102

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD
NOTAS DE APOYO PARA UN CURSO A NIVEL BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

ACTUARIO

P R E S E N T A:

ADOLFO TRINIDAD JUÁREZ

DIRECTOR
DR. MIGUEL ANGEL GARCÍA ÁLVAREZ

2001

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

TEORIA DE LA PROBABILIDAD

NOTAS DE APOYO PARA UN CURSO A NIVEL BACHILLERATO
realizado por
ADOLFO TRINIDAD JUAREZ
con nùmero de cuenta 6614745-5 , pasante de la carrera de ACTUARÍA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario
DR. MIGUEL ANGEL GARCIA ALVAREZ
Propietario
M. EN A. P. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES
Propietario
MAT. HUGO VILLASEÑOR HERNANDEZ
Suplente
ACT. MARISA MIRANDA TIRADO
Suplente
ACT. JAIME VAZQUEZ ALAMILLA

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. EN C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

A mis padres

Felipe y Teodora

Deseo manifestar mi agradecimiento al Dr. Miguel Angel García Alvarez por la paciencia y comprensión, así como por sus comentarios y sugerencias expresados durante la elaboración de este trabajo. Agradezco también los comentarios y observaciones de los maestros María del Pilar Alonso Reyes, Hugo Villaseñor Hernández, Marisa Miranda Tirado y Jaime Váquez Alamilla.

Contenido

Introducción

n la sociedad actual se hace cada vez más necesario el estudio de la teoría de la robabilidad, ya que su gama de aplicaciones es muy amplia en diversos campos del onocimiento humano. En estas notas se tratan los conceptos elementales de esta parte de ı matemática. El material está dedicado a personas de nivel bachillerato y su lectura equiere únicamente conocimientos de álgebra elemental.

a teoría de conjuntos es una herramienta necesaria para el estudio de la teoría de la robabilidad, por lo que el primer capítulo trata de manera intuitiva este tema.

n el segundo capítulo se dan los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, la oncepción clásica, su interpretación frecuencial, su axiomatización, el concepto de robabilidad condicional y el de eventos independientes.

l estudio de la probabilidad requiere del conteo de los elementos de un conjunto, por lo que e hace necesario conocer técnicas que ayuden a contar de manera eficiente, por lo que, las ases de esto se dan en el capítulo tercero.

n la teoría de la probabilidad se tienen modelos matemáticos a los cuales se pueden ajustar ertos problemas que se presentan en la práctica, a éstos se les llama distribuciones de robabilidad, los cuales se tratan en el capítulo cuarto.

l capítulo quinto se dedica al estudio de un modelo matemático particularmente importante into en la probabilidad como en la estadística, la distribución normal.

inalmente, en el último capítulo se hace un breve bosquejo del desarrollo de la teoría de la robabilidad, desde sus inicios, los cuales están ligados a los juegos de azar y el surgimiento e los conceptos principales hasta su axiomatización en la tercera década del siglo veinte.

1. CONJUNTOS

Durante la segunda mitad del siglo XIX Georg Cantor (1845 - 1918) desarrolló la teoría de conjuntos, la cual se encuentra en la base de cualquier rama de la matemática moderna. En particular, para estudiar la teoría de la probabilidad se hace necesario conocer la teoría de conjuntos.

En este capítulo se desarrolla la teoría de conjuntos de manera intuitiva tratando de que se entienda el concepto de conjunto, el de subconjunto y que se pueda operar con conjuntos para su posterior aplicación en la teoría de la probabilidad.

1.1 Conjunto y subconjunto

.a noción de conjunto es muy sencilla y de hecho la utilizamos en nuestra conversación liaria, así, se puede hablar del conjunto de profesores de la UNAM, del conjunto de planetas lel sistema solar o del conjunto de automóviles que tienen placas del Distrito Federal. Con el in de esclarecer y formalizar la teoría de conjuntos, a continuación se dan algunos conceptos ›ásicos.

:onjunto. Es una colección de objetos bien definidos.

'ara designar a los conjuntos generalmente se utilizan letras mayúsculas y para denotar a ›s elementos que lo integran se usan letras minúsculas.

:jemplo 1.1

)escribir el conjunto formado por las vocales.

ii se denota con V al conjunto de las vocales, entonces se tiene que el conjunto V está ›rmado por los elementos a, e, i, o y u. Esto se puede expresar de la manera siguiente:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

'ara denotar que a es un elemento del conjunto A o que a pertenece al conjunto A se utiliza a notación $a \in A$ y para denotar que el elemento a no pertenece a este conjunto se usa la iotación $a \notin A$. De manera que en el ejemplo anterior se puede observar que e es un :lemento del conjunto V, esto es, $e \in V$, en cambio el elemento b no está en el conjunto V, o ;ea que $b \notin V$.

Jn conjunto se puede describir enumerando los elementos que lo forman o bien dando ılguna propiedad común a todos ellos, tal como se muestra en los ejemplos que se dan a :ontinuación.

:jemplo 1.2

:xpresar al conjunto de los planetas del sistema solar:
) enumerando los elementos del conjunto;
) dando una propiedad de los elementos del conjunto.

a) Enumerando los elementos del conjunto:

$$P = \{Mercurio,\ Venus,\ Tierra,\ Marte,\ Júpiter,\ Saturno,\ Urano,\ Neptuno,\ Plutón\}$$

b) Dando una propiedad de los elementos del conjunto:

$$S = \{x \,/\, x \text{ es un planeta del Sistema Solar}\}$$

De manera que el conjunto S está formado por todos aquellos elementos x que tienen la propiedad de ser planetas del sistema solar. Luego entonces los conjuntos P y S están formados por los mismos elementos, esto es, son dos conjuntos iguales, o sea que: P = S.

Igualdad de conjuntos. Dos conjuntos A y B son iguales si ambos tienen los mismos elementos.

Ejemplo 1.3

Dar dos conjuntos iguales.

Considérense los conjuntos siguientes:

$$O = \{o, r, d, e, n\}$$

$$R = \{r, o, n, d, e\}$$

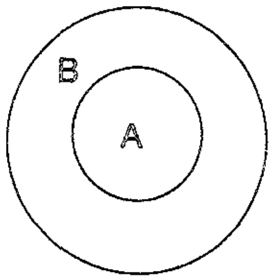
Podemos ver que ambos tienen los mismos elementos y por lo tanto tenemos que:

$$O = R$$

Cuando los elementos de un conjunto A son también elementos de un conjunto B se dice que A está contenido en B o que B contiene al conjunto A o que A es subconjunto de B, y se denota por: $A \subset B$ o $B \supset A$.

Subconjunto. A es subconjunto de B si cada elemento de A es también un elemento de B.

A los conjuntos se les puede representar gráficamente mediante los diagramas de Venn-Euler, tal como se muestra a continuación.



$A \subset B$

Ejemplo 1.4

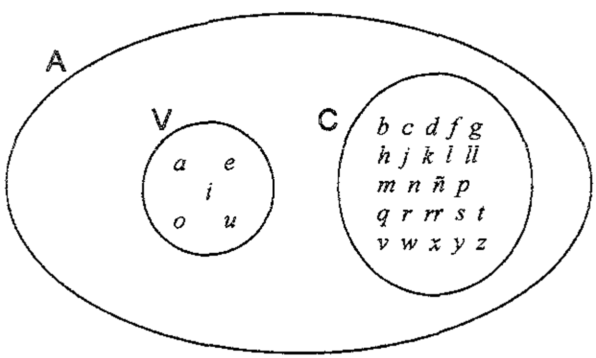
Dar dos subconjuntos del conjunto A = {*x* / x es una letra del alfabeto}.

Dos subconjuntos de A son:

$$V = \{x \, / \, x \text{ es vocal}\}$$

$$C = \{x \, / \, x \text{ es consonante}\}$$

Esto se puede ver en la gráfica siguiente:



$V \subset A$ y $C \subset A$

Los elementos de los conjuntos V y C son también elementos de A, por lo tanto V y C son subconjuntos de A, o sea que $V \subset A$ y que $C \subset A$; pero V no es subconjunto de C, ya que los elementos de V no están en C, de la misma manera podemos afirmar que C no es subconjunto de V, esto se puede expresar de manera simbólica como: $V \not\subset C$ y $C \not\subset V$.

Generalmente cuando estamos realizando algún trabajo siempre hay un conjunto que es el más grande, el que tiene todos los elementos que necesitamos, el que contiene a los otros conjuntos, a este conjunto se le llama conjunto universal y se le denota con la letra U.

Conjunto universal. Es el conjunto más extenso por el cual hay interés en un análisis específico.

Al conjunto que no tiene elementos se le llama conjunto vacío y se le denota por $\varnothing$. A este conjunto se le considera subconjunto de cualquier conjunto.

Conjunto vacío. Es el conjunto que no tiene elementos.

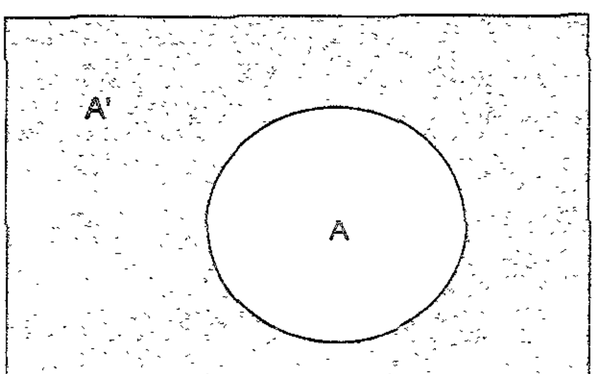
Un conjunto A es subconjunto del conjunto universal U, por lo que se puede pensar en el conjunto de elementos que están en el conjunto universal pero que no pertenecen al conjunto A, a este conjunto se le llama el complemento del conjunto A y se le denota por A'.

Complemento. El complemento de un conjunto A es el conjunto formado por los elementos que están en el conjunto universal y que no están en el conjunto A.

Lo cual se puede expresar de manera simbólica de la manera siguiente:

$$A' = \{x \,/\, x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

El complemento del conjunto A es la parte sombreada en la gráfica siguiente:



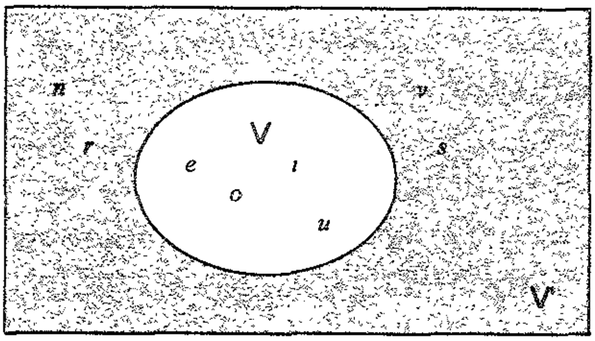
Ejemplo 1.5

Considérense los conjuntos siguientes:
U = $\{x \,/\, x$ es letra de la palabra universo$\}$ y V = $\{e, \imath, o, u\}$. Encontrar el complemento de V.

El complemento de V es el conjunto formado por las letras de la palabra universo que no están en el conjunto V, o sea que el complemento de V es:

$$V' = \{n, v, r, s\}$$

A continuación se puede ver la solución de manera gráfica.



1.2 Operaciones con conjuntos

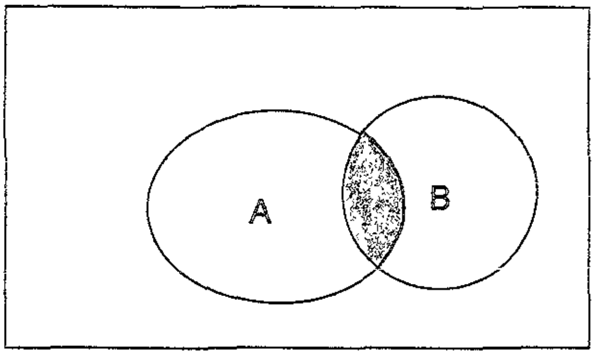
Dos conjuntos se pueden unir, intersectar o encontrar su diferencia, con lo cual se obtiene un nuevo conjunto.

Si se tiene un conjunto A y un conjunto B, entonces podemos tener un nuevo conjunto formado por los elementos que están en ambos conjuntos a la vez, a éste se le llama conjunto A intersección B y se denota por: $A \cap B$.

Intersección de conjuntos. La intersección del conjunto A con el conjunto B es el conjunto formado por los elementos que están en ambos conjuntos.

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}$$

:l área sombreada en la gráfica siguiente representa la intersección de los conjuntos *A* y *B*.



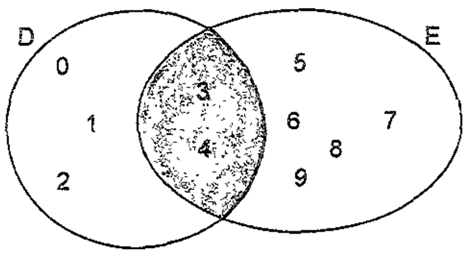
A ∩ B

:jemplo 1.6

:ncontrar la intersección de los conjuntos D y E, donde:
) = {0, 1, 2, 3, 4} y E = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

.os elementos que están en ambos conjuntos son 3 y 4, por lo que la intersección de estos :onjuntos es:

$$D \cap E = \{3, 4\}$$



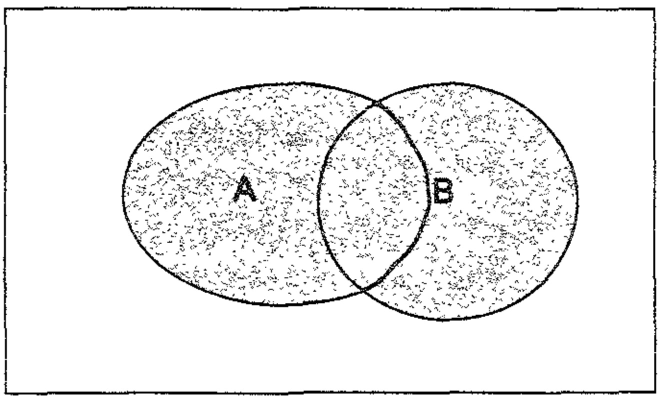
D ∩ E

:uando se tiene un conjunto A y un conjunto B se puede formar un nuevo conjunto formado ·or los elementos que están en alguno de los conjuntos, a este se le llama conjunto A unión ː y se denota por: A ∪ B.

Jnión de conjuntos. La unión del conjunto A con el conjunto B es el conjunto formado por os elementos que están en alguno de los dos conjuntos.

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$$

.a parte sombreada en la gráfica siguiente representa la unión de los conjuntos A y B.



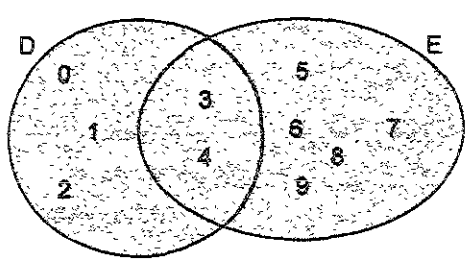
$A \cup B$

:jemplo 1.7

:ncontrar la unión de los conjuntos D y E del ejemplo 1.6

a unión de los conjuntos D y E es:

$$D \cup E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$



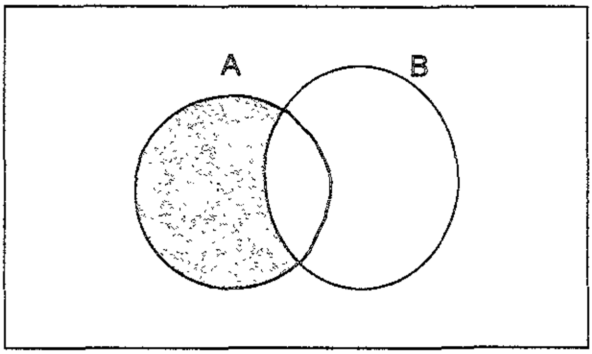
$D \cup E$

uando se tiene un conjunto A y un conjunto B, se puede hablar del conjunto formado por los lementos que están en el conjunto A pero que no están en el conjunto B, este conjunto es el onjunto A - B.

)iferencia de conjuntos. La diferencia del conjunto A con el conjunto B es el conjunto ormado por los elementos que están en el conjunto A y que no están en el conjunto B.

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

in la gráfica que se da a continuación se sombrea el conjunto A - B.



A - B

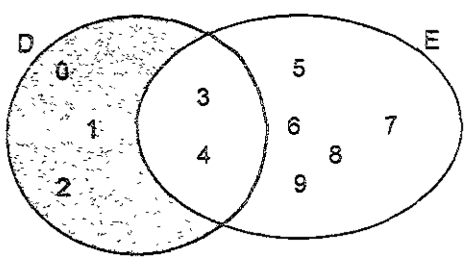
jemplo 1.8

ncontrar D - E, tomando los conjuntos del ejemplo 1.6.

l conjunto D - E está formado por aquellos elementos que están en D pero que no están en , así que:

$$D - E = \{0, 1, 2,\}$$

sto se puede observar en la gráfica siguiente:



D - E

a unión y la intersección de dos conjuntos se relacionan mediante las leyes de distribución ue se dan a continuación.

eyes de distribución. Para cualesquiera conjuntos A B y C se tiene:

) $A \cap (B \cup C) \ = \ (A \cap B) \cup (A \cap C)$

) $A \cup (B \cap C) \ = \ (A \cup B) \cap (A \cup C)$

jemplo 1.9

onsidérense los conjuntos siguientes:

$= \{x \,/\, x$ es un número entero, donde $5 < x < 20\}$,

$= \{x \,/\, x$ es menor que $15\}$,

$= \{x \,/\, x$ es mayor que $10\}$,

$= \{x \,/\, x$ es número par$\}$.

ncontrar:

) $A \cap (B \cup C)$;

) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

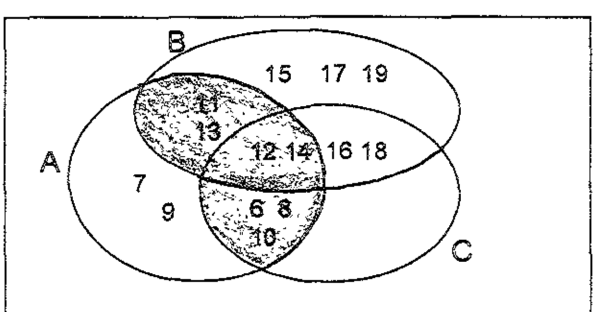
) Los números mayores que 10 o pares forman la unión de B con C, con lo cual tenemos que $B \cup C \ = \ \{6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$. Si de este conjunto se seleccionan los números menores que 15 se tiene que:

$$A \cap (B \cup C) \ = \ \{6, 8, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

) Los números menores que 15 y mayores que 10 son: $A \cap B = \{11, 12, 13, 14\}$, los números pares y menores que 15 son $A \cap C = \{6, 8, 10, 12, 14\}$, y la unión de estos conjuntos es:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \ = \ \{6, 8, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

odemos notar que el resultado en ambos incisos es el mismo y que es una de las leyes de istribución, tal como se ilustra en el diagrama siguiente.



$$A \cap (B \cup C) \ = \ (A \cap B) \cup (A \cap C) \ = \ \{6, 8, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

La relación más importante que se da entre los complementos de dos conjuntos son las leyes de De Morgan que se dan a continuación.

Leyes de De Morgan. Para cualesquiera conjuntos A y B se tiene:
a) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Ejemplo 1.10

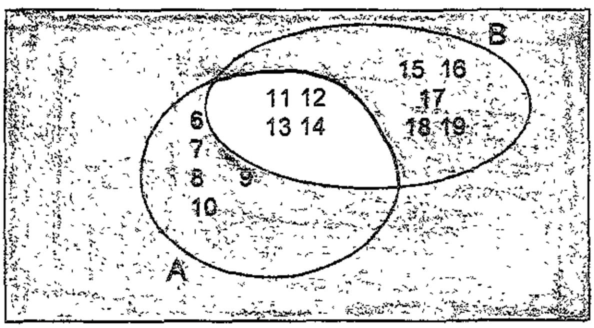
A partir de los conjuntos del ejemplo anterior, encontrar:
a) $(A \cap B)'$;
b) $A' \cup B'$.

a) Tenemos que $A \cap B = \{11, 12, 13, 14\}$, luego entonces su complemento es:

$$(A \cap B)' = \{6, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

b) El complemento de A es: $A' = \{15. 16, 17, 18, 19\}$ y el complemento de B es $B' = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, por lo que la unión de estos conjuntos queda de la manera siguiente:

$$A' \cup B' = \{6, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 19\}$$



$$(A \cap B)' = A' \cup B' = \{6, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Podemos observar que el resultado del inciso a es igual al resultado del inciso b, o sea que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Problemas

Considérense los conjuntos U = {a, b, c, d, e, f, g, h. i, j, k, l}, A = {b, c, d, e, f} y
= {g, h, i, j, k}, encontrar:

A';
B';
$A \cup B$;
$A \cap B$;
A - B;
B - A.

Sean: A = {a, b, c, d, e, f, g}, B = {d, e, f, g, h, i, j} y C = {g, h, i, j, k, l, m, n}.
numerar los elementos de los conjuntos siguientes:

$A \cap (B \cup C)$;
$A \cup (B \cap C)$;
$(A \cup B) \cap C$;
$(A \cap B) \cup C$;
$(A \cup B) - (A \cap B)$.

Considérense los conjuntos siguientes:
= {x / x es un número entero positivo de un solo dígito}
= {x / x $\in$ U y x es número primo}
= {x / x $\in$ U y x $\leq$ 5}
ncontrar:

$P' \cap M'$;
$(P \cup M)'$;
$P' \cup M'$;
$(P \cap M)'$.

Con los conjuntos U = {x / x es un número entero y $2 \leq x \leq 8$}, R = {x / x $\in$ U y x $\geq$ 5} y S
= {x / x $\in$ U y x es número par 5}, encontrar:

R - S;
$R \cap S'$;
$R - (R \cap S)$;
$(R' - S)'$.

Expresar cada uno de los conjuntos siguientes por medio de un único símbolo:

$A \cap \varnothing$;
$A \cap A'$;
$A \cup \varnothing$;
$A \cup A'$.

Expresar cada uno de los conjuntos siguientes mediante un símbolo diferente:

U';
(A')';
$\varnothing'$.

2. PROBABILIDAD

l mundo real está lleno de situaciones de incertidumbre, las cuales van desde los simples iegos de azar hasta problemas complejos de física, biología, ingeniería, ciencias sociales o el mundo de los negocios. La probabilidad proporciona una manera de medir la icertidumbre, de medir que tan factible es que ocurra algo o que no ocurra.

n este capítulo se da la definición clásica de la probabilidad la cual se aplica sobre todo a iegos de azar, se utiliza la frecuencia relativa como una estimación de la probabilidad. se da i definición axiomática de la probabilidad la cual convierte a la teoría de la probabilidad en na ciencia moderna y finalmente se tratan los conceptos de probabilidad condicional y de ventos independientes.

2.1 Fenómeno aleatorio

.a teoría de la probabilidad es una rama de las matemáticas que surge del estudio de los enómenos aleatorios, fenómenos en los cuales no se puede predecir con exactitud cual va a ;er su resultado.

Sabemos que si soltamos una moneda ésta cae pero no sabemos que cara va a caer hacia ırriba; lo mismo sucede al lanzar un dado, tenemos la certeza de que va a caer pero no ;abemos que cara va a caer hacia arriba; sabemos que cada uno de nosotros va a morir ›ero no sabemos a que edad. Así tenemos que en nuestra vida diaria hay fenómenos que enemos la certeza de su resultado, en cambio hay otros en los cuales su resultado es ıcierto; a los primeros se les llama fenómenos determinísticos y a los segundos fenómenos ıleatorios.

'enómeno determinístico. Es aquel en el que bajo las mismas condiciones se obtiene el nismo resultado.

:jemplos:
ı) si soltamos un objeto éste cae;
›) si a cierta cantidad de agua al nivel del mar se le aplica una temperatura mayor de 100 grados centígrados, ésta se evapora;
:) si soltamos un objeto de un edificio de 20 m de altura podemos saber el tiempo que tarda en llegar al suelo.

'enómeno aleatorio. Es aquel en el cual no se puede predecir su resultado, ya que, bajo las nismas condiciones se pueden obtener resultados diferentes.

:jemplos:
) resultado de lanzar una moneda;
) resultado de lanzar un dado;
) resultado al extraer una carta en un juego de naipes;
) número de partículas emitidas por una sustancia radioactiva en un minuto;
) trayectoria de una partícula de polen suspendida en agua.

odemos preguntarnos por: el número de accidentes automovilísticos en la Ciudad de léxico durante el mes de diciembre del presente año, el número de días lluviosos durante el erano próximo en la colonia en que vivimos, el número de apagones en el CCH durante este emestre, el número de zurdos en nuestro grupo, el número de llamadas telefónicas que ecibiremos el próximo mes, la edad que va a vivir cada uno de nosotros, el número de hijos ue va a tener cada uno de nosotros, el precio de los artículos de primera necesidad para eptiembre del próximo año, el número de habitantes en la República Mexicana para el año)10, la cantidad de maíz que se va a producir en nuestro país para el año próximo. Cada 10 de estos sucesos es incierto, no es posible predecir cuál va a ser su resultado, es un nómeno aleatorio.

os resultados de un fenómeno aleatorio son inciertos, sin embargo, cuando un fenómeno leatorio se repite muchas veces es posible observar cierta regularidad en la frecuencia elativa de sus resultados.

2.2 Probabilidad clásica o a priori

a manera más antigua de medir la incertidumbre es con el concepto clásico de probabilidad, ste surgió en la segunda mitad del siglo XVII como una aplicación a los juegos de azar, sin mbargo, fue hasta 1812 en que Pierre Laplace lo planteó de manera formal y se le conoce omo la definición clásica de la probabilidad.

efinición clásica de la probabilidad. Si un fenómeno aleatorio admite un número finito de osibles resultados y cada uno de ellos tiene las mismas posibilidades de ocurrir, entonces, probabilidad de que ocurra un suceso E es la proporción del número de casos favorables l número de casos posibles.

a definición anterior se puede expresar de la manera siguiente:

$$\text{probabilidad} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

s conveniente hacer notar que ésta no es una definición en el sentido formal, ya que es rcular, puesto que para definir probabilidad se utiliza un sinónimo que es el de posibilidad, n embargo, nos da una forma sencilla para calcular probabilidades por lo que a ontinuación se dan algunos ejemplos en los cuales se aplica este concepto.

jemplo 2.1

i se lanza una moneda bien balanceada, encontrar la probabilidad de que caiga águila.

a moneda tiene dos caras y podemos suponer que cada una tiene las mismas posibilidades e ocurrir, luego entonces se tiene dos casos posibles y de esos nos interesa únicamente la ara que tiene águila, por lo que, aplicando la definición clásica de la probabilidad tenemos ue la probabilidad de que caiga águila es:

$$\text{probabilidad} = \frac{1}{2} = 0.5$$

a probabilidad de que caiga águila al lanzar una moneda es 0.5, pero si únicamente se nza una vez la moneda no tenemos elementos para saber si va a caer águila o sol ya que s dos caras tienen las mismas posibilidades de ocurrir, pero si la moneda se lanza muchas eces entonces podemos esperar que "alrededor" del 50% de las veces caiga águila.

jemplo 2.2

i se lanza un dado bien balanceado, encontrar la probabilidad de que caiga un número par.

n este caso se tienen 6 posibles resultados, de los cuales nos interesan 3, puesto que los úmeros pares son: 2, 4, y 6. De manera que la probabilidad que caiga número par es:

$$\text{probabilidad} = \frac{3}{6} = 0.5$$

a definición clásica de probabilidad se aplica principalmente en juegos de azar, pero mbién se puede utilizar cuando se hacen selecciones al azar, en donde cada uno de los ementos tienen las mismas posibilidades de ser seleccionado.

jemplo 2.3

n una caja se tienen 20 focos de los cuales cinco son defectuosos, si se escoge uno de llos al azar, encontrar la probabilidad de que sea defectuoso.

e tienen 20 posibilidades para sacar un foco y de éstas en cinco de los casos se extrae un co defectuoso, por lo que la probabilidad de extraer un foco defectuoso es:

$$\text{probabilidad} = \frac{5}{20} = 0.25$$

roblemas

Una pieza de ajedrez se va a colocar al azar en un tablero, encontrar la probabilidad de que ésta sea colocada en un cuadro blanco.

En una bandeja hay 6 rebanadas de pastel de chocolate y cuatro de pastel de nuez. Si el mesero toma una rebanada al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de chocolate?

Si se lanza un dado bien balanceado, encontrar la probabilidad de que caiga:
un número non;
un número menor que 5.

. Las letras de la palabra ESTADISTICA se escriben en tarjetas, luego se saca una de ellas al azar, encontrar la probabilidad de que la tarjeta escogida tenga una vocal.

. Si de un conjunto de fichas de dominó se extrae una al azar, encontrar la probabilidad de que sea mula.

. Una persona está en la planta baja de un edificio de 12 pisos, si sube al elevador y oprime al azar un botón, encontrar la probabilidad de que el elevador se detenga en alguno de los tres últimos pisos.

. Una ruleta tiene inscritos los números del 1 al 20, los cuales se encuentran igualmente espaciados. Si se da vuelta a la ruleta, encontrar la probabilidad de que se detenga en:
) el número 13;
) un número primo.

. Si de una baraja española se extrae al azar una carta, encontrar la probabilidad de que:
) sea copas;
) no sea rey.

. En una caja se tienen seis canicas rojas, cuatro blancas y dos azules, si se saca una canica al azar, encontrar la probabilidad de que:
) sea roja;
) no sea blanca.

0. En un librero se tienen 4 libros de física, 6 de matemáticas y 8 de biología, si una persona toma al azar uno de ellos, encontrar la probabilidad de que el libro seleccionado:
) sea de biología;
) no sea de matemáticas.

2.3 Probabilidad frecuencial o a posteriori

lasta ahora para calcular la probabilidad de que ocurra un suceso hemos supuesto que cada no de los posibles resultados de un fenómeno aleatorio tiene las mismas posibilidades de currir, sin embargo, hay fenómenos aleatorios en los cuales esto no sucede. Si lanzamos na moneda defectuosa, si lanzamos un dado cargado, si lanzamos una tachuela; en cada no de estos casos podemos observar que los posibles resultados no tienen las mismas osibilidades de ocurrir, no hay equiprobabilidad en los posibles resultados y por lo tanto no e puede aplicar la definición clásica de la probabilidad. Tampoco se puede aplicar si nos reguntamos por la probabilidad de que cada uno de nosotros viva veinte años más o por la robabilidad de que llueva el día 15 de diciembre de este año. En todos estos casos se ueden aprovechar las experiencias pasadas para poder estimar la probabilidad de que curra alguno de estos sucesos.

El resultado de un fenómeno aleatorio es incierto, pero cuando éste se repite muchas veces es posible observar cierta estabilidad en la frecuencia relativa de sus resultados, cierta regularidad estadística. Así tenemos que si un fenómeno aleatorio se repite n veces y un suceso A ocurre en n_A de los resultados, entonces podemos estimar la probabilidad de que ocurra el suceso A mediante la frecuencia relativa para A, esto es, mediante n_A/n, tal como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.4

Una moneda se lanzó cien veces, obteniéndose los resultados siguientes: a, s, s, a, s, s, a, a, s, s, s, s, a, a, a, s, a, a, a, a, s, a, s, a, s, s, a, s, s, a, a, a, a, a, s, s, a, s, a, s, a, s, a, s, s, a, s, s, a, s, a, a, s, s, a, a, a, s, s, a, a, a, a, s, s, s, s, a, s, a, s, s, s, a, s, a, a, s, a, a, a, a, s, s, s, s, s, s, s, a, a, s, s, a, a, a, s, s, a, s. Estimar la probabilidad de que caiga águila al lanzar esta moneda.

Con los primeros diez resultados, esto es con: a, s, s, a, s, s, a, a, s, s, podemos hacer la tabla siguiente:

Resultado	Frecuencia	Frecuencia relativa
Aguila	4	0.40
Sol	6	0.60
Total	10	1.00

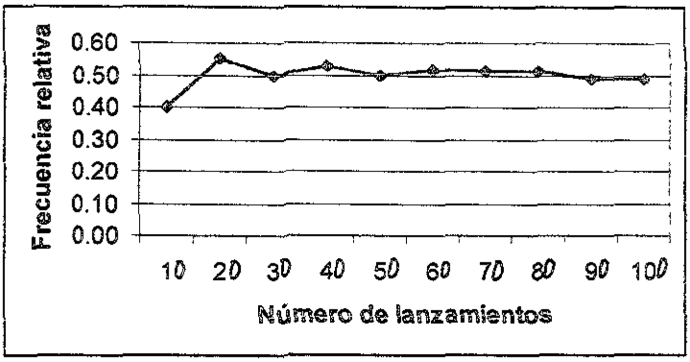
De manera análoga si se toman los primeros veinte resultados se tiene:

Resultado	Frecuencia	Frecuencia relativa
Aguila	11	0.55
Sol	9	0.45
Total	20	1.00

Si continuamos con este procedimiento podemos obtener la tabla que se da a continuación.

Número de lanzamientos	Frecuencia águilas	Frecuencia soles	Frecuencia relativa águilas	Frecuencia relativa soles
10	4	6	0.40	0.60
20	11	9	0.55	0.45
30	15	15	0.50	0.50
40	21	19	0.52	0.48
50	25	25	0.50	0.50
60	31	29	0.52	0.48
70	36	34	0.51	0.49
80	41	39	0.51	0.49
90	44	46	0.49	0.51
100	49	51	0.49	0.51

:n la gráfica que se muestra a continuación podemos notar que a medida que aumenta el úmero de lanzamientos la frecuencia relativa para las águilas tiende a estabilizarse lrededor de 0.50, esto es, en la frecuencia relativa de las águilas se observa una regularidad stadística alrededor de este número.



.sí tenemos que si se continúa lanzando la moneda de manera indefinida se puede esperar ue la frecuencia relativa para las águilas se estabilice alrededor de 0.50, que es la robabilidad de obtener águila al lanzar una vez la moneda.

I razonamiento que se hizo para las águilas se puede hacer también para los soles, de ıanera que la probabilidad de obtener sol al lanzar una moneda es igual a 0.5.

in embargo, si queremos ser objetivos, con los resultados obtenidos en este ejemplo ıicamente se puede estimar la probabilidad de obtener águila o sol en el lanzamiento de ›ta moneda, esto es, al lanzar 100 veces la moneda en 49 ocasiones cayó águila y 51 ›ces cayó sol, de manera que la frecuencia relativa para las águilas es 49/100 y para los ›les es 51/100, así que las probabilidad estimada para cada uno de estos resultados es:

probabilidad frecuencial de águila = 0.49

y

probabilidad frecuencial de sol = 0.51

ı probabilidad frecuencial es una estimación de la probabilidad real, la que se obtendría nzando un número infinito de veces la moneda, lo cual es imposible.

e manera general podemos decir que cuando un experimento aleatorio se realiza muchas eces bajo las mismas condiciones y la frecuencia relativa de la ocurrencia de un suceso E $_E$ / n) tiende a estabilizarse alrededor de un número p, entonces este número se puede tilizar para estimar la probabilidad de que ocurra el suceso E.

jemplo 2.5

n una muestra de 250 estudiantes que asisten a una universidad 65 de ellos practican el tletismo, estimar la probabilidad de que un estudiante de esta universidad practique dicho eporte.

a probabilidad de que un estudiante practique atletismo se puede estimar de la manera guiente:

$$\text{probabilidad frecuencial de que practique atletismo} = \frac{65}{250} = 0.26$$

s necesario recalcar que mientras mayor sea el número de observaciones que se tengan ara estimar la probabilidad, más cerca estaremos de la probabilidad real.

roblemas

Lanzar 200 veces un dado y estimar la probabilidad para cada una de sus caras.

