se resuelven con procedimientos numéricos más avanzados, pero que tienen dificultades para aceptar geometrías distintas de las del canal rectangular.

#### 6.4 RECOMENDACIONES

De acuerdo con la experiencia adquirida con el trabajo, es recomendable proponer la investigación de aquellos aspectos que quedan pendientes.

1. La limitación del método en el sentido de validez para un valor máximo de  $kd$  en el caso de curvatura cóncava.
2. La elaboración de programas de cómputo para secciones distintas de la rectangular, tanto en flujo permanente como impermanente, que permitan la corrección que implica el componente transversal de la velocidad, si es el caso.
3. Una vez logrado lo anterior, generalizar el programa para canales que tengan tramos con fondo plano y fondo curvo.
4. La comprobación experimental de resultados en modelos de obras de excedencias que pudieran construirse, buscando de tener una buena instrumentación en las mediciones.
5. Verificar el efecto que tiene una curva vertical desde antes que el flujo llegue a ella, como se observa en los resultados teóricos con la teoría del potencial.
6. Analizar con mayor detalle el tratamiento numérico en puntos con singularidades, ya que son comunes en este tipo de obras.

## APÉNDICE DEL CAPÍTULO 5

### A. 1 GEOMETRÍA DEL FONDO

Las curvas de transición se introducen para propósitos del cálculo en los intervalos de gradualización:

$$-L_1 \leq s \leq L_1 \quad \text{y} \quad (\phi R - L_2) \leq s \leq (\phi R + L_2)$$

de manera que el perfil del fondo está dado por las expresiones que a continuación se presentan, donde el subíndice  $t$  se refiere a las curvas de transición y  $c$  a los arcos circulares.

En  $-\infty < s \leq -L_1$ , el fondo es la línea recta horizontal (figura 5.2):  $\kappa' = 0$ ;  $\kappa = 0$ ;  $\theta = 0$  y  $\zeta = 0$ .

a) En el intervalo de gradualización  $-L_1 \leq s \leq L_1$ .

Sean  $\varepsilon = L_1/R$  y  $\lambda \equiv s/L_1$ , donde  $R$  es el radio del círculo convexo (figura 5.2). Por tanto, la curva de transición en  $-1 \leq \lambda \leq 1$  tiene las ecuaciones:

$$\kappa' = \frac{d\kappa}{ds} = \frac{3}{4R^2\varepsilon}(\lambda^2 - 1) \quad \kappa = \frac{1}{4R}(\lambda^3 - 3\lambda - 2)$$

$$\theta = \frac{\varepsilon}{16}(\lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3) \equiv \varepsilon f(\lambda)$$

$$\zeta = \frac{\varepsilon^2 R}{80}(\lambda^5 - 10\lambda^3 - 20\lambda^2 - 15\lambda - 4) + R o(\varepsilon^4)$$

Al derivar éstos, se adopta  $\kappa' = m(\lambda^2 - 1)$  (donde  $m$  es una constante), que sucesivamente integrada se obtiene:

$$\frac{d\kappa}{d\lambda} = \varepsilon R \kappa' \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = \varepsilon R \kappa$$

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = \varepsilon R \operatorname{sen} \theta = \varepsilon R \left[ \varepsilon f - \frac{(\varepsilon f)^3}{3!} + \dots \right] = \varepsilon^2 R f(\lambda) + R o(\varepsilon^4)$$

se utilizan las condiciones de frontera:

$$\text{en } \lambda = -1: \kappa' = 0, \kappa = 0, \theta = 0 \text{ y } \zeta = 0$$

$$\text{en } \lambda = 1: \kappa' = 0, \kappa = -1/R$$

de manera que en  $s = L_1$  ( $\lambda = 1$ ), se tiene  $\theta_1 = -\varepsilon = \theta_c$ ; las elevaciones del fondo son:

$$\zeta_i = -\frac{3}{5} \varepsilon^2 R + R o(\varepsilon^4)$$

$$\zeta_c = -R [1 - \cos(-\varepsilon)] = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 R + R o(\varepsilon^4)$$

Por lo tanto, cuando  $s = L_1$ ; el error  $\Delta\zeta_1 \equiv \zeta_i - \zeta_c$  en la elevación del fondo es

$$\frac{\Delta\zeta_1}{R} = -\frac{\varepsilon^2}{10} + o(\varepsilon^4)$$

y el arco circular convexo desciende verticalmente esta misma cantidad (debido a que  $\Delta\zeta_1 < 0$ ), para hacer que  $\zeta$  sea también continua en  $s = L_1$  (ver adelante).

b) En  $L_1 \leq s \leq (\phi R - L_2)$

El fondo es el arco circular de radio  $R$ , donde

$$\kappa' = 0; \kappa = -1/R; \theta = -s/R \text{ y } \zeta = -R [1 - \cos(s/R)] + \Delta\zeta_1$$

c) En los intervalos de gradualización:  $(\phi R - L_2) \leq s \leq (\phi R + L_2)$ , sean:

$$\delta \equiv L_2/R \text{ y } \mu \equiv (s - \phi R)/L_2$$

Entonces la curva de transición en  $-1 \leq \mu \leq 1$  tiene los valores:

$$\kappa' = \frac{3}{2R^2\delta} (1 - \mu^2); \quad \kappa = \frac{1}{2R} (3\mu - \mu^3)$$

$$\theta = \frac{\delta}{8} (3 + 6\mu^2 - \mu^4) - \phi \equiv \delta g(\mu) - \phi$$

$$\zeta = -R(1 - \cos\phi) - \delta(R \sin\phi)\mu - \delta \frac{R \cos\phi}{40} (4 + 15\mu + 10\mu^2 - \mu^4) + \Delta\zeta_1 + R o(\delta^3)$$

Al derivar estas ecuaciones se asume que  $\kappa' = w(1 - \mu^2)$ , donde  $w$  es una constante, y al integrar sucesivamente se tiene que:

$$\frac{d\kappa}{d\mu} = \delta R \kappa' \quad \frac{d\theta}{d\mu} = \delta R \kappa$$

$$\frac{d\zeta}{d\mu} = \delta R \sin \theta = -\delta R \sin \phi + \delta^2 R \cos \phi g(\mu) + R o(\delta^3)$$

Utilizando las condiciones de frontera:

En  $\mu = -1$ ;  $\kappa' = 0$ ;  $\kappa = -1/R$ ;  $\theta = -\theta + \delta$

$$\zeta = -R [1 - \cos(\phi - \delta)] + \Delta\zeta_1$$

$$\zeta = -R(1 - \cos \phi) + \delta(R \sin \phi) - \delta^2 \frac{R \cos \phi}{2} + \Delta\zeta_1 + R o(\delta^3)$$

En  $\mu = +1$ :  $\kappa' = 0$ ;  $\kappa = 1/R$ .

En  $s = \phi R + L_2$  ( $\mu = 1$ ), se tiene  $\theta_1 = -\phi + \delta = \theta_c$ , pero las elevaciones del fondo son:

$$\zeta_1 = -R(1 - \cos \phi) - \delta R \sin \phi + \delta^2 \frac{7R \cos \phi}{10} + \Delta\zeta_1 + R o(\delta^3)$$

$$\zeta_c = -R[1 - 2 \cos \phi + \cos(\phi - \delta)] + \Delta\zeta_1$$

$$\zeta_c = -R(1 - \cos \phi) - \delta R \sin \phi + \delta^2 \frac{R \cos \phi}{2} + \Delta\zeta_1 + R o(\delta^3)$$

De esta manera, en  $s = \phi R + L_2$ , el error  $\Delta\zeta_2 = \zeta_1 - \zeta_c$  en la elevación del fondo es

$$\frac{\Delta\zeta_2}{R} = \frac{\cos \phi}{5} \delta^2 + o(\delta^3)$$

y el arco circular cóncavo asciende verticalmente la misma cantidad dada por este valor (debido a que  $\Delta\zeta_2 < 0$ ), para hacer que  $\zeta$  sea también continua en  $s = \phi R + L_2$  (ver abajo).

d) En  $\phi R + L_2 \leq s \leq \phi R - \psi R$

El fondo es el arco circular cóncavo de radio  $R$ ; en éste vale:

$$\kappa' = 0, \quad \kappa = 1/R, \quad \theta = s/(R - 2\phi) \text{ y } \zeta = -R[1 - 2 \cos \phi + \cos (s/R - 2\phi)] + \Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2$$

Nota 1. Para  $R = 38.1 \text{ cm}$  y  $\phi = 75.17^\circ$ , se tiene

$$\Delta\zeta_1 \approx -0.0026 L_1^2 \text{ en cm y } \Delta\zeta_2 \approx -0.0013 L_2^2 \text{ en cm, y para } L_1 = L_2 = 1 \text{ cm, se tiene}$$

$$\Delta\zeta_1 \approx -0.0026 \text{ cm y } \Delta\zeta_2 \approx -0.0013 \text{ cm}$$

Nota 2. En  $A(s = \phi R)$ ,  $\kappa = 0$ , pero  $\kappa' \neq 0$  para la curva de transición. En dicho punto las ecuaciones (5.21), (5.22), (5.13), (5.1), (5.5b) y (5.4) se reducen a:

$$a_v = 1; \quad a_g = 1$$

$$w(s, n, t) = -n \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{2} n^2 \kappa' u_0$$

$$u_0(s) = \frac{Q_0}{b d}$$

$$S_0 = -\tan \theta - \frac{u_0^2}{g d \cos \theta} \left( \frac{1}{2} d \kappa' - \frac{b'}{b} \right) \quad \text{y} \quad F^2 = \frac{u_0^2}{g d \cos \theta}$$

## A.2 METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

### A.2.1 Descripción

Cuando se utilizan los métodos de integración numérica de Runge - Kutta, el grado de exactitud se incrementa si se emplea uno de orden mayor. El resultado obtenido es entonces más preciso y los errores también se reducen con mayor rapidez al disminuir el tamaño del incremento  $h$ .

Se considera la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$y' = f(y, t), \quad y(0) = y_0$$

Si se desea calcular  $y_{n+1}$  a partir de un valor conocido  $y_n$ , se integra la ecuación anterior en el intervalo  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$  y se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt$$

Los métodos de Runge-Kutta se deducen aplicando un método de integración numérica al miembro derecho de la ecuación anterior. El de cuarto orden es exacto hasta el término de cuarto orden de la expansión de Taylor, de modo que el error local es proporcional a  $h^5$ . A continuación se presenta la versión de este método.

$$k_1 = y'(x_i, y_i)$$

$$k_2 = y'\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = y'\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = y'(x_i + h, y_i + hk_3)$$

$$y_i = y_i + h \left( \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right)$$

Para cada  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . El método tiene un error de truncamiento de  $O(h^4)$ , siempre y cuando la solución  $y(x)$  tenga cinco derivadas continuas. Los términos  $k_1, k_2, k_3, k_4$  se introducen para eliminar la necesidad de insertar sucesivamente la evaluación de la segunda variable en la función  $f(x, y)$ .

