19

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA PARA BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

JESÚS GONZÁLEZ JUÁREZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

MÉXICO, D.F. 2002

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Solución de problemas de álgebra y geometría para bachillerato"

realizado por JESUS GONZALEZ JUAREZ

con número de cuenta 7316563-7 **, quién cubrió los créditos de la carrera de** MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. EN C.	ALEJANDRO BRAVO MOJICA	
Propietario	M. EN C.	AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA	
Propietario	M. EN C.	ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA	
Suplente	DR.	CARLOS HERNANDEZ GARCIADIEGO	
Suplente	M. EN C.	EMMA LAM OSNAYA	Emma Lam O

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

A MI ASESOR

Gracias por sus sugerencias e ideas que me dio para llevar acabo este trabajo.

A MIGUEL ANGEL

Por su apoyo que me brindo durante un año para finalizar mi trabajo.

A ZHÁRIKOVA IRINA

Por la ayuda que me prestó en la traducción de diferentes textos del idioma ruso al idioma español.

INDICE

PRESENTACIÓN.

El objetivo de este trabajo es que pueda servir como material de apoyo:

a) A los alumnos que están cursando algunos de los cuatro cursos de matemáticas en el Colegio de Ciencias y Humanidades.

b) A los profesores y alumnos que busquen problemas tales que no sean del tipo que tradicionalmente se resuelven en los cursos de matemáticas.

c) A los clubes de matemáticas de los diferentes planteles del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Los problemas aquí propuestos están íntimamente relacionados con algunos temas que aparecen en los programas de estudio para las asignaturas de matemáticas I, II, III y IV. Tales temas son:

UNIDAD	MATERIA	NOMBRE DEL TEMA
5	MAT. I	GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO Y FIGURAS BÁSICAS
7	MAT. II	CÍRCULO.
1	MAT. II	FUNCIONES CUADRATICAS Y APLICACIONES
2	MAT. II	EXPRESIONES RACIONALES Y CON RADICALES.
3	MAT. II	DESIGUALDADES Y REGIONES EN EL PLANO.
4	MAT. II	SEMEJANZA DE FIGURAS Y TEOREMA DE PITÁGORAS
6	MAT. II	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS
3	MAT. III	ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A DOS.
4	MAT. IV	FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Este trabajo se divide de la siguiente manera:

Cada uno de los problemas (DEL 1 HASTA EL 27) aparecen junto al resultado , las sugerencias y su solución completa.
Para los problemas desde el 28 hasta el 47 aparecen enunciados junto con su respuesta cada uno y las sugerencias se encuentran en un apartado al final del trabajo.
En la segunda parte aparece la teoria minima necesaria para resolver los problemas propuestos.
Inmediatamente después se encuentran las demostraciones de algunos resultados utilizados en la solución de los problemas.
Originalmente algunos de los ejercicios aquí propuestos se dieron a los alumnos más adelantados que pertenecieran a algún circulo de matemáticas.
Espero que el material aquí propuesto cumpla con los objetivos aquí externados.

NOTA: En la redacción de algunos problemas aparece escrito el concepto de "ANGULOS IGUALES", lo cual debera de entenderse por "ANGULOS CONGRUENTES"

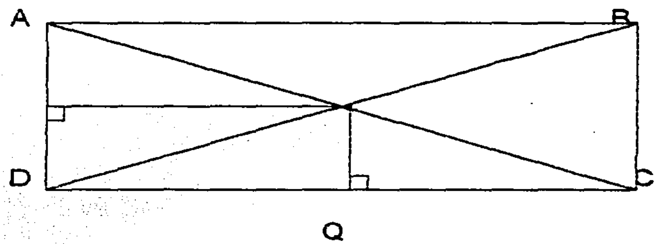
Escribi "ANGULOS IGUALES" debido a que en los diferentes libros de donde se extrajeron los problemas aparecia en idioma original (EN RUSO) ANGULOS IGUALES (RABNII UGLII).

PROBLEMA

1) En un rectángulo A,B,C,D de largo AB = 12 y ancho AD = 5 las diagonales se interceptan en un punto E. 0_1 es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo AED y 0_2 es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo DEC. Encuentra la razón.

$$\frac{EO_1}{EO_2} \qquad\qquad (\text{Resultado } \frac{EO_1}{EO_2} = \frac{10}{3})$$

Considera la figura siguiente.



a) Observa que BD y AC son las diagonales del rectángulo ABCD.
b) ¿Que relación hay entre las siguientes longitudes: AE, EC,BE,ED?
c) De acuerdo a la longitud de sus lados ¿Cómo se clasifican los triángulos AED y DEC?
d) Es un triángulo isósceles ¿Qué relación hay entre la longitud de la bisectriz, mediana y altura bajadas hacia la base del triángulo?
e) Encuentra EQ y ER con el teorema de pitagoras
f) Usa la formula (para la superficie de un triángulo) en términos del semiperimetro y del radio de la circunferencia inscrita.
g) Encuentra $EO_1 . EO_2$.

SOLUCIÓN:

1) Usando el teorema de pitagoras en el triángulo ADC:
$AC^2 = 5^2 + 12^2$
$AC^2 = 25 + 144$
$AC^2 = 169$
$AC = 13$

Pero como las diagonales de un rectángulo se bisecan mutuamente entonces AE = EC=BE=ED= 6.5, lo cual indica que los triángulos AED, DEC son isósceles y así EO_1, EO_2 son simultáneamente bisectriz, mediana y altura con lo cual se tiene EQ = 6, ER = 2.5

El radio de la circunferencia inscrita al triángulo AED es :

$$R = \text{Superficie del triángulo AED} \,/\, \frac{\text{Perímetro}}{2} = \frac{\frac{(5)(6)}{2}}{\frac{18}{2}} = \frac{5}{3}$$

El radio de circunferencia inscrita al triángulo DEC es :

$$r = \frac{\frac{(12)(2.5)}{2}}{\frac{25}{2}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Cálculo de las longitudes EO_1 y EO_2

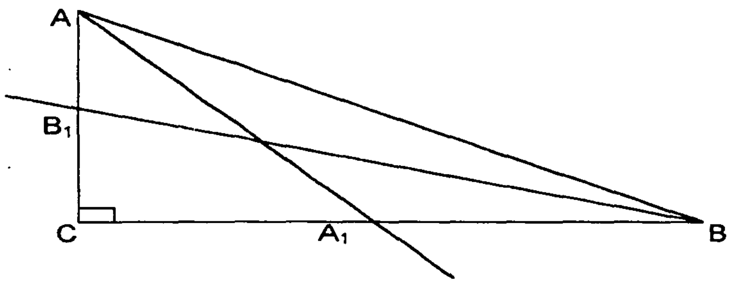
$$EO_1 = 6 - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

$$EO_2 = 2.5 - \frac{6}{5} = \frac{13}{10}$$

$$\frac{EO_1}{EO_2} = \frac{13/3}{13/10} = \frac{10}{3}$$

2) En un triángulo rectángulo se tiene que AA_1, BB_1 son las longitudes de las medianas que pasan por A y por B. La razón de sus longitudes es $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\sqrt{2}}{1}$. Encuentra la medida de los ángulos A Y B

(Respuesta: $< A = \tan^{-1} \sqrt{7}$)
$< B = \tan^{-1} 7/\sqrt{14}$)



a) Si AA, es mediana entonces al simbolizar la longitud CA_1 con X. ¿Cómo simbolizas la longitud A,B?
b) Simboliza con y la longitud CB_1
¿Cómo simbolizas la longitud AB_1?

c) Usa el teorema de pitágoras en los triángulos rectángulos ACA_1 y B,CB.
d) Encuentra AA_1, BB_1.
e) Divide aa_1 con BB_1 y usa el dato del problema $\sqrt{2}/1$
f) Encuentra las relaciones trigonométricas.
Tan A, tan B y luego encuentra $< A$, $< B$.

Solución del problema:

2) Si AA_1 y BB_1 son la medianas que pasan por A y B entonces

$$X = CA_1 = A_1 B$$
$$Y = AB_1 = B,C$$

Por el teorema de pitágoras en el triángulo $AA_1 C$ y $BB_1 C$ se tiene :

$$AA_1 = \sqrt{4y^2 + x^2}$$

$$BB_1 = \sqrt{4x^2 + y^2}$$

Dividiendo :

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\sqrt{4y^2 + x^2}}{\sqrt{4x^2 + y^2}} = \frac{2}{1}$$

Elevando al cuadrado

$$\frac{4y^2 + x^2}{4x^2 + y^2} = 2$$

$$4y^2 + x^2 = 8x^2 + 2y^2$$

$$4y^2 - 2y^2 = 8x^2 - x^2$$

$$2y^2 = 7x^2$$

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

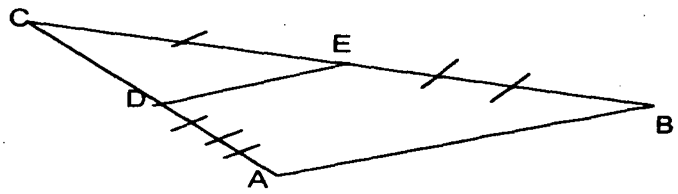
En el triángulo ABC :

$\frac{BC}{AC} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} =$ tan A y así tan A $= \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{14}}{7}$ resultado $< A \tan^{-1} \frac{\sqrt{14}}{7}$

$\frac{AC}{CB} = \frac{2y}{2x} = \frac{y}{x} =$ tan B y así tan B $= \frac{y}{x} = \frac{7}{\sqrt{14}}$ resultado B $\tan^{-1} \frac{7}{\sqrt{14}}$

3)Es un triángulo ABC el punto D divide el lado AC en la relación 2/5 desde el vértice C y el punto E divide el lado BC en la relación 3/2 desde el vértice B.

Demuestra que: Superficie del triángulo ABC = 35/4 superficie del triángulo DCE



a) Encuentra la superficie del triángulo: ABC, DCE usando las fórmulas dadas en las sugerencias del problema 4 inciso C.
b) Divide la superficie del triángulo ABC entre la superficie del triángulo DCE.
c) Observa que: AC = AD + DC , BC = BE + EC.

Solución del problema:

3) $$\frac{\text{Superficie del triángulo ABC}}{\text{Superficie del triángulo DCE}} = \frac{½\, AC^*BC\text{-}SenC}{½\, DC.EC.SenC} = \frac{AC}{DC}\frac{{}^*BC}{EC} = \frac{(AD + DC)}{DC}\frac{(BE + EC)}{EC}$$

$$= \left(\frac{AD}{DC} + 1\right)\left(\frac{BE}{EC} + 1\right) = \left(\frac{5}{2} + 1\right)\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{35}{4}$$

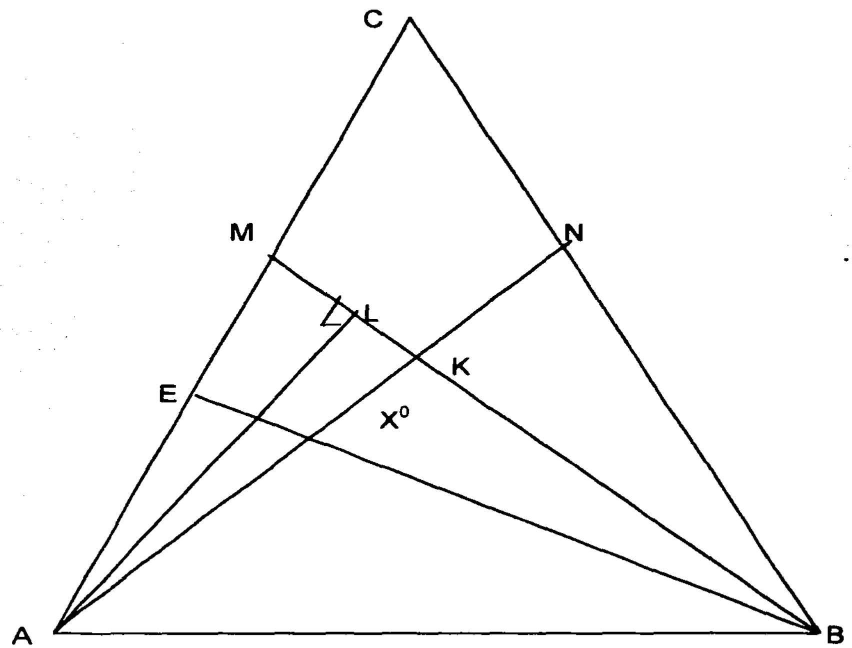
En conclusión: $S\Delta ABC = \frac{35}{4} S\Delta DCE$.

4) En un triángulo ABC la mediana que pasa por el vértice B es BM y la mediana que pasa por el vértice A es AN.

Ambas medianas se intersectan en punto K dando por resultado que AKB = X^0, longitudes AN = P, BM = Q.

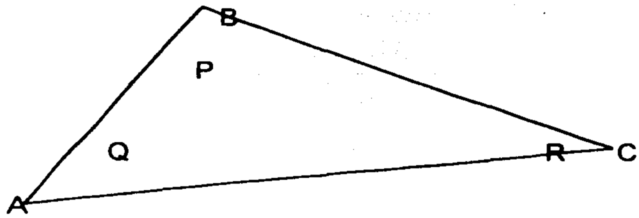
Encuentra la superficie del triángulo ABC en términos de X, P, Q.

(Respuesta: 2/3 . P . Q sen X)



Recuerda:

a) Las medianas de un triángulo se cortan en un punto que se encuentran los dos tercios de la distancia que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.
b) El punto de intersección de las medianas divide a cada una en la relación 2 : 1 desde los vértices
c) La superficie de un triángulo de puede encontrar:



$S = \frac{1}{2}(AB)(BC) \text{ Sen } P$

$S = \frac{1}{2}(AC)(AB) \text{ Sen } Q$

$S = \frac{1}{2}(BC)(AC) \text{ Sen } R$

d) Encuentra S AKB
d) Simboliza con AL la longitud de la altura del triángulo ABK
e) Simboliza con BE la longitud de la altura del triángulo ABC
f) Otra fórmula para encontrar la superficie de un triángulo es $S = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$

h) Con la fórmula anterior encuentra la superficie del triángulo AKM. Recuerda:

$$\frac{BK}{KM} = \frac{2}{1}$$

i)Encuentra la superficie del triángulo ABM
j) Calcula la superficie del triángulo ABC usando la superficie del triángulo ABM

Solución del problema:

4) Puesto que K es la intersección de las medianas:
distancia KA = 2/3 P , distancia KN = 1/3 P
distancia BK = 2/3 Q , distancia KM = 1/3 Q

$$\frac{S\Delta ABK}{S\Delta AKM} = \frac{\frac{1}{2}(AK)(BK)(\text{Sen } X)}{\frac{1}{2}(KM)(AK)(\text{Sen } 180-x)} = \frac{BK}{KM} = \frac{2/3Q}{1/3Q} = 2$$

Es decir $S\Delta ABK = 2\, S\Delta AKM$

$$\frac{S\Delta ABC}{S\Delta ABM} = \frac{\frac{(2AM)(BE)}{2}}{\frac{(AM)(BE)}{2}} = 2$$

es decir $S\Delta ABC = 2\, S\Delta ABM = 2\,(S\Delta AKB + S\Delta AKM)$
$= 2\,(S\Delta AKB + \frac{S\Delta AKB}{2}) = \frac{2}{2}(S\Delta AKB)$

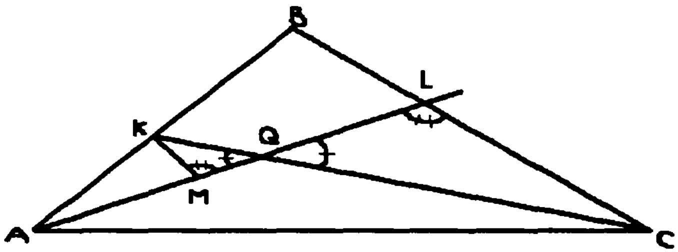
en conclusión:

$$S\Delta ABC = 3S\Delta AKB = 3\,\frac{(AK)(KB)}{2}\,\text{Sen } X = 3\,\frac{(2/3\ P)(2/3\ Q)(\text{Sen } X)}{2}$$

$$= \frac{\frac{12}{9}}{\frac{2}{1}}\ (P)(Q)(\text{Sen } X) = \frac{2}{3}(P)(Q)(\text{Sen } X).$$

5) En el siguiente triángulo se tiene AK/BK = 1/2 , CL/BL = 2/1. Encuentra el área del triángulo ABC sí el área del triángulo BKC = 1.

(Resultado: SΔ ABC = 7/4)



a) Trazar KM paralela a BC.
b) Verifica que Δ KMQ y Δ LQC son semejantes.
c) Escribe la relación de semejanza.
d) Verifica que Δ AKM y Δ ABL son semejantes.
e) Recuerda que sí a/b = c/d entonces a+b/b = c+d/ d.
f) Usando el anterior inciso y sabiendo que KB/AK = 1/2 entonces verifica que: AK/AB = 1/3.
g) Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.
h) Si KQ/QC = 1/6 entonces usando el inciso (e) verifica que KC/QC = 7/6.
i) Calcula: SΔ BKC/ S BQC, SΔ ABC/ S Δ BKC.
j) SÍ AK/BK = 1/2 entonces verifica que AB/BK = 3/2.
k) Encuentra SΔ ABC.

<u>Solución del Problema.</u>

5) Según la figura los triángulos KMQ y QLC son semejantes y se puede escribir la relación:

KQ/QC = KM/LC ----------(1)

ya que KM es paralela a BC entonces Δ AKM y Δ ABL son semejantes pudiéndose escribir:

KM/BL = AK/AB -----------(2)

de la relación (2): **KM = (AK) (BL)/AB** y sustituyo en (1) **KQ/QC = (AK) (BL)/(AB) (LC) = (AK/AB) (BL/LC) = 1/3 * 1/2 = 1/6.**

S△ BKC/S△ BQC = KC/QC = 7/6 *(Recuerda que sí dos triángulos tienen la misma altura, entonces...........)*

es decir: **S△BKC = 7/6.**

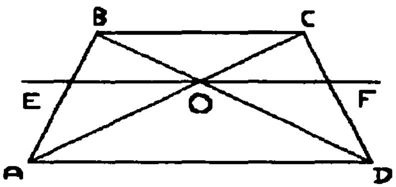
S△ABC/ S△ BKC = AB/BK *(Los dos triángulos tienen la misma altura)*

S△ ABC/ S△BKC = 3/2.

En conclusión: **S△ ABC = 3/2 * 7/6 = 7/4.**

6) A través del punto de intersección de las diagonales del trapecio isósceles ABCD se construye el segmento de la recta paralelo a la base de tal manera que intersecta a los dos lados CD y BA en los puntos F y E. Si EF = 2 entonces encuentra la longitud de la base AD sí AD/BC = 4.

(Respuesta: Ad = 5)

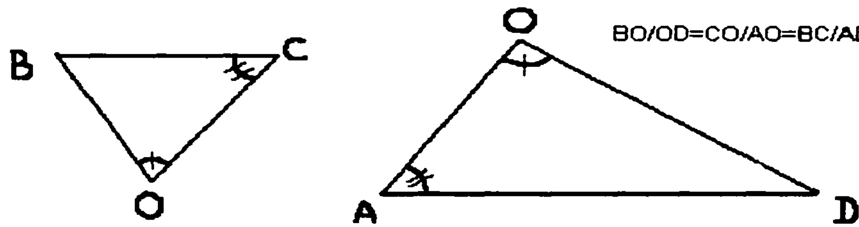


a) Escribe las ecuaciones de semejanza para cada par de triángulos semejantes:

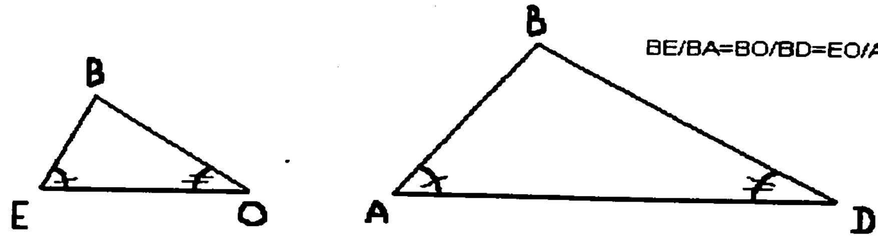
$\triangle BOC \simeq \triangle DOA$, $\triangle EBO \simeq \triangle ABD$, $\triangle OCF \simeq \triangle ACD$.

<u>Solución del problema:</u>

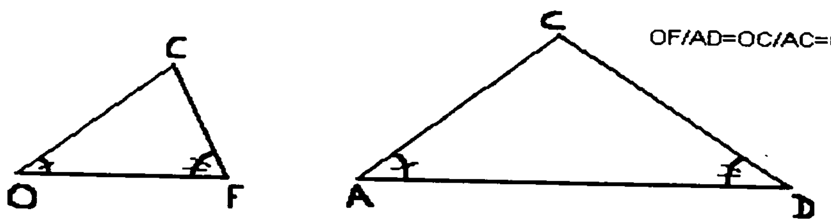
6) A continuación presento los triángulos semejantes y señalo los ángulos iguales para cada par y la correspondiente ecuación de semejanza:



BO/OD=CO/AO=BC/AD.......(1)



BE/BA=BO/BD=EO/AD.......(2)



OF/AD=OC/AC=CF/CD.......(3)

De (1): $\frac{BO}{OD} = \frac{1}{4}$

$$\frac{BO+OD}{BO} = \frac{4+1}{1}$$

$$\frac{BD}{BO} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{BO}{BD} = \frac{1}{5}$$

De (1): $\frac{CO}{AO} = \frac{1}{4}$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{4}{1}$$

$$\frac{AO+CO}{CO} = \frac{4+1}{1}$$

$$\frac{AC}{CO} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{CO}{AC} = \frac{1}{5}$$

De (2): $\frac{EO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{5}$ De (3): $\frac{CP}{AC} = \frac{OF}{AD} = \frac{1}{5}$

En conclusión se tiene: $\frac{EO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{CO}{AC} = \frac{OF}{AD} = \frac{1}{5}$ ....(4)

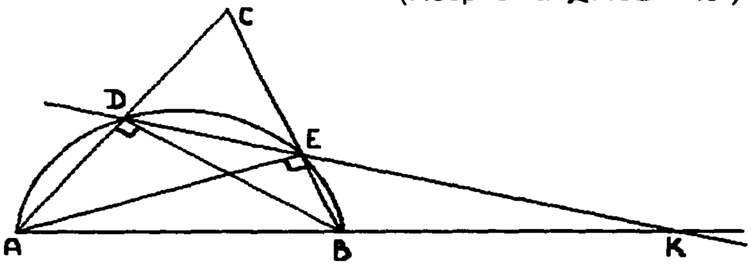
De igualdad anterior (4) $\frac{EO}{AD} = \frac{OF}{AD}$

EO = OF pero como EF = 2 entonces EO 0 OF = 1.

$\frac{EO}{AD} = \frac{1}{5}$ y así AD = 5 (EO) = 5.