En una muestra de 1 338 automovilistas de una ciudad, se encontró que sólo 432 de ellos llevaban puesto el cinturón de seguridad, estimar la probabilidad de que un automovilista de esta ciudad use cinturón de seguridad.

De 1 956 personas que entraron a una tienda departamental 1 018 hicieron al menos una compra, estimar la probabilidad de que una persona que entra en dicha tienda haga al menos una compra.

Una máquina produce tornillos, de los últimos 600 se observó que 12 son defectuosos, estimar la probabilidad de que la máquina produzca un tornillo:

defectuoso;

no defectuoso.

. Los siguientes números corresponden a una tabla de mortalidad basada en 100 000 personas:

Edad	Número de vivos
17	94 818
18	94 089
19	93 362
20	92 637
21	91 914

:stimar la probabilidad de que viva dos años más una persona de:

) 17 años;
) 18 años;
) 19 años.

2.4 Espacio muestral

'ara poder analizar un fenómeno aleatorio lo primero que nos interesa conocer es el onjunto formado por sus posibles resultados, a éste se le conoce como espacio muestral, y › denotaremos con la letra S.

spacio muestral. Es el conjunto formado por los posibles resultados de un fenómeno leatorio.

uando ocurre un fenómeno aleatorio hay algún o algunos resultados que nos interesan, sto es, nos interesa un subconjunto del espacio muestral. A los subconjuntos del espacio ıuestral se les llama eventos.

vento. Es un subconjunto del espacio muestral.

ıcorporando estos conceptos a la definición clásica de la probabilidad se tiene que cuando espacio muestral es finito y cada uno de sus elementos tiene las mismas posibilidades de ɔurrir, entonces la probabilidad de que ocurra un evento E es el cociente que resulta de vidir el número de elementos del evento E entre el número de elementos del espacio uestral, lo cual se puede expresar de la manera siguiente:

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(S)}$$

onde:
(E): Probabilidad de que ocurra el evento E
(E): Número de elementos del evento E
(S): Número de elementos del espacio muestral.

jemplo 2.6

i se lanza un dado bien balanceado, encontrar la probabilidad de que caiga:
) número par;
) un número mayor que 4.

l lanzar un dado se tienen seis posibles resultados, por lo que el espacio muestral se puede epresentar de la manera siguiente:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

os conjuntos que nos interesan son: $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{5, 6\}$, pero estos son subconjuntos el espacio muestral S, o sea que A y B son dos eventos, luego entonces, las probabilidades ue nos interesan son:

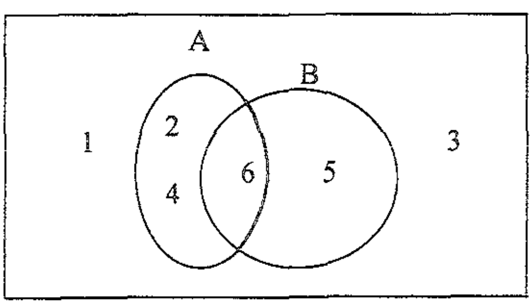
)

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

)

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{2}{6} = 0.33$$

sto se puede ver de manera gráfica utilizando diagramas de Venn, tal como se muestra a ontinuación.



S

jemplo 2.7

n una urna hay seis canicas blancas y cuatro negras. Si se saca una canica al azar, ncontrar la probabilidad de que sea:
) blanca;
) negra.

l extraer una canica de la caja se tienen 10 posibles resultados, de manera que el espacio nuestral se puede expresar de la manera siguiente:

$$S = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, n_1, n_2, n_3, n_4\}$$

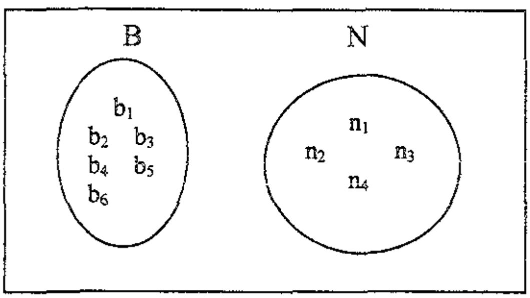
uego entonces los eventos que nos interesan son:

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6,\}$$

y

$$N = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$$

tilizando diagramas de Venn se tiene lo siguiente:



S

i consideramos que todas las canicas son iguales, entonces cada una de ellas tienen las nismas posibilidades de salir, por lo que las probabilidades buscadas son:

)
$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{6}{10} = 0.6$$

y

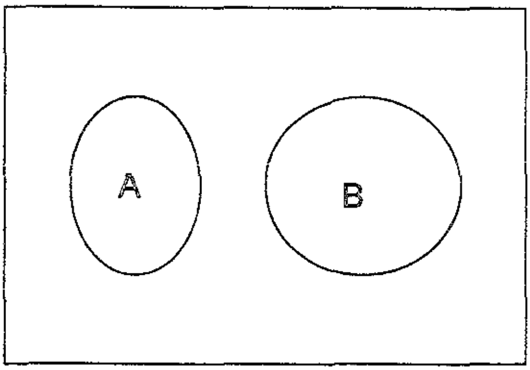
)
$$P(N) = \frac{N(N)}{N(S)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

l extraer una canica ésta puede ser blanca o negra pero no blanca y negra, de manera que uede ocurrir el evento B o el N pero no ambos, esto es los eventos A y B se excluyen utuamente.

:ventos mutuamente excluyentes. Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes :uando no tienen elementos en común.

.a definición anterior se puede expresar de la manera siguiente:

A y B son eventos mutuamente excluyentes $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$

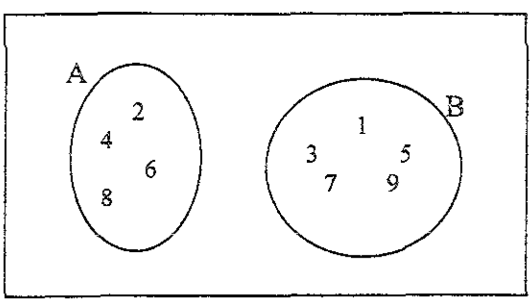


A y B son eventos mutuamente excluyentes

:jemplo 2.8

;e tienen 9 cartas a las cuales se les han asignado respectivamente los números del 1 al 9. ;i se saca una carta al azar y si se consideran los eventos: A = {x /x es número par} y B = {x \< es número non}, entonces A y B son eventos mutuamente excluyentes, ya que $A \cap B = \varnothing$.

Jtilizando diagramas de Venn se tiene:

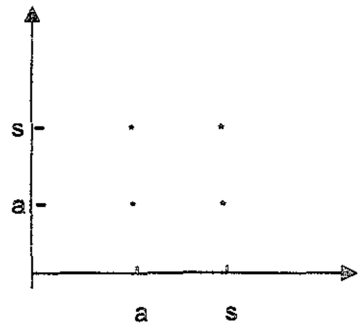


$A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo 2.9

Si se lanzan dos monedas bien balanceadas, encontrar la probabilidad de que caiga:
a) por lo menos un águila;
b) a lo más un águila.

Cada una de las monedas tiene dos posibilidades de caer, por lo que de manera conjunta se tiene cuatro posibilidades, tal como se muestra en la gráfica siguiente:



Cada punto nos muestra un posible resultado, por lo que el espacio muestral es:

$$S = \{(a, a), (a, s), (s, a), (s, s)\}$$

a) Si denotamos con A al evento que nos interesa, entonces tenemos que:

$$A = \{(a, a), (a, s), (s, a)\}$$

Luego entonces la probabilidad de que caiga por lo menos un águila:

$$P(A) = \frac{3}{4} = 0.75$$

b) Si ahora B es el evento que nos interesa, tenemos:

$$B = \{(a, s), (s, a), (s, s)\}$$

Así la probabilidad de que caiga a lo más un águila es:

$$P(B) = \frac{3}{4} = 0.75$$

Problemas

1. En una caja hay una canica roja, una negra, una blanca y una azul, si se saca una canica al azar, encontrar el espacio muestral.

2. Se tienen 35 tarjetas rojas, 30 verdes, 20 azules 10 negras y 5 blancas, si se escoge una de ellas al azar, encontrar la probabilidad de que:
a) sea verde;
b) no sea azul;
c) sea negra o blanca.

3. En una caja hay una canica blanca, una negra, una roja y una azul, si se sacan dos canicas al azar, encontrar el espacio muestral.

4. Resolver el problema anterior suponiendo que se saca una canica, se anota el color, se regresa y se saca la segunda canica.

5. Determinar en cada uno de los incisos si los eventos son mutuamente excluyentes.
a) Se lanzan 5 monedas: "cae un sol", "cae al menos un sol".
b) Un vendedor realiza una venta: "la venta es superior a $1 000", "la venta es superior a $10 000".
c) Un estudiante es seleccionado de manera aleatoria, el estudiante es: "hombre", "mayor de 21 años".
d) Se lanzan dos dados, la suma de puntos obtenidos es: "mayor que 9", "menor que 7".

6. Una persona recolecta cinco hongos y de dos de ellos resultan venenosos. Si posteriormente se come dos hongos, encontrar la probabilidad de que:
a) coma los dos hongos venenosos;
b) coma por lo menos un hongo venenoso;
c) no coma ninguno de los hongos venenosos.

7. En una caja se tienen tres canicas blancas y en otra se tiene una canica negra. Se saca una canica de la primera caja y se deposita en la segunda, posteriormente se saca una canica de la segunda caja, encontrar la probabilidad de que ésta sea blanca.

8. En los archivos de una clínica se han clasificado a los pacientes de acuerdo al sexo y al tipo de diabetes (I y II). El cuadro indica el número de pacientes de cada tipo.

Sexo \ diabetes	Tipo I	Tipo II
Masculino	25	20
Femenino	35	20

Si se selecciona un archivo al azar de esta clínica, encontrar la probabilidad de que la persona seleccionada:
a) sea del sexo femenino;
b) tenga diabetes tipo I.

9. Se van a lanzar tres monedas bien balanceadas, encontrar la probabilidad de que caigan:
a) dos águilas;
b) por lo menos 1 águila.

10. Si se lanzan tres dados bien balanceados, encontrar la probabilidad de que la suma de puntos obtenidos sea 18.

2.5 Probabilidad axiomática

Entre los siglos VI y III a. c. en Grecia se desarrolló la noción de discurso lógico, que culminó con el libro de Euclides "Los elementos", en el cual se trata a la geometría de manera axiomática. Sin embargo, fue hasta la segunda mitad del siglo XIX en que la lógica formal se desarrolló de manera notable, hecho que motivó que los sistemas axiomáticos adquirieran relevancia como estructuras lógicas.

Un sistema axiomático es una estructura lógica formada por un conjunto de enunciados o proposiciones. Hay una serie de proposiciones que se consideran válidas sin necesidad de demostración, a éstas se les llama axiomas o postulados y sirven de base para demostrar otras proposiciones a las que se les llama teoremas.

En 1933, el matemático ruso Andrey Nikolayevich Kolmogorov (nacido en 1903) dio una nueva definición de probabilidad, en la cual no se da una forma diferente para calcular probabilidades sino una serie de propiedades de la teoría de la probabilidad, las cuales se ordenan de manera lógica formando un sistema axiomático. De esta manera se inicia el estudio moderno de la teoría de la probabilidad.

Definición axiomática de la probabilidad. La probabilidad es una relación que a cada evento E le asocia un número real P(E), el cual cumple con los axiomas siguientes:

1) $P(E) \geq 0$ Para cualquier evento E
2) $P(S) = 1$
3) $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ Siempre que E y F sean eventos mutuamente excluyentes.

Estos axiomas son reglas básicas de la probabilidad a partir de las cuales se pueden demostrar una serie de teoremas como los que se dan a continuación.

Teorema 1

La probabilidad de que ocurra el evento que no tiene elementos es cero.

$$P(\varnothing) = 0$$

)emostración

;ea E un evento cualquiera, luego entonces $E = E \cup \varnothing$, por lo que:

$$P(E) = P(E \cup \varnothing)$$

;omo E y $\varnothing$ son eventos mutuamente excluyentes ya que $E \cap \varnothing = \varnothing$, entonces se puede plicar el tercer axioma de la probabilidad, o sea que:

$$P(E) = P(E \cup \varnothing) = P(E) + P(\varnothing)$$

;i de la igualdad anterior se despeja $P(\varnothing)$, entonces tenemos lo que se quiere demostrar:

$$0 = P(\varnothing)$$

:jemplo 2.10

, partir del ejemplo 2.8, encontrar $P(A \cap B)$.

'enemos que un número no puede ser par y non al mismo tiempo, por lo que:
$\cap B = \varnothing$, luego entonces

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

'eorema 2

a probabilidad de que ocurra el complemento de un evento E es igual a 1 menos la robabilidad de que ocurra el evento E.

$$P(E') = 1 - P(E)$$

'emostración

'ara cualquier evento E, se tiene que $E \cup E' = S$, luego entonces:

$$P(S) = P(E \cup E')$$

:omo E y E' son eventos mutuamente excluyentes se puede aplicar el tercer axioma de la robabilidad. de manera que:

$$P(S) = P(E \cup E') = P(E) + P(E')$$

plicando el segundo axioma de la probabilidad se tiene:

$$1 = P(S) = P(E \cup E') = P(E) + P(E')$$

Si en esta igualdad se despeja P(E') se tiene lo que se quiere demostrar:

$$P(E') = 1 - P(E)$$

Ejemplo 2.11

La probabilidad de que un estudiante se quede en casa es P(A) = .64 y de que vaya al cine es P(B) = .21. Encontrar la probabilidad de que:

a) no se quede en casa;
b) no vaya al cine.

a) Unicamente pueden ocurrir dos cosas, que el estudiante se quede en casa o que no se quede en casa, luego entonces son eventos complementarios. Así que la probabilidad de que no se quede en casa es:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.64 = 0.36$$

b) De manera análoga, la probabilidad de que no vaya al cine es:

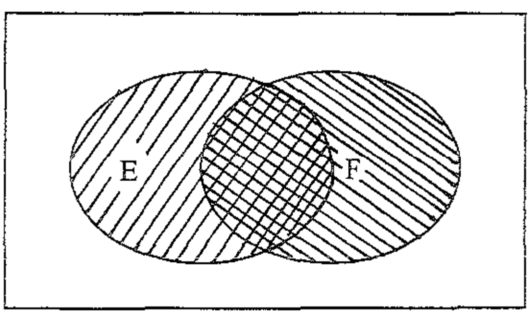
$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.21 = 0.79$$

Teorema 3

La probabilidad de que ocurra la unión de dos eventos E y F es igual a la probabilidad de que ocurra el evento E más la probabilidad de que ocurra el evento F menos la probabilidad de que ocurran ambos.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \quad \text{Para dos eventos cualesquiera E y F}$$

Utilizando diagramas de Venn tenemos lo siguiente:



Para calcular la probabilidad de que ocurra la unión de los eventos E y F tenemos que considerar la probabilidad de que ocurra el evento E más la probabilidad de que ocurra el evento F, sin embargo, $E \cap F$ se consideró primero en E y posteriormente en F, por lo que tenemos que descontar una de ellas, con lo cual tenemos que:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Ejemplo 2.12

Un cliente entra a un supermercado, la probabilidad de que compre pan es 0.6, de que compre leche es 0.5 y de que compre pan y leche es 0.3. Encontrar la probabilidad de que compre pan o leche o ambos.

Consideremos a los eventos P = el cliente compra pan y L = el cliente compra leche, entonces tenemos:

$$P(P \cup L) = P(P) + P(L) - P(P \cap L)$$

De manera que:

$$P(P \cup L) = 0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8$$

Ejemplo 2.13

De una baraja española se saca una carta al azar. Encontrar la probabilidad de que la carta extraída no sea oros ni rey.

Considérense los eventos siguientes:
O: la carta extraída es oros
R: la carta extraída es rey

Luego entonces la probabilidad de que la carta extraída no sea rey ni oros es:
$P(O' \cap R')$.

Una de las leyes de D Morgan dice que la intersección de los complementos de dos conjuntos es igual al complemento de su unión, por lo que se tiene lo siguiente:

$$P(O' \cap R') = P[(O \cup R)']$$

El segundo teorema dice que la probabilidad de que no ocurra un evento es igual a uno menos la probabilidad de que no ocurra, de manera que:

$$P(O' \cap R') = P[(O \cup R)'] = 1 - P(O \cup R)$$

Si se aplica el tercer teorema a los eventos O y R se tiene:

$$P(O \cup R) = P(O) + P(R) - P(O \cap R) = 10/40 + 4/40 - 1/40 = 13/40$$

Por lo tanto la probabilidad de que la carta extraída no sea oros ni rey es:

$$P(O' \cap R') = 1 - 13/40 = 27/40$$

Problemas

1. Si $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/4$. Encontrar:
   a) $P(A \cup B)$;
   b) $P(A')$;
   c) $P(B')$.

2. Sean A y B dos eventos, tal que $P(A \cup B) = 3/4$, $P(A') = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/4$. Encontrar las probabilidades siguientes:
   a) $P(A)$;
   b) $P(B)$.

3. En una bolsa se encuentran 10 canicas numeradas del 1 al 10. Sea E el evento de extraer una canica marcada con un número par y F el evento de extraer una canica marcada con un número mayor o igual que 5. Encontrar:
   a) $P(E')$;
   b) $P(F')$;
   c) $P(E \cup F)$.

4. En una escuela preparatoria el 20% de los alumnos tienen 17 años o más y el 55% son mujeres. Si se supone que los estudiantes entran aleatoriamente a la biblioteca, encontrar la probabilidad de que el próximo estudiante que entre a este lugar sea:
   a) menor de 17 años;
   b) hombre.

5. La probabilidad de que un vendedor de autos venda por lo menos 3 autos en una semana es 0.20. ¿Cuál es la probabilidad de que venda 0, 1 o 2 autos?

6. En una caja hay 100 transistores, la probabilidad de que haya al menos un defectuoso es 0.05 y de que haya al menos 2 defectuosos es 0.01. Encontrar la probabilidad de que en la caja haya:
   a) cero defectuosos;
   b) a lo más un defectuoso.

7. La probabilidad de que en una ciudad X un automovilista sea multado es 0.2, de que se le cancele su licencia es 0.1 y de que le sucedan ambas cosas es 0.05. Encontrar la probabilidad de que a un automovilista escogido al azar sea multado o se le cancele su licencia.

8. En una compañía trabajan 100 hombres y 70 mujeres, 50 hombres y 40 mujeres son profesionistas. Si se escoge de manera aleatoria a un empleado de esta compañía, encontrar la probabilidad de que sea:
   a) mujer y profesionista;
   b) mujer o profesionista;
   c) ni mujer ni profesionista.

. En la tabla que se da a continuación se resume la experiencia docente y la preparación profesional de los profesores de una escuela.

Preparación \ Experiencia	Menos de 5 años	5 años o más
Licenciatura	75	40
Maestría o grado superior	55	30

ea A el evento de que el profesor seleccionado tenga licenciatura y B que el profesor tenga nenos de 5 años de antigüedad, encontrar:

) $P(A \cap B)$;
) $P(A \cup B)$;
) $P(A' \cap B')$;
) $P(A' \cup B')$.

0. En cierta comunidad el 40% de las familias tiene televisor, el 20% tiene lavadora y el 5% tiene ambas. Encontrar la probabilidad de que si se escoge una familia al azar, ésta no tenga televisor ni lavadora.

1. El 80% de las personas que viajan por el sureste visitan Isla Mujeres, el 70% visitan Cozumel y el 60% visitan ambos lugares. ¿Cuál es la probabilidad de que un turista que viaja por el sureste no visite ninguno de estos dos lugares?

2.6 Probabilidad condicional

n algunas ocasiones la ocurrencia de un evento A modifica la probabilidad de que ocurra un vento B, de manera que se puede hablar de la probabilidad de que ocurra el evento B bajo condición de que ocurra el evento A.

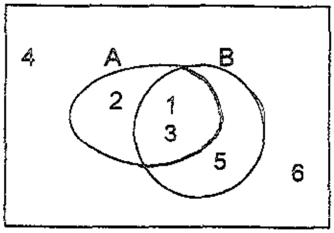
upóngase que se lanza un dado bien balanceado y que el resultado es menor que cuatro, ntonces, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea un número non?

os números menores que cuatro son: 1, 2 y 3, y de éstos nos interesan los números nones, or lo que la probabilidad que nos interesa es 2/3.

i denotamos con A al evento de que caiga un número menor que cuatro y B al evento de ue caiga un número non, entonces tenemos:

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$= \{1, 2, 3\}$
$= \{1, 3, 5\}$
$\cap B = \{1, 3\}$

Lo cual se puede ver gráficamente de la manera siguiente:



De manera que el problema se puede plantear como la probabilidad de que ocurra el evento B dado que ocurre el evento A, con lo cual se tiene:

$$P(B / A) = \frac{N(A \cap B)}{N(A)} = \frac{2}{3}$$

Donde:
P(B / A) = Probabilidad de que ocurra el evento B dado que ocurre el evento A

Si el numerador y el denominador se dividen entre el número de elementos del espacio muestra, esto es, entre N(S), entonces tenemos que la probabilidad de que ocurra el evento B dado que ocurre el evento A es igual a la probabilidad de que ocurran los dos eventos entre la probabilidad de que ocurra el evento A.

Probabilidad condicional. La probabilidad de que ocurra un evento B dado que ocurre el evento A es igual a la probabilidad de que ocurran ambos eventos entre la probabilidad de que ocurra el evento A.

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{donde } P(A) \neq 0$$

Ejemplo 2.14

Los registros de una ciudad muestran que el 27% de los días de mayo son nublados y que el 16% son nublados y lluviosos. Si un día de mayo es nublado, encontrar la probabilidad de que sea lluvioso.

Considerense los eventos siguientes: N el día es nublado y L el día es lluvioso, luego entonces, la probabilidad de que el día sea lluvioso dado que es nublado es:

$$P(L / N) = \frac{P(N \cap L)}{P(N)} = \frac{0.16}{0.27} = 0.59$$

Ejemplo 2.15

En una oficina hay 50 empleados, de los cuales 20 son mujeres y 30 son hombres, 12 de las mujeres son casadas y 16 de los hombres también son casados. Si se selecciona al azar a una persona de esta oficina, encontrar la probabilidad de que sea:
a) mujer;
b) casada;
c) mujer y casada;
d) mujer dado que es casada.

Los datos se pueden acomodar en forma de tabla tal como se muestra a continuación.

	Casada (C)	No casada (C')	Total
Mujeres (M)	12	8	20
Hombres (M')	16	14	30
Total	28	22	50

a) en el grupo hay 20 mujeres de un total de 50 personas, por lo que la probabilidad de que la persona seleccionada sea mujer es:

$$P(M) = \frac{20}{50} = 0.4$$

b) en el grupo hay 28 personas casadas, por lo que la probabilidad de que la persona seleccionada sea casada es:

$$P(C) = \frac{28}{50} = 0.56$$

c) en el grupo hay 12 personas que son mujeres y son casadas, por lo que la probabilidad conjunta de estos eventos es:

$$P(M \cap C) = \frac{12}{50} = 0.24$$

d) hay 28 personas casadas de las cuales 12 son mujeres, por lo que la probabilidad condicional que nos interesa es:

$$P(M / C) = \frac{12}{28} = 0.43$$

De la definición de probabilidad condicional podemos despejar $P(A \cap B)$, con lo cual tenemos a **regla de la multiplicación** que se da a continuación:

$$P(A \cap B) = P(B / A)\, P(A)$$

o bien

$$P(A \cap B) = P(A / B)\, P(B)$$

Ejemplo 2.16

En una caja se tienen 4 canicas blancas y 6 rojas, si sacamos dos canicas al azar, encontrar a probabilidad de que:

a) las dos sean blancas;
b) sea una blanca y una roja.

Vamos a considerar a los eventos B y R como:

B = {x /x es canica blanca}
R = {x /x es canica roja}

a) la probabilidad de que ambas canicas sean blancas es igual a la probabilidad de que la primera sea blanca y de que la segunda también sea blanca. Aplicando la regla de la multiplicación tenemos:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2 / B_1)\, P(B_1)$$

La probabilidad de canica blanca en la primera extracción es 4/10 y la probabilidad de canica blanca en la segunda extracción dado que la primera fue blanca es 3/9. Luego entonces la probabilidad buscada es:

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{9}\,\frac{4}{10} = \frac{12}{90} = 0.13$$

De manera análoga se puede resolver el otro inciso.

) para encontrar la probabilidad de que una canica sea blanca y la otra roja tenemos que considerar la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda sea roja más la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda sea blanca. Esto es, la probabilidad que buscamos es la suma de dos probabilidades conjuntas.

$$
\begin{aligned}
P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) &= P(R_2 / B_1)\, P(B_1) + P(B_2 / R_1)\, P(R_1) \\
&= \frac{6}{9}\,\frac{4}{10} + \frac{4}{9}\,\frac{6}{10} \\
&= 0.27 + 0.27 \\
&= 0.54
\end{aligned}
$$

Cuando se trabaja con dos eventos A y B, se tiene que: $P(A \cap B)$ es la probabilidad conjunta de los eventos A y B; $P(A)$ y $P(B)$ son las probabilidades marginales, y $P(A / B)$ y $P(B / A)$ son las probabilidades condicionales.

Ejemplo 2.17

Una compañía compra dos grupos de máquinas, el grupo I está formado por cuatro máquinas compradas a un proveedor y el grupo II está formado por seis máquinas compradas a otro proveedor. Todas las máquinas tienen la misma capacidad y se emplean para producir los mismos artículos. De los artículos producidos por las máquinas del grupo I, el 5% son defectuosos y el 10% de los artículos producidos por las máquinas del grupo II son defectuosas. Encontrar las cuatro probabilidades conjuntas.

La probabilidad de escoger una máquina del grupo I es $P(I) = 0.4$, la probabilidad de escoger una máquina del grupo II es $P(II) = 0.6$, la probabilidad de que un artículo defectuoso sea producido por una máquina del grupo I es $P(D / I) = 0.05$, la probabilidad de que un artículo defectuoso sea producido por una máquina del grupo II es $P(D / II) = 0.10$, la probabilidad de que un artículo no defectuoso sea producido por una máquina del grupo I es $P(D' / I) = 0.95$ y la probabilidad de que un artículo no defectuoso sea producida por una máquina del grupo II es $P(D' / II) = 0.90$. Luego entonces las probabilidades conjuntas son:

$$P(I \cap D) = P(I)\, P(D / I) = 0.4 * (0.05) = 0.02$$

$$P(II \cap D) = P(II)\, P(D / II) = 0.6 * (0.10) = 0.06$$

$$P(I \cap D') = P(I)\, P(D' / I) = 0.4 * (0.95) = 0.38$$

$$P(II \cap D') = P(II)\, P(D' / II) = 0.6 * (0.90) = 0.54$$

Problemas

1. Sean $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cap B) = 0.18$, obtener:

a) $P(A \cup B)$;
b) $P(B / A)$;
c) $P(A / B)$.

2. Sean A y B eventos tales que P(A) = 3/8, P(B) = 5/8 y p(A ∪ B) = 3/4. Encontrar las probabilidades siguientes:
a) P(A / B);
b) P(B / A).

3. Los empleados de una oficina se han clasificado de acuerdo al sexo y a su estado civil, obteniéndose los datos que aparecen en la tabla.

Estado civil \ sexo	Mujeres (F)	Hombres (F')	Total
Casados (C)	80	40	120
Solteros (C')	60	20	80
Total	140	60	200

Si se escoge al azar a un empleado, encontrar las probabilidades siguientes:
a) obtener: P(C), P(C / F) y P(C / F');
b) obtener: P(F / C), P(F / C') y P(F);
c) obtener: P(C' / F'), P(C' / F) y P(C');
d) obtener: P(F' / C), P(F' / C') y P(F').

4. Si se lanzan dos dados bien balanceados, encontrar la probabilidad de que en los dos dados aparezca el mismo número de puntos dado que su suma es 8.

5. El 25% de los estudiantes de un grupo reprobó matemáticas, 15% reprobó química y 10% reprobó ambas materias. Encontrar la probabilidad de que un estudiante repruebe matemáticas dado que reprobó química.

6. La probabilidad de que un concierto tenga la publicidad adecuada es de 0.8 y la probabilidad de que tenga la publicidad adecuada y además sea un éxito es de 0.76. ¿Cuál es la probabilidad de que el concierto sea un éxito dado que tuvo la publicidad adecuada?

7. En una caja hay dos tarjetas, una de ellas es negra por ambos lados y la otra es negra por un lado y blanco por el otro. Se saca una tarjeta al azar y se coloca en una mesa, sí la cara que está hacia arriba es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara también sea negra?

8. Una caja tiene diez esferas, de las cuales cinco son blancas, tres rojas y dos negras. Si de manera aleatoria y sin reemplazo se extraen dos esferas, encontrar la probabilidad de que:
a) las dos sean blancas;
b) las dos sean negras;
c) la primera sea blanca y la segunda roja.

9. Un lote tiene 100 fusibles, dos de los cuales son defectuosos. Si se prueban los fusibles uno por uno, encontrar la probabilidad de que el último fusible defectuoso sea detectado en la tercera prueba.

0. El propietario de un balneario sabe que la probabilidad de que el verano sea caluroso es de 0.7. Si el verano es caluroso la probabilidad de que aumenten sus ganancias es de 0.9. Encontrar la probabilidad de que el verano seas caluroso y el propietario aumente sus ganancias.

1. Los registros de la policía muestran que en una ciudad la probabilidad de que se capture a un ladrón es 0.35 y 0.14 de que se le capture y se le condene. ¿Cuál es la probabilidad de que un ladrón que es capturado sea condenado?

2. En los Estados Unidos 15 de cada 100 nacimientos requieren de operación cesárea. En tales casos sobreviven 96 de cada 100 bebés. ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer embarazada elegida al azar necesite cesárea y que sobreviva su hijo?

3. Se van a extraer 3 cartas de una baraja española bien barajada. Encontrar la probabilidad de que:
) las tres sean ases;
) las primeras dos sean ases y la otra rey;
) las tres sean oros.

4. En un grupo hay 10 niños y 5 niñas. Si se escogen dos personas al azar, encontrar la probabilidad de que sean del mismo sexo.

5. En una habitación oscura hay seis cajas blancas, cada una contiene tres esferas verdes y cinco amarillas, y dos cajas negras, cada una de las cuales contiene dos esferas verdes y cuatro amarillas. Si usted entra en la habitación y selecciona aleatoriamente una caja y de ella toma una esfera, encontrar la probabilidad de que seleccione una esfera verde.

6. Se tienen tres urnas, la primera contienen 3 bolas blancas y 2 negras, la segunda contiene tres blancas y una negra y la tercera contiene dos blancas y una negra. Se extrae una bola de la primera urna, si esta es blanca se saca una bola de la segunda urna y si es negra entonces se saca una bola de la tercera urna. Encontrar la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:
) blanca;
) negra.

2.7 Eventos independientes

ay eventos en los cuales la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos no afecta a la currencia o no ocurrencia del otro. Así tenemos que si una moneda se lanza dos veces, el rimer resultado no influye en el segundo resultado, luego entonces decimos que los eventos on independientes; lo mismo pasa si un dado se lanza dos o tres veces, cada uno de los esultados no afecta a la ocurrencia de los demás. Cuando esto pasa se dice que los ventos son independientes.

ventos independientes. Los eventos A y B son independientes sí y sólo sí:

$$P(B / A) = P(B) \quad y \quad P(A / B) = P(A)$$

jemplo 2.18

a probabilidad de que un estudiante apruebe álgebra es 0.75, la probabilidad de que pruebe literatura es 0.84 y la probabilidad de que apruebe ambas es 0.63. ¿Cuál es la robabilidad de que apruebe álgebra dado que ya aprobó literatura?

enemos que la probabilidad de que apruebe literatura dado que aprobó literatura es igual a probabilidad de que apruebe ambas entre la probabilidad de que apruebe literatura, tal omo se muestra a continuación.

$$P(A / L) = \frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{0.63}{0.84} = 0.75$$

omo $P(A / L) = P(A)$, entonces se puede concluir que A y L son eventos independientes, sea que el hecho de aprobar literatura no influye en la probabilidad de que apruebe gebra.

n la sección anterior llegamos a la regla de la multiplicación.

$$P(A \cap B) = P(B / A)\, P(A)$$

e manera que cuando dos eventos son independientes se tiene que:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A) = P(A)\, P(B)$$

ego entonces, cuando los eventos A y B son independientes, la probabilidad conjunta de s eventos A y B es igual al producto de las probabilidades de dichos eventos.

sí que la definición de eventos independientes se puede expresar de la manera siguiente:

$$A \text{ y } B \text{ son eventos independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B)\, P(A).$$

emplo 2.19

n una compañía se contrata personal con estudios universitarios y sin ellos para realizar el smo trabajo. Después de cierto tiempo el personal es calificado por el supervisor teniéndose los resultados que aparecen en la tabla. ¿La educación universitaria y el sempeño en el trabajo son eventos independientes?

Desempeño	Educación universitaria (U)	Sin educación universitaria (U')	Total
Bueno(B)	6	9	15
Pobre(B')	14	21	35
Total	20	30	50

i se escoge al azar a una persona de este grupo tenemos que la probabilidad de que tenga n buen desempeño en el trabajo es $P(B) = 15/50$, la probabilidad de que tenga educación niversitaria es $P(U) = 20/50$ y la probabilidad de que tenga buen desempeño en el trabajo y ea profesionista es $P(B \cap U) = 6/50$.

enemos que: $P(B)\,P(U) = (0.3)\,(0.4) = 0.12$ y $P(B \cap U) = 0.12$.

uego entonces, $P(B \cap U) = P(B)\,P(U)$, por lo tanto los eventos B y U son eventos idependientes o sea que la educación universitaria no influye en el desempeño de ese tipo e trabajo.

jemplo 2.20

n una caja se tienen 4 canicas blancas y 6 rojas, si se saca una de ellas, se anota el color y e regresa a la caja, encontrar la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda sea oja.

l resultado de la primera extracción en nada influye para el resultado de la segunda xtracción, luego entonces los eventos sacar canica roja en la primera extracción y canica oja en la segunda extracción son eventos independientes, así que:

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P(R_2) = (0.4)(0.6) = 0.24$$

n el ejemplo 2.16 se saca una canica y posteriormente se saca una segunda canica sin aber regresado la primera a la urna, en este caso se dice que se trabaja muestreo sin eemplazo; en cambio, en el ejemplo 2.20 la primera canica se regresa a la urna por lo que uede salir nuevamente en la segunda extracción, en este caso se trabaja muestreo con eemplazo.

emplo 2.21

n avión está equipado con tres motores que funcionan de manera independiente. La obabilidad de falla de cada motor es de 0.01. Si se necesita sólo un motor para que el rión vuele, encontrar la probabilidad de que un vuelo sea exitoso.

a probabilidad de que el vuelo no sea exitoso es la probabilidad de que los tres motores llen, o sea:

$$P(E') = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(F_1)\,P(F_2)\,P(F_3) = (.01)\,(.01)\,(.01) = 0.000001$$

uego entonces la probabilidad de que al menos un motor no falle, o sea de que el vuelo sea xitoso es:

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - 0.000001 = 0.999999$$

robiemas

. Suponga que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cap B) = 0.12$:
) calcular $P(B / A)$;
) calcular $P(A / B)$;
) ¿A y B son independientes?

