UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PARA BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

ANTONIO CORIA VALENCIA

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

MÉXICO, D.F. 2001

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" Cálculo Diferencial e Integral I Para Bachillerato ".

realizado por ANTONIO CORIA VALENCIA

con número de cuenta 8504975-2 , pasante de la carrera de MATEMÁTICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M.enC.	AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA
Propietario	M.enA.P.	MARIA DEL PILAR ALONSO REYES
Propietario	M.enC.	ALEJANDRO BRAVO MOJICA
Suplente	M.enC.	FRANCISCO STRUCK CHÁVEZ
Suplente	M.enC.	MARIA DE LOURDES VELASCO ARREGUI

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. HÉCTOR MÉNDEZ LANGO

A MI MADRE

CON ETERNO AGRADECIMIENTO POR EL APOYO QUE ME BRINDÓ DURANTE LOS AÑOS DE MI CARRERA.

A MIS TÍOS

AGRADECIÉNDOLES INFINITAMENTE CUANTO HICIERON POR MI.

A MI ASESOR

POR SU TIEMPO, SUS IDEAS Y SUGERENCIAS QUE MI HIZO A LO LARGO DEL TEXTO.

A MI ESPOSA

CON TODO MI AMOR Y RESPETO.

A MI HIJO

QUIEN ME DIO LA MOTIVACIÓN PARA ALCANZAR UNA DE MIS METAS....
OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

Con este libro se tiene como objetivo presentar de manera sencilla y accesible el Cálculo Diferencial e Integral a un estudiante de Bachillerato que tiene su primer contacto con esta interesante y rica rama de las matemáticas.

Se pretende que el estudiante establezca un primer acercamiento con el Cálculo de una forma intuitiva, sin grandes formalizaciones, de tal manera que construya los conceptos haciendo uso de sus conocimientos de álgebra, geometría euclidiana y analítica, conforme se introduzca en este estudio, sentirá la necesidad de utilizar dichos conocimientos y los irá reforzando.

Como ya se ha mencionado, no se pretende que el material presentado muestre el Cálculo de una manera totalmente formal y abstracta, ya que la experiencia nos ha demostrado que iniciar formalmente un curso de Cálculo a este nivel, conduce a confundir al estudiante. La formalización y las definiciones usadas en este texto en los últimos temas, ha tenido en cuenta el desarrollo y la madurez que se van adquiriendo al avanzar en el curso.

La experiencia adquirida señala que, el introducir el concepto de límite como una idea intuitiva, a partir de una serie de ejemplos que familiaricen al alumno con este concepto, sin llegar a la definición, pero estableciendo una serie de relaciones y un adecuado manejo de sus propiedades permiten finalmente la comprensión necesaria del tema en este curso introductorio.

En el caso de la derivada, se ha introducido la definición de este concepto usando la notación de Leibniz, ya que es la más usual en la mayoría de los textos de Cálculo. Dentro de las aplicaciones del Cálculo Diferencial se presentan los temas de máximos, mínimos y el de movimiento, que son sólo algunos de la amplia gama de aplicaciones que presenta el Cálculo.

En las últimas unidades se introduce al alumno los conceptos de Antiderivadas e Integral; trabajando con estos conceptos y posteriormente buscando generalizaciones, aspecto fundamental dentro de la matemática; para continuar con uno de los temas más importantes en un curso de Cálculo, la relación entre la derivada y la integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo.

Se continúa con propiedades de la Integral y algunas aplicaciones, tales como: áreas bajo la curva, volúmenes, cálculo de promedios, etcétera.

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

UNIDAD 1. ¿ QUÉ ES EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL?

TÉMATICA

Tiempo aproximado: 4 horas

•Ejemplos para introducir la problemática del Cálculo Diferencial e Integral: cálculo de velocidades y razón de cambio instantáneo; de tangentes a curvas; de máximos y mínimos; de áreas y volúmenes, etcétera, enfatizando las situaciones y problemas que permitan:

OBJETIVOS

Objetivo Particular:

El conocimiento de problemas diversos, algunos resueltos por los métodos numéricos o utilizando ideas anteriores a las del Cálculo, permitirán al alumno introducirse en la problemática de esta materia y darse cuenta del apoyo que brinda a diversas disciplinas.

Objetivos específicos:

Al finalizar la unidad el alumno:

- Resolverá algunos problemas sencillos de máximos y mínimos, tangentes a una curva y áreas bajo una curva, usando métodos numéricos, algebraicos y geométricos.

1.1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Una de las grandes inquietudes de los seres humanos a través de la historia ha sido la de describir los fenómenos naturales, sus cambios y sus relaciones entre ellos. En nuestros días hay una gran cantidad de estos fenómenos que pueden ser medidos y descritos con precisión. Algunos de estos cambios en los fenómenos naturales pueden estudiarse en forma precisa mediante el uso del cálculo; por ejemplo la descripción del movimiento de un cuerpo en caída libre, calcular la trayectoria del vuelo de un cohete, etc.

El cálculo diferencial e integral también es conocido como cálculo infinitesimal o de magnitudes infinitamente pequeñas.

A lo largo de la historia de la matemática se han encontrado problemas concernientes al concepto de función. Arquímedes (287-212 a. C.) calculó ciertas áreas y volúmenes, por métodos muy adelantados con relación a su época (Método de exhaución).

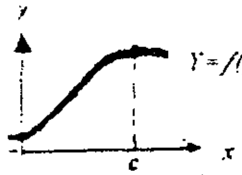
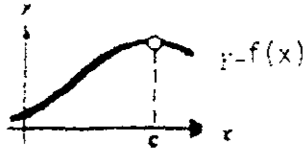
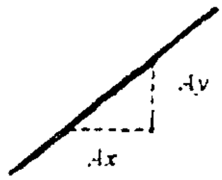
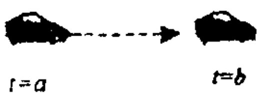
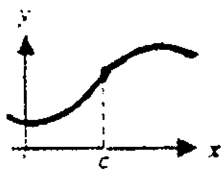
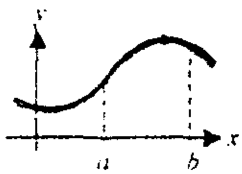
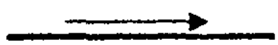
La gran evolución de las matemáticas de las funciones culminó con un gran salto en el siglo XVII al verificarse la posibilidad de realizar nuevas y útiles operaciones por medio de funciones. Los estudiosos del siglo XVII que popularmente con el nombre de cálculo, constituyen uno de los más apasionantes y exitosos logros de las matemáticas modernas.

Durante las siglos XVIII y XIX se desarrolló ampliamente el cálculo diferencial e integral, gracias al esfuerzo de varios brillantes matemáticos, Euler, Lagrange, Gauss y Cauchy entre otros llegando a convertirse en piedra angular de la física moderna.

Dentro de las matemáticas, el cálculo ha dado origen al análisis, una de las principales corrientes de las matemáticas modernas.

1.2 ¿ QUÉ ES EL CÁLCULO?

Se empezará la respuesta a esta pregunta diciendo que el cálculo infinitesimal es la reformulación de algunos conceptos de matemáticas elementales por medio del uso de un proceso de límite. Si dicho tipo de procesos no resulta conocido al lector, la respuesta no es, al menos por el momento, muy esclarecedora. Desde un punto de vista elemental, se puede considerar el cálculo infinitesimal como una "máquina de límites" que generan fórmulas nuevas a partir de las viejas. En realidad el estudio de esta materia lleva consigo tres etapas matemáticas distintas: las matemáticas previas al cálculo

SIN CALCULO INFINITESIMAL		CON CALCULO DIFERENCIAL	
Valor de $f(\chi)$ en $x = c$		Limite de $f(\chi)$ cuando x tiende a c	
Pendiente de de una recta		Pendiente de una curva	
Secante a una curva		Tangente a una curva	
Razón de cambio medio entre $t=a$ y $t=b$		Razón de cambio instantáneo en $t=c$	
Perímetro de una circunferencia		Curvatura de una curva	
Altura de una curva en x=c		Altura máxima de una curva en un intervalo	
Plano tangente a una esfera		Plano tangente a una superficie	
Dirección del movimiento sobre una recta		Dirección del movimiento sobre una curva	

mayor volumen posible?

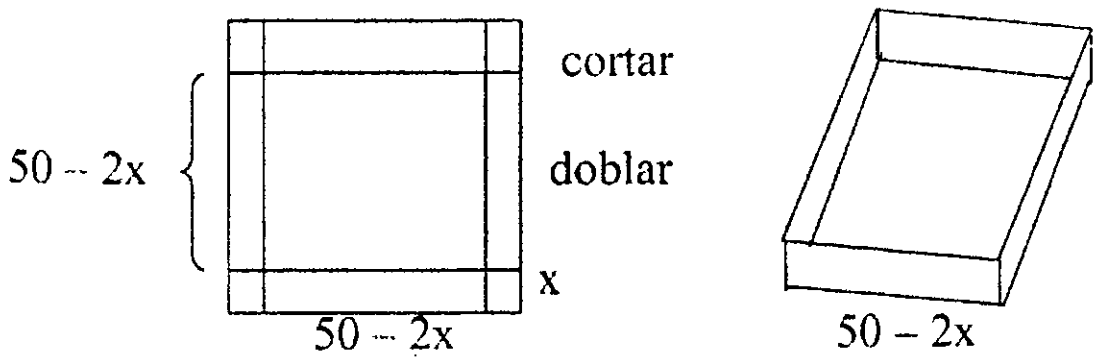


FIGURA 1.2

Sea V el volumen de la caja y "x" se le llama a la longitud del lado que se va a cortar, se tiene que el volumen de la caja queda expresado por la fórmula:

El alumno debe recordar que volumen es igual a área por altura

$V = (A)(h)$ V = Volumen

h = altura

A = área

O bien

$$V(x) = (50 - 2x)(50 - 2x)\,x$$

$$V(x) = (50 - 2x)^2\,x$$

de cada lado, pues el cartón mide 50 cm, lo cual resulta natural ya que no podemos cortar más de 25 cm. de cada lado a un cartón de 50 cm.

¿Qué representa para V(x) el conjunto

$$A = \{x \, \varepsilon \, R \mid 0 \leq x \leq 25\}?$$

El conjunto A no es otra cosa más que el dominio de V(x), es decir, todos los valores que puede tomar la variable x. Al analizar los resultados de la tabla, observamos que a medida que x aumenta el volumen también lo hace, sin embargo llega el momento en que el volumen empieza a disminuir, en la tabla se observa que cuando x = 10cm, V = 9000 cm^3, el valor del volumen es menor que cuando x = 8 cm ya que V = 9248 cm^3.

¿Qué pasa si damos valores entre 5 y 8 y entre 8 y 10?

Por ejemplo: si x = 6.5 cm, entonces V = 8898.5 cm^3 y cuando x = 8.5 cm entonces V = 9256.5 cm^3, y hasta el momento es el máximo valor del volumen que hemos encontrado. Podemos seguir dando valores a "x", ahora entre 8.5 y 10, pero no podemos garantizar que el valor dado a "x" nos de el máximo volumen de la caja.

Gráficamente tenemos que: (ver FIGURA 1.4)

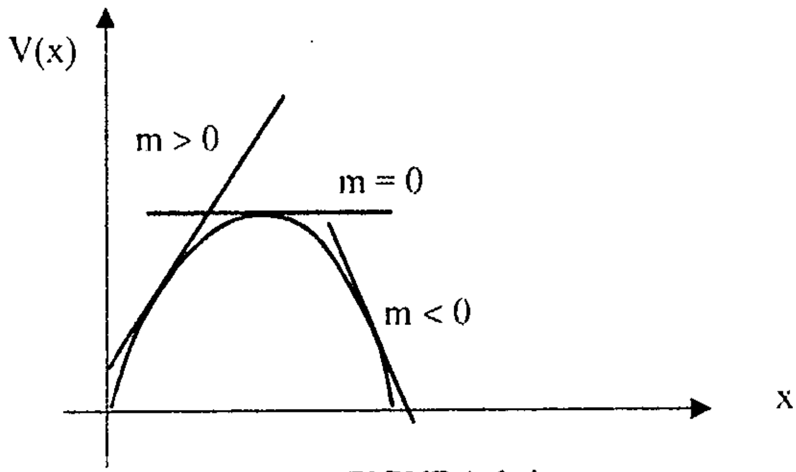


FIGURA 1.4

Por lo tanto si logramos ver en qué punto la recta tangente a la curva tiene pendiente cero, podemos saber con exactitud el valor de x, es decir, cuánto debemos cortar en cada esquina del cartón para que el volumen de la caja sea máximo. Pero con las herramientas que se tienen aún no es posible hacerlo.

Nótese que $0 \leq x \leq 20$, es decir, el dominio de la función es:

$$D = \{x \, \varepsilon \, R \mid 0 \leq x \leq 20\}$$

¿Puedes explicar por qué?

Si damos valores a x para graficar A(x) se tendría:

x	**0**	**5**	**7**	**10**	**12**	**15**	**17**	**20**	**m**
A(x)	**0**	**150**	**182**	**200**	**192**	**150**	**102**	**0**	**m^2**

Y gráficamente: (Véase FIGURA 1.6)

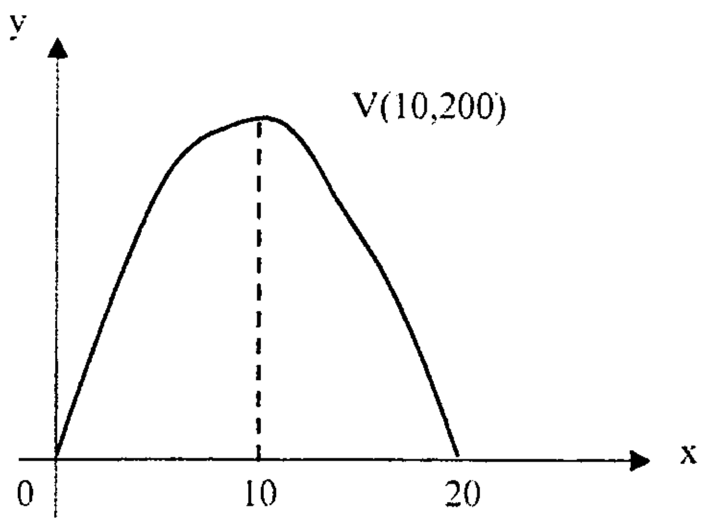


FIGURA 1.6

Recordemos que el RANGO de una función es el conjunto de valores que toma f(x).

Para que el área del terreno sea máxima, el ancho del terreno debe ser de 10m. y el largo de 20m, con esto se obtiene un área de 200 m^2. Es decir, el rango de la función es el conjunto.

$R = \{ A \varepsilon R \mid 0 \leq A \leq 200\}$

Este problema fue posible resolverlo con las herramientas de las matemáticas de los cursos anteriores, pero no en todos los problemas la función va a resultar ser una parábola, por lo que es necesario tener una herramienta más general, y ésta la va a proporcionar el cálculo diferencial.

Ejemplo 1.3: Supongamos que tenemos un terreno en las mismas condiciones que el ejemplo anterior, es decir se cercan 3 de sus lados, ya que el cuarto está apoyado en una pared; pero ahora se desea que el terreno tenga un área de 500 m^2, se pretende conocer las dimensiones del terreno para que se ocupe el mínimo de material para cercarlo (Véase FIGURA 1.7).

Sustituyendo y en P = 2x + y

$$P(x) = 2x + \frac{500}{x}$$

P(x) no representa una parábola como en el ejemplo anterior, por lo tanto es necesario hacer el análisis de este problema de la misma forma que en el ejemplo 1.1.

¿Cuáles son las restricciones para x?

Es decir, ¿Cuál dominio de la función?

Lo único que debemos de pedirle a "x" es que:

$x > 0$ ¿qué pasa si $x = 0$?

Es decir, el dominio $D = \{x \varepsilon R \mid x > 0\}$

Si damos algunos valores a x para encontrar P(x) podemos tener lo siguiente:

x	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**m**
P(x)	**110**	**70**	**63.33**	**65**	**70**	**84.29**	**m**

positiva cuando la recta es creciente, pero en el punto más bajo la recta tangente a la curva tiene pendiente cero (Véase FIGURA 1.9).

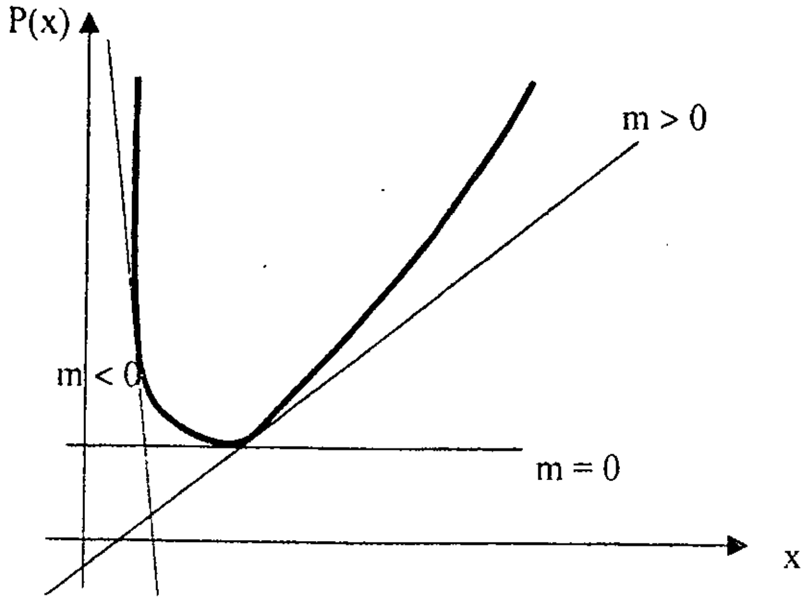


FIGURA 1.9

Así vemos que existe relación entre el comportamiento de la recta tangente a una curva en su punto máximo y en su punto mínimo, en ambos casos la pendiente de la recta tangente a la curva debe ser cero.

Pero se requiere conocer las dimensiones de la lata (r y h) para que la cantidad de material que se utiliza sea mínima, es decir, se requiere que la lata tenga la mínima superficie.

Si desdoblamos la lata resulta: (Véase FIGURA 1.11)

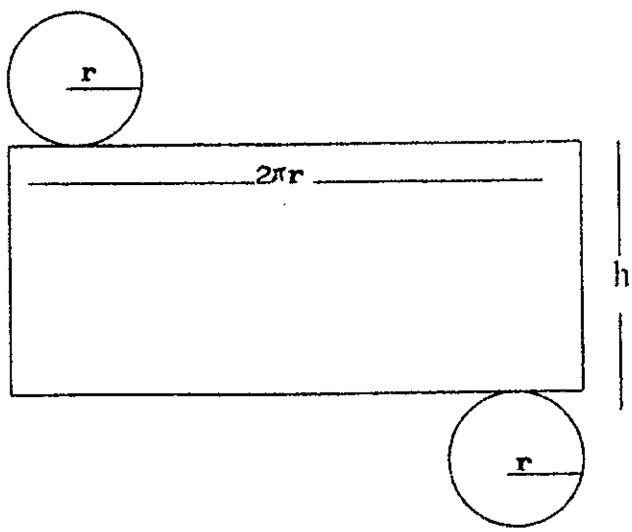


FIGURA 1.11

El área de la lata es el área de cada una de las tapas (círculos) más el área del contorno (rectángulo)

$$\therefore A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 1000 \quad \text{..(2)}$$

De la tabla vemos que el valor mínimo está entre 5 y 6, si tomamos r = 5.5

$$A(5.55) = 553.7 \text{ cm}^2$$

Vamos a tomar r = 5.5 como un valor aproximado y sustituyéndolo en

$$h = \frac{100}{\pi r^2}$$

$$= \frac{1000}{\pi(5.5)^2} = 10.52$$

$$\therefore\ r = 5.5 \text{ y } h = 10.52$$

Son los valores aproximados, para que se ocupe el mínimo de material para construir la lata. Pero no sabemos aún sí este valor no puede disminuir más con otras dimensiones.

Ejemplo 1.5: Cuando el velocímetro de un automóvil señala que viajamos a 48 mi/h, ¿qué indica esta información? Sabemos que si la velocidad permanece constante, habremos recorrido 48 millas cuando haya transcurrido una hora; pero si varía, ¿qué sentido tiene decir que la velocidad en cierto instante fue de 48 mi/h?

Tenemos la sensación de que la velocidad, en el momento t = 2, no puede ser muy distinta de la velocidad promedio durante un corto lapso que comience en t = 2. Así, imaginemos que hemos medido la distancia recorrida en intervalos de 0.1 segundo, como en la tabla:

t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	10.00	11.02	12.16	13.45	14.96	16.80

Con ella podemos calcular, por ejemplo, la velocidad promedio durante el intervalo [2,2.5].

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{16.80 - 10.00}{2.5 - 2} = 13.6 \text{ ft/s}$$

En la tabla siguiente mostramos los resultados de cálculos semejantes:

Intervalo	[2 , 3]	[2 ,2.5]	[2 ,2.4]	[2 ,2.3]	[2 ,2.2]	[2 ,2.1]
Velocidad promedio (ft/s)	15.0	13.6	12.4	11.5	10.8	10.2

Parece que las velocidades promedio, durante periodos sucesivamente menores, se aproxima a un número cercano a 10, y así esperamos que la velocidad en el momento t = 2, sea 10 ft/s, aproximadamente. En la unidad 5 definiremos la velocidad instantánea de un objeto en movimiento como el tuviéramos n números, sumaría los n números y la suma la dividiría entre n, para obtener el promedio de esos n números. Pedro, quien esperó el momento preciso, le comentó: veo que eres muy bueno calculando promedios y hasta hacer generalizaciones, puedes decirme, querido amigo, ¿cuál es el promedio de los cuadrados de los números 1 y 10 inclusive? Carlos pensó, bueno, sólo hay 10 números entre 1 y 10... ¡no! Me faltan los racionales y los que no lo son, ..., así estaba Carlos pensando, cuando lo interrumpió Pedro que le dijo; por cierto el promedio no es 38.5, si piensas un poco más, te darás cuenta que el promedio es 37. Sin dar más Pedro se alejó dejando con la duda a Carlos.

Problemas de este tipo se discutirán y resolverán en la Unidad 7.

Estos son sólo algunos ejemplos de los problemas que aborda el cálculo, pero que muestran la importancia que tiene el conocer las rectas tangentes así como el área bajo una curva.

c) Graficar la función.

d) Dar los valores aproximados de las dimensiones del rectángulo de área máxima.

3.- Se desea construir un lata de aceite en forma de cilindro que tenga capacidad de 2 litros (2000 cm^3). El material usado para hacer la tapa y el fondo cuesta \$3.00 el cm^2 y el material para hacer el fondo cuesta \$2.00 cm^2.

a) Si r es el radio y h la altura de la lata, expresar el costo C de la lata en función del radio.

b) Dar el dominio de la función costo.

c) Graficar la función costo.

d) Encontrar los valores aproximados de las dimensiones de la lata para que el costo del material sea mínimo.

RESPUESTAS

1.- a) $V(x) = (12x - 2x)(18 - 2x)x$

b) $0 \leq x \leq 6$

c) Las dimensiones de la caja deben ser 13.3 x 7.3 x 2.35

2.- a) $A(x) = x(25\text{-}x)$

b) $0 \leq x \leq 25$

c) $x = 12.5,\ y = 12.5$

3.- a) $C(r)= 6\pi r^2 + 8000/r$

b) $r > 0$

c) $r = 5.9,\ h = 18.3$

4.- a) $C(x) = (40 + x)(350 - 2.50x)$

b) $0 \leq x \leq 60$

c) Deben viajar 90 estudiantes

UNIDAD 2. LÍMITE Y CONTINUIDAD

TEMÁTICA

Tiempo, Aproximado 16 horas

- Noción y propiedades de los límites de funciones:

-Significado intuitivo del concepto de límite y cálculo de límites de funciones algebraicas mediante el uso de una tabla de valores alrededor de un punto, para casos donde la función está definida y su valor coincide con el límite; concepto intuitivo de límite lateral.

-Análisis de casos especiales que se pueden presentar: función no definida en el punto de estudio; la función está definida, pero no toma el valor del límite; no coincidencia de los límites laterales.

-Propiedades básicas de los límites y su empleo.

-Técnicas algebraicas para el cálculo de límites; casos indeterminados.

- Noción y propiedades de la continuidad de funciones:

-Revisión intuitiva de la noción de continuidad a través del análisis de gráficas de funciones continuas y discontinuas: trazo sin despegar el lápiz del papel; agujeros, interrupciones y saltos.

-Examen de las condiciones que debe cumplir una función para que sea continua en uno o en todos sus puntos; ejemplificación de casos donde no se cumplen todas o algunas de las condiciones para que una función sea continua. Funciones polinominales y racionales.

-Propiedades de las funciones continuas en particular valor intermedio y valores extremos.

- Límites y asíntotas.

-Nociones de límites infinitos y límites en el infinito.

-Límites laterales infinitos y asíntotas verticales.

-Límites en el infinito y asíntotas horizontales

-Formas indeterminadas.

-Definición formal de límite con ξ-δ y su interpretación geométrica

2.1. NOCIÓN Y PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Tres conceptos importantes para el cálculo son el de variable, función y límite. El concepto de límite está íntimamente relacionado con el concepto de infinitésimo que muchas veces resulta poco claro, sin embargo en esta sección no se pretende trabajar con la definición formal de límite, sino que se quiere dar sólo la idea intuitiva, ya que es lo que se considera adecuado para un estudiante que se inicia en el estudio del cálculo.

El primer matemático que trabajó en forma precisa con el concepto de límite fué Cauchy a principios del siglo XIX ya que los matemáticos que le precedieron operaban con conceptos mucho menos precisos.

2.1.1 IDEA INTUITIVA

Consideremos algunos ejemplos que nos darán una idea del concepto de límite.

Ejemplo 2.1: Supongamos que se quiere inscribir un polígono regular de n lados en un circunferencia; veamos los siguientes casos.

2.1.2 CÁLCULO DE LÍMITES MEDIANTE TABLAS

Analizaremos algunos ejemplos que nos introducirán a la noción de límite de una función algebraica. Tras ellos, definiremos el concepto de límite.

Ejemplo 2.2: Sea $f(x) = 2x^2 + 1$. ¿Qué ocurre con f(x) al tomar x valores más y más cercanos al 3?

SOLUCIÓN Dado un número cualquiera a, el 3 por ejemplo, podemos formar una sucesión de valores crecientes que se aproximen al 3 y otra de números decrecientes que también se acerquen a 3.

SUCESION CRECIENTE SUCESION DECRECIENTE

x	**2.8**	**2.9**	**2.99**	**2.999**	**3**	**3.001**	**3.01**	**3.1**	**3.2**
f(x)	**16.68**	**17.82**	**18.88**	**18.99**	**?**	**19.01**	**19.12**	**20.22**	**21.48**

Cuando x está próxima al 3, $2x^2 + 1$ está próximo a $2(3)^2 + 1 = 19$. Decimos que "el límite de $2x^2 + 1$, cuando x tiende a 3, es 19" y escribimos denominador x^2 - 1 también se aproxima a 0; dividir por un número pequeño tiende a hacer grande la fracción. ¿Cuál es el balance de estas dos acciones contrapuestas?

Las identidades algebraicas

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ (diferencia de cubos)

y $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ (Diferencia de cuadrados)

nos permiten responder esta cuestión.

Reescribamos el cociente, $\frac{(x^3-1)}{(x^2-1)}$ como sigue:

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x+1} \qquad x \neq 1$$

Por tanto el comportamiento de $\frac{(x^3-1)}{(x^2-1)}$ para x próximo a 1, pero distinto de 1,

es el mismo que el comportamiento de $\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

Esto se lee: "cuando x tiende a 1, $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ tiende a $\frac{3}{2}$"

Esta notación se usará en el próximo ejemplo y posteriormente con frecuencia.

Ejemplo 2.4: Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Ha de recordarse que el valor absoluto de x es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Regresando al problema.

SOLUCIÓN Su dominio contiene a todo número no nulo, es decir, los reales menos el cero. Por ejemplo,

$$f(3) = \frac{|3|}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

y

$$f(-2) = \frac{|-2|}{-2} = \frac{+2}{-2} = -1$$

Cuando $x \to 0$ a través de números positivos, $f(x) \to 1$, porque $f(x) = 1$ para cualquier x positivo. Pero cuando $x \to 0$ a través números negativos, $f(x) \to -1$, pues $f(x) = -1$ para todo x negativo.

Cuando x está próximo a cero, no ocurre que f(x) permanezca muy próximo a algún número específico. Así que

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

no existe, es decir,
$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

no existe. Sin embargo, si $a \neq 0$,

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe, siendo 1 cuando a es positivo y -1 cuando a es negativo. Por tanto, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe para todo a distinto de cero

OBSERVACIÓN: El que una función f tenga límite en a no tiene nada que ver con el valor de f(a). De hecho podría ocurrir que a ni siquiera pertenezca al dominio de f como sucedió en los ejemplos 2.3

Esto se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Cuando $x \to a$, $f(x) \to L$.

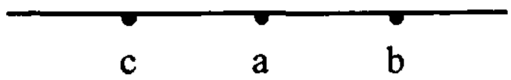


FIGURA 2.3

El ejemplo 2.4 analiza el comportamiento de $f(x) = \frac{|x|}{x}$ cuando x está próximo a 0. Cuando $x \to 0$, f(x) no tiende a ningún número específico. Sin embargo, cuando x tiende a cero a través de valores positivos, $f(x) \to 1$. Y cuando x tiende a cero a través de valores negativos, $f(x) \to -1$. Este comportamiento ilustra la idea de límite lateral que ahora pasamos a definir.

DEFINICIÓN 2: **Límite por la derecha de f(x) en a.** Sea f una función real y **a** un número fijo. Supongamos que el dominio de f contiene un intervalo abierto (a, b) para algún b > a. Si al tender x hacia a por la derecha, f(x) tiende a un número L, entonces L se llama el límite por la derecha de f(x) en a y escribiremos.

Las definiciones anteriores nos dan hincapié para introducir el siguiente teorema.

TEOREMA 1: **LA EXISTENCIA DE UN LÍMITE**

Si f es una función y **a**, L números reales, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$

si y sólo si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

En seguida se analizarán algunos ejemplos donde el límite no exista. Para lo cual, haremos uso del Teorema 1.

Ejemplo 2.5: Calcular el límite de la función

$$f(x) = \frac{x}{x+3} \quad \text{cuando } x \to -3$$

SOLUCIÓN Tomaremos dos sucesiones alrededor de x = -3, una creciente y la otra decreciente. Como se muestra en la siguiente tabla.

Al graficar la función se tiene

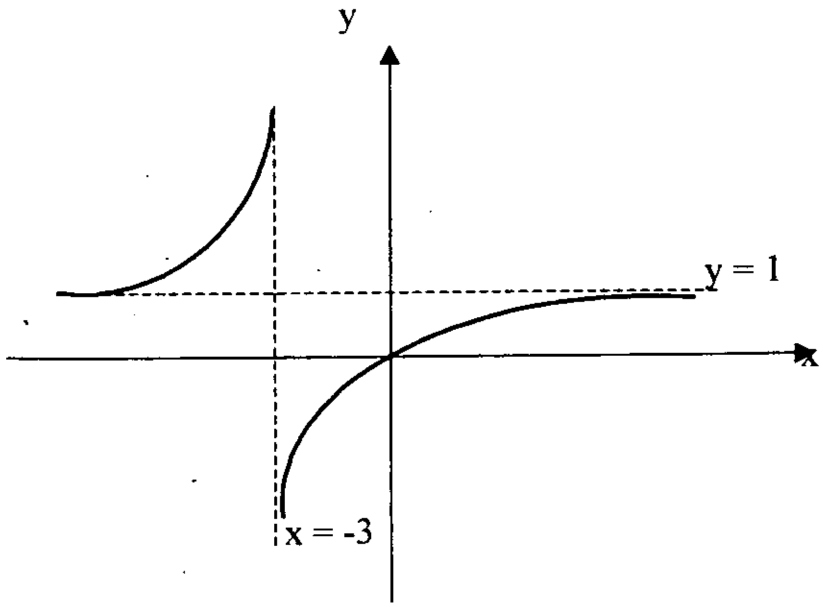


FIGURA 2.4

Ejemplo 2.6: Discutir la existencia del siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

SOLUCIÓN Hagamos $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Grafiquemos la función.

EJERCICIOS 1: En los siguientes ejercicios completar la tabla y usar el resultado para estimar el límite correspondiente.

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01	2.1	2.2
f(x)									

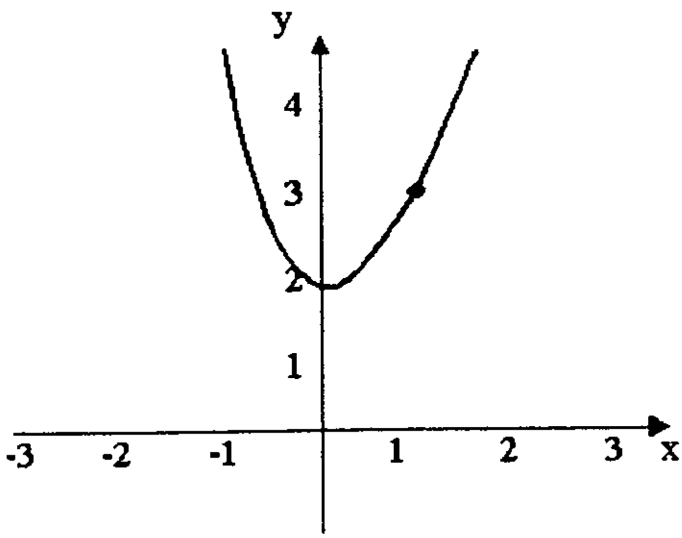
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	0.00001	0.0001	0.001	0.01
f(x)									

3) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{[1/(x+1)] - \frac{1}{4}}{x-3}$

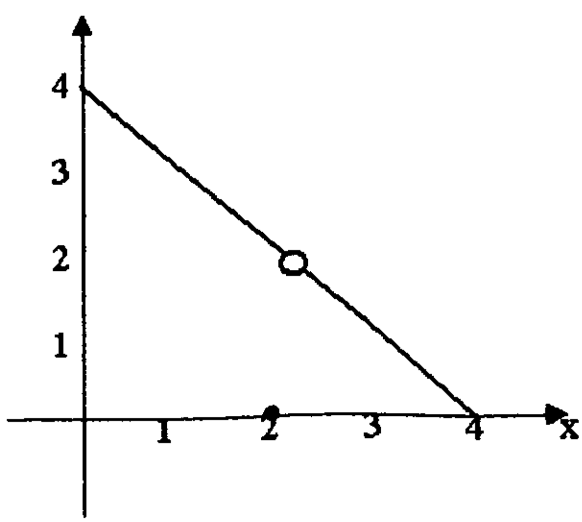
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01	3.1	3.2
f(x)									

7) $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2)$



8) $\lim_{x \to 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$



RESPUESTAS

1) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-x-2} \approx 0.3333$ (el límite verdadero es $\dfrac{1}{3}$)

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
f(x)	0.3448	0.3344	0.3334	0.3332	0.3322	0.3226

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \approx 0.2887$ (el límite verdadero es $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$)

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.2911	0.2889	0.2887	0.2887	0.2884	0.2863

3) $\lim_{x \to 3} \dfrac{[1/(x+1)] - 1/4}{x-3} \approx 0.0625$ (el límite verdadero es $-\dfrac{1}{16}$).

x	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
f(x)	-0.0641	-0.0627	-0.0625	-0.0625	-0.0623	-0.0610

2.1.3 PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS LÍMITES Y SU EMPLEO

Hasta aquí hemos usado, tal vez sin percibirlo, una serie de propiedades de los límites, que se enunciarán a continuación.

No se realizarán las demostraciones de estas propiedades ya que esto implicaría trabajar con la definición formal de límite y no es el propósito de este curso.

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si a y c son números reales, n un entero positivo y f, g funciones que tienen límite cuando $x \to a$, entonces son ciertas las siguientes propiedades.

1. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

$$= \lim_{x\to 3} x^3 + 2\lim_{x\to 3} x^2 \qquad \text{propiedad 6}$$

$$= (3)^3 + 2(3)^2$$

$$= 27 + 18 = 45$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 3} [x^3 + 2x^2] = 45$$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+1}{2x^5}$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4+1}{2x^5} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} (x^4+1)}{\lim\limits_{x\to -1} 2x^5} \qquad \text{Propiedad 3}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -1} x^4 + \lim\limits_{x\to -1} 1}{\lim\limits_{x\to -1} 2x^5} \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -1} x^4 + \lim\limits_{x\to -1} 1}{2\lim\limits_{x\to -1} x^5} \qquad \text{Propiedad 6}$$

d) $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 8} x^2} \qquad \text{Propiedad 8}$$

$$= \sqrt[3]{(8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Por consiguiente

$$\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x^2} = 4$$

e) $\lim\limits_{x \to 2} (3x-4)^5$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 2} (3x-4)^5 = [\lim_{x \to 2} (3x-4)]^5 \qquad \text{Propiedad 7}$$

$$= [\lim_{x \to 2} 3x - \lim_{x \to 2} 4]^5 \qquad \text{Propiedad 2}$$

$$= [3 \lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 4]^5 \qquad \text{Propiedad 6}$$

$$= [3(2) - 4]^5 = [2]^5 = 32$$

g) $\lim_{a \to 20} \sqrt[3]{3a + 4}$

SOLUCIÓN

$$\lim_{a \to 20} \sqrt[3]{3a+4} = \sqrt[3]{\lim_{a \to 20} (3a+4)} \qquad \text{Propiedad 8}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{a \to 20} 3a + \lim_{a \to 20} 4} \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$= \sqrt[3]{3 \lim_{a \to 20} a + \lim_{a \to 20} 4} \qquad \text{Propiedad 6}$$

$$= \sqrt[3]{3 \lim_{a \to 20} a + 4} \qquad \text{Propiedad 5}$$

$$= \sqrt[3]{3(20) + 4} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Por lo tanto

$$\lim_{a \to 20} \sqrt[3]{3a+4} = 4$$

Grafiquemos f(x)

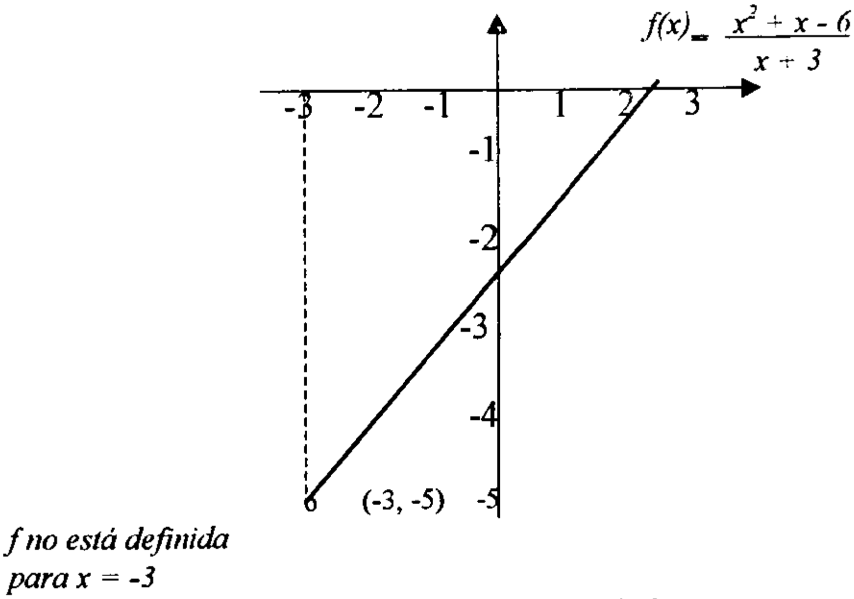


FIGURA 2.6

Ciertamente f(x) no está definida en x = -3, sin embargo, vemos que si $x \to -3$, entonces $f(x) \to -5$.

Tratemos de eliminar la indeterminación para poder mostrar que

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = -5$$

Podemos factorizar el numerador como

$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

SOLUCIÓN La sustitución directa lleva a la forma indeterminada 0/0.

Para poder deshacernos de la forma indeterminada, usaremos la técnica de racionalización que consiste en multiplicar por un 1 adecuado. En particular para éste ejemplo multiplicaremos por

$$\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\bullet\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{t\to 3} \frac{t^3 - 27}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{t^3 - 3^3}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{(t-3)(t^2 + 3t + 9)}{t - 3}$$

$$= \lim_{t\to 3} t^2 + 3t + 9 = 3^2 + 3(3) + 9 = 27$$

c) $$\lim_{y\to 3} \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{3}}{y - 3} = \lim_{y\to 3} \frac{\frac{3-y}{3y}}{y-3} = \lim_{y\to 3} \frac{3-y}{3y(y-3)} = \lim_{y\to 3} \frac{-(y-3)}{3y(y-3)}$$

$$= \lim_{y\to 3} \frac{-1}{3y} = \frac{-1}{3(3)} = \frac{-1}{9}$$

d) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \bullet \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}$$

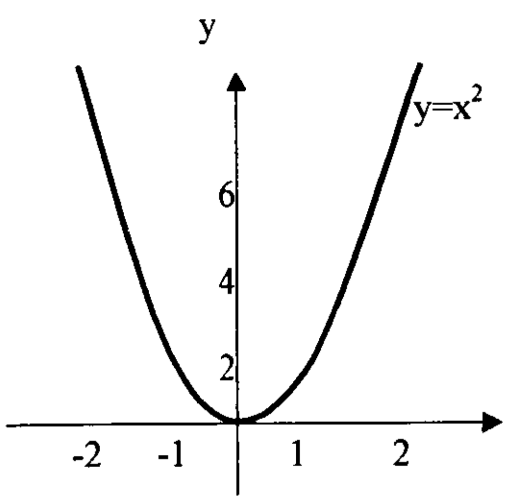
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

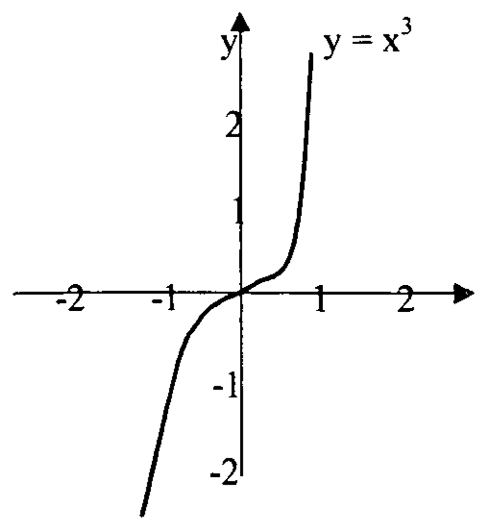
2.2 NOCIÓN Y PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD DE FUNCIONES

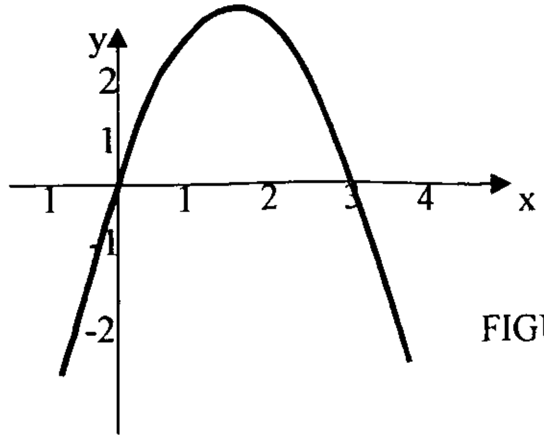
La idea general de función continua equivale a que su gráfica sea continua, esto es, que la curva pueda dibujarse sin despegar el lápiz del papel. Hablar de continuidad también significa que ni se rompe, ni tiene saltos o huecos (IDEA INTUITIVA).

A continuación daremos algunos ejemplos de funciones continuas y discontinuas.

FUNCIONES CONTINUAS







$y = 3x - x^2$

FIGURA 2.7

En seguida daremos la definición de continuidad a través de un límite.

DEFINICIÓN 4: Una función f(x) es continua en x = a siempre y cuando se cumpla la siguiente relación de límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Para que la definición 4 se cumpla, se deben satisfacer tres condiciones.

1. f(x) debe estar definida en x = a
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ debe existir
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una función f es discontinua en x = a cuando cualquiera de estas condiciones no se cumpla.

Ejemplo 2.11: Determinar si las funciones cuyas gráficas se muestran en la FIGURA 2.9 son continuas en x = 3 utilizando la definición de límite.

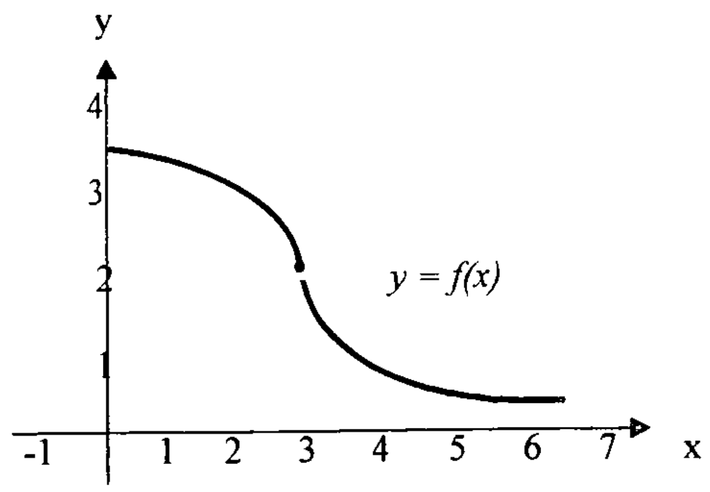
d) 

FIGURA 2.9

SOLUCIÓN

a) En este caso $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$. Sin embargo $f(3) = 4$.

Como $\lim_{x\to 3} f(x) = 2 \neq f(3) = 4$ no se cumple la tercera condición

Por lo tanto, $f(x)$ no es continua en $x = 3$.

b) El $\lim_{x\to 3} g(x)$ no existe, así que $g(x)$ no es continua en $x = 3$.

Como $\lim_{x\to 3^-} g(x) \neq \lim_{x\to 3^+} g(x)$ el límite no existe.

c) El $\lim_{x\to 3} h(x)$ no existe, así que $h(x)$ no es continua en $x = 3$.

d) $f(x)$ no está definida en $x = 3$, por lo tanto $f(x)$ no es continua en $x = 3$.

De esta manera si definimos $f(1) = 2$, se tiene que

$$f(1) = 2 = \lim_{x \to 1} f(x)$$

y f es continua en $x = 1$.

c) Encuentre el valor de a de tal forma que

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$ sea continua en $x = 1$.

SOLUCIÓN Ésta es una función dada en 2 partes, $x = 1$ existe en la parte superior, es decir, cuando $x \leq 1$, por esta razón $f(1) = 3(1) + a = 3 + a$. Ahora calculemos $\lim_{x \to 1} f(x)$, como f(x), está dada en en dos partes, una para $x \leq 1$ y otra para $x > 1$, calculamos los límites laterales

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3x + a = 3+a$$

por otra parte $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1$

OBSERVACIÓN: Si una función es continua en [a, b], decimos que f es continua por la derecha de a y continua por la izquierda de b.

Ejemplo 2.13: Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ es continua en el intervalo [-1, 1]

SOLUCIÓN

Si $-1 < a < 1$, al emplear las leyes de los límites tenemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (1 - \sqrt{1-x^2})$$

$$= 1 - \lim_{x\to a} \sqrt{1-x^2}$$

$$= 1 - \sqrt{\lim_{x\to a} (1-x^2)}$$

$$= 1 - \sqrt{1-a^2}$$

$$= f(a)$$

Así de acuerdo con la definición 4, f es continua en a si $-1<a<1$. También debemos calcular el límite por la derecha en -1 y el límite por la izquierda en 1.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (1 - \sqrt{1-x^2})$$

En lugar de emplear siempre las definiciones 4 y 5 para comprobar la continuidad de una función, como hicimos en el ejemplo 2.12, muchas veces es más cómodo aplicar el siguiente teorema, que muestra como formar funciones continuas complicadas a partir de otras más simples.

TEOREMA 2:

> Si f y g son continuas en a y c es una constante, las funciones siguientes también son continuas en a:
>
> 1) $f+g$ 2) $f-g$ 3) cf 4) fg 5) $\frac{f}{g}$
>
> si $g(a) \neq 0$

Demostración. Cada una de las cinco partes de este teorema es consecuencia de las propiedades de los límites estudiados en la sección 2.1.3. Realizaremos la demostración de la parte 1, las demás se dejan como ejercicio al lector.

Dado que f y g son continuas en a,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Como ejemplo del teorema 3, observaremos que el volumen de una esfera varía de manera continua en función de su radio porque la fórmula

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Indica que V es una función polinomial de r. De igual modo, si una pelota se arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad de 50 ft/s, su altura cuando han transcurrido t segundos está expresada por la fórmula $h = 50t - 16t^2$. De nuevo tenemos una función polinomial, por consiguiente, la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

Saber cuáles funciones son continuas permite evaluar algunos límites con rapidez, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.14: Calcula

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

SOLUCIÓN La función $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ es racional, así que, según el teorema 3, es continua en su domino; por consiguiente

SOLUCIÓN Por el teorema 3 sabemos que los polinomios 5-x y x^2-1 son continuos para todo x real. Luego para ver que g es continua en [-1, 3] basta estudiar el comportamiento de g en x = 2. Tomando límites laterales para x = 2, vemos que.

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (5 - x) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 1) = 3$$

Como esos dos límites coinciden, el teorema sobre la existencia de un límite permite concluir que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = 3$$

Luego g es continua en x = 2, y en consecuencia en el intervalo [-1, 3]

a) $f(x) = x^{100} - 2x^{37} + 75$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 17}{x^2 - 1}$

c) $h(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x+1}{x^2+1}$

SOLUCIÓN a) f es un polinomio, de modo que es continuo en $(-\infty,\infty)$, según el teorema 3. a).

b) Como g es una función racional entonces, según el teorema 3 b), es continuo en su dominio, que es

$$D = \{x \mid x^2 - 1 \neq 0\}$$
$$= \{x \mid x \neq \pm 1\}$$

Por lo tanto g es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$.

c) Podemos escribir $h(x) = F(x) + G(x) - H(x)$, de donde

$F(x) = \sqrt{x}$ $G(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $H(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

Otro modo de combinar las funciones continuas f y g a fin de obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es consecuencia del teorema siguiente:

TEOREMA 5:

> Si f es continua en b, y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces
>
> $$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Este teorema se comprende intuitivamente porque si x se acerca a a, g(x) se acerca a b y, como f es continua en b, si g(x) se acerca a b, entonces f(g(x)) lo hace a f(b).

Ahora aplicaremos el teorema 5, al caso especial en que $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un entero positivo. En ese caso,

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y

$$f(\lim_{x \to a} g(x)) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Si aplicamos el teorema 5 a estas expresiones obtenemos

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Ahora bien, g es continua en R porque es un polinomio y f es continua en $[0, \infty)$ de acuerdo con el teorema 4; por consiguiente, y según el teorema 6, f o g es continua en R.

b) Notarás que F se puede expresar como la composición de cuatro funciones continuas:

$$F = f \circ g \circ h \circ k, \text{ o sea } F = f(g(h(k(x)))),$$

donde

$f(x) = 1/x$ $\quad$ $g(x) = x-4$ $\quad$ $h(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $k(x) = x^2 + 7$

Cada una de estas funciones es continua en su dominio, de acuerdo con los teoremas 3 y 4 y así, según el teorema 6, F es continua en su dominio, que es.

$$D = \{x \mid x \in R, \sqrt{x^2+7} \neq 4\} = \{x \mid x \neq \pm 3\}$$

$$= (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty).$$

6) $f(x) = (x^2 - 1)^8$, $(-\infty, \infty)$

Explica porque cada una de las funciones que siguen son discontinuas en el punto citado. Traza la gráfica de la función.

7) $f(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $a = 1$

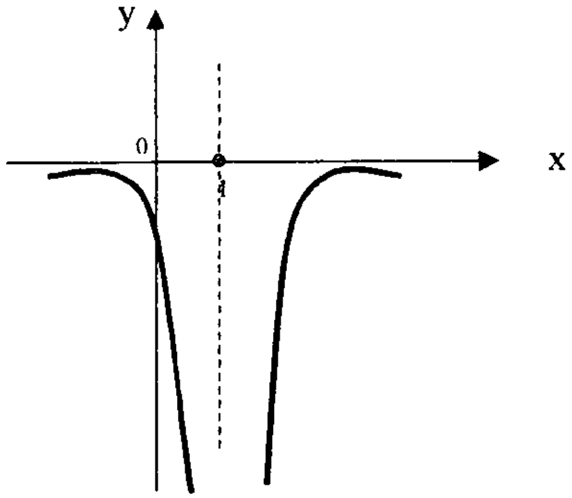
8) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ $a = 1$

9) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \neq -3 \\ 5 & \text{si } x = -3 \end{cases}$ $a = -3$

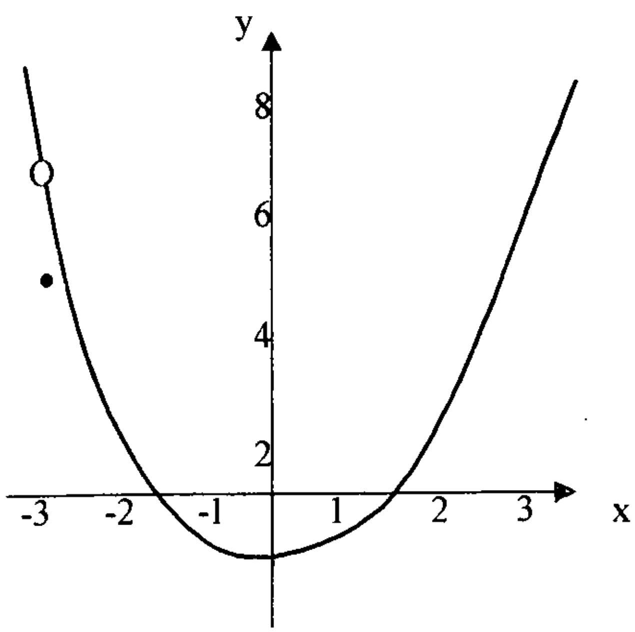
Con los teoremas 2, 3, 4 y 6 demuestra que cada una de las funciones siguientes son continuas en su dominio. Define el dominio.

10) $f(x) = (x + 2)(x^3 + 8x + 9)$

8) No existe $\lim_{x \to 1} f(x)$



9) $\lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$



2.2.1 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Terminamos la sección con un importante resultado sobre funciones continuas.

TEOREMA 7:

> TEOREMA DELVALOR INTERMEDIO
>
> Si f es continua en el intervalo cerrado [a, b], y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier número k entre f(a) y f(b) existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$

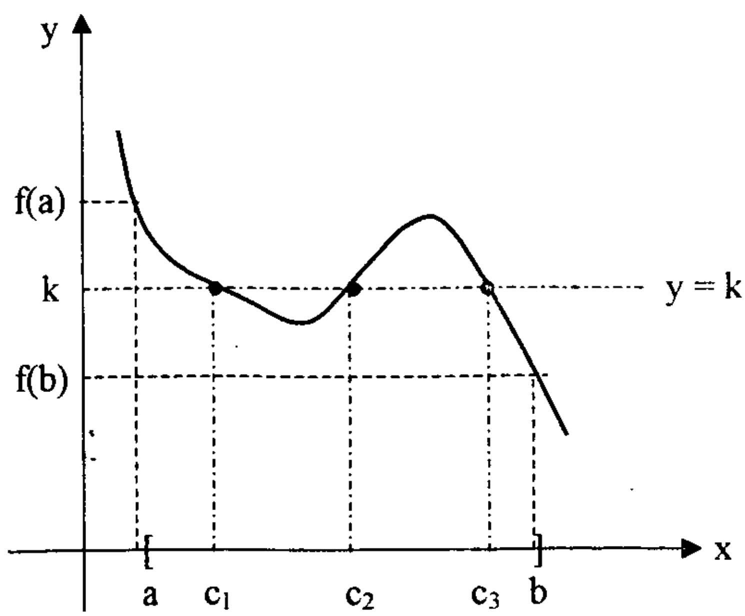


FIGURA 2.11

Ejemplo 2.19: Probar que el polinomio $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$

SOLUCIÓN

Grafiquemos la función

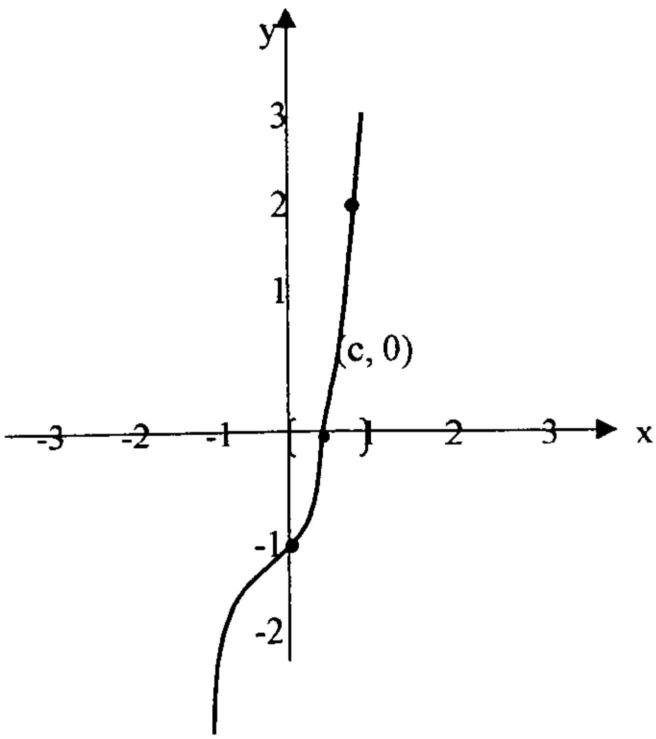


FIGURA 2.12

Como $f(0) = 0^3 + 2(0) - 1 = -1 \quad f(0) < 0$

$f(1) = 1^3 + 2(1) - 1 = 2 \quad f(1) > 0$

$$4 + 3c - c^2 = 1$$

$$-c^2 + 3c + 4 - 1 = 0$$

$$(-1) \qquad -c^2 + 3c + 3 = 0$$

$$\boxed{c^2 - 3c - 3 = 0} \qquad \text{Ecuación cuadrática}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática por la fórmula general, tenemos.

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ c_2 = \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Se rechaza c_2 ya que este número esta fuera del intervalo [2,5].

El número $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ está en el intervalo [2,5] y

$$f\left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right) = 1$$

SOLUCIÓN Graficamente se tiene

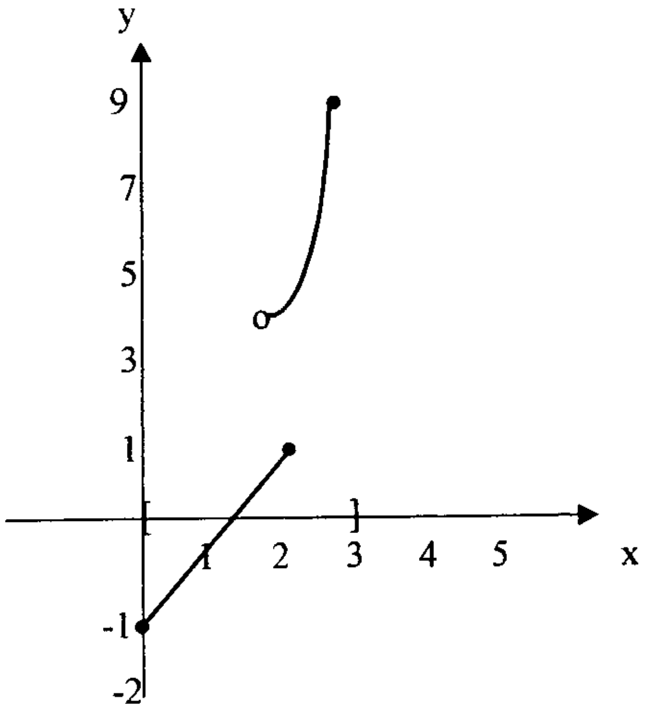


FIGURA 2.14

La función f es discontinua en x = 2 la cual está en el intervalo cerrado [0,3]; f(0) = -1 y f(3) =9. Si k es cualquier número entre 1 y 4, no existe un valor c tal que f(c) = k porque no hay valores de la función entre 1 y 4.

EJERCICIOS 5: En los ejercicios 1 y 2, probar que la función dada tiene un cero en el intervalo indicado.

2.3 LÍMITES Y ASÍNTOTAS

2.3.1 LÍMITES INFINITOS

Vamos a ver otra manera en que la existencia de un límite puede fallar: si la función tiene una discontinuidad infinita.

Ejemplo 2.22: Determine, si existe, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

SOLUCIÓN. Al acercarse x a 0, también lo hace x^2, y $\frac{1}{x^2}$ se vuelve muy grande. (Consulta la tabla). De hecho, la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (FIGURA 2.15), muestra que los valores de $f(x)$ se pueden aumentar arbitrariamente si x se acerca lo suficiente a cero. Así los valores de $f(x)$ no tienden a algún valor y por lo tanto el $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ no existe.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no quiere decir que consideramos a ∞ como un número, ni que haya límite; tan sólo expresa el modo particular en que no existe el límite; es factible aumentar $1/x^2$ tanto como queramos acercando lo suficiente x a 0

En general se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Para indicar que los valores de f(x) se vuelven cada vez más grandes (o que "crecen sin límite") conforme x se aproxima a a.

DEFINICIÓN 6:

> Sea f una función definida en ambos lados de a excepto, quizá, en a mismo. Entonces
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
>
> Significa que los valores de f(x) se pueden incrementar arbitrariamente, tanto como queramos, acercando x lo suficiente a a (pero sin igualarla con a).

Un tipo semejante de límite, para funciones que se vuelven grandes y negativas cuando x se aproxima a a, se describe en la definición 7 y se aprecia en la FIGURA 2.17.

DEFINICIÓN 7:

> Sea f definida en ambos lados de a excepto, quizás, en a mismo. Entonces
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
>
> Quiere decir que los valores de f(x) se pueden volver arbitrariamente pequeños o grandes en valor absoluto pero negativos, acercando x lo suficiente a a (pero sin igualarlo con a).

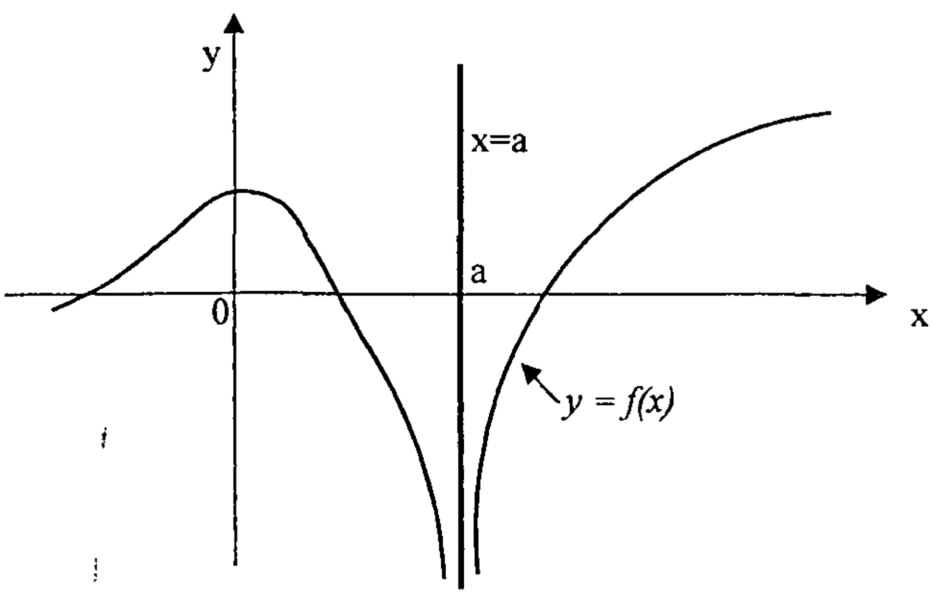


FIGURA 2.17

Al graficar se tiene

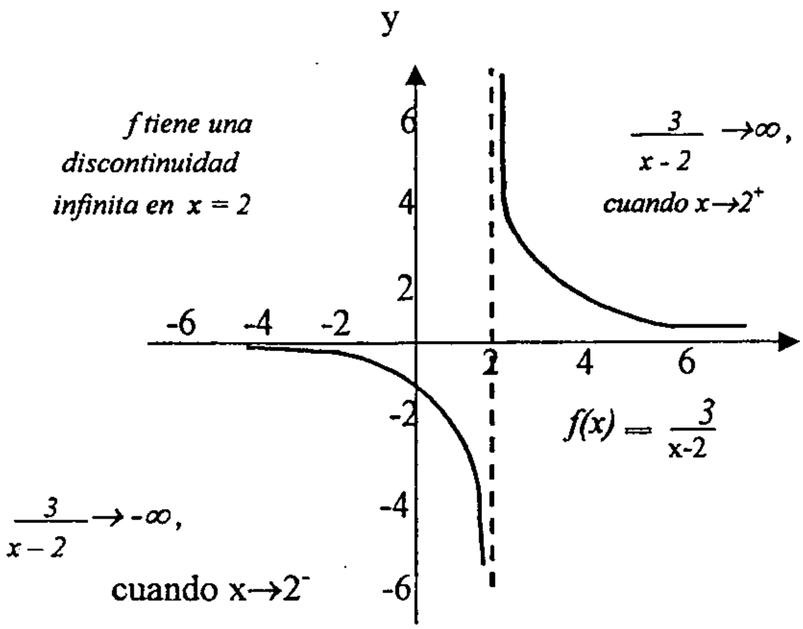


FIGURA 2.18

De la figura y de la tabla vemos que f decrece sin cota (sin tope) cuando x tiende a 2 por la izquierda y crece sin cota cuando x tiende a 2 por la derecha.

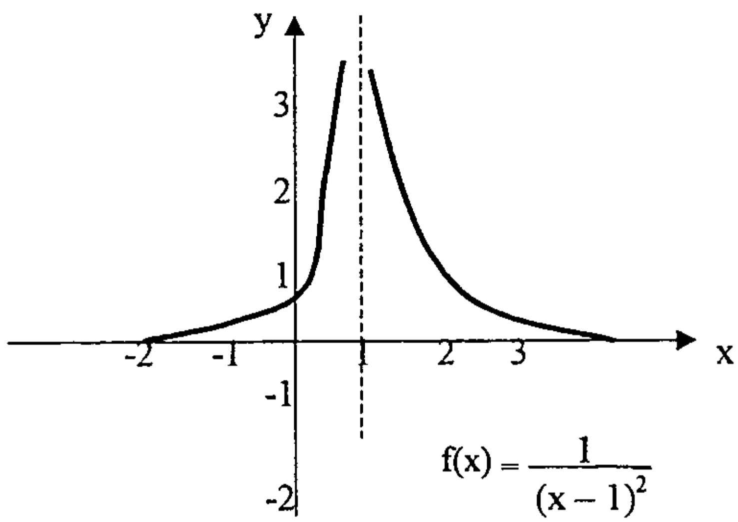
Escribiremos simbólicamente.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

b)



$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

FIGURA 2.19

Si fuese posible extender las gráficas de la FIGURA 2.19 hacia el infinito, veríamos que son más y más próximas a la recta vertical $x = 1$. Llamaremos a esta recta una asíntota vertical de la gráfica f.

DEFINICIÓN 8:

Si f(x) o tiende hacia $+\infty$ (0 $-\infty$) cuando x tiende a a por la izquierda o por la derecha, diremos que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

En el ejemplo anterior, nótese que cada función es un cociente y que la asíntota vertical ocurre en el punto donde el denominador es cero. El próximo teorema generaliza esta observación.

$f(x) = \frac{1}{2(x+1)}$

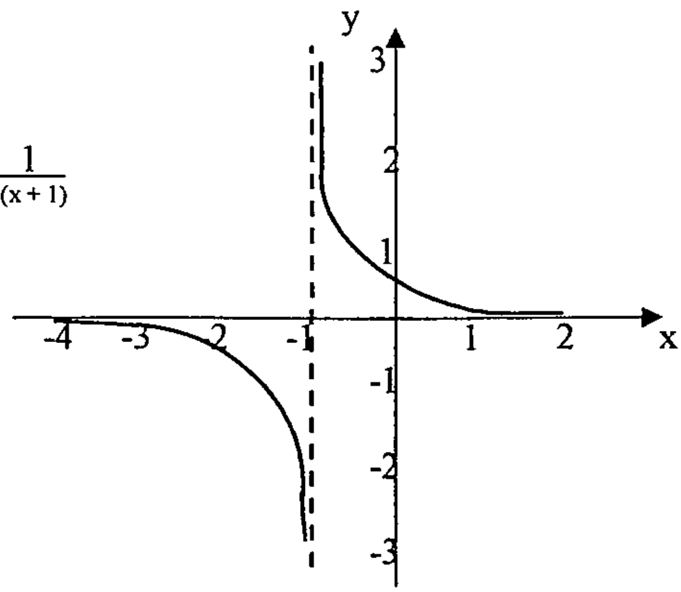


FIGURA 2.20

b) Veamos cuando $x^2 - 1 = 0$

Factorizando $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Se tiene que es cero en $x = 1$ y $x = -1$. Además, como el numerador no es cero en esos puntos, concluimos por el Teorema 8 que la gráfica de f tiene dos asíntotas verticales.

SOLUCIÓN Factorizando numerador y denominador, obtenemos

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x + 4)\,(x - 2)}{(x - 2)\,(x + 2)} = \frac{x + 4}{x} \qquad x \neq 2$$

Ahora bien, salvo en $x = 2$ la gráfica de f coincide con la de

$g(x) = \dfrac{x + 4}{x + 2}$. Por tanto, del Teorema 8 aplicado a g se sigue

que hay una asíntota vertical en $x = -2$, como muestra la

FIGURA 2.22.

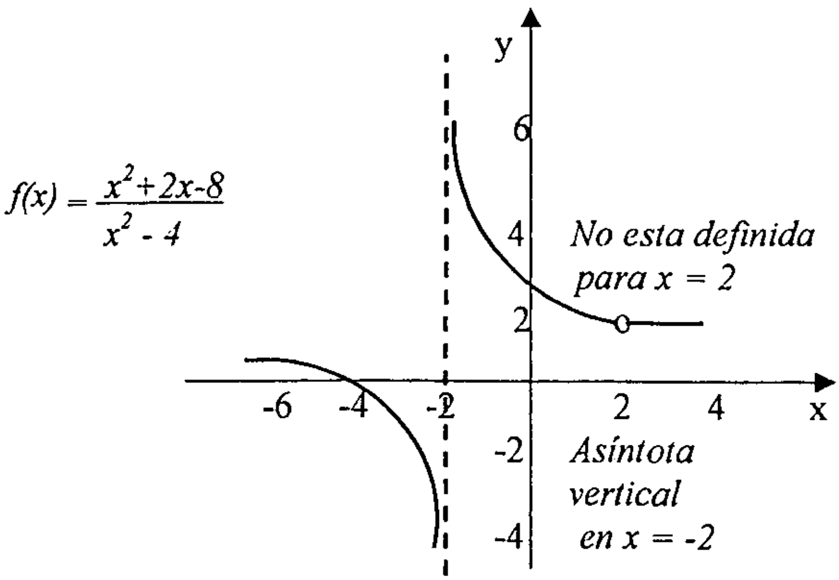


FIGURA 2.22

Ejemplo 2.27: Utilizando el teorema, calcular los siguientes límites

a) Calcular $\lim_{x \to 4^+} \frac{2x-1}{x-4}$

SOLUCIÓN Obsérvese que $\lim_{x \to 4^+} (2x-1) = 7 > 0$ y $\lim_{x \to 4^+} (x-4) = 0$, donde x-4 tiende a cero a través de valores positivos. Por tanto, por la parte i) del Teorema 9, concluimos que

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{2x-1}{x-4} = +\infty$$

b) Calcular $\lim_{x \to 4^-} \frac{2x-1}{x-4}$

SOLUCIÓN Nótese que $\lim_{x \to 4^-} (2x-1) = 7 > 0$ y $\lim_{x \to 4^-} (x-4) = 0$, donde x-4 tiende a cero a través de valores negativos. De este modo, de la parte (ii) del Teorema 9, tenemos que

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{2x-1}{x-4} = -\infty$$

TEOREMA 10:

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

Si a, L son números reales y f, g son funciones tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = L$$

entonces las siguientes propiedades son válidas:

i) Suma : $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

ii) Resta : $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \infty$

iii) Producto: a) $\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \infty, \quad L>0$

b) $\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = -\infty, \quad L<0$

iv) Cociente: $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades similares valen si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

También el teorema es válido si "$x\to a$" se sustituye por "$x\to a+$" o por "$x\to a-$".

c) Hallar $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{1/x - 1}$

SOLUCIÓN Puesto que $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + 1 = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} 1/x - 1 = \infty$

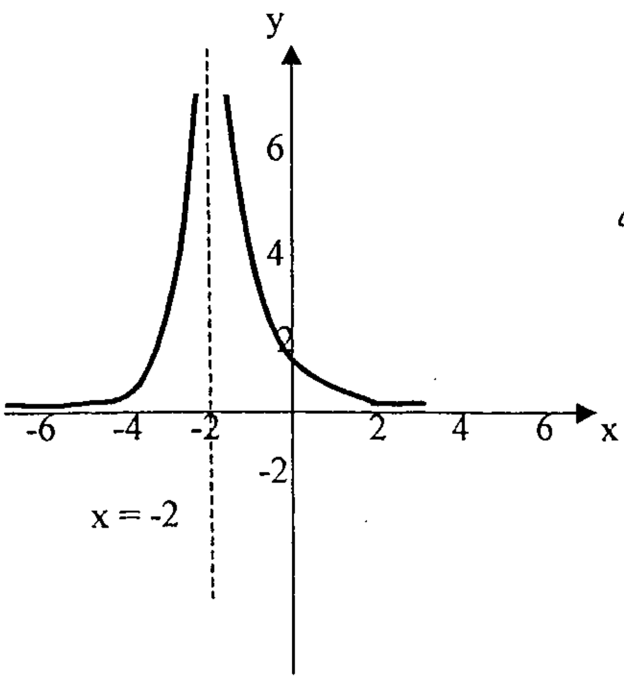
aplicamos la propiedad (iv) del teorema 10 y deducimos que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{1/x - 1} = 0$$

EJERCICIOS 6: 1. Determinar los límites cuando $x\to -3$ por la izquierda y por la derecha.

a) $\dfrac{1}{x^2-9}$ b) $\dfrac{x}{x^2-9}$ c) $\dfrac{x^2}{x^2-9}$

2. En los siguientes ejercicios, utilizar la gráfica para determinar visualmente el límite cuando x tiende a–2 por la izquierda y por la derecha, si existe.



a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

5. Encuentre el límite indicado para los siguientes ejercicios.

a) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x-3}{x-2} =$

b) $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{x^2}{x^2-16} =$

c) $\lim_{x \to 0^-} (1 + 1/x) =$

d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-x}{(x^2+1)(x-1)} =$

e) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+x+1}{x^3-1} =$

RESPUESTAS

1. a) $\lim_{x \to -3^+} \dfrac{1}{x^2-9} = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to -3^-} \dfrac{1}{x^2-9} = \infty$

b) $\lim_{x \to -3^+} \dfrac{x}{x^2-9} = \infty$ $\qquad \lim_{x \to -3^-} \dfrac{x}{x^2-9} = -\infty$

c) $\lim_{x \to -3^+} \dfrac{x^2}{x^2-9} = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to -3^-} \dfrac{x^2}{x^2-9} = \infty$

2.3.3 LÍMITES EN EL INFINITO Y ASÍNTOTAS HORIZONTALES

La sección anterior se dedicó a límites infinitos donde los valores de funciones crecen o decrecen sin límite a medida que la variable independiente tiende a un número fijo. Ahora consideramos los límites de funciones cuando la variable independiente crece o decrece sin límite. Este tema se propuso hasta ahora debido a que estos límites son especialmente útiles cuando se estudian técnicas de graficación.

