

01190



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

*FACULTAD DE INGENIERIA*  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

*[Handwritten signature]*

**CONTROL DE MANIPULADORES DE ROBOTS  
ACCIONADOS POR MOTORES DE INDUCCION**

**TESIS**

QUE PRESENTA

**GERARDO VICENTE GUERRERO RAMIREZ**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERIA**

DIRECTOR DE TESIS: DR. YU TANG XU



MEXICO, D. F.

2001



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

## **DEDICATORIA:**

### **A mi familia:**

A mis seres queridos, fuente de amor y poder que me impulsa a emprender nuevas aventuras y me permite alcanzar mis sueños. Gracias a su apoyo, comprensión y sobre todo a su amor he podido realizar lo que me he propuesto.

## **AGRADECIMIENTOS:**

### **A mis amigos y maestros:**

Al Dr. Yu Tang Xu, mi director de tesis, por su guía en la realización del trabajo y por haber compartido conmigo sus conocimientos.

A los doctores Gerardo Espinosa, Sergio Horta, Jaime Arau, Jaime Moreno, Rafael Castro y Luis Alvarez-Icaza por haber aceptado ser miembros del Jurado Doctoral y haber enriquecido con sus comentarios este trabajo.

A los amigos y compañeros del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la DEPFI-UNAM, especialmente a Gerardo Espinosa, por haberme brindado su amistad.

**Al *cenidet*, a la DEPFI-UNAM y al CONACyT**

Finalmente, como dijo la poeta

**”Gracias a la vida, que me ha dado tanto...”**

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación . . . . .	1
1.2	Antecedentes y trabajos previos . . . . .	2
1.2.1	Control del motor de inducción . . . . .	2
1.2.2	Control de robots manipuladores . . . . .	4
1.2.3	Control de robots accionados por motores de inducción: Estado del arte . . . . .	5
1.3	Planteamiento general del problema . . . . .	6
1.3.1	Casos particulares . . . . .	6
1.4	Contribuciones . . . . .	7
1.5	Organización de la tesis . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Modelado de manipuladores robóticos accionados por motores de inducción</b>	<b>13</b>
2.1	La ecuación Euler-Lagrange . . . . .	13
2.2	Robots rígidos accionados por motores de inducción . . . . .	18
2.2.1	Robots manipuladores . . . . .	18
2.2.2	Motor de inducción . . . . .	20
2.2.3	Robots rígidos giratorios accionados por motores de inducción . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Control robusto</b>	<b>35</b>
3.1	Planteamiento del problema . . . . .	36
3.2	Diseño del controlador nominal . . . . .	37
3.3	Diseño del controlador robusto . . . . .	40
3.4	Simulaciones . . . . .	45
3.5	Conclusiones . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Control basado en observador</b>	<b>49</b>
4.1	Planteamiento del problema . . . . .	49
4.2	Diseño del controlador . . . . .	51
4.2.1	Ecuación del error combinado de seguimiento . . . . .	51
4.2.2	Observador de flujos . . . . .	51
4.2.3	Análisis de estabilidad . . . . .	52

---

4.3	Simulaciones . . . . .	55
4.4	Conclusiones . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Control adaptable</b>	<b>59</b>
5.1	Planteamiento del problema . . . . .	59
5.2	Diseño del controlador . . . . .	61
5.2.1	Observadores y variables auxiliares . . . . .	61
5.2.2	Ecuación del error combinado de seguimiento . . . . .	63
5.2.3	Análisis de estabilidad del sistema . . . . .	63
5.3	Simulaciones . . . . .	68
5.4	Conclusiones . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Control descentralizado</b>	<b>73</b>
6.1	Planteamiento del problema . . . . .	73
6.2	Diseño del controlador . . . . .	75
6.2.1	Observador de flujos . . . . .	75
6.2.2	Ecuación del error combinado de seguimiento . . . . .	76
6.2.3	Análisis de estabilidad del sistema . . . . .	78
6.3	Simulaciones . . . . .	81
6.4	Conclusiones . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Control comandado por corriente.</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b>Ecuación del error combinado de seguimiento.</b>	<b>93</b>
<b>C</b>	<b>Definición de parámetros.</b>	<b>95</b>

# Índice de Figuras

2.1	Circuito equivalente del MI trifásico. . . . .	21
2.2	Sistemas de referencia. . . . .	27
2.3	Robot rígido planar de dos grados de libertad. . . . .	30
3.1	Error de seguimiento de posición $\tilde{q}_k$ para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha). . . . .	47
3.2	Error de seguimiento de velocidad $\dot{\tilde{q}}_k$ para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha). . . . .	47
3.3	Errores de seguimiento de las corrientes para el motor 1: estator(izquierda) y rotor(derecha). . . . .	47
3.4	Errores de seguimiento de las corrientes para el motor 2: estator(izquierda) y rotor(derecha). . . . .	48
3.5	Errores de seguimiento de posición y velocidad de la unión 1: caso ideal;controlador nominal). . . . .	48
4.1	Error de seguimiento de posición $\tilde{q}_k$ para el lazo 1 (línea punteada) y para el lazo 2 (línea sólida). . . . .	57
4.2	Error de seguimiento del módulo cuadrado del flujo $F_k - F_{dk}$ para el motor 1 (línea punteada) y para el motor 2 (línea sólida). . . . .	57
4.3	Corrientes de los devanados del estator del motor 1 (izquierda) y del motor 2 (derecha): corrientes reales $i_a, i_b$ (línea punteada) y corrientes de referencia $i_{ar}, i_{br}$ (línea sólida). . . . .	57
4.4	Voltajes de entrada para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha): $v_a$ (línea punteada) y $v_b$ (línea sólida). . . . .	58
4.5	Error de estimación de flujos para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha): $\tilde{\lambda}_a$ (línea punteada) y $\tilde{\lambda}_b$ (línea sólida). . . . .	58
4.6	Errores de seguimiento de posición de las uniones 1 y 2: incertidumbre en $R_{rk}$ . . . . .	58
5.1	Error de seguimiento de posición $\tilde{q}_k$ para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha). . . . .	69
5.2	Error de seguimiento de velocidad $\dot{\tilde{q}}_k$ para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha). . . . .	69

5.3	Corrientes de los devanados del estator para el motor 1 (izquierda) y motor 2 (derecha): corriente $i_a$ (línea punteada) y corriente $i_b$ (línea sólida). . . . .	70
5.4	Voltajes de entrada para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha): $v_a$ (línea punteada) y $v_b$ (línea sólida). . . . .	70
5.5	Errores de estimación y de seguimiento de flujos para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha): $\tilde{F} = \hat{F} - F_d$ (línea punteada) y $F - F_d$ (línea sólida). . . . .	70
5.6	Errores de estimación de los parámetros de los MI. . . . .	71
6.1	Error de seguimiento de posición $\tilde{q}_k$ para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha). . . . .	82
6.2	Error de seguimiento de velocidad $\dot{\tilde{q}}_k$ para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha). . . . .	82
6.3	Corrientes de los devanados del estator para el motor 1 (izquierda) y motor 2 (derecha): corriente $i_a$ (línea punteada) y corriente $i_b$ (línea sólida). . . . .	83
6.4	Voltajes de entrada para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha): $v_a$ (línea punteada) y $v_b$ (línea sólida). . . . .	83
6.5	Errores de estimación y de seguimiento de flujos para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha): $\tilde{F} = \hat{F} - F_d$ (línea punteada) y $F - F_d$ (línea sólida). . . . .	83

## RESUMEN

Este trabajo de Investigación Doctoral trata del desarrollo de controladores de robots rígidos accionados por motores de inducción cuyo objetivo fundamental de control es lograr una alta precisión en el seguimiento de una trayectoria deseada en el movimiento del robot. El problema considerado es el siguiente: dado un robot rígido accionado directamente por motores de inducción y una trayectoria deseada representada por la posición deseada  $q_k^d(t)$  y la velocidad deseada  $\dot{q}_k^d(t)$  en la  $k$ -ésima unión del robot, diseñar una ley de control que asegure el seguimiento de la trayectoria deseada, el acotamiento de las señales y la estabilidad interna del sistema.

En primer lugar se hace una revisión del estado del arte para entender la problemática acerca del tema propuesto y en función de este análisis se definen las contribuciones que se pueden realizar y se decide la utilización del motor de inducción (MI) tipo jaula de ardilla ya que es el más utilizado en la industria debido a sus ventajas sobre los demás motores y además, gracias a los últimos avances tecnológicos alcanzados se han desarrollado impulsores de velocidad variable de alta precisión a costos razonables y sus campos de aplicación aumentan gradualmente. Recientemente se están usando en lugares anteriormente reservados a otros tipos de motores (de corriente directa, de pasos y síncronos), como el accionamiento de sistemas robóticos. Así, se proponen diferentes controladores para los MI que accionan a un robot rígido giratorio.

En el primer esquema propuesto se diseña un controlador no lineal robusto usando el modelo completo del motor. Se considera la incertidumbre paramétrica en las resistencias eléctricas de los devanados y se supone medible el estado del sistema. El controlador está basado en las propiedades de pasividad y se usa la técnica de rediseño de Lyapunov. Una característica relevante es que se considera la incertidumbre paramétrica de ambos devanados (del estator y del rotor) y su principal desventaja es la consideración del conocimiento del estado completo del MI.

El segundo esquema propuesto, basado en el control por campo orientado comandado por corrientes (control PI en el lazo externo de corrientes) para el MI, se usa el modelo reducido de cuarto orden del motor y se diseña un controlador no lineal que considera el conocimiento exacto del sistema (robot y motores). Se utiliza retroalimentación de salida, por lo que es necesario estimar las variables de estado del rotor por medio de un observador de lazo cerrado. La principal limitación de este esquema es la suposición del conocimiento exacto de los parámetros del sistema.



Para subsanar la limitación del esquema anterior, en un tercer esquema se desarrolla un controlador no lineal adaptable que considera la incertidumbre paramétrica en las resistencias eléctricas de los devanados del rotor. Se utiliza un observador para estimar las variables del rotor no disponibles para medición y otro para estimar las corrientes de los devanados del estator (que sí están disponibles para medición) que son de utilidad para lograr la adaptación de los parámetros constantes desconocidos del rotor. Se logra el seguimiento de la trayectoria deseada, acotamiento de señales y estabilidad asintótica del sistema.

Una limitación de los tres esquemas anteriores es que se considera conocido el modelo del robot y para lograr el objetivo de seguimiento de trayectoria se usa un control de tipo centralizado.

El último esquema desarrollado considera que no se conoce con precisión el modelo del robot y se utiliza una técnica de control robusto descentralizado para enfrentar la incertidumbre paramétrica, los acoplamientos entre las uniones del robot y las perturbaciones de la carga. En el motor de inducción se considera que se conoce el modelo pero no se puede medir el estado completo, por lo que se utiliza un observador de lazo cerrado para estimar las variables del rotor no disponibles para medición. Se diseña un controlador no lineal para garantizar el acotamiento de todas las señales y la estabilidad práctica del sistema. La principal ventaja de este esquema es el uso del control descentralizado debido a la facilidad de su implementación y su eficiencia computacional.

Para ilustrar el desempeño de los esquemas propuestos, se realizaron simulaciones digitales del comportamiento de los sistemas de control diseñados. Los sistemas de control resultantes proporcionan una buena respuesta dinámica en lazo cerrado y los resultados de las simulaciones muestran que los objetivos de control se cumplen.

## ABSTRACT

This work of doctoral research concerns with the developing of controllers for rigid robots driven by induction motors, whose fundamental control objective is achieve high precision tracking of a desired trajectory in the robot movement. The problem formulation is: given a rigid robot directly driven by induction motor and a smooth desired trajectory  $q_k^d(t)$  for the  $k_{th}$  junction, design a control law that ensures the desired trajectory tracking, the boundedness of the signals and the internal stability.

Firstly, a state of the art revision is made to understand the problems. Squirrel cage induction motors were chosen because they are the most widely used for industrial applications due to their advantages over other motors and because of the technological advances achieved. Recently, induction motors are used in applications which were reserved to other motors (direct current, stepper and synchronous), as the robotic system drives. So, this work proposes several controllers for rigid robots driven by induction motors.

In the first proposed scheme a robust nonlinear controller is designed using the full order motor model. Parameter uncertainties are considered in the electrical resistances of the stator and rotor windings and full state measurement. The controller use the passivity-based approach and the Lyapunov redesign technique. A relevant fact is that the parameter uncertainty of both stator and rotor windings are considered. The main drawback is the full state knowledge assumption.

In the second proposed scheme, based on the field oriented current-command mode control ( external PI controller with high gains), a reduced motor model is used and a nonlinear controller is designed assuming the exact system model knowledge (robot and motors). In this controller output feedback is used and the rotor variables are estimated through a closed-loop observer. The main drawback is the exact model knowledge assumption.

To avoid the above limitation, an adaptive nonlinear controller is developed considering parameter uncertainty in the rotor resistance, an observer to estimate the rotor variables and another to estimate the stator currents, useful for parameter adaptation. This controller achieves the tracking of the desired trajectory, boundedness of the signals and asymptotic stability.

The above schemes consider exact knowledge of the robot parameters and centralized structure control to achieve the tracking trajectory.

The last scheme developed does not consider exact knowledge of the robot parameters and uses decentralized robust control technique to compensate parameter uncertainty, interconnections among manipulator links and load perturbations. Exact model knowledge and partial state measurement are considered for the induction motors, and a closed-loop observer is used to estimate the unmeasurable rotor variables. The controller designed guarantees the uniform ultimate stability and the tracking to the desired trajectory. The main advantage of this controller is its simplicity in the implementation and computational efficiency.

Computer simulations are presented to illustrate the performance of the proposed control systems. The controllers provide good closed-loop dynamical behavior and the control objectives are achieved.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación

La robótica está siendo utilizada cada vez más en aplicaciones industriales y laboratorios de investigación. Los robots nacen de la necesidad de aumentar la productividad y mejorar la calidad de los productos fabricados, así como evitar al operario condiciones de trabajo insalubres, peligrosas o tediosas y realizar tareas que resultan imposibles para un trabajador humano. Para alcanzar estos objetivos un robot debe poseer características sobrehumanas tales como: potencia, velocidad, infatigabilidad, volumen de trabajo e insensibilidad a medios hostiles. El estudio de la Robótica es complicado debido a la conjunción de numerosas tecnologías, algunas novedosas y con alto grado de especialización. De manera sencilla, se puede plantear que el problema básico que pretende resolver un robot es manipular una herramienta en una determinada posición y orientación en el espacio y su sistema de control tiene como objetivo mantener un movimiento predeterminado del manipulador a lo largo de una trayectoria deseada, la cual está sujeta a ciertos patrones de posición, velocidad y aceleración, contemplando las limitaciones físicas de los dispositivos actuadores y las propiedades fundamentales de los robots. Un robot está formado por componentes mecánicos, eléctricos y electrónicos, y el entendimiento de las características de funcionamiento de todos los componentes y sus conexiones e interfases es fundamental para operar en forma eficiente a los robots.

El movimiento de los manipuladores robóticos se logra gracias a los actuadores que impulsan sus uniones y estos pueden ser motores eléctricos, hidráulicos ó neumáticos. En rangos de potencia baja, los motores eléctricos son los más utilizados debido a que su controlabilidad es superior a la de los otros tipos. Por lo tanto, la tecnología de los motores eléctricos y sus controladores es un aspecto fundamental en la robótica. Tradicionalmente se han utilizado como accionadores de robots los motores de corriente directa (CD) ya que con ellos se obtienen buenas características de operación (velocidad y par) y son más fáciles de controlar que los motores de corriente alterna (CA); sin embargo, en los motores de CD se tienen problemas con el conmutador,

sobre todo a velocidades elevadas, además de que no son utilizables en ambientes sucios, corrosivos y/o explosivos. También se utilizan los motores a pasos pero su operación no es muy adecuada debido a que su velocidad es altamente dependiente del par de la carga, que varía continuamente en este tipo de aplicaciones. Por otro lado, los motores de CA poseen características de operación no lineales que hacen difícil el diseño de sus controladores, aunque en la actualidad los servocontroles de máquinas de CA son competitivos y superan en algunas características a los de CD, lo cual hace atractivo el uso de los sistemas impulsores basados en motores de CA. Los motores de CA síncronos de imanes permanentes ya se utilizan como accionadores de robots, aunque tienen el inconveniente de tener un costo elevado.

Actualmente, el motor de inducción (MI) tipo jaula de ardilla, es la máquina eléctrica más utilizada a nivel industrial debido a las ventajas que presenta sobre los demás motores: bajo costo, mínima necesidad de mantenimiento, alta confiabilidad, robustez y capacidad para trabajar en ambientes sucios y explosivos. Tradicionalmente los MI se han utilizado en aplicaciones que no requieren un control preciso de la velocidad y en la actualidad, gracias a los avances tecnológicos como los alcanzados en la electrónica de potencia, en la electrónica digital y en el procesamiento digital de señales, a los avances en la teoría de control no lineal y en el análisis de máquinas eléctricas, se han desarrollado sistemas impulsores de velocidad variable de alta precisión a costos razonables. Así, los campos de aplicación de los MI tipo jaula de ardilla crecen gradualmente y se están utilizando en lugares anteriormente reservados para los motores CD, de pasos y síncronos, por lo que se presenta como una buena alternativa para ser utilizado como accionador de manipuladores robóticos.

Considerando lo anteriormente expuesto y debido a la relevancia que tendrá el desarrollo de controladores de sistemas robóticos accionados por motores de inducción, se estudió este tema en el presente trabajo.

## 1.2 Antecedentes y trabajos previos

### 1.2.1 Control del motor de inducción

Como paso previo al diseño de controladores de motores de inducción, es necesario conocer el comportamiento de los motores en los diferentes regímenes de operación: arranque, frenado, plena carga, etc...

El diseño de controladores de alta precisión para motores de inducción es complicado debido a que un MI es un sistema no lineal subactuado y fuertemente acoplado, con algunos parámetros dependientes de la posición y otros variantes con el tiempo, además de que no se puede medir el estado completo. En la actualidad existen diferentes métodos de control del MI y entre ellos se encuentran[Taylor94]:

## 1. CONTROL EN REGIMEN PERMANENTE:

Considerados como los métodos clásicos[Bose97], se basan en la linealización del modelo del motor en un punto de operación de régimen permanente; las variables de control básicas son la amplitud y la frecuencia de los voltajes y corrientes del estator y su ventaja principal es que es posible aplicar la teoría de control lineal en el diseño del controlador; sin embargo, el comportamiento dinámico es variable y depende de que tan cerca esté funcionando el motor del punto de operación supuesto, además de que existen acoplamientos entre las variables de entrada y salida del motor y es difícil controlar en forma independiente las salidas. Algunos métodos de control en régimen permanente usados son el control voltaje/frecuencia constante y el control de la frecuencia de deslizamiento y corriente del estator.

## 2. CONTROL NO LINEAL

### • CONTROL VECTORIAL:

Es el método de control estandar para máquinas de inducción y utiliza el modelo no lineal del motor. Su objetivo principal es hacer que el MI se comporte como el motor de CD de excitación separada, con las variables par electromagnético y flujo magnético desacopladas. En esencia, el método consiste en una transformación no lineal de coordenadas (rotación) y una retroalimentación no lineal para lograr el desacoplamiento del par electromagnético y del flujo magnético [Blaschke72] [Leonhard85]; generalmente, las variables de control son las corrientes de estator transformadas. Algunas técnicas de control vectorial del MI son el control por orientación del flujo del rotor, del flujo del estator y del flujo de magnetización.

### • CONTROL NO LINEAL MODERNO :

Estas técnicas usan el modelo no lineal del motor y se basan en la teoría de sistemas y tratan de demostrar formalmente características fundamentales del sistema de control. Algunos métodos usados son:

- (a) los basados en pasividad y moldeo de energía que utilizan la formulación Euler-Lagrange para el modelo del MI y aprovechan las propiedades físicas del sistema como la conservación de energía y la propiedad de pasividad. En [OrtegaEspinosa93] se diseña un controlador globalmente estable para la regulación de par, usando un observador de las variables del rotor y conocimiento exacto del modelo del motor. En [EspinosaOrtega95] se aborda el problema de seguimiento de par y regulación de la norma del flujo del rotor. En [EspinosaOrtega94] se diseña un controlador para el seguimiento del par y la regulación de la norma del flujo del rotor sin necesidad de la medición o estimación de los flujos del rotor. En [Espinosa, et al. 97]

se diseña un controlador para lograr el seguimiento de par y de la norma de flujo de rotor. En [Ortega, et al. 96] se resuelve el problema de seguimiento de velocidad con regulación del flujo del rotor;

- (b) los que utilizan la linealización por retroalimentación que consiste en transformar el sistema no lineal original en una relación lineal entre variables auxiliares de entrada y salida por medio de un lazo de retroalimentación no lineal interno; posteriormente se diseña un control lineal que asegure la estabilidad y el desempeño deseado del sistema lineal resultante. En [DeLucaUlivi88] se logra linealización exacta entrada-estado y en [Krzeminski87] linealización exacta entrada-salida de los voltajes de los devanados de estator y el par (o velocidad) y la norma del flujo en el rotor. En [Marino, et al. 98] se contempla el caso de resistencias del rotor y par constantes desconocidos.
- (c) los basados en *backstepping*: se divide el sistema total en subsistemas de menor orden, se elige uno de éstos y se le diseña un control por retroalimentación como si no existieran otras dinámicas y se obtiene un pseudocontrol; si en este proceso no aparece la señal de control verdadera se repite el procedimiento con los demás subsistemas hasta que esta aparezca. En [Kanellakopoulos, et al. 92] se aborda el caso de seguimiento de la velocidad y de la norma del flujo del rotor, utilizando un observador de flujos del rotor y conocimiento exacto del modelo. En [Hu, et al. 96] se aborda el caso de parámetros inciertos.

## 1.2.2 Control de robots manipuladores

Se han desarrollado diferentes métodos para controlar robots [SpongVidyasagar89] y entre los principales se encuentran los siguientes [Amestegui87]:

- Métodos preprogramados que utilizan leyes de control previamente almacenadas en memorias donde se guardan las características pertinentes en una tabla y se usan cuando es necesario reproducir tales características. Estas leyes están sujetas a los problemas inherentes al control en lazo abierto.
- Métodos basados en la linealización del modelo y su objetivo principal es linealizar y desacoplar las ecuaciones dinámicas del robot para diseñar la ley de control. Estos métodos son poco precisos, sobre todo a altas velocidades; entre ellos se encuentran la técnica del par calculado y la técnica de control óptimo.
- Métodos de control adaptable [SlotineLi86] utilizados si se tiene un conocimiento limitado del sistema, específicamente si se tienen parámetros desconocidos variantes lentamente en el tiempo por lo que son necesarias leyes de adaptación de parámetros. Algunas técnicas de control adaptable son la de modelo de referencia, la autosintonizable, las basadas en pasividad, etc...

- Métodos de control robusto [Hu, et al. 95] en los que se usa el concepto de incertidumbre para considerar los aspectos imperceptibles o desconocidos del sistema real en el modelo matemático. Algunas fuentes posibles de incertidumbre incluyen a los parámetros desconocidos, perturbaciones y dinámicas no modeladas. El control robusto es un control de estructura fija que garantiza la estabilidad y el desempeño deseado de sistemas con incertidumbre. Algunos métodos de control robusto usados son el basado en el diseño de Lyapunov y el de estructura variable o modos deslizantes.
- Método de control descentralizado [Fu92][GavelHsia86] que a diferencia de los esquemas de control centralizado que tratan al robot como un sistema completo, aprovechan su estructura y sus propiedades y consideran al robot como  $n$  subsistemas interconectados (siendo  $n$  el número de grados de libertad del robot) y se diseña un controlador por cada subsistema, el cual solamente depende de los estados locales, lo que proporciona ciertas propiedades de robustez ante fallas en el sistema, además de alta eficiencia computacional.
- Otros métodos usados son los que combinan el control robusto y el adaptable y el control por aprendizaje[Amestegui87].

### 1.2.3 Control de robots accionados por motores de inducción: Estado del arte

Existen trabajos de investigación que consideran el control de robots accionados por medio de motores de inducción y generalmente utilizan la configuración en cascada del MI y de los robots manipuladores. Normalmente los esquemas de control resultantes son una combinación de un método de control del motor de inducción y un método de control de robots.

La mayoría de estos esquemas consideran el conocimiento exacto del modelo del MI, es decir, suponen que sus parámetros son conocidos. [BilalovicSabanovic91] usa un método basado en el control vectorial y en modos deslizantes del MI y en el control en modos deslizantes del robot para resolver el problema de seguimiento de velocidad usando la medición de las corrientes de los devanados del estator y de la velocidad. El esquema resultante es de estructura simple, con rechazo a perturbaciones y robusto a la incertidumbre paramétrica. [Cafuta, et al. 91] usa un método basado en el control vectorial del modelo  $dq$  del motor y el par calculado para el robot, además supone que el estado completo del sistema está disponible para medición. [Canudas, et al. 93] utiliza la formulación Euler-Lagrange para obtener los modelos del MI y del robot; su esquema de control está basado en pasividad y moldeo de energía para el MI y en el par calculado para el robot; supone un estado parcialmente medible (corrientes de estator, posición y velocidad del rotor) por lo que usa un observador de estado para las variables del rotor; evalúa el par requerido (par



deseado) para lograr el seguimiento de la trayectoria deseada y posteriormente se asegura que el par electromagnético ( $\tau_{em}$ ) producido por el motor siga al par deseado ( $\tau^d$ ). El controlador resultante es no lineal y logra que el error de seguimiento converja exponencialmente a cero con las señales internas acotadas. [Hu, et al. 95] usa un método de control basado en *backstepping* para el MI y en la técnica del error filtrado [SlotineLi86] para el robot; considera estado parcialmente medible (corrientes del estator, velocidad y posición del rotor) y utiliza un observador no lineal de flujos. El esquema resultante garantiza un seguimiento semiglobal en el error de posición y con acotamiento máximo uniforme, es decir, el error no converge a cero, sino a un conjunto residual de cero que puede hacerse arbitrariamente pequeño si se eligen adecuadamente ciertos parámetros de control. [PanteleyOrtega97] utiliza un método aplicable a sistemas no lineales interconectados por retroalimentación que usa la formulación Euler-Lagrange para los modelos del MI y del robot; el esquema de control está basado en pasividad, moldeo de energía e inyección de amortiguamiento y supone estado parcialmente medible por lo que utiliza un observador no lineal de flujos. El esquema resultante resuelve el problema de seguimiento asintótico global de posición y estabilidad interna del sistema.

Por otro lado, algunos métodos consideran que el modelo no se conoce exactamente, es decir, toman en cuenta la incertidumbre paramétrica. [LyashevskiyChen96] utiliza un método de control robusto basado en la formulación Euler-Lagrange para los modelos del MI y del robot, consideran el modelo  $dq$  del motor y utilizan un algoritmo de control óptimo diseñado en tiempo discreto.

## 1.3 Planteamiento general del problema

Este trabajo tiene como objetivo principal el seguimiento de una trayectoria de referencia deseada para robots rígidos accionados directamente por motores de inducción en sus uniones. El problema general de control se puede establecer de la siguiente manera: sea la trayectoria deseada en el robot representada por las posiciones  $q_k^d(t)$  y las velocidades  $\dot{q}_k^d(t)$  en las  $k$  uniones del robot, diseñar una ley de control que asegure el seguimiento de la trayectoria deseada, la estabilidad interna y el acotamiento de todas las señales del sistema, suponiendo que las señales de referencia están acotadas, que el circuito magnético en los MI es lineal, que el estado del sistema no es completamente medible y considerando incertidumbre en los parámetros del robot y en las resistencias eléctricas de los devanados del rotor y del estator de los MI.

### 1.3.1 Casos particulares

Se tienen diferentes casos particulares del problema de control considerado. Aunque el objetivo de control sigue siendo válido, se tienen condiciones particulares de conocimiento de los modelos del MI y del robot y del estado del sistema.

- Caso particular No. 1:

**S 1.3.1** *Se considera que se tiene disponible para medición el estado del sistema, formado por las corrientes de los devanados del MI, la posición y la velocidad en las uniones del robot.*

**S 1.3.2** *Se considera que se conoce el modelo del robot.*

Este caso se trata en el capítulo 3.

