UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MODELACION DE PRODUCTOS DERIVADOS APLICANDO EL METODO DE MARTINGALAS

PRESENTADA POR:

RAUL DE JESUS GUTIERREZ

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

(INVESTIGACION DE OPERACIONES Y FINANZAS)

DIRECTOR DE TESIS: DR. MANUEL ORDORICA MELLADO

Ciudad Universitaria, 2001

AGRADECIMIENTOS

A mis padres por su cariño y comprensión.

A mi hermana por su constante soporte.

Al Dr. Francisco Venegas Martínez por su apoyo y amistad.

Al Dr. Manuel Ordorica Mellado por sus enseñanzas y dirección de este trabajo de investigación.

Al Dr. Edgar Ortiz Calixto por sus valiosos comentarios para mejorar este trabajo de investigación.

CONTENIDO

RESUMEN

Este trabajo presenta la metodología de martingalas como una alternativa al método de ecuaciones diferenciales parciales para desarrollar el modelo de Black-Scholes y así obtener soluciones de forma cerrada para la valuación de productos derivados, en particular para opciones europeas sobre acciones que no pagan dividendos. El modelo de Black-Scholes describe que el comportamiento de los precios de los activos financieros es un modelo en tiempo continuo; está formado por un activo con riesgo (una acción) y un activo libre de riesgo (una inversión inicial en el mercado de dinero). Los conceptos fundamentales de probabilidad avanzada y cálculo estocástico desempeñan un papel importante en el desarrollo del método en cuanto a la valuación de productos derivados. El método es extendido para opciones europeas sobre acciones que pagan dividendos continuamente, futuros de bienes, futuros de divisas y para acciones cuando la tasa de interés se comporta de manera aleatoria.

INTRODUCCION

El crecimiento exponencial de los productos derivados en los últimos años se ha dado como respuesta a los incrementos en la volatilidad que sufren las principales variables económicas financieras tales como los tipos de cambio, las tasas de interés y los *commodities* en los mercados financieros. Tal situación ha creado gran incertidumbre en los resultados de los proyectos tanto de inversión como de financiamiento haciendo esencial la búsqueda de mecanismos de cobertura que permitan neutralizar los diferentes tipos de riesgos financieros.

De ahí que en el mundo de las finanzas modernas, la administración de riesgos y los productos derivados se han convertido en uno de los temas más controvertidos y significativos para las instituciones financieras, corporaciones e inversionistas de los noventa. El enorme crecimiento de los mercados financieros globales, la explosión de nuevos instrumentos financieros, la evolución en los productos derivados y los avances tecnológicos en computación y comunicaciones se han combinado para crear oportunidades reales y prácticas para diversificar la exposición a los riesgos financieros tradicionales. Sin embargo, la sofisticación y complejidad de los nuevos instrumentos financieros traen consigo la exposición a riesgos cada vez más complejos, que si no son completamente entendidos y además si no se tienen los modelos sofisticados de valuación que permitan estructurar instrumentos financieros de primas justas pueden crear pérdidas significativas en los negocios.

La valuación consiste en asignarle un precio justo al instrumento en cualquier momento del tiempo. En la actualidad existen varias metodologías para valuar productos derivados. Todas ellas tienen supuestos, tanto financieros como matemáticos o estadísticos, lo que tiene como consecuencia el hecho de que algunos métodos tengan ventajas o desventajas frente a otros. El primer modelo que se utilizo para valuar productos derivados fue establecida por Fisher Black y Myron Scholes y extendida por Robert Merton en 1973. Este modelo se derivo al resolver una ecuación diferencial parcial con sus condiciones de frontera mediante la construcción de un portafolio libre de riesgo que esta formado por una opción y activo financiero (una acción).

En este sentido, el objetivo del presente trabajo de investigación es aplicar el método de martingalas para desarrollar el modelo de Black-Scholes y así obtener soluciones de forma cerrada para la valuación de productos derivados de una manera más precisa y sencilla utilizando herramientas matemáticas avanzadas de probabilidad, cálculo estocástico y además asumiendo el modelo de precios de Black-Scholes. Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 1, se presentan los antecedentes de los productos derivados. En la sección 2, se estudian las herramientas matemáticas que nos permitirá el desarrollo de los modelos de valuación. En la sección 3, se ilustra el método de martingalas propuesto para la modelación de productos derivados. En la sección 4, se extiende el modelo propuesto a fin de incluir productos derivados sobre acciones que pagan dividendos continuamente, futuros de bienes, futuros de divisas y para acciones cuando las tasa de interés es estocástica. Finalmente en la sección 5, se resumen los principales resultados de la investigación, se destacan las limitaciones y ventajas del método empleado y, por último se mencionan algunas líneas de investigación futura.

1. ANTECEDENTES

En esta sección se presenta una breve descripción de las opciones financieras que nos permitirá diferenciar las características y relaciones entre opciones de compra-venta de los principales contratos que existen en los mercados financieros, así como los factores y supuestos para la determinación de los precios de las mismas.

1.1 Opciones Financieras

La generación de portafolios con un balance adecuado entre riesgo y rendimiento es una tarea fundamental de la administración de riesgos. Una clase importante de instrumentos que actúan como seguros contra contingencias financieras son las opciones. En un ambiente de extrema volatilidad, estos instrumentos proporcionan al inversionista un mecanismo para inmunizar el portafolio contra fluctuaciones adversas en los mercados financieros con bajos costos de transacción.

El surgimiento y crecimiento de las opciones en los mercados financieros está marcado por varias fechas importantes: En 1973, se bursatilizan opciones sobre acciones en el Chicago Board of Trade (CBOT). En el mismo año, se presenta un avance teórico importante con la aparición de la fórmula de Black y Scholes. En 1979, debido a un cambio de estrategia de la Reserva Federal de los Estados Unidos de Norte América se genero un nivel alto de volatilidad en los mercados financieros, los agentes se vieron en la necesidad de buscar nuevas técnicas financieras para contrarrestar su exposición al riesgo. Los inversionistas observaron que el empleo de las opciones reducía en forma eficiente la exposición al riesgo mercado.

Una opción es un producto derivado que por el pago de una prima da a su tenedor (comprador) el derecho, más no la obligación, de comprar o vender el activo subyacente (bienes, acciones, índices bursátiles, divisas, futuros, tasas de interés, etc.) a un precio determinado, llamado precio de ejercicio durante la vigencia del contrato y hasta la fecha de vencimiento. La contraparte, el emisor, de estos títulos tiene la obligación de vender o comprar el activo subyacente. En resumen, la utilidad de estos instrumentos consiste en asegurar un bien o servicio a través del pago de una prima cuyo monto dependerá de las probabilidades de que el bien o servicio experimente un cambio desfavorable para el interesado. Si esto ocurre, el interesado pierde únicamente el valor de la prima. En un contrato de opción se especifican cinco elementos:

1. Tipo de opción.- opción de compra o de venta (americana o europea).

2. Activo subyacente.- es el activo (acciones, divisas, tasas de interés, petróleo, oro, etc.).

3. Cantidad del activo negociado.- es la cantidad, en unidades, del activo subyacente que está estipulado que se puede comprar o vender por cada contrato de opción.

4. Fecha de vencimiento.- es la fecha en que se vence el contrato. Las fechas de vencimiento se fijan de acuerdo con el calendario trimestral, de tal manera que existen vencimientos cada tres meses, siendo el máximo vencimiento de nueve meses.

5. Precio de ejercicio.- es el precio al que se podrá ejercer el contrato, es decir, el precio al que se podrá comprar o vender el activo subyacente, según la opción sea de compra o de venta.

Hay otro elemento determinado por el mercado que no figura estipulado en el contrato, que es el precio a pagar por la opción, precio que se fija en el mercado organizado de opciones, siguiendo la ley de la oferta y la demanda. Este precio recibe el nombre de prima.

Es importante observar que en los contratos de opciones sólo se obliga al vendedor, mientras que el comprador tiene el derecho (opción) de ejercer el contrato, pero no está obligado a ello. Esto permite al poseedor de una opción, no sólo a cubrirse ante posibles pérdidas sino también la posibilidad de obtener un beneficio en caso de que la evolución del precio del activo asociado a la opción sea favorable.

Por otro lado, las opciones, al igual que los futuros son contratos estandarizados, permitiendo así que las transacciones se efectúen en mercados abiertos, organizados y con garantías de su cumplimiento. Esta característica genera liquidez para llevar a cabo distintas combinaciones y estrategias para ampliar y diversificar las carteras de inversión. A diferencia de los mercados de futuros, en las opciones, el comprador del contrato sólo está obligado al pago de una prima (precio de la opción) que recibirá el vendedor, quién aportará el margen inicial y de mantenimiento según la evolución del mercado.

La inversión en opciones también es una alternativa para especular (obtener ganancias extraordinarias asumiendo riesgos sobre tendencias inesperadas). Es también posible realizar operaciones de arbitraje aprovechando desequilibrios temporales en la prima de las opciones.

Las opciones financieras más comunes son las que tienen como subyacente a los títulos de capital (acciones), los índices de mercados accionarios, las divisas extranjeras, títulos de deuda pública y futuros. Se distinguen entre sí con base en tres criterios: tipo, clase y serie. El tipo nos indica si la opción es de compra (call) o de venta (put). Todas las opciones que sean del mismo tipo y que tengan una fecha de vencimiento común determinan una clase. Las opciones que pertenezcan a una clase y que tengan el mismo precio formarán una serie. En las opciones se presentan dos posiciones, las cuales nos indican la postura que presenta cada una con respecto al contrato:

Posición larga.- es la postura que presenta el comprador (quien paga la prima) de una opción, sin importar si ésta es un opción de compra o de venta.

Posición corta.- es la postura que presenta el emisor o vendedor de la opción (recibe la prima) de compra o de venta.

Una vez firmado un contrato de opciones, existen tres formas de cerrarlo:

a. El comprador ejerce su derecho.

b. El comprador permite que pase la fecha de vencimiento sin ejercer su derecho, dándose por terminado el contrato.

c. El comprador puede vender la opción a un tercero, o el emisor puede recomprar la opción al comprador, es decir, la opción se liquida.

1.1.1 Opciones de Compra (Call Options)

Una opción de compra otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de comprar al emisor el activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha predeterminada o antes. El comprador tiene que pagar una prima al emisor en el momento de la realización del contrato. El contrato debe especificar entre otras cosas:

1. Concepto a negociar (activo subyacente).
2. La cantidad a negociar.
3. El precio de compra.
4. La fecha de vencimiento.

Este tipo de opciones presentan para el comprador ganancias ilimitadas al mismo tiempo que sus pérdidas se ven reducidas al valor de la prima que paga al firmar el contrato. En cambio el emisor presenta como ganancia máxima el valor de la prima y sus pérdidas son ilimitadas.

1.1.2 Opciones de Venta (Put Options)

Una opción de venta otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de vender el activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha preestablecida o antes. El contrato especifica los mismos puntos que el de opciones de compra. En estos contratos al igual que en los de compra el emisor tiene una ganancia reducida a la prima y pérdidas ilimitadas, la situación del comprador es la contraria, es decir, presenta pérdidas reducidas a la prima y ganancias ilimitadas.

1.2 Opciones Americanas y Europeas

Las opciones también se pueden clasificar de acuerdo al tiempo en que se puede ejercer el derecho que ellas otorgan, siendo estas:

1. Opciones americanas.- son aquellas en las que se puede ejercer el derecho a comprar o vender en cualquier fecha hasta el día de vencimiento, es decir, durante la vida de la opción.
2. Opciones europeas.- son aquellas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento.

La mayoría de los contratos negociados en todo el mundo se realizan mediante opciones americanas. Pero estas presentan una mayor dificultad para su valuación que las europeas, y por lo mismo las propiedades de las americanas se derivan y explican a través de las propiedades de las europeas. [1]

1.3 Opciones Dentro, Fuera y en el Dinero

Las opciones pueden clasificarse, dependiendo de la relación que exista entre el precio pactado de ejercicio y el precio de mercado de la siguiente manera:

1. Dentro del dinero (in-the-money).- cuando el precio de mercado excede el precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio para una de venta.
2. Fuera del dinero (out-of-the-money).- cuando sucede lo contrario, es decir, cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio de mercado es mayor al precio de ejercicio en una de venta.

[1] Para una descripción más detallada de los productos derivados, véase Hull (1997).

3. En el dinero (at-the-money).- esto se da cuando el precio de mercado y el precio de ejercicio son el mismo, se cumple tanto para opciones de compra, como para las de venta.

Esta clasificación determina el precio a pagar por comprar la opción, ya que las opciones que se encuentran dentro del dinero van a implicar necesariamente primas más altas, puesto que con estos contratos es muy probable que se logren ganancias si se ejercen al vencimiento, en cambio las opciones que se encuentran fuera del dinero implican primas muy bajas, ya que seguramente terminen sin ser ejercidas.

1.4 Liquidación en Efectivo y en Especie

Las opciones también pueden clasificarse según su forma de liquidación, es decir, la forma de cumplimiento del contrato por parte de los vendedores de opciones:

1. En especie.
2. En efectivo.

En los mercados, la liquidación de los contratos muy rara vez llegan a la fecha de expiración (aproximadamente el 2% de las operaciones). Generalmente, se realiza cancelando diferenciales entre el precio de ejercicio y el precio de mercado (en efectivo).

Finalmente, es conveniente destacar que existen cuatro posiciones básicas para un inversionista que está interesado en la negociación de opciones:

1. Posición larga en una opción de compra.- ésta es una posición que se beneficia con movimientos a la alza en los precios. Ya que sus ganancias aumentan en relación a lo que aumente el mercado.

2. Posición larga en una opción de venta.- ésta considera movimientos a la baja en los precios. En esta posición al contrario, las ganancias van en relación a una contracción en los precios del mercado.

3. Posición corta en una opción de compra.- con esta posición obtienen beneficios los inversionistas que consideran movimientos moderados a la baja y movimientos neutrales.

4. Posición corta en una opción de venta.- con ella se encuentran los inversionistas que consideran movimientos moderados a la alza y movimientos neutrales.

1.5 Valor Intrínseco y Valor en el Tiempo de las Opciones

La fijación del precio de la opciones se realiza en los mercados de acuerdo a su oferta y demanda. Varios factores intervienen en dicho proceso. Su dinámica depende del tiempo y de las variaciones del precio del subyacente en el mercado. De ahí que las opciones tienen un valor intrínseco y un valor en el tiempo. El valor intrínseco es el valor que tendría la opción si expirara inmediatamente tomando en cuenta el precio del activo subyacente en el mercado en efectivo. Concretamente, es la cantidad por la cual la opción se encuentra dentro del dinero. Para las opciones de compra es la diferencia entre el precio de mercado del subyacente y el precio de ejercicio, si la diferencia es positiva, o de lo contrario es simplemente cero (pues al no estar dentro del dinero la opción no tiene ningún valor para el comprador). Por lo tanto, su valor es $c = \text{Max}(S_T - K, 0)$. Para las opciones de venta es la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de mercado del subyacente, si la diferencia es positiva, o simplemente cero en cualquier otro caso (la opción no tiene valor para el comprador porque no se ejerce). Por lo tanto, su valor es $p = \text{Max}(K - S_T, 0)$.

El valor en el tiempo es la cantidad por la cual la prima o valor total de la acción excede el valor intrínseco. Este valor existe porque el precio del subyacente puede cambiar entre el presente y el vencimiento de la opción, existiendo por tanto el potencial de posibles beneficios. Esto es, el valor en el tiempo es la prima que los inversionistas están dispuestos a pagar por dicho potencial. De ahí que el valor en el tiempo sea igual a cero al vencimiento de la opción y el valor máximo de la opción que es ejercida es igual al valor intrínseco. En general, el valor en el tiempo se encuentra en su máximo valor cuando el precio del subyacente es igual al precio de ejercicio.

1.6 Relaciones entre Opciones de Compra-Venta (Paridad Call-Put)

Esta paridad es una relación que debe mantenerse para que no exista arbitraje. Considerando el caso de una opción europea al momento de su vencimiento, esta condición puede ser extendida para incluir el precio de ejercicio en la relación de equilibrio existente entre las opciones y su subyacente. A esta relación de equilibrio se le conoce como paridad de los precios entre opción de compra y opción de venta. Como una primera aproximación, sin tomar en cuenta el valor del dinero en el tiempo, el principio de la paridad de los precios de opciones de compra y venta, señala que en el caso de una opción europea que no paga dividendos, para que no exista arbitraje entre la compra del subyacente y las opciones de compra y de venta, al momento de su liquidación, el precio del subyacente menos el precio del ejercicio debe de ser igual al precio de la opción de compra menos el precio de la opción de venta, es decir

$$S_t - K = c(t, S_t) - p(t, S_t)$$

1.7 Factores para la Determinación de los Precios de las Opciones

Los factores de los cuales depende el valor de una opción se enumeran y explican muy brevemente a continuación:

1. Precio actual del bien subyacente. Es el determinante más importante. Cuanto mayor es el precio del activo subyacente, mayor es el precio de la opción de compra (mayor probabilidad de encontrarse dentro del dinero) y menor el de la opción de venta (menor posibilidad de encontrarse dentro del dinero).

2. Precio de ejercicio de la opción. Cuánto más alto, más barata debe ser la opción de compra y más cara debe ser la opción de venta. Sin embargo, cabe recordar que el precio de una opción de compra no puede ser negativo aún si el precio de ejercicio es muy alto. Mientras la opción tenga aún cierta vigencia, existe la posibilidad de que el precio del subyacente exceda al precio de ejercicio antes de su vencimiento y la posición tiene algún valor en el tiempo. Análogamente, en el caso de una opción de venta, su valor intrínseco no puede ser negativo, aún si el precio de ejercicio es muy bajo. Y mientras la opción de venta tenga vigencia, existe la posibilidad de que el precio del subyacente descienda más allá del precio de ejercicio y por tanto la opción tiene al menos cierto valor en el tiempo.

3. Tasa de interés libre de riesgo. Es el costo de oportunidad de la inversión en una opción, a medida que la tasa de interés libre de riesgo se incrementa, el precio de las opciones de compra aumenta y el precio de las opciones de venta disminuye. Este impacto no es tan evidente. Mientras más altas sean las tasas de interés, más bajo es el precio de ejercicio de una opción de compra. Así, las tasas de interés producen el mismo efecto que bajar el precio de ejercicio de la opción de compra.

4. Dividendos. Los pagos de dividendos en efectivo también alteran el precio de las opciones. En relación a las opciones sobre acciones, si se espera que la acción reparta altos dividendos, el valor de la opción de compra disminuye y el valor de la opción de

venta aumenta. Esto debido a que el precio del subyacente desciende en el mercado en una cantidad similar al pago de dividendos.

5. Tiempo remanente de vigencia. Mientras mayor es el plazo que aún tiene de vigencia la opción, mayor es la posibilidad de ejercer, por lo tanto mayor será el precio de las opciones, tanto de compra como de venta.
6. Volatilidad del activo subyacente. La volatilidad se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente. Los incrementos en la volatilidad del precio del bien subyacente siempre tienen el efecto de que aumenta el precio de las opciones, sean estas de compra o venta, americanas o europeas, porque aumentan la posibilidad de que el precio del bien subyacente rebase el precio de ejercicio provocando que la opción sea ejercida.

Los cuatro primeros factores están relacionados con el valor intrínseco de la opción, en tanto que los dos últimos con el valor en el tiempo de la opción. Estas variables interactúan entre sí para determinar el valor de las opciones.

En resumen se puede decir que el valor de una opción de compra generalmente aumenta cuando el precio actual de las acciones, el vencimiento, la volatilidad y el tipo de interés libre de riesgo aumentan. El valor de una opción de compra disminuye cuando aumentan el precio de ejercicio y los dividendos esperados. El valor de una opción de venta generalmente aumenta cuando el precio de ejercicio, el tiempo de expiración, la volatilidad, y los dividendos esperados aumentan. El valor de una opción de venta disminuye cuando el precio actual de las acciones y el tipo de interés libre de riesgo aumentan.

1.8 Opciones sobre Acciones que Pagan Dividendos Continuamente

Considere una acción que paga continuamente una tasa de dividendo (constante). Entonces el precio de una acción que paga este tipo de dividendo es el precio de la acción sin pago de dividendo descontado a dicha tasa de dividendos.

1.9 Opciones sobre Indices Accionarios

Muchas de las bolsas del mundo cotizan opciones sobre índices accionarios. La Bolsa Mexicana de Valores no es la excepción y cotiza Warrants sobre el Indice de Precios y Cotizaciones. El mecanismo y la definición es como una opción sobre una acción, la única diferencia es que el subyacente es el índice bursátil. En la valuación de las opciones sobre índices accionarios el supuesto que se hace es el de promediar los dividendos que pagan las acciones que componen el índice (canasta de acciones). Con esto se aplica la fórmula de Black-Scholes adaptada para las opciones sobre acciones que pagan un dividendo conocido.

1.10 Opciones sobre Divisas

Las opciones sobre divisas pueden ser tratadas de manera análoga a las opciones sobre acciones, la única diferencia es que el activo subyacente es una divisa. Este instrumento tiene la propiedad de transferir el riesgo cambiario entre los participantes del mercado ofreciéndoles una amplia gama de posibilidades de rendimiento además de permitirles crear una cobertura contra el riesgo. Una opción sobre divisas proporciona una especie de seguro cambiario mientras que una cobertura (o un forward) cierra la operación futura a un tipo de cambio fijado el día de la adquisición del contrato. Por supuesto, el seguro no es gratuito y se tiene que pagar una prima por la opción, mientras que en el forward no existe tal prima.

1.11 Opciones sobre Futuros

Una opción sobre un futuro es una opción donde el subyacente es un futuro. Como en las otras opciones el comprador de la opción tiene el derecho, mas no la obligación, de ejercer la opción. Así, con una opción de compra puede ejercer la opción comprando un contrato de futuros al precio de ejercicio (es decir, tomar una posición larga en los futuros al precio de ejercicio), mientras que el comprador de la opción de venta puede ejercer vendiendo el contrato de futuros al precio de ejercicio. Todos los conceptos típicos de las opciones son válidos, por ejemplo, el tenedor de la opción de compra ejercerá el derecho de comprar un contrato de futuros sólo si eso le representa una ganancia o le reduce una pérdida.

Las opciones sobre los futuros tienen los siguientes beneficios sobre los contratos de futuros:

1. Las opciones le ponen un límite a la pérdida mientras que los futuros no lo hacen.
2. Las opciones sobre futuros le permiten a los productores de mercancías cubrir tanto el riesgo precio como el riesgo de cantidad mientras que los futuros permiten solo la cobertura del riesgo precio. [2]

[2] Los conceptos de este capítulo retoma los principales aspectos de Hull (1997).