Comenzaremos investigando el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

X	f(x)
0	-1
±1	0
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

para indicar que los valores de f(x) se acercan más y más a L cuando x se vuelve más y más grande.

DEFINICIÓN 9:

Sea f una función definida en algún intervalo, (a, ∞). Entonces $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$ significa que los valores de f(x) se pueden acercar arbitrariamente a L si x se incrementa los suficiente.

Otra notación para indicar $\lim_{x \to \infty} f(x)$ es $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$

El símbolo ∞ no representa número alguno; sin embargo, la expresión

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ con frecuencia se lee

"el límite de f(x) cuando x tiende a infinito es L"

o bien "el límite de f(x) cuando x se vuelve infinito es L"

o también "el límite de f(x) cuando x crece sin límite es L"

De regreso a la FIGURA 2.23, vemos que para valores negativos numéricamente grandes de x, los valores de f(x) se acercan a 1. Haciendo que x decrezca arbitrariamente con valores negativos, podemos hacer que f(x) se aproxime a 1 tanto como queramos. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es:

DEFINICIÓN 10:

> Sea f una función definida en algún intervalo, $(-\infty, a)$.
>
> Entonces
>
> $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
>
> indica que los valores de f(x) se pueden acercar arbitrariamente a L haciendo que **x** sea de magnitud lo bastante grande y negativa.

De nuevo el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero con frecuencia la expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se lee como sigue:

"El límite de f(x) cuando x tiende a infinito negativo es L"

En la FIGURA 2.26 vemos el diagrama de la curva $y = f(x)$, que tiene a $y = -1$ y $y = 2$ como sus asíntotas horizontales porque

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

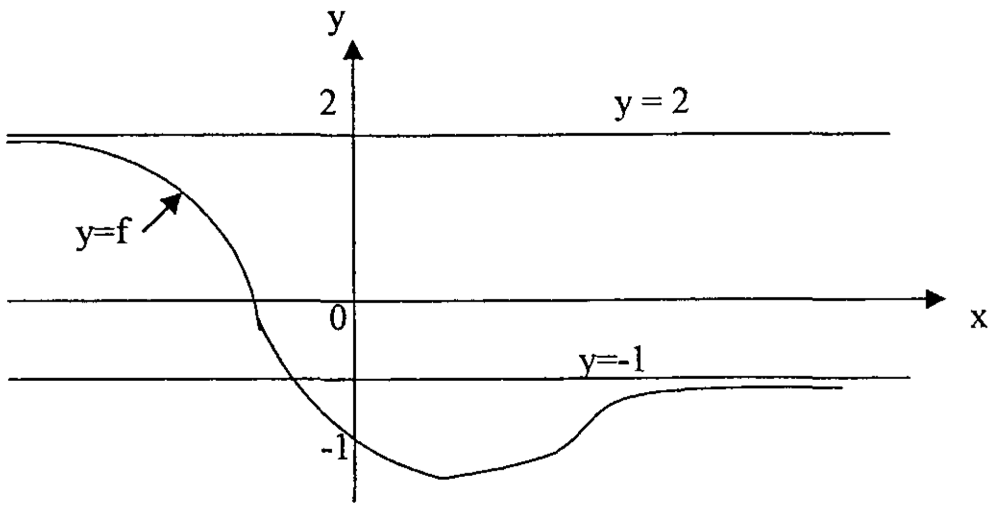


FIGURA 2.26

Ejemplo 2.29: Determina $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$

SOLUCIÓN Cuando x es grande, $\frac{1}{x}$ es pequeño; por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01$$

$$\frac{1}{10\,000} = 0.0001$$

$$\frac{1}{1000\,000} = 0.000001$$

TEOREMA 11:

Si $r>0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r>0$ es un número racional tal que x^r está definido para toda x, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Ejemplo 2.30: Evalúa $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

e indica cuáles propiedades de los límites se emplean en cada paso.

SOLUCIÓN Para evaluar el límite al infinito de una función racional, primero se dividen numerador y denominador entre la mayor potencia de x que haya. (podemos suponer que $x\neq 0$ porque sólo interesan los valores grandes de x). En este caso, la mayor potencia de x es x^2 y, por consiguiente,

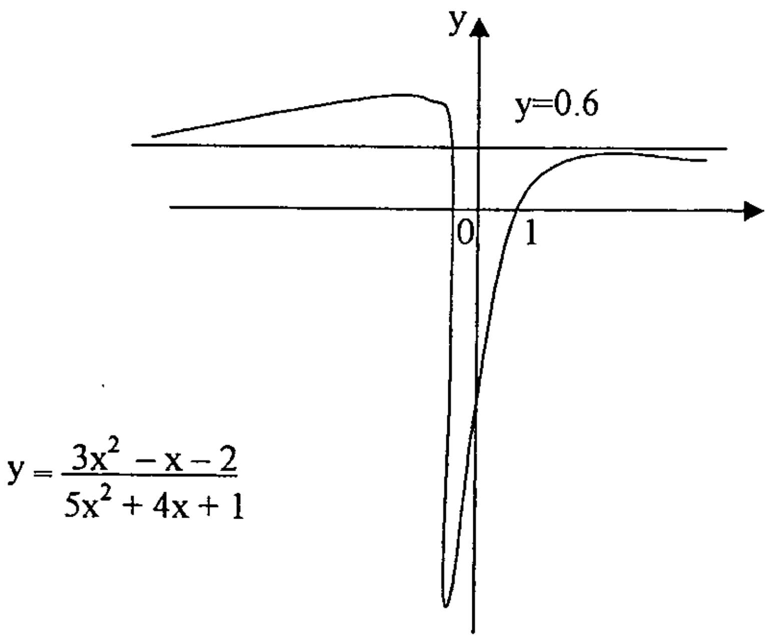


FIGURA 2.28

Ejemplo 2.31: Determina las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

SOLUCIÓN Dividimos numerador y denominador entre x y empleamos las propiedades de los límites, con lo cual:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} \text{ (donde } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0)$$

$$= \frac{-\sqrt{2 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}}{3 - 5 \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{3}$$

Así, vemos que la recta $y=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ también es una asíntota horizontal.

Recordemos que la asíntota vertical se presenta cuando el denominador, que es $3x - 5$, sea 0; esto es cuando $x = \frac{5}{3}$.

Si x se acerca a $\frac{5}{3}$ y $x \geq 5$, el numerador se aproxima a cero y $3x - 5$ es positivo. El numerador, que es $\sqrt{2x^2 + 1}$, siempre es positivo, de modo que

$$\lim_{x\to\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \infty$$

Si x se acerca a $\frac{5}{3}$, pero $x < \frac{5}{3}$, entonces $3x - 5 < 0$ y $f(x)$ es grande y negativa, por consiguiente,

$$\lim_{x\to\frac{5}{3}^-} = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

La asíntota vertical es $x = \frac{5}{3}$. Las tres asíntotas que hemos determinado se muestran en la FIGURA 2.29.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0$$

Por lo tanto la función $y = \sqrt{x^2+1} - x$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Vemos este resultado en la FIGURA 2.30

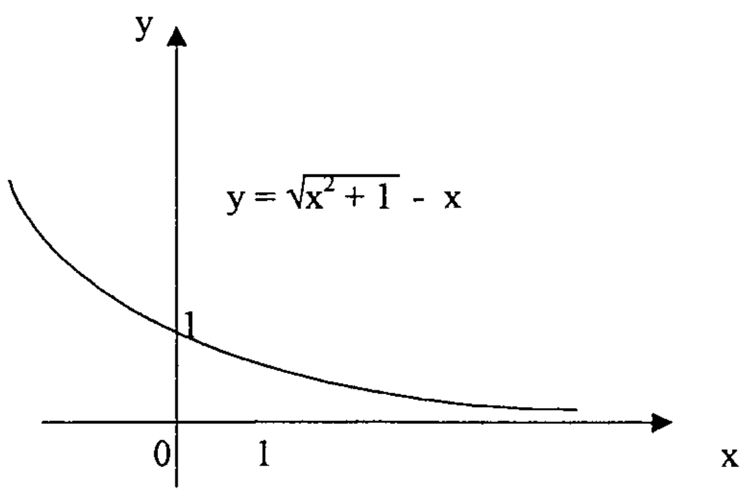


FIGURA 2.30

Ejemplo 2.33: Determine las asíntotas horizontales de la función

$y = \dfrac{2x-9}{x-2}$ si es que existen.

SOLUCIÓN Observemos que la máxima potencia en x es ella misma, por lo que dividiremos el numerador y denominador entre x.

Ejemplo 2.34: Hallar las asíntotas horizontales de la función

$$y = \frac{4x^2 + 2}{x - 1} \text{ si es que existen.}$$

SOLUCIÓN Como la máxima potencia de x es x^2, dividiremos el numerador y el denominador entre este valor.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4 + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4 + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \infty$$

Obtener las asíntotas horizontales y verticales de cada curva.

11) $y = \dfrac{x}{x+4}$

12) $y = \dfrac{x^2+4}{x^2-1}$

13) $y = \dfrac{x^3}{x^2+3x-10}$

14) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

RESPUESTAS

1.- 0

2.- 0

3.- -2

4.- 1/6

5.- 0

6.- 0

7.- 2

8.- -1

9.- 0

10.- 0

11.- $x = -4$ asíntota vertical
$y = 1$ asíntota horizontal

Para obtener información más detallada acerca de cómo varía f(x) cuando x se acerca a 3, nos preguntaremos lo siguiente:

¿Cuán cerca de 3 debe estar x para que f(x) difiera de 5 menos que 0.1?

La distancia de x a 3 es $|x-3|$, y la de f(x) a 5 es $|f(x)-5|$, de modo que el problema consiste en encontrar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \quad \text{si} \quad |x - 3| < \delta, \text{, pero } x \neq 3$$

Si $|x-3| > 0$, entonces $x \neq 3$, de modo que una formulación equivalente al problema es determinar un número tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Si $0 < |x - 3| < (0.1)/2 = 0.05$, entonces

$$|f(x) - 5| = |(2x-1) - 5| = |2x-6| = 2\,|x-3| < 0.1$$

Este es un modo preciso de decir que $f(x)$ se acerca a 5 cuando x lo hace a 3, porque la ecuación (1) dice que podemos colocar los valores de $f(x)$ a una distancia ε arbitraria de 5, si hacemos que los valores de x estén dentro de una distancia $\varepsilon/2$ de 3, pero con $x \neq 3$.

Notaremos que la ecuación (1) se puede escribir en esta forma:

$$5-\varepsilon \quad f(x) \quad 5+\varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 3-\delta < x < 3+\delta \; (x \neq 3).$$

lo cual vemos en la FIGURA 2.31. Si hacemos que los valores de $x \neq 3$ estén en el intervalo $(3-\delta, 3+\delta)$, podemos decir que los valores de $f(x)$ quedan en el intervalo $(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$.

DEFINICIÓN 12:

> Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene el número a, excepto quizá a a mismo. Se dice que el límite de f(x) es L, cuando x tiende a a y se escribe
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> si para cada número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que
>
> $$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que } 0 < |x-a| < \delta.$$

Otro modo de escribir el último renglón de esa definición es

$$\boxed{\text{si} \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Otra notación para indicar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

Dado que $|x-a|$ es la distancia de x a a y $|f(x) - L|$ es la distancia de f(x) a L y, además, ε puede ser arbitrariamente pequeño, la definición de límite se puede expresar en palabras como sigue:

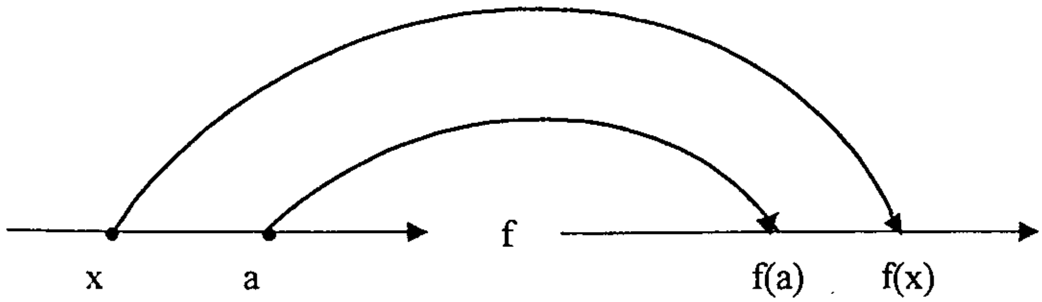


FIGURA 2.32

La definición de límite expresa que si se produce cualquier intervalo pequeño ($L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$) alrededor de L, podemos determinar un intervalo ($a - \delta$, $a + \delta$) alrededor de a, tal que f transforme todos los puntos en ($a - \delta$, $a + \delta$)- excepto, quizá, a- en los del intervalo ($L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$). (FIGURA 2.33)

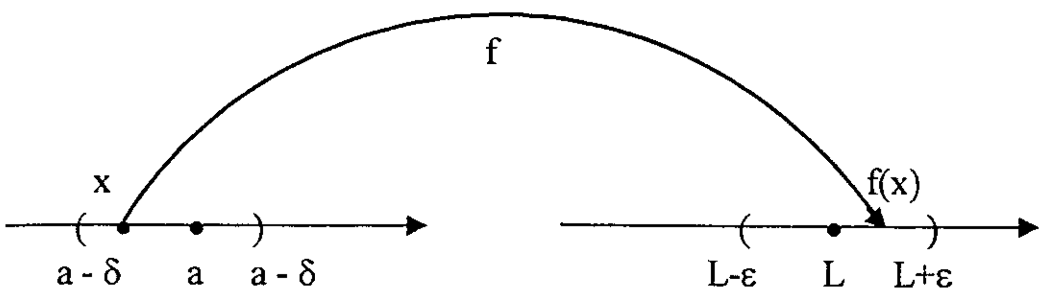


FIGURA 2.33

Se puede representar otra interpretación geométrica de los límites en términos de la gráfica de una función. Si se produce $\varepsilon > 0$, trazamos las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ y la gráfica de L. (Véase FIGURA 2.34)

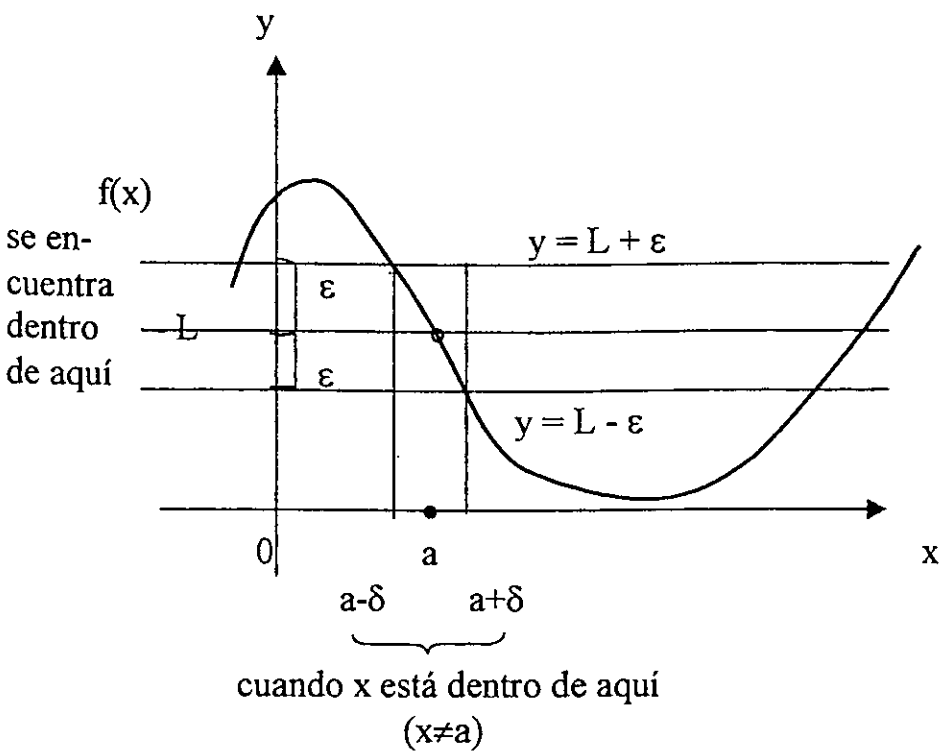


FIGURA 2. 35

Puedes ver que si se ha determinado un δ con esas propiedades, entonces cualquier δ menor también llenará el cometido.

La FIGURA 2.36 muestra que si se elige un $\varepsilon > 0$ más pequeño, se necesitará un δ menor.

$|4(x-3)| < \varepsilon$

$4\,|x-3| < \varepsilon$

$|x-3| < \varepsilon/4$

Por lo tanto, $|x-3| < \varepsilon/4$ siempre que $0 < |x-3| < \delta$

Ello nos sugiere que deberíamos escojer a $\delta = \varepsilon/4$

2. Demostración (comprobar que δ funciona). Dado $\varepsilon > 0$, definimos a

$\delta = \varepsilon/4$ Si $0 < |x-3| < \delta$, entonces

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4\,|x-3| < 4\,\delta = 4(\varepsilon/4) = \varepsilon$$

Así

$$|(4x-5)-7| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x-3| < \delta$$

De acuerdo con la definición de límite,

$$\lim_{x \to 3} (4x-5) = 7$$

Ejemplo 2.36: Demuestre que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

SOLUCIÓN 1. proponer un valor de δ. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos definir un

número $\delta > 0$ tal que

$|x^2 - 9| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta$

Para relacionar

$|x^2 - 9|$ con $|x - 3|$, escribimos

$|x^2 - 9| = |(x - 3)(x + 3)|$

A continuación vemos que hay que cumplir

$|x + 3| \, |x - 3| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta$

Notarás que si se puede definir una constante positiva C tal que $|x + 3| <$ C, entonces

$|x + 3| \, |x - 3| < C \; |x + 3|$

y se puede obligar que $C|x - 3| < \varepsilon$ haciendo que

$|x - 3| < \varepsilon / C = \delta$

También, $|x - 3| < \varepsilon/7$, de manera que

$$|x^2 - 9| = |x + 3|\,|x - 3| < 7 \cdot \varepsilon/7 = \varepsilon$$

Así queda demostrado que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Ejemplo 2.37: Determina con una gráfica un número δ tal que

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2 \text{ siempre que } |x - 1| < \delta$$

En otras palabras, hallar un número δ que corresponda a

$\varepsilon = 0.2$ en la definición de límite, para la función

$f(x) = x^3 - 5x + 6$, donde $a = 1$ y $L = 2$.

SOLUCIÓN En la FIGURA 2.38 se muestra una gráfica de f; nos interesa la región cercana al punto (1, 2). Notarás que la desigualdad

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

se puede reformular como $1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$

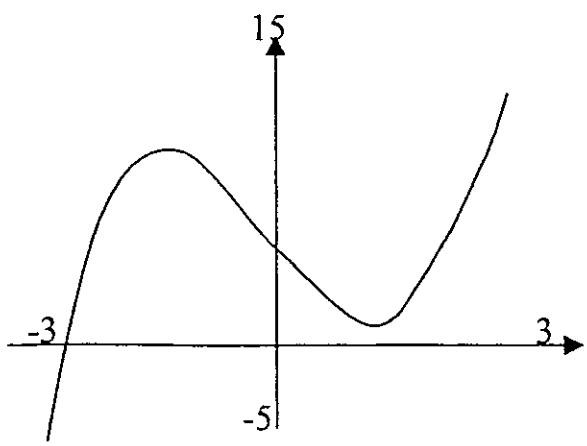


FIGURA 2.38

La distancia de $x = 1$ al extremo izquierdo es $1 - 0.92 = 0.08$, y al extremo derecho es 0.12. Podemos elegir δ para que sea el menor de esos números, esto es $\delta = 0.08$. Entonces podremos reformular nuestras desigualdades como sigue, en términos de distancias:.

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2 \text{ siempre que } |x-1| < 0.08$$

Esto dice, ni más ni menos, que si mantenemos x a una distancia de 1 menor de 0.08, podremos conservar $f(x)$ dentro de una distancia de 2 menor que 0.2.

EJERCICIOS 8: 1. ¿Cuánto se debe acercar x a 3 para que $6x + 1$ quede a una distancia menor que a) 0.1 y b) 0.01, de 19?

2. Mediante una gráfica determinar un número δ tal que

$$|\sqrt{4x+1} - 3| < 0.5 \text{ siempre que } |x-2| < \delta$$

3. Mediante un gráfica determinar un número δ tal que

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} > 100 \text{ siempre que } 0 < |x-1| < \delta$$

UNIDAD 3. LA DERIVADA Y SUS INTERPRETACIONES

TEMÁTICA

Tiempo aproximado 8 horas

- La derivada y sus interpretaciones física y geométrica.

- Como rapidez de cambio instantáneo de una función; con ejemplos extraídos de la física, la economía, la biología y las diversas disciplinas.

- Como pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.

- Cálculo de derivadas sencillas; por ejemplo, de funciones como:

$y = x^2$;
$y = 6x^2 + 2x - 1$
$y = x^3$; $y = \sqrt{x}$,....

- Aplicaciones elementales de la derivada: cálculo de tangentes y normales; de razones de cambio; primeros cálculos aproximados utilizando la fórmula:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o)$$

OBJETIVOS

Objetivo particular:

En esta unidad el alumno retomará algunos de los problemas de la primera unidad y a través del análisis de ellos llegará al concepto de derivada.

Objetivos específicos:

Al finalizar esta unidad el alumno:

- Aplicará la derivada en problemas sencillos de rapidez de cambio extraídos de la física, la economía y otras disciplinas.

- Calculará la derivada de funciones sencillas, a manera de ejemplo, derivadas de polinomios de segundo y tercer grado.

- Calculará para casos sencillos tangentes y normales a una curva.

3.1 LA DERIVADA Y SU INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El desarrollo del Cálculo surgió de cuatro grandes problemas que ocupaban a los matemáticos europeos en el siglo XVII:

1. El problema de la tangente.
2. El problema de la velocidad y la aceleración.
3. El problema de máximos y mínimos.
4. El problema del área.

Cada uno involucra la noción de límite y serviría para introducir el Cálculo. Por su naturaleza geométrica, escogemos para empezar el de la tangente. Soluciones parciales a dicho problema fueron dadas por Pierre Fermat, René Descartes, Christian Huygens (1629-1695) e Isaac Barrow (1630-1677). Sin embargo, la primera solución general parece haberla encontrado Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716).

Al estudiar los dos capítulos anteriores, se planteó en forma implícita la problemática de determinar la ecuación de la recta tangente a una curva. En este sentido, el problema consistía en determinar la pendiente de dicha recta

Para una curva cualquiera el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente resulta más difícil. Así ¿cómo definir las rectas tangentes que muestra la FIGURA 3.2?

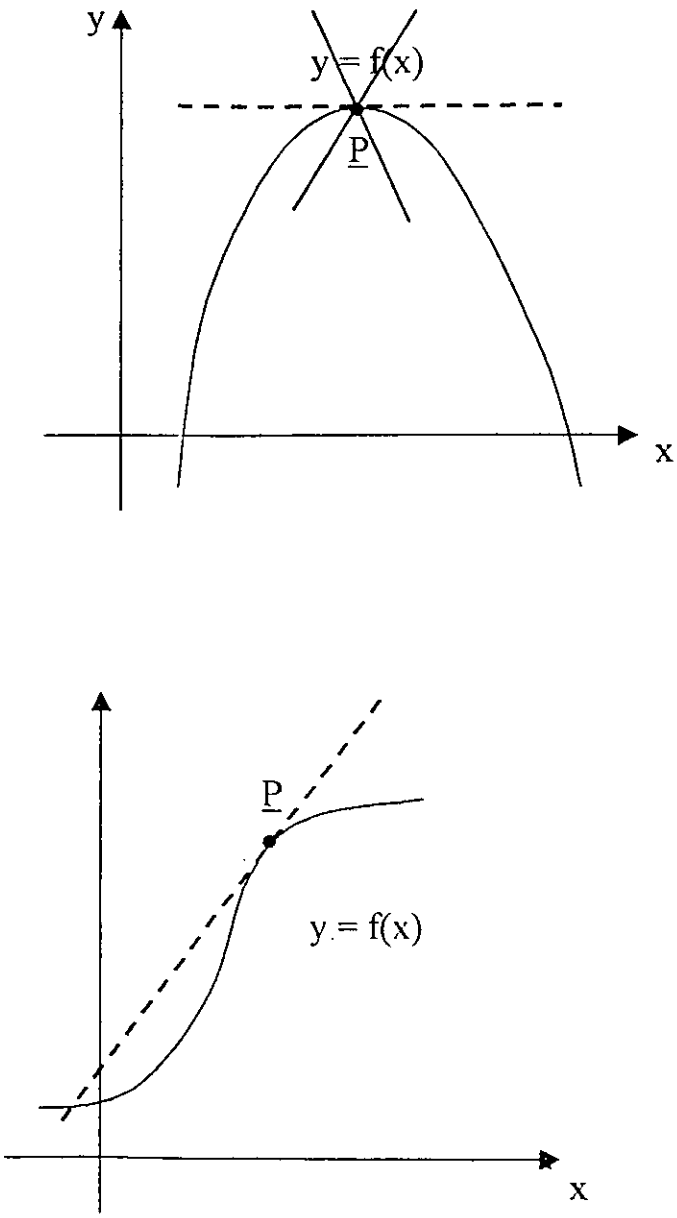


FIGURA 3.2

Recordamos que la pendiente de una recta que pasa por los puntos $\underline{P}(x_1, y_1)$ y $Q(x_2\ y_2)$, está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_2 \neq x_1$$

La pendiente de la recta secante está dada por:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si consideramos $\underline{P}$ fijo y a Q un punto que se mueve y se acerca a P, tenemos que:

Cuando Q tiende a $\underline{P}$, la recta SECANTE tiende a la recta tangente, pero además $x + h$ tiende a x, cuando esto último sucede h tiende a cero (ver FIGURA 3.4)

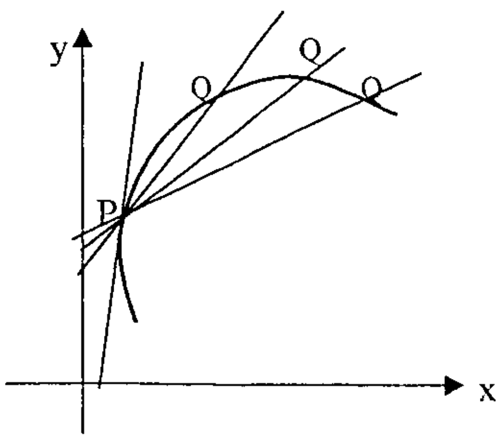


FIGURA 3.4

DEFINICIÓN 2:

> A la pendiente de la recta tangente a f(x) en $\underline{P}$ (x, f(x))se le llama DERIVADA de f(x) y se denota $f'(x)$.
>
> Por lo tanto:
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
>
> Si el limite existe

$f'(x)$ se lee como "f prima de x".

Además del símbolo f′, existen algunos otros tipos de notación que son utilizados para representar la derivada de $y = f(x)$. Los más comunes son:

$f'(x) = y'$ $\Longrightarrow$ Lagrange, (1736-1813)

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$ $\Longrightarrow$ Leibniz, (1646-1716)

$D_x\, y = D_x\, f$ $\Longrightarrow$ Cauchy, (1789-1857)

A lo largo del texto utilizaremos tanto la notación de Lagrange como la de Leibniz en forma indistinta.

Como $f(x) = x^2$; $x = 3$ y $f(x) = 9$

$$m = f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 6 + h = 6 + 0 = 6$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en $\underline{P}(3, 9)$ es 6.

Ejemplo 3.2: Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva

$f(x) = x^3$ en el punto $P(1, 1)$

Ejemplo 3.3: Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $\underline{P}(4, 2)$.

SOLUCIÓN Veamos cómo se vería el problema gráficamente.

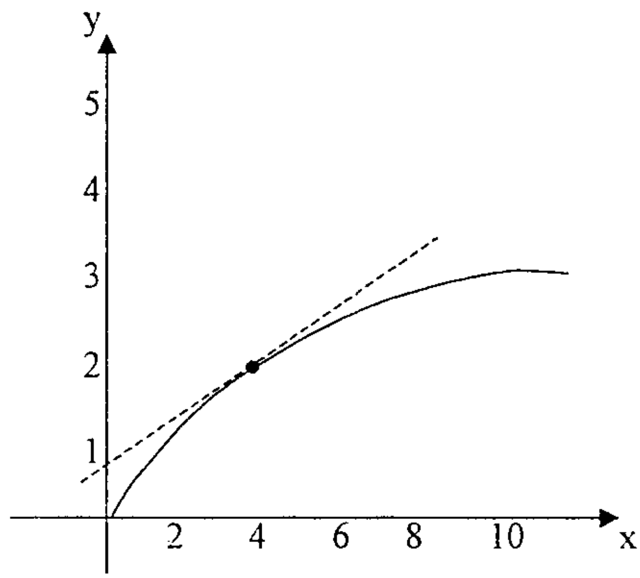


FIGURA 3.6

Recordemos que dado un punto y la pendiente podemos encontrar la ecuación de una recta. Ya conocemos el punto, únicamente faltaría determinar la pendiente, lo cual lo podemos hacer con la definición de derivada:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\,(\sqrt{4+h}+2)}\,.$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+0}+2} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en P(4, 2) es $\frac{1}{4}$.

Enseguida encontraremos la ecuación de la recta tangente.

La fórmula para calcular la ecuación de una recta dado un punto y su pendiente, esta dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituyamos los valores del punto y la pendiente en la fórmula, para encontrar la ecuación.

$$\underset{x_1\;\;y_1}{P(4,\,2)} \qquad m = \frac{1}{4}$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4+4h+h^2} - \frac{1}{4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4-(4+4h+h^2)}{4(4+4h+h^2)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-4h - h^2}{4(4+4h+h^2)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h - h^2}{h\,[4(4+4h+h^2)]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-4 - h)}{h\,[4(4+4h+h^2)]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4 - h}{4(4+4h+h^2)} = \frac{-4}{4(4)} = \frac{-4}{16} = \frac{-1}{4}$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la curva

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando $x = 2$ es $\frac{-1}{4}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2(1+2h+h^2) + 1 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 - 4h - 2h^2 + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4h - 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h(-4 - 2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -4 - 2h = -4$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = -2x^2 + 1$ en el punto (1, -1) es –4, y la ecuación de la recta tangente es:

$$4x + y - 3 = 0$$

Ejemplo 3.6: Hallar el punto donde la recta tangente a la curva:

$f(x) = x^4$ tiene pendiente 32.

SOLUCIÓN Sea P (x, f(x)) el punto que se quiere encontrar. Se sabe que la derivada es igual a 32, por lo que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 32$$

Hasta este momento hemos encontrado $x = 2$, falta encontrar $f(x)$, la cual calculamos al sustituir $x = 2$ en la función $f(x) = x^4$, de donde:

$$f(2) = (2)^4 = 16$$

Por lo tanto el punto donde la recta tangente a la curva $f(x) = x^4$ tiene pendiente 32 es (2, 16).

Ya sabemos como encontrar la ecuación de una recta tangente, nos preguntamos ¿cómo determinar la ecuación de una recta perpendicular a la recta tangente?

Para poder responder a esta pregunta, daremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3: La recta normal a la curva en un punto dado, es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Ejemplo 3.7: Determina la ecuación de la recta normal a la curva:

$$f(x) = 4x^3 - 2x + 1 \text{ en el punto } (1, 3)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(10 + 12h + 4h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 10 + 12h + 4h^2 = 10 + 0 + 0 = 10$$

La pendiente de la recta tangente es igual a 10 ¿Cuál es la pendiente de la recta normal?

La pendiente de la recta normal es $\frac{-1}{10}$.

Como ya conocemos la pendiente $\frac{-1}{10}$ y el punto (1, 3), procedamos a calcular la ecuación.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-1}{10}(x - 1)$$

$$10(y - 3) = -(x-1)$$

$$10y - 30 = -x + 1$$

$$x - 1 + 10y - 30 = 0$$

$$x + 10y - 31 = 0$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{36 - 24h + 4h^2 - 1 - 35}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-24h + 4h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-24 + 4h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-24 + 4h) = -24$$

Como la pendiente de la recta tangente es igual a –24 se tiene que la pendiente de la recta normal será $\frac{1}{24}$.

Con la pendiente $\frac{1}{24}$ y el punto (-3, 35) se calculará la ecuación de la recta normal.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 35 = \frac{1}{24}(x - (-3))$$

$$24(y - 35) = x + 3$$

$$24y - 840 = x + 3$$

3. Encontrar la ecuación de la recta normal a la curva:

a) $y = \sqrt{41 - x^2}$ cuando $x = 5$

b) $x^2 + y^2 = 100$ en el punto (-6, 8)

4. Determina las coordenadas del punto donde la recta tangente a la curva

$y = \sqrt[3]{x}$ tiene pendiente $\frac{1}{3}$.

RESPUESTAS

1. a) $m = 12$

   b) $m = -27$

   c) $m = -3$

2. a) $3x - y = 0$

   b) $x - 8y + 16 = 0$

   c) $2x - y + 1 = 0$

3.- a) $4x - 5y = 0$

   b) $4x - 3y + 48 = 0$

4.- (1, 1)

movimiento de esta piedra, por ejemplo. como la profundidad del cañón es de 313.6 metros de la ecuación

$$4.9\ t^2 = 313.6$$

podemos obtener $t = \sqrt{313.6/4.9} = 8$, lo cual indica el tiempo que tarda la piedra en llegar al fondo, es decir, la piedra tarda 8 segundos para llegar al suelo del cañón. Estamos interesados en estudiar los cambios que suceden en el recorrido $f(t)$ de la piedra a medida que el tiempo t transcurra.

