UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ECONOMIA

Ahorro

T E S I S

QUE PRESENTA:

PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN ECONOMIA

JUAN MARCOS ORTIZ OLVERA

DIRECCION DE LA TESIS: LIC. ELBA BAÑUELOS BARCENA

ENERO DE 2001

Dedicada con profundo amor a mi Madre.

por Juan Marcos Ortiz Olvera

INTRODUCCIÓN[1]

Llegará una época en la que una investigación diligente y prolongada sacará a la luz cosas que hoy están ocultas. La vida de una sola persona, aunque estuviera toda ella dedicada al cielo, sería insuficiente para investigar una materia tan vasta...Por lo tanto este conocimiento sólo se podrá desarrollar a lo largo de sucesivas edades. Llegará una época en la que nuestros descendientes se asombrarán de que ignoráramos cosas que para ellos son tan claras... Muchos son los descubrimientos reservados para las futuras épocas, cuando se haya borrado el recuerdo de nosotros. Nuestro universo sería una cosa muy limitada si no ofreciera a cada época algo que investigar...La naturaleza no revela sus misterios de una vez para siempre.

SÉNECA, *Cuestiones naturales,*
libro 7 siglo primero

La presente indagación obedece, como gran parte de las investigaciones, a la naturaleza de nuestra propia especie[2]. Especie que es joven, curiosa y valiente, pero lo mejor de todo, es prometedora. Johannes Kepler ilustra tal afirmación cuando se pregunta *¿Por qué las cosas son como son y no de otra manera?* Es sorprendente que tan sencillo razonamiento encierre tanto. Resume en pocas palabras nuestra naturaleza. Si nos miramos en el espejo nos damos cuenta de que somos curiosos, osados y valientes. A lo largo de la noche de los tiempos hemos descubierto una manera eficaz y elegante para comprender todo aquello que nos rodea, a tal método lo hemos llamado ciencia. Este método nos ha permitido asomarnos tanto a los grandes misterios como a las pequeñas cosas. Hemos emprendido junto con la ciencia el viaje de explicarnos lo que nos rodea, para con ello explicarnos a nosotros mismos. En nuestras aventuras con la ciencia hemos recogido conocimiento, el cual nos recuerda que hemos evolucionado para admirar lo que nos rodea, que el comprender es la máxima gloria alcanzable y que todo ese conocimiento nos permite asegurar nuestra propia supervivencia. Lo único que hemos necesitado para emprender tal tarea fue escepticismo e imaginación. El primero nos brinda el frío punto de vista de la objetividad, es el rigor del método. La imaginación es el motor de la alegre curiosidad humana, la cual nos lleva a especular sobre los fenómenos. Conjugándolos obtenemos la materia básica para la ciencia, razón e imaginación.

La riqueza de nuestro entorno supera todo lo que nuestra imaginación pudiese generar. Lo tiene todo, fenómenos, interrelaciones, hechos. Desde lo exquisito por su sencillez hasta la elegancia de lo complejo. Esta característica es lo que nutre de un modo sutil a la hoguera de la imaginación y lubrica la maquinaria del asombro. Siempre haciéndonos actuar como menciona acertadamente Benjamín Disraeli *"ser consciente de la propia ignorancia es un gran paso hacia el saber"*. Si desconocemos algo, lo queremos estudiar, si ya lo conocemos lo queremos entender mejor y así, surgen más y más preguntas en un ir y venir de teorías, explicaciones y respuestas, que a su vez generan más preguntas, llevándonos a un nivel superior de entendimiento y conciencia.

[1] .Quisiera hacer una primer advertencia, éste libro deforma el espacio y el tiempo en sus inmediaciones. Asimismo atrae a cada trozo de materia el universo, incluyendo los libros de otros autores, con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

[2] Personalmente ha sido un camino intenso, en palabras de Arturo Azuela, "El largo camino para llegar a su región matemática [...] había sido laberíntico y deslumbrante; un camino donde no sólo se acumulaban incógnitas y altibajos emotivos sino también satisfacciones y anhelos encontrados". La redacción del presente trabajo me dio solaz, noches de desvelo, angustia, curiosidad; nos alimentamos uno del otro. Me hizo llegar a experimentar el goce de la creación, como si yo fuese Fidias la pluma fuese mi cincel y el papel el estéril bloque de mármol. Lo disfrute y lo sufrí al mismo tiempo. Nos llegamos a odiar cordialmente.

Dentro de este cúmulo de conocimiento que llamamos ciencia se encuentra la economía. Entenderemos a la economía como el conjunto de información generada capaz de responder a las preocupaciones de los hombres sobre la asignación eficiente de los recursos escasos, en otras palabras, el fenómeno económico. La economía se convierte en nuestra muy humilde ventana para responder a ésta particular inquietud humana. Con ella pretendemos estudiar el comportamiento de los individuos actuando sobre los mercados y la escasez. Si las comparásemos con las grandes preguntas sobre el Cosmos, éstas preocupaciones son hasta cierto punto frívolas. Esto no significa que no sean dignas de resolverse o estudiarse, por el contrario nos invitan a reflexionar, a investigar. En el momento de la reflexión es cuando aparece la pregunta *¿la economía realmente es capaz de responder tales cuestiones*? Yo creo que si, pero para ello sólo necesitamos armonizar teoría y observación, es decir ciencia.

LA ECONOMÍA COMO NUESTRA VENTANA HACIA LA CIENCIA

Estamos de acuerdo que gran parte del prestigio y fama de las ciencias duras proviene del uso refinado de las matemáticas, tanto las desarrolladas como las asimiladas. Aunque si somos cuidadosos se ve claramente que las matemáticas utilizadas por un físico común y corriente son bastante tradicionales, si las vemos desde un punto de vista eminentemente matemático. Esto tiene como consecuencia el que se mire con cierto desdén a los investigadores de otras disciplinas que, por formación, no pueden construir modelos matemáticos de cualquier índole. Esta actitud de desprecio es generalizada hacia los investigadores de las ciencias sociales[3], los científicos duros no toman en serio los estudios e investigaciones de las otras disciplinas, simplemente por carecer de formalización. Ante este hecho, el científico social se encuentra en la disyuntiva: aprender matemáticas ó sentarse a observar lo que hacen aquellos que cuentan con el instrumental matemático. Tal hecho nos conduce a emplear las matemáticas, con objeto de lograr una mayor y mejor comprensión de cualquier fenómeno, así que aprovechare el grado de abstracción que brinda el uso de las matemáticas, con el único fin de simplificar el problema.

En economía tratamos de entender y explicar una realidad terriblemente compleja, para lo que las matemáticas se yerguen como una gran ayuda, por no decir que son el único medio con el que contamos para explicar dicha realidad, y sin embargo aún existen quienes todavía gustan de hacer consultas al Oráculo de Delphos. Afortunadamente para todos nosotros, esto se ha ido revirtiendo con la aparición de la economía matemática, autores como Arrow, Debreu y muchos otros nos han brindado eso que nos faltaba, un modelo matemático básico bien definido. Tal aparición nos indica que la economía en su proceso de matematización ha superado la trivialidad inicial en la búsqueda del uso correcto de la parafernalia matemática. Se formalizó la información, ya es ciencia, partiendo de que ciencia son hechos; de la misma manera que las casas están hechas de piedras, la ciencia está hecha de hechos; pero un montón de piedras no es una casa y una colección de hechos no es necesariamente ciencia.[4]

El esfuerzo que se ha requerido es muy grande, exige distinguir, como en cualquier otra ciencia, los puntos esenciales de una realidad extremadamente compleja. En otras palabras hay que ordenar de modo científico la información que ha producido la economía a lo largo de todo este tiempo. Debemos aislar las partes de esa realidad que nos permitan un análisis congruente; asimilar y porque no, desarrollar la herramienta matemática idónea. Hasta hace pocos años la economía matemática ha generado un modelo riguroso, aunque estático, que no difiere en la estructura de aquellos desarrollados por las ciencias duras.

Para efectos de estudiar cualquier problema con la cientificidad que requiere, es necesario despojarse por un momento de la propia ideología, con el objeto de no generar juicios de valor,

---

[3] En algún momento yo mismo lo he hecho, ya que coincido plenamente con Francis Bacon en su apreciación de cada hombre es un deudor de su profesión y ya que de ella recibe sustento y provecho, así se debe procurar mediante el estudio servirle de ayuda y ornato.

[4] Henri Poincare (1854-1912)

supuestos apriorísticos y demás vicios por el estilo que pudiera tener la investigación. Estudiaremos la fenomenología desde afuera, convirtiéndonos en observadores ajenos al proceso, para lo cual apelo a su imaginación estimado lector, ya que se ha probado que para estudiar cualquier aspecto de la realidad, entenderlo y resolver la problemática que involucre éste sólo se ha requerido de cuatro insumos básicos: imaginación, curiosidad y dos hemisferios cerebrales. No necesitamos más, la ciencia no ha requerido más; así que trabajaremos únicamente con tales materiales.

Si reflexionamos un poco es asombroso y aterrador saber que aún desconocemos tanto del fenómeno económico, que hay tanto por hacer[5]. Afortunadamente, para estudiar el fenómeno económico sólo hay que mirar hacia la ventana. La economía nos rodea, tiene lugar y efecto en este maravilloso lugar de cielos azules, océanos inquietos, bosques aromáticos y prados suaves. Es nuestro mundo, siempre rebosante de vida. En todo este tiempo nos hemos asomado en diferentes ventanas, buscando explicar todo lo que nos rodea, y como dice Carl Sagan "*nuestra búsqueda comienza aquí, con la sabiduría acumulada de los hombres y mujeres de nuestra especie, recogida con gran coste durante un millón de años*". Durante el tiempo que ha durado mi estudio[6] sobre el fenómeno económico me he preguntado varias cosas, una que me ha llamado poderosamente la atención es la posibilidad de representar y estudiar las elecciones de los individuos. ¿Qué forma tendrían? ¿cómo serían? Todos los individuos tenemos una función de utilidad, eso es claro, pero aún no hemos encontrado la forma de representar las preferencias de cada uno de los agentes. Afortunadamente para nosotros la ausencia de evidencia no será nunca evidencia de ausencia.

Una de las criticas más agrias que recibimos los economistas es ésa, el no poder representar de modo tangible la utilidad de los individuos. Es sólo cuestión de tiempo, simplemente no hemos desarrollado la matemática necesaria. Lo importante es que podemos explicarnos el comportamiento económico. Si viviéramos en un sistema donde nunca cambia nada, tendríamos poco que hacer; no tendríamos nada que explicar. Por el contrario, si el sistema fuese impredecible, donde todo cambiase de modo aleatorio; no podríamos explicar nada. En ambos casos no tendríamos estimulo para la ciencia. Sin embargo, en plena primavera del tercer milenio tenemos el problema de la pseudo-ciencia. Cuando acudimos a un kiosco de periódicos, escogiendo alguno al azar siempre tenemos una editorial económica. En principio suena bien la difusión de nuestra ciencia, pero cabe preguntarnos ¿hasta que punto todo lo publicado en editoriales carece de sustento científico? es decir, en que momento deja de ser ciencia.

Pongamos una analogía, la economía científica sería la astronomía, y la pseudo-economía es la astrología. La cantidad de columnas de horóscopos es inmensa, de igual modo lo es la de editoriales y artículos sin sustento teórico y matemático. En reuniones, las personas que conocen mi profesión me preguntan frecuentemente mi opinión sobre el tópico de moda, pero todas las preguntas se encaminan a buscar un juicio de valor o algo que quieran escuchar, por ejemplo ¿Es adecuado o no el manejo de la inflación? o ¿cuando dejaran de cobrar impuestos tan altos? Este tipo de preguntas equivalen a preguntarme ¿eres sagitario? o ¿porqué te comportas como un leo si no lo eres?. Todas éstas dudas buscan una respuesta que concuerde con la información (mejor dicho, desinformación) que reciben al leer sus editoriales escritas por iluminados *astrólogo-economistas*. Estos *"astrólogos"* fueron décadas atrás los que aconsejaban a los gobiernos y empresas. Colectaban la información y la arreglaban para encajar en la realidad, como lo hacían los astrólogos imperiales. Los análisis económicos se desarrollaban como una bizarra combinación entre datos y econometría con pensamientos confusos y mentiras piadosas. Pero esto llegó a su limite natural, aunque la economía panfleto-editorialista no se ha ido. Se quedó con nosotros, en nuestros periódicos y aulas.

---

[5] Si a usted no le ocurre, probablemente no es economista, o simplemente es un economista sin vocación científica. Pero, en lo personal, encuentro perturbador que nuestra ciencia sea tan joven, y que aún no seamos capaces de resolver todos los problemas que necesita la sociedad sean resueltos.

[6] Lo cual me pone en un lugar humilde, simplemente trabajo con el conocimiento acumulado, somos depositarios y dueños del conocimiento generado y trasmitido durante todo este tiempo.

Para verificar esta triste realidad le propongo que hagamos un sencillo ejercicio. Tomemos dos diarios, seleccionemos un tema económico, inflación por ejemplo. Busquemos el editorial sobre el tema. Lo que encontraremos son opiniones vagas, posiblemente útiles pero ambas diferentes entre sí. La mecánica es simple, se escribe de modo ambiguo, utilizando deliberadamente términos técnicos tan generales y ambiguos que pareciera, a los ojos del neófito, pueden responder a casi todas las interrogantes sobre el tema. Esta representación simplista genera mucha simpatía, dice lo que la gente quiere leer. Pero no se genera ciencia económica, no ayudan explicar la realidad del fenómeno económico, por el contrario la distorsionan.

AHORRO: VERTICE ENTRE EL TIEMPO Y LA ECONOMÍA

Para estudiar la naturaleza y las causas del ahorro, el cual es el objetivo de mi trabajo, es necesario revisar el funcionamiento del fenómeno. ¿Cómo surgen las interrelaciones entre las variables? Se requiere conjugar varios conceptos: ahorro, crédito e interés. El crédito tiene la función de reasignar el ahorro de unos que poseen dinero a otros que no tienen suficiente dinero para realizar las actividades económicas que desean. Bajo esta visión la existencia de créditos es fundamental para el funcionamiento económico. Existe un mercado que permite asignar en actividades productivas el ahorro de individuos que, de no existir la posibilidad de transferirse a otras personas, se desperdiciaría. La mayoría de los economistas consideran el interés como el premio al ahorro, es decir, el pago que se ofrece para incentivar a la gente a que posponga su consumo, permitiendo así que otras personas accedan a este ahorro. ¿Qué se hace con este ahorro? La primer idea que nos brinca a la cabeza es el uso de los bienes creados mediante la producción, ya sean productivos o improductivos, es decir se consume. Entonces los conceptos clave para analizar la demanda, la oferta de ahorro y el equilibrio del mercado financiero son la elección racional y la optimización. Si somos observadores los líneas anteriores describen el fenómeno más no lo explican. Para explicarlo debemos analizar porqué se asigna el consumo hoy, cuando se asigna para mañana, como influye la tasa de interés en tal asignación. En otras palabras, como se elige en el tiempo. ¿Tiempo y economía? ¿Cómo es posible conjugar tales conceptos?

Para resolver tales interrogantes es necesario reflexionar sobre tiempo y economía, ambos conjugados. Esto nos dirige a la siguiente cuestión ¿porqué incorporar la variable tiempo dentro del estudio del fenómeno económico? Si utilizamos la idea de Einstein sobre la inexistencia del reposo absoluto en el Universo podemos generar una explicación suficientemente razonable. Einstein postuló que dos observadores que se mueven a velocidad constante uno respecto de otro observarán unas leyes naturales idénticas. Sin embargo, alguno de los dos podría percibir que dos hechos en lugares distantes han ocurrido simultáneamente, mientras que el otro hallaría que uno ha ocurrido antes que otro. Ésta disparidad no es de hecho una objeción a la teoría de la relatividad, dado que bajo esta teoría, la simultaneidad no existe para acontecimientos distantes. En otras palabras, no es posible especificar de forma unívoca el momento en que ocurre un hecho sin una referencia al lugar donde ocurre.

Entonces todas las partículas u objetos[7] del Universo se describen mediante la *línea del universo*, que traza su posición en el tiempo y el espacio. Cuando se cruzan dos o más líneas del universo, se produce un hecho o suceso. Si no se produce el cruce con alguna otra línea del universo, no ocurre nada, por lo que no es relevante (carece de sentido) determinar la situación de un objeto en ningún instante determinado. La distancia o intervalo entre dos sucesos cualesquiera se describe con precisión mediante una combinación de intervalos espaciales y temporales, pero no mediante uno sólo. El espacio-tiempo de cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal) donde tienen lugar todos los sucesos del Universo se denomina continuo espacio-tiempo. Ahí es donde vivimos.

---

[7] De aquí en adelante utilizaré el término objetos, el cual proporciona de modo más claro la idea que deseo transmitir.

Ahora comenzamos con hechos claros y sencillos. Los días se suceden uno tras otro, lo mismo que los minutos y segundos, sabemos que nunca regresan. Todo lo que conocemos nace y muere. El tiempo transcurre por dentro y por fuera de nosotros en un fluir que aún nos es difícil comprender. Pasado y futuro, nacimiento y muerte han sido el motor de la imaginación de muchos hombres y mujeres, generando respuestas tan variadas como la mitología o la ciencia misma.

Podemos simplificar el paso del tiempo hablando y pensando en una sucesión de instantes, toda una experiencia. De esto podemos concluir una cosa, el pasado es distinto del futuro[8]. Manifiesta una única dimensión a diferencia del espacio, y muestra una escena distinta según el sentido en que se mire. Sabemos que el sentido o dirección que le asignamos a las tres dimensiones del espacio es relativa - abajo, arriba, derecha, izquierda, atrás y adelante - a pesar de su utilidad, se convierten en una mera convención, ya que al hablar de tiempo pierden sentido. La diferencia entre pasado y futuro implica necesariamente una dirección del tiempo.

La direccionalidad del tiempo se encuentra presente en todo aquello que tiene historia o presenta evolución. El conocimiento científico confirma la direccionalidad del tiempo. Para resumir este hecho, que resulta fundamental en tan diversas situaciones, la ciencia hace una distinción entre dos tipos de fenómenos naturales: los reversibles y los irreversibles. En economía se presentan estos últimos y se manifiesta el tiempo de un modo sencillo; cuando ocurre el fenómeno siempre existe algo en la situación inicial que permite distinguirla de la final. A esto debemos sumar el concepto de información. Al observar un fenómeno, si seguimos al detalle el comportamiento de todos los elementos que intervienen en él, pudiera decirse que no hubiera irreversibilidad, pero cuando logramos definir una propiedad global se presenta la direccionalidad. Cuando manejamos información del sistema que se estudia, la incertidumbre crecerá con el paso del tiempo; de hecho el crecimiento de tal incertidumbre es lo que plantea la irreversibilidad.

Esto conduce a que pretendemos explicar un fenómeno sustentándonos en lo que conocemos o desconocemos de él. Entonces la irreversibilidad se explica por la imposibilidad de realizar mediciones exactas, siendo esto el origen de la incertidumbre[9] y su evolución nos muestra un sentido del tiempo. En este punto es donde se torna difícil el análisis, dado que pretendemos estudiar el fenómeno como observadores no involucrados en el proceso.

Aún con dicho inconveniente podemos obtener una conclusión: el tiempo nos afecta. Si meditamos en ello un poco, encontramos la evidencia de una conciencia direccional. La cual divide y distingue entre pasado y futuro. Solo tenemos conciencia del pasado, el futuro es mera especulación y el presente un instante. Todo esto implica que debemos estudiar el fenómeno del ahorro como lo que es, una sucesión de elecciones a lo largo del tiempo, la cual busca la mejor trayectoria temporal, aquella trayectoria que permita obtener una mayor satisfacción.

[8] No es mi intención desarrollar un análisis de la direccionalidad del tiempo.

[9] Hago referencia al principio de incertidumbre o principio de indeterminación, él cual afirma que es imposible medir simultáneamente de forma precisa tanto la posición como el momento lineal de un objeto, Tal afirmación conduce a si se determina con mayor precisión una de las cantidades se perderá precisión en la medida de la otra, y que el producto de ambas incertidumbres nunca puede ser menor que $\hbar$ (la constante de Planck). Tal concepto fue acuñado en 1927 por Werner Heisenberg contribuyendo en gran medida para el desarrollo de la mecánica cuántica. La indeterminación tuvo implicaciones filosóficas, creando una fuerte corriente de misticismo entre algunos científicos. Unos interpretaron que el concepto derribaba la idea tradicional de causa y efecto. Otros, como Einstein, consideraron que la incertidumbre asociada a la observación no contradice la existencia de leyes que gobiernen el comportamiento de los objetos, ni la capacidad de los científicos para descubrir tales leyes.

ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Este trabajo pretende dar a entender mi idea sobre ahorro, y está estructurado para analizar la naturaleza, las causas y mi idea del ahorro. Es decir, cómo es el ahorro, cómo se manifiesta y como lo entiendo e interpreto. Por lo que en cada capítulo se desarrollan estos tres puntos.

En el primer capítulo se presenta una reflexión profunda sobre la naturaleza de la elección, y como ella determina el ahorro. Estudiaremos la génesis de la elección, primero en el caso estático y después añadimos la elección entre periodos y la incertidumbre, para llegar a explicar como se genera la elección en el tiempo. Con estos tópicos pienso presentar dónde se genera la decisión de ahorrar.

En el segundo capítulo encontrará usted mi explicación sobre las causas del ahorro. Primero disertando sobre la tasa de interés. Seguido por una reflexión sobre la importancia y el papel de los mercados financieros, para concluir con una revisión y análisis de trabajos fundamentales que han sido influencia crucial y determinante en la literatura sobre ahorro. Aquí la discusión se centra en entender las causas del ahorro.

En el capitulo final presento un modelo de programación dinámica de ahorro. La segunda parte es una economía de generaciones traslapadas, con un problema de selección de portafolio y la maximización de la utilidad, empleando procesos de control de Markov. Así como presentar las conclusiones de la investigación.

Me voy a permitir hacer unas sugerencias para leer el trabajo que presento. Primero le quisiera proponer que me acompañase durante del texto. Yo le iré proponiendo experimentos mentales y con ellos explicaremos y analizaremos juntos los conceptos y definiciones, además el análisis le resultará más sencillo así. Mire usted, nuestro laboratorio consistirá simplemente de un cuaderno de notas y un lápiz o bolígrafo. Vamos a ver del ahorro lo que todo mundo ha visto, pero mi intención es mostrarle lo que nadie más ha pensado. Es decir, no vamos a descubrir los hechos que ya sabemos que están ahí. Vamos a buscar una nueva forma de pensar en ellos.

Debo hacer algunas advertencias. Primero, a pesar de cualquier información este texto contenga, debo advertirle amigo lector, en realidad este texto consta de un 99.9999999999% de espacio vacío. Segundo, a causa del "Principio de Incertidumbre" es imposible que usted sepa al mismo tiempo de forma precisa donde se encuentra este texto y con que velocidad se mueve. Tercero, algunas teorías mecanocuánticas sugieren que, cuando usted estimado lector no observa este texto directamente, puede dejar de existir o existe solamente en un estado vago e indeterminado. Finalmente, tenga cuidado al tomar este texto, ya que su masa, y por tanto su peso, dependen de su velocidad relativa al usuario. Aunado a esto le pido encarecidamente mantenga el texto por debajo de los 451°F, y por debajo de 95% de humedad. Estas advertencias no tienen otro objetivo más que aligerar su lectura. Créame, después me lo agradecerá.

Regresando a cosas serias. La notación que se utiliza a lo largo del texto es convencional, pero para aquellos lectores que no estén familiarizados con la simbología matemática y económica, es necesario aclarar los usos de los símbolos más frecuentes en el texto, además que le servirán de referencia rápida en algunos casos.

LÓGICA

$\wedge$	conjunción
$\vee$	disyunción
$\neg$	negación
$\Rightarrow$	implicación
$\Leftrightarrow$	equivalencia lógica (si y sólo si)

$\ni$	"tal que"
$\exists$	existencial
$\forall$	universal

CONJUNTOS

$\varnothing$	conjunto vacío
$\in$	membresía
$\subset$	inclusión
$\cup$	unión
$\cap$	Intersección
$\times$	Producto cartesiano
$S/0$	Complemento de S
$\{x\}$	conjunto cuyo único elemento es x
2^S	conjunto potencia

CONJUNTOS EN ESPACIO TOPOLÓGICO

$\overset{\circ}{X}$	interior de X
$\bar{X}$	cerradura de X
∂X	frontera de X
$\overset{\circ}{rel}(X)$	interior relativo

MERCADOS DE ACTIVOS

i	inversionista individual, i= 1,..., I
W_i	Riqueza del inversionista i en el periodo 0
c_i	consumo en el periodo 0
W_i-c_i	monto invertido en el periodo o por el inversionista i
s	estados naturaleza s=1,..., S en el segundo periodo
πs	es la probabilidad de ocurrencia del estado s.[10]
C_{is}	Consumo del individuo i en estado s en el segundo periodo.
$\tilde{C}_i$	Consumo del individuo i en el segundo periodo considerado como una variable aleatoria[11]

[10] Asumimos que los consumidores tienen expectativas homogéneas.

$u_i(c_i) + \delta E u_i(\tilde{C}_i)$	Función de utilidad von Neumann-Morgensten para el inversionista *i*.[12]
p_a	Precio del activo *a* para $a = 0,..., A$
X_{ia}	Monto adquirido del activo *a* por el inversionista *i*.
x_{ia}	Fracción de la riqueza invertida por el inversionista *i* mantenida en el activo *a*[13].
$(x_{i0},..., x_{iA})$	Portafolio de activos mantenido por el inversionista.
V_{as}	Valor del activo *a* en el estado naturaleza *s* en el segundo periodo.
$\tilde{V}_a$	Valor del activo *a* en el segundo periodo considerado como variable aleatoria.
R_{as}	El retorno total del activo *a* en el estado naturaleza *s*.[14]
$\tilde{R}_a$	Retorno del activo *a* considerado como variable aleatoria.
$\bar{R}_a = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{as} = E\tilde{R}_a$	Retorno esperado del activo *a*.
R_0	El retorno sobre el activo sin riesgo.
$\sigma_{ab} = cov(\tilde{R}_a, \tilde{R}_b)$	Covarianza entre el retorno de los activos *a* y *b*.

ESPACIO EUCLIDEANO.- **Q**, **R**, **C**: Son los conjuntos de números racionales, reales y complejos, respectivamente. $\mathbf{R}^n$ es el espacio euclidiano de dimensión *n* y $\mathbf{R}^{n*}$ es su dual (el espacio de las funciones lineales de funciones de $\mathbf{R}^n$ a **R**). Los vectores son columnas; el apóstrofe denota transposición. Si **x**, **y** son vectores, $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ si $x_i \geq y_i\ \forall i$; $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ si $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ pero $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, esto es, si $x_i \geq y_i\ \forall i$. con $x_j > y_j$ para cuando menos un *j*. Finalmente, $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ si $x_i > y_i\ \forall i$. x_i es la coordenada *i* del vector **x**; $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n$ denotan a vectores diferentes.

FUNCIONES REALES DE VARIABLES.- $L_f(\alpha)$ y $S_f(\alpha)$ son los conjuntos de nivel α($f(x) \geq \alpha$ el primero y $f(x) \leq \alpha$ el segundo) de la función *f*. Su frontera común es la curva de nivel α de *f*. gr *f*, epi *f*, e hipo *f* son la gráfica, epigráfica e hipográfica de *f*.

CONJUNTOS CONVEXOS.- *conv S* es la cápsula convexa de (el menor conjunto convexo que tiene a) *S*; Co *S* es su cápsula positiva (el menor cono convexo que lo contiene) y *af S* su cápsula afín (el menor plano que lo contiene) . Δ^{p-1} es el símplex generado por la base canónica de R^p: Δ^{p-1} = conv $\{\delta^1, ..., \delta p\}$.Los conjuntos polares, inferior y superior del conjunto $S \subset R$ se denotan por S_* y S^*. S^r denota el cono polar (inferior) de *S*. h_S y h^S son las funciones soporte por abajo y por arriba del conjunto convexo *S*. δ_S y δ^S son los calibradores exterior e interior, respectivamente, de *S*. La última se conoce también como norma o funcional de Minkowski.

[11] Es muy importante que se entienda al consumo en dos vertientes: La lista de consumos posibles en cada estado naturaleza, C_{is}. Por otro lado se puede entender como variable aleatoria, $\tilde{C}_i$,serán los valores que toma C_{is} con las probabilidades π_s.

[12] Se asume que la función es aditivamente separable sobre t con factor de descuento δ.

[13] Si W_i es el monto total invertido en todos los activos,

[14] $R_{as}=V_{as}/p_a$ por simple definición.

CORRESPONDENCIAS Y RELACIONES.- Si φ es una correspondencia (función de puntos a conjuntos) de S a T, escribimos $\varphi : S \multimap T$, reservando los símbolos $\varphi : S \to T$ para cuando φ es una función. φ^{-1} es la inversa ordinaria: $x \in \varphi^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in \varphi(x)$. $\varphi^{+}(S)$ es la inversa superior de S : $\varphi^{+}(S) = \{x \mid \varphi(x) \subset S\}$; la inversa inferior es $\varphi_{+}(S) = \{x \mid \varphi(x) \cap S \neq \varnothing\}$. La gráfica de una correspondencia también se denota por gr φ.

AGRADECIMIENTOS Y RECONOCIMIENTOS

Es imposible agradecer a todos los que han contribuido en este proyecto mío. Sin embargo me gustaría expresar una gratitud especial a la Lic. Elba Bañuelos, quien jugó un papel clave en mi desarrollo académico y gracias a la libertad que me brindo para desarrollar mis ideas e inquietudes. Tal actitud me permitió a establecer mis ideas básicas, su conexión y a dar la estructura intelectual de los capítulos. A mis amigos, cofradía maravillosa son sin lugar a dudas lo más selecto de sus casas, a ellos ofrezco una disculpa por haberlos descuidado en el proceso final del trabajo. A mis amigos les adeudo su apoyo, comprensión y como dice la canción, el tolerar mis más agudas espinas, sin su apoyo me hubiera sido mucho más cansado de lo que fue, ya que tuvieron la paciencia de escuchar mis ideas, dar su punto de vista y mandarme al diablo en su momento. A mis colaboradores en la Facultad de economía, Edgar Dávila y Nestor López con quienes tengo una deuda especial por compartir opiniones sobre los primeros borradores, y tener la virtud de disentir y cuestionar, ayudaron a esclarecer cuestiones de detalle o de enfoque. A mis profesores, gracias a ellos soy la combinación convexa de sus enseñanzas, siendo este trabajo un humilde homenaje a dos maravillosos académicos e investigadores, que influyeron de modo crucial en mi formación, Dr. Pedro Uribe, con quien tuve la fortuna de compartir mesa en el primer Coloquio de Economía Matemática y Econometría que participé, y al Dr. Virgilio Beltrán, por enseñarnos como atrapar un fotón. A ellos que por desgracia ya no están con nosotros, mi profunda admiración y respeto, lamentando terriblemente ya no poder conversar con ellos. A Gerardo Espinoza Valencia, por su amistad, las grandes charlas y su valiosa y entendida opinión. A Patricia González, por su entusiasmo y paciencia, le adeudo su amistad y sus oportunos comentarios. Al Lic. Ruben Valbuena Álvarez, por todo su apoyo y confianza en mi trabajo, me siento más agradecido de lo que pueda expresar, ya que el concederme espacios académicos me permitió profundizar, revisar y mejorar mis ideas y borradores. Un agradecimiento especial para Salvador Alonso y Caloca, quien siempre se interesó en el proyecto, gracias por su amistad y confianza, le agradezco el apoyo, y los materiales que me facilitó, y sobretodo por sus lecturas intensamente críticas y por sus brillantes conceptos. A todos ellos, mil gracias. Debo recalcar que la responsabilidad final del contenido, como es lógico, recae sobre mi. Pero si me permite, le confesaré que la satisfacción que me proporcionaron las discusiones y cavilaciones sostenidas durante el proceso es una de mis más grandes recompensas por el proyecto "Ahorro".

CD. de México, noviembre del 2000.

INDICE

SOBRE LA NATURALEZA DEL AHORRO

"El camino hacia la riqueza
depende fundamentalmente
de dos palabras: trabajo y ahorro"
BENJAMÍN FRANKLIN

Este primer capítulo ha sido concebido para presentar un análisis sobre la naturaleza del ahorro. Advertirá usted, amigo lector, dos elementos fundamentales en el desarrollo de mi indagación. Primero, estudiaremos al consumidor como un oferente[1]; segundo y no menos importante, vamos a analizar un fenómeno considerado durante muchos años como macroeconómico utilizando el enfoque de equilibrio general. En otras palabras, estudiaremos el fenómeno económico por su tejido más fino, la elección individual, sin que las variables tomen vida propia. Pretendo demostrar que mediante el estudio de la influencia del comportamiento humano es posible determinar el movimiento de los agregados económicos. Planteo esto por una idea muy simple, tan simple que pasa inadvertida muchas veces; la economía está constituida por individuos. El proceso de ahorro, como cualquier otro fenómeno económico, involucra directamente el comportamiento humano, siendo ahí donde encontraremos la naturaleza del proceso de generación de ahorro, punto central de este capítulo. Tal objetivo nos conduce a estudiar el comportamiento del consumidor y su toma de decisiones.

El objetivo del capítulo es mostrar que la base de las decisiones que envuelven al consumo y al ahorro a través del tiempo se localiza en el análisis de las decisiones temporales, tomando como punto de partida una premisa sencilla que aprendemos en nuestro primer curso de teoría económica.

"los consumidores eligen la mejor canasta de bienes que pueden adquirir"

El problema de la elección, es tan cotidiano que, en un primer momento pudiese parecer automático y simple, pero no lo es. Nos enfrentamos diariamente y a lo largo de nuestras vidas a un sin fin de elecciones. Esta idea se expone, de un modo un tanto brutal pero no por ello menos ilustrativa, en el texto Trainspotting de Irvine Welsh, donde su personaje principal se plantea una reflexión. El monólogo de Mark Renton a la letra dice *"Choose life. Choose a job. Choose a career. Choose a family. Choose a fucking big television. Choose washing machines, cars, compact disc players and electrical tin openers...choose DIY and wondering who the fuck you are on a Sunday morning. Choose sitting on that couch watching mind-numbing, spirit crushing game shows, stuffing junk food into your mouth. Choose rotting away at the end of it all, pishing your last in a miserable home, nothing more than an embarrassment to the selfish, fucked up brats you spawned to replace yourself. Choose a future. Choose life... But why would I want to do a thing like that?"*[2]. La reflexión que formula Mark Renton implica demasiadas cosas. En lo que nos concierne, economía, habla de la serie de elecciones que efectuamos diariamente. El cómo y el porqué se elige está fundamentado simple y sencillamente en los gustos y preferencias. Lo que podemos elegir depende de nuestra riqueza. Gustos y riqueza son el soporte de las elecciones que realizamos a diario, constantemente y que realizaremos hasta el día que dejemos de existir. Para examinar el comportamiento del consumidor es menester dividir el análisis en dos partes, *lo que puede elegir* y *las mejores cosas*, siguiendo a la premisa antes planteada.

Imaginemos un centro comercial[3]. Desde que ingresamos podemos ver un movimiento caótico y sumamente complejo. Llama poderosamente nuestra atención enfrentar un sistema con tan embrolladas interacciones, pero sin conflicto. Siguiendo el natural impulso de la curiosidad, es

[1] Tal óptica emerge a partir de un modelo de equilibrio general, el cual es el marco teórico con el que se trabajará el tema, se aprecia como las personas reciben un ingreso debido a un suministro de factores a la economía (salarios, dividendos e intereses, así como rentas).
[2] Welsh, Irvine "TRAINSPOTTING" Secker & Warburg, London, 1993
[3] *Mall* es la expresión en boga pero para aquellos puristas del buen Castellano, voy a utilizar centro comercial.

normal preguntar *¿Cómo funciona el sistema?* Si observamos cuidadosamente salta a la vista que el motivo ulterior de relacionarse en esencia es el intercambio. Pero en la naturaleza del intercambio reside la elección, los agentes interactúan eligiendo[4]. Toda la actividad del sistema gira en torno a la elección. La elección es la actividad primaria y el combustible del sistema, la reflexión de Renton toma mayor sentido en este momento.

Regresemos al ejemplo del centro comercial. Elegimos a que tienda entrar, que productos ver etc.. Yo realicé el siguiente ejercicio. Un día por la mañana (una de esas no pocas mañanas estivales llenas de ocio que uno tiene a los veintitantos) sentado en el interior de un centro comercial me detuve a observar lo que ahí sucedía. La gente a mi alrededor presentaba un comportamiento muy similar. Para apreciar esto mejor, me instalé en el segundo piso, frente a la puerta[5]. Lo que vi me pareció sorprendente, no por el tamaño de mi descubrimiento, sino porque nunca lo había ponderado de tal modo. La gente tiene prioridades, por lo que se ven obligados a discriminar, a elegir en todo momento. El hecho lo comprobé en el momento que vi a señoras entrando a tiendas de ropa, jóvenes entrando a tiendas de discos y familias comiendo en restaurantes de comida rápida. Todos eligieron, y de acuerdo a su bolsillo y estado de ánimo, compraron o simplemente vieron. Pero, me percate de que también se debe considerar el tiempo en la decisión. Todos pensamos bajo una consciencia temporal. Revisemos esto último usando como ejemplo un comentario simple que escuche por televisión. *"¿Han tratado alguna vez elegir cualquiera de esas medicinas para el resfriado?... Estas ahí parado... 'Bueno, ésta es de acción rápida... pero ésta es de larga duración'... ¿Qué es más importante, el presente o el futuro?"*[6]. Si bien el ejemplo resulta simple y hasta cierto punto zonzo, plantea de modo claro y preciso la preocupación de cualquier individuo por tomar la mejor decisión bajo las circunstancias prevalecientes en ese instante. Ya es tiempo de comenzar la formalización y planeamiento del ejercicio mental. Estimado lector, si usted se aburriese, no entendiese por la serie de desarrollos que se irán construyendo, para animarle a seguir con su lectura me permito citar:

***"Si te cansa este procedimiento tedioso, compadécete de mi que hice por lo menos setenta intentos"*[7].**

BIENES, SERVICIOS Y CONJUNTOS DE CONSUMO

Todos enfrentamos día a día un enorme conjunto de bienes y servicios, de entre todos ellos formamos combinaciones generadoras del máximo de satisfacción posible, para esto debemos comparar cada bien contra otros y distinguir cual genera más satisfacción y cual menos. El gusto que tenga por un bien u otro implica una clasificación particular[8], en otras palabras el consumidor jerarquiza los bienes. Nuevamente imaginemos nuestro centro comercial, el individuo elige primero a que tienda entrar, digamos que entra en una tienda deportiva. Ya en la tienda debe elegir qúe departamento visitar (tenis, football, golf, running, etc.). Supongamos que se dirige al departamento de tenis, ahí debe elegir raquetas o ropa, asumamos que decide ver raquetas, de entre ellas debe escoger la marca, diseño, peso y medida que le convenga. Un acto que puede ser considerado trivial (y de hecho lo es) implica una serie de elecciones, las cuales nos conducen a una elección óptima. ¿Pero, qué se encuentra atrás?

Para responder esto es necesario revisar primero el conjunto de consumo, al cual denominaremos *X*. Sabemos que el conjunto de consumo del i-ésimo consumidor contiene a todas

---

[4] Aunque el lenguaje tiene un papel fundamental, la decisión de hablar o no hablar es resultado de una elección.

[5] Pudiera parecer poco científico, pero la observación ha cobrado grandes frutos en el método científico, así me parece conveniente y necesario el uso de tal herramienta.

[6] *"Did you ever try to pick one of those (cold medicines) out?...You stand there going, Well, this one is quick acting, but this one is long lasting...Which is more important, the present or the future?"*. Seinfeld, Jerry. "BUT I'M TELLING YOU FOR THE LAST TIME" Programa especial HBO 1998

[7] Johannes Kepler (1571-1630).

[8] Digo particular en el sentido que cada individuo enfrenta al conjunto de los bienes de modo distinto. Por ejemplo, dos personas en una tienda de discos, una prefiere U2, pero la otra prefiere Chopin, a ambas les gusta la música pero el como enfrentan el conjunto de CD's es muy diferente.

las mercancías y servicios de entre los cuales puede elegir, así como los factores que puede ofertar. Con objeto de marcar una seña particular, decimos que los bienes y servicios consumidos son representados por números positivos, y las cantidades de factores productivos ofertadas mediante números negativos[9]. Pero debemos reflexionar sobre los elementos que describe el conjunto de consumo entre los que podemos identificar primordialmente:

•El máximo número de horas de trabajo que el consumidor puede ofrecer.

•Los mínimos requerimientos de mercancías que el consumidor necesita para subsistir.

•Las combinaciones entre consumo y trabajo (elección de ocio) que resultan biológicamente viables.

En otras palabras, los conjuntos de consumo describen características esenciales tanto para el consumidor individual como para la actividad económica en si misma, dado que es capaz de expresar las limitaciones biológicas de los individuos. Es pertinente mencionar que muchas mercancías no entran al conjunto de consumo de cada individuo dado que está generalmente contenido en un espacio coordenado de R^n de un número de dimensiones relativamente pequeño. Es decir, buscamos que el conjunto de consumo X, y sus elementos cumplan ciertas definiciones y ciertos teoremas que nos auxiliaran al cabal entendimiento de su naturaleza y propiedades.

Para cualesquiera dos elementos x, $y \in X$, la métrica euclidiana entre tales puntos está definida como: $d(x,y) = (\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)^{1/2}$ [10]. Basándonos en lo anterior surge que una métrica en un conjunto X es una función d: $X \times X \to R^n \ni$

i. $d(x, y) \geq 0$, con igualdad $\Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x, y) = d(y, x)$; y

iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Detengámonos un momento para reflexionar sobre la definición anterior. El primer punto marca como condición que la distancia entre puntos distintos es positiva, la segunda nos dice que la distancia es simétrica; y la tercera es la famosa desigualdad del triángulo[11]. Esto quiere decir que nuestra definición es una métrica usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz[12] y la siguiente también lo es usando la desigualdad de Hölder-Minkowsky. Por lo que decimos con certeza que el conjunto R^n y por tanto X son espacios métricos dado que son conjuntos dotados de una métrica.

A esto le debemos incorporar ciertas características. Buscamos que X tenga continuidad, que sea acotado, convexo y conexo.

---

[9] Este último punto es una mera convención que facilita el planteamiento de la idea. Lo cual no excluye el que se pueda plantear $X \subset R_+^n$, especificando claramente los factores productivos que el consumidor oferta

[10] Existen otras nociones de distancias que son igualmente válidas como: $d^p(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^p\right]^{1/p}$ para p entero ≥ 1.

[11] En el espacio euclidiano se dice que la magnitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo no excede a la suma de las magnitudes de sus catetos. En otras palabras, para geometrías euclidianas, la distancia o trayectoria más corta de un punto a otro es la recta, reafirmando sólo para geometrías euclidianas.

[12] Para aquellos que no recuerden la desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que: Sean **u** y **v**, vectores en R^n. Entonces:

i.- $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$

ii.- $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \Leftrightarrow \mathbf{v}=\lambda\mathbf{u}$, siendo λ algún número real.

I. X es cerrado.- Es decir, existe continuidad[13]. Formalizando, la sucesión $\{x^1, x^2,...\} = \{x^k\}$, $x^k \to x^0$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ K_\varepsilon \ni k > K_\varepsilon \Rightarrow \|x^k - x^0\| < \varepsilon$[14]. Aquí es necesaria otra definición,. Sean $X \subset R^n$ y $x \in R^n$. x es un punto de acumulación de X si toda vecindad de x contiene puntos de X distintos de x: para toda vecindad V_x de x, $(V_x\{x\}) \cap X \neq \varnothing$. Entonces, si X es un espacio topológico y $S \subset X$; ocurre que S es cerrado en X si contiene a todos sus puntos de acumulación; y a su vez, el menor conjunto cerrado que contiene a S es $\bar{S}$. Desde luego podemos inferir que S es cerrado $\Leftrightarrow$ $X = \bar{X}$; $\forall\ X,\ \bar{X} \subset X$. En este punto tenemos un teorema que nos apoya de modo significativo. TEOREMA.- Las siguientes proposiciones son equivalentes. A) X es cerrado; B) Si $\{x^k\}$ es una sucesión de elementos de S, convergente al punto x^0, entonces $x^0 \in S$. C) $S^{/0}$ es abierto. Expliquemos lo anterior, debemos verificar que existan secuencias de consumos, si es posible definir una subsecuencia convergente es decir: sea $\{x^i\}$ una secuencia infinita perteneciente a X, si todos los consumos son posibles para los individuos y, si existe una subsecuencia convergente $x^i \to x^*$, entonces x^* es posible para el consumidor.

II. X tiene cota inferior.- Aquí debemos entender que existe un punto c en $R^n \ni \chi \leq x\ \forall x \in X$.

III. X es conexo[15].- Decimos que un subconjunto (X en este caso) de R^n es conexo si no es la unión de dos subconjuntos no vacíos, disjuntos y cerrados en X. Es decir, X es conexo si no podemos hacer una partición de X en dos subconjuntos cerrados. Para darnos una idea clara aunque menos precisa, decimos que X está hecho de una pieza.

IV. X es convexo.- Será convexo si logramos definir una combinación lineal entre cualesquiera dos puntos pertenecientes al conjunto, y ésta a su vez sigue perteneciendo al conjunto. Sean x_1, x_2 consumos factibles para el consumidor, si esto es así, la combinación convexa[16] también es factible.

Sea X un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X. Decimos que τ es una topología en $X \Leftrightarrow$

a. $\forall\ \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau,\ \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau.$

b. $\forall\ \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ con I finito, $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau.$

(X, τ) se llama espacio topológico. Los elementos de X se llaman puntos y los elementos de τ son los abiertos de (X, τ).

El conjunto de consumo es un espacio topológico; ya que toda familia τ no vacía de subconjuntos de X satisface:

---

[13] Tomando en cuenta la óptica que utilizamos en cálculo debemos formalizar de la siguiente manera: Sean $D \subset R$ abierto y f: $D \to R$, se dice que es continua en $x^0 \in D$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0 \ni |x - x^0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$. Lo anterior hace uso de las vecindades fundamentales de x^0 y $f(x^0)$ en la topología ordinaria.

[14] De lo anterior decimos que en un espacio topológico arbitrario, $x^k \to x^0$ si $\forall$ vecindad V de x^0 $\exists$ un entero positivo $K = K_v \ni k > K_V \Rightarrow x^k \in V$. En otras palabras, toda vecindad de x^0 contiene todos los puntos, salvo un número finito de elementos x^k de la sucesión. Aquí hay que advertir un resultado interesante; si $\{x_i^k\}$ es la sucesión de números reales dada por la coordenada i de cada vector x^k de $\{x_i^k\}$, la sucesión $\{x_i^k\}$ converge a x^0 si y solamente si la sucesión $\{x_i^k\}$ converge a $x_i^0 \forall i$.