1.12 Modelo de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes es probablemente el más conocido y aplicado de los modelos de valuación de las finanzas. Inicialmente fue desarrollado en 1973 por Fisher Black y Myron Scholes. El modelo fue formulado para valuar opciones europeas para acciones sin pago de dividendos; trabajos posteriores de otros investigadores financieros han refinado el modelo y lo han hecho aplicable para el caso de opciones americanas, opciones con pago de dividendos por parte del activo subyacente, y opciones sobre otros instrumentos, como los futuros, divisas, entre otros. El método establece la siguiente fórmula para obtener el valor de las opciones europeas de compra. En la derivación de la fórmula original se hicieron los siguientes supuestos:

1. La tasa de interés a todos los plazos es constante.
2. El intercambio (o negociación) de estos instrumentos es continuo
3. Los costos de transacción e impuestos son cero.
4. La acción no paga dividendos.
5. Un inversionista puede ejercer la opción sólo al tiempo de vencimiento (opción tipo europea).
6. La volatilidad de la acción es conocida y no cambia durante la vida de la opción. [3]

Es de esperar que en la realidad varios de estos supuestos no se cumplan. No obstante, la fórmula arroja buenos resultados en la práctica. El supuesto más importante en el modelo es que los precios de los activos subyacentes son continuos lo cual descarta las discontinuidades en el patrón muestral, tales como los saltos que invalidan el argumento de cobertura continua en el modelo Black-Scholes. También este supuesto descarta una reversión de la media en el precio del activo subyacente, es decir, la convergencia hacia un valor fijo. Por lo tanto, el modelo de Black-Scholes no es estrictamente aplicable al mercado de renta fija, donde los precios de los bonos convergen hacia valores nominales.

[3] Black, F. and M. Scholes, (1973), The Princing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81, pp. 637-654.

Por otra parte, en el caso de subyacentes que no distribuyen dividendos u otros pagos en efectivo, el modelo de Black-Scholes es aplicable para el caso de opciones americanas. Debido a que una opción americana puede ser ejercida en cualquier momento su precio es mayor que el de una opción europea de igual precio de ejercicio y vencimiento; a la diferencia entre el precio de la opción americana y la opción europea se le denomina prima por derecho de ejercicio prematuro. En el caso de una opción americana cuyo subyacente no paga dividendos, no es recomendable que se ejerza antes del vencimiento. Si una opción europea está dentro del dinero su valor se aproxima al valor intrínseco.

El modelo de Black-Scholes continua siendo aplicable para el caso de opciones americanas de compra que pagan dividendos. Si la opción se ejerce antes de la fecha de vencimiento, se obtiene el valor de la opción de compra usando el tiempo correspondiente a la fecha de ejercicio. Es posible ejercer prematuramente una opción americana si la opción se encuentra profundamente dentro del dinero y el pago de dividendos es alto.

2. HERRAMIENTAS MATEMATICAS

En esta sección se establecen los fundamentos matemáticos esenciales que permitirán el desarrollo de los modelos de valuación para los productos derivados. En la actualidad, la matemática utilizada para modelar instrumentos financieros ha alcanzado un alto grado de sofisticación debido a la naturaleza como se presentan los movimientos en los mercados financieros por lo que será necesario recurrir a la teoría de probabilidades avanzada y al cálculo estocástico.

2.1 Información y Filtraciones

La información actual que se maneja en los mercados financieros es claramente el determinante más importante para tener éxito en cualquier transacción financiera, ya que los inversionistas toman sus decisiones en base a la información disponible, es decir, obtienen información, la organizan y la analizan de forma rápida para reaccionar contra los cambios inesperados de las condiciones del mercado y así detectar mejores oportunidades de inversión. Sin embargo, con el transcurso del tiempo, la información nueva estará disponible para todos los participantes del mercado.

En esta investigación se considera una economía de operación continua con un intervalo $[0, T]$ para una $T > 0$ fija. La incertidumbre en los mercados financieros se captura mediante la introducción de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ donde Ω es un espacio muestral, $\mathcal{F}$ es una σ-algebra que representa a los eventos medibles y P es la medida de probabilidad.

Definición 2.1.1. El conjunto de posibles resultados se denota por Ω y es llamado espacio muestral.

Definición 2.1.2. Una σ-algebra $\mathcal{F}$ es un subconjunto de Ω si satisface las siguientes condiciones:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

2) $\mathrm{A} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathrm{A}^c \in \mathcal{F}$.

3) $(\mathrm{A}_n)_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \in \mathcal{F}$.

Definición 2.1.3. Una medida de probabilidad P es una función $P : \mathcal{F} \to R$ tal que

1) $P(\Omega) = 1$.

2) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad A \in \mathcal{F}$.

3) Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ mutuamente exclusivos (i.e. $A_i \cap A_j \quad \forall i \neq j$) entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Definición 2.1.4. La terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se conoce como espacio de probabilidad y $(\Omega, \mathcal{F})$ se conoce como espacio medible.

Cuando una función es medible respecto a una σ-algebra significa que, dado un espacio de probabilidad, es posible identificar el evento al que corresponde cada subconjunto en la imagen de la función.

Note que la información evoluciona con el tiempo de acuerdo con el aumento de está misma por lo que se puede definir un submodelo que describa como la información de los precios de los instrumentos financieros es revelada a los inversionistas.

Definición 2.1.5. Se dice que un conjunto $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ de σ-algebras en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ es una filtración si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para toda $0 \leq t < T$.

Este concepto será de gran utilidad para reflejar el uso de la información que permitirá valuar el proceso en un determinado tiempo, puesto que si se incluye el conjunto de información hasta el momento actual, la variable en estudio será una constante tal como sucede con el movimiento del activo subyacente en el tiempo.

2.2 Procesos Estocásticos

Un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que toma valores en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ denominado espacio de estados.

Una trayectoria del proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es la función que se obtiene al fijar ω, es decir, la función $X(\cdot, \omega)$ la cual se conoce también como una realización del proceso. Notese que si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es proceso estocástico con parámetro continuo $X(\cdot, \omega)$ puede o no ser continuo como función de t.

Definición 2.2.1. Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ y sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración respecto a $\mathcal{F}$, entonces se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es adoptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si para toda $t \geq 0$, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es $\mathcal{F}_t$-medible.

Claramente se puede afirmar que cuando el proceso estocástico de cualquier instrumento financiero es adoptado a la filtración como un conjunto de información hasta el tiempo t, entonces se puede asegurar que todos los inversionistas tienen conocimiento completo de los cambios en el instrumento tanto en el presente como en el pasado.

2.3 Martingalas

Para el desarrollo de la teoría financiera son necesarios dos conceptos básicos: riesgo y tiempo. Es por ello, que el estudio de la teoría de martingalas constituye una herramienta clave en las finanzas modernas, ya que en ellas va implícita el concepto de no arbitraje que permite el desarrollo de multiples modelos financieros.

Las martingalas están basadas en la idea de un juego justo, en el cual el conocimiento del pasado no permite al jugador mejorar su riqueza esperada.

Definición 2.3.1. Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es una martingala con respecto al conjunto de información $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si

1) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es adoptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$

2) $E[|X_t|] < \infty$ para toda $t \geq 0$

3) $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ para toda $0 \leq s \leq t$

la última propiedad de la definición, en terminos financieros, puede interpretarse como que los cambios futuros en los precios de los instrumentos financieros son totalmente impredecibles, debido a que en un determinado tiempo la información más reciente es la que únicamente importa, por lo que el incremento esperado es cero.

Es importante hacer énfasis que una martingala se define siempre respecto a una filtración (conjunto de información) y respecto a una medida de probabilidad. Por lo que, si se cambia el contenido de la información o la probabilidad asociada al proceso, puede ser que este proceso pierda la característica de martingala. El caso inverso también es válido, es decir, dado un proceso que no se comporta como martingala, se puede efectuar un cambio en la medida de probabilidad y convertirlo en una martingala.

Sin embargo, la mayoría de los instrumentos financieros no se comportan como martingalas debido a que no son completamente impredecibles, por ejemplo, en los mercados financieros se espera que los precios de los bonos y las acciones aumenten con el tiempo mientras que en el caso de los productos derivados (futuros y opciones europeas) se espera que disminuyan.

Definición 2.3.2. Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es una submartingala con respecto al conjunto de información $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si

1) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es adoptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$
2) $E[|X_t|] < \infty$ para toda $t \geq 0$
3) $E[X_t|\mathcal{F}_s] > X_s$ para toda $0 \leq s \leq t$.

Definición 2.3.3. Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es una supermartingala con respecto al conjunto de información $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si

1) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es adoptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$
2) $E[|X_t|] < \infty$ para toda $t \geq 0$
3) $E[X_t|\mathcal{F}_s] < X_s$ para toda $0 \leq s \leq t$.

se puede concluir de las definiciones anteriores, que un proceso estocástico que aumenta en el promedio es una submartingala mientras que un proceso que disminuye en el promedio es una supermartingala. [1]

2.4 Importancia de las Martingalas para los Modelos Financieros

Las martingalas son en sí la esencia de la ausencia de arbitraje. Esto queda claro si definimos a una oportunidad de arbitraje como una operación en la que se comienza con un cierto valor especifico para un portafolio autofinanciable, y al cerrar posiciones después de algún tiempo se termina con certeza con un valor mayor al original. En este caso se tendría una submartingala mientras que el caso inverso (supermartingala) también sería una oportunidad de arbitraje puesto que le serviría a un inversionista que tuviera un portafolio con una posición corta. Por lo que la única manera de no tener ganancias o pérdidas aseguradas es que se cumpla la condición de martingala.

Este es un resultado que no es muy trivial y además muy importante para la valuación de productos derivados. Debido a que si se puede encontrar una medida de probabilidad equivalente de tal manera que los precios de los bonos y las acciones descontados por la

[1] Neftci, Salih N., (1996), An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press.

tasa libre de riesgo se comporten como una martingala, entonces la existencia de la nueva medida de probabilidad neutral al riesgo establece la condición de no arbitraje.

2.5 Movimiento Browniano Estándar

El ejemplo más importante de una martingala en tiempo continuo es el movimiento Browniano, el cual fue estudiado por primera vez por Robert Brown en 1827 para describir el movimiento de partículas en un fluido. Pero el primer modelo que se aplico a las finanzas fue propuesto por Louis Bachelier en 1900 cuando describió el movimiento del precio de las acciones en la bolsa de París, sensenta años antes de que el desarrollo de las teorías de mercados eficientes tuvieran auge y donde utiliza el concepto de caminata aleatoria y martingala.

Sin embargo, la formulación matemática concisa fue desarrollada por Wiener en 1918 debido a que una gran cantidad de resultados fueron obtenidos de manera huerística por Bachelier en 1900. Es por ello, que también se le denomina proceso de Wiener y se denotará por W_t.

Un algoritmo para construir el movimiento Browniano a partir de caminatas aleatorias es el siguiente:

1. A partir de un tiempo $t_0 = 0$, se toma un tiempo arbitrario fijo t_1, tal que $t_1 - t_0 = \Delta t$.
2. Se define una caminata aleatoria $W(t)$ que representa los precios de una acción y ΔW como el cambio en el precio y donde los precios de la acción pueden aumentar con probabilidad p y disminuir con probabilidad $1-p$ en un periodo de tiempo Δt. Entonces podemos definir una variable aleatoria que represente el cambio en el precio como,

$$\Delta\xi(t) = \begin{cases} +\Delta W & \text{con probabilidad} \quad p \\ -\Delta W & \text{con probabilidad} \quad 1-p. \end{cases}$$

y donde la evolución del precio de la acción esta dada por:

$$W(t) = W(t - \Delta t) + \Delta\xi(t).$$

El valor $W(t)$ para varios periodos de tiempo

$$W(0), W(\Delta t), W(2\Delta t), ..., W(t - \Delta t), W(t), ...$$

denota un proceso estocástico.

Entonces para $t_1 = t_0 + \Delta t$, se tiene que

$$W(t_1) = W(t_1 - \Delta t) + \Delta\xi_1 \quad \text{o} \quad W(t_1) = W(t_0) + \Delta\xi_1$$

y donde W puede tomar dos valores en t_1

$$W(t_1) = \begin{cases} W(t_0) + \Delta W & \text{con probabilidad} \quad p \\ W(t_0) - \Delta W & \text{con probabilidad} \quad 1 - p. \end{cases}$$

Para $t_2 = t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t$ se tiene que

$$W(t_2) = W(t_2 - \Delta t) + \Delta\xi_2 \quad \text{o} \quad W(t_2) = W(t_1) + \Delta\xi_2 = W(t_0) + \Delta\xi_1 + \Delta\xi_2$$

donde

$$W(t_2) = \begin{cases} W(t_1) + \Delta W & \text{con probabilidad} \quad p \\ W(t_1) - \Delta W & \text{con probabilidad} \quad 1 - p. \end{cases}$$

o

$$W(t_2) = \begin{cases} W(t_0) + 2\Delta W & \text{con probabilidad} \quad p^2 \\ W(t_0) & \text{con probabilidad} \quad 2p(1-p) \\ W(t_0) - 2\Delta W & \text{con probabilidad} \quad (1-p)^2. \end{cases}$$

Si se generaliza para $t_n = t_{n-1} + \Delta t = t_0 + n\Delta t$ se tiene que

$$W(t_n) = W(t_n - \Delta t) + \Delta\xi_n \quad \text{o} \quad W(t_n) = W(t_0) + \sum_{i=0}^{n} \Delta\xi_i$$

Por lo tanto

$$W(t_n) - W(t_0) = \sum_{i=0}^{n} \Delta\xi_i$$

donde $\Delta\xi_i$ es una sucesión de variables aleatorias Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas.

Ahora si $W(t_n)$ es un proceso estocástico de Bernoulli entonces la probabilidad de k éxitos obtenidos después de n intentos es una distribución binomial definida como:

$$\mathrm{P}[W(t_n) = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, ..., n$$

con $E[W(t_n)] = np$ y $\mathrm{Var}[W(t_n)] = npq$.

3. Si después de realizar n intentos se han obtenido k éxitos, para un intervalo más pequeño $(n-1)\Delta t \leq t \leq n\Delta t$, se habrán dado k pasos de magnitud $+\Delta W$ y $(n-k)$ pasos de magnitud $-\Delta W$.

$$W(t_n) = k\Delta W - (n-k)\Delta W = (2k-n)\Delta W$$

haciendo $r = 2k - n$ se observa que $W(t_n)$ puede tomar los valores

$$r\Delta W = n\Delta W, (n-2)\Delta W, ..., -n\Delta W.$$

Claramente, $W(t_n) = r\Delta W$ coincide con k éxitos en n intentos con $k = \frac{r+n}{2}$.

Por lo tanto

$$\mathrm{P}[W(t_n) = r\Delta W] = \mathrm{P}\left[\frac{r+n}{2} \text{ éxitos}\right] = \binom{n}{\frac{r+n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r+n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-r}{2}}$$

con $E[W(t_n)] = 0$ y $\mathrm{Var}[W(t_n)] = \frac{t}{\Delta t}(\Delta W)^2$, ya que las $\Delta\xi_i$ son variables independientes con valores $\pm\Delta W$.

Ahora, con base en el teorema del límite central, para n grande la distribución tiende hacia la fórmula de De Moivre-Laplace

$$\mathrm{P}[k \text{ éxitos}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(k-np)^2}{npq}}$$

con $p = q = \frac{1}{2}$ y $k = \frac{r+n}{2}$

$$\mathrm{P}[W(t_n) = r\Delta W] = \frac{1}{\sqrt{(n/2)\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2n}}$$

Si $\Delta W \to 0$ y $\Delta t \to 0$ conservado t constante, la varianza de $W(t_n)$, sigue permaneciendo finita y diferente de cero.

Suponiendo que

$$(\Delta W)^2 = \Delta t$$

puede definirse el proceso

$$W(t) = \lim_{\Delta t \to 0} W(t_n)$$

este proceso, con $E[W(t)] = 0$ y $\mathrm{Var}[W(t)] = t$, es un movimiento Browniano estándar o proceso de Wiener.

Tomando en cuenta que $w = r\Delta W$ y $t = n\Delta t$, cuando $\Delta t \to 0$ y $\Delta W \to 0$ permaneciendo constante w y t la densidad de probabilidad asociada a este proceso es también de tipo normal y se define como

$$f_W(w,t) \approx \frac{1}{2\Delta W}\mathrm{P}[W(t_n) = r\Delta W] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{w^2}{2t}}.$$

Definición 2.5.1. Un proceso estocástico $\{W_t\}_{t\geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es un movimiento Browniano estándar si:

a) $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso adoptado a $\mathcal{F}_t$

b) $W_0 = 0$ y W_t es continuo en t

c) Para $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ tiene incrementos independiente de $\mathcal{F}_t$

d) Para $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ se distribuye como una variable aleatoria normal con media 0 y varianza $t - s$.

Proposición 2.5.2. Si $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar entonces es una martingala.

Demostración.

Sea $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ respecto a la filtración $\mathcal{F}_t$.

1) Por definición $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso adaptado a $\mathcal{F}_t$.

2) Por demostrar que $E[|W_t|]$ es finita.

Para un tiempo fijo $t > 0$, W_t es una variable aleatoria que se distribuye $N(0,t)$.

Por lo tanto

$$E[|W_t|] < \infty.$$

3) Por demostrar que W_t es una martingala, es decir, $E[W_t|\mathcal{F}_s] = W_s$ para $0 \leq s \leq t$, entonces

$$\begin{aligned} E[W_t|\mathcal{F}_s] &= E[W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s] = E[(W_t - W_s) + W_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] + W_s = E[W_{t-s}|\mathcal{F}_s] + W_s \end{aligned}$$

Dado que W_s es $\mathcal{F}_s$-medible. Además W_{t-s} tiene incrementos independientes de $\mathcal{F}_s$ y se distribuye $N(0,t)$, así que

$$E[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = E[W_{t-s}|\mathcal{F}_s] = 0.$$

Entonces

$$E[W_t|\mathcal{F}_s] = W_s \quad \forall s \leq t.$$

Por lo tanto

$$\{W_t\}_{t\geq 0} \text{ es una martingala.}$$

Proposición 2.5.3. Si $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar entonces $W_t^2 - t$ es una martingala.

Demostración.

Por demostrar que $W_t^2 - t$ es una martingala, es decir, $E\left[W_t^2 - t\middle|\mathcal{F}_s\right] = W_s^2 - s \ \forall s \geq t$.

$$\begin{aligned}
E\left[W_t^2 - W_s^2\middle|\mathcal{F}_s\right] &= E\left[W_t^2 - 2W_tW_s + W_s^2 - W_s^2 - W_s^2 + 2W_tW_s\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[(W_t - W_s)^2 + 2W_tW_s - 2W_s^2\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[(W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[(W_t - W_s)^2\middle|\mathcal{F}_s\right] + 2W_sE\left[(W_t - W_s)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[W_{t-s}^2\middle|\mathcal{F}_s\right] + 2W_sE\left[W_{t-s}\middle|\mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

puesto que $W_t - W_s$ tiene incrementos independientes respecto a $\mathcal{F}_s$ y debido a que el movimiento Browniano estándar es estacionario entonces

$$E\left[(W_t - W_s)^2\middle|\mathcal{F}_s\right] = E\left[W_{t-s}^2\middle|\mathcal{F}_s\right] = t - s$$

es decir,

$$E\left[W_t^2 - W_s^2\middle|\mathcal{F}_s\right] = E\left[W_t^2\middle|\mathcal{F}_s\right] - W_s^2 = t - s$$

entonces

$$E\left[W_t^2 - t\middle|\mathcal{F}_s\right] = W_s^2 - s \quad \forall s \leq t.$$

Por lo tanto

$$W_t^2 - t \text{ es una martingala.}$$

Proposición 2.5.4. Si $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar entonces $e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ es una martingala.

Demostración.

Por demostrar que $e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ es una martingala, es decir,

$$E\left[e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}\middle|\mathcal{F}_s\right] = e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s} \quad \forall s \leq t.$$

$$\begin{aligned}
E\left[e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}\middle|\mathcal{F}_s\right] &= E\left[e^{\sigma W_t - \sigma W_s + \sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[e^{\sigma(W_t - W_s) + \sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} E\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} E\left[e^{\sigma W_{t-s}}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} E\left[e^{\sigma W_{t-s}}\right].
\end{aligned}$$

$W_t - W_s$ se distribuye $N(0, t-s)$, es decir, si $Y \sim N(0,1)$ entonces $\sqrt{t-s}Y = W_{t-s}$ se distribuye N(0,1).

$$\begin{aligned}
E\left[e^{\sigma W_{t-s}}\right] &= E\left[e^{\sigma Y\sqrt{t-s}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma y\sqrt{t-s}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y^2 - 2\sigma y\sqrt{t-s}\right)} dy \\
&= e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y^2 - 2\sigma y\sqrt{t-s} + (t-s)\sigma^2\right)} dy \\
&= e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y^2 - \sigma\sqrt{t-s}\right)^2} dy \\
&= e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2}
\end{aligned}$$

donde

$$z = y - \sigma\sqrt{t-s}.$$

En consecuencia,

$$E\left[e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}\right] = e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} . e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2} = e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s} \quad \forall s \leq t.$$

Por lo tanto

$$e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \text{ es una martingala.}$$

2.6 Integral Estocástica

En la práctica, la integral estocástica se usa con menor frecuencia que las ecuaciones diferenciales estocásticas, es decir, casi nunca se utilizan de forma directa para valuar productos derivados. Sin embargo, es importante entender el concepto ya que es una manera de definir sumas de incrementos aleatorios impredecibles y no numerables.

Supongamos que $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano estándar definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ para $t \in [0, T]$, es decir, $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es adoptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Definición 2.6.1. Un proceso estocástico $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso elemental si es de la siguiente forma:

$$H_t(w) = \sum_{i=1}^{N} H_i(w) 1_{(t_i, t_{i-1}]}$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ y H_i es una variable aleatoria $\mathcal{F}_{t_i}$-medible y acotada.

Definición 2.6.2. Si $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso elemental entonces la integral estocástica de H_t con respecto al movimiento Browniano estándar $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es el proceso definido por:

$$\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s = \sum_{i=1}^{k} H_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + H_k(W_t - W_{t_k}) \quad \text{si} \quad t \in (t_k, t_{k-1}].$$

Claramente se puede observar que la integral estocástica de un proceso elemental es una función continua, esto debido a que $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso continuo. [2]

En el caso de que el proceso $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ sea un proceso constante λ, entonces de acuerdo con la definición se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s &= \sum_{i=1}^{k} \lambda(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \lambda(W_t - W_{t_k}) \\ &= \lambda(W_t - W_0).\end{aligned}$$

[2] Lamberton, D. and B. Lapeyre, (1996), Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, 1a. ed., Chapman & Hall.

Proposición 2.6.3. Si $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso elemental, entonces $\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$ es una función continua en t y además es una $\mathcal{F}_t$-martingala.

Demostración.

Para $t \in (t_k, t_{k-1}]$

$$\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s = \sum_{i=1}^{k} H_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + H_k(W_t - W_{t_k})$$

si W_t es continua en t, entonces $\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$ es continua en t.

Ahora por demostrar que

$$E\left[\int_0^t H_u \mathrm{d}W_u \Big| \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s H_u \mathrm{d}W_u \quad \forall s \leq t.$$

Sea $s \leq t$, sin pérdida de generalidad, es posible ajustar a s y t a la partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$.

Supongamos que

$$M_n = \int_0^{t_n} H_u \mathrm{d}W_u, \; Z_n - W_{t_n} \;\text{ y }\; I_n = \mathcal{F}_{t_n}, \; 0 \leq n \leq N$$

donde

$$M_n = \int_0^{t_n} H_u \mathrm{d}W_u = \sum_{i=1}^{n} H_i(Z_i - Z_{i-1})$$

por lo que sólamente se tiene que demostrar que

$$E[M_{n+1}|I_n] = M_n \quad \forall n \in N.$$

$$\begin{aligned}
E[M_{n+1} - M_n|I_n] &= \sum_{i=1}^{n+1} H_i(Z_i - Z_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} H_i(Z_i - Z_{i-1}) \\
&= E\left[H_{n+1}(Z_{n+1} - Z_n)|I_n\right] \\
&= E\left[H_{n+1}(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})|\mathcal{F}_{t_n}\right] \\
&= H_{n+1}E\left[(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})|\mathcal{F}_{t_n}\right] = 0
\end{aligned}$$

dado que H_{n+1} es una variable aleatoria $\mathcal{F}_{t_n}$-medible, entonces M_n es una martingala.