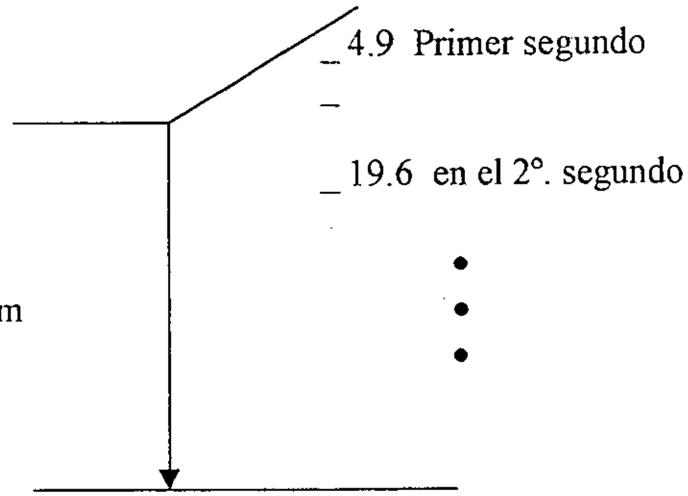
Investiguemos los cambios que suceden en $f(t)$ a medida que el tiempo t transcurra, para fijar ideas, hagámoslo cada segundo.

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 4.9, \quad f(2) = 4.9(2)^2 = 19.6, \ldots\ldots$$

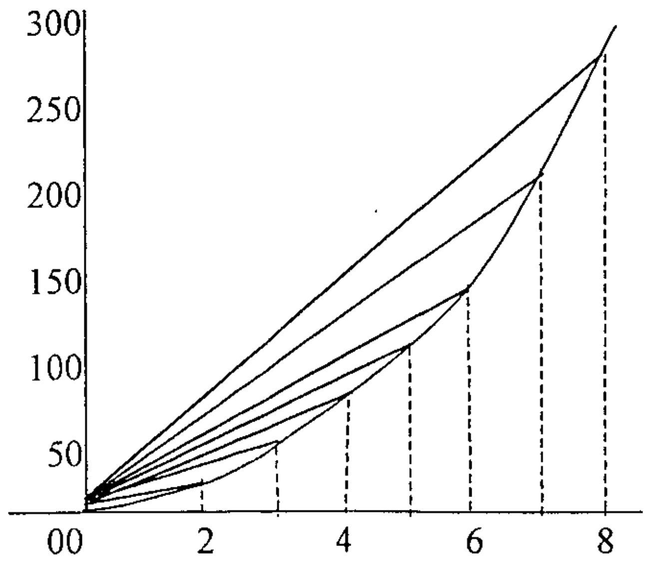
mientras el tiempo transcurre de 0 a 1 segundo $f(t)$ se incrementa de 0 a 4.9 metros, de esta forma hubo un cambio en la distancia de 4.9, del primer al segundo segundo, la piedra recorre de 4.9 a 19.6 metros, causando un cambio en la distancia de $19.6 - 4.9 = 14.7$ metros y así sucesivamente.

Hagamos la siguiente tabla (se te invita a completar la tabla)

$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{122.5-19.6}{3} = \frac{102.9}{3} = 34.3 \text{ m/seg.}$$



Cañón



Distancia que recorre la piedra

FIGURA 3.8

DEFINICIÓN 4:

1. Sea f una función y [a, b] un intervalo contenido en el domino de f. La rapidez de cambio promedio de f en [a, b] es el número.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Sea f una función que describe la posición en el tiempo t de un objeto, que se mueve a lo largo de una línea recta con t en un intervalo [a, b] entonces la velocidad promedio del objeto en [a, b] se define como la rapidez de cambio promedio de la función de f en [a, b]. Además, la rapidez promedio del objeto en [a, b] es el valor absoluto de su velocidad promedio en ese intervalo.

Nos damos cuenta de las definiciones que; la rapidez promedio es un concepto más general que el de velocidad promedio, pues la velocidad promedio es un caso particular de la rapidez promedio, que sólo se usa cuando los números de su domino se refieren al tiempo y los de la imagen cuando denotan posición. Si los números en el dominio no se refieren al tiempo, entonces se debe usar el término más general, rapidez de cambio promedio.

SOLUCIÓN Para el intervalo [0, 10], la razón media de cambio es

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{2-0}{10-0} = \frac{2}{10} = 0.2 \text{ mg/min}$$

En [0, 20] es a su vez

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{17-0}{20-0} = \frac{17}{20} = 0.85 \text{ mg/min}$$

Y en [100, 110] la razón media de cambio es

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{103-113}{110-100} = \frac{-10}{10} = -1 \text{ mg/min}$$

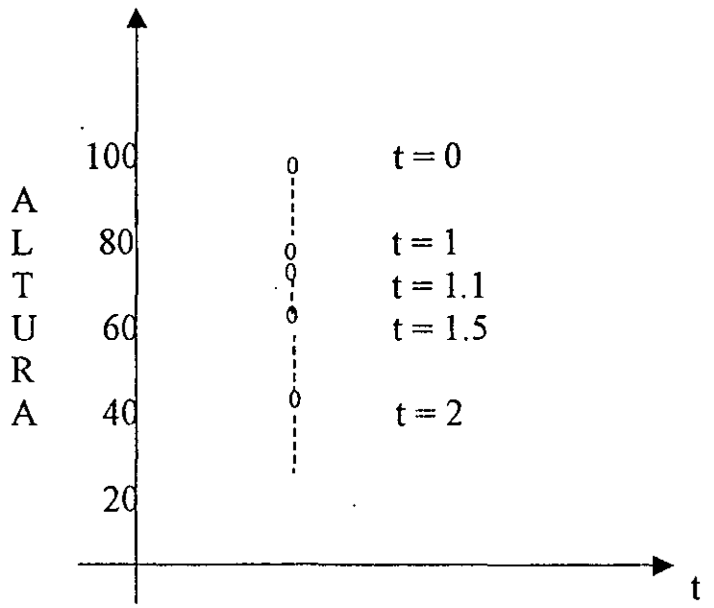
En la FIGURA 3.10 se observa que la razón media de cambio es positiva cuando la concentración aumenta y negativa cuando disminuye.

Ejemplo 3.10: Un cuadrado cuya longitud por lado es de x centímetros, tiene un área de $A(x) = x^2$ en su superficie. Supongamos que x se incrementa, entonces el área $A(x)$ se incrementa también.

Encuentra la rapidez de cambio del área cuando x se incrementa de

SOLUCIÓN Usando la ecuación de posición, obtenemos la altura en $t = 1$, 1.1, 1.5 y 2 como muestran la tabla y la FIGURA 3.11.

s	84	80.64	64	36
t	1	1.1	1.5	2



Objeto cayendo

FIGURA 3.11

SOLUCIÓN a) En el intervalo [1, 2], el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 36 pies. Luego, la razón media de cambio es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36 - 84}{2 - 1} = \frac{-48}{1} = -48 \text{ pies/seg}$$

$$f(t) = 100 - 100t + 25t^2$$

Calcula la velocidad promedio en los siguientes intervalos

$[1, 3], [1, 2], [1, 1.5], [1, 1.1], [1, 1.01]$ y $[1, 1.001]$

3. Un tanque se llena con 1800 litros de agua. Este tanque tarda 60 segundos en vaciarse después de quitar el tapón del desagüe que está en su parte inferior. Supónte que dicho tapón se quita en el instante $t = 0$ y que el volumen V del agua restante en el tanque después de t minutos es

$$V(t) = \frac{(60-t)^2}{2} = 1800 - 60t + \frac{t^2}{2}$$

Encuentra la rapidez de cambio promedio

$[0, 1], [1, 5], [10, 20]$ y $[30, 50]$

(NO HAY RESPUESTAS)

3.2.2 RAPIDEZ DE CAMBIO INSTANTÁNEO

Lo primero que haremos en esta sección es distinguir entre cambio y rapidez de cambio. Las palabras "rapidez de cambio" pueden referirse a la cantidad

x en el intervalo	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]
La rapidez de cambio promedio	3	5	7	9	11

Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dada anteriormente, ahora queremos determinar la rapidez a la que f(x) está cambiando en el instante preciso en que $x = 3$, debes darte cuenta que hay una dificultad, ya que en $x = 3$, $a = b$ con lo que el denominador es cero, y ¡no se puede dividir entre cero! Para calcular la rapidez de cambio instantáneo en $x = 3$, consideramos intervalos más cercanos a 3.

[3, 3.3], [3, 3.2], [3, 3.1], [3. 3.01], [3, 3.001] y [3, 3.0001]

Nuevamente resumimos en la siguiente tabla la rapidez de cambio promedio.

x en el intervalo	[3, 3.3]	[3, 3.2]	[3, 3.1]	[3, 3.01]	[3, 3.001]	[3, 3.0001]
La rapidez de cambio promedio	8.3	8.2	8.1	8.01	8.001	8.0001

b) La pelota esta en el suelo cuando la altura f(x) es cero, para encontrar los valores de x, hacemos

$$x - 0.02\,x^2 = 0$$

$$x(1 - 0.02x) = 0$$

por lo tanto $x = 0$ ó $1 - 0.02x = 0$

de aquí $x = 0$ ó $x = 50$

Concluimos que la distancia horizontal que recorre la pelota es de 50 metros.

c) Podemos proceder como en el ejemplo anterior, dando intervalos cada vez más cercanos a 10 para ver el comportamiento.

[10, 10.1], [10, 10.01], [10, 10.001], [10, 10.0001] y [10, 10.00001]

En la tabla siguiente resumimos la rapidez de cambio promedio

4. Sea $h(x) = y = x^2 - x$

a) Grafica esta función en un plano cartesiano

b) Encuentra la rapidez de cambio instantáneo de y con respecto a x en $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ y en $x = 0$.

5. Sea V el volumen de un cubo de lado $x(V(x) = x^3)$

a) ¿Cuánto se incrementa el Volumen V, cuando x aumenta de 0 a 1? ¿de 1 a 2? ¿de 2 a 3?

b) ¿Cuál es la rapidez promedio de V en el intervalo [0, 1]? ¿en [1, 2]? ¿en [2, 3]?

c) Calcula $\lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$ si dicho límite existe.

d) ¿Cuánto vale la rapidez instantánea en $x = 1, 2, 3$?

RESPUESTAS

1. Rapidez instantánea y promedio 2.

2. Rapidez promedio 1.146, rapidez instantánea $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547$

3. Rapidez promedio 4.01, rapidez instantánea 4.

4. b) 1, 0, -3

5. a) 1, 7, 19 b) 1, 7, 19 c) $3x^2$ d) 3, 12, 27

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x$$

Hemos obtenido una fórmula para calcular las pendientes de las rectas tangentes a $f(x) = x^2$ en cualquier punto.

Si deseamos encontrar la pendiente de la recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto (-2, 4), ya no tenemos que efectuar todo el procedimiento anterior, dado que ya tenemos una fórmula, lo que hacemos es sustituir $x = -2$ en $f'(x) = 2x$.

Por lo tanto $f'(-2) = 2(-2) = -4$

Por consiguiente la pendiente de la recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto (-2, 4) es -4.

OBSERVACIÓN: Encontrar la derivada equivale a encontrar la fórmula para predecir la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto.

Ejemplo 3.16: Encontrar la derivada de la función

$$y = \frac{2}{x^3}\ , \quad x \neq 0$$

SOLUCIÓN De la definición se desprende que:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2}{(x+h)^3} - \dfrac{2}{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2}{x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3} - \dfrac{2}{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2x^3 - 2(x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3)}{x^3\,(x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3)}}{h}\ .$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-6xh^2 - 6x^2h - 2h^3}{x^3\,(x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3)}}{h}\ .$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-6xh^2 - 6x^2h - 2h^3}{h[x^3(x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3)]}\ .$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-6xh - 6x^2 - 2h^2)}{h[x^3(x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3)]}\ .$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-6xh - 6x^2 - 2h^2}{x^3(x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3)}\ .$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-6x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4}$$

Por consiguiente. Si $g(t) = 5t^2 + 2t - 6$ entonces

$g'(t) = 10t + 2$

Ejemplo 3.18: Determina la derivada de la función

$$y = x^3 + x$$

SOLUCIÓN $$y' = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 + (x+h)] - [x^3 + x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x + h - x^3 - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 + 1 = 3x^2 + 1$$

Por lo tanto la derivada de la función

$y = x^3 + x$ es $y' = 3x^2 + 1$

Esta forma de calcular la derivada se conoce como el método o proceso de los cuatro pasos, los cuales se enuncian a continuación:

5. $y' = 12x^2 - 12x + 2$

6. $y' = 3$

7. $g'(x) = \frac{-6}{x^3}$

8. $s'(t) = 8t - 6$

9. $y' = 16x^3$

10. $f'(x) = \frac{2}{x^2}$

3.4 APLICACIONES ELEMENTALES DE LA DERIVADA

3.4.1. RESOLVIENDO ALGUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

En la unidad I quedaron inconclusos algunos problemas los cuales retomaremos en esta sección. Con las herramientas que ya contamos se pueden resolver en forma íntegra.

¿Recuerdas el problema de la caja?

Vuelve a leerlo para que recuerdes lo que dice (ejemplo 1.1).

Ejemplo 3.19: Un fabricante de cajas de cartón desea hacer cajas abiertas de piezas de cartón de 50 cm. de lado, cortando cuadrados iguales en las

Al analizar la gráfica observamos que en el punto más alto, es decir en el punto máximo, $M(x, V(x))$, al trazar la recta tangente a la curva, observamos que la pendiente de la recta tangente es cero.

Recuerda que la pendiente de la recta tangente a $V(x)$, es la derivada de $V(x)$.

¿Qué significa que la pendiente de la recta tangente sea igual a cero?

¡Significa que $V'(x) = 0$!

Lo anterior significa que para encontrar cuánto debemos cortar en cada esquina para que el volumen de la caja sea máximo, basta con saber para que valores de x, $V'(x) = 0$;

Es decir $V(x) = (50\text{-}2x)^2x$

$$= 2500x - 200x^2 + 4x^3$$

Procedamos a calcular la derivada.

$$V'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[2500(x+h) - 200(x+h)^2 + 4(x+h)^3] - [2500x - 200x^2 + 4x^3]}{h}$$

Para que resulte más sencillo resolver esta ecuación cuadrática, dividamos ambos miembros de la igualdad entre 4.

$$3x^2 - 100x + 625 = 0$$

Resolveremos esta ecuación utilizando la fórmula general, de donde se tiene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-100) \pm \sqrt{(-100)^2 - 4(3)(625)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-100 \pm \sqrt{10000 - 7500}}{6}$$

$$= \frac{-100 \pm \sqrt{2500}}{6} = \frac{100 \pm 50}{6}$$

De aquí se desprende que x tiene 2 soluciones.

$$x_1 = \frac{100 + 50}{6} = 25 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{100 - 50}{6} = \frac{50}{6} = 8.33$$

Si $x = 25 \Longrightarrow V(25) = 0$

Pero si $x = \frac{25}{3}$ entonces $V\left(\frac{25}{3}\right) = 9259.25 \text{ cm}^3$

Llamemos P a la parte del terreno que deseamos cercar, por lo tanto:

$$P = 2x + y$$

Además sabemos que el área $A = xy$ es de 500 m^2, es decir

$$xy = 500 \text{ m}^2$$

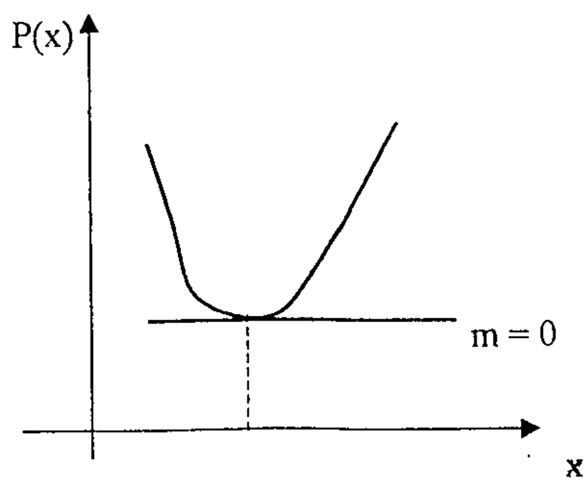
Al despejar y de $xy = 500$ resulta:

$$y = \frac{500}{x}$$

Al sustituir en $P = 2x + y$, se tendrá el perímetro en función de la variable "x".

$$P(x) = 2x + \frac{500}{x}$$

Graficamente tenemos:



Habíamos visto ya, en la unidad I, que el punto mínimo de la función tiene la pendiente de la recta tangente a la curva igual a cero, es decir $P'(x) = 0$.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2hx^2 + 2h^2x - 500h}{xh(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x^2 + 2hx - 500)}{xh(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 2hx - 500}{x(x+h)} = \frac{2x^2 - 500}{x^2} = 2 - \frac{500}{x^2}$$

Por lo tanto, la derivada es

$$P'(x) = 2 - \frac{500}{x^2}$$

Queremos conocer el valor de x, cuando $P'(x) = 0$ entonces es necesario resolver la ecuación.

$$2 - \frac{500}{x^2} = 0$$

$$x^2\left(2 - \frac{500}{x^2}\right) = 0(x^2) \quad \text{multiplicando por } x^2$$

$$2x^2 - 500 = 0 \qquad \text{despejando } x$$

$$x^2 = \frac{500}{2} = 250$$

$P = 4\sqrt{250}$ m

Veamos un último ejemplo.

Ejemplo 3.21: Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de texto. Los márgenes superior e inferior tienen 1.5 pulgadas de anchura y los laterales una pulgada. ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerida?

SOLUCIÓN El área que hemos de minimizar es (véase FIGURA 3.13).

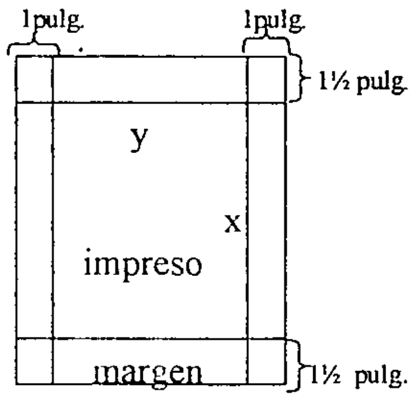


FIGURA 3.13

$$A = (x+3)(y+2)$$

El área impresa viene dada por

$$24 = xy$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h + \dfrac{72x - 72(x+h)}{x(x+h)}}{h} .$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h + \dfrac{72x - 72x - 72h}{x(x+h)}}{h} .$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h - \dfrac{72h}{x(x+h)}}{h} .$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(2 - \dfrac{72}{x(x+h)}\right)}{h} .$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(2 - \frac{72}{x(x+h)}\right)$$

$$= 2 - \frac{72}{x^2}$$

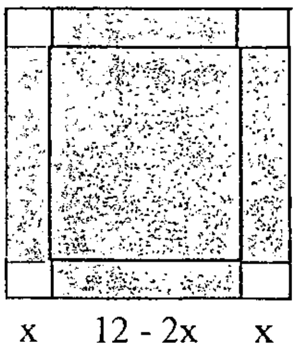
$$A'(x) = 2 - \frac{72}{x^2} = 0$$

EJERCICIOS 5:

1.- Hallar dos números positivos cuyo producto sea 192 y cuya suma sea mínima.

2.- Se quiere construir una caja abierta con base cuadrada, empleando 108 pulgadas cuadradas de materia. ¿Qué dimensiones producirán una caja de volumen máximo?.

3.- Se desea hacer una caja abierta, con una pieza cuadrada de material de 12 pulgadas de lado, cortando cuadrados iguales de cada esquina, y doblando por las líneas de puntos (como muestra la figura). Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.



4. Una página ha de contener 30 pulgadas cuadradas de texto. Los márgenes superior e inferior son de 2 pulgadas y los

3.3.2 APROXIMACIONES Y LINEALIDAD LOCAL

Como se sabe, cerca de cualquier punto las gráficas de la mayor parte de las funciones parecen casi una línea cuya pendiente es la derivada de la función en el punto. Si se estudia una función complicada sobre un pequeño intervalo, se puede calcular la gráfica de la función por esta línea. Esta propiedad de la mayor parte de las funciones se llama linealidad local porque se cumple sólo en una pequeña región de la función.

El propósito de esta sección es usar linealidad local para calcular valores aproximados para la función.

La pendiente de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$, así que la ecuación de la línea tangente es

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

o bien

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

(Considérese la FIGURA 3.14). Ahora se calcularán los valores de f por los de y de la línea tangente, el resultado aparece en el siguiente recuadro.

cambio constante en x de 0.001, hay un cambio casi constante de f(x) de 0.002. De esta forma, cerca de $x = 1$, la función x^2 parece casi lineal con una pendiente de 2. En el siguiente ejemplo se usa linealidad local para calcular los valores de x^2 rápidamente.

Tabla de valores para $f(x) = x^2$

x	x^2
1	1
1.001	1.002001
1.002	1.004004
1.003	1.006009
1.004	1.008016
1.005	1.010025

Ejemplo 3.22: Usar el hecho de que $f(x) = x^2$ es localmente lineal cerca de $x = 1$ para dar una regla sencilla a fin de calcular el cuadrado de un número cercano a 1. Emplear esta regla para calcular $(1.013)^2$, $(1.00007)^2$, $(0.989)^2$ y $(0.994)^2$.

Como otro ejemplo veamos la función raíz cuadrada, misma que también parece localmente lineal cerca de cualquier punto; en la siguiente tabla aparecen valores cercanos a $x = 4$. Obsérvese que todo cambio de 0.001 en x da lugar a un cambio en f(x) de alrededor de 0.00025. Así se tiene comportamiento localmente lineal con una pendiente de alrededor de 0.00025/0.001 = 1/4. Se puede usar este comportamiento localmente lineal para calcular un valor en la tabla entre dos valores dados (a esto se llama interpolación) o para extender la tabla a un valor fuera de los valores dados (a esto se llama extrapolación).

Tabla de valores para

$f(x) = \sqrt{x}$

x	$f(x) = \sqrt{x}$
4	2.0000000
4.001	2.0002500
4.002	2.0005000
4.003	2.0007500
4.004	2.0010000
4.005	2.0012496

SOLUCIÓN $\sqrt{4.007} \approx 2.0017492$, así que el error es 0.000004. El cálculo es demasiado grande.

Ejemplo 3.25: Como la linealización local de valor es demasiado pequeño para la función x^2 y demasiado grande para la función $\sqrt{x}$. ¿Puede formular una conjetura que diga cuándo el cálculo de la línea tangente es demasiado grande o demasiado pequeño?

SOLUCIÓN La gráfica de x^2 es cóncava hacia arriba y se encuentra arriba de su línea tangente; por lo tanto, la linealización será siempre demasiado pequeña. La gráfica de $\sqrt{x}$ es cóncava hacia abajo y se encuentra abajo de su línea tangente, por lo que la linealización será demasiado grande.

Por supuesto, el uso principal de este método de cálculo no es para cantidades como $(1.0013)^2$ y $\sqrt{4.007}$, que se encuentran muchos más fácilmente con una calculadora. El propósito real de dichos cálculos es hacer estimaciones que no se pueden hacer fácilmente por otros medios, como en el siguiente ejemplo.

Costo en 1988 = costos en 1987 + cambio de costos

$\approx$ \$ 1987 + 195.50 = \$ 2 182.50

Como 1995 es ocho años después de 1987,

Costos en 1995 $\approx$ \$ 1987 + \$ 195.50(8) = \$ 3551

Debe darse cuenta de que es mucho más probable que el cálculo para 1988 en el ejemplo precedente sea cercano al valor verdadero que el estimado para 1995. Cuanto más se haga extrapolación a partir de datos dados, es más probable que se introduzcan más errores. Es poco probable que la tasa de cambio de los costos de salud pública permanezca en \$ 195.50 por año todo el tiempo hasta 1995.

EJERCICIOS 6: 1. Halle la ecuación de la línea tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$, a partir del hecho de que $f'(4) = \frac{1}{4}$. Confirme que el punto usado en el cálculo de $\sqrt{4.007}$ se encuentra en esta línea.

2. Use el hecho de que la derivada de $f(x) = x^3$ es 12 en $x = 2$ para llenar valores aproximados de x^3 cercanos a 2 en la tabla siguiente. Compruebe las respuestas de hallar x^3 exactamente con calculadora.

6. Compruebe que $1 - 8x$ es la linealización local de $\dfrac{1}{(1+2x)^4}$

cerca de $x = 0$:

RESPUESTAS

1.- $\sqrt{x} \approx 1 + \dfrac{1}{4}x$

$\sqrt{4.007} \approx 1 + \dfrac{1}{4}(4.007) = 2.00175$

2.- $x^3 \approx -16 + 12x$

x	2.000	2.001	2.002	2.003	2.004	2.005
x^3	8.000	8.012	8.024	8.036	8.048	8.06

3.- a) $f(x) = 3 + 1.5x$

b) $f(0.7) = 4.05$

$f(1.2) = 4.8$

$f(1.4) = 5.1$

UNIDAD 4. DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

TEMÁTICA

Tiempo aproximado 8 horas

•Primeras fórmulas y reglas de derivación:

- Derivadas de $y = c$; $y = x^n$;

  de polinomios; $y = \frac{1}{x}$; $y = \sqrt{x}$;......

- Derivada de una función por una constante; de la suma, la resta, el producto y el cociente de dos funciones.

•La regla de la cadena y sus aplicaciones para derivar funciones algebraicas, en particular, aplicaciones de las fórmulas:

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}; \quad \frac{d}{dx} \sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$$

•Ejemplos, ejercicios y aplicaciones de la derivación implícita.

OBJETIVOS

Objetivo particular:

En esta unidad se busca que el alumno encuentre sus primeras reglas y fórmulas de derivación, que conozcan la regla de la cadena y la derivación implícita en casos sencillos.

Objetivos específicos:

Al terminar esta unidad el alumno:

- Conocerá y aplicará las fórmulas de derivación algebraicas.
- Conocerá y aplicará las reglas para derivar: una suma o resta de funciones, el producto y el cociente, y una función por una constante.
- Conocerá y aplicará la regla de la cadena.
- Resolverá ejercicios de derivación implícita.

4.1 PRIMERAS FÓRMULAS Y REGLAS DE DERIVACIÓN

El procedimiento empleado hasta ahora de hallar derivadas mediante límites es tedioso incluso para funciones sencillas. Afortunadamente, hay reglas que facilitan mucho la tarea y permiten calcular derivadas sin usar directamente límites.

A. DERIVADA DE UNA CONSTANTE

La derivada de una constante es cero. La gráfica de una función constante $f(x) = c$ es una línea horizontal, con pendiente cero en todas sus partes. (véase FIGURA 4.1).

$$\boxed{\text{Si } f(x) = c, \text{ entonces } f'(x) = 0}$$

$$\frac{d}{dx}(8+7x) = 7$$

Enseguida demostraremos la proposición utilizando la definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[b + m(x+h)] - [b + mx]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{b + mx + mh - b - mx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h\to 0} m = m$$

C. DERIVADA DE UNA POTENCIA

Se han dado varios ejemplos que son casos especiales de la función potencia de grado n. Por ejemplo, $f(x) = x^n$

$n = 0$	$f(x) = 1$	$f'(x) = 0$
$n = 1$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}\ h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{2.3}\ h^3 + \ldots\ldots + h^n$$

Demostración.

Como $f(x) = x^n$, utilizaremos la definición de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{(n)(n-1)x^{n-2}}{2}\ h^2 + \ldots\ldots + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{(n)(n-1)x^{n-2}}{2}\ h^2 + \ldots\ldots + h^n}{h}$$

$m = f'(3) = 6(3)^5 = (243)6 = 1458$

Este ejemplo sugiere que la regla

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}}$$

También se puede cumplir para un entero negativo n y, efectivamente, se cumple; esto puede demostrarse mediante el uso de un método similar al de las potencias enteras y positivas. En efecto, esta regla se cumple para cualquier número n entero.

Ejemplos 4.3: Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

f(x) lo podemos reescribir como:

$$f(x) = x^{-2}$$

La derivada de f(x) es: $f'(x) = -2x^{-3}$

$$y' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Por lo tanto, si $y = \sqrt{x}$ entonces $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ que es el resultado encontrado anteriormente.

La fórmula que habíamos encontrado vale para cualquier exponente real; pero la demostración se deja como investigación al estudiante.

Por lo que podemos afirmar:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = x^n \quad ; n \in R \text{ entonces } f'(x) = nx^{n-1}}$$

Ejemplo 4.5: Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva

$y = \sqrt[3]{x}$ en el punto $(8, 2)$.

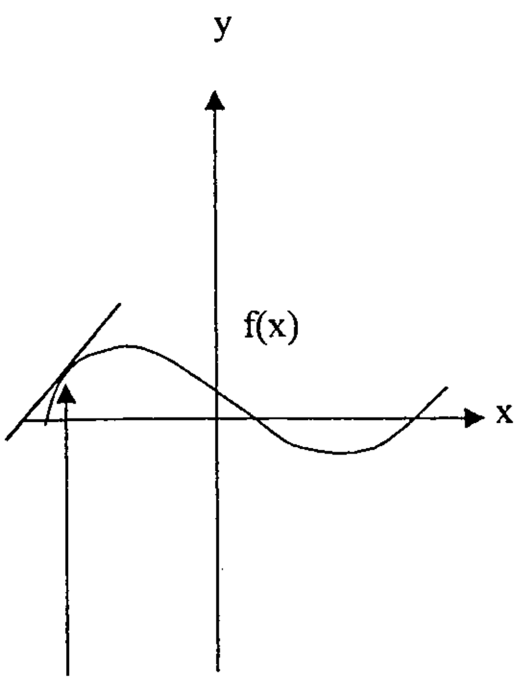
c) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3}$

$$y' = \frac{-1}{3}x^{-1/3-1} = \frac{-1}{3}x^{-4/3} = \frac{-1}{3x^{4/3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

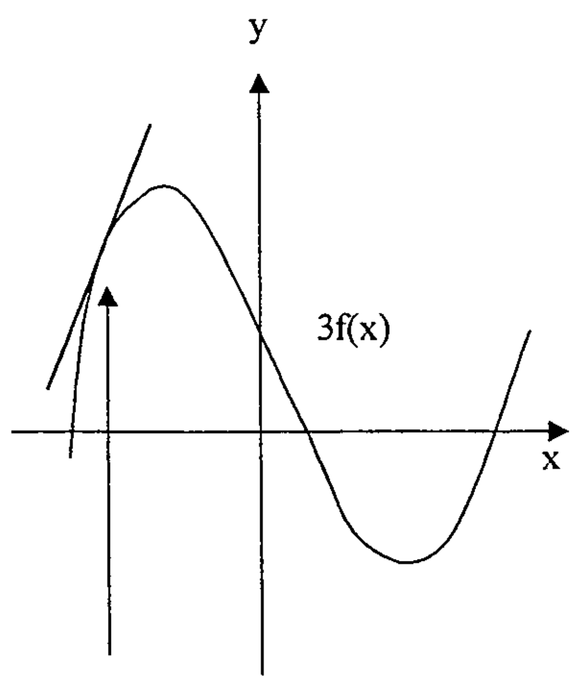
d) $y = \dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}} = \dfrac{2}{x^{3/5}} = 2x^{-3/5}$

$$y' = (2)\left(\frac{-3}{5}\right)x^{-3/5-1} = \frac{-6}{5}x^{-8/5} = \frac{-6}{5x^{8/5}} = \frac{-6}{5\sqrt[5]{x^8}}$$

E. DERIVADA DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN



pendiente = m



pendiente = 3m

Derivada de un múltiplo constante

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

Demostración.

Usando la definición de derivada se tiene

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$= c\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$= c\,f'(x).$$

F. DERIVADA DE UNA SUMA

Supóngase que se tienen dos funciones, f(x) y g(x), con los valores que se muestran en la tabla. Los valores de la suma de f(x) + g(x) están en la misma tabla.

TABLA Suma de funciones

x	f(x)	g(x)	f(x) + g(x)
0	100	0	100
1	110	0.2	110.2
2	130	0.4	130.4
3	160	0.6	160.6
4	200	0.8	200.8
5	250	1.0	251.0
6	310	1.2	311.2
7	380	1.4	381.4

Puede verse que cuando los incrementos de f(x) y los de g(x) se suman, se obtienen los incrementos de f(x) + g(x). Por ejemplo, a medida que x aumenta de 0 a 1, f(x) aumenta 10 y g(x) aumenta 0.2, en tanto que f(x) + g(x)

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$

Esta regla puede interpretarse como: "La derivada de una suma es la suma de sus derivadas".

Por un procedimiento similar puede probarse que

$$\frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x).$$

Además, las reglas de la suma y de la diferencia admiten extensión a más de dos términos. Por ejemplo, si

$$F(x) = f(x) + g(x) - h(x) - k(x)$$

entonces

$$F'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x) - k'(x)$$

EJERCICIOS 1: 1. Encontrar la derivada de cada una de las siguientes curvas:

a) $g(t) = -t^4$

b) $r(n) = \frac{-2}{n^4} - 2$

c) $f(x) = x^{100} + 7$

d) $y = \sqrt[4]{x}$

e) $y = -x + 1$

f) $y = \frac{2}{7} - 4\sqrt{t} + \frac{3}{2\sqrt{t}}$

g) $r(s) = 4s^2 - 9s$

h) $k(w) = -\sqrt{w} - 3w^2 + \frac{1}{w^2}$

i) $f(x) = \frac{2x}{5} - 4$

j) $f(x) = \frac{3}{x^{-2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

2. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva

a) $f(x) = -2x^3 + \sqrt{x}$; cuando $x = 1$

b) $g(x) = \frac{5}{x^2} - 4\sqrt{x}$; en el punto (1, 1)

c) $h(x) = 2 - 2x + 4x^2$; en el punto (½, 2)

f) $y' = \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{3}{4\sqrt{t^3}}$.

g) $r'(s) = 8s - 9$

h) $k'(w) = \frac{-1}{2\sqrt{w}} - 6w - \frac{2}{w^3}$

i) $f'(x) = \frac{2}{5}$

j) $f'(x) = 6x - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

2.-

a) $11x + 2y - 9 = 0$

b) $12x + y - 13 = 0$

c) $2x - y + 1 = 0$

3.-

a) $x + y + 10 = 0$

b) $4x + 13y + 35 = 0$

c) $3x - y - 5/2 = 0$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)] + \boxed{[f(x+h)\,g(x) - f(x+h)g(x)]}}{h}$$

Usando la propiedad asociativa y conmutativa de la suma.

$$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x)] + [f(x+h)g(x) - f(x)\,g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)\,g(x)}{h}\right]$$

Como "el límite de una suma es la suma de los límites":

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)g(x) - f(x)\,g(x)}{h}\right)$$

Factorizando en el primer factor f(x+h) y en el segundo g(x):

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo 4.9: Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

SOLUCIÓN

$$y' = (3x - 2x^2)\frac{d}{dx}(5 + 4x) + (5 + 4x)\frac{d}{dx}(3x - 2x^2)$$

$$= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$$

$$= 12x - 8x^2 + (15 - 8x - 16x^2)$$

$$= -24x^2 + 4x + 15$$

En este primer ejemplo, nótese que la derivada del producto es

$$\frac{d}{dx}\left[(3x-2x^2)(5+4x)\right] = -24x^2 + 4x + 15$$

mientras que el producto de las derivadas sería

$$\left(\frac{d}{dx}(3x-2x^2)\right)\left(\frac{d}{dx}(5+4x)\right) = (3 - 4x)(4) = 12 - 16x$$

$$= 18x^3 - 45x + 54x^4 - 135x^2 + 6x^3 - 45x + 30 + 36x^4 - 270x^2 + 180x$$

$$= 90x^4 + 24x^3 - 405x^2 + 90x + 30$$

EJERCICIOS 2: 1. Determina la derivada de las siguientes curvas:

a) $f(x) = (x^3 + x)(3 - \sqrt{x})$

b) $y = \frac{1}{x^4}(4x^3 - 2x)$

c) $y = (2x^2 + 5x - 8)(4x^5 - 2x^3)$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(x-5)$

2. Encontrar la ecuación de la recta normal a la curva:

a) $y = x^2(\sqrt{x} + 5)$ en el punto $P(1, 6)$

b) $y = \frac{1}{x^3}(5x^2 + 12)$ en el punto $Q(2, 4)$

H. REGLA DEL COCIENTE

La derivada del cociente de dos funciones derivables f(x) y g(x) viene dada por

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

Demostración: De nuevo un paso clave consiste en sumar y restar una misma cantidad.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{g(x)\,f(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{g(x)\,g(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\,f(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\,g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{g(x)\,[f(x+h) - f(x)]}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\,[g(x+h) - g(x)]}{h}}{\displaystyle\lim_{h\to 0}\, g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \frac{x^4 + 10x^2 - 3}{(x^2+3)^2}$$

b) $y = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{2 - 3x}$

Sea $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = 2 - 3x$

$$y' = \frac{(2-3x)\,\frac{d}{dx}\,[2x^2 - 4x + 3] - (2x^2 - 4x + 3)\,\frac{d}{dx}\,[2-3x]}{(2-3x)^2}$$

$$= \frac{(2-3x)\ (4x - 4) - (2x^2 - 4x + 3)\,(-3)}{(2-3x)^2}$$

$$= \frac{(-12x^2 + 20x - 8) - (-6x^2 + 12x - 9)}{(2-3x)^2}$$

$$= \frac{-6x^2 + 8x + 1}{(2-3x)^2}$$

OBSERVACIÓN: El uso de paréntesis se recomienda en los problemas de derivación. Por ejemplo, con la regla del cociente es buena idea encerrar todos los factores y derivadas en paréntesis, y prestar atención especial a la resta exigida en el numerador.