- Caso particular No. 2: Considera la suposición *S 1.3.2* y además

**S 1.3.3** *Se considera conocido el modelo del MI.*

**S 1.3.4** *No es posible medir las variables correspondientes a los devanados del rotor de los MI, por lo que es necesario estimarlas por medio de un observador de estados.*

Este caso se trata en el capítulo 4.

- Caso particular No. 3: Considera las suposiciones *S 1.3.2*, *S 1.3.4* y además,

**S 1.3.5** *En el modelo del MI solamente se considera incertidumbre paramétrica en las resistencias eléctricas de los devanados del rotor.*

Este caso se trata en el capítulo 5.

- Caso particular No. 4: Considera las suposiciones *S 1.3.3* y *S 1.3.4*. Este caso se trata en el capítulo 6.

## 1.4 Contribuciones

Como tema de investigación y con base en las ventajas que tiene sobre los demás motores de CA, se seleccionó el motor de inducción tipo jaula de ardilla para accionar los robots manipuladores rígidos. Debido a que el objetivo fundamental de control es lograr una alta precisión en el seguimiento de la trayectoria deseada, se considera indispensable utilizar métodos de diseño basados en la teoría de sistemas no lineales utilizando la formalidad matemática y el rigor analítico requerido. Se desarrollaron esquemas de control para los diferentes casos particulares enumerados en el planteamiento del problema.

Como una primera alternativa se diseña un controlador no lineal robusto para el caso de un conocimiento impreciso del modelo del MI. Para el robot se considera el conocimiento exacto de su modelo y se utiliza un control de tipo centralizado. En el MI se utiliza el modelo completo de sexto orden, se considera incertidumbre paramétrica en las resistencias eléctricas de los devanados del estator y del rotor. Se supone que el estado del sistema es medible. Para el diseño del controlador se parte de los resultados obtenidos en [EspinosaOrtega94] en donde utilizando una metodología basada en pasividad y moldeo de energía se desarrolla un controlador nominal para un motor de inducción que asegura la estabilidad exponencial del sistema en lazo cerrado considerando que se conocen con precisión los parámetros del MI. Ahora bien, en el esquema que aquí se propone se aborda el caso del conocimiento impreciso del modelo del MI y se tiene como aportación principal el diseño de una ley de control robusta no lineal para hacer frente a la incertidumbre paramétrica en las resistencias eléctricas de los devanados del MI, para lo cual se utiliza la técnica de rediseño de Lyapunov para garantizar el seguimiento de la trayectoria deseada, el acotamiento de todas las señales internas y la estabilidad práctica del sistema. Los resultados obtenidos están reportados en [GuerreroTang99a] [GuerreroTang00c].

*La principal aportación de este esquema es la consideración de la incertidumbre paramétrica en el modelo del MI. La desventaja principal es que se considera medible el estado del sistema.*

Posteriormente se hacen consideraciones más acordes con la práctica común en el control del MI y se aborda la técnica de control por campo orientado, que utiliza el modelo reducido de cuarto orden del MI. Además, usualmente las variables de estado del rotor del MI no se tienen disponibles para medición por lo que se usan observadores de estado para estimar los valores de las mismas. Tomando en cuenta lo anterior se proponen los siguientes tres esquemas de control:

En primer lugar, se diseña un controlador no lineal que considera el conocimiento exacto de los modelos matemáticos del robot y del MI, retroalimentación de salida y estimación de las variables de estado (flujos) del rotor del MI utilizando un observador de flujos de lazo cerrado. Usando el método de Lyapunov se diseña un controlador que logra el seguimiento de la trayectoria deseada, acotamiento de señales internas y estabilidad exponencial. Una característica de este esquema es que en el análisis de estabilidad se contemplan tanto el controlador como el observador. Los resultados obtenidos están reportados en [GuerreroTang99b] [GuerreroTang00a].

Por otro lado, es conveniente considerar la variación de la resistencia eléctrica de los devanados del MI, por lo que se propone el diseño de un controlador no lineal adaptable que considera la incertidumbre paramétrica en las resistencias eléctricas de los devanados del rotor de los motores. Para el robot se usa un control centralizado y se supone el conocimiento exacto de su modelo matemático. Con el controlador

propuesto se logra el seguimiento de la trayectoria deseada, el acotamiento de las señales internas y la estabilidad asintótica del sistema [GuerreroTang99c].

*Una característica relevante de este esquema es que en el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado se consideran el controlador, el observador de flujos y la ley de adaptación de los parámetros del motor.*

Por último, se desarrolla un método de control que considera que no se conoce (y no es necesario conocerlo) con precisión el modelo matemático del robot [Tang, et al. 97] [TangGuerrero98]. En los motores se considera conocimiento exacto del modelo, retroalimentación de salida y estimación de las variables del rotor. El controlador diseñado garantiza el acotamiento de todas las señales internas y la estabilidad práctica del sistema [Tang, et al. 00] [GuerreroTang00b].

*La principal ventaja de este esquema es que incorpora la técnica de control descentralizado para enfrentar la incertidumbre paramétrica y los acoplamientos entre las uniones del robot.*

Además de los resultados mencionados, es necesario resaltar la metodología utilizada en el diseño de los controladores. Es una práctica común considerar que un sistema compuesto por cargas mecánicas accionadas por motores eléctricos se puede dividir en un subsistema eléctrico, un subsistema mecánico y una señal de acoplamiento que normalmente es el par electromagnético producido por el motor eléctrico. En aplicaciones sencillas en las cuales no se requiere un control preciso de posición, de velocidad y/o de par normalmente se puede ignorar la dinámica de la parte eléctrica ya es más rápida que la dinámica del subsistema mecánico. Sin embargo, para aplicaciones de alto desempeño dinámico (que requieren un control preciso de posición, velocidad y/o de par) no se puede hacer esta simplificación ya que degradaría el comportamiento dinámico del sistema.

El procedimiento utilizado en el diseño de los diferentes controladores se puede resumir de la siguiente manera:

1. Primero se considera el problema de seguimiento de la trayectoria deseada en el sistema mecánico combinado (MI+robot). Se utiliza la ecuación dinámica del error de seguimiento de trayectoria para encontrar una señal de "par deseado" que asegure el seguimiento de la trayectoria deseada.
2. Cada motor eléctrico debe proporcionar un par electromagnético que siga al par deseado requerido por el subsistema mecánico. También es necesario considerar que la operación deseada del MI impone ciertos "flujos magnéticos deseados" en la estructura magnética. Es bien conocido [EspinosaOrtega95] que los problemas de seguimiento de par y de flujo magnético se pueden expresar como un problema de seguimiento de corrientes de los devanados del MI. Por lo anteriormente expuesto, es necesario conocer las ecuaciones dinámicas de los errores de

seguimiento de la trayectoria deseada, de los flujos y de las corrientes. Además, en los esquemas que usan observadores de variables de estado y/o adaptación de parámetros también se deben determinar las ecuaciones dinámicas de los errores de observación y/o de adaptación.

3. Después de formular las ecuaciones dinámicas de los errores para el sistema completo, se procede a realizar el análisis de estabilidad de Lyapunov y finalmente se diseñan las leyes de control y las leyes de adaptación de parámetros. Así, los controladores resultantes aseguran el comportamiento deseado ya que en el proceso de diseño se consideran las dinámicas de todas las partes del sistema. También es conveniente comparar los resultados obtenidos con los de otros esquemas de control existentes y así poder conocer las ventajas y desventajas de los diferentes métodos.

## 1.5 Organización de la tesis

En el capítulo 2 se trata el modelado matemático de los manipuladores robóticos accionados por motores de inducción. Después de una breve introducción a la formulación Euler-Lagrange que es fundamental en el modelado matemático de algunos tipos de sistemas físicos, se encuentran las principales representaciones matemáticas de los modelos de los robots rígidos y de los MI.

En el capítulo 3 se presenta el diseño de un controlador no lineal robusto para el MI basado en las propiedades de pasividad y moldeo de energía considerando el modelo completo del motor, retroalimentación de estado y parámetros inciertos en el motor. En el robot se considera conocimiento exacto del modelo y un control centralizado.

En el capítulo 4 se presenta el diseño de un controlador no lineal basado en observador, se considera el modelo reducido del MI con parámetros conocidos y retroalimentación de salida, por lo que utiliza un observador para estimar las variables del rotor no disponibles para medición; en el robot se considera un control centralizado y se supone el conocimiento exacto del modelo.

En el capítulo 5 se presenta el diseño de un controlador no lineal adaptable, se considera el modelo reducido del MI con incertidumbre paramétrica en los devanados del rotor, retroalimentación de salida y un observador para estimar las variables del rotor; en el robot se considera un control centralizado y se supone el conocimiento exacto del modelo.

En el capítulo 6 se presenta el diseño de un controlador no lineal descentralizado. Ahora en el robot se considera un modelo no conocido con precisión y se utiliza el control descentralizado para enfrentar la incertidumbre y los acoplamientos entre

las uniones del robot; en el MI se considera el modelo reducido con parámetros conocidos, retroalimentación de salida y un observador para estimar las variables no disponibles para medición.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones del trabajo de investigación y los trabajos a desarrollar en el futuro. Por último, se presentan los apéndices del trabajo y las referencias bibliográficas relevantes al problema.



# Capítulo 2

## Modelado de manipuladores robóticos accionados por motores de inducción

En particular, el sistema electromecánico compuesto por un robot rígido accionado por motores de inducción pertenece a la clase de sistemas físicos formados por subsistemas de naturaleza energética combinada, cuyas ecuaciones dinámicas se pueden determinar a partir de leyes físicas y el principio de conservación de la energía. Por otro lado, es conveniente resaltar que una característica común de los diferentes subsistemas es que transforman energía y esto es aprovechado para formular el problema de modelado utilizando el método de indicadores variacionales que, a grandes rasgos, consiste en definir ciertas funciones de energía y el *Lagrangiano* en términos de un conjunto de variables generalizadas (por ejemplo, posiciones para los sistemas mecánicos y cargas para los eléctricos) y, posteriormente, aplicar el principio de Hamilton para obtener la ecuación de Euler-Lagrange (*EL*) que describirá el comportamiento dinámico del sistema completo incluyendo los términos de acoplamiento entre los diferentes subsistemas[WhiteWoodson59].

### 2.1 La ecuación Euler-Lagrange

La configuración de un sistema físico es descrita por un conjunto de cantidades llamadas coordenadas y, desde un punto de vista dinámico, se puede considerar que el sistema consiste de varias partículas interconectadas que relacionan las coordenadas y que imponen ciertas restricciones sobre su comportamiento dinámico, por lo que también es necesario definir un conjunto de variables dinámicas (generalmente las primeras derivadas de las coordenadas) que describan como cambia la configuración del sistema. La elección de las coordenadas es a menudo algo arbitraria pero, en general, se puede asociar un subconjunto de las coordenadas totales con cada uno



de los diferentes subsistemas. Por otro lado, puede ser posible que las restricciones permitan reducir el número de variables usadas para describir el sistema y en el caso de restricciones *holonómicas* expresadas en la forma  $f_j(q_1, \dots, q_N; t) = 0$  para  $j = 1, \dots, M$ , donde  $N$  es el número de coordenadas y  $M$  el número de restricciones, es posible seleccionar un conjunto de  $n = N - M$  coordenadas independientes o generalizadas (el número de grados de libertad) tales que eliminen la necesidad de las ecuaciones de las restricciones.

Una vez seleccionadas las coordenadas generalizadas se define como función de estado el Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$  que caracteriza al sistema, dependiente de las coordenadas, de las velocidades y del tiempo, pero no de la trayectoria seguida para ir de un estado inicial a otro final. La diferencial total de  $\mathcal{L}$  es

$$d\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (2.1)$$

En el caso de sistemas conservativos, para determinar  $\mathcal{L}$  se elige una trayectoria de integración que mantiene todas las variables  $\dot{q}_k$  constantes para la integración con respecto a las  $q_k$  y mantiene todas las  $q_k$  constantes para la integración con respecto a las  $\dot{q}_k$ , además las integraciones pueden ser desarrolladas para un valor específico de tiempo  $t$ . Así,

$$\mathcal{L} = \int_{q_1, \dots, q_n; 0, \dots, 0; t}^{q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t} \int_{0, \dots, 0; 0, \dots, 0; t}^{q_1, \dots, q_n; 0, \dots, 0; t} d\mathcal{L}(q'_1, \dots, q'_n; \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_n; t), \quad (2.2)$$

donde  $(.)'$  identifica a las variables auxiliares de integración. Sustituyendo (2.1) en (2.2) y separando términos se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) &= \int_{0, \dots, 0}^{q_1, \dots, q_n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}(q'_1, \dots, q'_n; 0, \dots, 0; t)}{\partial q'_k} dq'_k \\ &+ \int_{0, \dots, 0}^{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_n; t)}{\partial \dot{q}'_k} d\dot{q}'_k, \end{aligned} \quad (2.3)$$

y se observa que el primer término de la derecha depende de las coordenadas y del tiempo pero es completamente independiente de las velocidades, y el segundo término es función de los valores finales de las coordenadas y de las velocidades. Si se definen las fuerzas generalizadas  $f_k$

$$f_k(q_1, \dots, q_n; t) = \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; 0, \dots, 0; t)}{\partial q_k}, \quad (2.4)$$

la energía potencial  $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V} = \int_{0, \dots, 0}^{q_1, \dots, q_n} \sum_{k=1}^n (-f'_k(q'_1, \dots, q'_n; t)) dq'_k, \quad (2.5)$$

el momento generalizado  $p_k$

$$p'_k(q_1, \dots, q_n; \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_n; t) = \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_n; t)}{\partial \dot{q}'_k}, \quad (2.6)$$

y la coenergía cinética  $\mathcal{T}^*$

$$\mathcal{T}^* = \int_{0, \dots, 0}^{\dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_n} \sum_{k=1}^n (p'_k(q_1, \dots, q_n; \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_n; t)) d\dot{q}'_k, \quad (2.7)$$

el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  se define como

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) = \mathcal{T}^*(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) - \mathcal{V}(q_1, \dots, q_n; t) = \mathcal{T}^* - \mathcal{V} \quad (2.8)$$

que se puede utilizar para cualquier tipo de sistema, independientemente de su naturaleza energética.

Ahora bien, el principio de Hamilton establece que la trayectoria dinámica real de un sistema descrito por el Lagrangiano, desde un tiempo  $t_1$  hasta el tiempo  $t_2$  es tal que la integral de línea  $I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt$  es un extremo, por lo que la primera variación  $\delta I$  de la integral de línea  $I$ , que es independiente del tiempo, debe ser igual a cero, esto es

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt = 0 \quad (2.9)$$

sujeta a las restricciones  $\delta q(t_1) = 0$  y  $\delta q(t_2) = 0$ . Evaluando esta variación e igualando a cero, se obtiene

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right] \delta q_k dt = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

El extremo  $\delta I = 0$  debe mantenerse para toda variación  $\delta q_k$  de cualquier coordenada  $q_k$  y como éstas son independientes, el término entre paréntesis debe ser igual a cero para toda  $k$ , por lo que se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

conocida como "ecuación Euler-Lagrange (EL)".

Para extender el análisis anterior al caso de sistemas no conservativos [Ortega, et al. 98], se deben considerar las fuerzas no conservativas (externas al sistema conservativo)  $Q \in R^n$  que pueden ser de tres tipos: las acciones de control, la disipación y las interacciones del sistema con el medio ambiente. Se supone que las acciones de control (consideradas como fuerzas impulsoras aplicadas a la parte

conservativa del sistema e independientes de las coordenadas y velocidades generalizadas) entran linealmente al sistema en la forma  $\mathcal{M}u \in R^n$ , donde  $\mathcal{M} \in R^{n \times n_u}$  es una matriz constante y  $u \in R^{n_u}$  es el vector de control. Las fuerzas disipativas (dependientes de las velocidades generalizadas) son de la forma  $\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$ , donde  $\mathcal{F}(\dot{q})$  es la función de disipación de Rayleigh. Las fuerzas de interacción con el ambiente  $Q_c \in R^n$  pueden ser usadas para modelar el efecto de las perturbaciones. Así, para sistemas no conservativos la ecuación *EL* queda de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \mathcal{M}u - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + Q_c. \quad (2.12)$$

donde  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$  y  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$  son los vectores de coordenadas y velocidades generalizadas, respectivamente.

Por otro lado, si el número de entradas de control es igual al número de grados de libertad ( $n_u = n$ ,  $\mathcal{M} = \mathcal{I}_n$ ,  $\mathcal{I}_n$  es la matriz unitaria de dimensión  $n \times n$ ), se dice que el sistema es completamente actuado y en el caso contrario ( $n_u < n$ ) es subactuado, esto es, existen algunas coordenadas generalizadas a las cuales no se les aplica una fuerza externa. Por último, el desarrollo de la ecuación *EL* proporciona las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema dinámico.

Para el caso de sistemas electromecánicos es necesario establecer que variables pueden ser elegidas como variables generalizadas. Para la parte mecánica está bien definido el significado de coordenada, velocidad, fuerza y momento, por lo que es usual elegir los desplazamientos mecánicos ( $q_m \in R^{n_m}$ ) como coordenadas generalizadas. Sin embargo, para la parte eléctrica no existe esta correspondencia y se tiene la opción de elegir como coordenadas generalizadas a las cargas eléctricas  $q_e \in R^{n_e}$  ó a los enlaces de flujo  $\lambda \in R^{n_e}$ . En este trabajo se elige a las cargas eléctricas como las coordenadas generalizadas.

La función de energía total (el Lagrangiano) es una combinación de las funciones de energía de los subsistemas,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_e = (\mathcal{T}_m^* - V_m) + (\mathcal{T}_e^* - V_e) = (\mathcal{T}_m^* + \mathcal{T}_e^*) - (V_m + V_e) = \mathcal{T}^* - \mathcal{V}, \quad (2.13)$$

donde los subíndices  $e$  y  $m$  se usan para denotar cantidades de los subsistemas eléctrico y mecánico, respectivamente;  $n_m + n_e = n$ ,  $\mathcal{T}^*$  es la coenergía cinética total y  $\mathcal{V}$  la energía potencial total. En el subsistema eléctrico, la coenergía cinética está relacionada con los campos magnéticos y la energía potencial con los campos eléctricos. Para el tipo de sistemas de interés se supone que la función de coenergía cinética total tiene la forma

$$\mathcal{T}^*(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q}, \quad (2.14)$$

donde  $D(q) = D^T(q) > 0$  es la matriz de inercias generalizadas,  $D(q) = \text{diag}[D_e, D_m]$ ,  $D_e$  y  $D_m$  son las matrices de inercias generalizadas de los subsistemas eléctrico y

mecánico, respectivamente,  $\dot{q} = [\dot{q}_e^T \dot{q}_m^T]^T$  con  $q_e$ ,  $q_m$  los vectores de coordenadas eléctricas y mecánicas, respectivamente. La función de energía potencial solo depende de las coordenadas generalizadas y está acotada por debajo, esto es, existe un  $c \in R$  tal que  $\mathcal{V}(q) \geq c$  para todo  $q \in R^n$  y  $c \in R$ .

Si se analizan por separado los subsistemas y se hacen consideraciones de tipo práctico (por ejemplo, que la coenergía del subsistema mecánico generalmente no depende de las coordenadas eléctricas y que la coenergía del subsistema eléctrico sí depende las coordenadas mecánicas), se tiene que [Meisel66]

$$\mathcal{T}_e^*(q_m, \dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_m) \dot{q}_e, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{T}_m^*(q_m, \dot{q}_m) = \frac{1}{2} \dot{q}_m^T D_m(q_m) \dot{q}_m, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{V}_e(q_m, q_e) \geq c_e, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{V}_m(q_m) \geq c_m. \quad (2.18)$$

Los términos disipativos se modelan mediante la función de Rayleigh y se supone que toman la forma

$$\mathcal{F}_e(\dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e; \quad R_e \in R^{n_e \times n_e}; \quad R_e = R_e^T, \quad (2.19)$$

$$\mathcal{F}_m(\dot{q}_m) = \frac{1}{2} \dot{q}_m^T R_m \dot{q}_m; \quad R_m \in R^{n_m \times n_m}; \quad R_m = R_m^T \quad (2.20)$$

y las matrices  $R_e$  y  $R_m$  están formadas por los parámetros disipativos de cada subsistema, resistencias eléctricas y coeficientes de fricción viscosa, respectivamente.

Si el subsistema eléctrico es subactuado, el vector de coordenadas eléctricas  $q_e$ , la matriz de entrada  $\mathcal{M}_e$  y el vector de entradas  $u$  son

$$q_e = [\dot{q}_s^T \dot{q}_r^T]^T; \quad q_s \in R^{n_s}; \quad q_r \in R^{n_r}; \quad n_s + n_r = n_e, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{M}_e = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{n_s} \\ 0_{n_r \times n_s} \end{bmatrix} \in R^{n_e \times n_s}, \quad (2.22)$$

donde  $0_{n_r \times n_s}$  es una matriz de ceros de la dimensión especificada.

$$u = [u_1 \dots u_{n_s}]^T \in R^{n_s}. \quad (2.23)$$

El Lagrangiano del sistema completo es

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_m) \dot{q}_e + \frac{1}{2} \dot{q}_m^T D_m(q_m) \dot{q}_m \right] - [\mathcal{V}_e + \mathcal{V}_m] \quad (2.24)$$

y desarrollando la ecuación  $EL$  para el sistema completo resulta el modelo del sistema electromecánico

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_e(q_m)\ddot{q}_e + \dot{D}_e(q_m)\dot{q}_e \\ D_m(q_m)\ddot{q}_m + \dot{D}_m(q_m)\dot{q}_m \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial(\dot{q}_m^T D_m(q_m)\dot{q}_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial(\dot{q}_e^T D_e(q_m)\dot{q}_e)}{\partial q_m} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_e(q_m, q_e)}{\partial q_e} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_m(q_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial \mathcal{V}_e(q_m, q_e)}{\partial q_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_e \dot{q}_e \\ R_m \dot{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_e u \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Existen diferentes sistemas físicos que pueden ser representados por esta formulación Lagrangiana, entre ellos se encuentran los robots y las máquinas eléctricas. Específicamente, en este trabajo son de interés los robots rígidos y los motores de inducción trifásicos tipo jaula de ardilla.

## 2.2 Robots rígidos accionados por motores de inducción

En esta sección se describen los robots giratorios (sistema mecánico), los motores de inducción (sistema electromecánico) y el sistema completo formado por el robot accionado directamente por motores de inducción.

### 2.2.1 Robots manipuladores

Para la obtención de la ecuación dinámica de un robot giratorio rígido de  $n$  grados de libertad se utiliza la ecuación de Euler-Lagrange (en este caso particular el sistema maneja solamente energía mecánica, por lo que no es necesario utilizar subíndices en las ecuaciones  $EL$ )

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + \mathcal{Q}_\zeta, \quad (2.26)$$

donde  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$  es el vector de posiciones de las uniones del robot,  $\mathcal{L} = \mathcal{T}^* - \mathcal{V}$  es el Lagrangiano,  $\tau = [\tau_1 \dots \tau_n]^T$  es el vector de pares de entrada actuando sobre el sistema,  $\mathcal{F}$  considera los términos disipativos y  $\mathcal{Q}_\zeta$  las perturbaciones. Se considera que se cumplen las condiciones de que la energía potencial  $\mathcal{V}(q)$  está acotada por debajo y es independiente del vector de velocidades generalizadas  $\dot{q}$  y la coenergía cinética es una función cuadrática del vector  $\dot{q}$  dada por  $\mathcal{T}^*(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$  (por costumbre se usa  $M(q)$  en lugar de  $D_m$  para denotar la matriz de inercias en los sistemas robóticos).

Desarrollando la ecuación  $EL$  se obtiene

$$M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\dot{q}^T M(q)\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{V}(q)}{\partial q} = \tau - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + \mathcal{Q}_\zeta, \quad (2.27)$$

y es usual definir

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\dot{q}^T M(q)\dot{q})}{\partial q}, \quad (2.28)$$

$$g(q) = \frac{\partial \mathcal{V}(q)}{\partial q}, \quad (2.29)$$

por lo que la ecuación que gobierna el comportamiento de los robots rígidos giratorios se puede expresar como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} + \mathcal{Q}_c, \quad (2.30)$$

donde  $g(q)$  es el vector de pares gravitacionales y  $C(q, \dot{q})$  contiene a los términos de Coriolis y centrífugos, cuyos elementos están definidos como

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q)\dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{m_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \quad (2.31)$$

y los términos  $m_{..}$  son elementos de la matriz de inercias.

Para facilitar el diseño de sistemas de control se toman en cuenta las siguientes propiedades fundamentales de los robots [SpongVidyasagar89]:

**P 2.2.1** La matriz de inercias  $M(q)$  es simétrica, positiva definida,  $M(q)$  y  $M(q)^{-1}$  son uniformemente acotadas como una función de  $q \in R^n$ , es decir, existen escalares  $\kappa_1(q)$  y  $\kappa_2(q)$  tal que

$$\kappa_1(q) \leq M(q) \leq \kappa_2(q). \quad (2.32)$$

Para robots cuyas articulaciones son todas giratorias las cotas son constantes ( $\kappa_1, \kappa_2$ ).

**P 2.2.2** Los robots rígidos son completamente actuados, por lo que existe una entrada de control independiente para cada articulación (grado de libertad) del robot.

**P 2.2.3** Todos los parámetros constantes de interés aparecen como coeficientes de funciones conocidas de las coordenadas generalizadas. Si se define cada coeficiente como un parámetro separado, resulta una relación lineal y la ecuación dinámica del robot se puede escribir como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})p = \tau - \mathcal{Q}_c, \quad (2.33)$$

donde  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in R^{n \times r}$  es una matriz, llamada el regresor, de funciones conocidas y  $p \in R^r$  es un vector de parámetros, como las masas, los momentos de inercia, ó una combinación de ellos

**P 2.2.4** La matriz  $N = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es anti-simétrica.

**P 2.2.5** El mapa  $\tau \mapsto \dot{q}$  es pasivo; es decir, existe un  $\beta \geq 0$  tal que

$$\int_0^T \dot{q}^T(u) \tau(u) du \geq -\beta. \quad (2.34)$$

Además, en este trabajo se supone que las fuerzas de perturbación son despreciables.

## 2.2.2 Motor de inducción

Como paso previo al diseño de controladores de MI, es necesario conocer el comportamiento de los motores en los diferentes regímenes de operación (arranque, frenado, plena carga, etc...). El análisis completo comprende la determinación de las fuerzas magnetomotrices (fmm) resultantes en el entrehierro de la máquina, las densidades de flujo magnético, los flujos magnéticos y los enlaces de flujo, así como el conocimiento de sus parámetros como son las inductancias propias y mutuas, las resistencias de los devanados, etc... Una vez conocidos los parámetros físicos de la máquina, se plantean las ecuaciones de los voltajes inducidos y de los voltajes aplicados en los devanados, y a partir de éstas se pueden determinar las demás variables de interés como son las corrientes, el par electromagnético y la velocidad [SteinHunt79][Fitzgerald, et al. 90][Taylor94]. Para lograr lo anterior es conveniente obtener el modelo matemático del motor y realizar la simulación digital de las diferentes condiciones de operación del motor en la computadora.

Para el modelado del MI se considera una máquina trifásica, simétrica, conectada en estrella (Y) y con neutro aislado. El MI jaula de ardilla es una máquina subactuada, con los devanados del estator disponibles y los del rotor inaccesibles. Los tres devanados del estator se consideran distribuidos senoidalmente, son idénticos y se encuentran desplazados 120 grados eléctricos entre sí, con un número equivalente de vueltas  $N_s$  y con resistencia eléctrica  $R_s$ . Algo similar se considera con los devanados del rotor de un motor de inducción de rotor devanado. Sin embargo, cuando el devanado del rotor es de tipo jaula de ardilla, los conductores están embutidos en el material ferromagnético del rotor y son conectados en corto circuito en sus extremos. En cualquier caso, los devanados del rotor se pueden representar por medio de devanados equivalentes similares a los del estator, con un número equivalente de vueltas  $N_r$  y con resistencia eléctrica  $R_r$  [Krause87]. Por otro lado, se supone que el circuito magnético es lineal, la permeabilidad del núcleo magnético se considera infinita, se ignoran los efectos de la saturación magnética y la longitud del entrehierro es constante (máquina de rotor cilíndrico). Además, no se considera la existencia de imanes permanentes que aporten flujo magnético adicional al producido por los devanados del estator y del rotor.