. Si $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y A y B son eventos independientes, encontrar:
) $P(A \cap B)$;
) $P(B / A)$;
) $P(A / B)$.

Si $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y A y B son eventos independientes, encontrar las probabilidades siguientes:
) $P(A \cup B)$;
) $P(A / B)$;
$P(B / A)$.

En una urna hay 8 bolas rojas y 10 azules, si se sacan dos bolas utilizando muestreo con reemplazo, encontrar la probabilidad de que:
las dos sean rojas;
las dos sean azules;
haya una de cada color.

La urna A contiene 4 canicas blancas y 3 rojas, la urna B contiene 2 blancas y 5 rojas y la urna C 3 blancas y 6 rojas. Si se saca una canica de cada urna, encontrar la probabilidad de que las tres sean del mismo color.

Los empleados que trabajan en una compañía se han clasificado de acuerdo al sexo y a su estado civil, obteniéndose los datos que se dan a continuación.

Estado civil \ sexo	Mujeres (F)	Hombres (F')	Total
Casados (C)	84	36	120
Solteros (C')	56	24	80
Total	140	60	200

se escoge a una persona al azar, contestar los incisos siguientes:
¿son los eventos C y F independientes?

) obtener: P(C / F), P(C / F'), y P(C);
) obtener: P(F / C), P(F / C') y P(F);
) obtener: P(C' / F'), P(C' / F) y P(C');
) obtener: P(F' / C), P(F' / C') y P(F').

. En una prisión hay 400 reclusos, algunos están detenidos por primera vez, otros son reincidentes (R), algunos de ellos tienen condenas por menos de cinco años y otros tienen condenas más largas (L), tal como se muestra en la tabla.

	Condena menor a cinco años	Condena larga (L)	Total
Presos por primera vez	120	40	160
Reincidentes (R)	80	160	240
Total	200	200	400

i se va a seleccionar al azar a uno de los internos para hacer una entrevista acerca de las ondiciones del penal. Encontrar las probabilidades siguientes:
) P(R);
) P(L);
) $P(R \cap L)$;
) $P(R' \cap L)$;
) P(L / R);
P(R' / L).

. Si se lanzan 3 dados bien balanceados, encontrar la probabilidad de que la suma de puntos obtenidos sea 18.

El 20% de los alumnos de una escuela tienen vista defectuosa, el 8% tienen oído defectuoso y el 4% tienen vista y oído defectuosos.
) ¿Vista y oído son eventos independientes?
) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño que niño tenga oído defectuoso dado que tiene vista defectuosa?
¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga vista defectuosa si sabemos que tiene oído defectuoso?
) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga vista y oído defectuosos?
) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga vista ni oído defectuosos?

). En una escuela todos los alumnos toman matemáticas y física. La probabilidad de que un alumno repruebe matemáticas es 0.25, de que repruebe física es 0.2 y de que repruebe ambas es 0.10.
¿Reprobar física y reprobar matemáticas son eventos independientes?
Si un alumno reprueba matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que repruebe matemáticas?
Si un alumno reprueba matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que reprueba física?

l. La probabilidad de que un tirador A de en un blanco es 1/4 y probabilidad de que un tirador B de en dicho blanco es 2/5, encontrar la probabilidad de que alguno de los dos de en el blanco.

12. Un jugador de basquetbol logra encestar el 70% de sus tiros. Va a lanzar un tiro, si no encesta terminan sus tiros y si encesta hace un segundo tiro. Encontrar la probabilidad de que haga 0, 1 o 2 puntos.

13. Un cazador hace 7 disparos a un tigre enfurecido. Si la probabilidad de que un disparo mate al tigre es 0.6, encontrar la probabilidad de que el cazador esté vivo.

14. En un experimento de psicología no se pueden utilizar personas que tengan daltonismo o sean zurdos. En la población en la cual se escoge a las personas el 7% son daltónicos y el 8% son zurdos. Si se escoge al azar una persona ¿qué probabilidad hay de que pueda participar en el experimento?

15. Se tienen dos alarmas contra incendios. La probabilidad de que cualquiera de ellas funcione en caso de incendio es 0.9. Si las alarmas funcionan de manera independiente, encontrar la probabilidad de que en caso de incendio:
a) ambas funcionen;
b) ninguna funcione;
c) al menos una funcione.

16. Un grupo de científicos quiere hacer un experimento en la superficie lunar. La probabilidad de poner en órbita un satélite es de 0.8, la de que alunice es 0.9 y la de que funcione correctamente el experimento es 0.7. Encontrar la probabilidad de que:
a) el satélite no logre ponerse en órbita;
b) el satélite logre ponerse en órbita pero no alunice;
c) el satélite logre ponerse en órbita y alunice pero el experimento no funcione correctamente;
d) el experimento sea un éxito.

17. La probabilidad de que una persona trabaje por 10 años o más en una compañía es de 1/6, si un hombre y una mujer empiezan a trabajar el mismo día, encontrar la probabilidad de que:
a) el hombre trabaje menos de 10 años en esta compañía;
b) el hombre y la mujer trabajen menos de 10 años para esta compañía;
c) alguno de ellos trabaje más de 10 años en esta compañía.

18. Los datos que aparecen a continuación son parte de una tabla de mortalidad basada en 100 000 personas:

Edad	Número de vivos
17	94 818
18	94 089
19	93 362
20	62 637
21	91 914

Si A B son personas de 17 y 18 años respectivamente, encontrar la probabilidad de que:
a) ambos vivan 2 años más;
b) ambos mueran antes de 2 años;

) la suma de puntos sea menor que 8 o divisible por 3.

Si dos eventos A y B son tales que $P(A) = 0.6$ y $P(B) = 0.4$, encontrar $P(A \cup B)$ en cada uno de los siguientes casos:

) A y B son eventos mutuamente excluyentes;

) A y B son eventos independientes.

Sean A y B dos eventos, con $P(A \cup B) = 7/8$, $P(A \cap B) = 1/4$ y $P(A') = 5/8$. Encontrar las probabilidades siguientes:

) $P(A)$;

) $P(B)$;

) $P(A \cap B)$.

Sean A y B dos eventos, con $P(A) = 1/2$; $P(A \cup B) = 3/4$ y $P(B') = 5/8$. Encontrar las probabilidades siguientes:

) $P(A \cap B)$;

) $P(A' \cap B')$;

) $P(A' \cup B')$;

) $P(B \cap A')$.

0. En un grupo de 50 alumnos 30 estudian inglés, 20 estudian francés y 10 estudian alemán; 8 estudian inglés y francés, 5 inglés y alemán y 3 francés y alemán, y 2 estudian los 3 idiomas. Si se escoge un estudiante al azar, encontrar la probabilidad de que:

) estudie inglés y no estudie alemán;

) estudie alguno de los tres idiomas;

no estudie ninguno de los tres idiomas.

1. En una empresa, la probabilidad de que un empleado escogido al azar tenga mas de 30 años es 0.55. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado escogido al azar tenga 30 años o menos?

2. En una clase hay 30 alumnos de los cuales 20 estudian inglés, 12 estudian francés y 6 estudian los dos idiomas. Sea A = "el alumno elegido estudia inglés" y B = "el alumno escogido estudia francés". Encontrar las probabilidades siguientes:

$P(A)$;

$P(B)$;

$P(A \cap B)$;

$P(A \cup B)$;

$P(A / B)$;

$P(B / A)$.

3. Un tipógrafo y un empleado de archivo trabajan en una oficina, la probabilidad de que el tipógrafo llegue tarde a su trabajo es 0.09, la probabilidad de que el empleado de archivo llegue tarde es 0.16 y la probabilidad de que ambos lleguen tarde es 0.05, encontrar la probabilidad de que al menos uno de ellos llegue tarde.

4. En una ciudad el l5% de los días del mes de mayo son nublados y el 4% de los días son nublados y llueve. Si un día de mayo está nublado, encontrar la probabilidad de que no llueva.

5. El 20% de los habitantes de una ciudad usa lentes, el l0% es profesionista y el 7% usa lentes y es profesionista. Si se escoge un apersona al azar, encontrar la probabilidad de que:

) use lentes dado que es profesionista;
) no sea profesionista dado que usa lentes;
) no use lentes ni sea profesionista.

6. La probabilidad de que María estudie para su próximo examen de estadística es 0.75. Si estudia tiene una probabilidad de 0.80 de aprobar, pero si no estudia la probabilidad de aprobar es de 0.50. Dado que María aprobó el examen, encontrar la probabilidad de que no haya estudiado.

7. El 80% de los automóviles que circulan en una glorieta llegan a ella por una avenida principal. El 70% de los automóviles que circulan por la glorieta continúan circulando por la avenida principal. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil seleccionado al azar llegue a la glorieta por la avenida principal y que continúe por ella?

8. El 80% de los estudiantes que hacen regularmente sus tareas aprueban un curso de estadística, mientras que sólo aprueba el 20% de los estudiantes que no hacen regularmente. El 60% de los alumnos del grupo hacen regularmente sus tareas. Si se escoge al azar a un estudiante de este grupo y este aprobó, encontrar la probabilidad de que haya realizado regularmente sus tareas.

9. El 60% de los artículos producidos por una compañía se fabrican en una máquina A y los restantes en una máquina B. El 8% de los artículos que se producen en la máquina A son defectuosos, en tanto que de los artículos producidos por la máquina B el 9% son defectuosos. Si se escoge un artículo al azar, encontrar la probabilidad de que:

) haya sido producido por la máquina A y sea defectuoso;
) haya sido producido por la máquina B y sea defectuoso;
) haya sido producido por la máquina A y sea bueno;
) haya sido producido por la máquina B y sea bueno.

0. Si $P(M) = 0.55$, $P(N) = 0.18$ y $P(N \cap M) = 0.099$, ¿son independientes los eventos M y N?

1. Tomando en cuenta que $P(R \cap L) = 0.75$, $P(R) = 0.54$ y $P(L) = 0.5$, determinar si R y L son eventos independientes o dependientes.

2. Si A y B son eventos independientes con $P(A) = 1/2$ y $P(A \cup B) = 2/3$. Encontrar las probabilidades siguientes:

) $P(B)$;
) $P(A / B)$;
) $P(B / A)$.

3. El 52% de los habitantes de una ciudad son mujeres, el l6 % son profesionistas y el 7% son mujeres profesionistas. ¿Ser mujer y ser profesionista son eventos independientes? ¿Porqué?

4. En una caja hay 8 artículos, 2 de los cuales son defectuosos, y en una caja B hay 5 artículos y 2 de ellos son defectuosos. Si se saca al azar un artículo de cada caja, encontrar la probabilidad de que:
ambos sean buenos;
ambos sean defectuosos.

5. En una bolsa hay 10 canicas numeradas del 1 al 10. Si se saca una canica al azar y luego se regresa a la bolsa y posteriormente se saca otra canica al azar, encontrar la probabilidad de que:
en las dos ocasiones salga el mismo numero;
en las dos ocasiones salgan números impares;
la suma de puntos obtenidos sea 18.

6. Se van a lanzar 5 monedas bien balanceadas, encontrar la probabilidad de que caigan:
cinco águilas;
por lo menos 4 águilas.

7. Si se extraen tres cartas de una baraja española, encontrar la probabilidad de que las tres sean oros.

8. Resolver el problema anterior considerando muestreo con reemplazo.

9. En una caja se tienen 10 bolas rojas, 30 blancas y 20 negras. Si se saca una bola se anota el color y luego se regresa a la caja, encontrar la probabilidad de que:
la primera sea blanca y la segunda roja;
ambas sean blancas;
ninguna sea blanca;
la primera no sea roja;
la segunda no sea blanca.

). Resolver el problema anterior considerando muestreo sin reemplazo.

1. La probabilidad de que un tirador de en un blanco es 0.30. Si el tirador dispara 3 veces, encontrar la probabilidad de que acierte las tres veces:
las tres veces;
al menos una vez.

2. Se tienen dos lotes de piezas idénticas. Se sabe que del primer lote 1% de las piezas son defectuosas, en tanto que 5% del segundo lote son defectuosas. Se escoge al azar un lote y de éste se escoge una pieza al azar. Encontrar:
la probabilidad de que la pieza escogida sea defectuosa;
si la pieza escogida es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido escogida del primer lote?

3. Una comisión está formada por 4 africanos y 6 asiáticos. Se eligen dos personas al azar, la primera será presidente y la segunda vicepresidente, encontrar la probabilidad de que:
) el presidente sea africano;
) ambos sean africanos;
) sólo el presidente sea africano.

4. La probabilidad de que un hombre viva 20 años más es 3/5 y la probabilidad de que su esposa viva 20 años más es 2/3. Encontrar la probabilidad de que en 20 años mas:
) ambos vivan;
) viva solamente el hombre;
) viva solamente la mujer;
) viva al menos uno.

5. La probabilidad de que un hombre viva 10 años más es 1/4 y la probabilidad de que su esposa viva 10 años más es 1/3. Encontrar la probabilidad de que dentro de 10 años:
) ambos vivan;
) ninguno viva,
al menos uno esté vivo;
) el esposo viva y la esposa no.

6. La probabilidad de que Oscar se case con una rubia es 0.1, de que se case con una mujer inteligente es 0.4 y de que se case con una mujer rica es 0.05. Suponiendo que las tres características son independientes, encontrar la probabilidad de que Oscar se case con una mujer rubia, rica y tonta.

7. Para que un avión se mantenga en vuelo es necesario que funcione uno de sus motores. La probabilidad de que falle un motor es de 0.1, encontrar el número de motores con que debe estar equipado el avión para tener una seguridad de 0.999 de que el avión se mantenga en vuelo.

8. La probabilidad de que un tirador de en el blanco es 0.4. Encontrar la probabilidad de que:
falle en cuatro tiros consecutivos;
de en al blanco al menos una vez.

9. Un sistema consiste de 4 componentes independientes: A, B, C y D. La probabilidad de falla para A es 0.01, 0.02 para B, 0.1 para C y 0.1 para D. Si para que funcione el sistema son necesarios los componentes A y B y al menos uno entre C y D, encontrar la probabilidad de que el sistema funcione.

0. El profesor imparte una clase de estadística, cuando falta a clase su ayudante da la clase. Si el profesor da la clase la probabilidad de que haga un examen es 0.7, si el ayudante da la clase la probabilidad de examen es de 0.1, si el profesor falta a clase en un 80% de las veces, encontrar la probabilidad de que en una clase cualquiera haya examen.

. Una máquina tragamonedas tiene tres carretes. En cada carrete se tienen marcados los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y una flor. Cuando se introduce una moneda y se tira de una palanca cada carrete gira de manera independiente, deteniéndose en una de las siete posiciones indicadas. Encontrar la probabilidad de que:

parezca flor en cada carrete;
parezcan dos flores;
parezca una flor;
o aparezcan flores;
parezcan tres dígitos en orden;
parezca una flor y dos dígitos impares.

Jn profesor olvida poner su despertador con probabilidad de 0.3, si lo pone timbra con probabilidad de 0.8, si la alarma suena se despierta a tiempo para su primera clase con una probabilidad de 0.9. Si la alarma no funciona él despierta a tiempo para su primera clase con probabilidad de 0.2. ¿Cuál es la probabilidad de que el profesor despierte a tiempo para su primera clase del día de mañana?

Jn informe que consta de dos páginas mecanografiadas, tiene un error: Dos personas revisan el informe, cada uno tiene una probabilidad de 0.8 de detectar el error. Encontrar la probabilidad de que el error sea detectado sí:
cada revisor lee una página diferente;
ambos leen las dos páginas.

La probabilidad de que un estudiante que ingresa a una escuela preparatoria termine entres años es 0.4. Si se escogen al azar a tres estudiantes, encontrar la probabilidad de que al menos uno de ellos termine en tres años.

El 80% de las personas que viajan por el sureste visitan Isla Mujeres, el 70% visitan Cozumel y el 60% visitan ambos lugares. ¿Cuál es la probabilidad de que un turista que viaja por el sureste no visite ninguno de estos dos lugares?

En un depósito hay almacenados 5000 equipos de televisión. En la tabla se muestra cómo se hallan clasificados según la marca y el modelo.

Modelo \ Marca	B_1	B_2	B_3	Total
S_1	700	225	500	1425
S_2	650	175	400	1225
S_3	450	350	325	1125
S_4	500	175	600	1225
Total	2300	925	1825	5000

i se escoge un televisor al azar, encontrar:
) $P(B_1)$;
) $P(S_4 \cap B_2)$;
) $P(S_3 / B_3)$;
) $P(S_1 \cup B_1)$;
) la probabilidad de que un equipo seleccionado aleatoriamente sea de marca B_1, dado que su modelo es S_4;
la probabilidad de que un equipo seleccionado aleatoriamente sea de modelo S_2 y de marca B_3;
) La probabilidad de que un equipo seleccionado sea de marca B_1 o B_3.

7. Entre los automóviles que se reparan en un taller en cierto período de tiempo, algunos han sufrido accidentes y otros no, algunos requieren reparaciones menores y otros requieren reparaciones mayores, tal como aparece en la tabla.

	Accidentado (A)	No accidentado	Total
Reparaciones menores (M)	30	50	80
Reparaciones mayores	180	20	200
Total	210	70	280

i se selecciona un automóvil al azar para verificar la calidad de la mano de obra, y si se onsidera a los eventos A: sufrió accidente y M: requiere reparaciones menores, encontrar s probabilidades siguientes:

) P(A);
) P(M');
P(A ∩ M');
) P(A / M');
) P(M' / A);
P(A' ∪ M).

8. Los empleados de una universidad fueron clasificados de acuerdo con su edad y adscripción a la administración, cuerpo docente o personal de apoyo.

Adscripción \ Edad	20 - 30	31 - 40	41 -50	51 o mayor
Administración	2	24	16	17
Cuerpo docente	1	40	36	28
Personal de apoyo	16	20	14	2

i se selecciona al azar a un empleado de esta universidad, encontrar la probabilidad de que:

esté en la administración o que tenga 51 años más;
no sea miembro del cuerpo docente;
sea miembro del cuerpo docente dado que tiene 40 años o más.

3. TECNICAS DE CONTEO

;uando se utiliza la definición clásica de la probabilidad es necesario contar el número de lementos del evento que nos interesa y el número de elementos del espacio muestral, lo ual no siempre resulta sencillo, por lo que es necesario utilizar técnicas que nos faciliten sta tarea.

:n este capítulo veremos tres técnicas que nos ayudan a contar de manera eficiente: el rincipio fundamental del conteo, las permutaciones y las combinaciones.

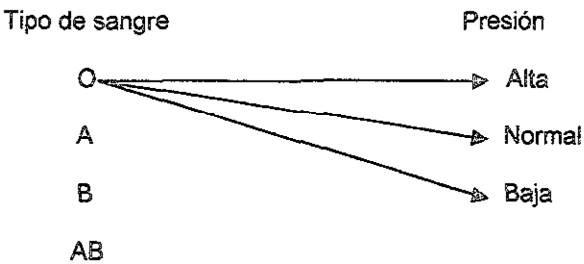
3.1 Principio fundamental del conteo

rincipio fundamental del conteo. Si un suceso A puede ocurrir de m formas diferentes y n suceso B puede ocurrir de n formas diferentes, entonces ambos sucesos pueden ocurrir e manera conjunta de mn formas diferentes.

$$\begin{array}{|c|c|} \multicolumn{1}{c}{A} & \multicolumn{1}{c}{B} \\ \hline m & n \\ \hline \end{array} \quad = \quad mn$$

jemplo 3.1

e va hacer un estudio en el cual se va a clasificar a las personas de acuerdo a su tipo de angre y a su presión sanguínea. Los tipos de sangre son: O, A, B y AB, y la presión puede er: alta, normal y baja. ¿Cuántas formas se tienen para clasificar a las personas?



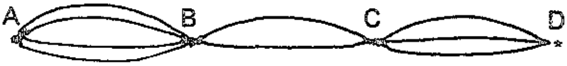
odemos notar que el tipo de sangre O se puede asociar con presión alta, normal o baja, de anera que hay tres clasificaciones para tipo de sangre O, de manera análoga se puede ver ue también hay tres clasificaciones para A, tres para B y tres para AB. Por lo tanto se tienen 2 posibilidades para clasificar a las personas.

e tienen cuatro posibilidades para el tipo de sangre y tres para la presión, por lo que ilizando el principio fundamental del conteo tenemos que hay $4 * 3 = 12$ posibilidades.

$$\begin{array}{|c|c|} \multicolumn{1}{c}{TS} & \multicolumn{1}{c}{P} \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} \quad = \quad 12$$

emplo 3.2

ara ir de la ciudad A a la ciudad B hay cuatro caminos diferentes, 2 para ir de B a C y 3 para de C a D. ¿Cuántas formas diferentes se tienen para ir de A a D pasando sólo una vez por y C?



:stando en A tenemos 4 formas diferentes para ir a B, si se está en B se tienen dos formas iferentes para ir a C, por lo que se tienen 4 * 2 = 8 formas diferentes para ir de A a C y para de C a D hay 3 formas diferentes, de manera que para ir de A a D hay 8 * 3 = 24 formas iferentes.

'odemos notar que aunque el principio fundamental del conteo sólo se dio para dos sucesos, ste se puede aplicar de manera reiterativa, por lo que para resolver este ejemplo basta con ener:

A	B	C		
4	2	3	=	24

jemplo 3.3

:n una reunión hay 42 personas, entre ellas se va a rifar un televisor, una grabadora y un eloj. ¿De cuántas formas diferentes se pueden otorgar los premios?

l televisor lo puede ganar cualquiera de las 42 personas que asisten a esta reunión, de ıanera que la grabadora la puede ganar cualquiera de las otras 41 personas y el reloj lo uede ganar cualquiera de las 40 personas restantes, así que los tres premios se pueden signar de 68 880 formas diferentes.

T	G	R		
42	41	40	=	68 880

jemplo 3.4

n examen de opción múltiple tiene 12 preguntas, cada una de ellas tiene 5 opciones y sólo ıa es verdadera, si este examen se contesta de manera aleatoria, encontrar la probabilidad e que todas las respuestas sean erróneas.

ara calcular la probabilidad de que ocurra el evento que nos interesa es necesario conocer ı número de elementos del espacio muestral y el número de elementos del evento.

ara encontrar el número de elementos del espacio muestral, podemos hacer el ızonamiento siguiente: para contestar la primera pregunta se tienen 5 posibilidades, para la egunda también se tiene 5 posibilidades, y así sucesivamente para cada una de las eguntas restantes, por lo que aplicando reiteradamente el principio fundamental del conteo e tiene:

		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª		
N(S)	=	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	=	244 140 625

Así que se tienen 244 140 625 posibilidades para contestar el examen.

El evento E que nos interesa consiste en contestar todas las preguntas de manera errónea, por lo para la primera pregunta se tienen 4 posibilidades de contestar de manera errónea, para la segunda pregunta también se tienen cuatro posibilidades de contestar de manera errónea y así sucesivamente para las preguntas restantes, por lo que utilizando el principio fundamental del conteo se tiene:

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª		
N(E) =	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	=	16 777 216

Luego entonces hay 16 777 216 posibilidades en que todas las respuestas sean contestadas de manera errónea. Por lo que la probabilidad de contestar todas las preguntas de manera errónea es:

$$P(E) = \frac{16\ 777\ 216}{244\ 140\ 625} = 0.069$$

Problemas

1. Una cadena de tiendas departamentales tiene 3 almacenes y 8 sucursales de tiendas. ¿De cuántas formas diferentes se puede enviar un artículo de un almacén a una tienda?.

2. Para la siguiente temporada, un auditorio tiene 12 conciertos y 8 recitales. ¿Cuántas formas se tienen para comprar boletos para un recital y un concierto?

3. En el consultorio de un dentista hay 5 números de la revista Proceso, 2 de La crisis y 4 de Milenio. Si un paciente ojea una revista de cada tipo, ¿cuántas posibilidades tiene?

4. El menú en un restaurante consta de 3 sopas, 4 guisados, 2 postres y 5 bebidas. ¿Cuántas formas se tienen para elegir una sopa, un guisado, un postre y una bebida?

5. En un estudio se clasifica a las familias en 6 categorías de acuerdo al tipo de ingreso, en 5 según el número de integrantes, en 3 de acuerdo al tipo de educación del jefe de la familia y en 3 según el tipo de propiedad de la vivienda. ¿Cuántas formas se tienen para clasificar a las familias?

6. Un equipo de herramientas contiene 6 desarmadores, 4 llaves, 2 martillos y 3 pinzas. ¿Cuántas formas se tienen para elegir una herramienta de cada tipo?

. Beethoven escribió 9 sinfonías y Mozart 27 conciertos para piano. Si el locutor de una estación de radio quiere pasar una sinfonía y un concierto, ¿cuántas posibilidades tiene para escoger?

. Las calificaciones que puede obtener un alumno son: MB, B, S, NA y NP. Si un estudiante cursa 5 materias ¿de cuántas formas diferentes pueden aparecer las calificaciones en su boleta?

. Con los dígitos 2,3,5,6,7 y 9 se van a formar números de 4 cifras. Si se pueden repetir dígitos en un número, entonces ¿cuántos números diferentes se pueden formar?

0. Las placas de la Ciudad de México están formadas por 3 dígitos seguidos de tres letras. ¿Cuántas placas diferentes se pueden tener?

1. En un grupo hay 20 personas, 8 de las cuales son mujeres. Si se escogen dos personas al azar, encontrar la probabilidad de que se escojan primero una mujer y posteriormente un hombre.

2. Encontrar la probabilidad de obtener 4 águilas al lanzar 4 monedas bien balanceadas.

3. En una caja se tienen 4 bolas rojas, 2 negras y 4 azules. Si se escogen 3 bolas al azar, encontrar la probabilidad de que la primera sea roja, la segunda azul y la tercera negra.

4. En una caja hay 10 canicas numeradas del 1 al 10. Si se escogen dos canicas al azar, encontrar la probabilidad de que la suma sea un número:

) par;

) impar.

5. Un examen de opción múltiple tiene 15 preguntas y cada una de ellas tiene 4 opciones. Si el examen se contesta de manera aleatoria, encontrar la probabilidad de que:

) conteste correctamente todas las preguntas;

) no conteste correctamente ninguna pregunta.

3.2 Permutaciones

cada una de las formas diferentes en que se pueden ordenar los elementos de un conjunto e le llama permutación, y generalmente estamos interesados en contar el número de ermutaciones diferentes que se pueden hacer con un número determinado de elementos.

ermutación. Es un arreglo ordenado de elementos.

:jemplo 3.5

;on los digitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5 se van a formar números de tres cifras sin que se repitan igitos en un número, ¿cuántos números diferentes se pueden formar?

'amos a listar algunos de ellos:

012	021	031	041	051
013	023	032	042	052
014	024	034	043	053
015	025	035	045	054

'odemos darnos cuenta de que hay 20 números que empiezan con 0, por lo tanto hay ambién 20 números que empiezan con 1 y así sucesivamente por lo que tenemos que con 6 igitos se pueden formar 120 números de 3 cifras.

a primera cifra puede ser cualquiera de los 6 dígitos, pero sólo quedan 5 para la segunda osición y únicamente quedan 4 posibilidades para ocupar el tercer lugar, por lo que, tilizando el principio fundamental del conteo se tiene: 6 * 5 * 4 = 120 números diferentes. .sí que se tienen 120 permutaciones de tres elementos, lo cual se simboliza de la manera iguiente:

$$ {}_6P_3 = 6 * 5 * 4 = 120 $$

'onde:

P_3 = Número de permutaciones de 6 elementos tomando 3 en cada ocasión

'e manera general, cuando se tienen n elementos para formar permutaciones de r lementos tenemos que: el primer elemento se puede elegir de n formas diferentes, de n – 1 l segundo, el tercero de n – 2, y así sucesivamente hasta llegar al lugar r donde se tienen – r + 1 posibilidades, por lo que utilizando el principio fundamental del conteo se tiene que:

$$ {}_nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,.\,.\,.\,(n-r+1) $$

onde:

es un número menor o igual a n

P_r = Número de permutaciones de n elementos tomando r en cada ocasión

jemplo 3.6

n sindicato tiene 55 integrantes. Si se va a formar una junta directiva integrada por un 'esidente, un secretario y un tesorero, ¿cuántas formas se tiene para formar la junta rectiva?

Para ocupar el puesto de presidente 55 posibilidades, 54 para ocupar el puesto de secretario y 53 para ocupar el puesto de tesorero, de manera que para formar la junta directiva se tienen:

$$_{55}P_3 = 55 * 54 * 53 = 157\,410 \text{ posibilidades}$$

Como el producto de enteros consecutivos se utiliza muy a menudo existe el concepto de factorial de un número que es el producto de todos los enteros positivos menores que él.

Factorial. El factorial de un número entero positivo n es el producto de los primeros n números enteros positivos. El factorial de cero es 1.

Esto lo podemos escribir de la manera siguiente:

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\,1$$

$$0! = 1$$

Ejemplo 3.7

Encontrar el factorial de:
a) 5;
b) 9;
c) 3.

a) $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$

b) $9! = 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 362\,880$

c) $3! = 3 * 2 * 1 = 6$

Así tenemos que el número de permutaciones de n elementos tomando r en cada ocasión se puede expresar de la manera siguiente:

$$_nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\,(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

o simplemente:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo 3.8

En un concurso hay 20 participantes, pero sólo hay premios para los cuatro primeros lugares. ¿Cuántas formas se tienen para otorgar los premios?

Para otorgar el primer lugar hay 20 posibilidades, 19 para el segundo, 18 para el tercero y 17 para el cuarto, por lo que para otorgar los cuatro premios se tienen:

$$ {}_{20}P_4 = \frac{20!}{16!} = 20 * 19 * 18 * 17 = 116\,280 \text{ posibilidades} $$

Ejemplo 3.9

Cada una de las letras de la palabra HOLA se van a escribir en una tarjeta, posteriormente se van a colocar de manera aleatoria, encontrar la probabilidad de que el primer lugar sea ocupado por una consonante y el último lugar por una vocal.

Las posibilidades que se tienen para acomodar las 4 tarjetas son: ${}_4P_4$, por lo que:

$$ N(S) = {}_4P_4 = \frac{4!}{0!} = 24 $$

El evento que nos interesa está formado por aquéllos elementos que en el primer lugar tienen una consonante, para lo cual se tienen 2 posibilidades, en el último lugar tiene que haber una vocal, para esto hay 2 posibilidades, luego entonces quedan dos posibilidades para ocupar el segundo lugar y sólo una para el tercer lugar, de manera que el evento que nos interesa tiene 8 elementos.

$$ N(E) = 2 * 2 * 1 * 2 = 8 $$

Así que la probabilidad que nos interesa es:

$$ P(E) = \frac{8}{24} = 0.33 $$

Problemas

1. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra LIBRO?

2. Se tienen 9 cuadros para acomodar en una exposición, ¿de cuántas formas diferentes se pueden acomodar?

3. Se tienen 8 banderas de diferente color, las cuales se van a colocar en un asta para formar señales, ¿cuántas señales diferentes se pueden formar?

4. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 7 personas en un banco con 4 lugares?

5. Con los digitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y 8. Si no se pueden repetir dígitos en uponi, ¿cuántos números de 4 cifras se pueden formar?

6. Se tienen 10 trabajos para asignarse a 6 personas, ¿cuántas formas diferentes se tienen para hacer la asignación si a cada persona solo se le puede asignar un trabajo?

7. Las letras de la palabra ORDEN se van a colocar de manera aleatoria, encontrar la probabilidad de que el primer lugar sea ocupado por una consonante y el segundo por una vocal.

8. Cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 se ha escrito en una tarjeta. Si se seleccionan 4 tarjetas al azar, encontrar la probabilidad de que con las tarjetas seleccionadas se forme un número que empiece con 5 y sea par.

9. Cinco niños y cinco niñas se van a sentar de manera aleatoria en una fila, encontrar la probabilidad de que las niñas ocupen los lugares pares y los niños los impares.

10. Cuatro libros de física y seis de matemáticas se van a colocar de manera aleatoria en un librero, encontrar la probabilidad de que:

a) los libros de física queden juntos;
b) los libros de cada materia queden juntos.

11. Se van a lanzar 5 dados bien balanceados, encontrar la probabilidad de que en cada uno de ellos se tenga un resultado diferente.

12. Un elevador parte con 7 pasajeros y se detiene en 10 pisos, encontrar la probabilidad de que cada uno de los pasajeros baje en un piso diferente.

13. En un grupo hay 10 alumnos, encontrar la probabilidad de que todos ellos cumplan años en fecha diferente.

14. En el problema anterior, encontrar la probabilidad de que al menos dos alumnos cumplan años en la misma fecha.

3.3 Combinaciones

Hay ocasiones en que nos interesa seleccionar cierto número de elementos sin que nos importe el orden, a cada una de las posibles selecciones se les llama combinación.

Combinación. Es una selección de elementos en la cual no importa el orden.

Ejemplo 3.10

Se van a seleccionar tres elementos del conjunto U = {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Enumerar las liferentes posibilidades que se tienen.

Al seleccionar tres elementos del conjunto U tenemos las posibilidades siguientes:

{0, 1, 2}	{0, 1, 3}	{0, 1, 4}	{0, 1, 5}	{0, 2, 3}	{0, 2, 4}
{0, 2, 5}	{0, 3, 4}	{0, 3, 5}	{0, 4, 5}	{1, 2, 3}	{1, 2, 4}
{1, 2, 5}	{1, 3, 4}	{1, 3, 5}	{1, 4, 5}	{2, 3, 4}	{2, 3, 5}
{2, 4, 5}	{3, 4, 5}				

Cada uno de estos conjuntos representa una combinación de tres elementos tomados del conjunto U. De manera que se tienen 20 combinaciones de 3 elementos tomados de un conjunto de 6 elementos. Esto se puede escribir de manera simbólica de la manera iguiente:

$$ {}_6C_3 = 20 $$

Donde:

C_3 = Número de combinaciones de 6 elementos tomando 3 en cada ocasión

Podemos notar que con los elementos de la combinación {0, 1, 2} se pueden formar las ermutaciones que se dan a continuación: 012, 021, 102, 120, 201 y 210.