No todos los cocientes necesitan ser derivados con la regla del cociente. Por ejemplo, los del próximo ejemplo pueden considerarse como productos de una constante por una función de x. En tales casos, la regla del múltiplo constante es más conveniente que la regla del cociente.

Ejemplo 4.12: Derivar los siguientes cocientes con la regla del múltiplo constante:

SOLUCIÓN a) $y = \frac{x^2 + 3x}{6} = \frac{1}{6}(x^2 + 3x)$

$$y' = \frac{1}{6}\frac{D(x^2 + 3x)}{} = \frac{2x + 3}{6}$$

b) $y = \frac{5x^4}{8} = \frac{5}{8}(x^4)$

$$y' = \frac{5}{8}Dx^4 = \frac{5}{8}(4x^3) = \frac{5}{2}x^3$$

Está claro que en general

(derivada de un cociente) $\neq$ (cociente de las derivadas)

EJERCICIOS 3: 1. Determina la derivada de las siguientes curvas

a) $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$

b) $h(x) = \dfrac{x}{x^2-2}$

c) $y = \dfrac{-2}{x^4}$

d) $f(x) = \dfrac{(2x^3-4)}{3}$

e) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-3}$

f) $y = \dfrac{3-2x-x^2}{x^2-1}$

g) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

h) $k(x) = \dfrac{x}{x+1}$; $x \neq -1$

i) $g(w) = \dfrac{w-3}{w+3}$; $w \neq -3$

f) $f(s) = \dfrac{s^2}{s^4-2s^2}$

2. Encontrar las coordenadas del punto P(x, y) para las cuales

la curva $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ $(x \neq 2)$ tiene pendiente -4.

Hay dos soluciones.

4.2 REGLA DE LA CADENA

Tratemos de encontrar una regla para derivar la función

$$y = (2x^4 - 5x)^6$$

Primero encontremos la derivada de las siguientes funciones:

i) $y = (2x^4 - 5x)^2$

ii) $y = (2x^4 - 5x)^3$

Para derivar $y = (2x^4 - 5x)^2$, utilizaremos la regla para derivar productos, vamos a escribirla como el producto de dos funciones, así:

$$y = (2x^4 - 5x)^2 = (2x^4 - 5x)(2x^4 - 5x)$$

Por lo tanto, usando la regla del producto tenemos

$$y' = (2x^4 - 5x)\frac{d}{dx}(2x^4 - 5x) + \left(\frac{d}{dx}(2x^4 - 5x)\right)(2x^4 - 5x)$$

$$= (2x^4 - 5x)(8x^3 - 5) + (8x^3 - 5)(2x^4 - 5x)$$

$\therefore$ Si $y = (2x^4 - 5x)^3$ entonces $y' = 3(2x^4 - 5x)^2 (8x^3 - 5)$

¿Qué sucede si con el mismo procedimiento deseamos encontrar la derivada de:

$$y = (2x^4 - 5x)^4?$$

Si realizas el mismo procedimiento encontrarás que:

$$y' = 4(2x^4 - 5x)^3 (8x^3 - 5)$$

Con estos resultados podemos decir que:

Si $y = u^n(x)$, entonces $\quad y' = nu^{n-1}(x) \dfrac{du(x)}{dx}$

Por lo tanto para derivar:

$y = (2x^4 - 5x)^6$ resulta

Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$ y suponiendo que las derivadas de y y u existen, entonces la derivada de la función compuesta $y = f(g(x))$ es:

$$y' = f'(u)\, g'(x)$$

Al aplicar la regla de la cadena resulta útil pensar en $f \circ g$ como constituida por dos partes, una interior y otra exterior, como sigue:

$$y = \underbrace{f(g(x))}_{\substack{u=g(x) \\ \text{interior}}} = \overbrace{f(u)}^{\text{exterior}}$$

Ejemplo 4.13: Derivar cada una de las siguientes curvas:

a) $y = (x^2 + 1)^3$

$\therefore$ Si $y = \dfrac{-3}{(4x^3 - 5x)^4}$, entonces $y' = \dfrac{12(12x^2 - 5)}{(4x^2 - 5x)^5}$

c) $y = \sqrt{9 - x^2}$

$y = \sqrt{9 - x^2} = (9 - x^2)^{1/2}$

Por la regla de la cadena:

$$y' = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

$\therefore$ Si $y = \sqrt{9 - x^2}$ entonces $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Las funciones del ejemplo anterior es de uno de los tipos más frecuentes de funciones compuestas $y = [u(x)]^n$. La regla de derivación para tales funciones potencia se llama la regla general de las potencias, y es un caso particular de la regla de la cadena.

SOLUCIÓN Haciendo $u = 3x - 2x^2$, entonces $f(x) = (3x - 2x^2)^3 = u^3$, la regla general de las potencias nos da

$$f'(x) = 3(3x - 2x^2)^2 \frac{d}{dx}(3x - 2x^2)$$

$$= 3(3x - 2x^2)^2 (3 - 4x)$$

$$= (9 - 12x)(3x - 2x^2)^2$$

b) $y = \sqrt[3]{(x^2 + 2)^2}$

SOLUCIÓN Reexpresando $y = (x^2 + 2)^{2/3}$, por la regla de las potencias (con $u = x^2 + 2$), tenemos que

$$y' = \frac{2}{3}(x^2 + 2)^{-1/3}(2x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 + 2}}$$

c) $g(t) = \dfrac{-7}{(2t-3)^2}$

SOLUCIÓN Si reescribimos la función como $g(t) = -7(2t - 3)^{-2}$, deducimos por la regla general de las potencias que

En los ejercicios 13-16, hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado.

13 $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$, (3,5)

14. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 5}$, (2,6)

15. $y = (4x^2 - 8x + 3)^4$, (2,81)

16. $y = (2x - 1)^{10}$, (1,1)

RESPUESTAS

1. $6(2x - 7)^2$
2. $12(x^2 - 1)^2$
3. $\dfrac{-2}{(t - 3)^3}$
4. $2x(x - 2)^3(3x - 2)$
9. $\dfrac{3t(t^2 + 3t - 2)}{(t^2 + 2t - 1)^{3/2}}$
10. $\dfrac{-1}{2x^{3/2}\sqrt{x + 1}}$
11. $\dfrac{-8x + 8}{5\sqrt[5]{x^2 - 2x}}$
12. $\dfrac{-18x^3 + 18x^2 + 50x - 18}{(x^2 + 3)}$

4.1 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Hasta ahora nuestras ecuaciones en dos variables se expresaban generalmente en forma explícita $y = f(x)$. Esto es, una de las variables estaba dada explícitamente en términos de la otra. Por ejemplo,

$$y = 3x - 5, \qquad s = -16t^2 + 20\,t, \qquad u = 3w - w^2$$

están todas en forma explícita y decimos que y, s, u son funciones de x, t, w respectivamente.

No obstante, muchas funciones sólo vienen implícitamente dadas por una ecuación, como $y = \frac{1}{x}$ que está implícitamente definida por $xy = 1$. Si se nos pide hallar $\frac{dy}{dx}$ en esta ecuación, resulta sencillo y seguramente se está tentado de despejar en primer lugar la y.

Forma implícita	Forma explícita	Derivada
$xy = 1$	$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

SOLUCIÓN

a) $\frac{d}{dx}[3x^2] = 6x$

b) $\frac{d}{dx}[2y^3] = 6y^2 \frac{dy}{dx}$

c) $\frac{d}{dx}[x + 3y] = \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[3y]$

$$= 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

d) $\frac{d}{dx}[xy^2] = x\frac{d}{dx}[y^2] + y^2\frac{d}{dx}[x]$

$$= x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1)$$

$$= 2xy\frac{dy}{dx} + y^2$$

Para ecuaciones que contengan x, y sugerimos el siguiente procedimiento para calcular dy/dx implícitamente.

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

2. Coleccionando los términos con $\frac{dy}{dx}$ en la izquierda,

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = 2x$$

3. Factorizando $\frac{dy}{dx}$ en la izquierda, resulta

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

4. Finalmente, dividimos por $(3y^2 + 2y - 5)$ para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

$$\frac{d}{dx}(2x^3 + x^2y + y^3) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}(2x^3) + \frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$6x^2 + [x^2 \frac{d}{dx}(y) + y \frac{d}{dx}(x^2)] + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$6x^2 + x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = -2xy - 6x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 3y^2) = -2xy - 6y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - 6x^2}{x^2 + 3y^2}$$

c) $\left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{y^2}\right) = 1$

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

Ejemplo 4.18: Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si $xy = 1$

SOLUCIÓN. MÉTODO 1. Podemos despejar explícitamente a y en la ecuación de la siguiente manera.

$$xy = 1$$

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

MÉTODO 2. (Derivación implícita).

$$xy = 1$$

$$\frac{d}{dx}[xy] = \frac{d}{dx}[1]$$

$$x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$x\frac{dy}{dx} + y(1) = 0$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2-3)(3x^2) - (x^3-1)(8x)}{(4x^2-3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

MÉTODO 2.

$$4x^2y - 3y = x^3 - 1$$

$$\frac{d}{dx}[4x^2y - 3y] = \frac{d}{dx}[x^3 - 1]$$

$$\frac{d}{dx}(4x^2y) - \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$4\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$4\left(x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2)\right) - \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$4\ (x^2\frac{dy}{dx} + 2xy) - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$4x^2\frac{dy}{dx} + 8xy - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

queremos calcular $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = 10$

El volumen del cono es $v = \frac{\pi r^2 h}{3}$

y como se nos dice que $r = h$, esta ecuación se simplifica

$$v = \frac{\pi}{3} h^3$$

Derivando implícitamente respecto a t se obtiene

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{3} 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2} \left(\frac{dh}{dt} \right)$$

Finalmente, cuando $h = 10$ se obtiene

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi} (100) = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \text{ pies/min.}$$

están disminuyendo.) Se nos pide calcular dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z se deduce con el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados con respecto a t,

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

Cuando x = 0.3 millas y y = 0.4 millas, el teorema de Pitágoras de z = 0.5 millas, así que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5} \left[(0.3)(-50) + 0.4(-60)\right]$$

$$= -78 \text{ mpp}$$

Por lo tanto, los coches se acercan a 78 mpp.

$$Q = [p(t)]^2 + 3p(t) + 1,200$$

Ahora diferencie ambos lados con respecto a t, usando la regla de la cadena para potencias para diferenciar $[p(t)]^2$ y la regla del múltiplo constante para diferenciar $3p(t)$. Obtendrá

$$\frac{dQ}{dt} = 2p(t)\frac{dp}{dt} + 3\frac{dp}{dt}$$

o, más simplemente

$$\frac{dQ}{dt} = 2p\frac{dp}{dt} + 3\frac{dp}{dt}$$

Ahora sustituya la información dada $p = 30$ y dp/dt en esta ecuación para obtener

$$\frac{dQ}{dt} = 2(30)(2) + 3(2) = 126$$

lo que dice que el nivel de polución del aire está creciendo actualmente a un ritmo de 126 unidades por año.

$$\frac{x+y}{20}=\frac{x}{6}$$

que puede reescribirse como

$$x=\frac{3y}{7}$$

Diferenciando ambos lados de esta ecuación con respecto a t se obtiene

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{7}\frac{dy}{dt}$$

Use el hecho $\frac{dy}{dt}=7$ para concluir que

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3(7)}{7}=3$$

Esto es, la sombra del hombre está creciendo a un ritmo de 3 pies por segundo.

Empiece con la fórmula $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

para el volumen de un cono. Use la proporción

$$\frac{5}{20} = \frac{r}{h}$$

obtenida de los triángulos semejantes de la FIGURA 4.5 para escribir r en términos de h como

$$r = \frac{h}{4}$$

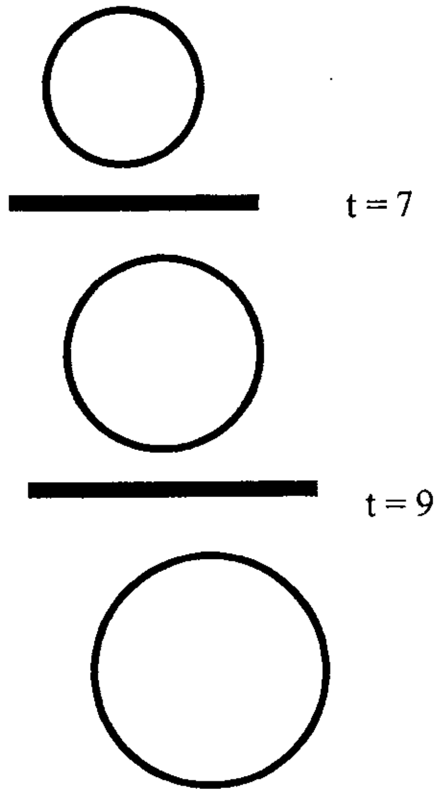
y sustituya esta expresión en la fórmula para el volumen para obtener

$$V = \frac{1}{48} \pi h^3$$

Diferencie ambos lados de esta ecuación con respecto a t. No olvide usar la regla de la cadena para potencias cuando diferencie h^3. Llegará al resultado

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Sustituya $h = 8$ y $\frac{dV}{dt} = -2$ en esta ecuación y resuelva en $\frac{dh}{dt}$



Balón en expansión

FIGURA 4.6

Si el radio del globo es r, su volumen crece 4.5 plg^3/min, luego la razón de cambio del volumen es $dV/dt = \frac{9}{2}$. Así pues, el problema puede formularse de esta forma:

Dato: $\frac{dV}{dt} = \frac{9}{2}$ (ritmo constante)

Calcular: $\frac{dr}{dt}$ cuando $r = 2$

EJERCICIOS 5: 1. Utilice la derivación implícita para calcular $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2y^6 = 1$

b) $x^2y + xy^3 - 3x = 5$

c) $x^2 + 5y^2 = 36$

d) $y^5 - 3x^2 = x$

e) $y^4 - x^4 = y^2 - x^2$

f) $2x^3 + y = 2y^3 + x$

g) $x(y + 2)^5 = 8$

h) $x^3y^2 - 4x^2 = 1$

i) $x^3 + y^3 = x^3y^3$

j) $x^2y + y^2x = 3$

2. Determine mediante la derivación implícita, la pendiente de la gráfica en el punto dado.

a) $4y^3 - x^2 = -5$ $(3, 1)$

b) $xy^3 = 2$ $(-\frac{1}{4}, -2)$

c) $xy + y^3 = 14$ $(3, 2)$

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $x^2y^4 = 1$ en el punto $(4, \frac{1}{2})$ y en el punto $(4, -\frac{1}{2})$.

8. Un controlador aéreo sitúa dos aviones en la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto en ángulo recto. Uno de ellos, está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 mi/h. El otro esta a 200 millas del punto y vuela a 600 mi/h.

a) ¿A qué ritmo decrece la distancia entre los dos aviones?

b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectoria distinta?

RESPUESTAS.

1.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{3x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - y^3 - 2xy}{x^2 + 3xy^2}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{5y}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 6x}{5y^4}$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(y^3 - 1)}{y^2(1 - x^3)}$

j) $\frac{dy}{dx} = \frac{-(y^2 + 2xy)}{x^2 + 2xy}$

6. a) $\frac{5}{\pi}$ pies/min.

   b) $\frac{5}{4}\pi$ pies/min.

7. a) $-\frac{7}{12}$ pies/seg,

   b) $-\frac{3}{2}$ pies/seg y

   c) $-\frac{48}{7}$ pies/seg

8. a) - 750 mi/h, b) 20 minutos.

UNIDAD 5. APLICACIONES A LA DERIVADA

TEMÁTICA

Tiempo aproximado 16 horas.

- Aplicaciones ligadas a las interpretaciones de la derivada:

- Problemas de rapidez y razón de cambio instantáneo.
- Cálculo de tangentes y normales.
- Cálculo de diferenciales y valores aproximados de funciones.
- Conocimiento y aplicación del método de Newton al cálculo aproximado de raíces.

- Derivadas sucesivas. Significado físico de la segunda derivada; ecuación del movimiento uniformemente acelerado.

- Relaciones del signo de la primera y la segunda derivadas con el carácter creciente o decreciente y el sentido de la concavidad de una función; en particular, criterios de la primera y segunda derivadas para máximos y mínimos.

- Aplicaciones a:

- La solución de problemas de optimización.
- El trazado de gráficas y el estudio de los puntos críticos de una función.

- Calculará diferenciales y valores aproximados de funciones.

- Conocerá el significado físico de la segunda derivada y lo aplicará en problemas de movimiento uniformemente acelerado.

- Resolverá problema de optimización y trazado de gráficas.

5.1.1 PROBLEMAS DE RAPIDEZ Y RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO

Ejemplo 5.1: Una escalera de 5 metros de largo esta recargada en una pared. Si el pie de la escalera esta siendo recorrida en su parte inferior a razón de 60 centímetros por segundo, ¿qué tan rápido se está moviendo la parte superior de la escalera cuando ésta se encuentra a 2.5 metros del suelo? (Véase FIGURA 5.1).

SOLUCIÓN

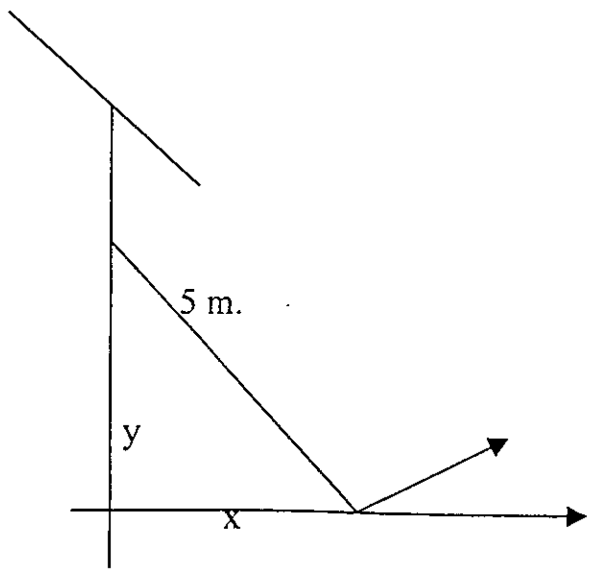


FIGURA 5.1

Si $y = \sqrt{25 - x^2}$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$

de esta manera, cuando $y = 2.5$ y $x = 4.33$, encontramos

que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4.33}{\sqrt{25 - (4.33)^2}} = -1.7318$

Ahora, el valor correspondiente de dy/dt se obtiene multiplicando los valores de dy/dx y dx/dt, de la siguiente manera.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = (-1.7318)(0.6) = -1.038$$

Así, en el momento cuando el extremo superior de la escalera está a 2.5 metros del suelo, encontramos que y está decreciendo a una razón de –1.038 m/s.

Ejemplo 5.2: Un avión vuela a 6 millas de altitud en línea recta hacia la posición de un radar. Si s esta decreciendo a razón de 400 millas por hora cuando s es 10 millas, ¿cuál es la velocidad

Derivando implícitamente respecto a t,

$$2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

Para hallar dx/dt, debemos hallar antes x cuando s = 10:

$$x = \sqrt{s^2 - 36} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

Por fin, para s = 10 tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8}\text{-}(400) = -500 \text{ mph}$$

Como la velocidad es – 500 millas por hora, la rapidez es de 500 millas por hora.

5.1.2 CÁLCULO DE TANGENTES Y NORMALES

En esta sección haremos dos ejemplos del cálculo de líneas tangentes y normales en un punto a una curva, recuerda que la línea tangente en un punto a una curva, se calcula, primero al obtener la pendiente de la recta, esta

La pendiente de la recta pedida es $\frac{9}{5}$ y ya que pasa por el

punto (3, 5), con la ayuda de la fórmula punto pendiente

$$y - 5 = \frac{9}{5}(x - 3)$$

o bien

$$9x - 5y - 2 = 0$$

Ahora para calcular la ecuación de la recta normal, calculemos la pendiente m de la recta normal.

$$m = -\frac{5}{9} \text{ (por ser perpendicular a la recta tangente)}$$

nuevamente, usamos la fórmula punto pendiente

$$y - 5 = \frac{9}{5}(x - 3)$$

o bien

$$5x + 9y - 60 = 0$$

calculamos primero la pendiente $m = \frac{-3}{5}$, luego entonces, la ecuación de la recta normal es

$$y - 3 = \frac{-3}{5}(x-5)$$

o bien

$$3x + 5y - 30 = 0$$

5.1.3 CÁLCULO DE DIFERENCIALES Y VALORES APROXIMADOS DE FUNCIONES

Hemos estado usando la notación de Leibniz dy/dx para la derivada de y con respecto a x. Hasta ahora hemos tratado a dy/dx como un sólo símbolo y no hemos intentado dar significados separados a dy/dx.

Esto es lo que nos proponemos hacer ahora.

DEFINICIÓN 1: Se llama diferencial de una función al producto de la derivada por el incremento de la variable independiente.

NUEVA DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN.

Del artículo anterior se deduce, por ser el incremento de la variable independiente igual a su diferencial, que la diferencial de la función $y = f(x)$ es

$$dy = f'(x)dx$$

que nos dice:

La diferencial de una función es igual al producto de la derivada por la diferencial de la variable independiente.

Ejemplo 5.6: Encuentre dy si a) $y = x^3 - 3x + 1$, b) $y = \sqrt{x^2+3x}$ y c) $y = \sqrt[3]{1-3x^2}$

SOLUCIÓN Si sabemos cómo calcular derivadas, sabemos calcular diferenciales. Basta con calcular la derivada y multiplicar por dx.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\,f(x)}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3\,f(x)}{dx^3}$$

. . . .

$$f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n\,f(x)}{dx^n}$$

Ejemplo 5.7: Si $y = 3x^3 - x + 1$, se tiene:

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 9x^2 - 1$$

$$\frac{d^2y}{dx} = f''(x) = 18x$$

$$\frac{d^3y}{dx} = f'''(x) = 18$$

$$\frac{d^4y}{dx} = f^{iv}(x) = 0$$

OBSERVACIÓN: Para finalizar, haremos una sugerencia. Ponga especial atención al distinguir entre derivadas y diferenciales. Estas no son lo mismo. Al escribir $D_x y$ o dy/dx se está usando el símbolo de la derivada; al escribir dy, se esta designando una diferencial. No escriba dy cuando quiera referirse a la derivada esto conducirá a confusiones.

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

El uso principal de la diferencial consiste en producir aproximaciones.

Supóngase que $y = f(x)$ en la FIGURA 5.3. Cuando se da a x un incremento Δx, y recibe un incremento Δy, correspondiente, que puede considerarse como un valor aproximado de dy. Por lo tanto, el valor aproximado de $f(x + \Delta x)$ es

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx$$

Esta es la base de todos los ejemplos que siguen.

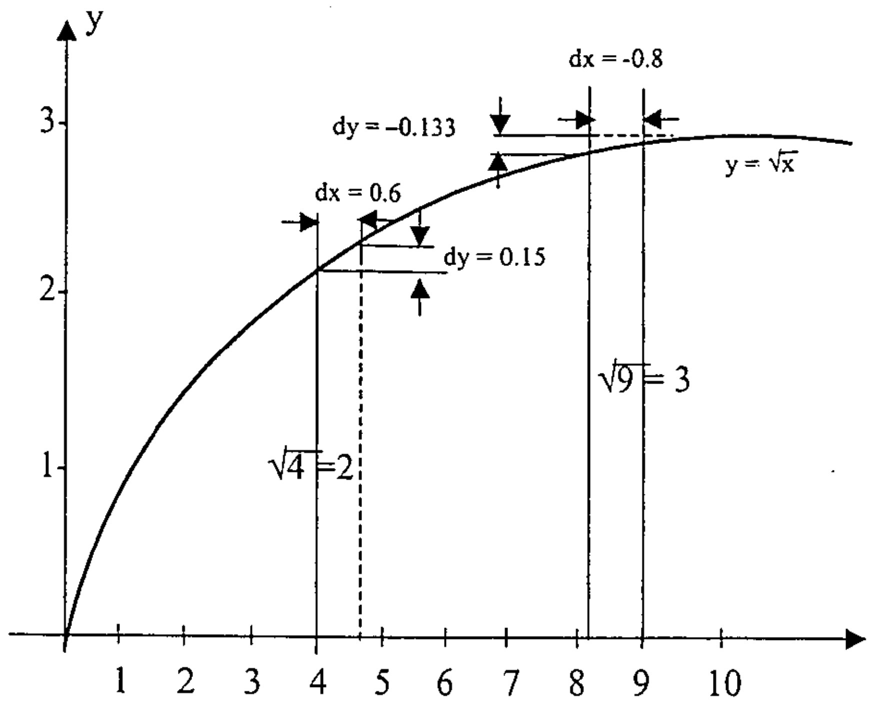


FIGURA 5.4

lo cual, para $x = 4$ y $dx = 0.6$, toma el valor

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15 = 2.15$$

En forma semejante, para $x = 9$ y $dx = -0.8$,

Y por lo tanto,

5.1.4 MÉTODO DE NEWTON. CÁLCULO APROXIMADO DE RAÍCES.

En la vida diaria usualmente empleamos aproximaciones, decimos, regreso en 30 minutos más o menos, o bien, el contenido de un refresco es de 355 ml. aproximadamente. En general es muy complicado usar cifras exactas, ya que nuestros instrumentos de medición son exactos hasta cierto límite, después de este, estamos en una mera aproximación, ejemplifiquemos, nuestro metro usual tiene marcas hasta milímetros, si medimos a una persona, podemos decir que mide 1.65 metros o más exactos 1652 milímetros, después de los milímetros, ya no podemos tener exactitud, lo mismo pasa con los instrumentos con los que pesamos o calculamos volúmenes.

En matemáticas existe una rama llamada Análisis Numérico el cual se encarga de estudiar y crear métodos para obtener aproximaciones a números, ecuaciones, integrales, sistemas de ecuaciones, etc. y lo más importante, calcula la exactitud que se obtiene en cada método. nuestro objetivo en esta subsección es mostrar el método llamado el método de Newton (Newton-Raphson) con el fin de obtener raíces de funciones en forma aproximada.

Supongamos que tenemos una función $y = f(x)$, queremos encontrar un valor de x, al que llamaremos x_o tal que $f(x_o) = 0$, es decir, queremos encontrar una raíz de f.

Iniciamos el método eligiendo x_1 "cercano a x_o, a partir de x_1 generamos otro número x_2, queremos que x_2 este más cercano a x_o que x_1. Geométricamente, si trazamos la recta tangente (de aquí que f debe ser derivable) en el punto $(x_1, f(x_1))$, esta corta al eje x en un punto al que llamaremos x_2, a partir de x_2 generamos otro punto x_3, en la misma forma y continuaremos así generando una sucesión de puntos $x_o, x_1, x_2, x_3, \ldots$.. Con esta idea en mente, construyamos una fórmula que nos permita generar x_2 a partir de x_1.

La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_1, f(x_1))$ es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)\,(x - x_1)$$

la línea tangente corta al eje x, significa que $y = 0$, $(x = x_2)$.

$$-\,f(x_1) = x_2\,f'(x_1) - x_1\,f'(x_1)$$

por lo tanto $\qquad x_2\,f'(\,x_1) = x_1\,f'(x_1) - f(x_1)$

Método de Newton (aproximación de ceros de una función)

Sea f una función diferenciable en (a, b) y $f(x_o) = 0$, donde x_o está en (a, b). Para aproximaciones a x_o hacemos lo siguiente

1. Una aproximación inicial x_1 de x_o
2. Calculemos una nueva aproximación por medio de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0$$

3. Si $|x_n - x_{n+1}|$ es menor que la aproximación deseada, x_{n+1} sirve como aproximación final. En otro caso, volvemos al paso 2.

El método de Newton nos ayuda a aproximar ceros de funciones, esta afirmación es muy general y abarca a la aproximación de números, ejemplifiquemos, si queremos el valor aproximado de $\sqrt{2}$, debemos construir una función cuya raíz sea $\sqrt{2}$, digamos

$$x = \sqrt{2}$$
$$x^2 = 2$$
$$x^2 - 2 = 0$$

$$x_4 = 1.416667 - \frac{f(1.416667)}{f'(1.416667)} = 1.414217$$

Con el método de Newton y sólo tres iteraciones, hemos obtenido cinco decimales de exactitud para $\sqrt{2}$.

Ejemplo 5.11: Usa el método de Newton para aproximar los ceros de $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$. Continua las iteraciones hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.0001.

SOLUCIÓN Después de algunos cálculos, podemos darnos cuenta

$$f(-2) = 2(-8) + 4 + 2 + 1 = -9 < 0$$

$$f(-1) = 2(-1) + 1 + 1 + 1 = 1 > 0$$

por lo tanto, una raíz está entre –1 y –2, escojamos $x_1 = -1$, entonces $(f'(x) = 6x^2 + 2x - 1)$

$$x_2 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{1}{3} = 1.3333$$

$x^3 = x + 1$ o su equivalente $x^3 - x - 1 = 0$

este problema se reduce a encontrar la raíz del polinomio $f(x) = x^3 - x - 1$, después de algunos cálculos, encontramos que $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 5 > 0$, así que debe haber una raíz entre 1 y 2, calculemos $f'(x) = 3x^2 - 1$, tomemos $x_1 = 1$ como una primera aproximación, y resumamos los valores de x_n en la siguiente tabla

n	Xn	f(xn)	f´(xn)	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(xn)}$
1	1	-1	2	1.5
2	1.5	0.875	5.75	1.347826087
3	1.347826087	0.100682174	4.449905482	1.325200399
4	1.325200399	0.002058363	4.268468293	1.324718174
5	1.324718174	0.000000925	4.264634722	1.324717957
6	1.324717957	5×10^{-10}	4.264632997	1.324717957

Así una buena aproximación es $x = 1.324717957$ ya que este número se repite en la quinta y sexta iteración, por lo cual el

RAPIDEZ Y RAZÓN DE CAMBIO

EJERCICIOS 1: 1. Las aristas de un cubo variable aumentan a razón de 3 centímetros por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen de un cubo cuando una arista tiene 10 centímetros de longitud?

2. Guadalupe mide 1.70 metros de estatura y se aleja de la luz de un poste de alumbrado público que tiene 7 metros de altura a razón de 3 m/s.

a) ¿Con qué rapidez crece su sombra cuando Guadalupe está a 60 metros del poste,

b) ¿Con qué rapidez, se mueve el extremo de la sombra?

3. Un disco metálico se dilata con el calor. Si su radio aumenta a razón de 0.05 m/s, ¿con qué rapidez aumenta el área de una de sus caras cuando su radio es de 2.5 metros?

4. Un punto se mueve sobre la curva $y = x^2$, de forma que $dx/dt = 2$ cm/min. Encuentre dy/dt cuando

a) $x = 0$ b) $x = 3$

9. Encuentra la ecuación de la normal a la curva $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ en el punto (3, 1).

10. Prueba que la normal a la curva $x^3 + y^3 = 3xy$ en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ pasa por el origen.

CÁLCULO DE DIFERENCIALES

En los problemas 11 a 16, encuentra dy.

11. $y = 2x^2 - 3x + 5$

12. $y = 7x^3 - 3x^2 + 4$

13. $y = (3 + 2x^3)^{-4}$

14. $y = 13x/5x^2 + 2$

15. $y = \sqrt{4x^5 + 2x^4 - 5}$

16. $y = (6x^8 - 11x^5 + x^2)^{-2/3}$

17. Si $s = \sqrt[5]{(t^2 - 3)^2}$, encuentre ds.

18. Sea $y = f(x) = x^3$. Encuentre el valor de dy en cada caso

a) $x = 0.5$, $dx = 1$

b) $x = -1$, $dx = 0.75$

28. Una tabla matemática contiene los siguientes valores

a) $\sqrt{50} = 7.07$ b) $3\sqrt{5} = 1.71$

Supongamos que no estas satisfecho con los decimales de exactitud, usa el método de Newton para obtener un decimal más de exactitud.

29. Intenta usar el método de Newton para resolver la ecuación $x^3 - 5x = 0$. Inicia con $x_1 = 1$. Realiza por lo menos cuatro iteraciones y describe tu resultado.

30. Dos esferas concéntricas están separadas por un centímetro. Si el volumen entre las esferas es el doble del volumen de la esfera interior, ¿cuánto mide le radio de la esfera mayor? (Véase FIGURA 5.7)

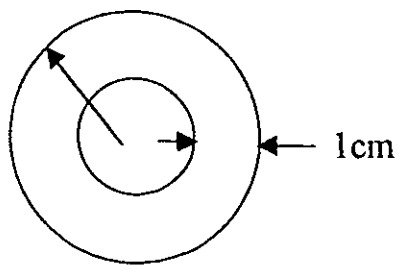


FIGURA 5.7

15. $dy = \frac{10x^4 + 4x^3}{\sqrt{4x^5 + 2x^4 - 5}}\, dx$

16. $dy = \frac{-2(48x^7 - 55x^4 + 2x)}{3\sqrt[3]{6x^8 - 11x^5 + x^2}}\, dx$

17. $dx = \frac{4tdt}{5(t^2-3)^{3/5}}$.

18. a) $dy = 0.75$ b) $dy = 2.25$

19. $dA = 0.024$

20. $\sqrt{402} \approx 20.05$

21 $\sqrt[3]{26.91} \approx 2.9966$

22. $\sqrt{17} \approx 4.125$

23. $\sqrt[3]{65} \approx 4.021$

24. $\sqrt[6]{64.05} \approx 2.0002$

25. $\sqrt{27} \approx 5.2$

26. -0.2679

En caso de ser derivable la segunda derivada $f''(x)$, podríamos obtener su derivada y así tendríamos, a la tercera derivada de f, a la cual denotaríamos por $f'''(x)$. Primero ocupémonos de la notación

primera derivada	y'	$\frac{df}{dx}$
segunda derivada	y''	$\frac{d^2f}{dx^2}$
tercera derivada	y'''	$\frac{d^3f}{dx^3}$
--- --- ---		
n-ésima derivada	$y^{(n)}$	$\frac{d^nf}{dx^n}$

Observemos que a partir de la cuarta derivada se utiliza la notación $y^{(4)}$ y no y'''', esta notación nos indica que debemos derivar a la función cuatro veces, y no la cuarta potencia de la función.

5.2.1 SIGNIFICADO FÍSICO DE LA SEGUNDA DERIVADA

En la unidad 3 interpretamos físicamente a la derivada de una función, la primera derivada la interpretamos como la rapidez de cambio instantáneo. Recordemos: Supongamos que un objeto se mueve según la ecuación $s = s(t)$. Como sabemos, durante un intervalo de tiempo Δt (incremento de t) el objeto cambia su posición del punto t a $t + \Delta t$ en $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, por lo cual

$$\text{velocidad media} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

La velocidad media (velocidad promedio), expresa la razón de cambio de la distancia s con respecto al tiempo t, en el intervalo de tiempo Δt. La razón de cambio de s con respecto al tiempo t en un instante determinado se denomina VELOCIDAD INSTANTÁNEA.

DEFINICIÓN 3:

> **Aceleración**
>
> Si s = s(t) es la ecuación de la posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta, la aceleración del objeto en el instante t está dada por
>
> $$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

OBSERVACIÓN: Del mismo modo que se ha obtenido la velocidad derivando la función posición, obtendremos la aceleración derivando la función velocidad.