En consecuencia,

$$E\left[\int_0^t H_u \mathrm{d}W_u \Big| \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s H_u \mathrm{d}W_u \quad \forall s \leq t.$$

Por lo tanto

$$\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s \quad \text{es una martingala.}$$

Proposición 2.6.4. Si $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso elemental, entonces

$$E\left[\left(\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s\right)\right]$$

Demostración.

Sea $s \leq t$, sin pérdida de generalidad se puede ajustar s y t a la partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$.

Por demostrar que

$$E\left[M_n^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} H_i^2 \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right].$$

Supongamos que $Z_i = W_{t_i}$ y $I_i = \mathcal{F}_{t_i}$, entonces

$$\begin{aligned}
E\left[M_n^2\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} H_i \left(Z_i - Z_{i-1}\right)\right)^2\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i H_j \left(Z_i - Z_{i-1}\right)\left(Z_j - Z_{j-1}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[\sum_{j=1}^{n} H_i H_j \left(Z_i - Z_{i-1}\right)\left(Z_j - Z_{j-1}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[H_i H_j \left(Z_i - Z_{i-1}\right)\left(Z_j - Z_{j-1}\right)\right]
\end{aligned}$$

si suponemos que $i < j$ para que $i + 1 \leq j$, entonces

$$\begin{aligned}
E\left[H_i H_j \left(Z_i - Z_{i-1}\right)\left(Z_j - Z_{j-1}\right)\right] &= E\left[E\left[H_i H_j \left(Z_i - Z_{i-1}\right)\left(Z_j - Z_{j-1}\right)|I_{j-1}\right]\right] \\
&= E\left[H_i H_j \left(Z_i - Z_{i-1}\right)\right] E\left[\left(Z_j - Z_{j-1}\right)|I_{j-1}\right] \\
&= E\left[H_i H_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) E\left[\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)|I_{j-1}\right]\right] \\
&= E\left[H_i H_j \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) 0\right] = 0
\end{aligned}$$

ya que H_i, H_j y $(Z_j - Z_{j-1})$ son variables aleatorias I_{j-1}-medibles y debido a que $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar, entonces es una martingala.

Analogamente se cumple para $i > j$

$$E\left[H_i H_j \left(Z_i - Z_{i-1}\right)\left(Z_j - Z_{j-1}\right)\right] = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
E\left[M_n^2\right] &= \sum_{i=1}^{n} E\left[H_i H_i \left(Z_i - Z_{i-1}\right)\left(Z_i - Z_{i-1}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[H_i^2 \left(Z_i - Z_{i-1}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[H_i^2 \left(Z_i - Z_{i-1}\right)^2 \middle| I_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[H_i^2 E\left[\left(Z_i - Z_{i-1}\right)^2 \middle| I_{i-1}\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[H_i^2 E\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[H_i^2 \left(t_i - t_{i-1}\right)\right] = E\left[\sum_{i-1}^{n} H_i^2 \left(t_i - t_{i-1}\right)\right].
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s\right)^2\right] &= \sum_{i=1}^{n} E\left[H_i^2 \left(t_i - t_{i-1}\right)\right] \\
&= E\left[\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s\right] \\
&= \int_0^t E\left[H_s^2\right] \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

En resumen se puede decir que la integral estocástica tiene una función generadora de momentos ya que es una variable aleatoria que se distribuye $N(0, t)$. Donde la propiedad de martingala proporciona el primer momento, es decir,

$$E\left[\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s\right] = 0.$$

El segundo momento está dado por

$$E\left[\left(\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s\right]$$

por lo que se puede definir la siguiente igualdad $(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t$, la cual será de gran importancia para demostrar el Lema de Itô.

Corolario 2.6.5. (Desigualdad de Doob). Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala continua. Entonces

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^2\right] \leq 4E\left[|M_T|^2\right].$$

Proposición 2.6.6. Si $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso elemental, entonces

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t H_s\mathrm{d}W_s\right|^2\right] \leq 4E\left[\int_0^T H_s^2\mathrm{d}s\right].$$

Demostración.

Por la proposición 2.6.3 se sabe que $\int_0^t H_s\mathrm{d}W_s$ es una función continua respecto a t y es una martingala, entonces por el corolario 2.6.5 se tiene que

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t H_s\mathrm{d}W_s\right|^2\right] \leq 4E\left[\int_0^T H_s^2\mathrm{d}s\right]$$

Definición 2.6.7. Si $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso elemental, se puede definir

$$\int_t^T H_s\mathrm{d}W_s = \int_0^T H_s\mathrm{d}W_s - \int_0^t H_s\mathrm{d}W_s \quad \text{si} \quad 0\leq t\leq T \quad \text{y si} \quad \mathrm{A}\in\mathcal{F}_t$$

entonces

$$1_{\mathrm{A}}1_{\{s\in(t,T]\}}H_s$$

continua siendo un proceso elemental, y además se cumple que

$$\int_0^T 1_{\mathrm{A}}1_{\{s\in(t,T]\}}H_s\mathrm{d}W_s = 1_{\mathrm{A}}\int_t^T H_s\mathrm{d}W_s$$

Por otra parte, la definición de integral estocástica de procesos elementales se puede extender para la clase de procesos estocásticos adaptados los cuales se definen como:

$$\mathcal{H} = \left\{\{H_t\}_{0\leq t\leq T} : \text{procesos adoptados a } \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0},\ E\left[\int_0^T H_s^2\mathrm{d}s\right] < \infty\right\}$$

donde la integral estocástica para esta clase de procesos estocásticos seguirá cumpliendo las mismas propiedades al igual que los procesos elementales y además tendrán la particularidad de ser una martingala.

2.7 Cálculo Estocástico de Itô

El cálculo estocástico se desarrollo para cierta clase de procesos conocidos como procesos de Itô que se utilizan para modelar la dinámica de los precios de los instrumentos financieros.

Definición 2.7.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano estándar. Un proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ que toma valores en R es un proceso de Itô si

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$$

donde

a) X_0 es $\mathcal{F}_0$-medible,

b) $\{K_t\}_{0\leq t\leq T}$ y $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ son procesos adoptados respecto a $\mathcal{F}_t$,

c) $\int_0^T |K_s|\mathrm{d}s < \infty$ Pc.s y $\int_0^T |H_s|^2 \mathrm{d}W_s < \infty$ Pc.s.

Sin embargo, el proceso de Itô es común y conveniente expresarlo en forma diferencial, es decir,

$$\mathrm{d}X_t = K_t \mathrm{d}t + H_t \mathrm{d}W_t$$

Proposición 2.7.2. Si $\int_0^t K_s \mathrm{d}s = M_t$ es una martingala continua, donde $\int_0^t |K_s|\mathrm{d}s < \infty$, entonces para toda $t \leq T$, $M_t = 0$ P c.s.

Demostración.

Supongamos que

$$\int_0^t |K_s|\mathrm{d}s \leq C < \infty \quad \text{con} \quad t_i^n = \frac{T}{n},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left(M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n\right)^2 &\leq \sup_i \left|M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n\right| \sum_{i=1}^{n} \left|M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n\right| \\
&= \sup_i \left|M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n\right| \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} K_s \mathrm{d}s\right| \\
&\leq \sup_i \left|M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n\right| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} |K_s|\mathrm{d}s \\
&\leq C \sup_i \left|M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n\right|.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n\right)^2 = 0 \text{ P c.s.}$$

así que por el teorema del límite cuadrado medio.

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} \left(M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n\right)^2\right] = 0.$$

Sin embargo, debido a que M_t es una martingala, entonces

$$E\left[M_t^2 - M_0\right]$$

por definición se sabe que $M_0 = 0$.

Por lo tanto

$$M_t = 0.$$

Ahora supongamos que

$$\int_0^T |K_s| \mathrm{d}s \quad \text{no está acotada.}$$

Sea $T_n = \inf\{0 \leq s \leq T\} : \int_0^s |K_u| \mathrm{d}u \geq n\} \wedge T$ y tomando el $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Entonces T es un paro de tiempo ya que K es adoptado,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T.$$

El siguiente resultado demuestra que

$$M_{t\wedge T_n} = 0 \text{ P c.s.}$$

así que $\lim_{n\to\infty} M_{t\wedge T_n} = 0 = M_t$ P c.s.

Proposición 2.7.3. Si $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala de la forma $\int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$ con $\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s < \infty$ Pc.s. y $\int_0^t |K_s| \mathrm{d}s < \infty$ Pc.s. Entonces $\int_0^t K_s \mathrm{d}s$ es una martingala igual a cero.

Proposición 2.7.4. Si un proceso de Itô $\{X_t\}_{t\geq 0}$ está representado por

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s,$$

y

$$X_t = X_0^* + \int_0^t K_s^* \mathrm{d}s + \int_0^t H_s^* \mathrm{d}W_s.$$

Entonces $X_0 = X_0^*$ dP c.s., $H_s = H_s^*$ d$s\times$dP c.s. y $K_s = K_s^*$ d$s\times$dP c.s.

Demostración.

Sea

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s = X_0^* + \int_0^t K_s^* \mathrm{d}s + \int_0^t H_s^* \mathrm{d}W_s.$$

Claramente se observa que $X_0 = X_0^*$, entonces

$$\int_0^t (K_s - K_s^*)\,\mathrm{d}s = \int_0^t (H_s - H_s^*)\,\mathrm{d}W_s$$

es una martingala.

Por lo tanto

$X_0 = X_0^*$ dP c.s., $H_s = H_s^*$ d$s\times$dP c.s. y $K_s = K_s^*$ d$s\times$dP c.s.

Teorema 2.7.5.(Lema de Itô). Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ tiene una ecuación diferencial estocástica dada por $\mathrm{d}X_t = K_t\mathrm{d}t + H_t\mathrm{d}W_t$ y si $f(t, X_t)$ es una función de clase $C^{1,2}$, entonces $f(t, X_t)$ tiene la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + K_t\frac{\partial f}{\partial X_t} + \frac{1}{2}H_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} +\right)\mathrm{d}t + H_t\frac{\partial f}{\partial X_t}\mathrm{d}W_t$$

o

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_s^2}\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s$$

donde por definición

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s$$

y

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}X_s = \int_0^t K_s\frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}s + \int_0^t H_s\frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}W_s.$$

Demostración.

Consideremos la función $f(t, X_t)$ que es de clase $C^{1,2}$. Haciendo la expansión por series de Taylor hasta términos de segundo orden se tiene que

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial X_t}\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(\mathrm{d}X_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_t \partial t}\mathrm{d}X_t\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Sustituyendo la ecuación diferencial estocástica que sigue el proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ en (1) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f =& \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial X_t}(K_t\mathrm{d}t + H_t\mathrm{d}W_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(K_t\mathrm{d}t + H_t\mathrm{d}W_t)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_t \partial t}(K_t\mathrm{d}t + H_t\mathrm{d}W_t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2}$$

dado que $E[\mathrm{d}W_t] \approx \mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{Var}\left[(\mathrm{d}W_t)^2\right] \approx (\mathrm{d}W_t)^2$, las siguientes reglas para el cálculo estocástico son válidas

$$\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t = 0, \quad \mathrm{d}W_t\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t \quad \text{y} \quad \mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + K_t\frac{\partial f}{\partial X_t}\mathrm{d}t + H_t\frac{\partial f}{\partial X_t}\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}H_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + K_t\frac{\partial f}{\partial X_t} + \frac{1}{2}H_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}\right)\mathrm{d}t + H_t\frac{\partial f}{\partial X_t}\mathrm{d}W_t\end{aligned} \tag{3}$$

o

$$\begin{aligned}f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + K_s\frac{\partial f}{\partial X_s} + \frac{1}{2}H_s^2\frac{\partial^2 f}{\partial X_s^2}\right)\mathrm{d}s + \int_0^t H_s\frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}W_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s}K_s\mathrm{d}s + \int_0^t H_s\frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_s^2}H_s^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4}$$

puesto que

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2\mathrm{d}s$$

y

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}X_s = \int_0^t K_s\frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}s + \int_0^t H_s\frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}W_s.$$

Por lo tanto

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_s^2}\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s. \tag{5}$$

Ejemplo.

Supongamos que deseamos evaluar la siguiente integral estocástica $\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s$, si se define a $f(t, W_t) = \frac{1}{2}W_t^2$.

Solución.

Haciendo la expansión por series de Taylor hasta términos de segundo orden de la función $f(t, W_t)$ se tiene que

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial W_t}\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W_t^2}(\mathrm{d}W_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial W_t \partial t}\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t \tag{6}$$

aplicando las reglas para el cálculo estocástico en (6)

$$\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t = 0, \quad \mathrm{d}W_t\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t \quad \text{y} \quad \mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0$$

entonces

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W_t^2}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial W_t}\mathrm{d}W_t \tag{7}$$

ahora calculando las derivadas parciales de $f(t, W_t)$ una vez con respecto a t y dos veces con respecto W_t y sustituyendolas en (7)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial W_t} = W_t \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial W_t^2} = 1$$

se tiene que

$$\mathrm{d}f = 0 + W_t\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\mathrm{d}t$$

o

$$f(t, W_t) = f(0, W_0) + \int_0^t W_s\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}s$$

$$\frac{1}{2}W_t^2 = \int_0^t W_s\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}t.$$

Por lo tanto

$$\int_0^t W_s\mathrm{d}W_s = \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right).$$

Debido a que el valor esperado de $\int_0^t W_s^2\mathrm{d}W_s$ es finito, entonces $\left(W_t^2 - t\right)$ es una martingala.

Proposición 2.7.6.(Fórmula de Integración por Partes) Sean $\{X_t\}_{t\geq 0}$ y $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ dos procesos de Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$$

y

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s^* \mathrm{d}s + \int_0^t H_s^* \mathrm{d}W_s.$$

Entonces

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s + \int_0^t H_s H_s^* \mathrm{d}s$$

Demostración.

Se puede afirmar que

$$X_t + Y_t = (X_0 + Y_0) + \int_0^t (K_s + K_s^*)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (H_s + H_s^*)\,\mathrm{d}W_s$$

es un proceso de Itô puesto que

$$(X_0 + Y_0) \quad \text{es} \quad \mathcal{F}_0 - \text{medible}$$

$$(K_s + K_s^*) \quad \text{y} \quad (H_s + H_s^*) \quad \text{son procesos adoptados}$$

$$\int_0^T |K_s + K_s^*|\,\mathrm{d}s \leq \int_0^T |K_s|\,\mathrm{d}s + \int_0^T |K_s^*|\,\mathrm{d}s < \infty$$

y la segunda parte de la condición (c) de la definición de proceso de Itô se cumple gracias a la desigualdad de Cauchy, es decir

$$\begin{aligned}\int_0^T |H_s + H_s^*|^2\,\mathrm{d}s &= \int_0^T H_s^2 \mathrm{d}s + 2\int_0^T H_s H_s^* \mathrm{d}s + \int_0^T (H_s^*)^2\,ds \\ &\leq \int_0^T H_s^2 \mathrm{d}s + 2\left(\int_0^T H_s^2 \mathrm{d}s \int_0^T (H_s^*)^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} + \int_0^T (H_s^*)^2\,ds < \infty\end{aligned}$$

entonces aplicando el Lema de Itô a $(X_t + Y_t)$ con $f(x) = x^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}(X_t + Y_t)^2 =& (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s)(K_s + K_s^*)\,\mathrm{d}s \\ &+ 2\int_0^t (X_s + Y_s)(H_s + H_s^*)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,(H_s + H_s^*)^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Ahora aplicando el Lema de Itô a X_t y Y_t con $f(x) = x^2$ se tiene que

$$X_t^2 = X_0 + 2\int_0^t X_s K_s \mathrm{d}s + 2\int_0^t X_s H_s \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2H_s^2 \mathrm{d}s$$

y

$$Y_t^2 = X_0 + 2\int_0^t Y_s K_s \mathrm{d}s + 2\int_0^t Y_s H_s \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\left(H_s^*\right)^2 \mathrm{d}s$$

entonces

$$\begin{aligned}
2X_tY_t =&(X_t + Y_t)^2 - (X_t^2 + Y_t^2)\\
=&(X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s)(K_s + K_s^*)\,\mathrm{d}s + 2\int_0^t (X_s + Y_s)(H_s + H_s^*)\,\mathrm{d}W_s\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t 2\left(H_s + H_s^*\right)^2 \mathrm{d}s - \left[\left(X_0^2 + Y_0^2\right) + 2\int_0^t (X_sK_s + Y_sK_s^*)\,\mathrm{d}s\right]\\
&- \left[2\int_0^t (X_sH_s + Y_sH_s^*)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\left(H_s^2 + (H_s^*)^2\right)\mathrm{d}s\right]\\
=& \left(X_0^2 + 2X_0Y_0 + Y_0^2\right) + 2\int_0^t (X_sK_s + Y_sK_s^*)\,\mathrm{d}s + 2\int_0^t (X_sK_s^* + Y_sK_s)\,\mathrm{d}s\\
&+ 2\int_0^t (X_sH_s + Y_sH_s^*)\,\mathrm{d}W_s + 2\int_0^t (X_sH_s^* + Y_sH_s)\,\mathrm{d}W_s\\
&+ \int_0^t \left(H_s^2 + 2H_sH_s^* + (H_s^*)^2\right) - \left[\left(X_0^2 + Y_0^2\right) + 2\int_0^t (X_sK_s + Y_sK_s^*)\,\mathrm{d}s\right]\\
&- \left[2\int_0^t (X_sH_s + Y_sH_s^*)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t \left(H_s^2 + (H_s^*)^2\right)\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2X_tY_t =&2X_0Y_0 + 2\int_0^t (X_sK_s^* + Y_sK_s)\,\mathrm{d}s + 2\int_0^t (X_sH_s^* + Y_sH_s)\,\mathrm{d}W_s + 2\int_0^t H_sH_s^*\mathrm{d}s\\
=&2\left[X_0Y_0 + \int_0^t X_sK_s^*\mathrm{d}s + \int_0^t X_sH_s^*\mathrm{d}W_s + \int_0^t Y_sK_s\mathrm{d}s + \int_0^t Y_sH_s\mathrm{d}W_s\right]\\
&+ 2\int_0^t H_sH_s^*\mathrm{d}s\\
=&2\left[X_0Y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s}K_s^*\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s}H_s^*\mathrm{d}W_s\right]\\
&+ 2\left[\int_0^t \frac{\partial f}{\partial Y_s}K_s\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial Y_s}H_s\mathrm{d}W_s + \int_0^t H_sH_s^*\mathrm{d}s\right]\\
=&2\left[X_0Y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s}\mathrm{d}Y_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial Y_s}\mathrm{d}X_s + \int_0^t H_sH_s^*\mathrm{d}s\right]\\
=&2\left[X_0Y_0 + \int_0^t X_s\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s\mathrm{d}X_s + \int_0^t H_sH_s^*\mathrm{d}s\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s + \int_0^t H_s H_s^* \mathrm{d}s.$$

La ecuación de integración por partes también se conoce como la regla del producto y puede escribirse en forma diferencial

$$\mathrm{d}(X_tY_t) = X_t \mathrm{d}Y_t + Y_t \mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle X, Y\rangle_t.$$

2.8 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Las ecuaciones diferenciales estocásticas son de gran utilidad para modelar a la mayoría de los instrumentos financieros y sobre todo para valuar productos derivados debido a que proporcionan un modelo más formal para describir los cambios en los precios de los activos subyacentes en intervalos infinitesimales.

Consideremos la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica de un activo subyacente S_t como:

$$\mathrm{d}S_t = a(S_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(S_t, t)\mathrm{d}W_t \tag{2.8.1}$$

o

$$\int_0^t \mathrm{d}S_u = \int_0^t a(S_u, u)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(S_u, u)\mathrm{d}W_u \tag{2.8.2}$$

donde $\mathrm{d}W_t$ es el término de difusión que representa los cambios impredecibles que ocurren en un intervalo infinitesimal $\mathrm{d}t$, es decir, representa la parte aleatoria. Los términos $a(S_t, t)$ y $\sigma(S_t, t)$ son conocidos como la tendencia instantánea y desviación estándar del término aleatorio que dependen del nivel observado en el precio del activo subyacente y posiblemente de t.

2.8.1 Tipos de Soluciones

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas son procesos estocásticos adoptados ya que el término de difusión es una variable aleatoria que sigue un proceso de Wiener que se distribuye normal con media 0 y varianza $\mathrm{d}t$.

Definición 2.8.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad respecto a la filtración $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$. Sea $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano estándar y $a : R^+ \times R \to R$, $\sigma : R^+ \times R \to R$ funciones $\mathcal{F}_t$-medibles. Sea X también una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$-medible.

Una solución para (2.8.1) es un proceso estocástico adoptado $\{S_t\}_{t\geq 0}$ que cumple las siguientes condiciones:

- Para $t \geq 0$, las integrales $\int_0^t a(S_u, u)\mathrm{d}u$ y $\int_0^t \sigma(S_u, u)\mathrm{d}W_u$ existen $\int_0^t a(S_u, u)\mathrm{d}u < \infty$ y $\int_0^t |\sigma(S_u, u)|^2\mathrm{d}u < \infty$.
- $\{S_t\}_{t\geq 0}$ satisface (2.8.1), es decir

$$S_t = x + \int_0^t a(S_u, u)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(S_u, u)\mathrm{d}W_u \quad \forall t \geq 0 \quad \text{Pc.s.}$$

también (2.8.1) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= a(S_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(S_t, t)\mathrm{d}W_t \\ S_0 &= x. \end{aligned} \tag{2.8.3}$$

Existen dos tipos de soluciones para las ecuaciones diferenciales estocásticas las cuales son:

- Solución fuerte S_t es un proceso estocástico adoptado a un conjunto de información $\mathcal{F}_t$ y que es parecida a las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Solución débil

  Supongamos que una solución débil $\bar{S}_t$ satisface

$$\mathrm{d}\bar{S}_t = a\left(\bar{S}_t, t\right)dt + \sigma\left(\bar{S}_t, t\right)\mathrm{d}\bar{W}_t \tag{2.8.4}$$

donde los coeficientes de la tendencia instantánea y la desviación estándar son iguales a los de la ecuación (2.8.1) lo único que cambia es que $\bar{W}_t$ es adoptado a un conjunto de información $\mathcal{H}_t$. Es decir, $\bar{S}_t$ no necesariamente será adoptado a $\mathcal{F}_t$.

Por lo que, para fines de nuestra investigación en la valuación de productos derivados trabajaremos con las soluciones débiles de las ecuaciones diferenciales estocásticas.[3]

[3] Para un estudio más profundo de los diferentes tipos de soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, véase Elliot (1982) y Karatzas (1991).

2.8.2 Proceso de Ornstein-Ulhenbeck

Una solución famosa de una ecuación diferencial estocástica es el conocido proceso de Ornstein-Ulhenbeck.