Pero se tiene que el número de permutaciones de 3 elementos tomado 3 en cada ocasión es:

$$ {}_3P_3 = \frac{3!}{0!} = 3! $$

Así que con cada combinación se pueden formar 3! permutaciones, por lo que si nultiplicamos el número de combinaciones por 3! obtenemos el número de permutaciones de elementos tomando 3 en cada ocasión, tal como se muestra a continuación:

$$ {}_6C_3\,3! = {}_6P_3 = \frac{6!}{3!} $$

i despejamos ${}_6C_3$, tenemos lo siguiente:

$$ {}_6C_3 = \frac{{}_6P_3}{3!} = \frac{6!}{3!\,3!} $$

El razonamiento anterior se puede hacer de manera general. Sí se tienen n elementos de los cuales se van a escoger r (donde r es menor o igual que n), se tienen ${}_nC_r$ selecciones diferentes, pero con cada una de ellas se pueden formar r! permutaciones de r elementos, por lo que si multiplicamos estas dos cantidades obtenemos el número de permutaciones de n elementos tomando r en cada ocasión, tal como se muestra a continuación.

$$ {}_nC_r\, r! \;=\; {}_nP_r \;=\; \frac{n!}{(n-r)!} $$

Luego entonces el número de combinaciones de n elementos tomando r en cada ocasión es:

$$ {}_nC_r \;=\; \frac{n!}{(n-r)!\, r!} $$

Ejemplo 3.11

Juan tiene doce amigos, pero sólo tiene 4 boletos para invitarlos a un concierto, ¿cuántas formas diferentes tiene para seleccionar a sus 4 invitados?

Se tienen 12 personas para seleccionar 4, por lo que tiene:

$$ {}_{12}C_4 \;=\; \frac{12!}{8!\,4!} \;=\; \frac{12\,(11)\,(10)\,(9)}{24} \;=\; 495 $$

Así que Juan tiene 495 posibilidades para escoger a sus invitados.

Ejemplo 3.12

En un grupo hay 10 mujeres y 15 hombres. Si de manera aleatoria se escoge un comité integrado por 5 personas, encontrar la probabilidad de que en él haya 2 mujeres.

En el grupo hay 25 personas de las cuales se van a elegir 5, por lo que se tienen ${}_{25}C_5$ posibilidades.

$$ N(S) \;=\; {}_{25}C_5 \;=\; \frac{25!}{20!\,5!} \;=\; \frac{25\,(24)\,(23)\,(22)\,(21)}{120} \;=\; 53\,130 $$

Hay 53 130 posibilidades para elegir a las 5 personas del comité. En el grupo hay 10 mujeres de las cuales se van a seleccionar 2, lo cual se puede hacer de ${}_{10}C_2$ formas diferentes y para elegir a los hombres se tienen ${}_{15}C_3$ posibilidades.

$$_{10}C_2 = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10\,(9)}{2} = 45$$

$$_{15}C_3 = \frac{15!}{12!\,3!} = \frac{15\,(14)\,(13)}{6} = 455$$

e tienen 45 posibilidades para elegir a las mujeres y 455 para elegir a los hombres, por lo ue según el principio fundamental del conteo hay 455 * 45 = 20 475 formas diferentes para egir a dos mujeres y tres hombres.

$$N(E) = 455 * 55 = 20\,475$$

e las 53 130 posibilidades para elegir al comité en 20 475 de ellas hay dos mujeres, por lo ue la probabilidad buscada es:

$$P(E) = \frac{20\,475}{53\,130} = 0.39$$

roblemas

. ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto A = {a, b, c, d, e, f, g}?

. En una caja se tienen 8 juguetes para que un niño escoja 2 de ellos. ¿Cuántas posibilidades diferentes tiene el niño?

. Un estudiante tiene que hacer un trabajo para el cual puede consultar 12 libros, si solo quiere consultar 5 de ellos, ¿de cuantas formas puede hacerlo?

. En una tienda se venden 8 tipos de quesos, si un cliente quiere comprar un kilogramo de 3 de ellos, ¿cuántas posibilidades tiene para hacer su elección?

. Se tienen 12 objetos los cuales se van a dividir en dos grupos, uno de 4 y otro de 8, ¿cuántas posibilidades se tienen?

. Hay 10 jugadores de basquetbol con los cuales se van a formar 2 equipos, ¿de cuántas formas se puede hacer?

Se tienen 5 puntos de manera que no hay tres o más que sean colineales. ¿Cuántas rectas se pueden trazar por estos puntos?

¿Cuántas diagonales se pueden trazar por un polígono de 8 lados?

En una caja se tienen 6 canicas rojas, 5 verdes y 4 azules, si se escogen 3 canicas al azar, encontrar la probabilidad de que:

) las tres sean rojas;
) sean dos rojas y una verde;
sea una de cada color.

0. En un edificio hay 8 departamentos de 3 recamaras y 4 de 2 recamaras. Si se van a escoger 4 de ellos al azar para regalar un producto en promoción, encontrar la probabilidad de que se escojan 2 departamentos de dos recamaras.

1. En una agencia de automóviles se tienen 8 unidades austeras y 6 con equipo adicional, si se eligen 5 automóviles al azar para hacer una revisión de seguridad, encontrar la probabilidad de que sean elegidos 4 automóviles austeros.

2. Se tiene una lista con 11 donadores de sangre, de los cuales 5 tienen sangre tipo B, si se escoge al azar a 4 donantes, encontrar la probabilidad de que tengan sangre tipo B:
) los cuatro;
) uno de ellos;
dos de ellos.

3. En una reunión hay 5 diputados del PRI, 2 del PRD y 3 del PAN, si se elige una al azar una comisión de 4 personas, encontrar la probabilidad de que en ella haya 2 integrantes del PRI, 1 del PRD y 1 del PAN.

4. Si de una baraja española se extraen 5 cartas al azar, encontrar la probabilidad de que en las cartas elegidas 1 sea oros, 2 sean bastos y 2 sean copas.

5. Juan tiene que presentar un examen en el cual le van a preguntar dos temas de un total de diez. Si Juan sólo estudió 8 temas, encontrar la probabilidad de que:
conteste correctamente el examen;
únicamente conteste bien un tema;
no conteste bien ningún tema.

6. Una señora tiene 11 amigos, dos de los cuales son esposos. Si la señora decide invitar a cenar de manera aleatoria a 5 de sus amigos, encontrar la probabilidad de que entre sus invitados:
) estén los dos esposos;
) esté solo uno de los esposos;
) no esté ninguno de los esposo.

7. En una fiesta se encuentran seis parejas de esposos. Si se escogen dos personas al azar, encontrar la probabilidad de que:
) sean esposos;
) uno sea hombre y el otro mujer.

Problemas de repaso

En un estudio se va a clasificar a las familias según su ingreso en A, B o C, de acuerdo a la vivienda en propia o rentada. ¿Cuántas formas se tiene para clasificar a las familias?

En un restaurante se sirven 3 sopas, 5 guisados, 4 postres y 2 bebidas. ¿Cuántos menús diferentes se pueden formar?

Para ir de la ciudad A a la ciudad B hay 3 caminos diferentes, 4 para ir de B a C y 2 para ir de C a D. Si una persona viaja de A a D y posteriormente regresa a A, ¿cuántas forma tiene para hacer el viaje de ida y vuelta si sólo quiere pasar una sola vez por cada camino?

Con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5 se van a formar números de 4 cifras. Si en un número no se pueden repetir dígitos, ¿cuántos números diferentes se pueden formar?

Resolver el problema anterior suponiendo que se pueden repetir dígitos en un número.

En una reunión de 8 personas.
¿cuántos grupos de 3 personas se pueden formar?
¿de cuántas formas diferentes pueden llegar, suponiendo que llegan de una en una?

Una compañía de muebles ordenó 10 telas diferentes de tapicería y cuatro acabados diferentes de madera. ¿Cuántas combinaciones diferentes de tapicería y acabado de madera puede elegir un cliente?

Un arrendador clasifica a sus inquilinos de acuerdo a su estado civil como casados o no; de acuerdo al número de hijos que tengan como 0, 1, 2, 3 o más, y de acuerdo si son cumplidos con el pago de la renta como sí o no. ¿Cuántas clasificaciones diferentes puede hacer?

. El gerente de una compañía puede elegir comprar su materia prima de entre seis proveedores, procesarla en cualquiera de tres máquinas y empacar el producto en cuatro formas distintas. ¿De cuántas forma puede planear la operación total?

0. ¿De cuántas formas diferentes se puede contestar un examen de falso-verdadero de veinte preguntas?

1. Los empleados de una oficina de gobierno están clasificados en seis categorías de acuerdo a su edad y en cuatro categorías de acuerdo con su estado civil. ¿Cuántas formas diferentes se tienen para clasificar a los empleados de esta oficina?

2. ¿De cuántas formas se pueden programar 6 anuncios de televisión?

3. Las letras de la palabra UNIVERSO se van a colocar de manera aleatoria. ¿Cuántas forma diferentes se tienen?

In club consta de 30 miembros. ¿De cuántas formas se puede seleccionar a un residente, un secretario y un tesorero?

¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra MURCIELAGO?

¿Cuántas formas se tienen para colocar 8 torres distinguibles una de otra en un tablero de ajedrez sin que ninguna de ellas se pueda comer a las otras?

Hay ocho caballos en una carrera, ¿en cuántas formas se pueden colocar el primer lugar, el segundo y el tercero?

Una vendedora tiene 10 productos y los quiere exhibir en una feria pero sólo puede exhibir 4. Si el orden no tiene importancia, ¿cuántas formas tiene para exhibir sus productos?

¿De cuántas formas diferentes se pueden acomodar 7 macetas en un corredor?

¿De cuántas formas diferentes se pueden asignar 5 trabajos diferentes a 4 personas?

Se tienen 8 banderas de colores diferentes para hacer señales. Si cada señal está formada por 3 banderas, ¿cuántas señales diferentes se pueden formar?

. ¿Cuántos subconjuntos de cuatro elementos tiene el conjunto:
$A = \{x \,/\, x$ es un elemento de la palabra escudo$\}$?

. Juan tiene 8 amigos, pero sólo compró 3 boletos para ir a un concierto. ¿cuántas posibilidades diferentes tiene para elegir a sus invitados?

. Un estudiante debe escoger 8 preguntas de un total de 10. Si las tres primeras son obligatorias, ¿cuántas formas diferentes tiene para seleccionar sus preguntas?

5. Diez jugadores de tenis compiten en un torneo. ¿de cuántas maneras se pueden ordenar para el primer juego, si sólo se dispone de una cancha?

6. En una reunión hay 5 muchachos y 5 muchachas, ¿cuántas parejas diferentes se pueden formar para bailar?

7. De los ocho integrantes de la tripulación de una lancha, dos de ellos sólo pueden remar por el lado izquierdo y tres de ellos sólo por el lado derecho. ¿De cuántas formas diferentes se puede colocar la tripulación?

8. El automóvil de Juan tiene 5 lugares, ¿de cuántas formas se pueden acomodar 5 personas si Juan toma el lugar del chofer y su novia se sienta junto a él?

9. El alfabeto tiene 22 consonante y 5 vocales. Si se eligen 5 letras al azar y se pone una a continuación de la otra, encontrar la probabilidad de que se forme una palabra que empiece con la letra z y termine con la letra a.

etras de la palabra CRISTAL se van a colocar de manera aleatoria, encontrar la ıbilidad de que las vocales queden juntas.

ına caja hay 10 canicas numeradas del 1 al 10. Si se sacan 2 canicas al azar, ntrar la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea:

ar.

ıo personas van a un concierto, entre ellos va una pareja de esposos. Si los lugares eparten de manera aleatoria, encontrar la probabilidad de que los esposos se sienten os.

equipo de futbol consta de 20 personas, de las cuales, tres pueden jugar en la tería, ocho como defensas, 4 como medios y el resto en la delantera. ¿Cuántas mas tiene el entrenador para seleccionar al portero, 4 defensas, 3 medios y 3 lanteros?

e una baraja española se van a extraer 5 cartas al azar, encontrar la probabilidad de ıe dos sean bastos, dos espadas y una sea oros.

e una baraja americana se va a extraer una mano de poker (cinco cartas). El orden en ıs manos de poker se determina inversamente al de sus probabilidades. Encontrar la robabilidad de obtener:

ın par (dos cartas del mismo valor y las otras tres de valor diferente);
dos pares (dos pares y la otra de valor diferente);
ercia (tres cartas con el mismo valor y las otras de valor diferente);
escalera (las cinco cartas con valor consecutivo sin importar el color);
full (par y tercia);
poker (cuatro cartas con el mismo valor y la otra diferente);
escalera imperial (cinco cartas de valor consecutivo y del mismo color).

. Se tiene una caja con 40 fusibles, de los cuales 5 son defectuosos, si se escogen 3 fusibles al azar, encontrar la probabilidad de que uno de ellos sea defectuoso.

'. Un automóvil de 6 cilindros tiene 2 bujías en mal estado. Si el mecánico reemplaza dos de ellas al azar, encontrar la probabilidad de que haya reemplazado:

) las dos bujías defectuosas;
) al menos una bujía defectuosa.

8. Se tiene un paquete con siete semillas, dos producen flores azules, tres producen flores blancas y dos producen flores rojas. Si se seleccionan dos semillas al azar, encontrar la probabilidad de que ambas produzcan flores del mismo color.

39. Un distribuidor recibe un embarque de 24 televisores de los cuales 6 son defectuosos. El distribuidor selecciona 4 televisores para ponerlos en exhibición, encontrar la probabilidad de que:

a) dos televisores sean defectuosos;
b) a lo más dos televisores sean defectuoso.

40. A un congreso asisten 100 congresistas. De ellos 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 congresistas elegidos al azar no hablen el mismo idioma?

41. Una persona ha colocado revueltos 10 pares de guantes en un cajón. Si se toman dos guantes al azar, encontrar la probabilidad de que:
a) uno sea de mano izquierda y otro de mano derecha;
b) sean de un mismo par.

42. En un armario hay 8 pares de zapatos. Se escoge cuatro zapatos al azar, encontrar la probabilidad de que al menos haya un par.

43. Seis parejas de casados se encuentran en una fiesta. Si se escogen 4 personas al azar, encontrar la probabilidad de que:
a) se escojan dos parejas de casados;
b) no haya ninguna pareja de casados.

44. En un monte hay varias fincas, cada una de las cuales está unida a las restantes por un camino. Si sabemos que hay 36 caminos, ¿cuál es el número de fincas?

45. En una urna hay b bolas blancas y n bolas negras. Se van a extraer bolas sin reemplazo, encontrar la probabilidad de que la k-ésima bola sea blanca.

4. DISTRIBUCIONES DISCRETAS

as distribuciones de probabilidad son modelos matemáticos que se pueden utilizar para escribir fenómenos aleatorios.

In este capítulo se ve el concepto de distribución de probabilidad de variable discreta, la istribución hipergeométrica, la binomial y la de Poisson.

4.1 Distribución de probabilidad

Jna distribución de probabilidad es un modelo matemático que nos ayuda a entender ciertos enómenos aleatorios que se presentan en nuestra realidad, sin embargo, para poder dar el concepto de distribución de probabilidad es necesario antes definir lo que es una variable aleatoria.

En muchas ocasiones la naturaleza propia de un fenómeno aleatorio hace que se relacionen os elementos del espacio muestral con un número real, así tenemos que al lanzar dos monedas nos puede interesar el número de soles, o la suma de puntos obtenidos al lanzar dos dados. A esta relación que se da entre los elementos del espacio muestral y un número real se le llama variable aleatoria.

Variable aleatoria. Una variable aleatoria X es una relación que a cada elemento del espacio muestral le asocia un número real.

Para los fines de estas notas podemos clasificar a las variables aleatorias en discretas y continuas, dependiendo del conjunto de números reales que se asocie a los elementos del espacio muestral. Si nos interesa la suma de puntos obtenidos al lanzar dos dados, tenemos que los valores asociados al experimento son los números 2, 3, 4, 5, 6 7, 8, 9, 10, 11 y 12, ésta es una variable discreta, ya que solamente tenemos un conjunto finito de números reales; en cambio si nos interesa la estatura de una persona, el resultado puede ser cualquier número en un intervalo de la recta real, ésta es una variable continua. En la mayoría de los casos una variable aleatoria discreta es el resultado de un conteo y una variable aleatoria continua es el resultado de una medición.

En esta parte de las notas únicamente veremos variables aleatorias discretas, variables que sólo toman un número finito de valores o a lo más un número de valores que sea contable.

Ejemplo 4.1

Se van a lanzar tres monedas bien balanceadas. Considérese a la variable aleatoria X, donde: X = número de águilas obtenidas. Hacer un listado en el cual se muestre la relación entre los elementos del espacio muestral y el número real correspondiente.

El espacio muestral resultante de lanzar tres monedas es:

$$S = \{(s,s,s), (a,s,s), (s,a,s), (s,s,a), (a,a,s), (a,s,a), (s,a,a), (a,a,a)\}$$

Como la variable aleatoria es el número de águilas obtenidas, entonces podemos notar que a cada uno de los elementos del espacio muestral se le asocia un número real, tal como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
X(s,s,s) &= 0\\
X(a,s,s) &= 1\\
X(s,a,s) &= 1\\
X(s,s,a) &= 1\\
X(a,a,s) &= 2\\
X(a,s,a) &= 2\\
X(s,a,a) &= 2\\
X(a,a,a) &= 3
\end{aligned}
$$

:n este ejemplo podemos notar que el espacio muestral se puede dividir en cuatro eventos nutuamente excluyentes dependiendo del número de águilas que se asocie a cada elemento lel espacio muestral: un evento A_0 formado los elementos a los cuales la variable aleatoria es asocia el valor 0; un evento A_1 formado por los elementos a los que la variable aleatoria es asocia el número 1; un evento A_2 formado por los elementos a los cuales la variable ıleatoria les asocia el valor 2, y un evento A_3 formado por los elementos a los que la variable ıleatoria les asocia el valor 3, tal como se muestra a continuación.

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \{(s,s,s)\}\\
A_1 &= \{(a,s,s), (s,a,s), (s,s,a)\}\\
A_2 &= \{(a,a,s), (a,s,a), (s,a,a)\}\\
A_3 &= \{(a,a,a)\}
\end{aligned}
$$

'or lo tanto podemos calcular la probabilidad para cada valor de la variable aleatoria, tal :omo se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(A_0) = 1/8\\
P(X = 1) &= P(A_1) = 3/8\\
P(X = 2) &= P(A_2) = 3/8\\
P(X = 3) &= P(A_3) = 1/8
\end{aligned}
$$

)onde $P(X = 0)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor 0, $P(X = 1)$ es ı probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor 1 y así sucesivamente.

'odemos notar que a cada valor de la variable aleatoria se le asocia una probabilidad, con lo ual se tiene una distribución de probabilidad discreta.

)istribución de probabilidad discreta. Una distribución de probabilidad de variable iscreta es una relación que a cada valor de una variable aleatoria X le asocia una robabilidad $P(X = x)$, la cual cumple con las propiedades siguientes:

a) La probabilidad P(X = x) es un número entre cero y uno

$$0 \leq P(X = x) \leq 1$$

b) La suma de las probabilidades para cada valor de la variable aleatoria debe ser igual a uno

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

donde x_i representa cada uno de los n valores de que toma la variable aleatoria X.

Ejemplo 4.2

Dar la distribución de probabilidad del ejemplo anterior en forma de tabla.

La distribución de probabilidad se puede dar en forma de tabla, tal como se muestra a continuación.

X	P(X = x)
0	0.125
1	0.375
2	0.375
3	0.125
Suma	1.00

En la tabla se puede notar que: a cada valor de la variable aleatoria X se le asocia una probabilidad P(X = x) que es un número entre cero y uno, y que la suma de las probabilidades es uno, esto es, cumple con las propiedades de una distribución de probabilidad.

En una distribución de probabilidad se resume toda la información acerca del comportamiento de una variable aleatoria, puesto que en ésta se especifican los valores que puede tomar la variable aleatoria así como la probabilidad con que se toman estos valores.

En los datos mostrados en la tabla del ejemplo anterior podemos observar que si las tres monedas se lanzan muchas veces se espera que: alrededor de 1/8 de las veces caigan cero águilas, alrededor del 3/8 de las veces caiga un águila, alrededor de 3/8 de las veces caigan dos águilas y alrededor del 1/8 de las veces caigan 3 águilas. Así tenemos que si multiplicamos el número de águilas por su probabilidad y sumamos estos valores obtenemos el número esperado promedio de águilas por lanzamiento. Tal como se muestra a continuación.

$$E(X) = 0 * (1/8) + 1 * (3/8) + 2 * (3/8) + 3 * (1/8) = 12/8 = 1.5$$

Luego entonces, si las tres monedas se lanzan muchas veces, se espera que el número promedio de águilas por lanzamiento sea de 1.5.

Valor esperado de la variable aleatoria. El valor esperado de una variable aleatoria es la suma de cada valor de la variable por su probabilidad asociada.

Si la variable aleatoria X puede tomar n valores y denotamos con x_i al valor i-ésimo, entonces la definición anterior se puede expresar de la manera siguiente:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Donde:
E(X) = valor esperado de la variable aleatoria X

Ejemplo 4.3

Encontrar el valor esperado de la variable aleatoria X del ejemplo anterior.

A la tabla del ejemplo anterior se le puede aumentar una columna para obtener el valor esperado de la variable aleatoria X.

X	P(X = x)	X P(X = x)
0	0.125	0
1	0.375	0.375
2	0.375	0.750
3	0.125	0.375
Suma	1.00	1.50

Al valor esperado de una variable aleatoria X también se le conoce como media de la distribución de probabilidad y se le denota con la letra μ. Expresado de manera simbólica se tiene:

$$\mu = E(X)$$

También se puede hablar del valor esperado del cuadrado de una variable aleatoria X, el cual está dado por:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$$

A la diferencia entre la media y cada uno de los valores de la variable aleatoria se les llama desviaciones con respecto a la media. Si denotamos con $x_1, x_2, \ldots x_n$ a los diferentes valores que toma la variable aleatoria X, entonces, las desviaciones con respecto a la media son: $x_1 - \mu, x_2 - \mu, \ldots, x_n - \mu$.

También se puede hablar del valor esperado de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media, a esto se le conoce como varianza de una distribución de probabilidad y se le denota por σ^2.

Varianza de una distribución de probabilidad. Es el valor esperado de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media.

$$E[(X - \mu)^2] = (x_1 - \mu)^2 P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 P(X = x_2) + \ldots + (x_n - \mu)^2 P(X = x_n)$$

o bien

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

Ejemplo 4.4

A partir de los datos del ejemplo anterior, encontrar la varianza de la distribución de probabilidad.

A la tabla del ejemplo 4.3 se agregan tres columnas, en la cuarta columna están las desviaciones con respecto a la media, en la quinta columna están los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media y en la sexta columna están los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media por la probabilidad asociada.

X	P(X = x)	X P(X = x)	X - μ	(X - μ)²	(X - μ)² P(X = x)
0	0.125	0	-1.5	2.25	0.28125
1	0.375	0.375	-0.5	0.25	0.09375
2	0.375	0.75	0.5	0.25	0.09375
3	0.125	0.375	1.5	2.25	0.28125
Suma	1.00	1.50			0.75

Así tenemos que la varianza de la distribución de probabilidad es: $\sigma^2 = 0.75$

Otra medida importante en una distribución de probabilidad es la desviación estándar (σ), que es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Desviación estándar de una distribución de probabilidad. La desviación estándar de una distribución de probabilidad es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Así tenemos que en el ejemplo anterior la desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{0.75}$$

Se puede demostrar que la varianza de una distribución de probabilidad es igual a la esperanza del cuadrado de la variable aleatoria menos el cuadrado de la media de la distribución, tal como se expresa continuación:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$$

o bien

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

De manera que el ejemplo 4.4 también se puede resolver de la manera siguiente:

X	P(X = x)	X P(X = x)	X^2 P(X = x)
0	0.125	0	0
1	0.375	0.375	0.375
2	0.375	0.750	1.50
3	0.125	0.375	1.125
Suma	1.00	1.50	3.00

En la cuarta columna se calcula el valor esperado del cuadrado de la variable X, así tenemos que: $E(X^2) = 3.0$. Luego entonces la varianza de la distribución de probabilidad es:

$$\sigma^2 = 3.0 - 1.5^2 = 0.75$$

Podemos notar que este valor es el mismo que se encontró anteriormente.

Ejemplo 4.5

En una caja se tienen 5 focos, dos de los cuales están fundidos. Si se sacan dos focos al azar y si consideramos X como la variable aleatoria, donde X = número de focos buenos en la muestra, encontrar:

a) la distribución de probabilidad;
b) el valor esperado de la variable aleatoria X;
c) la varianza de la distribución de probabilidad;
d) la desviación estándar de la distribución de probabilidad.

a) Si denotamos como f_1 y f_2 a los focos fundidos y con f_3, f_4, y f_5 a los focos buenos, entonces tenemos que el espacio muestral es:

$$S = \{(f_1, f_2), (f_1, f_3), (f_1, f_4), (f_1, f_5), (f_2, f_1), (f_2, f_3), (f_2, f_4), (f_2, f_5), (f_3, f_1), (f_3, f_2), (f_3, f_4), (f_3, f_5), (f_4, f_1), (f_4, f_2), (f_4, f_3), (f_4, f_5), (f_5, f_1), (f_5, f_2), (f_5, f_3), (f_5, f_4)\}$$

Como X es el número de focos buenos en la muestra, entonces tenemos que X puede tomar los valores 0, 1 y 2. Así que el espacio muestral se puede dividir en 3 eventos mutuamente excluyentes, dependiendo del valor que la variable aleatoria le asocie a cada elemento:

$$A_0 = \{(f_1, f_2), (f_2, f_1)\}$$
$$A_1 = \{(f_1, f_3), (f_1, f_4), (f_1, f_5), (f_2, f_3), (f_2, f_4), (f_2, f_5), (f_3, f_1), (f_3, f_2), (f_4, f_1), (f_4, f_2), (f_5, f_1), (f_5, f_2)\}$$
$$A_2 = \{(f_3, f_4), (f_3, f_5), (f_4, f_3), (f_4, f_5), (f_5, f_3), (f_5, f_4)\}$$

Luego entonces tenemos que:

$$P(X = 0) = P(A_0) = 2/20 = 0.1$$
$$P(X = 1) = P(A_1) = 12/20 = 0.6$$
$$P(X = 2) = P(A_2) = 6/20 = 0.3$$

Por lo que la distribución de probabilidad se puede dar en forma de tabla, tal como se muestra a continuación:

X	P(X = x)
0	0.1
1	0.6
2	0.3
suma	1.00

Para encontrar el valor esperado de la variable aleatoria y la varianza de la distribución hay que aumentar dos columnas, tal como se hizo en el ejemplo anterior.

X	P(X = x)	X P(X = x)	X^2 P(X = x)
0	0.1	0	0
1	0.6	0.6	0.6
2	0.2	0.4	0.8
Suma	1.00	1.00	1.4

b) Por lo que el valor esperado de la variable aleatoria o media de la distribución de probabilidad es:

$$E(X) = \mu = 1.00$$

c) La varianza de la distribución de probabilidad es:

$$\sigma^2 = 1.4 - 1^2 = 0.4$$

d) La desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{0.4}$$

La ganancia esperada de alguno de los participantes en un juego es la ganancia promedio por juego que se espera obtener cuando se participa muchas veces en este juego.

Ejemplo 4.6

Al lanzar un dado se ganan \$15 si cae el número 1, se ganan \$5 si cae un número primo y se pierden \$10 si cae cualquier otro número. Si X es la variable aleatoria, donde X = número de pesos ganados, encontrar la ganancia esperada del juego.

La ganancia esperada del juego es el valor esperado de la variable aleatoria X, por lo que tenemos:

X	P(X = x)	X P(X = x)
15	1/6	15/6
5	2/6	10/6
-10	3/6	-30/6
Suma	1.00	-5/6

La ganancia esperada es de -5/6. Si este juego se realizara muchas veces, se espera que en promedio se pierda \$0.83 por juego.

Se dice que un juego es justo cuando la ganancia esperada para cada uno de los participantes en el juego es cero, esto es, si el juego se realiza muchas veces, se espera que los participantes no pierdan ni ganen.

Ejemplo 4.7

Se va a realizar una rifa en la cual se van a vender 1000 boletos, los premios son: un premio de \$1000.00, dos premios de \$300.00 y cuatro premios de \$100.00. Encontrar el precio justo del boleto.

Si una persona compra un boleto puede ganar \$1 000.00 con probabilidad 0.001, \$300.00 con probabilidad 0.002, \$100.00 con probabilidad 0.004 y cero pesos con probabilidad 0.993. Si se multiplica cada uno de los valores de la variable aleatoria por su probabilidad, se obtiene el valor esperado de la variable aleatoria o esperanza matemática, que es el precio justo que se debería pagar por un boleto.

X	P(X = x)	X P(X = x)
0	0.993	0
100	0.004	0.4
300	0.002	0.6
1000	0.001	1.0
Suma	1.000	2.0

Podemos notar que E(X) = 2.00, de manera que el precio justo del boleto es de $2.00.

Problemas

1. Una compañía fabrica agujas para la inyección de insulina y las empaca en cajas de 100 unidades. Durante algunos años se han hecho muestreos de estas cajas, por lo que se sabe que el 90% contiene agujas no defectuosas, el 7% contiene una aguja defectuosa y el 3% tiene dos agujas defectuosas. Si X es el número de agujas defectuosas por caja, encontrar la distribución de probabilidad.

2. Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla, encontrar la media y la varianza de la distribución.

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.125	0.250	0.500	0.125

3. Encontrar E(Y) y σ^2 en la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Y que aparece en la tabla siguiente:

Y	0	1	2	3	4	5
P(Y = y)	.05	.3	.3	.2	.1	.05

4. En una caja se tienen cuatro esferas marcadas con los números 2, 4, 6, y 8. Si se saca una esfera al azar y si consideramos a al variable aleatoria como en número de la esfera extraída, encontrar la distribución de probabilidad.

5. Se van a lanzar dos dados bien balanceados, si consideramos a X como la variable aleatoria, donde X = suma de puntos obtenidos, encontrar:
a) el espacio muestral;
b) la distribución de probabilidad;
c) el valor esperado de la variable;
d) la varianza de la distribución de probabilidad.

6. Un llavero tiene 4 llaves iguales, pero sólo una abre la puerta de una oficina. Se toma una llave al azar para abrir la puerta, si no abre la puerta se toma una segunda llave a así sucesivamente hasta abrir la puerta. Sea X al número de llaves que se tienen que probar hasta abrir la puerta. Encontrar la distribución de probabilidad así como su media y su varianza.

7. Un equipo electrónico tiene 4 transistores, dos de los cuales no sirven. Si se sacan tres transistores al azar, y si X es el número de transistores defectuosos en la muestra, encontrar el valor esperado de la variable aleatoria X, así como la varianza de la distribución de probabilidad.

8. Se van a vender mil boletos de lotería de a $2 cada uno. Si el premio es una televisión cuyo precio es de $4 000 y si usted compró dos boletos, ¿cuál es su ganancia esperada?.

9. Un dado bien balanceado tiene una cara roja, dos verdes y tres negras. Se lanza el dado, si cae una cara roja se ganan $2 y si cae verde se ganan $0.5, si se quiere que el juego se honesto, ¿cuánto se debe pagar si cae cara negra?

10. Un vendedor de helados espera ganar $200 si el día es soleado, $100 si el día está nublado y $50 si el día es lluvioso, si las probabilidades respectivas a estas eventualidades son: 0.6, 0.3 y 0.1. Encontrar la ganancia esperada.

11. Se va a realizar una rifa en la cual se van a vender 2000 boletos. Los premios son: un premio de $1000.00, tres premios de $ 500.00, cinco premios de $100.00 y ocho premios de $50.00. Encontrar el precio justo del boleto.

12. Una caja tiene 2 bolas rojas y 3 azules, se sacan 2 bolas con reemplazo y se ganan $2 por cada bola roja y $1 por cada bola azul. Si se quiere que el juego sea equitativo, ¿cuánto se debe pagar por el derecho de jugar?

13. Un jugador lanza 3 monedas. Gana $10 si caen 3 águilas, gana $5 si caen 2 águilas, si cae un águila no pierde ni gana y pierde $15 si no caen águilas. Encontrar la ganancia esperada del jugador y la varianza de la distribución de probabilidad.

4.2 Distribución hipergeométrica

La relación que se da entre los valores de una variable aleatoria y la probabilidad que se asocia a cada uno de ellos para formar una distribución de probabilidad se puede dar en forma de tabla o bien mediante una fórmula. A continuación se da la fórmula de la distribución hipergeométrica, pero antes se va a resolver un ejemplo con el material que ya se conoce.

Ejemplo 4.8

En una caja se tiene 4 canicas azules y 6 blancas. Si se escogen tres canicas al azar, encontrar la probabilidad de que una de ellas sea azul.

Al sacar las tres canicas no nos interesa el orden, por lo que el número de elementos del espacio muestral es el número de combinaciones de 10 elementos tomando 3 en cada ocasión.

$$N(S) = {}_{10}C_3 = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

e 4 canicas azules se va a seleccionar una, de manera que se tienen ${}_4C_1$ posibilidades.

$$ {}_4C_1 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

n la muestra se quieren 3 canicas y que una de ellas sea azul, por lo que las otras dos eben ser blancas. Así que de las 6 canicas blancas se van a escoger 2, esto se puede acer de ${}_6C_2$ formas diferentes.

$$ {}_6C_2 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

e tienen 4 posibilidades para escoger una canica azul y 15 para escoger dos canicas lancas, de manera que utilizando el principio fundamental del conteo se tiene que hay 60 osibilidades de sacar una canica azul y dos blancas. Así que el evento que nos interesa ene 60 elementos.

$$N(E) = {}_4C_1\,{}_6C_2 = (4)\,(15) = 60$$

e las 120 posibilidades que se tienen para sacar tres canicas en 60 de ellas se tiene una anica azul y dos blancas. Luego entonces la probabilidad buscada es:

$$P(E) = \frac{{}_4C_1\,{}_6C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{60}{120} = 0.5$$

l razonamiento anterior se puede generalizar, tal como se muestra a continuación.

uando se tiene una población con N elementos de los cuales hay M que nos interesan, y si e manera aleatoria y sin reemplazo se saca una muestra de n elementos, la probabilidad de ue en la muestra haya x elementos que nos interesan es:

$$P(X = x) = \frac{{}_MC_x\ {}_{N-M}C_{n-x}}{{}_NC_n}$$

onde:
$= 0, 1, 2, \ldots, n$
no puede exceder de M
$- x$ no puede exceder de N - M

esta fórmula se le conoce como la distribución hipergeométrica y se utiliza cuando de una oblación se extrae una muestra aleatoria y sin reemplazo, esto es, cuando de manera leatoria se extrae un elemento de una población y éste no puede ser seleccionado uevamente.

e puede demostrar que en una distribución hipergeométrica la media y la varianza de la istribución se pueden calcular utilizando las fórmulas siguientes:

$$\mu = \frac{M\,n}{N} \qquad\qquad \sigma^2 = \frac{M\,n\,(N-M)\,(N-n)}{N^2\,(N-1)}$$

jemplo 4.9

n una caja se tienen 12 medicamentos, tres de los cuales están caducados. Si se escogen medicamentos al azar, encontrar:

) la probabilidad de que dos de ellos estén caducados;
) el número esperado de medicamentos caducados en la muestra;
) la varianza de la distribución de probabilidad;
) la desviación estándar.