El modelo matemático del MI trifásico se puede obtener usando la formulación Euler-Lagrange [Meisel66] y posteriormente se realiza la transformación del sistema

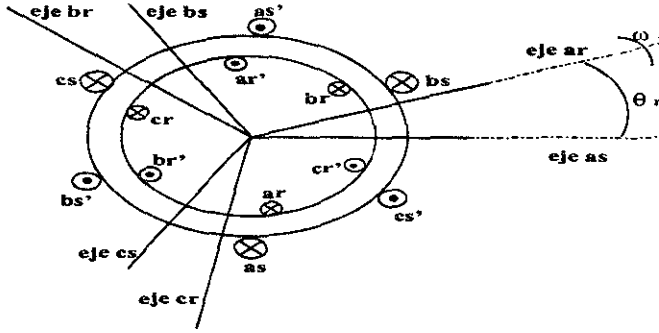


Figura 2.1: Circuito equivalente del MI trifásico.

trifásico original a un sistema equivalente de dos fases, con la finalidad de facilitar el análisis. El desarrollo siguiente está basado en [Meisel66].

Se eligen como coordenadas generalizadas las cargas eléctricas ( $q_e \in R^{n_e}$ ) para el subsistema eléctrico y la posición angular del rotor ( $q_m \in R$ ) para el subsistema mecánico. Tomando en cuenta las suposiciones hechas (que dan lugar a simplificaciones en el modelo) y analizando el circuito magnético se encuentra la relación lineal entre los enlaces de flujo y las corrientes de los devanados

$$\lambda = D_e(q_m)\dot{q}_e, \quad (2.35)$$

donde  $\lambda \in R^{n_e}$  es el vector de enlaces de flujo,  $D_e(q_m) = D_e^T(q_m) > 0 \in R^{n_e \times n_e}$  es la matriz de inductancias de los devanados,  $\dot{q}_e = [q_s^T \ q_r^T]^T \in R^{n_e}$ ,  $q_s \in R^{n_s}$  y  $q_r \in R^{n_r}$  son las corrientes de los devanados del MI, los subíndices  $s$  y  $r$  se usan para denotar las variables correspondientes a los devanados de estator y de rotor respectivamente y el superíndice  $T$  se usa para denotar la transpuesta. La coenergía cinética (del campo magnético) del subsistema eléctrico está dada por

$$\mathcal{T}_e^*(\dot{q}_e, q_m) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_m) \dot{q}_e \quad (2.36)$$

y la coenergía cinética del subsistema mecánico está dada por

$$\mathcal{T}_m^*(\dot{q}_m) = \frac{1}{2} D_m \dot{q}_m^2, \quad (2.37)$$

donde  $D_m > 0 \in R$  es el momento inercial del rotor. La energía potencial del sistema es igual a cero ( $\mathcal{V} = \mathcal{V}_e + \mathcal{V}_m = 0$ ) debido a que los efectos capacitivos en



los devanados son despreciables y se considera que la flecha del motor es rígida. Así, se obtiene el Lagrangiano del sistema completo

$$\mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m) = \mathcal{L}_e(\dot{q}_e, q_m) + \mathcal{L}_m(\dot{q}_m, q_m) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D_e(q_m) \dot{q}_e + \frac{1}{2} D_m \dot{q}_m^2. \quad (2.38)$$

Para modelar las fuerzas externas, se supone que los efectos disipativos son lineales, que en el subsistema eléctrico se deben a las resistencias de los devanados y en el mecánico al coeficiente de fricción viscosa, de manera que las funciones de disipación de Rayleigh correspondientes son

$$\mathcal{F}_e(\dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T R_e \dot{q}_e, \quad R_e \in R^{n_e \times n_e}, \quad (2.39)$$

$$\mathcal{F}_m(\dot{q}_m) = \frac{1}{2} R_m \dot{q}_m^2, \quad R_m \geq 0 \quad (2.40)$$

y que se pueden agrupar como

$$\mathcal{F}(\dot{q}_e, \dot{q}_m) = \text{diag}[\mathcal{F}_e(\dot{q}_e), \mathcal{F}_m(\dot{q}_m)], \quad (2.41)$$

por otro lado, se considera que las fuerzas de control son los voltajes aplicados a los devanados del estator  $u \in R^{n_s}$  y que el par de la carga mecánica acoplada a la flecha del motor  $\tau_L$  es una fuerza de perturbación externa aplicada al subsistema mecánico.

Con todos los elementos anteriores, es posible resolver la ecuación  $EL$  para obtener el modelo del MI. La evaluación con respecto a las variables del subsistema eléctrico es

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_e} = D_e(q_m) \dot{q}_e, \quad (2.42)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right] = D_e(q_m) \ddot{q}_e + \frac{\partial D_e(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_e, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial q_e} = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_e} = R_e \dot{q}_e \quad (2.45)$$

y con respecto a la variable del subsistema mecánico es

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} = D_m(q_m) \dot{q}_m, \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right] = D_m(q_m) \ddot{q}_m, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial q_m} = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \frac{\partial D_e(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_e, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}_e, \dot{q}_m, q_m)}{\partial q_m} = R_m \dot{q}_m, \quad (2.49)$$

de manera que las ecuaciones dinámicas que gobiernan el comportamiento del MI son

$$D_e(q_m) \ddot{q}_e + W_1(q_m) \dot{q}_m \dot{q}_e + R_e \dot{q}_e = M_e u \quad (2.50)$$

$$D_m \ddot{q}_m - \tau_{em}(\dot{q}_e, q_m) + R_m \dot{q}_m = -\tau_L, \quad (2.51)$$

donde se han usado la siguientes definiciones

$$W_1(q_m) = \frac{\partial D_e(q_m)}{\partial q_m}, \quad (2.52)$$

$$\tau_{em}(\dot{q}_e, q_m) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1(q_m) \dot{q}_e \quad (2.53)$$

y  $\tau_{em}(\dot{q}_e, q_m)$  es el par electromagnético generado por el MI.

Este modelo, basado en la formulación Lagrangiana, tiene la gran ventaja de ser aplicable a diferentes máquinas eléctricas, desde luego, considerando las características particulares (formas de onda de las fuentes de excitación, tipos de devanados, etc...) de cada máquina.

En el MI jaula de ardilla trifásico, se tienen tres devanados fijos en el estator y tres devanados en el rotor, por lo que  $n_e = 6$ ,  $n_s = n_r = 3$ , las coordenadas generalizadas para el subsistema eléctrico son  $q_e^3 = [q_s^{3T} q_r^{3T}]^T = [q_{s1}^3 q_{s2}^3 q_{s3}^3 q_{r1}^3 q_{r2}^3 q_{r3}^3]^T$  (el superíndice <sup>3</sup> se usa para denotar que se está trabajando con el sistema trifásico) y para el subsistema mecánico se usará  $\theta_r$  en lugar de  $q_m$  para estar más acorde con la notación usada en sistemas mecánicos giratorios. Las velocidades generalizadas para la parte eléctrica son las corrientes en los devanados  $\dot{q}_e^3 = [\dot{q}_s^{3T} \dot{q}_r^{3T}]^T = [\dot{q}_{s1}^3 \dot{q}_{s2}^3 \dot{q}_{s3}^3 \dot{q}_{r1}^3 \dot{q}_{r2}^3 \dot{q}_{r3}^3]^T$  y para la mecánica es la velocidad angular del rotor  $\omega_r = \dot{\theta}_r$ . Como solamente se tienen señales de entrada en los devanados del estator, el vector de entradas es  $u^3 = [u_1^3 u_2^3 u_3^3]$  y la correspondiente matriz de entrada es  $M_e = [\mathcal{I}_3 \ 0_3]^T$ .

Por la consideración de simetría, las resistencias de los devanados del estator son iguales y lo mismo sucede con los devanados del rotor, por lo que la matriz de resistencias

$$R_e^3 = \begin{bmatrix} R_s \mathcal{I}_3 & 0_3 \\ 0_3 & R_r \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

y la matriz de inductancias es

$$D_e^3(\theta_r) = \begin{bmatrix} D_s^3 & D_{sr}^3 \\ D_{sr}^{3T} & D_r^3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$D_s^3 = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} \\ -\frac{1}{2} L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} \\ -\frac{1}{2} L_{ms} & -\frac{1}{2} L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

$$D_r^3 = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$D_{sr}^3 = \bar{L}_{sr} U(\theta_r) = \bar{L}_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & \cos(\theta_r + \gamma) & \cos(\theta_r - \gamma) \\ \cos(\theta_r - \gamma) & \cos(\theta_r) & \cos(\theta_r + \gamma) \\ \cos(\theta_r + \gamma) & \cos(\theta_r - \gamma) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{3} \quad (2.58)$$

donde  $D_s^3$ ,  $D_r^3$ ,  $D_{sr}^3$  representan a las matrices de inductancias de los devanados del estator, del rotor y mutuas, respectivamente;  $L_l$  y  $L_m$  representan a las inductancias de dispersión y de magnetización, respectivamente y  $\bar{L}_{sr}$  es el valor máximo de la inductancia mutua.

Sustituyendo estos datos y desarrollando la ecuación  $EL$  del MI trifásico, el modelo completo (subsistemas eléctrico y mecánico) está dado por

$$\begin{bmatrix} D_s^3 & D_{sr}^3 \\ D_{sr}^{3T} & D_r^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_s^3 \\ \ddot{q}_r^3 \end{bmatrix} - \bar{L}_{sr} \begin{bmatrix} 0_3 & W_{12}(\theta_r) \\ W_{21}(\theta_r) & 0_3 \end{bmatrix} \dot{\theta}_r \begin{bmatrix} \dot{q}_s^3 \\ \dot{q}_r^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_s \mathcal{I}_3 & 0_3 \\ 0_3 & R_r \mathcal{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_s^3 \\ \dot{q}_r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_3 \\ 0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

$$D_m \ddot{\theta}_r + R_m \dot{\theta}_r = \tau_{em}(\dot{q}_e^3, \theta_r) - \tau_L(\theta_r, \dot{\theta}_r), \quad (2.60)$$

donde

$$W_{12}(\theta_r) = \begin{bmatrix} \sin(\theta_r) & \sin(\theta_r + \gamma) & \sin(\theta_r - \gamma) \\ \sin(\theta_r - \gamma) & \sin(\theta_r) & \sin(\theta_r + \gamma) \\ \sin(\theta_r + \gamma) & \sin(\theta_r - \gamma) & \sin(\theta_r) \end{bmatrix} = W_{21}^T. \quad (2.61)$$

Esta representación consta de siete ecuaciones diferenciales (ocho si se incluye la relación dinámica entre posición y velocidad) no lineales acopladas, que deben resolverse para determinar el comportamiento dinámico del MI en cualquier condición de operación.

#### Modelo equivalente bifásico.

Considerando las suposiciones acerca de los devanados del estator y del rotor (simétricos, balanceados y senoidalmente distribuidos) es posible encontrar un conjunto equivalente de devanados que produzca efectos eléctricos y magnéticos equivalentes en el MI. Se ha encontrado que dos devanados equivalentes en el estator y dos en el rotor son suficientes para representar a una máquina trifásica, por lo que es posible obtener una representación equivalente con un número menor de ecuaciones, y en consecuencia, se hace más sencillo el análisis matemático. Si se parte del modelo trifásico del MI, el modelo equivalente de dos fases se obtiene aplicando la transformación de Blondel [Meisel66]

$$T_{3\phi}^{2\phi} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

a las variables eléctricas (corriente, voltaje, flujos...) de los tres devanados del estator y del rotor. El modelo resultante es conocido como  $\alpha\beta$  y su característica principal es que las variables equivalentes tienen un defasamiento de 90 grados eléctricos entre sí y están referidas a su parte correspondiente (estator o rotor).

Aplicando las transformaciones al modelo trifásico (2.59-2.60) y siguiendo el desarrollo dado en [Espinosa93] resulta el modelo  $\alpha\beta$  del MI

$$D_e(\theta_r)\ddot{q}_e + W_1(\theta_r)\dot{\theta}_r\dot{q}_e + R_e\dot{q}_e = M_e u \quad (2.63)$$

$$D_m\ddot{\theta}_r - \tau_{em}(\dot{q}_e, \theta_r) + R_m\dot{\theta}_r = -\tau_L, \quad (2.64)$$

donde  $\theta_r$  es la posición angular de la flecha del rotor,  $\tau_L$  es el par de la carga,  $\dot{q}_e$  es el vector de corrientes transformadas de los devanados del estator y del rotor

$$\dot{q}_e = [\dot{q}_s^T \dot{q}_r^T]^T = [\dot{q}_{s1} \dot{q}_{s2} \dot{q}_{r1} \dot{q}_{r2}]^T, \quad (2.65)$$

$$D_e(\theta_r) = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_2 & L_{sr} e^{\mathcal{J}\theta_r} \\ L_{sr} e^{-\mathcal{J}\theta_r} & L_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

$$L_s = L_{ls} + \frac{3}{2}L_{ms}, \quad L_r = L_{lr} + \frac{3}{2}L_{mr}, \quad L_{sr} = \frac{3}{2}L_{ms}, \quad L_{ms} = L_{mr} = \bar{L}_{sr}, \quad (2.67)$$

$L_s$ ,  $L_r$  y  $L_{sr}$  son las inductancias transformadas de los devanados de estator, de rotor y mutuas, respectivamente, determinadas a partir de las suposiciones hechas acerca del MI,

$$e^{\mathcal{J}\theta_r} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{J}^T\theta_r}, \quad (2.68)$$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathcal{J}^T, \quad (2.69)$$

$$W_1(\theta_r) = \frac{\partial D_e(\theta_r)}{\partial \theta_r}, \quad (2.70)$$

$$R_e = \begin{bmatrix} R_s \mathcal{I}_2 & 0 \mathcal{I}_2 \\ 0 \mathcal{I}_2 & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

$$M_e = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 & 0_2 \end{bmatrix}^T. \quad (2.72)$$

Los voltajes aplicados a los devanados del estator del MI son las señales de control

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T, \quad (2.73)$$

el par electromagnético producido por el motor es

$$\tau_{em} = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T W_1(\theta_r)\dot{q}_e = L_{sr}\dot{q}_s^T \mathcal{J} e^{\mathcal{J}\theta_r}\dot{q}_r, \quad (2.74)$$

y los enlaces de flujo magnético son definidos como

$$\lambda = D_e(\theta_r) \dot{q}_e \quad (2.75)$$

donde  $\lambda = [\lambda_s^T \lambda_r^T]^T = [\lambda_{s1} \lambda_{s2} \lambda_{r1} \lambda_{r2}]^T$  son los enlaces de flujo *transformados*.

#### *Cambio de sistema de referencia.*

El modelo  $\alpha\beta$  tiene la característica (que puede considerarse como desventaja) de que las inductancias mutuas entre los devanados del estator y del rotor dependen de la posición angular  $\theta_r$  del rotor, lo cual se debe a que las variables del estator y del rotor no tienen el mismo sistema de referencia. Con la finalidad de eliminar la dependencia con respecto a  $\theta_r$  se usa la transformación *Blondel-Park* que es una especie de cambio de coordenadas aplicado a las variables de los devanados para obtener una representación en un sistema de referencia común, que en general puede considerarse que gira a velocidad arbitraria, aunque es conveniente considerar los casos particulares en los que el marco de referencia común está fijo en el estator (con velocidad igual a cero), fijo en el rotor (con velocidad igual a  $\dot{\theta}_r$ ) ó está girando a la velocidad angular del campo magnético producido por los devanados del estator (velocidad de sincronismo  $\omega_s = 2\pi f_s$  que depende de la frecuencia cíclica  $f_s$  de los voltajes de entrada al MI). Lo anterior involucra un cambio de coordenadas y una vez que todas las variables del MI están referidas a un marco de referencia común las inductancias mutuas ya no dependen de la posición angular del rotor.

Considerando como base el modelo  $\alpha\beta$ , con el sistema de referencia ortogonal estático del estator (ejes  $\alpha_s, \beta_s$ ) y el del rotor (ejes  $\alpha_r, \beta_r$ ) girando a la velocidad  $\omega_r$ , se define otro marco de referencia ortogonal  $\alpha_x\beta_x$  que gira a velocidad arbitraria  $\omega_x = \dot{\theta}_x$  y cuya posición angular está dada por  $\theta_x = \omega_x t + \theta_x(0)$ ;  $\theta_x(0) = \theta_{x0}$ .

Suponiendo que los ejes  $\alpha_s, \alpha_r, \alpha_x$  coinciden en el tiempo  $t_0 = 0$  en la posición  $\theta_x(0) = \theta_s(0) = \theta_r(0) = 0$  y que cualquier variable dada en los ejes originales (identificada como componente  $f_\alpha$  ó  $f_\beta$ ) se puede proyectar a los respectivos ejes nuevos, entonces las relaciones entre los ejes son

$$\begin{aligned} f_{\alpha_x}^s &= f_{\alpha_s} \cos(\theta_x) + f_{\beta_s} \sin(\theta_x) \\ f_{\beta_x}^s &= -f_{\alpha_s} \sin(\theta_x) + f_{\beta_s} \cos(\theta_x) \end{aligned}$$

para las variables del estator (usando  $^s$  y  $_s$  para denotar que las cantidades pertenecen a los devanados del estator) y

$$\begin{aligned} f_{\alpha_x}^r &= f_{\alpha_r} \cos(\theta_x - \theta_r) + f_{\beta_r} \sin(\theta_x - \theta_r) \\ f_{\beta_x}^r &= -f_{\alpha_r} \sin(\theta_x - \theta_r) + f_{\beta_r} \cos(\theta_x - \theta_r) \end{aligned}$$

para las variables del rotor (usando  $^r$  y  $_r$ ) y la  $f$  puede representar a las variables voltaje, corriente ó enlaces de flujo.

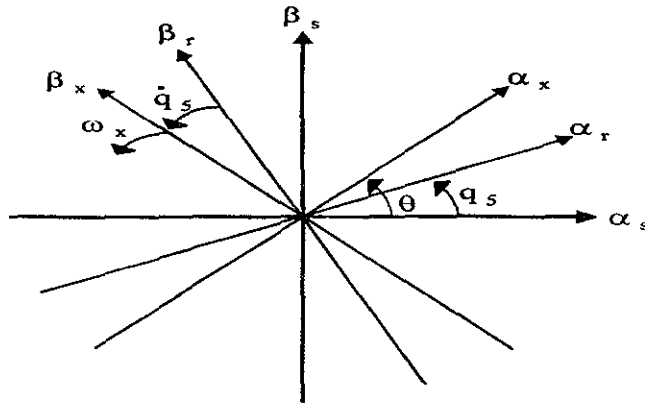


Figura 2.2: Sistemas de referencia.

Con la finalidad de transformar simultáneamente tanto las variables del estator como las del rotor al marco de referencia que gira a velocidad arbitraria se utiliza la transformación

$$T_{BP} = \begin{bmatrix} e^{-\mathcal{J}\theta_x} & 0\mathcal{I}_2 \\ 0\mathcal{I}_2 & e^{-\mathcal{J}(\theta_x - \theta_r)} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

donde la rotación de los ejes se considera al usar la matriz exponencial

$$e^{\mathcal{J}\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{J}^T\vartheta} \quad (2.77)$$

y  $\vartheta$  representa al ángulo de rotación. Ahora bien, si se quiere expresar nuevamente el modelo del MI en el marco de referencia  $\alpha\beta$  original se utiliza la matriz de transformación inversa

$$T_{BP}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{\mathcal{J}\theta_x} & 0\mathcal{I}_2 \\ 0\mathcal{I}_2 & e^{\mathcal{J}(\theta_x - \theta_r)} \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Resumiendo, al aplicar la transformación Blondel-Park al modelo  $\alpha\beta$  original, se obtiene el modelo  $\alpha_x\beta_x$  del MI (se agrega el subíndice  $x$  a los elementos que han sido transformados)

$$D_{ex}\dot{q}_{ex} + W_{1x}\dot{q}_{ex} + R_{ex}\dot{q}_{ex} = M_{ex}u_x \quad (2.79)$$

$$D_m\ddot{\theta}_{rx} - \frac{1}{2}\dot{q}_{ex}^T W_{2x}\dot{q}_{ex} + R_m\dot{\theta}_{rx} = -\tau_L, \quad (2.80)$$

$$\dot{q}_{ex} = [\dot{q}_{sx}^T \dot{q}_{rx}^T]^T = [\dot{q}_{s1x} \dot{q}_{s2x} \dot{q}_{r1x} \dot{q}_{r2x}]^T, \quad (2.81)$$

$$D_{ex} = \begin{bmatrix} L_s\mathcal{I}_2 & L_{sr}\mathcal{I}_2 \\ L_{sr}\mathcal{I}_2 & L_r\mathcal{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

$$W_{1x} = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{J} \omega_x & L_{sr} \mathcal{J} \omega_x \\ L_{sr} \mathcal{J} (\omega_x - \omega_r) & L_r \mathcal{J} (\omega_x - \omega_r) \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

$$W_{2x} = L_{sr} \begin{bmatrix} 0_2 & \mathcal{J} \\ -\mathcal{J} & 0_2 \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

$$u_x = \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{2x} \end{bmatrix}^T, \quad (2.85)$$

$R_{ex} = R_e$ ,  $M_{ex} = M_e$  y el par electromagnético se define como

$$\tau_{emx} = \frac{1}{2} \dot{q}_{ex}^T W_{2x} \dot{q}_{ex}. \quad (2.86)$$

Esta representación es válida para cualquier velocidad del sistema de referencia. Sin embargo, en la práctica se asignan velocidades que aporten resultados significativos, como el sistema de referencia estacionario fijo en el estator con velocidad  $\omega_x = 0$  (que produce la representación *ab*) y el sistema de referencia síncrono con  $\omega_x = \omega_s$  la velocidad angular de los voltajes aplicados (que produce la representación *dq*).

#### *Cambio de variables de estado.*

En el desarrollo anterior, las variables de estado son las corrientes de los devanados del estator y del rotor. Sin embargo, se pueden elegir otras variables, como los flujos de los devanados del estator y del rotor ó una combinación de corrientes y flujos, para formar el estado del sistema. Estas nuevas representaciones matemáticas del modelo del MI se pueden obtener directamente utilizando la relación lineal entre corrientes y flujos del MI. Desde luego, la selección del vector de estado no afecta las propiedades del MI[Espinosa93]. Por ejemplo, la representación matemática considerando el marco de referencia *ab* fijo en el estator, y el vector de estado formado por las corrientes en el estator, los flujos en el rotor y la velocidad es[Marino, et al. 93]

$$\dot{i}_{as} = -\frac{R_s}{\sigma} i_{as} - \alpha L_{sr} \beta i_{as} + \alpha \beta \lambda_{ar} + n_p \omega_r \beta \lambda_{br} + \frac{1}{\sigma} v_{as}, \quad (2.87)$$

$$\dot{i}_{bs} = -\frac{R_s}{\sigma} i_{bs} - \alpha L_{sr} \beta i_{bs} + \alpha \beta \lambda_{br} - n_p \omega_r \beta \lambda_{ar} + \frac{1}{\sigma} v_{bs}, \quad (2.88)$$

$$\dot{\lambda}_{ar} = -\alpha \lambda_{ar} - n_p \omega_r \lambda_{br} + \alpha L_{sr} i_{as}, \quad (2.89)$$

$$\dot{\lambda}_{br} = -\alpha \lambda_{br} + n_p \omega_r \lambda_{ar} + \alpha L_{sr} i_{bs}, \quad (2.90)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = -\frac{R_m}{D_m} \omega_r + \mu (\lambda_{ar} i_{bs} - \lambda_{br} i_{as}) - \frac{1}{D_m} \tau_L, \quad (2.91)$$

y el par electromagnético  $\tau_{em}$  producido por el motor es

$$\tau_{em} = D_m \mu (\lambda_{ar} i_{bs} - \lambda_{br} i_{as}), \quad (2.92)$$

donde se han usado los parámetros auxiliares  $\alpha = \frac{R_r}{L_r}$ ,  $\sigma = L_s - \frac{L_{sr}^2}{L_r}$ ,  $\beta = \frac{L_{sr}}{\sigma L_r}$ ,  $\mu = \frac{n_p L_{sr}}{D_m L_r}$  y  $n_p$  es el número de pares de polos del MI. Para mayor simplicidad en la notación, se acostumbra eliminar los subíndices  $s$ ,  $r$  de las ecuaciones, considerando que las corrientes pertenecen a los devanados del estator y los flujos a los devanados del rotor.

### 2.2.3 Robots rígidos giratorios accionados por motores de inducción

El sistema electromecánico que nos interesa es un robot accionado por motores de inducción, por lo que es necesario combinar los modelos de los sistemas involucrados. Se considera el acoplamiento directo de un MI (representado en el sistema de referencia  $\alpha_x\beta_x$  para generalizar) en cada una de las uniones del robot, por lo tanto se cumple que  $q_k = \theta_{rxk}$ ,  $\dot{q}_k = \dot{\theta}_{rxk} = \omega_{rxk}$ ,  $\ddot{q}_k = \ddot{\theta}_{rxk} = \dot{\omega}_{rxk}$  y  $\tau_k = \tau_{Lk}$ , donde  $q_k$ ,  $\dot{q}_k$ ,  $\ddot{q}_k$  y  $\tau_k$  son la posición, la velocidad, la aceleración y el par de entrada, respectivamente, en la  $k$ -ésima unión del manipulador robótico y  $\theta_{rxk}$ ,  $\omega_{rxk}$ ,  $\dot{\omega}_{rxk}$  y  $\tau_{Lk}$  son la posición, la velocidad, la aceleración y el par de carga, respectivamente, del  $k$ -ésimo motor de inducción. La representación matemática del subsistema mecánico del  $k$ -ésimo MI acoplado directamente a la  $k$ -ésima unión del robot se obtiene al sustituir el término  $\tau_{Lk}$  del motor por el respectivo  $\tau_k$  del robot, esto es

$$D_{mk}\ddot{\theta}_{rxk} + R_{mk}\dot{\theta}_{rxk} = \tau_{emxk} - \tau_k \quad (2.93)$$

y el par  $\tau_k$  se obtiene desarrollando la ecuación (2.30) para cada unión del robot,

$$\tau_k = m_{k1}\ddot{\theta}_{r1} + m_{k2}\ddot{\theta}_{r2} + \dots + m_{kn}\ddot{\theta}_{rn} + c_{k1}\dot{\theta}_{r1} + c_{k2}\dot{\theta}_{r2} + \dots + c_{kn}\dot{\theta}_{rn} + g_k, \quad (2.94)$$

donde  $m_{k.}$ ,  $c_{k.}$  y  $g_k$  son elementos de  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $g(q)$ , respectivamente y donde por simplicidad se han despreciado los términos disipativos y las perturbaciones externas.

Con la finalidad de obtener una representación vectorial de las ecuaciones anteriores se definen

$$\Omega_{rx} = [\omega_{rx1} \ \omega_{rx2} \ \dots \ \omega_{rxn}]^T, \quad (2.95)$$

$$\Theta_{rx} = [\theta_{rx1} \ \theta_{rx2} \ \dots \ \theta_{rxn}]^T, \quad (2.96)$$

$$D_m = \text{diag} [D_{m1} \ D_{m2} \ \dots \ D_{mn}], \quad (2.97)$$

$$R_m = \text{diag} [R_{m1} \ R_{m2} \ \dots \ R_{mn}], \quad (2.98)$$

$$\tau_{emx} = [\tau_{emx1} \ \tau_{emx2} \ \dots \ \tau_{emxn}]^T, \quad (2.99)$$

Combinando las ecuaciones de los subsistemas mecánicos Robot-MI

$$D_m\dot{\Omega}_{rx} + R_m\dot{\Theta}_{rx} = \tau_{emx} - [M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)], \quad (2.100)$$

haciendo  $D(\Theta_{rx}) = D_m + M(\Theta_{rx})$  y  $q = \Theta_{rx}$ , la ecuación del subsistema mecánico Robot-MI combinado es

$$D(\Theta_{rx})\dot{\Omega}_{rx} + [C(\Theta_{rx}, \Omega_{rx}) + R_m]\dot{\Theta}_{rx} + g(\Theta_{rx}) = \tau_{emx}. \quad (2.101)$$

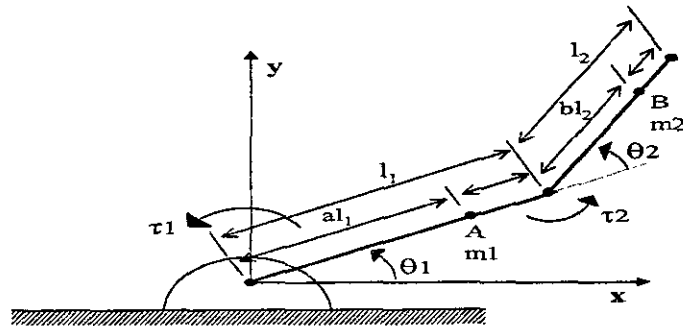
Para el subsistema eléctrico no hay cambios relevantes y se manejan las mismas ecuaciones dinámicas pero considerando las igualdades  $\theta_{rxk} = q_k$ ,  $\omega_{rk} = \dot{q}_k$ ,  $\dot{\omega}_{rk} = \ddot{q}_k$  en las ecuaciones correspondientes.