## A.2.2 Aplicación manual del método a un intervalo

Se aplica el método de Runge-Kutta de cuarto orden a la solución de la EDO (5.5b) en un solo punto de  $s$  sólo para el caso convexo, con el objeto de ilustrar el método y para fines comprobatorios. Posteriormente se desarrolla el programa para la solución numérica en todo el canal y para las cuatro distintas condiciones del flujo utilizadas en los experimentos.

Los datos del problema y condiciones iniciales son:

$$\begin{array}{lll}
 R = 38.1 \text{ cm} & K = 158 \text{ cm}^{1/2}/\text{s} & h = 5 \text{ cm} \\
 \kappa = -0.02625 \text{ cm}^{-1} & u_0 = 140.21 \text{ cm} & E_0 = 17.4 \text{ cm} \\
 b = 20.32 \text{ cm} & Q_0 = 49573.7692 \text{ cm}^3/\text{s} & d(s) = ? \\
 \nu = 0.01007 \text{ cm}^2/\text{s} & d(0) = 12.5 \text{ cm} & 
 \end{array}$$

Se resuelve la EDO (5.5b) por partes. Las ecuaciones por utilizar corresponden de la (5.16) a la (5.25).

Para  $k_1$ :  $k_1 = d'(s_i, d_i)$

De la ecuación (5.16)

$$S_0 = -(1 - (-0.02625)(12.5)) \tan(-0/38.1) = 0$$

$$\alpha_v = 20.32 - 2(-0.02625)^{-1} \ln[1 - (-0.02625)(12.5)] / [20.32 + 2(12.5)] = 0.9254$$

De la ecuación (5.22)

$$a_v = \left[ \frac{-(-0.02625)12.50}{\ln[1 - (-0.02625)12.50]} \right]^{1/4} = 1.03698$$

De la ecuación (5.18)

$$u_0 = \frac{-(-0.02625) 49573.769}{20.32 \ln[1 - (-0.02625)12.50]} = 225.6804$$

Siendo el radio hidráulico:

$$R_h = \frac{20.32 (12.50)}{20.32 + 2(12.50)} = 5.6046$$

De la ecuación (5.20)

$$S_f = 0.9254 (1.03698) \left[ \frac{(0.01007)^{3/4}}{\sqrt{2} (158)^2} \right] \frac{(225.6804)^{7/4}}{(5.6046)^{5/4}} = 0.01312$$

De la ecuación (5.19)

$$F^2 = \frac{\frac{(225.6804)^2}{981 (12.50) \cos\left(-\frac{0}{38.1}\right)}}{\frac{[1 - (-0.02625)(12.50)]^3 \ln[1 - (-0.02625)(12.50)]}{(-0.02625)(12.50)[1 + \ln(1 - (-0.02625)(12.50))]}} = 2.63181$$

De la ecuación (5.5b)

$$k_1 = \frac{0 - \frac{0.01312}{\cos\left(-\frac{0}{38.1}\right)}}{1 - 2.63181} = 0.00804$$

Para  $k_2$  se aumentan  $h$  y  $k_1$ . Por una secuela similar, de las ecuaciones (5.16), (5.22), (5.20), (5.19) y la definición de  $k_2$ , se obtiene

$$k_2 = d' \left( s_i + \frac{h}{2}, d_i + \frac{h}{2} k_1 \right)$$

$$S_0 = - [1 - (-0.02625(12.50 + (5/2)(0.00804)))] \tan\left(-\frac{0 + 5/2}{38.1}\right) = 0.08731$$

$$\alpha_v = \frac{20.32 - 2(-0.02625)^{-1} \ln[1 - (-0.02625)(12.50 + (5/2)(0.00804))]}{20.32 + 2[12.50 + (5/2)(0.00804)]} = 0.9253$$

$$\alpha_a = \left[ \frac{-(-0.02625)[12.50 + (5/2)(0.00804)]}{\ln[1 - (-0.02625)(12.50 + (5/2)(0.00804))]} \right]^{1/4} = 1.03703$$

$$u_0 = \frac{-(-0.02625) 49573.769}{20.32 \ln[1 - (-0.02625)(12.50 + (5/2)(0.00804))]} = 225.36479$$

De la definición de radio hidráulico se obtiene

$$R_h = \frac{20.32[12.50 + (5/2)(0.00804)]}{20.32 + 2[12.50 + (5/2)(0.00804)]} = 5.6086$$

Sustituyendo en las ecuaciones (5.20) y (5.19)

$$S_f = 0.9253 (1.03703) \left[ \frac{(0.01007)^{3/4}}{\sqrt{2} (158)^2} \right] \left[ \frac{(225.3648)^{7/4}}{(5.6086)^{5/4}} \right] = 0.01308$$

$$F^2 = \frac{(225.3648)^2}{981 \left[ 12.50 + \frac{5}{2} 0.00804 \cos \left( 0 + \frac{5}{2} \right) - \frac{0 + \frac{5}{2}}{38.1} \right]}$$

$$= \frac{\left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2} 0.00804 \right) \right]^3 \ln \left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2} (0.00804) \right) \right]}{-0.02625 \left( 12.50 + \frac{5}{2} 0.00804 \right) \left[ 1 + \ln \left( 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2} 0.00804 \right) \right) \right]}$$

$$F^2 = 2.6241$$

De la definición de  $k_2$

$$k_2 = \frac{0.08731 - \frac{0.01308}{\cos \left( 0 + \frac{5}{2} \right)}}{1 - 2.6241} = -0.04569$$

Para  $k_3$  sigue siendo igual pero ahora será  $k_2$  en lugar de  $k_1$

$$k_3 = d' \left( s_1 + \frac{h}{2}, d_1 + \frac{h}{2} k_2 \right)$$

$$S_0 = - \left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + (5/2)(-0.04569) \right) \right] \tan \frac{0 + 5/2}{38.1} = 0.08708$$

$$a_v = \frac{20.32 - 2(-0.02625)^{-1} \ln[1 - (-0.02625)[12.50 + (5/2)(-0.04569)]]}{20.32 + 2[12.50 + (5/2)(-0.04569)]} = 0.9263$$

$$a_q = \left[ \frac{-(-0.02625)[12.50 + (5/2)(-0.04569)]}{\ln[1 - (-0.02625)(12.50 + (5/2)(-0.04569))]} \right]^{1/4} = 1.0367$$

$$u_0 = \frac{-(-0.02625) 49573.769}{20.32 \ln[1 - (-0.02625) 12.50 + (5/2)(-0.04569)]} = 227.4924$$

$$R_h = \frac{20.32[12.50 + (5/2)(-0.04569)]}{20.32 + 2[12.50 + (5/2)(-0.04569)]} = 5.5815$$

$$S_f = 0.9263 (1.03667) \left[ \frac{(0.01007)^{1/4}}{\sqrt{2} (158)^2} \right] \left[ \frac{(227.4924)^{7/4}}{(5.5815)^{3/4}} \right] = 0.01338$$

$$F^2 = \frac{(227.4924)^2}{981 \left( 12.50 + \frac{5}{2} (-0.04569) \cos \frac{0 + \frac{5}{2}}{38.1} \right)}$$

$$F^2 = \frac{\left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2} (-0.04569) \right) \right]^3 \ln \left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2} (-0.04569) \right) \right]}{(-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2} (-0.04569) \right) \left[ 1 + \ln \left( 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2} (-0.04569) \right) \right) \right]}}$$

$$F^2 = 2.7151$$

Por tanto

$$k_2 = \frac{0.08708 - \frac{0.01338}{\cos \left( \frac{0 + \frac{5}{2}}{38.1} \right)}}{1 - 2.7151} = -0.04295$$

Para  $k_4$  cambia ahora

$$k_4 = d'(s, h, d_1 + hk_3)$$

$$S_0 = - \left[ 1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295)) \right] \tan^{-1} \frac{0+5}{38.1} = 0.1746$$

$$a_v = \frac{20.32 - 2(-0.02625)^{-1} \ln \left[ 1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295)) \right]}{(20.32) + 2[12.50 + (5)(-0.04295)]} = 0.9271$$

$$a_q = \left[ \frac{-(-0.02625) [12.50 + 5(-0.04295)]}{\ln \left[ 1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295)) \right]} \right]^{1/4} = 1.0364$$

$$u_0 = \frac{-(-0.02625) 49573.769}{20.32 \ln \left[ 1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295)) \right]} = 229.1147$$

$$R_n = \frac{20.32 [12.50 + 5(-0.04295)]}{20.32 + 2[12.50 + (5/2)(-0.04295)]} = 5.561$$

$$S_f = 0.9271 (1.0364) \left[ \frac{(0.01007)^{1/4}}{\sqrt{2}(158)^2} \right] \left[ \frac{(229.1147)^{7/4}}{(5.561)^{5/4}} \right] = 0.01362$$

$$F^2 = \frac{(229.1147)^2}{981 \left( 12.50 + 5(-0.04295) \cos \left( -\frac{0+5}{38.1} \right) \right)} \frac{[1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295))]^2 \ln \left[ 1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295)) \right]}{(-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295)) [1 + \ln(1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295)))]}$$

$$F^2 = 2.8040$$

$$k_4 = \frac{0.1746 - \frac{0.01362}{\cos \frac{0+5}{38.1}}}{1 - 2.8040} = -0.08917$$

$$d(s) = d_0 + h \left( \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right)$$

El valor del tirante es entonces:

$$d(5) = 12.50 + 5 \left( \frac{0.00804 + 2(-0.04569) + 2(-0.04295) + (-0.08917)}{6} \right)$$

$$d(5) = 12.2847 \text{ cm}$$

Verificación de los resultados con el programa

La función es  $dd/ds = f(s, N(s), Q0)$

Indique los incrementos:  $h = 5 \text{ cm}$

¿Cual es la base del canal?  $b = 20.32 \text{ cm}$

¿Cual es el radio del cimacio?  $R = 38.1 \text{ cm}$

¿Cual es el gasto en el canal?  $Q = 49573.76928 \text{ cm}^3/\text{s}$

¿Cual es el tirante al inicio de la curvatura?  $d_0 = 12.5 \text{ cm}$

¿Cual es el valor inicial de la parte convexa?  $s = 0$

¿cual es el valor final de la parte convexa?  $s = 50 \text{ cm}$

$s$	$d$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
5.0000	12.28470	0.00804	-0.04569	-0.04295	-0.08914
10.0000	11.68713	-0.08912	-0.12383	-0.11936	-0.14158

Los valores de  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  serán posteriormente omitidos, ya que éstos nada significan por si solos.