Definición 2.8.1. El proceso de Ornstein-Ulhenbeck es la única solución de la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= -\mu X_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \quad \mu > 0 \\
X_0 &= x.
\end{aligned}
$$

Claramente se puede observar que la tendencia instantánea depende de X_t a través del parámetro negativo μ y el término de difusión es constante. Por lo que se tiene un caso especial de una ecuación diferencial estocástica con reversión a la media.

Sea $V_t = X_t e^{\mu t}$, entonces aplicando la fórmula de integración por partes en su forma diferencial se tiene que

$$
\mathrm{d}V_t = \mathrm{d}\left(X_t e^{\mu t}\right) = X_t \mathrm{d}\left(e^{\mu t}\right) + e^{\mu t}\mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle X_t, e^{\mu t}\rangle
$$

entonces

$\mathrm{d}\langle X_t, e^{\mu t}\rangle = 0$ ya que $\mathrm{d}\left(e^{\mu t}\right) = \mu e^{\mu t}\mathrm{d}t$.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V_t = \mathrm{d}\left(X_t e^{\mu t}\right) &= e^{\mu t}\mathrm{d}X_t + \mu e^{\mu t} X_t \mathrm{d}t \\
&= e^{\mu t}\left(-\mu X_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right) + \mu e^{\mu t} X_t \mathrm{d}t \\
&= \left(-\mu e^{\mu t} X_t \mathrm{d}t + \mu e^{\mu t} X_t \mathrm{d}t\right) + \sigma e^{\mu t}\mathrm{d}W_t \\
&= \sigma e^{\mu t}\mathrm{d}W_t.
\end{aligned}
$$

integrando de 0 a t la expresión anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \mathrm{d}\left(X_s e^{\mu s}\right) &= \int_0^t \sigma e^{\mu s}\mathrm{d}W_s \\
X_t e^{\mu t} + X_0 &= \int_0^t \sigma e^{\mu s}\mathrm{d}W_s.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
X_t = x e^{-\mu t} + \sigma e^{-\mu t}\int_0^t e^{\mu s}\mathrm{d}W_s.
$$

Ahora podemos calcular su media y varianza de X_t

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E\left[xe^{-\mu t} + \sigma e^{-\mu t}\int_0^t e^{\mu s}\mathrm{d}W_s\right] \\ &= E\left[xe^{-\mu t}\right] + E\left[\sigma e^{-\mu t}\int_0^t e^{\mu s}\mathrm{d}W_s\right] \\ &= xe^{-\mu t} + \sigma e^{-\mu t} E\left[\int_0^t e^{\mu s}\mathrm{d}W_s\right]. \end{aligned}$$

Por otra parte, ya que

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t e^{2\mu s}\mathrm{d}s\right] &= E\left[\frac{1}{2\mu}\int_0^t 2\mu e^{2\mu s}\mathrm{d}s\right] \\ &= E\left[\frac{e^{2\mu t}-1}{2\mu}\right] \\ &= \frac{e^{2\mu t}-1}{2\mu} < \infty \end{aligned}$$

entonces $\int_0^t e^{\mu s}\mathrm{d}W_s$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala, tal que

$$E\left[\int_0^t e^{\mu s}\mathrm{d}W_s\right] = 0.$$

Por lo tanto

$$E[X_t] = xe^{-\mu t}.$$

Ahora se calcula la varianza de X_t

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X_t] &= E\left[(X_t - E[X_t])^2\right] \\ &= E\left[\left(xe^{-\mu t} + \sigma e^{-\mu t}\int_0^t e^{\mu s}\mathrm{d}W_s - xe^{-\mu t}\right)^2\right] \\ &= E\left[\sigma^2 e^{-2\mu t}\left(\int_0^t e^{\mu s}\mathrm{d}W_s\right)^2\right] \\ &= \sigma^2 e^{-2\mu t} E\left[\int_0^t e^{2\mu s}\mathrm{d}s\right] \\ &= \sigma^2 e^{-2\mu t} E\left[\frac{e^{2\mu t}-1}{2\mu}\right] \\ &= \sigma^2 e^{-2\mu t}\left(\frac{e^{2\mu t}-1}{2\mu}\right) \\ &= \sigma^2\left(\frac{1-e^{-2\mu t}}{2\mu}\right). \end{aligned}$$

3. MODELACION DE PRODUCTOS DERIVADOS

El objetivo fundamental de esta sección es desarrollar el modelo de Black-Scholes aplicando el método de martingalas que consiste en calcular el valor esperado condicional del valor presente del perfil de pagos de la opción bajo una medida neutral al riesgo y así obtener soluciones de forma cerrada de una manera más precisa y elegante con sencillos cálculos matemáticos para la valuación de productos derivados asumiendo el modelo de precios de Black-Scholes.

3.1 Movimiento Browniano Geométrico

Un modelo comúnmente utilizado es el movimiento Browniano geométrico el cual está implícito en gran parte de la teoría de valuación de opciones. El modelo asume que las innovaciones de cambio o movimientos en el precio del activo subyacente no están correlacionados en el tiempo y que los movimientos pequeños en los precios pueden describirse por

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t. \tag{3.1.1}$$

El término $\mu \mathrm{d}t$, el cual se conoce como la tendencia instantánea nos indica que el retorno esperado anual de la acción S_t es μ cuando no hay pago de dividendos mientras que el segundo término $\sigma \mathrm{d}W_t$, también conocido como el término de difusión es una variable aleatoria que sigue un proceso de Wiener que se distribuye normal con media cero y varianza $\mathrm{d}t$ y además es no diferenciable.

A está clase de proceso estocástico también se le denomina proceso de difusión Markoviano debido a que los retornos son gobernados por un proceso cuyos movimientos son independientes de los movimientos pasados.

Por otra parte, vale la pena observar que la ecuación (3.1.1) asume que el coeficiente del término de difusión σ, el cual se conoce como la volatilidad anual o desviación estándar de los rendimientos de la acción es constante. En realidad, en la práctica este supuesto no tiene importancia cuando se valuan opciones europeas vanillas. Sin embargo, cuando se valuan opciones americanas u opciones europeas exóticas este supuesto no es válido.

También para el caso del coeficiente de la tendencia instantánea μ, este supuesto es válido debido al hecho de que una opción puede ser replicada sin riesgo al construir un portafolio apropiado que consista de un activo con riesgo y un activo libre de riesgo (puede ser una inversión en el mercado de dinero) y que tenga la misma fecha de vencimiento que la opción.

Ejemplo.

Suponga que una variable sigue un proceso gobernado por la ecuación (3.1.1) entonces deseamos conocer el proceso seguido por el $\ln S_t$.

Solución.

Supongamos que $f(t, S_t)$ es una función de S_t, entonces aplicando el Lema de Itô podemos encontrar la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica del valor del $\ln S_t$.

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(\mathrm{d}S_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}\mathrm{d}S_t\mathrm{d}t. \tag{3.1.2}$$

Sustituyendo (3.1.1) en (3.1.2) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f =& \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S_t}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Ahora aplicando las reglas del cálculo estocástico

$$\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t = 0, \quad \mathrm{d}W_t\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t \quad \text{y} \quad \mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0$$

donde

$$(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)^2 = \mu^2 S_t^2(\mathrm{d}t)^2 + 2\mu\sigma S_t^2\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t + \sigma^2 S_t^2(\mathrm{d}W_t)^2 = \sigma^2 S_t^2\mathrm{d}t$$

entonces (3.1.3) se reduce a

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S_t}\mu S_t\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S_t}\sigma S_t\mathrm{d}W_t. \tag{3.1.4}$$

Ahora se establece que $f(t, S_t) = \ln S_t$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Sustituyendo las derivadas parciales en (3.1.4) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\ln S_t &= \left[\left(\frac{1}{S_t}\right)\mu S_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)\sigma^2 S_t^2\right]\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{S_t}\right)\sigma S_t \mathrm{d}W_t \\
&= \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \\
\ln S_0 &= x
\end{aligned}
$$

Ahora la integral de Itô se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
\ln S_t &= \ln S_0 + \int_0^t \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma \mathrm{d}W_s \\
&= \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^t \mathrm{d}s + \sigma \int_0^t \mathrm{d}W_s \\
&= \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t
\end{aligned}
$$

entonces

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$$

es una solución de la ecuación (3.1.1), por lo que se deriva la siguiente proposición que es de gran utilidad para el modelo de Black-Scholes.

Proposición 3.1.1. El proceso $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ definido como

$$S_t = xe^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$$

es una solución de

$$S_t = x + \int_0^t \mu S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma \mathrm{d}W_u.$$

Demostración.

Aplicando otra vez el Lema de Itô y definiendo a

$$f(t, W_t) = S_t = xe^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$$

se tiene que

$$f(t, W_t) = f(0, W_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial W_u}\mathrm{d}W_u + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial W_u^2}\mathrm{d}\langle W, W\rangle_u.$$

Suponiendo que $w = W_u$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w}\left[xe^{\sigma w + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)u}\right] = \sigma xe^{\sigma w + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)u} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} &= \frac{\partial^2}{\partial w^2}\left[xe^{\sigma w + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)u}\right] = \sigma^2 xe^{\sigma w + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)u} \\
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\left[xe^{\sigma w + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)u}\right] = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)xe^{\sigma w + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)u}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la integral de Itô se tiene que

$$\begin{aligned} f(t, W_t) =& f(0, W_0) + \int_0^t \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) x e^{\sigma W_u + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u} \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma x e^{\sigma W_u + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u} \mathrm{d}W_u \\ &+ \int_0^t \sigma^2 x e^{\sigma W_u + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u} \mathrm{d}\langle W, W\rangle_u \end{aligned}$$

donde

$$\langle W, W\rangle_t = \int_0^t \mathrm{d}u = t$$

entonces

$$\begin{aligned} S_t &= x + \int_0^t \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma S_u \mathrm{d}W_u + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_u \mathrm{d}t \\ &= x + \int_0^t \mu S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma S_u \mathrm{d}W_u \end{aligned}$$

Teorema 3.1.2. Sea $\mu, \sigma \in R$, $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento Browniano estándar y $T \in R^+$, entonces existe un único proceso de Itô $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$, tal que

$$S_t = x + \int_0^t \mu S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma S_u \mathrm{d}W_u$$

este proceso está dado por

$$S_t = x e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

Demostración.

Supongamos que $\{S_t\}_{t \geq 0}$ y $\{\bar{S}_t\}_{t \geq 0}$ son dos procesos elementales tales que

$$S_t = x + \int_0^t \mu S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma S_u \mathrm{d}W_u$$

$$\bar{S}_t = x + \int_0^t \mu \bar{S}_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma \bar{S}_u \mathrm{d}W_u.$$

Por la proposición 3.1.1 sabemos que una solución de la ecuación (3.1.1) es

$$S_t = x e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Ahora definimos un proceso estocástico $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ como:

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = e^{-\sigma W_t + (\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu)t}$$

si $\mu^* = \sigma^2 - \mu$ y $\sigma^* = -\sigma$, se tiene que

$$Z_t = e^{\sigma^* W_t + (\mu^* - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)t}, \quad Z = \frac{S_0}{S_0} = 1$$

entonces de la proposición 3.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned} Z_t &= z + \int_0^t \mu^* Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma^* Z_u \mathrm{d}W_u \\ &= 1 + \int_0^t \mu^* Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma^* Z_u \mathrm{d}W_u \end{aligned}$$

el cual es un proceso de Itô.

Ahora de acuerdo con la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{S}_t Z_t =& xz + \int_0^t \mu^* \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma^* \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}W_u \\ &+ \int_0^t \mu \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}W_u + \int_0^t \sigma\sigma^* \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u \\ =& xz + \int_0^t \left(\sigma^2 - \mu\right) \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t (-\sigma) \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}W_u \\ &+ \int_0^t \mu \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}W_u + \int_0^t \left(-\sigma^2\right) \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{S}_t Z_t &= xz \quad \forall t \geq 0 \quad \text{Pc.s.} \\ \bar{S}_t Z_t &= x \frac{S_0}{S_0} = x \end{aligned}$$

entonces

$$\bar{S}_t = \frac{x}{Z_t} = x \frac{S_t}{S_0} \quad \text{pero} \quad x = S_0$$

Por lo tanto

$$\bar{S}_t = S_t \quad \forall t \geq 0 \quad \text{Pc.s.}$$

Teorema 3.1.3. Sea $\mu, \sigma \in R$ y $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un proceso estocástico tal que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

entonces S_t es una variable aleatoria lognormal.

Demostración.

Sabemos que la única solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

es

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

entonces

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma W_t$$

dado que $W_t \sim N(0, t)$ podemos afirmar que

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right), \sigma^2 t\right)$$

es decir,

$$S_t \sim \log\text{normal}\left(\ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right), \sigma^2 t\right)$$

Ahora podemos calcular la media y la varianza de S_t

$$f_{S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma s} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{s}{S_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{t}} \right)^2 \right\} \qquad 0 \leq s \leq \infty$$

$$\begin{aligned} E[S_t] &= \int_0^\infty s f_{S_t}(s) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{s}{S_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{t}} \right)^2 \right\} ds \end{aligned}$$

ya que

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right), \sigma t\right)$$

entonces

$$\epsilon = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{t}} \sim N(0, 1)$$

donde

$$S_t = S_0 e^{\epsilon\sigma\sqrt{t}+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \quad \text{y} \quad \mathrm{d}s = S_0\sigma\sqrt{t}e^{\epsilon\sigma\sqrt{t}+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathrm{d}\epsilon$$

$$\begin{aligned}
E[S_t] &= S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{\epsilon\sigma\sqrt{t}+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-2\epsilon\sigma\sqrt{t}+\sigma^2 t)}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0 e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0 e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z = S_0 e^{\mu t}
\end{aligned}$$

donde

$$z = \epsilon - \sigma\sqrt{t} \quad \text{y} \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}\epsilon.$$

El segundo momento de S_t se calcula como sigue

$$\begin{aligned}
E\left[S_t^2\right] &= \int_0^{\infty} s^2 f_{S_t}(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\infty} \frac{s}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{s}{S_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= S_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{2\left(\epsilon\sigma\sqrt{t}+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\right)t}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{2(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-4\epsilon\sigma\sqrt{t})}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{2(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{2\sigma^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-4\epsilon\sigma\sqrt{t}+4\sigma^2 t)}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-2\epsilon\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z = S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t}
\end{aligned}$$

donde

$$z = \epsilon - 2\sigma\sqrt{t} \quad \text{y} \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}\epsilon.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S_t] &= E\left[S_t^2\right] - E^2\left[S_t\right] \\
&= S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t} - S_0^2 e^{2\mu t} \\
&= S_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).
\end{aligned}$$

3.2 Estrategias de Inversión Autofinanciables

Una estrategia de inversión se define como un proceso $\phi = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq T} = (H_t^*, H_t)$ en R^2 que es medible en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ del movimiento Browniano estándar. Los componentes H_t^* y H_t se definen como las cantidades de un activo libre de riesgo y de un activo con riesgo que son tomadas en un portafolio en el tiempo t.

El valor del portafolio en el tiempo t está dado por

$$V_t(\phi) = H_t^* B_t + H_t S_t \tag{3.2.1}$$

en tiempo discreto mientras que en tiempo continuo es igual a

$$\mathrm{d}V_t(\phi) = H_t^* \mathrm{d}B_t + H_t \mathrm{d}S_t. \tag{3.2.2}$$

El concepto de estrategia de inversión autofinanciable en el marco de Black-Scholes está basada fundamentalmente en la idea de la integral estocástica. Entonces para dar un significado a la expresión establecemos la condición

$$\int_0^T |H_t^*|\mathrm{d}t < \infty \quad \mathrm{Pc.s.} \quad \mathrm{y} \quad \int_0^T |H_t^2|\mathrm{d}t < \infty \quad \mathrm{Pc.s.}$$

Entonces

$$\int_0^T H_t^* \mathrm{d}B_t = \int_0^T H_t^* r e^{rt} \mathrm{d}t \tag{3.2.3}$$

está bien definida como una integral estocástica

$$\int_0^T H_t \mathrm{d}S_t = \int_0^T \mu H_t S_t \mathrm{d}t + \int_0^T \sigma H_t S_t \mathrm{d}W_t$$

ya que $t \mapsto S_t$ es continua y acotada en $[0, T]$.

Definición 3.2.1. Una estrategia de inversión autofinanciable $\phi = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq T}$ está definida por dos procesos H_t^* y H_t que cumplen las siguientes condiciones:

1. $\int_0^T |H_t^*|\mathrm{d}t + \int_0^T H_t^2 \mathrm{d}t < \infty$ Pc.s.

2. $$\begin{aligned} V_t(\phi) &= H_t^* B_t + H_t S_t \\ &= H_0^* B_0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^* \mathrm{d}B_u + \int_0^t H_u^2 \mathrm{d}S_u \quad \forall t \in [0, T] \quad \mathrm{Pc.s.} \end{aligned}$$

Nota: el proceso $\bar{S}_t = e^{-rt}S_t$ se denota como el valor presente de un activo con riesgo y $\bar{V}_t(\phi) = e^{-rt}V_t(\phi)$ es el valor presente del valor del portafolio.

Proposición 3.2.2. Sea $\phi = \{\phi_t\}_{0 \leq t \leq T} = (H_t^*, H_t)$ un par de procesos adoptados medibles que satisfacen a

$$\int_0^T |H_t^*| \mathrm{d}t + \int_0^T H_t^2 \mathrm{d}t < \infty \qquad \text{Pc.s.}$$

entonces ϕ es una estrategia de inversión autofinanciable si y sólo si

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u \mathrm{d}\bar{S}_u \qquad \text{Pc.s.} \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostración.

Supongamos que ϕ es una estrategia de inversión autofinanciable y aplicando la fórmula de integración por partes a $\bar{V}_t(\phi)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{V}_t(\phi) &= \mathrm{d}\left(e^{-rt}V_t(\phi)\right) \\
&= e^{-rt}\mathrm{d}V_t(\phi) + V_t(\phi)\mathrm{d}\left(e^{-rt}\right) + \mathrm{d}\langle e^{-r\cdot}, V_\cdot(\phi)\rangle_t \\
&= e^{-rt}\mathrm{d}V_t(\phi) - re^{-rt}V_t(\phi)\mathrm{d}t \\
&= e^{-rt}\mathrm{d}V_t(\phi) - r\bar{V}_t(\phi)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

donde

$$V_t(\phi)\mathrm{d}\left(e^{-rt}\right) = -re^{-rt}\mathrm{d}t \quad \text{y} \quad \mathrm{d}\langle e^{-r\cdot}, V_\cdot(\phi)\rangle_t = 0$$

Sustituyendo (3.2.1) y (3.2.2) en la expresión anterior se tiene que

$$\mathrm{d}\bar{V}_t(\phi) = e^{-rt}\left(H_t^*\mathrm{d}B_t + H_t\mathrm{d}S_t\right) - re^{-rt}\left(H_t^*B_t + H_tS_t\right)\mathrm{d}t$$

por la ecuación (3.2.3) sabemos que $B_t = e^{rt}$, $\mathrm{d}B_t = re^{rt}\mathrm{d}t$ y $B_0 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{V}_t(\phi) &= e^{-rt}\left(H_t^*re^{rt}\mathrm{d}t + H_t\mathrm{d}S_t\right) - re^{-rt}\left(H_t^*e^{rt} + H_tS_t\right)\mathrm{d}t \\
&= \left(rH_t^*\mathrm{d}t + e^{-rt}H_t\mathrm{d}S_t\right) - \left(rH_t^*\mathrm{d}t + re^{-rt}H_tS_t\mathrm{d}t\right) \\
&= H_t\left(e^{-rt}\mathrm{d}S_t - re^{-rt}S_t\mathrm{d}t\right) \\
&= H_t\mathrm{d}\bar{S}_t
\end{aligned}$$

ya que

$$\mathrm{d}\bar{S}_t = \mathrm{d}\left(e^{-rt}S_t\right) = e^{-rt}\mathrm{d}S_t - re^{-rt}S_t\mathrm{d}t.$$

Ahora integrando $\mathrm{d}\bar{V}_t(\phi)$ de 0 a t

$$\int_0^t \mathrm{d}\bar{V}_t(\phi) = \int_0^t H_u \mathrm{d}\bar{S}_u$$

$$\bar{V}_t(\phi) - V_0(\phi) = \int_0^t H_u \mathrm{d}\bar{S}_u.$$

Por lo tanto

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u \mathrm{d}\bar{S}_u.$$

El reciproco se demuestra invirtiendo los pasos y usando

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u \mathrm{d}\bar{S}_u.$$

En conclusión se puede afirmar que una estrategia de inversión autofinanciable es una oportunidad de arbitraje que incluyen los activos subyacentes al transformar una inversión igual a cero en un monto mayor de cero con probabilidad positiva. Por lo que no tendría sentido, valuar productos derivados basados en un modelo que permita tales desequilibrios en el mercado.

3.3 Cambio de Medida de Probabilidad

Cuando los inversionistas son indiferentes al riesgo financiero, no exigen una de prima de riesgo ya que asumen que la tasa de retorno de todos los instrumentos financieros es igual a la tasa libre de riesgo. Sin embargo, ésto no sucede en la práctica debido al hecho de que en la mayoría de los casos se tiene que $r < \mu$, es decir, la tasa libre de riesgo es menor al retorno esperado de cualquier activo financiero con riesgo bajo la medida de probabilidad P. Esto se debe a que los inversionistas siempre demandan una prima de riesgo sobre los instrumentos financieros que tienen correlación positiva con el riesgo de mercado.

Para entender mejor ésto supongamos las dos siguientes expresiones:

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t^{\mathrm{P}} \tag{3.3.1}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = r\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t^{\mathrm{Q}}. \tag{3.3.2}$$

Se puede notar de (3.3.1) que la tasa de retorno esperada anual es igual a r, entonces al igualar (3.3.1) y (3.3.2) se tiene que

$$dW_t^{\mathrm{P}} = dW_t^{\mathrm{Q}} - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt$$

la cual se conoce como un cambio de medida de probabilidad.

Pero es natural preguntar por que hacer este cambio de medida de probabilidad cuando se valuan opciones financieras. Resulta que cuando un inversionista compra una opción sobre una acción se dice que está asegurandose contra los cambios inesperados que pueden ocurrir en el mercado a cambio de pagar una prima por eso es que, la probabilidad de que los precios de la acción sean bajos, es decir, los precios futuros de la acción que tiene una tasa de retorno esperada menor a la tasa libre de riesgo, será mayor bajo la medida de probabilidad **Q** que bajo **P** debido a que los inversionistas son adversos al riesgo y están dispuestos a pagar más por las opciones que ocurren en condiciones pesimistas. De manera similar, la probabilidad de que los precios de la acción sean altos, es decir, los precios futuros de la acción que representan un retorno esperado mayor que r, será menor bajo la probabilidad **Q** que bajo **P** debido al hecho de que los inversionistas están dispuestos a pagar menos por las opciones que ocurren en condiciones optimistas.

Por lo tanto, el cambio de medida de probabilidad es de gran utilidad para los participantes de los mercados financieros ya que les permite eliminar la prima de riesgo de los instrumentos financieros sin necesidad de cambiar la estructura de la volatilidad del activo financiero.