*Ejemplo: Robot rígido de dos grados de libertad accionado por motores de inducción*

Para mostrar los diferentes esquemas de control resultantes durante el desarrollo del trabajo de investigación se utilizó un robot planar de 2 grados de libertad con sus dos uniones accionadas directamente por motores de inducción y con movimiento solamente en el plano horizontal. Así, los efectos de la gravedad no se consideran ( $g(q) = 0$ ) y para mayor simplicidad del modelo se consideran despreciables los términos que representan la fricción viscosa de las uniones del robot (aunque si se consideraran podrían acelerar la respuesta transitoria del sistema) y las perturbaciones externas.

Las longitudes de los lazos ó eslabones son  $l_1$  y  $l_2$ , sus momentos de inercia son  $I_1$  e  $I_2$ , la posición angular del lazo 1 con respecto del eje de horizontal es  $q_1$ , y la del eslabón 2 con respecto del eslabón 1 es  $q_2$ . Se supone que las masas  $m_1$  y  $m_2$  de los eslabones se encuentran concentradas en sus respectivos centros de gravedad  $l_{c1}$  y  $l_{c2}$ .



**Figura 2.3:** Robot rígido planar de dos grados de libertad.

Se considera la coenergía cinética total ( $\mathcal{T}^*$ ) debida a los movimientos traslacionales ( $\mathcal{T}_t^*$ ) y rotacionales ( $\mathcal{T}_r^*$ ) y se desprecia la energía potencial ( $\mathcal{V}$ ). Las coordenadas y velocidades (traslacionales) de los centros de gravedad de los eslabones son

$$x_1 = l_{c1} \cos q_1 \qquad y_1 = l_{c1} \sin q_1$$

$$x_2 = l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \quad y_2 = l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)$$

$$\dot{x}_1 = -l_{c1} \dot{q}_1 \sin q_1 \quad \dot{y}_1 = l_{c1} \dot{q}_1 \cos q_1$$

$$\dot{x}_2 = -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - l_{c2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2) \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_{c2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2)$$

de donde se obtienen

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \\ v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 l_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2, \end{aligned}$$

que se usan para determinar la coenergía cinética traslacional dada por

$$\mathcal{T}_t^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2.102)$$

y ya que la coenergía cinética debida al movimiento rotacional (usando como referencia la coordenada  $x$ ) es

$$\mathcal{T}_r^* = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \quad (2.103)$$

se obtiene la coenergía cinética total

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^* &= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 l_{c2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2] \\ &+ \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones dinámicas del robot se obtienen evaluando la ecuación de *Euler-Lagrange* para cada coordenada generalizada ( $q_1$  y  $q_2$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= \tau_2, \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{L} = \mathcal{T}^*$  y se han despreciado la energía potencial, los términos disipativos y las perturbaciones externas. Evaluando, se encuentran los pares de entrada para las uniones del robot

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 + [m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2] \ddot{q}_2 \\ &- m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_2, \end{aligned}$$

$$\tau_2 = [m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2.$$

En la forma matricial vectorial el sistema robótico considerado es representado por la matriz de inercias  $M(q)$  y la matriz de términos centrífugos y de Coriolis  $C(q, \dot{q})$ , y considerando las ecuaciones anteriores se encuentra que

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2 & m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 \\ m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}, \quad (2.104)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.105)$$

de manera que el modelo matemático resultante es

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix}^T. \quad (2.106)$$

Además, es de mucha utilidad aprovechar la propiedad **P 2.2.3** de parametrización lineal del sistema robótico. En este caso el modelo se representa por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})p = \tau, \quad (2.107)$$

donde, si la ecuación del vector de parámetros  $p$  es

$$p^T = [p_1 \ p_2 \ p_3] = [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \quad m_2 l_{c2}^2 + I_2 \quad m_2 l_1 l_{c2}] \quad (2.108)$$

entonces el regresor  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$  es

$$Y(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & \cos(q_2)(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - \sin(q_2)[\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] \\ 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & \cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

Sustituyendo las matrices  $M$  y  $C$  en la ecuación que combina la parte mecánica de los MI y el robot, se obtiene

$$[D_m + M(\Theta_{rx})]\dot{\Omega}_{rx} + [C(\Theta_{rx}, \Omega_{rx}) + R_m]\dot{\Theta}_{rx} = \tau_{emx}, \quad (2.110)$$

El modelo no lineal resultante (MI+Robot) presenta propiedades útiles en el análisis :

**P 2.2.6** El MI establece un mapa pasivo [Espinosa93] si se consideran como entradas los voltajes y el par de la carga, y como salidas las corrientes en los devanados y la velocidad angular; esto es, si  $v = [u_{1x} \ u_{2x} \ -\tau_L]^T$  es el vector de entradas y  $y = [\dot{q}_{s1x} \ \dot{q}_{s2x} \ \dot{\theta}_{rx}]^T$  es el vector de salidas, entonces el mapa  $\mathcal{M} : v \mapsto y$  es pasivo. Además, el modelo del MI puede ser visto como la interconexión de un subsistema eléctrico pasivo dado por

$$\Sigma_e : \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ -\theta_{rk} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \dot{q}_{s1k} \\ \dot{q}_{s2k} \\ -\tau_{emk} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

y un subsistema mecánico pasivo

$$\Sigma_m : (-\tau_{emk} + \tau_{Lk}) \mapsto -\dot{\theta}_{rk} = \frac{1}{D_{mk}p + R_{mk}}(-\tau_{emk} + \tau_{Lk}), \quad p = \frac{d}{dt}. \quad (2.112)$$

que incluye la parte mecánica de los MI y donde la carga mecánica acoplada a la flecha de cada motor se representa por medio del par de carga  $\tau_{Lk}$ .

**P 2.2.7** El vector dado por

$$W(\dot{q}_e, \omega_r, \theta_r) = \begin{bmatrix} W_1 \dot{\theta}_r \dot{q}_e \\ \frac{1}{2} \dot{q}_e^T W_1 \dot{q}_e \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

contiene a las fuerzas que no producen trabajo en el subsistema eléctrico del MI [Espinosa93]. Además, el vector  $W(\dot{q}_e, \omega_r, \theta_r)$  siempre puede ser escrito como

$$W(\dot{q}_e, \omega_r, \theta_r) = C_e(q_e, \omega_r, \theta_r) \dot{q}_e \quad (2.114)$$

tal que se cumple la propiedad de antisimetría

$$\dot{q}_e^T C_e(q_e, \omega_r, \theta_r) \dot{q}_e = 0 \quad \forall q_e \in \mathbb{R}^n. \quad (2.115)$$

**P 2.2.8** La matriz resultante de inercias generalizadas  $[D_m + M(\Theta_{rx})]$  es simétrica, positiva definida,  $[D_m + M(\Theta_{rx})]$  y  $[D_m + M(\Theta_{rx})]^{-1}$  son uniformemente acotadas como una función de  $q \in \mathbb{R}^n$ .

**P 2.2.9** El sistema mecánico combinado (MI + robot) cumple con la propiedad de linealidad en los parámetros y puede ser factorizado como

$$[D_m + M(\Theta_{rx})] \dot{\Omega}_{rx} + [C(\Theta_{rx}, \Omega_{rx}) + R_m] \dot{\Theta}_{rx} + g(\Theta_{rx}) = \tau_{emx} = Y(\Theta_{rx}, \dot{\Theta}_{rx}, \ddot{\Theta}_{rx}) p, \quad (2.116)$$

donde el vector de fuerzas gravitacionales  $g(\Theta_{rx})$  se introduce para generalizar, aunque en este trabajo se ha considerado despreciable.

Las dos últimas propiedades son una extensión directa de las respectivas propiedades de los robots, ya que las matrices  $D_m$  y  $R_m$  son matrices diagonales de términos constantes positivos y por tanto no afectan la estructura y propiedades de las matrices  $M$  y  $C$  del robot.

Todas estas propiedades se aprovechan en el diseño de los diferentes controladores tratados en este trabajo.



# Capítulo 3

## Control robusto

Como se mencionó en el primer capítulo, existen diferentes métodos de control del MI y en este trabajo nos interesa desarrollar las técnicas de control no lineal debido a que son requeridas para alcanzar las condiciones de operación demandadas en las aplicaciones industriales modernas. En este capítulo se toma como base el método de control basado en pasividad [Espinosa, et al. 97, Ortega, et al. 96], en el cual se diseña una ley de control nominal que logra el seguimiento de una trayectoria de referencia dada por el par requerido por la carga mecánica acoplada y el flujo magnético deseado en el motor (siendo éste más útil en los casos en donde el MI debe funcionar a velocidades mayores que la nominal, es decir, en la región de debilitamiento de campo ó cuando se desea optimizar la operación del motor) y que asegura la estabilidad exponencial del sistema en lazo cerrado suponiendo conocimiento exacto del modelo del MI.

Partiendo del método de control basado en pasividad, aquí se plantea el diseño de un controlador no lineal robusto que utiliza el modelo completo del MI y retroalimentación de estado pero considera que no se conoce con precisión el modelo, es decir, se toma en cuenta la incertidumbre paramétrica de la resistencia eléctrica de los devanados del estator y del rotor del MI. Para compensar la incertidumbre paramétrica se utiliza la técnica de rediseño de Lyapunov para encontrar una señal de control adicional que es agregada a la ley de control nominal para garantizar la estabilidad práctica del sistema.

Se considera que la carga mecánica es un robot rígido cuyas uniones son accionadas directamente por motores de inducción y se supone que se conocen todos los parámetros del mismo, es decir, se tiene conocimiento exacto del modelo matemático del robot.

### 3.1 Planteamiento del problema

El modelo dinámico de los motores de inducción se obtiene de la formulación *Euler-Lagrange* descrita en el capítulo anterior. Se consideran motores de inducción trifásicos ( $3\phi$ ), de dos polos, representados por su equivalente bifásico ( $2\phi$ ), en el marco de referencia ( $\alpha\beta$ ) y cuyo modelo matemático utiliza la representación *EL* dada por las ecuaciones (2.63-2.64). El modelo matemático del  $k$ -ésimo motor es

$$D_{ek}(\theta_{rk})\ddot{q}_{ek} + W_{1k}(\theta_{rk})\dot{\theta}_{rk}\dot{q}_{ek} + R_{ek}\dot{q}_{ek} = M_e u_k \quad (3.1)$$

$$D_{mk}\ddot{\theta}_{rk} - \frac{1}{2}\dot{q}_{ek}^T W_{1k}(\theta_{rk})\dot{q}_{ek} + R_{mk}\dot{\theta}_{rk} = -\tau_{Lk} \quad (3.2)$$

donde  $k = 1, \dots, n$ ,  $n$  es el número de motores de inducción (igual al número de uniones del robot),  $\dot{q}_{ek} = [\dot{q}_{sk}^T \dot{q}_{rk}^T]^T = [\dot{q}_{s1k} \dot{q}_{s2k} \dot{q}_{r1k} \dot{q}_{r2k}]^T$  son las corrientes eléctricas de los devanados del estator y del rotor respectivamente,  $\theta_{rk}$  es la posición angular de la flecha del motor,  $\tau_{Lk}$  es el par de carga,  $u_k = [u_{1k} \ u_{2k}]^T$  es el vector de voltajes de entrada en los devanados del estator, y las variables y parámetros están definidos en las ecuaciones (2.65-2.73) del capítulo 2.

Para propósitos de diseño del controlador del  $k$ -ésimo motor se considera que las salidas son el par electromagnético generado

$$\tau_{emk} = \frac{1}{2}\dot{q}_{ek}^T W_{1k}(\theta_{rk})\dot{q}_{ek} = L_{srk}\dot{q}_{sk}^T \mathcal{J} e^{\mathcal{J}\theta_{rk}} \dot{q}_{rk} \quad (3.3)$$

y la norma Euclidiana (denotada como  $\| \cdot \|$ ) de los enlaces de flujo en el rotor  $\| \lambda_{rk} \| = (\lambda_{rk}^T \lambda_{rk})^{\frac{1}{2}}$ , donde

$$\lambda_{rk} = L_{srk} e^{-\mathcal{J}\theta_{rk}} \dot{q}_{sk} + L_{rk} \dot{q}_{rk}. \quad (3.4)$$

Ahora bien, los motores de inducción se acoplan directamente a las  $n$  uniones de un robot rígido giratorio (2.30) y el subsistema mecánico resultante de la combinación de la parte mecánica del MI y el robot está dado por la ecuación (2.101) desarrollada en el capítulo anterior y repetida aquí por conveniencia

$$[D_m + M(\Theta_{rx})]\dot{\Omega}_{rx} + [C(\Theta_{rx}, \Omega_{rx}) + R_m]\dot{\Theta}_{rx} + g(\Theta_{rx}) = \tau_{em}. \quad (3.5)$$

El problema de control es formulado como sigue: dado un robot rígido accionado directamente por motores de inducción y estando el sistema completo representado por (3.1) y (3.5), suponiendo que se puede medir todo el estado, conociendo los parámetros del modelo del robot y de los motores de inducción excepto las resistencias de los devanados ( $R_{sk}$  y  $R_{rk}$ ), diseñar un controlador robusto que logre el objetivo de seguimiento de una trayectoria deseada  $q^d(t) \in \mathbb{R}^n$ , con las señales de referencia  $q^d$ ,  $\dot{q}^d$ ,  $\ddot{q}^d$ ,  $q^{(3)d}$  acotadas y asegurando la estabilidad interna del sistema.

## 3.2 Diseño del controlador nominal

En el diseño del controlador nominal se considera que se conocen todos los parámetros del sistema y que se tiene acceso a todo el estado. Este método está basado en la propiedad de pasividad del sistema y se desarrolló en [Espinosa93] y aquí se usa considerando que la carga es un robot rígido y para lograr el objetivo de trayectoria se utiliza el método de control del error combinado de [SlotineLi86] desarrollado en el apéndice B y al cual nos referiremos cuando sea necesario. Las señales de referencia son un par deseado  $\tau^d$  que es una función diferenciable acotada y que se determina a partir de la trayectoria deseada y un flujo deseado en el rotor  $\lambda_r^d$  que es una función suave, acotada y diferenciable dos veces.

Se define el vector de pares deseados (que se diseñarán posteriormente) para los motores de inducción como

$$\tau^d = \left[ \tau_1^d \quad \tau_2^d \quad \dots \quad \tau_n^d \right]^T, \quad (3.6)$$

y el vector de flujos deseados (de referencia) para el  $k$ -ésimo motor es

$$\lambda_{rk}^d = \left[ \lambda_{r1k}^d \quad \lambda_{r2k}^d \right]^T = \left[ \beta_{pk} \cos(\rho_k^d) \quad \beta_{pk} \sin(\rho_k^d) \right]^T, \quad (3.7)$$

donde  $\beta_{pk}$  es la amplitud máxima del flujo,  $\rho_k^d = \arctan\left(\frac{\lambda_{r2k}^d}{\lambda_{r1k}^d}\right)$  es la posición del flujo deseado en el rotor. Considerando que el modelo del MI está expresado en el sistema de referencia ortogonal  $\alpha\beta$ , se usa este flujo de referencia para lograr una operación balanceada de los MI. Derivando  $\rho_k^d$  se obtiene la velocidad (deseada) del flujo deseado

$$\dot{\rho}_k^d = -\frac{1}{\|\lambda_{rk}^d\|^2} \lambda_{rk}^T \mathcal{J} \dot{\lambda}_{rk} = \frac{R_r}{\|\lambda_{rk}^d\|^2} \lambda_{rk}^T \mathcal{J} \dot{q}_r^d = \frac{R_r}{\beta_{pk}} \tau^d \quad (3.8)$$

El flujo deseado en el rotor se puede expresar en términos del par deseado [Espinosa, et al. 97] derivando  $\lambda_{rk}^d$  y sustituyendo el valor de  $\dot{\rho}_k^d$

$$\dot{\lambda}_{rk}^d = \beta_{pk} \begin{bmatrix} -\sin \rho^d \dot{\rho}^d \\ \cos \rho^d \dot{\rho}^d \end{bmatrix} = \frac{R_{rk} \tau_k^d}{\beta_{pk}} \mathcal{J} \lambda_{rk}^d; \text{ con } \lambda_{rk}^d(0) = \begin{bmatrix} \beta_{pk} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Ahora bien, con las funciones deseadas  $\tau_k^d$  y  $\lambda_{rk}^d$  se obtiene una clase de señales internas de referencia en forma de corrientes deseadas en los devanados del rotor y del estator,  $\dot{q}_{rk}^d$  y  $\dot{q}_{sk}^d$ , respectivamente, para el  $k$ -ésimo motor; de la ecuación de voltajes en el circuito del rotor  $0 = R_r \dot{q}_r^d + \dot{\lambda}_{rk}^d$  se despeja  $\dot{q}_{rk}^d$  y al sustituir el valor de  $\dot{\lambda}_{rk}^d$  se obtiene

$$\dot{q}_{rk}^d = -\frac{\tau_k^d}{\beta_{pk}^2} \mathcal{J} \lambda_{rk}^d, \quad (3.10)$$



para obtener  $\dot{q}_{sk}^d$  se despeja de la ecuación (3.4) y se sustituyen los valores deseados  $\dot{q}_{rk}^d$  y  $\lambda_{rk}^d$  y así se obtiene

$$\dot{q}_{sk}^d = \left( \frac{1}{L_{srk}} \mathcal{I}_2 + \frac{L_{rk} \tau_k^d}{L_{srk} \beta_{pk}^2} \mathcal{J} \right) e^{\mathcal{J} q_k} \lambda_{rk}^d. \quad (3.11)$$

En [Espinosa, et al. 97] se prueba que el problema de control de seguimiento de par y de regulación de flujo se puede expresar como un problema de seguimiento de corrientes deseadas. Sea  $\dot{q}_{ek}^d := [\dot{q}_{sk}^{dT} \dot{q}_{rk}^{dT}]^T$  el vector de corrientes de referencia y  $e_k = \dot{q}_{ek} - \dot{q}_{ek}^d$  el vector de errores de seguimiento de corrientes, se debe diseñar un controlador que asegure que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_k = 0$ , lo que implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{emk} = \tau_k^d$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\lambda_{rk}\| = \beta_{pk}$ .

Para propósitos de análisis de estabilidad las ecuaciones del sistema completo se deben expresar en formas adecuadas. Así, la ecuación (3.1) se puede escribir como

$$D_{ek}(q_k) \ddot{q}_{ek} + C_{ek}(q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_{ek} + \bar{R}_{ek} \dot{q}_{ek} = M_e u_k \quad (3.12)$$

donde

$$C_{ek}(q_k, \dot{q}_k) = \begin{bmatrix} 0 & L_{srk} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_k \quad (3.13)$$

$$\bar{R}_{ek} = \begin{bmatrix} R_{sk} \mathcal{I}_2 & 0 \mathcal{I}_2 \\ -L_{srk} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_k} \dot{q}_k & R_{rk} \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

y la forma de la matriz  $C_{ek}$  se escoge de manera que se cumpla la propiedad de antisimetría  $e_k^T [\dot{D}_{ek} - 2C_{ek}] e_k = 0$ .

La ecuación (3.1) representa el comportamiento dinámico real del motor, y el comportamiento deseado debe cumplir con la misma ecuación pero usando los valores deseados de corrientes y voltajes, es decir

$$D_{ek}(q_k) \ddot{q}_{ek}^d + C_{ek}(q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_{ek}^d + \bar{R}_{ek} \dot{q}_{ek}^d = M_e u_k^d \quad (3.15)$$

A partir de las ecuaciones (3.12) y (3.15) y de la definición del error de seguimiento de corrientes se puede encontrar la ecuación dinámica de este error

$$\begin{aligned} D_{ek}(q_k) \dot{e}_k + C_{ek}(q_k, \dot{q}_k) e_k + \bar{R}_{ek} e_k &= M_e u_k - (D_{ek}(q_k) \ddot{q}_{ek}^d + C_{ek}(q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_{ek}^d + \bar{R}_{ek} \dot{q}_{ek}^d) \\ &= M_e u_k - M_e u_{dk} \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $M_e u_{dk}$  es el vector de señales de entrada (voltajes) deseados que producirán la respuesta dinámica deseada en el los MI. Desarrollando (3.15) se obtiene

$$u_{dk} = L_{sk} \ddot{q}_{sk}^d + L_{srk} e^{\mathcal{J} q_k} \ddot{q}_{rk}^d + R_{sk} \mathcal{I}_2 \dot{q}_{sk}^d + L_{srk} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_k} \dot{q}_k \dot{q}_{rk}^d \quad (3.17)$$

donde  $\ddot{q}_{sk}^d$  y  $\ddot{q}_{rk}^d$  se obtienen derivando las ecuaciones (3.11) y (3.10) respectivamente. Nótese que en estas expresiones se necesita conocer la derivada del par deseado, misma que se obtendrá más adelante.

En el análisis de estabilidad se deben considerar las ecuaciones de los errores de seguimiento. En el apéndice B se obtuvo la ecuación dinámica del error combinado de seguimiento (B.4) y la del error de seguimiento de corrientes está dada por (3.16). En este punto es conveniente considerar que el vector de pares electromagnéticos  $\tau_{em}$  de los motores en realidad es el vector de pares deseados  $\tau^d$  de entrada al sistema mecánico combinado para lograr el objetivo de seguimiento de trayectoria.

Si se considera la función de Lyapunov candidata

$$V(s, e_k) = \frac{1}{2} s^T D s + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [e_k^T D_{ek} e_k], \quad (3.18)$$

y se desarrolla su derivada a lo largo de las trayectorias (B.4) y (3.16) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(s, e_k) = & s^T [\tau^d - Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) p_c] + s^T [\dot{D} - 2C] s - s^T R_m s \\ & + \sum_{k=1}^n \{ e_k^T [-C_{ek} e_k - \bar{R}_{ek} e_k + M_e u_k - M_e u_{dk}] + \frac{1}{2} e_k^T \dot{D}_{ek} e_k \}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Usando las propiedades de las matrices involucradas se obtiene  $s^T [\dot{D} - 2C] s = 0$  y  $e_k^T [\dot{D}_{ek} - 2C_{ek}] e_k = 0$ ;  $R_m$  es una matriz diagonal definida positiva por lo que el término  $-s^T R_m s$  siempre es negativo (debido a esto, suele decirse que por simplicidad,  $R_m = 0$  y así se considera aquí); por otro lado si se eligen  $\tau^d = -\Gamma_s s + Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) p_c$  y  $M_e u_k - M_e u_{dk} = -\Gamma_{ek} e_k$  se obtiene

$$\dot{V}(s, e_k) = -s^T \Gamma_s s - \sum_{k=1}^n [e_k^T (\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}) e_k]. \quad (3.20)$$

Desarrollando  $(\bar{R}_{ek})$  en sus partes simétrica y anti-simétrica,  $(\bar{R}_{ek}) = \frac{1}{2}[(\bar{R}_{ek})^T + (\bar{R}_{ek})] + \frac{1}{2}[(\bar{R}_{ek})^T - (\bar{R}_{ek})]$ ,  $\dot{V}(s, e_k)$  será negativa definida, y en este caso los errores de seguimiento tienden a cero exponencialmente, si la parte simétrica  $\frac{1}{2}[(\bar{R}_{ek})^T + (\bar{R}_{ek})] + \Gamma_{ek}$  es positiva definida, lo cual se logra si

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(\bar{R}_{ek})^T + (\bar{R}_{ek})] + \Gamma_{ek} - \delta \mathcal{I}_4 \geq 0 \\ & \left[ \begin{array}{cc} R_{sk} \mathcal{I}_2 + \Gamma_{sk} \mathcal{I}_2 & \frac{1}{2} L_{srk} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_k} \dot{q}_k \\ -\frac{1}{2} L_{srk} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_k} \dot{q}_k & R_{rk} \mathcal{I}_2 \end{array} \right] - \delta \mathcal{I}_4 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde

$$\Gamma_{ek} = \begin{bmatrix} \Gamma_{sek} \mathcal{I}_2 & 0 \mathcal{I}_2 \\ 0 \mathcal{I}_2 & 0 \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Este requisito se cumple [EspinosaOrtega94] para algún  $0 < \delta \leq \min\{R_{sk}, R_{rk}\}$  si

$$\Gamma_{sek} = \frac{L_{srk}^2 \dot{q}_k^2}{4\epsilon_r} + \gamma_1, \quad 0 < \epsilon_r < R_{rk}, \quad \gamma_1 \geq 0. \quad (3.23)$$

En conclusión, el objetivo de control de seguimiento de trayectoria y de corrientes deseadas (y por tanto de seguimiento de par y regulación de flujo) se logra si el par deseado se obtiene como  $\tau^d = -\Gamma_s s + Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) p_c$ , el vector de señales de voltaje de entrada es  $M_e u_k = M_e u_{dk} - \Gamma_{ek} e_k$  con  $M_e u_{dk}$  dado en la ecuación (3.15).

Para poder implementar la ley de control obtenida se necesitan las expresiones de la derivada del vector de pares deseados y del vector de aceleraciones. La derivada del par deseado  $\dot{\tau}^d$  es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tau^d &= \frac{d}{dt} [-\Gamma_s s + Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) p_c] \\ \dot{\tau}^d &= -[\Gamma_s \dot{s} + \dot{Y}_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r, q_r^{(3)}) p_c] \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde las funciones  $\dot{s}$  y  $\dot{Y}_c$  dependen del vector de aceleraciones  $\ddot{q}$ , que se despeja de la ecuación del sistema mecánico y está dada por

$$\ddot{q} = D(q)^{-1} [-(C(q, \dot{q}) + R_m) \dot{q} - g(q) + \tau_{em}], \quad (3.25)$$

que se sustituye en la ecuación de  $\dot{\tau}^d$  y de esta manera se evita la medición de la aceleración.