## A.3 ELABORACIÓN DEL PROGRAMA DE CÓMPUTO

### A.3.1 Elección del lenguaje de cómputo

Para elegir el programa se vió la necesidad de visualización gráfica, es decir, además de necesitar los valores de las variables en cada punto  $s$  a lo largo del fondo, fue necesario representar los valores de las variables mediante gráficas, con el fin de interpretar el comportamiento del flujo en el modelo elegido.

Se decidió que MATLAB podía satisfacer estas necesidades, ya que se puede considerar un lenguaje de programación como el FORTRAN o el C, con las características notables siguientes:

- La programación es más sencilla
- Hay continuidad entre los valores enteros, reales y complejos
- La amplitud del intervalo y la exactitud de los números son mayores
- Proporciona abundantes herramientas gráficas, que incluyen funciones de interfase con el usuario
- Capacidad de vincularse con los lenguajes de programación convencionales
- Transportabilidad de los programas MATLAB.

Hay que tomar en cuenta que el programa MATLAB tiene el comando *ode45* que resuelve la ecuación diferencial hasta una precisión de orden 4 o 5. En este caso se tomó la decisión de desarrollar el programa para que el usuario final no tenga la necesidad de conocer o dominar los comandos del software, por lo que sólo es necesario correr el programa e introducir los valores de las variables que se van pidiendo, haciendo así más fácil la aplicación de éste.

A diferencia de otros lenguajes, en MATLAB no hay distinción entre números reales y complejos, de precisión sencilla y doble precisión y todos están conectados continuamente. Esto significa que cualquier variable puede contener números de cualquier tipo sin una declaración especial durante la programación, por lo cual ésta se vuelve más rápida y productiva. En cambio, en FORTRAN se necesita una subrutina distinta para cada variable, sencilla o doble, real, entera o no, mientras que en MATLAB no es necesario separarlas.

La biblioteca matemática de MATLAB facilita los análisis matemáticos, pero el usuario puede crear rutinas matemáticas adicionales con mayor facilidad que en otros *lenguajes*, gracias a la continuidad entre las variables reales y complejas.

Existen otros paquetes que resuelven las EDO directamente como son:

- Mathematica
- Maple
- Mathcad

pero con la desventaja de que el usuario tendría que estar familiarizado con alguno de ellos y conocer los comandos que le dan solución a las EDO. La ventaja de conocer alguno de estos paquetes es que uno evita el desarrollo del programa.

Entre numerosas funciones matemáticas, los solucionadores de algebra lineal desempeñan un papel crucial, ya que todo el sistema MATLAB se basa en ellos. Por otra parte, el análisis visual de los problemas matemáticos ayuda a comprender mejor las matemáticas y a hacerlas más accesibles. Aunque esta ventaja es bien conocida, la presentación gráfica de los resultados calculados solía requerir un esfuerzo adicional considerable. En cambio, bastan unos cuantos comandos con MATLAB para producir presentaciones gráficas de material matemático y hasta crear objetos gráficos científicos e incluso artísticos en la pantalla mediante expresiones matemáticas.

### A.3.2 DESARROLLO DEL PROGRAMA DE CÓMPUTO

Para demostrar cuál es el verdadero valor del componente  $u$  de la velocidad se da solución a la ecuación y se compara con el valor del componente  $w$  para así demostrar que  $u \ll w$ . La ecuación presenta una derivada parcial y la solución a ésta se da a continuación:

$$\frac{du_0}{ds} = \frac{-\kappa Q_0}{b \ln(1-\kappa d)}$$

Dado que  $\kappa$ ,  $Q_0$  y  $b$  son constantes, se puede escribir

$$\frac{du_0}{ds} = \frac{1}{b \ln(1-\kappa d)} \frac{-\kappa Q_0}{b} = \frac{-\kappa Q_0}{b \ln(1-\kappa d)^2 (1-\kappa d)} \frac{dd}{ds}$$

Por lo tanto

$$w = \frac{\ln(1-\kappa n)}{(1-\kappa n) \kappa} \frac{-\kappa^2 Q_0 dd/ds}{b \ln(1-\kappa d)^2 (1-\kappa d)}$$

La expresión anterior contiene el término  $dd/ds$ , el cual está dado por la ecuación (5.5a). El valor de  $k_1$  en el método de Runge-Kutta es  $k_1 = d'(s_i, d_i)$ , por lo que este valor se sustituye en el componente normal ( $w$ ) de la velocidad.

Se desarrollaron cuatro programas; el primero se elaboró para la parte discontinua en el punto 0, el segundo para la parte convexa, el tercero corresponde a la discontinuidad en el punto A y el último a la parte cóncava. Las variables de entrada son:

- ('Indique los incrementos  $h = '$ );
- ('¿Cuál es la base del canal?  $b = '$ );
- ('¿Cual es el radio del cimacio?  $R = '$ );
- ¿Cual es el gasto en el canal?  $Q = '$ );
- ('¿Cual es el tirante al inicio de la curvatura?  $d_0 = '$ );
- ('¿Cual es la velocidad?  $w = '$ );
- ('¿Cual es el valor inicial de la parte convexa?  $s = '$ );
- ('¿cual es el valor final de la parte convexa?  $s = '$ )

donde  $h$  son los incrementos a lo largo de la plantilla, los cuales deben ser pequeños para que los resultados sean más precisos;  $s$  es la coordenada que sigue fielmente la forma del fondo curvo, desde el inicio hasta el final de la parte convexa.

Los valores de salida son:

$$s, d, u^2/2g, d+u^2/2g, u, w, R_c$$

Nota: Se dan los valores de  $d$  en todos los puntos, excepto en los de discontinuidad, ya que el tirante varía muy rápido en ellos.

$d$  es el tirante en cada punto de coordenada  $s$ ,  $R_c^2/2g$  es la carga de velocidad corregida,  $u$  y  $w$  son los componentes de la velocidad en un punto  $s$  (paralelo y normal a la curvatura del fondo respectivamente),  $R_c$  es la magnitud de la velocidad resultante de los componentes de la velocidad ( $R_c = \sqrt{u^2 + w^2}$ ).

Los signos % en MATLAB indican que los enunciados que siguen al signo en la misma línea son comentarios y deben ignorarse durante los cálculos.

A continuación se presenta el programa para la parte discontinua en el punto 0. El punto inicial en  $s$  debe ser  $< -1$ , ya que si se empieza en  $s = -1$  se tiene la condición  $\kappa' = 0$ ,  $\kappa = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\zeta = 0$ ; es decir, se tiene el caso de fondo plano.

## Programa para la discontinuidad en el punto 0

```

% Este programa calcula el perfil de un flujo curvilíneo para la
%discontinuidad en 0
%donde h son los incrementos de la coordenada s.
%b es la base del canal.
%r es el radio de la parte convexa
%q0 es el gasto en el canal
%L1 es el intervalo alisado
%v es la velocidad del flujo
%g es la gravedad
%ka es la constante de Blasius
%vis es la viscosidad cinematica
%k es la curvatura de la plantilla
%nota el punto inicial s debe ser < -1
%por lo que empezaremos en s=-.99
%=====
clear, clf,
disp('La funcion es dN/ds=f(s,N(s),Q0)')
h=.01;%input('Indique los incrementos h=');
m=1;
b=input(';Cual es la base del canal? b=');
r=input(';Cual es el radio del cimacio? r=');
q0=input('Cual es el gasto en el canal Q=');
n(m)=input(';Cual es el tirante al inicio de la curvatura ? N0=');
L1=1;
g=981; %cm/s^2
ka=158; %cm^.5/s
vis=0.01007; %cm^2/s
ep=L1/r;
s(m)=-.99;%input(';cual es el valor inicial de? s=');
sfin=1%input(';Cual es el valor final de la parte convexa? s=');
sf=(sfin-s(1))/h;
disp('      s      N      ')
while m<=sf;
lm=s(m)/L1;
k=(1/(4*r))*(lm^3-3*lm-2);
kp=(lm^2-1)*(3/(4*(r^2)*ep));
teta=(ep/16)*((lm^4)-6*(lm^2)-8*lm-3);

```

% DETERMINACION DEL VALOR DE K1

```
s0=- (1-k*n(m))*tan(teta)- (((-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(2)))/...
(g*((1-k*n(m))^2)*cos(teta))* (((k*n(m)+log(1-k*n(m)))/...
((1-k*n(m))*log(1-k*n(m))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*n(m)))/(b+2*n(m));
aq=((-k*n(m))/(log(1-k*n(m))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(7/4))/...
(b*n(m)/(b+2*n(m)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(2)/(g*n(m)*cos(teta))/...
(- (1-k*n(m))^3*log(1-k*n(m))/(k*n(m)*(1+log(1-k*n(m)))));
k1=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
```

% DETERMINACION DEL VALOR DE K2

```
s0=- (1-k*(n(m)+h/2*k1))*tan(teta)...
- (((-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(2)))/...
(g*((1-k*(n(m)+h/2*k1))^2)*cos(teta))*...
(((k*(n(m)+h/2*k1)+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/(1-k*(n(m)+h/2*k1))*...
log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/(b+2*(n(m)+h/2*k1));
aq=((-k*(n(m)+h/2*k1))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k1)/(b+2*(n(m)+h/2*k1)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k1)*cos(teta))/...
(- (1-k*(n(m)+h/2*k1))^3*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))/(k*(n(m)+h/2*k1)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))));
k2=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
```

% DETERMINACION DEL VALOR DE K3

```
s0=- (1-k*(n(m)+h/2*k2))*tan(teta)...
- (((-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(2)))/...
(g*((1-k*(n(m)+h/2*k2))^2)*cos(teta))*...
(((k*(n(m)+h/2*k2)+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/(1-k*(n(m)+h/2*k2))*...
log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/(b+2*(n(m)+h/2*k2));
aq=((-k*(n(m)+h/2*k2))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k2)/(b+2*(n(m)+h/2*k2)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k2)*cos(teta))/...
(- (1-k*(n(m)+h/2*k2))^3*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))/(k*(n(m)+h/2*k2)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))));
k3=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
```

```

%DETERMINACION DEL VALOR DE K4
s0=- (1-k*(n(m)+h*k3))*tan(teta)...
- (((-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(2)))/...
(g*((1-k*(n(m)+h*k3))^2)*cos(teta))*...
(((k*(n(m)+h*k3)+log(1-k*(n(m)+h*k3)))/((1-k*(n(m)+h*k3))*...
log(1-k*(n(m)+h*k3))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h*k3)))/(b+2*(n(m)+h*k3));
aq=((-k*(n(m)+h*k3))/(log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h*k3)/(b+2*(n(m)+h*k3)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(2)/(g*(n(m)+h*k3)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h*k3))^3*log(1-k*(n(m)+h*k3))/(k*(n(m)+h*k3)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h*k3)))));
k4=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);

n(m+1)=n(m)+h*(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
s(m+1)=s(m)+h;
fprintf('%10.3f',s(m+1))
fprintf('%10.5f\n',n(m+1))
m=m+1;
plot(s,n,'.')
grid on
xlabel('s')
ylabel('n')
end