[15] Es fácil de ver que X es un espacio conexo si y solamente si sus únicos subconjuntos abiertos y cerrados a la vez son X y $\varnothing$. Si X no es conexo, decimos que $X = A \cup B$, A y B abiertos no vacíos y disjuntos.

[16] Utilizaré a partir de este punto el término de combinación convexa, con fines de facilitar la notación. Pero en esencia es lo mismo, combinación lineal, combinación convexa y promedio ponderado como se denomina en Debreu, Gerard. "TEORÍA DEL VALOR", Antoni Bosch; Barcelona, España 1973; página 69.

i. $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$.

ii. Toda unión de τ es un elemento de τ.

iii. Toda intersección finita de elementos de τ es un elemento de τ.

se llama topología sobre X. Entonces la pareja (X, τ) es un espacio topológico. Partiendo de lo anterior debemos comprobar que el conjunto de los bienes es un espacio preordenado. Definamos lo siguiente.

$\Re$ es relación en $X \Leftrightarrow \Re \subset X \times X$.

$\Re$ es relación en X, escribimos $x_i \Re x_j \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in \Re$.

Sea "$\leq$" una relación en X, entonces "$\leq$" es un (pre) orden parcial si se cumple lo siguiente

Sea $\Re$ una relación binaria en la que dos elementos x_1, x_2 cualesquiera de X (donde el orden de los cuales es importante) están o no están. Si ocurre que estén en dicha relación se escribe $x_i \Re x_j$. Consideremos la relación "no es sucesor de" en X y la denotaremos por $\leq$, esta relación es el orden natural de los elementos de X. Generalizando obtenemos: una relación binaria $\Re$ en X que satisface:

1. $\forall x \in X$, $x \leq x$. REFLEXIVIDAD
2. $\forall x, y \in X$, $(x \leq y$; e $y \leq x) \Rightarrow x = y$. ANTISIMETRÍA
3. $\forall x, y, z \in X$, $(x \leq y$; e $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$. TRANSITIVIDAD

entonces se denominará preorden (o cuasi-orden). Cuando $x_i \Re x_j$ y $x_i \Re x_j \Rightarrow x_1 = x_2$, la relación se vuelve un orden. La notación pasa de $\Re$ a $\leq$ para designar al preorden. Para efectos de nuestro análisis se tiene necesariamente que $x_1 \leq x_2$ o $x_2 \leq x_1$ o ambos se dice que el preorden es completo[17]. Entonces sea X un conjunto parcialmente preordenado, si $y \in X$ y no existe ningún $x \in X \ni x > y$ (o $x > y$), y se denomina el elemento maximal (minimal).

Riqueza y Presupuesto

Sea un conjunto, al cual denominaremos $S = \{c_1, \ldots, c_n\}$ donde $c_i \in R_+^n$ ($i = 1, \ldots, n$) constituye el total de los individuos que forman un sistema social de n agentes, cada individuo enfrenta un conjunto de alternativas para realizar sus actividades cotidianas, a tal conjunto lo denominaremos, en forma individual $\{a_i\}$ dicho conjunto contiene todas las acciones disponibles, factibles y no factibles; entonces, el universo de acciones estará formado por los n conjuntos de acciones individuales, lo que da forma el *Universo de Discurso* planteado por Debreu[18]. Centraremos nuestra atención en un sólo individuo, el consumidor o el agente i-ésimo[19]. En este punto podemos decidir por donde comenzar, una ruta sencilla es analizar la premisa en dos, como se planteo antes, de tal modo que será la riqueza el objeto de análisis en las siguientes líneas.

[17] Pudiese darse el caso de que dos elementos x_1, x_2 de un conjunto preordenado pueden no ser comparables, lo que no es posible para efectos de lo que pretendemos estudiar. Sin embargo un preorden no es necesariamente completo, a éste lo llamamos parcial, $\Rightarrow x_1 \leq x_2 \neg x_1 > x_2$.

[18]. Debreu *op. cit.* pág. 3.

[19] El individuo propuesto es lo que se denomina típico. Es el agente egoísta, racional y maximizador de utilidad planteado por aquellos que desde un inicio han sustentado nuestra ciencia. Tal individuo tiene un comportamiento normal ($\sim N(0, \sigma^2)$) utilizando la notación adecuada); en otras palabras, tal individuo es prototipo, con comportamiento tipificable y predecible. Es pertinente aclarar que la anterior idea se fundamenta en los trabajos de Adolphe Quetlet, con su Mecánica Social, y las investigaciones realizadas por Galton. En ambos trabajos se incorpora la idea de un hombre promedio, a pesar de que ambos trabajaron la idea en direcciones distintas (Qutlet propone un hombre moralmente ideal, mientras Galton se ocupa en aspectos

Pensemos en un consumidor i-ésimo que se enfrenta a un conjunto de bienes[20], tal conjunto lo denominaremos $X=(x_1,..., x_n)$ siendo $x_i\in R_+^n$ $(i = 1,..., n)$ con las propiedades analizadas en el epígrafe anterior. Los bienes no son gratuitos[21], no los regalan en los mercados o almacenes, tienen un precio. Precio que finalmente hay que cubrir para adquirir dichos bienes, esto implica que el conjunto X tenga un conjunto de precios asociado, lo representaremos por $\mathbf{p}=(p_1,..., p_n)$ siendo $p_i\in R_+^n$ $(i=1,..., n)$[22]. El último elemento que nos falta para obtener el problema completo es el ingreso, los individuos reciben un ingreso por vender factores, mas la dotación con la que nacen, para efectos de nuestro análisis utilizaremos un escalar, al que llamaremos w, siendo el ingreso, dinero o riqueza que dispone el consumidor para gastar en X. Basándonos en lo anterior, podemos decir que x_i representa el monto consumido del i-ésimo bien; con la información anterior podemos obtener una ecuación que represente el presupuesto, esta ecuación define un hiperplano, el hiperplano presupuestal, el cual es el siguiente conjunto de puntos

$$B = \{x \mid \mathbf{px}=w\} \qquad (1)$$

con $\mathbf{p} \neq 0$, siendo $\mathbf{p}$ un vector fila n-componente, y w actúa como un escalar dado. Podemos escribir (1) para obtener su versión extensa

$$\mathbf{px}=p_1x_1+....+p_nx_n = w \qquad (2)$$

px_i, representa dos cosas, primero es el valor de mercado del i-ésimo bien, y se interpreta también como el monto dinerario gastado en el i-ésimo bien, debemos dejar claro que cualquier x que satisfaga (1) y (2), caerá en el hiperplano.

En este punto realmente comienza el análisis del conjunto presupuestal. El consumidor enfrenta limitaciones para realizar su elección. Dicha restricción, es la que condiciona su comportamiento. Desde el punto de vista analítico, buscamos que el conjunto de posibilidades de elección tenga algunas características que debe presentar para poder trabajar con él. Es decir, buscamos la elección de máxima satisfacción, buscamos un óptimo. Para lo anterior debemos buscar y certificar que el conjunto presupuestal cumpla algunas características específicas.

Primero, podemos ver que **p** es ortogonal para cada vector **x** sobre el hiperplano, de igual modo **p** es normal para el hiperplano; demostremos lo anterior.

Si $w \neq 0$, y x_1, x_2 son cualquiera dos puntos distintos que caen en el hiperplano, entonces:

$$\mathbf{p}x_1-\mathbf{p}x_2=\mathbf{p}(x_1-x_2)=w-w$$

Siendo así **p** ortogonal para cada vector x_1-x_2 (estando x_1, x_2 en el hiperplano). El vector x_1-x_2 es paralelo al plano respectivamente. Así aún con $w\neq0$ podemos decir que **p** es normal al hiperplano.

---

práctico-científico), sus investigaciones descansan en el uso de la teoría de error (curva normal o probabilidad gaussiana, como usted guste) para obtener conclusiones importantes sobre el comportamiento individual.

[20] Los bienes de los que hablamos son deseables en el siguiente sentido: Si $p_i=0$ *entonces* $z_i(\mathbf{p})>0$ *para* $i=1,...,n$. Esto es, si el precio de cualquier bien es cero implica que la función de exceso de demanda agregada para ese bien será estrictamente positiva.

[21] Con tal afirmación de ningún modo se niega la existencia de los bienes libres, es decir si algún bien tiene exceso de oferta en un equilibrio walrasiano debe ser un bien libre. De modo formal es: *si* $\mathbf{p}^*$ *es un equilibrio walrasiano y la función agregada de exceso de demanda del j-ésimo bien es negativa, implica que el precio de tal bien sea igual a cero.* Partiendo del supuesto de deseabilidad antes explicado.

[22] Los conjuntos los definimos para todos los números reales positivos por no interesarnos los negativos, estamos modelando un sistema donde no existen las mercancías negativas, y por ende los precios negativos no tendrían sentido y significado económico.

Si $\mathbf{p}x=w$ es multiplicado por un escalar $\lambda\neq 0$, tenemos $(\lambda\mathbf{p})x=\lambda w$. El mismo hiperplano está definido para $\lambda\mathbf{p}$, λw; $\mathbf{p}$, w. Entonces si $\mathbf{p}$ es normal al hiperplano, $\lambda\mathbf{p}$ también lo es. Para ver esto debemos considerar el caso $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{p}|}$. Si

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|},\ \mathbf{b} = \frac{w}{|\mathbf{p}|}$$

tendremos $\mathbf{nx}=\mathbf{b}$, con $|\mathbf{n}|=1$. El vector $\mathbf{n}$ es una unidad normal para el hiperplano[23]

Utilizando dos puntos distintos en R^n podemos definir una recta en R^n. Para determinar el hiperplano presupuestal es necesario especificar los n componentes de $\mathbf{p}$ y w, esto es $n+1$ parámetros. Estos se determinaran hasta una constante multiplicativa; sin embargo λp_i ($i=1,\ldots, n$) y λw consiste el mismo hiperplano que $\mathbf{p}$ y w. Así existen sólo n parámetros independientes y, por lo tanto, serían necesarios n puntos en R^n para determinar el hiperplano. Recordemos que no cualquier conjunto arbitrario de n puntos $x_1,\ldots, x_n$ nos proporciona una única definición; solo el conjunto de n puntos $x_1,\ldots, x_n$ que puede ser numerado tal que los n-1 vectores $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2-\mathbf{x}_n,\ldots, \mathbf{x}_{n-1}-\mathbf{x}_n$ sean linealmente independientes, definirán un único hiperplano presupuestal. Para demostrar lo anterior consideremos el conjunto de ecuaciones

$$\mathbf{px}_i-w=0\ \ (i=1,\ldots,n)$$

ésta ecuación representa un conjunto de n ecuaciones homogéneas lineales en $n+1$ con $\mathbf{p}_i$ y w desconocidos. Si utilizamos la enésima ecuación para eliminar w obtenemos un nuevo conjunto de n-1 ecuaciones homogéneas en n con p_i desconocido

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_n)=0$$

si los vectores $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes, la matriz de coeficientes $\left\|\mathbf{x}_{ji}-\mathbf{x}_{jn}\right\|'$ tiene rango n-1 y nulidad 1[24]. Entonces existe solución para $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_n)=0$ no con todo $\mathbf{p}_i = 0$ y con un solo grado de libertad; esto es, los $\mathbf{p}_i$ están determinados hasta una constante multiplicativa. Entonces la enésima ecuación de $\mathbf{px}_i-w=0$ únicamente determina w para cualquier $\mathbf{p}$. Con esto hemos demostrado que empleando n puntos en R^n para los vectores $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2-\mathbf{x}_n,\ldots, \mathbf{x}_{n-1}-\mathbf{x}_n$ que son linealmente independientes definen un único hiperplano presupuestal en R^n. Si el rango de $\left\|\mathbf{x}_{ji}-\mathbf{x}_{jn}\right\|'$ es n-k, podemos determinar k vectores linealmente independientes $\mathbf{p}$ que satisfacen $\mathbf{px}_i$-w=0; en este caso los puntos elegidos caen en la intersección de k hiperplanos.

---

[23] Existen dos unidades normales para cada hiperplano; en el caso presentado la otra unidad seria $\mathbf{n} = \frac{-\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$, pero esta no nos interesa dado que definimos el problema en el ortante positivo. Para clarificar más lo expuesto es conveniente definir lo siguiente: NORMALES: Dado el hiperplano $\mathbf{px}=w \in R^n$ ($\mathbf{p}\neq 0$), entonces $\mathbf{p}$ es un vector normal para el hiperplano. Cualquier vector $\lambda\mathbf{p}$ es también normal para el hiperplano con ($\lambda\neq 0$). Los dos vectores $\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$, $\frac{-\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ son las unidades normales para el hiperplano.

[24] Las definiciones que utilizaremos son:
NÚCLEO Y NULIDAD DE UNA MATRIZ.- N_A recibe el nombre de núcleo de A y a $\nu(A)=\dim N_A$ se le llama nulidad de A. Si N_A contiene solamente el vector cero, entonces $\nu(A) = 0$.
RECORRIDO DE UNA MATRIZ.- Sea A una matriz de m x n. Entonces el recorrido de A, denotado por Recorrido A, está dado por: Recorrido $A=\{\mathbf{y}\in R^m; A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ para algún $\in R^n\}$.

Nos acercamos a conclusiones importantes. Primero consideremos cualquier punto en R^n tal que $\mathbf{x}$-$\mathbf{x}_n$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1$-$\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_2$-$\mathbf{x}_n$,..., $\mathbf{x}_{n-1}$-$\mathbf{x}_n$ linealmente independientes. Entonces $\mathbf{x}$ cae en el hiperplano determinado por los puntos $\mathbf{x}_1$,..., $\mathbf{x}_n$ por la ecuación $px_i=w$, o escrita de otro modo $px = px_n = w$.

Más aún, cualquier punto x sobre el hiperplano tiene la propiedad que $\mathbf{x}$-$\mathbf{x}_n$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{x}_1$-$\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_2$-$\mathbf{x}_n$,..., $\mathbf{x}_{n-1}$-$\mathbf{x}_n$. Si esto no fuese cierto significaría que x-x_n es linealmente independiente de $\mathbf{x}_1$-$\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_2$-$\mathbf{x}_n$,..., $\mathbf{x}_{n-1}$-$\mathbf{x}_n$, entonces si la ecuación $\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)=0$ fuese anexada a $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_n)=0$, el rango de la matriz de coeficientes será n, y la única solución sería $\mathbf{p}=0$.

Puntualizando lo anterior decimos, si es posible elegir cualquiera n puntos sobre un hiperplano con la propiedad que $\mathbf{x}_1$-$\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_2$-$\mathbf{x}_n$,..., $\mathbf{x}_{n-1}$-$\mathbf{x}_n$ sean linealmente independientes, entonces cualquier otro punto x sobre el hiperplano es, tal que $\mathbf{x}$-$\mathbf{x}_n$ puede escribirse como la combinación lineal de $\mathbf{x}_1$-$\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_2$-$\mathbf{x}_n$,..., $\mathbf{x}_{n-1}$-$\mathbf{x}_n$; o de modo equivalente, x puede ser expresado como combinación lineal de $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_n$.

Expuesto lo anterior llegamos a las siguientes conclusiones. El hiperplano presupuestal $\mathbf{p}x=w$ en R^n divide todo R^n en tres conjuntos mutuamente excluyentes, los cuales son:

$$B_1 = \{x \mid \mathbf{p}x<w\}$$

$$B_2 = \{x \mid \mathbf{p}x=w\}$$

$$B_3 = \{x \mid \mathbf{p}x>w\}$$

Los conjuntos B_1 y B_3 son semiespacios abiertos, el conjunto B_3 representa las canastas de bienes que están fuera del alcance del consumidor, por exceder a su ingreso. Enfoquemos la atención hacia los conjuntos B_1 y B_2 y definamos un cuarto como $B_4 = \{x \mid \mathbf{p}x\leq w\}$. Este último es un semiespacio cerrado. Estos tres conjuntos representan las canastas viables que el consumidor puede adquirir, B_2 representa las canastas que son iguales al ingreso. Tanto B_2 como B_4 son conjuntos cerrados, debido a que contienen a sus puntos frontera[25]. Demostremos lo anterior. Tomemos cualquier punto x_0 sobre el hiperplano y definamos una vecindad[26] ε. Consideremos el punto $x_1 = x_0 + (\varepsilon/2)(\mathbf{p}'/|\mathbf{p}|)$. El punto x_1 está en la vecindad desde que $|x_1 - x_0| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Sin embargo, $\mathbf{p}x_1 = \mathbf{p}x_0 + \frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{p}| = w_0 + \frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{p}| > \varepsilon$, para que x_1 no esté en el hiperplano. Con lo que queda demostrado que cualquier punto en el hiperplano presupuestal es un punto frontera.

Pasemos a las dos últimas propiedades que nos interesan. El hiperplano presupuestal es un conjunto convexo[27]. Para probar está afirmación es necesario confirmar lo siguiente. Si x_1, x_2 están

---

RANGO DE UNA MATRIZ.- Sea A una matriz de m x n. Entonces el rango de A, denotado por $\rho(A)$, esta dado por: $\rho(A)$= dim Recorrido A.

[25] PUNTO FRONTERA.- Un punto **a** es un punto frontera de un conjunto **A** si cada vecindad ε sobre **a** contiene puntos que están en el conjunto y puntos que no están en el conjunto, sin importar cuan pequeña pueda ser ε, solo con la condición de que $\varepsilon>0$.

[26] La definición que hemos utilizado desde la nota 13 es la siguiente: VECINDAD.- Si a es un numero real y r es un numero real estrictamente positivo ($r>0$). Definimos una vecindad con centro en a y radio r, la cual denotaremos $V_r(a)$, como los puntos que disten de a en menos que r. De modo simbólico:

$$V_r(a)=\{x\in R: |x-a|<r\}$$

Entonces la vecindad se define como el conjunto de puntos que cumplan la anterior expresión.

[27] Con objeto de formalizar la noción de convexidad utilizada en la sección de conjuntos de consumo, es necesario ampliar la definición como sigue: CONJUNTO CONVEXO.- Un conjunto X es convexo si para cualesquiera dos puntos x_1, x_2 están en el conjunto, el segmento de recta que une a tales puntos se encuentra en el conjunto. Es decir, que los puntos dentro del segmento son combinación convexa o lineal de los puntos x_1, x_2. De modo formal: $X\subset R^n$ es convexo si para toda pareja de puntos x, $y\in \mathbf{X}$ y todo escalar $\lambda\in[0, 1]$, $\lambda x +(1-\lambda)y\in X$.

en el hiperplano, es decir, $px_1=w$ y $px_2=w$. Entonces $x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$ está sobre el hiperplano por lo siguiente $px=[\lambda x_2+(1-\lambda)x_2]=\lambda px_2+(1-\lambda)px_1 = \lambda w+(1-\lambda)w= w$. De igual modo el semiespacio cerrado definido por el conjunto B_4. Si $px=\lambda x_2+(1-\lambda)x_1$ con $(0\leq\lambda\leq1)$ entonces tendremos, $px=\lambda px_2+(1-\lambda)px_1\leq\lambda w+(1-\lambda)w=w$. Dado que es conjunto convexo podremos encontrar un óptimo, la cual es la propiedad que nos interesa.

Así entonces, la capacidad de gasto del consumidor, la podemos expresar en términos de el conjunto B_4. Quedando ahora las posibilidades de consumo del i-ésimo consumidor representadas por una correspondencia $\beta_i(p, w)$, donde β_i: $R^{n+1}\rightarrow X$, que asocia a cada par precio-riqueza el conjunto de consumos que el i-ésimo consumidor puede pagar. A dicha correspondencia la denominaremos correspondencia presupuestaria. Por propiedades del conjunto de consumo, el conjunto $\beta_i(p, w)$ resulta cerrado y convexo, como hemos explicado, de ahí la correspondencia presupuestal es homogénea de grado cero, en precios y riqueza, en otras palabras $\beta_i(\lambda p, \lambda w) = \beta_i(p, w)$. Para el caso bidimensional, el cual podemos ver en todos los libros de texto, la única resultante importante del desarrollo es que la pendiente es la razón de precios y mide el costo de oportunidad, pero ya que nuestro análisis es n-dimensional el concepto de pendiente deja de operar, hecho que explica el planteamiento de las unidades normales del hiperplano presupuestal.

Preferencias y Utilidad

Ahora estudiaremos la primera parte de la premisa, *las mejores cosas*, mediante el análisis del comportamiento del consumidor. Si quisiéramos verlo desde una óptica simplista, podemos afirmar que el comportamiento del consumidor se reduce a elegir las mejores cosas, lo que le produzca mayor satisfacción, con todo lo que ello implica[28]. Las preferencias del consumidor son la base de la elección. Regresando al ejemplo del centro comercial. Vemos que todos los consumidores eligen, pero ¿qué los conduce a elegir de tal o cual modo? Sin lugar a dudas la respuesta la encontramos en las preferencias y en los gustos que presenta el consumidor sobre el conjunto de bienes que enfrenta. La naturaleza de la elección radica en las preferencias, en ese constante buscar la combinación de bienes que genere la mayor utilidad. Es ahí donde la elección descansa. Veamos lo anterior con detenimiento.

Los individuos tenemos un sistema de preferencias, generado por sus gustos por cada uno de los elementos del conjunto de los bienes, jerarquizando y ordenando uno a uno los bienes conforme con su sistema de preferencias. Basándonos en la racionalidad del individuo las preferencias cumplen las siguientes características:

* Completas.
* Reflexivas.
* Transitivas.

COMPLETAS.- $\forall x_1, x_2\in X$ se dice $x_1\geq x_2$ o $x_1\leq x_2$. Se refiere a que cualesquiera dos canastas pueden ser comparadas.

REFLEXIVAS.- $\forall x\in X$, se dice $x\geq x$. Plantea que cualquier canasta es al menos tan buena como ella misma.

TRANSITIVAS.- $\forall x_1, x_2, x_3\in X$. Si $x_1\geq x_2$ y $x_2\geq x_3$, entonces $x_1\geq x_3$. Indica que si el consumidor piensa que x_1 es al menos tan buena como x_2, y que x_2 es al menos tan buena como x_3, entonces el consumidor piensa que x_1 es al menos tan buena como x_3.

[28] Es pertinente aclarar que plantearemos el porque el consumidor elige de tal o cual modo, es decir, nos enfocaremos a estudiar el comportamiento del consumidor frente a una lista completa de bienes que él tiene para elegir y consumir. Asimismo, se planteara el cuando, donde y bajo que circunstancias se vuelven disponibles los bienes, Varian op. cit en su presentación al capítulo 3 sugiere este ejercicio, con el objeto de tener mayor claridad y profundidad en nuestro estudio. En adición a esto, más adelante comenzarán las

Los puntos antes expuestos son los llamados *axiomas básicos* o *axiomas de orden*, los cuales serán aplicables a un conjunto de elección cualquiera, permitiendo el modelaje operativo en la toma de decisiones del consumidor. En el primero la clave radica en que las canastas se pueden comparar, no existen canastas incomparables, entonces se pueden elegir entre dos canastas ya que se pueden comparar entre si, lo que indica que siempre se puede establecer una relación de preferencias. El segundo axioma[29], plantea que cualquier canasta es al menos tan buena como ella misma. A diferencia de los anteriores el tercero, referente a la transitividad, no es tan claro; ésta es una hipótesis de comportamiento no una afirmación de lógica pura, si este axioma no se cumple indica que no está eligiendo las mejores cosas como dice la premisa, por lo tanto las preferencias del consumidor deben cumplir dicho axioma, ya que de no ser así se efectuaría una elección que no es la mejor y nos alejaría de la discusión de la premisa.

Las preferencias deben satisfacer lo siguiente:

CONTINUIDAD.- $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, los conjuntos $\{\mathbf{x}: \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{x}_2\}$ y $\{\mathbf{x}: \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_2\}$ son conjuntos cerrados $\Rightarrow$ los conjuntos $\{\mathbf{x}: \mathbf{x}_1 > \mathbf{x}_2\}$ y $\{\mathbf{x}: \mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2\}$ son conjuntos abiertos[30].

MONOTONÍA DÉBIL.- Si $\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{x}_2$.

MONOTONÍA FUERTE.- Si $\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{x}_2$ con $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1 > \mathbf{x}_2$.

---

reflexiones sobre aspectos básicos sobre la elección, tales como racionalidad, y optimización, y sus implicaciones sobre el ahorro.

[29] Este axioma es obviamente trivial, pero hay que explicarlo dado que se toma como la parte primitiva del concepto de *al menos tan preferido como*.

[30] Esta caracteristica merece una demostración que necesita las siguientes definiciones:
Dado un vector $\mathbf{x} \in R^n$ y un numero real r, definimos como una bola abierta de radio r en $\mathbf{x}$ con $B_r(\mathbf{x}) = \{y \in \mathrm{R}^n: |y-x| < r$. A es un conjunto abierto si $\forall \mathbf{x} \in A$ $\exists$ algún $B_r(\mathbf{x}) \in A$. Si X está en algún conjunto arbitrario y existe $r>0 \ni B_r(\mathbf{x}) \in A$ entonces se dice que $\mathbf{x}$ está en el interior de A. El complemento de un conjunto $A \in \mathrm{R}^n$ consiste en todos los puntos en R^n que no están contenidos en A; y lo denotaremos como R^n/A. A es cerrado $\Leftrightarrow R^n/A$ es abierto. Entonces, un conjunto A es acotado si existe algún $x \in A$ y $r>0 \ni A$ está contenido en $B_r(\mathbf{x})$. Si un conjunto no vacio en R^n es cerrado y acotado se denomina compacto.
Una sucesión infinita en R^n, $(x^i)=(x^1, x^2, \ldots)$ es un conjunto infinito de puntos, un punto por cada posible entero, una sucesión (x^i) se dice que converge a un punto x^* si para cada $r>0$, existe un entero $m \ni \forall i>m$, $x^i \in B_r(\mathbf{x}^*)$. Podemos decir que x^* es el limite de la sucesión (x^i) y lo escribimos $\lim_{i \to \infty} x^i = x^*$. Si una sucesión converge a un punto, se le llama secuencia convergente. Podemos ahora formalizar.
Conjunto Cerrado.- A es un conjunto cerrado si para cada sucesión convergente en A, converge a un punto en A.
Conjunto Compacto.- Si A es un conjunto compacto, entonces cada sucesión en A tiene una subsecuencia convergente.
Expuesto lo anterior, podemos afirmar que una función $f(x)$ es continua en x^* para cada sucesión (x^i) que converge a x^* , teniendo la sucesión $(f(x^i))$ convergiendo a $f(x^*)$. Por lo tanto, una función que es continua en cada punto de su dominio es una función continua. Empleando calculo se simplifica aùn mas el concepto de continuidad y se define de la siguiente forma:
Sea f: R $\to$R con regla de correspondencia $f(x)$ y a un numero real. La función f es continua en a si se cumplen las siguientes condiciones:

1. f esta definida en a, es decir existe $f(a)$.
2. Existe $\lim_{x \to a} f(x)$.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
4. Se puede ver que la definición de continuidad de una función es respecto a un punto determinado, si se desea hablar de continuidad sin muchas complicaciones, decimos: *la función con regla de correspondencia $f(x)$ es continua en cada punto del dominio de la función, en donde el concepto de continua en cada punto debe cumplir las condiciones enumeradas por la definición anterior.*

INSACIABILIDAD LOCAL.- Dado $x \in X$ y cualquier $\varepsilon<0$, $\Rightarrow \exists$ un $x \in X$ $|x_1-x_2|<\varepsilon \ni x_1>x_2$[31].

CONVEXIDAD.- Dados x_1, x_2, $x_3 \in X$, $\ni x_1 \geq x_3$ y $x_2 \geq x_3$, entonces cumple $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \geq x_3$ $\forall \lambda \in [0, 1]$.

CONVEXIDAD ESTRICTA.- $x_1 \neq x_2$, $x_3 \in X$, si $x_1 \geq x_3$ y $x_2 \geq x_3$. Entonces $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2>x_3$ $\forall \lambda \in [0, 1]$.

Enunciadas las características analíticas es menester su explicación puntual. Cuando hacemos referencia a la continuidad de las preferencias debemos, por necesidad, excluir todo comportamiento discontinuo. Esto es, si $\{x^i\}$ es una sucesión de canastas de consumo, donde todas son al menos tan buenas como alguna canasta x_1, y si esta sucesión converge hacia una canasta x^*, entonces x^* es al menos tan buena como x_1[32]. La continuidad implica lo siguiente: si x_2 es una canasta estrictamente preferida a x_3 y si x_1 es lo suficientemente cercana a x_2, entonces x_1 debe ser estrictamente preferida a x_3. La monotonía débil plantea que al menos mucho de todo es tan bueno. La monotonía fuerte es más restrictiva, dice que al menos mucho de cada bien y estrictamente más de algún bien es estrictamente mejor. La insatisfacción o insaciabilidad local plantea que podemos siempre mejorar un poco, es decir, nunca estaremos satisfechos aún y cuando estemos restringidos por pequeños cambios en la canasta de consumo. La convexidad implica que nuestro consumidor prefiere la variedad, es decir siempre preferirá medios a extremos. Este aserto generaliza el supuesto de tasas marginales de sustitución decrecientes.

Ya que las preferencias del consumidor cumplen con las características antes mencionadas se puede demostrar la existencia de una función de utilidad. La función de utilidad es la representación formal de las preferencias del consumidor. Resume la manera en que cada individuo interpreta su entorno, la valoración del ocio y su grado de información. Es, en mi opinión, el concepto más relevante de la economía, ya que al definir el comportamiento del consumidor, define a la persona, las ideas y refleja su capacidad de elegir su satisfacción. Es la unidad fundamental en el engranaje económico. La función de utilidad u_i la definiremos mediante el siguiente teorema:

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo, sea $\preceq_i$ un preorden de preferencias reflexivo, transitivo, completo, continuo y no saciable, definido en X. Y si $\exists$ $x_i \in X_i \Rightarrow u_i$ y es creciente y continua.

Para un mejor entendimiento de la demostración, la cual he realizado más extensa de lo hubiese querido porque carecí de tiempo para escribirla más breve, es necesario dividirla en tres etapas, una que garantice la formulación de la función de utilidad, otra que hable de continuidad y la ultima que compruebe que la función de utilidad representa las preferencias. La demostración se basa en la existencia de un subconjunto numerable D de X que es denso en X[33].

Si x, $x' \in X$ satisfacen $x'<x \Rightarrow \exists$ $x \in D \ni x'<x<x''$. Para demostrar este aserto es necesario considerar los conjuntos:

$$X_{\omega'} = \{x \in X : \leq x'\} \text{ y } X^{\omega''} = \{x \in X : x'' \leq x\}.$$

Los cuales son disjuntos, no vacíos y cerrados en X. Dado que X es conexo no puede ser su unión,[34] entonces:

$$X_{\omega'} \cup X^{\omega''} \neq X$$

---

[31] Aqui nuevamente me refiero a la métrica euclidiana.

[32] Varian, Hal R.; "Microeconomic Analysis". 3ª. edición, WW Norton, New York, EE.UU. 1992. Página 95.

[33] Todo subconjunto S de R^n contiene un conjunto numerable $X \ni S \subset X$. Es decir, un conjunto arbitrario S (por lo tanto quizás no numerable) de R^n contiene un conjunto numerable X que es denso en S, es decir, $\ni$ para cualquier $x \in S$ hay puntos de X arbitrariamente cerca de x.

[34] Para ampliar la definición que dimos antes decimos que un conjunto es conexo si no puede hacerse una partición del mismo en dos subconjuntos cerrados en el mismo.

Si asumimos que no hubiera ningún $x \in D$ con la propiedad que buscamos. Esto necesariamente implicaría que $D \subset X_{\omega'} \bigcup X^{\omega''}$. Por el primer aserto la adherencia[35] $\overline{D}$, de D en X estaría contenida en la adherencia de X del conjunto $X_{\omega'} \bigcup X^{\omega''}$. Pero este último es cerrado ya que es la unión de dos conjuntos cerrados. Por lo que se obtendría $\overline{D} \subset X_{\omega'} \bigcup X^{\omega''}$, o dado que $D=X$,

$$X = X_{\omega'} \bigcup X^{\omega''}$$

lo cual es evidentemente una contradicción.

La función de utilidad a ser definida en D se denominará por u'. Si se eligen dos números reales a, b tales que $a<b$. Entonces decimos:

Si D tiene un elemento mínimo x^{α}, tomaremos $u'(x^{\alpha})=a$.
Si D tiene un elemento máximo x^{β}, tomaremos $u'(x^{\beta})=b$.

Extraemos de D todos los elementos indiferentes a x^{α} o a x^{β}, y llamamos D' al conjunto restante.

Definiendo una función creciente de D' sobre el conjunto Q' de números racionales en el intervalo $]a, b[$ como sigue. Partiendo de que D' es numerable sus elementos pueden ser ordenados $(x^1, x^2,\ldots, x^p,\ldots)$; este ordenamiento no está relacionado con el orden $\leq$. De modo similar, Q' es numerable y sus elementos pueden ser ordenados $(r^1, r^2,\ldots,r^p,\ldots)$; esta orden no está necesariamente relacionado con el orden $\leqq$. Los elementos de D' serán considerados sucesivamente; con x^p se asocia un elemento r^q de Q' de tal forma que el orden se conserve y que todo elemento de Q' acabe por ser tomado.

El proceso sería[36]: considerando x^p, se efectúa una partición de D' en conjuntos con las características siguientes: las clases de indiferencia de $x^1, x^2,\ldots, x^{p-1}$[37], obtendríamos los intervalos de la forma $]\leftarrow, x^{p1}[$, o $]x^{pm}, x^{pm+1}[$ o $]x^{p p-1}, \rightarrow[$ donde $m<n$ implica $x^{pm} \leq x^{pn}$[38]. Pueden ocurrir dos casos:

Si $x^{pm} \sim x^{pn}$, donde $p'<p$, tomando $q_p=q_{p'}$ y $u'(x^p)=r^{qp}$;
Si x^p está en uno de los intervalos, $]x^{p'}, x^{p''}[$ considerando el intervalo correspondiente $]r^{q_{p'}}, r^{q_{p''}}[$ de Q' y seleccionando el número racional de menor rango $r^{\overline{q}}$, tomando $u'(x^{\overline{r}})=r^{\overline{q}}$.

Ahora hay que extender de D a X. Llamaremos a la función de utilidad por ser definida en X u. Si x' pertenece a X, se escribirá el conjunto $D_{\omega'} = \{x \in X | x \leq x'\}$ y $D^{\omega'} = \{x \in X | x' \leq x\}$.

Si x es un elemento mínimo de X, tendremos $u(x)=a$.

Si x es un elemento máximo de X, tendremos $u(x)=b$.

---

[35] Adherencia.- El conjunto de los puntos adherentes a X se denomina la adherencia (cerradura)de X, se representa por $\bar{X}$.

[36] Para revisar un caso particular y, a su vez facilitar la comprensión del proceso, tendríamos que considerando x^1; tomando $q^1=1$ y $u'(x^1)=r^{q1}$. Considerando x^2; se efectúa la partición de D' en los siguientes conjuntos:

La clase de indiferencia de x^1, los intervalos $]\leftarrow, x^1[$; y $]x^1, \rightarrow[$. Pueden ocurrir dos casos.

Si $x^2 \sim x^1$, tomando $q_2=q_1$ y $u'(x^2)=r^{q2}$;
Si x^2 está en uno de los intervalos, por ejemplo $]\leftarrow, x^1[$, se considerará el intervalo correspondiente $]a, x^1[$ de Q' y seleccionando en el número racional de menor rango r^{q2}, tomaremos $u'(x^2)=r^{q2}$.

[37] Es necesario destacar que el numero de conjuntos obtenidos por este método será no mayor a p-1.

[38] Aquí se infiere que el número de intervalos no vacios será menor o igual a p.

Vamos a considerar para los casos restantes **Sup** $u'(D_\infty)$ e **Inf** $u'(D^\infty)$. El siguiente paso es demostrar que ambos números son iguales.

i) Si $x'\in D_\infty$ y $x''\in D^\infty$ se tiene $x'\leq x''$. Por lo que si $r'\in u'(D_\infty)$ y $r''\in u'(D^\infty)$ se tiene que $r'\leq r''$ de esto se infiere directamente que **Sup** $u'(D_\infty) \leq$ **Inf** $u'(D^\infty)$.

ii) **Sup** $u'(D_\infty)<$**Inf** $u'(D^\infty)$ no puede ocurrir, ya que en tal caso cualquier número racional entre ellos no sería un valor tomado de u'.

Tomando que $u(x)$ el valor común del **Sup** y del **Inf**. Es claro que si $x\in D$ se tiene que $u'(x)=u''(x)$ y u es efectivamente una extensión de D a X; en particular

$$Q'\subset u(X)\subset[a, b]$$

Comprobando así que u es creciente.

Siguiente parte verificar la continuidad de u. Sabemos que existe algún $\mathbf{x}'\in X \ni \mathbf{x}'<\mathbf{x}\ \forall \mathbf{x}\in X$. Entonces utilizando la distancia euclidiana definimos d: $X\rightarrow R$ que será la función que asocia a cada $\mathbf{x}\in X$ la distancia entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$, es decir $d(\mathbf{x})=|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$. El siguiente paso es identificar la utilidad asociada a un plan de consumo, para esto definimos un subconjunto de X, usemos C. Entonces $d(C)$ designará la distancia entre $\mathbf{x}'$ y C, en otros términos $d(C)=\min d(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x}\in C$. Si definimos nuestra función de utilidad, de modo que podamos comprobar mediante la función de distancias. Entonces definamos u: $X\rightarrow R$: para cada $\mathbf{x}\in X$ $u(\mathbf{x})=d[MI(\mathbf{x})]$. En otras palabras, $u(\mathbf{x})=\min d(\mathbf{x}')$, con $\mathbf{x}'\in MI(\mathbf{x})$ [39]. Con esto se identifica la utilidad asociada a un plan de consumo factible con la distancia entre $\mathbf{x}'$, el cual tomamos como referencia, y el conjunto de planes de consumo mejores o iguales que $\mathbf{x}$. La continuidad de las preferencias y la continuidad de la función de distancia garantizan que u está bien definida para $\mathbf{x}\in X$.[40]

Ahora la verificación de que la función de utilidad representa la preferencias. Ésta parte es bastante sencilla. Solo es necesario probar lo siguiente: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}'\in X$ se cumple

$$\mathbf{x}\sim\mathbf{x}' \Rightarrow u(\mathbf{x})=u(\mathbf{x}')$$

$$\mathbf{x}>\mathbf{x}' \Rightarrow u(\mathbf{x})>u(\mathbf{x}')$$

La primera relación expresa de modo simple y, hasta cierto punto trivial, la definición de la función de utilidad. Indica que las alternativas mejores o iguales a $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ son las mismas; en este sentido se verifican uno a uno los axiomas de orden de las preferencias, entonces si las alternativas a cualesquiera dos planes de consumo son las mismas necesariamente indica que tales planes de consumo pertenecen a la misma clase de indiferencia. Por lo que se cumple la primera relación.

La segunda relación se demostrará utilizando la transitividad de las preferencias, solo basta acotar a que sean distintos, para lo cual por transitividad dos planes de consumo cualesquiera donde $\mathbf{x}>\mathbf{x}'$ necesariamente nos conduce a $u(\mathbf{x})>u(\mathbf{x}')$. Si esto no fuera así, implicaría que $\mathbf{x}\sim\mathbf{x}'$ lo que violenta el orden de las preferencias y por reflexividad $\mathbf{x}\geq\mathbf{x}$, es decir cualquier plan de consumo es al menos tan bueno como el mismo; siguiendo con dicho razonamiento, al momento de definir ambos planes de consumo como diferentes entre si, y que la función de utilidad está definida para todo $\mathbf{x}$, entonces quiere decir que los niveles de utilidad asociados a cada plan de consumo son distintos. Ahora formalicemos este razonamiento. Si $\mathbf{x}>\mathbf{x}$, tendremos $\mathbf{x}>\mathbf{x}\geq\mathbf{x}^0$, por transitividad se infiere $MI(\mathbf{x})\subset MI(\mathbf{x}')$, de tal manera que $u(\mathbf{x})>u(\mathbf{x}')$, ahora solo resta probar que sean distintos. Asumiendo $u(\mathbf{x})=u(\mathbf{x}')$, con $\mathbf{x}\sim\mathbf{x}'$. Si observamos cuidadosamente $u(\mathbf{x})=0$ implica que $\mathbf{x}\sim\mathbf{x}'$. Para

[39] MI es un conjunto $MI(\mathbf{x}^\circ)=\{\mathbf{x}\in X: \mathbf{x}\geq\mathbf{x}^\circ\}$, es decir el conjunto de todas las opciones mejores o iguales que $\mathbf{x}^\circ$, dejo a usted estimado lector, la definición del conjunto de todas las opciones peores o iguales a $\mathbf{x}^\circ$.

[40] Una demostración mas formal sería la siguiente: Si c es un número real cualquiera, la imagen inversa de $[c,\rightarrow[$ dada por u es carrada en X. Por consiguiente una demostración similar se aplicaria para el intervalo $]\leftarrow, c]$.

demostrarlo veamos que $u(\mathbf{x})=0 \Rightarrow d[MI(\mathbf{x})]=0$, $\therefore \exists\, x'' \in MI(\mathbf{x}) \ni d(\mathbf{x}'')=0$. Esto ocurre si $\mathbf{x}^0 \in MI(\mathbf{x})$, entonces tendríamos que $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}$, y necesariamente $\mathbf{x}^0 \sim \mathbf{x}$. De aquí se infiere que si $\mathbf{x} > \mathbf{x}'$, entonces $u(\mathbf{x}) \neq 0$[41]. Concluyendo que si $\mathbf{x} > \mathbf{x}'$ y $u(\mathbf{x})=u(\mathbf{x}')=0$ no es posible.

Es necesario llegar a una contradicción supondremos $u(\mathbf{x})=u(\mathbf{x}')$ y sea $\bar{\mathbf{x}} \in X$ un punto $\ni d(\bar{\mathbf{x}}) = u(\mathbf{x})$. Partiendo de que $\bar{\mathbf{x}} \in MI(\mathbf{x})$ sabemos que $\bar{\mathbf{x}} \succeq \mathbf{x} \succ \mathbf{x}'$. La continuidad de las preferencias, como hemos visto en la nota 28, asegura la existencia de un escalar suficientemente pequeño para determinar una combinación convexa. Sea $\alpha \in (0,1)$, entonces $\left[(1-\alpha)\bar{\mathbf{x}} + \alpha\mathbf{x}^0\right] \geq \mathbf{x}'$ $\ni \left[(1-\alpha)\bar{\mathbf{x}} + \alpha\mathbf{x}^0\right] \in MI(\mathbf{x}')$. Entonces decimos:

$$u(\mathbf{x}') \leq d\left[(1-\alpha)\bar{\mathbf{x}} + \alpha\mathbf{x}^0\right] = \left\|(1-\alpha)\bar{\mathbf{x}} + \alpha\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^0\right\|$$

$$= (1-\alpha)\left\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\right\| = (1-\alpha)d(\bar{\mathbf{x}}) = (1-\alpha)u(\mathbf{x})$$

En otras palabras, $u(\mathbf{x}) \leq (1-\alpha)u(\mathbf{x})$ es unicamente posible si $u(\mathbf{x})=0$. Sabiendo que tal posibilidad ya había sido descartada, entonces $\mathbf{x} > \mathbf{x}'$ implica necesariamente que $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}')$. Quedando demostrado que la función u: $R^n \rightarrow R$ representa las preferencias del consumidor.

La última parte de la demostración consiste en probar que u es una función continua, siguiendo la lógica empleada en la prueba de la nota 28. Para cualquier escalar $a \in R$, los conjuntos $U(a^+) = \{\mathbf{x} \in X | u(\mathbf{x}) \geq a\}$, $U(a^-) = \{\mathbf{x} \in X | u(\mathbf{x}) \leq a\}$ son cerrados.

Primero $U(a^+)$ es cerrado. Sea $\{x^n\} \rightarrow x$ una sucesión en $X \ni u(\mathbf{x}^n) \geq a$, $\forall a$, y sea $\mathbf{x}'$ un punto $\ni d(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x})$. Por insaciabilidad sabemos que habrá algún $\mathbf{x}'' \in X$, arbitrariamente próximo a $\mathbf{x}'$, $\ni \mathbf{x}'' > \mathbf{x}'$. La transitividad no conduce a que $\mathbf{x}'' > \mathbf{x}$. Tomando la continuidad de las preferencias asegura que a partir de un n suficientemente grande, $\mathbf{x}'' \geq \mathbf{x}^n$. Por tanto, $u(\mathbf{x}'') \geq u(\mathbf{x}^n) \geq a$. Pero $\mathbf{x}''$ puede tomarse tan próximo a $\mathbf{x}'$ como queramos. Como $\mathbf{x}'' > \mathbf{x}^0$, $d(\mathbf{x}'') \geq u(\mathbf{x}'') \geq a$, y por la continuidad de $d(\bullet)$, obtenemos que $u(\mathbf{x}') \geq a$. Teniendo así, $u(\mathbf{x})=u(\mathbf{x}')=d(\mathbf{x}') \geq a$, puesto que $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^0$. Con lo que se prueba que el conjunto $U(a^+)$ es cerrado.

Finalmente $U(a^-)$ es cerrado. Nuevamente hay que considerar una sucesión $\{x^n\} \rightarrow x$, pero ahora con $u(\mathbf{x}^n) \leq a$. Sea $\mathbf{x}'^n \ni d(\mathbf{x}'^n)=u(\mathbf{x}^n)$ para cada n. Con esto obtenemos inmediatamente que $u(\mathbf{x}'^n) \leq a$. Dado que la sucesión está acotada, y por ende converge a un punto $\mathbf{x}' \ni u(\mathbf{x}') \leq a$. Conforme a la segunda parte de la demostración podemos afirmar que $\mathbf{x}'^n \sim \mathbf{x}^n$ $\forall n$, y $\mathbf{x}^n \rightarrow \mathbf{x}$. Tomando la sucesión $\{x'^n\} \rightarrow \mathbf{x}$, por continuidad sabemos que $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}$, lo que implica que $u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}) \leq a$. Con lo que se demuestra que $U(a^-)$ es cerrado.

Con esto concluye la demostración, donde se prueba la existencia de una función de utilidad continua que representa las preferencias del consumidor.

Satisfacción, Demanda y Gasto

Para analizar el comportamiento del consumidor hay que hacer la siguiente reflexión. Ya hemos modelado el presupuesto, la utilidad y los conjuntos de consumo; ahora sólo resta modelar la elección del consumidor. Debido a los desarrollos antes mencionados, matemáticamente el problema de la elección se resuelve de modo bastante sencillo. Pero, quiero hacer algunas consideraciones sobre lo que implica la satisfacción de las preferencias.