### 3.3 Diseño del controlador robusto

El diseño del controlador robusto es la principal aportación de este capítulo. En este caso se hacen las siguientes consideraciones: se conocen los parámetros del robot, las resistencias de los devanados ( $R_{sk}$  y  $R_{rk}$ ) de los motores no se conocen con precisión y todo el estado está disponible para medición. Además, para desarrollar el método de control robusto es conveniente factorizar la ecuación (3.15) en un término independiente de los parámetros con incertidumbres y en otro término que sí depende de éstas. Haciendo lo anterior, resulta

$$\begin{bmatrix} u_{dk} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{sk} \ddot{q}_{sk}^d + L_{srk} e^{\mathcal{J} q_k} \ddot{q}_{rk}^d + R_{sk} \mathcal{I}_2 \dot{q}_{sk}^d + L_{srk} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_k} \dot{q}_k \dot{q}_{rk}^d \\ \dot{\lambda}_{rk}^d + R_{rk} \mathcal{I}_2 \dot{q}_{rk}^d \end{bmatrix} = g_{dk} + B_{dk} \Phi_k \quad (3.26)$$

donde  $g_{dk}$  es un vector cuyos elementos son independientes de los parámetros con incertidumbres (que en este caso son las resistencias de los devanados del estator  $R_{sk}$  y del rotor  $R_{rk}$ ) definido como

$$g_{dk} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\sigma_k L_{rk} \dot{\lambda}_{dk}}{L_{srk} \beta_{pk}^2} \mathcal{I} + \frac{L_s}{L_{sr}} \left( \frac{L_r \tau^d}{\beta_{pk}^2} \mathcal{J} + \mathcal{I}_2 \right) \dot{q}_k \right) \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_k} \lambda_{rk}^d \\ \dot{\lambda}_{rk}^d \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$\Phi_k = [R_{sk} R_{sk} R_{rk} R_{rk}]^T$  es el vector de parámetros y  $B_{dk}$  es una clase de regresor

resultante de la factorización y está dado por

$$B_{dk} = \begin{bmatrix} b_{11k} & 0 & b_{13k} & 0 \\ 0 & b_{22k} & 0 & b_{24k} \\ 0 & 0 & b_{33k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44k} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

donde

$$\begin{aligned} b_{11k} &= \left[ -\frac{L_{rk}\tau_k^d}{L_{srk}\beta_{pk}^2} \sin(q_k) + \frac{1}{L_{srk}} \cos(q_k) \right] \lambda_{r1k}^d + \left[ -\frac{L_{rk}\tau_k^d}{L_{srk}\beta_{pk}^2} \cos(q_k) - \frac{1}{L_{srk}} \sin(q_k) \right] \lambda_{r2k}^d, \\ b_{22k} &= \left[ +\frac{L_{rk}\tau_k^d}{L_{srk}\beta_{pk}^2} \cos(q_k) + \frac{1}{L_{srk}} \sin(q_k) \right] \lambda_{r1k}^d + \left[ -\frac{L_{rk}\tau_k^d}{L_{srk}\beta_{pk}^2} \sin(q_k) + \frac{1}{L_{srk}} \cos(q_k) \right] \lambda_{r2k}^d, \\ b_{13k} &= \left[ -\frac{L_{sk}\tau_k^d}{L_{srk}\beta_{pk}^2} \sin(q_k) - \frac{\sigma_k L_{rk}\tau_k^d}{L_{srk}\beta_{pk}^2} \cos(q_k) \right] \lambda_{r1k}^d + \left[ -\frac{L_{sk}}{L_{srk}} \cos(q_k) + \frac{\sigma_k L_{rk}\tau_k^d}{L_{srk}\beta_{pk}^2} \sin(q_k) \right] \lambda_{r2k}^d, \\ b_{24k} &= \left[ -\frac{\sigma_k L_{rk}\tau_k^d}{L_{srk}\beta_{pk}^2} \sin(q_k) + \frac{L_{sk}}{L_{srk}} \cos(q_k) \right] \lambda_{r1k}^d + \left[ -\frac{\sigma_k L_{rk}\tau_k^d}{L_{srk}\beta_{pk}^2} \cos(q_k) - \frac{L_{sk}}{L_{srk}} \sin(q_k) \right] \lambda_{r2k}^d, \\ b_{33k} &= \frac{\tau_k^d}{\beta_{pk}^2} \lambda_{r2k}^d, \\ b_{44k} &= -\frac{\tau_k^d}{\beta_{pk}^2} \lambda_{r1k}^d. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por otro lado, el análisis correspondiente al subsistema mecánico (el robot y la parte mecánica de los motores de inducción) es idéntico al planteado en la sección anterior, por lo que usaremos nuevamente las ecuaciones (B.4), (3.24) y (3.25).

Antes de considerar la incertidumbre paramétrica y suponiendo que se conocen los valores nominales de las resistencias de los devanados y que se denotan como  $R_{sk}^0$  y  $R_{rk}^0$ , el modelo nominal del subsistema eléctrico y el correspondiente controlador nominal (desarrollado en la sección anterior) del  $k$ -ésimo motor se expresan como

$$D_{ek}(q)\ddot{q}_{ek} + C_{ek}(q, \dot{q})\dot{q}_{ek} + \bar{R}_{ek}^0 \dot{q}_{ek} = M_e u_{dk}^0 - \Gamma_{ek} e_k, \quad (3.30)$$

donde

$$\bar{R}_{ek}^0 = \begin{bmatrix} R_{sk}^0 \mathcal{I}_2 & 0_2 \\ -L_{srk} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_k} \dot{q}_k & R_{rk}^0 \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} M_e u_{dk}^0 = \begin{bmatrix} u_{dk}^0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{sk} \ddot{q}_{sk}^d + L_{srk} e^{\mathcal{J} q_k} \ddot{q}_{rk}^d + R_{sk}^0 \mathcal{I}_2 \dot{q}_{sk}^d + L_{srk} \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_k} \dot{q}_k \dot{q}_{rk}^d \\ \lambda_{rk}^d + R_{rk}^0 \mathcal{I}_2 \dot{q}_{rk}^d \end{bmatrix} \\ &= g_{dk}^0 + B_{dk}^0 \Phi_k^0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde

$$g_k^0 = g_{dk}, \quad (3.33)$$

$$B_k^0 = B_{dk}, \quad (3.34)$$

y  $\Phi_k^0 = [R_{sk}^0 \ R_{sk}^0 \ R_{rk}^0 \ R_{rk}^0]^T$  es el vector de parámetros (resistencias de los devanados) nominales.

Ahora, tomando como base el caso nominal, el diseño del controlador robusto para el caso real (con incertidumbre paramétrica en  $R_{sk}$  y  $R_{rk}$ ) está basado en la técnica de rediseño de Lyapunov [Khalil91] y debe contener una señal de control adicional  $\mathcal{X}_{\Phi_k} = B_{dk}^0 w_k$  para compensar los efectos de la incertidumbre dada por

$$\tilde{\Phi}_k \triangleq \Phi_k^0 - \Phi_k = [(R_{sk}^0 - R_{sk}) \ (R_{sk}^0 - R_{sk}) \ (R_{rk}^0 - R_{rk}) \ (R_{rk}^0 - R_{rk})]^T \quad (3.35)$$

donde  $\tilde{\Phi}_k$  es el vector de error en los parámetros, mismo que se considera acotado y su norma satisface  $\|\tilde{\Phi}_k\| \leq \rho_k$ , y con  $\rho_k \in R_+$  una cota conocida de la incertidumbre paramétrica. La resistencia de los devanados cambia durante la operación del motor debido al aumento de la temperatura y es común considerar que puede variar hasta en un 100 % por encima de su valor nominal.

Así, para el  $k$ -ésimo motor se propone la ley de control robusto  $M_e u_k = M_e u_{dk}^0 - \Gamma_{ek} e_k + B_{dk}^0 w_k$ , que al desarrollarla queda como

$$\begin{bmatrix} w_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{dk}^0 - \Gamma_{sk} e_{sk} \\ \lambda_{rk}^d + R_{rk}^0 \dot{q}_{rk} \end{bmatrix} + B_{dk}^0 w_k \quad (3.36)$$

donde  $w_k = [w_{1k} \ w_{2k} \ w_{3k} \ w_{4k}]^T$  es la señal de control adicional que se va a diseñar.

Ahora, se determina la ecuación dinámica del error de seguimiento de corrientes para el  $k$ -ésimo motor de la siguiente manera

$$M_e u_k = M_e u_{dk}^0 - \Gamma_{ek} e_k + B_{dk}^0 w_k = g_{dk}^0 + B_{dk}^0 \Phi_k^0 - \Gamma_{ek} e_k + B_{dk}^0 w_k, \quad (3.37)$$

si se agrega  $\pm B_{dk}^0 \tilde{\Phi}_k$  al lado derecho de la ecuación y se agrupan términos

$$M_e u_k = (g_{dk}^0 + B_{dk}^0 \tilde{\Phi}_k) + (B_{dk}^0 \Phi_k^0 - B_{dk}^0 \Phi_k) - \Gamma_{ek} e_k + B_{dk}^0 w_k, \quad (3.38)$$

pasando el primer término entre paréntesis a la izquierda y usando la definición del error en los parámetros en el segundo término de la derecha, resulta la ecuación del error de seguimiento de corrientes

$$D_{ek}(q) \dot{e}_k + C_{ek}(q, \dot{q}) e_k + \bar{R}_{ek} e_k = B_{dk}^0 (\tilde{\Phi}_k + w_k) - \Gamma_{ek} e_k. \quad (3.39)$$

Para el análisis de estabilidad se elige la función de Lyapunov candidata

$$V(s, e_k) = \frac{1}{2} s^T D s + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [e_k^T D_{ek}(q) e_k] \quad (3.40)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias (B.4) y (3.39) es

$$\dot{V}(s, e_k) = s^T[\tau^d - Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)p_c] + s^T[\dot{D} - 2C]s + \sum_{k=1}^n \{e_k^T [B_{dk}^0(\tilde{\Phi}_k + w_k)] - e_k^T [\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}]e_k\}. \quad (3.41)$$

Al considerar las propiedades de las matrices se observa que  $s^T[\dot{D} - 2C]s = 0$ ,  $e_k^T[\dot{D}_{ek} - 2C_{ek}]e_k = 0$  y el par deseado se obtiene a partir del subsistema mecánico y se elige como  $\tau^d = -\Gamma_s s + Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)p_c$ . Sustituyendo en la derivada de la función (3.41) se tiene

$$\dot{V}(s, e_k) = -s^T \Gamma_s s + \sum_{k=1}^n [e_k^T B_{dk}^0(\tilde{\Phi}_k + w_k)] - \sum_{k=1}^n [e_k^T (\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek})e_k]. \quad (3.42)$$

En esta ecuación se observa que los términos primero y tercero del lado derecho son negativos definidos. Del análisis del segundo término se observa que la señal adicional  $w_k$  se debe elegir de manera que el término se haga negativo definido o en su defecto que esté acotado. Se propone que la señal  $w_k$  sea

$$w_k = -\frac{B_{dk}^{0T} e_k}{\rho_k \|e_k^T B_{dk}^0\| + \epsilon_k} \rho_k^2 \quad (3.43)$$

y analizando el segundo término  $\sum_{k=1}^n [e_k^T B_{dk}^0 \tilde{\Phi}_k + e_k^T B_{dk}^0 w_k]$  con la señal propuesta, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{e_k^T B_{dk}^0(\tilde{\Phi}_k + w_k)\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ e_k^T B_{dk}^0 \left( \tilde{\Phi}_k - \frac{\rho_k^2 B_{dk}^{0T} e_k}{\rho_k \|e_k^T B_{dk}^0\| + \epsilon_k} \right) \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left\{ \|e_k^T B_{dk}^0\| \left[ \|\tilde{\Phi}_k\| - \frac{\rho_k^2 \|B_{dk}^{0T} e_k\|}{\rho_k \|e_k^T B_{dk}^0\| + \epsilon_k} \right] \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left\{ \|e_k^T B_{dk}^0\| \left[ \frac{\rho_k^2 \|e_k^T B_{dk}^0\| + \rho_k \epsilon_k - \rho_k^2 \|B_{dk}^{0T} e_k\|}{\rho_k \|e_k^T B_{dk}^0\| + \epsilon_k} \right] \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\rho_k \|e_k^T B_{dk}^0\| \epsilon_k}{\rho_k \|e_k^T B_{dk}^0\| + \epsilon_k} \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \epsilon_k \triangleq \epsilon \end{aligned} \quad (3.44)$$

de manera que

$$\dot{V}(s, e_k) \leq -s^T \Gamma_s s - \sum_{k=1}^n \{e_k^T (\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek})e_k\} + \epsilon$$

Para probar que todas las señales están acotadas y que el error de seguimiento es uniformemente acotado se utilizan las expresiones dadas de  $V$ ,  $\dot{V}$  y las propiedades de las matrices y sus normas, de la siguiente manera

$$\underline{\lambda}\{Q\} z^T z \leq z^T Q z \leq \bar{\lambda}\{Q\} z^T z, \quad z^T z = \|z\|^2, \quad (3.45)$$

donde  $\underline{\lambda}\{Q\}$  y  $\bar{\lambda}\{Q\}$  representan a los valores propios mínimo y máximo de  $\{Q\}$ , respectivamente,  $\{Q\}$  es una matriz real, simétrica y definida positiva y  $z$  es el vector formado por todos los errores del sistema.

Utilizando la propiedad anterior se tiene que

$$s^T \Gamma_s s \geq \underline{\lambda}\{\Gamma_s\} s^T s \geq \underline{\lambda}\{\Gamma_s\} \left[ \frac{s^T D s}{\bar{\lambda}\{D\}} \right], \quad (3.46)$$

$$e_k^T (\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}) e_k \geq \underline{\lambda}\{\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}\} e_k^T e_k \geq \underline{\lambda}\{\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}\} \left[ \frac{e_k^T \{\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}\} e_k}{\bar{\lambda}\{D_{ek}\}} \right], \quad k = 1, \dots, n \quad (3.47)$$

y combinando las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} s^T \Gamma_s s + e_k^T (\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}) e_k &\geq \underline{\lambda}\{\Gamma_s\} \left[ \frac{s^T D s}{\bar{\lambda}\{D\}} \right] + \underline{\lambda}\{\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}\} \left[ \frac{e_k^T \{\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}\} e_k}{\bar{\lambda}\{D_{ek}\}} \right] \\ &\geq \min \left( \frac{\underline{\lambda}\{\Gamma_s\}}{\bar{\lambda}\{D\}}, \frac{\underline{\lambda}\{\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}\}}{\bar{\lambda}\{D_{ek}\}} \right) V \\ &= \alpha V, \quad \text{con } \alpha = \min \left( \frac{\underline{\lambda}\{\Gamma_s\}}{\bar{\lambda}\{D\}}, \frac{\underline{\lambda}\{\bar{R}_{ek} + \Gamma_{ek}\}}{\bar{\lambda}\{D_{ek}\}} \right) \end{aligned}$$

También,  $V$  y  $\dot{V}$  se pueden expresar como

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} [s^T \ e_1^T \dots \ e_n^T] \text{diag}[D, \{\bar{R}_{e1} + \Gamma_{e1}\}, \dots, \{\bar{R}_{en} + \Gamma_{en}\}] [s^T \ e_1^T \dots \ e_n^T]^T \\ &= z^T \text{diag}[D, \{\bar{R}_{e1} + \Gamma_{e1}\}, \dots, \{\bar{R}_{en} + \Gamma_{en}\}] z, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \epsilon$$

y resolviendo para  $V$  se obtiene

$$V(t) \leq e^{-\alpha(t-t_0)} \left[ V(t_0) - \frac{\epsilon}{\alpha} \right] + \frac{\epsilon}{\alpha},$$

por lo que la norma del vector de errores  $z(t)$  es

$$\begin{aligned} \|z(t)\|^2 &\leq e^{-\alpha(t-t_0)} \left[ \frac{\bar{\lambda} \text{diag}\{D, (\bar{R}_{e1} + \Gamma_{e1}), \dots, (\bar{R}_{en} + \Gamma_{en})\}}{\underline{\lambda}\{\text{diag}[D, (\bar{R}_{e1} + \Gamma_{e1}), \dots, (\bar{R}_{en} + \Gamma_{en})]\}} \|z(t_0)\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\epsilon}{\alpha \underline{\lambda}\{\text{diag}[D, (\bar{R}_{e1} + \Gamma_{e1}), \dots, (\bar{R}_{en} + \Gamma_{en})]\}} \right] \\ &\quad + \frac{2\epsilon}{\alpha \underline{\lambda}\{\text{diag}[D, (\bar{R}_{e1} + \Gamma_{e1}), \dots, (\bar{R}_{en} + \Gamma_{en})]\}} \\ &\leq h + \frac{2\epsilon}{\alpha \underline{\lambda}\{\text{diag}[D, (\bar{R}_{e1} + \Gamma_{e1}), \dots, (\bar{R}_{en} + \Gamma_{en})]\}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

es decir, el error está contenido en la bola

$$B_{rk} = \left[ z \in R^n \mid \|z\|^2 \leq r_k = h_k + \frac{2\epsilon}{\alpha \lambda \{diag[D, (\bar{R}_{e1} + \Gamma_{e1}), \dots, (\bar{R}_{en} + \Gamma_{en})]\}} \right]. \quad (3.50)$$

Resumiendo, con los resultados anteriores se establece el siguiente teorema:

**Teorema 3.1** *Sea el sistema formado por un robot rígido accionado directamente por motores de inducción representado por las ecuaciones (3.1) y (3.5), entonces la ley de control robusto*

$$u_k = L_{sk} \ddot{q}_{sk}^d + L_{srk} e^{\mathcal{J}q_k} \ddot{q}_{rk}^d + (R_{sk}^0 \mathcal{I}_2 + w_{12k}) \dot{q}_{sk}^d + L_{srk} \mathcal{J} e^{\mathcal{J}q_k} \dot{q}_k \dot{q}_{rk}^d - \Gamma_{sk} e_{sk} \quad (3.51)$$

donde  $w_{12k} = diag[w_{1k} \ w_{2k}]$ , con los estados internos del controlador

$$\dot{\lambda}_{rk}^d + (R_{rk}^0 \mathcal{I}_2 + w_{34k}) \dot{q}_{rk}^d = 0, \quad (3.52)$$

$w_{34k} = diag[w_{3k} \ w_{4k}]$  y la señal adicional de control

$$w_k = - \frac{B_{dk}^{0T} e_k}{\rho_k \|e_k^T B_{dk}^0\| + \epsilon_k} \rho_k^2 \quad (3.53)$$

y  $B_{dk}^0$  y  $\Gamma_{ek}$  están dados por las ecuaciones (3.34) y (3.22) respectivamente, asegura la estabilidad práctica del sistema en presencia de incertidumbre y garantiza que el error de seguimiento es uniformemente acotado.

## 3.4 Simulaciones

El robot rígido de dos lazos que se mueve solamente en el plano horizontal y que es accionado por motores de inducción acoplados directamente en las uniones del robot descrito en el ejemplo del capítulo dos se utilizó en las simulaciones para ilustrar el desempeño del controlador propuesto. Los parámetros del robot, de los motores de inducción (cada uno de 2.2 KW) y las condiciones iniciales se eligieron iguales a las reportadas en [Hu, et al. 96] (ver también [PanteleyOrtega97]) y están dados en los apéndices.

Las señales de referencia para las posiciones de los lazos son  $q_{dk} = \sin[(1 - e^{-5t^3})t]$  y el vector de parámetros del robot está dado por

$$p_c^T = [p_1 \ p_2 \ p_3] = [3.31 \ 0.116 \ 0.16]. \quad (3.54)$$



Para los motores de inducción, la norma del flujo deseado en el rotor es  $\|\lambda_{rk}^d\| = \beta_{pk} = 2 Wb$  y los valores del par deseado  $\tau_k^d$  y su derivada  $\dot{\tau}_k^d$  se obtienen del sistema robótico. Los valores nominales de las resistencias de los devanados del estator y del rotor son  $R_{sk}^0 = 0.85 \Omega$  y  $R_{rk}^0 = 1.0 \Omega$  respectivamente. El valor del parámetro de diseño es  $\epsilon_k = 0.0001$  y los valores de las ganancias usadas

$$\gamma_{sk} = 1, \Gamma_{qk} = 100\mathcal{L}_2, \Gamma_{sk} = 50\mathcal{L}_2.$$

El resultado principal del esquema de control robusto se muestra en las figuras 3.1 y 3.2 donde se observa que los errores de seguimiento de las posiciones y velocidades tienden a cero. En las figuras 3.3 y 3.4 se muestra que los errores de seguimiento en las corrientes de los devanados del estator de los motores tienden a una vecindad del cero.

### 3.5 Conclusiones

Se ha diseñado un esquema de control robusto para un robot rígido accionado directamente por motores de inducción en sus uniones. Se considera que el modelo del robot es conocido con precisión y en los motores se ha considerando incertidumbre paramétrica en los devanados del estator y del rotor. Se utilizó la técnica de rediseño de Lyapunov para obtener una señal de retroalimentación que se agrega a la señal de control del caso nominal para garantizar la estabilidad interna y el acotamiento uniforme máximo de los errores de seguimiento en presencia de las incertidumbres. Los parámetros  $R_{sk}$  y  $R_{rk}$  de los motores no necesitan ser conocidos con exactitud *a priori* y solo es necesario conocer la cota de los términos con incertidumbre para determinar las señales de compensación.

El esquema de control resultante es simple, tiene un buen desempeño ante las incertidumbres de las resistencias de los devanados del motor, aunque tiene la desventaja de necesitar el estado completo del sistema y es sabido que las variables correspondientes al rotor no se pueden medir fácilmente y es más conveniente estimarlas por medio de un observador de estado.

Para propósitos de comparación se anexa la figura 3.5 que muestra los errores de seguimiento de posición y velocidad en la unión 1 del robot, suponiendo que se conocen con precisión los parámetros y se utiliza el controlador nominal[Espinosa93]. Es notorio que los errores convergen exponencialmente a cero y que tienen una respuesta transitoria mejor. En cambio, las gráficas correspondientes con la utilización del controlador robusto propuesto muestran un comportamiento transitorio con oscilaciones, aunque los valores máximos de los errores no difieren mucho. También se muestra que los errores no tienden a cero y que permanecen en una vecindad del cero, como se esperaba.

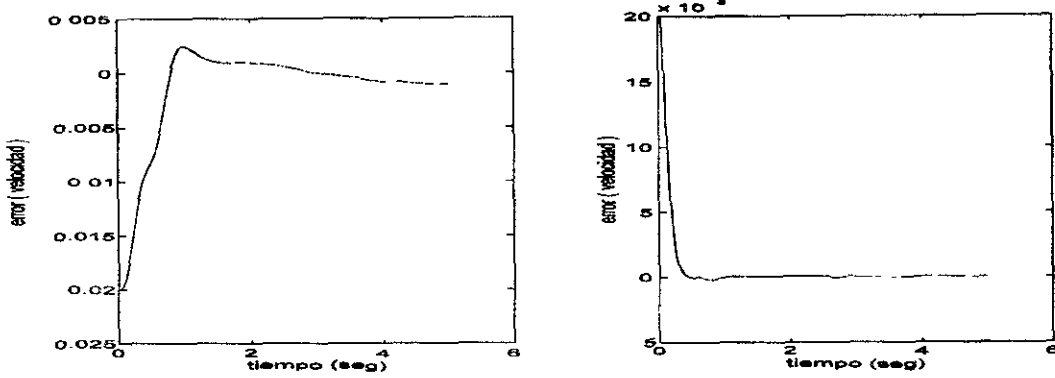


Figura 3.1: Error de seguimiento de posición  $\tilde{q}_k$  para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha).

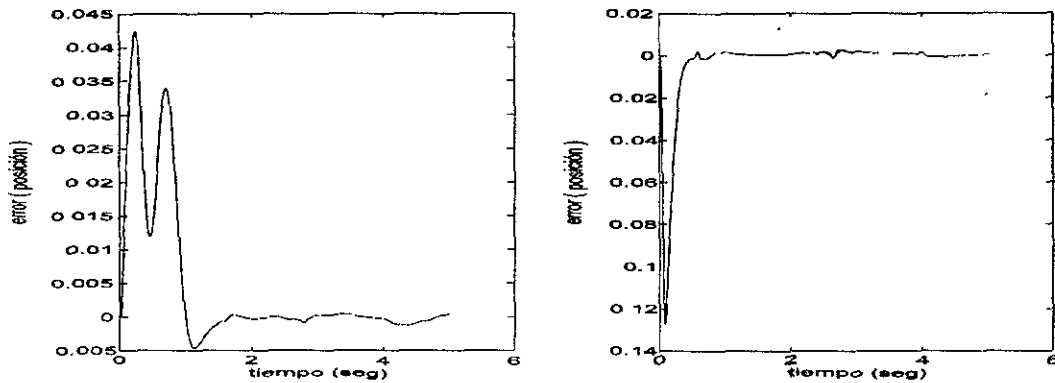


Figura 3.2: Error de seguimiento de velocidad  $\dot{\tilde{q}}_k$  para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha).

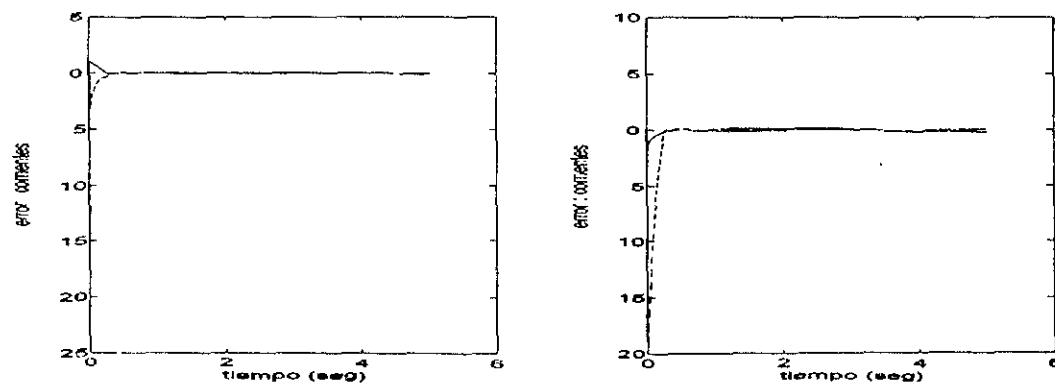


Figura 3.3: Errores de seguimiento de las corrientes para el motor 1: estator(izquierda) y rotor(derecha).

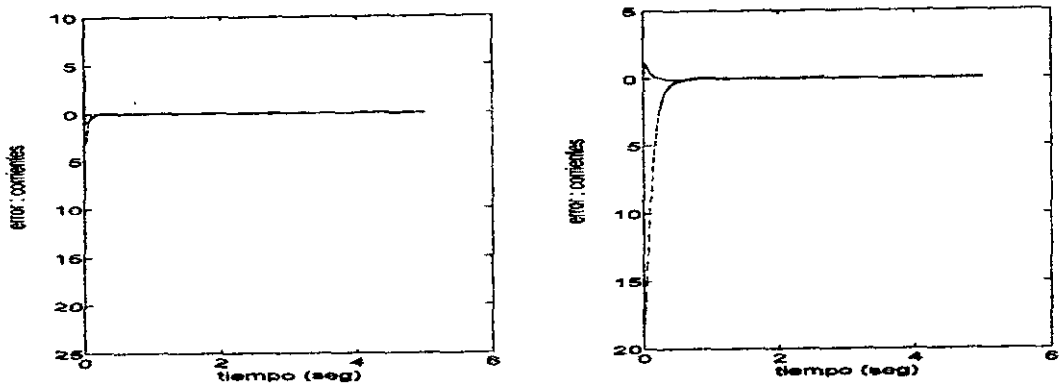


Figura 3.4: Errores de seguimiento de las corrientes para el motor 2: estator(izquierda) y rotor(derecha).

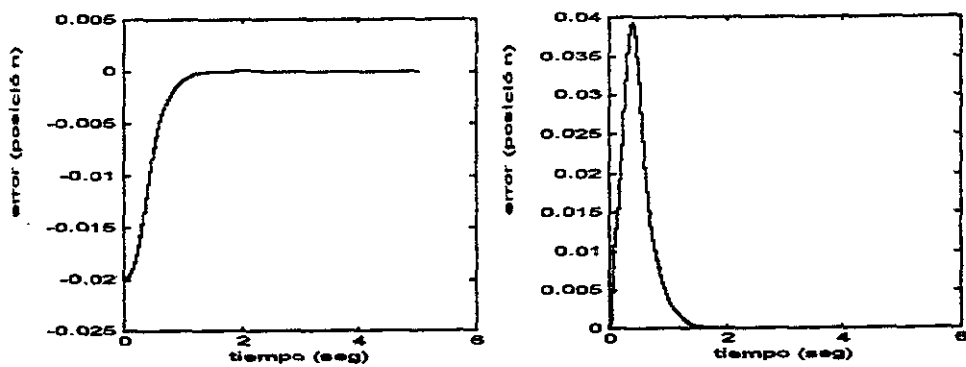


Figura 3.5: Errores de seguimiento de posición y velocidad de la unión 1: caso ideal; controlador nominal).

# Capítulo 4

## Control basado en observador

En este capítulo se considera el problema del control de un robot rígido accionado directamente por motores de inducción comandados por corriente (ver Apéndice A) para seguir una trayectoria deseada. Considerando el modelo reducido de cuarto orden del MI se propone un controlador de corriente que utiliza las mediciones de posición, velocidad y corrientes del estator. El flujo del rotor se estima por medio de un observador de lazo cerrado. Inicializando apropiadamente el observador, el controlador resultante no contiene singularidades y asegura un seguimiento global exponencial de la trayectoria deseada. Este hecho asegura cierto margen de robustez del sistema de control propuesto ante incertidumbres paramétricas provenientes del MI y del manipulador. Se presentan simulaciones de la operación del sistema resultante para ilustrar el desempeño del controlador diseñado.