3.4 Medidas de Probabilidad Equivalentes

Definición 3.4.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad. Se dice que una medida de probabilidad Q sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es absolutamente continua con respecto a P ($\mathrm{Q} << \mathrm{P}$) si para toda $A \in \mathcal{F}$, $\mathrm{P}(A) = 0$ implica que $\mathrm{Q}(A) = 0$.

Definición 3.4.2. Se dice que dos medidas de probabilidad P y Q son equivalentes si cada una de ellas es absolutamente continua con respecto de la otra.

Nota: es conveniente observar que si $\mathrm{Q} << \mathrm{P}$ y Z es la densidad de Q con respecto a P, entonces ($\mathrm{P} << \mathrm{Q}$) son equivalentes si y sólo si $\mathrm{P}(Z > 0) = 1$.

3.5 Teorema de Girsanov

La idea central es utilizar el resultado del teorema de Girsanov una vez que se haya encontrado un espacio equivalente de tal manera que bajo este espacio de probabilidad la tendencia instantánea del modelo de precios sea igual a cero, es decir, calcular la esperanza condicional sobre un término puramente Browniano ya que el efecto de un cambio de medida de probabilidad sobre un movimiento Browniano geométrico lo único que se altera es su tendencia instantánea dejando la desviación estándar intacta.

Teorema 3.5.1. (Teorema de Girsanov) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad. Si $\{\theta_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso estocástico adoptado tal que

$$\int_0^T \theta_s \mathrm{d}s < \infty$$

y tal que $\{L_t\}_{0\leq t\leq T}$, definido por

$$L_t = \exp\left\{-\int_0^t \theta_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \mathrm{d}s\right\}$$

sea una martingala. Entonces bajo la probabilidad $\mathrm{Q}^{(L_T)}$ con densidad L_T con respecto a P, el proceso $\{\bar{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$, definido por

$$\bar{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s$$

es un movimiento Browniano estándar.

Sea $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ un movimiento Browniano estándar construido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ y $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ su filtración natural.

Teorema 3.5.2. (Teorema de Representación de Martingalas) Sea $\{M_t\}_{0\leq t\leq T}$ una martingala cuadrado integrable con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$. Entonces existe un proceso adoptado $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ tal que

$$E\left[\int_0^T H_u^2 \mathrm{d}u\right] < \infty$$

y

$$\forall t \in [0, T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_u \mathrm{d}W_u \quad \mathrm{P c.s.}$$

Como se puede observar este teorema será una de las herramientas importantes y poderosas para controlar las tendencias instantáneas de cualquier movimiento Browniano geométrico y en particular para valuar productos derivados en base a la idea de una medida de no arbitraje o medida martingala.

3.6 Medida Martingala Equivalente

El objetivo de esta sección es probar que éxiste una medida de probabilidad equivalente a P bajo la cual el precio de un activo subyacente descontado por la tasa libre de riesgo es una martingala.

Consideremos el modelo de Black-Scholes que describe que la dinámica de los precios es un modelo continuo que está formado por activo con riesgo S_t y por un activo libre de riesgo B_t, es decir, un bono gubernamental.[1] Supongamos que la dinámica de B_t está representada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t \tag{3.6.1}$$

donde $B_0 = 1$ y $r > 0$ es una constante.

Ahora asumiremos que la dinámica de S_t está dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t \tag{3.6.2}$$

donde μ, σ son constantes y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar.

Las soluciones de (3.6.1) y (3.6.2) son las siguientes:

$$B_t = e^{rt} \quad \text{con} \quad B_0 = 1 \tag{3.6.3}$$

y

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \tag{3.6.4}$$

respectivamente. Si suponemos que $\mu \in R$ y r, $\sigma \in R^+$ son constantes.

Ahora si definimos el valor presente de un activo con riesgo como el proceso

$$\bar{S}_t = B_t^{-1}S_t = e^{-rt}S_t \tag{3.6.5}$$

[1] Elliot, Robert J. and P. Ekkehard Kopp, (1999), Mathematics of Financial Markets, Springer-Verlag New York, Inc.

se tiene la siguiente dinámica.

Aplicando la fórmula de integración por partes a $\bar{S}_t$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{S}_t &= \mathrm{d}\left(e^{-rt}S_t\right) \\ &= e^{-rt}\mathrm{d}S_t + S_t\mathrm{d}\left(e^{-rt}\right) + \mathrm{d}\langle e^{-r\cdot}, S_\cdot\rangle_t \\ &= e^{-rt}\mathrm{d}S_t - re^{-rt}S_t\mathrm{d}t \\ &= e^{-rt}\mathrm{d}S_t - r\bar{S}_t\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

debido a que

$$\mathrm{d}\left(e^{-rt}\right) = -re^{-rt}\mathrm{d}t \quad \text{y} \quad \mathrm{d}\langle e^{-r\cdot}, S_\cdot\rangle_t = 0.$$

Sustituyendo (3.6.1) en (3.6.6) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{S}_t &= e^{-rt}\left(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t\right) - re^{-rt}S_t\mathrm{d}t \\ &= e^{-rt}\left[(\mu - r)S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t\right] \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Si hacemos la siguiente transformación

$$\bar{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s\mathrm{d}s \tag{3.6.8}$$

entonces

$$W_t = \bar{W}_t - \int_0^t \theta_s\mathrm{d}s \tag{3.6.9}$$

y

$$\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}\bar{W}_t - \theta_t\mathrm{d}t. \tag{3.6.10}$$

Sustituyendo (3.6.10) en (3.6.7) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{S}_t &= e^{-rt}S_t\left[(\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma\left(\mathrm{d}\bar{W}_t - \theta_t\mathrm{d}t\right)\right] \\ &= \bar{S}_t\left[(\mu - r - \sigma\theta_t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\bar{W}_t\right] \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

Si hacemos $\mu - r - \sigma\theta_t = 0$, es decir, $\theta_t = \frac{1}{\sigma}(\mu - r)$, entonces

$$\mathrm{d}\bar{S}_t = \bar{S}_t\sigma\mathrm{d}\bar{W}_t. \tag{3.6.12}$$

si

$$\bar{W}_t = W_t + \frac{1}{\sigma}(\mu - r)t. \tag{3.6.13}$$

Sustituyendo (3.6.13) en (3.6.5) se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{S}_t &= e^{-rt}S_t \\ &= S_0e^{-rt}e^{\sigma W_t+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= S_0e^{-rt}e^{\sigma \bar{W}_t-(\mu-r)t+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= S_0e^{\sigma \bar{W}_t-\frac{1}{2}\sigma^2 t}.\end{aligned} \tag{3.6.14}$$

Del teorema de Girsanov, con $\theta_t = \frac{1}{\sigma}(\mu - r)$, se tiene que demostrar que existe una medida de probabilidad Q equivalente a P bajo la cual $\{\bar{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un movimiento Browniano estándar y $\bar{S}_t$ es una martingala

Demostración.

La demostración se lleva acabo sólo cuando $\{\theta_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso constante θ, es decir

$$\bar{W}_t = W_t + \theta t.$$

i) Por demostrar que $\{\bar{W}_t\}_{t\geq 0}$ es continua en t.

La continuidad de la función $t \rightarrow \bar{W}_t(w)$ es clara, ya que el movimiento Browniano estándar W_t y la función θt son funciones continuas con respecto a t.

ii) Por demostrar que $\bar{W}_t$ tiene incrementos independientes.

La independencia de incrementos también es obvia, puesto que $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ y

$$\bar{W}_t - \bar{W}_s = W_t - W_s + \theta(t - s), \quad \forall s \leq t.$$

iii) Por demostrar que $\bar{W}_t$ es estacionario.

Para demostrar la estacionaridad del proceso $\bar{W}_t$ será necesario aplicar el teorema A.1 y las proposiciones A.2, A.3, A.4 A.5 y A.6 del apendice A.

Primero tenemos que demostrar que la probabilidad Q es equivalente a P y $\{L_t\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala. Para eso sólamente se tiene que demostrar que $\mathrm{P}(Z > 0) = 1$ ya que L_t es una martingala por la proposición 2.5.4 si suponemos que $\sigma^* = -\frac{\mu-r}{\sigma}$ entonces

$$L_t = e^{\sigma^* W_t-\frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t}.$$

Por otra parte, sabemos que

$$L_t = e^{-(\frac{\mu-r}{\sigma})W_t-\frac{1}{2}(\frac{\mu-r}{\sigma})^2 t}$$

ahora por teorema A.1 se tiene que

$$\mathrm{Q}(A) = \int_A Z(w)\mathrm{dP}(w)$$

entonces

$$\begin{aligned} Q(A) &= \int_A e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\mathrm{dP}(w) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\int_A e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t}\mathrm{dP}(w). \end{aligned}$$

Pero como W_t se distribuye $N(0,t)$, entonces

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t}\right] &= \int_A e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t}\mathrm{dP}(w) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)w}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2}{2t}}\mathrm{d}w \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2+2\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)wt}{2t}}\mathrm{d}w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t}\right] &= e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2+2\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)wt+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t^2}{2t}}\mathrm{d}w \\ &= e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)t}{\sqrt{t}}\right)^2}\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Si hacemos un cambio de variable

$$z=\frac{w+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)t}{\sqrt{t}} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{t}\mathrm{d}z=\mathrm{d}w,$$

$$E\left[e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t}\right] = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}$$

entonces

$$Q(A)=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}=1$$

Por lo tanto

Q es equivalente a P.

Por último sólo resta demostrar por las proposiciones A.5 y A.6 que para $0\le t\le T$, la variable $\tilde{W}_t-\tilde{W}_s$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ y se distribuye $N(0,t-s)$, entonces

$$E^{(L_T)}\left[e^{iu\left(\tilde{W}_t-\tilde{W}_s\right)}\middle|\mathcal{F}_t\right]=e^{-\frac{1}{2}u^2(t-s)} \quad \forall u\in R^+.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
E^{(L_T)}\left[e^{iu\left(\bar{W}_t-\bar{W}_s\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right] &= E^{(L_T)}\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \frac{E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot L_T\Big|\mathcal{F}_t\right]}{L_s} \quad \text{por la proposición A.5}\\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot \frac{L_T}{L_s}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot e^{-\left(\theta(W_T-W_s)+\frac{1}{2}\theta^2(T-s)\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot \frac{e^{-\left(\theta(W_T-W_t)+\frac{1}{2}\theta^2(T-t)\right)}}{e^{\left(\theta(W_t-W_s)+\frac{1}{2}\theta^2(t-s)\right)}}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot \frac{L_t}{L_s}\cdot e^{-\left(\theta W_{T-t}+\frac{1}{2}\theta^2(T-t)\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot \frac{L_t}{L_s}\Big|\mathcal{F}_t\right] E\left[e^{-\left(\theta W_{T-t}+\frac{1}{2}\theta^2(T-t)\right)}\right].
\end{aligned}$$

Pero sabemos que la esperanza de

$$E\left[e^{-\left(\theta W_{T-t}+\frac{1}{2}\theta^2(T-t)\right)}\right] = 1$$

entonces

$$\begin{aligned}
E^{(L_T)}\left[e^{iu\left(\bar{W}_t-\bar{W}_s\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right] &= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot \frac{L_t}{L_s}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \frac{1}{L_s}E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot e^{-\left(\theta W_t+\frac{1}{2}\theta^2 t\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \frac{e^{-iu(W_s+\theta s)}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}E\left[e^{iu(W_t+\theta t)}\cdot e^{-\left(\theta W_t+\frac{1}{2}\theta^2 t\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \frac{e^{-iu(W_s+\theta s)}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}E\left[e^{(iu-\theta)W_t-\frac{1}{2}\left(\theta^2-2iu\theta\right)t}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \frac{e^{-iu(W_s+\theta s)}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^2 t}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}E\left[e^{(iu-\theta)W_t-\frac{1}{2}\left(\theta^2-2iu\theta-u^2\right)t}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \frac{e^{-\left(iu(W_s+\theta s)+\frac{1}{2}u^2 t\right)}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}E\left[e^{(iu-\theta)W_t-\frac{1}{2}(\theta-iu)^2 t}\Big|\mathcal{F}_t\right]\\
&= \frac{e^{-\left(iu(W_s+\theta s)+\frac{1}{2}u^2 t\right)}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}\cdot e^{(iu-\theta)W_s-\frac{1}{2}(\theta-iu)^2 s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E^{(L_T)}\left[e^{iu(\bar{W}_t-\bar{W}_s)}\Big|\mathcal{F}_t\right] &= \frac{e^{-\left(iu\theta s+\frac{1}{2}u^2 t\right)}}{e^{-\theta W_s-\frac{1}{2}\theta^2 s}}\cdot e^{-\theta W_s-\frac{1}{2}\theta^2 s}\cdot e^{iu\theta s+\frac{1}{2}u^2 s}\\
&= e^{-\left(iu\theta s+\frac{1}{2}u^2 t\right)}\cdot e^{iu\theta s+\frac{1}{2}u^2 s}\\
&= e^{\frac{1}{2}\left(u^2 s-u^2 t\right)}\\
&= e^{-\frac{1}{2}u^2(t-s)}
\end{aligned}
$$

es la función característica de una variable aleatoria $N(0,t-s)$, para toda $0\leq t\leq T$ con lo cual se demuestra que $\bar{W}_t$ es un proceso estacionario.

Por lo tanto

$\{\bar{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$, es un movimiento Browniano estándar.

Definición 3.6.1. Una estrategia $\phi=\{\phi_t\}_{0\leq t\leq T}$, es admisible si es autofinanciable y el valor presente del proceso

$$\bar{V}_t(\phi)=H_t^*+H_t\bar{S}_t$$

es cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

Una opción es replicable si su precio en la fecha de vencimiento es igual al valor final de una estrategia admisible.

Definición 3.6.2. Una opción europea es una variable aleatoria h positiva, $\mathcal{F}_t$-medible.

Proposición 3.6.3. Sea h una variable aleatoria positiva $\mathcal{F}_t$-medible y cuadrado integrable y x es su precio justo en el tiempo 0, entonces

$$E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rt}h\right]<\infty \quad \text{y} \quad E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rt}h\right]\leq x$$

Demostración.

Primero demostraremos que $E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rt}h\right]<\infty$

Por la ecuación (3.6.14) sabemos que

$$\bar{S}_t=S_0e^{\sigma\bar{W}_t-\frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rT}h\right] &= e^{-rT}E\left[h\right]\\
&= e^{-rT}\frac{E\left[\bar{S}_T h\right]}{S_0} \quad \text{por la proposición A.5}\\
&\leq \frac{e^{-rT}}{S_0}\left(E\left[\bar{S}_T^2\right]\right)^{1/2}\left(E\left[h^2\right]\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
E\left[\tilde{S}_T^2\right] &= E\left[S_0^2 e^{2\sigma\tilde{W}_T-\sigma^2 T}\right]\\
&= S_0^2 E\left[e^{2\sigma W_T+2(\mu-r)T-\sigma^2 T}\right]\\
&= S_0^2 E\left[e^{2\sigma W_T+2\mu T-2rT-\sigma^2 T}\right]\\
&= S_0^2 E\left[e^{2\sigma W_T-\frac{(2\sigma)^2}{2}}\cdot e^{2\mu T-2rT+\sigma^2 T}\right]\\
&= S_0^2 E\left[e^{2\sigma W_T-\frac{(2\sigma)^2}{2}}\right] E\left[e^{2\mu T-2rT+\sigma^2 T}\right]\\
&= S_0^2 e^{2\mu T-2rT+\sigma^2 T} < \infty
\end{aligned}
$$

entonces

$$E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rT}h\right] < \infty.$$

Por otra parte, sabemos que para toda ϕ estrategia admisible que replica a $h(\phi \in \Phi)$

$$E^{\mathrm{Q}}\left[\bar{V}_T(\phi)\right] \leq V_0(\phi)$$

debido a que $\{\bar{V}_t(\phi)\}_{0\leq t\leq T}$ es una supermartingala bajo Q y como $x = \inf_{\phi\in\Phi} V_0(\phi)$, entonces

$$E^{\mathrm{Q}}\left[\bar{V}_T(\phi)\right] \leq x \quad \text{pero} \quad h = \bar{V}_T(\phi).$$

Por lo tanto

$$E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rT}h\right] \leq x.$$

En el caso particular de una opción call o put se tiene que el valor en la fecha de ejercicio es una variable aleatoria cuadrado integrable.

Proposición 3.6.4. El precio de una opción call en la fecha de vencimiento T, es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

Demostración.

Por demostrar que $h = (S_T - K)_+$ es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

$$\begin{aligned}
E^{\mathrm{Q}}\left[h^2\right] &= E^{\mathrm{Q}}\left[(S_T - K)_+^2\right], \qquad (S_T - K)_+ \leq \bar{S}_T \\
&\leq E^{\mathrm{Q}}\left[\bar{S}_T^2\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{2rT}\bar{S}_T^2\right] \\
&= e^{2rT}E^{\mathrm{Q}}\left[\bar{S}_T^2\right] \\
&= e^{2rT}E^{\mathrm{Q}}\left[\left(S_0 e^{\sigma\bar{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T}\right)^2\right] \\
&= S_0^2 e^{2rT}E^{\mathrm{Q}}\left[e^{2\sigma\bar{W}_T - \sigma^2 T}\right] \\
&= S_0^2 e^{2rT}E^{\mathrm{Q}}\left[e^{\beta\bar{W}_T - \frac{1}{4}\beta^2 T}\right], \quad \text{si} \quad \beta = 2\sigma \\
&= S_0^2 e^{2rT}E^{\mathrm{Q}}\left[e^{\beta\bar{W}_T - \frac{1}{2}\beta^2 T + \frac{1}{2}\beta^2 T - \frac{1}{4}\beta^2 T}\right] \\
&= S_0^2 e^{2rT + \frac{1}{4}\beta^2 T}E^{\mathrm{Q}}\left[e^{\beta\bar{W}_T - \frac{1}{2}\beta^2 T}\right] \\
&= S_0^2 e^{2rT + \frac{1}{4}\beta^2 T}
\end{aligned}$$

debido a que

$$E^{\mathrm{Q}}\left[e^{\beta\bar{W}_T - \frac{1}{2}\beta^2 T}\right] = 1$$

Proposición 3.6.5. El precio de una opción put en la fecha de vencimiento T, es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

Demostración.

Por demostrar que $h = (K - S_T)_+$ es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

$$\begin{aligned}
E^{\mathrm{Q}}\left[h^2\right] &= E^{\mathrm{Q}}\left[(K - S_T)_+^2\right]; \quad K \geq 0 \quad \text{y} \quad K \in R \\
&\leq E^{\mathrm{Q}}\left[K^2\right] \\
&= K^2 < \infty.
\end{aligned}$$

En conclusión, el valor de una opción call en el tiempo t está definida por la expresión

$$E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}h \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad \text{donde} \quad h = (S_T - K)_+ = f(S_T)$$

3.7 Modelo para Opciones sobre Acciones que no Pagan Dividendos

El problema de la valuación de productos derivados consiste en proporcionar el precio justo a la opción financiera en cualquier momento del tiempo, ya que cada producto derivado está definido con respecto a su pérfil de pagos terminal, el cual es positivo y $\mathcal{F}_t$-medible bajo la probabilidad Q. Por lo tanto, en cada intervalo de tiempo, el precio de la opción está dada por el valor esperado condicional terminal bajo la probabilidad Q.

Pero antes de calcular este valor esperado que nos servirá para derivar el modelo de Black-Scholes demostraremos la siguiente proposición que será de gran ayuda.

Proposición 3.7.1. Sea

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{y} \quad \bar{W}_t = W_t + \left(\tfrac{\mu - r}{\sigma}\right)t$$

entonces

$$S_T = S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
S_T &= S_0 e^{\sigma W_T + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} \\
&= S_0 e^{\sigma \bar{W}_T - (\mu - r)T + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} \\
&= S_0 e^{\sigma \bar{W}_T + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} \\
&= S_0 e^{\sigma \bar{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \\
&= S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - r)t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \\
&= S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \\
&= S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}
\end{aligned}$$

Proprosición 3.7.2. El precio de una opción call europea en el tiempo t, con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K está dado por

$$c(t, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}h\middle|\mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T-\bar{W}_t\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que S_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $\left(\bar{W}_T-\bar{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de S_t y t.

$$\begin{aligned} c(t,S_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T-\bar{W}_t\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\bar{W}_{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0,T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$c(t,S_t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma w-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)}\mathrm{d}w$$

cuando $\bar{W}_{T-t}=Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} c(t,S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}-K\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_t e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}-Ke^{-r(T-t)}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Supongamos que $\tau=T-t$, entonces

$$\begin{aligned} c(t,S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_t e^{\sigma z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau}-Ke^{-r\tau}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(S_t e^{\sigma z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau}-Ke^{-r\tau}\right)_+\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(S_t e^{\sigma z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau}-Ke^{-r\tau}\right)1_{S_T\geq K}\right]. \end{aligned}$$

Usando el siguiente lema:

$$E\left[(S_T-K)_+\right]=E\left[(S_T-K)1_{S_T\geq K}\right]$$

donde

$$1_{S_T\geq K}=\begin{cases}1, & \text{si} \quad S_T\geq K\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra. [2]

En este caso, la condición $1_{S_T \geq K}$ es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
1_{S_T \geq K} &= \left\{\omega \in \Omega : S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K e^{-r\tau} \geq 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : S_t e^{\sigma z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} \geq K e^{-r\tau}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\sigma\sqrt{\tau}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} \geq \left(\frac{K}{S_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\tau} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \geq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\tau} \geq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \geq -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : z \geq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \geq 0\}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
c(t, S_t) &= E^{Q}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K e^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\geq 0\}}\right] \\
&= E^{Q}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K e^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z\geq -d_2\}}\right]; \quad Z \sim N(0,1) \text{ bajo Q} \\
&= E^{Q}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K e^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: -z\geq -d_2\}}\right]; \quad -Z \sim N(0,1) \text{ bajo Q} \\
&= E^{Q}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K e^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z\leq d_2\}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} \left(S_t e^{-z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K e^{-r\tau}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(S_t e^{-\frac{1}{2}z^2 - z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K e^{-r\tau} e^{-\frac{1}{2}z^2}\right) \mathrm{d}z \\
&= S_t \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2+2z\sigma\sqrt{\tau}+\sigma^2\tau\right)} \mathrm{d}z - K e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= S_t \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma\sqrt{\tau}\right)^2} \mathrm{d}z - K e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

[2] Geman, E., N. E. Karaoui, and J. Rocher, (1995), Changes of Numeraire, Changes of Probability Measure and Options Pricing, Journal of Applied Probability, 32, pp. 443-458.

Sea $N(d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z$$

entonces

$$c(t, S_t) = S_t \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma\sqrt{\tau}\right)^2} \mathrm{d}z - K e^{-r\tau} N(d_2).$$

Para resolver la primera integral se tiene que hacer un cambio de variable.