```

## Programa para la parte convexa:

```

% Este programa calcula el perfil de un flujo curvilíneo convexo
% en donde h son los incrementos de la coordenada s.
% b es la base del canal.
% r es el radio de la parte convexa
% Q0 es el gasto en el canal
% v es la velocidad del flujo
% g es la gravedad
% ka es la constante de Blasius
% vis es la viscosidad cinemática
% k es la curvatura de la plantilla
% =====
clear, clf, clc
disp('La función es  $dn/ds=f(s,N(s),Q0)$ ')
h=input('Indique los incrementos h=');
m=1;
b=input('¿Cual es la base del canal? b=');
r=input('¿Cual es el radio de la parte convexa? r=');
q0=input('Cual es el gasto en el canal Q=');
n(m)=input('¿Cual es el tirante normal al inicio de la curvatura ? NC=');
g=981;
ka=158;
vis=0.01007;
k=-1/r;
s(m)=input('¿cual es el valor inicial de la parte convexa? s=');
sfin=input('¿Cual es el valor final de la parte convexa? s=');
sf=(sfin-s(1))/h;
disp('      s      N      v^2/2g      N+v^2/2g      u      v      Rc')
% s0 es la pendiente
% av y aq son las funciones de Blasius
% blas la ecuación generalizada de Blasius
% F es el número de Froud
% k1, k2, k3, k4, son los valores del método de Runge-Kutta
% n(m+1) es el valor del tirante en la coordenada s
% =====
while m<=sf;
% DETERMINACION DEL VALOR DE K1
s0=-(1-k*n(m))*tan(-s(m)/r);
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*n(m)))/(b+2*n(m));
aq=(-k*n(m))/(log(1-k*n(m)))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(7/4))/...
(b*n(m)/(b+2*n(m)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(2)/(g*n(m)*cos(-s(m)/r))/...
(-(1-k*n(m))^(3)*log(1-k*n(m))/(k*n(m)*(1+log(1-k*n(m)))));
k1=(s0-av*aq*blas*(1/cos(-s(m)/r)))/(1-F);

% DETERMINACION DEL VALOR DE K2
s0=-(1-k*(n(m)+h/2*k1))*tan(-(s(m)+h/2)/r);
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/(b+2*(n(m)+h/2*k1));
aq=(-k*(n(m)+h/2*k1))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k1)/(b+2*(n(m)+h/2*k1)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))^(2))/...
(g*(n(m)+h/2*k1)*cos(-(s(m)+h/2)/r))/...

```

```

(-(1-k*(n(m)+h/2*k1))^(3)*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))/(k*(n(m)+h/2*k1)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))));
k2=(s0-av*aq*blas*(1/cos(-(s(m)+h/2)/r)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K3
s0=-(1-k*(n(m)+h/2*k2))*tan(-(s(m)+h/2)/r);
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/(b+2*(n(m)+h/2*k2));
aq=(-k*(n(m)+h/2*k2))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k2)/(b+2*(n(m)+h/2*k2)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k2)*cos(-(s(m)+h/2)/r))/...
(-(1-k*(n(m)+h/2*k2))^(3)*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))/(k*(n(m)+h/2*k2)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))));
k3=(s0-av*aq*blas*(1/cos(-(s(m)+h/2)/r)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K4
s0=-(1-k*(n(m)+h*k3))*tan(-(s(m)+h)/r);
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h*k3)))/(b+2*(n(m)+h*k3));
aq=(-k*(n(m)+h*k3))/(log(1-k*(n(m)+h*k3)))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h*k3)/(b+2*(n(m)+h*k3)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(2)/(g*(n(m)+h*k3)*cos(-
(s(m)+h)/r))/...
(-(1-k*(n(m)+h*k3))^(3)*log(1-k*(n(m)+h*k3))/(k*(n(m)+h*k3)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h*k3)))));
k4=(s0-av*aq*blas*(1/cos(-(s(m)+h)/r)))/(1-F);
n(m+1)=n(m)+h*(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
%en donde 'a' es la componente de velocidad (vel), y c es la derivada
dc/ds,
%u es la componente de velocidad, Rc es la resultante de las componentes
%vel y u alfa es el angulo de la resultante (Rc),
%carga es la carga de velocidad,
%NO es la energia real
%=====
a=log(1-k*n(m+1))/((1-k*n(m+1))*k);
c=(-k^2*q0*k1)/(b*(log(1-k*n(m+1))^2)*(1-k*n(m+1)));
vel=a*c;
u=-k*q0/(b*log(1-k*n(m+1)))/(1-k*n(m+1));
alfa=atan(vel/u);
Rc=vel/(sin(alfa));
carga=(R^2)/(2*g);
NO(m+1)=n(m+1)+carga;
s(m+1)=s(m)+h;
fprintf('%10.2f',s(m+1))
fprintf('%10.5f',n(m+1))
fprintf('%10.5f',carga)
fprintf('%10.5f',NO(m+1))
fprintf('%10.5f',u)
fprintf('%10.5f',vel)
fprintf('%10.5f\n',Rc)
m=m+1;
plot (s,n,'.')
grid on
xlabel('s')
ylabel('n')
end

```

## Programa para la discontinuidad en el punto A.

```

% Este programa calcula el perfil de un flujo curvilíneo para la
% discontinuidad en 0
% en donde h son los incrementos de la coordenada s.
% b es la base del canal.
% r es el radio de la parte convexa
% q0 es el gasto en el canal
% L1 es el intervalo alisado
% v es la velocidad del flujo
% g es la gravedad
% ka es la constante de Blasius
% vis es la viscosidad cinemática
% k es la curvatura de la plantilla
% nota el punto inicial s debe ser < -1
% por lo que empezaremos en s=-.99
%=====
clear, clf, clic
disp('La función es  $dN/ds=f(s,N(s),Q_0)$ ')
h=.1;%input('Indique los incrementos h=');
m=1;
b=20.32;%input('¿Cual es la base del canal? b=');
r=38.1;%input('¿Cual es el radio del cimacio? r=');
Ang=75.17;%input('¿cual es el ángulo? fi=');
q0=49573.76928;%input('Cual es el gasto en el canal Q=');
n(m)=7.05502;%input('¿Cual es el tirante normal ? H0=');
v=140.21;%input('¿Cual es la velocidad? v=');
g=981; %cm/s^2
ka=158; %cm^.5/s
vis=0.01007; %cm^2/s
L2=1;
de=L2/r;
fi=(Ang)*(pi)/180;
s(m)=49;%input('¿cual es el valor inicial de s de la parte concava? s=');
sfin=51;%input('¿Cual es el valor final de s de la parte concava? s=');
sf=(sfin-s(1))/h;
disp('      s      N      ')
while m<=sf;
mi=(s(m)-fi*r)/L2;
k=(1/(2*r))*(3*mi-mi^3);
kp=(3/(2*(r^2)*de))*(1-mi^2);
teta=(de/8)*(3+6*(mi^2)-mi^4)-fi;
%=====
% DETERMINACION DEL VALOR DE K1
s0=- (1-k*n(m))*tan(teta)-((( -k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(2))/...
(g*((1-k*n(m))^2)*cos(teta)))*(((k*n(m)+log(1-k*n(m)))/...
((1-k*n(m))*log(1-k*n(m))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*n(m)))/(b+2*n(m));
aq=(( -k*n(m))/(log(1-k*n(m))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(7/4))/...
(b*n(m)/(b+2*n(m)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(2)/(g*n(m)*cos(teta))/...
(-(1-k*n(m))^3*log(1-k*n(m))/(k*n(m)*(1+log(1-k*n(m)))));
kl=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);

```

%DETERMINACION DEL VALOR DE K2

```
s0=-(1-k*(n(m)+h/2*k1))*tan(teta)...
-((( -k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(2))/...
(g*((1-k*(n(m)+h/2*k1))^2)*cos(teta))*...
(((k*(n(m)+h/2*k1)+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/((1-k*(n(m)+h/2*k1))*...
log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/(b+2*(n(m)+h/2*k1));
aq=(-k*(n(m)+h/2*k1)/(log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k1)/(b+2*(n(m)+h/2*k1)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k1)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h/2*k1))^3*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))/(k*(n(m)+h/2*k1)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))));
k2=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
```

%DETERMINACION DEL VALOR DE K3

```
s0=-(1-k*(n(m)+h/2*k2))*tan(teta)...
-((( -k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(2))/...
(g*((1-k*(n(m)+h/2*k2))^2)*cos(teta))*...
(((k*(n(m)+h/2*k2)+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/((1-k*(n(m)+h/2*k2))*...
log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/(b+2*(n(m)+h/2*k2));
aq=(-k*(n(m)+h/2*k2)/(log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k2)/(b+2*(n(m)+h/2*k2)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k2)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h/2*k2))^3*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))/(k*(n(m)+h/2*k2)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))));
k3=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
```

%DETERMINACION DEL VALOR DE K4

```
s0=-(1-k*(n(m)+h*k3))*tan(teta)...
-((( -k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(2))/...
(g*((1-k*(n(m)+h*k3))^2)*cos(teta))*...
(((k*(n(m)+h*k3)+log(1-k*(n(m)+h*k3)))/((1-k*(n(m)+h*k3))*...
log(1-k*(n(m)+h*k3))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h*k3)))/(b+2*(n(m)+h*k3));
aq=(-k*(n(m)+h*k3)/(log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h*k3)/(b+2*(n(m)+h*k3)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(2)/(g*(n(m)+h*k3)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h*k3))^3*log(1-k*(n(m)+h*k3))/(k*(n(m)+h*k3)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h*k3)))));
k4=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
n(m+1)=n(m)+h*(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
s(m+1)=s(m)+h;
fprintf('%10.2f',s(m+1))
fprintf('%10.5f\n',n(m+1))
m=m+1;
plot(s,n)
grid on
xlabel('s')
ylabel('n')
end
```