### 4.1 Planteamiento del problema

Se considera un robot rígido accionado por motores de inducción acoplados directamente a las uniones del robot, se suponen conocidos los modelos del robot y de los motores y como no es posible medir todas las variables de estado se utiliza la retroalimentación de la salida. El método de control utiliza el modelo equivalente bifásico del MI con el marco de referencia fijo en el estator (el modelo *ab* obtenido en el capítulo 2), aunque por conveniencia ahora se utiliza una representación vectorial del modelo. Por simplicidad en la notación, se eliminan los subíndices *s*, *r* y se considera que las corrientes pertenecen a los devanados del estator y los flujos a los devanados del rotor. Agrupando las ecuaciones dinámicas de los enlaces de flujo en los devanados equivalentes del rotor (2.89 y 2.90) y de las corrientes de los devanados del estator (2.87 y 2.88) del modelo equivalente *ab*, el *k*-ésimo motor está representado por

$$\dot{\theta}_{rk} = \omega_{rk}, \quad (4.1)$$

$$D_{mk}\dot{\omega}_{rk} = D_{mk}\mu_k i_k^T \mathcal{J}\lambda_k - \tau_{Lk}, \quad (4.2)$$

$$\dot{\lambda}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \lambda_k + \alpha_k L_{srk} i_k, \quad (4.3)$$

$$\dot{i}_k = (\alpha_k \beta_k \mathcal{I}_2 - n_{pk} \omega_{rk} \beta_k \mathcal{J}) \lambda_k - \left( \frac{R_{sk}}{\sigma_k} + \alpha_k \beta_k L_{srk} \right) i_k + \frac{1}{\sigma_k} v_k, \quad (4.4)$$

donde  $\omega_{rk}$  es la velocidad del rotor,  $\lambda_k = [\lambda_{ak} \ \lambda_{bk}]^T$  denota los enlaces de flujo de los devanados del rotor, los vectores  $i_k = [i_{ak} \ i_{bk}]^T$  y  $v_k = [v_{ak} \ v_{bk}]^T$  representan la corriente y el voltaje de los devanados del estator, respectivamente,  $\tau_{Lk}$  es el par de carga del motor,

$$\mathcal{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

y los parámetros del motor se definen en el Apéndice C.

El método propuesto utiliza la técnica de control por campo orientado comandado por corriente explicado en el Apéndice A. Tomando como base lo expuesto allá, se usa un controlador **PI** de la forma

$$v_k = K_P(i_{rk} - i_k) + K_I \int_0^t (i_{rk} - i_k) dt, \quad K_P, K_I \gg \mathcal{I}_2 \quad (4.6)$$

y resulta el modelo (reducido) de cuarto orden

$$\dot{\theta}_{rk} = \omega_{rk}, \quad (4.7)$$

$$D_{mk} \dot{\omega}_{rk} = D_{mk} \mu_k i_{rk}^T \mathcal{J} \lambda_k - \tau_{Lk}, \quad (4.8)$$

$$\dot{\lambda}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \lambda_k + \alpha_k L_{srk} i_{rk}. \quad (4.9)$$

En este método es necesario incluir una variable que represente el módulo cuadrado de flujo del rotor; en el apéndice A se definió esta variable para cada motor como  $F_k = \lambda_k^T \lambda_k$ , cuyo comportamiento dinámico está dado por  $\dot{F}_k = -2\alpha_k F_k + 2\alpha_k L_{srk} \lambda_k^T i_{rk}$  y que en forma vectorial está representado por  $\dot{F} = -2\alpha F + B_F I_1$  con los parámetros y variables definidos en el mismo Apéndice.

Como se supone que la  $k$ -ésima unión es accionada directamente por el  $k$ -ésimo motor de inducción, se cumple que  $\tau_{Lk} = \tau_k$ . Combinando las ecuaciones del robot y del subsistema mecánico del MI como se hizo en el Apéndice B, el sistema mecánico completo está representado por la ecuación (2.101) repetida aquí para mayor claridad y adaptada al sistema de referencia  $ab$  fijo en el estator que se está usando,

$$D(\Theta_r) \ddot{\Omega}_r + [C(\Theta_r, \Omega_r) + R_m] \dot{\Omega}_r + g(\Theta_r) = \tau_{em} = B_m I_2 \quad (4.10)$$

cuyos elementos se han definidos anteriormente, excepto  $B_m$  e  $I_2$  que se definen ahora: si se combinan las ecuaciones del par electromagnético (2.92) de cada motor en una representación matricial, haciendo  $\tau_{emk} = D_{mk} \mu_k (\lambda_{ak} i_{bk} - \lambda_{bk} i_{ak}) = D_{mk} \mu_k i_k^T \mathcal{J} \lambda_k$  y si se definen  $B_m = \text{diag}[\mu_1 D_{m1} \dots \mu_n D_{mn}]$ ,  $i_{2k} = i_k^T \mathcal{J} \lambda_k$  e  $I_2 = [i_{21} \ i_{22} \dots i_{2n}]^T$  entonces se obtiene  $\tau_{em} = B_m I_2$ .

Ahora, el problema de control se puede establecer de la siguiente manera: se tiene un robot rígido accionado directamente por motores de inducción comandados por corriente, dada la ecuación del sistema mecánico combinado (4.10), de los flujos del rotor (4.9), del módulo cuadrado de flujo  $F_k$ , las mediciones de posición y velocidad  $\theta_{rk}$  y  $\omega_{rk}$  y las corrientes de los devanados del estator de cada motor  $i_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , diseñar un controlador para lograr el seguimiento de una trayectoria deseada  $q_d(t) \in \mathbb{R}^n$  y un módulo cuadrado de flujo deseado  $F_d(t) \in \mathbb{R}^n$ , con las señales de referencia  $q_d$ ,  $\dot{q}_d$ ,  $\ddot{q}_d$  y  $F_d$ ,  $\dot{F}_d$  acotadas y asegurando estabilidad interna del sistema.

## 4.2 Diseño del controlador

El diseño del controlador se realiza en función de una trayectoria deseada que el sistema mecánico completo (el robot rígido y los motores de inducción que lo impulsan) debe seguir. Por otro lado, debido a que no se mide directamente el flujo producido por los devanados del rotor es necesario un esquema de estimación de este flujo y lo anterior debe ser considerado en el análisis de estabilidad del sistema.

### 4.2.1 Ecuación del error combinado de seguimiento

En el Apéndice B se describe el método de control para lograr el seguimiento de la trayectoria deseada basado en [SlotineLi86] para un robot rígido. Si se considera el error combinado de seguimiento  $s = \tilde{q} + \Gamma_q \dot{\tilde{q}}$  definido en el apéndice, se desea diseñar un controlador para lograr que  $s_k(t) \rightarrow 0$  exponencialmente.

En términos de  $s$ , la ecuación (4.10) que representa al sistema mecánico completo (robot+motores) se escribe como

$$\begin{aligned} D(\Theta_r)\dot{\Omega}_r + [C(\Theta_r, \Omega_r) + R_m]\dot{\Theta}_r + g(\Theta_r) &= B_m I_2 - Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)p_c \\ &= B_m \hat{I}_2 - Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)p + B_m \tilde{I}_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde ha considerado que  $\Theta_r = q$  y se utiliza la parametrización lineal del sistema mecánico completo  $Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)p_c = D(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + g(q)$  con regresor  $Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$  y  $p_c \in \mathbb{R}^r$  y el vector de corrientes  $I_2$  se sustituye por  $I_2 = \hat{I}_2 + \tilde{I}_2$  definidos más adelante en el diseño del observador de enlaces de flujos.

### 4.2.2 Observador de flujos

Debido a que no se pueden medir las variables del rotor, se utiliza un observador (similar al propuesto en [Marino, et al. 96]) para estimar los enlaces de flujo en los devanados del rotor  $\lambda_k$ . El valor estimado de  $(\cdot)$  se denota como  $(\hat{\cdot})$  y la ecuación

que representa al observador es

$$\dot{\hat{\lambda}}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \hat{\lambda}_k + \alpha_k L_{srk} i_{rk} - \mu_k D_{mk} s_k \mathcal{J} i_{rk}, \quad (4.12)$$

donde los dos primeros términos del lado derecho son una copia de la dinámica real de los flujos,  $s_k$  es el error combinado de seguimiento en la  $k$ -ésima unión y el término  $\mu_k D_{mk} s_k \mathcal{J} i_{rk}$  se utiliza para eliminar otros términos resultantes en el análisis de estabilidad. Debido al último término este observador se considera de lazo cerrado.

El error de observación  $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k - \hat{\lambda}_k$  se obtiene de las ecuaciones (4.9) y (4.12) y está dado por

$$\dot{\tilde{\lambda}}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \tilde{\lambda}_k - \mu_k D_{mk} s_k \mathcal{J} i_{rk}. \quad (4.13)$$

También es necesaria la definición del módulo cuadrado del flujo estimado que se denota como  $\hat{F}_k$  y se obtiene como  $\hat{F}_k = \hat{\lambda}_k^T \hat{\lambda}_k$  y cuyo comportamiento dinámico está dado por la expresión

$$\dot{\hat{F}}_k = 2 \hat{\lambda}_k^T \dot{\hat{\lambda}}_k = -2\alpha_k \hat{F}_k + b_{fk} \hat{i}_{1k} + 2b_{mk} s_k \hat{i}_{2k}, \quad (4.14)$$

que en forma matricial se expresa como

$$\dot{\hat{F}} = -2\alpha \hat{F} + B_F \hat{I}_1 + 2B_m S \hat{I}_2, \quad (4.15)$$

donde  $\alpha = \text{diag} \alpha_1 \dots \alpha_n$ ,  $\hat{I}_1 = [\hat{i}_{11} \ \hat{i}_{12} \ \dots \ \hat{i}_{1n}]^T$ ,  $\hat{I}_2 = [\hat{i}_{21} \ \hat{i}_{22} \ \dots \ \hat{i}_{2n}]^T$  con  $\hat{i}_{1k} = i_{rk}^T \hat{\lambda}_k$ ,  $\hat{i}_{2k} = i_{rk}^T \mathcal{J} \hat{\lambda}_k$  y  $S = \text{diag}[s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]$ .

Si se define el error del módulo cuadrado de flujo  $\tilde{F}$  como  $\tilde{F} = \hat{F} - F_d$ , se encuentra que su ecuación dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{F}} &= \dot{\hat{F}} - \dot{F}_d = -2\alpha(\tilde{F} + F_d) + B_F \hat{I}_1 + 2B_m S \hat{I}_2 - \dot{F}_d, \\ &= -2\alpha \tilde{F} + B_F \hat{I}_1 - (\dot{F}_d + 2\alpha F_d) + 2B_m S \hat{I}_2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

### 4.2.3 Análisis de estabilidad

Para realizar el análisis de estabilidad del sistema completo se deben considerar las ecuaciones dinámicas de los errores de los enlaces de flujo del rotor (4.13), del error del módulo cuadrado de flujo (4.16), del error combinado de seguimiento de trayectoria (4.11) y la siguiente función de Lyapunov candidata

$$V = \frac{1}{2} s^T D s + \frac{1}{2} \tilde{F}^T \tilde{F} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_k^T \tilde{\lambda}_k, \quad (4.17)$$

cuya derivada con respecto del tiempo a lo largo de las trayectorias de error es

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= s^T D \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{D} s + \tilde{F}^T \dot{\tilde{F}} + \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_k^T \dot{\tilde{\lambda}}_k, \\
 &= s^T (B_m \hat{I}_2 - Y_c p_c + B_m \tilde{I}_2) + \frac{1}{2} s^T (\dot{D} - 2C) s + \tilde{F}^T [-2\alpha \tilde{F} + B_F \hat{I}_1 \\
 &\quad - (\dot{F}_d + 2\alpha F_d) + 2B_m S \hat{I}_2] + \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_k^T [(-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \tilde{\lambda}_k - \mu_k D_{mk} s_k \mathcal{J} i_{rk}], \\
 &= s^T (B_m \hat{I}_2 - Y_c p_c) + \tilde{F}^T [-2\alpha \tilde{F} + B_F \hat{I}_1 - (\dot{F}_d + 2\alpha F_d) + 2B_m S \hat{I}_2] \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_k^T (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \tilde{\lambda}_k,
 \end{aligned}$$

donde se ha considerado la propiedad de antisimetría de  $[\dot{D} - 2C]$  y la igualdad  $s^T B_m \tilde{I}_2 = -\sum_{k=1}^n \mu_k D_{mk} s_k \tilde{\lambda}_k^T \mathcal{J} i_{rk}$ . Esta es la razón de usar el término de lazo cerrado en el observador de flujo (4.12).

Si en la expresión anterior se elige

$$\hat{I}_1 = B_F^{-1} [-K_F \tilde{F} + (\dot{F}_d + 2\alpha F_d) - 2B_m S \hat{I}_2], \quad K_F = \text{diag}[k_{F1} \dots k_{Fn}] > 0 \quad (4.18)$$

$$\hat{I}_2 = B_m^{-1} (-\Gamma_s s + Y_c p_c), \quad \Gamma_s = \text{diag}[\gamma_{s1} \dots \gamma_{sn}] > 0, \quad (4.19)$$

se obtiene

$$\dot{V} = -s^T \Gamma_s s - \tilde{F}^T (K_F + 2\alpha) \tilde{F} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \tilde{\lambda}_k^T \tilde{\lambda}_k \quad (4.20)$$

que es negativa definida.

Para probar que todas las señales están acotadas y que el error de seguimiento es uniformemente acotado se utilizan

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} [s^T \tilde{F}^T \tilde{\lambda}^T] \text{diag}[D, \mathcal{I}_n, \mathcal{I}_n] [s^T \tilde{F}^T \tilde{\lambda}^T]^T \\
 &= \frac{1}{2} z^T \text{diag}[D, \mathcal{I}_n, \mathcal{I}_n] z,
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $z$  es el vector formado por todos los errores del sistema y  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ . Ya que la matriz de la ecuación anterior (y que por simplicidad se denota como  $\{\cdot\}$ ) es real, simétrica y definida positiva, se cumple que

$$\underline{\lambda}\{\cdot\} z^T z \leq z^T \{\cdot\} z \leq \bar{\lambda}\{\cdot\} z^T z, \quad z^T z = \|z\|^2, \quad (4.22)$$

donde  $\underline{\lambda}\{\cdot\}$  y  $\bar{\lambda}\{\cdot\}$  representan a los valores propios mínimo y máximo de  $\{\cdot\}$ , respectivamente.

Por otro lado,  $\dot{V}$  se puede expresar como

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -[s^T \tilde{F}^T \tilde{\lambda}^T] \text{diag}[\Gamma_s, (K_F + 2\alpha), \alpha] [s^T \tilde{F}^T \tilde{\lambda}^T]^T \\
 &= -z^T \text{diag}[\Gamma_s, (K_F + 2\alpha), \alpha] [s^T \tilde{F}^T \tilde{\lambda}^T] z,
 \end{aligned} \quad (4.23)$$



usando las cotas de  $V$  y  $\dot{V}$ , se tiene que

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{-z^T \text{diag}[\Gamma_s, (K_F + 2\alpha), \alpha]z}{\frac{1}{2}z^T \text{diag}[D, \mathcal{I}_n, \mathcal{I}_n]z} \quad (4.24)$$

y resolviendo para  $V$  se obtiene

$$V(t) \leq V(t_0)e^{-\alpha(t)}$$

por lo que la norma del vector de errores  $z(t)$  es

$$\|z(t)\|^2 \leq \left[ \frac{\bar{\lambda} \text{diag}[D, \mathcal{I}_n, \mathcal{I}_n]}{\underline{\lambda} \text{diag}[D, \mathcal{I}_n, \mathcal{I}_n]} \right] e^{-\alpha(t-t_0)} \|z(t_0)\|^2 \quad (4.25)$$

lo que implica que todos los errores,  $s(t) \rightarrow 0$ ,  $\hat{F}(t) \rightarrow F_d(t)$  y  $\hat{\lambda}_k(t) \rightarrow \lambda_k(t)$  exponencialmente. Consecuentemente,  $\tilde{q}(t), \check{q}(t) \rightarrow 0$ ,  $F(t) \rightarrow F_d(t)$  exponencialmente. Con un procesamiento adecuado (ver el Teorema siguiente) de las señales  $\hat{I}_1$  e  $\hat{I}_2$  se obtienen las señales de control.

En resumen, los resultados anteriores se establecen en el siguiente teorema:

**Teorema 4.1** Considerar el robot rígido accionado por motores de inducción (4.10)-(4.9). La ley de control PI (4.6) con las corrientes de referencia  $i_{rk} = [i_{ark} \ i_{brk}]^T$  dadas por

$$\begin{bmatrix} i_{ark} \\ i_{brk} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{F}_k} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{ak} & -\hat{\lambda}_{bk} \\ \hat{\lambda}_{bk} & \hat{\lambda}_{ak} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{1k} \\ \hat{i}_{2k} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

donde  $\hat{F}_k = \hat{\lambda}_k^T \hat{\lambda}_k$ ,  $\hat{I}_1 = [\hat{i}_{11} \ \hat{i}_{12} \ \dots \ \hat{i}_{1n}]^T$  e  $\hat{I}_2 = [\hat{i}_{21} \ \hat{i}_{22} \ \dots \ \hat{i}_{2n}]^T$  son dadas por (4.18) y (4.19), y  $\hat{\lambda}_k = [\hat{\lambda}_{ak} \ \hat{\lambda}_{bk}]^T$  por el observador de flujos (4.12), asegura que todas las señales de lazo cerrado son acotadas y  $\tilde{q}(t), \check{q}(t) \rightarrow 0$ ,  $F(t) \rightarrow F_d(t)$  global y exponencialmente.

*Observación 4.1:* La ley de control (4.26) está bien definida y no contiene singularidades si  $\hat{\lambda}_k^T(t)\hat{\lambda}_k(t) \neq 0$ , para todo  $t \geq 0$ . Esta condición siempre se puede satisfacer en la práctica. Para demostrar lo anterior se sustituye el valor de  $\hat{I}_1$  en la expresión de  $\tilde{F}$  y ahora se tiene

$$\dot{\tilde{F}} = -(2\alpha + K_F)\tilde{F}, \quad (4.27)$$

resolviendo para  $\tilde{F}$  se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \tilde{F}(0)e^{-(2\alpha+K_F)t} \\ \hat{F} - F_d &= \tilde{F}(0)e^{-(2\alpha+K_F)t} \\ \hat{F} &= F_d + \tilde{F}(0)e^{-(2\alpha+K_F)t} \end{aligned}$$

y para cada uno de los MI se tiene

$$\hat{\lambda}_k^T(t)\hat{\lambda}_k(t) = F_{dk}(t) + [\hat{\lambda}_k^T(0)\hat{\lambda}_k(0) - F_{dk}(0)]e^{-(2\alpha_k+k_F)t}$$

por lo que  $\hat{\lambda}_k^T(t)\hat{\lambda}_k(t) > 0$ , para todo  $t \geq 0$ , si el observador de flujos se inicializa adecuadamente con  $\hat{\lambda}_k^T(0)\hat{\lambda}_k(0) \geq F_{dk}(0) > 0$ .

### 4.3 Simulaciones

Un robot rígido de dos eslabones que se mueve solamente en el plano horizontal y que es accionado por motores de inducción acoplados directamente en las uniones del robot (descrito en el capítulo 2) se utilizó en las simulaciones para ilustrar el desempeño del controlador propuesto. Los parámetros del robot, de los motores de inducción (cada uno de 2.2 KW) y las condiciones iniciales se eligieron iguales a las reportadas en [Hu, et al. 96] (ver también [PanteleyOrtega97]) y están dados en el apéndice.

Las señales de referencia para las posiciones de los eslabones son  $q_{dk} = \sin[(1 - e^{-5t^3})t]$  y el módulo cuadrado del flujo deseado es  $F_{dk} = 4$  que corresponde al valor promedio del flujo considerado en [Hu, et al. 96]. El vector de parámetros y el regresor utilizados en la ley de control (4.19) están dados por

$$p_c^T = [p_1 \ p_2 \ p_3] = [3.31 \ 0.116 \ 0.16], \quad (4.28)$$

$$Y_c(q, \dot{q}, \ddot{q}_r) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{r1} & \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} & y_{13} \\ 0 & \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} & y_{23} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

donde

$$\begin{aligned} y_{13} &= \cos(q_2)(2\ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2}) - \sin(q_2)[\dot{q}_1\dot{q}_{r2} + \dot{q}_2(\dot{q}_{r1} + \dot{q}_{r2})], \\ y_{23} &= \cos(q_2)\ddot{q}_{r1} + \sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_{r1}, \end{aligned}$$

y  $q_{rk}$ , con  $k = 1, 2$ , son las componentes del vector  $q_r$  definido en el Apéndice B. Los términos que representan la fricción y que podrían acelerar la respuesta transitoria no se incluyen en el modelo (4.10).

Las ganancias de los controladores de corriente y las de los controladores PI para los dos grados de libertad son

$$K_F = 20\mathcal{I}_2, \quad K_q = 50\mathcal{I}_2, \quad \Gamma_s = 20\mathcal{I}_2,$$

$$K_P = 2\mathcal{I}_2, \quad K_I = 4\mathcal{I}_2.$$

Los resultados de las simulaciones se muestran en las figuras 4.1-4.5. Se observa claramente que los objetivos del control se cumplen: la figura 4.1 muestra los errores

de seguimiento de posición para ambos eslabones; la figura 4.2 muestra el error del módulo cuadrado del flujo en ambos motores; las entradas de control y los estados de los controladores se muestran en las figuras 4.3-4.5: en la figura 4.3 se tienen las corrientes reales y las de referencia y en la figura 4.4 los voltajes de entrada de los devanados del estator de ambos motores; por último, en la figura 4.5 se tienen los errores de estimación de los enlaces de flujos. De estos resultados se nota que a pesar de que se utiliza el modelo de orden reducido del M. I. en el diseño de los controladores, el esquema de control propuesto proporciona, al menos, el mismo orden de precisión en el seguimiento de las señales de referencia que los reportados en [Hu, et al. 96, PanteleyOrtega97] donde se utiliza el modelo de orden completo del MI.

## 4.4 Conclusiones

Se ha diseñado un sistema de control para motores de inducción que están acoplados directamente a los eslabones de un robot rígido de manera que estos sigan una trayectoria deseada tomando como base el modelo reducido de cuarto orden del MI y el control con comando de corriente. Para propósitos de retroalimentación solamente se miden las señales de posición y velocidad del robot y las corrientes de los devanados del estator, mientras que los flujos del rotor son estimados mediante un observador en lazo cerrado. Suponiendo que se conocen todos los parámetros del sistema (tanto del robot como de los MI) se establece la estabilidad exponencial global del sistema. Los resultados de las simulaciones muestran que a pesar de que se ignoran las dinámicas de las corrientes de los devanados de estator en el diseño del controlador, el sistema de control resultante proporciona respuestas en lazo cerrado que, si bien no son mejores, si son comparables con las obtenidas por controladores que utilizan el modelo de orden completo del MI. Dado que el sistema resultante es exponencialmente estable, se espera cierto grado de robustez del control propuesto ante la presencia de incertidumbres y para demostrarlo se incluye la figura 4.6 que muestra las respuestas de los errores de posición de las uniones del robot, considerando resistencias de los devanados del rotor  $R_{rk} = 1.7\Omega$ , es decir, casi el doble del valor nominal. En este caso ya no existe la convergencia exponencial a cero de los errores, aunque permanecen en una vecindad de cero.

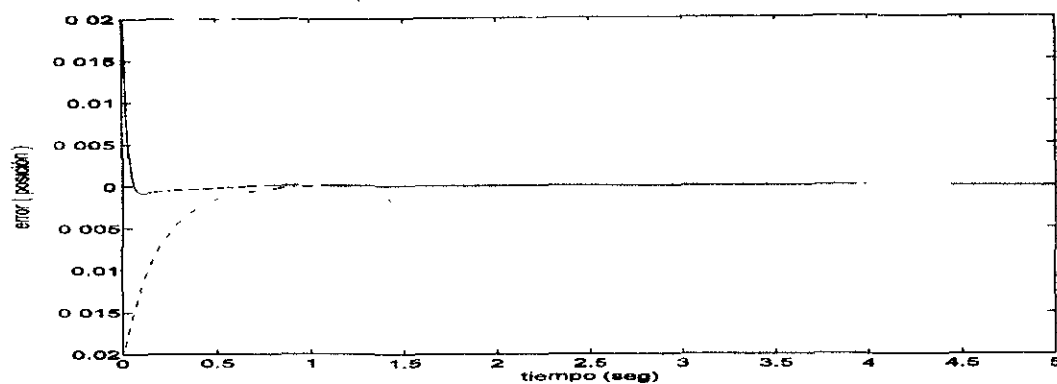


Figura 4.1: Error de seguimiento de posición  $\tilde{q}_k$  para el lazo 1 (línea punteada) y para el lazo 2 (línea sólida).

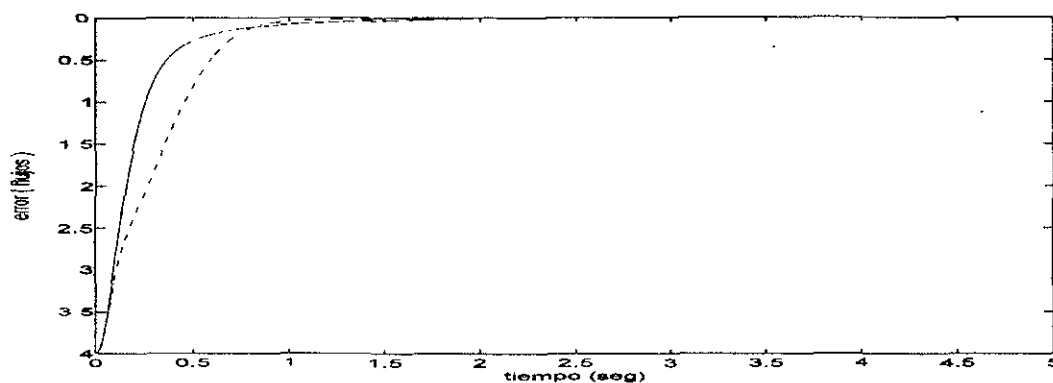


Figura 4.2: Error de seguimiento del módulo cuadrado del flujo  $F_k - F_{dk}$  para el motor 1 (línea punteada) y para el motor 2 (línea sólida).

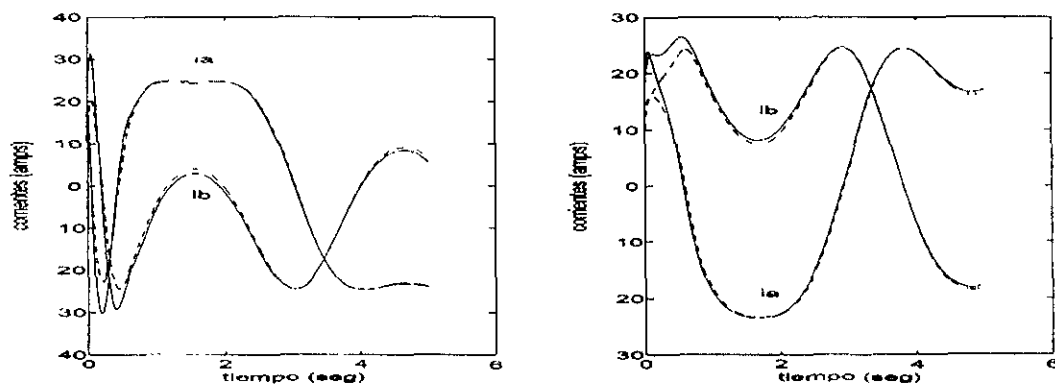


Figura 4.3: Corrientes de los devanados del estator del motor 1 (izquierda) y del motor 2 (derecha): corrientes reales  $i_a, i_b$  (línea punteada) y corrientes de referencia  $i_{ar}, i_{br}$  (línea sólida).