7) En el siguiente triángulo ABC se toma el lado AB como el diámetro de la circunferencia que intersecta a los lados AC en D y BC en E.
La recta DE divide en dos partes iguales a la superficie del triángulo ABC y se intersecta con la continuación del lado AB en K.
Encuentra la medida del ángulo ACB.

(Respuesta $\sphericalangle ACB = 45°$)



a) ¿ Porqué razón los triángulos AEB y ADB son triángulos rectángulos?
b) Divide las superficies de los triángulos CDE entre ABC.
c) Recuerda que DE divide en dos partes iguales a la superficie del triángulo ABC.
d) En el triángulo ACE encuentra CE/CA.
e) ¿ En el triángulo CDB a que es igual CD/CB?.

Solución del Problema :

7) Por ser AB diámetro, entonces al trazar AE y DB los triángulos ADB y AEB resultan ser triángulos en donde AE y AD son las alturas de cada uno de los triángulos.

$$\frac{S\triangle CDE}{S\triangle ABC} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}(CD)(CE)(\text{Sen } C)}{\frac{1}{2}(CA)(CB)(\text{Sen } C)} = \frac{CE}{CA} \cdot \frac{CD}{CB} = (\text{Cos } C)^2$$

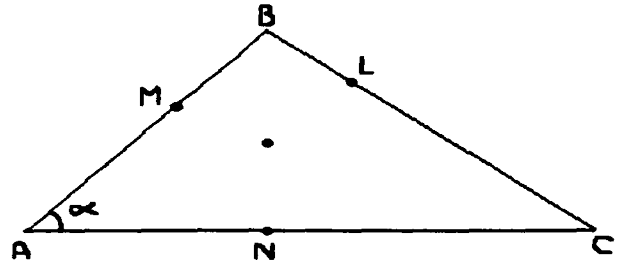
En conclusión $(\text{Cos } C)^2 = 1/2$

$\text{Cos } C = 1/\ 2$

$\sphericalangle C = 45^0$

8) En el triángulo de lados AB = 4, BC = 2, AC = 3, se inscribe su circunferencia.
Encuentra el área del triángulo AMN en donde M y N son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados AB y AC respectivamente.

(Resultado: $S\triangle AMN = 25/64\sqrt{15}$)



a) Recuerda que las tangentes a la circunferencia desde un punto común son iguales.
b) Simboliza con x la longitud AM.
c) Encuentra en términos de x las siguientes longitudes MB, BL, NC, CL, y luego encuentra x.
d) Con la ley de los cosenos encuentra α
e) Encuentra el área del triángulo pedido usando el ángulo α y los lados AM y AN *(Recuerda las formulas del Problema 4 inciso C.*

Solución del Problema:

8) Considera L el tercer punto de contacto X = AM, $\alpha = \angle BAC$, entonces:

AN = AM
MB = BL = 4 – X
NC = CL = 3 – X

Como BC = 2 entonces BC = 2 = BL + LC = 7-2x es decir x = 5/2.

Usando el teorema de los cosenos para $\triangle ABC$:
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)(\text{Cos } \alpha)$.
$4 = 25\text{-}24 \text{ Cos } \alpha$
$24\text{Cos } \alpha = 21$
$\text{Cos } \alpha = 21/24$

$\text{Sen } \alpha = \sqrt{135}/24$

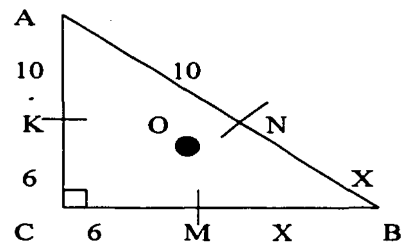
$S \triangle AMN = \frac{1}{2} (AM) (AN) (\text{Sen} \propto)$

$S \triangle AMN = \frac{1}{2} x^2 \sqrt{135} /24 = \frac{1}{2} (25/4) \sqrt{g (15)} /24$

$$S \triangle AMN = \frac{(25)(3)\sqrt{15}}{(2)(4)(3)(8)} = \frac{25}{64} \sqrt{15}$$

9) Se inscribe la circunferencia a un triángulo rectángulo y uno de los puntos de tangencia con la circunferencia (INSCRITA) divide a uno de los catetos en segmentos de longitud 6 y 10 cm medidos desde el vértice en donde está el ángulo recto. Encuentra la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

(Resultado : radio = 17)



Considera a los puntos K, M, N como los puntos de tangencia (de la circunferencia inscrita) con los lados del triángulo.

a) Lee la sugerencia del problema 8 inciso (a)
b) ¿Para una circunferencia inscrita cómo es el radio (con respecto a cada lado del triángulo) que va desde el centro hasta los puntos de tangencia?
c) Simboliza con x la longitud BN.
d) Escribe en términos de x el teorema de Pitágoras para el triángulo ABC.
e) Encuentra x.
f) ¿Qué relación hay entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y la longitud del radio de su circunferencia inscrita?

<u>Solución del problema:</u>

9)

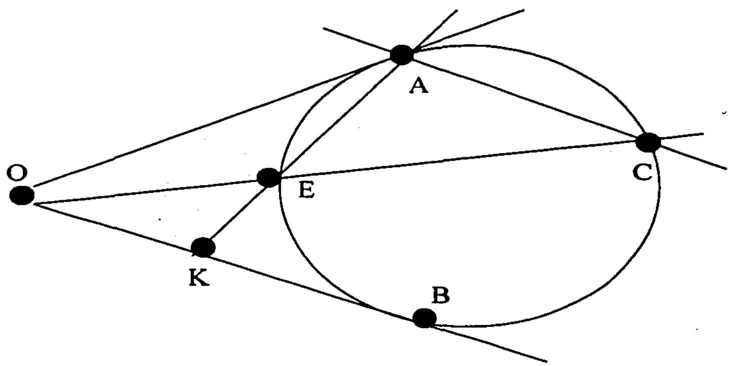
- ABC es el triángulo rectángulo.
- K, M, N son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo.
- O es el centro de la circunferencia inscrita
- AN = AK = 10
- MC = KC = 6
- Simbolicemos BN = BM = X. Entonces por el teorema de Pitágoras para el triángulo ABC tenemos:
  $(10+x)^2 = (10+6)^2 + (6+x)^2$ y resolviendo la ecuación

$$\begin{aligned} 100 + 20x + x^2 &= 256 + 36 + 12x + x^2 \\ 20x - 12x &= 256 + 36 - 100 \\ 8x &= 192 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

de esta manera AB = 10 + x = 34

Pero en un triángulo rectángulo la hipotenusa es diámetro de la circunferencia circunscrita, de esta manera la circunferencia circunscrita tiene de radio
R = 34/2 = 17

10) Se da una circunferencia y un ángulo con vértice en "O" (fuera de la circunferencia) de tal manera que los lados del ángulo sean tangentes a la circunferencia en los puntos A y B. Desde el punto A se traza la paralela al segmento OB tal que intersecte a la circunferencia en C y así OC cortará a la circunferencia en el punto E. Si K es el punto de intersección de AE con OB entonces demuestra que OK = KB.



a) Demuestra que los triángulos AOK y OKE son semejantes y luego despeja OK.

b) ¿Qué igualdad se puede escribir a partir de que sabes que KB es recta tangente y KA es recta secante?

c) Ya se puede demostrar la igualdad pedida.

Solución del problema.

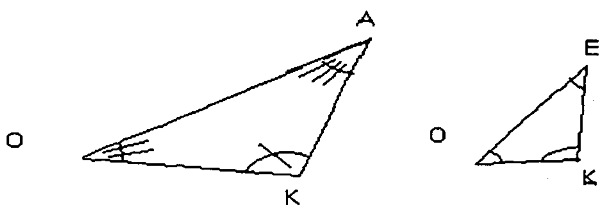
10) según la figura del enunciado problema 10 tenemos lo siguiente:

$\measuredangle\ OAE = \frac{1}{2}\ \overline{AE}$

$\measuredangle\ A<E = \frac{1}{2}\ \overline{AE}$

Por esta razón $\measuredangle\ OAE = \measuredangle\ ACE$. Puesto que A C es paralela a O B entonces $\measuredangle\ ACE = \measuredangle\ EOK$ y así $\measuredangle\ OAE = \measuredangle\ EOK$

Considerando ahora los triángulos A O K y O K E. Los cuales son semejantes.



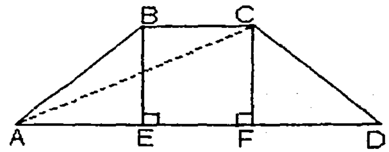
La relación de semejanza es:

$\frac{OK}{EK} = \frac{AK}{OK} = \frac{OA}{OE}$ de aquí se tiene $\frac{OK}{EK} = \frac{AK}{OK}$

$OK^2 = (EK)\ (AK)$.........(1)

Ahora de las relaciones entre la tangemte KB y la secante KA se tiene:
$KB^2 = (EK)\ (AK)$_ _ _ (2) de las relaciones (1) y (2) : $OK^2 = KB^2$ es decir $OK = KB$.
(25).

11) el área de un trapecio isósceles es igual a 320^2 la cotangente del Ángulo entre la diagonal del trapecio y su base AD es igual a 2. Encuentra la longitud de la altura del trapecio.
(respuesta: longitud de la altura igual a 4)



a) que es un trapecio isósceles
b) encuentra la cotangente del Ángulo CAD
c) encuentra la longitud de la altura del triángulo CAF
d) ¿cómo se encuentra el área de un trapecio?
e) Encuentra la altura pedida

<u>Solución del problema</u>

11) simbolizar BC = X= EF , AE= Y= FD

BE y CF son las alturas del trapecio.

Del triángulo rectángulo ACF se tiene:

$$\cot \measuredangle CAF = \frac{AF}{CF} \qquad \text{DESPEJO } CF = \frac{AF}{\cot \measuredangle CAF} = \frac{X+Y}{2}$$

el área del trapecio S= ½ (BC+AD) (CF) = ½ (X+Y+X+Y) $\left(\frac{X+Y}{2}\right)$

$$s = \frac{1}{2}\,(2x+2y)\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 2\,(CF)^2$$

$32 = 2(CF)^2$ y ASC CF = 4

$$AB = \frac{BE}{\text{Sen } \pi/3}$$

$$AB = \frac{2\sqrt[4]{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$AB=\frac{4}{\sqrt[4]{3}}$$

al trapecio se le puede inscribir la circunferencia SC

$BC+AD = AB + CD=2AB$

$$BC+AD=\frac{8}{\sqrt[4]{3}}$$

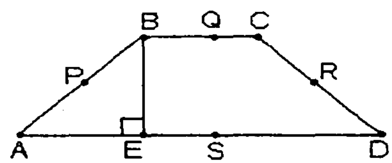
el área del trapecio es:

$$S=(BE)\left(\frac{BC+AD}{2}\right)$$

$$S=(2\sqrt[4]{3})\;\frac{\left(\frac{8}{\sqrt[4]{3}}\right)}{\frac{2}{1}}$$

$$S=2\bullet\sqrt[4]{3}\bullet\frac{8}{\sqrt[4]{3}\bullet 2}=8$$

12) en trapecio isósceles con ángulos agudos (en la base) $\alpha = \pi/3$ se inscribe la circunferencia de radio $\sqrt[4]{3}$ encuentra el área del trapecio (resultado: área = 8cm2)



a) traza una de las alturas del trapecio (en este caso traza la altura BE)
b) encuentra la longitud BE
c) considera el triangulo ABE y con trigonometría encuentra la longitud AB
d) recuerda que $\text{sen}\,\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) al trapecio ABCD se le puede inscribir una circunferencia si se cumple BC +AD= AB +CD
f) ten en consideración que el trapecio es isósceles
g) ¿con qué fórmula encuentras el área de un trapecio?

solución del problema

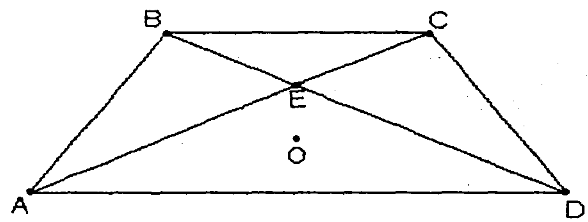
12) BE es la altura del trapecio y los puntos P,Q,R,S son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del trapecio. Entonces BE = 2 $\sqrt{3}$ del triángulo rectángulo ABE se tiene que :

$$\text{Sen } \pi/3 = \frac{BE}{AB}$$

13) ABCD es un trapecio circunscrito a la circunferencia O .

E es el punto de intersección de sus diagonales r_1, r_2, r_3, r_4 son los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos BAE, BCE, CDE, DAE .

Demuestra que : $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$



a) simboliza con s_1, s_2, s_3, s_4, p_1, p_2, p_3, p_4 las áreas y los semiperímetros de los triángulos: ABE, BCE, CDE, DAE.
b) Recuerda el inciso E del problema 12
c) A la igualdad que resulte del inciso (b) súmale de cada lado las siguientes cantidades : AE+EC+BE+ED.
d) A partir del inciso (c) ya puedes demostrar que $p_1+p_3= p_2 +p_4$
e) Encuentra la superficie del triángulo ADC usando la superficies de los triángulos CED y AED
f) Encuentra la superficie del triángulo ADC usando la superficies del triángulo CDE y AED
g) ¿qué relación hay entre las superficies de los siguientes triángulos ABD y ADC? (recuerda que BC// AD por ser ABCD un trapecio)
h) demuestra que $s_1=s_3$ y simboliza con S esas superficies
i) verifica que Δ BCE $\sim$ Δ DAE
j) si $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+p+c}{b+q+d} = \frac{a}{b} = \frac{p}{q} = \frac{c}{d}$

k) a partir de un inciso (I) y (J) demuestra que $\frac{p_2}{p_4} = \frac{BE}{ED}$

l) aplica a los triángulos: BEC y CED; ABE y AED el siguiente resultado: si dos triángulos tienen la misma altura entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases. Y demuestra que :

$$S = \frac{(P_2)\ (S_4)}{P_4} \quad \text{ò} \quad S = \frac{(P_4)\ (S_2)}{P_2}$$

m) en el inciso (D) demostraste que $p_1+p_3 = p_2+p_4$ pues bien, divide cada término por S (recuerda que $S = S_1$ o $S = S_3$ según el inciso H) y obtén la siguiente igualdad $\frac{p_1}{s_1} + \frac{p_3}{s_3} = \frac{p_2}{s_2} + \frac{p_4}{s_4}$

n) encuentra las áreas de los triángulos s_1, s_2, s_3, s_4 en términos del radio de su circunferencia inscrita y del semiperímetro del triángulo.

o) Aplica el inciso (n) en la igualdad que obtuviste en el inciso (m)

p) Ahora estás listo para demostrar que $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$

Solución del problema

13) de acuerdo a la figura del enunciado del problema 13.

Simbolizo por s_1, s_2, s_3, s_4, p_1, p_2, p_3, p_4 las áreas y el semiperímetro de los triángulos ABE, BCE, CDE, DAE los lados del trapecio deben de cumplir con AB + CD = BC+ AD (se supone que el trapecio se encuentra circunscrito a la circunferencia de centro en O). A la igualdad anterior sumo de cada lado AE+EC+BE+AD Y TENGO:

AB+CD+AE+EC+BE+ED = BC+AD+AE+EC+BE+ED

AB+AE+BE+CD+EC+ED = BC+BE+EC+AD+AE+ED

$2P_1 + 2P_3 = 2P_2 + 2P_4$ es decir $P_1+P_3 = P_2 + P_4$

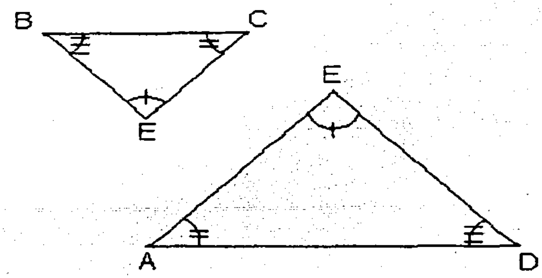
superficie del triángulo ABD = S Δ ABE + S Δ AED

superficie del triángulo ADC = S Δ CED + S Δ AED

pero S Δ ABD = S Δ ADC, S Δ ABE + S Δ AED= S Δ CED + S Δ AED

S Δ ABE = S Δ CED, es decir $S_1 = S_3$ y simbolizo por S estas superficies es decir $S = S_1 = S_3$

Ahora $\triangle BCE \simeq \triangle DAE$



$$\frac{BE}{ED} = \frac{BC}{AD} = \frac{EC}{EA}$$

$$\frac{BE + BC + EC}{ED + AD + AE} = \frac{BE}{ED}$$

$$\frac{2P_2}{2P_4} = \frac{BE}{ED}$$

$$\frac{P_2}{P_4} = \frac{BE}{ED}$$

y como se sabe que si dos triángulos tienen la misma altura entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases. Aplico esto a los triángulos BEC y CED los cuales tienen la misma altura que sale de C y así :

$\frac{S_2}{S_3} = \frac{BE}{ED}$ y lo mismo aplico a los triángulos ABE con AED

$\frac{S_1}{S_4} = \frac{BE}{ED}$ y asi $\frac{S_2}{S_3} = \frac{S_1}{S_4} = \frac{P_2}{P_4}$ (recuerda que $S = S_1 = S_3$)

es decir $\frac{S_2}{S} = \frac{S}{S_4} = \frac{P_2}{P_4}$ y así tengo dos igualdades para **S**

$S = \frac{P_2 \ S_4}{P_4}$, $\quad S = \frac{P_4 \quad S_2}{P_2}$

de la igualdad $P_1 + P_3 = P_4 + P_2$ si divido cada termino por "S"

$\frac{P_1}{S} + \frac{P_3}{S} = \frac{P_2}{S} + \frac{P_4}{S}$ es decir $\frac{P_1}{S_1} + \frac{P_3}{S_3} = \frac{P^{4}/_{1}}{\frac{P_4 \ S_2}{P_2}} + \frac{P^{2}/_{1}}{\frac{P_4 \ S_2}{P_4}}$

$$\frac{P_1}{S_1} + \frac{P_3}{S_3} = \frac{P_2}{S_2} = \frac{P_4}{S_4}$$

pero el área de un triángulo en términos del radio de su circunferecia inscrita es:

$$S_1 = P_1 \bullet r_1$$

$$S_3 = P_3 \bullet r_3$$

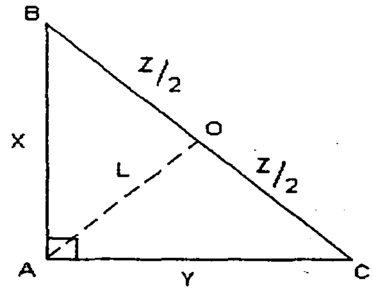
$$S_2 = P_2 \bullet r_2$$

$$S_4 = P_4 \bullet r_4$$

$$\frac{P_1}{P_1 \ r_1} + \frac{P_3}{P_3 \ r_3} = \frac{P_2}{P_2 \ r_2} + \frac{P_4}{P_4 \ r_4}$$ es decir

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

14) la mediana de un triángulo (rectángulo) que pasa por A divide el triángulo rectángulo en dos triángulos con perímetro P_1 y P_2. encuentra la longitud de los lados del triángulo original en términos de P_1 y P_2



a) Considera la figura del triángulo rectángulo según la figura anterior, en donde O es el punto medio de BC
b) Simboliza : AO = L , AB = X , AC = Y , AC = Z
c) Como simbolizarías BO y OC
d) Simboliza con P_1 el perímetro del triángulo AOB .
   Simboliza con P_2 el perímetro del triángulo AOC
e) Escribe el perímetro del triángulo AOB en términos de X , Z , L .
   Escribe el perímetro del triángulo AOC en términos de Y, Z, L.
   Escribe la longitud de la mediana AO en términos de Z (recuerda el inciso F del problema 9)
   Escribe el teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo.
f) Resuelve el sistema de ecuaciones que ya obtuviste en el inciso E
g) Al final debes de llegar a la ecuación : Z^2-Z ($2P_1$ + $2P_2$) + (P_1 + P_2^2)
h) La solución la tendrás cuando resuelvas la ecuación anterior es decir que cuando encuentres Z ya estarás listo para encontrar X, Y.

<u>solución del problema</u>

14) según los datos y la figura anterior:

$$X+Z/_2 +L = P_1 \quad , \quad Y+Z/_2 +L = P_2 \quad , \quad L= Z/_2 \quad , \quad X^2 + Y^2 = Z^2$$

$$X + Z = P_1 \quad , \quad Y+Z = P_2 \quad , \quad X^2 + Y^2 = Z^2$$

y ahora resuelvo este sistema de ecuaciones :

$$(P_1 - Z)^2 + (P_2 - Z)^2 = Z^2$$

$$P_1^2 - 2P_1 - Z + Z^2 + P_2^2 - 2P_2 Z + Z^2 = Z^2$$

$$Z^2 - Z (2P_1 + P_2) + P_1^2 + P_2^2 = O$$

$$Z=\frac{2P_1+2P_2\pm\sqrt{(2P_1+2P_2)^2-(4)(1)(P_1^2+P_2)^2}}{2}$$

$$Z=\frac{2P_1+2P_2\pm\sqrt{4P_1^2+8P_1P_2+4P_2^2-4P_1^2-4P_2^2}}{2}$$

$$Z=\frac{2P_1+2P_2\pm\sqrt{8P_1P_2}}{2}=\frac{2P_1+2P_2\pm 2\sqrt{2P_1P_2}}{2}$$

$Z = P_1 + P_2 \pm\sqrt{2P_1 P_2}$

y las soluciones son:

$Z1 = P_1 + P_2 + \sqrt{2P_1 P_2}$

$Z2 = P_1 + P_2 - \sqrt{2P_1 P_2}$

Si tomo la raíz positiva (es decir Z , como solución) entonces X, Y serán negativas .

Y la solución es tomar Z2 como solución y así :

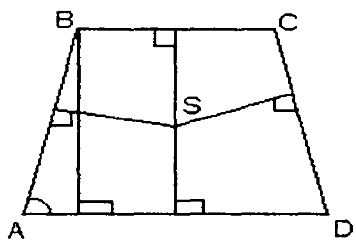
$Z= P_1 + P_2 - \sqrt{2P_1 P_2}$

$X = P_1 - P_1 - P_2 + \sqrt{2P_1 P_2} = \sqrt{2P_1 P_2} - P_2$

$Y= P_2 - P_1 - P_2 + \sqrt{2P_1 P_2} = \sqrt{2P_1 P_2} - P_1$

15) el perímetro de un trapecio isósceles es el doble del perímetro de su circunferencia inscrita.