Para la parte cóncava solo varían  $\theta$  y  $k$ :

```
% Este programa calcula el perfil de un flujo curvilíneo cóncavo
% en donde h son los incrementos de la coordenada s.
% b es la base del canal.
% r es el radio de la parte convexa
% q0 es el gasto en el canal
% v es la velocidad del flujo
% g es la gravedad
% ka es la constante de Blasius
% vis es la viscosidad cinemática
% kc es la curvatura de la plantilla
% fi esta en radianes
%=====
clear, clf,clc
disp('La función es dN/ds=f(s,N(s),Q0)')
h=2;%input('Indique los incrementos h=');
m=1;
b=20.32;%input('¿Cual es la base del canal? b=');
r=38.1;%input('¿Cual es el radio del cimacio? r=');
Ang=input('¿cual es el ángulo? fi=');
q0=49573.76928;%input('Cual es el gasto en el canal Q=');
n(m)=7.10737;%input('¿Cual es el tirante normal ? H0=');
g=981; %cm/s^2
ka=158; %cm^0.5/s
vis=0.01007; %cm^2/s
fi=(Ang)*(pi)/180
kc=1/r;
s(m)=50;%input('¿cual es el valor inicial de s de la parte concava? s=');
sfin=130;%input('¿Cual es el valor final de s de la parte concava? s=');
sf=(sfin-s(1))/h;
disp('      s          N          v^2/2g      N+v^2/2g      u          v          Rc');
% s0 es la pendiente
% av y aq son la s funciones de Blasius
% blas la ecuación generalizada de Blasius
% F es el número de froud
% k1, k2, k3, k4, son los valores del método de Runge-Kutta
% n(m+1) es el valor del tirante en la coordenada s
%=====
while m<=sf;
% DETERMINACION DEL VALOR DE K1
s0=- (1-kc*n(m)) *tan(s(m)/r-2*fi);
av=(b-2*kc^(-1)*log(1-kc*n(m)))/(b+2*n(m));
aq=(-kc*n(m))/(log(1-kc*n(m)))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-kc*q0/(b*log(1-kc*n(m))))^(7/4))/...
(b*n(m)/(b+2*n(m)))^(5/4);
F=(-kc*q0/(b*log(1-kc*n(m))))^(2)/(g*n(m)*cos(s(m)/r-2*fi))/...
(-(1-kc*n(m))^(3)*log(1-kc*n(m)))/(kc*n(m)*(1+log(1-kc*n(m))));
k1=(s0-av*aq*blas*(1/cos(s(m)/r-2*fi)))/(1-F);
```

%DETERMINACION DEL VALOR DE K2

```

s0=- (1-kc*(n(m)+h/2*k1))*tan((s(m)+h/2)/r-2*fi);
av=(b-2*kc^(-1)*log(1-kc*(n(m)+h/2*k1)))/(b+2*(n(m)+h/2*k1));
aq=((-kc*(n(m)+h/2*k1))/(log(1-kc*(n(m)+h/2*k1))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-kc*q0/...
(b*log(1-kc*(n(m)+h/2*k1))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k1)/(b+2*(n(m)+h/2*k1)))^(5/4);
F=(-kc*q0/(b*log(1-kc*(n(m)+h/2*k1))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k1)*cos((s(m)+h/2)/r-2*fi))/...
(-(1-kc*(n(m)+h/2*k1))^3*log(1-kc*(n(m)+h/2*k1))/(kc*(n(m)+h/2*k1)*...
(1+log(1-kc*(n(m)+h/2*k1)))));
k2=(s0-av*aq*blas*(1/cos((s(m)+h/2)/r-2*fi)))/(1-F);

```

%DETERMINACION DEL VALOR DE K3

```

s0=- (1-kc*(n(m)+h/2*k2))*tan((s(m)+h/2)/r-2*fi);
av=(b-2*kc^(-1)*log(1-kc*(n(m)+h/2*k2)))/(b+2*(n(m)+h/2*k2));
aq=((-kc*(n(m)+h/2*k2))/(log(1-kc*(n(m)+h/2*k2))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-kc*q0/...
(b*log(1-kc*(n(m)+h/2*k2))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k2)/(b+2*(n(m)+h/2*k2)))^(5/4);
F=(-kc*q0/(b*log(1-kc*(n(m)+h/2*k2))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k2)*cos((s(m)+h/2)/r-2*fi))/...
(-(1-kc*(n(m)+h/2*k2))^3*log(1-kc*(n(m)+h/2*k2))/(kc*(n(m)+h/2*k2)*...
(1+log(1-kc*(n(m)+h/2*k2)))));
k3=(s0-av*aq*blas*(1/cos((s(m)+h/2)/r-2*fi)))/(1-F);

```

%DETERMINACION DEL VALOR DE K4

```

s0=- (1-kc*(n(m)+h*k3))*tan((s(m)+h)/r-2*fi);
av=(b-2*kc^(-1)*log(1-kc*(n(m)+h*k3)))/(b+2*(n(m)+h*k3));
aq=((-kc*(n(m)+h*k3))/(log(1-kc*(n(m)+h*k3))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-kc*q0/...
(b*log(1-kc*(n(m)+h*k3))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h*k3)/(b+2*(n(m)+h*k3)))^(5/4);
F=(-kc*q0/(b*log(1-kc*(n(m)+h*k3))))^(2)/(g*(n(m)+h*k3)*cos((s(m)+h)/r-
2*fi))/...
(-(1-kc*(n(m)+h*k3))^3*log(1-kc*(n(m)+h*k3))/(kc*(n(m)+h*k3)*...
(1+log(1-kc*(n(m)+h*k3)))));
k4=(s0-av*aq*blas*(1/cos((s(m)+h)/r-2*fi)))/(1-F);
n(m+1)=n(m)+h*(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

```

%en donde 'a' es la componente de velocidad (vel), y c es la derivada dc/ds,

% 'u' es la componente de velocidad, Rc es la resultante de las componentes

%vel y u alfa es el angulo de la resultante (Rc),

%carga es la carga de velocidad,

%N0 es la energia real

```

=====
a=log(1-kc*n(m+1))/((1-kc*n(m+1))*kc);
c=(-kc^2*q0*k1)/(b*(log(1-kc*n(m+1))^2)*(1-kc*n(m+1)));
vel=a*c;
u=-kc*q0/(b*log(1-kc*n(m+1)))/(1-kc*n(m+1));
alfa=atan(vel/u);
Rc=vel/(sin(alfa));
carga=(Rc^2)/(2*g);
N0(m+1)=n(m+1)+carga;
s(m+1)=s(m)+h;

```

```
fprintf('%10.2f',s(m+1))
fprintf('%10.5f',n(m+1))
fprintf('%10.5f',carga)
fprintf('%10.5f',NO(m+1))
fprintf('%10.5f',u)
fprintf('%10.5f',vel)
fprintf('%10.5f\n',Rc)
m=m+1;
plot (s,n, '.')
grid on
xlabel('s')
ylabel('n')
end
```

#### A.4 RESULTADOS NUMÉRICOS DEL PROGRAMA.

Los resultados que aquí se presentan son para los cuatro ejemplos de la tabla 5.1 y después se comparan con los experimentales de Sivakumaran y Yevjevich. Los datos para las condiciones del flujo en cada caso encabezan la tabla.

(a)  $d_0 = 17.4$  cm,  $U_0 = 140.21$  cm/s,  $Q_0 = 49573.77$  cm<sup>3</sup>/s

La tabla que sigue es para el punto 0 y muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h = 0.01$  cm para que el valor de  $d$  fuera lo más preciso posible; empezó con  $s = -0.99$  cm, ya que con  $s = -1$  cm la función es infinita. En los resultados que se dan a continuación se omiten los valores intermedios entre 0.01 y 0.05 cm. Las dimensiones presentadas son en cm.

La función es  $dd/ds = f(s, d(s), Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b = 20.32$  cm

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R = 38.1$  cm

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q = 49573.77$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la curvatura?  $d = 17.4$  cm

s	d	s	d	s	d	s	d
-0.980	17.39584	-0.450	15.24301	0.050	13.59792	0.550	12.66856
-0.900	17.22483	-0.400	15.04255	0.100	13.47511	0.600	12.61057
-0.850	17.03563	-0.350	14.85022	0.150	13.35926	0.650	12.55880
-0.800	16.81762	-0.300	14.66605	0.200	13.25024	0.700	12.51330
-0.750	16.58693	-0.250	14.49003	0.250	13.14789	0.750	12.47413
-0.700	16.35250	-0.200	14.32205	0.300	13.05211	0.800	12.44141
-0.650	16.11936	-0.150	14.16199	0.350	12.96279	0.850	12.41526
-0.600	15.89043	-0.100	14.00972	0.400	12.87983	0.900	12.39588
-0.550	15.66743	-0.050	13.86506	0.450	12.80317	0.950	12.38349
-0.500	15.45142	0.000	13.72784	0.500	12.73276	1.000	12.37836

Tabla de valores para la parte convexa con incrementos de  $h = 1$  cm.  
 Se omiten valores intermedios y se muestran sólo los que corresponden a cada 5 cm y se le da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior,  $d = 12.37836$  cm. Se utiliza el sistema cgs.

La función es  $dd/ds = f(s, d(s), Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b = 20.32$  cm

¿Cuál es el radio de la parte convexa?  $R = 38.1$  cm

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q = 49573.77$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte convexa?  $d = 12.37836$  cm

$R_c$  es la resultante de las componentes de velocidad

$R_c^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son los componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte convexa?  $s = 1$  cm

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte convexa?  $s = 49$  cm

$s$	$d$	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d + R_c^2/2g$	$u$	$w$
2.00	12.35589	172.14982	15.10477	27.46067	172.14220	-1.61987
5.00	12.17646	175.21511	15.64747	27.82392	174.97593	-9.15186
10.00	11.60275	185.55110	17.54802	29.15076	184.63661	-18.39922
15.00	10.87337	199.76228	20.33892	31.21229	198.42056	-23.11387
20.00	10.13016	215.98517	23.77655	33.90671	214.54604	-24.89158
25.00	9.43592	233.29598	27.74058	37.17650	231.94288	-25.09010
30.00	8.81152	251.16127	32.15188	40.96339	249.96735	-24.46027
35.00	8.25963	269.21664	36.94067	45.20030	268.19865	-23.38981
40.00	7.77585	287.18548	42.03644	49.81229	286.33516	-22.08338
45.00	7.35346	304.84413	47.36490	54.71837	304.14368	-20.65340
49.00	7.05502	318.62042	51.74260	58.79762	318.02533	-19.46442

Tabla para el punto A. Muestra los valores sólo de  $s$  y  $d$ ; en el programa se hicieron incrementos de  $h = 0.1$  cm; se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d = 7.05502$  cm. Se utiliza el sistema cgs.