Sea $v = z + \sigma\sqrt{\tau}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z \leq \mathrm{d}_2 \implies v \leq d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$, entonces

$$\begin{aligned} c(t, S_t) &= S_t \int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}v^2} \mathrm{d}v - K e^{-r\tau} N(d_2) \\ &= S_t N\left(d_2 + \sigma\sqrt{\tau}\right) - K e^{-r\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

si definimos $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$ y $\tau = T - t$, entonces

$$c(t, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

El precio de una opción put se deriva de la misma forma sólo se tiene que cambiar el perfil de pagos terminal el cual está dado por su valor esperado condicional terminal bajo la probabilidad Q como sigue:

$$E^*\left[e^{-r(T-t)} h \mid F_t\right] = E^*\left[e^{-r(T-t)} f(S_T) \mid F_t\right] \quad \text{donde } \ h = (K - S_T)_+ = f(S_T)$$

Proprosición 3.7.3. El precio de una opción put europea en el tiempo t, con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K está dado por

$$p(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}h\middle|\mathcal{F}_t\right] &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T-\bar{W}_t\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que S_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de S_t y t.

$$\begin{aligned} p(t, S_t) &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T-\bar{W}_t\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \\ &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\bar{W}_{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0, T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$p(t, S_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma w-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)}\mathrm{d}w$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} p(t, S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}\left(K - S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(Ke^{-r(T-t)} - S_te^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = T - t$, entonces

$$\begin{aligned}
p(t, S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(K e^{-r\lambda} - S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(K e^{-r\lambda} - S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)_+\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(K e^{-r\lambda} - S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right) 1_{K \geq S_T}\right].
\end{aligned}$$

Usando el siguiente lema:

$$E\left[(K - S_T)_+\right] = E\left[(K - S_T) 1_{K \geq S_T}\right]$$

donde

$$1_{K \geq S_T} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad K \geq S_T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{K \geq S_T}$ es equivalente a:

$$\begin{aligned}
1_{K \geq S_T} &= \left\{\omega \in \Omega : K e^{-r\lambda} - S_t e^{z\sigma\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda} \geq 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : K e^{-r\lambda} \geq S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\sigma\sqrt{\lambda} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\lambda} \leq \left(\frac{K}{S_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\lambda} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda \leq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\lambda} \leq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \leq -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : z \leq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \leq 0\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
p(t,S_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\le 0\}}\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega: z\le -d_2\}}\right]; \quad Z\sim N(0,1) \text{ bajo Q} \\
&= \int_{-\infty}^{-d_2}\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(Ke^{-r\lambda}e^{-\frac{1}{2}z^2} - S_t e^{-\frac{1}{2}z^2+z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)\mathrm{d}z \\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - S_t\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2-2z\sigma\sqrt{\lambda}+\sigma^2\lambda\right)}\mathrm{d}z \\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - S_t\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Sea $N(-d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$N(-d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z$$

entonces

$$p(t,S_t) = Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - S_t\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.$$

Para resolver la segunda integral se tiene que hacer un cambio de variable.

Sea $v = z-\sigma\sqrt{\lambda}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z \le -\mathrm{d}_2 \implies v \le -\left(d_2+\sigma\sqrt{\lambda}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
p(t,S_t) &= Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - S_t\int_{-\infty}^{-d_2-\sigma\sqrt{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\mathrm{d}v \\
&= Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - S_tN\left(-d_2-\sigma\sqrt{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

si definimos $d_1 = d_2+\sigma\sqrt{\lambda}$ y $\lambda = T-t$, entonces

$$p(t,S_t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

4. EXTENSIONES DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES

En la sección anterior se trataron opciones sobre activos subyacentes que no producen costos de transacción en el momento de la operación. En esta sección se extenderá el método para aplicar el modelo de Black-Scholes para otra clase de activos subyacentes debido a que en los mercados financieros existen una gran variedad de instrumentos financieros que pueden ser protegidos con opciones financieras tales como acciones que pagan dividendos continuamente, futuros de bienes, futuros de divisas y acciones cuando la tasa de interés es estocástica haciéndose algunas modificaciones simples al modelo.

4.1 Modelo para Opciones sobre Acciones que Pagan Dividendos

En el capítulo anterior se desarrollo el modelo de Black-Scholes aplicando el método de martingalas bajo el supuesto de que la acción no paga dividendos durante la expiración de la opción. En esta sección, se considera el caso cuando la companía paga dividendos en forma continua a los accionistas y además son conocidos, es decir, se asume que la acción S_t paga dividendos a una tasa constante κ.

Para encontrar la dinámica que describe S_t cuando existen pago de dividendos se consideran los siguientes modelos

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t \tag{4.1.1}$$

y

$$S_t^* = e^{\kappa t} S_t. \tag{4.1.2}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes a (4.1.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t^* &= \mathrm{d}\left(e^{\kappa t} S_t\right) \\ &= e^{\kappa t}\mathrm{d}S_t + S_t \mathrm{d}\left(e^{\kappa t}\right) \\ &= e^{\kappa t}\left(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t\right) + \kappa e^{\kappa t} S_t \mathrm{d}t \\ &= e^{\kappa t} S_t \left[(\mu + \kappa)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right] \\ &= S_t^* \left[(\mu + \kappa)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right]. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

La dinámica que describe el activo libre de riesgo está dado por

$$\mathrm{d}B_t = r B_t \mathrm{d}t \tag{4.1.4}$$

entonces las soluciones únicas de (4.1.3) y (4.1.4) son las siguientes

$$S_t^* = S_0^* e^{\sigma W_t + \left(\mu + \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \tag{4.1.5}$$

y

$$B_t = e^{rt} \quad \text{con} \quad B_0 = 1 \tag{4.1.6}$$

respectivamente. Si suponemos que $\mu \in R$ y $r, \sigma \in R^+$ son constantes.

Ahora si definimos el siguiente proceso, como el valor presente de un activo con riesgo.

$$\bar{S}_t = B_t^{-1} S_t^* = e^{-rt} S_t^*. \tag{4.1.7}$$

Otra vez aplicando la fórmula de integración por partes a $\bar{S}_t$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{S}_t &= \mathrm{d}\left(e^{-rt} S_t^*\right) \\ &= e^{-rt}\mathrm{d}S_t^* + S_t^* \mathrm{d}\left(e^{-rt}\right) \\ &= e^{-rt}\left(\mu S_t^* \mathrm{d}t + \sigma S_t^* \mathrm{d}W_t\right) - re^{-rt} S_t^* \mathrm{d}t \\ &= e^{-rt} S_t^* \left[(\mu + \kappa - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right] \\ &= \bar{S}_t \left[(\mu + \kappa - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right]. \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Si hacemos la siguiente transformación

$$\bar{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s \tag{4.1.9}$$

entonces

$$W_t = \bar{W}_t - \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s \tag{4.1.10}$$

y

$$\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}\bar{W}_t - \theta_t \mathrm{d}t. \tag{4.1.11}$$

Sustituyendo (4.1.11) en (4.1.8) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{S}_t &= \bar{S}_t \left[(\mu + \kappa - r)\mathrm{d}t + \sigma\left(\mathrm{d}\bar{W}_t - \theta_t \mathrm{d}t\right)\right] \\ &= \bar{S}_t \left[(\mu + \kappa - r - \sigma\theta_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}\bar{W}_t\right]. \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Si hacemos $\mu + \kappa - r - \sigma\theta_t = 0$, es decir, $\theta_t = \frac{1}{\sigma}(\mu + \kappa - r)$, entonces

$$\mathrm{d}\bar{S}_t = \sigma \bar{S}_t \mathrm{d}\bar{W}_t \tag{4.1.13}$$

si

$$\bar{W}_t = W_t + \frac{1}{\sigma}(\mu + \kappa - r)t. \tag{4.1.14}$$

Sustituyendo (4.1.14) en (4.1.7) se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{S}_t &= e^{-rt} S_0^* e^{\sigma W_t + \left(\mu+\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \\ &= S_0^* e^{\sigma W_t + \left(\mu+\kappa-r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \\ &= S_0^* e^{\sigma \bar{W}_t - (\mu+\kappa-r)t + \left(\mu+\kappa-r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \\ &= S_0^* e^{\sigma \bar{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

la cual es una martingala por la proposición 2.5.4.

Proposición 3.7.1. Sea

$$S_t^* = S_0^* e^{\sigma W_t + \left(\mu+\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{y} \quad \bar{W}_t = W_t + \frac{1}{\sigma}(\mu + \kappa - r)t$$

entonces

$$S_T = S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \left(\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}S_T^* &= S_0^* e^{\sigma W_T + \left(\mu+\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T} \\ &= S_0^* e^{\sigma \bar{W}_T - (\mu+\kappa-r)T + \left(\mu+\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T} \\ &= S_0^* e^{\sigma \bar{W}_T + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T} \\ &= S_0^* e^{\sigma \bar{W}_t + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \\ &= S_0^* e^{\sigma W_t + (\mu+\kappa-r)t + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \\ &= S_0^* e^{\sigma W_t + \left(\mu+\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \\ &= S_t^* e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}.\end{aligned}$$

de la ecuación (4.1.2) $S_t^* = e^{\kappa t} S_t$, entonces $S_T^* = e^{\kappa T} S_T$.

Por lo tanto

$$S_T = S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \left(\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}.$$

Proposición 4.1.2. El precio de una opción call europea en el tiempo $t \leq T$ sobre una acción que paga dividendos continuamente a una tasa constante κ durante la fecha de expiración de la opción está dado por

$$c(t, S_t) = S_t e^{-\kappa(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}h \middle| \mathcal{F}_t\right] &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - (\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que S_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de S_t y t.

$$\begin{aligned} c(t, S_t) &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - (\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\right)\right] \\ &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma\bar{W}_{T-t} - (\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0, T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$c(t, S_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma w - (\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)} dw$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} c(t, S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t} - (\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} \left(S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t} - (\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_t e^{\sigma z\sqrt{T-t} - (\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K e^{-r(T-t)}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz. \end{aligned}$$

Supongamos que $\tau = T - t$, entonces

$$
\begin{aligned}
c(t, S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_t e^{\sigma z \sqrt{\tau} - \left(\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - K e^{-r\tau} \right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= E^{\mathrm{Q}} \left[\left(S_t e^{\sigma z \sqrt{\tau} - \left(\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - K e^{-r\tau} \right)_+ \right] \\
&= E^{\mathrm{Q}} \left[\left(S_t e^{\sigma z \sqrt{\tau} - \left(\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - K e^{-r\tau} \right) 1_{S_T \geq K} \right].
\end{aligned}
$$

Usando el siguiente lema:

$$
E\left[(S_T - K)_+\right] = E\left[(S_T - K) 1_{S_T \geq K}\right]
$$

donde

$$
1_{S_T \geq K} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad S_T \geq K \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{S_T \geq K}$ es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
1_{S_T \geq K} &= \left\{ \omega \in \Omega : S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau} - \left(\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - K e^{-r\tau} \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : S_t e^{\sigma z\sqrt{\tau} - \left(\kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} \geq K e^{-r\tau} \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : e^{z\sigma\sqrt{\tau} + \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} \geq \left(\frac{K}{S_t} \right) \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\tau} + \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \geq \ln\left(\frac{K}{S_t} \right) \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\tau} \geq \ln\left(\frac{K}{S_t} \right) - \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : z \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t} \right) - \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : z \geq -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : z \geq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \geq 0\}
\end{aligned}
$$

entonces

$$\begin{aligned}
c(t,S_t) &= E^{Q}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - Ke^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\geq 0\}}\right] \\
&= E^{Q}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - Ke^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z\geq -d_2\}}\right]; \quad Z\sim N(0,1) \text{ bajo Q} \\
&= E^{Q}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - Ke^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: -z\geq -d_2\}}\right]; \quad -Z\sim N(0,1) \text{ bajo Q} \\
&= E^{Q}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - Ke^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z\leq d_2\}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{d_2}\left(S_t e^{-z\sigma\sqrt{\tau}-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - Ke^{-r\tau}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(S_t e^{-\kappa\tau}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2-z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - Ke^{-r\tau}e^{-\frac{1}{2}z^2}\right)\mathrm{d}z \\
&= S_t e^{-\kappa\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2+2z\sigma\sqrt{\tau}+\sigma^2\tau\right)}\mathrm{d}z - Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\
&= S_t e^{-\kappa\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}\mathrm{d}z - Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Sea $N(d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z$$

entonces

$$c(t,S_t) = S_t e^{-\kappa\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}\mathrm{d}z - Ke^{-r\tau}N(d_2).$$

Para resolver la primera integral se tiene que hacer un cambio de variable.

Sea $v = z+\sigma\sqrt{\tau}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z\leq \mathrm{d}_2 \implies v\leq d_2+\sigma\sqrt{\tau}$, entonces

$$\begin{aligned}
c(t,S_t) &= S_t e^{-\kappa\tau}\int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\mathrm{d}v - Ke^{-r\tau}N(d_2) \\
&= S_t e^{-\kappa\tau}N\left(d_2+\sigma\sqrt{\tau}\right) - Ke^{-r\tau}N(d_2)
\end{aligned}$$

si definimos $d_1 = d_2+\sigma\sqrt{\tau}$ y $\tau = T-t$, entonces

$$c(t,S_t) = S_t e^{-\kappa(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Proposición 4.1.3. El precio de una opción put europea en el tiempo $t \leq T$ sobre una acción que paga dividendos continuamente a una tasa constante κ durante la fecha de expiración de la opción está dado por

$$p(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_te^{-\kappa(T-t)}N(-d_1)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^Q\left[e^{-r(T-t)}h\middle|\mathcal{F}_t\right] &= E^Q\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E^Q\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T-\bar{W}_t\right)-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que S_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de S_t y t.

$$\begin{aligned} p(t, S_t) &= E^Q\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T-\bar{W}_t\right)-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right)\right] \\ &= E^Q\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\bar{W}_{T-t}-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0, T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$p(t, S_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma w-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)}\mathrm{d}w$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} p(t, S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}\left(K - S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(Ke^{-r(T-t)} - S_te^{\sigma z\sqrt{T-t}-\left(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = T - t$, entonces

$$
\begin{aligned}
p(t, S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda}-(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\
&= E^{Q}\left[\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda}-(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda}\right)_+\right] \\
&= E^{Q}\left[\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda}-(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda}\right) 1_{K\geq S_T}\right].
\end{aligned}
$$

Usando el siguiente lema:

$$
E\left[(K - S_T)_+\right] = E\left[(K - S_T)1_{K\geq S_T}\right]
$$

donde

$$
1_{K\geq S_T} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad K \geq S_T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{K\geq S_T}$ es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
1_{K\geq S_T} &= \left\{\omega \in \Omega : Ke^{-r\lambda} - S_t e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda} \geq 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : Ke^{-r\lambda} \geq S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda}-(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\sigma\sqrt{\lambda}+(r-\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda} \leq \left(\frac{K}{S_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\lambda} + (r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2)\lambda \leq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\lambda} \leq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2)\lambda\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \leq -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : z \leq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \leq 0\}
\end{aligned}
$$

entonces

$$\begin{aligned}
p(t,S_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\le 0\}}\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega: z\le -d_2\}}\right]; \quad Z\sim N(0,1) \;\text{ bajo Q} \\
&= \int_{-\infty}^{-d_2}\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-(\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2)\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(Ke^{-r\lambda}e^{-\frac{1}{2}z^2} - S_t e^{-\kappa\lambda}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2+z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)\mathrm{d}z \\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - S_t e^{-\kappa\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2-2z\sigma\sqrt{\lambda}+\sigma^2\lambda\right)}\mathrm{d}z \\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - S_t e^{-\kappa\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Sea $N(-d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$N(-d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z$$

entonces

$$p(t,S_t) = Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - S_t e^{-\kappa\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.$$

Para resolver la segunda integral se tiene que hacer un cambio de variable.

Sea $v = z-\sigma\sqrt{\lambda}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z \le -\mathrm{d}_2 \implies v \le -\left(d_2+\sigma\sqrt{\lambda}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
p(t,S_t) &= Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - S_t e^{-\kappa\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2-\sigma\sqrt{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\mathrm{d}v \\
&= Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - S_t e^{-\kappa\lambda}N\left(-d_2-\sigma\sqrt{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

si definimos $d_1 = d_2+\sigma\sqrt{\lambda}$ y $\lambda = T-t$, entonces

$$p(t,S_t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t e^{-\kappa(T-t)}N(-d_1)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\kappa+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

4.2 Modelo para Opciones de Futuros

La modelación de opciones de futuros es sencilla a diferencia de otros instrumentos financieros ya que los contratos de futuros son líquidos y operan continuamente cuando las bolsas de productos derivados están abiertas, permitiendo a los operadores de opciones el acceso a los precios de los activos subyacentes que están muy activos. Bajo este esquema pueden operarse opciones de subyacentes de características complicadas en el mercado de materias primas (*commodities*), como los productos agropecuarios y de enérgeticos.

Para encontrar la dinámica que describe el precio de los futuros f_t se considera que el modelo de precios de un activo subyacente S_t está representado por el movimiento Browniano geométrico

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t. \tag{4.2.1}$$

Ahora los precios de los forwards están dados en términos de los precios de los bonos como

$$F_t = \frac{S_t}{B\left(t, T^*\right)}, \qquad t \in [0, T^*] \tag{4.2.2}$$

donde $T^* \geq T$ es la fecha de entrega y por la proposición siguiente.

Proposición 4.2.1. Si el proceso del precio del bono es predecible, el mercado de futuros y spot está libre de arbitraje si y sólo si los precios de los futuros y forwards son iguales para cada activo subyacente y $t \leq T$,

$$f_S(t, T) = F_S(t, T)$$

entonces

$$f_t = F_t = S_t e^{r(T^*-t)}. \tag{4.2.3}$$

Así que aplicando la fórmula de integración por partes a (4.2.3) se determina la dinámica para los precios de los futuros

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f_t &= \mathrm{d}\left(S_t e^{r(T^*-t)}\right) \\
&= e^{r(T^*-t)}\mathrm{d}S_t + S_t \mathrm{d}\left(e^{r(T^*-t)}\right) \\
&= e^{r(T^*-t)}(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t) - r e^{r(T^*-t)} S_t \mathrm{d}t \\
&= S_t e^{r(T^*-t)}\left[(\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right] \\
&= (\mu - r) f_t \mathrm{d}t + \sigma f_t \mathrm{d}W_t.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

donde la solución única de (4.2.4) es

$$f_t = f_0 e^{\sigma W_t + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}. \tag{4.2.5}$$

Si hacemos la siguiente transformación

$$\bar{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s \tag{4.2.6}$$

entonces

$$W_t = \bar{W}_t - \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s \tag{4.2.7}$$

y

$$\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}\bar{W}_t - \theta_t \mathrm{d}t. \tag{4.2.8}$$

Sustituyendo (4.2.8) en (4.2.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_t &= (\mu - r) f_t \mathrm{d}t + \sigma f_t (\mathrm{d}\bar{W}_t - \theta_t \mathrm{d}t) \\ &= (\mu - r - \sigma\theta_t) f_t \mathrm{d}t + \sigma f_t \mathrm{d}\bar{W}_t. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Si hacemos $\mu - r - \sigma\theta_t = 0$, es decir, $\theta_t = \frac{1}{\sigma}(\mu - r)$, entonces

$$\mathrm{d}f_t = \sigma f_t \mathrm{d}\bar{W}_t \tag{4.2.10}$$

si

$$\bar{W}_t = W_t + \frac{1}{\sigma}(\mu - r)t. \tag{4.2.11}$$

Sustituyendo (4.2.11) en (4.2.5) se tiene que

$$\begin{aligned} f_t &= f_0 e^{\sigma W_t + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}. \\ &= f_0 e^{\sigma \bar{W}_t - (\mu - r)t + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= f_0 e^{\sigma \bar{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

la cual es una martingala por la proposición 2.5.4.

Proposición 4.2.2. Sea

$$f_t = f_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{y} \quad \bar{W}_t = W_t + \frac{1}{\sigma}(\mu - r)t$$

entonces

$$f_T = f_t e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_T &= f_0 e^{\sigma W_T + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \\ &= f_0 e^{\sigma \bar{W}_T - (\mu - r)T + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \\ &= f_0 e^{\sigma \bar{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T} \\ &= f_0 e^{\sigma \bar{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\ &= f_0 e^{\sigma W_t + (\mu - r)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\ &= f_0 e^{\sigma W_t + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\ &= f_t e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \end{aligned}$$

Proposición 4.2.3. El precio de una opción call de futuros en el tiempo t, con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K está dado por

$$c(t, f_t) = e^{-r(T-t)} \left(f_t N(d_1) - K N(d_2) \right)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Si suponemos que el vencimiento del bono es igual a la fecha de vencimiento de la opción, es decir, $T^* = T$.

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} h \middle| \mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} f(f_T) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que f_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de f_t y t.

$$
\begin{aligned}
c(t, f_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma \bar{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0, T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$
c(t, f_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma w - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)} \mathrm{d}w
$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$
\begin{aligned}
c(t, f_t) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - K\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Supongamos que $\tau = T - t$, entonces

$$
\begin{aligned}
c(t, f_t) &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K\right)_+\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K\right) 1_{f_T \geq K}\right].
\end{aligned}
$$

Usando el siguiente lema:

$$
E\left[(f_T - K)_+\right] = E\left[(f_T - K) 1_{f_T \geq K}\right]
$$

donde

$$
1_{f_T \geq K} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad f_T \geq K \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{f_T \geq K}$ es equivalente a:

$$\begin{aligned}
1_{f_T \geq K} &= \left\{\omega \in \Omega : f_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K \geq 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : f_t e^{\sigma z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} \geq K\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} \geq \left(\frac{K}{f_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\tau \geq \ln\left(\frac{K}{f_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\tau} \geq \ln\left(\frac{K}{f_t}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{f_t}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \geq -\frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : z \geq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \geq 0\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
c(t, f_t) &= E^{Q}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K\right)1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\geq 0\}}\right] \\
&= E^{Q}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K\right)1_{\{\omega\in\Omega: z\geq -d_2\}}\right]; \quad Z \sim N(0,1) \text{ bajo Q} \\
&= E^{Q}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K\right)1_{\{\omega\in\Omega: -z\geq -d_2\}}\right]; \quad -Z \sim N(0,1) \text{ bajo Q} \\
&= E^{Q}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K\right)1_{\{\omega\in\Omega: z\leq d_2\}}\right] \\
&= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\left(f_t \cdot e^{-z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\
&= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f_t \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2-z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - Ke^{-\frac{1}{2}z^2}\right)\mathrm{d}z \\
&= f_t \cdot e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2+2z\sigma\sqrt{\tau}+\sigma^2\tau\right)}\mathrm{d}z - Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\
&= f_t \cdot e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}\mathrm{d}z - Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Sea $N(d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z$$

entonces

$$c(t, f_t) = f_t \cdot e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma\sqrt{\tau}\right)^2} \mathrm{d}z - Ke^{-r\tau}N(d_2).$$

Para resolver la primera integral se tiene que hacer un cambio de variable.

Sea $v = z + \sigma\sqrt{\tau}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z \leq \mathrm{d}_2 \implies v \leq d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$, entonces

$$\begin{aligned} c(t, f_t) &= f_t \cdot e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}v^2} \mathrm{d}v - Ke^{-r\tau}N(d_2) \\ &= f_t \cdot e^{-r\tau} N\left(d_2 + \sigma\sqrt{\tau}\right) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \end{aligned}$$

si definimos $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$, $\tau = T - t$, entonces

$$c(t, f_t) = e^{-r(T-t)}\left(f_t N\left(d_1\right) - KN(d_2)\right)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Se puede observar que los parámetros d_1 y d_2 no dependen de la tasa de interés libre de riesgo r, debido a que se define un portafolio libre de riesgo replicante que consiste de una posición en opciones de futuros y una posición con un contrato subyacente de futuros que compensa. Por lo que no se requiere de una inversión inicial. [1]

Proposición 4.2.4. El precio de una opción put de futuros en el tiempo t, con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K está dado por

$$p(t, f_t) = e^{-r(T-t)}\left(KN\left(-d_2\right) - f_t N\left(-d_1\right)\right)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}h \middle| \mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f(f_T) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(f_t \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

[1] Bingham, Nicholas H. and R. Kiesel, (1998), Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives, London, Springer-Verlag.