Podemos resumir el problema como sigue: Dado un par precio-riqueza el i-ésimo consumidor elegirá un plan de consumo $x_i \in X$, por lo que su demanda, o consumo de equilibrio proviene de resolver:

[41] En caso contrario, la transitividad de la indiferencia necesariamente implicaría que $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$.

$$\text{Max } u(\mathbf{x}_i)$$

s. a.

$$\mathbf{x}_i \in \beta_i(\mathbf{p}, w_i)$$

Este problema puede tener solución única, infinitas soluciones o simplemente no tener solución. Esto obedece sencillamente a la construcción del modelo, por lo que sugiero prudencia al lector en el momento de realizar reflexiones y conclusiones sobre lo que implica la satisfacción de las preferencias o maximización de la utilidad.

Definamos ahora la demanda. Necesitamos asociar a cada par precio-riqueza un conjunto de consumos de equilibrio, quedando definida la correspondencia $\xi i : R^{k+1} \rightarrow X_i$, la cual entenderemos como correspondencia de demanda del i-ésimo consumidor, definida como: Para cada $(\mathbf{p}, w_i) \in R^{k+1}$,

$$\xi i\ (\mathbf{p}, w) \equiv \{\mathbf{x} \in X / \mathbf{x}_i \text{ maximiza } u_i \text{ sobre } \beta_i(\mathbf{p}, w_i)\}$$

El lema de Berge establece que la solución de un problema de optimización, definido mediante una función objetivo continua con un conjunto de restricciones compacto, convexo y continuo, constituye una correspondencia hemicontinua[42] superiormente.

Teorema del máximo (Lema de Berge). Sea S un conjunto de R^k, y sea $X \subset R^k$ compacto. Sea β una correspondencia continua de S a X, u: $X \rightarrow R$ una función continua, y sea $\xi : S \rightarrow X$ una correspondencia que asocia a cada $s \in S$, el conjunto de valores $\mathbf{x}$ que maximizan u sobre $\beta(s)$. La correspondencia ξ es hemicontinua superiormente en S, Además, la función $v(\mathbf{s})=u(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \xi(\mathbf{s})$ es continua.

Para probar lo anterior partimos de que X es compacto. Sea $\{s^n\} \subset S$ una sucesión que converge a s^o, y $\{s^n\} \subset S$ una sucesión que converge a s^o tales que $\forall n$, $\mathbf{x}^n \in \xi(s^n)$. Dado que $\forall n$ tenemos $\mathbf{x}^n \in \beta(s^n)$ y β es hemicontinua superiormente, se tiene que $\mathbf{x}^o \in \beta(s^o)$. Por otra parte, sea $\mathbf{z}$ un punto arbitrario de $\beta(s^o)$; dado β es hemicontinua inferiormente, existe una sucesión $\{\mathbf{z}^n\} \in X$ que converge a $\mathbf{z}$ $\ni \forall n$, $\mathbf{z}^n \in \beta(s^n)$. Entonces, $\forall n$ se verifica $u(\mathbf{x}^n) \geq u(\mathbf{z}^n)$, esto se desprende de que $\mathbf{x}^n$ maximiza u sobre $\beta(s^n)$, y en el límite tenemos $u(\mathbf{x}^o) \geq u(\mathbf{z})$, ya que se verifica la desigualdad para todo $\mathbf{z} \in \beta(s^o)$, queda probado que $\mathbf{x}^o \in \xi(s^o)$.

Sea $\{s^n\} \rightarrow s^o$con $\mathbf{x}^n \in \xi(s^n)$ $\forall n$. Dado que X es compacto, podemos decir que$\{\mathbf{x}^n\} \rightarrow \mathbf{x}^o \in X$. De esto obtenemos que $v(s^n)=u(\mathbf{x}^n)$. Sabiendo que u es continua, y aplicando el mismo razonamiento anterior se concluye que $v(s^n)=u(\mathbf{x}^n) \rightarrow u(x^o)=v(s^o)$.

Aquí aparece un resultado importante relativo a la correspondencia de demanda y dice: Sea $X \subset R^k$ compacto y convexo, y sea $(\mathbf{p}^o, w^o) \in R^{k+1} \ni \exists\ \mathbf{x}' \in X$ con $\mathbf{p}^o\mathbf{x}' < m^o$. Sea u una función de utilidad continua $\Rightarrow$ que la correspondencia ξ es no vacía y hemicontinua superiormente en $(\mathbf{p}^o, m^o)$. Para probar la anterior proposición debemos recordar que por construcción el conjunto presupuestal es no vacío. Debido a que hemos tomado X compacto, por Weierstrass se garantiza que u posee un máximo en $\beta_i(\mathbf{p}, w_i)$ $\therefore \xi i\ (\mathbf{p}^o, w^o) \neq \varnothing$. Si a esto añadimos que al existir un $\mathbf{x}' \in X \ni \mathbf{p}^o\mathbf{x}' < m^o$, la proposición nos garantiza que la correspondencia β_i es continua en $(\mathbf{p}^o, m^o)$. Por lo que el teorema del máximo nos proporciona el resultado que buscamos[43].

[42] Hemicontinuidad.- Sea $\gamma : X \rightarrow Y$ una correspondencia con valores compactos. γ es hemicontinua superiormente en el punto $\mathbf{x} \in X \Leftrightarrow$ para cada sucesión $\{\mathbf{x}^v\} \rightarrow \mathbf{x}$, $\{\mathbf{y}^v\} \rightarrow \mathbf{y}$ con $\mathbf{y}^v \in \gamma(\mathbf{x})$ $\forall v$ se verifica que $\mathbf{y} \in \gamma(\mathbf{x})$.

Una correspondencia $\gamma : X \rightarrow Y$ es hemicontinua superiormente en $\mathbf{x} \in X \Leftrightarrow$ para cada $\mathbf{y} \in \gamma(\mathbf{x})$ y cada sucesión $\{\mathbf{x}^v\} \rightarrow \mathbf{x}$ se puede encontrar una sucesión $\{\mathbf{y}^v\} \rightarrow \mathbf{y}$ con $\mathbf{y}^v \in \gamma(\mathbf{x}^v)$ $\forall v$.

[43] Aquí aparece un corolario interesante. Sea $X_i \subset R^k$ no vacío, compacto y convexo, y sea $(\mathbf{p}, w_i) \in R^{k+1} \ni \exists$ $\mathbf{x}' \in X$ con $\mathbf{p}\mathbf{x}' < w_i$. Sea u_i una función de utilidad continua y cuasi-cóncava. Entonces, si la correspondencia de demanda ξ_i es hemicontinua superiormente en $(\mathbf{p}, w_i)$, con valores no vacíos, compactos y convexos y estrictamente cuasi-cóncava, entonces ξ_i es una función continua.

Revisemos lo que tenemos hasta aquí. Hemos definido el conjunto de elección de consumidor, el cual esta restringido al ortante positivo mas no acotado superiormente. De aquí se infiere que el consumidor valora al ocio sobre el trabajo, cuando se demanda más ocio que trabajo se demanda mas trabajo de otros, pero Arrow y Hahn (1971, 4.1) hacen una disertación más precisa y elegante, y realmente no es mi propósito detenerme tanto en este punto. Hemos también formulado el problema del óptimo del consumidor en un programa *P*; por la construcción de dicho programa garantizamos que tenga solución, y que la función de demanda sea continua. Ahora encontremos la solución. Consideremos el programa

$$\text{Max } u(\mathbf{x}_i)$$

$$\text{s. a.}$$

$$\mathbf{px} \leq w$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Se aprecia claramente que se busca maximizar una función diferenciable, sujeta a una restricción lineal y una restricción de no negatividad. El conjunto de oportunidades queda definido y es convexo, posee interior no vacío y es compacto. Aplicando las condiciones de óptimo, podemos ver que la solución de *P* esta dada por:

$$\text{(a) } \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \lambda p_i \leq 0$$

$$\text{(b)} \left[\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \lambda p_i \right] = 0$$

$$\text{(c) } \lambda(w - \mathbf{px}) = 0$$

Por construcción del programa $\forall\ \mathbf{x} \in R^k\ \exists$ un $j \ni {}^{\partial u(\mathbf{x})}\!\big/_{\partial x_j} > 0$ queda satisfecha de modo automático la condición suficiente.

Si $\mathbf{x}^*$ es la solución del programa *P*, y es única, tal solución es una función de los parámetros $(\mathbf{p}, w)$ de los que depende. Quedando así:

$$\mathbf{x}^* = x(\mathbf{p}, w)$$

La cual entenderemos como la función de demanda marshalliana, ella nos dice cómo va a variar la senda de consumos óptimos del consumidor, cuando cambian los precios y su riqueza. La función de demanda es homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, w)$, lo que se debe interpretar como que el plan de consumo elegido depende únicamente de los precios relativos y del ingreso real.

Podemos definir ahora la función de utilidad indirecta $v : R^{n+1} \rightarrow R$, para cada $(\mathbf{p}, w) \in R^{n+1}$,

$$v(\mathbf{p}, w) = \{\text{Max } u(\mathbf{x}) \ / \ \mathbf{px} \leq w \}$$

La función de utilidad nos dice cuál es la máxima utilidad que se puede alcanzar, para cada par $(\mathbf{p}, w)$, teniendo

$$v(\mathbf{p}, w) = u(\mathbf{x}^*) = u(f(\mathbf{p}, w))$$

Ahora planteemos el dual del programa *P* como

$$\text{Min } \mathbf{px}$$

$$\text{s. a.}$$

$$u(\mathbf{x}_i) \geq u^\circ$$

Por construcción este problema posee solución única, $\mathbf{x}^*$, que depende de los parámetros $\mathbf{p}$ y u, esto aparece porque la función objetivo es lineal y la restricción define un conjunto estrictamente convexo y compacto. Esto lo podemos plantear

$$\mathbf{x}^*=h(\mathbf{p}, u)$$

Obteniendo así la función de demanda hicksiana, o función de demanda compensada, Ésta función nos dice cómo variará el consumo óptimo al modificarse los precios y el nivel de utilidad es tomado como referencia.

Es necesario definir la función de gasto, e: $R^k \times R \rightarrow R_+$ para cada $(\mathbf{p}, u^\circ) \in R^k \times R$

$$e(\mathbf{p}, u^\circ)=\{\text{Min } \mathbf{px} \text{ sujeto a } : u(\mathbf{x}) \geq u^\circ\}$$

la función de gasto nos da el gasto mínimo requerido para lograr al menos el nivel de utilidad u cuando prevalecen los precios $\mathbf{p}$. dada la construcción tenemos:

$$e(\mathbf{p}, u^\circ) = \mathbf{p}h\,(\mathbf{p}, u)$$

Las propiedades de la función de gasto son:

a) Es continua

b) Es homogénea de grado uno en $\mathbf{p}$.

c) Es no decreciente en $\mathbf{p}$, y estrictamente creciente en u.

d) Es cóncava en $\mathbf{p}$.

Para probar hay que considerar:

(a) La continuidad se obtiene por Berge. (b) Sea $\mathbf{x}^*$ la solución para $(\mathbf{p}, u^\circ)$ y asumiendo que e no es homogénea de grado uno. Sea entonces $\mathbf{x}'$ la solución del problema de minimización del gasto para $(\alpha\mathbf{p}, u^\circ)$, lo que implica que $\alpha\mathbf{px}' = e(\alpha\mathbf{p}, u^\circ)$. Debido a que la solución es única tendremos que $\alpha\mathbf{px}'<\alpha\mathbf{px}^*$; pero esto implica que $\mathbf{px}'<\mathbf{px}^*$, con lo que $\mathbf{x}^*$ no sería la solución para $(\mathbf{p}, u^\circ)$. (c) Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ las soluciones para minimizar el gasto para $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$. Asumiendo que $\mathbf{p}'\geq\mathbf{p}$; tendríamos $\mathbf{p}'\mathbf{x}'\geq\mathbf{p}^\circ\mathbf{x}'$, y $\mathbf{p}^\circ\mathbf{x}'\geq\mathbf{p}^\circ\mathbf{x}^\circ$: Siendo $\mathbf{x}^\circ$ minimizador del gasto a los precios $\mathbf{p}^\circ$. Sean ahora $\mathbf{x}^\circ$, $\mathbf{x}$ las soluciones minimizadoras del gasto para u°, u' con $u'>u^\circ$. Dado que el conjunto de oportunidades definido por u' está contenido en el definido por u°, $e(\mathbf{p}, u^\circ)\leq e(\mathbf{p}, u')$. Debido a que las soluciones son únicas la desigualdad resulta estricta. (d) Sean $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, $(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$ dos pares precio-consumo, en los que $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ son las combinaciones minimizadoras de gasto para $(\mathbf{p}, u^\circ)$, $(\mathbf{p}', u^\circ)$, respectivamente, y sea $\mathbf{p}''=\lambda\mathbf{p}+(1-\lambda)\mathbf{p}'$, $\lambda\in[0,1]$. Tenemos que $e(\mathbf{p}'', u^\circ)=\mathbf{p}''\mathbf{x}''=\lambda\mathbf{px}''+(1-\lambda)\mathbf{p}'\mathbf{x}''$. Por construcción sabemos que $\mathbf{px}''\geq e(\mathbf{p}, u^\circ)$ y $\mathbf{p}'\mathbf{x}''\geq e(\mathbf{p}', u^\circ)$ $\therefore e(\mathbf{p}'', u^\circ)\geq\lambda e(\mathbf{p}, u^\circ)+(1-\lambda)e(\mathbf{p}', u^\circ)$ lo que prueba la concavidad de $e(\mathbf{p}, u)$ en $\mathbf{p}$.

Lo importante aquí es que la continuidad de la función de gasto, asegura que al subir el precio de la mercancía el gasto no disminuirá; pero, la concavidad de e implica que el gasto lo hará de una manera decreciente. Simplemente se sustituirá.

Hemos obtenido hasta el momento, varios conceptos importantes. Primero la función indirecta de utilidad, la cual derivamos de la función de demanda marshalliana, y de igual modo obtuvimos la función de gasto a partir de la función de demanda hicksiana. Ahora es pertinente revisar algunas relaciones recíprocas entre estas funciones, el lema de Shepard, la identidad de Roy y la ecuación de Slutsky.

IDENTIDAD DE ROY.- Si la función de utilidad u satisface la insaciabilidad local, y si la función de utilidad u y la función de demanda son continuas y diferenciables en algún punto $(\mathbf{p}, w)>0$, $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)>0$. Entonces en dicho punto

$$x_j(\mathbf{p},w)=-\frac{\dfrac{\partial v(\mathbf{p},w)}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial v(\mathbf{p},w)}{\partial w}} \text{ donde } j=1, 2,.., \mathrm{n}$$

en forma vectorial tendríamos

$$x(\mathbf{p},w)=-\frac{\nabla_p v(\mathbf{p},w)}{\partial v(\mathbf{p},w)/\partial w}$$

Por el teorema de la envolvente[44]

[44] Teorema de la envolvente.- Suponga que $a=a_0$ y el problema tiene un punto solución $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}(a_0)$ que es un punto regular de las restricciones. Siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ los multiplicadores de Lagrange. Definiendo el Lagragiano

$$L(\mathbf{x},a)=f(\mathbf{x},a)-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i h_i(\mathbf{x},a)$$

entonces

$$\left.\frac{dV}{da}\right|_{a_0}=\left.\frac{\partial L(\mathrm{x},a)}{\partial da}\right|_{a_0}$$

Para probar tenemos la igualdad

$$h_i(\mathbf{x}(a),a)=0 \text{ con } \mathrm{i}=1,.., \mathrm{l}$$

Derivando respecto a tenemos

$$\nabla_{\mathbf{x}}h_i(\mathbf{x}(a),a)\cdot\frac{d\mathbf{x}(a)}{da}+\frac{\partial h_i(\mathbf{x}(a),a)}{\partial a}=0$$

Multiplicando la i-ésima ecuación por λ_i y sumando, tenemos en a_0

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\nabla_{\mathbf{x}}h_i(\mathbf{x}_0,a_0)\cdot\frac{d\mathbf{x}(a_0)}{da}+\lambda_i\frac{\partial h(\mathbf{x}_0,a_0)}{\partial a}=0$$

En a_0 también tenemos por las condiciones de primer orden

$$\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}_0,a_0)-\sum_{i=1}^{n}\lambda\nabla_{\mathbf{x}}h_i(\mathbf{x}_0,a_0)=0$$

Sabemos que por definición

$$V(a)=f(\mathbf{x}(a),a)$$

Luego entonces

$$\frac{dV(a)}{da}=\nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}(a),a)\cdot\frac{d\mathbf{x}(a)}{da}+\frac{\partial f(\mathbf{x}(a),a)}{\partial a}$$

Y finalmente sustituyendo obtenemos

$$\left.\frac{dV}{da}\right|_{a_0}=\frac{\partial f(\mathbf{x}_0,a_0)}{\partial a}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial h_i(\mathbf{x}_0,a_0)}{\partial a}$$

$$=\frac{\partial L(\mathbf{x}_0,a_0)}{\partial a}$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, w)}{\partial p_r} = -\lambda x_j(\mathbf{p}, w)$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, w)}{\partial w} = \lambda$$

LEMA DE SHEPARD.- Si la función de gasto es diferenciable en ($\mathbf{p}$, u), entonces

$$h_j(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j} \text{ donde j=1, 2,..., } n.$$

en su forma vectorial

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathrm{u}) = \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, u)$$

Sea $\mathbf{x}^*$ un vector que minimiza la función de gasto en ($\mathbf{p}^*$, u^*); sea

$$h(\mathbf{p}, u^*) = e(\mathbf{p}, u^*) - \mathbf{px}^*$$

Por definición $e(\mathbf{p}, u^*)$ es el gasto mínimo requerido para obtener u^*, así que tenemos $h(\mathbf{p}, u^*) \leq 0\ \forall \mathbf{p}$. Sin embargo, $h(\mathbf{p}^*, u^*)$ y entonces se maximiza en u^*. Esto conduce a que

$$0 = \frac{\partial h(\mathbf{p}, u^*)}{\partial p_i} = \frac{\partial e(\mathbf{p}^*, u^*)}{\partial p_j} - x_i^*$$

quedando demostrado.

ECUACIÓN DE SLUTSKY.- Si las funciones de demanda marshalliana y hicksiana son bien definidas, continuas y diferenciables, entonces $\mathbf{p}>0$, $\mathbf{x}>0$,

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p}, r)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, r)}{\partial r} \cdot x_j(\mathbf{p}, r)$$

donde $u = v(\mathbf{p}, r)$

Si derivamos $h(\mathbf{p}, u) = x(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)$ nos conduce a que

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, r)}{p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j}$$

Y por el lema de Shepard el término $\partial e(\mathbf{p}, u)/\partial p_j$ es justamente x_j.

Como se aprecia la ecuación de Slutsky descompone los cambios en la demanda causado por un cambio en precios en dos efectos: un efecto sustitución y un efecto ingreso. El efecto sustitución es el cambio en la demanda hicksiana debido al cambio en los precios relativos. El efecto ingreso es el cambio en la demanda marshalliana debido a un cambio efectivo en el ingreso causado por el cambio en el precio. Ahora extendamos este razonamiento. Los efectos sustitución se miden por las derivadas parciales

$$s_{ij} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j}$$

y nos referiremos a ellos como los términos de sustitución. Por lo que la matriz de términos de sustitución de $n \times n$ es:

$$\mathbf{S} = \left[\frac{\partial h_i(\mathbf{p},u)}{\partial p_j} \right]$$

Que es la matriz de Slutsky. Las propiedades se plantean en la siguiente proposición:

Si los términos de sustitución existen y son continuos. La matriz de Slutsky es simétrica y semidefinida negativa.

Por definición sabemos que

$$e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{p}h(\mathbf{p}, u)$$

Ya que h es continua y diferenciable, tenemos

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p},u) + \sum_{j=1}^{m} p_j \frac{\partial h_j(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}$$

Esto muestra que la función de gasto es continua y diferenciable y, por lo tanto por lema de Shepard

$$h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$$

obteniendo

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i \partial p_j}$$

de lo que se infiere que la matriz de Slutsky es simétrica. Porque la función de gasto es cóncava en precios tenemos que debido a que la función de gasto tiene segundas derivadas parciales y el conjunto de consumo es convexo conteniendo puntos interiores, la concavidad de la función de gasto estará definida si y solo si la matriz Hessiana $H(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa en cada punto x que pertenezca al conjunto de consumo.

Con esto concluimos el análisis de la primera etapa de la conducta del consumidor, donde hemos planteado la axiomática necesaria para poder analizar y explicar el comportamiento de los individuos de modo formal. Sólo resta decir que este análisis es tan poderoso que nos permite, haciendo algunas modificaciones, claro esta; plantear problemas y responder inquietudes en casos particulares. En las líneas anteriores se han planteado definiciones, axiomas, nociones comunes y teoremas que nos permiten analizar, a modo de radiografía, todo lo que yace detrás del comportamiento del individuo. Hemos analizado como asigna sus recursos escasos buscando un mayor nivel de vida, es decir, mayor satisfacción. La elección genera el movimiento de la actividad económica. Hemos mostrado que los gustos y la riqueza son determinantes fundamentales de la conducta del consumidor, y por ende en la demanda de los bienes y servicios. Cuando analizamos la optimización del consumidor dejamos al descubierto su racionalidad. Hemos demostrado que su gasto depende de sus niveles de satisfacción alcanzados. Aún y después de todo esto aún permanece nuestro estudio sin considerar al tiempo. Para entender dónde se encuentra la naturaleza del ahorro, hay que entender porqué se elige entre consumir hoy o mañana, y cómo se entiende el no conocer que sucederá mañana. El ahorro tiene la mismas bases que la elección, simplemente requiere comprender como discierne el individuo sobre posibilidades, oportunidades y su entorno. Para entender porqué se ahorra debemos entender porqué estamos dispuestos a sacrificar ingreso y consumo hoy para ejercerlo mañana, así es de simple. Pero para arribar a tal nivel de simplicidad debemos analizar como se elige en el tiempo. Seguiremos estudiando un consumidor que elige las mejores canastas considerando su riqueza, pero ahora debe elegir cómo asignará su consumo en el tiempo, administrando su riqueza y el riesgo.

TIEMPO, AHORRO E INCERTIDUMBRE

Aquí quiero plantear uno de los motivos fundamentales de la presente indagación, la génesis de la decisión para elegir entre periodos. En la búsqueda de una definición básica, donde se reflejase mi idea inicial, encontré un planteamiento que explica mi idea mejor de lo que yo hubiese podido haber imaginado; [...*nuestra condición humana, que es enemiga de cualquier infinitud. Se opone a ello nuestro eternamente insuficiente conocimiento del futuro; y ello se llama, en un caso, esperanza y en el otro incertidumbre del mañana.*][45]. Definitivamente nuestra percepción del futuro depende de nuestro nivel de información. El primer problema que pienso atacar es como interpretamos la idea del futuro para la toma de decisiones económicas. En otras palabras, como se determina el ahorro y el consumo a través del tiempo. Arrow y Hahn[46] hacen una precisión que es importante; proponen que los bienes pueden ser diferenciados en el tiempo, en el espacio o en ambos, aún y cuando sean físicamente idénticos. De esta afirmación se infiere claramente que el equilibrio se da en el espacio o en el tiempo, y de hecho se da en ambos. Aquí hablamos de una economía espacio-temporal, es decir extenderemos nuestro experimento mental en el tiempo, donde habrá mercados diferentes para bienes en momentos diferentes. Lo anterior implica que un mercado para un bien que será entregado en algún momento futuro será entendido como un mercado de futuros. Si tomásemos la noción pura, todos los mercados corrientes y de futuros operan en el presente, indicaríamos que una vez ejecutadas las transacciones, no habrá necesidad de más mercados dado que ya habrán contratado todas las transacciones futuras. Una de las implicaciones lógicas de la elección intertemporal indica que la producción necesita tiempo; y la relación existente entre ahorro y producción será estudiada en el siguiente capítulo.

Imaginemos que existe incertidumbre en cuanto a las dotaciones y la producción. Esto es fácil si definimos que las dotaciones y las posibilidades de producción dependen de los estados naturaleza. Entenderemos estado naturaleza como aquella descripción tan completa y detallada que, de ser acertada, definirá completamente todas las dotaciones y posibilidades de producción. Si existiera un numero muy grande, pero finito de estados naturaleza, podemos describir la dotación del agente h por los números $\bar{x}_{his}$, lo que se leerá como la cantidad de bien i poseído por el agente h-ésimo si ocurre el estado naturaleza s. Por otro lado, tendremos que un vector de producción viable para la empresa f, dependerá a su vez del estado naturaleza. Entonces sea y_{fs} un vector de producción viable para la empresa f si ocurre el estado s. Construyendo las dotaciones y las posibilidades de producción por vectores cuyos elementos varían con los bienes y el estado naturaleza. Entendido lo anterior, se aprecia claramente que las dotaciones y las posibilidades de producción dependen del estado naturaleza, entonces la factibilidad de cualquier asignación dependerá necesariamente del estado naturaleza, por lo que las decisiones de consumo deberán variar en ese sentido. Entendamos lo anterior; un vector de consumo, x_h, deberá estar conformado por dimensiones que conformen a las de $\bar{x}_{his}$ e y_{fs}, en otras palabras, sus componentes deberán escribirse $\bar{x}_{his}$. Esto arroja como conclusión que para un estado de naturaleza dado, la factibilidad es lo suficientemente flexible para que los compromisos de producción y consumo se puedan satisfacer en todo momento.

En este momento es fácil de ver que el orden de preferencias en el modelo extendido debe contener elementos de juicio sobre las probabilidades de los posibles estados naturaleza, aunados elementos de evaluación de los gustos y preferencias. Esto implica entender a un vector de consumo como una secuencia de los vectores de consumo, uno por cada estado naturaleza. Si descomponemos la función de utilidad de las asignaciones en elementos de creencia y gusto necesariamente nos conduce a la hipótesis de la utilidad esperada de Bernoulli. Ésta hipótesis dice que el orden de las preferencias en los consumos de la forma $x_h = (x_{h1}, \ldots x_{hs}, \ldots)$ puede representarse por una función de utilidad de la forma

[45] Levi, Primo " Si esto es un hombre". Colección Raíces, biblioteca de cultura Judía. Editorial, Editor, Buenos Aires, Argentina 1988; página 17.

$$\sum_s \pi_{hs} U_h(\mathbf{x}_{hs})$$

donde $\pi_{hs} \geq 0$, todo s, $\pi_{hs} > 0$, algún s. De ahí se infiere, sin pérdida de generalidad en algún momento que

$$\sum_s \pi_{hs} = 1$$

De ahí que π_{hs} deba interpretarse como la probabilidad de s vista por el agente h-ésimo, U_h es una función que refleja tanto las necesidades como los gustos, incluyendo los gustos o aversión por el riesgo, de igual modo que representa los gustos por elecciones entre bienes y servicios.

Imaginemos ahora que consideramos la adquisición de un bien que recibiremos mañana. Sabiendo que existen S estados naturaleza posibles y, conoceremos el estado hasta mañana. Para resolver esto es menester entender el concepto de bienes estado-indexados. Pensemos en un bien disponible cuando el estado s_1 ocurre, lo consideraremos diferente de uno físicamente idéntico pero que está disponible cuando ocurre s_2. Indexarlos bienes a los estados es análogo a indexarlos al tiempo. Cuando consideramos la posible adquisición de un bien estado indexado, se debe decidir que se desearía pagar cierto precio por un acuerdo de que el bien sea entregado si y sólo si ocurre el estado, si no ocurre simplemente no se recibe nada. Este acuerdo podría costar menos que la compra abierta del bien. Aquellos acuerdos que dependen del estado y su ocurrencia se denominan acuerdos contingentes.

Ahora pensemos que existe un bien físico sencillo y S estados posibles. El consumidor posee actualmente $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_S)$ de donde x_s corresponde al monto de bien disponible si el estado s ocurre. El orden de preferencias describe las preferencias del consumidor antes de que se revele el estado. Es decir es un orden de preferencias de contingent claims[47] para un bien físico. Sigamos trabajando con la canasta de contingent claims. Imaginemos que se ofrecen dos proposiciones simétricas que modificaría $\mathbf{x}$ por $\mathbf{z}$. En una proposiciones ofrece $\mathbf{x}+\mathbf{z}$ y en la otra se ofrece $\mathbf{x}-\mathbf{z}$. Los vectores $\mathbf{x}+\mathbf{z}$ y $\mathbf{x}-\mathbf{z}$ son factibles. Debemos saber que $\mathbf{z}$ tiene componentes tanto positivos y negativos, lo que involucra algo de riesgo en las proposiciones porque se renuncia a algunos de los beneficios en algunos estados por ganancias en otros. Entonces diremos que una relación de preferencias es adversa al riesgo en $\mathbf{x}$ si no existe $\mathbf{z}$ tal que las proposiciones $\mathbf{x}+\mathbf{z}$ y $\mathbf{x}-\mathbf{z}$ son ambas estrictamente preferidas a $\mathbf{x}$. Para generalizar, tenemos m bienes físicos y S estados. Sea $\Omega = R_+^{mS}$ el conjunto de todas las canastas estado contingentes no negativas, con orden de preferencias definido sobre él. Decimos que una relación de preferencias es adversa al riesgo en $\mathbf{x}\in\Omega$ si $\forall \mathbf{z} \ni \mathbf{x}+\mathbf{z}$, $\mathbf{x}-\mathbf{z} \in\Omega$ las canastas no son ambas estrictamente preferidas a $\mathbf{x}$. Si la relación de preferencias es adversa al riesgo en $\mathbf{x}\in\Omega$, se dice que es adversa en cualquier punto o simplemente adversa al riesgo. De lo anterior tenemos la siguiente proposición, que desarrollaremos con mayor profundidad más adelante, dice:

Una relación de preferencias es adversa al riesgo $\Leftrightarrow$ es convexa.

Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+\mathbf{z}$, $\mathbf{x}-\mathbf{z} \in\Omega$, si tenemos

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{z}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{z})$$

$\mathbf{x}$ es el punto medio entre los dos puntos, y este punto será siempre preferido a alguno de los puntos finales si y sólo si la relación de preferencias es convexa.

Debemos entender ahora que los objetos de elección serán sendas de consumos en el tiempo. De igual modo que en el caso estático, el consumidor tiene preferencias sobre tales sendas de

46 Arrow J. Kenneth, F. H. Hahn "Análisis general competitivo" Fondo de cultura económica, México 1977

47 Me disculpo pero no tengo palabra es Castellano para emplearla, pero la idea se entiende con la explicación.

consumo, y satisfacen las condiciones que hemos explicado con anterioridad. Esto nos conduce a buscar una representación conveniente de las preferencias individuales, donde se puedan expresar por el valor esperado de una función de utilidad definida sobre los bienes, no sobre los bienes estado indexados. La idea que yace en el desarrollo de la utilidad esperada es simplemente expandir el dominio de los objetos de elección, y lo haremos de bienes a loterías.

Para describir y analizar el conjunto de elecciones que enfrenta el consumidor pensaremos en términos de loterías, primero de un modo sencillo para después ir formalizando cada definición y cada término que utilizaremos. Denotaremos una lotería por $px \otimes (1-p)y$[48]. Los premios que recibirá el consumidor pueden ser desde dinero, canastas de bienes, hasta loterías posteriores. Hacemos utilización de las loterías dado que es muy cómodo como y nos facilita el trabajo con situaciones de incertidumbre y comportamiento bajo riesgo.

Sabemos que existe un conjunto de estados naturaleza, que es finito, y excluyente, además dichos estados naturaleza están fuera del control del consumidor. Suponemos que el agente conoce la probabilidad de la variable ψ cuya realización determina el estado naturaleza que prevalecerá. Entonces, sea $S= \{ s_1,..., s_k\}$ el conjunto de estado naturaleza y denotaremos por π_j la probabilidad del suceso s_j, con $\pi_j \in [0,1]$. De lo cual se sigue:

(a) $Prob(s_j \cup s_t) = \pi_j+\pi_t$

(b) $Prob (s_j \cap s_t) = 0$

(c) $\sum_{j=1}^{k} \pi_j$

Sea $z = (z_1,..., z_k)$ el conjunto de posibles resultados asociados a la opción s, dependiendo de los estados naturaleza que puedan acontecer. En este sentido podemos pensar que cada z_j es un elemento de R^l, de modo que $z \in R^{lk}$. Sea $\pi=(\pi_1, ..., \pi_k)$ el vector que expresa la distribución de probabilidad de los sucesos $s_1,..., s_k$. Entonces, podemos escribir los resultados asociados a la opción s como:

$$L = (z, \pi)$$

La expresión anterior nos indica que al tomar la decisión s obtendremos z_1 si ocurre e_1, lo que sucederá con probabilidad π_1 y así sucesivamente. Esta es la forma en que se debe de escribir a los elementos del conjunto de elección, ya que aunque solo ocurre uno y solamente uno de los sucesos, el agente tiene que decidir antes de saber cuál de ellos ocurrirá. Es claro que tal presentación implica necesariamente que elegir entre opciones significa ahora elegir entre conjuntos de consecuencias posibles con distintas probabilidades. Aquí ya somos capaces de definir de modo formal los objetos de elección de nuestro problema.

Sea $z \in Z$ un vector de posibles resultados condicionados a la ocurrencia de los sucesos $s_1,..,s_k$, cuya distribución de probabilidad aparece descrita por el vector $\pi \in R^n$ con $\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1$. Denominaremos lotería al par (z, π) que describe los posibles resultados derivados de elegir un vector de consecuencias z, con sus respectivas probabilidades.

Lo que hemos hecho hasta aquí es formular el problema de elección bajo incertidumbre como un problema de elección entre loterías. Ahora el espacio de loterías será designado por L, que a partir de este momento será nuestro conjunto de elección, solo resta definir adecuada y precisamente el espacio de elección con la posibilidad de resultados que contenga otras loterías, es decir la definición de una lotería compuesta.

[48] Entenderemos la notación como "El consumidor recibe el premio x con probabilidad p y premio y con probabilidad $(1-p)$".

Dadas dos loterías $M=(z, \pi)$, $N=(z', \pi)$ y un número real $\alpha \in [0, 1]$, definimos una lotería compuesta como una nueva lotería L, cuyos resultados son la lotería M con probabilidad α, y la lotería N con probabilidad $(1 - \alpha)$.

Para entender y manejar de modo conveniente las nuevas definiciones debemos explicar el operador $\otimes$ el cual nos ayudara a describir una operación de composición de loterías. Siendo esto, decimos que dados M, N y α en la definición que hemos planteado anteriormente, escribimos la lotería compuesta L como sigue:

$$L = \alpha M \otimes (1-\alpha) N$$

Es necesario entender al operador $\otimes$ de composición de loterías como el que define una operación interna sobre el conjunto L; en otras palabras, $\forall\ \alpha \in [0, 1]$, y para cualquier par de loterías $M, N \in L$, tenemos que: $\alpha M \otimes (1-\alpha) N \in L$. Podemos identificar que el operador tiene las siguiente propiedades: $\forall\ M, N, Q \in L$, y $\forall\ \alpha, \beta \in [0, 1]$:

i. $\alpha M \otimes (1-\alpha) N = (1-\alpha) N \otimes \alpha M$.

ii. $M = 1M \otimes 0N$.

iii. $\alpha M \otimes (1-\alpha) M = M$.

iv. $\alpha[\beta M \otimes (1 - \beta) \otimes N] \otimes (1-\alpha) Q = \alpha\beta M \otimes \alpha(1-\beta) N \otimes (1-\alpha) Q$.

v. $(\alpha+\beta) M \otimes (1-\alpha-\beta) N = \alpha M \otimes [\beta M \otimes (1-\alpha-\beta) N]$.

Razonemos éstas líneas. Con $\alpha M \otimes (1-\alpha) N \in L$ queremos indicar que una lotería compuesta es una lotería en sí misma. Con los asertos siguientes establecemos las propiedades operativas del operador de composición. La primera nos indica, al igual que los números reales, que el orden en que se escriba la composición de loterías no es relevante. La siguiente propiedad nos indica que una lotería M puede ser interpretada como la composición de esta lotería con probabilidad 1, y otra cualquiera con probabilidad 0. La tercera propiedad sugiere la composición de M consigo misma es M, cualesquiera que sean las probabilidades asociadas. Las últimas dos propiedades describen las leyes asociativas y distributivas de $\otimes$. Gracias a ellas podemos establecer cadenas de composiciones de loterías, lo cual facilita la representación de las mismas. Entonces la cuarta propiedad nos explica como expresar la composición de loterías simples. La quinta y última propiedad nos permite descomponer a nuestra mejor conveniencia las probabilidades que ponderan las loterías. Como podemos ver tales características nos proporciona una gran flexibilidad a la hora de describir las loterías[49].

Ahora si podemos representar el problema de elección bajo incertidumbre. Sabemos que el agente se enfrenta a una serie de opciones que generan diversos resultados en función del estado naturaleza prevaleciente. La racionalidad de la elección consistirá en elegir aquella acción que lleve aparejados los mejores resultados posibles, hasta aquí los fundamentos de la naturaleza de la elección permanecen intactos, como se puede ver. El agente tiene un orden de preferencia sobre las loterías, buscamos que tal orden de preferencias sea representable por una función de utilidad, para con ello resolverlo como la maximización de la utilidad sobre el espacio de las loterías disponibles. La diferencia que se observa con el caso con certidumbre es en el siguiente sentido. Si $L = \alpha M \otimes (1-\alpha) N$ es una lotería, pudiese aparecer que la valoración de la utilidad dependiera de M, de N, así como de las probabilidades respectivas; escribiéndolo de otro modo sería $U(L)=F[U(M), U(N), \alpha]$. Queda claro que las variables son de naturaleza diferente, α es claramente una magnitud

[49] Solo resta hacer unas consideraciones finales, teniendo como conclusión importante, cualquier lotería simple puede expresarse como una lotería compuesta y viceversa. Pero a su vez, un suceso cierto puede expresarse como una lotería, en este caso degenerada, y toda lotería puede entenderse como una composición de loterías consistentes en sucesos ciertos. Entonces, designamos C el conjunto de sucesos ciertos, tendremos $C \subset L$.

importante, a diferencia de las utilidades, las cuales son representaciones numéricas de una relación de orden.

La forma funcional que utilizaremos es la propuesta por von Neumann y Morgensten, la cual dice que la función de utilidad esperada es la siguiente:

$$U(L) = \alpha U(M) + (1-\alpha)U(N)$$

La expresión anterior dice que la utilidad de una lotería es el valor esperado de la utilidad, de otra forma sería, la combinación convexa de los resultados alternativos cuyos coeficientes de ponderación son las respectivas probabilidades.

Es pertinente plantear las propiedades de las preferencias sobre las loterías. Sea la relación $\geq$ el orden de preferencias sobre el espacio de loterías L,

- Ordenación.- La relación $\geq$ es un orden completo. Esto implica que $\geq$ es una relación binaria reflexiva, transitiva y completa.
- Continuidad.- $M, N, Q \in$ L. Los conjuntos $\{\alpha \in [1,0] / Q \geq \alpha M \otimes (1-\alpha)N$, $\{\alpha \in [1,0] / \alpha M \otimes (1-\alpha)N \geq Q\}$ son cerrados en $[1,0]$.
- Independencia.- $M, N, Q \in$ L y $\forall \alpha \in [1, 0]$. $M \sim N \Leftrightarrow \alpha M \otimes (1-\alpha)Q \sim \alpha N \otimes (1-\alpha)Q$.

Explicando lo anterior. La primer propiedad nos dice que cualquier agente es capaz de comparar cualquier par de loterías[50]. La siguiente propiedad nos señala que cambios en las probabilidades no modifican la ordenación entre cualquier par de loterías dado. Por ultimo, la independencia nos dice que si dos loterías son indiferentes entre si, también lo serán aquellas combinaciones convexas de ellas con una tercera. Si ocurre así, la ordenación de dos loterías cualesquiera no se ve alterada por la combinación de una tercera.

Las propiedades anteriores nos dan los axiomas bajo los cuales se basa la existencia de una función de utilidad esperada. Formularé una demostración de la existencia de la función de utilidad esperada, adaptada de la desarrollada por Villar[51]. Primero, para simplificar imaginaremos que el espacio de loterías contiene una lotería mejor L^+ y una lotería peor L^-, donde $\forall L \in$ L se cumple $L^+ > L > L^-$. Entonces construyamos un aserto donde se defina la cardinalidad sobre L. Basado en lo anterior tenemos:

$\exists\, L^+, L^- \in$ L $\ni \forall L \in$ L se cumple $L^+ > L > L^-$.

Ahora; si el operador de composición de loterías define operaciones internas en el espacio de loterías, y la relación de preferencias es ordenada y continua. Sean $M, N \in$ L $\ni M > N$. Definiendo $L(M, N) = \{Q \in$ L $| M \geq Q > N\}$. Decimos que $\forall Q \in L(M, N)\ \exists \alpha \in [0, 1] \ni Q \sim \alpha M \otimes (1-\alpha)N$. Además si $M > Q > N$, entonces $0 < \alpha < 1$.

Consideremos

$$T = \{\alpha \in [0, 1] \mid Q \geq \alpha M \otimes (1-\alpha)N\}$$

$$S = \{\alpha \in [0, 1] \mid \alpha M \otimes (1-\alpha)N \geq Q\}$$

Son conjuntos no vacíos, porque $0 \in T$ y $1 \in S$, y cerrados por la continuidad de las preferencias. Aunado a esto, la ordenación de las preferencias implica que $T \cup S = [0, 1]$, que es compacto y convexo, por lo que debe ocurrir que $T \cap S \neq \emptyset$. Entonces $\exists \alpha \in T \cap S \ni Q \sim \alpha M \otimes (1-\alpha)N$. Entonces obtenemos que si $M > Q \Rightarrow \alpha < 1$, y si $Q > N \Rightarrow \alpha > 0$.

Ahora construyamos otra proposición. Si se cumplen las características del operador $\otimes$, si las preferencias sobre L están ordenadas, son continuas, e independientes. Sean $M, N \in$ L $\ni$ que $M > N$.

[50] Aquí sabemos que el agente tiene definidas sus preferencias sobre el espacio de consecuencias.

[51] La cual se basa en una realizada por Hersein y Milnor

$\Rightarrow \forall\alpha\in(0, 1)$ se verifica $M>\alpha M\otimes(1-\alpha)N>N$. Para probar ésta proposición por contradicción supondremos que $M>\alpha M\otimes(1-\alpha)N>N$ con $\alpha\in(0, 1)$. Debido a que la proposición nos asegura la existencia de un $\mu\in(0, 1] \ni$

$$M\sim\mu[\alpha M\otimes(1-\alpha)N]\otimes(1-\mu)N=(\alpha\mu)M\otimes(1-\alpha\mu)N$$

Por lo que, sea ahora $T'=\{\mu\in[0, 1] \mid M\sim[\alpha\mu M\otimes(1-\alpha\mu)N]\}$ y sea μ_∞ el mínimo de este conjunto. Por definición tenemos que, $\mu_\infty<\mu$, $\forall\mu\in T'$, con $\mu_\infty>0$. Por la independencia de las preferencias aplicada a la relación $M\sim[\alpha\mu_\infty M\otimes(1-\alpha\mu_\infty)N]$ escribimos

$$\alpha M\otimes(1-\alpha)N\sim\alpha[\alpha\mu_\infty M\otimes(1-\alpha\mu_\infty)N]\otimes(1-\alpha)N$$

de lo que resulta, después de hacer operaciones, $(\alpha^2\mu_\infty)M\otimes(1-\alpha^2\mu_\infty)N\geq M>N$. Por la proposición anterior aseguramos la existencia de un $\lambda\in[0,1] \ni$

$$M\sim\lambda[\alpha^2\mu_\infty M\otimes(1-\alpha^2\mu_\infty)N\otimes(1-\lambda)N=(\lambda\alpha^2\mu_\infty)M\otimes(1-\lambda\alpha^2\mu_\infty)N$$

$\therefore \lambda\alpha^2\mu_\infty\in T'$, y sin embargo $\lambda\alpha^2\mu_\infty>\mu_\infty$, $\neg$ la definición de μ_∞.[52]

El paso siguiente es que bajo las características del operador $\otimes$, si las preferencias sobre L están ordenadas, son continuas, e independientes, sean M, $N\in$L, con $M>N$, y sean α, $\beta\in[0, 1]$, $\Rightarrow$ $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha M\otimes(1-\alpha)N>\beta M\otimes(1-\beta)N$. Es decir, buscamos monotonía.

($\Rightarrow$) El caso más simple es $\alpha=1$, $\beta=0$ que se cumple de modo trivial. Ahora, si tenemos $\alpha=1>\beta>0$, la proposición anterior nos indica que $M>\beta M\otimes(1-\beta)N$. De modo análogo si tenemos, $1<\alpha<\beta=0$, la proposición nos dice que $\alpha M\otimes(1-\alpha)N>N$. Pero imaginemos que tenemos $1>\alpha>\beta>0$, añadamos que tenemos $0<\dfrac{\beta}{\alpha}<1$ la proposición nos dice que $\alpha M\otimes(1-\alpha)N>N$, aplicando la proposición tendremos que

$$\alpha M\otimes(1-\alpha)N>\frac{\beta}{\alpha}[\alpha M\otimes(1-\alpha)]\otimes\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)N=\beta M\otimes(1-\beta)N$$

($\Leftarrow$) Si imaginamos $\alpha M\otimes(1-\alpha)N>\beta M\otimes(1-\beta)N$ debe cumplir que $\alpha\neq\beta$. Ahora bien, si $\alpha<\beta$ la implicación ($\Rightarrow$) nos dirige a una contradicción $\therefore \alpha>\beta$.

Ahora añadamos otra proposición. Bajo las características del operador $\otimes$, si las preferencias sobre L están ordenadas, son continuas, e independientes, y si $L^+>L^-$, entonces existe un único $\alpha\in[0, 1] \ni L\sim\alpha L^+\otimes(1-\alpha)L^-$. Por la primer proposición de ésta demostración aseguramos que exista un $\alpha\in[0, 1] \ni L\sim\alpha L^+\otimes(1-\alpha)L^-$ $\forall L\in$L, y la tercera proposición garantiza la unicidad de dicho α. Ahora extendamos la proposición.