Encuentra la medida del Ángulo α que se encuentra en la base del trapecio. (respuesta: α arco seno $(2/\pi)$)



a) simboliza con X la longitud de la altura BE
b) encuentra sen α
c) recuerda la relación que debe cumplirse entre los lados del trapecio por estar inscrita su circunferencia
d) ¿qué relación hay entre AB y CD?

e) escribe el perímetro del trapecio teniendo en cuenta (C) y (D)
f) ¿ qué relación hay entre la altura y el radio de la circunferencia escrita?
g) Calcula el perímetro del triángulo en términos de X y
h) Escribe el perímetro de la circunferencia escrita en términos de X
i) Por las condiciones de este problema se dice que el perímetro de un trapecio isósceles
j) Escribe una ecuación usando (i)
k) Encuentra α

solución del problema

15) "S" es el centro de la circunferencia inscrita entonces

$$\frac{X}{AB} = \text{sen}\ \alpha$$

$$AB = \frac{X}{\text{Sen}}$$

Por estar la circunferencia inscrita al trapecio entonces se cumple :

AB +CD = BC + AD ----------(1)

Además :

AB = CD ----------(2)

El perímetro del trapecio es:

P= AB+BC+CD+AD . pero por (1)

entonces el perímetro del trapecio ES :
P= AB+CD+AB+CD

P= AB+AB+AB+AB (2)

P= 4AB es decir

$$P = \frac{4X}{\text{Sen}\alpha}$$

La altura BE también es diámetro de la circunferencia escrita y la longitud de la circunferencia es :

$L = 2\pi r$

Esto es :

$L = \pi (BE)$

$L = \pi (X)$

Pero por los datos del problema se tiene que perímetro del trapecio = 2 veces la longitud de la circunferencia es decir :

$$\frac{4X}{\operatorname{sen}\alpha} = 2\pi(X)$$

$$\frac{4X}{2\pi X} = \operatorname{sen}\alpha$$

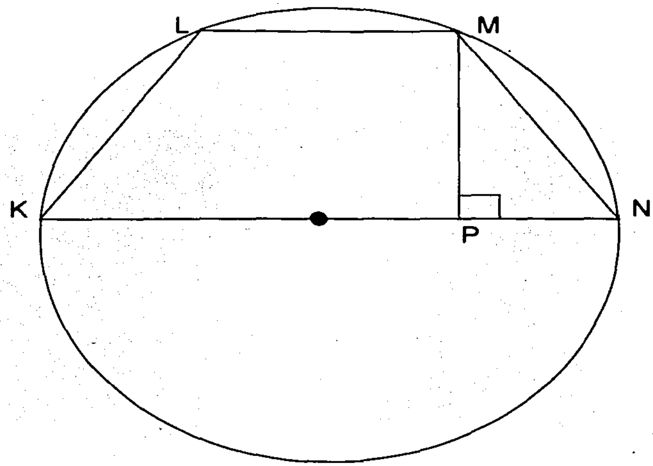
$$\frac{2}{\pi} = \operatorname{sen}\alpha$$

y finalmente :

$$\alpha = \text{Arco seno } (2/\pi)$$

16) El trapecio isósceles KLMN con base mayor KN y base menor LM está inscrito a una circunferencia (cuyo centro se encuentra en KN)Ç . la diagonal KM del trapecio es igual a 4cm (KL = MN = 3). Encuentra la longitud de la base menor.

(Respuesta LM = 1.4cm)



a) Según la figura que aparece arriba responde:

¿Qué tipo de triángulo es KMN?

b) Encuentra la longitud KN

c) Desde el punto M baja la altura que intersectará a la base mayor KN en el punto P.

d) Verifica que AKMP y AMPN son semejantes.

e) A partir del inicio (d) Encuentra la longitud PN.

f) Ahora ya estás listo para encontrar LM.

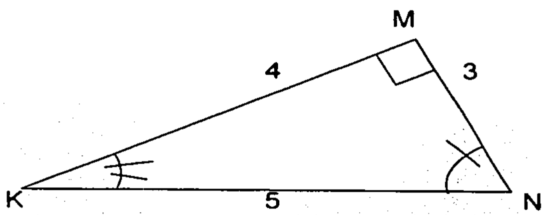
Solución del problema

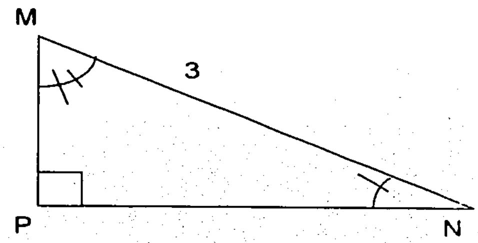
16) La circunferencia pasa por los puntos K, L, M, N (por estar este trapecio inscrito a la circunferencia). Como el centro de la circunferencia se encuentra sobre el segmento recta KN entonces el centro es el punto medio de KN.

El triángulo KMN es triangulo rectángulo.

Por el teorema de Pitágoras KN = 5.

Al bajar desde el punto M la altura MP entonces resulta que los triángulos KMN y MPN son semejantes.





$$\frac{PN}{3} = \frac{3}{5}$$

$$PN = \frac{9}{5}$$

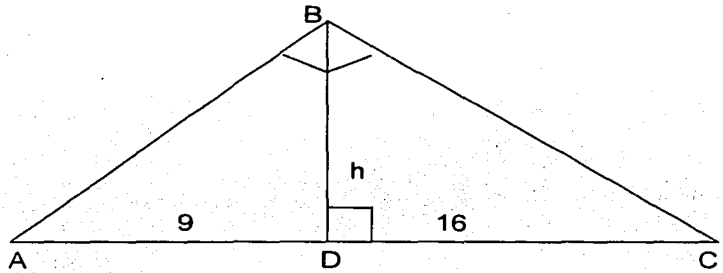
$$LM = 5 - 2\frac{9}{5}$$

LM=1.4

17) En un triángulo rectángulo la altura bajada desde el vértice del ángulo recto divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitud 9 y 16.

Encuentra la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo.

(Respuesta: radio = 5)



a) Verifica que $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$ son semejantes.

b) Simboliza con h la longitud de BD.

c) Con la semejanza de triángulos encuentra h.

d) Con el teorema de Pitágoras encuentra las longitudes AB y BC.

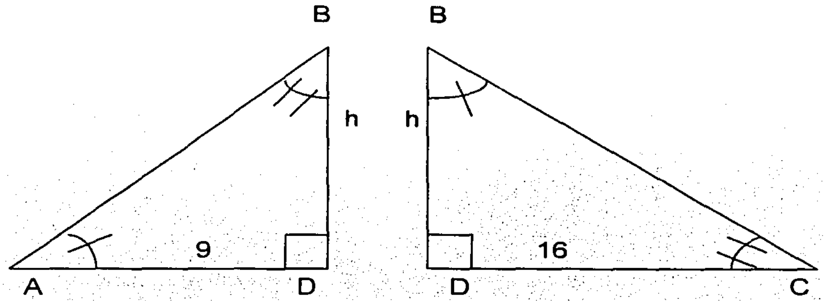
e) Encuentra el área del triángulo ABC de dos maneras diferentes

$S = \frac{b \times h}{2}$, S=(Semiperímetro) (Radio de la circunferencia inscrita)

f) Ya puedes encontrar el radio de la circunferencia inscrita por medio de un despeje.

Solución del problema

17) Según la figura del enunciado tenemos que los triángulos ABD y BDC son semejantes.



$$\frac{h}{16} = \frac{9}{h}$$

$$h^2 = (9)(16)$$

h=12

Ahora con el teorema de Pitágoras aplicado en cada triángulo encuentra:

$AB^2=9^2+12^2$ $\qquad$ $BC^2=12^2+16^2$

$AB^2=81+144$ $\qquad$ $BC=20$

AB=15

Área del triángulo ABC: Área= $\frac{(15)(20)}{2} = 150$

Área del triángulo ABC:

Área=(semiperímetro)(radio de la circunferencia inscrita)=150

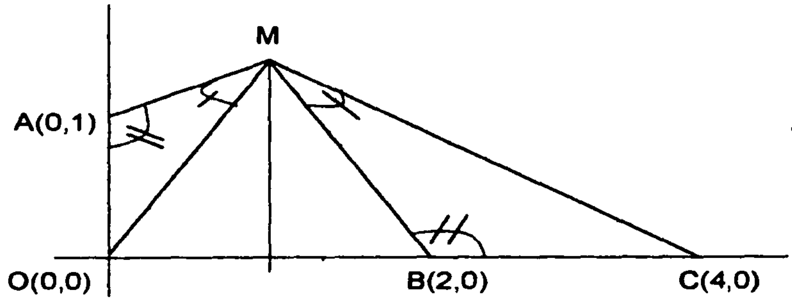
Finalmente:

Radio de la circunferencia inscrita= $\frac{150}{30}$

18) En el plano coordenado se dan los puntos O (0,0) A(0,1) B(2,0) C(4,0).

Encuentra las coordenadas (x,y) del punto M tal que el ángulo OMA sea igual al ángulo CBM y el ángulo MAO sea igual al ángulo MBC.

Respuesta: hay dos puntos que son $P_1\left(\frac{-4}{3},\frac{8}{3}\right)$ $P_2\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$



a) Grafíca los puntos A,O,B,C en el sistema de ejes x,y.

b) Supón que M es el punto que da la solución del problema.

c) ¿Por qué razón ΔAOM y ΔABC son semejantes?

d) Escribe la relación de semejanza [Recuerda que primero debes conocer la distancia entre los puntos MC,MO,MB,MA,BC,BO].

e) Escribe dos ecuaciones las cuales debes de solucionarlas como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

f) Finalmente debes llegar a que hay dos puntos que cumplen con ser la solución del problema y éstos son:

$P_1\left(\frac{-4}{3},\frac{8}{3}\right)$ $P_2\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$

Solución del problema

18) Ya que los tres ángulos de ΔAOM son iguales a los tres ángulos de ΔMBC entonces los triángulos son semejantes y se cumplen las siguientes igualdades:

$\frac{MC}{MO} = \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{O}$ y en términos de x, y ésto se escribe así:

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{(x-4)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(x-2)^2 + y^2}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{4}{1}$$

$$\frac{(x-4)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 4 \;\; ; \;\; y^2 + (x-4)^2 = 4x^2 + 4y^2 \text{------------------------} (1)$$

$$\frac{(x-2)^2 + y^2}{x^2 + (y-1)^2} = 4 \;\; ; \;\; (x-2)^2 + y^2 = 4x^2 + 4(y-1)^2 \text{------------------------} (2)$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4$$

Lo anterior se puede escribir:

$$(x-4)^2 - (x-2)^2 = 8y - 4$$

$$x^2 - 8x + 16 - x^2 + 4x - 4 = 8y - 4$$

$$-4x + 12 = 8y - 4$$

$$-4x + 16 = 8y$$

$$\frac{-x}{2} + 2 = y$$

Sustituyo este valor de y en la ecuación (1)

$$(x-4)^2 + (2 - \frac{x}{2})^2 = 4x^2 + 4(2 - \frac{x}{2})^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + 4 - 2x + \frac{x^2}{4} = 4x^2 + 4(4 - 2x + \frac{x^2}{4})$$

$$x^2 - 8x + 16 + 4 - 2x + \frac{x^2}{4} - 4x^2 - 16 + 8x - x^2 = 0$$

$$20-2x-16+\frac{x^2}{4}-4x^2=0$$

$$4-2x+\frac{x^2}{4}-4x^2=0$$

$$16-8x+x^2-16x^2=0$$

$$-15x^2-8x+16=0$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4(-15)(16)}}{2(-15)} \quad , \quad x=\frac{8\pm\sqrt{64+960}}{-30}$$

$$x=\frac{8\pm 32}{-30} \quad , \quad x_1=\frac{-40}{30}=-\frac{4}{3} \qquad y_1=2-\frac{(-4/3)}{2/1}=\frac{8}{3}$$

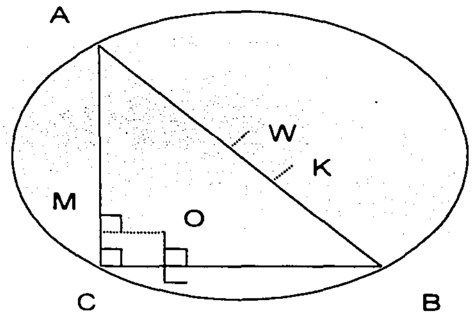
$$x_2=\frac{24}{30}=\frac{4}{5} \qquad y_2=2-\frac{4/5}{2/1}=2-\frac{-4}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$$

Conclusión: hay dos puntos que cumplen con la solución del problema y éstos son:

$P_1\left(\frac{-4}{3},\frac{8}{3}\right)$ $P_2\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$

19) Encuentra la superficie de la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo si el área del triángulo es P y el área de la circunferencia inscrita a el mismo triángulo rectángulo es Q.

(Resultado: π P-Q)^2



- Considera ABC el triángulo rectángulo.
- LM puntos de tangencia (de la circunferencia inscrita) con los lados del triángulo.
- O el centro de la circunferencia inscrita.

a) Simboliza por: r= radio de la circunferencia inscrita.
y O= su centro.
R= radio de la circunferencia circunscrita.
y W= su centro.
AC= x.
CB= y.

b) Encuentra las longitudes

AK en términos de x y r
BK en términos de y y r

c) Escribe el diámetro de la circunferencia circunscrita en términos de x, y, r.

d) De la ecuación que obtuviste en el inciso (c) eleva al cuadrado ambos lados y usa el teorema de Pitágoras junto con la superficie del triángulo ABC y despeja R de la ecuación que obtengas.

(debes de obtener $R= \frac{P-r^2}{2r}$)

e) Ya sabes que el área de la circunferencia inscrita es $\pi \cdot r^2 = Q$. Pues bien usando esta ecuación y la anterior del inciso (d) deberás de llegar a que $R= \frac{P\pi-Q}{2\sqrt{Q\pi}}$

f) Finalmente ya estás ahora sí en posibilidad de encontrar el área de la circunferencia circunscrita que deberá de darte por resultado $= \dfrac{\pi\,(P\cdot\pi - Q)^2}{(2\sqrt{Q\pi})^2}$.

Solución del Problema

19) Con referencia a la figura del enunciado del problema 19 tenemos que:

- L, K, M son los puntos de tangencia entre la circunferencia inscrita y los lados del triángulo rectángulo.
- r es el radio de la circunferencia inscrita y O su centro.
- R es el radio de la circunferencia circunscrita y W su centro.
- AC= x.
- CB= y.

AK debe ser igual AM= x-r ; BK= BL= y-r entonces

AB= AK+BK= x-r+y-r= x+y-2r pero $\measuredangle C=90°$
Entonces AB es diámetro de la circunferencia circunscrita, es decir x+y-2r=2R ; x+y=2(R+r) y elevando al cuadrado se tiene: $x^2+2xy+y^2 = 4(R^2+2Rr+r^2)$---------------------1

Para el Teorema de Pitágoras $x^2+y^2 = 4R^2$ y la superficie del triángulo ABC= $\dfrac{x\cdot y}{2}$ =P (Recuerda que el área del triángulo es P).

Substituyo: $x^2+y^2 = 4R^2$; $\dfrac{4}{2}(xy)= P$ es decir 2xy=4P
en la ecuación (1) y obtengo:

$4R^2+4P= 4(R^2+r^2+2rR)$
$4R^2+4P= 4R^2+4r^2+8rR$
$\dfrac{4P-4r^2}{8r} = R$; $\dfrac{P-r^2}{2r} = R$ pero según el enunciado del problema $\pi\cdot r^2=Q$ = Área de la circunferencia inscrita

de donde $r= \sqrt{Q/\pi}$ y así $R= \dfrac{P-\dfrac{Q}{\pi}}{\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}}$ y

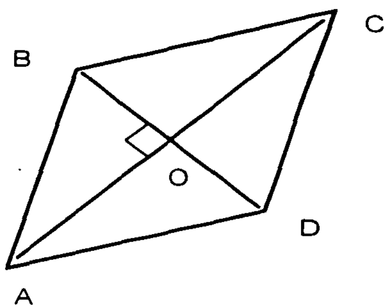
haciendo operaciones para escribir de otra manera la cantidad R se tienen el siguiente resultado:

$$R= \frac{\dfrac{P\pi - Q}{\pi}}{\dfrac{2\sqrt{Q}}{\sqrt{\pi}}} = \frac{\dfrac{\sqrt{\pi}\,(P\pi - Q)}{\pi}}{\dfrac{2\sqrt{Q}}{1}} = \frac{P\pi - Q}{2\sqrt{Q\pi}}$$

y el área de la circunferencia circunscrita es $\pi\cdot R^2$ es decir, el área de la circunferencia circunscrita = $\dfrac{\pi\,(P\pi - Q)^2}{(2\sqrt{Q\cdot\pi}}$ lo cual reducido es: $\dfrac{(\pi P - Q)^2}{4Q}$

20) Encuentra la longitud de los lados del rombo si la longitud de sus diagonales están en la relación ¾ y la superficie del rombo es $54cm^2$.

(Resultado: lado del rombo tiene longitud 12)



a) ¿Cómo se interceptan las diagonales de un rombo?

b) ¿Cómo son los 4 lados de un rombo?

c) Simboliza AO=x, entonces ¿Cómo simbolizas OC?

d) Supón que diagonal AC> diagonal BD

e) De la relación entre las diagonales escribe la longitud BD en términos de x.

f) Ahora ya sabes la longitud AC y BD en términos de X!! Pues bien ahora calcula la superficie del rombo y luego encuentra x.

g) Ahora con el valor de x y el Teorema de Pitágoras ya podrás encontrar la longitud de todos los lados además de la longitud de ambas diagonales.

Solución del Problema

20) Simbolizar:

AO = x = OC y supongamos que AC>BD.

Entonces ya que las diagonales están en relación 3/4

se tendrá que $\frac{BD}{AC} = \frac{3}{4}$ es decir:

$BD=AC\cdot\frac{3}{4}$, $bd= 2x\cdot\frac{3}{4} = \frac{3x}{2}$

Como la superficie del rombo es 54 cm^2 se tendrá

$$\frac{(AC)\,(BD)}{2} = 54 \text{ o sea } \frac{\left(2x\right)\left(\frac{3x}{2}\right)}{2} = 54$$

$$\frac{\frac{6x^2}{2}}{1} = 54\ ; \quad x^2 = 36\ ; \quad x = 6$$

Con el Teorema de Pitágoras encuentro AB:

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BO}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{9x^2}{16}} = \sqrt{\frac{x^2 + 9x^2}{16}} = \frac{\sqrt{25x^2}}{\sqrt{16}}$$

$$= \frac{5x}{4} = \frac{5\,(6)}{4} = 7.5$$

Ahora $BD = \frac{(3)\,(6)}{2} = 9$; $BD = AC \cdot \frac{3}{4}$

$\frac{(BD)\,(4)}{3} = AC$; $\frac{(9)(4)}{3} = AC = 12$

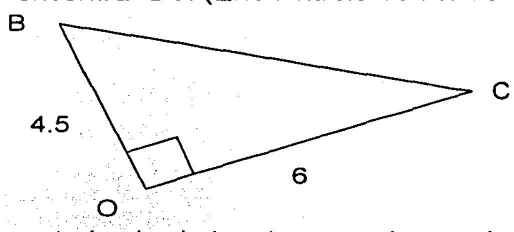
En conclusión lo que tenemos hasta el momento es:

AB= 7.5

=BD= 9 $\Rightarrow$ BO= 4.5= OD

AC= 12 $\Rightarrow$ AO= 6 = OC.

Para encontrar BC: (Encuéntrelo con el Teorema de Pitágoras)

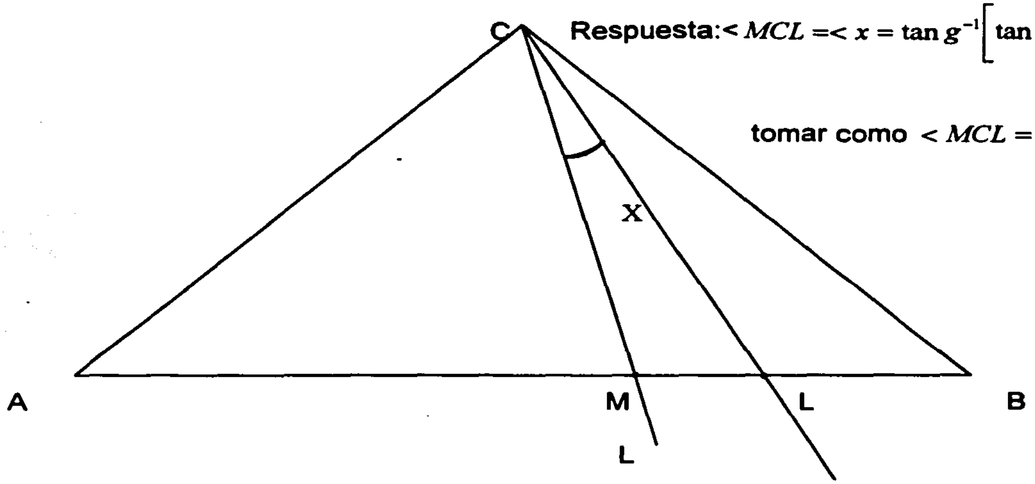


Y como todos los lados de un rombo son iguales entonces culquier lado mide 7.5 cm.

21)Si CM es la medida del ángulo AB y CL es la bisectriz del ángulo ACB entonces encuentra la medida del ángulo MCL en términos de los ángulos A, B y C.

Respuesta: $< MCL =< x = \tan g^{-1}\left[\tan g \frac{c}{2} \cdot \frac{(senB - senA)}{senB + senA}\right]$

tomar como $< MCL = x$



a)Porqué razón:
AM=BM? < ACM= MCB?

< (BCL+x) = <($\frac{c}{2}$+x)?