La función es  $dd/ds = f(s, d(s), Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b = 20.32$  cm

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R = 38.1$  cm

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q = 49573.77$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la discontinuidad?  $d = 7.05502$  cm

$s$	$d$	$s$	$d$
49.10	7.05011	50.10	7.67470
49.20	7.05953	50.20	7.79364
49.30	7.08216	50.30	7.91949
49.40	7.11723	50.40	8.04988
49.50	7.16415	50.50	8.18133
49.60	7.22252	50.60	8.30892
49.70	7.29201	50.70	8.42600
49.80	7.37236	50.80	8.52423
49.90	7.46323	50.90	8.59403
50.00	7.56423	51.00	8.62581

Tabla para la parte concava, con incrementos de  $h = 1$  cm; se muestran los valores a cada 5 cm y se omiten los intermedios; a  $d$  se le da el valor obtenido en el programa anterior,  $d = 8.62581$  cm. Se utiliza el sistema cgs.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$   
 ¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$  cm  
 ¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$  cm  
 ¿Cuál es el ángulo?  $\phi=75.17$   
 ¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=49573.77$  cm<sup>3</sup>/s  
 ¿Cuál es el tirante al inicio de la parte cóncava?  $d=8.62581$  cm  
 $Rc$  es la resultante de las componentes de velocidad  
 $Rc^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $Rc$   
 $u$  y  $w$  son las componentes de velocidad  
 ¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte concava?  $s=51$  cm  
 ¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte concava?  $s=130$  cm

s	d	Rc	Rc <sup>2</sup> /2g	d+Rc <sup>2</sup> /2g	u	w
52.00	8.55563	326.05713	54.18616	62.74179	324.69169	-29.80870
55.00	8.35700	332.40473	56.31647	64.67347	331.25070	-27.67449
60.00	8.06406	342.39317	59.75182	67.81588	341.53838	-24.17883
65.00	7.81575	351.50055	62.97280	70.78855	350.88536	-20.78689
70.00	7.60875	359.58609	65.90324	73.51199	359.15953	-17.50981
75.00	7.44009	366.53364	68.47447	75.91456	366.25286	-14.34412
80.00	7.30721	372.24945	70.62673	77.93394	372.07858	-11.27749
85.00	7.20808	376.66004	72.31029	79.51837	376.56875	-8.29241
90.00	7.14116	379.71038	73.48623	80.62738	379.67243	-5.36839
95.00	7.10542	381.36237	74.12704	81.23247	381.35429	-2.48326
100.00	7.10037	381.59386	74.21706	81.31743	381.59367	0.38626
105.00	7.12599	380.39804	73.75263	80.87863	380.38403	3.26424
110.00	7.18283	377.78325	72.74219	79.92502	377.73277	6.17551
115.00	7.27195	373.77327	71.20614	78.47809	373.66136	9.14567
120.00	7.39499	368.40805	69.17660	76.57159	368.20595	12.20101
125.00	7.55419	361.74495	66.69695	74.25114	361.41836	15.36823
130.00	7.75244	353.86063	63.82128	71.57371	353.36757	18.67371

(b)  $d_0 = 13$  cm,  $U_0 = 118.87$  cm/s,  $Q_0 = 31400.70$  cm<sup>3</sup>/s

Tabla para el punto 0, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h = 0.01$  cm, para que el valor de  $d$  fuera lo más preciso posible. En los resultados que se dan a continuación se omiten valores intermedios, entre 0.01 y 0.05 cm, por razones de espacio.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$   
 ¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$  cm  
 ¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$  cm  
 ¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=31400.7$  cm<sup>3</sup>/s  
 ¿Cuál es el tirante al inicio de la curvatura?  $d=13$  cm

s	d	s	d	s	d	s	d
-0.980	12.99702	-0.450	11.54752	0.050	10.43988	0.550	9.79683
-0.950	12.96907	-0.400	11.41419	0.100	10.35574	0.600	9.75615
-0.900	12.87312	-0.350	11.28592	0.150	10.27614	0.650	9.71976
-0.850	12.74111	-0.300	11.16274	0.200	10.20104	0.700	9.68770
-0.800	12.59271	-0.250	11.04463	0.250	10.13036	0.750	9.66003
-0.750	12.43901	-0.200	10.93158	0.300	10.06406	0.800	9.63684
-0.700	12.28211	-0.150	10.82352	0.350	10.00207	0.850	9.61824
-0.650	12.12770	-0.100	10.72040	0.400	9.94438	0.900	9.60435
-0.600	11.97631	-0.050	10.62214	0.450	9.89095	0.950	9.59534
-0.550	11.82883	0.000	10.52966	0.500	9.84177	1.000	9.59142
-0.500	11.68579						

Tabla para la parte convexa, con incrementos de  $h = 1$  cm. Se muestran valores a cada 5 cm y se omiten intermedios. A  $d$  se le da el valor obtenido en el programa anterior  $d = 9.59142$  cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$  cm

¿Cuál es el radio de la parte convexa?  $R=38.1$  cm

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=31400.7$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte convexa?  $d=9.59142$  cm

$Rc$  es la resultante de las componentes de velocidad

$Rc^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $Rc$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte convexa?  $s=1$  cm

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte convexa?  $s=49$  cm

$s$	$d$	$Rc$	$Rc^2/2g$	$d+Rc^2/2g$	$u$	$w$
2.00	9.56457	144.76244	10.68102	20.24559	144.75120	-1.80400
5.00	9.36235	148.46573	11.23449	20.59685	148.18070	-9.19523
10.00	8.76507	160.15976	13.07398	21.83905	159.24791	-17.06616
15.00	8.06801	175.42216	15.68447	23.75248	174.26435	-20.12138
20.00	7.40161	192.41986	18.87126	26.27287	191.29723	-20.75505
25.00	6.80660	210.33663	22.54918	29.35579	209.35410	-20.30666
30.00	6.28886	228.69384	26.65692	32.94578	227.87226	-19.36763
35.00	5.84272	247.15489	31.13432	36.97704	246.48346	-18.20565
40.00	5.45948	265.45872	35.91658	41.37606	264.91703	-16.94995
45.00	5.13039	283.39111	40.93299	46.06338	282.95776	-15.66617
49.00	4.90082	297.34649	45.06368	49.96450	296.98575	-14.64250

Tabla para el punto A, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.1$  cm; se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d = 4.90082$  cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$  cm

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$  cm

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=31400.7$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la discontinuidad?  $d=4.90082$  cm

$s$	$d$	$s$	$d$
49.10	4.89654	50.10	5.17941
49.20	4.89968	50.20	5.22976
49.30	4.90960	50.30	5.28134
49.40	4.92579	50.40	5.33286
49.50	4.94780	50.50	5.38273
49.60	4.97525	50.60	5.42905
49.70	5.00774	50.70	5.46956
49.80	5.04489	50.80	5.50178
49.90	5.08625	50.90	5.52311
50.00	5.13130	51.00	5.53107

Tabla para la parte concava, con incrementos de  $h=1$  cm. Sólo se muestran los valores a cada 5 cm y se omiten intermedios. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior,  $d = 5.53107$  cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$  cm

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$  cm

¿Cuál es el ángulo?  $\phi=75.17$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=31400.7$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte cóncava?  $d=5.53107$  cm

$Rc$  es la resultante de las componentes de velocidad

$Rc^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $Rc$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte cóncava?  $s=51$  cm

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte cóncava?  $s=130$  cm

$s$	$d$	$Rc$	$Rc^2/2g$	$d+Rc^2/2g$	$u$	$w$
52.00	5.47970	305.64742	47.61466	53.09456	305.07988	-18.61765
55.00	5.33577	313.07178	49.95614	55.29191	312.60258	-17.13390
60.00	5.12730	324.59452	53.70112	58.82842	324.25772	-14.78287
65.00	4.95399	334.93835	57.17824	62.13222	334.70225	-12.57396
70.00	4.81188	343.99381	60.31180	65.12367	343.83383	-10.49015
75.00	4.69777	351.67303	63.03462	67.73239	351.57001	-8.51197
80.00	4.60915	357.90630	65.28895	69.89810	357.84508	-6.61950
85.00	4.54410	362.63951	67.02723	71.57133	362.60784	-4.79319
90.00	4.50127	365.83235	68.21269	72.71397	365.81993	-3.01409
95.00	4.47978	367.45696	68.81989	73.29967	367.45479	-1.26378
100.00	4.47923	367.49710	68.83492	73.31416	367.49680	0.47592
105.00	4.49968	365.94760	68.25568	72.75536	365.94084	2.22338
110.00	4.54163	362.81406	67.09177	71.63339	362.79204	3.99759
115.00	4.60609	358.11299	65.36438	69.97047	358.06571	5.81872
120.00	4.69464	351.87208	63.10599	67.80064	351.78763	7.70874
125.00	4.80945	344.13106	60.35993	65.16938	343.99455	9.69211
130.00	4.95346	334.94300	57.17982	62.13328	334.73520	11.79643

(c)  $d_0 = 10 \text{ cm}$ ,  $U_0 = 100.58 \text{ cm/s}$ ,  $Q_0 = 20437.86 \text{ cm}^3/\text{s}$

Tabla para el punto 0, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h = 0.01 \text{ cm}$  para que el valor de  $d$  fuera lo más preciso posible. En los resultados que se dan a continuación se omiten valores intermedios entre 0.01 y 0.05 cm, por razones de espacio.

La función es  $dd/ds = f(s, d(s), Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b = 20.32 \text{ cm}$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R = 38.1 \text{ cm}$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q = 20437.86 \text{ cm}^3/\text{s}$

¿Cuál es el tirante al inicio de la curvatura?  $d = 10 \text{ cm}$

s	d	s	d	s	d	s	d
-0.980	9.99488	-0.450	8.87854	0.050	8.11490	0.550	7.66312
-0.950	9.95204	-0.400	8.78707	0.100	8.05627	0.600	7.63417
-0.900	9.84516	-0.350	8.69905	0.150	8.00069	0.650	7.60821
-0.850	9.72926	-0.300	8.61445	0.200	7.94813	0.700	7.58528
-0.800	9.61310	-0.250	8.53324	0.250	7.89857	0.750	7.56542
-0.750	9.49886	-0.200	8.45538	0.300	7.85198	0.800	7.54871
-0.700	9.38732	-0.150	8.38084	0.350	7.80834	0.850	7.53521
-0.650	9.27886	-0.100	8.30956	0.400	7.76764	0.900	7.52503
-0.600	9.17367	-0.050	8.24151	0.450	7.72986	0.950	7.51829
-0.550	9.07185	0.000	8.17664	0.500	7.69502	1.000	7.51513
-0.500	8.97347						

Tabla para la parte convexa con incrementos de  $h = 1 \text{ cm}$ . Se muestran sólo valores a cada 5 cm y se omiten los intermedios. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d = 7.51513 \text{ cm}$ .