Bajo las características del operador $\otimes$, y si las preferencias sobre L están ordenadas, son continuas e independientes y poseen cardinalidad. Sea U: L$\rightarrow$R dada por $U(L)=\alpha$, donde α es tal que $L\sim\alpha L+\otimes(1-\alpha)L-$ $\forall Q$, $L\in$L, la función definida cumple.

i. $Q>L \Leftrightarrow U(Q)>U(L)$

ii. $U(\alpha Q\otimes(1-\alpha)L)=\alpha U(Q)+(1-\alpha)U(L)$

Si $L^+\sim L^-$ $U(L)$ evaluada para cualquier valor constante en el intervalo [0, 1] verifica ambas propiedades. Ahora si $L^+>L^-$, la proposición de la unicidad de α garantiza que la función está bien construida, ya que α es único. Sean Q, $L\in$L. Por la definición de U y por la tercer proposición sabemos que $Q>L$ si y sólo si:

[52] Para probar la relación $\alpha M\otimes(1-\alpha)N>N$ debemos hacer lo mismo, sólo se debe asumir lo contrario y llegar nuevamente a una contradicción, dejo al lector la libertad de realizar tal prueba.

$$U(Q)L^{+}\otimes[1-U(Q)]L^{-}>U(L)L^{+}\otimes[1-U(L)]L^{-}\Leftrightarrow U(Q)>U(L)$$

Revisando el caso trivial, es decir $\alpha=0$, o $\alpha=1$ se cumple:

$$U[\alpha Q\otimes(1-\alpha)L]=\alpha U(Q)+(1-\alpha)U(L)$$

Ahora, si $0<\alpha<1$, y definiendo $Z=\alpha Q\otimes(1-\alpha)L$. Por la continuidad de las preferencias sobre L, podemos escribir

$$Z\sim\alpha(U(Q)L^{+}\otimes[1-U(Q)]L^{-})\otimes(1-\alpha)(U(L)L^{+}\otimes[1-U(L)]L^{-}$$

$$=[\alpha U(Q)+(1-\alpha)U(L)]L^{+}\otimes(\alpha[1-U(Q)]+(1-\alpha)[1-U(L)]L^{-}$$

Si consideramos ahora que $U(Z)=\lambda$, con $\lambda\in[0, 1]$ y es tal que $Z\sim\lambda L^{+}\otimes(1-\lambda)L^{-}$. Debido a que U es función tenemos $\lambda=[\alpha U(Q)+(1-\alpha)U(L)]$, de otro modo $U(Z)=\alpha U(Q)+(1-\alpha)U(L)$. Con esto podemos construir un teorema que resuma lo desarrollado hasta este punto.

TEOREMA.- Bajo las características del operador de loterías $\otimes$, y de la cardinalidad de las loterías, la ordenación, la continuidad e independencia de las preferencias sobre L se cumplen $\Leftrightarrow\exists$ una función U:L$\rightarrow$R $\ni\forall M, N\in$L, se verifica

i. $M\geq N\Leftrightarrow U(M)\geq U(N)$.

ii. $\forall\alpha\in[0, 1]$, $U(\alpha M\otimes(1-\alpha)N)=\alpha U(M)+(1-\alpha)U(N)$.

Además U es única, salvo transformaciones lineales afines.[53]

La proposición donde encontramos monotonía asegura que tal función existe y que posee las propiedades indicadas. Entonces teniendo U: L$\rightarrow$R que verifica *i*, *ii*. Por propiedades de los números reales la ordenación se deriva de i de modo trivial. Pero además, dadas cualesquiera dos loterías, $Q, L\in$L y un escalar arbitrario k perteneciente al intervalo [0, 1] los conjuntos:

$$\{\alpha\in[0, 1]\,|\,\alpha U(Q)+(1-\alpha)U(L)\geq k\}$$

$$\{\alpha\in[0, 1]\,|\,k\geq\alpha U(Q)+(1-\alpha)U(L)\}$$

son cerrados. A su vez se cumple la continuidad. Para verificar que se cumpla la independencia pensemos en dos loterías $M, N\in$L tales que $U(M)=U(N)$ y sea $\alpha\in[0, 1[$. Entonces diremos que para cualquier $L\in$L tendremos:

$$\alpha U(M)+(1-\alpha)U(M)=\alpha U(N)+(1-\alpha)U(N)$$

Verificando la continuidad. Por lo que resulta inmediato comprobar que U' es equivalente a $U\Leftrightarrow$ es una transformación lineal afín de U.

El que hayamos dedicado tanto espacio para explicar y analizar tanto las loterías como la utilidad esperada obedece a que los criterios expuestos hasta este punto nos ayudan a evaluar las decisiones sobre las alternativas que producen resultados bajo incertidumbre, es decir la actitud de los individuos frente al riesgo. Ahora hay que analizar hasta que punto los agentes están dispuestos a asumir los riesgos sobre loterías que presenten resultados monetarios. Imaginemos una lotería que estará dada por un conjunto de posibles resultados monetarios, con diferentes probabilidades. Es decir, se tomará una decisión *hoy* que nos generará un resultado monetario *mañana* dependiendo de la realización de una variable aleatoria. Escribiremos una lotería ahora con la forma $L=(m_1, \pi_1;...; m_k, \pi_k)$, donde cada m_i es un número real que representa cierta cantidad monetaria. Para aligerar la notación, cosa que estoy seguro que usted amigo lector me agradecerá, voy a denotar la utilidad por $U(m_i)$ para referirme a la utilidad del suceso cierto m_i. Entonces, la utilidad de L será:

[53] Para clarificar la idea pensemos que U' es una representación alternativa del orden de preferencias si y sólo si $U'=aU+b$, con $a, b\in$R, $a>0$.

$$U(L)=\sum_{i=1}^{k}\pi_i U(m_i)$$

Decimos que U está definida para todo $m \in R$.

Ya que tenemos entendido como está definida la función de utilidad de la lotería, es necesario definir lo siguiente. Dada una lotería $L=(m_1, \pi_1;...; m_k, \pi_k)$, el valor esperado de la lotería estará dado por:

$$L^E=\sum_{i=1}^{k}\pi_i m_i$$

En palabras sería: el valor esperado es la suma de los posibles resultados alternativos ponderados por su respectivas probabilidades. Ya realizadas las precisiones correspondientes hay que hacer una distinción fundamental. $U(L)$ representa la utilidad esperada de la lotería L, L^E representa la ganancia esperada, necesariamente medida en términos de dinero. Entonces, si ponemos atención, los consumidores cuando enfrentan una situación de incertidumbre resuelven un problema de elección sobre sus lotería monetarias. La percepción de los consumidores de una situación de incertidumbre es la de enfrentar un riesgo sobre sus ganancias monetarias. Ya con ésta idea el uso de las loterías tiene más sentido, si usted amigo lector dudo en algún momento que no lo tuviese, puede estar tranquilo en este momento. Pensemos en el siguiente problema. Un individuo ha elegido una lotería L, cuya ganancia esperada es L^E, pero se le ofrece darle una cantidad de dinero L^E con certeza. Aquí nuestro individuo tiene dos alternativas con el mismo valor esperado, la única diferencia es que una es una lotería y la otra es una cantidad segura. La decisión dependerá de cuál es la utilidad de L frente a la de L^E. Pensemos que no quiere asumir riesgos, necesariamente se optará por L^E. Si se prefiere la lotería, el individuo prefiere asumir el riesgo asociado a la lotería que obtener su valor esperado con certeza. Como podemos ver el comportamiento del individuo es muy simple. Depende de su persona, es decir de como ordene sus preferencias sobre las loterías, y necesariamente sobre los bienes, el modo en que asigne sus recursos. Por insaciabilidad, sabemos que si hay oportunidad de obtener un poco mas, se buscará obtener dicha mejora. Entonces tenemos tres comportamientos claros, averso al riesgo, amante al riesgo y neutro al riesgo. Formalizando, diremos que un individuo es averso al riesgo si para cualquier lotería L se cumple $U(L^E)>U(L)$. Caso contrario, cuando $U(L^E)>U(L)$ decimos que se es amante al riesgo. Y el caso final es cuando $U(L^E)=U(L)$ se obtiene que el individuo es neutral al riesgo.

Entonces podemos decir que la aversión al riesgo definida como $U(L^E)>U(L)$, se puede redefinir de la siguiente manera. Para cualquier lotería $L=(m_1, \pi_1;...; m_k, \pi_k)$ se cumple que

$$U(\sum_{i=1}^{k}\pi_i m_i)>\sum_{i=1}^{k}\pi_i U(m_i)$$

que es la definición de una función cóncava. Por lo que es válido decir que un individuo es averso al riesgo si presenta la función U cóncava. Análogamente, el amante al riesgo presentará una función convexa, y el neutral presentará una función lineal.

Ahora hay que definir que es un equivalente cierto. Dada una lotería L, denominaremos equivalente cierto de L a aquella cantidad de dinero c_L que proporciona la misma utilidad que la lotería L, verificando $U(c_L)=U(L)$. El equivalente cierto es simplemente aquella cantidad de dinero indiferente a la lotería L. Es evidente que dicha magnitud necesariamente variará de una lotería a otra, y de individuo a individuo. Para un individuo adverso al riesgo tenemos que $U(L^E)>U(c_L)=U(L)$. Nos referiremos como prima de riesgo de una lotería a la diferencia existente entre el valor esperado de una lotería y su equivalente cierto. De modo formal será:

$$P_R(L)=L^E-c_L$$

Debemos entender que el premio al riesgo como la máxima cantidad de dinero que un individuo estaría dispuesto a pagar para obtener L^E en lugar de la lotería L. Por lo que entenderemos que el premio al riesgo es por tanto una medida subjetiva del costo del riesgo asociado a una lotería. Nuevamente, variará de individuo a individuo. Ahora vamos a pensar en una situación para entender como reaccionan los individuos en situaciones inciertas con los elementos que hemos explicado hasta este punto.

Imaginemos a una persona aversa al riesgo enfrentando la posibilidad de pérdida de un bien de su propiedad. Representamos el problema con una lotería en la que puede ocurrir la eventual pérdida con cierta probabilidad, con la consiguiente probabilidad de que no ocurra la pérdida. Con esta información decimos que el valor del bien es de $m=0$ si ocurre la pérdida y de M si no ocurre nada. Entonces la lotería que enfrenta queda $L=[0, \alpha; M, (1-\alpha)]$. La aversión al riesgo implica que $P_R(L)>0$[54]. Ahora, una compañía de seguros ofrece un contrato de seguro por el que garantiza el valor de la propiedad, a cambio de una prima de x unidades monetarias. La decisión de aceptar o no el seguro equivale a decidir entre un valor cierto $M-x$ o la lotería L. Debido a que el individuo es averso al riesgo el individuo estará interesado en aceptar el seguro siempre $U(M-x)>U(L)$, o de modo equivalente cuando $(M-x)>c_L$. La compañía aseguradora sólo ofertará seguros si $M-x$ es menor que L^E, en palabras, si el costo de la compensación que debe pagar por la pérdida ocurriese es menor que el valor esperado de la lotería. Entonces el contrato por el seguro ocurrirá si

$$L^E>M-x>c_L$$

Hemos definido hasta aquí un comportamiento global, mejor dicho homogéneo, frente a las loterías. En otras palabras, hemos definido la aversión global al riesgo. Necesariamente al existir aversión global, debe existir aversión particular, la denominada aversión relativa. La cual considera actitud frente al riesgo relativas a loterías particulares. Ahora es necesario encontrar un modo eficaz de medir el grado de aversión al riesgo del los individuos.

Sabemos de la equivalencia entre la aversión al riesgo y el premio al riesgo positivo, pudiésemos considerar a dicha magnitud como una medida del costo del riesgo. La manera en la que percibirá el riesgo el individuo será que dadas dos loterías L, M, $P_R(L)>P_R(M)$, lo que indica que el individuo percibe mayor riesgo en la lotería L que el que percibe en la lotería M. Con esta idea sencilla iniciaremos el análisis de las medidas de aversión al riesgo.

Nuestros desarrollos hasta este momento nos muestran que el riesgo de una lotería L depende de la forma funcional de la función de utilidad, así como de la varianza de sus resultados posibles. De otro modo debemos prestar mayor atención tanto en el grado de concavidad como en la dispersión de los resultados. Para entender esto pensemos en una función U que es cóncava y dos loterías, L y M, con igual valor esperado. Para decir que alguna lotería, digamos L, es mas riesgosa que alguna otra, nuestro caso M, necesitamos analizar las varianzas. Entonces, dada una lotería L sabemos

$$U(L)=U(c_L)=\sum_{i=1}^{k}\pi_i U(m_i)$$

Por definición tenemos que $P_R(L)=L^E-c_L$, por lo que escribimos

$$U(L^E-P_R(L))=\sum_{i=1}^{k}\pi_i U(m_i)$$

Mediante series de Taylor al rededor del punto L^E vamos a relacionar el valor de $P_R(L)$ con las propiedades de U y L. Asumiendo que el premio al riesgo es una magnitud muy pequeña, la

[54] De otro modo sería $U(L^E)>U(L)=U(c_L)$, lo que simplemente dice que estará dispuesto a pagar una cantidad positiva para evitar el riesgo.

expansión de la parte de la izquierda se hará ignorando los términos de orden dos y superiores, resultando

$$U(L^E - P_R(L)) \cong U(L^E) - U'(L^E)P_R(L)$$

Ahora es turno de la parte derecha de la igualdad. Para este caso es pertinente incluir en segundo término de la expansión debido a que los valores de mi pueden diferir de L^E. Conociendo $U(m_i)=U(L^E+(m_i-L^E))$, para cada uno de los sumandos $U(m_i)$ obtendremos

$$U(m_i) \cong U(L^E) + U'(L^E)(m_i - L^E) + \frac{1}{2}U''(L^E)(m_i - L^E)^2$$

∴ sabiendo que

$$\sum_{i=1}^{k} \pi U(L^E) = U(L^E),$$

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i U'(L^E) = U'(L^E),$$

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i U''(L^E) = U''(L^E)$$

podemos escribir la parte derecha de la expansión del siguiente modo

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i U(m_i) \cong U(L^E) + U'(L^E)\sum_{i=1}^{k} \pi_i (m_i - L^E) + \frac{1}{2}U''(L^E)\sum_{i=1}^{k} \pi_i (m_i - L^E)^2$$

Ahora se observa que

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i (m_i - L^E) = 0, \text{ y que}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i (m_i - L^E)^2 = var(L)$$

por lo que tendremos ahora

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i U(m_i) \cong U(L^E) + \frac{1}{2}U''(L^E)\,var(L)$$

Entonces con la primer expansión y el último resultado escribimos

$$P_R = \frac{U''(L^E)}{2U'(L^E)}var(L)$$

La expresión nos dice que el premio al riesgo de una lotería es proporcional a la varianza de L, donde el grado de proporcionalidad es determinado por una medida de la curvatura de U. El grado de proporcionalidad es lo que se ha denominado como coeficiente absoluto de aversión al riesgo o índice Arrow-Pratt. De modo formal tenemos: Dada una lotería L denominamos coeficiente absoluto de aversión al riesgo(índice Arrow-Pratt) al valor

$$\rho(L) = \frac{U''(L^E)}{U'(L^E)}$$

Hay varios puntos que resaltar de $\rho(L)$.Primero es una medida de la curvatura de la función U en el valor medio L^E, que está normalizada[55] por la utilidad marginal del ingreso en L^E. Además, debido a que U es creciente y cóncava, ρ tiene valores positivos.

Con esto confirmamos que $P_R(L)$ es una medida del costo del riesgo bastante aceptable, ya que tomamos al premio al riesgo como una medida absoluta del riesgo relacionada con el grado de concavidad de U, medida por el coeficiente ρ, y la dispersión de los resultados posibles, medida por la varianza de L. Para resumir esto pensemos en dos loterías L, M con igual valor esperado (L^E=M^E), el individuo averso al riesgo percibe como de mayor riesgo a aquella lotería que presente mayor varianza. Este análisis tiene la bondad de extenderse para comparar la actitud frente al riesgo de dos individuos distintos. Imaginemos una lotería L con $\rho_A(L)$, $\rho_B(L)$ los índices Arrow-Pratt de los individuos A y B. Por nuestros desarrollos inferimos que $\rho_A(L)>\rho_B(L)$ $\Leftrightarrow P_R^A(L) > P_R^B(L)$, y por tanto que el individuo A es más averso al riesgo en la lotería L que el individuo B. Debido a que el coeficiente absoluto de aversión al riesgo mide la curvatura de U, entonces decimos que la función del individuo A es más cóncava que la del individuo B. Si esto se presenta para toda lotería podemos decir sin temor a equivocarnos que el individuo A es más averso al riesgo que el individuo B. Para conseguir una medida relativa del costo del riesgo dividiremos $P_R(L)$ por L^E. De este modo definimos el premio de riesgo relativo, $P_R(L)/L^E$, como el premio de riesgo por unidad de ingreso esperado utilizando los desarrollos tenemos

$$\frac{P_R(L)}{L^E} \cong \frac{1}{2L^E}\rho(L)\,var(L)$$

Si hacemos $\rho_r(L)=L^E\rho(L)$, donde ρ_r se conoce como el coeficiente relativo de aversión al riesgo, ahora escribiremos

$$\frac{P_R(L)}{L^E} \cong \frac{1}{2(L^E)^2}\rho_r(L)\,var(L)$$

El coeficiente relativo de aversión al riesgo mide el costo del riesgo como una elasticidad, como la elasticidad de la utilidad marginal del ingreso con respecto al ingreso esperado, por lo que podemos escribir

$$\rho_r(L) = -\frac{U''(L^E)}{U'(L^E)}L^E = \frac{\partial U'(L^E)}{\partial L^E}\frac{L^E}{U'(L^E)}$$

Para comprender las diferencias entre los coeficientes absoluto y relativo de aversión al riesgo les propongo el siguiente ejercicio mental. Un individuo cuya utilidad presente un grado de aversión absoluta al riesgo constante, digamos que $\rho(L)=k\ \forall L$, ordenará las loterías de la misma forma, independiente de su riqueza. Por el otro lado, un individuo con aversión al riesgo relativa al riesgo constante, digamos $\rho_r(L)=k\ \forall L$, presentará menor aversión al riesgo cuanto más rico sea.

Entendido como nuestro individuo enfrenta las situaciones bajo incertidumbre regresaremos a estudiar como se genera la elección intertemporal. Ahora los objetos de elección son sendas de consumo, en lugar de canastas de consumo, que satisfacen las condiciones que hemos venido desarrollando. Nuestro individuo presenta preferencias y gustos sobre las sendas de consumo, dado que cumplen las condiciones de regularidad las preferencias diremos que existe una función de utilidad que representa tales preferencias. Lo que nos indica que para la maximización de la utilidad esperada necesitamos una función de utilidad que represente nuestro problema. Algunos autores plantean una función de utilidad aditiva en el tiempo, con lo que tendríamos

[55] Villar plantea una idea interesante, la normalización es necesaria para que ρ sea un autentico coeficiente, alegando que el valor U'' no es independiente de las unidades de medida de U. La idea es interesante ya que plantea la relación entre la función y sus tasas de cambio.

$$U(c_1,....,c_T)=\sum_{t=1}^{T}u_t(c_t)$$

donde $u_t(c_t)$ es la utilidad de consumo en el periodo t, Esta función la podemos escribir en su forma de tiempo estacionario.

$$U(c_1,....,c_T)=\sum_{t=1}^{T}\alpha^t u_t(c_t)$$

Aquí utilizamos la misma función de utilidad en cada periodo, pero la utilidad del periodo t está multiplicada por un factor de descuento α^t.

La toma de decisiones en la familia entre consumo y ahorro se establece según su restricción presupuestal presente y aquella que es esperada. Primero tratemos el caso de dos periodos. El consumo en ambos será representado por (c_0, c_1). El consumidor tiene una dotación inicial w_0 en el periodo 0, y puede invertir su riqueza en dos activos, un activo paga un retorno cierto R_0; el otro activo paga un retorno aleatorio $\tilde{R}_1$. Imaginemos ahora que el consumidor decide consumir c_0 en el primer periodo e invertir una fracción x de su dotación en el activo riesgoso y una fracción $(1\text{-}x)$ en el activo seguro. En este portafolio el consumidor tendría $(w_0\text{-}c_0)x_0$ unidades monetarias ganadas con un retorno $\tilde{R}_1$ y $(w_0\text{-}c_0)(1\text{-}x_0)$ unidades monetarias ganadas al retorno R_0. Luego entonces, su riqueza para el segundo periodo es

$$\tilde{w}_1=\tilde{c}_1=(w_0-c_0)\left[\tilde{R}_1 x+R_0(1-x)\right]=(w_0-c_0)\tilde{R}$$

El retorno del portafolio del consumidor es $\tilde{R}=\tilde{R}_1 x+R_0(1-x)$ y se aprecia claramente que es una variable aleatoria. Entonces, si el retorno del portafolio es incierto, lo será a su vez el consumo en el siguiente periodo. Si el consumidor tiene una función de utilidad

$$U(c_0,\tilde{c}_1)=u(c_0)+\delta Eu(\tilde{c}_1)$$

donde $\delta<1$ es un factor de descuento.

Ahora, sea $V_0(w_0)$ la máxima utilidad que el consumo puede alcanzar si se tiene la riqueza w en el periodo 0.

$$V_0(w_0)=\max_{c_0,x}u(c_0)+\delta Eu[(w_0-c_o)\tilde{R}]$$

Si somos observadores la función $V_0(w_0)$ es una utilidad indirecta, puesto que expresa la utilidad maximizada como una función de la riqueza. Derivando con respecto a c_0 y x, tenemos las condiciones de primer orden

$$u'(c_0)=\delta Eu'(\tilde{c}_1)\tilde{R}$$

$$Eu'(\tilde{c}_1)(\tilde{R}_1-R_0)=0$$

La primer condición nos dice que la utilidad marginal en el periodo 0 debe igualar al consumo en el periodo 1. La siguiente dice que la utilidad marginal de mover un pequeño monto de dinero del activo seguro al riesgoso debe ser cero. Es decir, la primer condición es una condición de optimización intertemporal y la otra es una condición de optimización del portafolio. Dadas estas dos ecuaciones en c_0 y x desconocidas, en principio podemos resolver para el consumo óptimo y la elección del portafolio.

Imaginemos que existen ahora T periodos. Si $(\tilde{c}_0,...,\tilde{c}_T)$ es alguna trayectoria de consumos. Digamos que el consumidor evalúa mediante

$$U(\tilde{c}_0,\ldots,\tilde{c}_T)=\sum_{t=0}^{T}\delta^t Eu(\tilde{c}_t)$$

Si el consumidor tiene la riqueza w_t en el tiempo t e invierte una fracción x_t en el activo riesgoso, su riqueza en el período t+1 estará dada por

$$\tilde{w}_{t+1}=[w_t-c_t]\tilde{R}$$

donde $\tilde{R}=x_t\tilde{R}_1+(1-x_t)R_0$ es el retorno del portafolio entre el periodo t y t+1. Consideremos ahora el periodo T-1; si el consumidor tiene la riqueza w_{T-1} en este punto, la utilidad máxima alcanzable es

$$V_{T-1}(w_{T-1})=\max_{c_{T-1},x_{T-1}} u(c_{T-1})+\delta Eu[(w_{T-1}-c_{T-1})\tilde{R}]$$

Las condiciones de primer orden son

$$u'(c_{T-1})=\delta Eu'(\tilde{c}_T)\tilde{R}$$

$$Eu'(\tilde{c}_T)(\tilde{R}_1-R_0)=0$$

Ya sabemos como se resuelve este problema y en principio, determinar la función indirecta de utilidad $V_{T-1}(w_{T-1})$. Regresando al periodo T-2; si el consumidor elige (c_{T-2}, x_{T-2}), entonces en el periodo T-1 se tendrá la riqueza

$$\tilde{w}_{T-1}=[w_{T-2}-c_{T-2}]\tilde{R}$$

De esta riqueza se alcanzará una utilidad esperada de $V_{T-1}(w_{T-1})$. Por lo que, el problema de maximización en el periodo T-2 puede expresarse por

$$V_{T-2}(w_{T-2})=\max_{c_{T-2},x_{T-2}} u(c_{T-2})+\delta EV_{T-1}[(w_{T-2}-c_{T-2})\tilde{R}]$$

Esto es igual que el problema para T-1, pero con una sutil diferencia, la utilidad del segundo periodo está dada por la función de utilidad indirecta $V_{T-1}(w_{T-1})$ más que por la función de utilidad directa. Por lo que las condiciones de primer orden para el periodo T-2 son

$$u'(c_{T-2})=\delta EV'(\tilde{c}_{T-1})\tilde{R}$$

$$EV'(\tilde{w}_{T-1})(\tilde{R}_1-R_0)=0$$

Aquí se ve nuevamente que la utilidad marginal del consumo corriente debe igualar a la utilidad indirecta descontada de la riqueza futura y la segunda es la condición de optimización del portafolio. Usamos éstas condiciones para resolver $V_{T-2}(w_{T-2})$ y así en adelante. Dada la utilidad indirecta el problema de optimización se resuelve como una secuencia de problemas de dos periodos.

Conclusiones

La elección no fue descubierta sino hasta hace poco. Durante la existencia de la humanidad ha sido evidente, pero no estudiada. La descubrimos en un instante entre Adam Smith y nosotros. Pudiésemos darnos cuenta de muy mala gana que vivimos eligiendo, que todo radica en la naturaleza de nuestras elecciones, y que compartimos dicha actividad con millones de congéneres. Mediante la economía nos hemos asomado valientemente a explicar la conducta del consumidor, y no se a usted estimado amigo, pero a mi me ha gustado. Como si resonase nuestra naturaleza con cada desarrollo entendido. Nuestro presente ha sido forjado por las elecciones que hemos tomado; y el futuro lo estamos creando con las elecciones que hacemos en éste instante. El entender los motivos de la elección, sus implicaciones sobre la actividad económica es un viaje de autodescubrimiento.

La naturaleza del ahorro radica en la elección. Se elige ahorrar para afrontar contingencias, mejorar las condiciones de vida. En síntesis, podemos mencionar que cuando los individuos deciden ahorrar, se enfrentan a una disyuntiva entre consumo actual y consumo futuro. La cantidad de consumo adicional que puede conseguir en el futuro reduciendo el consumo actual depende de las expectativas del ingreso y de sus retornos. Esto es, el ahorro a lo largo de la vida es lo que ahorran las familias en el presente, para poder consumir más en el futuro, cuando sus miembros se retiren. Ahorramos para dejar una herencia a los nuestros. Se ahorra como precaución ante una enfermedad o un accidente imprevisto; decidimos ahorrar para afrontar las fluctuaciones anuales de los ingresos; y para alcanzar un objetivo determinado, algo como el pagar la educación de los hijos, un viaje. En conjunto todo esto radica en la génesis de ahorro, si se ha percatado amigo lector, todo radica en la elección de cómo consumir para buscar la máxima satisfacción. El descubrir porqué se ahorra implica descubrir la naturaleza de la elección. Así que la naturaleza del ahorro radica en la lección individual, tomando en cuenta las expectativas del entorno y nuestro grado de información.

SOBRE LAS CAUSAS DEL AHORRO

Decir que cada especie de cosas está dotada de una cualidad específica oculta por la cual actúa y produce efectos manifiestos, equivale a no decir nada; pero derivar de los fenómenos dos o tres principios generales de movimiento, y acto seguido explicar de que modo se deducen de estos principios manifiestos las propiedades y las acciones de todas las cosas corpóreas, sería dar un gran paso.
SIR ISAAC NEWTON, ÓPTICA

Las decisiones de los agentes estudiadas en el capítulo anterior tienen una repercusión fundamental en el movimiento general de la economía. El mercado donde se generan tales decisiones es el mercado financiero. Presenta oferta, los ahorros de aquellos agentes que no tienen proyectos de inversión. Existe demanda, la cual es la demanda de dinero por aquellos que tienen proyectos de inversión, pero carecen de dinero. Tenemos un intermediario, cuya función es buscar la coincidencia de los agentes y, coadyuva a asignar el dinero de los agentes. El último elemento para la formación del mercado es el precio, en este caso es el tipo de interés.

Aquí la pregunta sería ¿cómo debemos entender al tipo de interés? La respuesta es extensa y presenta varios enfoques. La más simple sería entenderlo como el pago por el uso del dinero de otra persona. Tal definición es cierta, aunque algo ambigua; aún no se aprecia la función de precio del interés. Otro enfoque considera al interés como la recompensa del ahorro. Es decir, el pago que se ofrece para fomentar a la gente a que ahorre, permitiendo que otras personas accedan a este ahorro. Pero no siempre fue así, esto ocurre cuando aparece la sociedad de mercado. Analicemos en esa dirección, haciendo un poco de historia[56]. Durante la época del oscurantismo, el pago y cobro de intereses se analizaba siguiendo criterios morales, puesto que la usura se consideraba pecado. La posición de la Iglesia, definida por Tomás Aquino, no consideraba pecado el pago de intereses por préstamos que se utilizaran en negocios, puesto que el dinero se empleaba para crear nueva riqueza, pero sí se consideraba pecaminoso el pago o cobro de intereses por préstamos utilizados para comprar bienes de consumo[57]. Esa concepción cambio con la aparición de las ideas protestantes, tal como lo señala Max Weber. Éstas ideas fueron el Calvinismo y Luteranismo. Con ellas la frugalidad toma un papel importante en la vida diaria del individuo y de la nación en su conjunto.

Ahora se puede aseverar que a pesar de todas sus excomuniones contra el lucro y la usura, la misma Iglesia, con el paso del tiempo llegó a ocupar una posición preponderante en la vida económica. Mediante diezmos y beneficios se transformó en la recaudadora y distribuidora de dinero más importante en toda Europa. En una época donde no se tenían bancos era la depositaria de gran parte de la riqueza. Basta recordar a los Caballeros Templarios, una orden laica, quienes eran inmensamente ricos, además de servir como instituciones bancarias prestando dinero bajo condiciones muy exigentes. Fíjese usted estimado lector, que no obstante el préstamo fue desacreditado se emprendió a pesar de las profundas convicciones de la Iglesia y no por causa de

[56] No pretendo disertar sobre historia, simplemente quiero plantear hechos que apoyan mi argumento.
[57] Aunque esta posición hoy día es diferente, suena rara la postura cristiana al respecto. Debemos recordar que la Iglesia, en los días de Aquino era el eje rector de la vida, pero no se ocupaba tanto de los créditos y débitos de alguna operación de negocios, como de los créditos y débitos de las almas de los negociantes. Para profundizar en esto hay que citar necesariamente a R. H. Tawney, donde menciona en su texto *Religion and the rise of capitalism*. *"los intereses económicos están subordinados a verdadero negocio de la vida que es la salvación y que la conducta económica es un aspecto de la conducta personal, por lo que está sujeta, como todos los demás aspectos, a las normas de la moralidad"*. Esto refleja un descontento hacia las prácticas de la sociedad económica, el cual podemos ver resumido con la siguiente sentencia: *Homo mercator vix aut numquam Deo placere potest*, que significa *nunca puede el mercader ser grato a los ojos de Dios*.

él. Estamos de acuerdo que detrás de la desaprobación eclesiástica de la búsqueda de la riqueza, había una profunda convicción teológica basada en la creencia de la efímera naturaleza de ésta vida terrenal y la importancia de prepararse para la Eternidad. Por lo que se restaba importancia a la vida mundana y secular, denigrando sus actividades dado que ante ellas se sucumbía fácilmente.

Con el cambio de ambiente religioso se presenta una situación nueva para los individuos. Los calvinistas incitaban a llevar una vida de rectitud, severidad y laboriosidad. Con los calvinistas se desarrollo la idea del hombre dedicado al trabajo. Entonces, ahora el celoso desempeño de un oficio se convirtió es evidencia de dedicación a la vida religiosa. Por lo que el mercader activo pasó de ser un hombre impío a ser un hombre piadoso. A partir de ésta identificación de trabajo y valor, pasó poco tiempo antes que se desarrollara la idea de que el hombre más próspero era el más valioso. Por lo que el calvinismo generó una atmósfera religiosa que estimuló la búsqueda de la riqueza y el ambiente de un mundo de negocios.

Podemos afirmar que el calvinismo promovió la frugalidad. Este paso hizo que el ahorro, entendido como el hecho de abstenerse conscientemente del disfrute del ingreso, fuese considerado como una virtud. Hizo que el ahorro empleado en propósitos productivos se volviese un instrumento de piedad, así mismo de provecho. De hecho condonó el pago de intereses. Dejo a los historiadores el análisis del grado de influencia de la ética protestante por haber promovido una nueva filosofía mundana, una que se basa en la búsqueda de la ganancia. Desde mi personal punto de vista este nuevo aspecto religioso jugó un papel favorable en la evolución de la sociedad de mercado.

EL INTERÉS COMO PRECIO: UNA REFLEXIÓN

Cuando hablamos, escuchamos y pensamos en tasa de interés la noción que tenemos es entenderla como el precio que se paga por el dinero que prestamos o el que nos prestan. Si quisiésemos ser más formales definiríamos al interés como el precio que se paga por el uso de fondos prestables. Algunos dirían, que existen varios tipos de interés, dependiendo de la duración y los riesgos de los préstamos. Los más doctos en el tema dirán que la principal función del tipo de interés es la igualación de la oferta de fondos prestables con su demanda, así como racionar la oferta entre los demandantes que pueden y están dispuestos a asumir el precio. Cerrando su luminoso discurso con la referencia de que los cambios en la oferta y la demanda de fondos prestables originarán cambios en la tasa de interés. Agotador ¿no es cierto? Estas líneas son, palabras mas palabras menos, lo que podemos encontrar cuando buscamos en los libros de texto y alguno que otro diccionario de economía sobre la tasa de interés. Revisando más cuidadosamente la literatura, encontraremos enfoques como el de Miguel Angel Marí[58] , quién define al interés "*como la diferencia entre la suma de dinero prestado o un crédito otorgado y la suma que debe devolverse en determinado plazo*". Se nota muy contable su enfoque. Demasiado escueto para mi gusto, realmente poco satisfactorio en términos generales, pero no por ello la definición es falsa, simple sería la palabra. Por otro lado, podemos encontrar la propuesta de Franco Modigliani[59] donde se define a la tasa de interés como "*aquel precio pagado por un 'prestatario' a un 'prestamista' por el uso de recursos durante algún tiempo. La cantidad del préstamo es el principal, y el precio pagado es un porcentaje del principal por unidad de tiempo (por lo general un año), pero pueden tomarse sub-períodos de un día, una semana, un mes, etc*". Definitivamente mejora la definición, se siente más económica. Está mejor estructurada, pero para mi punto de vista sigue faltándole algo. Pero estimado lector, la ciencia no se trata de lo que le guste a usted o a mi, sino de encontrar la naturaleza y causas de los fenómenos, así que trabajaremos en esa dirección. Si somos cuidadosos se puede ver claramente que se estudia al interés como un precio aislado. Como si fuese un precio distinto, fuera de todos los demás. No es así. Le explicaré porque.

---

[58] Mari, Miguel Angel, Principios de Economía, 3ª Edición, Argentina , Ed. Macchi, 1992, p. 161.

[59] Modigliani, Franco, et. al., Mercados e Instituciones Financieras, 1ª Edición, México, Ed. Prentice Hall Hispanoamericana, 1996, p. 217.

Comencemos con conceptos que hemos aprendido. Los economistas que se especializaron en macroeconomía nos han dicho que hay razones[60] por las cuales, aunque los precios fueran perfectamente estables, un individuo no aceptaría prestar dinero si no esperase recibir un interés:

- Por desprenderse de recursos ahora, el individuo debe posponer un consumo que pudo haber realizado inmediatamente. Si se prefiere el consumo inmediato, sólo se aceptará posponerlo si recibe por su postergación una cantidad mayor que la entregada al inicio.
- Si se tienen posibilidades de colocación a cierta tasa de interés *i*, cualesquiera que fueren, como inversiones financieras o una inversión en la producción de bienes, se exigirá que se le pague, por todo préstamo, al menos su costo de oportunidad.
- Todo préstamo implica riesgo de no pago. Dicho riesgo sólo es aceptable cuando existe la posibilidad de una ganancia suficiente.

Dentro de estas ideas hay elementos valiosos. Resumiendo tenemos, de sacrificio de liquidez, búsqueda del mejor resultado y finalmente la incertidumbre y el riesgo. La idea es que, al igual que en otros mercados, la tasa de interés sea considerada como un precio más. Sabemos que está determinada por la ley de la oferta y la demanda. De igual modo entendemos que normalmente la tasa de equilibrio es positiva. Si fuera cero o negativa, los posibles prestatarios demandarían una cantidad de fondos superior a la que los posibles ahorradores estarían dispuestos a ofrecer. Si fuera negativa la gente podría pedir un préstamo para consumir hoy y devolver una cantidad menor en el futuro y los ahorradores recibirían una cantidad menor que la ahorrada. Esto último carece de sentido alguno.

Pero ¿con qué elementos se forma este precio?. Primero revisemos lo que ocurre en la práctica. Los elementos que contribuyen a formar el precio de un préstamo[61], son:

Como elemento principal está su costo operativo, que son los gastos generales de la entidad prestamista. A este costo se adiciona un margen bruto de beneficio (o prima) justificado por:

- El servicio prestado al beneficiario del préstamo.
- La liquidez perdida al desprenderse del dinero prestado, evaluada por el monto del préstamo y por el plazo.
- El riesgo que se corre ante la posible insolvencia o morosidad del deudor
- La eventual desvalorización monetaria

Todos estos elementos gravitan en el nivel, variedad y evolución de las tasas de interés y son también aplicables a los intereses por depósitos; los depositantes son prestamistas de las entidades financieras y al entregar sus ahorros pierden liquidez, corren algún riesgo y buscan cubrirse contra la pérdida de valor de la moneda. En este punto se aprecia la vinculación entre el sacrificio de liquidez, la mejor elección e incertidumbre. Permítame explicarlo de otro modo, la tasa de interés es sin lugar a dudas el reflejo de estás condiciones. Mire usted, el prestamista busca sacrificar su liquidez sólo si tiene la expectativa de aumentar su liquidez en el futuro. El prestatario busca obtener liquidez mediante el pago de la liquidez que adquiere, sabiendo que debe, en el futuro, reponer la liquidez que obtuvo mas un porcentaje por haber adquirido dicha liquidez. Ambos toman la mejor decisión.

Hasta este momento aún no se ve de modo claro la relación de las preferencias del consumidor frente a la tasa de interés. El enfoque que le propongo tomar en cuenta es mucho más

---

[60] Aftalion, Florin y P. Poncet, Las Tasas de Interés, 1ª Edición, México, Ed. Fondo de Cultura Económica, Breviario No. 413, 1985, p. 14

[61] Rodriguez, Alfredo C., Técnica y Organización Bancarias, 1ª Edición, Ed. Macchi, Argentina, 1993, p. 88.

explicativo que aquel empleado por los macroeconomistas. La idea que he venido exponiendo tiene preferencias, dotaciones y mercados, es decir un modelo de las características Arrow-Debreu. Esto necesariamente nos conduce a que es posible mostrar la existencia de vaciado de mercado y un único vector de precios. En los mercados intertemporales la manera de medir los precios futuros es la tasa de interés. Entonces la tasa de interés es uno de los precios que enfrenta el consumidor. Como ya hemos visto en el capítulo anterior, el consumidor realiza su elección óptima y ello nos conduce al equilibrio walrasiano. La existencia del equilibrio, dadas sus características, ayuda a representar las demandas en términos de precios relativos, entonces se puede representar a los precios relativos como:

$$p_i = \frac{\hat{p}_i}{\sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j}$$

Teniendo como resultado lógico que los precios normalizados sumen 1. Permitiéndonos concentrarnos en los precios pertenecientes al símplex unitario. Quisiera profundizar un poco en el símplex unitario [62]. Por teorema sabemos que todo conjunto convexo en R^n contiene cono subconjunto a un símplex de su misma dimensión. Entonces definamos los siguiente:

Sean $\delta^1, \delta^2, \ldots, \delta^n$ los vectores de la base canónica de R^n:

$\delta_i^j = \delta_{ij}$, la delta de Kronecker (=1 si i=j, =0 en caso contrario).

La cápsula convexa de $\delta^1, \delta^2, \ldots, \delta^n$ se llama el símplex unitario, o estándar, en R^n y se denota por Δ^{n-1}. La dimensión de Δ^{n-1} es n-1. Teniendo el siguiente teorema:

TEOREMA.- Δ^{n-1} es el conjunto $\left\{p \in R_+^n \middle| \sum_{i=1}^n p_i = 1\right\}$.

Sean F un conjunto finito, $F=\{p^1, \ldots, p^F\}$, $p^j \in R^n$ y P = conv F. Amigo lector, puede usted advertir de inmediato que si $p \in$conv F, entonces conv F= conv $(F \cup \{p\})$, de modo que, en la expresión de P como cápsula convexa de un conjunto finito, éste no es único. Se dirá que el conjunto finito F genera al politopo P si F= conv F. Un conjunto F, generador de P, es mínimo si $p \in F \Rightarrow p \notin$ conv $(P \setminus \{p\})$.

Ya que hemos planteado la existencia de un símplex unitario, y con ello la normalización de precios profundizaremos en esa dirección. Pensemos en un problema donde podemos dividir el tiempo, digamos en días, y sólo analizaremos alguno de tales días. Al principio del día en cuestión los individuos se encuentran en posesión de su conjunto de bienes y su dotación. Ellos pueden ingresar al mercado de bienes a intercambiar con otros individuos para lograr maximizar su utilidad. El mercado opera de tal forma que si no se acuerda o se logra consenso sobre un conjunto de precios relativos que equilibre el mercado no habrá intercambio. Debemos entender al conjunto de equilibrio de precios relativos como aquel al que los individuos estén dispuestos a negociar de modo que el total de los intercambios no genere exceso de demanda u oferta para algún bien.

---

[62] Para ello requerimos algunas definiciones de poliedros convexos. Primero, un poliedro convexo se define como la intersección de un número finito de semiespacios. Sea $P = \bigcap_{i \in I} H_i^{\leq}$, donde $H_i^{\leq} = \left\{x \in R^n \middle| p^{i\prime} x \leq \alpha_i\right\}$, I es un conjunto finito de índices. Entonces, si **B** es la matriz de renglones $p^{i\prime}$, α el vector de elementos α_i, se tiene que $P = \left\{x \in R^n \middle| \mathbf{B}x \leq \alpha\right\}$, Es decir el conjunto de soluciones al sistema de desigualdades $\mathbf{B}x \leq \alpha$, B una matriz de orden $\#(I) \times n$, donde $\#(I)$ es el número de elementos (cardinalidad) de I.
Un politopo en R^n es la cápsula convexa de un conjunto finito de puntos.
Un simplex en R^n es la cápsula convexa de un conjunto afinmente independiente.

El proceso por el cual se logra ese conjunto de precios relativos de equilibrio es el *tanteo*[63]. La idea es sencilla, es como si el mercado estuviera supervisado por un subastador encargado de presentar un conjunto de precios relativos para todos los bienes, y como en cualquier subasta, los individuos indican la cantidad de cada bien que desean comprar y vender a los distintos precios relativos. Ahora le propongo que revisemos la oferta y la demanda excedentes. Para un individuo, la demanda excedente de un bien x será la diferencia entre su demanda planeada y la oferta del bien que ya posee:

$$x^{XD}=x^{D}-x^{S}$$

Si la demanda planeada x^D es menor que la oferta que posee x^S la demanda excedente x^{XD} será negativa y se dice que tiene una oferta excedente. Por lo que se define que la oferta excedente como el exceso de demanda cuando es negativa. Para simplificar, si el individuo tiene demanda excedente comprará; si tiene una oferta excedente venderá. Ahora pasemos a los agregados. El exceso de demanda agregado o de oferta se obtiene sumando las demandas y ofertas excedentes de todos los individuos por lo que tendremos

$$\sum_{i=1}^{n} x^{XD} = \sum_{i=1}^{n} x^{D} - \sum_{i=1}^{n} x^{S}$$

De aquí se infiere que si la dotación total del bien x para la sociedad al principio del día es menor que la cantidad total que los individuos quieren consumir, al conjunto de precios relativos, habrá una demanda excedente agregada del bien x a ese conjunto de precios. Recordando la Ley de Walras, la suma de demandas y ofertas excedentes en todos lo mercados debe ser idéntica a cero. De modo más simple, si un conjunto particular de precios relativos hay una demanda excedente agregada para algún mercado, deberá haber una oferta excedente por lo menos en otro mercado, en una magnitud tal que la suma de las ofertas excedentes iguale a la suma de demandas excedentes.

Empleando precios monetarios para valuar las demandas y ofertas excedentes y si tenemos $(n+1)$ mercados podemos expresar la Ley de Walras como

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i^{XD} \equiv 0$$

Entonces si la suma de demandas excedentes es n mercados (mercados de bienes) es positiva, habrá una oferta excedente en el mercado $(n+1)$ (el mercado de dinero) de valor igual a la suma de las demandas excedentes de los primeros n mercados:

$$p_{n+1} x_{n+1}^{XD} = (-1)\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{XD}$$

dado que el precio del dinero p_{n+1} es la unidad, tenemos

$$x_{n+1}^{XD} = (-1)\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{XD}$$

si el mercado número $(n+1)$ es el monetario. Por lo que la demanda excedente de dinero es igual a la suma de las ofertas excedentes nominales de los n mercados. Estimado lector, usted se puede percatar que, como se ha presentado en el capítulo anterior se aprecia claramente la conexión entre mercados de bienes y de dinero. Recuérdese que las transacciones de los individuos

[63] Originalmente es tâtonnement, algunos le dicen sondeo, pero a mi manera de ver la idea de tanteo es más precisa.

están sujetas a su restricción presupuestal[64]. Imaginemos que un individuo entra en el mercado con una dotación de n bienes y dinero. En términos nominales

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^S + x_{(n+1)}^S$$

donde $x_{(n+1)}^S$ es el acervo de saldos monetarios nominales con el que el individuo entra al mercado.

Entonces, si los individuos no pueden llevar bienes al siguiente periodo; de otro modo, puede consumir cada uno de ellos menos y tener más dinero al final del día, o viceversa, pero el valor total ambos debe ser igual al valor de la dotación inicial. Por la racionalidad de los individuos, saben que no pueden violentar la igualdad entre las dotaciones iniciales y el consumo de bienes y la tenencia de saldos monetarios. Esto nos conduce a que se asegura la demanda de bienes y dinero no excede la dotación inicial.