) De 12 medicamentos que hay en la caja se van a sacar 4, se pide que de los 3 medicamentos caducados dos estén en la muestra, por lo que los otros dos medicamentos de la muestra se van a tomar de los 9 medicamentos buenos. Se Puede considerar a la variable aleatoria X como el número de medicamentos caducados en la muestra, luego entonces, aplicando la fórmula de la distribución hipergeométrica se tiene:

$$P(X = 2) = \frac{{}_3C_2\;{}_9C_2}{{}_{12}C_4} = \frac{(3)\,(36)}{495} = 0.218$$

En la caja se tienen 12 elementos de los cuales nos interesan 3, y en la muestra hay 4 elementos, por lo que sustituyendo estos valores en la fórmula de la media de la distribución de probabilidad se tiene que la media de la distribución es:

$$\mu = \frac{3\,(4)}{12} = 1$$

Para calcular la varianza de la distribución de probabilidad basta con sustituir los valores restantes en la fórmula, con lo cual se tiene:

$$\sigma^2 = \frac{3\,(4)\,(9)\,(8)}{12^2\,(11)} = \frac{864}{1584} = 0.5455$$

) La desviación estándar de una distribución de probabilidad es la raíz cuadrada positiva de la varianza, por lo que:

$$\sigma = \sqrt{0.5455} = 0.7385$$

'roblemas

. En una oficina trabaja 8 secretarias de las cuales sólo 3 son graduadas. Si se escogen al azar a 2 secretarias, encontrar la probabilidad de que una de ellas sea graduada.

. En un lote de 12 radios hay dos defectuosos. Se va a hacer una inspección al lote, para lo cual se escogen 3 radios, si se detecta algún elemento defectuoso no se compra el lote, encontrar la probabilidad de que se compre el lote.

. En un grupo parlamentario hay 7 diputados del PRI y 5 de la oposición. Si se de manera aleatoria se forma una comisión integrada por 4 diputados, encontrar la probabilidad de que en dicha comisión haya un diputado de la oposición.

. Hay 14 aspirantes para ocupar un puesto, 10 de ellos tienen título universitario. Si de manera aleatoria se escoge a 5 aspirantes para hacerles una entrevista, encontrar:
) la probabilidad de que dos de ellos tengan título universitario;
) el número esperado de entrevistados con título universitario en la muestra;
) la varianza de la distribución de probabilidad.

4.3 Distribución binomial

n modelo probabilístico particularmente importante es el que se relaciona con experimentos n los que únicamente se tienen dos posibles resultados. A este tipo de experimentos se les ama ensayos de Bernoulli, pues fue el matemático suizo Jaques Bernoulli (1654 - 1705) uien por primera vez trabajó con ellos durante la segunda mitad del siglo XVII.

continuación se dan algunos ejemplos de ensayos de Bernoulli:
) resultado de lanzar una moneda: águila o sol;
) nacimiento de un niño: hombre o mujer;
) resultado de un examen de admisión: aprobado o reprobado;
) lanzamiento de un dardo: dar en el blanco o no dar en el blanco;
) reacción ante un medicamento: favorable o desfavorable.

uando se tiene un número especifico de ensayos de Bernoulli independientes se tiene un xperimento binomial.

xperimento binomial. Un experimento binomial esta formado por n ensayos aleatorios ue tienen las características siguientes:

- cada ensayo tiene dos posibles resultados: éxito o fracaso;
- los ensayos son independientes entre sí;
- la probabilidad de éxito (p) permanece constante sin importar el número de ensayos;
- la probabilidad de fracaso ($q = 1 - p$) también permanece constante sin importar el número de ensayos;
- se denota con x al número de éxitos que nos interesan.

ntes de dar la fórmula de la distribución binomial vamos a resolver el ejemplo siguiente:

emplo 4.10

e van a lanzar 5 monedas bien balanceadas, encontrar la probabilidad de que caigan dos guilas.

e tiene un experimento formado por 5 ensayos independientes, por lo que se puede onsiderar como un experimento binomial, donde éxito = águila.

amos a denotar con A_i al evento de que una moneda caiga águila en el i-ésimo lanzamiento con S_i al evento de que una moneda caiga sol en el i-ésimo lanzamiento, donde i = 1, 2, 3, 5. Así que la probabilidad de que caigan dos águilas es:

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(A_1 \cap A_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5) + P(A_1 \cap S_2 \cap A_3 \cap S_4 \cap S_5) \\ &+ P(A_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap A_4 \cap S_5) + P(A_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap A_5) \\ &+ P(S_1 \cap A_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap A_5) + P(S_1 \cap S_2 \cap A_3 \cap S_4 \cap A_5) \\ &+ P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap A_4 \cap A_5) + P(S_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap S_4 \cap S_5) \\ &+ P(S_1 \cap S_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap S_5) + P(S_1 \cap A_2 \cap S_3 \cap A_4 \cap S_5) \end{aligned}$$

omo son eventos independientes la probabilidad de la intersección es igual al producto de s probabilidades, por lo que:

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(A_1)\,P(A_2)\,P(S_3)\,P(S_4)\,P(S_5) + P(A_1)\,P(S_2)\,P(A_3)\,P(S_4)\,P(S_5) \\ &+ P(A_1)\,P(S_2)\,P(S_3)\,P(A_4)\,P(S_5) + P(A_1)\,P(S_2)\,P(S_3)\,P(S_4)\,P(A_5) \\ &+ P(S_1)\,P(A_2)\,P(S_3)\,P(S_4)\,P(A_5) + P(S_1)\,P(S_2)\,P(A_3)\,P(S_4)\,P(A_5) \\ &+ P(S_1)\,P(S_2)\,P(S_3)\,P(A_4)\,P(A_5) + P(S_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\,P(S_4)\,P(S_5) \\ &+ P(S_1)\,P(S_2)\,P(A_3)\,P(A_4)\,P(S_5) + P(S_1)\,P(A_2)\,P(S_3)\,P(A_4)\,P(S_5) \end{aligned}$$

ı probabilidad de que caiga águila al lanzar una moneda bien balanceada la podemos enotar por $P(A) = p$ y la probabilidad de que caiga sol como $P(S) = q$, con lo cual se tiene:

$$(X = 2) = ppqqq + pqpqq + pqqpq + pqqqp + qpqqp + qqpqp + qqqpp + qpqpq + qppqq + qqppq$$

'ero podemos observar que en cada sumando se puede escribir como p^2q^3 y el número de umandos que se tienen es ${}_5C_2$, por lo que el resultado anterior se puede escribir de la ianera siguiente:

$$P(X = 2) = {}_5C_2\, p^2\, q^3$$

uego entonces la probabilidad que se busca es:

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= {}_5C_2\, (0.5)^2\, (0.5)^3 \\ &= 10\ (0.25)\ (0.125) \\ &= 0.3125 \end{aligned}$$

ieneralizando el razonamiento anterior para cualquier experimento binomial se tiene lo iguiente.

upóngase que se tiene un experimento binomial formado por n ensayos independientes, onde la probabilidad de éxito en cada ensayo es p, entonces la probabilidad de que ocurran éxitos se puede calcular con la fórmula siguiente:

$$P(X = x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$$

on $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

. esta es fórmula se le conoce como la distribución binomial o fórmula de Bernoulli.

e puede demostrar que en una distribución binomial el valor esperado de la variable leatoria X es: $E(X) = \mu = n\,p$, en tanto que la varianza de la distribución de probabilidad es: $^2 = n\,p\,q$.

jemplo 4.11

l 35% de los internos de un centro de readaptación son reincidentes, si se escogen 15 de los al azar, encontrar la probabilidad de que 3 de ellos sean reincidentes.

n este problema los éxitos son los reincidentes, se puede suponer independencia en los nsayos, ya que cuando se extrae un elemento de una población grande la probabilidad varia uy poco en la extracción de otro elemento. De manera que el problema se puede resolver e la manera siguiente:

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= {}_{15}C_3\, (0.35)^3\, (0.65)^{12} \\ &= 455\ (0.1428)\ (.00568) \\ &= 0.11 \end{aligned}$$

jemplo 4.12

n examen de opción múltiple tiene 20 preguntas, cada una tiene 5 opciones y sólo una es erdadera. Si este examen se contesta al azar, encontrar:

) la probabilidad de obtener una respuesta correcta;
) la probabilidad de obtener a lo más una respuesta correcta;
la probabilidad de obtener por lo menos dos respuestas correctas;
) el número esperado de respuestas correctas;
) la varianza de la distribución de probabilidad;
la desviación estándar de la distribución.

) El número de ensayos es 20, el éxito es respuesta correcta, la probabilidad de éxito es 0.2, la probabilidad de fracaso es 0.8 y el número de éxitos que nos interesan es 1, por lo que:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= {}_{20}C_1\,(.2)^1\,(0.8)^{19} \\ &= 20\,(.2)\,(.0144) \\ &= 0.0576 \end{aligned}$$

) En este caso nos interesan 0 éxitos y un éxito, de manera que:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= {}_{20}C_0\,(.2)^0\,(.8)^{20} \\ &= (1)\,(1)\,(.0115) \\ &= 0.0115 \end{aligned}$$

omo $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$, luego entonces:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= 0.0115 + 0.0576 \\ &= 0.0691 \end{aligned}$$

En este inciso nos interesan de dos éxitos en adelante, o sea $P(X \geq 2)$, pero sabemos que $\Sigma P(X = x) = 1$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - 0.0691 \\ &= 0.9309 \end{aligned}$$

El número esperado de respuestas correctas es:

$$E(X) = \mu = 20\,(0.2) = 4$$

› cual quiere decir que si un examen con estas características fuera contestado eatoriamente muchas veces, en promedio se obtendrían 4 respuestas correctas por ‹amen.

) La varianza de la distribución de probabilidad tomando a X como el número de respuestas correctas es:

$$\sigma^2 = 20\,(0.2)\,(0.8) = 3.2$$

La desviación estándar de la distribución de probabilidad es:

$$\sigma = \sqrt{3.2} = 1.79$$

roblemas

. Se van a lanzar 10 monedas bien balanceadas, encontrar la probabilidad de que caigan 4 águilas.

Una pareja de recién casados planea tener 3 hijos, suponiendo que la probabilidad de que nazca niño sea igual a la probabilidad de que nazca niña, encontrar la probabilidad de que tengan una niña.

Calcular la probabilidad de que caiga 4 veces el número 5 al lanzar 8 veces un dado bien balanceado.

La probabilidad de que un tirador acierte a un blanco es de 0.4, encontrar la probabilidad de que en los próximos 12 disparos acierte en:
12 veces;
5 veces.

Se tiene un disco dividido en cinco regiones iguales, pintadas respectivamente de rojo, verde, blanco, azul y negro. Si el disco se hace girar 10 veces, encontrar la probabilidad de que este se detenga 3 veces en el color azul.

Una secretaria debe llegar todas las mañanas a las 8 en punto a su trabajo, pero el 20% de las veces llega tarde 15 minutos o más. El presidente de la compañía llega hasta las 10 A.M., pero ocasionalmente llama entre 8:00 y 8:15 para dictar alguna carta. Encontrar la probabilidad de que de 6 veces que llame el presidente en tres de ellas encuentre a la secretaria.

Supóngase que al lanzar una chinche esta cae con la punta hacia abajo el 65% de las veces, si ésta se lanza 6 veces, encontrar la probabilidad de que en 2 de ellas caiga con la punta hacia arriba.

Una moneda defectuosa cae águila el 40% de las veces que se lanza, si esta se lanza 8 veces, encontrar la probabilidad de que 6 veces caiga sol.

Un beisbolista ha bateado 10 home runs en sus últimos 100 juegos, calcular la probabilidad de que en sus próximos 8 juegos haga 3 home runs.

0. Un jugador de basquetbol acierta el 80% de los tiros de castigo que ejecuta. ¿Cuál es la probabilidad de que falle tres de los próximos cinco tiros?

1. La probabilidad de que un equipo A gane un juego en un torneo es de 0.75. Encontrar la probabilidad de que pierda 2 de los próximos 5 juegos.

2. El 8% de los artículos producidos por una máquina son defectuosos, si se tienen 12 piezas producidas por dicha máquina, encontrar la probabilidad de que 3 de ellas sean defectuosas

3. La quinta parte de los integrantes de un grupo tiene licencia para conducir automóvil, si se escogen 9 personas al azar, encontrar la probabilidad de que 3 de ellos tengan licencia.

4. Un tratamiento médico es efectivo en el 90% de los casos, si este se aplica a 12 pacientes, encontrar la probabilidad de que 10 de ellos se alivien.

5. La probabilidad de que un estudiante termine en tres años su preparatoria es de 0.4, si se tienen 6 estudiantes que acaban de ingresar a una preparatoria, encontrar la probabilidad de que 3 de ellos terminen sus estudios en tres años.

6. De acuerdo con estudios realizados, 1 de cada 15 personas que entran a una tienda departamental intentan robar algo. Si se escogen al azar a 3 clientes, encontrar la probabilidad de que uno de ellos intente robar algo.

7. Diez aparatos de radar operan de manera independiente. La probabilidad de que uno de ellos detecte un cohete enemigo es de 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que un cohete enemigo sea detectado por nueve aparatos de radar?

8. El 90% de los estudiantes que toman un curso elemental de economía aprueban, ¿cuál es la probabilidad de que a lo más dos estudiantes no aprueben el curso en un grupo de 10 alumnos?

9. Un defecto metabólico ocurre aproximadamente en uno de cada cien pacientes. Si cuatro niños nacen en un hospital, encontrar la probabilidad de que:
) ninguno tenga defecto metabólico;
) a lo más uno tenga defecto metabólico.

0. El 39% de los pacientes que se admiten en una clínica no pagan sus cuentas, por lo que terminan por ser perdonadas. Si se aceptan 4 nuevos pacientes, encontrar la probabilidad de que:
) todas la cuentas tengan que ser perdonadas;
) una cuenta tenga que ser perdonada;
) ninguna cuenta tenga que ser perdonada.

1. Un defecto metabólico ocurre aproximadamente en uno de cada cien pacientes. Si cuatro niños nacen en un hospital, encontrar la probabilidad de que:
) ninguno tenga defecto metabólico;
) a lo más uno tenga defecto metabólico.

22. *Un procedimiento quirúrgico nuevo es exitoso en el 80% de las veces. Si este* procedimiento es utilizado en cinco veces, encontrar la probabilidad de que:
) las cinco operaciones sean exitosas;
) por lo menos una sea exitosa.

23. Un procedimiento quirúrgico nuevo es exitoso en el 80% de las veces. Si este procedimiento es utilizado en cinco veces, encontrar la probabilidad de que:
) las cinco operaciones sean exitosas;
) por lo menos una sea exitosa.

24. El archivo de personal de una fábrica indica que el 10% de los empleados se retiran al año de ser contratados. Se acaban de contratar 10 empleados nuevos, encontrar la probabilidad de que después de un año:
) la mitad de ellos siga trabajando;
) todos sigan trabajando;
) se hayan ido tres de los contratados.

25. *De los alumnos que cursan el último año de una escuela preparatoria el 60%* son mujeres. Si en esta escuela se seleccionan diez estudiantes al azar, encontrar la probabilidad de que:
) nueve sean mujeres;
) al menos nueve sean mujeres;
) a lo más ocho sean mujeres.

26. En una población el 15% de los adultos son analfabetos. Si se escoge a 12 personas al azar, encontrar la probabilidad de que sean analfabetos:
) los 12;
) menos de 2;
) por lo menos 2;
) entre 2 y 4.

7. La probabilidad de que un remache sea defectuoso es de 0.01, si un avión tiene 10 000 remaches, encontrar el número esperado de remaches defectuosos en el avión.

8. Un examen de opción múltiple tiene 20 preguntas, cada una de ellas tiene 6 opciones y sólo una es verdadera. Si el examen se contesta de manera aleatoria, encontrar:
) la probabilidad de obtener 4 respuestas correctas;
) el número esperado de respuestas correctas;
) *la varianza de la distribución de probabilidad.*

9. El 2% de los artículos que produce una máquina son defectuosos. En un cargamento de 1000 artículos, encontrar:
) El número esperado de artículos defectuosos;
) La varianza de la distribución de probabilidad;
) La desviación estándar de la distribución de probabilidad.

4.4 Distribución de Poisson

principios del siglo XIX el matemático francés Simeon Denis Poisson (1781 - 1841) ncontró que cuando se tiene una distribución binomial con un número grande de ensayos y na probabilidad de éxito pequeña, la probabilidad de que ocurran x éxitos se puede proximar mediante la fórmula siguiente:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

onde:

= n p

= 0, 1, 2, . . .

= 2.71828

jemplo 4.13

n un embarque grande de libros el 2% tiene encuadernación defectuosa. Si una caja tiene) libros, encontrar la probabilidad de que 5 de ellos tengan encuadernación defectuosa. tilizar la distribución:

) binomial;

) de *Poisson*.

El número de ensayos es 60 y la probabilidad de éxito es 0.02, por lo que la probabilidad de que 5 libros tengan encuadernación defectuosa es:

$$P(X = 5) = {}_{60}C_5 \, (0.02)^5 \, (0.98)^{55} = 5461512 \, (0.0000000032) \, (0.32918) = 0.00575$$

Como n toma un valor grande y p toma un valor pequeño, entonces se puede utilizar la distribución de Poisson como aproximación a la binomial, tomando $\lambda = 60 * 0.02 = 1.2$, con lo cual se tiene que:

$$P(X = 5) = \frac{(1.2)^5 e^{-1.2}}{5!} = \frac{2.48832(0.3012)}{120} = 0.00625$$

odemos notar que la aproximación utilizando la distribución de Poisson es bastante buena, uesto que sólo hay una diferencia de 50 cienmilésimos.

emplo 4.14

a probabilidad de que un remache sea defectuoso es de 0.01, si un avión tiene 1000 *maches, encontrar la probabilidad de que en el avión haya ocho remaches defectuosos.*

e tienen 1000 ensayos y una probabilidad de éxito de 0.01, por lo que $\lambda = 1000 * 0.01 = 10$, ego entonces, la probabilidad de que en el avión haya ocho remaches defectuosos es:

$$P(X = 8) = \frac{10^8 e^{-10}}{8!} = \frac{100000000\ (0.000045)}{40320} = 0.1125$$

ero la distribución de Poisson también se puede utilizar como modelo para describir el *rribo de aviones a un aeropuerto, la llegada de clientes a un restaurante, la llegada de* ersonas que solicitan atención en una clínica o la entrada de llamadas a una central lefónica.

ara utilizar la distribución de Poisson debemos suponer que:

- *la probabilidad de que ocurra un éxito en un subintervalo corto de tiempo es proporcional* a la longitud del intervalo;
- la probabilidad de dos o más éxitos en un subintervalo es prácticamente cero;
- el número de éxitos en un subintervalo cualquiera es independiente del número de éxitos fuera de él.

e puede demostrar que en una distribución de Poisson la media es $\mu = \lambda$, y la varianza es $^2 = \lambda$

emplo 4.15

número promedio de cheques sin fondos que recibe por día un banco es de 6, encontrar la obabilidad de que el jueves de la semana próxima reciba 4 cheques sin fondos.

número promedio de cheques sin fondos es $\lambda = 6$, por lo que la probabilidad de recibir 4 *eques sin fondos es:*

$$P(X = 4) = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} = \frac{1\ 296\ (0.00248)}{24} = 0.1339$$

emplo 4.16

n estudiante hace un promedio de 0.5 errores por página al hacer sus trabajos a máquina. *el estudiante hace un trabajo de 5 páginas, encontrar la probabilidad de que cometa:*

cero errores;

a lo más un error;

por lo menos dos errores.

) El número promedio de errores por página es de 0.5, por lo que el número de errores promedio en 5 páginas es $\lambda = 2.5$, así que la probabilidad de que cometa cero errores en el trabajo es:

$$P(X = 0) = \frac{(2.5)^0 e^{-2.5}}{0!} = \frac{1\ (0.08208)}{1} = 0.08208$$

) la probabilidad de que cometa a lo más un error es igual a la probabilidad de que cometa cero errores o un error, por lo que tenemos:

$$P(X = 1) = \frac{2.5^1 e^{-2.5}}{1!} = \frac{(2.5)\ (0.08208)}{1} = 0.20521$$

e manera que la probabilidad de cometer a lo más un error es:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.08208 + 0.20521 = 0.28729$$

La probabilidad de cometer por lo menos dos errores es igual a la probabilidad de cometer dos errores o más.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.28729 = 0.71271$$

roblemas

El 0.005% de la población de una ciudad muere a causa de cierto tipo de accidente. Si una compañía aseguradora tiene 1 000 asegurados cuya póliza cubre este tipo de accidentes, encontrar la probabilidad de que durante el próximo año tenga que pagar 5 sumas aseguradas debido a este tipo de accidentes.

El 2.5% de los conductores que pasan por una caseta de cobro pagan con la cantidad exacta. Encontrar la probabilidad de que de los próximos 200 conductores que lleguen a esta caseta, ninguno lleve la cantidad exacta.

El 3% de los artículos que produce una compañía son defectuosos. Si se tiene una caja con 200 de estos artículos, encontrar la probabilidad de que:
2 de ellos sean defectuosos;
por lo menos uno sea defectuoso.

La probabilidad de que se le reviente un neumático a un automóvil al cruzar un túnel es de 0.00005. Encontrar la probabilidad de que entre 10 000 automóviles que cruzan el túnel:
cuando mucho a dos se les reviente un neumático;
cuando menos a tres se les reviente un neumático.

. La probabilidad de que una persona sufra una reacción por una inyección de un suero es 0.001, si el suero se aplicó a 2000 personas, encontrar la probabilidad de que:

) una de ellas sufra la reacción;
) por lo menos dos sufran la reacción;
) a lo mas dos sufran la reacción.

. El número promedio de accidentes de tránsito que ocurren en cierta carretera en días laborables entre las 7 y las 8 horas de la mañana es de 0.7 accidentes por hora. Encontrar la probabilidad de que ocurran 2 accidentes en esa carretera el próximo martes entre las 7 y las 8 de la mañana.

. El número promedio de homicidios en cierta ciudad es de 2 por día. Encontrar la probabilidad de que e un día dado haya:

) dos homicidios;
) a lo más dos homicidios;
) por lo menos tres homicidios.

. El número promedio de clientes que entran a una tienda departamental es de 5 cada 10 minutos. Encontrar la probabilidad de que en los próximos 10 minutos entren:

) cero clientes;
) un cliente;
) al menos un cliente.

. El promedio anual de terremotos en cierto país es de 0.5. Encontrar la probabilidad de que en este país no haya terremotos en los próximos 3 años.

0. El promedio mensual de incendios grandes en una ciudad es de 1.5. Encontrar la probabilidad de que haya un incendio en los próximos dos meses.

1. En una población de 50 000 personas hay un promedio anual de 2 suicidios. Para una población de 100 000 personas, encontrar la probabilidad de que haya a lo más un suicidio.

2. El conmutador de un hotel recibe un promedio de 2 llamadas por minuto. Encontrar la probabilidad de que en 30 segundos reciba:

) una llamada;
) al menos una llamada;
) por lo menos una llamada.

Problemas de repaso

. Completar la distribución de probabilidad que aparece en la tabla y encontrar el valor esperado de la variable aleatoria X y la varianza de la distribución.

X	0	1	2	3
P(X = x)		0.2	0.4	0.3

. El número de errores cometidos cada hora por una persona que registra datos en una computadora es una variable aleatoria representada por X, la cual tiene la siguiente distribución de probabilidad.

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.4	0.3	0.25	0.05

) calcular el número promedio de errores que comete en una hora;
) encontrar la probabilidad de que se cometa al menos un error en una sesión de una hora.

. A continuación se presenta la distribución de probabilidad de que un vendedor de autos venda 0, 1, 2, 3, o 4 automóviles en una semana.

Número de autos vendidos (X)	0	1	2	3	4
P(X = x)	0.30	0.40	0.20	0.09	0.01

) Encontrar el número esperado de automóviles vendidos por semana;
) Encontrar la varianza de la distribución de probabilidad.

. Un constructor está concursando por una obra en la que puede obtener un beneficio de \$500 000 con una probabilidad de 0.7 o una pérdida de \$160 000 con probabilidad de 0.3. ¿Cuál es el valor esperado del constructor?

. Las probabilidades de 0, 1, 2, 3, o 4 robos a mano armada por día en una ciudad son 0.33, 0.37, 0.20, 0.08 y 0.02. Encontrar:
) el número de robos esperados por día;
) la varianza de la distribución de probabilidad;
) la desviación estándar de la distribución de probabilidad.

Se van a lanzar dos monedas bien balanceadas, si caen cero águilas se ganan cero pesos, si cae un águila se ganan 10 pesos y si caen dos águilas se ganan veinte pesos, encontrar el precio justo de este juego.

Se lanzan dos dados, si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana, si vale siete, la tirada se anula, y si es inferior a siete, el jugador pierde:
) ¿cuál es la probabilidad de ganar?
) ¿es equitativo este juego?

. Se va a lanzar un dado bien balanceado. Si cae el número 1 se ganan \$10, si cae un número primo se ganan \$5 y no se pierde ni se gana si cae cualquier otro número. Si el juego es honesto, ¿cuánto se debe pagar por jugar este juego? Encontrar la varianza de la distribución de probabilidad.

. En una caja se tienen 8 cartas a las cuales se les han asignado los números 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4 y 6. Si se saca una carta al azar y se gana un número de pesos igual al número de la carta seleccionada, encontrar la ganancia esperada del juego y la varianza de la distribución de probabilidad.

0. Un vendedor de periódico puede ganar \$100.00 si no llueve o perder \$20.00 si llueve. Si la probabilidad de que mañana llueva es de 0.2, encontrar su esperanza matemática.

1. Un dispositivo para detectar incendios utiliza tres células sensitivas a la temperatura que actúan de manera independiente para activar una alarma. Cada célula tiene una probabilidad de 0.8 de accionar la alarma cuando la temperatura llega a los 60^0 C. Si X es el número de células que accionan la alarma cuando la temperatura alcanza los 60^0 C, encontrar la distribución de probabilidad de X, así como el valor esperado de ésta y la varianza de la distribución de probabilidad.

2. Un pescador tiene una probabilidad de 1/3 de capturar un pez antes de que tenga que reemplazar la carnada; nunca usa la misma carnada para capturar más de un pez. Supóngase que tiene tres carnadas. Sea X el número de peces que captura antes de que se le terminen las carnadas. Encontrar:
) la distribución de probabilidad;
) la probabilidad de que el pescador capture más de un pez;
) el número esperado de peces capturados;
) la varianza del número de peces capturados.

3. La distribución de probabilidad del número de automóviles vendidos por día por un distribuidor aparece en la tabla siguiente:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X = x)	0.1	0.2	0.4	0.15	0.1	0.03	0.01	0.01

) encontrar el número esperado de ventas por día;
) encontrar la varianza de la distribución de probabilidad.

4. Una inversión puede producir uno de estos tres resultados: una ganancia de \$7 000, una ganancia de \$4 000 o una pérdida de \$10 000, con probabilidades de 0.55, 0.2 y 0.25 respectivamente. Encontrar la ganancia esperada del inversionista.

5. La urna A contiene 3 bolas blancas, 5 negras y 2 verdes; la urna B contiene 4 bolas blancas, 3 negras y 3 verdes. Se elige una bola al azar de cada urna. Se gana \$4 si las dos bolas son blancas, \$3 si las dos son negras y \$5 si ambas son verdes. Si el derecho a jugar cuesta \$5, ¿el juego es honesto?

6. Entre 10 empleados de una oficina considerados para ser promovidos hay seis hombres y cuatro mujeres. Si se elige a 3 de estos empleados para ser entrevistados, y si se considera a la variable aleatoria X como el número de mujeres en la muestra, encontrar:

a) la probabilidad de que en la muestra haya una mujer;
b) el número esperado de mujeres en la muestra;
c) la varianza de la distribución de probabilidad;
d) la desviación estándar de la distribución de probabilidad.

7. De un total de 800 familias con 5 hijos cada una, en cuántas se espera que haya:
a) 3 niños;
b) 5 niñas;
c) 2 o 3 niñas.

8. Se tiene un examen de 10 preguntas cuyas respuestas son: falso o verdadero, si el examen se contesta de manera aleatoria, encontrar la probabilidad de obtener 8 respuestas correctas.

9. Una cooperativa afirma que el 95% de las sandías que envían al mercado están maduras y listas para comerse. Si se compran 10 sandías, encontrar la probabilidad de que:
a) por lo menos 8 estén maduras y listas para comerse;
b) entre 7 y 9 estén maduras y listas para comerse;
c) a lo más 9 estén maduras y listas para comerse.

0. Un vendedor de seguros vende pólizas por 30 años a 5 hombres de la misma edad y con buena salud. De acuerdo con las tablas actuariales, la probabilidad de que un hombre de esta edad viva 30 años más es de 0.66, encontrar la probabilidad de que dentro de 30 años vivan:
) los 5 hombres;
) 2 hombres;
) al menos dos hombres.

1. El 80% de los alumnos de una universidad estudian licenciatura. Si se eligen 4 estudiantes al azar, encontrar:
a) la probabilidad de que tres de ellos estudien licenciatura;
b) el número esperado de estudiantes de licenciatura en la muestra;
c) la desviación estándar de la distribución de probabilidad.

2. De las últimas 100 piezas producidas por una máquina 15 resultaron defectuosas. Si esta máquina va a producir 12 piezas, encontrar la probabilidad de que 4 de ellas sean defectuosas.

3. La experiencia ha demostrado que el 50% de los estudiantes que cursan el primer año de inglés aprueban el examen final, si en un grupo hay 12 alumnos, encontrar la probabilidad de que por lo menos 11 aprueben el curso.

4. En una escuela profesional el 50% de los alumnos cursan primer año, 25% el segundo año, 15% el tercer año y 10% el cuarto año. Si se seleccionan 5 estudiantes al azar, encontrar la probabilidad de que:
) dos sean de primer año;
) ninguno sea de tercero o cuarto año.

5. La cuarta parte de una raza de conejos nace con pelo largo. ¿Cuál es la probabilidad de que en una camada de 8 conejos tres tengan pelo largo?

6. La probabilidad de que un radar detecte un avión enemigo es 0.9. Si tenemos cinco radares, ¿cuál es la probabilidad de que no se detecte un avión enemigo?

7. Un procedimiento quirúrgico tienen éxito el 90% de las veces que se emplea. Si se hacen 5 operaciones utilizando dicho procedimiento, encontrar la probabilidad de que haya éxito en 4 de ellas.

8. El 80% de las semillas de una planta germinan. Si se siembran cinco semillas, encontrar la probabilidad de tres de ellas germinen.

9. Un fabricante de piezas para automóviles garantiza que en una caja de 20 artículos hay un máximo de 2 piezas defectuosas. Si se sabe que en el proceso de fabricación hay un 2% de piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que la caja cumpla con la garantía?

0. El 20% de los fusibles que produce una compañía son defectuosos, si se tiene una caja con 10 de estos artículos, encontrar la probabilidad de que haya por lo menos 9 buenos.

1. El 90% de los árboles plantados en una campaña de reforestación vive. ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan al menos 9 de 10 que acaban de ser plantados?

2. Cuatro motores de un avión operan de manera independiente, la probabilidad de que uno de ellos falle es de 0.01. Encontrar la probabilidad de que en cierto vuelo:
no haya ninguna falla;
haya a lo más una falla.

3. Con base en su experiencia un médico sabe que el 10% de los pacientes a quienes se ha aplicado un medicamento presentan efectos colaterales no deseables. Si el medicamento se prescribió a 10 pacientes, encontrar la probabilidad de que:
a lo más dos presenten efectos colaterales no deseados;
al menos dos los presenten.

4. El 20% de los cinescopios de televisión que produce una compañía se funden antes de que expire la garantía. Si se han vendido 400 cinescopios y si X es la variable aleatoria correspondiente al número de cinescopios que se fundirán antes de que expire la garantía, encontrar:
la esperanza matemática de la variable aleatoria X;
la desviación estándar de la distribución de probabilidad.

5. El 10% de los fumadores de una ciudad prefieren cierta marca. Si se selecciona una muestra de 100 fumadores de dicha ciudad y si Y es el número de fumadores de la muestra que prefieren dicha marca, encontrar la desviación estándar de la variable aleatoria Y.

36. El 20% de los tornillos producidos por una máquina son defectuosos. Si se selecciona una muestra de 100 tornillos producidos por dicha máquina y si Z es el número de tornillos defectuosos en la muestra, encontrar μ y σ.

37. El 90% de los que compran un televisor a color no hacen reclamaciones que estén cubiertas por la garantía mientras esta se encuentra vigente. Si 10 personas compran uno de estos televisores, encontrar la probabilidad de que a lo más uno reclame estando vigente la garantía.

38. El 4% de los conductores de automóvil no tienen licencia. Si en un día determinado se detiene a 100 automovilistas, encontrar la probabilidad de que 3 de ellos no tengan licencia.

39. La probabilidad de que una persona de cierta población fallezca en el curso del año es de 0.005. Si una compañía aseguradora tiene 1000 asegurados de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que pagar más de tres sumas aseguradas?

30. El 2% de las personas que trabajan en una compañía son zurdas. Encontrar la probabilidad de que en un grupo de 200 personas haya 5 zurdos.

31. El 3% de los focos producidos por una compañía son defectuosos, si se tiene una caja con 200 de estos focos, encontrar la probabilidad de que:

a) dos sean defectuosos;

b) al menos 1 sea defectuoso.

2. El número de personas que ingresan a la unidad de cuidados intensivos de un hospital en un día tiene una distribución de Poisson con media de 5 personas por día. Encontrar la probabilidad de que el número de personas que ingresan a esta unidad sea:

a) de dos;

b) menor que dos;

c) mayor que dos.

3. El número promedio de accidentes en una carretera es de 3 por mes. Encontrar la probabilidad de que en una semana específica no ocurra ningún accidente.

4. El número de ahogados en una playa es de 3 por cada 100 000 turistas, Si el próximo año se calcula que visiten esta playa 200 000 turistas, encontrar la probabilidad de que durante el año haya:

a) cero ahogados;

b) un ahogado;

c) dos ahogados.

5. DISTRIBUCION NORMAL

Existen varias distribuciones de variable continua, sin embargo, en estas notas sólo se trata la distribución normal, se hacen algunas aplicaciones de ésta y se da la aproximación de la normal a la binomial.

5.1 La distribución normal

Hay una serie de fenómenos aleatorios que nos dan mediciones continuas, por ejemplo la altura o el peso de las personas que integran un grupo, el coeficiente intelectual de los alumnos de una escuela, el tiempo de vida de los focos que produce una fábrica, la velocidad de los automóviles que circulan en una autopista, los errores de medición en los experimentos realizados en un laboratorio, en cada uno de estos ejemplos se tiene una variable aleatoria continua. Un modelo matemático que se puede aproximar a este tipo de fenómenos es el que se conoce como la distribución normal.