La función es  $dd/ds = f(s, d(s), Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b = 20.32 \text{ cm}$

¿Cuál es el radio de la parte convexa?  $R = 38.1 \text{ cm}$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q = 20437.86 \text{ cm}^3/\text{s}$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte convexa?  $d = 7.51513 \text{ cm}$

$R_c$  es la resultante de las componentes de velocidad

$R_c^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte convexa?  $s = 1 \text{ cm}$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte convexa?  $s = 49 \text{ cm}$

s	d	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d + R_c^2/2g$	$u$	$w$
2.00	7.48355	123.05479	7.71788	15.20143	123.03942	-1.94464
5.00	7.25885	127.47852	8.28276	15.54161	127.15267	-9.10884
10.00	6.65404	140.46303	10.05599	16.71003	139.61804	-15.38391
15.00	6.00916	156.62629	12.50346	18.51263	155.69828	-17.02463
20.00	5.42852	174.29114	15.48288	20.91140	173.47085	-16.88986
25.00	4.93067	192.73791	18.93369	23.86436	192.06453	-16.09713
30.00	4.51004	211.52753	22.80525	27.31529	210.99095	-15.05703
35.00	4.15575	230.34176	27.04247	31.19822	229.91976	-13.93660
40.00	3.85692	248.92896	31.58289	35.43981	248.59916	-12.80958
45.00	3.60419	267.08033	36.35673	39.96092	266.82352	-11.70945
49.00	3.42995	281.16697	40.29300	43.72295	280.95721	-10.85876

Tabla para el punto A que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.1$  cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d = 3.42995$  cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$  cm

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$  cm

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=20437.86$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la discontinuidad?  $d=3.42995$  cm

s	d	s	d
49.10	3.42645	50.10	3.55126
49.20	3.42678	50.20	3.57293
49.30	3.43058	50.30	3.59467
49.40	3.43754	50.40	3.61588
49.50	3.44738	50.50	3.63587
49.60	3.45984	50.60	3.65387
49.70	3.47464	50.70	3.66905
49.80	3.49150	50.80	3.68053
49.90	3.51013	50.90	3.68740
50.00	3.53018	51.00	3.68881

Tabla para la parte cóncava, con incrementos de  $h=1$  cm. Se dan los valores a cada 5 cm y se omiten los intermedios. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d = 3.68881$  cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$  cm

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$  cm

¿Cuál es el ángulo?  $\phi=75.17$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=20437.86$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte cóncava?  $d=3.68881$  cm

$R_c$  es la resultante de las componentes de velocidad

$R_c^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte cóncava?  $s=51$  cm

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte cóncava?  $s=130$  cm

s	d	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d+R_c^2/2g$	$u$	$w$
52.00	3.65080	290.12094	42.90018	46.55098	289.85482	-12.42352
55.00	3.54523	298.23762	45.33419	48.87942	298.02217	-11.33425
60.00	3.39470	310.70112	49.20244	52.59713	310.55103	-9.65602
65.00	3.27168	321.75190	52.76467	56.03635	321.64938	-8.12178
70.00	3.17232	331.31233	55.94692	59.11925	331.24451	-6.70342
75.00	3.09368	339.32028	58.68413	61.77781	339.27768	-5.37671
80.00	3.03355	345.72640	60.92087	63.95442	345.70184	-4.12075
85.00	2.99032	350.49227	62.61205	65.60237	350.48013	-2.91724
90.00	2.96289	353.58923	63.72342	66.68631	353.58490	-1.74976
95.00	2.95059	354.99742	64.23199	67.18258	354.99691	-0.60312
100.00	2.95312	354.70520	64.12629	67.07941	354.70479	0.53728
105.00	2.97062	352.70865	63.40642	66.37704	352.70462	1.68608
110.00	3.00359	349.01119	62.08400	65.08759	348.99948	2.85861
115.00	3.05297	343.62327	60.18193	63.23491	343.59915	4.07168
120.00	3.12023	336.56225	57.73402	60.85425	336.51981	5.34446
125.00	3.20745	327.85228	54.78446	57.99192	327.78382	6.69966
129.00	3.29349	319.71781	52.09963	55.39312	319.62114	7.86163
130.00	3.31749	317.52462	51.38730	54.70479	317.41962	8.16510

(d)  $d_0 = 6.5 \text{ cm}$ ,  $U_0 = 80.77 \text{ cm}$ ,  $Q_0 = 100668.10 \text{ cm}$

Tabla para el punto 0, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se utilizaron incrementos de  $h = 0.01 \text{ cm}$  para que el valor de  $d$  fuera lo más preciso posible. En los resultados que se dan a continuación se omiten valores intermedios entre 0.01 y 0.05 cm por razones de espacio.

La función es  $dd/ds = f(s, d(s), Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b = 20.32 \text{ cm}$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R = 38.1 \text{ cm}$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q = 10668.10 \text{ cm}^3/\text{s}$

¿Cuál es el tirante al inicio de la curvatura?  $d = 6.5 \text{ cm}$

s	d	s	d	s	d	s	d
-0.980	6.49789	-0.450	5.90620	0.050	5.48711	0.550	5.22953
-0.950	6.47571	-0.400	5.85682	0.100	5.45419	0.600	5.21260
-0.900	6.41923	-0.350	5.80912	0.150	5.42286	0.650	5.19733
-0.850	6.35816	-0.300	5.76308	0.200	5.39313	0.700	5.18374
-0.800	6.29697	-0.250	5.71872	0.250	5.36498	0.750	5.17188
-0.750	6.23671	-0.200	5.67602	0.300	5.33842	0.800	5.16177
-0.700	6.17774	-0.150	5.63497	0.350	5.31345	0.850	5.15348
-0.650	6.12024	-0.100	5.59556	0.400	5.29007	0.900	5.14706
-0.600	6.06429	-0.050	5.55779	0.450	5.26828	0.950	5.14258
-0.550	6.00994	0.000	5.52165	0.500	5.24809	1.000	5.14011
-0.500	5.95724						

Tabla para la parte convexa, con incrementos de  $h = 1 \text{ cm}$ . Se muestran sólo valores a cada 5 cm, pero se omiten los intermedios. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d = 5.14011 \text{ cm}$ .

La función es  $dd/ds = f(s, d(s), Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b = 20.32 \text{ cm}$

¿Cuál es el radio de la parte convexa?  $R = 38.1 \text{ cm}$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q = 10668.10 \text{ cm}^3/\text{s}$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte convexa?  $d = 5.14011 \text{ cm}$

$R_c$  es la resultante de la componentes de velocidad

$R_c^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte convexa?  $s = 1 \text{ cm}$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte convexa?  $s = 49 \text{ cm}$

s	d	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d + R_c^2/2g$	u	w
5.00	4.84874	102.39795	5.34421	10.19295	102.04261	-8.52329
10.00	4.27624	117.10174	6.98920	11.26544	116.46822	-12.16433
15.00	3.74472	134.39316	9.20567	12.95038	133.82761	-12.31635
20.00	3.30402	152.91230	11.91752	15.22153	152.47115	-11.60693
25.00	2.94645	172.03899	15.08533	18.03178	171.70727	-10.67829
30.00	2.65647	191.36640	18.66519	21.32166	191.11937	-9.72050
35.00	2.41995	210.58750	22.60300	25.02296	210.40361	-8.79862
40.00	2.22565	229.45489	26.83463	29.06028	229.31767	-7.93437
45.00	2.06490	247.76215	31.28750	33.35240	247.65946	-7.13232
49.00	1.95597	261.88551	34.95618	36.91214	261.80399	-6.53387

Tabla para el punto A que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h = 0.1$  cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d = 1.95597$  cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$  cm

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$  cm

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=10668.10$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la discontinuidad?  $d=1.95597$  cm

s	d	s	d
49.10	1.95364	50.10	1.98251
49.20	1.95263	50.20	1.98790
49.30	1.95280	50.30	1.99318
49.40	1.95403	50.40	1.99817
49.50	1.95620	50.50	2.00268
49.60	1.95921	50.60	2.00652
49.70	1.96293	50.70	2.00948
49.80	1.96725	50.80	2.01135
49.90	1.97204	50.90	2.01192
50.00	1.97718	51.00	2.01099

Tabla para la parte cóncava, con incrementos de  $h=1$  cm. Se muestran sólo valores a cada 5 cm y se omiten los intermedios. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d = 2.01099$  cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$  cm

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$  cm

¿Cuál es el ángulo?  $\phi_i=75.17$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=10668.10$  cm<sup>3</sup>/s

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte cóncava?  $d=2.01099$  cm

$R_c$  es la resultante de las componentes de velocidad

$R_c^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte cóncava?  $s=51$  cm

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte cóncava?  $s=130$  cm

s	d	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d+R_c^2/2g$	$u$	$w$
52.00	1.98783	271.39798	37.54173	39.52956	271.31329	-6.77967
55.00	1.92430	280.08849	39.98449	41.90879	280.02202	-6.10176
60.00	1.83570	293.21987	43.82155	45.65726	293.17565	-5.09168
65.00	1.76512	304.63009	47.29841	49.06353	304.60117	-4.19758
70.00	1.70949	314.28891	50.34532	52.05481	314.27063	-3.39011
75.00	1.66664	322.17071	52.90212	54.56876	322.15983	-2.64719
80.00	1.63501	328.25432	54.91891	56.55392	328.24852	-1.95162
85.00	1.61352	332.52295	56.35653	57.97005	332.52045	-1.28938
90.00	1.60149	334.96404	57.18701	58.78850	334.96341	-0.64850
95.00	1.59854	335.56896	57.39374	58.99228	335.56896	-0.01821
100.00	1.60458	334.33256	56.97159	58.57617	334.33200	0.61187
105.00	1.61985	331.25249	55.92671	57.54657	331.25012	1.25232
110.00	1.64488	326.32826	54.27632	55.92120	326.32265	1.91472
115.00	1.68058	319.55998	52.04820	53.72878	319.54930	2.61252
120.00	1.72831	310.94655	49.28020	51.00852	310.92837	3.36227
125.00	1.79010	300.48341	46.01951	47.80961	300.45426	4.18540
130.00	1.86881	288.15917	42.32197	44.19079	288.11384	5.11103

Los resultados numéricos y las gráficas del programa son muy semejantes a las presentadas por Sivakumaran y Yevjevich (1987). La única manera de comprobar la similitud de resultados, es con una lectura directa a escala, verificando con la tabla de resultados del programa. Éste puede aplicarse a otros modelos similares con sección rectangular de curvatura y ancho constante, ya que se hicieron los programas por separado para las partes convexa, cóncava y puntos similares O y A. Se tomó en cuenta que en el artículo no se da una amplia explicación de las ecuaciones para puntos singulares.

Los resultados varían rápidamente en los puntos dentro de los 2 cm ( $s = -1$  cm a  $s = 1$  cm,  $s = 49$  cm a  $s = 51$  cm) del intervalo gradualizado, siendo que el flujo real varía lentamente entre  $s = 40$  cm a  $s = 70$  cm.

Las ecuaciones teóricas se derivaron aceptando un flujo gradualmente variado, sin embargo, esto se viola en los intervalos gradualizados (cerca de A y O), debido a que  $\kappa$  y  $\kappa'$  varían rápidamente, por lo que no se puede representar con exactitud el flujo real en estos puntos.