La tasa de interés es un elemento fundamental para el movimiento de la economía, ya que relaciona al mercado financiero con el mercado real. Por desgracia, no siempre se entiende así. Mire usted caro amigo, no es nuevo que se hayan presentado algunas interpretaciones erróneas sobre el porqué de la tasa de interés. Muchas veces, derivado de las fórmulas y ejercicios de valor presente y futuro, pudiese parecer que alguna suma de dinero dada tiene valores diferentes en diferentes momentos porque existe una tasa de interés. No, es así; si se entendiese de ese modo equivale a confundir la gimnasia con la magnesia. Déjeme afirmarle de modo categórico que la causa es la contraria. Una de las razones principales para que exista tasa de interés es que los bienes, dinero y satisfactores disponibles en distintos momentos no tienen el mismo valor ahora. Entonces, se necesita un precio que nos ayude a evaluar los bienes y el dinero en distintos momentos. La tasa de interés es ese precio. Es el precio que ayuda a asignar tanto bienes como dinero, tomando en cuenta las preferencias, riqueza y tiempo. Ésta reflexión nos conduce al concepto de preferencia temporal. Para entender éste concepto del modo más claro es menester citar a Ludwig von Mises *"el tiempo para el hombre no es una sustancia homogénea de la cual sólo importa la duración. No es un mas o un menos en dimensión. Es un flujo irreversible, cuyas fracciones aparecen en diferente perspectiva de a cuerdo a si se encuentran próximas o lejanas al instante de valuación y decisión. La satisfacción de un deseo en el futuro cercano es, otras cosas igual, preferido que en el futuro distante. Los bienes presentes son más preferidos que los bienes futuros"*. Para Irving Fisher la preferencia temporal es *impaciencia*, y la expresa como el porcentaje excedente de deseo marginal presente por una unidad adicional de bienes presentes sobre el deseo marginal presente por una unidad adicional de bienes futuros. Fisher dice que somos impacientes, y tiene razón en buena medida. Entonces la pregunta es ¿de qué depende nuestra impaciencia? La respuesta es simple, de las magnitudes del ingreso presente y futuro. Para clarificar ésta idea le propongo el siguiente ejercicio. Vamos a emplear la tasa marginal de sustitución, así de sencillo. Si UM_p es la utilidad marginal de ingreso presente y UM_f la utilidad marginal de ingreso futuro, entonces

$$TMS = -\left(\frac{UM_p}{UM_f}\right)$$

La relación marginal de sustitución variará sistemáticamente como varíen el ingreso presente y el futuro. Ésta noción refuerza el concepto de que debido a que los bienes y el dinero tienen valores distintos en momentos distintos, necesitamos forzosamente de un precio, de la tasa de interés, para vaciar los mercados. Entonces el interés nos ayuda a asignar de modo eficiente, tanto los bienes como dinero, en algún momento específico. Debido a que los valores de los bienes y el dinero disponibles en distintos momentos son distintos a los valores ahora y, desconocemos cómo

[64] La restricción presupuestal indica que el individuo puede obtener mediante intercambios de mercados un valor de bienes y dinero mayor que el de la dotación inicial.

será en realidad el patrón del ingreso, es necesario ahorrar para ser capaces de mantener un patrón de consumo estable, y con ello un nivel de vida y bienestar en ascenso o al menos igual al prevaleciente ahora. La gente ahorrará en la medida que la tasa de interés le asegure que su sacrificio de liquidez y consumo será bien recompensado, con mayor consumo en el siguiente periodo. De no ser así, consumirá, debido a que somos impacientes, sólo si el premio por no consumir es lo suficientemente atractivo se ahorrará. El precio que nos ayuda a evaluar si vale o no la pena postergar nuestro consumo por obtener un poco más es la tasa de interés. Recordemos lo dicho Charles Montgomery Burns a Homer Simpson "*Ahh.. Simpson...cambiaría todo esto (...hablando de su riqueza) por tener un poco más*".

UN MODELO COMPLETO

Ya expuesta la reflexión sobre el papel de la tasa de interés es necesario plantear una idea conjugando consumo y producción, donde los agentes eligen en un portafolio de estos seguros mientras realizan decisiones de consumo. Supongamos que tenemos S estados naturaleza. Definiremos un seguro como un S-vector con componentes correspondientes a pagos en los S estados naturaleza. De esta manera escribimos un seguro con la forma $z = (z_1,\ldots, z_S)$, donde z_s es el pago si el estado s ocurre. El seguro tiene un precio p_z. Diremos que un conjunto de seguros es independiente si es independiente en el sentido de la independencia lineal en el espacio vectorial S dimensional. Luego entonces, pueden existir a lo más *S* seguros independientes en un mundo con S estados. Ahora, supondremos que un seguro z puede expresarse como una combinación convexa de dos seguros z_1 y z_2, quedando $z=\alpha z_1+\beta z_2$. Los precios correspondientes serían p_z, p_{z1}, p_{z2}. En una economía competitiva, con ausencia de costos de transacción, se debe tener $p_z=\alpha p_{z1}+\beta p_{z2}$. Si observamos se distingue que tanto z como $\alpha z_1+\beta z_2$ representan exactamente el mismo patrón de pagos, y por lo tanto deben tener el mismo precio de lo contrario alguien podría obtener grandes beneficios mediante arbitraje al comprar z y vender $\alpha z_1+\beta z_2$ y viceversa. Entonces, sean $e_1, e_2,\ldots, e_s$ los seguros elementales, con e_s que paga una unidad sí y sólo si ocurre el estado *s*. Los seguros elementales forman la base del espacio de todos los seguros. Si sus precios son q_s, s=1, 2,.., *S*. Se infiere de modo inmediato que el seguro $z = (z_1,\ldots, z_S)$ debe tener el precio

$$p_z = \sum_{s=1}^{S} q_s z_s$$

Observando tenemos que la unidad de seguro libre de riesgo es la que paga una unidad en cada estado. Este bono debe tener precio $\sum_{s=1}^{S} q_s$. Por lo tanto, tendremos que

$$r = \frac{1}{\sum_{s=1}^{S} q_s} - 1$$

donde *r* es la tasa de interés del periodo 1.

Los compromisos de consumo futuro se realizan a expensas de consumo presente. Esto nos conduce a plantear un problema de dos periodos. En este caso el consumidor tiene un ingreso *r* que se asignará en el primer periodo para consumo de bienes y adquisición de seguros, los que generarán ingreso para consumo de bienes y adquisición de seguros en el segundo periodo. Los precios p_0 son los precios de los bienes del periodo inicial, los precios q_s de los seguros elementales y la colección $p_1, p_2,\ldots, p_S$ de precios estado dependientes del segundo periodo son conocidos. Las preferencias del consumidor son representadas por una función de utilidad que es separable débilmente con respecto al consumo en el periodo inicial y con respecto a cada estado naturaleza del segundo periodo. El problema de optimización queda como:

$$\max U(u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_1), ..., u_s(\mathbf{x}_s))$$

$$\text{sujeto a } \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_0 + \sum_{s=1}^{S} q_s r_s \leq r$$

$$\mathbf{p}_s \cdot \mathbf{x}_s \leq r_s, \quad s=1, 2,.., S$$

Las empresas están sujetas a incertidumbre igual que el consumidor. Consideremos un problema de dos periodos. En el periodo inicial las empresas realizan planes de producción y comprometen recursos. En el segundo periodo la producción se completa pero los montos actuales de producción depende el estado naturaleza. Entonces sea $\mathbf{y}_0 \in R^m$ un vector de bienes seleccionado para el primer periodo. Si el estado s ocurre este vector inicial conduce a $\mathbf{y}_s \in R^m$. Este plan de producción puede describirse por el vector $\mathbf{y}=(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1,..., \mathbf{y}_S)$. Dicho vector es un plan de producción completo para la empresa bajo incertidumbre. Puede verse, amigo lector, que describe el insumo y los varios posibles productos que pueden ocurrir como una función de cada estado naturaleza. El conjunto Y que contenga a tales vectores es el conjunto de posibilidades de producción. Este conjunto es un subconjunto especial del espacio $m(S+1)$ dimensional, es decir, el espacio de todos los bienes indexados tanto por periodo y estado naturaleza. Ahora, si existe un sistema de precios para todos los bienes, representados por un vector $\mathbf{p}$ $m(S+1)$ dimensional. Dados estos precios, la empresa seleccionara un vector $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ que maximice el beneficio $\mathbf{py}$.

Revisado lo anterior, necesitamos definir un equilibrio. Vamos a definir un equilibrio para el caso de dos periodos, con economía de propiedad privada, productiva e incierta. Tenemos n consumidores, m bienes perecederos[65], K empresas y S estados naturaleza en el segundo periodo. El consumidor i-ésimo tiene un vector de dotación $\mathbf{w}_i$ de bienes en el primer periodo y posee una fracción θ_{ik} de la empresa k. La empresa k tiene un conjunto de posibilidades de producción Y_k, con un vector $\mathbf{y}_k=(\mathbf{y}_{k0}, \mathbf{y}_{k2},..., \mathbf{y}_{kS})$. En el primer periodo existe mercado para los bienes del periodo inicial y para los bienes estado contingentes del segundo periodo. Los precios correspondientes son $\mathbf{p}_0, \overline{\mathbf{p}}_1, ..., \overline{\mathbf{p}}_S$. Cada firma k selecciona un vector $\mathbf{y}_k \in Y_k$ que maximiza beneficio en estos mercados y distribuye el beneficio para sus propietarios. Cada consumidor i-ésimo selecciona una canasta de consumo $\mathbf{x}_i=(\mathbf{x}_{i0}, \mathbf{x}_{i1},..., \mathbf{x}_{iS})$ que maximiza su utilidad sujeto a su presupuesto

$$\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_{i0} + \sum_{s=1}^{S} \overline{\mathbf{p}}_s \cdot \mathbf{x}_{is} \leq \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{w}_i + \sum_{k=1}^{K} \theta_{ik} \left\{ \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{y}_{k0} + \sum_{s=1}^{S} \overline{\mathbf{p}}_s \cdot \mathbf{y}_{ks} \right\}$$

En esta economía todas las transacciones de mercado, tanto para consumidores y productores, se efectúan en el periodo inicial. Las condiciones de vaciado de mercado quedan como

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{i0} \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{y}_{k0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{is} \leq \sum_{k=1}^{K} \mathbf{y}_{ks}, \quad s=1, 2,..., S$$

Por lo que queda una economía Arrow-Debreu.

Ahora vamos a hacer unos cambios en los supuestos al resultado anterior, en específico sobre la estructura de mercado y la función de utilidad será débilmente separable con respecto a los estados naturaleza y periodos. Primero, durante el periodo inicial existe un mercado de valores para las acciones de cada empresa. Mediante este mercado los consumidores pueden intercambiar

[65] Es decir, no pueden almacenarse de un periodo a otro.

su propiedad inicial por un portafolio diferente. El precio de la acción de la firma en el mercado se denotará por v_k y se refiere al valor inicial de la empresa. Acorde con esto, si θ_{ik} es la fracción de la empresa poseída inicialmente por el consumidor i-ésimo, el valor inicial de las acciones mantenidas por el consumidor es $\sum_k \theta_{ik} v_k$. Después de intercambiar, el consumidor puede tener nuevas tenencias t_{ik} con valor total $\sum_k t_{ik} v_k$. Para vaciar el mercado se debe cumplir

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \theta_{ik} = 1 \text{ para k=1, 2,..., K}$$

Existe un mercado para bienes en el primer periodo, con sus precios correspondientes $\mathbf{p}_0$. Los consumidores adquieren bienes del periodo inicial a tales precios. Cada empresa k, por su parte, distribuye $\mathbf{p}_0\mathbf{y}_{k0}$ entre los propietarios actuales, proporcional a su propiedad[66]. En el segundo periodo, después de que el estado s se realiza y la producción se completa, se abre un mercado spot para bienes en ese periodo con precios $\mathbf{p}_s$. Como consecuencia que es un problema de dos periodos, las empresas venden sus productos y simultáneamente distribuye todas las ganancias entre los propietarios corrientes, proporciona a su propiedad. Estas ganancias dependen del estado, de igual modo que de el plan de producción. Las restricciones que enfrenta el consumidor son

$$\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_{i0} + \sum_{k=1}^{K} t_{ik} v_k \leq \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{w}_i + \sum_{k=1}^{K} \theta_{ik} v_k + \sum_{k=1}^{K} t_{ik} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{y}_{k0}$$

$$\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_{i0} \leq \sum_{k=1}^{K} t_{ik} \mathbf{p}_s \cdot \mathbf{y}_{ks} \text{ para } s\text{=1, 2,..., S}$$

Ahora las condiciones de mercado en los dos periodos son

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{i0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{y}_{k0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{is} = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{y}_{ks} \quad s\text{=1, 2,..., S}$$

Ahora podemos decir que un equilibrio para este caso consiste de una asignación **X** para los consumidores, una colección **Y** de planes de producción, un conjunto de portafolios de seguros **T**, un sistema de precios spot para bienes y un sistema de valuación para las empresas. Por lo tanto el equilibrio se denotará (**X**, **Y**, **T**, **p**, **v**). Los consumidores maximizarán su utilidad sujeto a la restricción expresada ut supra. Para realizar el análisis completo del equilibrio debemos describir como es elegido $\mathbf{y}_k \in Y_k$.

El valor spot del producto generado por la firma k en el estado s es $\mathbf{p}_s\mathbf{y}_{ks}$. Sea $\mathbf{z}_k$ el vector S dimensional con estos componentes de ingreso $\mathbf{p}_s\mathbf{y}_{ks}$ s=1,..., S. Un consumidor que posee una acción de la empresa k posee un seguro con pago $\mathbf{z}_k$. Entonces la colección de vectores $\mathbf{z}_k$, k=1,..., K, se extiende si se extiende el espacio S dimensional en el sentido usual de extender un espacio vectorial, que es si algún vector puede expresarse como combinación lineal de los $\mathbf{z}_k$ vectores. Advierta usted amigo lector, que el costo inicial del vector de producto indexado $\mathbf{z}_k$ es v_k-$\mathbf{p}_0\mathbf{y}_{k0}$. Luego, se conoce el costo de los K seguros $\mathbf{z}_k$. Los seguros pueden ser linealmente dependientes, así pues, uno puede expresarse como combinación lineal de otros. Para este caso, requeriremos que los v_k sean elegidos tal que los costos de los seguros sean mutuamente consistentes. En otras palabras, el costo de una combinación lineal debe igualar a la correspondiente combinación de costos. Ahora, si los $\mathbf{z}_k$ se extienden y los v_k se eligen tal que los costos son mutuamente consistentes, por lo que

[66] Es probable que pueda ser negativo, debido a que $\mathbf{y}_{k0}$ es más probable que sea no positivo.

podemos determinar un conjunto de precios implícitos q_s, s=1,.., S para estado contingentes elementales puede usarse para evaluar algún resultado incierto. Particularicemos, el valor de un plan de producción (y_{k0}, y_{k1},..., y_{kS}), basado en los precios q_s, s=1,.., S sería $v_k = \mathbf{p}_0\mathbf{y}_{k0} + \sum_{s=1}^{S} q_s\mathbf{p}_s\mathbf{y}_{ks}$. Las empresas son precio aceptantes con respecto a todos los precios, incluyendo los precios q_s. Dados estos precios, la empresa k opera maximizando su valor $\mathbf{p}_0\mathbf{y}_{k0} + \sum_{s=1}^{S} q_s\mathbf{p}_s\mathbf{y}_{ks}$, que es esencialmente equivalente a la maximización del beneficio. Una combinación (X*, Y*, T*, p*, v*) es un equilibrio expansivo si, además de las condiciones de equilibrio para el consumidor y las condiciones de vaciado de mercado, el conjunto de correspondientes $\mathbf{z}_k^*$ se expande y si $\mathbf{y}_k^* \in Y_k$ maximiza el valor calculado de los correspondientes q_s^*. En equilibrio

$$v_k^* = \mathbf{p}_0^*\mathbf{y}_{k0}^* + \sum_{s=1}^{S} q_s^*\mathbf{p}_s^*\mathbf{y}_s^*.$$

La asignación resultante de un equilibrio expansivo de este modelo de dos periodos es idéntico al obtenido con un mercado completo de bienes contingentes revisado en el capítulo anterior. El enfoque intuitivo de esto es: Un mercado completo de bienes estado contingentes, construimos el desarrollo del equilibrio en un proceso de dos etapas, es decir, un mercado para estado contingentes elementales en la primer etapa, seguido por un mercado spot para bienes en la segunda etapa seguido remplazar los estados contingentes por seguros sobre las empresas mismas. Esto es posible porque los seguros expanden el espacio de los seguros. La asignación resultante será idéntica a la primera. Una consecuencia de lo anterior es que el objetivo genuino de una empresa bajo incertidumbre es la maximización del valor de la empresa determinado por el mercado de seguros. Si el supuesto de la expansión se mantiene, todos los tenedores de acciones aprobarán de modo unánime este criterio, y el resultado será, naturalmente Pareto eficiente. Si retiramos el supuesto de expansión, la situación es mucho más compleja. El problema se convierte en un problema de carácter de teoría de juegos, debido a que los accionistas pueden no estar de acuerdo con este criterio. La falte de expansión por acciones puede remediarse por la introducción de instrumentos financieros adicionales que llenen otras dimensiones, y efectivamente mediante la introducción de estos instrumentos se puede caminar en dirección de tal objetivo.

Con esto queda claro que en los mercados intertemporales la manera de medir los precios futuro es mediante tasas de interés. El concepto de información puede describirse fácilmente utilizando la descripción de estados de incertidumbre empleado en el capítulo anterior. Tenemos entonces que existe un conjunto de estados naturaleza Ω ={1, 2,.., S}. Un conjunto de información H es un subconjunto de Ω. Tal conjunto representa la información específica mantenida por un individuo en el sentido que el conocimiento de H significa que es conocido que el verdadero estado yace en H. Si tuviésemos que $H = \Omega$, tal conjunto representa la falta de información adicional, porque el conocimiento de H implica que el estado verdadero $s \in \Omega$. Por otro lado, Si H = {1}, esto nos dirá que el conocimiento de H implica que el estado s = 1. Si dos conjuntos de información H_1 y H_2 satisfacen la condición $H_1 \subset H_2$ (con pertenencia estricta), indica que H_1 tiene mas información que H_2, de otro modo, H_1 es más preciso que H_2.

Una estructura de información es una colección de subconjuntos que forman una partición de Ω. En otras palabras, una estructura es una colección de subconjuntos H_1, H_2,..., H_m mutuamente disjuntos y al mismo tiempo cuya unión es Ω. Un individuo con su estructura de información conoce a que conjunto H_j pertenece el estado verdadero. La información perfecta es la estructura de información correspondiente a la partición {1}, {2}, ..., {S}. En este caso el conocimiento de que el conjunto de información en la partición contiene el estado es equivalente a conocer el estado mismo. En el otro extremo, la carencia total de información correspondiente a la partición Ω consiste en Ω solamente, para esto se sabe que el estado verdadero pertenece a Ω.

Decimos que una estructura de información es considerada con más información que otra si la partición de la primera es un refinamiento de la segunda. Esto es, si cada conjunto en la partición de la primera estructura de información es un subconjunto de un conjunto de un conjunto de la segunda.

LOS MERCADOS FINANCIEROS

Voy a comenzar con una idea simple, los mercados financieros crean valor[67]. Lo que encontramos en los mercados financieros es valuación, siendo el medio por el cual los mercados financieros fijan precio de contratos financieros. La función de los mercados financieros es la asignación eficiente de los recursos. Dentro del mercado financiero nos encontramos en presencia de participantes activos, los cuales están preocupados por el valor o precio de sus contratos. Esto lo podemos ver claramente cuando vemos a los participantes estimar, evaluar y probar su valor. Las transacciones aparecen cuando los contratos son comprados y vendidos permítame la redundancia, por compradores y vendedores que buscan obtener mayor valor; es decir reflejados en mejores precios. Las transacciones son lo que permiten al mercado crear valor. Reflexionemos un momento en esto. ¿Qué se intercambia realmente? Amigo lector, usted puede advertir que se venden promesas. Es decir, las transacciones financieras están monetizando promesas. Lo voy a poner en otras palabras, se intercambia efectivo en el presente por una promesa de reciprocidad en el futuro. Ya con esta noción podemos definir la función del mercado de crédito. El mercado de crédito crea valor en la forma de préstamos en el presente que son intercambiada por promesas de pagos en el futuro. Quiero hacer referencia a los beneficios sociales derivados del intercambio, directamente porque casi cualquiera puede participar en este proceso y, segundo, permite a los individuos y organizaciones trascender las limitaciones de su situación presente.

Pensemos en lo siguiente. Prestatarios son generadores de promesas, las cuales le ayudan a obtener fondos que les permite demostrar sus habilidades, para poder definir su situación en el futuro. Por el otro lado, los prestamistas son compradores de promesas que apoyan y participan en las actividades de aquellos que ofrecen promesas. Las transacciones entre compradores y vendedores riesgos y retornos, tanto actual como esperados sobre un gran número de unidades económicas. Las transacciones ayudan a crear y a expandir la red de confianza, además las transacciones contribuyen a la eficiencia y al crecimiento económico, debido a que resultan en la asignación de tierra, trabajo y capital físico en actividades que tienen retornos económicos relativamente altos. Aquí hay que señalar un aspecto fundamental, ahorros, tierra, trabajo y capital son escasos, conseguir crecimiento y eficiencia requiere mecanismos de asignación para evitar actividades con retornos relativamente bajos. Aquí es posible ver los elementos de la valuación empleado para la toma de decisiones eficiente por parte del consumidor. La pregunta fundamental que se debe hacer es ¿Cuánto vale dicha promesa? La respuesta la genera el mercado, sólo se requiere conocer los siguientes elementos: descuento, estructura de plazo, costos de transacción y el proceso para identificar el valor.

Primero repasemos el descuento[68]. El descuento es la técnica que compara los valores en diferentes tiempos, estimando el valor en el presente en retorno de valor esperado en el futuro, y valor esperado en el futuro por valor en el presente. Advierta amigo lector, que el descuento es fundamental para la toma de decisiones intertemporales. El descuento implica supuestos sobre el futuro. Aquí es donde aparece el poder de la tasa de interés como precio entre puntos en el tiempo. Al reflejar expectativas sobre el futuro, las tasas de interés se transforman en un instrumento de

---

[67] Advierta el lector que la idea de valor se expone del modo siguiente: el valor refleja cualidades deseables que encausan a la gente a crear, producir, controlar, obtener y usar cosas que se consideran que tienen tales cualidades. J. D. Von Pischke. Finance at the frontier: debt capacity and the role of credit in the private economy.

[68] La definición adecuada que proporciona el Dictionary of finance and investment terms, publicados por Barron's es la siguiente: La diferencia entre el precio de mercado corriente del bono y su pago antes de su maduración.

vaciado de mercado así como es un importante costo de oportunidad. Mire usted, la tasa de interés, como le he venido explicando, determina la asignación de consumo presente y futuro, expresando el consumo futuro como una función de inversión corriente en bienes y servicios. En los mercados financieros, la tasa de interés es considerada como una medida del retorno por sacrificar liquidez por adquisición, siempre a un nivel de riesgo. Se aprecia claramente que ambos implican tanto sacrificio como racionalidad. Debe verse la racionalidad del sacrificio cuando es probable generar un mayor retorno en el futuro.

Pasemos ahora a la estructura del plazo. La estructura de plazo es fundamental para la creación de valor. Se crea por intercambio de efectivo por valor esperado futuro. De otro modo, si no tuviésemos estructura de plazo no habría crédito simplemente porque no tendrían valor alguno cualquier promesa. De lo anterior se presenta la definición financiera que nos dice que la estructura del plazo es el horizonte temporal, así como su movimiento hacia él. Entonces, es fácil entender que la estructura de plazo tiene dos dimensiones: maduración y tasa de interés. Primero, la maduración de contratos financieros definen la estructura de plazo de los mercados en los que se intercambian. La estructura de plazo para la tasa de interés es la relación existente entre la maduración y su retorno de capital invertido en promesas difiriendo sólo en su maduración. La determinación del plazo yace en las características de información y expectativas del mercado. Los mercados de modo natural mueven y extienden las estructuras de plazo, eso ocurre cuando las tasas de interés de largo plazo exceden a las de corto plazo, lo cual incrementa el riesgo. Las estructuras de plazo tienden a alargarse cuando los factores de incertidumbre no son percibidos como amenazas para los valores financieros.

Ahora centremos nuestra atención en los costos de transacción. Los costos de transacción son los costos de establecimiento y dirigir relaciones financieras, incluyen acopio de información, arreglos para proteger el efectivo, documentos y otros datos, sistemas de grabado para el proceso de transacción, espera y toma de decisiones. Se puede ver que los costos de transacción son el peaje para correr en los mercados financieros. Podemos ver que los pagan todas las partes, depositantes, prestatarios, intermediarios, y todos aquellos que usen y ofrezcan servicios financieros. Obviamente hay costos para el consumidor y para el intermediario. Revisemos primero los costos de transacción del consumidor.

El mayor costo de transacción en el que incurre el ahorrador y el aplicante para un crédito es el obtener acceso al mercado formal, de modo que puede establecer relaciones financieras. El ahorrador debe satisfacer, por el mismo, que las instituciones deseen aceptar depósitos, merezcan su confianza y que se le trate con respeto[69]. Por otro lado, los que desean ser prestatarios deben obtener información sobre las fuentes de los fondos que están disponibles, además de los términos y condiciones que tiene cada uno. Los que desean prestar deben reunir información sobre los posibles clientes, así como una relación de depósito en cuenta previa. El transporte, el formarse consume el tiempo, esfuerzo y gasto. El gasto de tiempo en estas actividades es el costo de oportunidad, consistente en la pérdida de oportunidades para producir ingreso o del disfrute del ocio. Estos costos restan atractivo de entrar a los mercados formales, por lo que si no se pide prestado se vuelve más difícil obtener valor.

Para enfrentar los costos de transacción las instituciones financieras modernas se organizan como se van aproximando a la frontera financiera. Los depositantes mantienen balances más y más pequeños mientras las transacciones tienden también a ser pequeños. La rotación en las cuentas debe ser alta relativo con el balance promedio mantenido, y los negocios relacionados como transferencias de dinero y uso de otros servicios está limitado. Montos relativamente altos de

[69] Aquí surge un problema serio. Los establecimientos financieros modernos pueden no tener oficinas o sucursales en centros rurales o en areas urbanas no muy prósperas. Donde las horas de oficina, pudiesen ser no muy convenientes tanto para la institución como para el usuario. Los prospectos de depositante de estos lugares deben gastar tiempo, posiblemente dinero, caminar o utilizar un transporte sencillo (bicicleta, caballo) para llegar a la oficina bancaria. Este tipo de movilizaciones tienen como consecuencia la tentación de gastar, preocupaciones y posiblemente largas colas para transporte público y para los servicios en la oficina bancaria.

ganancias de efectivo sin interés deben mantenerse para sostener el servicio de los pequeños depositantes porque ellos prefieren emplear efectivo en vez de cheques u otro tipo de servicios para transacciones. Los costos fijos del depositario de mantener una cuenta o una transacción no están relacionadas con el balance de la cuenta o del monto de la transacción, haciendo la colección de depósitos que aparezca poco atractivo para muchos intermediarios.

Los costos de transacción de las relaciones financieras incluyen los costos de mantenimiento del proceso de valuación que resulta en transacciones. Intimamente relacionado a este costo encontramos a los cambios en el proceso de valuación en si mismo. Mientras algunos cambios son impulsados por el esfuerzo de reducir costos, otros son guiados por esfuerzos de crear valor donde antes no lo había.

Ahora es tiempo de formalizar otra idea sencilla, el valor genera riesgo. El riesgo rige a las finanzas, simplemente porque relaciona el futuro y el presente. Debido a que el futuro es incierto, el riesgo siempre está presente. Las finanzas existen porque aparecen ciclos no simultáneos de flujos en el curso normal de la producción y el consumo, es decir, facilitan el manejo de flujos dispares y disminuye su riesgo. Si la producción y el consumo fuesen simultáneos, la economía funcionaria perfectamente sin finanzas. El distinto ritmo financiero entre las diferentes actividades requieren de las finanzas, en forma de ahorros y crédito, que coadyuvará a la coordinación entre ellas. Los ahorros y los créditos son más eficientes en la medida que los intermediarios desarrollen las transferencias de las firmas e individuos que acumulan fondos y están dispuestos a perder liquidez y aquellos que desean adquirir liquidez. El manejo y la administración en los mercados financieros se centra en el sacrificio y la preservación de la liquidez. La definición más general de liquidez es *lo más parecido a efectivo*, considerando al efectivo como totalmente liquido y relativamente sin riesgo[70]. Aquellos activos que pueden ser fácilmente valuados en términos de efectivo son más líquidos que aquellos que no. Para determinar la liquidez de un activo de modo preciso se requiere venderlo. Para evitar los problemas que trae la venta un activo que quiero conservar sólo para probar su liquidez, los mercados proveen indicadores de liquidez ya que las transacciones de mercado crean liquidez. Las transacciones y la competencia promueven la difusión de la información del mercado, incluyendo precio, volúmenes de intercambio y los términos y condiciones de venta.

Como se aprecia en las líneas anteriores, la liquidez es el medio primario por el cual el valor está dado y es restaurado en las transacciones financieras. Un comprador que paga por una promesa sacrifica liquidez al reducir su tenencia de efectivo. El sacrificio permanece y la liquidez es restaurada hasta el cumplimiento de la promesa o cuando es vendida a otra parte. Debido a que las finanzas modernas expresan el valor en términos de efectivo, el sacrificio de liquidez crea un problema de valuación. Si tenemos consistencia en la valuación reduciremos la incertidumbre y los costos de transacción de sacrificar liquidez. Mercados operativos deben eliminar la inconsistencia. Un muy importante problema de valuación aparece debido a que el sacrificio de liquidez crea riesgo. Esto ocurre porque el intercambio de valor presente líquido para un valor futuro no liquido se completa sólo en el futuro, cuando la liquidez es restaurada. Sabemos que el futuro es inherentemente impredecible, lo cual implica que la liquidez pueda no ser restaurada en su totalidad. Con esto se afirma que el riesgo y su impacto en el valor es una de las razones que justifica el análisis financiero. Otra razón surge por los enormes beneficios privados y sociales creados por mercados racionales. Piense en esto sólo se puede intercambiar algo que pertenece a alguien y, debe ser valuado para que los mercados operen racionalmente.

Los mercados financieros intermedian riesgo al intermediar liquidez. En la medida que el riesgo surge por la incapacidad que tenemos para predecir el futuro, así como para predecir los flujos no simultáneos. Cuando tenemos falta de simultaneidad podemos pensar en un problema de riesgo de madurez y de tasa de interés; aunque el riesgo de crédito cae en el conjunto de la no simultaneidad. Permítame enumerar y explicarle los distintos tipos de riesgo.

[70] Cuando se experimentan altas inflaciones ésta idea desaparece.

Los riesgos financieros que enfrentamos son riesgo de mercado, riesgo crédito y riesgo de liquidez, riesgo operacional y riesgo legal. Primero, el riesgo de mercado es aquel que se deriva de cambios en los precios de los activos y pasivos financieros midiéndose a través de cambios en el valor de las posiciones abiertas[71]. Entendamos al riesgo de mercado; dicho riesgo se refiere a la incertidumbre en el valor futuro de los flujos de un instrumento como resultado de cambios en las condiciones de mercado, por ejemplo precios, tasas de interés, volatilidades. El riesgo de mercado puede asumir dos formas; primero como el riesgo absoluto, el cual se mide por la pérdida potencial en términos de unidades monetarias, y segundo, el riesgo relativo, el cual se relaciona con un índice base. Hagamos una diferenciación entre ambos, el riesgo absoluto se concentra en la volatilidad de las ganancias totales, mientras que el riesgo relativo mide el riesgo en términos de la desviación respecto al índice. Este riesgo lo podemos ver como:

◊ Riesgo de tasa de interés. Es la incertidumbre en el valor de un portafolio debido a las fluctuaciones no anticipadas del valor presente de sus flujos provocadas por variaciones en las tasas de interés.

◊ Riesgo cambiario. Es la exposición que se tiene cuando los flujos de un portafolio están denominados en cierta moneda por la incertidumbre de la tasa a la que dicha moneda podrá ser cambiada por la moneda base del portafolio.

◊ Riesgo inflacionario. Exposición a cambios en el valor de los flujos de un portafolio en términos reales, como resultado de variaciones en el nivel de precios.

◊ Riesgo accionario. Al poseer acciones de una empresa los flujos de ingresos de ésta afectan el precio de las acciones; entre más inciertos sean estos flujos, más incierto será el precio de la acción. Dicha incertidumbre es una función que depende del tipo de negocio de la empresa, el tipo de políticas que se lleven a cabo dentro de ésta y las condiciones de la economía local. Esta incertidumbre se define como riesgo accionario.

Ahora es tiempo de hablar del riesgo crediticio o riesgo crédito. Es la exposición que se tiene por el probable incumplimiento total o parcial de las obligaciones contraídas a través de una transacción. Entonces este tipo de riesgo se presenta cuando las contrapartes están poco dispuestas o imposibilitadas para cumplir con sus obligaciones contractuales. Para medir el efecto hay que revisar el costo de la reposición de flujos de efectivo si la otra parte incumple[72]. Cuando en esta transacción está de por medio un contrato, el riesgo crediticio se conoce como riesgo del emisor. Cuando no existe un contrato de por medio, el riesgo crediticio es conocido como de la contraparte.

◊ Riesgo soberano.- Este ocurre cuando los países imponen controles a las divisas extranjeras que imposibilitan a las contrapartes a cumplir sus obligaciones[73].

◊ Riesgo de pago.- Es la posibilidad de que una de las contrapartes pudiese incumplir en un contrato después de que una de las partes ha realizado el pago previamente.

Es necesario recalcar que la administración del riesgo crédito tiene aspectos cualitativos y cuantitativos. Déjeme explicarle, cuando determinamos la credibilidad de una contraparte nos referimos al componente cualitativo y la valuación cuantitativa se ha ido desarrollando con los avances en la administración del riesgo, por ejemplo el método de valor en riesgo (VAR).

---

[71] Éste a su vez incluye el riesgo base, es decir aquel riesgo que aparece cuando se cambia la relación entre los productos empleados para cubrirse mutuamente. El riesgo gamma, lo ocasionan las relaciones no lineales entre los subyacentes y el precio o valor del derivado.

[72] El riesgo crédito puede conducir a pérdidas en el momento que los deudores son clasificados de un modo severo por agencias crediticias y calificadoras, generando con ello una caida en el valor de mercado de sus obligaciones.

[73] Con esto podemos ver que el riesgo de incumplimiento es, por lo general, específico de las empresas, el riesgo soberano es específico de un pais.

Cuando escuchamos el término riesgo de liquidez, se dice que es la incertidumbre de poder realizar en un mercado una transacción por el monto deseado al precio estimado. El riesgo de liquidez puede definirse como específico cuando se refiere a un instrumento o como sistémico al referirse a todo un mercado. Este riesgo puede tomar dos formas: liquidez mercado/producto y flujo de efectivo/financiamiento.

◊ Riesgo liquidez mercado/producto.- Se presenta cuando una transacción no puede ser conducida a los precios prevalecientes en el mercado debido a una baja operatividad en el mercado.

◊ Riesgo flujo de efectivo/financiamiento.- Este riesgo se refiere a la incapacidad de conseguir obligaciones de flujos de efectivo necesarios, lo cual puede forzar a una liquidación anticipada, transformando en consecuencia las pérdidas en papel en pérdidas realizadas.

El riesgo de fondeo puede ser controlado por la planeación apropiada de los requerimientos de flujos de efectivo, los cuales pueden controlarse estableciendo límites a los desajustes de flujos de efectivo y utilizando la diversificación. No debemos olvidar que la liquidez está relacionada con el horizonte temporal de las inversiones, por lo que hay que analizar las condiciones de mercado que pudiesen impedir la liquidación inmediata de una inversión.

Toca turno al riesgo operacional. Este riego se refiere a las pérdidas potenciales resultantes de sistemas inadecuados, fallas administrativas, controles defectuosos, fraude o simplemente errores humanos.

◊ Riesgo de ejecución.- Es cuando se falla en la ejecución de las operaciones[74]. Tal falla conduce a retrasos y eventualmente penalizaciones.

◊ Riesgo de fraude.- Es donde el operador falsifica intencionalmente información.

◊ Riesgo tecnológico.- Se refiere a la necesidad de proteger a los sistemas del acceso no autorizado y de la interferencia.

◊ Riesgo del modelo.- Se refiere a los aspectos de valuación que crean problemas operacionales potenciales. Cundo nos referimos al riesgo es ese riesgo de que el modelo empleado para valuar posiciones sea defectuoso.

Algunos ejemplos de riesgo operacional serían las fallas en los sistemas, las pérdidas causadas por eventos extraordinarios (causas naturales), accidentes donde se involucren individuos clave. Como se puede dar cuenta, estimado lector, la mejor protección posible contra el riesgo operacional es la redundancia de sistemas, la definición clara de responsabilidades apoyada por fuertes sistemas de control interno y la planeación de las contingencias, revisión y actualización periódica de dichos planes.

Sobre el riesgo legal podemos decir que se presenta cuando una contraparte no tiene la autoridad legal o regulatoria para realizar una transacción.

◊ Riesgo regulatorio.- Hace referencia a actividades que podrían quebrantar regulaciones gubernamentales. Para ejemplificar se puede señalar la manipulación del mercado, la operación con información privilegiada y restricciones de convencionalidad. El riesgo regulatorio se manifiesta en las diligencias para el cumplimiento, en la interpretación y en "la conducta moral".

Ya planteados estos conceptos fundamentales, conviene preguntarnos ¿cómo manejan los mercados financieros el riesgo? Los procesos que emplea son *pooling* y suposición. Dichos procesos descomponen al riesgo a través de particiones y redefinición, con ello le da una nueva presentación haciéndolo más atractivo. Este hecho permite que el riesgo transfiera la creación de valor porque

---

[74] Para un mejor entendimiento piense en cualquier problema de back office,

aquellos que buscan comodidad disminuyendo riesgo y aquellos que buscan retornos mayores asumiendo riesgo logran sus objetivos[75].

Primero entendamos como se maneja el riesgo mediante el *pooling*[76]. Déjeme explicarle el mecanismo con un ejemplo clásico, los fondos de pensiones de beneficios fijos. Las anualidades crean valor de dos formas. Proveen a los miembros la perspectiva de un ingreso estable después de su retiro en retorno por sus contribuciones al fondo previo a su retiro. Permite también, alcanzar tal objetivo económicamente mediante acción colectiva. Este medio es atractivo ya que responde al riesgo de los miembros del fondo. Pensemos en esto: sabemos que la capacidad de ganar dinero durante el retiro no es la misma que tenemos durante la juventud; esto se explica fácil, simplemente durante la vida laboral la capacidad de percibir ingreso se encuentra en la cúspide. Entonces, este escenario se presenta una no simultaneidad de flujos formidable. La tarea del fondo de pensiones es recolectar suficiente efectivo de los miembros durante una fase de acumulación antes del retiro, el cual debe generar el nivel objetivo de los pagos de la anualidad a estos trabajadores durante una fase de distribución en el resto de sus vidas. Para manejar el riesgo de que los fondos recolectados sean insuficientes, los fondos de pensiones pueden clasificar sus miembros en grupos que tengan fechas de retiro esperadas y esperanza de vida homogéneas.

Entonces, mediante el *pooling* de grupos homogéneos se crea el valor para los miembros del grupo. Mire usted, descartando el suicidio, los individuos miembros del grupo no pueden saber cuanto más vivirán después de su retiro. La prudencia nos dice que la planeación individual requiere que asumamos una esperanza de vida elevada, para con ello asegurar que los fondos estén disponibles aún y si se alcanza una edad bastante elevada[77]. Permítame explicarle la mecánica. Si cada miembro ha planeado prudente e individualmente y se asume una expectativa de vida mayor que la normal, el grupo (pensado en el grupo como un todo) ahorrará demasiado, reduciendo su consumo drásticamente durante sus años laborales para poder proveer un ingreso para su edad esperada. Al emplear el *pooling*, se disfruta mayor valor debido a que las contribuciones de los miembros se basan en la expectativa de vida normal. Por lo que podemos ver que el *pooling* permite que el fondo intermedie riesgos. Mire usted, aquellos miembros que mueran antes de la expectativa normal de vida reciben menos beneficios relativo a sus contribuciones, mientras que aquellos quienes excedan la expectativa de vida normal recibirán relativamente más beneficios.

El fondo mantiene bonos de bajo riesgo y de largo plazo como activos[78]. El gerente del fondo estructura el portafolio de tal manera que las fechas de maduración están escalonadas para coincidir con los requerimientos de fondeo de la anualidad durante la fase de distribución. Los fondos de pensiones de beneficios fijos se fondean con contribuciones variables de los miembros; tales contribuciones fluctúan cada año. Mire usted, si asumimos un nivel objetivo de beneficios, expectativa de vida constante, y un ingreso de intereses proyectado, contemplando también los gastos administrativos del fondo de pensiones, los ajustes en las contribuciones requeridas por un grupo de miembros reflejará cambios en la tasa de interés disponible de los bonos. Por lo que decimos que la tasa de interés determina el rango de composición, la cual afecta en sucesión el tamaño del pool del cual se hacen los pagos de la anualidad a los miembros del grupo. El mecanismo es simple, a mayores tasas de interés mayor será la composición, reduciendo el nivel de

---

[75] Quisiera resaltar que tanto para un consumidor como una empresa ese deseo racional por comodidad o por preferencia por el riesgo, sumada con una oportunidad de ganar, reflejará la estructura financiera particular del consumidor o de la empresa.

[76] La idea de *pool* es la siguiente, es una combinación de recursos para un beneficio o propósito común.

[77] Piense en esto: Si el grupo homogéneo se retira a los 60 años, la prudencia requiere que la planeación financiera suponga la supervivencia hasta los 90.

[78] Dichos activos se adquieren durante la fase de acumulación con las contribuciones de los miembros, y con intereses ganados sobre los bonos ya adquiridos, menos los gastos de las administración del fundo. Como sabemos la composición del fondo refleja sus operaciones; en este caso siendo el fondo un recipiente de un flujo de largo plazo de contribuciones, eventualmente se balanceará con un flujo de anualidades, el fondo de pensiones buscará invertir en bonos de largo plazo.

contribuciones corrientes requeridas para fondear los pagos de las anualidades en el futuro; se emplea el descuento directamente como una manera precisa para determinar el nivel de las contribuciones anuales a una tasa dada de composición que se requiere para soportar los pagos objetivo y los costos de administración del fondo de pensiones. Aquellos que son miembros de este tipo de esquemas fijan un premio por la certidumbre, debido a que ellos esperan depender de una ingreso por anualidad en sus años de vejez. Por lo que su preocupación se refleja en los objetivos de los gerentes de los fondos, quienes siguen una estrategia de inversión conservadora para minimizar el riesgo. El portafolio de bonos se estructura para eliminar el riesgo de maduración y el riesgo de reinversión para con ello asegurar las anualidades objetivo y todos los costos administrativos pueden pagarse por activos en la fase de acumulación. El fondo eficiente agotará sus activos al mismo tiempo en que el último miembro sobreviviente del grupo fallezca.

Es el momento de hablar de la suposición del riesgo en los mercados financieros. Las instituciones financieras asumen que no pueden intermediar directamente. Toman estos riesgos bajo varias condiciones; una es que sean adecuadamente compensados por su portafolio de dichos riesgos. Otra es que los riesgos asumidos sean poco probables en el sentido de tener impacto negativo significante sobre el total de sus operaciones.

Con lo expuesto en las líneas anteriores queda claro que no podemos separar las finanzas del riesgo. Pero van más allá, las finanzas armonizan dos conceptos completamente opuestos, riesgo y confianza. Quisiera que profundizásemos es este punto. Mire usted, cuando el riesgo está suficientemente compensado por confianza, la transacción tiene lugar y se crea valor. Por lo que resulta que la relación entre riesgo, confianza y valor es triangular. Debido a esto, algún cambio a cualquiera de dichas variables no puede ocurrir aislado. Permítame explicarle la dinámica. La percepción de incremento de riesgo reducirá el valor a menos que se compense incrementando la confianza. Por otro lado, si cae la confianza se reduce el valor a menos que se reduzca el riesgo. Quisiera enfatizar varios puntos. No podemos eliminar completamente el riesgo, de igual modo que no se puede retener la confianza por periodos de tiempo sin que requiera renovación continua[79]. En efecto, la confianza es el requisito más complicado para los mercados financieros y su desarrollo. La confianza se genera en los mercados financieros con las mismas herramientas empleadas para manejar riesgo que ya hemos revisado.

Como es sabido, la confianza se encuentra muy influenciada por factores ajenos a las finanzas, tales como la visión general del futuro que hace la sociedad, la estructura social y el costo de transacción requerido para adquirir o mantener el consenso, etc.. Si quisiéramos ilustrar la importancia de la confianza en los mercados financieros basta mencionar los eventos que ocurren cuando la confianza decae. Esto lo podemos encontrar explicado en el trabajo de Kindleberger[80], que por cierto es muy entretenido, nos dice que los eventos que conducen a una crisis inician con un evento externo que cambia de modo significativo las oportunidades de beneficio en algún sector importante de la economía. Pensemos en esto, si el shock externo genera más oportunidades de las que destruye los negocios responden incrementando la producción. Para soportar ese boom se crean las finanzas. Esto lo puede hacer ya sea el sistema bancario comercial, el banco central o fuentes privadas. Las empresas desean aceptar la deuda en lugar del efectivo, los consumidores invierten o prestan en los negocios. El boom presiona la capacidad de la producción a sus límites.

[79] La confianza es una emoción y una percepción, es efímera en un mundo dinámico y se reevalúa de modo incesante. Si recordamos a David Hume, en su maravilloso texto "Tratado de la naturaleza humana" Ediciones Gernika, México 1992, expone esto cuando afirma que "*todas las percepciones de la mente humana se reducen a dos géneros que yo llamo impresiones e ideas*". Y más adelante afirma "*existe una gran conexión entre nuestras impresiones e ideas correspondientes y que la existencia de las unas tiene considerable influencia sobre la de las otras*". Tales reflexiones nos conducen a entender que la confianza se genera de una impresión y se alimenta de información. Por lo que los mercados financieros prueban la confianza con cada transacción realizada.

[80] Kindlerberger, Charles P. "*Manias, panics and crashes: a history of financial crises*" New York Basic Books, 1978, páginas 14-24.

Nueva inversión ocurre alimentando al boom. En este punto un nivel normal de racionalidad tiende a prevalecer. Pero, sin embargo la euforia puede desconectar las decisiones de inversión de las realidades de la producción y de los mercados sustentables potenciales, esto es lo peligroso para cualquier economía. En ésta etapa, la confianza es relativamente incuestionable. Pero, los sentimientos de euforia se reflejan en especulación. La especulación consiste en la adquisición de algún objeto de especulación (bienes, títulos, divisas, etc.) para su venta posterior en vez de para su uso. Para este momento habrán entrado nuevas empresas en la industria. La euforia provoca que la valuación no sea eficiente, ya que se encuentra sumergida en un mar de confianza que opaca las percepciones de riesgo y a las tendencias cautas. Entonces, vemos como la especulación se expande en la medida de que más y más individuos se involucran, aunque éstos sólo estén apoyados por créditos. Aquí es cuando se crean las burbujas, alcanzando los precios alturas difíciles de obtener de modo natural. Como se puede ver, la especulación es un enorme imán para el oportunismo. Los expertos o la gente que tenga información de primera mano (*insiders*) sienten que las tendencias actuales no continuarán por mucho tiempo, por lo que venderán el objeto de especulación, tomando sus beneficios, lucrando con la ignorancia de algunos, o con la audacia de otros. Mientras más y más gente abandona el mercado la influencia de nuevos entrantes se compensa. El mercado duda, y los precios caen.

Para este momento algunos agentes pueden experimentar dificultades para enfrentar sus obligaciones, debido a que sus posiciones están financiadas casi enteramente por deuda. Siendo aquí donde se exponen irregularidades y fraudes, y esto se traduce en que no se puede obtener nueva deuda. Entonces, cuando las señales de alerta aparecen la confianza se erosiona y más y más gente intenta salir del mercado y recuperar sus liquidez, presionando aún más los precios a la baja. Podemos decir, de un modo coloquial, que salen en estampida. Después de esta prisa por salir, la burbuja revienta y se convierte el entorno de euforia en crisis en la medida que la gente rechace el objeto de especulación con lo que se colapsa el precio del mismo. Disminuye el ritmo de la economía. Como se puede ver, la confianza es fundamental. Pero la lección es, ante todo, prudencia.