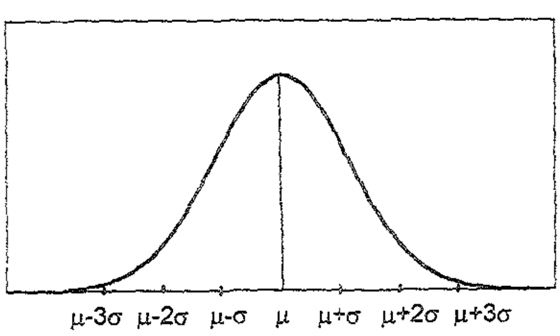
La fórmula de la distribución normal fue publicada por primera vez en 1733 por el matemático franco inglés Abraham de Moivre (1667-1745). Otros matemáticos que figuran en primer plano en la historia inicial de esta distribución son Pierre Simon Marqués de Laplace (1749-1827) y Carl Friedrich Gauss (1777-1855), en cuyo honor se denomina a veces distribución de Gauss.

La fórmula de la distribución normal es:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Donde:
La variable X puede tomar cualquier número real x
μ = media de la distribución de probabilidad
σ^2 = varianza de la distribución de probabilidad
σ = desviación estándar de la distribución de probabilidad

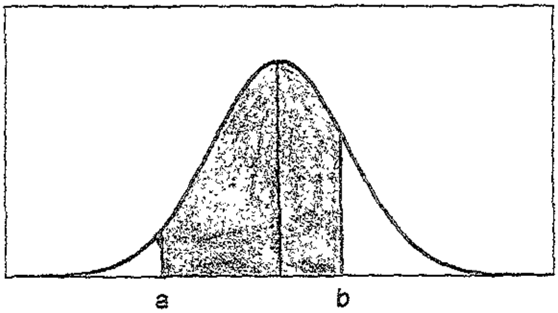
A la variable x se le pueden dar valores para obtener los valores de f(x) y de esta manera obtener la gráfica de la distribución normal, tal como se muestra en la gráfica siguiente:



Esta distribución tiene las características siguientes:

a) la curva es simétrica con respecto a la media;
b) la curva es asintótica con respecto al eje X, o sea que la curva se extiende indefinidamente en ambas direcciones, aproximándose cada vez más al eje X sin que llegue a tocarlo;
c) el área bajo la curva y por encima del eje X es igual a 1;
d) la curva es cóncava hacia abajo en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ y cóncava hacia arriba fuera de él.

En una distribución de variable continua la probabilidad de que la variable aleatoria tome algún valor en un intervalo de la recta real es el área que en ese intervalo se encuentra entre el eje X y la curva de la distribución. Así tenemos que la probabilidad de que la variable aleatoria X tome algún valor en el intervalo comprendido entre a y b, lo cual se denota como $P(a \leq X \leq b)$, es el área bajo la curva en ese intervalo, tal como se muestra en gráfica siguiente.



$P(a \leq X \leq b)$

La parte sombreada corresponde a la probabilidad de que la variable aleatoria X tome algún valor en el intervalo comprendido entre a y b.

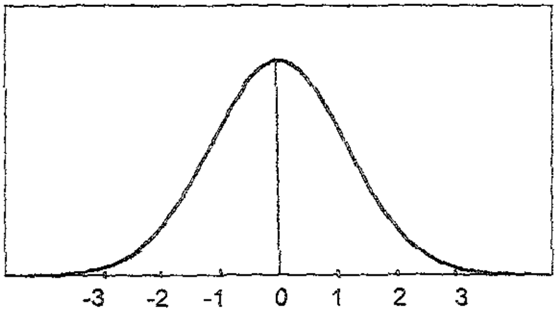
Cuando se tiene una variable aleatoria X que tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2 se denota por: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

5.2 Distribución normal estándar

A la distribución normal que tiene media cero y varianza 1 se le llama distribución normal estándar. De manera que si en fórmula de la distribución normal hacemos $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, tenemos la fórmula de la distribución normal estándar que se da a continuación:

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Al dar valores a la variable z en la fórmula anterior se obtienen los valores de f(z) con los cuales se obtiene la gráfica siguiente:



Cuando se tiene una variable aleatoria Z que tiene distribución normal estándar se puede denotar de la manera siguiente:

$$Z \sim N(0,1)$$

Ejemplo 5.1

Sea Z una variable aleatoria continua que tiene distribución normal estándar, encontrar la probabilidad de que la variable aleatoria Z tome un valor:

a) entre 0 y 1.65;
b) entre -2.83 y 0.65;
c) menor que 2.08;
d) menor que -1.98;
e) entre -2.46 y -0.67.

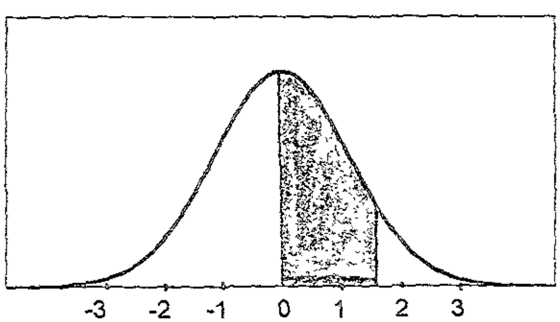
Para calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome algún valor en un intervalo de la recta real nos vamos a auxiliar de la tabla de la distribución normal estándar de la página 124, la cual nos da el área entre el eje X y la curva en el intervalo comprendido entre cero y el valor buscado.

a) Para buscar el valor 1.65 en la tabla, buscamos 1.6 en la columna de la izquierda y .05 en el renglón superior, el número que se encuentra en la intersección de la columna y el renglón que nos interesa es 0.4505, tal como se muestra en la tabla siguiente.

z	.05
	.
	.
	.
1.6	. . . . 0.4505 . . . .
	.
	.

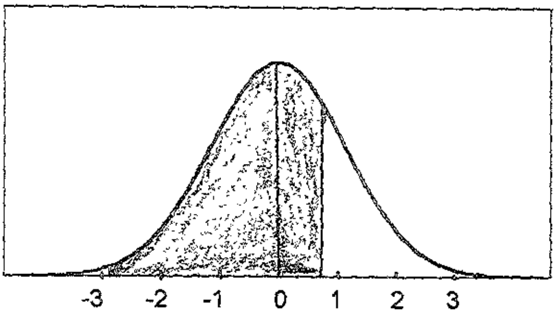
El área sombreada en la gráfica es 0.4505, de manera que la probabilidad de que la variable aleatoria Z tome un valor entre 0 y 1.65 es:

$$P(0 \leq Z \leq 1.65) = 0.4505$$



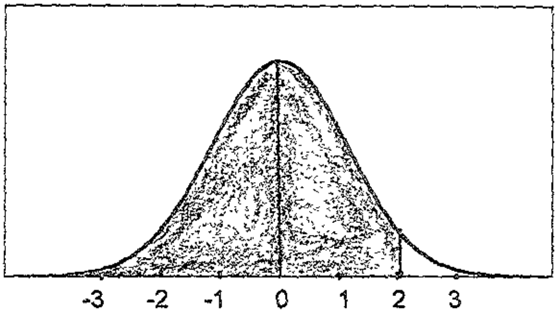
b) Para encontrar la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entre -2.83 y 0.65 se busca 2.83 en la tabla obteniéndose 0.4977, como la curva es simétrica, tenemos que el área entre -2.83 y 0 es 0.4977, posteriormente se busca 0.65 en la tabla y se obtiene 0.2422, como las áreas encontradas están en lados opuestos de la media, éstas se suman obteniéndose así la probabilidad buscada.

$$P(-2.83 \leq Z \leq 0.65) = 0.4977 + 0.2422 = 0.7399$$



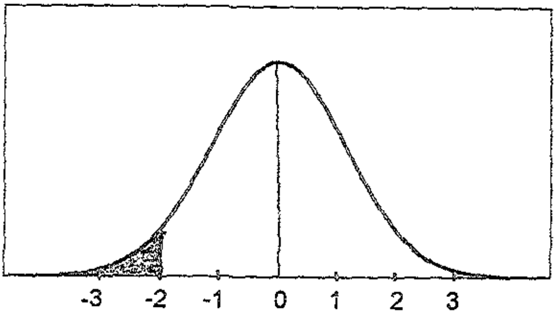
c) Al buscar 2.08 en la tabla se obtiene 0.4812, esta área se encuentra a la derecha de la media, pero como también nos interesa toda el área que está a la izquierda de la media que es 0.5, entonces tenemos que la probabilidad buscada es:

$$P(Z \leq 2.08) = 0.5 + 0.4812 = 0.9812$$



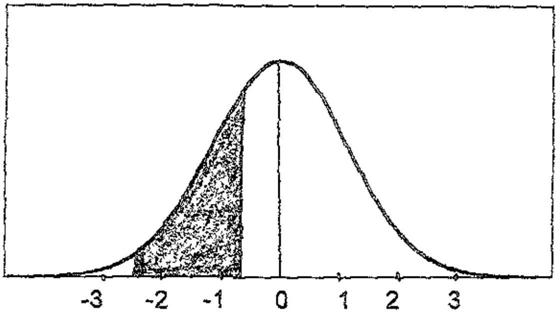
d) Al buscar 1.98 en la tabla obtenemos 0.4761, así tenemos que el área entre -1.98 y 0 es 0.4761, pero como el área que nos interesa es la que esta a la izquierda de -1.98, entonces a 0.5 le restamos el valor encontrado y tenemos la probabilidad que nos interesa:

$$P(Z \leq -1.98) = 0.5 - 0.4761 = 0.0239$$



e) Al buscar 2.46 y 0.67 en la tabla se obtienen los valores 0.4931 y 0.2486, como las dos áreas que nos interesan están a la izquierda de la media entonces, al área mayor le restamos el área menor para obtener la probabilidad buscada.

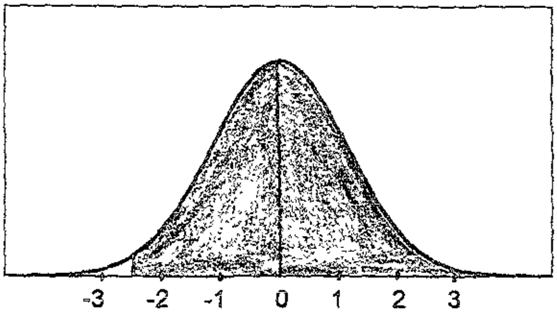
$$P(-2.46 \leq Z \leq -0.67) = 0.4931 - 0.2486 = 0.2445$$



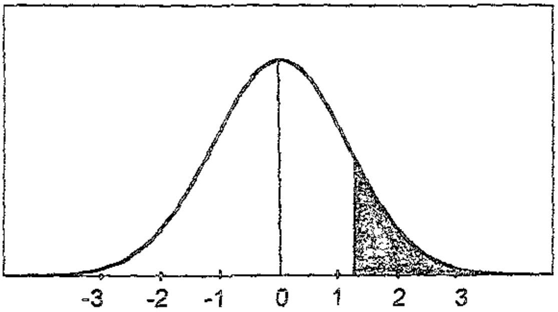
Ejemplo 5.2

Si la variable aleatoria Z tiene distribución normal estándar, encontrar el valor de z en cada uno de los incisos siguientes:
a) $P(Z \geq z) = 0.95$;
b) $P(Z \geq z) = 0.10$.

a) Tenemos que encontrar el valor de z que nos garantice que a la derecha de dicho valor se encuentra un área de 0.95, necesariamente este valor debe estar a la izquierda de la media, de manera que buscamos un valor de z que nos garantice que entre este valor y la media haya un área de 0.45, esta área se busca en la tabla, en donde encontramos que los valores más cercanos son 0.4495 y 0.4505. así que podemos tomar el valor de 2.545, como z está a la izquierda de la media tenemos que z = -2.545.



b) A la derecha del valor de z hay un área de 0.10, por lo que z debe estar a la derecha de la media, luego entonces el área que tenemos que buscar en la tabla es la de 0.4, el valor más cercano es el de 0.3997, que corresponde a 1.28, de manera que z = 1.28.



Problemas

1. En una distribución normal estándar encontrar el área bajo la curva entre los valores:
a) 0 y 1.48;
b) -2.04 y 0.

2. En una distribución normal estándar encontrar el área bajo la curva que se encuentra a la izquierda de:
a) 2.35;
b) -0.56.

3. La variable aleatoria Z tiene distribución normal estándar. Encontrar la probabilidad de que Z tome algún valor:
a) entre -2.34 y 1.48;
b) entre 0.23 y 1.85;
c) entre -3.09 y -2.48.

4. La variable aleatoria Z tiene distribución normal estándar. Encontrar la probabilidad de que Z tome algún valor:
a) mayor que -2.89;
b) mayor que 0.89.

5. En una distribución normal estándar, encontrar el valor de z que garantice que:
a) el área entre 0 y z es 0.3340;
b) el área a la izquierda de z es 0.6517;
c) el área a la izquierda de z es 0.3085;
d) a la derecha de z es 0.8810;
e) a la derecha de z es 0.0326;
f) el área entre -z y z es 0.2662;
g) el área entre -z y z es 0.9700.

5.3 Aplicaciones de la distribución normal

La distribución normal es un modelo matemático, por lo que es difícil que encontremos variables aleatorias que se distribuyan con exactitud de manera normal. Sin embargo muchas variables aleatorias pueden tener una distribución que se aproxima a una normal.

En la práctica los problemas que se nos presentan generalmente tienen una media diferente de cero y una varianza diferente de uno, por lo que hay que hacer una transformación de estos a una distribución normal estándar. Luego entonces, cuando se tiene un problema en el cual hay una variable aleatoria X que se distribuye de manera normal con media μ y varianza σ^2 y se quiere encontrar la probabilidad de que la variable tome algún valor en un intervalo de la recta real se tiene que hacer una transformación de esta variable a una variable Z que se distribuya de manera normal con media 0 y varianza 1. Esto se hace utilizando la fórmula siguiente.

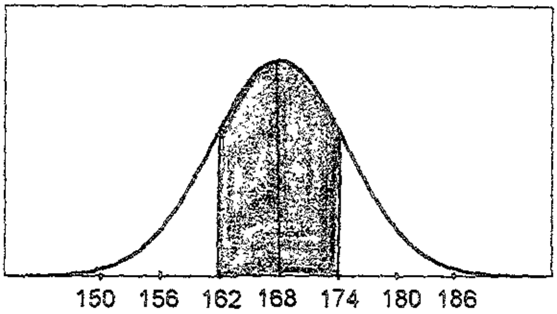
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

sí que, cualquier valor x que tome la variable aleatoria X se puede transformar en un valor z ; una distribución normal estándar. A este proceso se le conoce como estandarización.

Ejemplo 5.3

Las estaturas de los alumnos de una escuela se distribuyen normalmente, con media de 168 cms. y varianza de 36. Si se selecciona a un alumno al azar, encontrar la probabilidad de que su estatura este entre 162 y 174 cms.

Tenemos una distribución normal con media 168, varianza 36 y desviación estándar 6. Se puede graficar esta distribución y sombrear la parte que nos interesa, esto es, entre 162 y 174.



Queremos encontrar el área bajo la curva en el intervalo comprendido entre 162 y 174, pero para poder hacer es esto es necesario estandarizar estos valores utilizando la fórmula que se dio más arriba, con lo que tenemos.

$$z_1 = \frac{162 - 178}{6} = -1 \qquad z_2 = \frac{174 - 168}{6} = 1$$

De manera que en lugar de encontrar el área entre 162 y 168 en la distribución normal original, ahora encontraremos el área entre -1 y 1 en una distribución normal estándar.

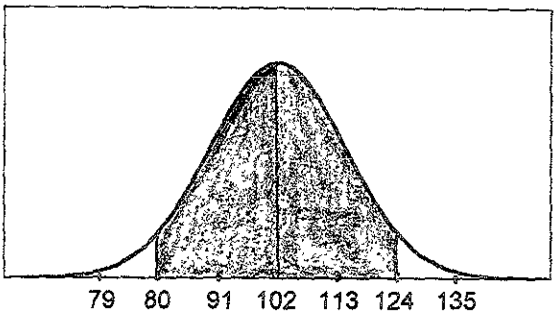
$$\begin{aligned} P(162 \leq X \leq 1174) &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.3413 + 0.3413 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

Se puede notar que entre -1 y 1 se encuentra el 68.26% del área bajo la curva

Ejemplo 5.4

Los coeficientes intelectuales de los alumnos de una escuela se distribuyen normalmente con media de 102 y varianza de 121. ¿Qué porcentaje de alumnos de esta escuela se espera que tenga un coeficiente intelectual entre 80 y 124?

La gráfica de esta distribución es:



Nos interesa el área que se encuentra entre 80 y 124, de manera que estandarizando estos valores se tiene lo siguiente:

$$z_1 = \frac{80 - 102}{11} = -2 \qquad \text{y} \qquad z_2 = \frac{124 - 102}{11} = 2$$

Así que:

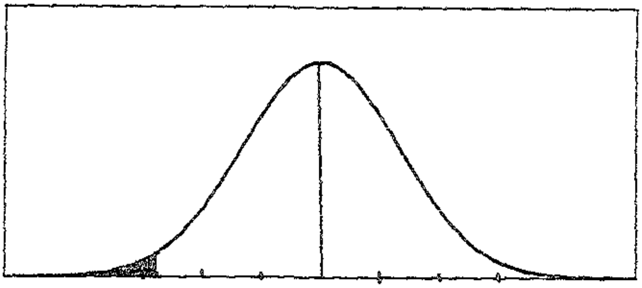
$$\begin{aligned} P(80 \le x \le 124) &= P(-2 \le z \le 2) \\ &= 0.4772 + 0.4772 \\ &= 0.9544 \end{aligned}$$

Luego entonces se espera que el porcentaje de alumnos cuyo coeficiente intelectual está entre 80 y 124 sea de 95.44%.

El 95.44% del área bajo la curva está entre 80 y 124, esto es, casi toda el área se encuentra en este intervalo, por lo que se puede concluir que bajo estas condiciones hay muy pocas personas con un coeficiente intelectual muy bajo o muy alto, la mayoría de los estudiantes de esta escuela tienen un coeficiente intelectual cercano a la media.

Ejemplo 5.5

La cantidad de café instantáneo que vierte una máquina llenadora de frascos de café se distribuye normalmente con media de 100 gms y varianza de 1.21. Si se tiene un lote de 2000 frascos, ¿cuántos se espera que tengan menos de 97gms?



Estandarizando 97 se obtiene:

$$z = \frac{97 - 100}{1.1} = -2.73$$

Así que la probabilidad que nos interesa es:

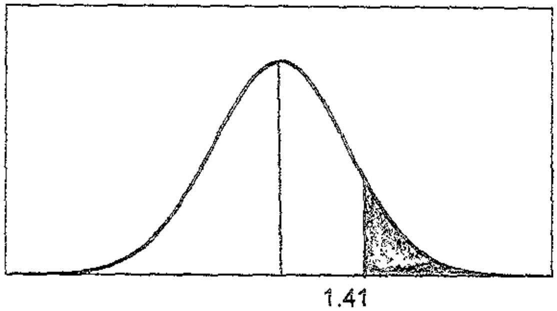
$$\begin{aligned} P(X \leq 97) &= P(Z \leq -2.73) \\ &= 5 \;-\; 0.4968 \\ &= 0.0032 \end{aligned}$$

Multiplicando esta probabilidad por el total de frascos se tiene que el valor esperado de frascos con un contenido menor a 97 gms es: 2000 (.0032) = 6.4.

Ejemplo 5.6

Las puntuaciones de un examen de estadística se distribuyen de manera normal, con media de 72 puntos y varianza de 49. Si el profesor quiere poner 10 al 8% de los que presentaron este examen, ¿cuál es la puntuación mínima para poder obtener la calificación más alta?

En este caso se nos da como dato un área del 8%, la cual debe estar en el extremo derecho de la curva, por lo que entre 0 y el valor z debe haber un área de 0.42, buscando este valor en tablas se tiene que z = 1.41.



De la fórmula $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ se despeja x, con lo cual se tiene:

$$x = \mu + z\sigma$$

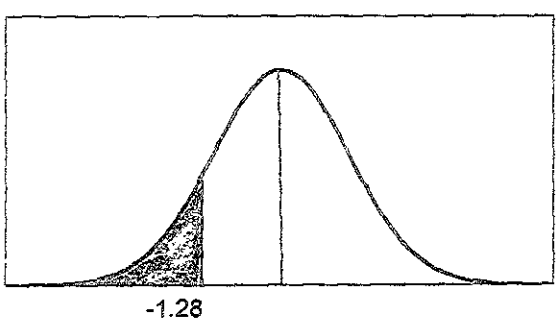
Si en esta fórmula se sustituyen los valores correspondientes se obtiene el valor de x.

$$x = 72 + 1.41\,(7) = 81.87$$

Luego entonces, para que un estudiante pueda obtener 10 de calificación debe tener 82 puntos o más.

Ejemplo 5.7

La duración de los focos de 100 watts producidos por una compañía tienen una distribución normal con media de 900 hs. Si el 10% de los focos dura menos de 836 hs., encontrar la desviación estándar.



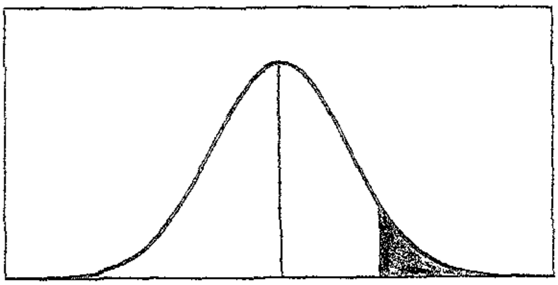
Nos interesa encontrar en la tabla de la distribución normal estándar un valor de z que garantice que el 10% del área bajo la curva se encuentra a la izquierda de dicho valor, o sea que nos interesa un área de 0.4 entre la media y el valor de z. El valor de tablas que más se aproxima es 1.28, pero como nos interesa un valor a la izquierda de la media tomamos un valor negativo, de manera que z = -1.28. Así que despejando σ de la fórmula de estandarización tenemos:

$$\sigma = \frac{x - \mu}{z} = \frac{836 - 900}{-1.28} = 50$$

Por lo tanto la desviación estándar es de 50 hs.

Ejemplo 5.8

La duración de las baterías para automóvil que fabrica una compañía se distribuye de manera normal, con una desviación estándar de 1 000 días. Si el 5% de las baterías tienen una duración mayor de 1 165 días, encontrar la duración promedio de las baterías que produce la compañía.



Buscando en tablas encontramos que z = 1.645 nos garantiza que a la derecha de este valor hay un 5% del área bajo la curva normal estándar. Si de la fórmula de estandarización despejamos μ tenemos:

$$\mu = x - z\sigma = 1\,165 - 1.645\,(100) = 1\,000.5$$

De manera que la duración promedio de las baterías producidas por la compañía es de 1 000.5 días.

Problemas

1. Los pesos de los estudiantes de una escuela se distribuyen de manera normal con media de 51 kgs. y varianza de 16. Si se escoge al azar a un estudiante de esta escuela, encontrar la probabilidad de que:
a) pese entre 45 y 56 kgs.
b) pese entre 40 y 60 kgs.

2. El número de cierto tipo de bacterias en un mililitro de agua potable tiene una distribución normal con media de 85 y desviación estándar de 8. Encontrar la probabilidad de que en una muestra de un mililitro de esta agua tenga:
a) menos de 90 bacterias;
b) menos de 100 bacterias.

3. Supóngase que el contenido de azúcar por naranja se distribuye de manera normal con media de 10 gramos y desviación estándar de 2.5 gramos. Encontrar la probabilidad de que una naranja seleccionada al azar tenga:
a) menos de 8 gramos de azúcar;
b) menos de 6 gramos de azúcar.

4. Los pesos de los pollos de una granja se distribuyen de manera normal con media de 1300 gramos y desviación estándar de 50 gramos. Si se escoge de manera aleatoria a un pollo de esta granja, encontrar la probabilidad de que pese:
a) más de 1 400 gramos;
b) más de 1 420 gramos.

5. Una máquina llenadora está ajustada para llenar botellas con una media de 980 mililitros de cerveza y una varianza de 25. Suponiendo que la cantidad de cerveza se distribuye de manera normal, encontrar la probabilidad de que una botella escogida al azar tenga:
a) más de 990 mililitros;
b) más de 1 000 mililitros.

6. La vida útil de las lámparas fluorescentes utilizadas en invernaderos se distribuye normalmente con media de 600 horas y desviación estándar de 40 horas. Encontrar la probabilidad de que una lámpara elegida al azar dure:
a) entre 620 y 660 horas;
b) entre 625 y 675 horas.

7. El tiempo de vida de una lavadora automática tiene una distribución normal con media de 3.1 años y desviación estándar de 1.2 años. Si este tipo de lavadora tiene una garantía por un año, ¿qué porcentaje de las lavadoras vendidas se espera que tengan que ser reemplazadas?

8. Las puntuaciones de un examen de admisión de una escuela tienen una distribución normal con media de 80 puntos y varianza de 121. Encontrar el porcentaje de personas que obtuvo una puntuación:
a) entre 70 y 90;
b) entre 60 y 100.

9. La velocidad de los automóviles al pasar por un punto de verificación de una autopista se distribuye normalmente con una media de 80 kph y una varianza de 36.
a) ¿Qué porcentaje de automóviles que pasan por el punto de control viaja a más de 90 kph?
b) ¿Qué porcentaje pasa por el punto de control a una velocidad de menos de 70 kph?
c) Supongamos que la velocidad máxima permitida es de 100 kph. ¿Qué porcentaje de automóviles exceden esta velocidad cuando pasan por el punto de control?

10. La longitud de los pétalos de una especie de flor está normalmente distribuida con media de 2 cms. y desviación estándar de 2.5 cms.
a) ¿qué porcentaje de pétalos tienen más de 5 cms.?
b) ¿qué porcentaje de pétalos tiene menos de 2 cms.?

11. Las lecturas de colesterol (en mg/dl) correspondiente a personas adultas de un grupo de cierta edad se distribuyen normalmente con media de 210 y desviación estándar 15. Encontrar el porcentaje de esta población que tiene lecturas:
a) mayores de 250;
b) mayores de 150.

12. Un psicólogo ha encontrado que las personas "normales" completan una tarea en un promedio de diez minutos. El tiempo requerido para completar la tarea se distribuye de manera normal con una desviación típica de tres minutos. Encontrar el porcentaje de personas que para completar la tarea requieren:
a) menos de catorce minutos;
b) más de 5 minutos;
c) menos de tres minutos.

13. El tiempo que tarda Juan para transladarse de su casa a su oficina sigue una distribución normal con media de 20 minutos y desviación estándar de 5 minutos. ¿A qué hora debe salir Juan de su casa para tener un 0.95 de probabilidad de llegar a su oficina a las 9 A.M.?

14. Los pesos de las sandías maduras cultivadas en una huerta se distribuyen de manera normal con desviación estándar de 1.2 kgs. Obtenga el peso promedio de las sandías si sólo el 3% de las sandías pesa menos de 5 kgs.

15. Una compañía comercializa paquetes de harina de 500 gramos. El proceso de llenado automático de los paquetes puede regularse de modo que la cantidad media de harina por paquete puede ajustarse al nivel deseado. Suponiendo que la cantidad de harina por paquete se distribuye de manera normal con una desviación de 5 gramos, encontrar el nivel medio de llenado a que debe ajustarse el proceso, de manera que sólo el:
a) 0.1% de los paquetes tengan un peso inferior a 484 gramos;
b) 5% de los paquetes tengan un peso superior a 510 gramos.

16. Los pesos de las piñas que se venden en una bodega tienen una distribución normal, con media de 2 300 gramos. Si el 10% de las piñas pesan menos de 1 800 gramos, encontrar la desviación estándar.

7. Una empresa periodística quiere publicar una edición especial de una revista para la Navidad. El gerente piensa que la venta de la revista sigue una distribución normal con media de 2 000 ejemplares, además cree que hay una probabilidad de 0.2 de vender más de 2 200 ejemplares. ¿Cuál es la desviación estándar?

5.4 Aproximación normal a la binomial

uando se tiene una distribución binomial con una probabilidad de éxito cercana a 0.5 o un úmero grande de ensayos, la distribución binomial se puede aproximar mediante la *istribución normal, tomando la media y la varianza de la binomial*, esto es, $\mu = n\,p$ y $^2 = n\,p\,q$.

e Moivre encontró que cuando una distribución binomial tiene una probabilidad de éxito ercana a 0.5, la distribución binomial se aproxima a una normal, por lo que se puede utilizar distribución normal como aproximación a la binomial, tal como se muestra en el ejemplo *iguiente*.

jemplo 5.9

upóngase que una moneda se va a lanzar 16 veces, encontrar la probabilidad de que aigan 6 águilas. Utilizar la distribución:

) *binomial;*

) normal.

) La variable aleatoria X = número de águilas tiene distribución binomial con 16 ensayos y probabilidad de éxito igual a 0.5, por lo que la probabilidad de que caigan 6 águilas es:

$$P(X = 6) = {}_{16}C_6\,(0.5)^6\,(0.5)^{10} = 0.1222$$

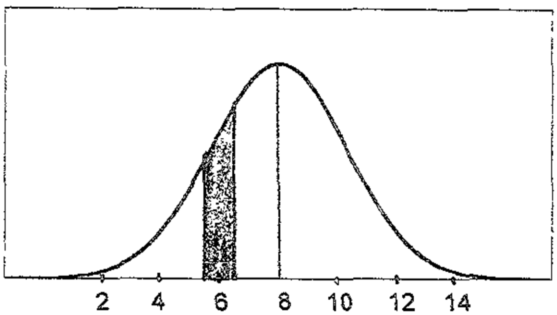
) Utilizando la distribución normal se tiene:

$$\mu = n\,p = 16\,(0.5) = 8$$
$$\sigma^2 = n\,p\,q = 16\,(0.5)\,(0.5) = 4$$
$$\sigma = 2$$

enemos una distribución normal con media 8 y varianza 4 y nos interesa calcular la robabilidad de obtener 6 éxito, sin embargo, recordemos que la binomial es una distribución e variable aleatoria discreta que sólo toma valores enteros, en cambio la normal es una istribución de variable aleatoria continua, por lo que es necesario hacer un pequeño ajuste l que se le llama corrección por continuidad, el cual consiste en calcular el área bajo la urva normal tomando media unidad antes y media unidad después del valor que nos interesa. En nuestro ejemplo nos interesa calcular la probabilidad de que ocurran 6 éxitos luego entonces se calcula el área bajo la curva normal entre 5.5 y 6.5.

$$P(X = 6) \rightarrow P(5.5 \leq X \leq 6\ 5) \qquad \text{Corrección por continuidad}$$

$$\begin{aligned} P(5.5 \leq X \leq 6.5) &= P(-1.25 \leq Z \leq -0.75) \\ &= 0.3944 - 0.2734 \\ &= 0.121 \end{aligned}$$



Podemos notar que la aproximación es muy buena, pues sólo tenemos una diferencia de 12 diezmilésimos.

Laplace encontró que a medida que aumenta el número de ensayos en una distribución binomial ésta se aproxima a una normal, por lo que la distribución normal se puede utilizar como aproximación a la binomial, tal como se muestra a continuación.

Ejemplo 5.10

El 10% de los remaches que produce una máquina son defectuosos. Si se tiene una caja con 200 remaches producidos por esta máquina, utilizando la aproximación normal a la binomial, encontrar la probabilidad de que en ella haya entre 24 y 30 unidades defectuosas.

Se tiene una distribución binomial con 200 ensayos con una probabilidad de éxito de 0.1 en cada ensayo, por lo que la probabilidad de que haya entre 24 y 30 unidades defectuosas en la caja es:

$$\begin{aligned} P(24 \leq X \leq 30) &= P(X = 24)+P(X = 25)+P(X = 26)+P(X = 27)+P(X = 28)+P(X = 29)+P(X = 30) \\ &= 0.0568 + 0.0444 + 0.0332 + 0.0238 + 0.0163 + 0.0108 + 0.0068 \\ &= 0.1922 \end{aligned}$$

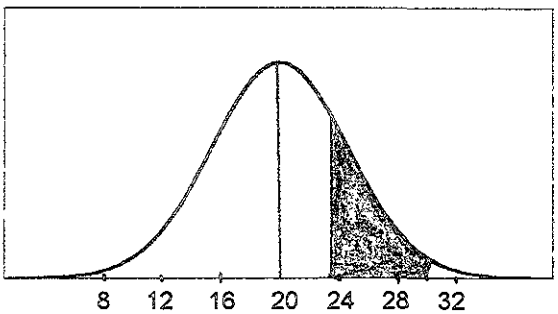
tilizando la aproximación normal a la binomial se tiene:

$$\mu = n\,p = 200\,(0.1) = 20$$
$$\sigma^2 = n\,p\,q = 200\,(0.1)\,(0.9) = 18$$
$$\sigma = 4.24$$

n la distribución normal con media 20 y varianza 18 nos interesa calcular la probabilidad de ue la variable aleatoria X tome un valor entre 24 y 30, sin embargo, por la corrección por ontinuidad se encontrará la probabilidad de que esta variable tome un valor entre 23.5 y 0.5.

$P(24 \leq X \leq 30) \rightarrow P(23.5 \leq X \leq 30.5)$ corrección por continuidad

$$\begin{aligned} P(23.5 \leq X \leq 30.5) &= P(0.83 \leq Z \leq 2.48) \\ &= 0.4934 - 0.2967 \\ &= 0.1967 \end{aligned}$$



uevamente se puede observar que la aproximación es buena, puesto que sólo se tiene una ferencia de 45 diezmilésimos.

a aproximación normal a la binomial se puede dar cuando la probabilidad de éxito es ercana a 0.5 o bien cuando el número de ensayos es grande, por lo que es recomendable ilizar la aproximación normal a al binomial cuando: $n\,p > 5$ y también $n\,q > 5$.

emplo 5.11

n suero tiene un 80% de efectividad en la cura de una enfermedad. Si el suero se aplica a 20 personas que tienen dicha enfermedad, encontrar la probabilidad de que se alivien enos de 105 personas.

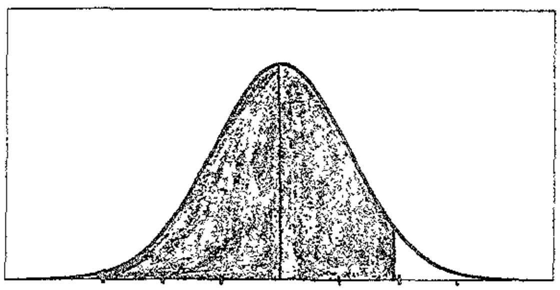
e tiene una distribución binomial con:

$$\mu = n\,p = 120\,(0.8) = 96$$
$$\sigma^2 = n\,p\,q = 120\,(0.8)\,(0.2) = 19.2$$
$$\sigma = 4.38.$$

omo n p = 120 (0.8) = 96 > 5 y n q = 120 (0.2) = 24 > 5, luego entonces la distribución nterior se puede aproximar por una distribución normal con μ = 96 y σ^2 = 19.2. Nos teresa la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor que 105.

$P(X \leq 104) \rightarrow P(X \leq 104.5)$ corrección por continuidad

$$P(X \leq 104.5) = P(Z \leq 1.94)$$
$$= 0.5 + 0.4738$$
$$= 0.9738$$



oblemas

Una moneda bien balanceada se va a lanzar 200 veces, encontrar la probabilidad de que caigan entre 80 y 200 águilas:

Un dado bien balanceado se va a lanzar 120 veces, encontrar la probabilidad de que el número 6 caiga:
18 veces o menos;
14 veces o más.