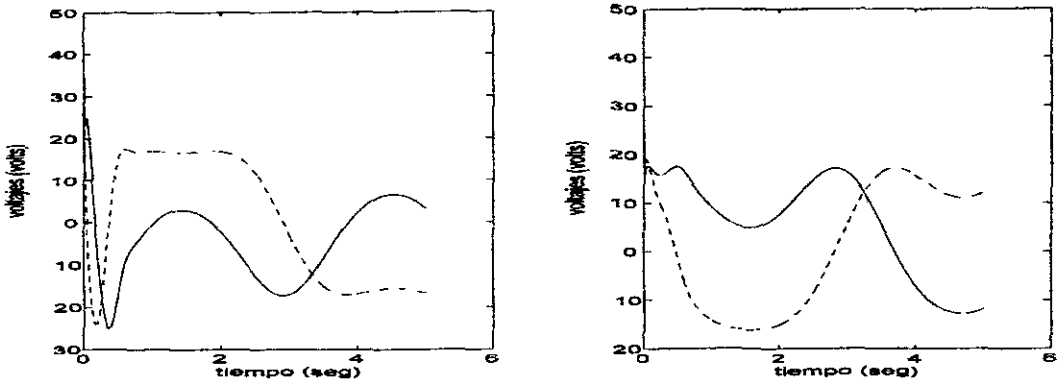


Figura 4.4: Voltajes de entrada para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha):  $v_a$  (línea punteada) y  $v_b$  (línea sólida).

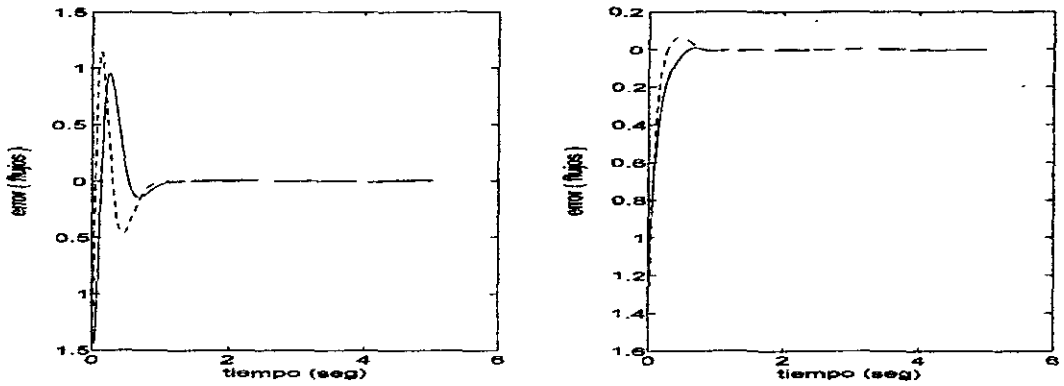


Figura 4.5: Error de estimación de flujos para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha):  $\tilde{\lambda}_a$  (línea punteada) y  $\tilde{\lambda}_b$  (línea sólida).

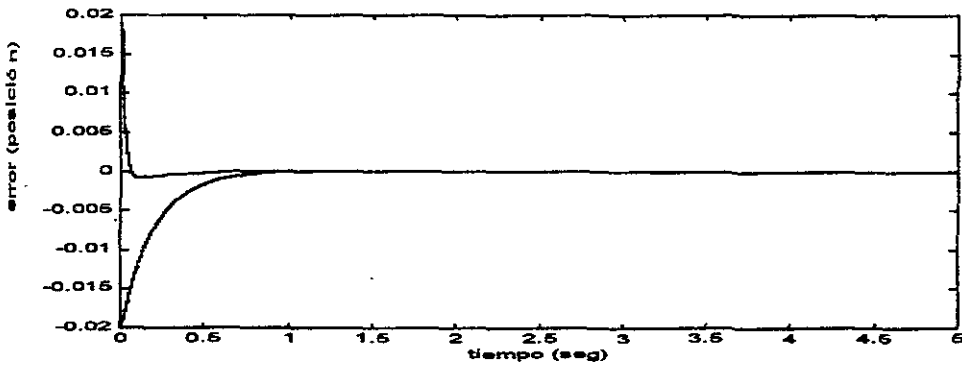


Figura 4.6: Errores de seguimiento de posición de las uniones 1 y 2: incertidumbre en  $R_{rk}$

# Capítulo 5

## Control adaptable

En este capítulo tratamos el problema de control adaptable de trayectoria de un robot rígido accionado directamente por motores de inducción. En el robot se considera el caso de parámetros conocidos y se utiliza una técnica de control centralizado para lograr el seguimiento de trayectoria. En los MI se considera incertidumbre paramétrica en los devanados del rotor. En el diseño del controlador se utiliza una ley de adaptación de parámetros, retroalimentación de salida, la estimación de los flujos producidos por los devanados del rotor y de las corrientes de los devanados del estator por medio de observadores de lazo cerrado y los motores se operan en el modo comandado por corriente utilizando un controlador **PI** con ganancias altas en el lazo de corrientes [Leonhard85][Bodson, et al. 94]. Se considera que el modelo del robot es conocido y solo se adaptan los parámetros con incertidumbre ( $R_{sk}$  y  $R_{rk}$ ) de los motores .

Este esquema utiliza la medición de la posición y la velocidad de los eslabones del robot y de las corrientes de los devanados de estator de los motores. Se usan observadores para las variables que no se tienen disponibles para medición (los flujos de los devanados del rotor de los MI) y también se usan observadores para estimar otras variables auxiliares, incluyendo uno para las corrientes de los devanados del estator (que además se miden), ya que son útiles en el análisis de estabilidad. Si el observador de flujos del rotor es inicializado apropiadamente, el controlador resultante asegura el seguimiento de la trayectoria deseada en el robot, el acotamiento de las señales internas y la estabilidad asintótica del sistema.

### 5.1 Planteamiento del problema

El método de control utiliza el modelo bifásico equivalente *ab* con el marco de referencia fijo en el estator descrito en el capítulo 4 y cuyas ecuaciones relevantes se repiten aquí

$$\dot{\theta}_{rk} = \omega_{rk}, \quad (5.1)$$

$$D_{mk}\dot{\omega}_{rk} = D_{mk}\mu_k\dot{i}_k^T \mathcal{J}\lambda_k - \tau_{Lk}, \quad (5.2)$$

$$\dot{\lambda}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk}\omega_{rk}\mathcal{J})\lambda_k + \alpha_k L_{srk}i_k, \quad (5.3)$$

$$\dot{i}_k = (\alpha_k\beta_k\mathcal{I}_2 - n_{pk}\omega_{rk}\beta_k\mathcal{J})\lambda_k - \left(\frac{R_{sk}}{\sigma_k} + \alpha_k\beta_k L_{srk}\right)i_k + \frac{1}{\sigma_k}v_k, \quad (5.4)$$

y también se utiliza la técnica de control por campo orientado comandado por corriente, con controladores **PI** dados por

$$v_k = K_P(i_{rk} - i_k) + K_I \int_0^t (i_{rk} - i_k)dt, \quad K_P, K_I \gg \mathcal{I}_2, \quad (5.5)$$

por lo que se considera la reducción del orden y entonces se utiliza el modelo

$$\dot{\theta}_{rk} = \omega_{rk}, \quad (5.6)$$

$$D_{mk}\dot{\omega}_{rk} = D_{mk}\mu_k\dot{i}_{rk}^T \mathcal{J}\lambda_k - \tau_{Lk}, \quad (5.7)$$

$$\dot{\lambda}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk}\omega_{rk}\mathcal{J})\lambda_k + \alpha_k L_{srk}i_{rk}, \quad (5.8)$$

el módulo cuadrado del flujo  $F_k$  y su ecuación dinámica

$$\dot{F}_k = -2\alpha_k F_k + b_{Fk}i_{1k}, \quad (5.9)$$

cuya representación vectorial, desarrollada en el Apéndice A es

$$\dot{F} = -2\alpha F + B_F I_1, \quad (5.10)$$

y el sistema mecánico completo (robot + motores) representado por

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B_m I_2, \quad (5.11)$$

con los parámetros y definiciones dados en el capítulo 4 y en los apéndices.

El problema de control se puede establecer de la siguiente manera: sea un robot manipulador accionado directamente por motores de inducción cuyo sistema mecánico combinado (MI + robot) está dado por la ecuación (5.11), con los MI están operando en el modo corriente (5.8) y (5.5), sea la trayectoria deseada en el robot representada por las posiciones  $q_{dk}(t)$  y las velocidades  $\dot{q}_{dk}(t)$  en las  $k$  uniones del robot, y  $F_{dk}$  las normas deseadas para los flujos de rotor de los  $k$  motores, con las señales de referencia  $q_d$ ,  $\dot{q}_d$ ,  $\ddot{q}_d$  y  $F_d$ ,  $\dot{F}_d$  acotadas, diseñar una ley de control que asegure el seguimiento de la trayectoria deseada  $q_d(t) \in \mathbb{R}^n$  y del módulo cuadrado de flujo deseado  $F_d(t) \in \mathbb{R}^n$ , la estabilidad interna y el acotamiento de todas las señales del sistema, suponiendo el conocimiento exacto de los parámetros del robot y considerando que no se conocen con precisión las resistencias de los devanados del rotor de los motores. En particular, se desea aplicar la técnica de control centralizado basada en el método de [SlotineLi86] en el sistema mecánico combinado y el control no lineal adaptable basado en observadores en los MI.

## 5.2 Diseño del controlador

Para el diseño del controlador seguimos un procedimiento similar al utilizado en los capítulos anteriores. En primer lugar se proponen observadores de los flujos producidos por los devanados del rotor, de las corrientes de los devanados del estator de los motores y de las señales auxiliares en el logro del objetivo de control. Posteriormente se trata el error de seguimiento de la trayectoria deseada en el subsistema mecánico y por último se utiliza el análisis de estabilidad de Lyapunov para encontrar la ley de control deseada.

### 5.2.1 Observadores y variables auxiliares

Para la estimación de los flujos  $\lambda_k$  producidos por los devanados del rotor, de las corrientes de los devanados del estator y de las señales auxiliares de los motores se utilizan los siguientes observadores similares a los propuestos en [Marino, et al. 98]. En el desarrollo subsecuente  $\hat{(\cdot)}$  denota el estimado de  $(\cdot)$ , y para el  $k$ -ésimo motor se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\lambda}}_{ak} &= -\hat{\alpha}_k \hat{\lambda}_{ak} - n_{pk} \dot{q}_k \hat{\lambda}_{bk} + \hat{\alpha}_k L_{srk} i_{ak} + \frac{u_{1k}}{\beta_k} - \frac{\gamma_{1k}}{\beta_k} (i_{ak} - \hat{i}_{ak}), \\ \dot{\hat{\lambda}}_{bk} &= -\hat{\alpha}_k \hat{\lambda}_{bk} + n_{pk} \dot{q}_k \hat{\lambda}_{ak} + \hat{\alpha}_k L_{srk} i_{bk} + \frac{u_{2k}}{\beta_k} - \frac{\gamma_{1k}}{\beta_k} (i_{bk} - \hat{i}_{bk}),\end{aligned}\quad (5.12)$$

donde  $\hat{\alpha}_k$  es el estimado de  $\alpha_k = R_{rk}/L_{rk}$ ,  $R_{rk}$  es el valor de la resistencia de los devanados del rotor del  $k$ -ésimo motor y  $\gamma_{1k}$  es una ganancia del controlador.

Para la estimación de las corrientes de los devanados del estator del  $k$ -ésimo motor se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{i}}_{ak} &= -\frac{R_{sk}}{\sigma_k} i_{ak} + \frac{v_{ak}}{\sigma_k} + \hat{\alpha}_k \beta_k \hat{\lambda}_{ak} + \beta_k n_{pk} \dot{q}_k \hat{\lambda}_{bk} - \hat{\alpha}_k L_{srk} \beta_k i_{ak} \\ &\quad + \gamma_{2k} (i_{ak} - \hat{i}_{ak}) + u_{3k}, \\ \dot{\hat{i}}_{bk} &= -\frac{R_{sk}}{\sigma_k} i_{bk} + \frac{v_{bk}}{\sigma_k} + \hat{\alpha}_k \beta_k \hat{\lambda}_{bk} - \beta_k n_{pk} \dot{q}_k \hat{\lambda}_{ak} - \hat{\alpha}_k L_{srk} \beta_k i_{bk} \\ &\quad + \gamma_{2k} (i_{bk} - \hat{i}_{bk}) + u_{4k},\end{aligned}\quad (5.13)$$

donde  $0 < \gamma_{1k} < \gamma_{2k}$ ,  $u_{1k}$ ,  $u_{2k}$ ,  $u_{3k}$  y  $u_{4k}$  son señales auxiliares.

Los errores de observación de flujos  $\tilde{\lambda}_{ak} = \lambda_{ak} - \hat{\lambda}_{ak}$ ,  $\tilde{\lambda}_{bk} = \lambda_{bk} - \hat{\lambda}_{bk}$  se obtienen de las ecuaciones (5.8) y (5.12)

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\lambda}}_{ak} &= -\alpha_k \tilde{\lambda}_{ak} - n_{pk} \dot{q}_k \tilde{\lambda}_{bk} + \tilde{\alpha}_k (L_{srk} i_{ak} - \hat{\lambda}_{ak}) - \frac{u_{1k}}{\beta_k} + \frac{\gamma_{1k}}{\beta_k} \tilde{i}_{ak}, \\ \dot{\tilde{\lambda}}_{bk} &= -\alpha_k \tilde{\lambda}_{bk} + n_{pk} \dot{q}_k \tilde{\lambda}_{ak} + \tilde{\alpha}_k (L_{srk} i_{bk} - \hat{\lambda}_{bk}) - \frac{u_{2k}}{\beta_k} + \frac{\gamma_{1k}}{\beta_k} \tilde{i}_{bk},\end{aligned}\quad (5.14)$$



donde  $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k - \hat{\alpha}_k$ ,  $\tilde{i}_{ak} = i_{ak} - \hat{i}_{ak}$  y  $\tilde{i}_{bk} = i_{bk} - \hat{i}_{bk}$ .

Los errores de observación de las corrientes de los devanados del estator  $\tilde{i}_{ak}$  e  $\tilde{i}_{bk}$  son

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{i}}_{ak} &= -\gamma_{2k}\tilde{i}_{ak} + \alpha_k\beta_k\tilde{\lambda}_{ak} + \beta_k n_{pk}\dot{q}_k\tilde{\lambda}_{bk} - \tilde{\alpha}_k\beta_k(L_{srk}i_{ak} - \hat{\lambda}_{ak}) - u_{3k}, \\ \dot{\tilde{i}}_{bk} &= -\gamma_{2k}\tilde{i}_{bk} + \alpha_k\beta_k\tilde{\lambda}_{bk} - \beta_k n_{pk}\dot{q}_k\tilde{\lambda}_{ak} - \tilde{\alpha}_k\beta_k(L_{srk}i_{bk} - \hat{\lambda}_{bk}) - u_{4k},\end{aligned}\quad (5.15)$$

y las variables auxiliares son

$$\begin{aligned}z_{ak} &= \tilde{i}_{ak} + \beta_k\tilde{\lambda}_{ak}, \\ z_{bk} &= \tilde{i}_{bk} + \beta_k\tilde{\lambda}_{bk},\end{aligned}\quad (5.16)$$

cuyas ecuaciones dinámicas están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{z}_{ak} &= -\gamma_k\tilde{i}_{ak} - u_{1k} - u_{3k}, \\ \dot{z}_{bk} &= -\gamma_k\tilde{i}_{bk} - u_{2k} - u_{4k},\end{aligned}\quad (5.17)$$

donde  $\gamma_k = \gamma_{2k} - \gamma_{1k}$  son ganancias del controlador.

Definiendo los valores estimados de las variables auxiliares como  $\hat{z}_{ak}$  y  $\hat{z}_{bk}$  se obtienen los errores de estimación de las variables auxiliares  $\tilde{z}_{ak} = z_{ak} - \hat{z}_{ak}$  y  $\tilde{z}_{bk} = z_{bk} - \hat{z}_{bk}$ . Las ecuaciones dinámicas de los errores de estimación de las variables auxiliares son

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}}_{ak} &= \dot{z}_{ak} - \dot{\hat{z}}_{ak}, \\ \dot{\tilde{z}}_{bk} &= \dot{z}_{bk} - \dot{\hat{z}}_{bk},\end{aligned}\quad (5.18)$$

Usando las variables auxiliares definidas en (5.16) las expresiones de los errores de observación de las corrientes de los devanados del estator son

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{i}}_{ak} &= -(\gamma_{2k} + \alpha_k)\tilde{i}_{ak} - n_{pk}\dot{q}_k\tilde{i}_{bk} + \alpha_k z_{ak} + n_{pk}\dot{q}_k z_{bk} \\ &\quad - \tilde{\alpha}_k\beta_k(L_{srk}i_{ak} - \hat{\lambda}_{ak}) - u_{3k}, \\ \dot{\tilde{i}}_{bk} &= -(\gamma_{2k} + \alpha_k)\tilde{i}_{bk} + n_{pk}\dot{q}_k\tilde{i}_{ak} + \alpha_k z_{bk} - n_{pk}\dot{q}_k z_{ak} \\ &\quad - \tilde{\alpha}_k\beta_k(L_{srk}i_{bk} - \hat{\lambda}_{bk}) - u_{4k}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

El valor del módulo al cuadrado del flujo estimado  $\hat{F}_k = \hat{\lambda}_k^T \hat{\lambda}_k$  está dado por

$$\dot{\hat{F}}_k = 2\hat{\lambda}_k^T \dot{\hat{\lambda}}_k = -2\hat{\alpha}_k \hat{F}_k + 2\hat{\alpha}_k L_{srk} \hat{i}_{1k} + \frac{2}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} u_{1k} + \hat{\lambda}_{bk} u_{2k}) - \frac{2\gamma_{1k}}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} \tilde{i}_{ak} + \hat{\lambda}_{bk} \tilde{i}_{bk}),\quad (5.20)$$

donde  $\hat{i}_{1k} = \hat{i}_k^T \hat{\lambda}_k$ .

Si se define el error del módulo al cuadrado del flujo estimado  $\tilde{F}$  como  $\tilde{F} = \hat{F} - F_d$ , de la ecuación (5.20) se obtiene

$$\dot{\tilde{F}}_k = -2\hat{\alpha}_k \hat{F}_k + 2\hat{\alpha}_k L_{srk} \hat{i}_{1k} + \frac{2}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} u_{1k} + \hat{\lambda}_{bk} u_{2k}) - \frac{2\gamma_{1k}}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} \tilde{i}_{ak} + \hat{\lambda}_{bk} \tilde{i}_{bk}) - \dot{F}_{dk}.\quad (5.21)$$

### 5.2.2 Ecuación del error combinado de seguimiento

Se utiliza el método expuesto en el Apéndice B y se hacen las adecuaciones necesarias para considerar la dinámica del subsistema mecánico de los motores de inducción que mueven al robot. Si se considera el error combinado de seguimiento  $s = \ddot{q} + \Gamma_q \dot{q}$ , se desea diseñar un controlador para lograr que  $s_k(t) \rightarrow 0$  asintóticamente.

En términos de  $s$ , la ecuación dinámica (5.11) que representa al sistema mecánico completo (robot+motores) se escribe como

$$D(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s = B_m \hat{I}_2 - Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)p_c + B_m \tilde{I}_2, \quad (5.22)$$

donde se utiliza la parametrización lineal del sistema mecánico completo  $Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)p_c = D(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + g(q)$  con regresor  $Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$  y  $p_c \in \mathbb{R}^r$  y el vector de corrientes  $I_2$  se substituye por  $I_2 = \tilde{I}_2 + \hat{I}_2$  definidos más adelante en el diseño del observador de flujo.

### 5.2.3 Análisis de estabilidad del sistema

Para realizar el análisis de estabilidad del sistema considerado, utilizamos las ecuaciones dinámicas de los errores (5.22), (5.19), (5.17), (5.21) y se usa la siguiente función positiva definida como función de Lyapunov candidata

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} s^T D(q) s + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tilde{i}_{ak}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tilde{i}_{bk}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n z_{ak}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n z_{bk}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \gamma_{zk} \tilde{z}_{ak}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \gamma_{zk} \tilde{z}_{bk}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \gamma_{\alpha k} \tilde{\alpha}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tilde{F}_k^2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

La derivada con respecto del tiempo de (5.23) a lo largo de las trayectorias de los errores es

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s^T D \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{D} s + \sum_{k=1}^n \tilde{i}_{ak} \dot{\tilde{i}}_{ak} + \sum_{k=1}^n \tilde{i}_{bk} \dot{\tilde{i}}_{bk} + \sum_{k=1}^n z_{ak} \dot{z}_{ak} + \sum_{k=1}^n z_{bk} \dot{z}_{bk} \\ & + \sum_{k=1}^n \gamma_{zk} \tilde{z}_{ak} \dot{\tilde{z}}_{ak} + \sum_{k=1}^n \gamma_{zk} \tilde{z}_{bk} \dot{\tilde{z}}_{bk} + \sum_{k=1}^n \gamma_{\alpha k} \tilde{\alpha}_k \dot{\tilde{\alpha}}_k + \sum_{k=1}^n \tilde{F}_k \dot{\tilde{F}}_k \\ = & s^T (B_m \tilde{I}_2 + B_m \hat{I}_2 - D \ddot{q}_r - C \dot{q}_r - Cs) + \frac{1}{2} s^T (\dot{D} - 2C) s \\ & + \sum_{k=1}^n \tilde{i}_{ak} \left[ -(\gamma_{2k} + \alpha_k) \tilde{i}_{ak} - n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{bk} + \alpha_k z_{ak} + n_{pk} \dot{q}_k z_{bk} - \tilde{\alpha}_k \beta_k (L_{srk} \dot{i}_{ak} - \hat{\lambda}_{ak}) - u_{3k} \right] \\ & + \sum_{k=1}^n \tilde{i}_{bk} \left[ -(\gamma_{2k} + \alpha_k) \tilde{i}_{bk} + n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{ak} + \alpha_k z_{bk} - n_{pk} \dot{q}_k z_{ak} - \tilde{\alpha}_k \beta_k (L_{srk} \dot{i}_{bk} - \hat{\lambda}_{bk}) - u_{4k} \right] \\ & + \sum_{k=1}^n z_{ak} \left[ -\gamma_k \tilde{i}_{ak} - u_{1k} - u_{3k} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n z_{bk} \left[ -\gamma_k \tilde{i}_{bk} - u_{2k} - u_{4k} \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \gamma_{zk} \tilde{z}_{ak} \dot{\tilde{z}}_{ak} + \sum_{k=1}^n \gamma_{zk} \tilde{z}_{bk} \dot{\tilde{z}}_{bk} + \sum_{k=1}^n \gamma_{ak} \tilde{\alpha}_k \dot{\tilde{\alpha}}_k \\
& + \sum_{k=1}^n \tilde{F}_k \left[ -2\hat{\alpha}_k \tilde{F}_k + 2\hat{\alpha}_k L_{srk} \hat{i}_{1k} + \frac{2}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} u_{1k} + \hat{\lambda}_{bk} u_{2k}) - \frac{2\gamma_{1k}}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} \tilde{i}_{ak} + \hat{\lambda}_{bk} \tilde{i}_{bk}) - \dot{\tilde{F}}_k \right]
\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de antisimetría se tiene  $[s^T(\dot{D} - 2C)s] = 0$ , desarrollando  $s^T B_m \tilde{I}_2 = \sum_{k=1}^n [s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{bk} \tilde{\lambda}_{ak} - s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{ak} \tilde{\lambda}_{bk}] = \sum_{k=1}^n [s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{bk} (\frac{1}{\beta_k} z_{ak} - \frac{1}{\beta_k} \tilde{i}_{ak}) - s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{ak} (\frac{1}{\beta_k} z_{bk} - \frac{1}{\beta_k} \tilde{i}_{bk})]$ , substituyendo  $z_{ak} = \tilde{z}_{ak} + \hat{z}_{ak}$ ,  $z_{bk} = \tilde{z}_{bk} + \hat{z}_{bk}$ ,  $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k + \hat{\alpha}_k$ , eliminando términos similares y agrupando convenientemente las variables, se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} & = s^T (B_m \tilde{I}_2 - D \ddot{q}_r - C \dot{q}_r) \tag{5.24} \\
& + \sum_{k=1}^n \tilde{i}_{ak} \left[ -(\gamma_{2k} + \alpha_k) \tilde{i}_{ak} + \hat{\alpha}_k \hat{z}_{ak} - u_{3k} - \frac{s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{bk}}{\beta_k} - \gamma_k \hat{z}_{ak} \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \tilde{i}_{bk} \left[ -(\gamma_{2k} + \alpha_k) \tilde{i}_{bk} + \hat{\alpha}_k \hat{z}_{bk} - u_{4k} + \frac{s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{ak}}{\beta_k} - \gamma_k \hat{z}_{bk} \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{ak} \left[ -u_{1k} - u_{3k} + \frac{s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{bk}}{\beta_k} - n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{bk} \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{bk} \left[ -u_{2k} - u_{4k} - \frac{s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{ak}}{\beta_k} + n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{ak} \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \hat{z}_{ak} \left[ -u_{1k} - u_{3k} + \frac{s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{bk}}{\beta_k} - n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{bk} \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \hat{z}_{bk} \left[ -u_{2k} - u_{4k} - \frac{s_k D_{mk} \mu_k \tilde{i}_{ak}}{\beta_k} + n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{ak} \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{ak} \left[ \gamma_{zk} \dot{\tilde{z}}_{ak} + (\alpha_k - \gamma_k) \tilde{i}_{ak} \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \tilde{z}_{bk} \left[ \gamma_{zk} \dot{\tilde{z}}_{bk} + (\alpha_k - \gamma_k) \tilde{i}_{bk} \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_k \left[ \gamma_{ak} \dot{\tilde{\alpha}}_k + \hat{z}_{ak} \tilde{i}_{ak} - \beta_k \tilde{i}_{ak} (L_{srk} \tilde{i}_{ak} - \hat{\lambda}_{ak}) + \hat{z}_{bk} \tilde{i}_{bk} - \beta_k \tilde{i}_{bk} (L_{srk} \tilde{i}_{bk} - \hat{\lambda}_{bk}) \right] \\
& + \sum_{k=1}^n \tilde{F}_k \left[ -2\hat{\alpha}_k \tilde{F}_k - (2\hat{\alpha}_k F_{dk} + \dot{F}_{dk}) + 2\hat{\alpha}_k L_{srk} \hat{i}_{1k} + \frac{2}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} u_{1k} + \hat{\lambda}_{bk} u_{2k}) - \right. \\
& \quad \left. \frac{2\gamma_{1k}}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} \tilde{i}_{ak} + \hat{\lambda}_{bk} \tilde{i}_{bk}) \right]. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Con la finalidad de hacer que la derivada de la función de Lyapunov candidata sea negativa o seminegativa definida, se deben determinar adecuadamente los valores de las variables y señales auxiliares. Si se eligen,

$$u_{1k} = -u_{3k} + \frac{s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{bk}}{\beta_k} - n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{bk}, \quad (5.26)$$

$$u_{2k} = -u_{4k} - \frac{s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{ak}}{\beta_k} + n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{ak}, \quad (5.27)$$

$$u_{3k} = \hat{\alpha}_k \hat{z}_{ak} - \frac{s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{bk}}{\beta_k} - \gamma_k \hat{z}_{ak}, \quad (5.28)$$

$$u_{4k} = \hat{\alpha}_k \hat{z}_{bk} + \frac{s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{ak}}{\beta_k} - \gamma_k \hat{z}_{bk}, \quad (5.29)$$

$$\dot{\hat{i}}_{1k} = \frac{1}{2\hat{\alpha}_k L_{srk}} \left[ (2\hat{\alpha}_k F_{dk} + \dot{F}_{dk}) - \frac{2}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} u_{1k} + \hat{\lambda}_{bk} u_{2k}) + \frac{2\gamma_{1k}}{\beta_k} (\hat{\lambda}_{ak} \tilde{i}_{ak} + \hat{\lambda}_{bk} \tilde{i}_{bk}) \right], \quad (5.30)$$

$$\dot{\hat{i}}_{2k} = \frac{1}{D_{mk} \mu_k} (-\gamma_{sk} s_k + D\ddot{q}_r + C\dot{q}_r), \quad (5.31)$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_k = -\frac{1}{\gamma_{ak}} \left[ \hat{z}_{ak} \tilde{i}_{ak} - \beta_k \tilde{i}_{ak} (L_{srk} \dot{i}_{ak} - \hat{\lambda}_{ak}) + \hat{z}_{bk} \tilde{i}_{bk} - \beta_k \tilde{i}_{bk} (L_{srk} \dot{i}_{bk} - \hat{\lambda}_{bk}) \right], \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_{ak} &= \frac{(\gamma_k - \alpha_k) \tilde{i}_{ak}}{\gamma_{zk}}, \\ \dot{\hat{z}}_{bk} &= \frac{(\gamma_k - \alpha_k) \tilde{i}_{bk}}{\gamma_{zk}}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

y si  $\gamma_{zk} = (\gamma_k - \alpha_k) \gamma_{3k}$  y  $\gamma_{3k} > 0$ , entonces para que  $(\gamma_k - \alpha_k) > 0$  la variable auxiliar  $\gamma_k = \gamma_{2k} - \gamma_{1k} > \bar{\alpha}_k$ , donde  $\bar{\alpha}_k$  es el valor máximo estimado de  $\alpha_k$ . Considerando lo anterior,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_{ak} &= \frac{1}{\gamma_{3k}} \tilde{i}_{ak}, \\ \dot{\hat{z}}_{bk} &= \frac{1}{\gamma_{3k}} \tilde{i}_{bk} \end{aligned} \quad (5.34)$$

y las ecuaciones dinámicas de las variables auxiliares estimadas  $\hat{z}_{ak}$  y  $\hat{z}_{bk}$  son

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_{ak} &= -\left(\gamma_k + \frac{1}{\gamma_3}\right) \tilde{i}_{ak} - \frac{s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{bk}}{\beta_k} + n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{bk}, \\ \dot{\hat{z}}_{bk} &= -\left(\gamma_k + \frac{1}{\gamma_3}\right) \tilde{i}_{bk} + \frac{s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{ak}}{\beta_k} - n_{pk} \dot{q}_k \tilde{i}_{ak}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

La ecuación dinámica del error en los parámetros es  $\dot{\tilde{\alpha}}_k = \dot{\alpha}_k - \hat{\alpha}_k$  y como se considera que el valor de  $\alpha_k$  es un valor constante desconocido  $\dot{\alpha}_k = 0$  por lo que el valor estimado de  $\hat{\alpha}_k = -\tilde{\alpha}_k$ . Por otro lado, se debe cumplir que  $\hat{\alpha}_k > 0$ , por lo que se utiliza el siguiente algoritmo de proyección [Marino, et al. 98] para calcularla

$$\dot{\hat{\alpha}}_k = Proj\left(\frac{1}{\gamma_{\alpha k}} \left[ \hat{z}_{ak} \tilde{i}_{ak} - \beta_k \tilde{i}_{ak} (L_{srk} i_{ak} - \hat{\lambda}_{ak}) + \hat{z}_{bk} \tilde{i}_{bk} - \beta_k \tilde{i}_{bk} (L_{srk} i_{bk} - \hat{\lambda}_{bk}) \right], \hat{\alpha}_k\right) \quad (5.36)$$

con  $\hat{\alpha}_k(0) = \hat{\alpha}_{k0}$  y para el algoritmo de proyección se usan las condiciones siguientes,

$$\begin{aligned} p(\hat{\alpha}_k) &= \frac{\alpha_{km}^2 - \hat{\alpha}_k^2}{2\epsilon\alpha_{km} - \epsilon^2}, \\ \xi &= \frac{1}{\gamma_{\alpha k}} \left[ \hat{z}_{ak} \tilde{i}_{ak} - \beta_k \tilde{i}_{ak} (L_{srk} i_{ak} - \hat{\lambda}_{ak}) + \hat{z}_{bk} \tilde{i}_{bk} - \beta_k \tilde{i}_{bk} (L_{srk} i_{bk} - \hat{\lambda}_{bk}) \right], \\ Proj(\xi, \hat{\alpha}_k) &= \xi \text{ sí } p(\hat{\alpha}_k) \leq 0, \\ Proj(\xi, \hat{\alpha}_k) &= \xi \text{ sí } p(\hat{\alpha}_k) \geq 0 \text{ y } \xi \geq 0, \\ Proj(\xi, \hat{\alpha}_k) &= [1 - p(\hat{\alpha}_k)] \xi \text{ en cualquier otro caso,} \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde  $\alpha_{km} = \frac{R_{rm}}{L_r}$  es el valor mínimo conocido de  $\alpha_k$  y  $R_{rm}$  es el valor mínimo conocido de la resistencia de los devanados del rotor del MI. También  $\epsilon > 0$  tal que  $\alpha_{km} - \epsilon > 0$  y  $\hat{\alpha}_{k0} \geq \alpha_{km}$ .