Ejemplo 5.13: Calcular la aceleración de un objeto en caída libre cuya función de posición es

$$s(t) = -16t^2 + 100$$

SOLUCIÓN $$v(t) = s'(t) = -32t$$

luego la aceleración es

$$v'(t) = a(t) = -32 \text{ pies/seg}^2.$$

Recuerda, que el producto de dos números $ab > 0$ es positivo, cuando tienen el mismo signo, es decir $a > 0$ y $b > 0$ o $a < 0$ y $b < 0$. En nuestra desigualdad, se tiene

$$t-4>0 \text{ y } t-2>0 \quad \text{o} \quad t-4<0 \text{ y } t-2<0$$

$$t>4 \text{ y } t>2 \quad \text{o} \quad t<4 \text{ y } t<2$$

$$t>4 \quad \text{o} \quad t<2 \quad \text{(¿porqué)}$$

De esta manera, el objeto se mueve hacia la derecha cuando $t>4$ o $t<2$.

c) Consecuentemente se mueve hacia la izquierda en el intervalo $(2, 4)$.

d) La aceleración es $a(t) = 6t - 18 < 0$

$$6t < 18$$

$$t < 3$$

la aceleración es negativa cuando $t < 3$.

Este tercer ejemplo, nos proporciona una ecuación de posición de un objeto que se mueve libremente (despreciando la resistencia del aire). Observa que

$$s(t) = -4.6t^2 + 24t + 20$$

tiene

$$s_o = 20$$

$$v_o = 24$$

$$a = 9.8$$

es decir, la posición inicial s_o, la velocidad inicial v_o y g la aceleración del objeto, son: el término constante, el coeficiente de t y el doble del coeficiente de t^2 respectivamente, esto no es casualidad, ya que con técnicas más avanzadas se puede probar que la ecuación de un objeto que se mueve libremente es

$$s(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + v_o t + s_o$$

En donde $g = 9.8\ m/s^2$ es la aceleración debida a la gravedad terrestre.

$$v_p = \frac{573.872 - 556.8}{.1} = 170.72 \text{ m/s}$$

c) La velocidad es $v(t) = s'(t) = -9.6t + 200$, luego entonces

$$v(3) = -9.6(3) + 200 = 171.2 \text{ m/s}$$

$$v(3.1) = -9.6(3.1) + 200 = 170.24 \text{ m/s}$$

d) El proyectil alcanza su altura máxima cuando la velocidad es cero (¿porqué?), de esta forma

$$v(t) = -9.6t + 200 = 0$$

$$t = 200/9.6 = 20.83$$

sustituimos el tiempo encontrado en s(t)

$$s(20.83) = -4.8(20.83)^2 + 200(20.83)$$

$$= -2082.66672 + 4166$$

$$= 2083.33329 \text{ metros}$$

5. Un objeto que se arroja verticalmente hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad de 20 m/s tiene una altura aproximada de $s = 20t - 4.8t^2$ al término de t segundos.

a) ¿cuál es la velocidad inicial?

b) ¿cuándo alcanza su altura máxima?

c) ¿cuál es su altura máxima?

d) ¿cuándo alcanza el piso?

e) ¿con qué velocidad llega al piso?

RESPUESTAS

1. a) $s(0) = -1$, $s(1) = \frac{-2}{3}$

   b) $v(0) = 1$, $v(1) = 0$

   c) $a(0) = -2$, $a(1) = 0$

2. a) $v(t) = 2t$ y $a(t) = 2$

   b) se mueve a la derecha en $(0, \infty)$, nunca a la izquierda.

unieron, sacaron cada una de la otra vitalidad nueva y desde entonces avanzaron con paso rápido hacia la perfección".

Hoy día, gobierno, ciencia, industria, comercio, educación y ciencias sociales o de la salud, hacen amplio uso de gráficos para describir y predecir relaciones entre variables.

La gráfica de la función de la FIGURA 5.8 está creciendo o decreciendo dependiendo de si se ve de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Para evitar confusiones, se seguirá siempre la costumbre generalizada de leer la gráfica de izquierda a derecha.

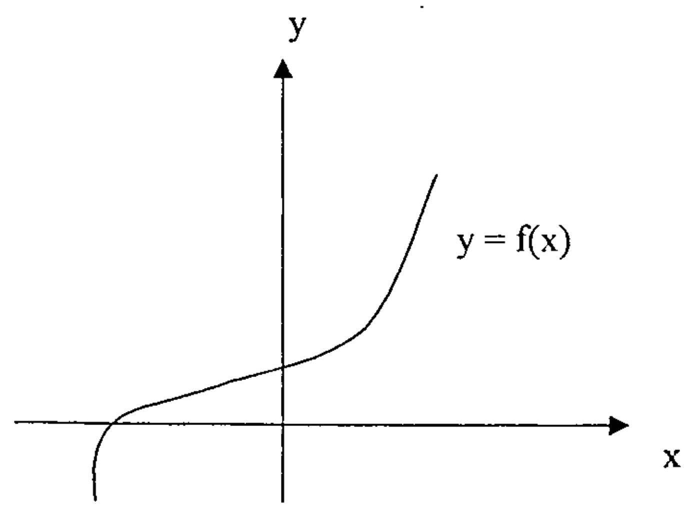
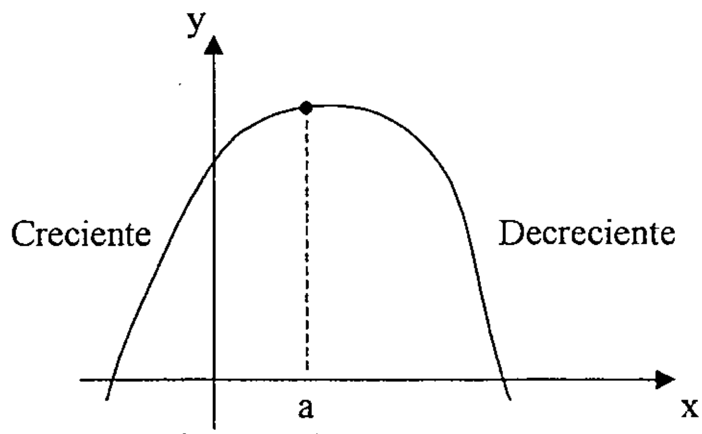
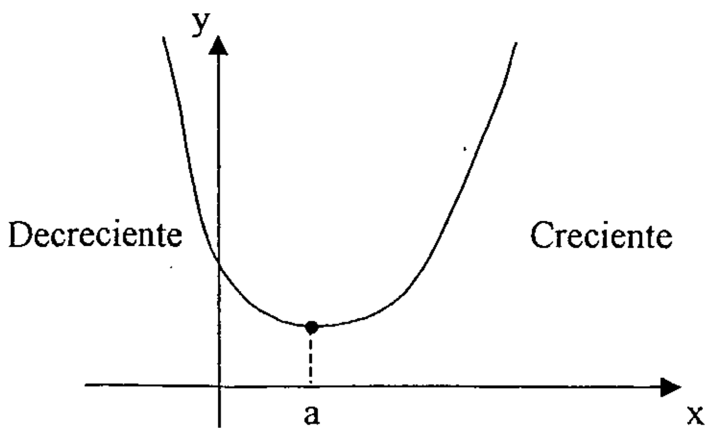


FIGURA 5.8

Un **punto extremo relativo** de una función es un punto en el cual la gráfica cambia de creciente a decreciente, o viceversa. Se distinguen de manera obvia dos posibilidades. Un punto **máximo relativo** es un punto en que la gráfica cambia de creciente a decreciente; un punto **mínimo relativo** es un punto donde la gráfica cambia de decreciente a creciente (FIGURA 5.10). El adjetivo "relativo" en estas definiciones, indica que un punto es máximo o mínimo solamente en relación a los puntos cercanos en la gráfica.



Máximo relativo en x = a



Mínimo relativo en x = a

FIGURA 5.10

función es la coordenada, y, del punto más alto de su gráfica. (El punto más alto se llama punto máximo absoluto). Consideraciones similares se aplican a los mínimos.

Ejemplo 5.17: Cuando se inyecta una droga intramuscular (en un músculo), la concentración de la droga en las venas tiene la curva tiempo-concentración que se muestra en la FIGURA 5.12. Describa esta gráfica utilizando los términos presentados más arriba.

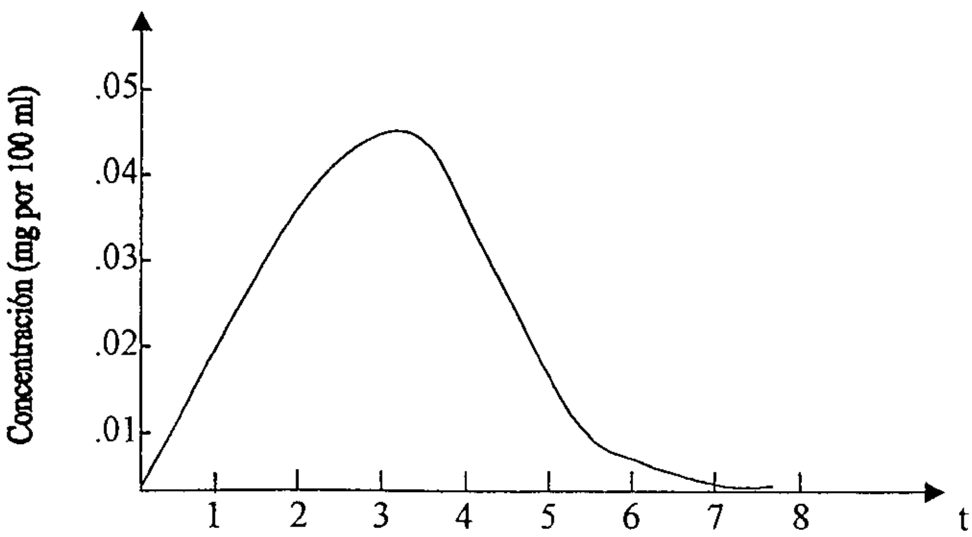


FIGURA 5.12

SOLUCIÓN Inicialmente (cuando $t = 0$), no hay droga en las venas. Cuando la droga se inyecta en el músculo, empieza a difundirse en la

FIGURA 5.13

Un **punto de inflexión** de una gráfica es un punto en el cual la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa. En un punto de ese tipo, la gráfica corta a su recta tangente (FIGURA 5.14).

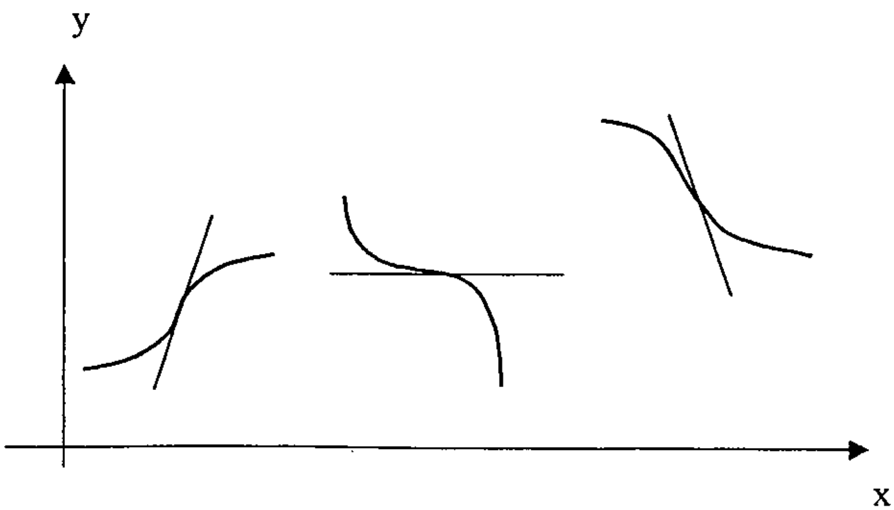


FIGURA 5.14

5.3.1 INTERSECCIONES, PUNTOS NO DEFINIDOS Y ASINTOTAS

Un punto en el que la gráfica corta al eje y se llama una ordenada al origen o intersección con y y un punto en el que la gráfica corta al eje x se llama una intersección con el eje x. La coordenada x de una intersección con el eje x se llama a veces una "raíz" o "cero" de la función, ya que la función toma el valor cero ahí. (Véase la FIGURA 5.16)

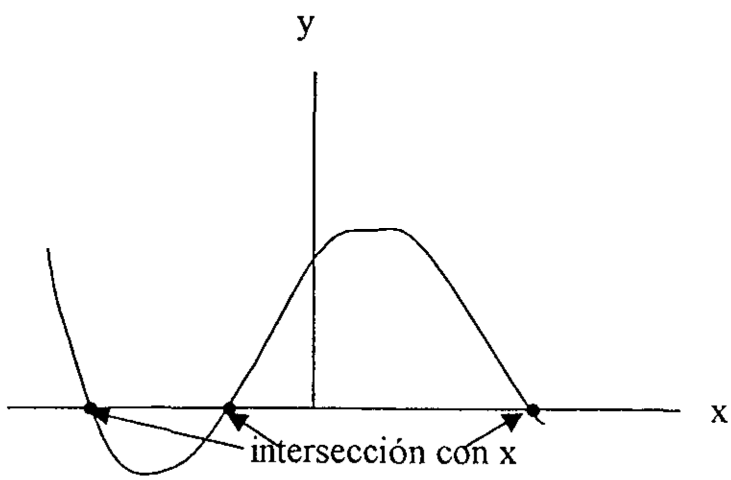


FIGURA 5.16

Algunas funciones no están definidas para todos los valores de x. por ejemplo, $f(x) = 1/x$ no está definida para $x = 0$, y $f(x) = \sqrt{x}$ no está definida para $x < 0$. (Véase la FIGURA 5.17) Muchas funciones que surgen en las aplicaciones

Cuando determinábamos las asíntotas horizontales de una función se tomaban los límites

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Si alguno de estos límites existe, entonces el valor del límite determina una asíntota horizontal.

Existían también las asíntotas verticales en las cuales una función se acercaba a una recta vertical cuando x se encontraba cada vez más cerca de un valor fijo, como en la FIGURA 5.19. Generalmente se espera una asíntota vertical en un valor de x que llevaría a una división entre cero para definir el valor de f(x). Por ejemplo, $f(x) = 1/(x-3)$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

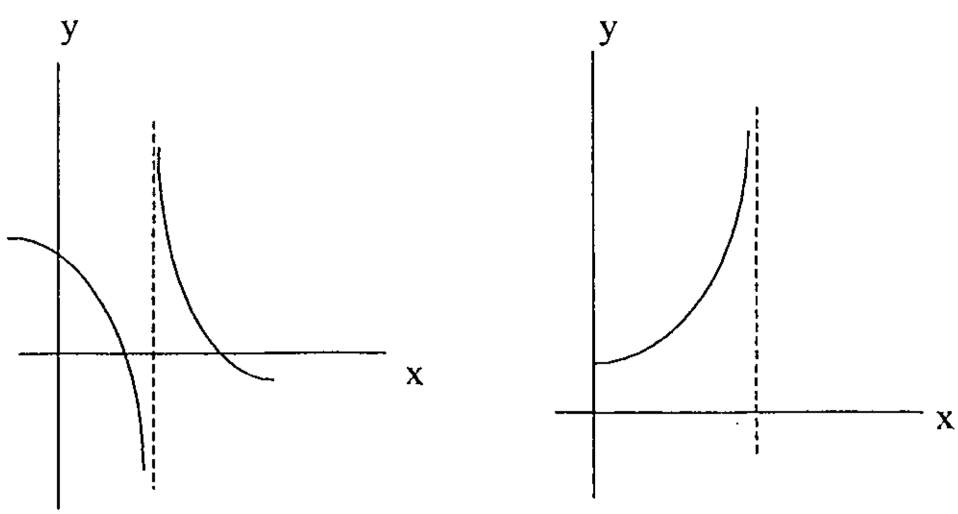


FIGURA 5.19

5.3.2 LAS REGLAS DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

Se demostrará ahora cómo las propiedades de la gráfica de una función f(x) están relacionadas con las propiedades de las derivadas, $f'(x)$ y $f''(x)$. Esas relaciones darán la clave para el trazado de curvas.

Se empezará con una discusión sobre la primera derivada de una función f(x). Supóngase que para algún valor de x, como x = a, la derivada $f'(x)$ es positiva. Entonces, la recta tangente en (a, f(a)) tiene pendiente positiva y es una recta creciente. Como la gráfica de f(x), cercana a (a, f(a)) se parece a su recta tangente, la función debe ser creciente en x = a. De la misma manera, cuando $f'(a) < 0$, la función es decreciente en x = a. (Véase la FIGURA 5.20)

Por lo tanto se tiene el siguiente útil resultado.

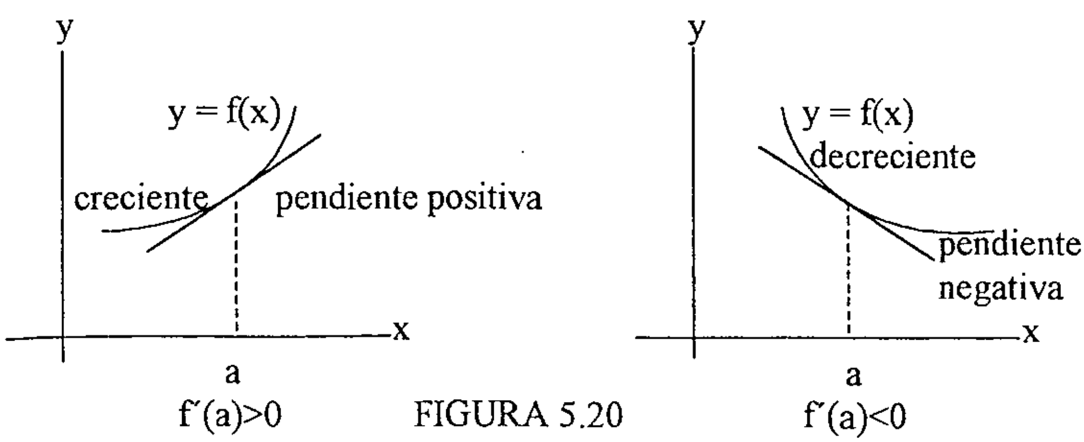


FIGURA 5.20

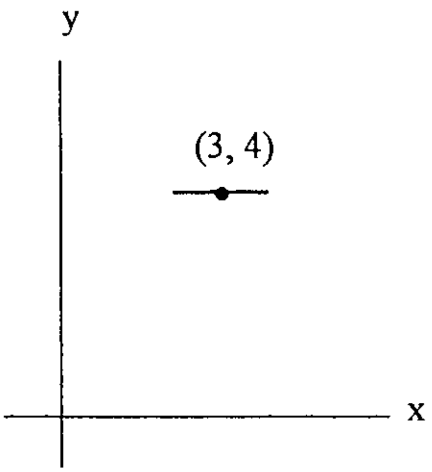


FIGURA 5.21

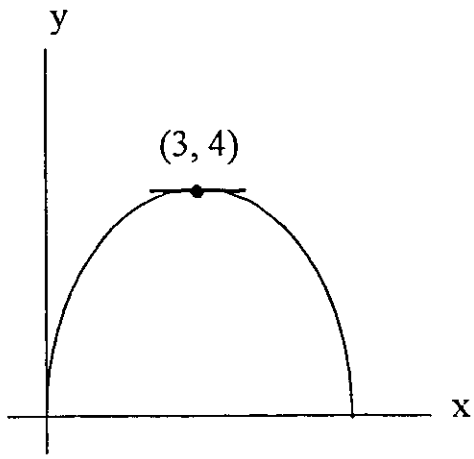


FIGURA 5.22

La segunda derivada de una función f(x) también proporciona información útil acerca de la concavidad de la gráfica de f(x). De esta manera, se puede establecer la siguiente regla.

Regla de la segunda derivada. Si $f''(a) > 0$, entonces f(x) es cóncava hacia arriba en $x = a$. Si $f''(a) < 0$, entonces f(x) es cóncava hacia abajo en $x = a$.

Cuando $f''(a) = 0$, la regla de la segunda derivada no proporciona información alguna. En este caso, la función puede ser cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo o ninguna de las dos posibilidades en $x = a$.

a) (2,3), (4, 5) y (6, 7) están sobre la curva.

b) $f'(6) = 0$ y $f'(2) = 0$

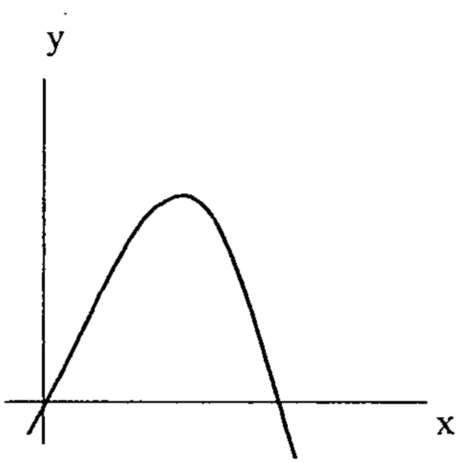
c) $f''(x) > 0$ para $x < 4$, $f''(4) = 0$ y $f''(x) < 0$ para $x > 4$.

SOLUCIÓN Primero se dibujan los tres puntos de la propiedad a) y después se trazan dos rectas tangentes utilizando la información de la propiedad b). (Véase la FIGURA 5.23). Por la condición c) y la regla de la segunda derivada se sabe que f(x) es cóncava hacia arriba para x < 4. En particular, f(x) es cóncava hacia arriba en (2,3). También f(x) es cóncava hacia abajo para x > 4 y, en particular en (6, 7). Nótese que f(x) debe tener un punto de inflexión en x = 4 ya que la concavidad cambia ahí. En la FIGURA 5.24 se han trazado pequeñas porciones de curva cercanas a (2, 3) y a (6, 7). Con esta información, ya es posible completar el trazo de la gráfica (FIGURA 5.25) teniendo cuidado de hacer la curva cóncava hacia arriba para x < 4 y cóncava hacia abajo para x > 4.

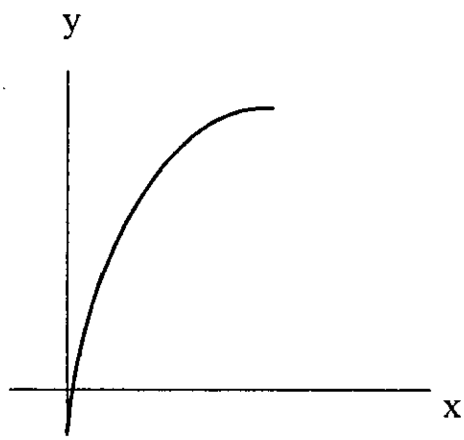
2.- ¿Qué funciones tienen la primera derivada negativa para todo x?

3.- ¿Qué funciones tienen la segunda derivada positiva para todo x?

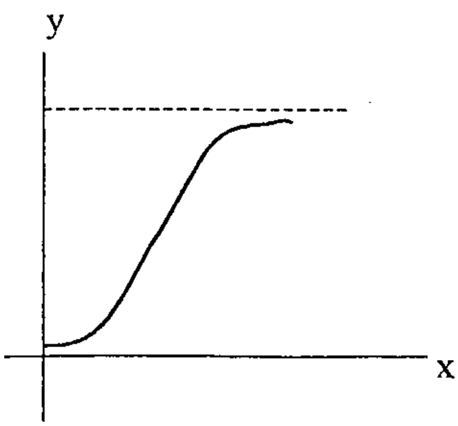
4.- ¿Qué funciones tienen la segunda derivada negativa pra todo x?



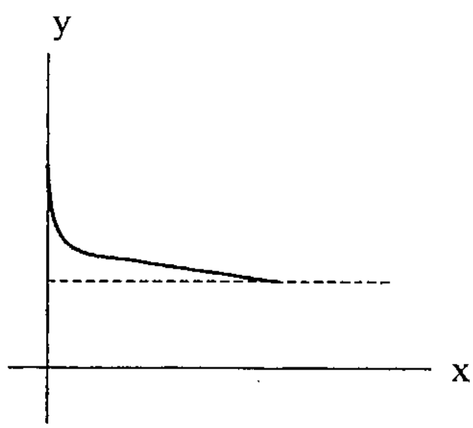
a)



b)



c)



d)

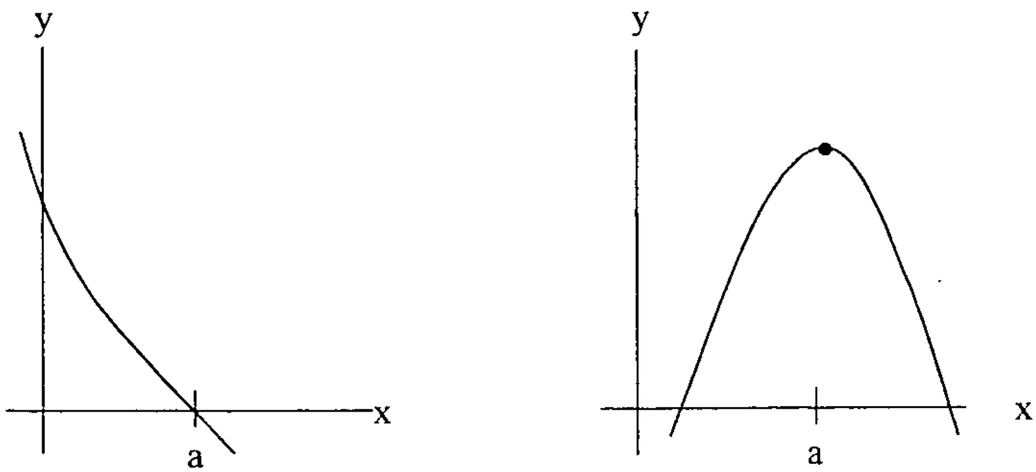


FIGURA 5.27

En los ejercicios 7-12 trace la gráfica de una función que tenga las propiedades descritas.

7. $f(2) = 1$; $f'(2) = 0$; cóncava hacia arriba para toda x.

8. $f(-1) = 0$; $f'(x) < 0$ para $x < -1$, $f'(-1) = 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > -1$

9. $f(3) = 5$; $f'(x) > 0$ para $x < 3$, $f'(3) = 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 3$.

10. $(-2, -1)$ y $(2, 5)$ están sobre la curva; $f'(2) = 0$ y $f'(-2) = 0$; $f''(x) > 0$ para $x < 0$; $f''(0) = 0$, $f''(x) < 0$ para $x > 0$.

11. $(0, 6)$, $(2, 3)$ y $(4, 0)$ están en la gráfica; $f'(0) = 0$ y $f'(4) = 0$; $f''(x) < 0$ para $x < 2$; $f''(2) = 0$, $f''(x) > 0$ para $x > 2$.

5.4 TRAZADO DE CURVAS (INTRODUCCIÓN)

En esta sección y en la siguiente se desarrollarán la habilidad para trazar gráficas de funciones. Hay dos razones importantes para aprender a hacerlo. La primera, una "imagen" geométrica de una función es casi siempre mucho más fácil de comprender que su fórmula abstracta. En segundo lugar, el material de esta sección sentará los fundamentos para resolver los problemas de aplicación.

El "trazo" de la gráfica de una función f(x) debe proporcionar información sobre el comportamiento general de la gráfica. Debe mostrar en qué punto f(x) es creciente y dónde decreciente y debe indicar, hasta donde sea posible, dónde f(x) es cóncava hacia arriba y dónde hacia abajo. Además, debe contener uno o más puntos clave de la gráfica. Estos puntos generalmente incluyen los puntos extremos relativos, puntos de inflexión y las intersecciones con los ejes x e y.

El enfoque general para el trazado de curvas incluirá cuatro pasos principales.

1. A partir de f(x) se deben calcular $f'(x)$ y $f''(x)$.

Ejemplo 5.21: La gráfica de la función cuadrática $f(x) = 1/4x^2 - x + 2$ es una parábola y por lo tanto tiene un punto extremo relativo. Encuéntrelo y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Primero habrá que calcular la primera y segunda derivada f(x).

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$$
$$f''(x) = \frac{1}{2}$$

Haciendo $f'(x) = 0$, se tiene que $\frac{1}{2}x - 1 = 0$, por lo que $x = 2$. Entonces $f'(2) = 0$. Geométricamente esto significa que la gráfica de f(x) tiene una recta tangente horizontal en el punto $x = 2$. Para obtener este punto, habrá que sustituir el valor 2 para x en la expresión original de f(x).

$$f(2) = \frac{1}{4}(2)^2 - 2 + 2 = 1$$

½) para toda x la gráfica es cóncava hacia arriba en todo punto.

Un trazo completo se puede apreciar en la FIGURA 5.30.

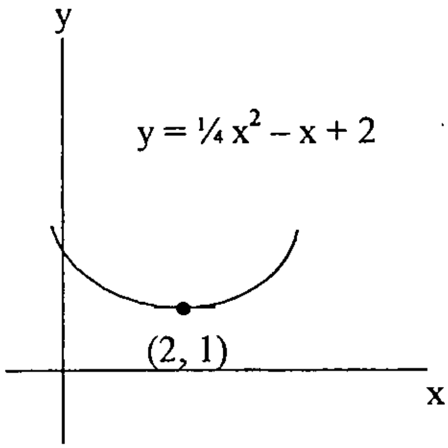


FIGURA 5.30

Ejemplo 5.22: Localice todos los puntos extremos relativos posibles en la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Verifique la concavidad en esos puntos y utilice esa información para trazar la gráfica de f(x).

SOLUCIÓN Se tiene que

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

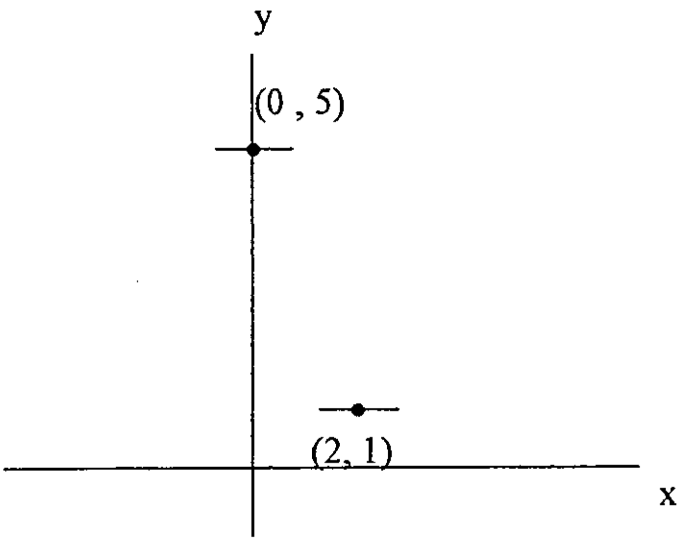


FIGURA 5.31

A continuación habrá que verificar la concavidad de la gráfica en esos puntos valorando $f''(x)$ en $x = 0$ y $x = 2$:

$$f''(0) = 6(0) - 6 = -6$$

$$f''(2) = 6(2) - 6 = +6$$

Como $f''(0)$ es negativa, la gráfica es cóncava hacia abajo en $x = 0$; como $f''(2)$ es positiva, la gráfica es cóncava hacia arriba en $x = 2$. La FIGURA 5.32 muestra los esbozos parciales de la función en esos puntos.

En la FIGURA 5.32 es claro que (0, 5) es un punto máximo relativo y que (2, 1) es un punto mínimo relativo. Como éstos

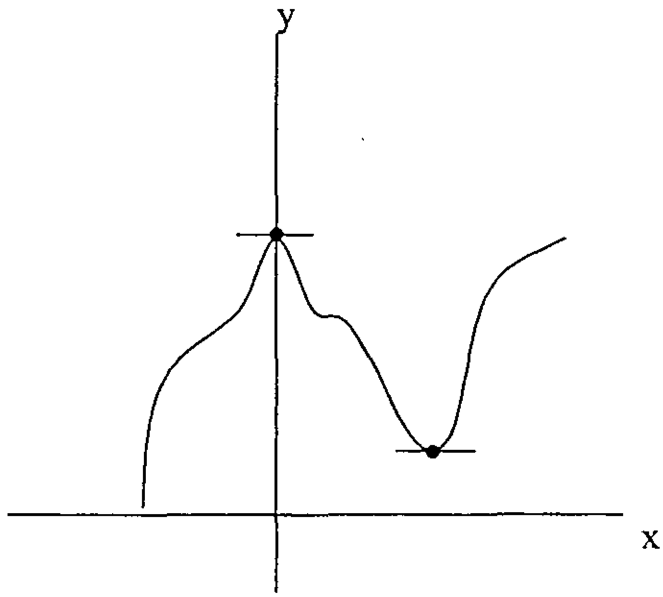


FIGURA 5.34

Localización de puntos de inflexión. Un punto de inflexión de una función f(x) puede ocurrir sólo para valores de x en los cuales $f''(x)$ vale cero ya que la curva es cóncava hacia arriba cuando $f''(x)$ es positiva y cóncava hacia abajo cuando $f''(x)$ es negativa. Así se puede establecer la siguiente regla.

Busque los posibles puntos de inflexión haciendo $f''(x) = 0$ y despejando x.

Una vez que se tiene el valor de x para el cual la segunda derivada vale cero, por ejemplo x = b, habrá que verificar la

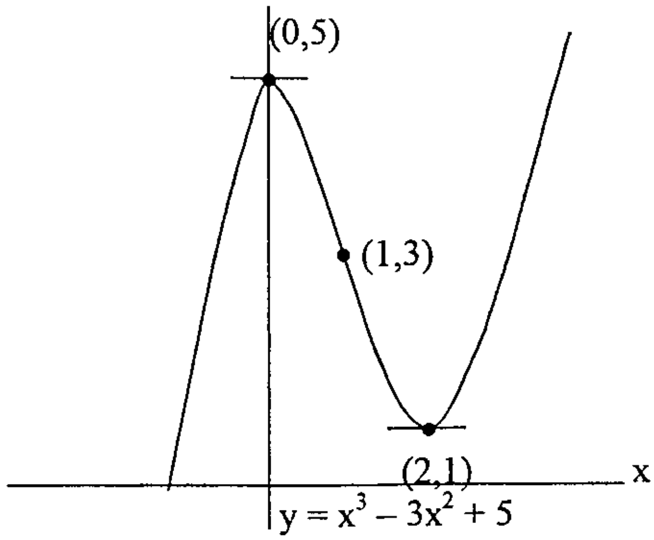


FIGURA 5.35

Ejemplo 5.24: Trace la gráfica de $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$

Entonces $f'(x) = -x^2 + 6x - 5$

$f''(x) = -2x + 6$

Haciendo $f'(x) = 0$ y despejando x:

$-x^2 + 6x - 5 = 0$

$-(x^2 - 6x + 5) = 0$

$-(x - 1)(x - 5) = 0$

$x = 1$ ó $x = 5$

La curva es cóncava hacia arriba en $x = 1$ porque $f''(1)$ es positiva, y la curva es cóncava hacia abajo en $x = 5$ porque $f''(5)$ es negativa

Como la concavidad cambia en algún lugar entre $x = 1$ y $x = 5$, entonces debe tener al menos un punto de inflexión. Haciendo $f''(x) = 0$, se encuentra que

$$-2x + 6 = 0$$

$$x = 3$$

Por esto el punto de inflexión debe estar en $x = 3$. Para poder dibujar el punto de inflexión habrá que calcular

$$f(3) = -\frac{1}{3}(3)^3 + 3(3)^2 - 5(3) = 3$$

EJERCICIOS 4: Cada una de las gráficas de las funciones de los ejercicios 1-8 tienen un punto extremo relativo. Dibuje ese punto y verifique la concavidad en ese lugar. Utilizando únicamente esa información, trace la gráfica. [Al resolver los problemas observe que si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces f(x) tiene un punto máximo relativo cuando $a > 0$ y un punto mínimo relativo cuando $a < 0$.]

1. $f(x) = 2x^2 - 8$
2. $f(x) = 3x^2 + 6x - 5$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$
4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 4$
5. $f(x) = 1 + 6x - x^2$
6. $f(x) = 1 + x + x^2$
7. $f(x) = -x^2 - 8x - 10$
8. $f(x) = -3x^2 + 18x - 20$

Cada una de las gráficas de las funciones de los ejercicios 9-16 tiene un punto máximo relativo y un punto mínimo relativo. Dibuje esos puntos y verifique la concavidad en esos sitios. Utilizando únicamente esa información trace la gráfica.

9. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$
10. $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2$
13. $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 + 9x$
14. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 24$

5.5 TRAZADO DE CURVAS (CONTINUACIÓN)

En la sección anterior se discutieron las técnicas principales para el trazado de curvas. En esta sección se añadirán algunos toques finales y se examinarán varias curvas ligeramente más complejas.

Mientras más puntos se dibujen de una gráfica, mejor definida quedará ésta. Esta afirmación es válida incluso para las curvas cuadráticas y cúbicas de la sección anterior. Desde luego, los puntos más importantes de una curva son los puntos extremos relativos y los puntos de inflexión. Además, frecuentemente las intersecciones con los ejes x y y tienen un interés intrínseco en un problema aplicado. La intersección con el eje y es (0, f(0)). Para encontrar las intersecciones con el eje x de la gráfica de f(x) habrá que encontrar los valores de x para los cuales f(x) = 0. Como esto puede ser un problema difícil solamente se buscarán las intersecciones con el eje x cuando sea fácil de encontrarlas o cuando el problema lo requiera específicamente.