Ahora sólo nos resta presentar como se fija precio en los mercados financieros, para lo que revisaremos la fijación de precios en el mercado de capitales. Para ello nos apoyaremos en la teoría de la conducta del consumidor bajo condiciones de incertidumbre utiliza el concepto de estados contingentes, ya revisado en el capítulo anterior.

Cuando hablamos de mercados de activos debemos centrar nuestra atención en las diferencias en los precios de los activos. Bajo esquema de certidumbre el análisis del mercado de activos se vuelve demasiado simple, el precio de un activo es simplemente el valor presente descontado de sus flujos de retornos. Si no fuese así, existe la posibilidad para arbitraje sin riesgo.

Para el caso de dos periodos, existe algún activo que gana un retorno total seguro de R_0. Hablando en términos monetarios, una unidad monetaria invertida en el activo 0 hoy pagará R_0 unidades monetarias en el siguiente periodo. Si R_0 es el retorno total sobre el activo 0, $r_0=R_0-1$ es la tasa de retorno. Veamos como es la fijación de precios para otro activo *a*, tendrá un valor V_a el siguiente periodo. Para el caso de la certidumbre, el precio del activo *a* hoy debe estar dado por su valor presente

$$p_a = \frac{V_a}{R_0} = \frac{V_a}{r_0+1}$$

de no ocurrir esto, indica que alguien tendría una manera segura de hacer dinero. Si $p_a > V_a/R_0$, entonces alguien quien posea al activo *a* podría vender una unidad e invertir en el archivo riesgoso. En el siguiente periodo tendríamos $p_aR_0 > V_a$. Esto se debe a que al menos una persona querría vender el activo *a*, conduce a que p_a no sería un precio de equilibrio. Podríamos escribir la condición de equilibrio en términos del retorno del activo *a*. El retorno sobre el activo *a* esta definido por $R_a=V_a/p_a$. Si dividimos ambos lados de la condición original por p_a, y reordenando la expresión resultante tendemos

$$R_a = \frac{V_a}{p_a} = R_0$$

Esta expresión nos indica que en equilibrio, todos los activos con cierto retorno debe tener el mismo retorno, porque nadie mantendría la tendencia de un activo que se espere tener menor retorno que algún otro.

En el escenario donde los retornos de los activos son inciertos, los retornos esperados de los activos diferirán dependiendo del riesgo del activo. Sabemos que entre más riesgoso sea el activo, mayor deberá ser el retorno esperado para inducir a la gente a la tenencia de tal activo.

$$\bar{R}_a = R_0 + \text{prima de riesgo por el activo } a$$

El lado izquierdo de la ecuación de la expresión es el retorno esperado del activo *a*, el lado derecho es el retorno libre de riesgo mas la prima por el activo *a*, lo cual podemos expresar también como

$$\bar{R}_a - R_0 = \text{prima de riesgo por el activo } a$$

El lado izquierdo de la ecuación nos muestra el exceso de retorno del activo *a*, mientras que el lado derecho afirma que en equilibrio el exceso de retorno de cada activo debe ser igual a su prima por el riesgo. Nuevamente, solo se han planteado definiciones hasta este momento; nuestro objetivo principal aquí es mediante el concepto de prima al riesgo derivar condiciones para el análisis de los mercados de activos y su repercusión en el ahorro. Este análisis involucra las condiciones de equilibrio general que explicamos en el capítulo anterior, es decir, dado que el valor de un activo riesgoso depende de la presencia de otros activos riesgosos, los cuales sirven de complementos o sustitutos para el activo en cuestión. Entonces la fijación de precios en el mercado de activos depende de cómo covarien los valores de los activos entre sí.

Primero estudiemos el modelo base de fijación de precio, el Modelo de Fijación de Precio de Activos de Capital, El modelo propone una particularización de la utilidad, dice que la utilidad de una distribución de riqueza aleatoria depende solo de los dos primeros momentos de la distribución de probabilidad, la media y la varianza.

Iniciemos con la restricción presupuestal. El consumo del segundo periodo esta dado por

$$\tilde{C} = (W - c)\sum_{a=1}^{A} x_a \tilde{R}_a = (W - c)\left[x_0 R_0 + \sum_{a=1}^{A} x_a \tilde{R}_a\right]$$

Puesto que el peso del portafolio debe sumar 1, eso es que $x_0 = 1 - \sum_{a=1}^{A} x_a$, podemos escribir la restricción del siguiente modo.

$$\tilde{C} = (W - c)\left[R_0 + \sum_{a=1}^{A} x_a (\tilde{R}_a - R_0)\right]$$

Si somos observadores dentro de los corchetes tenemos el retorno del portafolio; dada nuestra definición de la utilidad el inversionista, éste buscará tener la mínima varianza posible de retorno del portafolio por un valor esperado dado. En palabras simples, el inversionista busca el portafolio eficiente. La elección de cuál portafolio será elegido depende de la función de utilidad del inversionista, sin embargo, cualquiera que este fuera debe minimizar la varianza para algún nivel dado de retorno esperado.

Entonces, el problema de optimización es minimizar la varianza del retorno del portafolio sujeto a restricciones que alcancen un retorno esperado específico, $\overline{R}$, y satisfaciendo la restricción presupuestal $\sum_{a=1}^{A} x_a = 1$.

$$\min_{x_0,\ldots,x_a} \sum_{a=0}^{A}\sum_{b=0}^{A} x_a x_b \sigma_{ab}$$

Sujeto a

$$\sum_{a=0}^{A} x_a \overline{R}_a = \overline{R}$$

$$\sum_{a=1}^{A} x_a = 1$$

Podemos permitir que x_i sea positivo o negativo. Interpretando esto como que el consumidor puede mantener una posición de cualquier activo, incluyendo el activo sin riesgo. Ahora si tomamos a λ como el multiplicador de Lagrange para la primer restricción y μ el multiplicador para la segunda restricción, las condiciones de primer orden quedarían

$$2\sum_{b=0}^{A} x_b \sigma_{ab} - \lambda \overline{R}_a - \mu = 0 \qquad \forall a=0,\ldots, A$$

Puesto que la función objetivo es convexa y las restricciones lineales, las condiciones de segundo orden se satisfacen automáticamente. Podemos emplear las condiciones de primer orden para describir el patrón de los retornos esperados. Sea $(x_1^e,\ldots,x_A^e)$ algún portafolio consistente enteramente de activos riesgosos que es eficiente. Si uno de los activos riesgosos disponibles para los inversionistas, digamos el activo *e*, es un *mutual fund*[81] que mantiene su portafolio eficiente. Entonces el portafolio que invierte 0 en cada activo, excepto para el activo *e* y 1 en activo *e* es eficiente. Esto implica que tal portafolio debe satisfacer las condiciones de primer orden descritas anteriormente para cada activo desde *a*=0, ..., *A*. Destacando para el portafolio $x_b=0$ para $b\neq e$, tenemos que la a-ésima condición de primer orden es

$$2x_b \sigma_{ab} - \lambda \overline{R}_a - \mu = 0$$

Aquí tenemos dos casos especiales cuando *a*=0 y cuando *a*=*e*

$$-\lambda \overline{R}_a - \mu = 0$$

$$2x_e \sigma_{ee} - \lambda \overline{R}_e - \mu = 0$$

Cuando *a*=0, σ_{ee} es cero porque el activo 0 no es riesgoso. Cuando *a*=*e*, σ_{ee}=σ_{ee} porque la covarianza de una variable consigo misma es simplemente la varianza de la variable aleatoria. Resolviendo para l y μ obtenemos:

$$\lambda = \frac{2\sigma_{ee}}{\overline{R}_e - \overline{R}_0}$$

[81] Mutual fund.- Fondo operado por una compañía de inversión que recauda dinero de accionistas e invierte en aciones, bonos, opciones, bienes o seguros de divisas. Estos fondos ofrecen al inversionista las ventaja de la diversificación y manejo profesional. Por estos servicios se carga un honorario por manejo, típicamente 1% o menos de los activos por año.

$$\mu = -\lambda R_0 = \frac{2\sigma_{ee} R_0}{\bar{R}_0 - R_0}$$

Sustituyendo y reordenando tenemos:

$$\bar{R}_a = R_0 + \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{ee}}(\bar{R}_e - R_0)$$

Esta expresión nos dice que el regreso esperado de cualquier activo es igual a la tasa libre de riesgo mas la prima al riesgo que depende de la covarianza de los retornos de los activos con algún portafolio de activos riesgosos media-varianza eficiente[82].

---

[82] La eficiencia a la que me refiero con éste término es sobre estimadores insesgados de varianza mínima. Si usted me lo permite, quisiera profundizar en esto para aclarar la idea. Considérese la clase de estimadores insesgados para el parámetro θ. Si una estadística T se encuentra dentro de esta clase, entonces $E(T)=\theta$ y el error cuadrático medio es $ECM(T)=Var(T)$. Como el objetivo es que la varianza de un estimador sea lo más pequeña posible, debemos buscar uno en la clase de estimadores insesgados, si es que éste existe, que tenga una varianza mínima para todos los valores posibles de θ. Este estimador recibe el nombre de estimador insesgado de varianza mínima uniforme de θ. La definición formal es la siguiente:
Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya función (densidad) de probabilidad es $f(x; \theta)$. Sea la estadística $T=u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un estimador de θ tal que $E(T)=\theta$ y $Var(T)$ es menor que la varianza de cualquier otro estimador insesgado de θ para todos los posibles valores de θ. Se dice entonces que T es un estimador insesgado de varianza mínima de θ. Sabemos que la varianza de una estimador insesgado es la cantidad más importante para decidir qué tan bueno es el estimador, permítame una redundancia, para estimar un parámetro θ. Por esto sean T_1 y T_2 cualesquiera dos estimadores insesgados de θ. Se dice que T_1 es un estimador más eficiente de θ que T_2 si $Var(T_1) \leq Var(T_2)$, cumpliéndose la desigualdad en sentido estricto para algún valor de θ. Es común emplear el cociente $Var(T_1)/Var(T_2)$ para determinar la eficiencia relativa de T_2 con respecto a T_1 (*si los estimadores son sesgados se emplean sus errores cuadráticos medios para determinar las eficiencias relativas*). En muchos casos resulta prohibitivo determinar las varianzas de todos los estimadores insesgados de θ y entonces se selecciona el estimador que tenga la varianza más pequeña. La búsqueda de un estimador de VMU se facilita con la ayuda de la cota inferior de Cramér-Rao.
Teorema.- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con una función (densidad) de probabilidad $f(x;\theta)$. Si T es un estimador insesgado de θ, entonces la varianza de T debe satisfacer la siguiente desigualdad

$$Var(T) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

El teorema establece un límite inferior para la varianza de un estimador de θ. Pero quiero ser claro, lo anterior no necesariamente implica que la varianza de un estimador VMU de θ tenga que ser igual al límite inferior de Cramér-Rao. De otra manera, es posible de entre todos los estimadores insesgados de θ que tenga la varianza más pequeña posible de entre todos los estimadores insesgados de θ, pero cuyas varianzas son más grandes que el límite inferior de Cramér-Rao. Un estimador de esta clase sigue siendo un estimador VMU de θ. Para un estimador insesgado cuya varianza se apega a la cota inferior de Cramér-Rao, se tiene la siguiente definición.
Si T es cualquier estimador insesgado del parámetro θ tal que

$$Var(T) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

entonces se dice que T es un estimador eficiente de θ.

Sea la fracción de riqueza invertida en el activo a en un portafolio m denotada por x_a^m. Cubriendo la restricción $\sum_{a=1}^{A} x_a^m = 1$. Si W_i denota el monto de riqueza que el individuo i invierte en el activo riesgoso a y p_a es el precio del activo a Debido a que cada inversionista mantiene el mismo portafolio de activos riesgosos tendremos:

$$x_a^m = \frac{p_a X_{ia}}{W_i} \text{ para } i=1,.., A$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación para W y sumando sobre i obtenemos

$$x_a^m = \frac{p_a \sum_{i=1}^{I} X_{ia}}{\sum_{i=1}^{I} W_i}$$

Observemos que el numerador es el valor de mercado del activo a. El denominador es el valor total de todos los archivos riesgosos. Entonces, x_a^m es la fracción de riqueza invertida en el activo a. Este portafolio es conocido como el portafolio de mercado de activos riesgosos[83].

Dado que el portafolio de mercado de activos riesgosos es un portafolio eficiente, podemos reescribir la ecuación del retorno esperado

---

De esta forma, el estimador eficiente de θ es el estimador VMU cuya varianza es igual al limite inferior de Cramér-Rao. El estimador eficiente de θ, si es que se puede encontrar, es el mejor estimador (insesgado) de θ en el contexto de la inferencia estadística clásica. Para concluir la explicación, Sea $X_1, X_2,..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Poisson cuya función de probabilidad es $p(x;\lambda)=e^{-\lambda}\lambda^x/x!$. Para obtener el estimador eficiente de λ debemos hacer lo siguiente:
Dado que $p(x;\lambda)= \lambda^x \exp(-\lambda)/x!$

$$\ln p(x;\lambda)=x\ln(\lambda)-\lambda-\ln(x!); \text{ y}$$

$$\frac{\partial \ln p(x;\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{x}{\lambda} - 1 = (x-\lambda)/\lambda$$

Entonces escribimos

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln p(X;\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right] = E[(X-\lambda)/\lambda]^2$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}E(X-\lambda)^2$$

$$= \frac{Var(X)}{\lambda^2}$$

Pero ya que X es una variable aleatoria de Poisson, $Var(X)=\lambda$. Dando como resultado:

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln p(X;\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right] = \frac{1}{\lambda};$$

y, por la definición que hemos dado anteriormente, la varianza del estimador eficiente de λ es

$$Var(T) = \frac{1}{n/\lambda} = \lambda/n = \sigma^2/n$$

donde $\sigma^2=\lambda$ es la varianza de la población ∴ el estimador eficiente del parámetro λ de Poisson es la media muestral.

[83] Este portafolio es observable mientras podamos medir las tenencias de activos riesgosos.

$$\bar{R}_a = R_0 + \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}(\bar{R}_m - R_0)$$

Con lo que obtenemos el resultado fundamental del modelo. Nos permite ver de modo empírico a la prima de riesgo; con esto podemos afirmar que la prima de riesgo es la covarianza del activo *a* con el portafolio de mercado dividida por la varianza del mercado por la diferencia de retorno de portafolio. El término $\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}$ es lo que se reconoce como el coeficiente de regresión de $\tilde{R}_a$ sobre $\tilde{R}_m$ y lo reconocemos como β_a si sustituimos queda:

$$\bar{R}_a = R_0 + \beta_a(\bar{R}_m - R_0)$$

Teoría de fijación de precios por arbitraje

Comúnmente observamos que la mayoría de los precios se mueven juntos, de otro modo, existe un grado de covarianza entre los precios de los activos. Una manera común de escribir los retornos de los activos expresados como función de algunos factores comunes y riesgos de activos específicos.

Si tenemos dos factores escribiremos:

$$\tilde{R}_a = b_{0a} + b_{1a}\tilde{f}_1 + b_{2a}\tilde{f}_2 + \tilde{\varepsilon}_a$$

Entenderemos a $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ como factores de la economía[84] que influyen sobre todos los retornos de los activos. Cada activo tiene una sensibilidad particular b_{ia} hacia el factor *i*. El riesgo del activo específico, $\tilde{\varepsilon}_a$, es independiente de los factores $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$.

Debido a la presencia del término constante b_{0a}, los factores $\tilde{f}_i$, para *i*=1,.2; y el riesgo $\tilde{\varepsilon}_a$ para *a*=1,..., *A* su esperanza puede ser asumida como cero[85]. De igual modo, supondremos que $E\tilde{f}_1\tilde{f}_2 = 0$, es decir, que son factores auténticamente independientes.

Para un mayor y mejor entendimiento es menester revisar casos especiales de la fijación de precios por arbitraje. Primero, revisemos donde no hay riesgo del activo específico, sólo tendremos un factor de riesgo

$$\tilde{R}_a = b_{0a} + b_{1a}\tilde{f}_1 \text{ para } a=0,\ldots, A$$

Buscamos explicar los retornos esperados de los activos en términos de la prima de riesgo. Por construcción sabemos que $\bar{R}_a = b_{0a}$, con lo que nuestro problema se reduce a examinar el comportamiento de b_{0a} para *a*=1,..., *A*.

Si tenemos un portafolio de dos activos, digamos *a* y *b*, donde la tenencia de activo *a* es *x* y la del activo *b* es 1-*x*. El retorno de este portafolio será.

$$x\tilde{R}_a + (1-x)\tilde{R}_b = [xb_{0a} + (1-x)b_{0b}] + [xb_{1a} + (1-x)b_{1b}]\tilde{f}_1$$

Si elegimos x^* tal que segundo termino es corchetes es cero tendríamos:

[84] Lo que en los periódicos y telediarios se menciona como *entorno macroeconómico*.
[85] Si las esperanzas no son cero, sólo hay que incorporarlas a b_{a0}.

$$x^* = \frac{b_{1b}}{b_{1b} - b_{1a}}$$

Para hacer esto debemos suponer que $b_{1b} \neq b_{1a}$, que indica que los activos *a* y *b* no tienen la misma sensibilidad. El portafolio resultante es por construcción un portafolio sin riesgo. Luego entonces, su retorno debe igualar la tasa libre de riesgo, lo que necesariamente implica

$$x^* b_{0a} + (1 - x^*) b_{0b} = R_0$$

Se puede expresar de otro modo como:

$$x^* (b_{0a} - b_{0b}) = R_0 - b_{0b}$$

Sustituyendo x^* y reordenado tenemos

$$\frac{b_{0b} - R_0}{b_{1b}} = \frac{b_{0b} - b_{0a}}{b_{1b} - b_{1a}}$$

Ahora, si intercambiamos los roles de *a* y *b*, en el presente argumento tenemos:

$$\frac{b_{0a} - R_0}{b_{1a}} = \frac{b_{0a} - b_{0b}}{b_{1a} - b_{1b}}$$

Queda claro que el lado derecho de ambas ecuaciones es lo mismo. Debido a que esto es verdad para todos los activos *a* y *b*, obtenemos

$$\frac{b_{0a} - R_0}{b_{1a}} = \lambda_1$$

Para alguna constante λ_1 para todos los activos *a*. Utilizando el hecho que $\bar{R}_a = b_{0a}$ y reordenando obtenemos la forma final del modelo de fijación de precios por arbitraje con un factor:

$$\bar{R}_a = R_0 + b_{1a}\lambda_1$$

Ésta ecuación nos expresa que el retorno esperado de algún activo *a* es la tasa libre de riesgo más una prima de riesgo, que está dada por la sensibilidad del activo *a* al factor común de riesgo por una constante. La constante la podemos interpretar como la prima de riesgo pagada sobre el portafolio que tiene sensibilidad 1 al tipo de riesgo representado por el factor 1.

Ahora revisemos el modelo con dos factores. Consideremos el modelo:

$$\tilde{R}_a = b_{0a} + b_{1a}\tilde{f}_1 + b_{2a}\tilde{f}_2$$

Construimos un portafolio (x_a, x_b, x_c) con tres activos *a*, *b*, *c* los cuales satisfacen:

$$x_a b_{1a} + x_b b_{1b} + x_c b_{1c} = 0$$

$$x_a b_{2a} + x_b b_{2b} + x_c b_{2c} = 0$$

$$x_a + x_b + x_c = 1$$

La primera expresión dice que el portafolio elimina el riesgo del factor 1; la segunda expresa que el portafolio elimina el riesgo del factor 2, y por último la tercera dice que la suma de las participaciones de los activos es 1, de otro modo, que realmente tenemos un portafolio.

Esto deriva que el portafolio tenga cero riesgo. Por consiguiente debe ganar el retorno sin riesgo, entonces $x_a b_{0a} + x_b b_{0b} + x_c b_{0c} = R_0$. Escribiendo estas condiciones en forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} b_{0a}-R_0 & b_{0b}-R_0 & b_{0c}-R_0 \\ b_{1a} & b_{1b} & b_{1c} \\ b_{2a} & b_{2b} & b_{2c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el vector (x_a, x_b, x_c) no consiste totalmente de ceros porque suma 1. De lo que se infiere que la matriz de la izquierda debe ser singular. Si los últimos dos renglones no son colineales, debe ser que el primer renglón es una combinación lineal de los dos últimos. Esto es, cada entrada en el renglón superior es una combinación lineal de las entradas correspondientes en los siguientes renglones. Esto nos conduce a

$$R_a - R_0 = b_{1a}\lambda_1 + b_{2a}\lambda_2 \ \forall a=1,\ldots, A$$

Las λ's conservan la interpretación que se había planteado, sólo que ahora son una ampliación a dos factores.

UTILIDAD ESPERADA

Consideraremos ahora un modelo de fijación de precio basado en la maximización intertemporal de la utilidad esperada. El problema para dos periodos es:

$$\max_{c,x_1,\ldots,x_A} u(c)+\alpha E\left[u\left((W-c)(R_0+\sum_{a=1}^{A}x_a(\tilde{R}_a-R_0))\right)\right]$$

Necesitamos determinar los ahorros del primer periodo, W-c, y el patrón de inversión del portafolio, (x_1,..., x_A), tal que maximice la utilidad esperada descontada.

Si $\tilde{R}=(R_0+\sum_{a=1}^{A}x_a(\tilde{R}_a-R_0))$ es el retorno del portafolio y tenemos que $\tilde{C}=(W-c)\tilde{R}$, podemos escribir las condiciones de primer orden como

$$u'(c)=\alpha Eu'(\tilde{C})\tilde{R}$$

$$0=Eu'(\tilde{C})(\tilde{R}_a-R_0) \text{ para } a=1,\ldots,A$$

La primer condición dice que la utilidad marginal en el primer periodo debe igualar a la utilidad marginal esperada descontada del consumo en el segundo periodo. La segunda dice que la utilidad marginal esperada de cambiar el portafolio del activo seguro al activo a debe ser cero para todos los activos a=1,..., A.

Si empleamos el segundo conjunto de condiciones para revisar sus efectos en la fijación de precios veremos que utilizando la igualdad de la covarianza podemos escribir las condiciones del siguiente modo:

$$Eu'(\tilde{C})(\tilde{R}_a-R_0)=\operatorname{cov}(u'(\tilde{C}),\tilde{R}_a)+Eu'(\tilde{C})(\tilde{R}_a-R_0)=0$$

Reordenando obtenemos

$$\bar{R}_a=R_0-\frac{1}{Eu'(\tilde{C})}\operatorname{cov}(\tilde{R}_a,u'(\tilde{C}))$$

Esta ecuación es muy parecida a la del modelo de fijación de precios de activos de capital, su diferencia radica en que la prima al riesgo depende de la covarianza con la utilidad marginal, en vez de con el portafolio de mercado de activos riesgosos. Si un activo está correlacionado positivamente con el consumo, estará correlacionado negativamente con la utilidad marginal de consumir, debido a $u''<0$. Esto lo debemos entender como que tendrá una prima al riesgo positiva, lo que conduce a que un mayor retorno esperado debe tenerse para satisfacer.

Este desarrollo es sólo para el inversionista individual i. Pero si se cumplen algunas condiciones se puede agregar. Si suponemos que los activos se distribuyen de modo normal, también el consumo se distribuirá normal. Por Rubinstein, tenemos

$$\operatorname{cov}(u'(\tilde{C}),\tilde{R}_a) = Eu''(\tilde{C})\operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_a)$$

Aplicando esto a la ecuación anterior obtenemos

$$\bar{R}_a = R_0 + \left(-\frac{Eu_i''(\tilde{C}_i)}{Eu'(\tilde{C}_i)}\right)\operatorname{cov}(\tilde{C}_i,\tilde{R}_a)$$

El término que multiplica la covarianza es lo que conocemos como la aversión global al riesgo del agente i. La denotaremos por r_i, multiplicando la ecuación tendremos:

$$\frac{1}{r_i}(\bar{R}_a - R_0) = \operatorname{cov}(\tilde{C}_i,\tilde{R}_a)$$

sumando sobre todos los inversionistas i=1,...,I y usando $\tilde{C} = \sum_{i=1}^{I}\tilde{C}_i$ para denotar el consumo agregado tenemos

$$(\bar{R}_a - R_0)\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{r_i} = \operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_a)$$

Que se puede expresar

$$\bar{R}_a = R_0 + \left[\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{r_i}\right]^{-1}\operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_a)$$

Ahora la prima al riesgo es proporcional a la covarianza del consumo agregado y el retorno del activo. Este factor de proporcionalidad es una medida de aversión al riesgo media. Podemos expresar el factor de proporcionalidad como el retorno excedente de una activo particular. Suponiendo que existe un activo c que está perfectamente correlacionado con el consumo agregado. El retorno del activo c, R_c, debe satisfacer

$$\bar{R}_c = R_0 + \left[\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{r_i}\right]^{-1}\operatorname{cov}(\tilde{C},\tilde{R}_c) = R_0 + \left[\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{r_i}\right]^{-1}\operatorname{var}(\tilde{C})$$

Resolviendo para la aversión al riesgo media, obtenemos

$$\left[\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{r_i}\right]^{-1} = \frac{\bar{R}_c - R_0}{\sigma_{cc}}$$

con lo que podemos escribir la ecuación de fijación de precios del activo como sigue:

$$\bar{R}_a = R_0 + \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_{cc}}(\bar{R}_c - R_0)$$

La razón de covarianzas en esta expresión se conoce como la beta de consumo de un activo. Esta es el coeficiente de la regresión teórica entre el retorno del activo a y el activo que está perfectamente correlacionado con el consumo agregado. Tiene la misma interpretación que se planteo para la beta del mercado.

MERCADOS COMPLETOS

Ahora supondremos que existen S estados naturaleza diferentes y para cada estado s existe un activo que paga $1 si el estado s ocurre y 0 si no ocurre. Un activo de esta forma se conoce como Seguro Arrow-Debreu. Sea p_s un precio de equilibrio para un seguro Arrow-Debreu s. Consideremos un activo arbitrario a con valor V_{as} en el estado s. Debido a que el seguro Arrow-Debreu s vale $1 en el estado s, este portafolio valdrá V_{as} en el estado s. Luego entonces, este portafolio tiene exactamente el mismo patrón de pagos que el activo a. Por consideraciones de arbitraje, el valor del activo a debe ser el mismo valor del portafolio, lo que nos conduce a que

$$p_a = \sum_{s=1}^{S} p_s V_{as}$$

ésta expresión muestra que el valor de algún activo puede ser determinado por los valores de los activos Arrow-Debreu. Si π_s es la probabilidad del estado s, tenemos

$$p_a = \sum_{s=1}^{S} \frac{p_s}{\pi_s} V_{as} \pi_s = E \frac{\tilde{p}}{\pi} \tilde{V}_a$$

Donde E es el operador de esperanza. Esta expresión nos dice que el valor de a es la esperanza del producto del valor del activo a y la variable aleatoria (p/π). Utilizando la identidad de la covarianza podemos obtener

$$p_a = cov\left(\frac{\tilde{p}}{\pi}, \tilde{V}_a\right) + E\frac{\tilde{p}}{\pi} E\tilde{V}_a$$

y por definición

$$E\frac{\tilde{p}}{\pi} = \sum_{s=1}^{S} \frac{\tilde{p}}{\pi} V_{as} \pi_s = \sum_{s=1}^{S} p_s$$

De lo que podemos inferir que $E(\tilde{p}/\pi)$ es el valor del portafolio que paga $1 por cierto periodo siguiente. Siendo R_0 el retorno libre de riesgo en tal portafolio tenemos que

$$E\frac{\tilde{p}}{\pi} = \frac{1}{R_0}$$

Substituyendo en la ecuación donde utilizamos la identidad de la covarianza tenemos

$$p_a = \frac{V_a}{R_0} + cov(\tilde{p}/\pi, \tilde{V}_a)$$

Por lo que el valor del activo a debe ser su valor esperado descontado mas una prima al riesgo. Si agregamos los supuestos de comportamiento diremos que, si el agente i adquiere c_{is} unidades del seguro Arrow-Debreu s, debe satisfacer la condición de primer orden.

$$\pi_s u'(c_{is}) = \lambda p_s$$

O expresándola en otra forma

$$\frac{u'(c_{is})}{\lambda_i} = \frac{p_s}{\pi_s}$$

De aquí obtenemos que p/π debe ser proporcional a la utilidad marginal del consumo del inversionista i. El lado izquierdo es una función de consumo estrictamente decreciente, debido a la aversión al riesgo.

ARBITRAJE PURO

Es el modelo con el mínimo de supuestos, lo único que se requiere es que no existan oportunidades para arbitraje. Con lo que habremos estudiado los modelos de fijación de precios en el mercado de valores.

Arreglando el conjunto de activos como una matriz de $A \times S$ donde la entrada V_{as} mide el valor del activo *a* en el estado naturaleza *s*, llamaremos a esa matriz *V*. Sea $X=(X_1,\ldots, X_A)$ un patrón de tenencia de los *A* activos. Entonces el valor de este patrón de inversión para el segundo periodo será un S-vector dado por el producto matricial VX.

Suponiendo que X resulta un pago no negativo en cada estado naturaleza $VX \geq 0$. Este caso la lógica impone que el valor de este patrón de inversión debe ser no negativo, es decir, $pX \geq 0$. De otra manera, tendría una oportunidad obvia para arbitraje. Por la que obtenemos la condición conocida como el principio de no arbitraje

Si $VX \geq 0$, entonces $pX \geq 0$

Esto es, de modo esencial, un requerimiento para que no exista gratuidad. El principio de no arbitraje implica que existe un conjunto de precios estado $\rho_s \geq 0$ para $s=1,\ldots, S$ tal que el valor de cualquier activo a está dado por

$$p_a = \sum_{s=1}^{S} \rho_s V_{as}$$

Esto obedece a que el principio de no arbitraje implica precios estado no negativos $(\rho_1,\ldots, \rho_S)$. Ahora consideremos el problema primal:

$$\min pX$$

$$\text{sujeto a } VX \geq 0$$

El problema nos dice que debemos encontrar el portafolio más barato que da un vector de todos los retornos no negativos. Como X=0 es solución factible y el principio implica que minimiza la función objetivo, lo que nos conduce a que el problema tiene finitas soluciones. El problema dual quedaría.

$$\text{Max } 0\rho$$

$$\text{sujeto a } \rho V = p$$

donde ρ es el vector S-dimensional no negativo de variables duales. Debido a que el primal tiene finitas soluciones, también así el dual. Entonces encontramos que una implicación necesaria de la condición de no arbitraje es que debe de existir un vector S-dimensional no negativo ρ tal que:

$$p = \rho V$$

Retomando la probabilidad π_s podemos escribir

$$p_a = \sum_{s=1}^{S} \frac{\rho_s}{\pi_s} V_{as} \pi_s$$

El lado derecho de la ecuación es la esperanza del producto de dos variables aleatorias. Si Z es la variable aleatoria que toma los valores ρ_s/π_s y sea $\tilde{V}_a$ la variable aleatoria que toma los valores V_{as}. Si aplicamos la identidad de la covarianza tenemos

$$p_a = EZ\tilde{V}_a = cov(Z,\tilde{V}_a) + Z\bar{V}_a$$

y por definición tenemos

$$Z = \sum_{s=1}^{S} \frac{\rho_s}{\pi_s}\pi_s = \sum_{s=1}^{S}\rho_s$$

El lado derecho de la expresión es el valor del seguro que paga 1 en cada estado naturaleza, o sea, el valor del bono sin riesgo. Por definición el valor es $1/R_0$ sustituyendo y reordenando tenemos

$$\bar{V}_a = p_a R_0 - R_0\, cov(Z,\tilde{V}_a)$$

Dividiendo por p_a para convertir esto en una expresión que involucra al retorno del activo

$$\bar{R}_a = R_0 - R_0\, cov(Z,\tilde{R}_a)$$

De esta ecuación se obtiene que bajo condiciones muy generales la prima de riesgo por cada activo con una variable aleatoria, la misma par todos los activos.

STANDING ON THE SHOULDERS OF GIANTS

En ésta sección revisaremos lo que a mi juicio son trabajos fundamentales para el desarrollo de la teoría y la natural generación de la literatura sobre el ahorro. Si me permite amigo lector, disgregaremos éstos trabajos que han ido destapando los pomos de las esencias. Sin revisar, analizar y entender estos trabajos es imposible comprender como hemos modificado nuestra percepción de ahorro.

UNA TEORÍA MATEMÁTICA DE AHORRO[86]

Este estudio es el primer intento formal para explicar las causas del ahorro. Frank P. Ramsey genera lo que será la influencia fundamental en la literatura sobre crecimiento económico óptimo. Matemáticamente es innovador, ya que es una de las primeras aplicaciones del cálculo de variaciones a la economía. La pregunta esencial es determinar la asignación intertemporal de recursos. Ramsey en su trabajo busca responder cuánto del producto nacional, en algún punto del tiempo, debe ser asignado para consumo corriente para generar utilidad corriente, y cuánto debe ahorrarse (e invertirse) para mejorar la producción y consumo futuros, así como mejorar la generación de utilidad futura. El planteamiento es sencillo, *la tasa de ahorro multiplicada por la utilidad marginal del dinero siempre deberá igualar al monto por el cual la tasa neta de disfrute de utilidad no alcanza a la tasa máxima posible de disfrute.* Se asume que el producto se genera con dos insumos, capital y trabajo. La función de producción no varía en el tiempo, por lo que se define que no se permite progreso tecnológico. De igual modo se presenta la ausencia de depreciación para el capital y una población estacionaria. Por el otro lado, el monto de servicios de trabajo causados pueda todavía variar. El producto puede ser consumido o ahorrado, con el resultado de que todo lo que es ahorrado se transforma en inversión y acumulación de capital. Se propone $x(t)$ y $a(t)$ como las tasas de consumo y trabajo, además $c(t)$ se entiende como el capital en el tiempo t. El ingreso se supone como una función $f(a, c)$, teniendo como primer resultado que la suma entre ahorro y consumo debe ser igual a ingreso

[86] Ramsey, Frank P. "A mathematical theory of saving" Economic Journal, Diciembre 1929, páginas 543-559.

$$\frac{dc}{dt} + x = f(a,c)$$

Ahora $U(x)$ denota la tasa total de utilidad de una tasa de consumo x y $V(a)$ es la tasa total de desutilidad de una tasa de trabajo a, por lo que las tasas marginales correspondientes serán

$$u(x) = \frac{dU(x)}{dx}$$

$$v(a) = \frac{dV(a)}{da}$$

Como siempre se asumen $u(x)$ nunca creciente y $v(a)$ nunca decreciente. Voy a aligerar la notación usando la notación estándar, como la que se emplea en las aulas. Tenemos ahora que:

$$Q=C+S=C+K'$$

$$C=Q(K, L)-K'$$

El consumo contribuye al bienestar social por la función utilidad con utilidad marginal $U''(C)\leq 0$. Para producir sus bienes de consumo la sociedad incurre en la desutilidad del trabajo $D(L)$ con desutilidad marginal $D''(L)\geq 0$. Entonces la utilidad social neta es $U(C)-D(L)$, donde C y L, tanto como K y Q son funciones del tiempo. Aquí empieza la aportación de Ramsey, se plantea que un capital dado no se incrementará ni se reducirá. Entonces $U(C)-D(L)$, que es la tasa neta de utilidad por unidad de tiempo, está sujeta a que el gasto es igual a lo que se puede producir con trabajo y capital, y en algún punto incrementará debido a que con mayor capital podremos obtener mayor utilidad. Entonces, resolveremos mediante la introducción de un planificador social, quién tiene que resolver el problema de maximizar, tanto para la generación actual como las generaciones futuras, la utilidad social. Tenemos que:

$$\text{Maximizar} \int_0^{\infty} [U(C) - D(L)]dt$$

En el integrando, U depende únicamente de C, y como habíamos visto con anterioridad, C depende de K, L y K', mientras que D depende sólo de L. Entonces, este es un problema con dos variables de estado, K y L. Debido a que no existe término L' en el integrando no se puede estipular una condición inicial en L. De otro modo, el problema degenera en el lado L.

La integral impropia no contiene un factor de descuento, dicha omisión no es negligencia, todo lo contrario. Ramsey encuentra que es "éticamente indefendible" para el planificador de la generación actual descontar la utilidad de generaciones futuras, alegando que es el resultado de la "debilidad de la imaginación", planteamiento con el que me permito disentir totalmente. Aquí tenemos un problema serio. Mire usted querido lector, aunque es moralmente bien visto el planteamiento de Ramsey al respecto presenta una dificultad, nos limita el empleo de las condiciones de convergencia. Revisemos ahora que la condición nos dice: En la integral

$$\int_0^{\infty} F(t, y, y')dt$$

Si el integrando toma la forma de $G(t, y, y')e^{-\rho t}$, donde ρ es una tasa de descuento positiva, y la función G está acotada, entonces la integral convergerá[87].

[87] Una característica de ésta integral es la presencia del factor de descuento $e^{-\rho t}$ el cual, todo lo demás constante, provee una fuerza dinámica para conducir el integrando hacia cero en el tiempo a buena velocidad. Cuando el componente $G(t, y, y')$ del integrando es positivo y tiene una cota superior, pensemos en $\bar{G}$, la

Para afrontar el problema anterior Ramsey replantea de modo que tenemos ahora que:

$$\text{Minimizar} \int_0^\infty [B - U(C) + D(L)]dt$$

sujeto a $K(0)=K_0$; con K_0 dado

Aquí B (disfrute) se postula como un nivel máximo de utilidad neta alcanzable. Expliquemos este punto. Ramsey se plantea que un incremento en la tasa de utilidad con aumento de capital puede detenerse por dos motivos. Primero, puede ocurrir que un incremento adicional de capital no permitiría incrementar el ingreso ni el ocio. Segundo, se podría haber alcanzado una tasa máxima concebible de disfrute, por lo que ya no habría uso para mayor ingreso u ocio. En cualquiera de los dos casos, cierta tasa de capital nos dará la mayor tasa de disfrute económicamente factible, fuere o no la mayor tasa concebible. Revisando, la nueva funcional ésta mide el monto por el cual la utilidad neta $U(C)$-$D(L)$ no se alcanza. En otras palabras, se minimiza en lugar de maximizarse. Este punto nos indica que un plan de asignación óptima puede, tanto conducir a la sociedad hacia el disfrute, o aproximarse al disfrute de modo asintótico. De ocurrir esto, el integrando caerá sostenidamente al nivel cero, o se aproximará a cero como $t \to \infty$. Debido a la construcción que plantea Ramsey el problema de la convergencia se resuelve por este medio. Entonces, ya queda entendido que las sustitución de las funcionales es lo que se conoce como el "truco Ramsey", el cual es ampliamente aceptado como suficiente para condiciones de convergencia. Discutamos un poco las condiciones de convergencia. La primer condición dice que dado la integral impropia

$$\int_0^\infty F(t, y, y')dt$$

Si el integrando F es finito a lo largo del intervalo de integración, y si F alcanza el valor cero en algún punto finito del tiempo, pensemos en t_0 y permanece en cero $\forall t > t_0$, entonces la integral convergerá[88]. Entonces esto confirmaría que si el integrando alcanza cero en algún tiempo finito y permanece en cero a partir de tal punto, entonces la convergencia se asegura. Pero, hay una condición que dice: Dada la integral impropia

$$\int_0^\infty F(t, y, y')dt$$

Si $F \to 0$ como $t \to \infty$, entonces la integral convergerá[89]. Lo que indica que el simple hecho de que el integrando tienda a cero como t tiende a infinito no garantiza en sí mismo la convergencia.

---

fuerza descendiente de $e^{-\rho t}$ es suficiente para hacer converger a la integral. De modo formal decimos que, debido a que el valor de la función G nunca puede exceder el valor de la constante $\hat{G}$, escribimos

$$\int_0^\infty G(t, y, y')e^{-\rho t}dt \leq \int_0^\infty \hat{G}e^{\rho t}dt = \frac{\hat{G}}{\rho}$$

Ésta igualdad, basada en la formula de valor presente de un flujo constante perpetuo, muestra que la segunda integral con la cota superior $\hat{G}$ en el integrando es convergente. De lo que se deduce que la primer integral cuyo integrando es $G \leq \hat{G}$, también debe converger.

[88] Esto es muy importante debido a que este razonamiento está en la naturaleza de una condición suficiente. Aunque la integral planteada nominalmente tiene un horizonte infinito, el límite superior efectivo de integración es un valor finito, t_0. Por lo que la integral impropia se reduce a una integral propia, con la seguridad de que se integrará a un valor finito.

[89] Es muy común que esta condición se tome como una condición suficiente, pero no lo es en sí misma. Para revisar esto les propongo revisar un contraejemplo, el cual es ampliamente estudiado en la literatura de optimización dinámica. Pensemos en dos integrales con la siguiente forma

Lo que pide que el integrando también debe caer lo suficientemente rápido en el tiempo. Como hemos visto Ramsey no resuelve de modo claro y convincente el problema de la convergencia, lo que nos remite a suponer que sí se converge. Supuesto que es muy fuerte, ya que pueden existir formas funcionales tales que no converjan.

Ahora hay que plantear la solución. Podemos ver que es un problema autónomo en las variables de estado *K* y *L*. Del integrando tenemos

$F=B-U(C)+D(L)$ donde $C=Q(K, L)-K'$

Primero trabajemos con *L*, con lo que obtendremos las derivadas

$$F_L = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial L} + D'(L) \equiv -\mu Q_L + D'(L) \quad [\mu \equiv U'(C)]$$

$$F_{L'} = 0$$

donde μ denota la utilidad marginal. De igual modo que *U(C)*, μ es una función de C y por lo tanto indirectamente una función de *K*, *L* y *K'*.

Revisemos ahora *K*. Las derivadas que obtenemos son:

$$F_K = -U'(C)\frac{\partial C}{\partial K} = -\mu Q_K$$

$$F_{K'} = -U(C)\frac{\partial C}{\partial K'} = -U(C)(-1) = U'(C) = \mu$$

Con estas derivadas ya podemos utilizar las ecuaciones de Euler.[90] Primero veamos que debido a que $F_{L'}=0$, la ecuación de Euler para la variable *L* es$F_L-dF_{L'}/dt=0$, se reduce a $F_L=0$, o de otro modo

$D'(L)=\mu Q(L);\ \forall t\geq 0$

Esto quiere decir que la desutilidad del trabajo debe igualar al producto marginal, en cualquier punto del tiempo.

Para el capital la ecuación de Euler queda $F_K-dF_{K'}/dt=0$ $-\mu Q_K-d\mu/dt=0$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{(t+1)^2}\,dt \ \text{ y } \ I_2 = \int_0^\infty \frac{1}{t+1}\,dt$$

Cada una tiene un integrando que tiende a cero como t→∞. Pero mientras I_1 converge, I_2 no

$$I_1 = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^b = 1;\ I_2 = \lim_{b\to\infty}[ln(t+1)]_0^b = \infty$$

La diferencia radica en la rapidez a la cual el integrando cae hacia cero. Para I_1, donde claramente el denominador del integrando es un término cuadrático, la fracción cae con suficiente velocidad como *t* toma crecientemente valores mayores, lo cual resulta en convergencia. Para I_2, La velocidad de descenso no es lo suficientemente grande, y la integral diverge. Por lo que podemos decir que la condición de $F\to 0$ como $t\to\infty$ no garantiza convergencia. Le dejo a usted, estimado lector responder la pregunta contraria, le recomiendo usar contra ejemplos como el que hemos empleado para reflexionar.

[90] $F_{yj} - \frac{d}{dt}F_{yj'} = 0 \ \forall t\in[0, T]$ con $j=1, 2, \ldots n$.

$$\frac{d\mu / dt}{\mu} = -Q_K \; \forall t \geq 0$$

De aquí obtenemos una regla sobre el consumo: la utilidad marginal del consumo debe tener, en cualquier punto del tiempo, una tasa de crecimiento igual al negativo del producto marginal del capital. Dicha regla puede generar la trayectoria óptima de μ. Encontrada la trayectoria óptima para μ, ésta se puede emplear para determinar la senda óptima de L.

Ahora, la trayectoria óptima K y su trayectoria de inversión y ahorro relacionada K' es en donde centraremos el análisis. Dado que esto es un caso especial de $F=F(y, y')$ Dado que F es libre en t este caso, tenemos que $F_{ty'}=0$, tal que la ecuación de Euler queda

$$F_{y'y'}y''(t)+F_{yy'}y'(t)-F_y=0$$

La solución de esta ecuación es de ninguna manera obvia, pero si multiplicamos la expresión por y', el lado izquierdo resultante será exactamente la derivada $d(y'F_{y'}-F)/dt$ para

$$\frac{d}{dt}(y'F_{y'}-F)=\frac{d}{dt}(y'F_{y'})-\frac{d}{dt}F(y,y')$$

$$=F_{y'}y''+y'(F_{yy'}y'+F_{y'y'}y'')-(F_y y'+F_{y'}y')$$

$$=y'(F_{y'y'}y''+F_{yy'}y'-F_y)$$

Por lo que la ecuación de Euler puede escribirse como

$$F-y'F_{y'}=\text{constante}$$

Resultando una ecuación diferencial de primer orden, que bajo ciertas circunstancias puede manejarse de modo más simple que la ecuación de Euler original. Para nuestro análisis, sin t como un argumento explícito en el integrando, la ecuación de Euler para K es, $F-K'F_{K'}$=constante, o de otra manera:

$$B-U(C)+D(L)-K'\mu=\text{constante}; \; \forall t \geq 0$$

Esta ecuación puede resolverse para K' en el momento que se le asigne un valor, el cual será necesariamente arbitrario, a la constante del lado derecho de la ecuación. Aquí hay que resaltar que la constante permanece para todo t, lo que incluye que $t \to \infty$. Recordemos que pretendemos que $U(C)-D(L)$ tienda al disfrute mientras $t \to \infty$. Entonces la utilidad debe tender a su cota superior y la utilidad marginal debe tender a cero como t se vuelva infinito. De lo que se infiere que la constante tiene que ser cero. Si es así, la trayectoria óptima de K' será

$$K^{*\prime}=\frac{B-U(C)+D(L)}{\mu};$$

también se puede desarrollar empleando el argumento de tiempo de modo explícito quedando como

$$K^{*\prime}(t)=\frac{B-U[C(t)]+D[L(t)]}{\mu(t)}$$

Este resultado se conoce como la Regla de Ramsey. Dicha regla plantea que alcanzando la optimalidad, la tasa de acumulación de capital debe, en cualquier punto del tiempo, ser igual a la razón de la no obtención de utilidad neta del disfrute y la utilidad marginal del consumo. Pudiera parecer a simple vista que la regla es independiente de la función de producción. Esto conduce a

Ramsey a concluir[91] que la función de producción importará sólo hasta el punto donde afecte la determinación del disfrute. Por desgracia tal afirmación es errónea, ya que si tomamos

$$\frac{d\mu / dt}{\mu} = -Q_K \; \forall t \geq 0$$

por lo que μ es elegida de modo óptimo con referencia a Q_K. Esto claramente indica que el denominador depende de modo importante de la función de producción.