<(ACL-x) = <($\frac{c}{2}$-x)?

b)Escribe la ley de senos de los triángulos ACM Ycbm y despeja CM.

c)Iguala cada CM

d)Usa el inicio (a) en la igualdad que obtuviste en el inicio (c).

e)Debes de llegar a la ecuación sen($\frac{c}{2}$+x)(Sen A)=sen ($\frac{c}{2}$-x)(sen B)

f)De la ecuación anterior despeja x.(Recuerda que x = <MCL)

g)Para despejar x ten en mente que:

sen(P+Q)=(senP)(cosQ)+(cosP)(senQ)

sen(P-Q)=(senP)(cosQ)-(cosP)(senQ)

SOLUCION DEL PROBLEMA

21)Ley de los senos para $\triangle$ ACM:

$$\frac{AC}{senAMC}=\frac{CM}{senCAM}=\frac{AM}{sen(acl-x)}$$

$$CM=\frac{(senCAM)(AM)}{sen(ACL-X)}---(1)$$

Ley de senos para Δ CBM

$$\frac{CB}{senCMB}=\frac{CM}{senCBM}=\frac{MB}{sen(BCL+X)}$$

$$CM=\frac{(senCBM)(MB)}{sen(BCL+x)}---(2)$$

Igualando(1) con (2)

(sen CAM)(AM)

$$\frac{senCAM)(AM)}{sen(ACL-x)}=\frac{(senCBM)(MB)}{sen(BCL+x)}$$

Pero AM=MB (Porqué?)

$$\frac{senCAM}{sen(ACL-X)}=\frac{senCBM}{sen(BCL+x)}$$

$$\frac{sen\left(\frac{c}{2}+x\right)}{sen<B}=\frac{sen\left(\frac{c}{2}-x\right)}{sen<A}$$

$$sen\left(\frac{c}{2}+x\right)(sen<A)=sen\left(\frac{c}{2}-x\right)(sen<B)$$

$$\left(sen\frac{c}{2}.\cos' x+\cos\frac{c}{2}.senx\right)sen<A=\left(sen\frac{c}{2}.\cos x-\cos\frac{c}{2}senx\right)senB$$

$$0=sen\frac{c}{2}.\cos x(-senA+senB)-\cos\frac{c}{2}.senx(senB+senA)$$

$$\cos\frac{c}{2}senx(senB+senA)=sen\frac{c}{2}.\cos x(senB-senA)$$

$$\frac{senX}{\cos X}=\frac{sen\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.\frac{senB.senA}{senB+senA}$$

$$\tan x = \tan\frac{c}{2}\frac{senB - senA}{senB + senA}$$

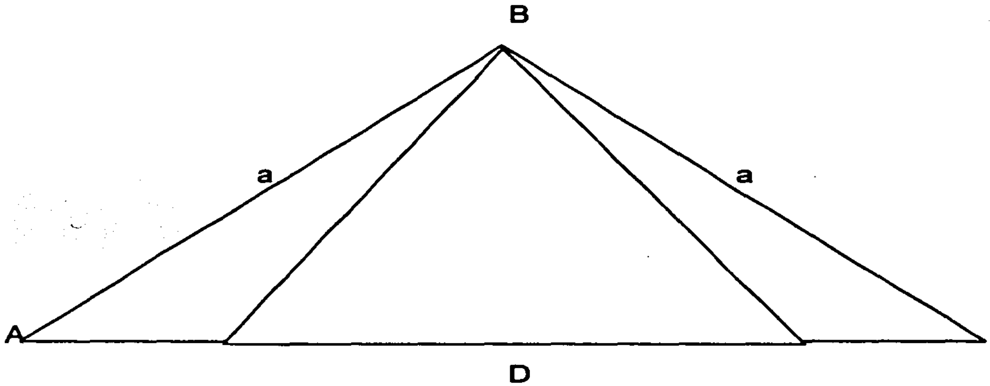
y de esta manera <MCL= ángulo x =

$$\tan^{-1}\left[\tan\frac{c}{2}.\frac{senB - senA}{senB + senA}\right]$$

22)En el triángulo isósceles ABC, los lados AB y BC son de longitud a .En el ladoAC (base del triángulo) se toman dos puntos K y m tales que KBM =90. Encuentra la longitud del lado MB si:

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{MK} + \frac{1}{MC}$$

(respuesta: $MB = x = \frac{a}{\sqrt{3}}$



a)En la figura del enunciado haz lo siguiente:
baja la altura (del triángulo ABC)correspondiente al lado AC y simboliza su longitud con z.

e)Cuál es la altura (del triángulo MBK) correspondiente al lado MK?

c)Porqué razón $\triangle$ BMD y $\triangle$ BMK son semejantes?

d)De la relación de semejanza despeja MK.

e)En un triángulo isósceles que relación hay entre la altura y la mediana?

f)Con teorema de Pitágoras encuentra las longitudes AD, DC en términos de a, x , y.

g)Encuentra AM,MC en términos de a,x,y.

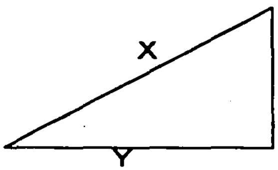
h) $\frac{1}{AM} = \frac{1}{MK} + \frac{1}{MC}$ por qué se conoce esta reacción ?

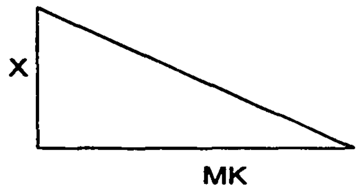
i)Substituye AM,MK,MC.

j)De la ecuación anterior del inicio (i) despeja x.

SOLUCION DEL PROBLEMA

22)Bajo la altura del triángulo ABC correspondiente al lado AC y la simbolizo con z esta altura también resulta ser altura del triángulo MBK correspondiente al lado MK y así los triángulos BMD y BMK son semejantes.





$$\frac{MK}{X} = \frac{x}{y}$$

$$MK = \frac{X^2}{Y}$$

Como la altura y la media (en triángulo isósceles)bajada a la base coinciden, entonces BD también es mediana y así AD =DC.

$$(AD)^2 + (BD)^2 = a^2 \quad ; \quad AD = DC = \sqrt{a^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - x^2 + y^2}$$

ya que por el teorema de Pitágoras en el triángulo BDM:

$BD^2 = x^x - y^2$

Ahora bien AM = $\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} - y$

Y de la relación $\frac{1}{AM} = \frac{1}{MK} + \frac{1}{MC}$ tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} - y} = \frac{1}{x^2/y} + \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} + y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} - y} - \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} + y} = \frac{y}{x^2}$$

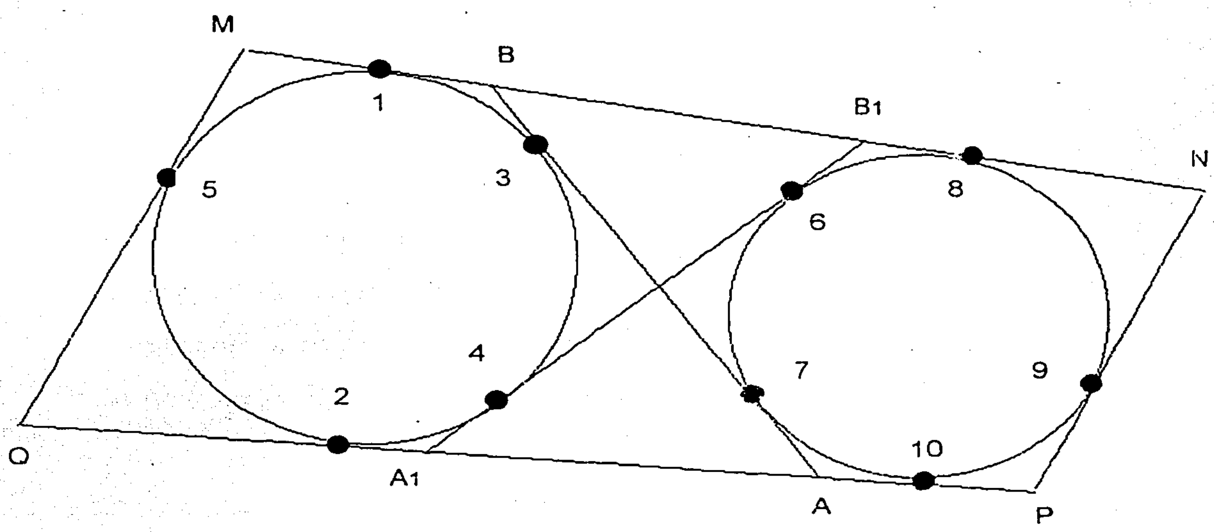
$$\frac{\left(\sqrt{a^2 - x^2 + y^2 + y}\right) - \left(\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} - y\right)}{a^2 - x^2 + y^2 - y^2} = \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{2y}{a^2 - x^2} = \frac{y}{x^2}; 2yx^2 = a^2 y - yx^2$$

$$3yx^2 = a^2 y; x^2 = \frac{a^2}{3}; x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

23) Dentro del cuadrilátero MNPQ están situadas dos circunferencias que no se interceptan y son tales que una de ellas es tangente a los lados MN, PQ, NP y la otra es tangente a los lados MN, PQ, MQ. Los puntos B y A están en los lados MN y PQ respectivamente. El segmento de recta AB es tangente a ambas circunferencias.
Encuentra la longitud del lado MQ si NP = b y el perímetro del cuadrilátero BAQM es más grande que el perímetro del cuadrilátero ABNP en una cierta cantidad 2P.

(Resultado: MQ = P + b)



nota: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, son todos puntos de tangencia de las circunferencias con los lados del cuadrilátero MNPQ y los lados AB y A1, B1.

a) Simboliza con P_1 el perímetro del cuadrilátero BAQM.

b) Simboliza con P_2 el perímetro del cuadrilátero ABNP

c) ¿Porqué razón $P_1 = P_2 + 2P$?

d) Demuestra que $AB = \frac{P_2}{2} - b$ calculando el perímetro del cuadrilátero ABN (usa los puntos de tangencia.

e) Demuestra que $MQ = \frac{P_1}{2} - AB$ calculando el perímetro del cuadrilátero MQAB (usa los puntos de tangencia.

f) El inciso (e) te da la solución al problema!!!

Solución del Problema

23) Observa la figura del enunciado

- P_1 es el perímetro del cuadrilátero BAQM.
- P_2 es el perímetro del cuadrilátero ABNP.
- Y los perímetros según el enunciado del problema están relacionados por la ecuación $P_1 = P_2 + 2P$.

1) Primero demostraré que $AB = \frac{P_2}{2} - b$:

En el cuadrilátero ABNP calculo su perímetro de la siguiente manera:

$$AB + B8 + 8N + b + P10 + 10A = P_2$$

$$AB + B7 + N9 + b + P9 + A7 = P_2$$

$$AB + b + AB + b = P_2$$

$$2\,AB + 2\,b = P_2$$

$$AB + b = \frac{P_2}{2}$$

$$AB = \frac{P_2}{2} - b$$

2) Ahora mostraré que $MQ = \frac{P_1}{2} - AB$

En el cuadrilátero MQAB calculo su perímetro:

$$MQ + AB + A2 + 2Q + M1 + 1B = P_1$$

$$MQ + AB + A3 + Q5 + M5 + B3 = P_1$$

$$MQ + AB + AB + MQ = P_1$$

$$2\,MQ + 2\,AB = P_2 + 2P$$

$$MQ + AB = \frac{P_2}{2} + P \Rightarrow MQ = \frac{P_2}{2} + P - AB = \frac{P_1 - 2P}{2} + P - AB$$

$$= \frac{P_1}{2} - AB$$

$$MQ = \frac{P_2}{2} + P - \left(\frac{P_2}{2} - b \right)$$

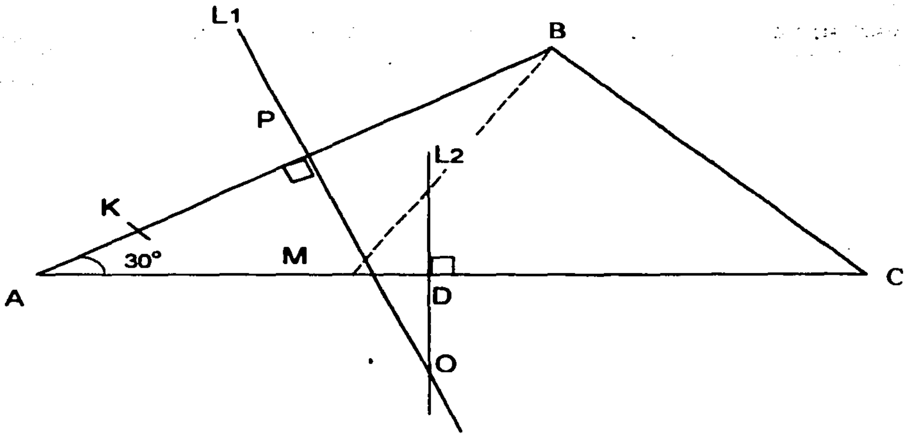
$$MQ = P + b$$

24) En el triángulo ABC el ángulo a es igual a 30°.

En el lado AB se toma un punto K tal que AK sea igual a la longitud que hay desde el centro de la circunferencia circunscrita (al triángulo ABC) hasta el lado AC. Encuentra la longitud.

AC = a   y   AK = b

(Resultado: $BK = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a - 2b$)



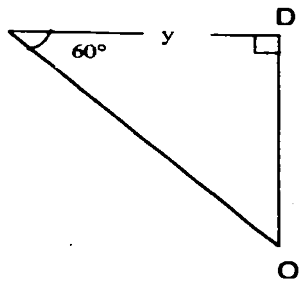
a) En cuál de todos los puntos marcados en la figura está el circuncentro de la circunferencia.

b) Demuestra que $\triangle AMP \cong \triangle PMB$

c) ¿AP = PB? ¿ AD = DC?

d) Usa la congruencia para demostrar que: AM = MB y que $\angle ABM = \angle PAM$.

Tomo el triángulo DOM y calculo la longitud DM.



AK = b

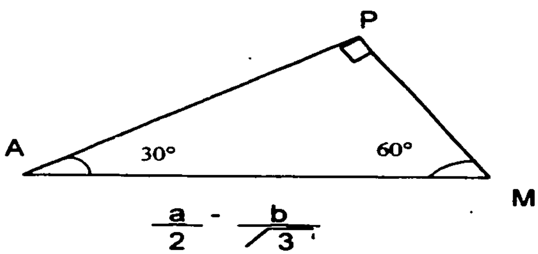
$$\frac{b}{y} = \tan 60^\circ$$

$$\frac{b}{\tan 60^\circ} = y$$

$$\frac{b}{\sqrt{3}} = y$$

y así $AM = \frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{3}}$

Tomo el triángulo APM y calculo AP



$$\frac{AP}{\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{3}}} = \operatorname{sen} 60^\circ \;\; ; \;\; AP = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$$

Pero P es punto medio de AB, entonces AB = 2AP

$$AB = \sqrt{3}\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a - b$$

Ahora estoy listo para encontrar la longitud BK = AB - b

$$BK = \frac{\sqrt{3}}{2}a - b - b = \frac{\sqrt{3}}{2}a - 2b$$

e) Demuestra que Δ AMB es isósceles.

f) Con Δ DOM calcula DM.

g) Con Δ APM calcula AP.

h) Estas listo para encontrar AB.

i) Ahora deberás de encontrar que BK =

Solución del Problema

24) La mediatriz del lado AB es L_1, y la mediatriz del lado AC es L_2.

El centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es el punto de intersección de L_1 con L_2 el cual está simbolizado por "O".

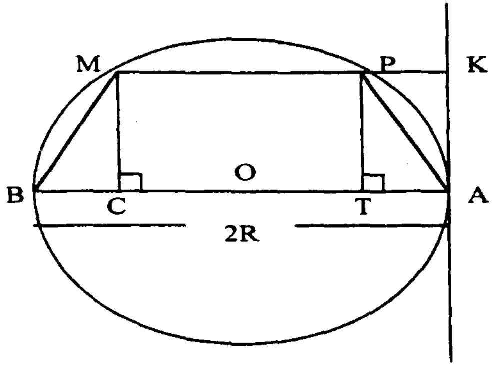
M es la intersección de L_1 con AC.

El triángulo AMP es congruente al triángulo PMB (por L.A.L) ¿Por qué razón?

1) Por ser L_1 mediatriz del lado AB entonces AP = PB.

2) PM es lado común y $L_1 \perp AB$ y de la congruencia tenemos que a ángulos iguales se oponen lados iguales de aquí que AM = MB, también por la congruencia a lados iguales se oponen ángulos iguales de aquí que $< ABM = < PAM = 30°$.

25)Dada la circunferencia de diámetro AB y la recta tangente AK encuentra sobre la circunferencia el punto M para la longitud desde este punto M hasta la recta tangente sea igual a la longitud desde este mismo punto hasta el final del diámetro B.



a)Suponiendo que ya conoces en donde se encuentra el punto M entonces que relación hay entre MB y MK?

b)Qué relación hay entre las rectas MK y BA?

c)Porqué razón arco BM es igual al arco PA?

d)Qué relación hay entre MB y PA? Porqué?

e)Cuál es la razón que me permite afirmar que BC = TA?

f)AK es recta tangente y MK es recta secante.
¿Qué igualdad se podrá escribir partir de lo anterior?

g)Hasta este momento de verás tener que $AK^2 = MC^2$

h)Aplica el teorema de Pitágoras al triángulo MBC y en él sustituye MC^2; MK = MB y así llegarás a la ecuación $BC^2 - 6R\,(BC) + 4R^2 = 0$

i)Encuentra BC de la ecuación de 2° grado.

Solución del problema

25)Suponiendo que ya se en dónde, se debe de encontrar el punto M entonces MK=MB (según el enunciado del problema). Por ser MK el segmento de recta que representa la distancia desde M hasta K, entonces MK, es paralela a BA y así arco MB = arco PA, y entonces la cuerda que une a cada uno de los arcos son iguales, es decir BM = PA.

Puesto que MC = PT y MB = PA entonces BC = TA (por el teorema de Pitágoras).

Por otro lado $AK^2 = (KM)(KP)=(AC)(BC)= MC^2$, aplicando el teorema de Pitágoras en Δ MBC:
$MB^2 = BC^2 + MC^2$

$MB^2 = BC^2 +(AC)(BC) = BC(BC+AC)=(BC)(BA)$

Pero MK = 2R-BC y como MK = MB

$(2R-BC)^2 = 2R(BC)$

$4R^2 - 4R(BC)+(BC)^2 =2R (BC)$

$4R^2 - 4R (BC)+(BC)^2- 2R (BC) = 0$

$BC^2 - 6R (BC)+4R^2 = 0$

BC< 2R y así

$$BC = \frac{6R\pm \sqrt{(6R)^2-(4)(1)(4R^2)}}{2}$$

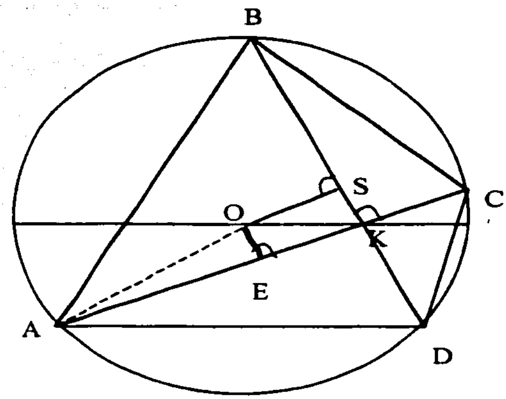
$BC = 3R \pm \sqrt{9R^2 - 4R^2}$

$BC = 3R \pm \sqrt{5}\cdot R$

$BC = 3R - \sqrt{5}R =R(3- \sqrt{5})$

El resultado significa que para encontrar el punto M que cumpla con el enunciado del problema lo que se debe hacer es salir del punto B y "caminar" (sobre el diámetro en la dirección hacia A) una distancia $R(3- \sqrt{5})$ y luego a partir de este lugar subir perpendicularmente hasta interceptar a la circunferencia, y listo, el punto buscado M se encuentra!!!

26) Dentro de un círculo con centro O y radio R se toma un punto K el cual dista "a" unidades desde el centro. A través del punto K pasan dos cuerdas perpendiculares (una con otra) una de las cuales forma con el diámetro (que pasa a través de K) ángulo de 45°. Encuentra la superficie del cuadrilátero ABCD que tiene por diagonales las cuerdas AC y BC
(Respuesta: superficie del cuadrilátero = $2\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)$



a)Encuentra: S Δ BCD; S Δ BDA, S cuadrilátero ABCD.

b)Por qué razón Δ OSK ≅ Δ OEK ?

c)Recuerda que dos cuerdas de la misma circunferencia se encuentran a la misma distancia del centro son de igual longitud.
También: un diámetro perpendicular a una cuerda biseca la cuerda.

d) Aplica el teorema de Pitágoras al triángulo AOE y obtén $AC = 2\sqrt{R^2-d^2}$ (simboliza con OE = d)

e)Por qué razón se podría afirmar que Δ EOK es isósceles?

f)Aplica el teorema de Pitágoras en Δ EOK

g)A partir del inciso (f) deverás de tener que $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$

h)Escribe la superficie del cuadrilátero ABCD en términos de R, a.

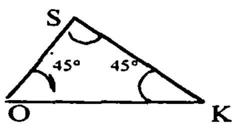
Solución del problema

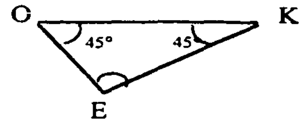
26) $S \, \Delta \, BCD = \frac{(BD)(CK)}{2}$

$S \, \Delta \, BDA = \frac{(BD)(AK)}{2}$

$$S \text{ cuadrilatero } ABCD = \frac{(BD)(CK)}{2} + \frac{(BD)(AK)}{2} = \frac{BD(CK + AC)}{2} = \frac{(BD)(AC)}{2}$$

Ahora los triángulos siguientes son congruentes:





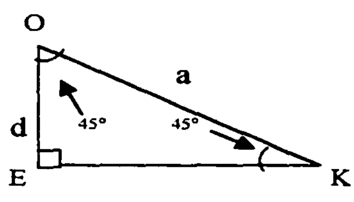
Nótese que OK es lado común para ambos triángulos y así Δ OSK $\cong$ Δ OKE (Por A. L. A) y por esto OS=OE y ésto significa que BD y AC se encuentran a la misma distancia del centro, y así AC = BD (por que dos cuerdas de la misma circunferencia que se encuentran a la misma distancia del centro son de igual longitud) y la superficie del cuadrilátero habíamos quedado en que es:

$$S\ ABCD = \frac{(BD)\ (AC)}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{BD^2}{2}$$

En él triángulo AOE: OA = R , OE = d y Por el teorema de Pitágoras, $AE = \sqrt{R^2-d^2}$

AC = 2AE (por un diámetro perpendicular a una cuerda biseca, la cuerda. OE es diámetro Perpendicular a la cuerda AC).

$AC=2\ \sqrt{R^2-d^2}$



Por ser Δ OE K isósceles entonces EK = **d** y por el teorema de Pitágoras $d^2+d^2 = a^2$; $2d^2 = a^2$; $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Entonces ya habíamos visto que:

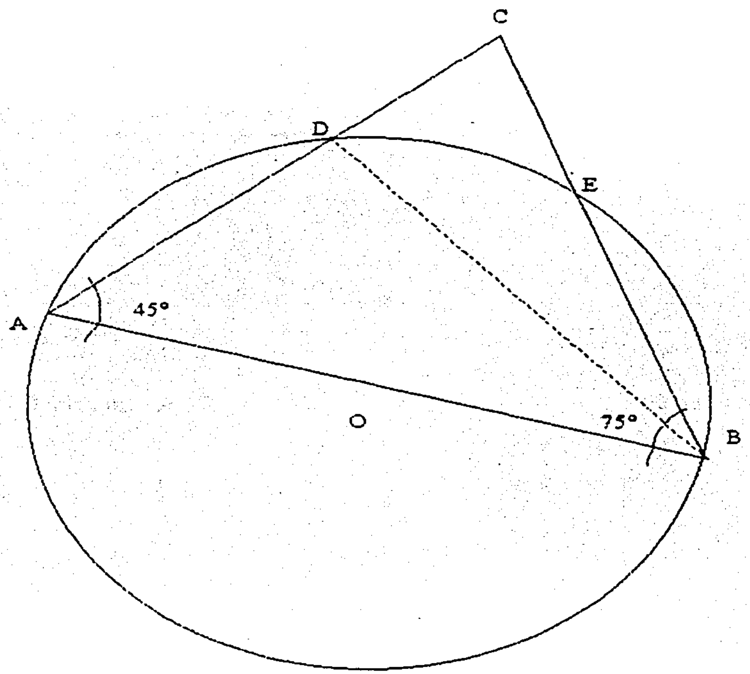
$$S_{\text{cuadrilátero ABCD}} = \frac{AC^2}{2} = \frac{(2\sqrt{R^2-d^2})^2}{2}$$

$$= \frac{4(R^2-d^2)}{2} = 2(R^2-d^2) = 2\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)$$

27) En el $\blacktriangle ABC$, $\measuredangle A = 45°$, $\measuredangle B = 75°$, se construye una circunferencia de diámetro AB la cual intercepta a los lados AC y BC en los puntos D y E.