Cuando f(x) es una función cuadrática como en el siguiente ejemplo, es fácil calcular las intersecciones con el eje x (si existen) ya sea factorizando la expresión o utilizando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(\frac{1}{2})(7)}}{2(\frac{1}{2})} = 4 \pm \sqrt{2}$$

Las intersecciones con el eje x son $(4 - \sqrt{2}, 0)$ y $(4 + \sqrt{2}, 0)$.

Para dibujar estos puntos se empleó la aproximación: $\sqrt{2} \approx 1.4$.

(Véase la FIGURA 5.38)

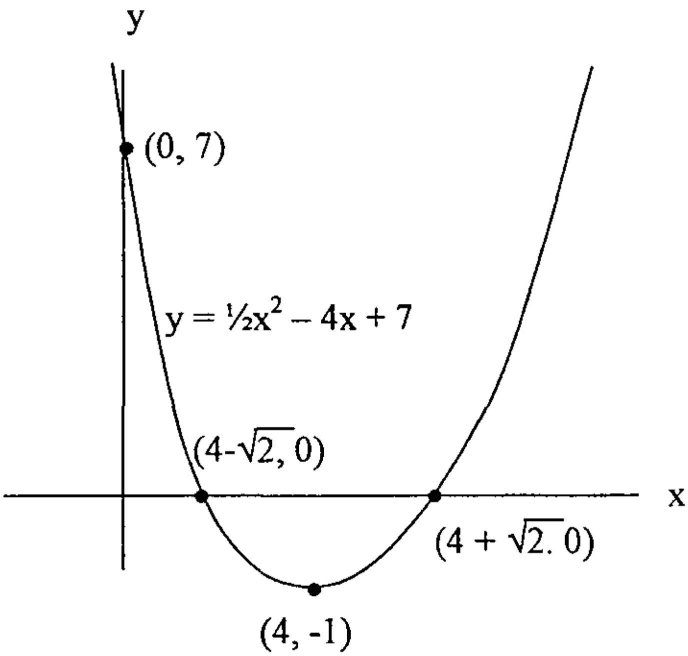


FIGURA 5.38

Ejemplo 5.26: Trace la gráfica de $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + 1$

SOLUCIÓN $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$

$f''(x) = x - 3$

El punto de inflexión es (3, f(3)) = (3, 7). La intersección con el eje y es (0, f(0)) = (0, 1). Se omite la intersección con el eje x pues es difícil resolver la ecuación cúbica

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + 1 = 0$$

La calidad del trazo será mejor si primero se traza la recta tangente en el punto de inflexión. Para hacerlo es necesario conocer la pendiente de la curva en (3, 7):

$$f'(3) = \tfrac{1}{2}(3)^2 - 3(3) + 5 = \tfrac{1}{2}$$

(Véase la FIGURA 5.39)

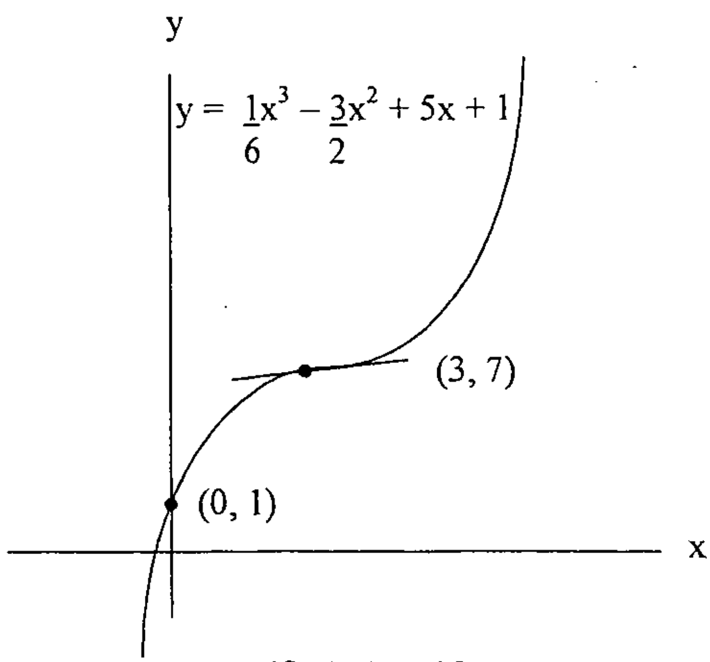


FIGURA 5.39

La intersección con el eje y es $(0, f(0)) = (0, 15)$. Para encontrar la intersección con el eje x, habrá que hacer $f(x) = 0$ y despejar x:

$$(x-2)^4 - 1 = 0$$

$$(x-2)^4 = 1$$

$$x - 2 = 1 \quad \text{o} \quad x - 2 = -1$$

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = 1.$$

(Véase la FIGURA 5.40)

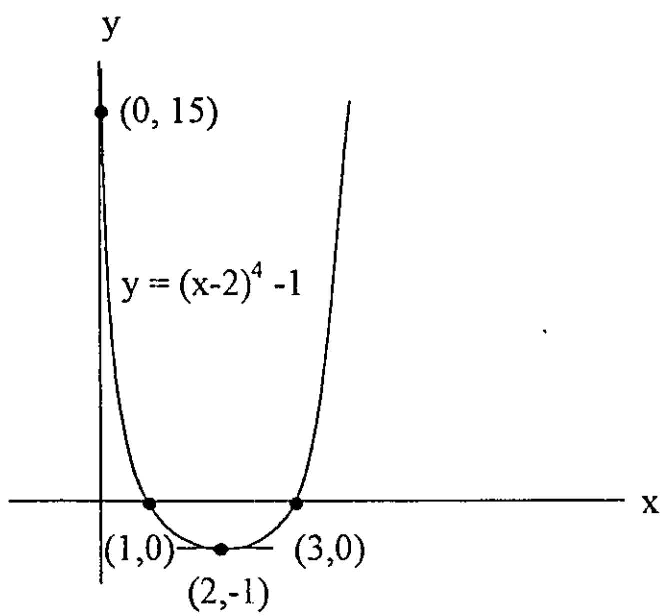


FIGURA 5.40

3. Para encontrar todos los puntos de inflexión de f(x)

   a) Haga $f''(x) = 0$ y despeje x. Al suponer que $x = b$ es una solución, habrá que calcular f(b) y dibujar el punto (b, f(b)).

   b) Examine la concavidad de f(x) a la derecha y a la izquierda de b. Si la concavidad cambia en $x = b$, entonces (b, f(b)) será un punto de inflexión.

4. Considere las otras propiedades de la función para completar el trazo.

   a) Si f(x) está definida para $x = 0$, la intersección con el eje y es (0, f(0)).

   b) ¿Sugiere el esbozo parcial que hay intersecciones con el eje x? Si así es, éstas se encontrarán haciendo $f(x) = 0$ y despejando x. (Efectúe el paso sólo en los casos fáciles o cuando el problema lo requiera específicamente.)

   c) Observe dónde está definida f(x). Algunas veces la función está dada sólo para valores restringidos de x. Algunas veces la fórmula de f(x) no tiene sentido para ciertos valores de x.

   d) Busque las posibles asíntotas.

      i) Examine la fórmula de f(x). Si algunos términos se vuelven insignificantes al crecer x y si el resto de la fórmula es la ecuación de una recta, entonces esa recta es una asíntota.

12. $f(x) = 4 - x - x^3$

13. $f(x) = 5 - 13x + 6x^2 - x^3$

14. $f(x) = 2x^3 + x - 2$

15. $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x$

19. $f(x) = x^4 - 6x^2$

20. $f(x) = 1 + 6x^2 - 3x^4$

21. $f(x) = (x - 3)^4$

22. $f(x) = (x + 2)^4 - 1$

Trace la gráfica de las siguientes funciones para $x > 0$.

23. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x$

24. $y = \frac{1}{x} + 9x$

25. $y = \frac{9}{x} + x + 1$

Obsérvese que el valor de f(t) es el más grande cuando t = 3/2 . En este valor de t la pelota alcanza la altura de 40 pies. [Nótese que la curva de la FIGURA 5.41 es la gráfica de f(t) y no un dibujo de la trayectoria física de la pelota]

La pelota alcanza la altura máxima de 40 pies en 1.5 segundos.

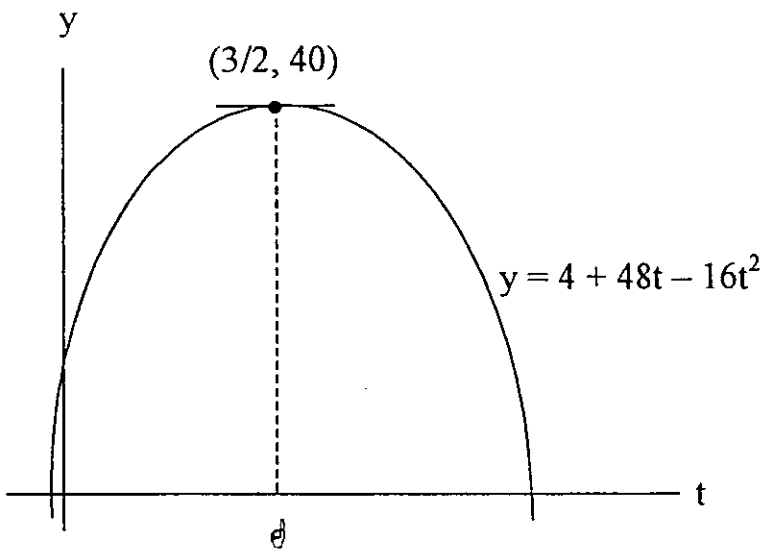


FIGURA 5.41

Ejemplo 5. 29: Un hombre quiere sembrar un jardín rectangular utilizando un lado de su casa como muro del jardín y colocando una cerca de alambre en los tres lados restantes. Encuentre las dimensiones del jardín más grande que puede rodear utilizando 40 pies de malla de alambre.

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1), se tiene que

$$A = (40 - 2x)x = 40x - 2x^2 \qquad (4)$$

Ahora se tiene ya una fórmula para el área A que depende únicamente de una variable, y así se puede trazar la gráfica de A como una función de x.

Utilizando las técnicas para el trazo de curvas se obtiene la gráfica de la FIGURA 5.43. En la gráfica se puede ver que el área máxima ocurre cuando $x = 10$. Sustituyendo $x = 10$ en la ecuación (3) se obtiene.

$$w = 40 - 2(10) = 20$$

Por lo tanto, la respuesta es $w = 20$ pies, $x = 10$ pies.

SOLUCIÓN

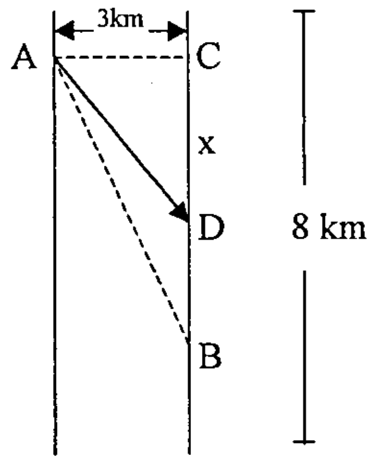


FIGURA 5. 44

Sea x la distancia de C a D. La distancia que corre es $|DB| = 8 - x$, y con el teorema de Pitágoras calcularemos la distancia que rema, que es $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Suponemos que la velocidad del agua es 0 km/h y aplicaremos la fórmula

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Entonces, el tiempo que rema es $\sqrt{x^2 + 9}\,/6$, y el tiempo que corre es $(8 - x)/8$; el tiempo total, T, en función de x, es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

Por lo tanto el punto extremo es $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver si se presenta un mínimo en ese punto extremo o en un extremo del dominio [0, 8], evaluaremos T en los tres puntos:

$$T(0) = 15 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) \approx 1.33 \qquad T(8) \approx 1.42$$

Como el mínimo de esos valores de T se presenta cuando $x = 9/\sqrt{7}$, el valor mínimo absoluto de T debe estar allí.

Por lo tanto, concluimos que el hombre ha de llegar en el bote a un punto a $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$ 3.4 km) corriente abajo de su punto de partida y luego correr hasta la meta.

EJERCICIOS 6: 1. Determina dos números reales positivos x e y tales que su suma sea 60 y su producto sea lo más grande posible.

2. Determina el área máxima posible de un rectángulo de perímetro 200 metros.

3. Un granjero tiene 600 metros de cerca, con lo que quiere construir un corral rectangular. Parte de la cerca se usará para

a) máxima, b) mínima?

9. Dos postes verticales de 3 y 4 metros se hallan clavados en el suelo y sus bases distan cinco metros. Calcula la longitud mínima de cable que se necesita para tener dos tramos rectos; desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo, y de ahí hasta la punta del otro poste.

10. El propietario de un huerto de manzanas calcula que si siembra 24 árboles por acre, entonces cada árbol adulto dará 600 manzanas al año. Por cada 3 árboles más que se planten por acre, el número de manzanas que produce cada árbol disminuye en 12 al año. ¿Cuántos árboles se deben plantar por acre para obtener el mayor número posible de manzanas al año?

RESPUESTAS

1. $x = y = 25$
2. Base y altura de 50 metros.
3. El área máxima es 11250, cuando $x = 150$, $y = 75$.
4. Area máxima $16/3\sqrt{3}$, valor de la base $4/\sqrt{3}$, altura $8/3$.

UNIDAD 6. LA ANTIDERIVADA Y SUS APLICACIONES

TEMÁTICA

Tiempo aproximado 8 horas.

- Ejemplos para introducir las ecuaciones donde aparece la función y sus derivadas, y, en algunos casos sencillos, estudio de la solución por métodos numéricos o cualitativos.
- La antiderivada y la solución de ecuaciones de la forma: y=c, y= ax + b, y= ax^n,...
- Aplicaciones extraídas de la física, la economía y las diversas disciplinas, en particular, al estudio del movimiento rectilíneo (movimiento uniforme y uniformemente acelerado).

OBJETIVOS

Objetivo particular:

En esta unidad se establece un primer acercamiento al tema de ecuaciones diferenciales mediante el planteo de ecuaciones donde aparecen la función y su derivada. También aparece el tema de la antiderivada como operación inversa a la derivación y se busca su empleo en la solución de problemas de la física, la economía y otras disciplinas.

Objetivos específicos:

Al finalizar la unidad el alumno:
—Resolverá problemas sencillos de ecuaciones diferenciales y encontrará la solución por métodos numéricos o cualitativos.
—Encontrará y aplicará la antiderivada de funciones polinomiales.
—Aplicará los conocimientos anteriores del estudio, en particular del movimiento rectilíneo.

En esta definición, llamamos a F una antiderivada de f, mejor que la antiderivada de f. Para ver el por qué, considérese el hecho de que $F_1(x) = x^3$, $F_2(x) = x^3-5$ y $F_3(x) = x^3+ 97$ son ambas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$. Esto sugiere que para cualquier constante C, la función dada por $F(x) = x^3+c$ es una antiderivada de f. Este resultado forma parte del siguiente teorema.

A veces se llama funciones primitivas a las antiderivadas.

TEOREMA 1: **REPRESENTACIÓN DE ANTIDERIVADAS**

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si es de la forma:

$$G(x) = F(x) + C, \text{ para todo } x \text{ en } I$$

donde C es una constante.

OBSERVACIÓN: EL punto crucial en el teorema anterior está en que podemos representar toda la familia de antiderivadas de una función mediante la adición de una constante a una antiderivada conocida. Por ejemplo, sabiendo que $D_x\left[x^2\right] = 2x$, podemos representar la familia de

Ejemplo 6.1: Encuentre la antiderivada más general de

a) $4x^5$ b) $\frac{7}{x^3}$ c) $\sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN a) Usando la regla de las potencias con a=4 y r=5 obtenemos la antiderivada:

$$\frac{4}{6}x^6 + c, \quad \text{o} \quad \frac{2}{3}x^6 + c$$

b) Escribiendo $\frac{7}{x^3}$ como $7x^{-3}$ y usando la regla con a=7 y r=-3 obtenemos:

$$\frac{7}{-2}x^{-2} + c, \quad \text{o} \quad \frac{-7}{2x^2} + c$$

c) Como $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, podemos aplicar la regla de las potencias con a=1 y r= $\frac{2}{3}$, y así obtenemos:

$$\frac{1}{(5/3)}x^{5/3} + C, \quad \text{o} \quad \frac{3}{5}x^{5/3} + C$$

Para evitar errores algebraicos es conveniente verificar las soluciones anteriores derivando las antiderivadas. En cada caso debe obtenerse la expresión dada.

SOLUCIÓN Escribiendo el último término de f(x) como $5x^{-3}$ y aplicando la regla de las potencias para antiderivadas a cada término obtenemos:

$$F(x)=\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{2}x^2+4x-\frac{5}{2}x^{-2}+C$$

No es necesario introducir una constante arbitraria para cada una de las cuatro antiderivadas, ya que éstas podrían sumarse y convertirse así en una sola constante C.

En las aplicaciones matemáticas aparecen frecuentemente ecuaciones en las que intervienen derivadas de una función f desconocida. Tales ecuaciones se denominan **ecuaciones diferenciales**. La función f se llama solución de la ecuación diferencial. Resolver una ecuación diferencial significa encontrar todas sus soluciones. A veces, además de la ecuación diferencial se conocen algunos valores de f, llamados **valores de la frontera**, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Para determinar C se usa el hecho de que f(1)=2:

$$f(1) = \frac{2}{5} + C = 2$$

Despejando C, se obtiene $C = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$, así que la solución particular es:

$$f(x) = \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{8}{5} = \frac{2x^{5/2} + 8}{5}$$

Ejemplo 6.5: Encontrar f si $f'(x)=12x^2+6x-4$, $f(0)=4$ y $f(1)=1$

SOLUCIÓN La antiderivada general de $f'(x)=12x^2+6x-4$ es

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + c = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Utilizando las reglas de antiderivación una vez más, se obtiene que:

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 = 2x^2 + Cx + D$$

Ejemplo 6.6: Un punto se mueve en línea recta de tal manera que $a(t)=12t-4$. Encuentre $s(t)$ suponiendo que las condiciones iniciales son $v(0)=8$ y $s(0)=15$

SOLUCIÓN Partiendo de $v'(t)=12t-4$, mediante el procedimiento de antiderivación obtenemos:

$$v(t)=6t^2-4t+C$$

para algún número C. Sustituyendo O en lugar de t y usando que $v(0)=8$ obtenemos:

$$v(0)=0-0+C=8$$

$$C=8$$

Por lo tanto $v(t)=6t^2-4t+8$

o equivalente,

$$s'(t)=6t^2-4t+8$$

La antiderivada más general de $s'(t)$ es

$$s(t)=2t^3-2t^2+8t+D$$

donde D es algún número

SOLUCIÓN El movimiento de la piedra puede representarse mediante un punto que se mueve sobre una línea recta vertical cuyo origen está al nivel del suelo y su dirección positiva hacia arriba. La distancia al suelo en el tiempo t es s(t) y las condiciones iniciales son s(0)=144 y v(0)=96. Como la velocidad disminuye, $v'(t)<0$; es decir, la aceleración es negativa. Por lo tanto, según los comentarios anteriores a este ejemplo,

$$a(t)=-32$$

Como v es una antiderivada de a,

$$v(t)=-32t+C$$

para algun número C. Sustituyendo 0 en lugar de t y usando que v(0)=96 obtenemos 96=0+C=C y por lo tanto

$$v(t)=-32t+96$$

Como $s'(t)=v(t)$, por antiderivación obtenemos

$$s(t)=-16t^2+96t+D$$

para algún número D. Tomando t=0 y usando s(0)=144 llegamos a 144=0+0+D=D. Resulta entonces que la distancia del suelo a la piedra al tiempo t está dada por

3. Se arroja hacia arriba una pelota, con velocidad de 48 ft/s, desde el borde de un acantilado a 432 pies sobre el fondo. Calcula su altura sobre el fondo a los t segundos después. ¿Cuánto alcanza su altura máxima? ¿Cuándo llega al fondo?

4. En la superficie de la Luna, la aceleración de la gravedad es de -5.28 pies/seg^2. Si se lanza hacia arriba un objeto desde una altura inicial de 1000 pies con una velocidad de 56 pies/s, encuentra su velocidad y su altura 4.5 segundos más tarde.

5. Una pelota rueda cuesta abajo sobre un plano inclinado con una aceleración de 50 cm/seg^2. Si no se le imprime velocidad inicial a la pelota, ¿qué distancia recorrerá en t segundos? ¿Qué velocidad inicial habría que dar a la pelota para que rodara 25 m en 5 segundos?

En los ejercicios 6 a 10 encuentre f(x).

3) La altura máxima se alcanza pasando 1.5 segundos. La pelota llega al suelo a los $\frac{3(1+\sqrt{13})}{2} \approx 6.9$segundos.

4) 32.24 pies/seg.

5) s(t)=0.25t^2, Vo=5 m/s

6) $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + 2$

7) $f(x) = x - \frac{1}{x} + 1$

8) $f(x) = \frac{x^3}{6} + 2x - 3$

9) $f8x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 4$

10) $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$

6.3 APLICACIONES PRÁCTICAS DE PRIMITIVAS O ANTIDERIVADAS

(CONTINUACIÓN)

Presentamos aquí algunos problemas en los que se conoce el ritmo de cambio de una cantidad y el objetivo es hallar una expresión para la cantidad misma. Como el ritmo (razón) de cambio es la derivada de la cantidad, halle la expresión para la cantidad misma con la antiderivada.

$$5000 = 2(0) + \frac{10}{3}(0)^{\frac{3}{2}} + C \qquad \text{o} \qquad C=5000$$

Por lo tanto,

$$P(x) = 2x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + 5000$$

En 9 meses la población será

$$P(9) = 2(9) + \frac{10}{3}(9)^{\frac{3}{2}} + 5000$$

$$=5{,}108$$

Ejemplo 6.9: Un fabricante ha encontrado que el costo marginal es de $3q^2$-60q+400 dólares por unidad cuando se han producido q unidades. El costo total de producción de las dos primeras unidades es de 900 dólares. ¿Cuál es el costo total de producción de las cinco primeras unidades?

SOLUCIÓN El costo marginal es la derivada de la función de costo total C. Por tanto, C debe ser la antiderivada de $3q^2$-60q+400. Esto es.

$$C(q)=q^3-30q^2+400q+k$$

Para hallar C, use el hecho de que la gráfica de f pasa por (2,6). Esto es, sustituya $x=2$ y $f(2)=6$ en la ecuación de $f(x)$ y resuelva en C para obtener

$$6=(2)^3+2+C \qquad 0 \qquad C=-4$$

Por tanto, la función deseada es

$$f(x)=x^3+x-4$$

Ejemplo 6.11: Una empresa sabe que el costo marginal asociado a la producción de x unidades de cierto artículo está dado por 30-0.02x (pesos). Suponiendo que el costo, por producir una unidad es de 35 pesos, encuentre la función de costo y el costo por producir 100 unidades.

SOLUCIÓN Si C denota la función de costo, entonces el costo marginal es la razón de cambio de C con respecto a x, es decir

$$C'(x)=30-0.02x$$

Buscando la antiderivada encontramos que

$$C(x)=30x-0.01x^2+k$$

3) Un fabricante ha encontrado que el costo marginal es de $6q+1$ dólares por unidad cuando se han producido q unidades. El costo total (incluyendo gastos generales) de la producción de la primera unidad es de 130 dólares. ¿Cuál es el costo total de producción de las diez primeras unidades?.

4) Un objeto se mueve de forma que su velocidad después de t minutos es de $3+2t+6t^2$ metros por minuto ¿Qué distancia se desplazará el objeto durante el segundo minuto?.

5) Un estudio ambiental de una cierta comunidad sugiere que dentro de t años el nivel de monóxido de carbono en el aire estará cambiando a un ritmo de $0.1t+0.1$ partes por millón por año. Si el nivel actual de monóxido de carbono en el aire es de 3.4 partes por millón, ¿cuál será el nivel dentro de 3 años?.

UNIDAD 7. LA INTEGRAL COMO ÁREA BAJO UNA CURVA O INTEGRAL DEFINIDA.

TEMÁTICA

Tiempo aproximado 8 horas.

- La función área bajo una curva y su derivada; aproximación intuitiva al Teorema Fundamental del Cálculo.
- Cálculo de integrales de polinomios y funciones algebraicas sencillas. Aplicaciones al cálculo del área bajo una curva.
  En casos sencillos:
- Aplicaciones geométricas: área entre dos curvas, volumen de un sólido de revolución.
- Cálculo del valor promedio de una función.

OBJETIVOS

Objetivos particulares:

Usando la función área bajo una curva y su derivada el alumno tendrá una aproximación intuitiva al Teorema Fundamental del Cálculo.
Retomando algunos de los ejemplos tratados en la primera unidad se busca que el alumno aplique la integral a la solución de problemas sencillos.

Objetivos específicos:

Al concluir la unidad el alumno:

—Elaborará una primera tabla de integrales y las aplicará al Cálculo de integrales de polinomios y funciones; así como al Cálculo del área bajo una curva.
—Calculará el área entre dos curvas y encontrará el volumen de un sólido de revolución.
—Aplicará la integral al cálculo de problemas numéricos.

El Cálculo consta de dos partes principales, el Cálculo diferencial y el Cálculo integral. El Cálculo diferencial está basado en la derivada. En esta unidad definiremos el concepto que es la base para el Cálculo integral: la integral definida. Uno de los resultados más importantes que discutiremos será el Teorema Fundamental del Cálculo. Este teorema demuestra que el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral están relacionados estrechamente.

7.1 SUMAS

Con el cálculo integral se podrá resolver problemas tales como: encontrar el área comprendida entre la curva: (véase FIGURA 7.1)

$y=f(x)$, el eje X y las rectas

$x=a$ y $x=b$

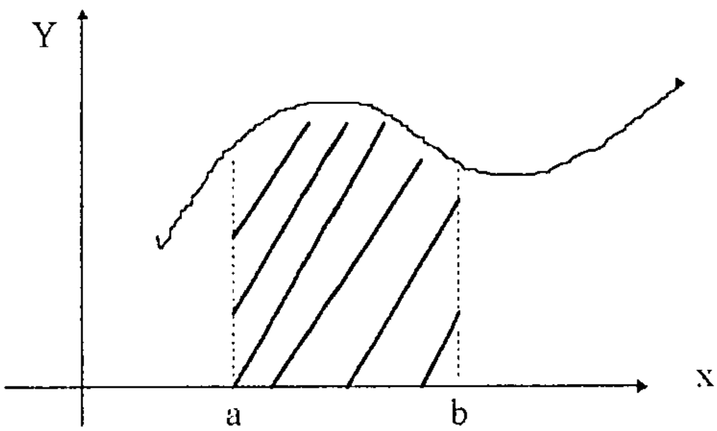


FIGURA 7.1

Para resolver este tipo de problemas será necesario emplear la suma de varios números o de varias variables; para abreviar dichas sumas, se requiere usar la notación sigma.

Pero antes de estudiar la notación sigma y de abordar el área del tipo de regiones que hemos mencionado, se resolverán algunos problemas, tal y como lo plantearon los griegos, pero usando para resolverlos, conceptos

Para darnos cuenta más claramente como podemos "aproximarnos" al área que nos interesa, abordemos un problema concreto:

Considérese un triángulo de base "b" y altura "a". Se requiere encontrar su área aproximada a partir de circuncribirse dos rectángulos. (Véase FIGURA 7.4).

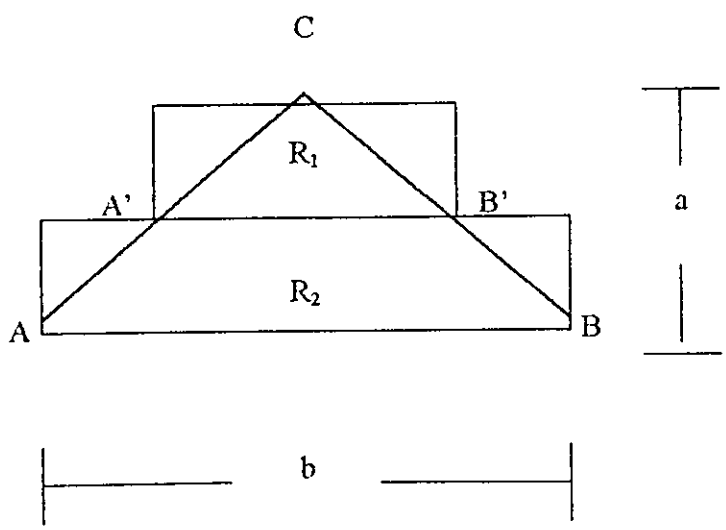


FIGURA 7.4

Circunscribamos dos rectángulos tal como lo piden, veamos que estos pueden tener igual altura, pero no así la base.

¿Cuánto mide la altura de cada rectángulo?

La altura de cada rectángulo es $\frac{a}{2}$

$$= \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{3}{4}ab$$

$$\therefore A = \frac{3}{4}ab$$

Por supuesto que ésta área es mayor que el área del triángulo dado, pero si se circunscriben más rectángulos más aproximada será el área del triángulo dado.

Supongamos que se circunscriben "n" rectángulos, de la misma altura, por lo tanto la altura de cada uno de ellos es:

$$\frac{a}{n}$$

Veamos la FIGURA 7.5

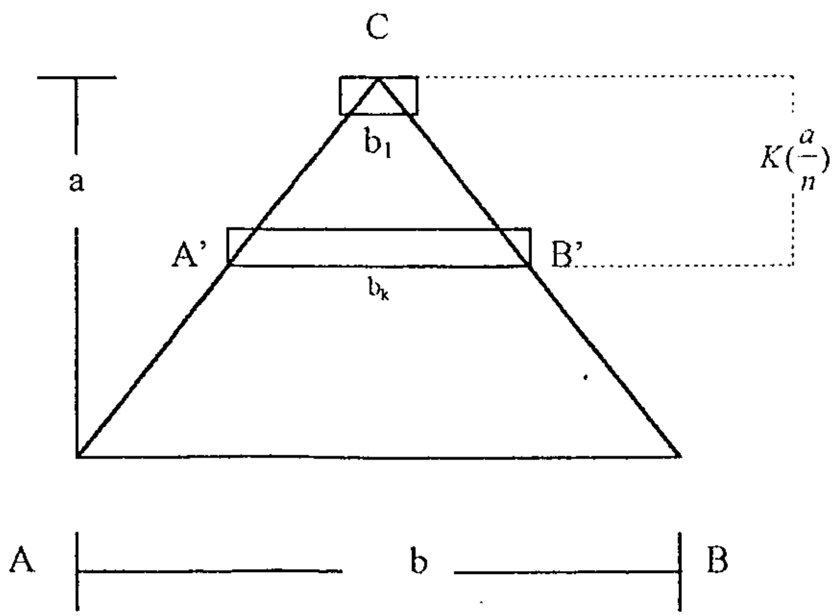


FIGURA 7.5

Así, para valores muy grandes de "n" nos acercaremos más al área del triángulo, veamos algunos ejemplos antes de continuar.

Ejemplo 7.1: a) Calcular A(n) cuando n=10

$$A(10)=\frac{ab}{10^2}(1+2+...+10)=\frac{11}{20}ab$$

b) Calcular A(n) cuando n=20

$$A(20)=\frac{ab}{20^2}(1+2+3+...+20)=\frac{21}{40}ab$$

Cuando n=20 hay una mejor aproximación evidentemente que cuando n=10.

Nótese que cada vez que "n" es más grande resultará más laborioso calcular la suma:

$$1+2+3+4+...+n$$

Por lo que es conveniente tener una fórmula para calcular dicha suma:

Si llamamos S= 1+2+3+...+n (1)

Se puede también escribir como: S=n+(n-1)+n-2)+...+2+1 (2)

Si sumamos (1) y (2) se tiene que:

$$\begin{array}{r} S=1+2+3+...+n \\ \underline{S=n+n-1+n-2+...+1} \\ 2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+....+(n+1)}_{n\ \text{veces}} \end{array}$$

$$A_t = \lim_{n\to\infty} A(n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{ab}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an}{2}\left[\frac{n(n+1)}{n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{ab}{2}\left[\frac{(n+1)}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{ab}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{ab}{2} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(recordemos que \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)$$

$$= \frac{ab}{2}(1+0)$$

$$= \frac{ab}{2}$$

$$\therefore A_t \quad \frac{ab}{2}$$

Es decir el Área del triángulo de base "b" y altura "a" es $\frac{ab}{2}$.

Ejemplo 7.2: Notación sigma

SUMA	NOTACIÓN SIGMA
a) $1+2+3+4+5+6$	$\sum_{i=1}^{6} i$
b) $3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$	$\sum_{j=3}^{7} j^2$
c) $\frac{1}{n}(1^2+1)+\frac{1}{n}(2^2+1)+...+\frac{1}{n}(n^2+1)$	$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(i^2+1)$
d) $f(x_1)\Delta x+f(x_2)\,\Delta x+...+f(x_n)\,\Delta x$	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

El ejemplo anterior muestra varias características de la notación sigma. Si bien cualquier variable puede ser usada como índice de la suma, preferimos i, j y k porque están asociadas a los enteros normalmente. Nótese que el índice de la suma no aparece en los términos de la suma expandida.

Existen ciertas propiedades de la notación SIGMA que son fáciles de demostrar y son de gran utilidad para demostrar algunas fórmulas que serán usadas posteriormente.

PROPIEDAD 1: $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ (donde c es una constante)

Demostración.

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+...+c}_{n\ \text{veces}} = nc$$

Así, queremos calcular: $\sum_{i=1}^{8} 7 = \underbrace{7+7+7+7+7+7+7+7}_{8\ \text{veces}} = (7)(8) = 56$

Demostración.

$$\sum_{i=m}^{n} cf(i) = cf(m) + cf(m+1) + \ldots\ldots + cf(n-1) + cf(n)$$

$$= c\left[f(m) + f(m+1) + \ldots\ldots + f(n-1) + f(n)\right]$$

$$= c\sum_{i=m}^{n} f(i)$$

PROPIEDAD 3:

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n}\left[f(i)+g(i)\right] = \sum_{i=m}^{n} f(i) + \sum_{i=m}^{n} g(i)}$$

Demostración.

$$\sum_{i=m}^{n}\left[f(i)+g(i)\right] = f(m)+g(m)+f(m+1)+g(m+1)+\ldots\ldots+f(n-1)+g(n-1)+f(n)+g(n)$$

$$= f(m)+f(m+1)+\ldots\ldots+f(n-1)+f(n)+g(m)+g(m+1)+\ldots\ldots+g(n-1)+g(n)$$

¿por qué?

$$= \sum_{i=m}^{n} f(i) + \sum_{i=m}^{n} g(i)$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente fórmula para una suma:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2$$

"Una vez encontrada la fórmula en términos de n es fácil calcular una suma".

Ejemplo 7.5: Encontrar el valor de la suma

$$\sum_{k=0}^{10}\left[(k+1)^2 - k^2\right]$$

SOLUCIÓN

$$\sum_{k=0}^{10}\left[(k+1)^2 - k^2\right] = (10+1)^2 = 121$$

Existen otros ejemplos de sumas telescópicas como las siguientes:

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = (n+1)^3$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^p - k^p\right] = (n+1)^p, P \in N$$ P pertenece al conjunto de los Naturales

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = (n+1)^3 - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[2^{k+1} - 2^k\right] = 2^{n+1} - 1$$

Como $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k$ ya que la suma de la izquierda tiene su primer elemento igual a cero.

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 7.7: Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SOLUCIÓN Para realizar la demostración nos basaremos en la suma telescópica.

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = (n+1)^3$$

Desarrollando la expresión de la izquierda:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3\right) = (n+1)^3$$

Usando las propiedades de la sumatoria:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right) = (n+1)^3$$

$$3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)^3$$

Como: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

Realizando la sustitución:

Ejemplo 7.8: Encontrar una fórmula en términos de n para la suma

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i-2)$$

SOLUCIÓN

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i-2) = \sum_{i=1}^{n}\left(3i^2-2i\right)$$

$$= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} \qquad \text{factorizando}$$

$$= n(n+1)\left[\frac{2n+1}{2} - 1\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} i(3i-2) = \frac{n(n+1)(2n-1)}{2}$$

Ejemplo 7.9: Encontrar una fórmula en términos de n para los primeros n números pares.