Ahora mediante las condiciones de transversalidad para problemas de horizonte infinito podemos dictaminar que la constante debe ser igual a cero. Cuando aplicamos

$$\lim_{t \to \infty}(F - y' F_{y'}) = 0$$

Aplicada a las variables de estado se obtiene

$$\lim_{t \to \infty}(F - L' F_{L'}) = 0 \text{ y } \lim_{t \to \infty}(F - K' F_{K'}) = 0$$

Como $F_{L'}=0$, la primera de éstas condiciones se reduce a $F \to 0$ como $t \to \infty$. Esto significaría que la utilidad neta $U(C)$-$D(L)$ debe tender al disfrute. Debemos resaltar que por si misma ésta condición todavía deja la constante incierta. Sin embargo, la otra condición fijará la constante en cero, porque F-$K'F_{K'}$ es simplemente el lado izquierdo de

$$B-U(C)+D(L)-K'\mu = \text{constante}$$

Ahora se aprecia que el problema especifica, de modo implícito, el estado terminal en disfrute. De modo consecuente la condición de transversalidad

$$\lim_{t \to \infty} F_{y'} = 0$$

La cual es la condición de transversalidad para estado terminal libre, dicha condición por la construcción del modelo no se necesita emplear. Por la regla de Ramsey podemos encontrar la trayectoria $K^*(t)$ mediante la integración de

$$K^{*\prime}(t) = \frac{B - U[C(t)] + D[L(t)]}{\mu(t)}$$

Pero para realizar la integración se requiere asignar forma funcional para $U(C)$ y $D(L)$. Ahora bien, la solución general contendrá una constante arbitraria, la cual puede ser definida por la condición inicial $K(0)=K_0$, con lo que completamos la solución del modelo.

Ya sabemos el papel que desempeña el método de multiplicadores de Lagrange en los problemas de optimización sujetos a restricciones. Para reforzar el análisis que hemos venido haciendo al planteamiento de Ramsey podemos reconsiderarlo mediante el empleo del método de los multiplicadores. Ahora, el integrando en la funcional objetivo es

$$F=B-U(C)+D(L) \text{ donde } C=Q(K, L)-K'$$

La función F se consideraba que contenía sólo dos variables, K y L, porque sustituimos la variable C. Cuando tomamos las derivadas F_K y $F_{K'}$, la regla de la cadena nos ayuda a generar

$$F_K = -U'(C)Q_K = -\mu Q_K \text{ y } F_{K'} = -U'(C)(-1) = \mu \, ; [\mu \equiv U'(C)]$$

EL empleo de la regla de la cadena reduce C a una variable intermedia que desaparece al final. Para aplicar el método de Lagrange debemos considerar a C como otra variable en el mismo nivel que K y L. Con esto se puede reconocer la restricción

[91] Ramsey op cit Página 548.

$$g(C, L, K, K')=Q(K, L)-K'$$

formulando ahora el problema con una restricción explícita.

$$\text{Minimizar } \int_0^{\infty}[B-U(C)+D(L)]dt$$

sujeto a $Q(K, L)-K'-C=0$

y condiciones de frontera

La función integrando lagrangiana[92] como

$$\Phi=B-U(C)+D(L)+\lambda[-Q(K, L)+K'+C]$$

Debido a que tenemos ahora tres variables (C, L, K) y un multiplicador de Lagrange λ, debemos tener cuatro ecuaciones Euler-Lagrange

$$\Phi_C-\frac{d}{dt}\Phi_{C'}=U'(C)+\lambda=-\mu+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\mu$$

$$\Phi_L-\frac{d}{dt}\Phi_{L'}=D'(L)-\lambda Q_L=D'(L)-\mu Q_L=0$$

$$\Phi_K-\frac{d}{dt}\Phi_{K'}=-\lambda Q_K-\frac{d}{dt}\lambda=-\mu Q_K-\frac{d\mu}{dt}=0$$

$$\Phi_\lambda-\frac{d}{dt}\Phi_{\lambda'}=-Q(K,L)+K'+C=0$$

La primer condición nos dice que el multiplicador de Lagrange λ es igual a μ, la utilidad marginal del consumo. La segunda es idéntica a $D'(L)=\mu Q(L)$. La tercer condición transmite la misma información que

$$\frac{d\mu/dt}{\mu}=-Q_K$$

Por último, la condición final restablece la restricción. Con lo que se comprueba que el método de multiplicadores de Lagrange genera las misma conclusiones que hemos planteado anteriormente. Ahora veamos que nos deja el estudio de Ramsey. Nos dice primero que la tasa de ahorro multiplicada por la utilidad marginal del consumo deberá siempre ser igual al disfrute menos la tasa real de utilidad disfrutada. Pero él mismo se percata de que dicha regla no puede aplicarse cuando se toma en cuenta problemas de tiempo descontado. Pero, aún así destaca una característica de su regla, que es independiente de la función de producción, punto que ya hemos tocado y discutido con anterioridad, además de plantear la paradoja entre ingreso y la tasa de interés. ¿Qué podemos concluir? ¿Ramsey se equivoco? No, simplemente su estudio responde a lo que sabíamos y desconocíamos del ahorro en la década de los 20. Incorpora a la economía el poderoso instrumento del cálculo de variaciones, aporte valioso y fundamental. Pero, no se a usted estimado lector, a mi me deja con más preguntas que respuestas. Al menos podemos decir que el estudio de Ramsey cumple con una misión fundamental de la ciencia, nos hace dudar. Matemáticamente es muy interesante, aunque cansado. Revisemos el saldo obtenido. Primero, sabemos que podemos resolver el problema dándole la forma de horizonte infinito. Otra

[92] Se obtiene por $\Phi=F+\lambda_1(t)(c_1-g^1)+\cdots+\lambda_m(t)(c_m-g^m)$

$$=F\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)(c_i-g^i)$$

conclusión que nos aporta es que es buena idea emplear las tasas de descuento sin temer ser llamados faltos de imaginación. Y lo más importante, y es donde Ramsey nos abre una puerta por la cual ahora podemos transitar, el ahorro se moverá conforme se comporte el individuo. Eso ya lo habíamos entendido en el capítulo anterior, pero Ramsey comienza por ese camino y de modo súbito e intempestivo lo simplifica de modo violento, en una sociedad con dos clases: los acomodados, gozando del disfrute obtenido y generando más; y aquellos que se encuentran en el nivel de subsistencia. Y siento que es ahí donde nos deja con la sensación de algo ausente.

LA HIPÓTESISDE AHORRO DEL CICLO VITAL: IMPLICACIONES AGREGADAS Y PRUEBAS[93]

Este trabajo presentado por Ando y Modigliani es la culminación de varios estudios que indagan y discuten la función de consumo. Todos ellos encaminados a verificación empírica de varias teorías, entre ellas la propuesta por Milton Friedman. Modigliani dirige los esfuerzos hacia la derivación de implicaciones prácticas sobre el consumo y gasto de los individuos, que en efecto, mejoran aquellos resultados expuestos por Friedman, así como explicar las evidencias que surgieron al confrontar la función consumo de Keynes con observaciones. Tanto Modigliani, Ando y Brumberg emplearon el modelo de Irving Fisher para estudiar la función consumo. Nos enfocaremos, de igual modo como lo hemos hecho con el trabajo de Ramsey, en el planteamiento teórico más que en las verificaciones empíricas y en el análisis de las series de tiempo. No por negligencia, por el contrario, considero que es más importante revisar las aportaciones de Ando y Modigliani ya que son una influencia fundamental en la literatura sobre consumo y ahorro en las décadas que sucedieron a la publicación de la investigación.

Comencemos con la derivación de la función agregada de consumo. Primero se entiende a la función de utilidad como una función de su propio consumo agregado tanto en el periodo actual como en periodos futuros. De igual modo se asume que el individuo maximiza su utilidad sujeta a sus recursos disponibles, entendiendo a sus recursos como la suma de ganancias corrientes y ganancias futuras descontadas a lo largo de su vida, mas su riqueza neta. El resultado de la maximización es que el consumo corriente puede expresarse como una función de sus recursos y la tasa de retorno del capital con parámetros que dependen de la edad del individuo. Lo que implica que a partir de las funciones de consumo individuales se puede obtener la función agregada de consumo para la comunidad.

Los supuestos fundamentales son muy sencillos. Asumimos a la función de utilidad homogénea con respecto al consumo es distintos puntos del tiempo. De igual forma se supondrá que el individuo no espera recibir ni desea dejar alguna herencia[94]. Estos supuestos son mostrados en que dado un año dado *t*, el consumo total de una persona a la edad *T* será proporcional al valor presente de sus recursos totales incrementados para él durante el resto de su vida.

$$c_t^T = \Omega_t^T v_t^T$$

Aquí Ω_t^T es el factor de proporcionalidad que dependerá de la forma específica de la función de utilidad, la tasa de retorno de los activos y la edad en el momento de la persona, pero

[93] Ando, Albert, Franco Modigliani. "The life cycle hypothesis of saving: aggregate implications and tests". The american economic review páginas

[94] Quisiera explicar un poco más ambos supuestos. Primero sobre la homogeneidad. El considerar homogénea a la función de utilidad con respecto al consumo implica que el valor de cada unidad monetaria adicional será asignado en consumo en diferentes tiempos en la misma proporción en la que se ha asignado previamente el total de los recursos antes del aumento. Respecto a la parte de la herencia, es un supuesto que se relaja en dos sentidos. Primero la utilidad a lo largo de la vida depende de la herencia planeada, pero debido a la homogeneidad dependerá igualmente del consumo planeado. Por otro lado se puede asumir que los montos destinados para herencias son una función creciente de los recursos del individuo relativo al nivel promedio de recursos de su grupo de edad, y que el tamaño relativo de la distribución de recursos en cada grupo de edad permanece estable a lo largo del tiempo.

no de los recursos totales representados por v_t^T. El consumo está representado por c_t^T, muestra el consumo total del año t[95]. Por último el valor presente de los recursos a la edad T, v_t^T, puede expresarse como la suma de riqueza neta acarreada del periodo anterior, a_{t-1}^T, y el valor presente del ingreso no propio[96] que la persona espera ganar durante lo que resta su vida productiva.

$$v_t^T = a_{t-1}^T + y_t^T + \sum_{r=T+1}^{N} \frac{y_t^{eTr}}{(1+r_t)^{r-T}}$$

donde y_t^T denota el ingreso no propio corriente; por otra parte y_t^{eTr} será el ingreso no propio que un individuo de edad T espera ganar en el r-ésimo año de su vida. N representa el tiempo de duración de las ganancias, y r_t representa la tasa de retorno de los activos. Para efectos de profundizar en el análisis se presenta la noción de ingreso promedio anual esperado, y_t^{eT}, quedando:

$$y_t^{eT} = \frac{1}{N-T} \sum_{t=T+1}^{N} \frac{y_t^{eTr}}{(1+r_t)^{r-T}}$$

Empleando ésta definición podemos escribir nuevamente el consumo como:

$$c_t^T = \Omega_t^T y_t^T + \Omega_t^T (N-T) y_t^{eT} + \Omega_t^T a_{t-1}^T$$

Para agregar la expresión, Ando y Modigliani plantean un procedimiento de dos partes, una dentro de cada grupo de edad y después sobre los grupos de edad. Si se asume que el valor de Ω_t^T es idéntico para todos los individuos en un grupo de edad dado solamente se requiere agregar las expresión anterior sobre un grupo de edad para obtener

$$C_t^T = \Omega_t^T Y_t^T + (N-T)\Omega_t^T Y_t^{eT} + \Omega_t^T A_{t-1}^T$$

donde C_t^T, Y_t^T, Y_t^{eT} y A_{t-1}^T son los agregados correspondientes para el grupo de edad T de c_t^T, y_t^T, y_t^{eT} y a_{t-1}^T. Si Ω_t^T no es idéntico para todos los individuos los coeficientes deben ser interpretados como medias ponderadas de los coeficientes de la expresión sin agregar. Entonces, tomando la expresión agregada como una representación válida de la relación entre consumo y recursos totales para los distintos grupos de edad se pretende agregarlos para todos los grupos de edad, para así obtener una función de consumo para toda la comunidad. Para este efecto se propone considerar

$$C_t = \alpha_1'' Y_t + \alpha'_2 Y_t^e + \alpha'_3 A_{t-1}$$

Donde C_t, Y_t, Y_t^e y A_{t-1} se obtienen sumando respectivamente a C_t^T, Y_t^T, Y_t^{eT} y A_{t-1}^T sobre todos los grupos de edad T, representando consumo agregado, ingreso no propio corriente, ingreso no propio anual esperado y riqueza neta.

Debido a que el trabajo de Ando y Modigliani busca determinar los estimadores de la función consumo, y con ello una verificación empírica requieren de introducir supuestos muy fuertes con objeto de simplificar la forma de la función de utilidad y el patrón a lo largo de la vida

[95] Consiste en las erogaciones actuales de bienes perecederos y servicios mas el valor de la renta del stock de bienes duraderos usufructuados por el consumidor.

[96] El término original es *nonporperty income*, la idea que nos da es aquel ingreso que hay que obtener, buscar. Esa es la idea que pretendo transmitir y que el trabajo estudiado así mismo busca.

de las ganancias. Supuesto tres, el consumidor en cualquier edad planea consumir sus recursos totales equitativamente durante el resto de su vida. Ahora, el que sería el cuarto supuesto se divide en tres partes: 1) Cada grupo de edad en el periodo de ganancias tiene el mismo ingreso promedio en algún año t. 2) En algún año t, el ingreso promedio esperado por aun grupo de edad T para algún periodo posterior r, dentro de su periodo de ganancias, es el mismo. 3) Cada hogar tiene el mismo periodo de vida y de ganancias, tanto esperado como actual, y se asume que es de 50 y 40 años respectivamente. El supuesto número cinco dice que la tasa de retorno de los activos es constante y se espera que se mantenga constante. Bajo éstos supuestos, si el ingreso real sigue una tendencia de crecimiento exponencial, ya sea debido al incremento de la población o al incremento de productividad, las condiciones suficientes para la constancia en el tiempo de los parámetros de la expresión de consumo agregada se satisfacen. Entonces el valor de los parámetros depende sólo de la tasa de retorno de los activos y de la tasa total de crecimiento del ingreso, el cual es la suma del crecimiento poblacional y la tasa de incremento de productividad[97].

La medición del ingreso no propio esperado, Y^e, el cual presenta el problema de que no es directamente observable. Se menciona que una hipótesis ingenua sería asumir que el ingreso no propio esperado es igual al ingreso corriente, excepto por un posible factor de escala. Basándonos en esto se tiene:

$$Y_t^e = \beta' Y_t ; \beta' \cong 1$$

Si sustituimos ésta última expresión en el agregado, obtendremos una nueva forma función de consumo agregada

$$C_t = (\alpha'_1 + \beta'\alpha'_2) Y_t + \alpha'_3 A_{t-1} = \alpha_1 Y_t + \alpha_3 A_{t-1}$$

$$\alpha_1 = \alpha'_1 + \beta'\alpha'_2 \cong \alpha'_1 + \alpha'_2$$

Que se considerara como hipótesis I[98].

Bajo las definiciones previas, tanto el ingreso Y, y el ingreso esperado Y^e, son no propios, es decir ingreso laboral (hay que ganarlo) excluye, obviamente a los beneficios. Entonces se plantea la hipótesis de que aquellos actualmente empleados el ingreso promedio esperado es el ingreso corriente ajustado por un posible factor de escala

$$y_t^e = \beta_1 \frac{Y_t}{E_t}$$

Donde E_t, es el número de personas involucradas en la producción. Además se espera que β_1 se aproxime bastante a 1.

La hipótesis para aquellos que se encuentran desempleados es que el ingreso es proporcional al ingreso promedio corriente de aquellos que se encuentran empleados. La constante de proporcionalidad en este caso representa tres factores. Primero, puede ser alguna influencia del crecimiento esperado; segundo, la incidencia del desempleo es probable que sea menor por empleos altamente remunerados que para trabajadores poco adiestrados y poco remunerados. Por consiguiente las ganancias promedio de los desempleado se esperan, si consiguen empleos, probablemente menores que las ganancias promedio de aquellos actualmente empleados. Por último, parece razonable suponer que algunos de los trabajadores actualmente desempleados esperarían que su calidad de desempleado continuará por un tiempo y posiblemente sea recurrente. Por lo que se plantea que:

[97] Los supuestos introducidos tienen el objetivo básico de la estimación numérica de los coeficientes.
[98] En trabajos de Friedman se asume que el ingreso esperado es un promedio ponderado exponencialmente del ingreso pasado, con las ponderaciones sumadas iguales a uno.

$$y_t^{eu} = \beta_2 \frac{Y_t}{E_t}$$

donde y_t^{eu} es el ingreso esperado promedio de las personas desempleadas, y por las razones explicadas anteriormente se espera que β_2 sea significativamente menor que β_1. Luego entonces el ingreso esperado agregado esta dado por

$$Y_t^e = E_t y_t^e + (L_t - E_t) y_t^{eu} = E_t \beta_1 \frac{Y_t}{E_t} + (L_t - E_t)\beta_2 \frac{Y_t}{E_t}$$

$$= (\beta_1 - \beta_2) Y_t + \beta_2 \frac{L_t}{E_t} Y_t$$

donde L_t denota el total de la fuerza de trabajo.

Sustituyendo este resultado en nuestra primer expresión agregada se obtiene una variante de la hipótesis I.

$$C_t = \alpha_1 Y_t + \alpha_2 \frac{L_t}{E_t} Y_t + \alpha_3 A_{t-1}$$

donde

$$\alpha_1 = \alpha'_1 + \alpha'_2 (\beta_1 - \beta_2)$$

$$\alpha_2 = \alpha'_2 \beta_2 \text{ y } \alpha_3 = \alpha'_3$$

Ya con esto obtenemos la hipótesis II. Debido a que $\beta 1$ es difícil que sea cercana a la unidad se tiene que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_1 + \beta_1 \alpha'_2 \cong \alpha'_1 + \alpha'_2$$

Dejando entonces que los valores de los coeficientes observables α_1 y α_2 dependen de los valores no observables β_2.

Entonces la verificación empírica y la estimación, que es el objetivo del trabajo de Ando y Modigliani, se aprecia como se busca realizar modelos más precisos y eficientes. La preocupación por disminuir la existencia de correlación falsa, multicolinealidad y heteroscedasticidad generado frecuentemente por los modelos de mínimos cuadrados ordinarios, orientó el trabajo en la búsqueda de métodos alternativos de estimación. Revisando la fuente de tal inquietud hay conceptos sencillos. Primero el objetivo de la estimación de parámetros o predictores humanos, por lo que el estimador de un parámetro debe tener una distribución de muestreo concentrada alrededor de él mismo y la varianza del estimador debe ser la menor posible. Por lo que la función que se trabaje sea la que proporcione la mejor estimación. Es decir, el estimador de máxima verosimilitud[99]. Pero ahora enfoquémonos en las conclusiones sobre los resultados.

El modelo del ciclo de vida arroja una conclusión importante. El ahorro varía en una forma predecible en la vida de una persona. Si la persona comienza su vida adulta sin riqueza, la acumulará durante sus años de trabajo y luego la disminuirá durante sus años de jubilación. Entonces la clave es que los jóvenes que trabajan ahorran mientras que las personas de edad que

[99] Sea $X_1, X_2,..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con función de probabilidad $f(x; \theta)$, y sea $L(x_1, x_2,.., x_n, \theta)$ la verosimilitud de la muestra como función de θ. Si $t=u(x_1, x_2..., x_n)$ es el valor de θ para el cual el valor de la función de verosimilitud es máxima, entonces $T= u(X_1, X_2,..., X_n)$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ, y t es el estimador de máxima verosimilitud.

están jubiladas gastan. Revisemos esta idea. En la evidencia los ancianos no disminuyen su riqueza a la velocidad que se pudiese pensar si se estuviera tratando de atenuar el consumo para sus años finales. Una explicación sería que a los ancianos les preocupa la posibilidad de los imponderables. Esto motiva la aparición de una ahorro preventivo. Esto es por si vivieran más de lo esperado, por lo que hay que prever un periodo de jubilación más extenso. Otra razón es la posibilidad de que se presente una enfermedad que obligue a afrontar cuentas médicas fuertes. Si no es posible que los ancianos adquieran un seguro que cubra estas necesidades seguirán ahorrando para cubrir contingencias. La otra vertiente es, que los ancianos no desahorran para poder dejar herencias a sus seres queridos o simplemente a la caridad.

Seguridad Social y ahorro

En ésta sección propongo examinar la discusión sobre seguridad social y la relación que guarda con la formación de ahorro. Para lograr esto necesariamente debemos referirnos al trabajo de Martin Feldstein[100], en donde se considera que el incremento en la riqueza provocado por la seguridad social es la causa primaria de la baja del ahorro agregado. Esta idea implica que, entre todas las causas posibles de la reducción del ahorro, la que resulta ser más importante es la creación de seguridad social, es decir, un programa de ahorro obligatorio. La percepción de la gente es sencilla, mire usted. Como los individuos anticipan un monto mayor de ingreso post-retiro debido a los pagos de la seguridad social, sienten menor necesidad de contribuir voluntariamente en planes de ahorro privados mientras se encuentran en su etapa productiva. Este comportamiento ha tenido el efecto de reducir el ahorro privado y, por lo tanto, se ha ido restringiendo el monto de los fondos disponibles para la inversión.

Pudiésemos pensar que la aparición de tanta literatura sobre los determinantes del ahorro, seguridad social y pensiones es moda. Permítaseme disentir, más que moda es una necesidad. Revisando los distintos trabajos que recientemente se han publicado, podemos ver que se concentran en los efectos de la seguridad social como factor que afecta al ahorro. Feldstein comienza su discusión mediante el análisis de series de tiempo para datos macroeconómicos de los Estados Unidos. Quisiera resaltar un punto que me parece crucial y de suma importancia. No obstante que a raíz de la aparición del trabajo de Feldstein ha surgido un monto considerable de literatura discutiendo los resultados presentados en su trabajo y que sus resultados se hayan argumentado tanto en el campo teórico como en el práctico, el núcleo de su idea permanece inmaculado. Este hecho me llamó poderosamente la atención, el análisis de Feldstein permanece intacto. Siendo éste el primer trabajo que examina el efecto de la seguridad social en el ahorro, todo indica que Feldstein ha tocado un tópico fundamental. Entremos en materia.

Feldstein revisa como ha cambiado la relación entre ingreso disponible, riqueza familiar y consumo personal desde la introducción de la seguridad social. El efecto de la seguridad social se mide mediante la introducción de la variable Riqueza de Seguridad Social (SSW por sus iniciales en inglés) que mide el valor presente en el año *t* de los beneficios por retiro que podrían ser reclamados eventualmente por aquellos quienes están tanto trabajando como retirados en el año *t*. Dicha variable toma dos formas, SSW y SSWN, que miden la riqueza de seguridad social bruta y la riqueza de seguridad social neta respectivamente.

El argumento teórico que nos presenta Feldstein dice que la seguridad social tiene un doble efecto sobre el ahorro. La explicación es la siguiente, al garantizar el ingreso a los retirados y jubilados el efecto sustitución sobre los activos disminuirá el ahorro durante los años laborales del individuo. Al mismo tiempo, la disponibilidad de los beneficios de la seguridad social a la edad de retiro (62 años) y la alta tasa efectiva tributaria sobre las ganancias de los retirados después de los 65 tiene el efecto de inducir el retiro. Dicha inducción al retiro causa que los individuos ahorren más durante sus años laborales para compensar un periodo de retiro mayor. Entonces, las

[100] Feldstein, Martin. "Social security, induced retirement, and agregate capital acumulation." Journal of political economy. Septiembre-octubre 1974.

magnitudes relativas de los respectivos efectos determinan la reducción o el incremento del ahorro. De acuerdo al trabajo de Feldstein, la introducción de la seguridad social afecta el nivel de ahorro agregado. Se puede estar de acuerdo o no, pero es innegable que es una conclusión importante y digna de estudiar.

Algunos economistas pensaron así. Un intento para revisar la investigación de Feldstein es el trabajo propuesto por Leimer y Lesnoy[101]. Su crítica se concentra en tres áreas. Primero, descubren un error de programación en el calculo de las variables SSW, que el mismo Feldstein corrige[102]. Segundo, critican varios de los supuestos que yacen en la construcción de la variable SSW. Finalmente, observan que la relación entre la seguridad social y el ahorro es altamente dependiente en el periodo en el que se centra el análisis[103]. Sin embargo, el núcleo del análisis de Feldstein resiste la controversia, aunque si consiguen cuestionar la validez de los estimados sobre la magnitud del decrecimiento en el ahorro atribuible a la seguridad social.

Por necesidad el punto de vista teórico de Feldstein sobre seguridad social y ahorro tiene sus detractores. Al revisar la literatura encontramos que el modelo de altruismo intergeneracional de Barro[104] contradice el supuesto de Feldstein dice que cuando se encuentran mayores niveles garantizados de ingreso futuro los individuos disminuirán el ahorro voluntario. Barro sostiene que las generaciones mayores se percatan de que se necesitarán impuestos más altos para sus sostenimiento si el nivel prometido será proveído. Esto causa que los individuos ajusten su comportamiento de ahorro de modo congruente para prevenir una carga mayor sobre las generaciones jóvenes quienes se verán forzados a financiar los beneficios mediante mayores impuestos. Barro prueba esto usando una función de gasto del consumidor, como la que emplea Feldstein. La diferencia radica en que Barro emplea variables para medir el excedente del gobierno, tasa de desempleo y el stock de bienes durables. Estas variables se emplean para compensar el efecto de la deuda gubernamental sobre la riqueza privada, y como la deuda gubernamental corriente se traduce en obligación impositiva futura.

Feldstein propone una extensión del modelo de ciclo vital de ahorro para incorporar el efecto de la seguridad social en el mismo. Bajo el modelo propuesto, los individuos desahorran cuando son muy jóvenes mediante el uso de prestamos sobre sus ganancias futuras, ahorrando en sus principales años de ganancias para financiar otro periodo de desahorro cuando se retiren. No voy a tocar el análisis de los datos y resultados del trabajo, para hacerlo requeriría de más tiempo y líneas, y no sería justo hacerlo a vuelo de pájaro. El verificar los resultados obtenidos de modo empírico sería otra investigación en si misma, por lo que evitaré el análisis de los aspectos técnicos y econométricos del trabajo[105]. Entonces, pasemos a las conclusiones.

Basados en el trabajo de Feldstein podemos decir que los efectos teóricos de la seguridad social sobre el ahorro son dobles y pudiesen parecer contradictorios. Sin embargo el análisis empírico puede discernir la importancia relativa de la sustitución de activos y el retiro inducido mediante la medición del efecto total de la seguridad social acumulada sobre el ahorro. Los resultados del análisis de regresión implican un efecto cuantificable de la seguridad social sobre el

[101] Leimer, Dean y Selig Lesnoy. "Confirmations and contradictions: social security and private saving: new time series evidence." Journal of political economy, junio 1982.

[102] Feldstein, Martin. "Confirmations and contradictions: Social security and saving: Reply"Journal of political economy, junio 1982.

[103] Tal ves sea debido al número de años tomados en la muestra. En este aspecto se me ocurren varias cosas, pero una podria ser simplemente las expectativas generadas por la seguridad social por las generaciones tomadas en la muestra.

[104] Barro, Robert J. "Are government bonds net wealth?" Journal of Political Economy. Noviembre-Diciembre 1974.

[105] En primer lugar porque son datos de la Unión Americana, lo ideal sería hacer una comprobación de los puntos de Feldstein con datos de países emergentes, digamos México, Chile, Argentina, por Hispanoamérica, y algunos paises de Europa del este así como para el sudeste asiático; para con ello comprobar estructuras y ver donde radican las sensibilidades de los sistemas de pensiones y las captaciones de ahorro.

ahorro que puede ser medido contra los niveles corrientes de ahorro para imputar el incremento o decremento total en el ahorro causado por la acumulación de riqueza de seguridad social. Los resultados empíricos indican que efectivamente la seguridad social merma el ahorro personal al inducir a los individuos a sustituir riqueza de seguridad social acumulada a través de impuestos para ahorro privado. En pocas palabras, la conclusión que obtengo es simple, los determinantes del ahorro, hablando en términos generales no han sido plenamente identificados, por lo que cualquier especulación realizadas sobre el efecto de la seguridad social sobre el ahorro debe tomar en cuenta esta limitación.

CONCLUSIONES

Para este punto queda claro que el ahorro está considerado como un elemento fundamental del crecimiento económico por la relación que guarda con el proceso de acumulación de capital. Pero, después de dos capítulos entendemos que el ahorro ese sacrificio de consumo, no sólo permite el crecimiento del ingreso y acrecienta el consumo, sino que hace menos incierto el consumo en un presente lleno de incertidumbre. Que quiero decir con esto, simple la administración del riesgo está como causa fundamental del comportamiento del ahorro. El ahorro es el resultado de la elección de administrar el riesgo, para con ello estar preparados para enfrentar una realidad cambiante e incierta, para disminuir nuestra sensación de incertidumbre hemos desarrollado una manera de protegernos, ahorrando. La cantidad y la calidad de tal ahorro obedece tanto a la tasa de interés como a los instrumentos para ahorrar. La sociedad moderna ha desarrollado instrumentos, productos para captar el ahorro generado por los individuos. Así que todos los esfuerzos para generar ahorro son infructuosos si no van orientados a cambiar la percepción individual sobre el riesgo y la conveniencia del mercado.

Este capitulo nos deja muchas preguntas, la primera es ¿Cuánto sabemos sobre el ahorro? La primer discusión es sobre los determinantes, mi conclusión es que aún falta discutir sobre los determinantes. Es algo que debemos estudiar y analizar con mayor profundidad. Tenemos varios puntos a considerar, pensiones y seguridad social, mercados financieros, administración del riesgo y tasa de interés. Este capítulo nos muestra que éstos son los determinantes del ahorro. Pero la causa es simplemente la administración del riesgo. Si esto no fuera así, los resultados de Feldstein serían muy distintos, y esto es porque la presencia de los sistemas de seguridad social eliminan parte del riesgo en cuanto al retiro. Barro señala un punto que me parece crucial. No podemos asumir que no hay herencias, es importante tomar en cuanta tanto a la dotación inicial como la presencia de la herencia, estos elementos constituyen el legado de cada individuo.

La tasa de interés cumple una función fundamental, nos proporciona información sobre el valor presente y futuro de los bienes y el dinero, pero es sólo un precio. Precio que tiene una importancia fundamental, ya que nos ayuda a vaciar el mercado de crédito. Pero, sin producto innovador, ni sistema financiero ágil la tasa de interés pierde su fuerza. Lo que nos conduce a que los mercados financiero deben procurar la innovación para captar más ahorro y con ellos fondear las actividades de la economía.

Quisiera hacer énfasis en la importancia de las causas que faltan por afinar, como el papel del hogar, restricciones financieras y capacidad de endeudamiento, incertidumbre. Además, la verificación del papel en el ahorro de la educación, salud, nutrición. Añadiendo a esto las no linealidades de las funciones de utilidad, consumo y ahorro. En fin, concluyo este capitulo con una idea para usted, el ahorro es un fenómeno económico difícil de medir, evaluar e incentivar.

por Juan Marcos Ortiz Olvera

REFLEXIONES SIMPLES SOBRE TÓPICOS COMPLEJOS

Nunca te expreses más claramente de
lo que eres capaz de pensar.
NIELS HENRIK DAVID BOHR.

La preocupación por protegernos, tanto como individuos y como nación contra la adversidad económica en el futuro es sobrecogedora. El problema es en extremo complejo. Tenemos que responder varias cuestiones. Primero los jóvenes adultos tienen preocupaciones claras, por ejemplo sobre el trabajo que tendrán en diez o veinte años y, por consiguiente el entorno al que se enfrentarán, digamos impuestos, gastos médicos, educación de los hijos y la vivienda. Para la gente de edad media, ellos piensan en el retiro y jubilación. Aunque sus preocupaciones no difieren mucho de las de los jóvenes, ellos se preocupan por si su pensión será suficiente y si no tendrán que verse obligados a dejar el retiro. Para nuestros retirados las preocupaciones son distintas, ellos se preocupan si su pensión será suficiente, si ésta no perderá su valor, si él vivirá más de lo que espera y si sus ahorros resisten este caso; y por último, si es que tiene posibilidades, a quién le deja la herencia. Para comprender los motivos de las elecciones y sus consecuencias debemos responder primero cómo entiende la gente el valor, cómo percibe la idea del valor.

Las finanzas informales prevalecen más allá de las fronteras del sistema financiero formal. Las finanzas informales consisten en préstamos entre los individuos y empresas que no son registrados por el gobierno como intermediarios financieros y, por ende no están sujetos a supervisión gubernamental. Hemos visto que las finanzas informales son tremendamente diversas y se conducen con amplias relaciones, desde los lazos familiares hasta la amistad, extendiéndose hasta incluir crédito asociado con transacciones comerciales. La penetración de las finanzas formales puede ser superficial en algunas ocasiones, por poner un ejemplo podemos mencionar al crédito agrícola formal, que en varios países es poco empleado. Mientras que los arreglos informales crean valor para la mayoría de la población en muchos países. Los esfuerzos por atraer más gente hacia el interior de la frontera de las finanzas formales muchas veces son originados por reacciones adversas hacia los acuerdos financieros informales. Estas reacciones son frecuentemente articuladas por individuos dentro de la frontera, por burócratas y oficiales del gobierno. Aquellos dentro de las finanzas muy a menudo miran a las finanzas informales, como explotadoras que van contra el desarrollo del sector; y también se ven a las actividades financieras informales, y aún a los financieros mismos como perversos y amorales. El que la gente perciba que se puede generar valor en el sector de las finanzas informales es un verdadero inconveniente.

En éste capítulo final, quisiera presentar mi opinión y retomar la discusión expuesta en los anteriores capítulos. Hasta ahora sabemos que el ahorro de un país es la suma de los ahorros, tanto interno como externo, pero eso ya lo sabíamos usted y yo. No hemos avanzado mucho. Por lo que hemos visto en los capítulos previos la base del ahorro radica en la elección y su causa principal es la administración del riesgo. Estimado lector, hasta que no me conceda esto con plena convicción, no me siga leyendo. Queda claro que no es sencillo entender el fenómeno del ahorro, para corroborar esto basta voltear a ver la literatura donde aún se sigue discutiendo sobre los determinantes del ahorro. Esto nos confirma que aún hay muchas cosas por discutir.

Con los capítulos anteriores expuse los conceptos básicos, cómo el de elección, utilidad, incertidumbre. Con ellos ya estamos en posición de asociarlos en representaciones más o menos claras y sencillas, así como ciertas proposiciones que tomamos por verdaderas. Entonces, en el capítulo primero todos los teoremas son demostrados sobre la base de un método lógico cuya justificación nos sentimos obligados a reconocer. Usted se puede preguntar que quiero decir con esto. Déjeme platicarle. Mire usted, la elección se realiza en un sistema económico, así que los individuos habitan en tal sistema y están integrados dentro. La única diferencia es el cómo lo perciben. Es decir lo único que cambia es el sistema de coordenadas de cada individuo. Por lo que podemos decir que si hay varios sistemas de coordenadas, los fenómenos económicos transcurren con respecto a un sistema de coordenadas según idénticas leyes generales ocurrirá lo mismo con respecto a otro. Con esto quiero decir que la elección, y por ende el ahorro, presenta relatividad. Entonces, debemos definir un sistema económico, con individuos que tengan diferentes sistemas de coordenadas pero que respeten ciertas características, propiedades y leyes, siendo idénticas para todos los individuos. Mire usted, mientras se supuso que todos los fenómenos económicos se podían representar con macroeconomía, no se podía dudar de la validez de mi aserto. Aunque, con la programación matemática y el modelaje estocástico, se hizo evidente que la macroeconomía, entendida como la base de toda descripción teórica de la economía, no es suficiente. Entonces la relatividad de la elección se puede discutir. Mire usted, tenemos que considerar dos cosas. Primero, aunque la macroeconomía no es lo suficientemente vasta para representar teóricamente todos los procesos y fenómenos económicos, debe poseer algo de cierto, que es importante. Esto no lo pienso negar, es evidente que ha funcionado para varias cosas con admirable precisión. Segundo, quiero dejar clara la siguiente idea. Tenemos un sistema económico con un gran número de individuos distintos, con distintas edades y distintos grados de información. La elección de los individuos es necesariamente distinta, pero tenemos algo en común, y es necesariamente el sistema económico sobre el que actuamos, el sistema es el mismo para todos. ¿Qué hace que las elecciones sean distintas? La respuesta es simple, la información, la dotación, las expectativas. Esos factores son lo que marcan la diferencia. El ahorro es un fenómeno que sufre éstas diferencias como pocos proceso económicos. ¿Porqué afirmo esto? Sencillo, basado en que el ahorro es la elección de postergar el consumo presente, la elección que involucra la decisión de ahorro toma en cuenta la información del individuo, su percepción del entorno económico, su grado de aversión al riesgo y su nivel de confianza en el sistema financiero. Esto hace que el proceso de generación y captación de ahorro sea muy frágil. Un individuo que tenga rezagos en el consumo, preferirá cubrir tales rezagos antes que ahorrar. Un individuo que no confíe en el sistema financiero se mantendrá fuera de la frontera financiera formal. Alguien que tenga mala información no tomará una decisión de mejor calidad perdiendo eficiencia. Si a eso añadimos que la seguridad social elimina un poco la incertidumbre sobre los años de retiro. Entonces, pareciera que todo se lo dejamos a la tasa de interés. Mucha responsabilidad para un precio entre periodos. Hay una cosa cierta, el futuro es incierto. La administración del riesgo como causa del ahorro, implica que para que alguien decida ahorrar se necesita un cambio en su percepción sobre el futuro, aunado con un incremento de su información.

Entonces si se quisiera promover la generación de ahorro, debemos explicarle a los individuos que es necesario ahorrar. Suena simple, pero por desgracia no lo es. Sin el cambio de percepción, aunque la tasa de interés sea atractiva no se ahorrara, simplemente porque algo falta, algo provoca una falta de administración del riesgo o existe un rezago en el consumo. Si la gente percibe que es necesario ahorrar, porque con ello es capaz de aumentar su consumo y su bienestar, así como de disminuir el riesgo la gente entenderá que debe ahorrar. Este cambio de percepción debe generarse desde varias trincheras, primero la educación, segundo los agentes financieros y, finalmente los hacedores de política económica. Ya que si logramos entender que más allá de la pensión y el fondo de retiro que se construye con los ingresos de hoy es bueno destinar otra fracción del ingreso al ahorro, podremos ver los beneficios de un sistema financiero fondeado, un mayor poder adquisitivo y menores impuestos destinados a pensiones, en otras palabras, veremos la generación de una economía capitalizada por sus miembros, capaces de captar otros ahorros y destinarlos al crecimiento económico.

UNA IDEA SIMPLE

Siguiendo con ésta idea, en ésta sección pretendo presentar un problema de ahorro muy simple, donde el ahorro depende de lo que podamos hacer en los retornos. Para ello, emplearé la teoría del control óptimo, lo que le indica a usted, que no haré nada con estática comparada, debido a que la naturaleza del ahorro es temporal, me parece más adecuado darle un tratamiento dinámico que estático. Si usted disiente, me parece correcto, está en su derecho. La idea que le propongo es simple, necesitamos encontrar la trayectoria óptima de los retornos para que dicha trayectoria nos de una trayectoria óptima de ahorro. Debido a que el cálculo de variaciones sólo puede manejar soluciones interiores, como mencione anteriormente, vamos a trabajar con un desarrollo que puede tratar con las características planteadas en los capítulos anteriores, este es la *teoría del control óptimo*. La teoría del control óptimo implica la formulación de un problema de optimización dinámica centrado en una o más variables de control que sirven como instrumentos de optimización. A diferencia del cálculo de variaciones, donde el objetivo es encontrar la trayectoria temporal óptima para una variable de estado, la teoría del control óptimo tiene en su principal propósito la determinación de la trayectoria temporal óptima de una variable de control.

Ahora comencemos con pasos pequeños. Consideremos el problema más simple de ahorro con la variable s para ahorro y la variable de control R, para los retornos. La variable R es un instrumento de política que nos permite influir a la variable de estado. Entendido esto decimos que alguna trayectoria de control $R(t)$ implicará una trayectoria de estado asociada $s(t)$. Por lo que queda claro que debemos elegir la trayectoria de control óptima admisible $R^*(t)$ la cual, junto con la trayectoria de estado óptima admisible asociada $s^*(t)$, optimizará la funcional objetivo dado un intervalo de tiempo. Antes de avanzar más en esto me gustaría remarcar algunas características espaciales que presentan los problemas de control óptimo.

La teoría del control óptimo permite manejar una restricción sobre la variable de control R, tal que $R(t)\in\Re\ \forall t\in[0, T]$, donde $\Re$ denota algún conjunto de control acotado. El conjunto de control puede ser cerrado, convexo tal que $R(t)\in[0, T]$. El hecho de que $\Re$ sea un conjunto cerrado permite que sean admitidas las soluciones de esquina. Otro punto interesante es que el problema más sencillo de teoría de control óptimo, a diferencia del cálculo de variaciones, tiene un estado terminal libre más que un punto terminal fijo. Esto obedece al principio del máximo que expondré y explicaré más adelante.

Ya discutido lo anterior el problema de ahorro que pongo a su consideración es

$$\text{Maximizar } \aleph = \int_0^T F(t,s,R)dt$$

$$\text{sujeto a } \dot{s} = f(t,s,R)$$

$$s(0)=A;\ s(T) \text{ libre, } (A,\ T \text{ dados})$$

$$\text{y } R(t)\in\Re\ \forall t\in[0, T]$$

Aquí la funcional objetivo $\aleph$ (aleph) mantiene la forma de una integral definida. La presencia de la variable de control R requiere de una liga entre s y R, es decir que requerimos la relación entre ahorro y retornos. Tal información nos la provee la ecuación $\dot{s} = f(t,s,R)$ donde el símbolo punteado $\dot{s}$ denota la derivada ds/dt. En otras palabras, para saber como afectan los retornos R el curso que toma el ahorro s. Ahora, al tiempo inicial, los primeros dos argumentos en la función f deben tomar la forma del valor dado t=0 y $s(0)=A$, sólo quedándonos el tercer argumento para elegir. Entonces, para alguna política elegida en t=0, digamos $R_1(0)$ la ecuación generará un valor específico para $\dot{s}$, digamos $\dot{s}_1(0)$ y así para distintos puntos en el tiempo. Si observamos a esta ecuación se aprecia que provee un mecanismo de movimiento donde mediante la elección del control R puede reflejarse en un patrón de movimiento específico de la variable de estado s. Basado en lo anterior, nos referiremos a ésta ecuación como la ecuación de movimiento para la variable de estado para abreviar ecuación de estado. Con esto quiero decir que la liga entre R y s puede describirse adecuadamente mediante la ecuación diferencial de primer orden $\dot{s} = f(t,s,R)$.

Es tiempo ahora de referirnos el resultado más importante en la teoría del control óptimo, que es una condición necesaria de primer orden, el principio del máximo del cual había hablado con anterioridad. Pero antes de hablar de los desarrollos de Pontryagin, es necesario establecer los conceptos de función Hamiltoniana y variable coestado (*costate variable*). En el problema que propongo hay tres tipos de variables, t que corresponde al tiempo, s(ahorro, que corresponde a la variable del estado) y R (los retornos corresponden al control). Para el proceso de solución tendremos una variable más, la llamada variable coestado o variable auxiliar y la denotaremos por λ. Permítame hablarle del la variable λ; primero, es similar al multiplicador de Lagrange y, segundo, por su naturaleza es una variable de valuación, lo cual nos permite medir el precio sombra de la variable de estado asociada. De igual modo que s y R, la variable λ puede tomar diferentes valores en distintos puntos del tiempo, lo que implica que sea $\lambda(t)$. Para introducir la variable coestado al problema de control óptimo requerimos a la función Hamiltoniana o Hamiltoniano, como usted guste y le sea más sencillo. Definimos al Hamiltoniano como:

$$H(t, s, R, \lambda)\equiv F(t, s, R)+ \lambda(t)f(t, s, R)$$

Debido a que H consiste de la función integrando F mas el producto de la variable coestado y de la función f, luego entonces es una función con cuatro argumentos, t, s, R, λ. De modo formal escribimos el Hamiltoniano

$$H\equiv\lambda_0 F(t, s, R)+\lambda(t)f(t, s, R)$$

donde λ_0 es una constante no negativa, por determinar.

Mire usted amigo lector, a diferencia de la ecuación de Euler, la cual es una simple ecuación diferencial de segundo orden en la variable de estado, el principio del máximo involucra ecuaciones diferenciales de primer orden en la variable de estado y la variable coestado. Otro punto importante es que se requiere que el Hamiltoniano se maximice con respecto a la variable de control(los retornos) en cualquier punto del tiempo. Por lo que para el problema que presenté con el Hamiltoniano definido previamente, las condiciones del principio de máximo son

$$\underset{R}{\text{Max}}\, H(t,s,R,\lambda)\ \forall t\in[0, T]$$

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \text{ (Ecuación de movimiento para s)}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial s} \text{ (Ecuación de movimiento para } \lambda)$$

$$\lambda(T)=0 \quad \text{(Condición de transversalidad)}$$

donde $\underset{R}{\text{Max}}$ dice que el Hamiltoniano será maximizado con respecto a los retornos R, como única variable de elección. Hay una forma equivalente para expresar esta condición

$$H(t, s, R^*, \lambda)\geq H(t, s, R, \lambda),\ \forall t\in[0, T]$$

donde R^* es el retorno de control óptimo y R es otro valor de control. Advierta amigo lector que el requisito de Maximizar H con respecto R da pie para que surja el nombre de principio del máximo. Si observamos la condición

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

se aprecia que es una forma reestructurada de la ecuación de movimiento para la variable de estado del problema original. Reexpresar $\dot{s}$ como derivada parcial de H con respecto de la variable coestado implica mostrar la simetría entre la ecuación de movimiento y la variable coestado. Las ecuaciones de movimientos en su conjunto es lo que conocemos como *Sistema Hamiltoniano* o *Sistema Canónico* para el problema.