Determina la superficie del triángulo ABC si de = 1

(RESPUESTA: $S\blacktriangle ABC = 1.57U^2$)



A) Observa la figura del enunciado del problema y responde:
Por qué razón.

- $\measuredangle$ ADB = 90 °
- $\measuredangle$ ABD = 45 °
- $\measuredangle$ DBE = 30 °
- $\measuredangle$ DEB = 135 °
- $\measuredangle$ BDE = 15 °
- $\measuredangle$ ACB = 60 °

B) Escribe la superficie del triángulo ABC en términos de AB, AC y Ángulo A.
C) Escribe la ley de los senos para los triángulos ACB y DEB.

D) Escribe el teorema de Pitágoras para el triángulo ADB y encuentra AB.

E) Con todo lo anterior ya podrás encontrar la superficie del triángulo ABC.

SOLUCION DEL PROBLEMA

27)
1) Unir D con E.
2) Unir D con B.
3) $\measuredangle$ ADB = 90° (por ser AB diámetro)
4) $\measuredangle$ ABD = 45° (por ser la suma de ángulos interiores 180°)
5) $\measuredangle$ DBE = 30° (75° - 45° = 30°)
6) $\measuredangle$ DEB = $\dfrac{180° - 90°}{2} = 135°$
7) $\measuredangle$ BDE = 15°
8) $\measuredangle$ ACB = 60°

$$S\blacktriangle ABC = \frac{(AB)(AC)}{2} \quad \mathrm{SENA}$$

ley de senos para el triángulo ACB:

$$\frac{AC}{\mathrm{SenB}} = \frac{AB}{\mathrm{SenC}} \quad ; \qquad AC = \frac{AB \cdot \mathrm{SenB}}{\mathrm{SenC}}$$

ley de senos para el triángulo DEB:

$$\frac{DB}{\mathrm{Sen}135°} = \frac{DE}{\mathrm{Sen}30°} \quad ; \quad DB = \frac{DE \cdot \mathrm{Sen}135°}{\mathrm{Sen}30°} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2}\, 2 = \sqrt{2}$$

Teorema de Pitágoras para el triángulo ADB

$$AB^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4 \qquad ; \qquad AB = 2$$

$$S\blacktriangle ABC = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\tfrac{senB}{SenC}\cdot SenA = 2\cdot\tfrac{Sen75^\circ\, Sen45^\circ}{Sen60^\circ} = 1.57u^2$$

28) los ángulos de un triángulo están relacionados por la ecuación $Sen\,\alpha = 2Sen\beta \cdot Cos\gamma$ a partir de lo anterior demuestra que el triángulo es isósceles.

DEMOSTRACIÓN:

La ecuación la puedo escribir así:

$Sen\,\alpha = 2 \cdot Sen\beta \cdot Cos\gamma = Sen(\beta + \gamma)$ **pero** $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ **es decir** $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ **y así**

$Sen(\beta + \gamma) = Sen(180 - \alpha) = Sen\,\alpha$ **y por esta razón** $Sen\,\alpha = Sen\,\alpha + Sen(\beta - \gamma)$ **es decir**

$Sen(\beta - \gamma) = 0$ **pero** β **y** γ **son ángulos de un triángulo y la función** $SenX$ **es cero cuando**

$X = 0$ **o** $X = \pi$ **pero** $\beta - \gamma$ **no puede ser** π **por lo tanto** $\beta - \gamma = 0 \Rightarrow B = \gamma$ **y con esto se sigue que el triángulo tiene dos ángulos de igual medida.**

29) **demostrar que el triángulo cuyo ángulos α y β están relacionados por la ecuación**

$Cos\,\alpha + Cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}$ **es un triángulo equilátero.**

DEMOSTRACIÓN. Por trigonometría sabemos que

$Cos\,\alpha + Cos\beta = 2\,Cos\,\frac{\alpha+\beta}{2} \times Cos\,\frac{(\alpha-\beta)}{2}$ ....(1)

$Cos\,\alpha + Cos\beta = 2Cos^2\,\frac{\alpha+\beta}{2} - 1$ ....(2)

restamos la ecuación (1) - (2)

$$Cos\,\alpha + Cos\beta - Cos(\alpha+\beta) = 2Cos\,\frac{\alpha+\beta}{2} - 2Cos^2\,\frac{\alpha+\beta}{2} + 1$$

y según la primera ecuación la igualdad anterior la puedo igualar a $\frac{3}{2}$

$$2Cos\,\frac{(\alpha+\beta)}{2} \cdot Cos\,\frac{(\alpha-\beta)}{2} - 2Cos^2\,\frac{(\alpha+\beta)}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$2Cos\,\frac{(\alpha+\beta)}{2} \cdot Cos\,\frac{(\alpha-\beta)}{2} - 2Cos^2\,\frac{(\alpha+\beta)}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

divido por (-2) cada miembro de la anterior ecuación

$Cos^2\,\frac{(\alpha+\beta)}{2} - Cos\,\frac{(\alpha-\beta)}{2} \cdot Cos\,\frac{(\alpha+\beta)}{2} + \frac{1}{4} = 0$ **o lo cual se puede escribir.**

$$\left[Cos\,\frac{(\alpha+\beta)}{2} - \frac{1}{2} \cdot Cos\,\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right]^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot Cos^2\,\frac{(\alpha-\beta)}{2} = 0$$

$$\left[Cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}-\frac{1}{2}\cdot Cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right]^2+\frac{1}{4}\cdot Sen^2\frac{(\alpha-\beta)}{2}=0$$

lo anterior es una suma de cuadrados igual a cero y ésto es cierto únicamente si cada sumando es cero es decir.

$Sen\frac{(\alpha-\beta)}{2}=0$ .... **(3)** **y** $Cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}-\frac{1}{2}Cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}=0$ ....**( )**

la ecuación 3 se satisface cuando $\alpha=\beta$ (α y β son ángulos de un triángulo).

Ahora substituyo $\alpha=\beta$ en 4 y tengo.

$$Cos\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}Cos\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right)=0$$

$CosX=\frac{1}{2}$ Y asi $\alpha=60°$ pero como $\alpha=\beta$ entonces $\beta=60°$ y así el triángulo cuyos ángulos α y β están relacionados por la ecuación $Cos\alpha+Cos\beta-Cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$ es equilátero.

30) ¿Qué es mas grande $\frac{Sen\ 1^\circ}{Sen\ 2^\circ}$ ó $\frac{Sen\ 3^\circ}{Sen\ 4^\circ}$?

Para responder la siguiente pregunta considera la expresión :

$$\frac{Sen\ x}{Sen\ 2x} - \frac{Sen\ 3x}{Sen\ 4x}$$

¡¡ y demostraré que esta expresión es menor que cero para x = 1!!

$$\frac{Sen\ x}{Sen\ 2x} - \frac{Sen\ 3x}{Sen\ 4x} = \frac{(Sen\ 4x)\ (Sen\ x) - (Sen\ 3x)\ (Sen\ 2x)}{(Sen\ 2x)\ (Sen 4x)}$$

$$\frac{(Cos3x - Cos5x) - (Cos\ x - Cos\ 5x)}{(2Sen\ 2x)\ (Sen4x)} = \frac{(-Sen\ 2x)\ (Sen\ x)}{(Sen2x)\ (Sen4x)} < 0\ !!$$

¿Por qué? Por que para $x = 1$ es verdad que

$$-\frac{Sen1^\circ}{Sen4^\circ} < 0 \quad \text{ya que} \quad Sen\ 1^\circ > 0 \quad y \quad Sen\ 4^\circ > 0.$$

En conclusión :

$$\frac{Sen\ 1^\circ}{Sen\ 2^\circ} - \frac{Sen\ 3^\circ}{Sen\ 4^\circ} < 0 \quad \text{y así} \quad \frac{Sen\ 1^\circ}{Sen\ 2^\circ} < \frac{Sen\ 3^\circ}{Sen\ 4^\circ}$$

31) ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $Sen\, x = \frac{x}{100}$?

(Respuesta: tiene 63 raíces).

Observemos la grafica de las ecuaciones $y = Sen\, x$

$y = \frac{x}{100}$.

Sen x tiene el valor máximo de 1 y el valor mínimo de –1. Entonces la recta $y = \frac{x}{100}$ alcanza el valor de $y = 1$ cuando $x = 100$ y de –1 cuando $x = -100$, pero en este intervalo de –100 a 100 la recta $y = \frac{x}{100}$ intercepta a la gráfica de $y = Sen\, x$ 63 veces . !!

(***NOTA:*** $y = \frac{x}{100}$ pasa por el origen).

32) **Encuentra el valor exacto de:**

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$$

Nota: Solamente usa el hecho de que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ **y fórmulas de trigonometría.**

Respuesta: $\frac{1}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{2\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14}}{(2)\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14}}{(2)\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{14} + 0}{(2)\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)} = \frac{1}{2}$$

33) Encuentra la suma :

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \text{------} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$

Respuesta : $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1} - 1\right)$

$$S_n = \sum_{P=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2P-1} \quad \sqrt{2P+1}} = \sum_{P=1}^{n} \frac{\sqrt{2P-1} - \sqrt{2P+1}}{2P-1 - (2P+1)} =$$

$$= \sum_{P=1}^{n} \frac{\sqrt{2P-1} - \sqrt{2P+1}}{-2} =$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\sqrt{1} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + \text{------} \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-1}\right]$$

$$= \frac{-1}{2}\left[1 - \sqrt{2n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2n+1} - 1\right]$$

34) Encuentra la suma :

$$\frac{sen\ 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{sen\ 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{sen\ 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \text{---------} + \frac{1}{\cos(n-1)\cos n},$$

(Respuesta : tan(n))

Ojo : $Sen\ 1 = sen\ (k - [k - 1]) = sen\ k \cdot \cos(k-1) - \cos k\ sen\ (k-1)$

La suma anterior la puedo escribir :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{sen\ 1}{\cos(k-1)\cos k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{sen\ k \cos(k-1) - \cos k\ sen\ (k-1)}{\cos(k-1)\cos k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{sen\ k \cdot \cos(k-1)}{\cos k \cdot \cos(k-1)} - \frac{\cos k \cdot sen(k-1)}{\cos k \cdot \cos(k-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{sen\ k}{\cos k} - \frac{sen(k-1)}{\cos(k-1)} = \sum_{k=1}^{n} \tan k - \tan(k-1) = \tan(n)$$

35) Resolver la ecuación :

$$(x+0)(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+\text{------}(x+9)(x+10) =$$
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \text{------} \; 8 \cdot 9 + 9 \cdot 10$$

(**Respuesta : hay dos soluciones** $x_1 = 0$; $x_2 = -10$)

La ecuación anterior se puede rescribir así :

$$\sum_{p=0}^{9} (x+p)(x+p+1) = \sum_{p=1}^{9} p(p+1)$$

$$\sum_{p=0}^{9} x^2 + 2xp + x + p^2 + p = \sum_{p=1}^{9} p^2 + p$$

$$\sum_{p=0}^{9} x^2 + 2xp + x + \sum_{p=0}^{9} p^2 + p = \sum_{p=1}^{9} p^2 + p$$

$$\sum_{p=0}^{9} x^2 (p)^0 + \sum_{p=0}^{9} 2xp + \sum_{p=0}^{9} x p^0 = \sum_{p=1}^{9} p^2 + p - \sum_{p=0}^{9} p^2 - p$$

$$10x^2 + 2x \frac{(9)(9+1)}{2} + 10x = 0$$

$$10x^2 + 90x + 10x = 0$$

$$10x^2 + 100x = 0$$

$$x(10x + 100) = 0$$

Las soluciones son : $x_1 = 0$

$x_2 = -10$

36) Resuelve la ecuación :

$$(2+\sqrt{3})^{X^2-2X+1} + (2-\sqrt{3})^{X^2-2X-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

(Respuesta:

$X_1 = 1-\sqrt{2}$
$X_2 = 1$
$X3 = 1+\sqrt{2}$)

NOTA: $(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$ es decir:

$$2+\sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \quad ; \quad 2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

Solución de la ecuación: la ecuación original la transformo según la ley de los exponentes así:

$$(2+\sqrt{3})^{X^2-2X}\,(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^{X^2-2X}\,(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

$$(2+\sqrt{3})^{X^2-2X}\,(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^{X^2-2X}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

$$(2+\sqrt{3})^{X^2-2X}\,(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^{X^2-2X}\,(2+\sqrt{3}) = 4(2+\sqrt{3})$$

$$(2+\sqrt{3})^{X^2-2X} + (2-\sqrt{3})^{X^2-2X} = 4$$

$$(2+\sqrt{3})^{X^2-2X} + \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{X^2-2X} = 4 \text{ , sea } \quad y = (2+\sqrt{3})$$

y así la última de las ecuaciones se transforma

$y + \frac{1}{y} = 4$, $y^2 - 4y + 1 = 0$ ecuación de segundo grado con soluciones:

con soluciones $y_1 = 2-\sqrt{3}$, $y_2 = 2+\sqrt{3}$

Pero recuerda que hicimos la transformación $y = (2 + \sqrt{3})^{X2-2X}$

Por esa razón:

$(2 + \sqrt{3})^{X2-2X} = 2 + \sqrt{3}$ y así $X^2 - 2X = 1$, $X^2 - 2X - 1$ y esta ecuación tiene dos raíces $X_1 = 1 + \sqrt{2}$

$X_2 = 1 - \sqrt{2}$

Y también

$$(2 + \sqrt{3})^{X2-2X} = 2 - \sqrt{3}$$

$$(2 + \sqrt{3})^{X2-2X} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$$

$X^2 - 2X = -1$, $X^2 - 2X + 1 = 0$ tiene una raiz $X=1$

Conclusión: La ecuación original tiene tres raíces que son:

$X_1 = 1 - \sqrt{2}$; $X_2 = 1$, $X_3 = 1 + \sqrt{2}$

37) Resuelve la ecuación

$X^{3\log 10X} = 10X^2 \qquad X > 0$ Respuesta: $X_1 = 10$, $X_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$

Sacando $\log_{10}$ a ambos lados:

$\log_{10} X^{3\log 10X} = \log_{10} 10^{10X2}$

$3 \log_{10}X \log_{10}X = \log_{10}{}^{10} + \log_{10}X^2$

$3 (\log_{10}X)2 = 1 + 2 \log_{10}X$

$3 (\log_{10}X)2 - 2 \log_{10}X - 1 = 0$ Simboliza $y= \log_{10}X$

$3 y^2 - 2y - 1 = 0$ y esta ecuación tiene dos soluciones

$y_1= 1$, $y_2= -1/3$ pero como simbolicé $y= \log_{10}X$

entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \log 10X = 1 \quad ,10^1 = X \quad \text{y así } x= 10 \\ \\ \log 10 = -1/3 \quad , \quad 10^{-1/3} = X \text{ , } X= 1/\sqrt[3]{10} \end{array}\right\}$$

y por esta razón las soluciones de $X^{3\log 10X} = 10.\ X^2$ son:

$X_1= 10$, $X_2= \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$

38) Resolver la ecuación

$$3X - 2 = \frac{3}{\sqrt[X]{9}}$$ (Respuesta: hay dos soluciones $X_1 = 1$, $X_2 = 2$)

Solución:

$$3^{X-2} = 3\,(3\,.\,3)^{-1/X}$$

$$3^{X-2} = 3^1\,.\,3^{-1/X}\,.\,3^{-1/X} = 3^{1-2/X}$$

y sacando a ambos lados $\log_3$

$$X - 2 = 1 - \frac{2}{X}\;;\; X^2 - 2x = X - 2\;;\; X^2 - 3X + 2 = 0$$

que tiene soluciones $X_1 = 1$, $X_2 = 2$.

39) Resuelve la ecuación

$\log_4 X\, 2 \,.\; \log_{X/2} 2 = \log_{X/16} 2$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Nota que: } \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \\ \text{Simbolizaremos } y = \log_2 X \end{array} \right)$$

(Respuesta: hay dos soluciones $X_1=2$, $X_2=2$)

la ecuación original la escribo:

$$\frac{1}{\log_2 4X} \cdot \frac{1}{\log_2 X/4} = \frac{1}{\log_2 X/16}$$

$$\frac{1}{\log_2 4 + \log_2 X} \cdot \frac{1}{\log_2 X - \log_2 4} = \frac{1}{\log_2 X - \log_2 16}.$$

$$\frac{1}{2+Y} \cdot \frac{1}{Y-2} = \frac{1}{Y-4}$$

$Y - 4 = (2 + Y)(Y - 2)$
$Y - 4 = Y^2 - 4 \quad ; \quad Y^2 - Y = 0$

Tiene dos soluciones

$Y_1 = 1$, $Y_2 = 0$

Pero como he simbolizado por $Y = \log_2 X$ entonces:

1) $\log_2 X = 1$ tiene solución $X = 2$
2) $\log_2 X = 0$ tiene solución $X = 1$

ambas raíces pertenecen al conjunto D tales que las bases $4X$, $X/4$, $X/16$ son mayores que cero y diferentes de uno.

c) Resolver la ecuación $\log (2^X + X - 13) = X - X \log 5$

(Respuesta: hay una solución $X = 13$)

transformaremos la parte derecha de la ecuación

$X - \log 5 = X (1 - \log 5) = X (\log 10 - \log 5) = X (\log 2) = \log 2^X$

De esta manera la ecuación original se transforma en:

$\text{Log} (2^X + X - 13) = \log 2^X$ es decir $2^X + X - 13 = 2^X$ que tiene solución $X = 13$

41).- Resuelve la ecuación $\log_{\cos x} \operatorname{sen} x + \log_{\operatorname{sen} x} \cos x = 2$

(Respuesta: las soluciones son $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi K \quad K \in Z$)

NOTA: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

La ecuación la puedo reescribir:

$$\log_{\cos x} \operatorname{sen} x + \frac{1}{\log_{\cos x} \operatorname{sen} x} = 2$$

$$\frac{\left(\log_{\cos x} \operatorname{sen} x\right)^2 + 1}{\log_{\cos x} \operatorname{sen} x} = 2$$

$$\left(\log_{\cos x} \operatorname{sen} x\right)^2 + 1 - 2 \log_{\cos x} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\left(\log_{\cos x} \operatorname{sen} x - 1\right)^2 = 0 \quad , \quad \log_{\cos x} \operatorname{sen} x = 1$$

$$(\cos x)^1 = \operatorname{sen} x \quad ; \quad 1 = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad , \quad \tan x = 1$$

(Nótese que seno $x > 0$, $\cos x > 0$ porque en esta ecuación son base de logaritmos)

y así las soluciones de $\tan x = 1$ son:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \qquad k \in z$$

Solamente con estos valores de x se tendrá que:

$\operatorname{sen} x > 0$

$\cos x > 0$

$\operatorname{sen} x = \cos x$

42).- resuelve la ecuación :

$$.125\ (4)^{2x-8} = \left(\frac{.25}{\sqrt{2}}\right)^{-x} \qquad \text{RESPUESTA : } X = \frac{38}{3}$$

NOTESE QUE :

1).- $$.125\ (4)^{2x-8} = \frac{1}{8}\ 4^{2x-8} = (\sqrt{64})^{-1} \cdot (\sqrt{16})^{2x-8}$$

$$= (\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2})^{-1} \quad (\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2})^{2x-8}$$

$$= [(\sqrt{2})^{6}]^{-1} \cdot [(\sqrt{2})^{4}]^{2x-8} = (\sqrt{2})^{-6} \cdot (\sqrt{2})^{(2x-8)\,4}$$

$$= (\ 2\ )^{8x-32-6} = (\ 2\ )^{8x-38}$$

2).- $$\left(\frac{.25}{\sqrt{2}}\right)^{-x} = \left(\frac{\sqrt{2}}{.25}\right)^{x} = \left(\frac{\sqrt{2}/1}{1/4}\right)^{x} \quad (4\sqrt{2})^{x} = (\sqrt{16}\ .\sqrt{2})^{x} =$$

$(\sqrt{2}\ .\sqrt{2}\ .\sqrt{2}\ .\sqrt{2}\ .\sqrt{2})^{x} = (\sqrt{2})^{5x}$ y así la ecuación original se transforma en :

$(\sqrt{2})^{8x-38} = (\sqrt{2})^{5x}$ $\qquad$ $8x - 38 = 5x$ y despejando x

se tiene que $x = 38/3$ la cual resulta ser la solución de la ecuación:

$$.125\ (4)^{2x-8} = \left(\frac{.25}{\sqrt{2}}\right)^{x}$$

43).- *Resolver la ecuación para* x, y.

$$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + y - 2\sqrt{y} + 3 = 0$$

(Respuesta: $x = \sqrt{2}\ ,\ y = 1$ *)*

La ecuación anterior la puedo escribir:

$$(x^2 - 2\sqrt{2}\ ) + (y - 2\sqrt{y} + 1) = 0$$

$$(x - \sqrt{2}\ )^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 0$$

Pero una suma de cuadrados es igual a cero si :

$$x - \sqrt{2} = 0 \qquad y \qquad \sqrt{y} - 1 = 0$$

Y la solución es:

$$x = \sqrt{2} \quad , \quad y = 1$$

44).- Resolver la ecuación:

$$a x^3 + b x^2 + b x + a = 0$$

Agrupo 'terminos

$$a x^3 + a + b x^2 + b x = 0$$

$$a(x^3 + 1) + b(x^2 + x) = 0$$

$$a(x+1)(x^2 - x + 1) + b x (x+1) = 0$$

$$(x+1)[(a)(x^2 - x + 1) + b x] = 0$$

Hay dos posibilidades para que el producto sea cero

1') $x + 1 = 0$ lo cual quiere decir que $x = -1$

2') $(a)(x^2 - x + 1) + b x = 0$ es decir

$$a x^2 - a x + a + b x = 0$$

$a x^2 + x(b - a) + a = 0$ *Que tiene soluciones:*

$$x = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4(a)(a)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-b + a \pm \sqrt{b^2 - 2ab + a^2 - 4a^2}}{2(a)}$$

$$x = \frac{a - b \pm \sqrt{b^{2} - 2ab - 3a^{2}}}{2\,(a)}$$

Las soluciones de la ecuación : $a x^{3} + b x^{2} + b x + a = 0$

SON :

$$X_1 = -1$$

$$X_2 = \frac{-b + a + \sqrt{b^{2} - 3a^{2} - 2ab}}{2\,(a)}$$

$$X_3 = \frac{-b + a - \sqrt{b^{2} - 3a^{2} - 2ab}}{2\,(a)}$$

45).- Resolver la ecuación:

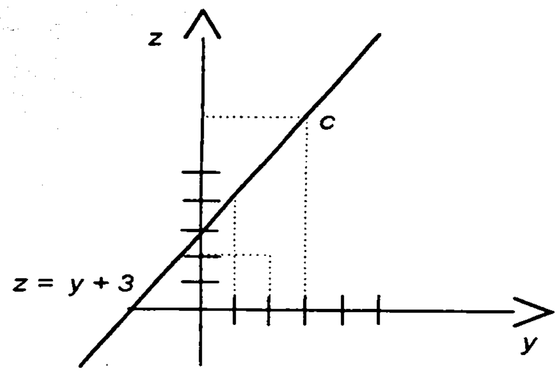
$$x^2 + 2x = x\ ! \qquad\qquad (\text{ RESPUESTA: } x = 4 \text{ })$$

SOLUCION:

$$x\,(x+2) = x\,(x-1)$$

$$x + 2 = (x-1) \qquad \textit{hago: } \; y = x - 1$$

$y + 3 = y$



NOTA: A , B , C son algunos puntos que pertenecen a la gráfica de $z = y$ y la línea recta es la gráfica de $z = y+3$

De lo anterior tenemos que la solución es $y = 3$

Pero antes hicismos $y = x - 1$ *por esto* $3 = x - 1$ *lo cual me dice que la solución*

de $x^2 + 2x = x$ *es* $x = 4.$

46) Resuelve la ecuación:

$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ (respuesta: $x=3$)

hagamos $U=\sqrt[3]{x-2}, V=\sqrt{x+1}$
nótese que: $U^3-V=-3$ entonces

$$U+V=3 \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$U^3-V^2=-3 \ldots\ldots(2)$$

Ahora resuelve este sistema de dos ecuaciones con dos incognitas así: despejo *V* de (1) y sustituyo en (2)

$$U^3-(3-U)^2=-3$$
$$U^3-(9-6U+U^2)=-3$$
$$U^3-9+6U-U^2=-3$$
$$U^3-U^2+6U-6=0$$
$$U^2(U-1)+6(U-1)=0$$
$$(U-1)(U^2+6)=0$$
$$(U-1)=0$$
ó $(U^2+6)=0$

El primer caso *U-1=0, U=1*, El segundo caso U^2+6 me da raíces complejas. Si tomo *U=1* entonces *V=2* ahora como

$U=\sqrt[3]{x-2}$ Entonces $1=\sqrt[3]{x-2}, x=3$
$V=\sqrt{x+1}$ entonces $2=\sqrt{x+1}, x=3$

y de esta manera la solución en números reales es $x=3$

47)encuentra las soluciones reales de:

$x^6=\dfrac{257x^2-68}{68x^2-257}$ (respuesta: $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=.5$; $x_4=-.5$)

solución: $68x^8-257x^6-257x^2+68=0$
$68x^8+68-257(x^6+x^2)=0$ dividido por $x^4 \neq 0$ de cada lado

$$68x^4+\frac{1}{x^4}-257\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$68\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-257\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$68\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)-68(2)-257\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$68\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-136-257\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

Sea: $y=x^2+\frac{1}{x^2}$

$68y^2-257y-136=0$ esta ecuación tiene dos soluciones

$y_1=\frac{289}{68}, y_2=-\frac{8}{17}$ pero como hice $y=x^2+\frac{1}{x^2}$

$$-\frac{8}{17}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{8}{17}=\frac{x^4+1}{x^2}$$

$-8x^2=17x^4+17, 17x^4+8x^2+17=0$ y para resolver esta ecuación hago $U=x^2$ y la ecuación anterior se escribe :

$17U^2+8U+17=0$ y no hay soluciones reales ya que el descriminante <0

sustituyendo el otro valor de $y=\frac{289}{68}$

sea $V=x^2$ *así* $68V^2-289V+68=0$ y esta ecuación tiene dos soluciones $V_1=\frac{544}{136}, V_2=\frac{345}{136}$ pero como simbolicé $V=x^2$ *entonces* : $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=.5$; $x_4=-.5$

Las cuales resultan son las 4 soluciones reales de la ecuación $x^6=\frac{257x^2-68}{68x^2-257}$

48) El pan y el queso proporcionan calorías y proteínas en diversas proporciones. Un kilogramo de pan proporciona 2000 calorías y 50 gramos de proteínas. Un kilo de queso proporciona 4000 calorías y 200 gramos de proteínas. Una dieta normal requiere cuando menos 6000 calorías y 200 gramos de proteínas diariamente. Por lo tanto si el kilogramo de pan cuesta 26$ y 80$ el kilo de queso, ¿qué cantidades de pan y queso debemos comprar para satisfacer los requisitos de la dieta normal, gastando la menor cantidad de dinero?

El siguiente cuadro resume los datos del problema.

	PAN (1 Kg)	QUESO (1 KG)	REQUISITOS DE LA DIETA NORMAL
PRECIO	26 $	80 $	
CALORIAS	2000	4000	6000
PROTEINAS (En gramos)	50	200	200

En el problema por resolver hay dos incógnitas que las tomaremos así:

X_1= Número de kilogramos de pan.

X_2= Número de kilogramos de queso.

Entonces si compro X_1 Kg. de pan deberé de pagar por este pan $26X_1$ pesos y si compro X_2 Kg. de queso deberé de pagar $80X_2$ pesos por este queso, y en total deberé de pagar por el queso más el pan lo siguiente:

$c = 26X_1 + 80X_2$ (*c* representa el costo o importe de la compra).

Ahora al comprar X_1 Kg. de pan y X_2 Kg. de queso entonces el número de calorías contenida en esta compra será: $2000X_1 + 4000X_2$ pero como la dieta normal debe contener cuando menos 6000 calorías entonces álgebraicamente lo anterior se podría escribir $2000X_1 + 4000X_2 \geq 6000$ y el número de proteínas debe ser cuando menos 200 gramos lo cual se podrá escribir:

$50X_1 + 200X_2 \geq 200$ y de esta manera el problema planteado se transforma de la siguiente manera:

MINIMIZAR: $C = 26X_1 + 80X_2$

CON LAS CONDICIONES: $2000X_1 + 4000X_2 \geq 6000$

$50X_1 + 200X_2 \geq 200$

49) El señor RUIZ que se dedica a la fabricación y venta de muebles finos dispone de dos diferentes tipos de madera (tiene tipos A y B).

Del tipo A tiene 1500 pies y del tipo B tiene 1000 pies, también dispone de 800 horas-hombre para efectuar el trabajo. La demanda que ha estimado es la siguiente: Cuando menos 40 Mesas, 130 Sillas, 30 Escritorios y no más de 10 Libreros. Las cantidades de madera A y B y las horas-hombre que requiere la elaboración de cada unidad de artículo se indican a continuación.

¿Qué cantidad deberá fabricar (el señor RUIZ) de cada articulo de manera que las utilidades obtenidas sean las máximas?

ARTICULO	MADERAS A	B	HORAS HOMBRE	DEMANDA ESTIMADA	UTILIDADES POR UNIDAD
MESA	5	2	3	CUANDO MENOS 40	12
SILLA	1	3	2	CUANDO MENOS 130	5
ESCRITORIO	9	4	5	CUANDO MENOS 30	15
LIBRERO	12	1	10	CUANDO MENOS 10	10
TOTAL	1500	1000	800		

El cuadro que se escribió en el enunciado del problema incluye las utilidades que reporta la venta de cada unidad de artículo. Lo que se debe de responder es :

¿Qué cantidad de cada artículo debe de fabricar el señor RUIZ para que las utilidades obtenidas sean las máximas?

Representaré :

X_1 = número de mesas que deberán de fabricarse

X_2 = número de sillas que deberán de fabricarse

X_3 = número de escritorios que deberán de fabricarse

X_4 = número de libreros que deberán de fabricarse

Al producir X_1 Mesas, X_2 Sillas, X_3 escritorios, X_4 libreros entonces al conocer cuál es la utilidad por Mesa, Silla, Escritorio, librero (véase el cuadro del enunciado) sabremos qué la utilidad se podrá escribir:

$$U = 12X_1 + 5X_2 + 15X_3 + 10X_4 .$$

Se cuenta solamente con 800 horas-hombre, es decir que el total de las horas-hombre Invertidas en la producción de X_1 Mesas, X_2 Sillas, X_3 Escritorios y X_4 Libreros deberán de ser menor o igual a 800 y como sabemos el número de horas-hombre empleadas para la producción de cada Producto se tendrá que el total de horas-hombre invertidas en la producción de X_1 Mesas, X_2 Sillas, X_3 Escritorios, y X_4 Libreros es de :

$3X_1 + 2x_2 + 5X_3 + 10X_4$.

Como existe la condición de que el número de horas-hombre no debe ser mayor as 800

Entonces la expresión se deberá escribir $3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 10X_4 \leq 800$

Madera: El total de madera tipo A empleada debe ser menor o igual a 1500. entonces

$5X_1 + X_2 + 9X_3 + 12X_4 \leq 1500$

para la madera tipo B la restricción es

$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + X_4 \leq 1000$

Restricciones de demanda :

$$\begin{aligned} X_1 &\geq 40 \\ X_2 &\geq 130 \\ X_3 &\geq 30 \\ X_4 &\leq 10 \end{aligned}$$

Con todo lo anterior el problema queda planteado así :

MAXIMIZAR : $U = 12\,X_1 + 5\,X_2 + 15\,X_3 + 10\,X_4$

Sujeto a las restricciones :

$$\begin{array}{rcl} 3\,X_1 + 2\,X_2 + 5\,X_3 + 10\,X_4 & \leq & 800 \\ 5\,X_1 + X_2 + 9\,X_3 + 12\,X_4 & \leq & 1500 \\ 2\,X_1 + 3\,X_2 + 4\,X_3 + X_4 & \leq & 1000 \\ X_1 & \geq & 40 \\ X_2 & \geq & 130 \\ X_3 & \geq & 30 \\ X_4 & \geq & 10 \end{array}$$

NOTESE QUE : las incógnitas X_1, X_2, X_3, X_4, deberán ser positivas o cero (o significa no producir artículo alguno) es decir :

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$; $X_3 \geq 0$; $X_4 \geq 0$

50) "DON PEDRO" Comerciante de la central de abastos hace 3 mezclas diferentes con pistaches, avellanas y cacahuates.

Las especificaciones de sus mezclas son las siguientes.

La mezcla uno debe contener 50% pistaches como mínimo, y 25% de cacahuates cuando más, la libra de esta mezcla la vende a $50.00

El segundo tipo debe contener 25% de pistaches, por lo menos, y un 50% de cacahuates, cuando más y se vende a $35.00 la libra. El tercer tipo no tiene especificaciones y se vende a $25.00 la libra.

Sin embargo, están restringidas las cantidades de materias primas que puede conseguir "DON PEDRO" .

Las máximas por períodos son: 10 libras de pistaches, 100 libras de cacahuates y 60 lñibras de avellanas.

Cada libra de pistache la cuesta 65 pesos, la de cacahuate 25 pesos y 35 pesos la de avellanas.

¿Cuántas libras se deberán preparar de cada mezcla, de tal manera que se obtengan las mismas utilidades?

MEZCLA	PISTACHES	CACAHUATES	AVELLANAS	LIBRAS OBTENIDAS DE CADA MEZCLA	PRECIO DE VENTA DE CADA LIBRA (PESOS)	VALOR TOTAL DE CADA MEZCLA (PESOS)
1	X_{1p}	X_{1c}	X_{1A}	$X_{1p}+X_{1c}+X_{1A}$	$ 50.00	$50(X_{1p}+X_{1c}+X_{1A})$
2	X2p	X2c	X2A	$X_{2p}+X_{2c}+X_{2A}$	$ 35.00	$35(X_{2p}+X_{2c}+X_{2A})$
3	X3p	X3c	X3A	$X_{3p}+X_{3c}+X_{3A}$	$ 25.00	$25(X_{3p}+X_{3c}+X_{3A})$
TOTAL DE MATERIAS PRIMAS UTILIZADAS	$X_{1p}+X_{2p}+X_{3p}$ (LIBRAS DE PISTACHES)	$X_{1c}+X_{2c}+X_{3c}$ (LIBRAS DE CACAHUATES)	$X_{1A}+X_{2A}+X_{3A}$ (LIBRAS DE AVELLANAS)			
COSTO DE CADA LIBRA(PESOS)	$ 65.00	$ 25.00	$ 35.00			
COSTO TOTAL	$65(X_{1p}+X_{2p}+X_{3p})$	$25(X_{1c}+X_{2c}+X_{3c})$	$35(X_{1A}+X_{2A}+X_{3A})$			

El ingreso total de la venta de las tres mezclas, es decir, los ingresos totales son:

$50(X_{1p}+X\ \ +X_{1A})+35(X_{2p}+X_{2c}+X_{2A})+25(X_{3p}+X_{3c}+X_{3A})$

La diferencia entre el ingreso y el costo total será la utilidad que se quiere maximizar:

$U=50(X_{1p}+X_{1c}+X_{1A})+35(X_{2p}+X_{2c}+X_{2A})+25(X_{3p}+X_{3c}+X_{3A})$

$-65(X_{1p}+X_{2p}+X_{3p})-25(X_{1c}+X_{2c}+X_{3c})-35(X_{1a}+X_{2A}+X_{3A})$

$=-15X_{1p}+25X_{1c}+15X_{1A}-30X_{2p}+10X_{2c}-40X_{3p}-10X_{3A}$

Restricciones: Existen dos grupos de ellas, las que se refieren a la adquisición de materias primas.

Por lo que toca a las especificaciones, el primer tipo de mezcla requiere que la cantidad (en libras) de pistaches X_{1p} sea el 50% como mínimo.

Esto equivale a que las libras de pistache que entran en la mezcla 1(X_{1p}) sean menos, igual o mayor que la mitad de la mezcla $X_{1p}+X_{1c}+X_{1A}$ es decir:

$X_{1p}>/\ ½\ X_{1p}+X_{1c}+X_{1A})$ La cual se puede escribir

$½\ X_{1p}-½\ X_{1c}-½\ X_{1A}>/0$

La segunda especificación pide que las libras de cacahuates (X_{1c}) sean cuando más 25% (la cuarta parte) de la mezcla 1 ésto es:

$X_{1c}</\ ¼\ (X_{1p}+X_{1c}+X_{1A})$ que se transforma en:

$-\ ¼\ X_{1p}+3/4X1c-1/4X1A\ </0$

$¼\ X1p-3/4X1c+1/4X1A\ </0$

Las especificaciones para la segunda mezcla la primera condición es que las libras de pistache (X2p) sean el 25% (1/4 parte) como mínimo, es decir, que X2p debe ser ígual o mayor que la cuarta parte de X2p+X2c+X2A ósea:

$X2p>/\ ¼\ (X2p+X2x+X2A)$ y pasando las incógnitas al primer miembro.

$¾\ X2p-1/4\ X2c-1/4\ X2A>/0$

La segunda especificación implicación implica que las libras de cacahuates (X2c) sean cuando más 50% (la mitad) de la mezcla, es decir que:

$X2c \leq \frac{1}{2}(X2p+X2c+X2A)$ ó $\frac{1}{2}X2p - \frac{1}{2}X2c + \frac{1}{2}X2A \geq 0$

de esta manera quedan planteadas las restricciones (la tercera mezcla no tiene restricciones)

Limitaciones de materias primas

Los pistaches se pueden disponer de un máximo de 100 libras:

$X1p+X2p+X3p \leq 100$

De los cacahuates como máximo se pueden obtener 100 libras:

$X1c+X2c+X3c \leq 100$

La disponibilidad máxima de avellanas es de 60 libras:

$X1A+X2A+X3A \leq 60$

Y de esta manera la solución del problema se encuentra cuando se maximice:

$U=-15X1p+25X1c+15X1A-30X2p+10X2c-40X3p-10X3A$

Sujeta a las siguientes restricciones.

$\frac{1}{2}X1p - \frac{1}{2}X1c - \frac{1}{2}X1A \geq 0$

$\frac{1}{4}X1p - \frac{3}{4}X1c + \frac{1}{4}X1A \geq 0$

$\frac{3}{4}X2p - \frac{1}{4}X2c - \frac{1}{4}X2A \geq 0$

$\frac{1}{2}X2p - \frac{1}{2}X2c + \frac{1}{2}X2A \geq 0$

$X1p+X2p+X3p \leq 100$

$X1c+X2c+X3c \leq 100$

$X1A+X2A+X3A \leq 60$

TEORÍA MÍNIMA NECESARIA PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS PROPUESTOS.

Razones:

Se llama razón de dos cantidades al cociente de la primera por la segunda. En esta forma, una razón es el número al cual no se asocia ninguna unidad de medida. Por ejemplo, la razón de 10 m a 5 m es 2. las razones se pueden en las formas siguientes.

a. Empleando dos puntos 3 : 4

b. Empleando la preposición "a" 3 a 4

c. Como una fracción común $^3/_4$

d. Como una frecuencia decimal 0.75

e. Como un porcentaje 75%

Proporciones:

Se llama proporción a la igualdad de dos razones por ejemplo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se llaman medios de una proporción a los términos "b" y "c"

Se denomina extremos de una proporción a los términos "a" y "d"

Principios relativos de las proporciones:

1 El producto de los medios es igual al producto de los extremos ejemplo:

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{C}{d} \text{ Entonces } a\,.d = d\,.\,c$$

2 En una proporción se puede transformar en otra invirtiendo los términos de cada razón. Ejemplo:

$$\text{si } \frac{1}{x} = \frac{4}{5} \text{ Entonces } \frac{x}{1} = \frac{5}{4}$$

3 Una proporción e puede transformar en otra sumando los términos de cada razón para obtener los términos primero y tercero de la nueva proporción ejemplo :

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{entonces} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\text{si } \frac{x-2}{2} = \frac{9}{1} \quad \text{entonces} \quad \frac{x-2+2}{2} = \frac{9+1}{1}$$

4 Una proporción se puede se puede transformar en otra restando los términos de cada razón para obtener los términos primero y tercero de la nueva proporción ejemplo:

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{entonces} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\text{si } \frac{x+3}{3} = \frac{9}{1} \quad \text{entonces} \quad \frac{x+3-3}{3} = \frac{9-1}{1}$$

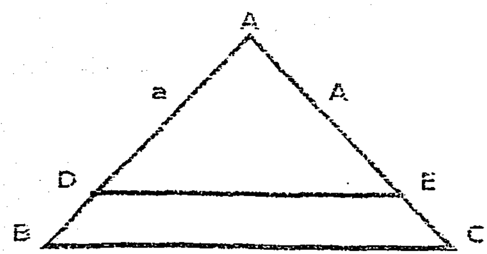
5 Si se tiene una sucesión de razones iguales, entonces la suma de cualquiera numeradores es a la suma de ,los correspondientes denominadores como cualquiera de los numeradores en su respectivo denominador, ejemplo:

$$\text{si } \frac{x-y}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{3}{1} \quad \text{entonces} \quad \frac{x-y+y-3+3}{4+5+1} = \frac{3}{1}$$

Segmentos proporcionales:

1 Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo entonces los otros dos lados quedan divididos en segmentos proporcionales.

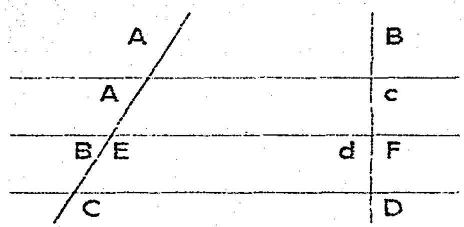
Ejemplo: si el $\triangle$ ABC, si DE // BC entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$



2 Si una recta divide dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales, entonces es paralela al tercer lado por

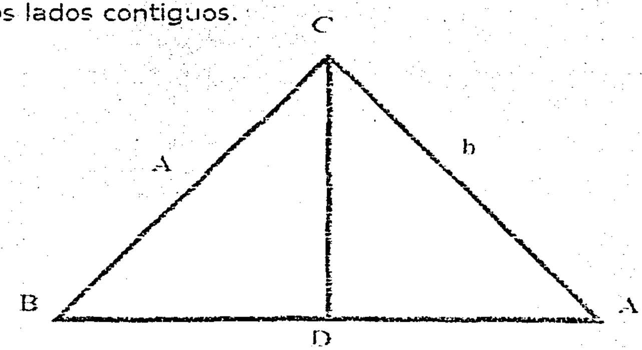
Ejemplo: en $\triangle ABC$, de la figura anterior $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Entonces DE // BC.

3 Dos transversales cualquiera, cortadas por 3 ó mas paralelas queden divididos en segmentos proporcionales.



si AB // E F // C D entonces $\frac{A}{b} = \frac{C}{d}$

4 La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide el lado opuesto de dos segmentos proporcionales a los lados contiguos.



Ejemplo: si CD biseca C entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Triángulos semejantes

Para simbolizar la expresión "semejante a" se usará el siguiente símbolo ~ . La expresión ABC ~ PGR se lee " El triángulo ABC semejante al triángulo PQR.

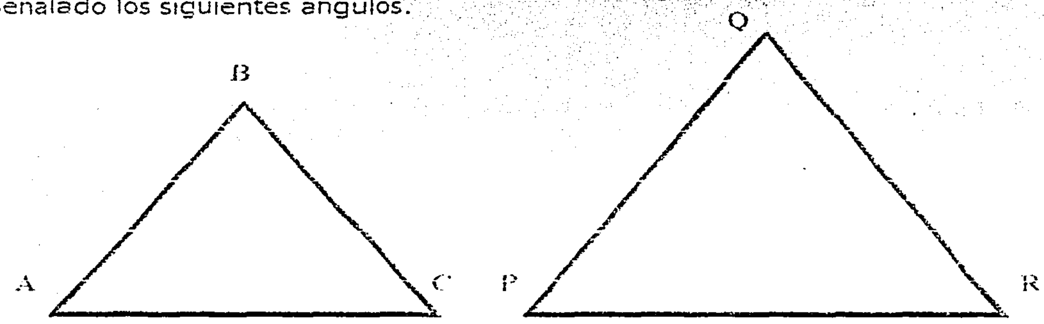
Los triángulos semejantes no tienen el mismo tamaño en lo que respecta a sus lados.

Los triángulos semejantes tienen la misma magnitud de sus ángulos.

Un par de "ángulos homólogos" son dos ángulos (uno de un triángulo y otro de otro triángulo) que miden lo mismo.

Un par de "lados homogéneos" son dos lados (uno de un triángulo y otro de otro triangulo) que se oponen a ángulos iguales.

Por ejemplo: supongamos que tenemos un par de triángulos semejantes a los cuales se han señalado los siguientes ángulos.



Las partes de ángulos homogéneos son

∢ A con ∢ P; ∢ B con ∢ Q; ∢ C con ∢ R

Los pares de lados homogéneos son (se oponen a ángulos iguales).

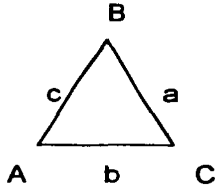
AB con PQ; AC con PR; BC con QR.