## SIMBOLOGÍA

$a$	vector aceleración en un punto
$b$	ancho de la base de una sección trapezoidal
$d$	distancia en una sección ortogonal al fondo, de éste a la superficie libre
$\bar{e}_s$	vector unitario variable según $s$
$\bar{e}_n$	vector unitario variable según $n$
$\bar{e}_y$	vector unitario variable según $y$
$g$	aceleración de la gravedad
$i$	vector unitario según $x$
$j$	vector unitario según $y$
$k$	vector unitario según $z$
$k$	talud de una sección trapezoidal
$n$	coordenada recta en el plano de una sección ortogonal al fondo y a $s$
$n_M$	coeficiente de Manning para la pared
$p$	presión en algún punto de la sección ortogonal al fondo y a $s$
$p_0$	presión en algún punto de la sección ortogonal al fondo y a $s$
$r$	vector de posición de un punto
$s$	coordenada curvilínea que sigue fielmente el fondo del canal.
$t$	tiempo
$u$	componente de la velocidad en la dirección de $s$ y perpendicular a una sección ortogonal al fondo.
$u_0$	magnitud de la componente $u$ de la velocidad en el fondo de la sección.
$u_d$	magnitud de la componente $u$ de la velocidad al nivel de la superficie libre de la sección.
$v$	vector velocidad en un punto
$v$	componente de la velocidad en la dirección de $y$ y tangente al plano de la sección ortogonal al fondo.
$w$	componente de la velocidad en la dirección de $n$ , normal a $u$ y tangente al plano de la sección ortogonal al fondo
$w_d$	componente $w$ de la velocidad en la superficie libre y en la dirección de $n$
$x$	eje coordenado en un plano horizontal, ortogonal a $y$ y a $z$
$y$	eje coordenado recto en el plano de la sección, ortogonal a $s$ y $n$
$z$	eje coordenado vertical, ortogonal a $x$ y $y$
$B$	dimensión horizontal de la sección a la distancia $n$
$B_0$	dimensión horizontal de la sección en el fondo ( $n = 0$ )
$C$	constante de integración o factor de fricción de Chezy
$D$	diámetro de una sección circular
$E$	energía específica en una sección
$F_c$	fuerza de cuerpo por unidad de masa obrando sobre la superficie $A$

$F_{v_c}$	fuerza de cuerpo por unidad de masa
$F_r$	fuerza resultante
$F_s$	fuerza resultante de la de cuerpo y de superficie
$F_f$	fuerza de fricción
$J$	jacobiano de la transformación del sistema coordenado fijo al curvilíneo, de magnitud $J = 1 - \kappa n$
$J_a$	valor del jacobiano al nivel de la superficie libre
$H$	energía total del flujo en una sección por unidad de peso
$Q$	gasto en la sección $s$ (de tirante $d$ ) en el instante $t$
$R$	radio local de curvatura en el fondo de una sección
$R_h$	radio hidráulico de la sección
$S_f$	pendiente local del gradiente de fricción
$T$	ancho de la superficie libre de una sección
$U$	velocidad media en la sección
$\kappa$	curvatura del fondo en una sección ( $1/R$ )
$\nu$	viscosidad cinemática del líquido
$\rho$	densidad del líquido
$\theta$	ángulo de inclinación de la tangente al fondo de la sección respecto de la horizontal
$\tau$	torsión en un punto
$\tau_0$	esfuerzo cortante en el perímetro mojado de la sección
$\mathcal{J}$	fuerza de cuerpo ficticia con los componentes $\mathcal{J}_s$ (según $s$ ) y $\mathcal{J}_n$ (según $n$ ).
$\phi$	vector cualquiera
$\nabla$	operador nabla
$\Omega$	función potencial del campo gravitacional
$v$	volumen
$\xi$	coordenada $x$ que localiza a un punto cualquiera en el fondo
$\zeta$	coordenada $z$ que localiza a un punto cualquiera en el fondo
$A$	área hidráulica de la sección
$I_Q$	integral según forma de la sección, expresada por la ecuación 2.60
$I_1$	integral según forma de la sección, expresada por la ecuación 2.64
$I_2$	integral según forma de la sección, expresada por la ecuación 2.65
$\lambda$	coeficiente de curvatura
$\lambda_c$	factor de proporcionalidad del esfuerzo tangencial respecto del cuadrado de la velocidad; depende de la rugosidad de la pared
$\alpha$	factor de amplificación de la velocidad $u_0$ , según la ecuación 2.79
$\psi$	parámetro adimensional relacionado con el número de Froude, dado por la ecuación 3.2 c

- $\mathcal{F}_c$  valor de  $\mathcal{F}$  para las condiciones críticas
- $\mathcal{F}_s$  valor de  $\mathcal{F}$  para que haya separación del flujo.
- F** número de Froude generalizado ( $\mathcal{F} / \mathcal{F}_c$ )
- $c$  celeridad con que se propaga una onda de pequeña amplitud sobre la superficie libre del flujo sobre un fondo curvo

## REFERENCIAS

1. Balloffet, A. (1962), "Pressures on spillway flip buckets", Proceedings of the ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 87, No HY5, septiembre.
2. Belanger, J. B. (1849) "Notes sur le cours d' hydraulique", Memorias, Ecole Nationale de Ponts et Chaussés, pp. 32-33, París.
3. Böss, P. (1919), "Berechnung der Wasserspiegellage bei Abstürzen und Schwellen, unter Berücksichtigung der Zusatzspannungen".
4. Camargo, J.C.; Franco, V. (1986) "Análisis de diferentes aspectos del diseño y funcionamiento hidráulico de las cubetas deflectoras"; Instituto de Ingeniería, UNAM, Proyecto 5315, 185 pp., México, D.F., junio.
5. Chen, Tio-Chen; Yu, Yun-Chen (1965), "Pressure distributions on spillway flip buckets, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the ASCE, Vol. 91, No. HY2, marzo.
6. Chow, Ven te (1959), "Open-Channel Hydraulics", Mc Graw-Hill, Inc. Nueva York
7. Dobson, R. S. (1967), "Some applications of a digital computer to hydraulic engineering problems", Stanford University, Department of Civil Engineering, Technical Report no. 80 pp. 36-39.
8. Douma, J.H. (1953) "Discussion on design of side walls in chutes and spilways", Transactions A.S.C.E. 119, pp. 364-368, paper 2675.
9. Dressler, R.F. (1978), "New nonlinear shallow-flow equations with curvature", Journal of Hydraulic Reseach 16, IAHR, No. 3, pp. 205-222.
10. Dressler, R.F.; Yevjevich, V. M. (1983), Comparison of Dressler and Saint-Venant equations for shallow curved flow", Proceedings of the 20<sup>th</sup> Congress, International Association for Hydraulic Research, tema B. a., Vol . III, pp. 170-179, Moscú, U.R.S.S.
11. Dressler, R.F.; Yevjevich, V. (1984), "Hydraulic resistance terms modified for the Dressler curved-flow equations," Journal of Hydraulic Research, International Asociation for Hydraulic Research, 22, No. 3, pp. 145-156.
12. Fawer C. (1937). "Etude de quelques écoulements permanents à filets courbes", Lausanne.

13. Friedrichs, K.O. (1948), "On the deviation of the shallow water theory", Committee of Pure & Applied Mathematics, Courant Institute, Nueva York, Vol. I, pp. 81-85.
14. Gumensky, D.B. (1953), "Design of side walls in chutes and spillways", Transactions ASCE, Proceedings-Separate No. 175, Paper No. 2675, febrero.
15. Henderson, F.M.; y Tierney, G. (1963), "Flow at the toe of a Spillway: I - The 'Open Toe' Spillway: II - (Con Tierney D.G) The 'Solid-Toe' Spillway," La Houille Blanche, Vol. 17, No. 6 (noviembre 1962), p. 728, y Vol.18 No. 1 (enero-febrero 1963), p. 42.
16. Henderson, F.M. (1966), "Open Channel Flow", 522 pp., The Mcmillan Company, Nueva York.
17. Jaeger, Ch. (1931), "Analogien zwischen Stützkraftminimum und Energieminimum in der Hydraulik", Schweizerische Bauzeitung 97, No. 16.
18. Jaeger, Ch. (1939), "Remarques sur quelques écoulements le long de lits à pente variant graduellement", Schweizerische Bauzeitung 114, No. 20, p. 231.
19. Jaeger, Ch. (1949), "Hauteur d'eau à l'extrémité d'un long deversoir", La Houille Blanche, Vol. 3, No. 6.
20. Jaeger, Ch. (1956), "Engineering Fluid Mechanics", 529 pp., Blackie & Son Limited, Londres, Glasgow.
21. Keller, J.B. (1948), "Waves in shallow water", Committee of Pure & Applied Mathematics, Courant Institute, Nueva York, Vol. I, No. 4, pp. 328-333.
22. Khan, A.; Steffler P. (1996), "Vertically averaged and moment equations model for flow over curved beds", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, enero, pp. 3-9.
23. Knapp, F.H. (1960), "Ausfluß, Überfall und Durchfluss im Wasserbau", 529 pp., Verlag G. Braun, Karlsruhe.
24. Lenau, Ch. W. , Cassidy, J.J. (1969), "Flow through spillway flip bucket", Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the ASCE, Vol. 95, No. HY2, marzo.

25. Massé, P. (1938), "Ressaut et ligne d'eau dans le cours d'eau à pente variant graduellement", *Revue général Hydraulique*, Nos. 19 y 20.
26. Prasad, R.K. (1984), "Pressure distribution on ski-jump buckets", *Irrigation and Power*, Nueva Delhi, julio.
27. Prasil, F. (1913), "Technische Hydrodynamik", Berlín.
28. Rouse, H. (1950), "Engineering Hydraulics", *Proceedings Fourth Hydraulics Conference*, Iowa Institute of Hydraulic Research, 1039 pp., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.
29. Saint-Venant, B. de (1871), *Comptes Rendus Academie des Sciences*, París, Tome 73, julio.
30. Sotelo G.; Ruiz, R (1994), "Flujo curvilíneo como un vórtice libre", Ponencia de XIII Congreso Nacional de Hidráulica de la Asociación Mexicana de Hidráulica en Puebla, Pue., 5 páginas y 4 figuras, septiembre.
31. Sivakumaran, Hosking, R. J. and N. S., Tingsanchali, T. (1981), "Steady shallow flow over a spillway", *Journal of Fluid Mechanics*, 111, pp. 411-420.
32. Sivakumaran, S. S.; Tingsanchali, T.; Hosking, R. J. (1981), "Steady shallow flow over curved beds", *Journal of Fluid Mechanics*, 128, pp. 469-487.
33. Sivakumaran, N. S.; Dressler, R. F. (1986), "Distribution of resistive body force in curved free-surface flow", *Mathematical methods in the Applied Science*, 8, No. 4, pp. 492-501.
34. Sivakumaran, N. S.; Yevjevich, V. (1987), "Experimental verification of the Dressler curved-flow equations", *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, Vol. 25, No. 3, pp. 373-391.
35. Steffler, P.; Jin, Y. (1993), "Depth averaged and moment equations for moderately shallow free surface flow", *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, Vol. 31, No. 1.
36. U. S. Army Waterways Experiment Station (1978), "Hydraulic design criteria", Corps of Engineers, Vicksburg, Miss.