Para desarrollar el problema que le he presentado asumiremos que la variable de control R no está restringida, de tal modo que R^* es una solución interior. De igual manera, la función

Hamiltoniana será diferenciable con respecto a R y la condición $\partial H/\partial R=0$ puede ser empleada en lugar de la condición $\underset{R}{\text{Max}}$. Por último el punto inicial está fijo pero permitimos que el punto terminal puede variar. Esto sólo es para derivar condiciones de transversalidad que emplearemos en el proceso y resultado. El problema queda así:

$$\text{Maximizar } \aleph = \int_0^T F(t,s,R)dt$$

$$\text{sujeto a } \dot{s} = f(t,s,R)$$

$$s(0)=s_0, \text{ (dado)}$$

Para el desarrollo del principio del máximo es necesario incorporar la ecuación de movimiento en la funcional objetivo y reformular la funcional en términos del Hamiltoniano. Mire usted si el ahorro s siempre obedece la ecuación de movimiento entonces la cantidad $[f(t,s,R)-\dot{s}]$ aseguramos que tome un valor cero para todo t en el intervalo [0, T]. Entonces, si empleamos la noción de los multiplicadores de Lagrange podemos construir la expresión $\lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]$ para cada valor de t y todavía tenemos un valor cero. Aunque existe un número infinito de valores de t en el intervalo [0, T], sumando $\lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]$ sobre t en el periodo [0, T] generaríamos todavía un valor cero:

$$\int_0^T \lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]dt = 0$$

Por lo anterior podemos incrementar la anterior funcional objetivo por el integrando anterior sin afectar la solución. Por lo que tenemos una nueva funcional

$$\aleph' \equiv \aleph + \int_0^T \lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]dt = 0$$

$$= \int_0^T \{F(t,s,R)+\lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]\}dt$$

mientras la ecuación de movimiento tenga adherencia para todo t, $\aleph'$ y $\aleph$ tendrán el mismo valor. El Hamiltoniano estaba definido como

$$H(t,s,R,\lambda) = F(t,s,R)+\lambda(t)f(t,s,R)$$

La sustitución de H dentro de la nueva funcional quedando

$$\aleph' = \int_0^T [H(t,s,R)-\lambda(t)\dot{s}]dt$$

$$= \int_0^T H(t,s,R,\lambda)dt - \int_0^T \lambda(t)\dot{s}dt$$

Me gustaría hacer una distinción entre el segundo término en el Hamiltoniano, $\lambda(t)f(t,s,R)$ por un lado y la expresión del multiplicadores, $\lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]$ por el otro. La diferencia es que una tiene explícitamente $\dot{s}$ y la otra no. Integrando por partes tenemos:

$$-\int_0^T \lambda(t)\dot{s}dt = -\lambda(T)s_T + \lambda(0)s_0 + \int_0^T s(t)\dot{\lambda}dt$$

Entonces mediante la sustitución de los resultados, podemos escribir nuevamente la funcional objetivo como

$$\aleph = \underbrace{\int_0^T [H(t,s,R,\lambda) + s(t)\dot{\lambda}]dt}_{\Omega_1} - \underbrace{\lambda(T)s_T}_{\Omega_2} + \underbrace{\lambda(0)s_0}_{\Omega_3}$$

La expresión $\aleph$ esta compuesta de tres términos aditivos Ω_1, Ω_2, Ω_3. Debemos notar que mientras el término Ω_1, una integral dura todo el periodo de planeación, el término Ω_2 se ocupa del tiempo terminal T y Ω_3 se ocupa sólo del tiempo inicial.

El valor de $\aleph$ depende de las trayectorias temporales elegidas para las variables s, R y λ, así como de los valores elegidos para T y s_T. Ahora centraremos la atención en λ. La variable λ, siendo un multiplicador de Lagrange difiere fundamentalmente de s, R, la elección de $\lambda(t)$ no tiene efecto en el valor $\aleph$, mientras la ecuación de movimiento cumpla con la adherencia a

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \forall t \in [0,T]$$

El siguiente paso en el proceso corresponde a la trayectoria de los retornos $R(t)$ y su efecto sobre la trayectoria $s(t)$. Si tenemos una trayectoria $R^*(t)$ y si perturbamos la trayectoria $R^*(t)$ con una curva de perturbación $p(t)$, es posible generar una vecindad de trayectorias de control

$$R(t)=R^*(t)+\varepsilon p(t)$$

una por cada valor de ε. De acuerdo con la ecuación de movimiento ocurrirán para cada ε una perturbación correspondiente en la trayectoria de ahorro $s^*(t)$, por lo que la vecindad de trayectorias s puede escribirse como:

$$s(t)=s^*(t)+\varepsilon q(t)$$

Más allá, si T y s_T son variables, tenemos que

$$T=T^*+\varepsilon\Delta T \text{ y } s_T=s^*_T+\varepsilon\Delta s_T$$

$$\text{implicando } \frac{dT}{d\varepsilon} = \Delta T \text{ y } \frac{ds_T}{d\varepsilon} = \Delta s_T$$

Ya que tenemos tanto a s como a R podemos expresar $\aleph$ en términos de ε, para poder aplicar la condición de primer orden $d\aleph/d\varepsilon=0$, obteniendo la nueva versión de $\aleph$ como

$$\aleph = \int_0^{T(\varepsilon)} \{H[t, s^* + \varepsilon q(t), R^* + \varepsilon p(t), \lambda] + \dot{\lambda}[s^* + \varepsilon q(t)]\}dt - \lambda(T)s_T + \lambda(0)s_0$$

Aplicando la condición $d\aleph/d\varepsilon=0$ derivando obtenemos

$$\int_0^{T(\varepsilon)} \left\{\left[\frac{\partial H}{\partial s}q(t) + \frac{\partial H}{\partial R}p(t)\right] + \dot{\lambda}q(t)\right\}dt + \left[H + \dot{\lambda}s\right]_{t=T}\frac{dT}{d\varepsilon}$$

y la derivada del segundo término con respecto a ε es

$$-\lambda(T)\frac{ds_T}{d\varepsilon}+s_T\frac{d\lambda(T)}{dT}\frac{dT}{d\varepsilon}=-\lambda(T)\Delta s_T-s_T\lambda(T)\Delta T$$

Por el otro lado el termino $\lambda(0)s_0$ mediante la derivación se elimina. Entonces, $d\aleph/d\varepsilon=0$ es la suma de las dos expresiones anteriores. Pero en la primera podemos escribir un componente como

$$[\lambda s]_{t=T}\frac{dT}{d\varepsilon}=\lambda(T)s_T\Delta T$$

Entonces, cuando la suma es fijada en cero, la condición de primer orden queda, después de manejo, como

$$\frac{d\aleph}{d\varepsilon}=\int_0^T\left[\left(\frac{\partial H}{\partial s}+\lambda\right)q(t)+\frac{\partial H}{\partial R}\,p(t)\right]dt+[H]_{t=T}\,\Delta T-\lambda(T)\Delta s_T\;=0$$

Los tres componentes de ésta derivada están relacionados a cosas arbitrarias diferentes. Veamos esto con atención. La integral contiene curvas de perturbación arbitrarias $p(t)$ y $q(t)$, mientras que los otros dos involucran arbitrarios ΔT y Δs_T, respectivamente. De modo consecuente cada una de los tres debe ser igualada a cero en orden de satisfacer la expresión en cuestión. Al poner el componente de la integral igual a cero, se puede deducir dos condiciones

$$\lambda=-\frac{\partial H}{\partial s}\ \text{y}\ \frac{\partial H}{\partial R}=0$$

La primera nos da la ecuación de movimiento para la variable coestado λ, la segunda representa una versión débil[106] de la condición $\underset{R}{Max}H$. Debido a que para el problema hemos fijado un punto terminal T y s_T libre, el término ΔT es instantáneamente igual a cero, pero Δs_T no. Para desvanecer la expresión $-\lambda(T)\Delta s_T$ debemos imponer la restricción

$$\lambda(T)=0$$

con lo que se explica la condición de transversalidad.

Estimado lector, como usted pudo apreciar si se encuentra la trayectoria óptima de los retornos y sus curvas de perturbación es posible entender como será la trayectoria del ahorro y sus posible cambios debidos a alguna perturbación. La idea es que el ahorro se puede explicar como un resultado del comportamiento de los retornos. Como los retornos involucran, confianza y riesgo, es una variable sobre la cual podemos influir, y ésta a su vez influirá al ahorro.

Modelando una economía

Es necesario hacer varias consideraciones para realizar un modelo, por lo que es menester hacer una pausa aquí, con el objeto de analizar los requerimientos necesarios para el modelo. Primero revisemos conceptos preliminares.

Las decisiones se toman y se realizan en puntos en el tiempo llamados *épocas de decisión*. Sea T el conjunto de épocas de decisión. Dicho subconjunto de la recta real no negativa puede clasificarse de dos modos: continuo[107] o discreto y como finito e infinito. Cuando es discreto las decisiones se realizan en todas las épocas de decisión. Por otro lado, si es continuo las decisiones pueden realizarse en:

[106] El sentido de la debilidad es en que decide sobre el supuesto de que H es diferenciable con respecto a R y de que existe una solución interior

[107] La palabra es empleada como sustantivo más que como adjetivo.

a) Todas la épocas de decisión (continuamente).

b) Puntos aleatorios en el tiempo, cuando ocurren ciertos eventos.

c) Tiempos oportunos elegidos por el decisor[108].

Para problemas de tiempo discreto, se divide el tiempo en periodos o etapas. Entonces formulamos modelos en orden que la época de decisión corresponda con el inicio de un periodo. El conjunto de épocas de decisión puede ser finito, en su caso $T\equiv\{1, 2,..., N\}$ para algún entero $N<\infty$. El caso infinito donde tenemos $T\equiv\{1, 2,...\}$. Para incluir ambos casos debemos escribir $T\equiv\{1, 2,..., N\}$ para algún entero $N\leq\infty$. Cuando T es un intervalo se puede usar tanto $T=[0, N]$ como $T=[0, \infty]$. Los elementos de T se denotarán y nos referiremos a ellos como "tiempo t". Cuando N es finito, el problema de decisión es un problema de horizonte finito; si no es finito tendremos un problema de horizonte infinito.

Como ya hemos visto el sistema ocupa un estado en cada época de decisión, por lo que denotaremos al conjunto de estados del sistema posibles por S. Ahora decimos que, el decisor, en algún punto del tiempo observa el sistema en el estado $s\in S$, y puede elegir una acción a del conjunto de acciones admisibles en el estado s, A_s. Los conjuntos S y A_s pueden ser:

◊ Conjuntos arbitrarios finitos.

◊ Conjuntos arbitrarios contablemente infinitos.

◊ Subconjuntos compactos de dimensiones finitas de un espacio Euclidiano.

◊ Subconjuntos Borel no vacíos de espacios completos, y métrico-separables.

Las acciones se pueden elegir tanto aleatoria como determinísticamente. Denotaremos por $\mathcal{P}(A_s)$ la colección de colecciones de probabilidad sobre subconjuntos (Borel) de A_s y por $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre subconjuntos (Borel) de A. La elección aleatoria de acciones significa elegir o seleccionar una distribución de probabilidad $q(\cdot)\in\mathcal{P}(A_s)$, en dicho caso la acción a se selecciona con probabilidad $q(a)$. Las distribuciones de probabilidad degenerada corresponden a elección de acción determinista. Los modelos pueden generalizarse permitiendo que tanto S como A_s dependan explícitamente de t[109].

El resultado de elegir una acción $a\in A_s$ en el estado s en la época de decisión t.

◊El decisor recibe una premio, $r_t(s, a)$

◊El estado del sistema en la siguiente época de decisión está determinada por la distribución de probabilidad $p_t(\cdot|s, a)$.

Entonces, sea la función $r_t(s, a)$ definida para $s\in S$ y $a\in A$ que denote el valor al tiempo t del premio recibido en el periodo t[110]. El premio puede ser:

◊ Pago único recibido en un momento fijo o aleatorio previo a la siguiente época de decisión.

◊ Incrementado continuamente durante el periodo corriente.

◊ Una cantidad aleatoria que depende del estado del sistema es una subsecuente época de decisión.

[108] Este tipo de problema se analiza mejor empleando métodos de teoría de control óptimo basado en sistemas de ecuaciones dinámicas.

[109] Pero dicha generalización es innecesaria para las mayoría de las aplicaciones debido a que tiene un efecto minúsculo en la teoría.

[110] Piense que cuando la función $r_t(s, a)$sea positiva debe considerarse como ingreso, y por ende si es negativa como costo.

◊ Una combinación de todo lo anterior.

Cuando el premio depende del estado del sistema en la siguiente época de decisión, entonces dejemos que $r_t(s, a, j)$ el valor en el tiempo t del premio recibido cuando el estado del sistema en el época de decisión t es s, la acción $a \in A_s$ es seleccionada, y el sistema ocupa el estado j en le época de decisión t+1. Su valor esperado en la época de decisión puede evaluarse por:

$$r_t(s,a) = \sum_{j \in S} r_t(s,a,j) p_t(j|s,a)$$

En la expresión anterior la función no negativa $p_t(j|s, a)$ denota la probabilidad que el sistema esta en el estado $j \in S$ en el tiempo t+1, cuando el decisor elige la acción $a \in A_s$ en el estado s en el tiempo t. La función $p_t(j|s, a)$ es denominada una función de transición de probabilidad. Note amigo lector que muchos sistemas de transición pueden ocurrir en el periodo de tiempo entre épocas de decisión, digamos entre t y t+1. La formulación del modelo debe ser de modo que las transiciones que ocurren entre épocas de decisión no influyan al decisor. La mayoría de las nociones de optimalidad toda la información necesaria para realizar una decisión en el tiempo t se resume en $r_t(s, a)$ y $p_t(j|s, a)$[111].

Una vez discutido esto me permito encontrar las dificultades que hay que resolver para formular un modelo. La lista es la siguiente:

⇒ Número de sexos a modelar.

⇒ Duración de vida.

⇒ Demografía.

⇒ Duración de la vida productiva.

⇒ Transferencia de riqueza intergeneracional.

⇒ Disponibilidad de mercado del crédito.

⇒ Reglas de bancarrota.

⇒ Disponibilidad de seguros.

⇒ Tratamiento de deuda a la muerte.

⇒ Impuestos y subsidios gubernamentales.

Déjeme explicarle estos puntos y los motivos de las elecciones[112].Pero antes de eso, quiero remarcarle que la selección de los criterios, es tan arbitraria como cualquier otra selección, por lo que es normal, que no coincida conmigo, así como yo no espero que todo mundo coincida con mis ideas, no se preocupe si usted no comparte, es normal y saludable. Pero si está de acuerdo, es una feliz coincidencia; ahora si entremos en materia. Primero, las opciones para el número de sexos son dos, podemos modelar un sexo o dos. Las dificultades de modelar dos sexos son enormes, y son muy difíciles de desarrollar. Además, un modelo de dos sexos no mejora el entendimiento y comprensión de los grandes tópicos, es decir, es mejor evitar el modelo de dos sexos por su complejidad y por su poco aporte a la discusión de los grandes problemas. Por lo que le propongo

[111] Sin embargo, bajo algunos criterios debemos usar $r_t(s, a, j)$ en vez de $r_t(s, a)$. Por lo que asumimos generalmente que

$$\sum_{j \in S} p_t(j|s,a) = 1$$

El que no requiramos igualdad en la expresión anterior incrementará el rango de sistemas que podemos modelar.

[112] La notación que voy a emplear es la estándar, así que cualquier cambio de variable se lo haré saber.

pensar en un agente, que puede ser hombre o mujer, lo que usted decida eso será. La idea es simple, *unisex*. Hablemos ahora de la duración de la vida biológica; hay un hecho frío y concluyente, todos moriremos algún día. Basado en tan simple idea, los modelos de vida infinita pierden realismo. Lo que nos conduce a centrar nuestra atención en dos opciones, en un lado una duración de vida finita y fija por otro una duración de vida con expectativa finita estocástica. Regresando al argumento de que sabemos que algún día moriremos, es necesario completar la idea añadiendo que ese día nadie lo conoce, por lo que es más apegado a la realidad la idea de que se tiene una expectativa de vida finita. En lo que respecta al crecimiento poblacional es claro que las poblaciones crecen pero el suponer una población estacionaria tiene bondades debido a la simplicidad. Aquí las opciones son, de nacimiento a la muerte, de la adolescencia a la muerte o de la adolescencia al retiro. Mediante la existencia del equilibrio se demuestra que se puede considerar cualquier duración de vida económicamente productiva. Para los seguros y la transferencia de riqueza la necesidad cambia respecto a la edad, por lo que es necesario formular una regla sobre herencias y seguros.

El tiempo es discreto[113] y corre $t=0, 1, 2...$ Existe incertidumbre sobre dotaciones, así como sobre nacimientos y muertes. Ambos se modelan por variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad.

Para cada $t\geq 0$, I_t es una copia de la unidad de intervalo empleado para parametrizar la colección de agentes vivos al tiempo t. Sea $I_{k,t}$ el subconjunto de I_t correspondiente a los agentes de la edad k al tiempo t, tal que

$$I_t = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_{k,t}$$

Suponiendo que cada $I_{k,t}$ es un subconjunto Borel[114] de [0, 1].

Sea φ_t la medida de probabilidad no atómica definida sobre $B(I_t)$, los subconjuntos Borel de I_t, que corresponde a la distribución espacia de agentes al tiempo t. Entonces

$$\varphi(I_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(I_{k,t}) = 1$$

donde $\varphi(I_{k,t})$ es la proporción de agentes con la edad k en el tiempo t.

Para cada agente α están asociados dos procesos estocásticos representado su edad y su riqueza en dinero. El proceso de envejecimiento lo podemos plantear de la siguiente manera. Sea $\alpha\in I_{k,t}$, indica que el agente α tiene la edad k al tiempo t. Denotamos por η_k la probabilidad que α sobrevive para el periodo siguiente, para cada $k\geq 0$. Entonces $\alpha\in I_{k+1,t+1}$ con probabilidad η_k, y muere a la edad k con probabilidad $1-\eta_k$[115]. Entonces, podemos construir[116] el proceso de envejecimiento para la colección de todos los agentes en orden de alcanzar las probabilidades de supervivencia también correspondan con las proporciones de agentes que sobreviven, en ese sentido tenemos

$$\varphi_{t+1}(I_{k+1,t+1}) = \eta_k \cdot \varphi_t(I_{k,t}) \ \forall k,\ t.$$

$\forall k,\ t.$

[113] Excepto para los problemas de selección de portafolio y de maximización de utilidad, que son en tiempo continuo, debido a que gano poder en el análisis, además de ser un poco más sencillo.

[114] Un espacio Borel es $\{S, B(S)\}$.Un espacio Borel $(A, B(A))$ y una colección de conjuntos A_s, para el cual $A_s\in B(A)$ para cada $s\in S$. Sea $B(A_s)$ denota la colección inducida de subconjuntos Borel de A_s.

[115] Si deseáramos generalizar sería: α sobrevive hasta el periodo k+l con probabilidad $\eta_k\cdot\eta_{k+1}\cdots\eta_{k+l-1}$.

[116] Para profundizar en la técnica empleada revisar el trabajo de Feldman, M y C Giles "An expository note on individual risk without aggregate uncertanity" *Journal of Econometric Theory*, 35 1985, páginas 26-32.

Por amor a la simplicidad supondremos que la tasa de natalidad es la misma que la de mortandad. Esta simplificación nos permite emplear el mismo índice I para cada I_t. Siguiendo con la simplificación, podemos representar el proceso de envejecimiento correspondiente a un índice α como una cadena de Markov $\{K_t^\alpha, t = 0,1,...\}$ con probabilidades de transición

$$\mathbf{P}\left[K_{t+1}^\alpha = k+1 \middle| K_t^\alpha = k\right],\ \mathbf{P}\left[K_{t+1}^\alpha = 0 \middle| K_t^\alpha = k\right] = 1 - \eta_k$$

Una condición necesaria y suficiente para ésta cadena para que tenga una distribución estacionaria es que la duración de la vida del agente neonato es que sea finita[117]. Esta condición es equivalente al requerimiento que la suma infinita

$$\Delta := 1 + \eta_0 + \eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_1\eta_2 + \cdots$$

sea finita. Asumiendo que Δ es finita, y si $\{v_k, k=0, 1,...\}$ es una distribución estacionaria. Entonces, $\{v_k\}$ debe satisfacer

$$v_{k+1} = \eta_k v_k;\ k=0, 1,...$$

por lo que

$$v_{k+1} = \eta_k \eta_{k-1} \cdots \eta_0 v_0$$

Normalizando con $\sum v_k = 1$, concluimos que

$$v_0 = \frac{1}{\Delta},\ v_{k+1} = \eta_k \eta_{k-1} \cdots \frac{\eta_0}{\Delta};\ \text{para } k \geq 0$$

Necesitamos ahora un proceso de riqueza para la economía, para cada $\alpha \in I$, $t \geq 1$ y $k \geq 1$, la variable aleatoria $S_{k-1,t-1}^\alpha$ denota la riqueza en dinero del individuo α de edad k-1 al inicio del periodo t. Queda claro que la dinámica del proceso $\{S_{k-1,t-1}^\alpha\}$ depende de los gastos, herencia y dotación del individuo α en cada periodo. Este aserto debe ser explicado.

Pensemos en que en cada periodo cada agente recibe una dotación aleatoria $Y_{k,t}^\alpha(\omega)$ en unidades de bien no durable. La distribución λ_t de la variable aleatoria $Y_{k,t}^\alpha(\omega)$ depende de la edad k del agente α pero no del periodo t. La dotación en diferentes periodos es independiente, pero la dotación total del bien en cada periodo t para los agentes de edad k, digamos

$$C_k = \int_{I_{k,t}} Y_{k,t}^\alpha(\omega)\varphi_t(d\alpha)$$

se piensa no aleatoria y constante de periodo a periodo[118]. La dotación total para los agentes de todas las edades en el periodo t es

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$$

[117] Afortunadamente esto se cumple.
[118] El trabajo de Feldman y Giles *op cit* nos proporciona una técnica para construir funciones del siguiente tipo: $(\alpha,\omega) \mapsto Y_{k,t}^\alpha(\omega) = Y_{k,t}(\alpha,\omega)$, $k \geq 1$, $t \geq 1$, que son independientes para cada α fijo par agregada en una constante como en la expresión de C_k.

Si consideramos ahora un individuo α de edad k-1 y con riqueza $S^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega)$ en el inicio del periodo t. El individuo decide primero sobre el monto

$$b^{\alpha}_{k-1,t}(\omega) \in \left[0, S^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega)\right]$$

que pujará en el mercado de bienes[119]. El precio p_t para el bien puede formarse como

$$p_t(\omega) := \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_{k-1,t-1}} b^{\alpha}_{k-1,t}(\omega)\varphi_{t-1}(d\alpha)}{C}$$

Por lo que el individuo recibe el valor de su puja $x^{\alpha}_{k,t}(\omega) := b^{\alpha}_{k-1,t}(\omega) / p_t(d\alpha)$ de bienes y la consume, con lo que un monto de utilidad igual a $u_{k-1}(x^{\alpha}_{k,t}(\omega))$[120]. Ahora pasemos a la determinación de la herencia. Pensemos que nuestro agente α esta en su edad 0 en t_0, por lo que su utilidad total recibida a lo largo del proceso será

$$v^{\alpha}(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_0 \eta_1 \cdots \eta_{k-1}) u_k(x^{\alpha}_{k,t_0+k})$$

donde $\eta_0\eta_1 \cdots \eta_{k-1}$ es la probabilidad de que el individuo α sobreviva para la edad k. Después de que se forma el precio el individuo recibe el valor de la dotación en dinero. El monto $p_t(\omega)Y^{\alpha}_{k,t}(\omega)$ para esta etapa el individuo tiene la riqueza

$$\bar{S}^{\alpha}_{k,t}(\omega) = S^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega) - b^{\alpha}_{k-1,t}(\omega) + p_t(\omega)Y^{\alpha}_{k,t}(\omega)$$

EL agente sobrevive para el siguiente periodo con probabilidad η_{k-1} y si sobrevive, inicia el siguiente periodo con esta riqueza junto con alguna herencia $Z^{\alpha}_{k,t}(\omega)$. En el caso de que no sobreviva, su riqueza se transforma en parte de su legado total. Entonces, con la probabilidad η_{k-1} el individuo sobrevive con riqueza

$$S^{\alpha}_{k,t}(\omega) = S^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega) - b^{\alpha}_{k-1,t}(\omega) + p_t(\omega)Y^{\alpha}_{k,t}(\omega) + Z^{\alpha}_{k,t}(\omega) = \bar{S}^{\alpha}_{k,t}(\omega) + Z^{\alpha}_{k,t}(\omega)$$

Es evidente amigo lector, que si el agente es un recién nacido al final de su periodo t tendría

$$S^{\alpha}_{0,t}(\omega) = Z^{\alpha}_{0,t}(\omega)$$

Por lo que el legado total en el periodo queda como

$$L_t(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \eta_{k-1}) \int_{I_{k-1,t-1}} \bar{S}^{\alpha}_{k,t}(\omega)\varphi_{t-1}(d\alpha)$$

que debe igualar a la herencia total

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{Ik,t} Z^{\alpha}_{k,t}(\omega)\varphi_t(d\alpha)$$

Quedando resuelto el aspecto referente a la herencia.

---

[119] Las pujas son mensurables conjuntamente en (α, ω).

[120] Aquí $u_{k-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es una función cóncava común para todos los agentes de edad k-1.

En la economía propuesta se conserva el dinero de periodo a periodo. En orden de verificar esto, veamos que si $W_{t-1}(\omega)$ es la riqueza total de los agentes al inicio del periodo t,

$$W_{t-1}(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_{k-1,t-1}} S^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega)\varphi_{t-1}(d\alpha)$$

después de las pujas y el ingreso pero antes de nacimientos, muertes y herencias la riqueza del individuo $\tilde{S}^{\alpha}_{k,t}(\omega)$ y la riqueza total será

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_{k-1,t-1}} S^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega)\varphi_{t-1}(d\alpha)$$

permanece igual a $W_{t-1}(\omega)$. Entonces la riqueza total después de nacimientos muertes y herencias es

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta_{k-1}\int_{I_{k-1,t-1}} S^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega)\varphi_{t-1}(d\alpha)$$

Así que añadido al legado total obtenemos la riqueza total.

Para entender como el individuo decide ahorrar pensemos en un problema sencillo. Imaginemos un individuo se enfrenta a un problema de selección de portafolio óptimo en un mercado financiero con dos activos. Uno de ellos libre de riesgo llamado bono, y el activo riesgoso llamado acción. Este problema de ahorro/consumo tiene un agente económico cuyas acciones no pueden influir a los precios del mercado, puede elegir un portafolio y una estrategia de consumo que determine la evolución. El problema es elegir éstas estrategias para maximizar algún criterio de utilidad. Sea $x(t)$ la riqueza en el tiempo t, y el precio $p_1(t)$ del bono está dado por

$$dp_1(t)=rp_1(t)dt$$

Mientras que el precio $p_2(t)$ del activo riesgoso cambia de acuerdo con las ecuaciones diferenciales estocásticas[121] lineales

$$dp_2(t)=p_2[\alpha dt+\sigma dw(t)]$$

donde $w(\cdot)$ es un proceso Wiener[122] estándar 1-dimensional. Aquí r, α, σ son constantes con $r<\alpha$ y $\sigma>0$. Una política de consumo/inversión π es un par $(a_1(\cdot), a_2(\cdot))$ consiste de un proceso de portafolio $a_1(\cdot)$ y un proceso de tasa de consumo $a_2(\cdot)$. Esto es $a_1(t)$ es la fracción de riqueza en el activo riesgo, mientras que $1-a_1(t)$ es la fracción de riqueza invertida en el bono en el tiempo t, y $a_2(t)$ es la tasa de consumo que satisfacen

$$0\le a_1(t)\le 1;\ a_2(t)\ge 0$$

Entonces, cuando usamos una política ahorro/consumo π dada, la riqueza $x(\cdot)=x^{\pi}(\cdot)$ cambia de acuerdo a las ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dx(t)=(1-a_1(t))x(t)rdt+a_1(t)x(t)[\alpha dt+\sigma dw(t)]-a_2(t)dt$$

Los tres términos en el lado derecho corresponden a

1) ganancias por el dinero invertido en el bono,

2) ganancias por la inversión en la acción,

[121] Las ecuaciones diferenciales estocásticas que se resuelven mediante procesos de Markov.

[122] $\{w(t),\ t\ge 0\}$ es un proceso Wiener estándar n-dimensional.

3) disminución de la riqueza debido al consumo.

Si reescribimos en la forma estándar tenemos

$$dx(t)=\left[(r+(\alpha-r)a_1(t)x(t)-a_2(t)\right]dt+\sigma a_1(t)x(t)dw(t)$$

Ahora sea U una función de utilidad[123]. El problema de ahorro/consumo del individuo es maximizar la utilidad esperada descontada total del consumo

$$J(s,x;\pi)=E_{s,x}^{\pi}\int_{s}^{\tau}e^{-\rho t}U(a_2(t))dt$$

con la tasa de descuento $\rho>0$. Por lo que el programa dinámico queda como

$$v_s+\max_{a}\left\{e^{-\rho s}U(a_2)+[(r+(\alpha-r)a_1)x-a_2]+\frac{1}{2}(\sigma a_1 x)^2 v_{xx}\right\}=0$$

con condición terminal $v(\tau, x)=0$, y la maximización se realiza sobre el conjuntos de pares $a=(a_1, a_2)$ cumpliendo con las restricciones de control. Si ignoramos por un momento las restricciones de control, podrá usted ver que la función dentro de las llaves se maximiza mediante $a^*=(a^*_1, a^*_2)$ tal que

$$a^*_1=-(\alpha-r)v_x/\sigma^2 x v_{xx},\ U'(a^*_2)=e^{\rho s}v_x$$

Si $v_x>0$ y $v_{xx}<0$ para $x>0$. La solución del problema depende, como usted puede ver, de la forma funcional de U.

Para ayudarnos a la maximización de la utilidad total descontada del consumo debemos elegir un proceso de consumo $a(t)=\pi(x(t))$para maximizar la utilidad esperada total descontada

$$V(x,\pi)=E_x^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\rho t}U[a(t)]dt\text{, }\rho>0$$

Donde U es la función de utilidad, y la riqueza $x(\cdot)=x^*(\cdot)$ satisface para todo $t\geq0$,

$$dx(t)=x(t)[\alpha dt+\sigma dw(t)]-a(t)dt\text{, }x(0)=x$$

Usando nuevamente las ecuaciones

$$dx(t)=(1-a_1(t))x(t)rdt+a_1(t)x(t)[\alpha dt+\sigma dw(t)]-a_2(t)dt\text{, y}$$

$$dx(t)=\left[(r+(\alpha-r)a_1(t)x(t)-a_2(t)\right]dt+\sigma a_1(t)x(t)dw(t)$$

con $a_1(\cdot)\equiv1$ y $a_2(\cdot)=a(\cdot)$, por lo que podemos escribir

$$dx(t)=[\alpha x(t)-a(t)]dt+\sigma x(t)dw(t)\text{, }x(0)=x$$

asumiendo que $\alpha>1$, $\sigma^2>0$ y que la riqueza inicial x es positiva, mientras que $a(t)=\pi(x(t))$ está sujeto a la restricción

$$0\leq\pi(x)\leq x,\ \forall x$$

Entonces, para la función de utilidad U, el programa dinámico, con $v_x=v'$ y $v_{xx}=v''$, queda

---

[123] U es una función no negativa sobre $[0, \infty)$ de clase C2, estrictamente creciente, estrictamente cóncava y tal que $U'(0)=+\infty$.

$$-\rho v(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''(x) + \alpha x v'(x) + \max_a [U(a) - a v'(x)] = 0$$

Por lo que la solución depende nuevamente de la forma funcional de U, con lo que se obtiene el proceso de consumo óptimo.

Para la toma de decisiones sobre las pensiones publicas suponemos que el gobierno en el tiempo t maximiza una función de bienestar social con una tasa de descuento social ρ.

$$B_t = \sum_{i=t}^{\infty} U_{i-1} \left(\frac{1+n}{1+\rho} \right)$$

De acuerdo con ésta ecuación el gobierno es un planificador social que toma en cuanta el bienestar de las generaciones, tanto la presente como la futura, donde el bienestar de una generación se mide mediante la función de utilidad de un individuo representativo de ésta generación ponderado por el tamaño de la generación. Asumiendo que $n<\rho$ las condiciones de primer orden para maximizar el bienestar social son

$$u'(c_{t-1}^T) = \frac{1+\theta}{1+\theta} u'(c_t^y)$$

$$u'(c_{t-1}^y) = \frac{1+f'(k_t)}{1+\rho} u'(c_t^y)$$

La primera es una condición para la asignación óptima entre vivos jóvenes y viejos al mismo tiempo y la segunda optimiza una asignación intertemporal. Así que el planificador social respeta las decisiones de ahorro del individuo. Los esquemas que respetan esto son los sistemas de seguridad social de reparto (PAYG[*pay-as-you-go*]) y los de capitalización (FF[*fully-funded*]). No es mi objetivo tratar y analizar los sistemas de pensiones, ya que es una investigación es sí misma, pero hablaré un poco. Hay una conclusión en la literatura sobre pensiones que nos dice que el sistema FF conduce a niveles de capital físico en el estado estacionario más elevados que el PAYG. El argumento es sencillo, el adoptar un sistema FF lleva a un nivel de capital más alto debido a que alienta a los individuos a incorporarse al sector formal de la economía, que aunado a las contribuciones genera un beneficio evidente.

CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES GENERALES

En este capítulo me permití plantear la idea de como se podría modelar una economía donde los individuos pudiesen elegir si consumen o ahorran, me base en ideas simples, ya que el instrumental es lo bastante complejo como para complicarlo aún más. Debo ahondar en los problemas que puse a su consideración, sobre todo en modelo de generaciones traslapadas, añadiéndole esquemas de pensiones, formas funcionales específicas. Realizar algunas proposiciones y proponer algunos teoremas. Pero este es mi primer intento de modelar una economía desde el punto de vista estocástico. El modelo dinámico sería interesante añadir variables de estado y restricciones. En fin, me queda claro que el trabajo no termina aquí, por el contrario, aquí comienza.

Como ya lo sabíamos el ahorro es una pieza fundamental del engranaje económico. En nuestra existencia como sociedad económica hemos acumulado algunas dudas sobre el funcionamiento de nuestro sistema económico, el ahorro es una de ellas. Es muy complejo. En ésta investigación comprobamos que la elección es la base de la decisión de ahorro/consumo y que una causa fundamental es la administración del riesgo. Personalmente, me parece que hay que terminar la discusión sobre los determinantes del ahorro, además tal retraso lo único que ha provocado es que la teoría vaya más rápido que los estudios empíricos, lo que nos conduce que debemos buscar una nueva metodología para la medición del ahorro. En lo personal son proyectos que me interesa desarrollar. Hay una cosa que nos debe quedar claro, amigo lector, el ahorro continuará siendo tema central en las discusiones académicas y de política económica por unos años más. Esto se explica por la importancia que tiene en la acumulación de capital y, por ende en el crecimiento económico. Lo que me parece crucial sobre el ahorro es la posibilidad que nos brinda de movilizar recursos.

Vamos a repasar lo que sabíamos. Ya habíamos entendido que el ingreso disponible es importante para determinar al ahorro, hay quienes dicen que la tasa de interés tiene un efecto sobre el agregado de ahorro. Por fortuna, la información que nos ha proveído la literatura asegura que aún tenemos bastante que investigar. Quedo convencido que la administración del riesgo juega un papel más importante que la tasa de interés en la generación de ahorro. Me queda claro que debemos dirigir los esfuerzos en modificar la percepción de los individuos sobre el ahorro. De no ser así, cualquier política que se proponga no tendrá el efecto deseado.

La conclusión es que hay que trabajar aún más en el ahorro, en sus determinantes y dejar claro la manera de correlacionarse entre ellos. Para mi, hay que hacer uso de la programación matemática y del modelaje estocástico, con objeto de obtener mejores conclusiones con problemas más elaborados y cada vez más parecidos al entorno que pretendemos explicar. Otro punto que debo desarrollar es la idea de la relatividad de la elección, y por consiguiente de la racionalidad de los individuos. Puede ser complejo pero vale la pena encontrar un camino que nos simplifique algunas cosas. Y el concepto de la elección óptima relativa me parece que puede simplificar bastante los resultados, aunque no así la discusión.

La naturaleza del ahorro radica en la elección. Esa fue la conclusión del primer capítulo. Entendimos que se elige ahorrar para afrontar contingencias, mejorar las condiciones de vida. Así que el primer resultado importante que hemos obtenido es que la naturaleza del ahorro radica en la elección individual, tomando en cuenta las expectativas del entorno y nuestro grado de información. En el segundo capítulo quedo claro que el ahorro es un elemento fundamental del crecimiento económico por la relación ya conocida con el proceso de acumulación de capital. Comprendimos que la tasa de interés cumple con proporcionarnos información sobre el valor presente y futuro de los bienes y el dinero, pero que sólo es un precio.

Entendimos que hay causas que faltan por afinar, como el papel de los hogares, restricciones financieras y capacidad de endeudamiento, incertidumbre. A dichas causas hay que sumar, la verificación del papel en el ahorro de la educación, salud, nutrición. Tomando en cuenta las no linealidades de las funciones de utilidad, consumo y ahorro. En fin, la conclusión fue que el ahorro es un fenómeno económico difícil de medir, evaluar e incentivar.

A grandes rasgos, estas son las conclusiones obtenidas. Una personal, es seguir estudiando y analizando el tema, añadiendo estudios empíricos. Una general es que el ahorro será pieza clave en la economía de mercado que estamos experimentando. Y como le dije ya una vez, lo único cierto es que el futuro es incierto, por lo que para enfrentar dicha realidad y expectativas, lo más prudente es ahorrar, recuerde que uno nunca sabe donde brincará la liebre✡

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnoux S, E. (1964). *Panorama del ahorro*. Meridiano, México.

Aftalion, F. y P. Poncet (1985). *Las Tasas de Interés*, 1ª Edición, Fondo de Cultura Económica, Breviario No. 413, México.

Alfaro Desentis, S. y J. Salas Martín del Campo (1994). *Evolución del ahorro del sector privado en México*. Monetaria vol. XVII no. 2 abril-junio, Pp. 189-207.

Ando, A. y F. Modigliani. *The life cycle hypothesis of saving: aggregate implications and tests*. The American Economic Review Pp. 55-84.

Arrau, P. y D. Oks (1992). *Ahorro privado en México, 1980-1990*. Economía Mexicana, vol. 1 No. 2 julio-diciembre, Pp 311-78.

Arrow J. K. y F. H. Hahn (1977). *Análisis general competitivo*. Fondo de Cultura Económica.

Aspe Armella, P. (1993). *El camino mexicano de la transformación económica*. Fondo de Cultura Económica.

Baily, M. y P. Friedman (1991). *Macroeconomics, financial markets and the international sector*. Irwin.

Barro, R. (1986). *Macroeconomía*. Nueva Editorial Iberoamericana, México.

(1974). *Are government bonds net wealth?*. Journal of Political Economy. Vol. 82 núm 6 noviembre-diciembre.

Bazaraa M. y C. M. Shetty (1979). *Nonlinear programming*. J. Wiley & Sons.

Begg, D. K. H. (1986). *La revolución de las expectativas racionales en macroeconomía*. Fondo de Cultura Económica.

Binger, B. R. y E. Hoffman (1988). *Microeconomics with calculus*. Harper-Collins.

Boyce W. E. y R. C. Diprima (1992). *Elementary differential equations and boundary value problems*. J Wiley & Sons.

Brown, J. W. y R. V. Churchill (1996). *Complex variables and applications*. McGraw-Hill.

Canavos, G. C. (1988). *Probabilidad y estadística: Aplicaciones y métodos*. McGraw-Hill

Chiang, A. (1984). *Métodos fundamentales de economía matemática*. McGraw-Hill.

(1990). *Elements of dynamic optimization*. McGraw-Hill.

Debreu, G. (1973). *Teoría del Valor*. Antoni Bosch.

Diccionario de matemáticas, EDIPLESA 1986.

Dictionary of finance and investment terms, Barron's 1991.

Denzau, A. (1993). *Microeconomic analysis: markets and dynamics*. Irwin

Dixit A. (1976). *Optimization in economic theory*. Oxford University Press.

Edwards, J. R (1991). *Macroeconomics: equilibrium and disequlibrium analysis*. McMillan

Escobar D. (1998). *Introducción a la economía matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Fabozzi, F. (1994). *Advanced fixxed income porfolio management*. Irwin Professional Publishing.

(1997). *The handbook of fixed income securities*. McGraw-Hill.

Feldman, M. y C. Giles (1985). *An expository note on individual risk without aggregate uncertanity*. Journal of Econometric Theory, 35 Pp. 26-32

Feldstein, M. (1974). *Social security, induced retirement, and agregate capital acumulation*. Journal of political economy. Vol. 82 núm. 5 septiembre-octubre.

(1982). *Confirmations and contradictions: Social security and saving: Reply*. Journal of political economy, junio.

(1996). *Social security and saving: new time series evidence*. National tax journal. Junio.

Frank, R. H. (1992). *Microeconomía y conducta*. McGraw-Hill.

Friedman, M.(1957). *A theory of the consumption function*. Princeton University.

Froyen, R. T. (1994). *Macroeconomía: teoría y políticas*. McGraw-Hill.

Grossman, S. I. (1992). *Álgebra lineal con aplicaciones*. 4ª. Edición. McGraw-Hill.

Hadley, G. (1961). *Linear algebra*. Addison-Wesley.

Hal, R. y J. B. Taylor (1986). *Macroeconomía*. Antoni Bosch Editor.

Hall R. (1978). *Stochastic implications of the life cycle-permanent income hypotesis:theory and evidence*. Journal of political economy, vol. 86, Pp. 71-87.

Harris, L. (1993). *Teoría monetaria*. Fondo de Cultura Económica.

Heilbroner, R. L. (1988). *La formación de la sociedad económica*. Fondo de Cultura Económica.

Hernández Lerma, O. (1994). *Lectures on continuos-time Makov control processes*. Colección aportaciones matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana.

Hirsch M. W. y S. Smale (1974). *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press.

Hume, D. *Tratado de la naturaleza humana*. Ediciones Gernika.

Intriligator M. (1971). *Mathematical optimization and economic theory*. Prentice Hall.

Jorion, P. (1997). Valor en riesgo. Limusa.

Katz, I. (1992). *Los determinantes del ahorro en México*. ITAM, departamento académico de economía documento de trabajo no. 18.

Katz, M. L. y H. L. Rosen. (1998). *Microeconomics*. Irwin-McGraw-Hill.

Kindlerberger, C. P. (1978). *Manias, panics and crashes: a history of financial crises*. New York Basic Books, Pp.14-24

Kotlikoff, L., A. Spivak y L. H. Summers (1982). *The adequacy of saving*. American Economic Review, vol. 72, no. 5 diciembre. Pp. 1056-69.

Kreps, D. M. (1990). *A course in microeconomic theory*. Princeton University Press.

Levi, P. (1988). *Si esto es un hombre*. Colección Raíces, biblioteca de cultura Judía. Editor.

Leimer, D. y S. Lesnoy (1982). *Confirmations and contradictions: social security and private saving: new time series evidence*. Journal of political economy, junio. Vol. 90 núm. 3.

Lipsey, R., E. Tice y H. Stone. (1989). *The mesaurement of saving, investment and wealth*. University of Chicago.

Luenberger, D. G. (1995). *Microeconomic theory*. McGraw-Hill.

Madden P. (1986). *Concavidad y convexidad en microeconomía*. Alianza.

Mangasarian O. L. (1966). *Sufficent conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems*. SIAM journal of control 4, Pp. 139-152.

Mankiw, N. G. (). *Macroeconomía*. Antoni Bosch Editor

Mansfield, E. (1994). *Microeconomics*. WW Norton.

Marí, M. A. (1992). *Principios de Economía*, 3ª Edición, Macchi.

McCandless, G. T. (1991). *Macroeconomic Theory*. Prentice-Hall.

Mikesell, R. F. J. E. Zinser. (1974). *La naturaleza de la función ahorro en los países en desarrollo: un examen de los estudios teóricos y empíricos, con referencia especial América Latina*. CEMLA.

Modigliani, F. (1986). *Life cycle, individual thrift, and the wealth of nations*. American Economic Review. No. 76, Pp. 297-313.

et. al.,(1996) *Mercados e Instituciones Financieras*, 1ª Edición, Prentice Hall.

Newlyn, W. T. y R. P. Bootle (1984). *Teoría Monetaria*, 3ª. Edición, Fondo de Cultura Económica.

Ostaszwesky, A. y K. G. Binmore (1993). *Mathematics in economics models and methods*. Blackwell, Oxford.

Parkin, M. (1990). *Microeconomics*. Addison-Wesley.

y R. Bade (1991). *Macroeconomics*. Prentice-Hall.

Pontryagin L. S. et al. (1962). *The mathematical theory of optimal processes*. Intersciencie.

Prager, J.(). *Applied microeconomics: an intermediate text*. Irwin.

Rodríguez, A. C. (1993). *Técnica y Organización Bancarias*, 1ª Edición, Macchi.

Ramsey, F. P. (1929). *A mathematical theory of saving*. Economic Journal, Diciembre, Pp. 543-559.

Sachs, J. D. y F. B. Larraín (1994). *Macroeconomía en la economía global*. Prentice-Hall.

Salicrup G. (1997). *Introducción a la topología*. J Rosenblueth y C. Prieto editores. Sociedad Matemática Mexicana.

Samuelson P. A. (1958). *An exact consumtion-loan model of interest with or without the social covariance of money*. The journal of political economy no. 467-480.

Schotter, A. R. (1996). *Microeconomía un enfoque moderno*. CECSA.

Serrano Herrera, C. (1998). *Ensayos sobre la reforma a la seguridad social y el ahorro en México*. Mimeo Universidad de California en Berkeley.

Shah, H. (1996). *Towards better regulation of private penson funds*. Mimeo.

Solis F. y A. Villagómez (1995). *Domestic savings in Mexico and pension system reform*. Mimeo.

Stebbing L. S. (1981). *Introducción a la lógica moderna*. Fondo de Cultura Económica.

Tawney, R. H. *Religion and the rise of capitalism*. Harcourt New York

Taylor, H. M. y S. Karlin (1984). *An introduction to stochastic modeling*. Academic Press.

Uribe, P. (1997). *Análisis de actividades y teoría del capital*. Universidad de Guadalajara.

Von Pischke J. D. (1996). *Finance at the frontier: debt capacity and the role of credit in the private economy*. World Bank 3ª edición.

Varian, H. R.(1992). *Microeconomic Analysis*. 3ª edición, WW Norton.

(1993). *Intermediate microeconomics*. WW Norton.

Villagómez A. (1993). *Los determinantes del ahorro en México: una reseña de la investigación empírica*. Economía mexicana. Nueva época, vol. II núm. 2, julio-diciembre.

(1994). *El ahorro privado y la tasa de interés en México: 1963-1991*. Estudios económicos de el Colegio de México vol. 9 núm. 1 enero-junio.

(1995) Compilador. *El financiamiento del desarrollo en América Latina: la movilización del ahorro interno*. CEMLA.

Villar, A. (1996). *Curso de microeconomía avanzada: un enfoque de equilibrio general*. Antoni Bosch Editor.

Walsh V. C. (1974). *Introducción a la microeconomía contemporánea*. Vincens-Vives

Welsh, I. (1993). *Trainspotting*. Secker & Warburg.