ALGUNOS PRINCIPIOS RELATIVOS A LOS TRIANGULOS SEMEJANTES

1.- Los ángulos homólogos de triángulos semejantes son iguales.

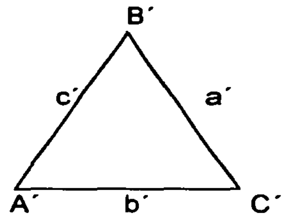
2.- Los lados homólogos de triángulos semejantes son proporcionales.

3.- Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno de ellos son iguales a sus correspondientes en el otro.



Por ejemplo si:

$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$
$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$
entonces:
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



4.- Dos triángulos son semejantes si un ángulo de uno de ellos es igual a un ángulo del otro y si los lados que comprenden al primero son proporcionales a los lados homólogos del 2°.

Por ejemplo (ver la figura anterior)

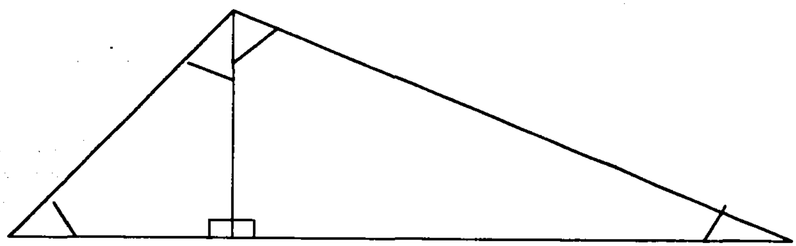
Si $\sphericalangle c = \sphericalangle c'$ y $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

5.- Dos triángulos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales.

Ejemplo (ver la figura anterior).

Si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

6.- En un triángulo rectángulo, la altura bajada a la hipotenusa divide al triángulo en otros dos triángulos rectángulos con la relación de los ángulos según se señala.

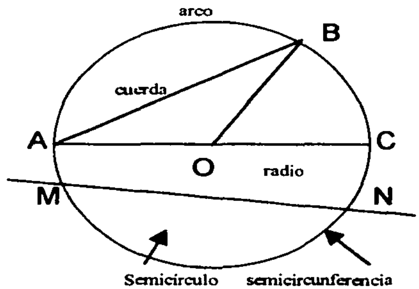


- La circunferencia es una curva cerrada cuyos puntos están en un mismo plano y a igual distancia de otro fijo que se llama centro.

- El círculo es el conjunto de puntos interiores a la circunferencia.

- La longitud de la circunferencia es la distancia que se recorre al moverse sobre la circunferencia y volviendo al punto de partida (la longitud de la circunferencia = perímetro = (2 II) (r)).

- Radio es cualquier segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.



- Angulo central es el formado por dos radios
  Por ejemplo ∢ AOB y ∢ BOC son ángulos centrales.

- Para simbolizar "arco" se empleara el siguiente símbolo ⌒

  Por ejemplo $\overset{\frown}{AB}$ significa "arco AB"
  Los ángulos de una circunferencia se miden en grados.

- Semicircunferencia es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

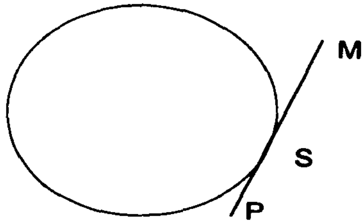
- Semicírculo es la porción de plano comprendida entre un diámetro y la semicircunferencia correspondiente .

- Cuerda de una circunferencia es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia. Por ejemplo AB es una cuerda.

- Diámetro es una cuerda que pasa por el centro en la figura: AC es un diámetro de la circunferencia.

- Secante de una circunferencia es cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos. Por ejemplo MN es una secante.

Tangente a una circunferencia es cualquier recta que toque la circunferencia en un punto, y solo en uno.



Por ejemplo PM es una recta tangente a la circunferencia en el punto S se llama punto de contacto o punto de tangencia.

PRINCIPIOS RELATIVOS A LA CIRCUNFERENCIA

- Todo diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales.

- Si una cuerda divide a una circunferencia en dos partes iguales entonces es un diámetro.

- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, ángulos centrales iguales abarcan ángulos iguales .

- En la misma circunferencia o en circunferencias iguales, arcos iguales determinan ángulos centrales iguales.

- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales.

- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, arcos iguales subtienden cuerdas iguales.

- Un diámetro perpendicular a una cuerda biseca la cuerda y a sus arcos correspondientes.

- La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, cuerdas iguales equidistan del centro.

- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, cuerdas equidistantes del centro son iguales.

- Los arcos de una circunferencia comprendidos entre paralelas, son iguales.

TEOREMAS RELATIVOS A LAS TANGENTES.

Se llama longitud de una tangente desde una circunferencia, al segmento de la tangente comprendido entre el punto dado y él de tangencia.

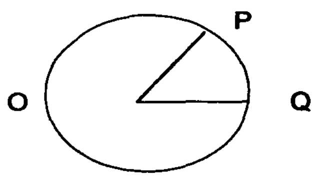
- Toda tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

- Las longitudes de las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son iguales.

- La recta que une el centro de una circunferencia con un punto exterior, es bisectriz del ángulo que forman las tangentes trazadas por ese punto a la circunferencia.

MEDIDA DE ANGULOS Y ARCOS EN UNA CIRCUNFERENCIA.

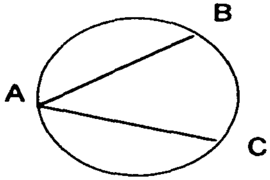
- Se llama ángulo central al ángulo que se forma con dos radios.



$\measuredangle$ POQ es un ángulo central

$\measuredangle POQ = \overset{\frown}{PQ}$

Se llama ángulo inscrito al que tiene su vértice sobre la circunferencia y cuyos lados son cuerdas.



$\measuredangle$ BAC es un ángulo inscrito y

$$\measuredangle BAC = \frac{1}{2} \cdot BC$$

En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, ángulos inscritos iguales abarcan arcos iguales. Además los ángulos inscritos que subtienden arcos iguales son iguales.

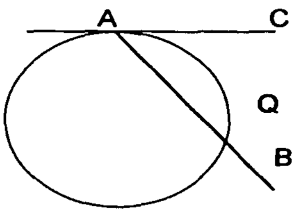
Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en la circunferencia son suplementarios.

En una misma circunferencia, rectas paralelas determinan arcos iguales.

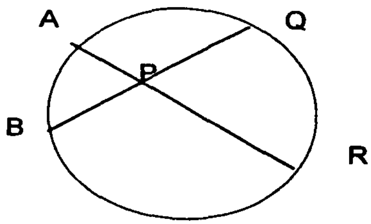
LOS ANGULOS QUE SE FORMAN EN UNA CIRCUNFERENCIA

El ángulo que forman una tangente y una cuerda tiene por medida la mitad del arco que abarcan.



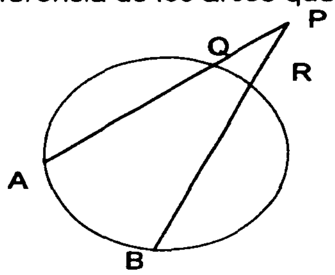
$$\measuredangle BAC = \frac{1}{2} \quad \overset{\frown}{BQA}$$

El ángulo que forman dos cuerdas que se cortan, tiene por medida la semisuma de los arcos que ellas abarcan.



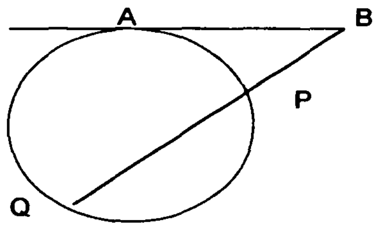
$$\measuredangle ABP = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{QR}}{2}$$

El ángulo que forman dos secantes que se cortan fuera de una circunferencia, tiene por medida la semidiferencia de los arcos que las secantes abarcan.



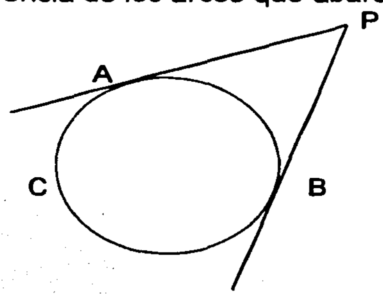
$$\measuredangle APB = \frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{QR}}{2}$$

El ángulo que forman una tangente y una secante que se cortan fuera de una circunferencia, tiene por medida la semidiferencia de los arcos que abarcan.



$$\measuredangle ABQ = \frac{\overset{\frown}{QA}-\overset{\frown}{AP}}{2}$$

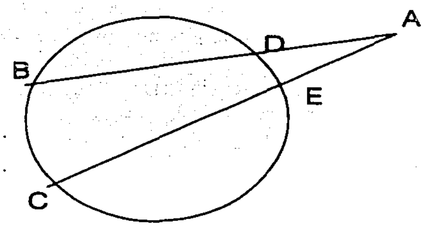
El ángulo que forman dos tangentes que se cortan fuera de una circunferencia, tiene por medida la semidiferencia de los arcos que abarcan.



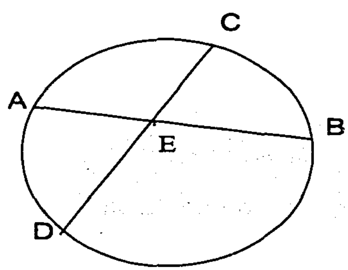
$$\measuredangle APB = \frac{\overset{\frown}{BCA}-\overset{\frown}{AB}}{2}$$

RECTAS TANGENTES , RECTAS SECANTES Y CUERDAS

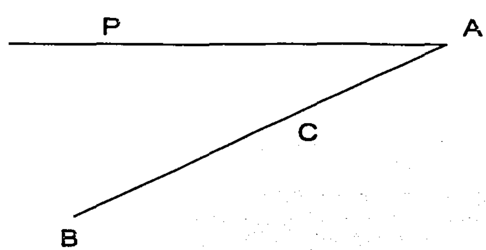
Si dos secantes se cortan en un punto exterior a la circunferencia entonces (véase la figura) AB·AD= AC·AE .



Si dos cuerdas se cortan dentro de la circunferencia entonces (véase la siguiente figura) AE·EB = CE·ED .



Si una secante y una tangente se cortan fuera de la circunferencia entonces: AP=AB·AC .



TRAPECIOS

-El trapecio es un cuadrilátero que tiene dos, y solo dos, lados opuestos paralelos. Se llaman bases de trapecio a los lados paralelos. A los lados no paralelos se les denominan piernas del trapecio. Al segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se les denomina paralela media del trapecio.

-Se llama trapecio isósceles al que tiene iguales sus piernas . Se llaman ángulos de la base de un trapecio los que tienen como vértices la intersección de la base mayor con las piernas.

Dos principios relacionados relacionados con los trapecios son:

1.- Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son iguales.

2.- Si los ángulos de la base de la base de un trapecio son iguales, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

PARALELOGRAMO :

- El paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos .
- Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelelogramo.

ALGUNAS PROPIEDADES DEL PARALELOGRAMO:

1.- Cada diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.

2.-Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.

3.-Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales .

4.-Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente .

EL RECTANGULO, ROMBO Y CUADRADO COMO CASOS ESPECIALES DE PARALELOGRAMOS

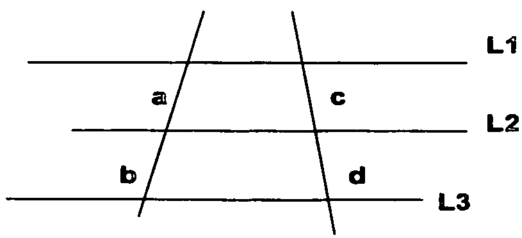
1.- El rectángulo es un paralelogramo que tiene todos los lados iguales.
2.- El rombo es un paralelogramo que tiene todos sus lados iguales.
3.- El cuadrado es un paralelogramo que tiene sus 4 lados y cuatro ángulos iguales.

Propiedades de los 3 paralelogramos anteriores:

1.- Los ángulos de un rectángulo son rectos.
2.- Los diagonales de un rectángulo son iguales.
3.- Todos los lados de un rombo son iguales.
4.- Los diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí, y se bisecan mutuamente.
5.- Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos de los vértices que las unen.
6.- El cuadrado tiene todas las propiedades del rombo y del rectángulo.

TRES O MAS PARALELAS . PARALELAS MEDIAS Y PUNTOS MEDIOS

Si tres o más paralelas determinan sobre una transversal segmentos iguales, entonces determinan segmentos iguales sobre cualquier transversal.

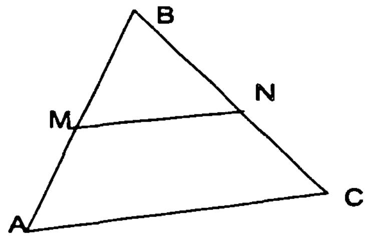


Lo anterior significa que sí L1 II L2 II L3 y a=b entonces también c=d

Principios relacionados a los puntos medios y paralelas medias de un trapecio

-Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo se traza la paralela a un segundo lado entonces esa paralela pasa por el punto medio del tercer lado.

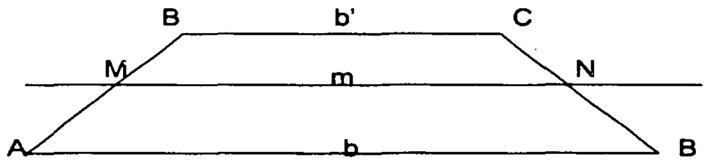
Lo anterior afirma que si M es el punto medio de AB y MN paralela a AC entonces N es el punto medio de BC



- El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a la mitad de éste.

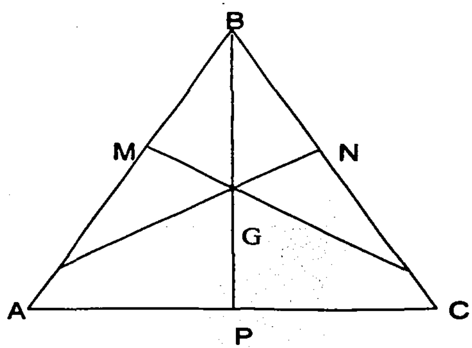
Es decir (ver la anterior figura) que si M , N son los puntos medios de AB y BC entonces MN ll AC y MN = ½ AC.

-El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases de este e iguale a la mitad de su suma.



Ésto es que si m es el segmento que une los puntos medios de los lados entonces m ll b y m ll b' y longitud m = ½ (b+b')

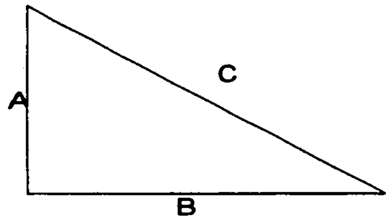
-Las medianas de un triángulo se cortan en un punto que se encuentran a los dos tercios de la distancia que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.



Si AN, BP, CM son las medianas de ABC entonces se cortan en un punto G que se halla a dos tercios de la distancia de A a N, de B a P, y de C a M.

TEOREMA DE PITAGORAS

El teorema de Pitágoras que solamente puede ser aplicado a triángulos rectángulos dice: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

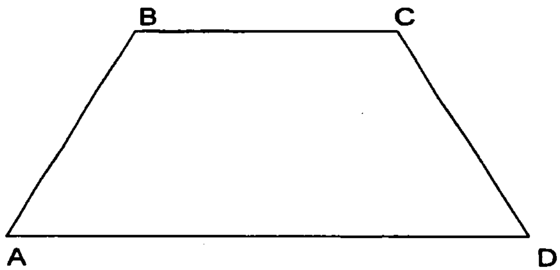


$$a^2+b^2=c^2$$

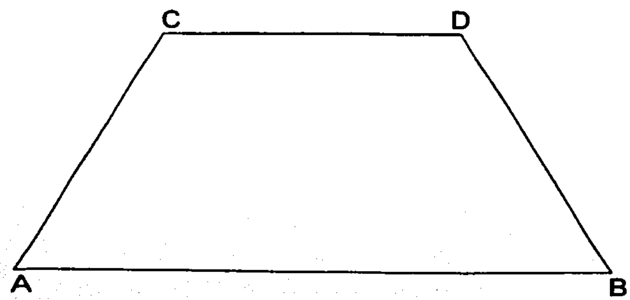
ALGUNOS RESULTADOS PARA CUADRILATEROS

-Si la suma de dos ángulos opuestos de un cuadrilátero es igual a 180° entonces se puede circunscribir una circunferencia al cuadrilátero.

-Un cuadrilátero convexo ABCD tiene una circunferencia inscrita si y solo si AB+DC=AD+BC



Fórmula para calcular el área de un trapecio



$$AREA = \left\{ \frac{AB+CD}{2} \right\} (h)$$

CUADRILATEROS INSCRITOS: Un cuadrilátero tal que todos sus vértices pertenecen a una circunferencia se dice que está inscrito a esta circunferencia y la circunferencia se llama circunscrita alrededor de este cuadrilátero.

No todo cuadrilátero tiene la propiedad de que alrededor de él se puede circunscribir una circunferencia.

Para poder circunscribir una circunferencia alrededor de un cuadrilátero, es necesario y suficiente que la suma de los ángulos opuestos de éste sea igual a 180°.

Alrededor de un trapecio se puede circunscribir una circunferencia cuando y solo cuando este trapecio es isósceles.

Si un cuadrilátero ABCD se puede inscribir en una circunferencia, entonces el producto de las diagonales de este cuadrilátero es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.

CUADRILATEROS CIRCUNSCRITOS: Un cuadrilátero tal que todos sus lados son tangentes a la circunferencia se llama cuadrilátero circunscrito alrededor de la circunferencia y la circunferencia se llama inscrita en este cuadrilátero.

Para poder inscribir en un cuadrilátero la circunferencia es necesario y suficiente que las sumas de los lados opuestos de este cuadrilátero sean iguales.

ECUACION DE SEGUNDO GRADO

La ecuación general de 2° grado es

$AX^2 + BX + C = 0$ y tiene por solución la siguiente

$$X = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

el número de soluciones reales depende del valor del discriminante.

El discriminante es la expresión $B^2 - 4AC$

Si $B^2 - 4AC > 0$ entonces hay dos soluciones

Si $B^2 - 4AC = 0$ entonces hay una solución

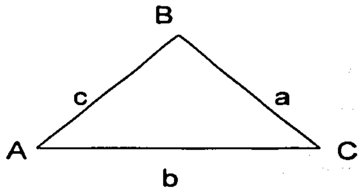
Si $B^2 - 4AC < 0$ no hay soluciones reales si no que tendrá dos soluciones que encuentra en términos de números complejos de la forma $x + iy$

DEMOSTRACIÓN DE ALGUNOS RESULTADOS UTILIZADOS EN LA SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

AREA DEL TRIANGULO EN FUNCION DE SUS LADOS:

El área de un triángulo en términos de sus lados a, b, c está dada por la fórmula $A = \sqrt{P (P - a) (P - b) (P - c)}$ en donde $P = \dfrac{a + b + c}{2}$

Considera el triángulo siguiente :



la superficie del triángulo es:

$$\frac{(c)\ (b)\ \text{Sen B}}{2} = s$$

$$\text{Sen B} = \frac{2\ s}{(c)\ (b)}$$

ley de los cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \text{Cos B}$$

$$\text{Cos B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\text{Sen}^2\ \text{B} + \text{Cos}^2\ \text{B} = 1 = \frac{4s^2}{c^2 b^2} + \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4\ a^2 c^2}$$

$$1 = \frac{16\ s^2 + (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4\ a^2 c^2}$$

$$\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{16} = s^2$$

$$\frac{[\,2ac - (a^2 + c^2 - b^2)\,]\,[\,2ac + (a^2 + c^2 - b^2)\,]}{16} = s^2$$

$$\frac{[\,b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)\,]\,[\,(2ac + a^2 + c^2) - b^2\,]}{16} = s^2$$

$$\frac{[\,b^2 - (a - c)^2\,]\,[\,(a + c)^2 - b^2\,]}{16} = s^2$$

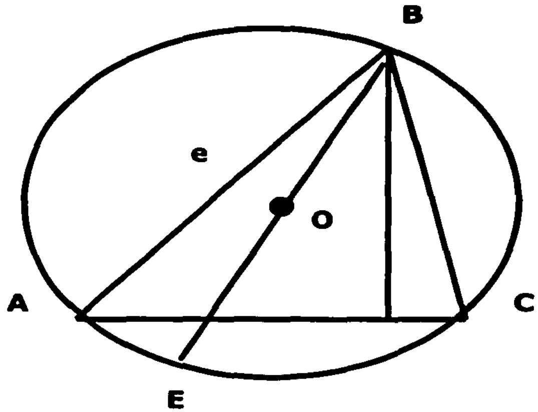
$$\frac{[\,b - (a - c)\,]}{2}\;\frac{[\,b + (a - c)\,]}{2}\;\frac{[\,(a + c) - b\,]}{2}\;\frac{[\,a + c + b\,]}{2} = s^2$$

Si hacemos $\frac{a + c + b}{2} = P$ la igualdad

anterior queda escrita

$$s^2 = \sqrt{(P)(P - a)(P - b)(P - c)}$$

Área de triángulo en función de sus lados y del radio de la circunferencia: " El área de un triángulo es igual al producto de sus lados dividido por cuatro veces el radio de la circunferencia circunscrita.



En el triángulo ***ABC*** "dibujo" si circunferencia circunscrita y simbolizo con ***R*** el radio de la misma ***"h"*** es la altura del triángulo ***ABC, "o"*** es el centro de la circunferencia circunscrita.

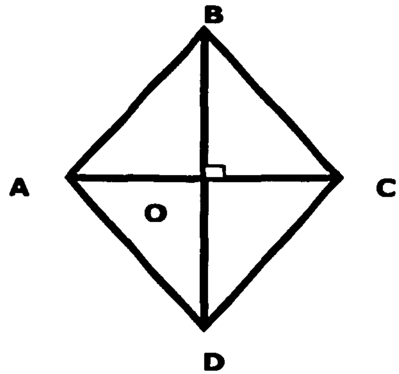
$A_{ABC} = \dfrac{b \cdot h}{2}$ ahora BDC = BAE = 90° (BE es diámetro y BDC es de 90°)
BDC = BEA Por aberear el mismo arco AB)

Por tal razón los triángulos de ADC y BAE son semejantes. Por lo tanto $\dfrac{h}{c} = \dfrac{a}{BE}$

$h = c \cdot a = \dfrac{(c)\,(a)}{BE}$ substrayendo este valor de h en $A_{ABC} = \dfrac{b.\ h}{2}$ para tener

$$A_{ABC} = \frac{b}{2} \cdot \frac{c.\ a}{2\,R} = \frac{a.\ b.\ c}{4\,R}$$

Área del rombo : " El área del rombo es igual a la mitad del producto de sus diagonales".



Considera el rombo con diagonales de longitud d,d´ de tal manera que se intercalan en O.