SOLUCIÓN ¿Recuerdas como se escriben los números pares?

$$2+4+6+8+\ldots+2n = \sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = n(n+1)$$

Si n=10 entonces $\sum_{i=1}^{10}\frac{i+1}{n^2}=\frac{10+3}{2(10)}=\frac{13}{20}=0.65$

n=100 $\sum_{i=1}^{100}\frac{i+1}{n^2}=\frac{100+3}{2(100)}=\frac{103}{200}=0.515$

n=1000 $\sum_{i=1}^{1000}\frac{i+1}{n^2}=\frac{1000+3}{2(1000)}=\frac{1003}{2000}=0.5015$

n=10,000 $\sum_{i=1}^{10000}\frac{i+1}{n^2}=\frac{10000+3}{2(10,000)}=\frac{10,003}{20,000}=0.5001$

EJERCICIOS 1 : 1. Calcular cada una de las siguientes sumas

$$a)\sum_{k=0}^{6}(2k+1) \qquad b)\sum_{i=0}^{3}3i$$

$$c)\sum_{i=2}^{4}\frac{i+1}{i-1} \qquad d)\sum_{j=-2}^{2}j(j+1)$$

$$e)\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k}{k+1} \qquad f)\sum_{j=3}^{6}\frac{j}{j-2}$$

2. Escriba cada una de las siguientes sumas con notación sigma

$$a)\frac{15}{2}+\frac{20}{4}+\frac{25}{6}+\frac{30}{8}+\frac{35}{10}+\frac{40}{12}$$

$$b)3+8+13+18+23+28$$

$$c)\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{12}{27}+\frac{20}{81}+\frac{30}{243}$$

$$d)1-2+3-4+5-6+7$$

2.

$a)\sum_{k=1}^{6}\frac{5(k+2)}{2k}$ $\quad b)\sum_{k=0}^{5}(5k+3)$

$c)\sum_{k=1}^{5}\frac{k(k+1)}{3^k}$ $\quad d)\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}k$

5. $a)\frac{2n(n+1)(n+2)}{3}$ $\quad b)\frac{n(4n^2-3n-1)}{6}$

$c)\frac{n}{n+1}$ $\quad d)5^{n+1}-1$

$e)\frac{2n^3-3n^2+n}{6}$ $\quad f)\frac{n(n+1)(n^2+n-2)}{2}$

7.2 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO INTEGRAL

7.2.1 ÁREAS DE FIGURAS CONOCIDAS

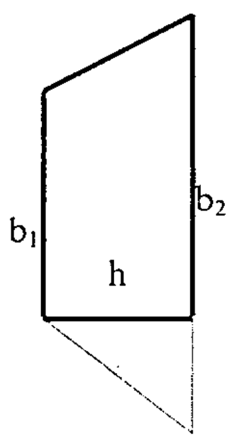
Existen ocasiones en que el cálculo de áreas bajo la curva resulta muy sencillo, al utilizar áreas de figuras conocidas. Consideraremos el caso especial de una área "barrida" por un segmento.

Tomamos el segmento paralelo al eje Y, con un extremo en la curva y el otro con el eje X. Notemos que el segmento tiene longitud igual a la

Ejemplo 7.12: Calcule el área barrida por un segmento ordenada cuando un extremo se mueve sobre la línea y=x como sigue

a) de (1,1) a (5,5) b) de (1,1) a (x,x)

SOLUCIÓN



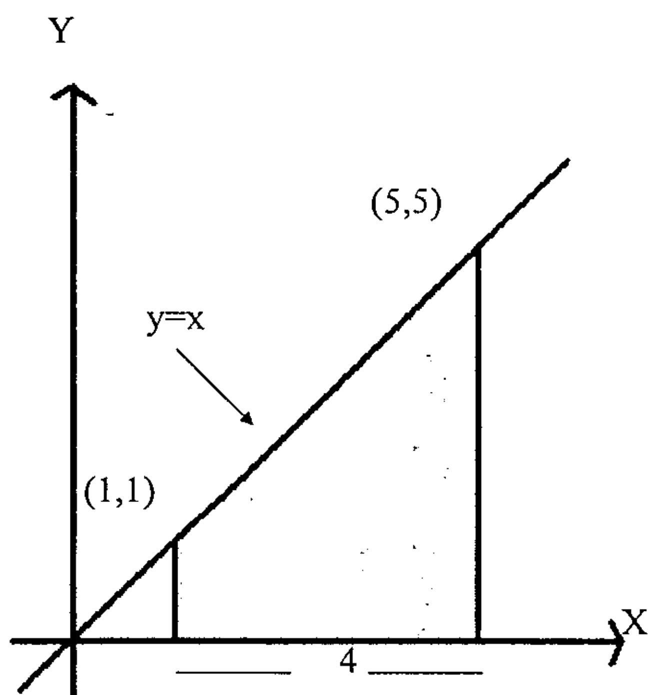


FIGURA 7.8

Recuerde que el área de un trapecio es $\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)h$ (semi-suma de bases por altura).

a) El área es:

$$\left(\frac{1+5}{2}\right)4 = (3)(4) = 12 \text{ unidades cuadradas.}$$

a) El área es:

$$\left(\frac{1+5}{2}\right)4 = (3)(4) = 12 \text{ unidades cuadradas.}$$

b) Para este trapecio se tiene $b_1=1$, $b_2=x$ y $h=x-1$. De donde el área es:

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)(x-1) = \frac{x^2-1}{2}$$

Ejemplo 7.13: Halle la función para el área barrida por un segmento ordenada que se mueve bajo la línea y=2x a partir de (0,0). (Véase FIGURA 7.9)

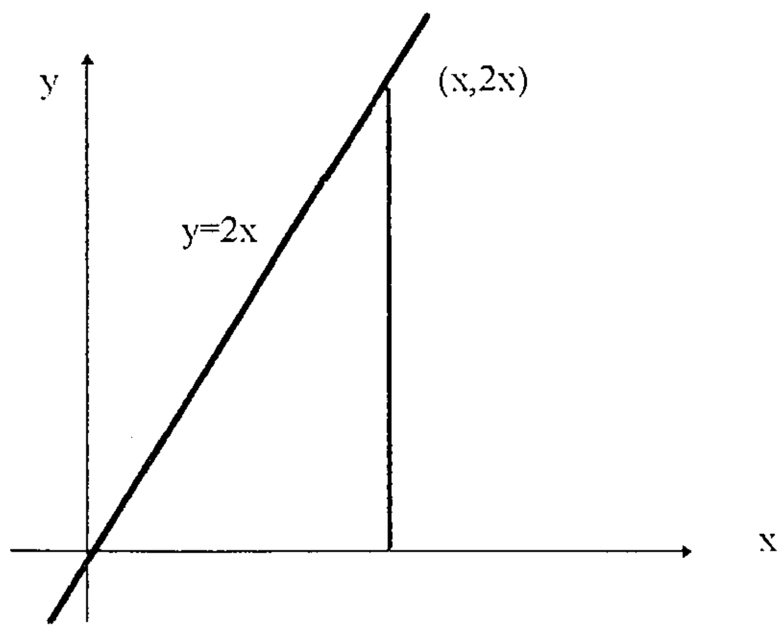


FIGURA 7.9

Estamos interesados en el problema general de calcular el área bajo la gráfica $y=f(x)$ entre las rectas $x=a$ y $x=b$. Ilustraremos esto mediante un ejemplo.

Ejemplo 7.14 Determine el área bajo la curva $y=x^2$ entre las rectas $x=0$ y $x=1$. (Véase FIGURA 7.10)

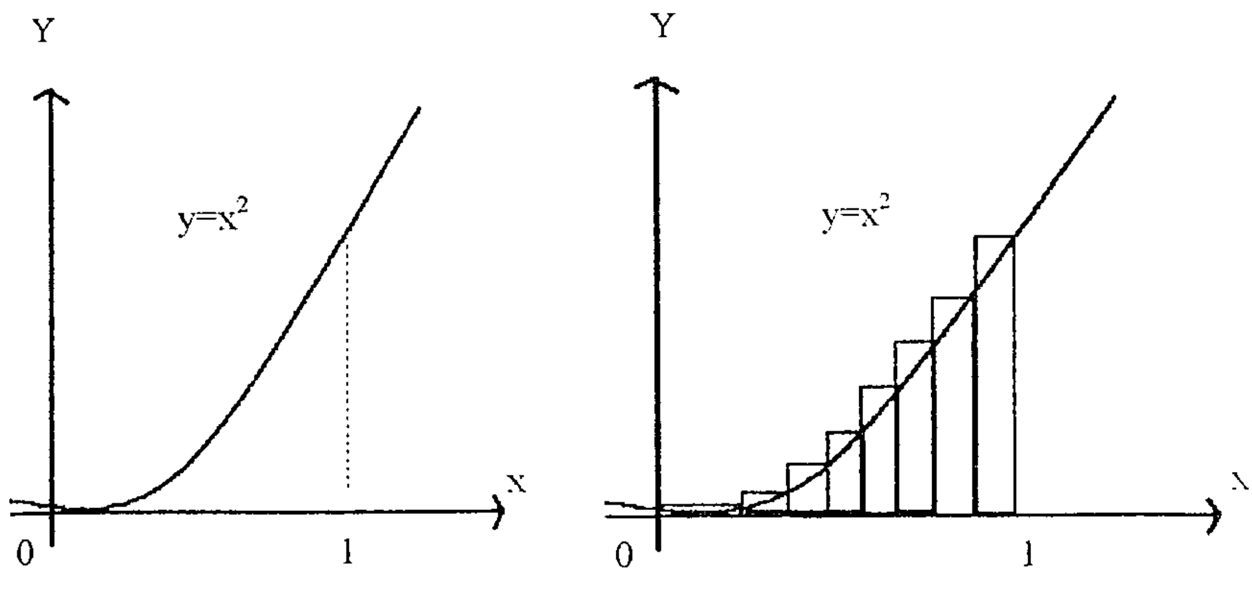


FIGURA 7.10

Suponiendo al número n de los rectángulos muy grande, de manera que cada rectángulo sea muy delgado, el área A de nuestra región bajo la curva es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

Usando nuestras reglas algebraicas para la notación sigma, y la fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos, podemos simplificar la suma anterior:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Si hacemos el número n de rectángulos más grande, tendremos entonces un mejor "ajuste" con la región cuya área estamos tratando de calcular. En el límite, De nuevo los anchos de los rectángulos son iguales a $\frac{1}{n}$, donde n es el número de rectángulos usados. La altura del rectángulo inscrito k es la misma que la altura del punto de la curva que está arriba de $x = (k-1)\left(\frac{1}{n}\right)$. Así, el área del rectángulo k es:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$

Como antes esta suma puede representarse más simplemente si usamos nuestras reglas en la notación sigma, hacemos un cambio de índice y empleamos la fórmula para la suma de los cuadrados de los enteros positivos apropiados, como aparece a continuación:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$

hacemos esta elección, basada únicamente en la comodidad.

En cálculo se usa un símbolo especial para denotar al área que acabamos de calcular. Como puede suponerse, este símbolo fue inventado por Leibniz para sugerir el proceso real de suma empleado en el cálculo:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Este símbolo se lee como "la integral de x^2 desde $x=0$ hasta $x=1$".

La letra "S" alargada que aparece en este símbolo se denomina el **signo de integral**. Proviene de la primera letra de la palabra suma y tiene por objeto recordarnos la suma que usamos para calcular el área de la región indicada. Los números 0 y 1 se llaman, respectivamente, **los límites inferior y superior de integración** y obviamente indican los bordes izquierdo y derecho de la región. La expresión x^2,

SOLUCIÓN Puesto que ésta es la región cuya área acabamos de calcular por el método de agotamiento, podemos inmediatamente escribir la respuesta:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

En algunos casos, el valor de una integral puede escribirse sin hacer ningún cálculo. Esto sucede, por ejemplo, cuando el área representada tiene una forma geométrica familiar.

Ejemplo 7.16: Determine el valor de la integral $\int_0^1 x dx$. (Véase FIGURA 7.14)

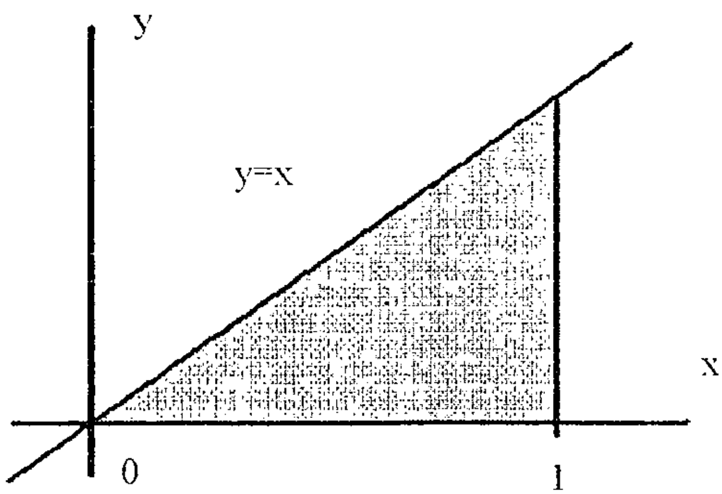


FIGURA 7.14

Ejemplo 7.18 Calcular $\int_0^1 x^3dx$

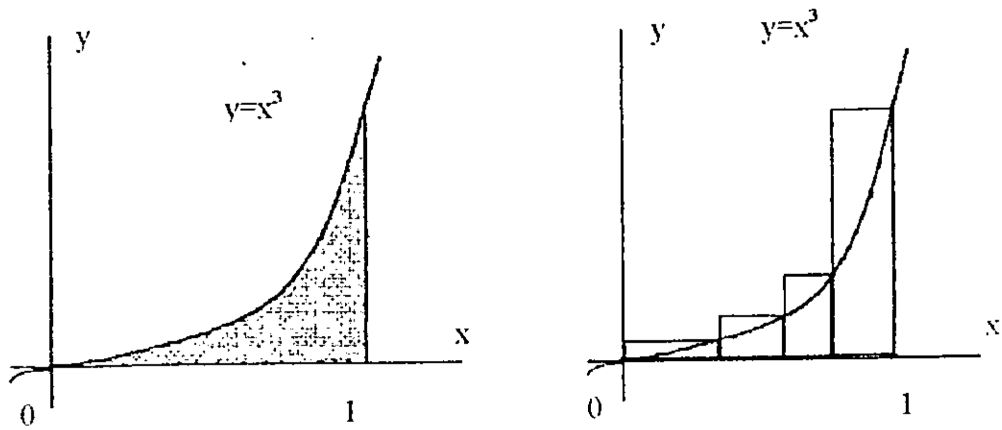


FIGURA 7.15

SOLUCIÓN Debemos encontrar el área bajo la curva $y=x^3$ desde $x=0$ hasta $x=1$. (Véase FIGURA 7.15).

Consideremos un número grande n de rectángulos que circunscriban la región. Cada rectángulo tiene ancho igual a $\frac{1}{n}$, pero su altura es variable. La altura del rectángulo k es la misma que la del punto sobre la curva $y=x^3$, cuya coordenada es $k\left(\frac{1}{n}\right)$. Esta altura resulta ser $(k/n)^3$. Enseguida sumamos las áreas de esos rectángulos y entonces tomamos el límite de la suma cuando n tiende a infinito.

Ejemplo 7.19: Calcular $\int_0^t x^3dx$ (t<0) (Veamos FIGURA 7.16)

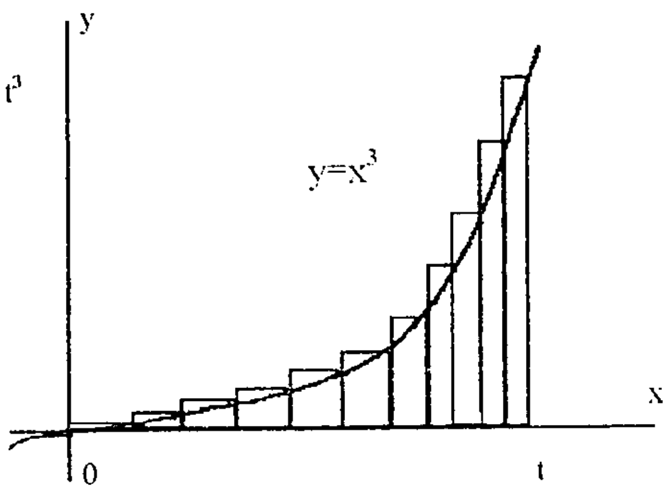


FIGURA 7.16

SOLUCIÓN Podemos usar el mismo procedimiento; al circunscribir n-rectángulos la base de cada uno de ellos es:

$$b_k = \frac{t}{n}$$

¿Cuál es la altura del k-ésimo rectángulo?

La altura es: $a_k = f\left(\frac{kt}{n}\right) = \left(\frac{kt}{n}\right)^3$

Por lo tanto, $A_k = \left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{kt}{n}\right)^3$

Ejemplo 7.20: Usando el resultado anterior. Calcular cada una de las siguientes integrales.

a) $\int_0^4 x^3 dx$

Como: $\int_0^t x^3 dx = \frac{1}{4}t^4$, ahora t=4

$$\therefore \int_0^4 x^3 dx = \frac{1}{4}(4)^4 = 64$$

b) $\int_0^7 x^3 dx = \frac{1}{4}(7)^4 = \frac{2401}{4}$

c) $\int_0^{\frac{3}{4}} x^3 dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{1024}$

En estos ejemplos ha variado el límite superior, pero el límite inferior siempre ha sido cero.

$$=\frac{1}{4}(5)^4-\frac{1}{4}(2)^4$$
$$=\frac{609}{4}$$

Usando el procedimiento del ejemplo anterior, podemos encontrar una regla para el área bajo la curva de $f(x)=x^3$.

Así, $\int_a^b x^3dx=\int_0^b x^3dx-\int_0^a x^3dx \quad (0\leq a\leq b)$

$\therefore \quad \int_a^b x^3dx=\int_0^b x^3dx-\int_0^a x^3dx=\frac{1}{4}b^4-\frac{1}{4}a^4$

Ejemplo 7.22: Calcular $\int_3^{10} x^3dx$

SOLUCIÓN $\int_3^{10} x^3dx=\int_0^{10} x^3dx-\int_0^3 x^3dx=\frac{1}{4}(10)^4-\frac{1}{4}(3)^4$

$$=\frac{9919}{4}$$

$$\therefore \int_3^{10} x^3dx=\frac{9919}{4}$$

Únicamente la fórmula encontrada, nos sirve para calcular el área bajo la curva $y=x^3$, cualesquiera que sean los límites pero resulta necesario seguir generalizando.

5. Utilizando el resultado del ejercicio 4, encontrar una fórmula para calcular:

$$\int_a^b x^4 dx \qquad ; \qquad a \leq b$$

6. Usando las fórmulas encontradas, calcular cada una de las siguientes integrales.

a) $\int_2^4 x^2 dx$ c) $\int_1^5 x^4 dx$

b) $\int_3^9 x^3 dx$ d) $\int_4^6 x^4 dx$

7. Utilizando áreas de figuras conocidas, calcular cada una de las siguientes integrales.

$a)\int_0^7 2x dx$ $d)\int_0^2 \sqrt{4-x^2}$

$b)\int_2^4 (5x-10) dx$ $e)\int_0^1 \left(1-\sqrt{1-x^2}\right) dx$

$c)\int_{-2}^6 4 dx$ $f)\int_{-5}^1 \sqrt{9-(x+2)^2} dx$

7.3 ALGUNAS FÓRMULAS DE CÁLCULO INTEGRAL

7.3.1. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En la sección anterior se han encontrado algunos resultados importantes para calcular integrales, sin embargo también hemos visto que estos resultados no son suficientes, por lo que es necesario hacer más generalizaciones.

Analicemos los resultados obtenidos, teníamos que:

$$\int_0^t x\,dx = \frac{1}{2}t^2$$

$$\int_0^t x^2\,dx = \frac{1}{3}t^3$$

$$\int_0^t x^3\,dx = \frac{1}{4}t^4$$

$$\int_0^t x^4\,dx = \frac{1}{5}t^5$$

Históricamente, hasta donde se sabe, fue el matemático Inglés Isaac Barrow, preceptor de Newton, quien observó primero, después de estudiar varios ejemplos como los que hemos mencionado, que en cada caso hay una notable relación entre una curva dada y=f(x) y su función que predice el área, asociada

La observación de Barrow de esta conexión esencial entre integrales y derivadas fue uno de los descubrimientos del siglo XVII. Proporcionó el eslabón fundamental entre las dos ramas separadas del cálculo y en particular, como veremos, redujo el problema de calcular el área bajo una curva a un problema de antiderivación.

El gran descubrimiento de Barrow de la conexión entre integrales y antiderivadas es aplicable a cualquier función que tenga una gráfica continua y a menudo se menciona como el Teorema Fundamental del Cálculo o (Teorema de Barrow) el cual dice:

TEOREMA 1:

> **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO**
>
> Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces
>
> $$\int_a^b f(x) = G(b) - G(a)$$
>
> donde $G'(x)=f(x)$, es decir, G(x) es una antiderivada de f(x) en el intervalo [a,b].

$$\int_{-2}^{3} \left(6x^2 + 4x + 5\right) dx$$

SOLUCIÓN Para evaluar esta integral, sólo necesitamos encontrar una antiderivada para la función integrando $f(x)=6x^2+4x+5$, por ejemplo

$$G(x)=2x^3+2x^2+5x,$$

y entonces calcular la diferencia G(3)-G(-2). Ya que tenemos G(3)=87 y G(-2)=-18, obtenemos

$$\int_{-2}^{3} \left(6x^2 + 4x + 5\right) dx = G(3) - G(-2) = 87 + 18 = 105$$

Evidentemente, es mucho más fácil obtener áreas bajo las curvas por antiderivación que usando el larguísimo método de agotamiento.

Será conveniente usar la notación $G(x)\Big|_a^b$ como una abreviación para la diferencia G(b)-G(a). Así tenemos

$$G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

La introducción de este símbolo nos permite condensar la cantidad de escritura necesaria en la evaluación de la integral.

Este resultado nos permite encontrar o determinar la integral para cualquier potencia.

Con los resultados obtenidos podemos resolver algunos ejercicios.

Ejemplo 7.27: Calcular

SOLUCIÓN

$$a)\int_1^3 x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 \Big|_1^3 = \frac{1}{6}3^6 - \frac{1}{6}1^6 = \frac{728}{6}$$

$$b)\int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}x^{10} \Big|_0^1 = \frac{1}{10}1^{10} - \frac{1}{10}0^{10} = \frac{1}{10}$$

$$c)\int_0^4 \left(16 - x^2\right) dx = \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left[16(4) - \frac{4^3}{3}\right] - \left[16(0) - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{128}{3}$$

$$d)\int_2^4 \left(\frac{1}{x}\right)^3 dx = \int_2^4 \frac{1}{x^3} dx = \int_2^4 x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2} \Big|_2^4$$

$$= -\frac{1}{2(4)^2} + \frac{1}{2(2)^2} = \frac{3}{32}$$

$$e)\int_{-1}^3 (x+1)(3x+5) dx = \int_{-1}^3 \left(3x^2 + 8x + 5\right) dx = \left[x^3 + 4x^2 + 5x\right]_{-1}^3$$

$$= 78 + 2 = 80$$

$$f)\int_0^{32} \sqrt[5]{x} dx = \int_0^{32} x^{\frac{1}{5}} dx = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} \Big|_0^{32}$$

$$= \frac{5}{6}(32)^{\frac{6}{5}} - \frac{5}{6}0^{\frac{6}{5}} = \frac{160}{3}$$

7.3.2. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

Cuando empezamos a calcular integrales a partir del método de exhaución, lo hicimos a partir del concepto de límite y el de sumatoria, donde sumabamos las áreas de los rectángulos circunscritos, la idea era la siguiente.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)\Delta\mu_k$$

donde Δu_k puede representar la base del k-ésimo rectángulo circunscrito y $f(u_k)$ la altura del k-ésimo rectángulo.

Es decir la integral cumple con las mismas propiedades de límites y sumatorias.

Por lo que enunciaremos las propiedades de la integral las cuales no serán demostradas.

PROPIEDAD 1

Si $a \leq b \leq c$, entonces $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Esta propiedad ya la hemos usado con la diferencia de integrales cuando por ejemplo:

$$\int_a^b x^3 dx = \int_0^b x^3 dx - \int_0^a x^3 dx$$

PROPIEDAD 4

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \qquad \text{donde c es una constante.}$$

Esta propiedad nos dice que la integral de una constante por una función, es igual a la constante por la integral de la función.

Ejemplo 7.29: Calcular $\int_2^5 7xdx$

SOLUCIÓN $$\int_2^5 7xdx = 7\int_2^5 xdx = \frac{7}{2}x^2 \Big|_2^5 = \frac{147}{2}$$

Veamos otros ejemplos aplicando las propiedades 3 y 4.

Ejemplo 7.30: Calcular $\int_1^4 \left(x^3 + 6x^2 + 1\right)dx$

SOLUCIÓN

$$\int_1^4 \left(x^3 + 6x^2 + 1\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + x\right]_1^4$$

$$= \left(\frac{1}{4}(4)^4 + 2(4)^3 + 4\right) - \left(\frac{1}{4}(1)^4 + 2(1)^3 + 1\right)$$

$$= (64 + 128 + 4) - \left(\frac{1}{4} + 2 + 1\right)$$

$$= 196 - \frac{13}{4} = \frac{771}{4}$$

$$\therefore \int_1^4 \left(x^3 + 6x^2 + 1\right)dx = \frac{771}{4}$$

nos ayuda a resolver una gran variedad de problemas diferentes al cálculo de áreas.

PROMEDIO

Iniciemos con el problema del promedio planteado en la unidad 1, para lo cual necesitamos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2: El valor promedio $\bar{y}$ de una función y=f(x) en un intervalo cerrado [a,b] esta dado por

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Ejemplo 7.32: Calcula el promedio de los cuadrados entre 1 y 10.

a=1, b=10, b-a=9

$$\bar{y}=\frac{\int_1^{10} x^2dx}{9}=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{10}$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1000}{3}-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{9}(333)=\frac{333}{9}=37$$

$\therefore$ El promedio es 37

Ejemplo 7.33: Calcula el promedio de las raíces cúbicas de los números entre 0 y 1.

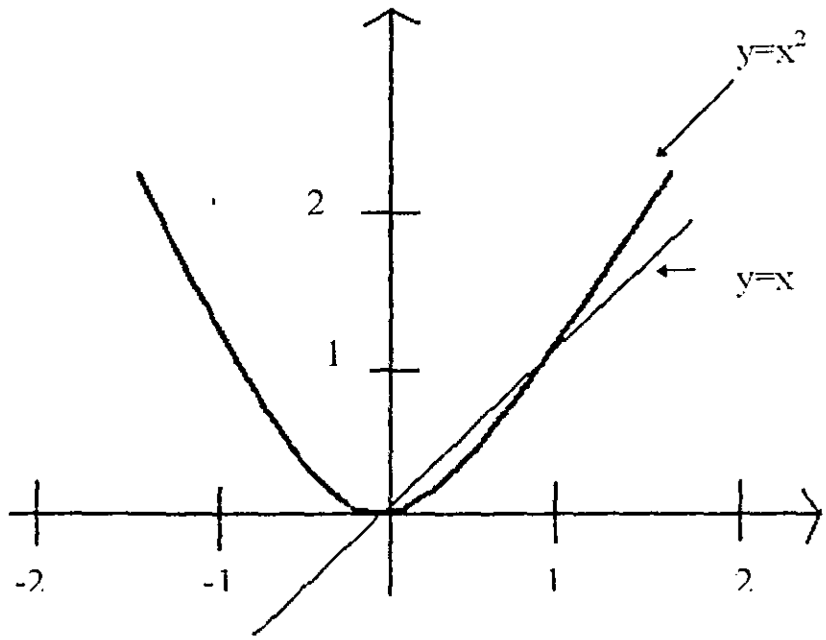


FIGURA 7.18

Claramente vemos que las funciones se intersectan en $x=0$ y $x=1$.

Podemos comprobar estos resultados algebraicamente.

Queremos saber para que valores de x, $y=x$ y $y=x^2$ son iguales. esto es cuando:

$x=x^2$ o bien,

$x-x^2=0$ factorizando,

$x(1-x)=0$ esta ecuación tiene solución cuando

$x=0$ o $1-x=0$, es decir, $x=1$

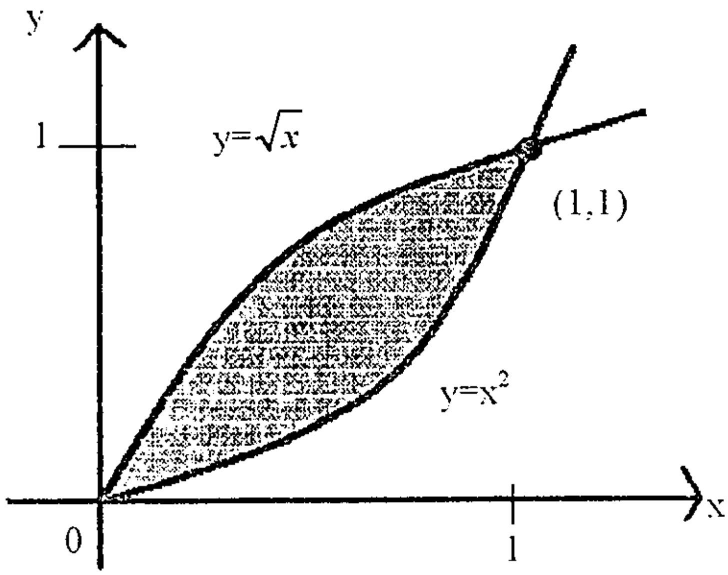


FIGURA 7.19

SOLUCIÓN Obviamente las curvas se intersectan en 0 y 1. Usando (1) obtenemos

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$4x-x^2=-x+4$

$x^2-5x+4=0$ factorizando

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x_1=1 \qquad x_2=4$

Los límites de integración son 1 y 4 que son los puntos donde se intersectan las funciones $y=4x-x^2$ y $y=-x+4$

Por lo tanto,
$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 \left[\left(4x-x^2\right)-(-x+4)\right]dx \\ &= \int_1^4 \left(-x^2+5x-4\right)dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Big|_1^4 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto el área comprendida entre la parábola $y=4x-x^2$ y la recta $y=-x+4$ es $\frac{9}{2}$ de unidades cuadradas.

Para calcular el volumen de algunos sólidos de revolución, haremos uso del siguiente resultado.

El volumen de un sólido de revolución generado por $y = f(x)$ función continua en [a,b] al girarla sobre el eje x está dado por:

$$V = \pi\int_b^a [f(x)]^2\, dx$$

Ejemplo 7.36: Encontrar el volumen del paraboloide de revolución que se forma al rotar la parábola: $y^2 = x$ alrededor del eje x; donde $0 \le x \le 1$ (véase figura 7.21)

SOLUCIÓN

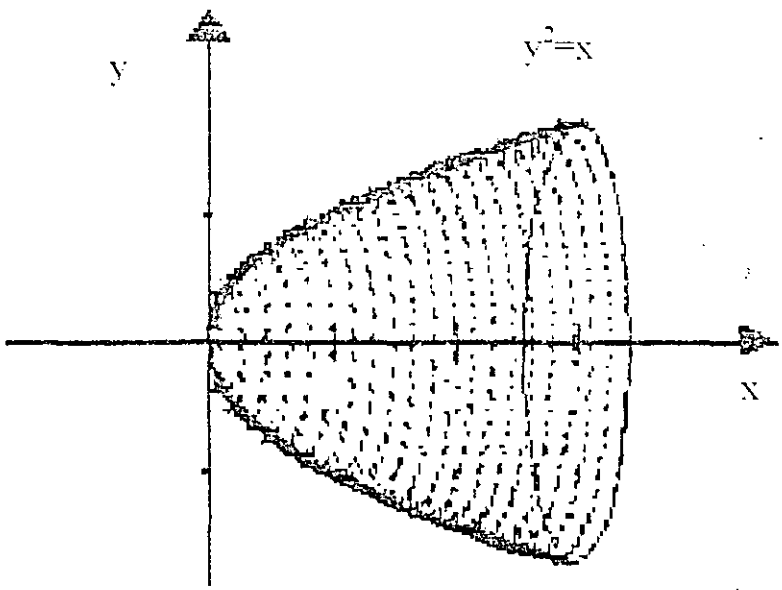


FIGURA 7.21

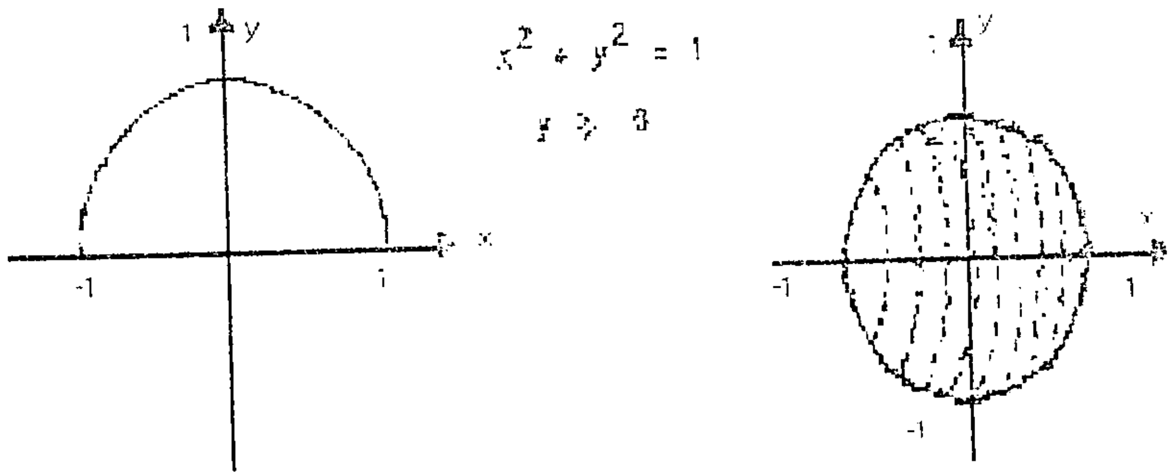


FIGURA 7.22

Despejando y de : $x^2 + y^2 = r^2$

Se tiene $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Los límites de integración para la esfera son r y –r ¿Por qué?

EJERCICIOS: (4) :

1. Calcule el área comprendida entre la recta $y = x$ y la parábola $y = 2 - x^2$.

2. Encuentre el área de la región comprendida entre las parábolas $y = 4x - x^2$ y $y = x^2 - 4x + 6$.

3. Determina el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

4. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

5. Encontrar el volumen del sólido generado cuando la región de la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 2$ gira alrededor del eje x.

6. Encontrar el volumen del sólido generado cuando la recta $y = \frac{1}{3}x$ entre $x = 1$ y $x = 5$ gira alrededor del eje x.

7. Encontrar el volumen del sólido generado cuando la región bajo la curva $y = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 3$ gira alrededor del eje x.

CONCLUSIONES

El principal motivo por el cual fue elaborado este trabajo, es para que los alumnos de quinto semestre de Bachillerato puedan contar con un material de apoyo en la materia de Cálculo Diferencial e Integral I, acorde con los programas de estudio.

Una, de las dificultades que se presentaron en la elaboración de éste texto, era contar con un programa muy ambicioso y muy poco tiempo para su impartición. Por lo que, tratamos de desarrollar los temas de una manera sencilla y accesible, para que los alumnos tengan un material de apoyo de acuerdo a sus necesidades. Contando con una buena cantidad de ejemplos y auxiliándonos de gráficas para el mejor entendimiento de los mismos. Además de contar con bastantes ejercicios a lo largo del texto, cuya finalidad es que refuercen los conocimientos adquiridos previamente.

El libro tiene la particularidad de poder complementarse con otras bibliografías para el enriquecimiento de los temas, sin desajustarse con el material expuesto a lo largo del trabajo.

Para aquellos profesores que utilicen el libro, les facilita la didáctica por todas las ventajas de su uso expuestas anteriormente.

BIBLIOGRAFÍA

1. Larson, R. y Hostetler, Robert. "Cálculo". McGraw-Hill, México, 1995.
2. Swokowski, E. "Cálculo con geometría analítica". Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1989.
3. Goldstein, L. et al. "Cálculo y sus aplicaciones". Prentice Hall, México, 1990.
4. Leithold, L. "El cálculo con geometría analítica". Ed. Harla, México,1987.
5. Taylor, H. y Wade, T. "Cálculo diferencial e integral". Limusa, México, 1984.
6. Purcell, E. y Varberg, D. "Cálculo con geometría analítica". Prentice Hall, México, 1988.
7. Stewart, J. "Cálculo". International Thompson Editores, México, 1998.
8. Cruse, A. y Lehman, M. "Lecciones de cálculo 1". Fondo Educativo Interamericano, México, 1983.
9. Santaló, M. y Carbonell V. "Cálculo diferencial e integral". Colección Textos Universitarios, México, 1982.
10. Grande, J. del y Duff, G. "Introducción al cálculo elemental". Ed. Harla, México, 1976.