La probabilidad de que un hombre de 40 años muera antes de cumplir los 60 es de 0.17. Una compañía aseguró a 200 empleados de 40 años. Encontrar la probabilidad de que mueran antes de cumplir los 60 años:
menos del 15%;
más del 20%.

El 5% de las personas que se vacunan contra la gripe presentan reacciones contrarias, si la vacuna se va a aplicar a 200 personas, encontrar la probabilidad de que más del 8% presenten dichas reacciones.

El 20% de los estudiantes de una escuela trabaja, si se escoge a un grupo de 40 personas, encontrar la probabilidad de que menos de 5 trabajen.

Los archivos de un hotel indican que en promedio el 10% de los clientes no se presentan a reclamar sus reservaciones. Si el hotel acepta 215 reservaciones y sólo hay 200 habitaciones, encontrar la probabilidad de que todos los clientes que se presenten a reclamar su reservación consigan habitación.

El 64% de los alumnos de una universidad son hombres, si se escoge una muestra al azar de 400 alumnos, encontrar la probabilidad de que en la muestra haya 250 o más hombres.

El fabricante de un medicamento asegura que sólo el 5% de los pacientes que lo utilizan experimentan efectos colaterales. Los doctores de un hospital han utilizado producto en el tratamiento de 250 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que 15 de ellos o menos experimenten efectos colaterales?

El 10% de los estudiantes que se inscriben a una preparatoria se dan de baja durante el primer año, si en este año se inscribieron 1 800, encontrar la probabilidad de que se den de baja durante el año mas de 200 estudiantes.

0. El 30% de la población de una prisión están allí por robo. Si se selecciona una muestra de 50 reclusos, encontrar la probabilidad de que entre 20 y 24 se encuentren recluidos por robo.

1. El 62% de las nubes sembradas con yoduro de plata muestran un crecimiento espectacular. Si 24 nubes se siembran con yoduro de plata, encontrar la probabilidad de que 15 de ellas muestren un crecimiento espectacular.

12. El 75% de las personas que cruzan el Océano Atlántico en avión sienten el efecto de la diferencia de tiempo cuando menos en 24 horas. Encontrar la probabilidad de que de 50 personas que cruzan el Atlántico, por lo menos 35 sientan el efecto de la diferencia en el tiempo cuando menos en 24 horas.

Problemas de repaso

1. Si la variable aleatoria Z tiene por distribución a una normal estándar, encontrar las siguientes probabilidades:

a) $P(0 \leq Z \leq 1.35)$;

b) $P(-0.38 \leq Z \leq 0)$.

Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar. Encontrar la probabilidad de que Z tome un valor entre:
1.75 y 2.71;
).98 y 1.58;
3.02 y -1.24.

Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar. Encontrar la probabilidad de que z tome un valor:
a la izquierda de 1.63;
a la izquierda de -2.09;
a la derecha de 0.94;
a la derecha de -0.89.

Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar. Encontrar el valor de a:
$P(0 \leq Z \leq a) = 0.4326$;
$P(-a \leq Z \leq 0) = 0.3692$.

En una distribución normal estándar encontrar el valor de z que garantice que:
el área a la derecha de z es 0.6985;
el área a la derecha de z es 0.0089;
el área entre -z y z es 0.1742;
el área entre -z y z es 0.9886.

. Los diámetros de los tornillos producidos por una máquina se distribuyen de manera normal con media de 0.64 cms. y varianza de 0.0025. Se considera que un tornillo es bueno si tiene un diámetro entre 0.56 y 0.78 cms. Si se escoge un tornillo al azar, encontrar a probabilidad de que sea:
bueno;
defectuoso.

'. El tiempo que tarda una persona para transladarse de su casa a su trabajo es de 50 minutos con una varianza de 16. Encontrar la probabilidad de que un día cualquiera tarde entre:
) 38 y 48 minutos;
) 35 y 45 minutos.

8. La puntuación de un examen de matemáticas se distribuye de manera normal con media de 72 puntos y varianza de 81, si se escoge un examen al azar, encontrar la probabilidad de que su calificación sea mayor de 80 puntos.

9. El tiempo de duración de ciertos fusibles tienen una distribución normal con media de 1000 horas y desviación estándar de 50 horas. Encontrar la probabilidad de uno de los fusibles elegido al azar dure entre 1 020 y 1 110 horas.

10. El tiempo de duración de revelado e impresión en un proceso fotográfico sigue una distribución normal con media de 12.26 segundos y desviación estándar de 0.24 segundos. Encontrar la probabilidad de que al revelar e imprimir una fotografía esta tarde:

)or lo menos 11.86 segundos;
)e 12.32 a 12.80 segundos.

El tiempo que un turista dedica a visitar cierto museo sigue una distribución normal con media de 73.4 minutos y desviación estándar de 6.8 minutos. Encontrar la probabilidad de que el próximo turista que entre a este museo permanezca en él:
por lo menos 66 minutos;
de 70 a 80 minutos.

Los niveles de colesterol en una población se distribuyen normalmente con media de 182 mg/100ml y una desviación estándar de 15 mg/100ml. Si se escoge al azar a una persona de esta población, encontrar la probabilidad de que tenga un nivel de colesterol que esté:
entre 165 y 195 mg/100ml;
por arriba de 210 mg/100ml;
por debajo de 150 mg/100ml;
entre 160 y 200 mg/100ml.

. Las puntuaciones en una prueba de aprovechamiento tienen una distribución normal con medio de 150 puntos y desviación estándar de 30. Si Juan obtuvo 200 puntos, ¿qué porcentaje de estudiantes obtuvieron una puntuación mayor que la de Juan?

l. La velocidad de los automóviles a pasar por un punto de verificación de una autopista se distribuye de manera normal con media de 92 kph y varianza de 900. Encontrar el porcentaje de automóviles que llevan una velocidad:
mayor de 120 kph;
menor de 70 kph.

5. Una máquina automática produce pernos con una dimensión media de 1.25 cms. y una desviación estándar de 0.01 cms. Las dimensiones de los pernos se distribuyen normalmente. ¿Qué proporción de los pernos medirá entre 1.24 y 1.26 cm?

6. Supóngase que los pesos de 2 000 estudiantes hombres se distribuye de manera normal con media de 60 kgs. y varianza de 36. Encontrar el número esperado de estudiantes que tienen un peso:
) entre 50 y 72 kgs.
) menor de 48 kgs.

17. Las calificaciones de un examen de estadística se distribuyen de manera normal con media de 76 puntos y varianza de 225. El 8% de los mejores estudiantes reciben una calificación de 10 y el 15% de los estudiantes con más bajas calificaciones no aprueban el curso. Encontrar la puntuación mínima para aprobar el curso.

18. La fábrica de neumáticos A produce un tipo de neumáticos que tienen una vida útil promedio de 80 000 kilómetros y una desviación estándar de 8 000 kilómetros. Suponiendo que la vida útil se distribuye de manera normal:
) ¿cuál es la probabilidad de que un neumático dure más de 96 000 kilómetros?
) si el 50% de los neumáticos duran entre x_1 y x_2 kilómetros, encontrar los valores de x_1 y x_2 considerando que estos valores son simétricos con respecto a la media;

l fabricante garantiza que reemplazará cualquier neumático que dure menos de x ilómetros, encontrar el valor de x de manera que sólo se tenga que reemplazar el 1% de os neumáticos vendidos.

El tiempo promedio requerido para terminar un examen es de 70 minutos con una desviación estándar de 12 minutos. ¿Cuánto tiempo debe asignarse si se quiere que el 90 % de los estudiantes tengan tiempo suficiente para terminar el examen? (suponer que el tiempo requerido para terminar el examen tiene una distribución normal).

. Cierto tipo de baterías para automóviles tiene un tiempo de vida que se distribuye de manera normal con media de 1 200 días y desviación estándar de 100 días. ¿Cuál debe ser el tiempo de garantía si el fabricante quiere reemplazar sólo el 10% de las baterías vendidas?

. Un bar ha instalado una máquina automática para la venta de cerveza. La máquina puede regularse de modo que la cantidad media de cerveza por vaso sea la que se desee; sin embargo, en cualquier caso esta cantidad tendrá una distribución normal con una desviación estándar de 5.9 mililitros.

Si el nivel se ajusta a 304.7 mililitros, ¿qué porcentaje de vasos contendrán menos de 295.7 mililitros?

¿A qué nivel debe ajustarse la máquina para que sólo el 2.28% de los vasos contengan menos de 295.7 mililitros?

¿A qué nivel medio debe ajustarse la máquina para que el 84.13% de los vasos contengan menos de 313.6 mililitros?

2. La vida útil de las pilas de cierta marca se distribuye normalmente con media de 80 horas y una desviación estándar de 10 horas. El fabricante garantiza que reemplazará cualquier pila que falle antes de cumplirse la garantía. ¿Cuánto tiempo debe dar de garantía para no reemplazar más del 5% de las pilas vendidas?

23. Una máquina puede regularse de manera que sirva un promedio de μ mililitros de refresco por vaso. Si la cantidad de refresco servida se distribuye de manera normal con una desviación estándar de 4 mililitros, obtenga la media μ que asegure que el 99% de las veces la máquina llene vasos de 200 mililitros sin que se derrame el líquido.

24. La duración de las llantas de marca X se distribuye de manera normal con media de 36 meses y varianza de 9. La compañía no quiere reemplazar más del 5% de las llantas vendidas. ¿Cuánto debe durar la garantía?

25. Una distribución normal tiene una media $\mu = 78.0$. Si a la derecha de 86.40 hay un área bajo la curva de 20%, encontrar la desviación estándar.

26. Un examen de falso-verdadero tiene 120 preguntas, si este se contesta de manera aleatoria, encontrar la probabilidad de obtener:

a) entre 55 y 85 aciertos;
b) menos de 70 aciertos;
c) más de 65 aciertos.

!7. El 30% de los estudiantes de una escuela tienen vista defectuosa, si en un grupo hay 20 personas, encontrar la probabilidad de que a lo más 5 de ellos tengan vista defectuosa.

!8. El 20% de los conductores de automóvil de una ciudad tienen al menos un accidente durante el año, si una compañía tiene 200 clientes, encontrar la probabilidad de que esta compañía tenga mas de 22 accidentes.

!9. El 20% de las llamadas que llegan a una central telefónica son de larga distancia. Si llegan 200 llamadas a esta central, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 30 sean de larga distancia?

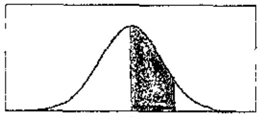
30. El 40% de los adolescentes de una población fuma. Si se selecciona una muestra al azar de 20 adolescentes de esta población, encontrar la probabilidad de que fumen;

) más de 10;

) menos de 5;

) entre 5 y 15.

31. El 65% de las picaduras de escorpión causan molestias severas, ¿cuál es la probabilidad de que de 200 picaduras a lo más 125 causen molestias severas?



Area bajo la curva normal estándar de 0 a z

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

6. HISTORIA DE LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD

as raíces de la teoría de la probabilidad se pierden en el polvo de la antigüedad y están strechamente ligadas con los juegos de azar, sin embargo, es hasta la segunda mitad del iglo XVII cuando se desarrollan los primeros conceptos de esta disciplina; en los primeros ños del siglo XVIII, Jacques Bernoulli, demuestra la ley de los grandes números; unos años nás tarde De Moivre encuentra la aproximación de la binomial a la normal, resultado que omplementa Laplace al inicio del siglo XIX; en la segunda mitad de este siglo el desarrollo e la teoría de la probabilidad se encuentra ligado a la escuela de San Petersburgo, en onde se pone énfasis en el estudio de los teoremas límite, y es en la tercera década del iglo XX cuando el matemático ruso Kolmogorov construye un sistema axiomático para la eoría de la probabilidad, con lo cual esta disciplina adquiere el mismo rango que las otras amas de la matemática.

6.1 Prehistoria

os problemas que más han influido en el surgimiento y desarrollo de la teoría de la obabilidad provienen básicamente de la recopilación y procesamiento de datos y de los egos de azar.

6.1.1 La estadística

os censos se empezaron a utilizar en la Antigüedad, en Egipto, Grecia y Roma se vantaban con el fin de conocer el número de habitantes así como la producción agrícola, sto con el fin de tener un control sobre los impuestos. Pero sería hasta el siglo VII cuando s censos proliferarían en la mayor parte de los países europeos. En estos censos se gistraba el número de habitantes, sexo, nacimientos, bautizos y sepelios.

sí tenemos que la recolección y el análisis de datos se ha llevado a cabo con cierta gularidad desde la Antigüedad, pero la investigación estadística sistemática y eficiente se a con el surgimiento del capitalismo, cuando se desarrollan las relaciones comerciales. "La stadística fue un estímulo básico en el inicio del desarrollo de la teoría de la probabilidad. n incremento constante en las relaciones capitalistas pusieron nuevos problemas a la stadística"[1]

6.1.2 Juegos de azar

os juegos de azar son muy antiguos, su origen tenemos que buscarlo en la prehistoria de la ımanidad. Los primeros juegos de azar que practicó el hombre se relacionan con el trágalo, los dados y las cartas.

osiblemente uno de los primeros juegos de azar que practicó el hombre de la comunidad imitiva es el que se relaciona con el astrágalo o taba, puesto que en excavaciones queológicas se han encontrado restos con una antigüedad de 40 000 años en los que la oporción de astrágalos es de 5 a 1 en comparación con otros huesos, lo que hace suponer ıe este hueso tenía algún uso particular.

ı algunas civilizaciones de la Antigüedad como Egipto, Grecia y Roma era común el uso del trágalo en juegos de azar. Homero cuenta que cuando Patroclo era niño, en una ocasión ıe jugaba con un astrágalo se enojó tanto con su oponente que estuvo a punto de matarlo[2].

---

laistrov, pág. 5
ıaz Godino, Juan; et. al. pág. 30

tro instrumento de juegos de azar muy antiguo es el dado. El dado más antiguo que se onoce se encontró en el norte de Irak, fue hecho de arcilla hacia el inicio del tercer milenio ntes de Cristo.

n Europa, durante la Edad Media era común la práctica de juegos de azar con el astrágalo y on los dados, e incluso en algunos lugares los reyes y obispos intentaron prohibirlos puesto ue se les relacionaba con ritos paganos que utilizaban juegos de azar para predecir hechos ituros.

l juego de cartas es también muy antiguo, aunque las cartas modernas aparecen en Francia n el siglo XIV, esto es hacia el fin de la Edad Media.

os juegos de azar con el astrágalo, los dados y las cartas persisten hasta nuestros días, aun uando el juego con el astrágalo va desapareciendo. Hasta hace algunos años el juego con astrágalo o taba aún se practicaba por los niños de provincia de algunos países entre los ue podemos mencionar a México, España, Francia y Grecia[3].

ecuerdo que durante los años sesentas, cuando aún vivía en Santa María Ajoloapan, ueblo que se localiza en el Estado de México, era común que los niños y jóvenes nos ntáramos por las tardes para jugar a la taba, sin embargo, con el paso del tiempo la ráctica de este juego ha disminuido de manera notable. Para practicar este juego de azar e utiliza una taba de carnero, hueso de forma irregular que al lanzarse al aire tiene cuatro osibilidades de caer, a las que se les llama: loma, joya, carne y diez; las dos primeras son is que caen con mayor frecuencia, pero son las dos últimas las que son motivo de apuesta, persona que lanza la taba gana cuando cae carne y pierde cuando cae diez. Las personas ue practican este juego hacen un círculo, generalmente el dueño de la taba es el que inicia juego, apuesta cierta cantidad de dinero y alguno de los restantes apuesta una cantidad ual, entonces el dueño del hueso lo lanza al aire hasta que caiga carne o diez, si gana uele a apostar y a lanzar la taba, si pierde, entonces la taba pasa a la persona que está a su erecha, a quien toca el turno de apostar y de lanzar el hueso, de esta manera la taba va rculando entre los participantes.

os juegos de azar son muy antiguos y sin embargo el cálculo de probabilidades surge hasta siglo XVI, esto es, hasta el Renacimiento, posiblemente porque el hombre de la Edad edia no trató de explicarse los fenómenos que ocurrían a su alrededor, puesto que se creía ue todo era obra de la Divina Providencia.

6.1.3 La combinatoria

asta antes del descubrimiento del cálculo diferencial e integral la herramienta básica en la obabilidad fue la combinatoria, cuyos principios básicos fueron conocidos desde la ntigüedad.

)iaz Godino, Juan, et. al. pág. 29

En el año 540 a. c. los pitagóricos encontraron los números triangulares:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

y de manera general

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n + 1)}{2} = {}_nC_2$$

Los hindúes conocían el triángulo de Pascal desde el siglo II a. c., sabían como calcular el número de permutaciones y el de combinaciones, también conocían la fórmula siguiente:

$$1 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \ldots + {}_nC_n = 2^n$$

En el siglo XIV, los chinos ya conocían los coeficientes binomiales y es probable que conocieran una fórmula general para ${}_nC_m$.

Los hebreos en el siglo XIV conocían la manera de calcular el número de permutaciones de n objetos tomando m en cada ocasión y también conocían las formulas:

$${}_nC_m = \frac{{}_nP_m}{m!}$$

y

$${}_nC_m = {}_nC_{n-m}$$

6.1.4 Primeros problemas

Entre los primeros problemas relacionados con la probabilidad se pueden mencionar el problema relacionado con el número de posibles resultados de lanzar varios dados y el de la división de apuestas.

Los primeros cálculos acerca del número de posibles resultados al lanzar tres dados están fechados hacia mediados de la Edad Media, esto es, entre los siglos diez y once. Hacia principios del siglo quince se hace alusión al número 56 que es el número de posibles resultados sin contar las repeticiones.

l duque de Toscana fue un jugador empedernido, hacia 1560, observó que al lanzar tres ados el diez sale con mayor frecuencia que el nueve, sin embargo, ambos se pueden btener de seis formas diferentes, así que se preguntaba: ¿por qué pasa esto?

as formas en las que se pueden obtener el nueve y el diez son las siguientes:

nueve	diez
1, 2 y 6	1, 3 y 6
1, 3 y 5	1, 4 y 5
1, 4 y 4	2, 3 y 5
2, 2 y 5	2, 2 y 6
2, 3 y 4	2, 3 y 5
3, 3 y 3	2, 4 y 4

l otro problema es el de la división de apuestas, el cual se puede enunciar de la manera iguiente: dos equipos juegan de manera que quien complete primero 60 puntos ganará 22 ucados, sin embargo, el juego debe suspenderse cuando un equipo ha acumulado 50 untos y el otro 30. ¿Cómo se debe repartir el premio? Paccioli en un libro publicado en 'enecia en el año 1 494 propone de manera errónea que el premio se debe repartir en dos artes proporcionales dependiendo del número de puntos acumulados hasta el momento de uspender el juego, por lo que el premio se debe repartir de manera que al equipo que ha cumulado 50 puntos se le debe dar 5/8 partes del premio y al que lleva 30 puntos se le debe ar 3/8 del premio.

6.2 Precursores

urante los siglos XVI y XVII, en Europa se desarrolla un movimiento intelectual y artístico ıspirado en la Antigüedad clásica, a este movimiento se le conoce como el Renacimiento. ay una revolución del pensamiento en todos los campos del saber, la observación y la xperimentación adquieren mayor importancia, surge la geometría analítica, el cálculo iferencial e integral y la teoría de la probabilidad.

6.2.1 Tartaglia

n el año 1556, en Venecia se publicó un trabajo de Niccolo Tartaglia (1499 -1557), en el ual hay varios problemas que se relacionan con la teoría de la probabilidad.

Tartaglia encontró que al lanzar varios dados el número de resultados distinguibles es el que se muestra en la tabla siguiente:

Número de dados	Número de resultados distinguibles
1	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6
2	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
3	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56
4	1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126
5	1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 = 252
6	1 + 6 + 21 + 56 + 126 + 252 = 462
7	1 + 7 + 28 + 84 + 210 + 462 = 792
8	1 + 8 + 36 + 126 + 376 + 792 = 1287

Lo cual se puede expresar en términos de combinaciones como:

Número de dados	Número de resultados distinguibles
1	${}_0C_0 + {}_1C_1 + {}_2C_2 + {}_3C_3 + {}_4C_4 + {}_5C_5 = {}_6C_5$
2	${}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + {}_5C_4 + {}_6C_5 = {}_7C_5$
3	${}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 + {}_7C_5 = {}_8C_5$
. .	. . . .
k	${}_{k-1}C_0 + {}_kC_1 + {}_{k+1}C_2 + {}_{k+2}C_3 + {}_{k+3}C_4 + {}_{k+4}C_5 = {}_{k+5}C_5$

6.2.2 Cardano

En 1663, se publicó "Liber de ludo aleae", obra póstuma del matemático italiano Girolamo Cardano (1501 - 1576), primer libro que se conoce en el cual se analizan los juegos de azar, aquí hay un razonamiento basado en la equiprobabilidad de las distintas caras del dado para calcular probabilidades.

Encuentra que el número de resultados posibles al lanzar dos dados es 36 y que son 216 cuando se lanzan tres dados. Utilizando eventos equiprobables calcula "proporciones", que son el cociente de dividir el número de casos que le interesan entre el "circuito" o total de casos posibles.

Utiliza la multiplicación para eventos independientes, también hace uso de la idea de regularidad estadística y de la ley de los grandes números al afirmar que si el número de observaciones es pequeño la frecuencia puede desviarse sustancialmente de la "proporción", pero que esta desviación es insignificante cuando el número de observaciones es grande.

Cardano también utiliza la idea de esperanza matemática al usar la noción de juego justo, en el que cada jugador debe pagar de acuerdo a la probabilidad que tenga de ganar.

En 1570 se publicó otro libro de Cardano en el cual aparece sin demostración la igualdad siguiente:

$$ {}_nC_1 + {}_nC_2 + \ldots + {}_nC_n = 2^n - 1 $$

6.2.3 Galileo

Galileo Galilei (1564 - 1642), en su libro "Considerazione circa el giuco dei dadi", publicado por primera vez en Florencia el año de 1718, da la solución más completa al problema del lanzamiento de 3 dados. Encuentra que el número de posibles resultados al lanzar 3 dados es de 216, esto lo encuentra calculando primero los resultados posibles del lanzamiento de dos dados 6 * 6 = 36 y posteriormente hace el cálculo para tres dados 36 * 6 = 216. Así tenemos que resuelve el problema utilizando el principio fundamental del conteo.

Encuentra la forma en que se distribuye la suma de puntos cuando se lanzan tres dados, tal como se muestra a continuación.

Suma de puntos	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	45	16	17	18
Número de resultados posibles	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

De esta manera Galileo resolvió el problema planteado en 1560 por el duque de Toscana (pag. 129), puesto que al lanzar tres dados el diez tiene más posibilidades de ocurrir que el nueve, luego entonces, se justifica que el diez caiga con una frecuencia mayor que el nueve.

También hizo notar que las probabilidades son valederas cuando el número de lanzamientos es grande.

Con la invención del telescopio vinieron las observaciones y con ellas los errores de observación. Galileo fue uno de los primeros que planteó este problema y llegó a la conclusión de que los errores de medición son inevitables, que son aleatorios y que se distribuyen de manera simétrica, que la probabilidad de cometer errores pequeños es mayor que la de errores grandes y que la mayoría de las observaciones son cercanas al valor real.

6.3 Primer escenario

asta la primera mitad del siglo XVII se habían resuelto varios problemas específicos de robabilidad aplicables a diferentes campos de la actividad humana, pero no había métodos enerales para resolver problemas de la teoría de la probabilidad. Fue en la segunda mitad e este siglo cuando varios prominentes científicos se abocaron al estudio de esta disciplina, ntre ellos podemos citar a Pascal, Fermat y Huygens, quienes construyeron las nociones ásicas de la teoría de la probabilidad, desarrollaron nuevos métodos en la solución de roblemas, aplicaron las reglas de la adición y de la multiplicación de la probabilidad, abajaron las nociones de dependencia e independencia e introdujeron el concepto de speranza matemática.

6.3.1 El caballero de Méré

ntoine Gombaud de Méré (1607 - 1684), conocido como el caballero de Méré fue filósofo, ombre de letras e integrante de la corte del rey Luis XIV de Francia. Este conocido jugador fluyó para que Pascal incluyera problemas de probabilidad en la correspondencia que ostenía con Fermat en el año 1654, en la cual analizaban problemas de matemáticas.

l caballero de Méré era un jugador empedernido que gustaba de inventar juegos, tal como s que se mencionan a continuación.

e Méré apostaba a que si lanzaba un dado cuatro veces al menos caería un seis.

i analizamos este juego veremos que la probabilidad de ganar del caballero de Méré es la guiente:

$$
\begin{aligned}
\text{(al menos un seis)} &= 1 - P(\text{ningún seis}) \\
&= 1 - (5/6)^4 \\
&= 1 - 625/1296 \\
&= 671/1296 \\
&= 0.5177
\end{aligned}
$$

odemos notar que la probabilidad de ganar es mayor que 0.5, por lo que las posibilidades e ganar son mayores que las de perder, sin embargo, sus contrincantes se dieron cuenta de sto y decidieron no participar más en este juego, entonces de Mére encontró otro juego arecido al anterior, pero en el cual la probabilidad de ganar es menor que 0.5, este consiste n lanzar dos dados 24 veces y se puede pensar que al menos una vez caerá un par de ncos, puesto que se guardan las proporciones con el problema anterior, ya que 6 es a 4 omo 36 es a 24, sin embargo, las posibilidades de perder son mayores que las de ganar, tal omo se muestra a continuación.

$$
\begin{aligned}
\text{(al menos dos cincos)} &= 1 - P(\text{ninguna pareja de cincos}) \\
&= 1 - (35/36)^{24} \\
&= 0.491
\end{aligned}
$$

Este fue uno de los problemas que el caballero de Méré planteó a Pascal, el otro es el de la división de apuestas.

El problema de la división de apuestas se puede enunciar de la manera siguiente: un jugador A y un jugador B deciden jugar una partida en la que ambos tienen las mismas posibilidades de ganar en cada ocasión, cada uno apuesta 32 monedas, y el ganador será aquel que gane en 5 ocasiones. Si la partida se suspende cuando el jugador A ha ganado en 4 ocasiones y el jugador B ha ganado en 3 ocasiones, ¿cómo se debe repartir la cantidad apostada?

El problema de la división de apuestas ya era conocido hacia el fin del siglo XV (pág. 129), sin embargo, el mérito del caballero de Méré fue haber influido en Pascal para que éste lo incluyera en su correspondencia con Fermat.

6.3.2 Pascal y Fermat

En el año de 1654 los matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) sostuvieron un intercambio epistolar en el cual analizan los juegos de azar planteados por el caballero de Méré, en esta correspondencia se formula la teoría de la probabilidad y se sistematizan las principales propiedades de los números combinatorios. Esta correspondencia se publicó en Toulouse en 1679.

En esta correspondencia cada uno de los protagonistas resuelve el problema de la división de apuestas analizando las posibilidades que tiene cada jugador para ganar el juego y de manera diferente cada uno llega a la misma solución.

Pascal afirma que si se realizara una vez más el juego y gana A, entonces A habría ganado en 5 ocasiones y por lo tanto recibiría las 64 monedas, y si pierde A entonces cada jugador habría ganado en 4 ocasiones, por lo que le corresponderían 32 monedas. Como cada jugador tiene las mismas posibilidades de ganar, entonces las 32 monedas de B deben repartirse en dos parte iguales, de manera que, en el juego inconcluso le corresponden 48 monedas a A y 16 monedas a B.

Fermat considera que para que la partida concluya se necesita realizar a lo más dos veces el juego, por lo que se tendrían 4 posibilidades, en 3 de las cuales las monedas serían para A y en una para B, por lo que las monedas se deber repartir en una proporción de 3 a 1, o sea 48 monedas para A y 16 para B. A continuación se dan las 4 posibilidades encontradas por Fermat en donde a denota que el juego lo gana A y b que el juego lo gana B.

$$aa \quad ab \quad ba \quad bb$$

Ambos analizan otros casos, como: A ha ganado en 4 ocasiones y B en 2, A ha ganado en 4 ocasiones y B en 1, también analizan el problema para el caso de 3 jugadores.

ɛn 1665 se publicó "traité du triangle arithmetique", en el que Pascal hace una exposición de as propiedades y relaciones entre los términos de progresiones y los coeficientes inomiales, y da la prueba.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1 . . .
1	2	3	4	5	6	7	8	9 . . .	
1	3	6	10	15	21	28	36 . . .		
1	4	10	20	35	56	84 . . .			
1	5	15	35	70	126 . . .				
1	6	21	56	126 . . .					
1	7	28	84 . . .						
1	8	36 . . .							
1	9 . . .								
1 . . .									

lgunas propiedades de los elementos de este triángulo son:

$(r)_k$ = número de la columna r y el renglón k

$(r)_k = (r)_{k-1} + (r-1)_k$

$(r)_k = {}_{r+k-2}C_{k-1}$

$(r)_k = (k)_r$ hay simetría

$(r)_1 + (r)_2 + \ldots + (r)_k = (k)_1 + (k)_2 + \ldots + (k)_r$

$(r)_k = {}_{k+r-2}C_{r-1} = {}_{k+r-2}C_{k-1}$

${}_{k+r-2}C_{k-1} = {}_{k+r-3}C_{k-2} + {}_{k+r-3}C_{k-1}$

ascal da la solución al problema de la división de apuestas en el triángulo. Así por ejemplo a A le falta ganar en tres ocasiones y a B le faltan 4, entonces se escoge la diagonal con 7 ementos, esto es, 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, luego se le asocian a A las posibilidades 1, 6, 15 y 0, y 15, 6 y 1 a B, de manera que a A se le asignan 1 + 6 + 15 + 20 = 42 posibilidades de anar, en tanto que a B se le asignan 15 + 6 + 1 = 22 posibilidades. Como el total de osibilidades son 42 + 22 = 64, entonces a A le corresponden 42/64 del premio, en tanto que B le corresponde 22/64 del premio.

6.3.3 Huygens

n 1655, el físico, geómetra y astrónomo holandés Christian Huygens (1629 -1695) visitó rancia, estando en París se interesó por las investigaciones que sobre juegos de azar ealizaban Pascal y Fermat. Huygens conoció los problemas pero no la solución de éstos, uesto que ésta se publicó hasta 1679. Hacia fines de ese año regresó a su país, en donde e puso a trabajar en estos problemas y en 1657, publicó su libro "Tractatus de ratiociniis in do aleae", en el cual plantea de manera sistemática los conceptos aprendidos de robabilidad y añade algunos resultados obtenidos por sí mismo. A él se debe el concepto e esperanza matemática.

l libro tiene 14 proposiciones. En la primera afirma que si un jugador tiene iguales portunidades de ganar una suma a y una suma b, su esperanza es $(a + b) / 2$; en la segunda firma que si un jugador tiene igual oportunidad de ganar a, b o c, su esperanza es $(a+b+c)/3$, en la tercera proposición afirma que si un jugador tiene p oportunidades de ganar a y q portunidades de ganar b, su esperanza es $(p\,a + q\,b) / (p + q)$.

as proposiciones 4, 5, 6 y 7 las dedica a discutir el problema de la división de apuestas para os jugadores, el método que utiliza es parecido al de Pascal. Las proposiciones 8 y 9 mbién las dedica al problema de la división de apuestas, pero ahora para 3 jugadores. Las roposiciones restantes las utiliza para analizar juegos con dados.

l final del libro plantea cinco problemas al lector, la solución de éstos la publicó 8 años más rde. Los problemas son los siguientes:

A y B juegan con dos dados, A gana si obtiene 6 y B gana si obtiene 7. El primero en tirar es A, posteriormente tira B dos veces, luego tira A dos veces y así hasta que alguno de los dos gane. Demuestre que las posibilidades de A y B son 10 355 a 12 276.

Tres jugadores A, B y C tienen 8 bolas negras y 4 blancas en un cajón, A saca la primera bola, luego B saca una y posteriormente saca una C, gana el primero que saque bola blanca, ¿cuál es la proporción para cada jugador?

Se tienen 40 cartas, 10 de un color, 10 de otro, 10 de otro y 10 de otro. A gana si saca una de cada color. Aquí las posibilidades de A a B son 1000 a 8139.

Se tienen 8 bolas negras y 4 blancas. A juega con B y apuesta que si saca 7 bolas, 3 de ellas serán blancas. Compare las posibilidades de A y B.

A y B toman 12 fichas cada uno y juegan con tres dados con la condición de que si cae 11 A da una ficha a B y si cae 14 B da una ficha a A. Gana quien se quede con todas las fichas. Mostrar que las posibilidades de que A gane a B son:
244 140 625 a 282 429 536 481.

tratado de Huygens fue la mejor referencia para estudiar probabilidad hasta que surgieron s trabajos de Jacques Bernoulli, Montmort y De Moivre.

sí tenemos que en el siglo XVII se resolvieron una serie de problemas de teoría de la obabilidad, se descubrieron importantes conceptos como la regla de la suma, la de la ultiplicación y la esperanza matemática, y empezaron las aplicaciones de esta ciencia a la sica, la estadística, la astronomía, la construcción de tablas de mortalidad, de rentas talicias, y se empezaron a recolectar datos de manera sistemática con el fin de conocer el esente para poder predecir hechos futuros.

6.4 Formación de la teoría de la probabilidad

6.4.1 Jacques Bernoulli

En 1713 se publicó "Ars conjectandi", obra póstuma del matemático suizo Jacques Bernoulli (1654 - 1705), en la cual demuestra la ley de los grandes números o teorema de Bernoulli, primera base teórica de la teoría de la probabilidad. "Podemos afirmar que gracias a las contribuciones de Bernoulli la teoría de la probabilidad se elevó al nivel de ciencia y empezó una nueva era en su desarrollo"[4].

Ars conjectandi se divide en cuatro partes: en la primera Bernoulli retoma el trabajo de Huygens, "Ratiociniis in ludo aleae", analiza los problemas propuestos por este autor, les da su enfoque personal y los resuelve de manera general obteniendo nuevas fórmulas; la segunda parte la dedica a la teoría de permutaciones y combinaciones; en la tercera parte analiza varios problemas relacionados con juegos de azar, y en la última parte, que por cierto quedó inconclusa, prueba el primer teorema límite de la probabilidad también conocido como la ley débil de los grandes números o teorema de Bernoulli.

En la primera parte analiza el trabajo de Huygens, hace varios comentarios generales, aplica la regla de la adición para eventos disjuntos y resuelve el problema de la división de apuestas, para lo cual Bernoulli da una tabla en la que proporciona las oportunidades para cada uno de los jugadores dependiendo del número de puntos que necesite para ganar.

Bernoulli llega al resultado que podemos expresar de la manera siguiente: si se lanzan n dados, el número de formas en que se pueden obtener m puntos es igual al coeficiente de X^m en la expansión que se da a continuación.

$$(X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6)^n$$

En su comentario a la proposición 12 de Huyggens, Bernoulli obtiene como resultado lo que actualmente se conoce como la distribución binomial, en la cual se establece que: si se realizan n ensayos independientes, donde p es la probabilidad de éxito y q la probabilidad de fracaso en cada ensayo, entonces, la probabilidad de que ocurran x éxitos se puede expresar de la manera siguiente:

$$P(X = x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} \qquad \text{donde } q = 1 - p$$

La segunda parte de Ars conjectandi está dedicada a las permutaciones y las combinaciones, de manera general encuentra el número de permutaciones de un conjunto con n elementos tomando r a la vez, cuando se repiten elementos y cuando no se repiten en una misma permutación. De igual manera encuentra el número de combinaciones de n elementos tomando r a la vez.