Demostración: área del rombo ABCD = A_{ABCD}

Demostración: área del rombo ABCD = A_{ABCD}

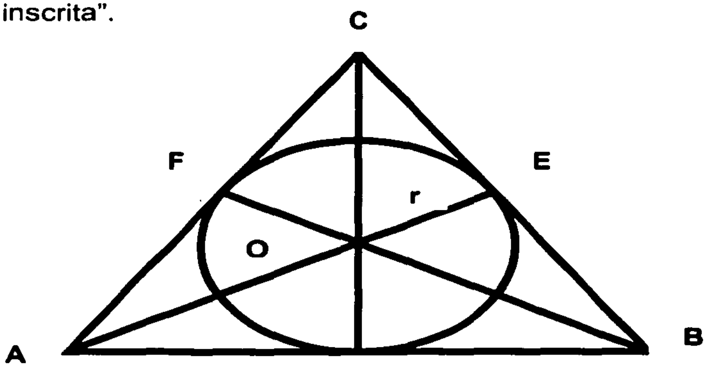
= Área de triángulo ABC + Área de triángulo ACD =

$$= \frac{1}{2}(AC)\ (BO) + \frac{1}{2}\ (AC)\,(OD) = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot(BO + OD) =$$

$=1 \cdot d \cdot d'$

(143)

Área del triángulo en función de sus lados y del radio de la en la circunferencia inscrita: "El área de un triángulo es igual al producto de su semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita".



Demostración: al unir el centro 2"o" de la circunferencia inscrita con los vértices ABC, el triángulo ABC queda descompuesto en los triángulos, AOB, BOC, COA, cada uno con alturas OD, OE, OF respectivamente, entonces

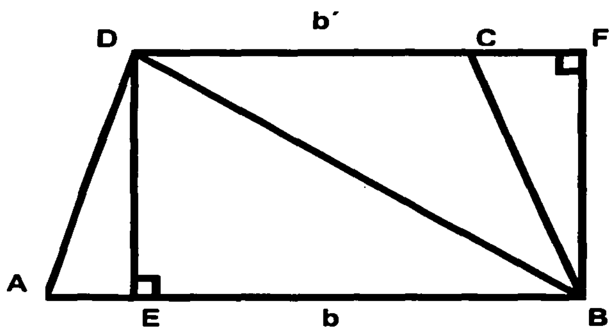
Área del triángulo ABC = $A_{AOB} + A_{BOC} + A_{COA}$ =

$$= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} CA \cdot r$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} (AB + BC + CA)\, r = \left(\frac{1}{2} P\right) r$$

(***P*** es el perímetro del triángulo y ***r*** es el radio de la circunferencia inscrita.)

Área del trapecio : " El área de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases multiplicado por su altura".

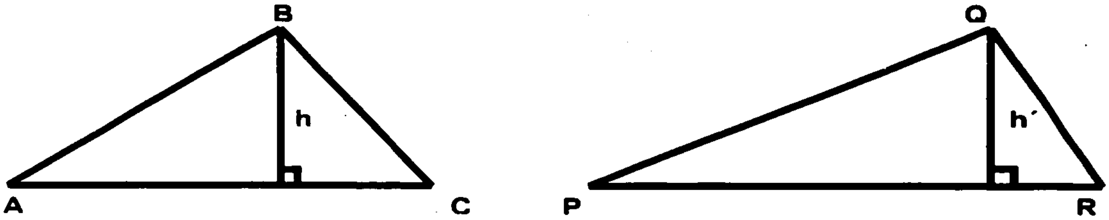


ABCD es un trapecio de base mayor AB = B base menor DC = b´ y altura DE = h

Para la demostración trazo la diagonal BD así se forma el triángulo ABD de base B y altura h, y el triángulo DBC de base b´ y altura h.

$$\text{Área del trapecio ABCD} = \frac{1}{2} b \cdot h + 1\, b' \cdot = \frac{1}{2} h\,(b + b')$$

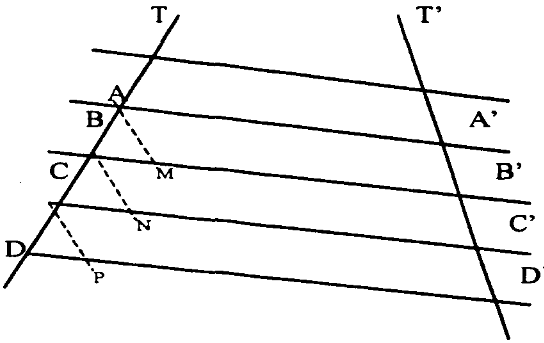
Si las Alturas de dos triángulos son iguales entonces las áreas de los dos triángulos son proporcionales a las bases.



Considera los triángulos ABC y PQR de alturas h y h´ con h = h´

Entonces $\dfrac{\text{Área del triángulo ABC}}{\text{Área de triángulo PQR}} = \dfrac{(AC)\,(h)\,/_2}{(PR)\,(h')\,/\,2} = \dfrac{AC}{PR}$

SI VARIAS PARALELAS DETERMINAN SEGMENTOS IGUALES EN UNA DE DOS TRANSVERSALES ENTONCES DETERMINARAN TAMBIEN SEGMENTOS IGUALES EN LA OTRA TRANSVERSAL.

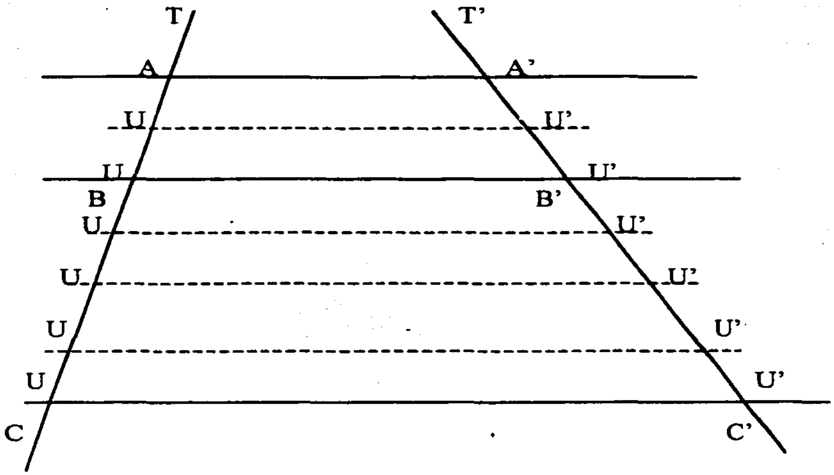


Tracemos AM, BN, CP paralelas a T' para formar los triángulos ABM, BCN, CDP los cuales resultan ser congruentes por el criterio (A. L. A) entonces AM = BN = CP por ser lados que se oponen a ángulos iguales en triángulos congruentes. Si nos fijamos en los tres paralelogramos AM B'A', NB B'C', PC C'P' resulta entonces que AM = A'B', BN =B'C', CP = C'D' por ser lados opuestos de paralelogramos. Pero anteriormente, se sabía que AM = BN = CP y de aquí se sigue que A'B'= B'C'= C'D'.

TEOREMA DE TALES:

"Si varias paralelas cortan a dos transversales entonces determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales".

Lo que se desea demostrar es que si AA'//BB'//CC', T Y T' son transversales, AB y BC segmentos correspondientes de T y A'B', B'C' segmentos correspondientes de T' entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ (ver la figura).

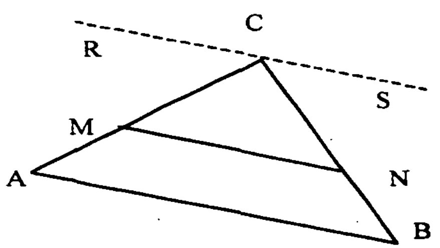


Llevemos una unidad cualquiera "U" sobre AB y BC.
Supongamos que AB la contiene **m** veces y BC la contiene **n** veces entonces AB = **mu**, BC = **nu**. Tracemos paralelas por los puntos de unión de las unidades **u** los segmentos A'B', B'C' quedarán divididos en los segmentos **u'** (recordar que si varias paralelas determinan segmentos iguales en una de dos transversales entonces determinarán también segmentos iguales en la otra transversal) de manera que A'B'= **mu'** B'C' =**nu'**. Ahora bien se tiene que:

$\frac{AB}{BC} = \frac{mu}{un} = \frac{m}{n}$ y $\frac{A'B}{B'C'} = \frac{mu'}{un'} = \frac{m}{n}$ y así

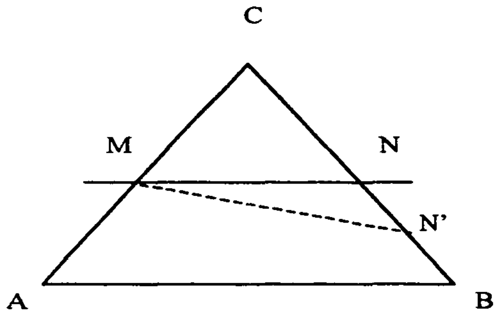
$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$. ver la nota en la página ( )

TODA PARALELA AL LADO DE UN TRIANGULO DIVIDE A LOS OTROS DOS LADOS, EN SEGMENTOS PROPORCIONALES.



Por el vértice C trazo RS // MN //AB y por ser CA y CB transversales entre paralelas RS, MN, AB entonces se cumple el teorema de TALES y por tal razón $\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB}$.

SI UNA RECTA AL CORTAR A DOS LADOS DE UN TRIANGULO LOS DIVIDE EN SEGMENTOS PROPORCIONALES ENTONCES DICHA RECTA ES PARALELA AL TERCER LADO

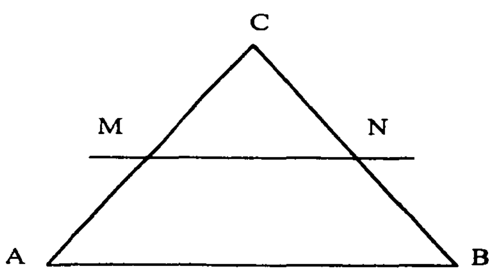


Supongamos que MN no es paralela a AB entonces por M podría trazar MN' con N' en CB tal que si fuera paralela a AB y así tendría:

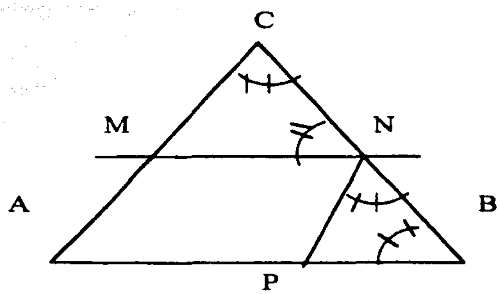
$\frac{CM}{MA} = \frac{CN'}{N'B}$ pero por hipótesis $\frac{CM}{MA} = \frac{CN'}{NB}$ y uniendo las anteriores igualdades se llega a:

$\frac{CN}{NB} = \frac{CN'}{N'B}$ lo cual resulta un absurdo ya que N y N' no pueden dividir a CB en la misma razón. Entonces N y N' deben de coincidir y así MN // AB.

EL SEGMENTO QUE UNE LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS DE UN TRIANGULO ES PARALELO AL TERCER LADO E IGUAL A SU MITAD.



Aquí demuestro que MN es paralelo a AB:
Puesto que $\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} = 1$ entonces por el Anterior MN es paralelo a AB.



Por ser MN paralela a AB entonces : $\measuredangle$ CNM = $\measuredangle$ CBA
$\measuredangle$ PNB = $\measuredangle$ ACB por ser correspondiente
entonces Δ CMN es congruente con Δ NPB (por A. L. A) y como en triángulos congruentes a ángulos iguales se oponen lados iguales entonces MN = PB por otro lado MN = PB, MN = AP.
Sumando MN + MN = PB + AP, 2MN= PB + AP, $MN = \frac{PB + AP}{2} = \frac{AB}{2}$

Logaritmos: la expresión $\log_b x=y$ por definición es $b^y=x$

1)si b>0, b≠1, u,v son números positivos entonces $\log_b (u)(v) = \log_b u + \log_b v$

Prueba : simbolizar con $r=\log_b u$, $s=\log_b v$ las cuales por definición son $b^r=u$, $b^s=v$ de tal Forma que $u.v=b^r.b^s$ es decir $u.v=b^{r+s}$ lo cual por definición se puede escribir

$\text{Log}_b\, u.v = r+s = \log_b^u + \log_b^v$

2)si b>0, b≠1, u,v >0 entonces

$\log_b u/v = \log_b u - \log_b v$

Prueba: simbolizar con $r= \log_b u$, $s=\log_b v$ las cuales por definición son $b^r=u$, $b^s=v$ ahora

$\frac{u}{v}=\frac{b}{b^s} = b$ que por definición se puede escribir $\log_b u/v= r-s= \log_b u-\log_b v$

3)si b>0, b≠1, n es cualquier número, u>0 entonces $\log_b u^n = n \log_b u$

símbolo $r = \log_b u$ que por definición tiene la expresión $b^r=u$ y de aquí que $(b^r)^n = u^n$ que por -definición se puede rescribir $\log_b u^n = r.n$ es decir $\log u = n. \text{Log}_b^u$

4) $\log_b^u = \dfrac{\log_a^u}{\log_a^b}$

si simbolizo $y = \log_b^u$ entonces por definición $b^y = u$ y al tomar a ambos lados $\log_a$

$$\log_a b^y = \log_a u \qquad \text{y} \qquad y \log_a b = \log_a u$$

$$y = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$ (pero recuerda que simbolicé $y = \log_b u$)

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

5) $$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

demostración:

aplicando el número 4 anterior (que dice $\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$) en la expresión original se tendrá:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

En este ejercicio demostraré que:

$\cos 3\alpha - \cos \alpha = -2\,Sen\ 2\alpha \bullet sen\ \alpha$ utilizando la fórmula

$$Sen\,\alpha \bullet Sen\,\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \ldots\ldots(1)$$

Si en la fórmula anterior hago $\alpha = 2\alpha, \beta = \alpha$ entonces

$$Sen2\alpha \bullet Sen\,\alpha = \frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{2}$$

$$2Sen2\alpha \bullet Sen\,\alpha = -(-\cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

también mostrarán que

$$Sen\,4\alpha \bullet Sen\,\alpha - Sen\,2\alpha \bullet Sen3\alpha = \cos 3\alpha - \cos 5\alpha) - (cod\,\alpha - \cos 5\alpha)$$

Pues bien: $Sen4\alpha \bullet Sen\alpha =$ según la fórmula (1)$= \dfrac{\cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{2}$

$Sen2\alpha \bullet Sen3\alpha =$ según la fórmula (1) $= \dfrac{\cos \alpha - \cos 5\alpha}{2}$

En conclusión

$Sen4\alpha \bullet Sen\alpha - Sen2\alpha \bullet Sen3\alpha = \dfrac{\cos 3\alpha - \cos \alpha}{2} =$ según la fórmula (2)

$$= \frac{-2Sen2\alpha \bullet Sen\alpha}{2} = -Sen2\alpha \bullet Sen\alpha$$

todas estas fórmulas se usan en el ejercicio número 30 como se podrá ver en el desarrollo del problema.

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DESDE EL NÚMERO 28 HASTA EL NÚMERO 50.

28) a) Por ser α, β, γ ángulos de un triángulo entonces qué relación puedes escribir entre ellos?

b) verifica que $Sen \propto = Sen(\beta + \gamma) + Sen(\beta - \gamma)$

c) cuando Sen x puede valer cero, es decir para que valores de x sucede que Sen x = 0 ?

29) a) Verifica que: $Cos \propto + Cos\beta = 2 \cdot Cos \frac{(\alpha-\beta)}{2} \cdot Cos \frac{(\alpha-\beta)}{2}$

b) Recuerda que una suma de cuadrados es cero si cada suma es igual a cero.

c) Recuerda que: Sen x = 0   si x = 0

d) Un triángulo es equilátero si sus tres ángulos son iguales cada uno a 60°

30) a) Considera la expresión $\frac{Sen\,\alpha}{Sen\,2\alpha} - \frac{Sen\,3\alpha}{Sen\,4\alpha}$ y demuestra que es menor que cero para $\alpha = 1°$

b) Ten encuenta que $Sen 1° > 0, Sen 4°$ ¿Porqué?

31) a) Considera la gráfica de $f(x) = Sen x$ y de $g(x) = \frac{x}{100}$

b) la gráfica de g(x) es una recta

c) Cuál es el valor máximo que alcanza $f(x)$ y cuál es el valor mínimo?

32) a) Multiplica numerador y denominador por $2 \bullet \cos \pi / 14$ y desarrolla (usando las fórmulas de trigonometria conectas la expresión que obtienes).

b) ten en cuenta que $\cos \pi / 2 = 0$!!

33) a) Escribe en notación sigma la expresión que originalmente se dio

b) Multiplica "arriba" y "abajo" por $\sqrt{2p-1}$ - $\sqrt{2p+1}$

c) desarrolla la suma que obtuviste en (b)

d) Recuerdas las "sumas telescópicas" ?

34) a) Sen 1 = Sen (k-[k-1]) ?

b) Escribe la suma original en notación sigma ($\sum$)

c) $\frac{Senk}{Cosk} = \tan k$? $\frac{Sen(k-1)}{Cos(k-1)} = \tan(k-1)$?

d) En dónde apareció una "suma telescópica"?

35) a) Escribe en notación sigma la suma original.

b) $\sum_{p=0}^{9} p^\circ = ?$ $\sum_{p=0}^{9} p = ?$

c) Resuelve la ecuación $10x^2 + 90x + 10x = 0$

36) a) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$?

b) $2+\sqrt{3} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$? $\quad 2-\sqrt{3} = $?

c) la ecuación original [usando las leyes de los exponentes y los incisos (a), (b)] transfórmala hasta la ecuación

$$(2+\ 3\ )^{x^2-2x} + \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = 4$$ y luego

d) transfórmala en una ecuación de 2° grado haciendo la substitución $y = (2+\sqrt{3})^{x^2-2x}$

37) a) efectua a ambos lados de la ecuación la operación

$\log_{10}$

b) ya has de saber que $\log_a b^m = m \log_a b$

c) simboliza con $y = \log_{10} x$ y de esta manera transformarás la ecuación obtenida

en (b) en otra ecuación pero de 2° grado

d) Resuelve la ecuación de 2° grado y no olvides que simbolizaste con $y = \log_{10} x$

38) a) Verifica que $\frac{3}{\sqrt[x]{9}}$ lo puedes escribir como $3^{1-2/x}$.

b) Luego "saca" a ambos lados de la ecuación Log_3

c) finalmente resolverás una ecuación de 2° grado.

39) a) sabías que $\log_a b = \dfrac{1}{\text{Log}_b a}$?

b) simboliza con $y = \log_2 x$

c) Recuerda que: $\log_a p.q = \log_a p + \log_a q$

$$\log_a p/q = \log_a p - \log_a q$$

d) Recordaste ya que la base de los logaritmos no pueden ser ni cero, ni uno, ni negativa?

Y que $\log_a b$ solamente lo podrás encontrar si b es mayor que cero?

40) a) has de saber que log x lo puedes pasar así $\log_{10} x$

b) log 10 = 1 ?   Log 10 - log 5 = log 2 ?

X. Log 2 = $\log 2^x$?

c) ten muy en cuenta que si tienes la igualdad

log x = log y entonces x = y !!

41) a) porqué razón en este caso cos x y sen x tendrán que ser mayores que cero?

b) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

c) transforma la ecuación original (El segundo sumando) según el inciso (b).

D) $\log_a b = y$ también se puede pensar así $a^Y = b$

e) ¿La igualdad trigonométrica tan x = 1 para que valores de x es cierta?

42) a) $.125 = \dfrac{1}{8}$? $.25 = \dfrac{1}{4}$

b) verifica que $.125\,(4)^{2x-8}$ se puede transformar en $(\sqrt{2})^{8x-38}$

c) verifica que $\left(\dfrac{.25}{\sqrt{2}}\right)$ lo puedes llevar a la forma $(\sqrt{2})^{5x}$

43) a) cuanto suma $(x^2 - 2\sqrt{2} + 2) + (y - 2\sqrt{y} + 1)$?

B) cada sumando anterior lo podrás escribir como binomio al cuadrado?

C) si tu respuesta es afirmativa entonces escribe cada sumando del inciso a como binomio al cuadrado.

D) si una suma de cuadrados es igual a cero entonces cada sumando------?

44)a)Verifica que la ecuación original la puedas escribir como:

$$a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)$$

b)Factoriza lo anterior

c) Un producto de dos factores es cero cuando sucede que ....?

d)Resuelve la ecuación de 2° grado

45) a) Ya sabías que $X! = X(X-1)$?

b) Con el inciso (a) transforma la ecuación y luego resuélvela

C)Haz $y = x - 1$

d) Grafica $f(y) = y + 3$
$g(y) = y!$

46) a) Haz $U=\sqrt[3]{x-2}$, $V=\sqrt{X+1}$

b) ¿Qué puedes decir del resultado $U^3 - V^2$? ¿qué valor toma?

C)Resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

d)¿Encontraste el resultado en números reales?

47) a) Al dividir $X^4 \neq 0$ cada lado de la ecuación y al realizar las operaciones debes de tener

(Porqué razón $X^4 = 0$?)

$$68\left(X^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 - 136 - 257\left(X^2+\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

b) Haz $y = X^2 + \frac{1}{x^2}$

c) Resuelve la ecuación de 2° grado

d) Encuentra únicamente las soluciones reales, no es necesario que encuentres las soluciones complejas.

CONCLUSIONES

El principal motivo por el cual elabore este trabajo, es para que los alumnos que hayan cursado los primeros cuatro semestres puedan contar con un material de apoyo para resolver problemas "No típicos" de álgebra y geometría.

Una de las dificultades que se presentaron en la elaboración de los presentes ejercicios fue que algunos tenían una solución muy larga. Por lo que, trate de desarrollarlos de una manera sencilla y accesible. En este trabajo se cuenta con una buena cantidad de ejemplos de geometria y álgebra para que los alumnos puedan reforzar sus conocimientos adquiridos previamente en las materias de álgebra y geometría.

Finalmente, me sentiré satisfecho si esta serie de ejercicios cumple su propósito principal: que sirva de apoyo a los alumnos y que les pueda motivar y despertar el interés por la geometría y ¿ porque no? Para que les influya en el momento decisivo de elegir una carrera universitaria.

BIBLIOGRAFÍA DE DONDE SE EXTRAJERON LOS DIFERENTES PROBLEMAS

1) "Más de dos mil problemas del fondo de oro de la Escuela para concursos de matemáticas"
Tomo I y II
Edición de Kiev, 1995.

2) "Problemas para el examen de ingreso a los institutos técnicos"
Edición de Moscú 1996.

3) "Ecuaciones"
Edición de Kiev 1996

4) "Olimpiadas internacionales de matemáticas"
Edición de Moscú 1976.

5) "Olimpiadas de matemáticas en el extranjero
Edición de Moscú 1987.

BIBLIOGRAFÍA DE APOYO

1) "Geometría plana con coordenadas".
Barnett Rich
Mc.Graw Hill, México, 1982.

2) "Geometría moderna, estructura y método".
Jurgensen, Donnelly, Dolciani
Ediciones Cultural

3) "Geometría plana, del espacio y trigonometría".
J:A Baldor.
Ediciones Cultural

4) "Geometría"
Wentworth y Smith
Editorial Porrua.