Puesto que f_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de f_t y t.

$$\begin{aligned} p(t, f_t) &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \\ &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma \bar{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0, T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$p(t, f_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma w - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)} \mathrm{d}w$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} p(t, f_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K - f_t e^{\sigma z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = T - t$, entonces

$$\begin{aligned} p(t, f_t) &= e^{-r\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K - f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\ &= E^{Q}\left[e^{-r\lambda}\left(K - f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)_+\right] \\ &= E^{Q}\left[e^{-r\lambda}\left(K - f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right) 1_{K \geq f_T}\right]. \end{aligned}$$

Usando el siguiente lema:

$$E\left[(K - f_T)_+\right] = E\left[(K - f_T) 1_{K \geq f_T}\right]$$

donde

$$1_{K \geq f_T} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad K \geq f_T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{K\geq f_T}$ es equivalente a:

$$\begin{aligned}
1_{K\geq f_T} &= \left\{\omega \in \Omega : K - f_t \cdot e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda} \geq 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : K \geq f_t \cdot e^{\sigma z\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda} \leq \left(\tfrac{K}{f_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\lambda} - \tfrac{1}{2}\sigma^2\lambda \leq \ln\left(\tfrac{K}{f_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\lambda} \leq \ln\left(\tfrac{K}{f_t}\right) + \tfrac{1}{2}\sigma^2\lambda\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{f_t}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \leq -\frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : z \leq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \leq 0\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
p(t, f_t) &= E^{Q}\left[e^{-r\lambda}\left(K - f_t \cdot e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\leq 0\}}\right] \\
&= E^{Q}\left[e^{-r\lambda}\left(K - f_t \cdot e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z\leq -d_2\}}\right]; \quad Z \sim N(0,1) \ \text{ bajo Q} \\
&= e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\left(K - f_t \cdot e^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\
&= e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(Ke^{-\frac{1}{2}z^2} - f_t \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2+z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)\mathrm{d}z \\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - f_t \cdot e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2-2z\sigma\sqrt{\lambda}+\sigma^2\lambda\right)}\mathrm{d}z \\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - f_t \cdot e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Sea $N(-d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$N(-d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z$$

entonces

$$p(t, f_t) = Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - f_t \cdot e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.$$

Para resolver la segunda integral se tiene que hacer un cambio de variable.

Sea $v = z - \sigma\sqrt{\lambda}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z \leq -\mathrm{d}_2 \implies v \leq -\left(d_2 + \sigma\sqrt{\lambda}\right)$, entonces

$$\begin{aligned} p(t, f_t) &= K e^{-r\lambda} N(-d_2) - f_t \cdot e^{-r\lambda} \int_{-\infty}^{-d_2-\sigma\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}v^2} \mathrm{d}v \\ &= K e^{-r\lambda} N(-d_2) - f_t \cdot e^{-r\lambda} N\left(-d_2 - \sigma\sqrt{\lambda}\right) \end{aligned}$$

si definimos $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\lambda}$, $\lambda = T - t$, entonces

$$p(t, f_t) = e^{-r(T-t)} \left(K N(-d_2) - f_t \cdot N(-d_1)\right)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

4.3 Modelo para Opciones sobre Futuros de Divisas

Frecuentemente, los inversionistas están interesados en los instrumentos financieros de varios paises donde la exposición al riesgo se presenta en términos de la fluctuación del precio de una divisa en términos de otra. Para hacer posible su cobertura se han diseñado contratos cuyos subyacentes es una determinada moneda que se restringe a dos paises, el país domestico con tasa r_d y el país extranjero con tasa r_e.

Sea $B_t = e^{r_d t}$ y $D_t = e^{r_e t}$ los procesos de las inversiones iniciales o activos libres de riesgo entonces la dinámica que describe a el precio del tipo de cambio Q_t está representado por el movimiento Browniano geométrico d-dimensional

$$\mathrm{d}Q_t = \mu_Q Q_t \mathrm{d}t + \sigma_Q Q_t \mathrm{d}W_t; \quad \text{con} \quad Q_0 > 0 \tag{4.3.1}$$

donde μ_Q es constante, σ_Q es un vector positivo de volatilidades y W_t es un movimiento Browniano estándar.

La solución única de (4.3.1) está dada por

$$Q_t = Q_0 \cdot e^{\sigma_Q W_t + (\mu_Q - \frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2)t}$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclideana en R^d.

Si definimos el siguiente proceso Q_t^* como el producto entre el valor en el tiempo t del activo libre de riesgo extranjero cuando se hace la conversión a la divisa domestica y el valor presente del activo libre de riesgo domestico del tipo de cambio [2]

$$Q_t^* = e^{(r_e - r_d)t} Q_t, \quad \forall t \in [0, T^*]. \tag{4.3.2}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes a (4.3.2) se encuentra la dinámica para el precio de los futuros de divisas

$$\begin{aligned} dQ_t^* &= d\left(e^{(r_e-r_d)t} Q_t\right) \\ &= e^{(r_e-r_d)t} dQ_t + Q_t d\left(e^{(r_e-r_d)t}\right) \\ &= e^{(r_e-r_d)t}\left(\mu_Q Q_t dt + \sigma_Q Q_t dW_t\right) + (r_e - r_d) e^{(r_e-r_d)t} Q_t dt \\ &= e^{(r_e-r_d)t} Q_t \left[(\mu_Q + r_e - r_d)dt + \sigma_Q dW_t\right] \\ &= Q_t^* \left[(\mu_Q + r_e - r_d)dt + \sigma_Q dW_t\right] \quad \text{con} \quad Q_0 > 0. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

donde la solución única de (4.3.3) está dada por

$$Q_t^* = Q_0 \cdot e^{\sigma_Q W_t + \left(\mu_Q + r_e - r_d - \frac{1}{2}\sigma_Q^2\right)t}. \tag{4.3.4}$$

Si hacemos la siguiente transformación

$$\bar{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds \tag{4.3.5}$$

entonces

$$W_t = \bar{W}_t - \int_0^t \theta_s ds \tag{4.3.6}$$

y

$$dW_t = d\bar{W}_t - \theta_t dt. \tag{4.3.7}$$

Sustituyendo (4.3.7) en (4.3.3) se tiene que

$$\begin{aligned} dQ_t^* &= Q_t^* \left[(\mu_Q + r_e - r_d)dt + \sigma_Q \left(d\bar{W}_t - \theta_t dt\right)\right] \\ &= Q_t^* \left[(\mu_Q + r_e - r_d - \sigma_Q \theta_t)dt + \sigma_Q d\bar{W}_t\right]. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Si hacemos $\mu_Q + r_e - r_d - \sigma_Q \theta_t = 0$, es decir, $\theta_t = \frac{1}{\sigma_Q}(\mu_Q + r_e - r_d)$, entonces

$$dQ_t^* = \sigma_Q Q_t^* d\bar{W}_t \tag{4.3.9}$$

si

$$\bar{W}_t = W_t + \frac{1}{\sigma_Q}(\mu_Q + r_e - r_d)t. \tag{4.3.10}$$

[2] Musiela M. and M. Rutkowski, (1997), Martingale Methods in Financial Modelling, Springer-Verlag New York, Inc.

Sustituyendo (4.3.10) en (4.3.4) se tiene que

$$\begin{aligned} Q_t^* &= Q_0 \cdot e^{\sigma_Q W_t + \left(\mu_Q + r_e - r_d - \frac{1}{2}\sigma_Q^2\right)t} \\ &= Q_0 \cdot e^{\sigma_Q \tilde{W}_t - (\mu_Q + r_e - r_d)t + \left(\mu_Q + r_e - r_d - \frac{1}{2}\sigma_Q^2\right)t} \\ &= Q_0 \cdot e^{\sigma_Q \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 t} \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

la cual es una martingala por la proposición 2.5.4.

Proposición 4.3.1. El precio forward de divisas $F(t,T)$ en el tiempo t para la fecha de entrega T está representado por la siguiente fórmula

$$f_t = F(t,T) = e^{(r_d - r_e)(T-t)}Q_t, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Proposición 4.3.2. Sea

$$Q_t^* = Q_0 \cdot e^{\sigma_Q W_t + \left(\mu_Q + r_e - r_d - \frac{1}{2}\sigma_Q^2\right)t} \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{y} \quad \tilde{W}_t = W_t + \frac{1}{\sigma_Q}(\mu_Q + r_e - r_d)t$$

entonces

$$Q_T = f_t \cdot e^{\sigma_Q (\tilde{W}_t - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} Q_T^* &= Q_0 \cdot e^{\sigma_Q W_T + \left(\mu_Q + r_e - r_d - \frac{1}{2}\sigma_Q^2\right)T} \\ &= Q_0 \cdot e^{\sigma_Q \tilde{W}_T - (\mu_Q + r_e - r_d)T + \left(\mu_Q + r_e - r_d - \frac{1}{2}\sigma_Q^2\right)T} \\ &= Q_0 \cdot e^{\sigma_Q \tilde{W}_T - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 T} \\ &= Q_0 \cdot e^{\sigma_Q \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 t} \cdot e^{\sigma_Q (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)} \\ &= Q_0 \cdot e^{\sigma_Q W_t + \left(\mu_Q + r_e - r_d - \frac{1}{2}\sigma_Q^2\right)t} \cdot e^{\sigma_Q (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)} \\ &= Q_t^* \cdot e^{\sigma_Q (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)} \end{aligned}$$

Por la ecuación (4.3.2) se sabe que $Q_t^* = e^{(r_e - r_d)t}Q_t$, entonces $Q_T^* = e^{(r_e - r_d)T}Q_T$.

Por lo tanto

$$Q_T = f_t \cdot e^{\sigma_Q (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)}$$

Proposición 4.3.3. El precio de una opción call de futuros de divisas europea en el tiempo t, con fecha de expiración T y precio de ejercicio K está dado por

$$c(t, f_t) = e^{-r_d(T-t)} \left(f_t N(d_1) - K N(d_2) \right)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)}{\sigma_Q \sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)}{\sigma_Q \sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r_d(T-t)} h \middle| \mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r_d(T-t)} f(Q_T) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r_d(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que f_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de f_t y t.

$$\begin{aligned} c(t, f_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r_d(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)}\right)\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r_d(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q \bar{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0, T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$c(t, f_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_d(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q w - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)} \mathrm{d}w$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} c(t, f_t) &= e^{-r_d(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\ &= e^{-r_d(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_t \cdot e^{\sigma_Q z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 (T-t)} - K\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Supongamos que $\tau = T - t$, entonces

$$\begin{aligned}
c(t, f_t) &= e^{-r_d \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_t \cdot e^{\sigma_Q z \sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau} - K \right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= E^{\mathrm{Q}} \left[e^{-r_d \tau} \left(f_t \cdot e^{\sigma_Q z \sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau} - K \right)_+ \right] \\
&= E^{\mathrm{Q}} \left[e^{-r_d \tau} \left(f_t \cdot e^{\sigma_Q z \sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau} - K \right) 1_{Q_T \geq K} \right].
\end{aligned}$$

Usando el siguiente lema:

$$E\left[(Q_T - K)_+\right] = E\left[(Q_T - K) 1_{Q_T \geq K}\right]$$

donde

$$1_{Q_T \geq K} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad Q_T \geq K \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{Q_T \geq K}$ es equivalente a:

$$\begin{aligned}
1_{Q_T \geq K} &= \left\{ \omega \in \Omega : f_t \cdot e^{z\sigma_Q \sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau} - K \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : K \leq f_t \cdot e^{\sigma_Q z \sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau} \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : e^{z\sigma_Q \sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau} \geq \left(\tfrac{K}{f_t} \right) \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : z\sigma_Q \sqrt{\tau} - \tfrac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau \geq \ln\left(\tfrac{K}{f_t} \right) \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : z\sigma_Q \sqrt{\tau} \geq \ln\left(\tfrac{K}{f_t} \right) + \tfrac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : z \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{f_t} \right) + \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau}{\sigma_Q \sqrt{\tau}} \right\} \\
&= \left\{ \omega \in \Omega : z \leq -\frac{\ln\left(\frac{f_t}{K} \right) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \tau}{\sigma_Q \sqrt{\tau}} \right\} \\
&= \{ \omega \in \Omega : z \leq -d_2 \} = \{ \omega \in \Omega : z + d_2 \leq 0 \}
\end{aligned}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
c(t, f_t) &= E^{Q}\left[e^{-r_d\tau}\left(f_t \cdot e^{z\sigma_Q\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\tau}\right)1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\leq 0\}}\right]\\
&= E^{Q}\left[e^{-r_d\tau}\left(f_t \cdot e^{z\sigma_Q\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\tau}-K\right)1_{\{\omega\in\Omega: z\leq -d_2\}}\right]; \quad Z\sim N(0,1) \text{ bajo Q}\\
&= E^{Q}\left[e^{-r_d\tau}\left(f_t \cdot e^{z\sigma_Q\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\tau}-K\right)1_{\{\omega\in\Omega: -z\geq -d_2\}}\right]; \quad -Z\sim N(0,1) \text{ bajo Q}\\
&= E^{Q}\left[e^{-r_d\tau}\left(f_t \cdot e^{z\sigma_Q\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\tau}-K\right)1_{\{\omega\in\Omega: z\leq d_2\}}\right]\\
&= e^{-r_d\tau}\int_{-\infty}^{-d_2}\left(f_t\cdot e^{-z\sigma_Q\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\tau}-K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\\
&= e^{-r_d\tau}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f_t\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2-z\sigma_Q\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\tau}-Ke^{-\frac{1}{2}z^2}\right)\mathrm{d}z\\
&= f_t\cdot e^{-r_d\tau}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2+2z\sigma_Q\sqrt{\tau}+\sigma_Q^2\tau\right)}\mathrm{d}z - Ke^{-r_d\tau}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\\
&= f_t\cdot e^{-r_d\tau}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma_Q\sqrt{\tau}\right)^2}\mathrm{d}z - Ke^{-r_d\tau}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Sea $N(d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$
N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z
$$

entonces

$$
c(t, f_t) = f_t\cdot e^{-r_d\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma_Q\sqrt{\tau}\right)^2}\mathrm{d}z - Ke^{-r_d\tau}N(d_2).
$$

Para resolver la primera integral se tiene que hacer un cambio de variable.

Sea $v = z+\sigma_Q\sqrt{\tau}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z\leq \mathrm{d}_2 \implies v\leq d_2+\sigma_Q\sqrt{\tau}$, entonces

$$
\begin{aligned}
c(t, f_t) &= f_t\cdot e^{-r_d\tau}\int_{-\infty}^{d_2+\sigma_Q\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\mathrm{d}v - Ke^{-r_d\tau}N(d_2)\\
&= f_t\cdot e^{-r_d\tau}N\left(d_2+\sigma_Q\sqrt{\tau}\right) - Ke^{-r_d\tau}N(d_2)
\end{aligned}
$$

si definimos $d_1 = d_2+\sigma_Q\sqrt{\tau}$, $\tau = T-t$, entonces

$$
c(t, f_t) = e^{-r_d(T-t)}\left(f_tN(d_1) - KN(d_2)\right)
$$

donde

$$
d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}{\sigma_Q\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right)-\frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}{\sigma_Q\sqrt{T-t}}.
$$

Proposición 4.3.4. El precio de una opción put de futuros de divisas europea en el tiempo t, con fecha de expiración T y precio de ejercicio K está dado por

$$p(t, f_t) = e^{-r_d(T-t)} \left(KN(-d_2) - f_t N(-d_1) \right)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}{\sigma_Q\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}{\sigma_Q\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{Q}\left[e^{-r_d(T-t)}h \middle| \mathcal{F}_t\right] &= E^{Q}\left[e^{-r_d(T-t)} f(Q_T) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{Q}\left[e^{-r_d(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que f_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de f_t y t.

$$\begin{aligned} p(t, f_t) &= E^{Q}\left[e^{-r_d(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}\right)\right] \\ &= E^{Q}\left[e^{-r_d(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q \bar{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0, T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$p(t, f_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_d(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q w - \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)} \mathrm{d}w$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} p(t, f_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_d(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\sigma_Q z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\ &= e^{-r_d(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K - S_t e^{\sigma_Q z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = T - t$, entonces

$$
\begin{aligned}
p(t, f_t) &= e^{-r_d\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K - f_t \cdot e^{\sigma_Q z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r_d\lambda}\left(K - f_t \cdot e^{\sigma_Q z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda}\right)_+\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r_d\lambda}\left(K - f_t \cdot e^{\sigma_Q z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda}\right) 1_{K \geq Q_T}\right].
\end{aligned}
$$

Usando el siguiente lema:

$$
E\left[(K - Q_T)_+\right] = E\left[(K - Q_T) 1_{K \geq Q_T}\right]
$$

donde

$$
1_{K \geq Q_T} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad K \geq Q_T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{K \geq Q_T}$ es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
1_{K \geq Q_T} &= \left\{\omega \in \Omega : K - f_t \cdot e^{z\sigma_Q \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda} \geq 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : K \geq f_t \cdot e^{\sigma_Q z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\sigma_Q \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda} \leq \left(\frac{K}{f_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma_Q \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda \leq \ln\left(\frac{K}{f_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma_Q \sqrt{\lambda} \leq \ln\left(\frac{K}{f_t}\right) + \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{f_t}\right) + \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda}{\sigma_Q \sqrt{\lambda}}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \leq -\frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 \lambda}{\sigma_Q \sqrt{\lambda}}\right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : z \leq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \leq 0\}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
p(t,f_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r_d\lambda}\left(K - f_t\cdot e^{z\sigma_Q\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega:z+d_2\leq 0\}}\right]\\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r_d\lambda}\left(K - f_t\cdot e^{z\sigma_Q\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega:z\leq -d_2\}}\right]; \quad Z\sim N(0,1) \text{ bajo Q}\\
&= e^{-r_d\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\left(K - f_t\cdot e^{z\sigma_Q\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\\
&= e^{-r_d\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(Ke^{-\frac{1}{2}z^2} - f_t\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2+z\sigma_Q\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma_Q^2\lambda}\right)\mathrm{d}z\\
&= Ke^{-r_d\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - f_t\cdot e^{-r_d\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2-2z\sigma_Q\sqrt{\lambda}+\sigma_Q^2\lambda\right)}\mathrm{d}z.\\
&= Ke^{-r_d\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - f_t\cdot e^{-r_d\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma_Q\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Sea $N(-d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$
N(-d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z
$$

entonces

$$
p(t,f_t) = Ke^{-r_d\lambda}N(-d_2) - f_t\cdot e^{-r_d\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.
$$

Para resolver la segunda integral se tiene que hacer un cambio de variable. Sea $v = z - \sigma_Q\sqrt{\lambda}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z \leq -\mathrm{d}_2 \implies v \leq -\left(d_2 + \sigma_Q\sqrt{\lambda}\right)$, entonces

$$
\begin{aligned}
p(t,f_t) &= Ke^{-r_d\lambda}N(-d_2) - f_t\cdot e^{-r_d\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2-\sigma_Q\sqrt{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\mathrm{d}v\\
&= Ke^{-r_d\lambda}N(-d_2) - f_t\cdot e^{-r_d\lambda}N\left(-d_2 - \sigma_Q\sqrt{\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

si definimos $d_1 = d_2 + \sigma_Q\sqrt{\lambda}$, $\lambda = T - t$, entonces

$$
p(t,f_t) = e^{-r_d(T-t)}\left(KN(-d_2) - f_t\cdot N(-d_1)\right)
$$

donde

$$
d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}{\sigma_Q\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}{\sigma_Q\sqrt{T-t}}.
$$

4.4 Modelo para Opciones Cuando la Tasa de Interés es Estocástica

Hasta ahora se han visto opciones sobre activos subyacentes cuyas fluctuaciones son más o menos independientes de las fluctuaciones de los parámetros del modelo de Black-Scholes. Cuando se introducen opciones sobre tasas de interés la situación es bastante más complicada, ya que se tiene que construir un modelo adecuado para la evolución de las tasas debido a que no sólo se trata de una variable subyacente sino de varias, es decir, una tasa de interés para cada plazo. Sin embargo, se considera un modelo especial que nos permitirá aplicar el modelo de Black-Scholes cuando la tasa de interés es estocástica que fue establecido por Robert Merton en 1973. [3]

La dinámica del activo subyacente S_t está determinada por

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu_S \mathrm{d}t + \sigma_S \mathrm{d}X_t \tag{4.4.1}$$

mientras que la dinámica de la tasa de interés está representada por el modelo de precios de un bono cupón cero como

$$\frac{\mathrm{d}B}{B} = \mu_B \mathrm{d}t + \sigma_B \mathrm{d}Z_t \tag{4.4.2}$$

donde Z_t es también un movimiento Browniano estándar definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. El proceso $B(t,T)$, en la fecha de vencimiento, es adaptado y estrictamente positivo para $t \in [0,T]$ y $B(T,T) = 1$. Finalmente, la volatilidad del precio del bono se asume que es una función determinística del tiempo.

Para derivar la ecuación diferencial estocástica del valor $\ln(S/B)$ suponemos que S y B se distribuyen lognormal entonces por el Lema de Itô existe una función $G(t, S, B)$.

Haciendo la expansión por series de Taylor hasta términos de segundo orden de la función $G(t, S, B)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G =& \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{\partial G}{\partial B}\mathrm{d}B + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial B^2}(\mathrm{d}B)^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial t}\mathrm{d}S\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 G}{\partial B \partial t}\mathrm{d}B\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 G}{\partial B \partial S}\mathrm{d}B\mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

[3] Merton R., (1973a), Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, pp. 141-183.