4 Maistrov, pág. 56

etoma el problema de la división de apuestas, el cual resuelve de dos formas, una de ellas s el siguiente: Supóngase que A requiere de m puntos y b n puntos para ganar, entonces el ego se decidirá en m+n-1 tiradas, como A y B tienen la misma oportunidad de ganar en ada tirada, entonces se tienen m+n-1 casos posibles. Así que el número de casos ıvorables para A es:

$$+ \mu + \mu(\mu + 1)/2 + \mu(\mu + 1)(\mu + 2)/3 + \ldots + \mu(\mu + 1) \ldots (\mu - n - 2)/(n - 1)!$$

onde $\mu = m + n - 1$

a tercera parte de Ars conjectandi consiste de 24 problemas con sus respectivas oluciones. A continuación se presentan tres de ellos[5]:

Una persona pone una bola blanca y una negra en una urna y ofrece un bono a tres jugadores, bajo la condición de que la primera persona que saque la bola blanca obtendrá el bono, pero si ninguna saca bola blanca entonces se retira el bono. A saca primero, luego B y finalmente C. ¿Cuáles son las posibilidades para cada jugador?

A apuesta a B que si de una baraja con 40 cartas extrae 4 a azar, en ellas habrá una de cada palo. ¿Cuáles son las posibilidades para cada jugador?

2 Un dado de 6 caras se va a lanzar 6 veces, una persona quiere que los resultados sean: 1 en el primer lanzamiento, 2 en el segundo y así sucesivamente. ¿Cuáles son sus posibilidades?

n las tres primeras partes de Ars conjectandi se abordan una serie de problemas de robabilidad, algunos de los cuales ya habían sido tratados antes, pero Bernoulli los resuelve su manera, llegando a resultados generales. La combinatoria por primera vez se trata de anera sistemática y se obtienen nuevos resultados. De manera que las tres partes son una ontribución al desarrollo de la matemática en general y de la probabilidad en particular, sin mbargo, es la cuarta parte la que constituye el comienzo de una nueva era en la historia de probabilidad, puesto que ésta contiene la prueba del teorema de Bernoulli o ley de los randes números en su forma simple.

espués de dar 5 lemas procede a demostrar la ley de los grandes números, la cual, ilizando la concepción actual se puede expresar de la manera siguiente:

i la probabilidad de ocurrencia de un evento A en una sucesión de n ensayos dependientes es constante e igual a p, entonces se puede afirmar con una probabilidad ercana a uno que para un número suficientemente grande de ensayos en los cuales ocurre veces el evento A, la razón m/n es muy cercana a p.

Maistrov, pág. 66

o anterior se puede expresar de la manera siguiente:

$$P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1 - \eta$$

)onde:

es cualquier número positivo

| es un número positivo arbitrariamente pequeño

:ste teorema es una inmensa contribución a la teoría de la probabilidad ya que constituye na herramienta muy importante en la aplicación de esta ciencia

6.4.2 Primera mitad del siglo XVIII

a teoría de la probabilidad se enriqueció en la primera mitad del siglo XVIII con los trabajos e Montmort y De Moivre.

'ierre Raymond de Montmort (1678 -1719) fue un matemático francés, estudioso de la losofía y de la religión. En 1708, en París publicó su trabajo sobre teoría de la probabilidad, :ssai d'analize sur les jeux de hazard" y cinco años más tarde publicó la segunda edición, nás completa que la primera. La segunda edición se divide en cuatro partes, la primera la edica al estudio de la combinatoria; en la segunda analiza varios juegos de cartas de la poca; en la tercera trata diversos juegos en los cuales se utilizan dados, y en la cuarta naliza varios problemas, entre ellos los planteados por Huygens.

.naliza el triángulo de Pascal, explica sus propiedades, obtiene los coeficientes binomiales, y l considerar el lanzamiento de n dados encuentra que el número de formas diferentes en ue se pueden obtener a unos, b doses, c treses, d cuatros, e cincos y f seises es:

$$\frac{n!}{a!\,b!\,c!\,d!\,e!\,f!}$$

n 1718, se publicó "The Doctrine of chances", escrita por el matemático franco inglés braham De Moivre (1667-1754). En esta obra De Moivre analiza 74 problemas, la mayoría e ellos son de juegos de azar, pero también incluye problemas sobre seguros y nualidades. Al resolver los problemas va haciendo nuevas contribuciones a la teoría de la robabilidad. Deduce la aproximación de la distribución binomial por la curva normal, la que osteriormente profundiza Laplace y que se le conoce como el teorema de De Moivre - apalce. En 1733 De Moivre da a conocer por primera vez la fórmula de la distribución ormal.

e Moivre analiza el problema de la duración del juego, el cual se puede plantear en los ɪrminos siguientes: A y B son dos jugadores, la probabilidad de que A gane en un juego es y la probabilidad de que B gane en un juego es $q = 1 - p$. al iniciar la partida A tiene *a* ɪonedas y B tiene *b* monedas. El perdedor de cada juego da una moneda a su contrincante, cuál es la probabilidad de que A gane a B todo su capital?

urante la primera mitad del siglo XVIII gobernaba Rusia Pedro el Grande, quien después de ajar por Europa regresó a su país a imponer las costumbres occidentales a sus súbditos. n 1725, Daniel y Nicolás Bernoulli, dos matemáticos suizos que enseñaban en la academia e San Petersburgo propusieron el siguiente problema. Si se lanza una moneda y cae cruz aniel paga a Nicolás una corona, si cae primero un sello y posteriormente una cruz Daniel aga a Nicolás dos coronas, si caen primero dos sellos y luego una cruz Daniel paga a icolás 4 coronas, si caen primero tres sellos y luego una cruz Daniel paga a Nicolás ocho oronas, y así sucesivamente. ¿Cuánto tiene que pagar Nicolás para que el juego sea quitativo? A este problema se le conoce como la paradoja de San Petersburgo.

 continuación encontramos el valor esperado de este juego.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 2^0(1/2) + 2^1(1/2)^2 + 2^2(1/2)^3 + 2^3(1/2)^4 + \ldots \\
&= 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots
\end{aligned}
$$

odemos ver que el valor esperado de este juego es infinito, lo cual va en contra del sentido ɔmún, por lo que este problema causó mucha polémica.

6.4.3 Thomas Simpson

homas Simpson (1710 - 1761) fue el primero en introducir las funciones continuas en la oría de la probabilidad. En 1740 publicó " The nature and laws of chance" y en 1742 ublicó "The doctrine of annuities and revertions". Ambos dedicados a la teoría de la robabilidad.

n su primer libro analiza 30 problemas de juegos de azar, sus soluciones son parecidas a s de De Moivre. Simpson estudia las frecuencias de los errores de medición y al igual que alileo encuentra que los errores menores se producen con mayor frecuencia en tanto que s errores mayores se producen con menor frecuencia y también encuentra que los errores ɔn aleatorios y que se distribuyen de manera simétrica alrededor de la media aritmética. Da ɪa representación gráfica de la distribución de los errores.

6.4.4 Thomas Bayes

En 1763 se publicó "An essay towards solving a problem in the doctrine of chances", del reverendo Thomas Bayes. Esta obra empieza con la formulación de siete definiciones en las que se dan conceptos de manera muy parecida a como se manejan actualmente, a partir de éstos demuestra una serie de proposiciones y finalmente obtiene probabilidades localizadas entre límites que él construye.

A continuación se dan las definiciones propuestas por Bayes.

Definición 1. Varios eventos son inconsistentes si la ocurrencia de uno de ellos asegura la no ocurrencia de los restantes.

Definición 2. Dos eventos son contrarios cuando puede ocurrir alguno de ellos pero no ambos.

Definición 3. Un evento es un fracaso cuando este no puede ocurrir o cuando ocurre su contrario.

Definición 4. Un evento es determinado cuando éste ocurre o no ocurre.

Definición 5. La probabilidad de cualquier evento es la razón entre el número esperado de posibilidades del evento y el valor esperado de ocurrencias.

Definición 7. Los eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no aumenta ni disminuye la probabilidad de que ocurran los restantes.

Posteriormente demuestra una serie de proposiciones entre las que podemos citar a la regla de la adición y la de la multiplicación de probabilidades.

Regla de la adición. Cuando varios eventos son inconsistentes, la probabilidad de la ocurrencia de alguno de ellos es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

Regla de la multiplicación. La probabilidad de la ocurrencia de dos eventos A y B es igual a la probabilidad de que ocurra el evento A por la probabilidad de que ocurra el evento B dado que ya ocurrió el evento A. Utilizando notación moderna tenemos:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B / A)$$

Pero el resultado más importante encontrado por Bayes es el que se da a continuación.

Sea p la probabilidad de que ocurra un evento A en un ensayo. Si en n ensayos independientes el evento A ocurre m veces y si suponemos que la distribución de p es uniforme en el intervalo (0,1), entonces:

$$P(a \leq p \leq b / B) = \frac{\int_a^b x^m (1-x)^{n-m} dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^{n-m}}$$

onde B indica que el evento A ocurre m veces

l resultado anterior es el caso continuo del teorema que se da a continuación y que enunció e manera formal Laplace.

eorema de Bayes. Si E_1, E_2, E_3, . . ., E_n es una colección de eventos mutuamente xcluyentes cuya unión es el espacio muestral con $P(E_i) \neq 0$ para i = 1, 2, . . ., n y si F es un vento, tal que $P(F) \neq 0$ entonces:

$$P(E_k / F) = \frac{P(F / E_k) P(E_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(F / E_k) P(E_k)}$$

6.4.5 Euler

acia la mitad del siglo XVIII la teoría de la probabilidad se empezó a aplicar a diferentes reas, tales como la demografía, los seguros, los errores de observación, la organización de terías, entre otros. Varios matemáticos de dedicaron a su estudio, entre ellos podemos tar a Leonhard Euler (1707 -1783).

esde principios del siglo XVIII se popularizó en Europa el juego de lotería como un medio ara obtener recursos, fue así como el rey de Prusia Frederick II escribió a Euler para que ste le propusiera variantes para este juego. Euler escribió varios trabajos sobre obabilidad, algunos de los cuales fueron publicados cuando aún vivía y otros se publicaron ando ya había muerto. Trabajaba de manera inductiva, analizando casos particulares los ales iba complicando hasta obtener resultados generales. Estudió el crecimiento de una oblación y encontró que su crecimiento es geométrico, estudió también la mortalidad y onstruyó una tabla de mortalidad, advirtiendo que esta vale en el lugar en que fue sacada, ero que los datos no pueden generalizarse a cualquier parte del mundo. Euler descubrió la ase de la demografía, e hizo importantes aportaciones a la teoría actuarial.

gunos problemas propuestos por Euler son:

Se tienen n boletos numerados de los cuales se van a seleccionar 2 de manera aleatoria, encontrar la probabilidad de que éstos sean números consecutivos.

. Si se sacan tres boletos al azar, encontrar la probabilidad de que salga:
) una secuencia de tres números;
) una secuencia de dos números.

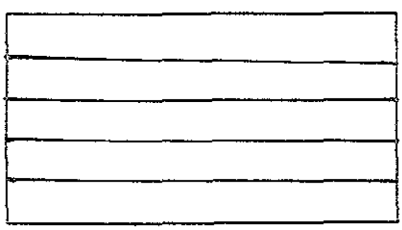
. Si se tienen 90 boletos numerados y se sacan 5, encontrar la probabilidad de que los 5 sean números consecutivos.

. Hay dos jugadores, cada uno de ellos tiene n boletos numerados, cada jugador saca un boleto, si los números sacados son iguales gana el primer jugador, en caso contrario gana el segundo. Encontrar la probabilidad de ganar para cada jugador.

6.4.6 El conde de Buffon

:n 1777, George Louis Leclerc conde de Buffon (1707 -1788) publicó "Essai d'aritmetique ıorale", en el cual da el primer ejemplo de probabilidades geométricas y hace un estudio obre los juegos de lotería pública.

Ina aguja de longitud r se deja caer en un entarimado en el que la distancia que hay entre as ranuras es a. Encontrar la probabilidad de que la aguja toque alguna de las ranuras del ntarimado.



:espuesta: $4r/\pi a$

n el caso en que también haya rectas paralelas verticales y que la distancia entre ellas sea e b, entonces el resultado es:

$$\frac{4\,r\,(a + b) - 4\,r^2}{\pi\, a\, b}$$

6.4.7 Laplace

Pierre Simon de Laplace (1749 -1827) fue un connotado científico francés que siempre estuvo ligado a la nobleza, lo que le acarreó muchos problemas durante la revolución francesa. Introdujo el criterio subjetivo de igualdad de posibilidades, estableciendo que dos eventos tienen iguales probabilidades si no hay razón para suponer que uno de ellos ocurra más que el otro.

En 1812, se publicó "Théorie analytique des probabilités", libro en el cual Laplace presenta todos sus resultados básicos sobre teoría de la probabilidad, trata con profundidad los conceptos trabajados por Pascal y Fermat, mejora los métodos de prueba, da los fundamentos de varias regularidades estadísticas, estudia las funciones generatrices, desarrolla el método de mínimos cuadrados y aplica la teoría de la probabilidad a la estimación de errores de observación.

El libro se divide en tres partes: una amplia introducción, que en la tercera edición consta de 142 páginas en la cual habla sobre diversos problemas de probabilidad; Du calcul des Fonctions Generatrices, esta parte la dedica al estudio de las funciones generatrices y a la aplicación del cálculo diferencial e integral a diversos problemas de probabilidad, y Théorie générale des probabilites, en la cual analiza el problema de la división de apuestas, el problema de San Petersburgo, el teorema de De Moivre, estudia los errores de medición, desarrolla el método de mínimos cuadrados y aplica la teoría de la probabilidad a la estimación de errores de medición.

Laplace formaliza la definición clásica de la probabilidad, la cual queda en los términos siguientes: la probabilidad de que ocurra un evento A es igual a la razón del número de posibles resultados de un ensayo los cuales son favorables al evento A al número de todos los posibles resultados del ensayo, suponiendo que todos los posibles resultados son equiprobables.

Laplace aplica la probabilidad a la demografía, expresa sus puntos de vista a estudios de la composición de la población, discute métodos de conteo indirecto de la población y estima la precisión de tales conteos; describe métodos de construcción de tablas de mortalidad e introduce el concepto de vida media, calcula la medida de las poblaciones a partir de las tablas de mortalidad y con base en los nacimientos registrados en varios países europeos concluye que el número de nacimientos masculinos es mayor que el de nacimientos femeninos y encuentra que la proporción es de 22 a 21.

Entre las aportaciones de Laplace también se puede mencionar una nueva prueba para el teorema de Bernoulli.

En 1810, Laplace dió a conocer su resultado más importante en la teoría de la probabilidad, éste se conoce como el teorema de De Moivre - Laplace. La esencia de este teorema es que la distribución binomial bajo una adecuada normalización y con un incremento ilimitado de ensayos se aproxima a la distribución normal.

Teorema de De Moivre - Laplace. Sea p $(0 < p < 1)$ la probabilidad de ocurrencia de un evento E en n ensayos independientes y m el número de ensayos en los cuales ocurre un evento E, entonces, para n suficientemente grande, la probabilidad de la desigualdad

$$z_1 < \frac{m - np}{(npq)^{1/2}} < z_2 \qquad (q = 1 - p)$$

lifiere una cantidad pequeña de

$$(2\pi)\int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\,dz$$

.aplace encuentra la solución al problema de la aguja de Bufon y enuncia de manera formal el teorema de Bayes.

.aplace fue un prominente científico que amplió las aplicaciones de la teoría de la robabilidad. Sus contribuciones a esta teoría son invaluables.

6.4.8 Distribución de errores aleatorios

De manera independiente y casi simultáneamente dos matemáticos obtuvieron la ley para la listribución de errores aleatorios, uno de ellos fue el matemático norteamericano Robert Adrian, quien publicó sus resultados en 1808, y el otro fue el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), quien publicó su derivación de la ley normal de los errores aleatorios en 1809.

Aunque las contribuciones de Gauss a la teoría de las probabilidades están relacionadas con aplicaciones, sus aportaciones no fueron sólo en este sentido, ya que sus trabajos han tenido un impacto significativo en el desarrollo de la teoría de la probabilidad.

En 1845, Gauss escribió "aplicaciones de la teoría de la probabilidad para la determinación de balances de fondos para viudas".

6.4.9 Poisson

Simeon Denis Poisson (1781 -1841) realizó varios trabajos en teoría de las probabilidad, éstos se incluyen en el libro publicado en 1837, "Reserches sur la probabilité de jugements en matiere criminelle et en matierre civille, precedées des regles générales du calcul des probablilités". En este libro se hace una reseña de los resultados previos de teoría de la probabilidad, poniendo especial atención en los trabajos de Laplace y de Condorcet, emuestra la aproximación de la distribución binomial por la poisson y generaliza la ley de los randes números.

vestigando el teorema de Bernoulli, Poisson llegó a la generalización de la ley de los randes números: si se realizan n ensayos independientes, resultando la ocurrencia o no currencia de un evento A, y la probabilidad de ocurrencia de los eventos no es la misma en ada ensayo, entonces, con una probabilidad tan cerca como se quiera a la unidad se puede firmar que la frecuencia m/n de la ocurrencia del evento A se va a desviar arbitrariamente erca de la media aritmética $\bar{p}$ de las probabilidades de ocurrencia de los eventos en los nsayos individuales. En notación moderna tenemos.

$$\lim_{n \to \infty} P(|m/n - \bar{p}| < \varepsilon) = 1$$

onde ε es un número positivo cualquiera

i la probabilidad de ocurrencia de los eventos permanece constante de ensayo en ensayo, ntonces $\bar{p} = p$ y el teorema de Poisson se reduce al teorema de Bernoulli.

oisson encuentra que cuando se tiene una n fija y p se aleja de 1/2, la aproximación normal la binomial pierde exactitud y encuentra que cuando $n \to \infty$ y $p \to 0$, la distribución binomial se uede aproximar mediante la distribución que lleva su nombre:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{donde} \quad \lambda = np$$

Bortkiewics (1868 1931) encontró que esta distribución se puede aplicar a eventos raros, les como: los muertos por patada de caballos en el ejército prusiano, nacimientos de llizos, etc.

oisson realizó trabajos en los que se aplica la teoría de la probabilidad en problemas de gislación, jurisprudencia, política y economía, pero estos suscitaron controversia entre los atemáticos de la época, lo que originó que la teoría de la probabilidad entrara en un npasse hacia la mitad del siglo XIX.

6.5 La escuela rusa

Durante la segunda mitad del siglo XIX vino un período de revisión y perfeccionamiento llevada a cabo principalmente por la escuela de San Petersburgo encabezada por Chebyshev y continuada por Markov y Lyapunov. Estos matemáticos ponen especial atención a los teoremas límite como son: el teorema del límite central y la ley débil de los grandes números.

6.5.1 Bunyakovskii y Ostrogradskii

Las primeras investigaciones sobre teoría de la probabilidad llevadas a cabo en San Petersburgo fueron realizadas por Euler y Daniel Bernoulli a principios del siglo XVIII, sin embargo, fue hasta la tercera década del siglo XIX cuando se empezó a desarrollar esta parte de la matemática en Rusia.

En 1837 se dio el primer curso de teoría de la probabilidad en la Universidad de San Petersburgo, durante la década 1850 - 60 los cursos fueron dados por el matemático ruso V. Y. Bunyakovskii (1804 - 1889), quien escribió varios artículos sobre esta materia.

En 1846 se publicó "Fundamentos de la teoría matemática de la probabilidad", escrito por Bunyakovskii. Este es el primer libro ruso que contiene una exposición detallada sobre la teoría de la probabilidad.

M. V. Ostrogradskii (1801 - 1862) también publicó varios artículos sobre teoría de la probabilidad y al igual que Bunyakovski fue un gran difusor de esta materia.

Los trabajos creativos de Ostrogradskii y Bunyakovskii fomentaron la educación matemática y el aprendizaje en Rusia. Su contribución estimuló el interés en matemáticas y en teoría de la probabilidad en particular, entre la joven generación. Ellos prepararon el camino para el establecimiento de la escuela de San Petersburgo"[6]

6.5.2 Chebyshev

El desarrollo de la teoría de la probabilidad en Rusia durante la segunda mitad del siglo XIX está grandemente influenciada por Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821 - 1894), quien en 1860 sustituyó a Bunyakovskii en la enseñanza de la probabilidad en la Universidad de San Petersburgo. Chebyshev es autor de la desigualdad que lleva su nombre e ideó el método de momentos para demostrar el teorema límite para la suma de variables aleatorias independientes.

Maistrov, pág. 8

;hebyshev escribió cuatro artículos en los cuales aborda los temas básicos de la robabilidad: da la definición clásica de la probabilidad, la regla de la adición, la regla de la nultiplicación, el teorema de Bayes, y pone especial atención a la ley débil de los grandes úmeros y al teorema del límite central.

:n 1866 presentó su trabajo " los valores medios", en el cual prueba lo que actualmente se onoce como la desigualdad de Chebyshev. Esta desigualdad se puede escribir en términos nodernos de la manera siguiente:

)esigualdad de Chebyshev. Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. :ntonces, para cualquier numero real $\varepsilon > 0$ se tiene que:

$$P(|X-\mu| \leq \varepsilon) \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

;omo corolario a esta desigualdad se tiene el teorema de Chebyshev para la ley de los randes números, el cual se da a continuación:

'eorema de Chebyshev. Si la esperanza de las variables aleatorias X_1, X_2, X_3, . . . y sus uadrados X_1^2, X_2^2, X_3^2,. . . , están acotados, con probabilidad cercana a 1 se puede afirmar ue a medida que n aumenta, la media de n variables se aproxima a la media de sus speranzas.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|\leq\varepsilon\right]=1$$

ara cualquier número real positivo ε

i en una serie de ensayos de Bernoulli, definimos a $X_i = 1$ cuando el resultado del i-ésimo nsayo es éxito, y $X_i = 0$ cuando el i-ésimo ensayo es fracaso, entonces se tiene que $E(X_i)$ = , por lo tanto el teorema de Poisson, es un caso particular del teorema de Chebyshev para ı ley de los grandes números.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\overline{p}\right|\leq\varepsilon\right)=1$$

ara cualquier número real $\varepsilon > 0$

n 1887, Chebyshev publicó su trabajo " dos teoremas relativos a la probabilidad", en el cual borda la ley débil de los grandes números y el teorema límite para la suma de variables ıdependientes. En este artículo construye el método de momentos para la teoría de la robabilidad.

:hebyshev establece que bajo ciertas condiciones, la suma de un número grande de ariables aleatorias independientes se aproxima a una distribución normal a medida que se icrementa el número de sumandos.

6.5.3 Markov

ndrey Andreyevich Markov (1856 - 1922) fue el discípulo más cercano a Chebyshev y el iejor difusor de la teoría de la probabilidad. Markov inició su carrera pedagógica como sistente de profesor en 1880 en la Universidad de San Petersburgo y en 1883 reemplazó a :hebyshev en la impartición de esta materia. Sus principales trabajos se relacionan con el eorema límite para la suma de variables independientes, así como para variables ependientes, en particular aquellas que se conectan en cadenas.

l problema del teorema límite para la suma de variables aleatorias independientes consiste n establecer las condiciones bajo las cuales es válida la relación siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{S_n \le E(S_n)+t[V(S_n)]^{1/2}\right\}=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{t}e^{-x^2/2}dx$$

onde:

$_n$ = $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$

(S_n) = $E\{[S_n - E(S_n)]^2\}$ es la varianza de la variable aleatoria S_n

n 1898, Markov presentó su primera prueba a este teorema límite, utilizando las mismas ıposiciones hechas por Chebyshev, la principal es la existencia de momentos finitos de ›dos los ordenes.

larkov se interesó por la aplicación de la ley de los grandes números y del teorema límite de suma de variables aleatorias independientes, así como por las variables dependientes que ›rman cadenas. En 1912 probó la aplicabilidad del teorema límite para la suma de variables ıe forman una cadena homogénea.

n 1913 se publicó el libro "El cálculo de probabilidades", en el cual Markov incluye algunas eas y resultados nuevos así como problemas de aplicación.

l primer capítulo inicia con la definición clásica de la probabilidad, luego desarrolla los eoremas básicos, tales como la ley de la adición y la de la multiplicación de la probabilidad; ı el segundo obtiene la fórmula de Bernoulli (la binomial) y hace resaltar la importancia de sta; el tercer capítulo lo dedica a la ley de los grandes números y prueba la desigualdad de hebyshev; los dos últimos capítulos los dedica al problema de mínimos cuadrados y a roblemas de seguros. "Este memorable libro combina simplicidad y claridad de exposición ›n un número importante de contribuciones a la teoría de la probabilidad"[7].

Maistrov, pág. 220

6.5.4 Lyapunov

In 1900 y 1901 se publicaron dos artículos de Lyapunov (1587 - 1918): "Un teorema en el álculo de probabilidades" y "Una nueva forma del teorema del límite de probabilidades". En stos artículos prueba el teorema límite para la suma de variables aleatorias independientes tilizando restricciones más débiles que las usadas por Markov, no considera necesaria la xistencia de momentos de todos los ordenes y utiliza el método de la función característica.

a función característica de una variable aleatoria X es la esperanza matemática de la ariable e^{itx}, o sea:

$$\phi_X(t) = E\left(e^{itx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx$$

l método de función característica es más general que el método de momentos. La función aracterística existe para cualquier variable y determina completamente los momentos de la istribución.

. la formulación de Lyapunov al teorema límite de la suma de variables aleatorias ıdependientes se le conoce como el teorema del límite central, el cual puede ser enunciado e la manera siguiente:

'eorema del límite central. Sean X_1, X_2, X_3, . . ., variables aleatorias independientes e léntícamente distribuidas con media μ y varianza finita σ^2, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

'onde: $-\infty < x < \infty$

n 1922, Linderberg probó la forma general de este teorema, que es una extensión del ›orema de De Moivre - Laplace.

6.5.5 Leyes de los grandes números

n 1928, Khintchine mostró que si las variables X_1, X_2,. . . no solamente son independientes, no también idénticamente distribuidas, entonces la existencia de la esperanza $E(X_k)$ es una ɔndición necesaria y suficiente de la ley débil de los grandes números en su forma general.

.ey débil de los grandes números. Sean X_1, X_2, X_3, . . . , variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media finita μ, entonces para toda para toda $\varepsilon > 0$, se tiene ue:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

hora pasemos a la ley fuerte de los grandes números.

n 1909, E. Borel mostró que para $p = 1/2$:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - np}{n} = 0\right) = 1$$

n 1917 Cantelli generalizó este resultado para el caso de una p arbitraria $0 < p < 1$.

l resultado más general para variables independientes fue obtenido en 1930 por olmogorov y para variables dependientes por Khintchine.

ey fuerte de los grandes números. Sean X_1, X_2, X_3, . . ., variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media finita μ, entonces se tiene que:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \mu\right) = 1$$

6.6 Sistematización

acia principios del siglo XX la teoría de la probabilidad se desarrolló de manera notable, se mplió su campo de aplicación a diferentes ramas del conocimiento, pero la definición clásica ra cada vez más insuficiente para las necesidades de la época, fue en este contexto que el atemático ruso Kolmogorov construyó una axiomatización para esta disciplina matemática.

6.6.1 Necesidad de la axiomatización

lacia principios del siglo veinte todos los textos de teoría de la probabilidad se basaban en la eoría clásica de Laplace, pero cada vez era más evidente que los fundamentos de esta eoría eran insuficientes e inadecuados para resolver los problemas de aplicación que se resentaban en física, estadística, biología y otras ciencias, ya que en muchos de estos roblemas es difícil establecer si los resultados elementales tienen las mismas posibilidades e ocurrir. "La teoría de la probabilidad requería de nuevos fundamentos lógicos basados en n método axiomático"[8]

n 1915, el matemático ruso P. A. Nekrasov (1853 - 1924) propuso medir las relaciones de ependencia entre las personas mediante la probabilidad y utilizó esta materia para fomentar ı obediencia al zar. Esto provocó la protesta de una comisión de matemáticos encabezada or Markov en la que se critica el "abuso de la matemática con el fin preconcebido de ansformar esta ciencia en una herramienta de persuación política y religiosa"[9].

n 1912, se publicó "Calcul des probabilites", del físico y matemático francés Henri Poincaré 1854 - 1912), que "es uno de los más rigurosos e interesantes libros en teoría de la robabilidad escrito a principios del siglo XX"[10]. Poincaré considera que en muchas de las plicaciones no es posible determinar la equiprobabilidad de todos los casos y que esto scapa a los matemáticos si no se analiza bien cada caso.

n 1914 se publicó "Le hasard", de Emile Borel (1871 - 1956), en este libro se hace una iscusión detallada de las leyes básicas de la probabilidad, y se incluyen observaciones istóricas y filosóficas relacionadas con esta materia. Borel describe la aplicabilidad de la robabilidad en la física, la biología y otras ciencias. Sin embargo, hay algunos problemas ue se interpretan de manera errónea.

as aplicaciones que se hicieron de la teoría de la probabilidad mostraron la noción vaga y mbigua que se tenía de esta materia y que la definición clásica de la probabilidad era cada ez más insuficiente. Así que, "la necesidad de revaluar los fundamentos lógicos de la teoría e la probabilidad para asegurar su posición como una disciplina matemática genuina se icieron más y más evidentes"[11].

Maistrov, pág. 249
cit. pos. Maistrov, pág. 241
Maistrov, pág. 245
Maistrov, pág 242

6.6.2 Axiomatización de la teoría de la probabilidad

Basándose en los fundamentos de la teoría clásica de la probabilidad no se puede predecir el comportamiento de los procesos reales a los cuales nos enfrentamos en la vida diaria, así que era necesario tener mayor claridad de la probabilidad y de sus relaciones lógicas.

En 1917, S. N. Bernstein (1880 -1968) publicó "Un ensayo sobre los fundamentos de la teoría de la probabilidad", y diez años más tarde se publicó su libro "Teoría de la probabilidad", en el cual presenta en forma detallada una axiomatización de la teoría de la probabilidad.

Por mucho tiempo se reconoció que la definición clásica de la probabilidad tiene una serie de limitaciones para su aplicación en ciertas ramas del conocimiento. Uno de los grandes críticos a esta concepción de la probabilidad fue el matemático austriaco Richard von Mises (1883 - 1953), cuya obra principal "Probabilidad, estadística y verdad" se publicó en 1928. En este libro hay también una propuesta de axiomatización de la teoría de la probabilidad.

Las ideas de teoría de la medida empezaron a penetrar de manera cada vez más profunda en la teoría de la probabilidad y se empezaron a hacer analogías, y fue el matemático ruso Andrey Nikolayevich Kolmogorov (nacido en 1903) quien construyó la axiomatización de la teoría de la probabilidad que fue aceptada entre la comunidad científica.

Desde mediados de la década de los veintes, Kolmogorov se ocupó de la formulación lógica de la teoría de la probabilidad, y en 1933 publicó "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (fundamentos de la teoría de la probabilidad). "Aquí se establecieron las analogías entre la noción de medida de un conjunto y la probabilidad de un evento, entre la integral y la esperanza matemática, ortogonalidad de funciones e independencia de variables"[12].

La primera noción básica que considera Kolmogorov es la que actualmente se le llama espacio muestral (Ω) que es el conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Un evento es un subconjunto del espacio muestral. A la familia de subconjuntos de Ω se le puede denotar con F. De manera que un evento es un elemento de F.

[12] Maistrov, pág. 262

A continuación se da la axiomatización de la teoría de la probabilidad propuesta por Kolmogorov.

1. F es un campo de conjuntos. Esto es: si A,B$\in F$, entonces $(A \cup B) \in F$, y si A$\in F$ entonces A'$\in F$.
2. Para cada A$\in F$ se tiene un número real P(A) al que se le llama probabilidad del evento A, el cual cumple con las propiedades siguientes:

a) $P(A) \geq 0$
b) $P(\Omega) = 1$
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, siempre que $A \cap B = \varnothing$
d) Para una sucesión decreciente de eventos

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

cuya intersección es vacía, se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$$

A este último se le llama axioma de continuidad, el cual es equivalente al axioma de adición para el caso numerable.

Esta definición no hace uso de la idea intuitiva de la probabilidad como estabilidad de la frecuencia relativa, y aunque parece ser demasiado abstracta amplió las posibilidades de aplicación de la teoría de la probabilidad.

Como resultado de la axiomatización, la teoría de la probabilidad adquirió el mismo rango que las otras ramas de la matemática y se inició una nueva etapa en su desarrollo.

Bibliografía

BELL, E. T. Historia de las matemáticas. Fondo de Cultura Económica. México, 1996.

CHAO, Lincoln L. Introducción a la estadística. CECSA. México, 1985.

COLLETTE, Jean Paul. Historia de las matemáticas. Siglo veintiuno editores. México, 1986.

DANIEL, Wayne W. Estadística con aplicaciones a las ciencias sociales y a la educación. Mc. Graw Hill. México, 1981.

DIAZ Godino, Juan; Batanero Bernabeu, Ma. del Carmen; Cañizares Castellanos, Ma. de Jesús. Azar y probabilidad. Editorial síntesis. España, 1991.

ESCARELA C., Samuel. Probabilidad. ANUIES. México, 1975.

FREUND, John E.; Manning Smith, Richard. Estadística. Prentice Hall Hispanoamericana S. A. México, 1989.

GARZA, Tomás. Elementos de cálculo de probabilidades. Universidad Nacional Autónoma de México. México, 1983.

HOEL, Paul G. Estadística elemental. CECSA. México, 1973.

JOHNSON, Robert. Estadística elemental. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1990.

LIPSCHUTZ, Seymour. Teoría de conjuntos y temas afines. Mc. Graw Hill. México, 1982.

LIPSCHUTZ, Seymour. Probabilidad. Mc. Graw Hill. México, 1996.

MAISTROV, Leonid Efimovich. Probability theory. A historical sketch. Academic Press. U. S. A., 1974.

MARTINEZ Sánchez, Jorge. Conjuntos y funciones. ANUIES. México, 1973.

MENDENHALL, William. Introducción a la probabilidad y la estadística. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1987.

MODE, Elmer B. Elementos de probabilidad y estadística. Editorial Reverte Mexicana S. A. México, 1970.

MONCAYO Ruiz, Alberto. Probabilidad y estadística 2. Probabilidad. Limusa. México, 1983.

MURRAY, R Spiegel. Estadística. Mc. Graw Hill. México, 1981.

IAIMAN, Arnold; Rosenfeld, Robert; Zirkel, Gene. Introducción a la estadística elemental. Ac. Graw Hill. México, 1988.

PERERO, Mariano. Historia e historias matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 994.

ODHUNTER, Isaac. A History of the mathematical theory. From the time of Pascal to that f Laplace. Chelsea Publishing. U. S. A., 1949.

VILLOUGBY, Stephen S. Probabilidad y estadística. Publicaciones cultural S. A. México, 969.

UWAYLIF, Fadil H. Estadística general aplicada. Addison-Wesley Iberoamericana. México, 1987.