Sustituyendo (4.4.1) y (4.4.2) en (4.4.3) y aplicando las reglas del cálculo estocástico se tiene que

$$\mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0; \quad \mathrm{d}t\mathrm{d}X_t; \quad \mathrm{d}t\mathrm{d}Z_t = 0; \quad (\mathrm{d}X_t)^2 = \mathrm{d}t; \quad (\mathrm{d}Z_t)^2 = \mathrm{d}t; \quad \text{y} \quad \mathrm{d}X_t\mathrm{d}Z_t = \rho\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}G &= \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S}(\mu_S S\mathrm{d}t + \sigma_S S\mathrm{d}X_t) + \frac{\partial G}{\partial B}(\mu_B B\mathrm{d}t + \sigma_B B\mathrm{d}Z_t) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial B^2}\sigma_B^2 B^2\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 G}{\partial B\partial S}\rho\sigma_B\sigma_S BS\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial S}\mu_S S + \frac{\partial G}{\partial B}\mu_B B + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial B^2}\sigma_B^2 B^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial B^2}\sigma_B^2 B^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial B\partial S}\rho\sigma_B\sigma_S BS\right)\mathrm{d}t \\
&+ \frac{\partial G}{\partial S}\sigma_S S\mathrm{d}X_t + \frac{\partial G}{\partial B}\sigma_B B\mathrm{d}Z_t.
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Ahora estableciendo $G(S, B, t) = \ln(S/B)$

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}; \quad \frac{\partial G}{\partial B} = -\frac{1}{B}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial B^2} = \frac{1}{B^2}; \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0; \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial B\partial S} = 0.$$

Sustituyendo las derivadas parciales en (4.4.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ln\left(\frac{S}{B}\right) &= \left[\left(\frac{1}{S}\right)\mu_S S - \left(\frac{1}{B}\right)\mu_B B - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S^2}\right)\sigma_S^2 S^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B^2}\right)\sigma_B^2 B^2\right]\mathrm{d}t \\
&+ \left(\frac{1}{S}\right)\sigma_S S\mathrm{d}X_t - \left(\frac{1}{B}\right)\sigma_B B\mathrm{d}Z_t \\
&= \left[\mu_S - \mu_B - \tfrac{1}{2}\sigma_S^2 + \tfrac{1}{2}\sigma_B^2\right]\mathrm{d}t + \sigma_S\mathrm{d}X_t - \sigma_B\mathrm{d}Z_t.
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Si suponemos que

$$\sigma_S\mathrm{d}X_t - \sigma_B\mathrm{d}Z_t = \hat{\sigma}\mathrm{d}W_t$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X_t - Z_t] &= \mathrm{Var}[X_t] + \mathrm{Var}[Z_t] - 2\mathrm{Cov}[X_t, Z_t] \\
&= \sigma_S^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_B.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\hat{\sigma}(T-t) = \int_t^T (\sigma_S^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_B)\mathrm{d}s$$

$$\hat{\mu} = (\mu_S - \mu_B + \sigma_B^2 - \rho\sigma_S\sigma_B)$$

$$\mathrm{d}\ln\left(\frac{S}{B}\right) = \hat{\mu}dt + \hat{\sigma}\mathrm{d}W_t. \tag{4.4.6}$$

Sea

$$f_t = \frac{S}{B} \quad \text{y} \quad B = e^{-r(T-t)}$$

entonces

$$\mathrm{d}f_t = \hat{\mu} f_t \mathrm{d}t + \hat{\sigma} f_t \mathrm{d}W_t. \tag{4.4.7}$$

donde la solución única de (4.4.7) es

$$f_t = f_0 \cdot e^{\hat{\sigma} W_t + (\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma})t}. \tag{4.4.8}$$

Si hacemos la siguiente transformación

$$\bar{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s. \tag{4.4.9}$$

entonces

$$W_t = \bar{W}_t - \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s. \tag{4.4.10}$$

y

$$\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}\bar{W}_t - \theta_t \mathrm{d}t. \tag{4.4.11}$$

Sustituyendo (4.4.11) en (4.4.7) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_t &= \hat{\mu} f_t \mathrm{d}t + \hat{\sigma} f_t (\mathrm{d}\bar{W}_t - \theta_t \mathrm{d}t) \\ &= (\hat{\mu} - \hat{\sigma}\theta_t) f_t \mathrm{d}t + \hat{\sigma} f_t \mathrm{d}\bar{W}_t. \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Si hacemos $\hat{\mu} - \hat{\sigma}\theta_t = 0$, es decir, $\theta_t = \hat{\mu}/\hat{\sigma}$, entonces

$$\mathrm{d}f_t = \hat{\sigma} f_t \mathrm{d}\bar{W}_t \tag{4.4.13}$$

si

$$\bar{W}_t = W_t + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} t. \tag{4.4.14}$$

Sustituyendo (4.4.14) en (4.4.8) se tiene que

$$\begin{aligned} f_t &= f_0 \cdot e^{\hat{\sigma} W_t + (\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma})t} \\ &= f_0 \cdot e^{\hat{\sigma} \bar{W}_t - \hat{\mu} t + (\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma})t}\,. \\ &= f_0 \cdot e^{\hat{\sigma} \bar{W}_t - \frac{1}{2}\hat{\sigma} t} \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

la cual es una martingala por la proposición 2.5.4.

Proposición 4.4.1. Sea

$$f_t = f_0 \cdot e^{\hat{\sigma} W_t + (\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma})t} \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{y} \quad \bar{W}_t = W_t + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} t$$

entonces

$$f_T = f_t \cdot e^{\hat{\sigma}(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}(T-t)}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_T &= f_0 \cdot e^{\hat{\sigma} W_T + (\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma})T} \\ &= f_0 \cdot e^{\hat{\sigma} \bar{W}_T - \hat{\mu} T + (\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma})T} \\ &= f_0 \cdot e^{\hat{\sigma} \bar{W}_T - \frac{1}{2}\hat{\sigma} T} \\ &= f_0 \cdot e^{\hat{\sigma} \bar{W}_t - \frac{1}{2}\hat{\sigma} t} \cdot e^{\hat{\sigma}(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}(T-t)} \\ &= f_t \cdot e^{\hat{\sigma}(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}(T-t)} \end{aligned}$$

Proposición 4.4.2. El precio de una opción call europea sobre una acción cuando la tasa de interés es estocástica en el tiempo t, con fecha de expiración T y precio de ejercicio K está dado por

$$c(t, S) = SN(d_1) - BKN(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - \ln B + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - \ln B - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} h \middle| \mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} f(f_T) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma}(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que f_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $\left(\bar{W}_T - \bar{W}_t\right)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de f_t y t.

$$
\begin{aligned}
c(t, f_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma}(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right)\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma}\bar{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0, T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$
c(t, f_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma} w - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)} \mathrm{d}w
$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$
\begin{aligned}
c(t, f_t) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma} z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma} z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)} - K\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Supongamos que $\tau = T - t$, entonces

$$
\begin{aligned}
c(t, f_t) &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} - K\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} - K\right)_+\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K\right) 1_{f_T \geq K}\right].
\end{aligned}
$$

Usando el siguiente lema:

$$
E\left[(f_T - K)_+\right] = E\left[(f_T - K)1_{f_T \geq K}\right]
$$

donde

$$
1_{f_T \geq K} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad f_T \geq K \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{f_T \geq K}$ es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
1_{f_T\geq K} &= \left\{\omega \in \Omega : f_t e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} - K \geq 0\right\}\\
&= \left\{\omega \in \Omega : f_t e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} \geq K\right\}\\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} \geq \left(\frac{K}{f_t}\right)\right\}\\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} \geq \left(\frac{K}{f_t}\right)\right\}\\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau \geq \ln\left(\frac{K}{f_t}\right)\right\}\\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\hat{\sigma}\sqrt{\tau} \geq \ln\left(\frac{K}{f_t}\right) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau\right\}\\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{f_t}\right) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau}{\hat{\sigma}\sqrt{\tau}}\right\}\\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \geq -\frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau}{\hat{\sigma}\sqrt{\tau}}\right\}\\
&= \{\omega \in \Omega : z \geq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \geq 0\}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
c(t,f_t) &= E^{Q}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} - K\right)1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\geq 0\}}\right]\\
&= E^{Q}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} - K\right)1_{\{\omega\in\Omega: z\geq -d_2\}}\right]; \quad Z \sim N(0,1) \text{ bajo Q}\\
&= E^{Q}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} - K\right)1_{\{\omega\in\Omega: -z\geq -d_2\}}\right]; \quad -Z \sim N(0,1) \text{ bajo Q}\\
&= E^{Q}\left[e^{-r\tau}\left(f_t \cdot e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} - K\right)1_{\{\omega\in\Omega: z\leq d_2\}}\right]\\
&= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\left(f_t \cdot e^{-z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} - K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\\
&= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f_t \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2-z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\tau} - Ke^{-\frac{1}{2}z^2}\right)\mathrm{d}z\\
&= f_t \cdot e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2+2z\hat{\sigma}\sqrt{\tau}+\hat{\sigma}^2\tau\right)}\mathrm{d}z - Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\\
&= f_t \cdot e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z+\hat{\sigma}\sqrt{\tau}\right)^2}\mathrm{d}z - Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Sea $N(d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z$$

entonces

$$c(t, f_t) = f_t \cdot e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z+\hat{\sigma}\sqrt{\tau})^2} \mathrm{d}z - Ke^{-r\tau} N(d_2).$$

Para resolver la primera integral se tiene que hacer un cambio de variable.

Sea $v = z + \hat{\sigma}\sqrt{\tau}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z \leq \mathrm{d}_2 \implies v \leq d_2 + \hat{\sigma}\sqrt{\tau}$, entonces

$$\begin{aligned} c(t, f_t) &= f_t \cdot e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_2+\hat{\sigma}\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}v^2} \mathrm{d}v - Ke^{-r\tau} N(d_2) \\ &= f_t \cdot e^{-r\tau} N\left(d_2 + \hat{\sigma}\sqrt{\tau}\right) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

si definimos $d_1 = d_2 + \hat{\sigma}\sqrt{\tau}$, $\tau = T - t$, entonces

$$c(t, f_t) = e^{-r(T-t)} \left(f_t N(d_1) - KN(d_2)\right)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}.$$

Ahora sustituyendo $f_t = S/B$ en la ecuación anterior y definiendo a $c(t, f_t) \equiv c(t, S)$, entonces

$$c(t, S) = SN(d_1) - BKN(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - \ln B + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - \ln B - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}.$$

Proposición 4.4.3. El precio de una opción put europea sobre una acción cuando la tasa de interés es estocástica en el tiempo t, con fecha de expiración T y precio de ejercicio K está dado por

$$p(t,S) = BKN(-d_2) - SN(-d_1)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - \ln B + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - \ln B - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}h \middle| \mathcal{F}_t\right] &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f(f_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma}(\bar{W}_T-\bar{W}_t)-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

Puesto que f_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $(\bar{W}_T - \bar{W}_t)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de f_t y t.

$$\begin{aligned}
p(t,f_t) &= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma}(\bar{W}_T-\bar{W}_t)-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right)\right] \\
&= E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma}\bar{W}_{T-t}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right)\right]
\end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0,T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$p(t,f_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma}w-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)}dw$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
p(t,f_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(f_t \cdot e^{\hat{\sigma}z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\
&= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(K - f_t e^{\hat{\sigma}z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}dz.
\end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = T - t$, entonces

$$\begin{aligned} p(t, f_t) &= e^{-r\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K - f_t \cdot e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\ &= E^{Q}\left[e^{-r\lambda}\left(K - f_t \cdot e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda}\right)_+\right] \\ &= E^{Q}\left[e^{-r\lambda}\left(K - f_t \cdot e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda}\right) 1_{K \geq f_T}\right]. \end{aligned}$$

Usando el siguiente lema:

$$E\left[(K - f_T)_+\right] = E\left[(K - f_T) 1_{K \geq f_T}\right]$$

donde

$$1_{K \geq f_T} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad K \geq f_T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{K \geq f_T}$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} 1_{K \geq f_T} &= \left\{\omega \in \Omega : K - f_t \cdot e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda} \geq 0\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : K \geq f_t \cdot e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda}\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : \left(\frac{K}{f_t}\right) \geq e^{\hat{\sigma} z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda}\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda} \leq \left(\frac{K}{f_t}\right)\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : z\hat{\sigma}\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda \leq \ln\left(\frac{K}{f_t}\right)\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : z\hat{\sigma}\sqrt{\lambda} \leq \ln\left(\frac{K}{f_t}\right) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : z \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{f_t}\right) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda}{\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}}\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : z \leq -\frac{\ln\left(\frac{f_t}{K}\right) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \lambda}{\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}}\right\} \\ &= \{\omega \in \Omega : z \leq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \leq 0\} \end{aligned}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
p(t,f_t) &= E^{Q}\left[e^{-r\lambda}\left(K - f_t\cdot e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\le 0\}}\right]\\
&= E^{Q}\left[e^{-r\lambda}\left(K - f_t\cdot e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega: z\le -d_2\}}\right];\quad Z\sim N(0,1)\ \text{ bajo Q}\\
&= e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\left(K - f_t\cdot e^{z\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\\
&= e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(Ke^{-\frac{1}{2}z^2} - f_t\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2+z\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\lambda}\right)\mathrm{d}z\\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - f_t\cdot e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2-2z\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}+\hat{\sigma}^2\lambda\right)}\mathrm{d}z\\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z - f_t\cdot e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Sea $N(-d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$
N(-d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z
$$

entonces

$$
p(t,f_t) = Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - f_t\cdot e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.
$$

Para resolver la segunda integral se tiene que hacer un cambio de variable. Sea $v = z-\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z\le -\mathrm{d}_2 \implies v\le -\left(d_2+\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}\right)$, entonces

$$
\begin{aligned}
p(t,f_t) &= Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - f_t\cdot e^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2-\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\mathrm{d}v\\
&= Ke^{-r\lambda}N(-d_2) - f_t\cdot e^{-r\lambda}N\left(-d_2-\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo $\lambda = T-t$, $f_t = S/B$ en la ecuación anterior y definiendo $d_1 = d_2+\hat{\sigma}\sqrt{\lambda}$ y $p(t,f_t)\equiv p(t,S)$, entonces

$$
p(t,S) = BKN(-d_2) - SN(-d_1)
$$

donde

$$
d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - \ln B + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}\quad \text{y}\quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - \ln B - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}.
$$

5. CONCLUSIONES

Este trabajo de investigación tuvo como propósito derivar el modelo de Black-Scholes aplicando la metodología de martingalas que consiste en calcular el valor esperado condicional del valor presente del perfil de pagos de la opción y así obtener soluciones de forma cerrada de una manera más precisa y sencilla que permita la resolución de problemas en el campo de las finanzas, en particular para la valuación de opciones financieras europeas sobre acciones que no pagan dividendos, asumiendo el modelo de precios de Black-Scholes. Asimismo, se han presentado extensiones del método para valuar otra clase de instrumentos financieros que existen en los mercados financieros tales como acciones que pagan dividendos continuamente, futuros de bienes, futuros de divisas y para acciones cuando la tasa de interés se comporta de manera aleatoria haciéndose mínimas modificaciones al modelo. Por otra parte, los conceptos fundamentales de probabilidad avanzada y cálculo estocástico desempeñaron un papel importante para la valuación de productos derivados con una base matemática bastante sólida, robusta y compleja, que termina por fusionarse con la teoría financiera.

Existen importantes ventajas en cuanto al método propuesto, entre las cuales destacan: 1) la técnica de martingalas permitirá a los especialistas de productos derivados que carecen de herramientas matemáticas avanzadas derivar la fórmula de Black-Scholes de una forma más precisa y elegante con sencillos cálculos matemáticos ya que el método se ha desarrollado paso a paso a fin de que el material sea accesible para los investigadores en la materia y participantes de los mercados financieros; y 2) También este método es gran utilidad para los participantes de los mercados financieros ya que les permitirá controlar las tendencias instantáneas de cualquier movimiento Browniano geométrico, es decir, eliminar la prima de riesgo de los instrumentos financieros sin necesidad de cambiar la estructura de la volatilidad del mismo y así permitirles valuar productos derivados bajo el concepto de no arbitraje mediante una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Entre las limitaciones se tiene que cuando se valúan opciones de tipo americano el método no es de mucha ayuda debido a que cuando se ejerce prematuramente no existe una función de distribución sencilla por lo que hasta la fecha no existe ninguna fórmula que nos permita valuar de manera analítica una opción americana. Sin embargo, las propiedades de las opciones americanas se derivan y explican a través de las propiedades de las opciones europeas.

Finalmente, se mencionan algunas líneas de investigación para explorar en el futuro: 1) el método se puede extender para productos derivados más complicados tales como opciones digital, con barrera y lookback. La única dificultad es encontrar la distribución conjunta de los activos subyacentes; 2) también el método se puede aplicar para instrumentos financieros de renta fija. Sin embargo, es importante incluir una estructura de plazos en las tasas de interés determinada por un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, en el marco de Vasicek (1977) y Hull & White (1990), a fin de obtener una mejor valuación de los productos derivados; y 3) es conveniente extender el método con activos subyacentes que sigan un proceso mixto de difusión con saltos en donde el proceso Poisson determina la probabilidad de cambios extremos en el retorno. Sin duda, ésto es importante para la teoría y práctica de los productos derivados debido a que generalmente no es posible cubrirse frente a las caídas bruscas que se presentan en los mercados financieros.

APENDICE A

Teorema A.1. Una medida de probabilidad Q es absolutamente continua con respecto a P si y sólo si existe una variable aleatoria que toma valores en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que

$$\forall A \in \mathcal{F} \qquad \mathrm{Q}(A) = \int_A Z(w)\mathrm{dP}(w)$$

donde Z es la densidad de Q con respecto a P y que frecuentemente se denota por $\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dP}}$.

Proposición A.2. Si Q<<P y Z es la densidad de Q con respecto a P, entonces (P<<Q) son equivalentes si y sólo si Q<<P.

Demostración.

$\Longrightarrow$) Es trivial por teorema A.1.

$\Longleftarrow$) Si Q<<P y Q<<P.

Por demostrar que $\forall A \in \mathcal{F} \;\; \mathrm{Q}(A) = 0 \implies \mathrm{P}(A) = 0$.

Sea $A \in \mathcal{F}_t \;\; \mathrm{Q}(A) = \int_A Z\mathrm{dP}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \int_A 1\mathrm{dP} \\ &= \int_A \frac{Z}{Z}\mathrm{dP} \\ &= \int_A \frac{1}{Z} Z\mathrm{dP} \\ &= \int_A \frac{1}{Z}\mathrm{dQ} = 0 \end{aligned}$$

Proposición A.3. Sea $L_t = e^{-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}$, entonces $\{L_t\}_{0 \le t \le T}$ es una martingala y $E[L_t] = 1$ para toda $0 \le s \le t$.

Proposición A.4. Sea $\mathrm{Q}^{(L_T)}$ con densidad L_T con respecto a la densidad inicial P, entonces la probabilidad $\mathrm{Q}^{(L_T)}$ y $\mathrm{Q}^{(L_t)}$ coinciden $\mathcal{F}_t$.

Demostración.

Por demostrar que $\mathrm{Q}^{(L_T)}(A) = \mathrm{Q}^{(L_t)}(A) \;\; \forall A \in \mathcal{F}_t$.

Sea $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}^{(L_T)}(A) &= \int_A L_T \mathrm{dP} \\
&= E[1_A L_T] \\
&= E\left[E[1_A L_T|\mathcal{F}_t]\right] \\
&= E\left[1_A E[L_T|\mathcal{F}_t]\right] \\
&= \int_A E[L_T|\mathcal{F}_t]\mathrm{dP} \\
&= \int_A L_t \mathrm{dP} = \mathrm{Q}^{(L_t)}(A).
\end{aligned}$$

Efectivamente $\mathrm{Q}^{(L_t)}(A)$ es una medida de probabilidad, ya que si $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$\mathrm{Q}^{(L_t)}(A) = \int_A L_t \mathrm{dP} \geq 0 \quad \text{si} \quad L_t > 0$$

y por el resultado de la proposición A.3 se tiene que $\mathrm{Q}^{(L_t)}(A) = 1$.

Proposición A.5. Sea Z una variable aleatiria acotada $\mathcal{F}_t$-medible, entonces la esperanza condicional Z, bajo la probabilidad $\mathrm{Q}^{(L_T)}$ con respecto a $\mathcal{F}_t$ está dada por

$$E^{(L_T)}[Z|\mathcal{F}_t] = \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t}.$$

Demostración.

Sean W y Y dos variables aleatorias $\mathcal{F}_t$-medibles definidas como

$$W = E^{(L_T)}[Z|\mathcal{F}_t]$$

y

$$Y = \frac{E^{(L_t)}[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t}$$

sólo se tiene que demostrar que

$$\forall A \in \mathcal{F}_t; \quad E^{(L_T)}[1_A W] = E^{(L_t)}[1_A Y]$$

$$
\begin{aligned}
E^{(L_T)}[1_A W] &= E^{(L_T)}\left[1_A E^{(L_T)}[Z|\mathcal{F}_t]\right] \\
&= E^{(L_T)}[1_A Z] \\
&= \int_A Z\mathrm{dP}^{(L_T)} \\
&= \int_A Z L_T \mathrm{dP} \\
&= E[1_A Z L_T] \\
&= E\left[1_A E[Z L_T|\mathcal{F}_t]\right] \\
&= \int_A \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t] L_t}{L_t}\mathrm{dP} \\
&= \int_A \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t}\mathrm{dP}^{(L_t)} \\
&= E^{(L_t)}\left[1_A \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t}\right] \\
&= E^{(L_t)}[1_A Y].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$E^{(L_T)}[Z|\mathcal{F}_t] = \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t}.$$

Proposición A.6. Sea $\bar{W}_t = W_t + \theta t$; $\forall t \in [0,T]$, entonces $\forall u \in R$ y $\forall s, t \in [0,T]$ tal que $s \leq t$, entonces

$$E^{(L_T)}\left[e^{iu(\bar{W}_t - \bar{W}_s)}\middle|\mathcal{F}_s\right] = e^{\frac{1}{2}u(t-s)}.$$

BIBLIOGRAFIA

- Baxter, M. and A. Rennie, (1996), Financial Calculus, An Introduction Derivatives Pricing, Cambridge University Press, Cambridge.
- Black, F. and M. Scholes, (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81, pp. 637-654.
- Bingham, Nicholas H. and R. Kiesel, (1998), Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives, London, Springer-Verlag.
- Collin Dufresne, P., W. Keirstead, and M. P. Ross, (1996), Pricing Derivatives the Martingale Way, Working Paper, U.C. Berkeley.
- Cox, J. and S. Ross, (1976), The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, Journal of Stochastic Processes, 3, pp. 145-166.
- Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein, (1985), Options Market, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.
- Elliot, Robert J., (1982), Stochastic Calculus and Applications, Springer-Verlag New York, Inc.
- Elliot, Robert J. and P. Ekkehard Kopp, (1999), Mathematics of Financial Markets, Springer-Verlag New York, Inc.
- Geman, E., N. E. Karaoui, and J. Rocher, (1995), Changes of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing, Journal of Applied Probability, 32, pp. 443-458.
- Harrison, J. M. and S. Pliska, (1979), Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets, Journal of Economic Theory, 20, pp. 381-408.
- Harrison, J. M. and S. Pliska, (1981), Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, Stochastic Processes and Their Applications, 11, pp. 215-260.
- Harrison, J. M. and S. Pliska, (1983), A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets, Stochastic Processes and Their Applications, 15, pp. 313-316.
- Hull, J., (1988), The Use of Control Variate Techniques in Options Pricing, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23, pp. 237-251.

- Hull, J., (1997), Options, Futures and Other Derivatives Securities, 3rd. ed., Prentice-Hall International, Inc.
- Karatzas, I. and S. E. Shreve, (1991), Brownian Motion and Stochastic Calculus, London, Springer-Verlag.
- Lamberton D. and B. Lapeyre, (1996), Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, 1a. ed., Chapman & Hall.
- Merton R., (1973a), Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, pp. 141-183.
- Musiela M. and M. Rutkowski, (1997), Martingale Methods in Financial Modelling, Springer-Verlag New York, Inc.
- Rodriguez de Castro, J., (1995), Introducción al Análisis de Productos Financieros (Futuros, Opciones, Forwards y Swaps) Incluye Régimen Fiscal, Limusa.
- Neftci, Salih N., (1996), An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press.
- Tapiero, Charles S., (1998), Applied Stochastic Models and Control for Finance and Insurance, Kluwer Academic Publishers.
- Taylor, Howard M. and S. Karlin, (1998), An Introduction to Stochastic Modelling, 3ra. ed., Academic Press.
- Wilmott, P., (1998), Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering, John Wiley & Sons, Inc. New York.