Sustituyendo en la ecuación (5.25) el valor encontrado de las señales auxiliares  $u_{1k}$ ,  $u_{2k}$ ,  $u_{3k}$  y  $u_{4k}$  y de las señales de control  $\hat{i}_{1k}$  e  $\hat{i}_{2k}$  se obtiene

$$\dot{V} = - \sum_{k=1}^n k_{sk} s_k^2 - \sum_{k=1}^n (\gamma_{2k} + \alpha_k) \tilde{i}_{ak}^2 - \sum_{k=1}^n (\gamma_{2k} + \alpha_k) \tilde{i}_{bk}^2 - \sum_{k=1}^n (\gamma_{fk} + 2\hat{\alpha}_k) \tilde{F}_k^2. \quad (5.38)$$

El algoritmo de proyección tiene las siguientes propiedades

1.  $\hat{\alpha}_k(t) \geq \alpha_{km} - \epsilon$ , para todo  $t \geq 0$ ,
2.  $Proj(\xi, \hat{\alpha}_k)$  es una función continua Lipschitz,
3.  $|Proj(\xi, \hat{\alpha}_k)| \leq |\xi|$ ,
4.  $\tilde{\alpha}_k Proj(\xi, \hat{\alpha}_k) \geq \tilde{\alpha}_k \xi$ .

Al utilizar las propiedades del algoritmo de proyección,  $\dot{V}$  cumple con la desigualdad

$$\dot{V} \leq - \sum_{k=1}^n k_{sk} s_k^2 - \sum_{k=1}^n (\gamma_{2k} + \alpha_k) \tilde{i}_{ak}^2 - \sum_{k=1}^n (\gamma_{2k} + \alpha_k) \tilde{i}_{bk}^2 - \sum_{k=1}^n (\gamma_{fk} + 2\hat{\alpha}_k) \tilde{F}_k^2. \quad (5.39)$$

De las ecuaciones (5.23) y (5.39) y el Lema de Barbalat se concluye que  $s$ ,  $\tilde{i}_{ak}$ ,  $\tilde{i}_{bk}$  y  $\tilde{F}_k$  tienden asintóticamente a cero con  $t \rightarrow \infty$ . Usando lo anterior en las ecuaciones dinámicas (5.32), (5.34) y (5.35) se observa que tienden asintóticamente a cero por lo

que sus respectivas variables están acotadas y por tanto las señales auxiliares (5.26)-(5.29) también están acotadas. De esta manera, todos los estados en las ecuaciones dinámicas de los errores están acotados y los errores de seguimiento tienden a cero, por lo que se puede afirmar que  $\tilde{\lambda}_{ak}$ ,  $\tilde{\lambda}_{bk}$  y  $\tilde{\alpha}_k$  tienden a cero y por tanto se demuestra la convergencia asintótica de los flujos y de los parámetros. De la ecuación

$$\dot{\tilde{q}}_k(t) = -k_{qk}\tilde{q}_k(t) + s_k(t)$$

se tiene que  $\tilde{q}_k(t)$  y  $\dot{\tilde{q}}_k(t)$  son acotados y el error de seguimiento  $\tilde{q}(t)$  converge asintóticamente a cero. Además, las entradas de control también están acotadas ya que son funciones acotadas de los estados.

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente teorema.

**Teorema 5.1** *Sea el robot rígido accionado directamente por motores de inducción (5.11)-(5.8). La ley de control PI (5.5) con las corrientes de referencia  $i_{rk} = [i_{1k} \ i_{2k}]^T$  dadas por*

$$\begin{bmatrix} i_{ark} \\ i_{brk} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{F}_k} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{ak} & -\hat{\lambda}_{bk} \\ \hat{\lambda}_{bk} & \hat{\lambda}_{ak} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{1k} \\ \hat{i}_{2k} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

donde  $\hat{F}_k = \hat{\lambda}_k^T \hat{\lambda}_k$ ,  $\hat{I}_1 = [\hat{i}_{11} \ \hat{i}_{12}]^T$  e  $\hat{I}_2 = [\hat{i}_{21} \ \hat{i}_{22}]^T$  están dadas por (5.30) y (5.31), y  $\hat{\lambda}_k = [\hat{\lambda}_{ak} \ \hat{\lambda}_{bk}]^T$  dada por el observador de flujos (5.12), asegura que todas las señales en lazo cerrado están acotadas y que los errores de seguimiento  $\tilde{q}(t)$ ,  $\dot{\tilde{q}}(t)$  y  $F(t) - F_d(t)$  tienden asintóticamente a cero.

*Observación 5.1:* Es bien conocido que la estimación de parámetros no puede asegurar la convergencia sin condiciones de excitación adecuadas. En el caso del MI se puede lograr la convergencia de las señales de error y de los parámetros estimados como consecuencia de la naturaleza de las señales de excitación que tienen un contenido armónico que pudiera ser suficiente para lograr tal objetivo [Marino, et al. 96], o al menos para que el error de estimación sea pequeño.

*Observación 5.2:* Suponiendo que el observador de flujos es inicializado apropiadamente con  $\hat{\lambda}_k^T(0)\hat{\lambda}_k(0) \geq F_d(0) > 0$ , la ley de control dada por la ecuación (5.40) no contiene singularidades, la demostración ya se ha delineado en el capítulo 4. Esta condición siempre se satisface en la implementación práctica del controlador.

*Observación 5.3:* La complejidad del controlador resultante es mucho mayor que la de los esquemas desarrollados en los capítulos 3 y 4, ya que se tienen que estimar más variables y se tiene que implementar el algoritmo de proyección, por lo que se requiere un esfuerzo computacional mayor.

### 5.3 Simulaciones

Un robot rígido de dos eslabones que se mueve solamente en el plano horizontal y que es accionado por motores de inducción acoplados directamente en las uniones del robot ([SpongVidyasagar89]) se utilizó en las simulaciones para ilustrar el desempeño del controlador propuesto. Los parámetros del robot, de los motores de inducción (cada uno de 2.2 KW) y las condiciones iniciales se eligieron iguales a las reportadas en [Hu, et al. 96] (ver también [PanteleyOrtega97]) y están dados en el apéndice. Las señales de referencia para las posiciones de los eslabones son  $q_{dk} = \sin[(1 - e^{-5t^3})t]$  y el módulo cuadrado del flujo deseado es  $F_{dk} = 4$  que corresponde al valor promedio del flujo considerado en [Hu, et al. 96]. Las ganancias de los controladores de corriente y de los controladores **PI** para los dos grados de libertad son

$$K_F = 200\mathcal{I}_2, K_q = 50\mathcal{I}_2, K_s = 100\mathcal{I}_2,$$

$$K_P = 2\mathcal{I}_2, \text{ y } K_I = 4\mathcal{I}_2.$$

Los resultados de la simulación del desempeño del sistema son mostrados en las figuras 5.1-5.5. Se observa claramente que los objetivos del control se cumplen: la figura 5.1 muestra los errores de seguimiento de posición y la figura 5.2 muestra los errores de seguimiento de velocidad para ambos eslabones; las entradas de control y los estados de los controladores se muestran en las figuras 5.3-5.5: en la figura 5.3 se tienen las corrientes reales y las de referencia, en la figura 5.4 los voltajes de entrada de los devanados del estator de ambos motores y en la figura 5.5 se tienen los errores de estimación de los flujos. En la figura 5.6 se muestra la evolución del error de estimación del parámetro  $\alpha_k$  (que implica la estimación de las resistencias  $R_{rk}$  de los motores) y aunque no se logra la convergencia, el error de estimación es pequeño.

### 5.4 Conclusiones

En este capítulo abordamos el problema de control adaptable de trayectoria de un robot rígido accionado directamente por motores de inducción. En el robot se utiliza la técnica de control centralizado y se considera que se conoce con precisión su modelo. En los motores de inducción se utiliza un control no lineal adaptable con comando de corrientes tomando como base el modelo reducido de cuarto orden del MI y se considera la incertidumbre paramétrica de las resistencias eléctricas de los devanados del rotor. Se retroalimentan las señales de posición y velocidad del robot y las corrientes de los devanados del estator, mientras que las corrientes de los devanados del estator y los flujos producidos por los devanados del rotor son estimados mediante observadores en lazo cerrado. Utilizando un estimador del parámetro  $\alpha_k$  de los MI se diseña un controlador que garantiza el acotamiento de todas las señales

y la estabilidad asintótica del sistema. Los resultados de las simulaciones muestran que a pesar de que se ignoran las dinámicas de las corrientes de los devanados de estator en el diseño del controlador, el sistema de control resultante proporciona una buena respuesta en lazo cerrado.

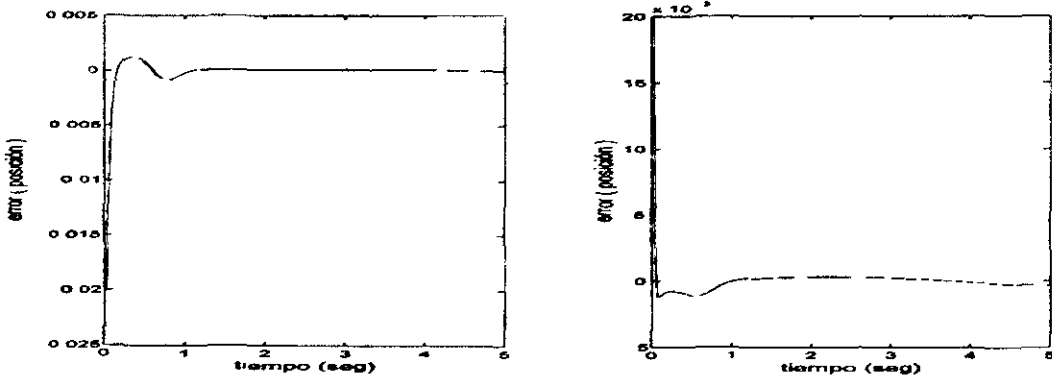


Figura 5.1: Error de seguimiento de posición  $\tilde{q}_k$  para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha).

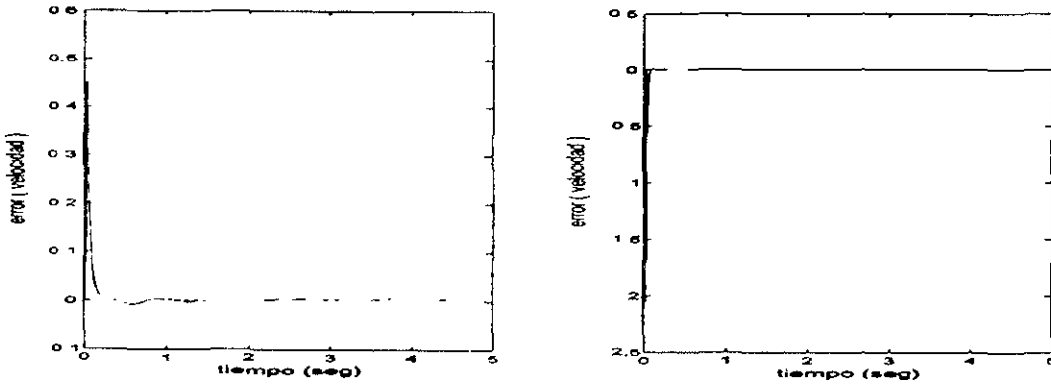
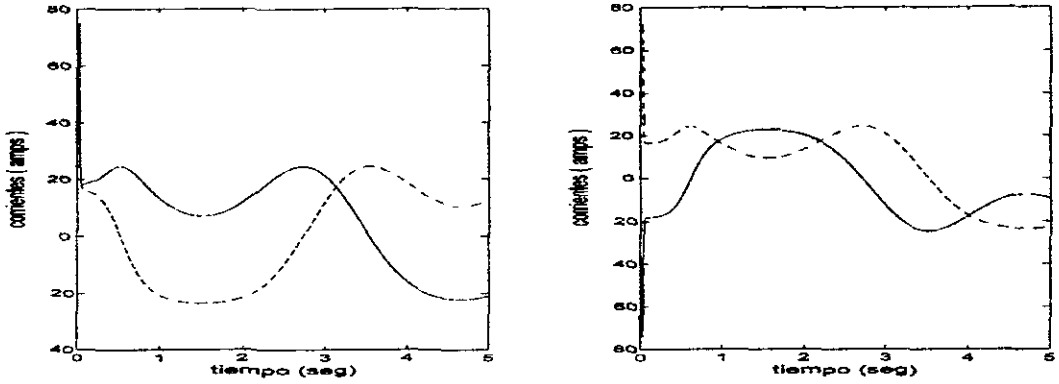
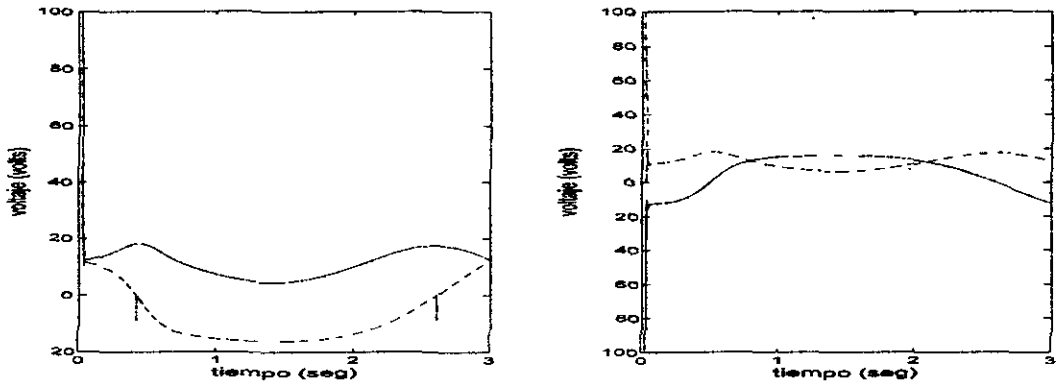


Figura 5.2: Error de seguimiento de velocidad  $\dot{\tilde{q}}_k$  para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha).

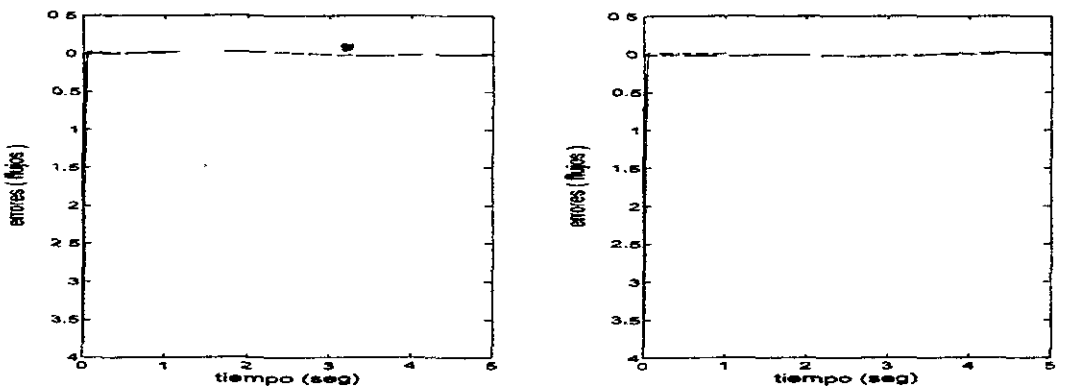




**Figura 5.3:** Corrientes de los devanados del estator para el motor 1 (izquierda) y motor 2 (derecha): corriente  $i_a$  (línea punteada) y corriente  $i_b$  (línea sólida).



**Figura 5.4:** Voltajes de entrada para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha):  $v_a$  (línea punteada) y  $v_b$  (línea sólida).



**Figura 5.5:** Errores de estimación y de seguimiento de flujos para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha):  $\tilde{F} = \hat{F} - F_d$  (línea punteada) y  $F - F_d$  (línea sólida).

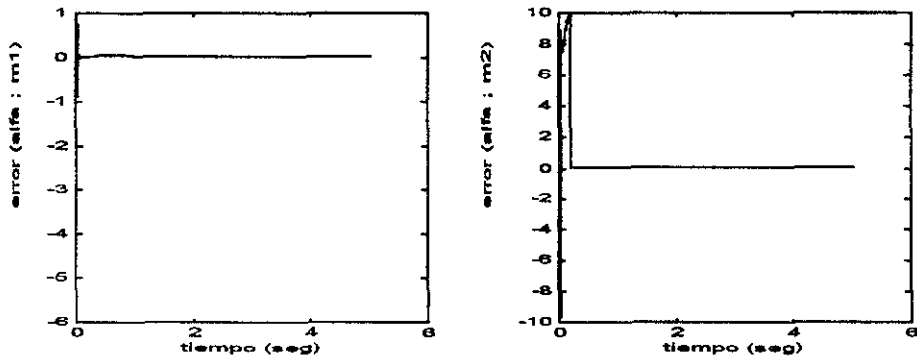


Figura 5.6: Errores de estimación de los parámetros de los MI.



# Capítulo 6

## Control descentralizado

En este capítulo abordamos el problema de control de trayectoria de un robot rígido accionado directamente por motores de inducción utilizando la técnica de control descentralizado en el robot, en la cual cada unión del robot se considera como un subsistema acoplado con los demás.

La mayoría de las técnicas de control de robots tienen una estructura centralizada y requieren de cálculos extensos. Como una solución alterna, se ha propuesto el control descentralizado de robots accionados por motores de CD. Este capítulo usa la técnica de control robusto descentralizado para compensar la incertidumbre paramétrica y las interconexiones entre los eslabones del robot y se diseña un controlador independiente para cada actuador. El controlador tiene varias ventajas con respecto a las estructuras de control centralizado, como por ejemplo, la simplicidad de su implementación y tolerancia a ciertas fallas locales.

### 6.1 Planteamiento del problema

Se considera un robot rígido accionado por motores de inducción acoplados directamente a las uniones del robot. Se consideran parámetros conocidos en el MI, se tienen disponibles para medición la posición, la velocidad y las corrientes de los devanados del estator, no se puede medir las variables del rotor por lo que es necesario estimarlas utilizando un observador de flujos. El modelo del robot no se conoce con precisión y se pueden considerar perturbaciones debidas a las interconexiones entre sus eslabones.

El método propuesto está basado en el modelo bifásico equivalente con el marco de referencia fijo en el estator (modelo *ab*), y para el *k*-ésimo motor está dado por

$$\dot{\theta}_{rk} = \omega_{rk}, \tag{6.1}$$

$$D_{mk}\dot{\omega}_{rk} = D_{mk}\mu_k' \mathcal{J} \lambda_k - \tau_{Lk}, \tag{6.2}$$

$$\dot{\lambda}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \lambda_k + \alpha_k L_{srk} i_k, \quad (6.3)$$

$$\dot{i}_k = (\alpha_k \beta_k \mathcal{I}_2 - n_{pk} \omega_{rk} \beta_k \mathcal{J}) \lambda_k - \left( \frac{R_{sk}}{\sigma_k} + \alpha_k \beta_k L_{srk} \right) i_k + \frac{1}{\sigma_k} v_k, \quad (6.4)$$

también se utiliza la técnica de control por campo orientado comandado por corriente, con controladores **PI** dados por

$$v_k = K_P (i_{rk} - i_k) + K_I \int_0^t (i_{rk} - i_k) dt, \quad K_P, K_I \gg \mathcal{I}_2, \quad (6.5)$$

por lo que el modelo reducido es

$$\dot{\theta}_{rk} = \omega_{rk}, \quad (6.6)$$

$$D_{mk} \dot{\omega}_{rk} = D_{mk} \mu_k i_{rk}^T \mathcal{J} \lambda_k - \tau_{Lk}, \quad (6.7)$$

$$\dot{\lambda}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \lambda_k + \alpha_k L_{srk} i_{rk}, \quad (6.8)$$

y el módulo cuadrado del flujo  $F_k$  y su ecuación dinámica

$$\dot{F} = -2\alpha \dot{F} + B_F I_1. \quad (6.9)$$

con los parámetros y definiciones dados en el Apéndice A y en el capítulo 4.

En el capítulo 2 se obtuvo el modelo matemático del robot rígido de  $n$  uniones utilizando la formulación Euler-Lagrange

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau \quad (6.10)$$

que cumple con las propiedades **P 2.2.1** - **P 2.2.4** (pp. 19 y 20). Por otro lado, para el método de control descentralizado propuesto, cada unión del robot forma un subsistema que se controla en forma independiente y se deben considerar las interconexiones y perturbaciones locales de cada unión, para lo cual se adapta la forma de la ecuación (6.10) a

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) + F_f(q, \dot{q}) + T = u, \quad (6.11)$$

donde  $F_f(q, \dot{q})$  son los pares de fricción,  $T$  son los pares de perturbación y  $u$  son los pares de control aplicados a cada unión. Los elementos de las matrices están acotados y cumplen con la siguiente propiedad [Craig88] que se refiere al acotamiento de cada uno de los elementos de la ecuación:

**P 6.1.1** Sean  $m_{kj}$ ,  $c_{kj}$ ,  $g_k$ ,  $F_{fk}$ ,  $T_k$  los elementos de las matrices  $M$ ,  $C$ ,  $g$ ,  $F_f$  y  $T$  respectivamente, y sean  $0 < \underline{m} \leq \bar{m}$ ,  $k_{kj}^i$ ,  $k_k^i \geq 0$ , para  $k, j = 1, 2, \dots, n$  algunas constantes. Entonces se cumple que  $\forall q \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\underline{m}I \leq M(q) = M^T(q) \leq \bar{m}I, \quad |m_{kj}(q)| \leq k_{kj}^0, \quad |g_k(q)| \leq k_k^1,$$

$$|c_{kj}(q, \dot{q})| = \left| \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i \right| \leq \sum_{i=1}^n k_i^2 |\dot{q}_i| \quad (6.12)$$

$$|F_{fk}(\dot{q}_k)| \leq k_k^3 + k_k^4 |\dot{q}_k|, \quad |T_k| \leq k_k^5$$

Considerando que los motores de inducción se acoplan directamente a las uniones del robot, el sistema mecánico completo (robot + motores) es representado por

$$D(q)\ddot{q} + [C(q, \dot{q}) + R_m]\dot{q} + g(q) + F_f(q, \dot{q}) + T = B_m I_2 \quad (6.13)$$

con los parámetros y definiciones dados en el capítulo 4 y en los apéndices.

El problema de control se puede establecer de la siguiente manera: sea la trayectoria deseada en el robot representada por las posiciones  $q_k^d(t)$  y las velocidades  $\dot{q}_k^d(t)$  en las  $k$  uniones del robot, y sea  $F_{dk}$  la norma deseada para el flujo del rotor del  $k$ -ésimo motor, con las señales de referencia  $q^d$ ,  $\dot{q}^d$ ,  $\ddot{q}^d$  y  $F_d$ ,  $\dot{F}_d$  acotadas, diseñar una ley de control que asegure el seguimiento de la trayectoria deseada  $q^d(t) \in \mathbb{R}^n$  y del módulo cuadrado de flujo deseado  $F_d(t) \in \mathbb{R}^n$ , la estabilidad interna y el acotamiento de todas las señales del sistema. En particular, se desea aplicar la técnica de control robusto descentralizado en el sistema mecánico combinado (MI+robot) y el control no lineal comandado por corriente basado en observadores de flujo en los MI. Considerar conocido el modelo del MI y que el modelo del robot no se conoce con precisión.

## 6.2 Diseño del controlador

Para el diseño del controlador seguimos un procedimiento similar al utilizado en el capítulo 4. En primer lugar se propone un observador de los flujos producidos por los devanados del rotor de los MI. Posteriormente se trata el error de seguimiento de la trayectoria deseada en el subsistema mecánico combinado y por último se utiliza el análisis de estabilidad de Lyapunov para encontrar la ley de control deseada.

### 6.2.1 Observador de flujos

Debido a que no se puede medir ni las corrientes del rotor ni los flujos producidos por las mismas, se utiliza el observador de flujos,

$$\dot{\hat{\lambda}}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \hat{\lambda}_k + \alpha_k L_{srk} i_{rk} - \mu_k D_{mk} s_k \mathcal{J} i_{rk}, \quad (6.14)$$

la ecuación dinámica del error de observación  $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k - \hat{\lambda}_k$  dada por

$$\dot{\tilde{\lambda}}_k = (-\alpha_k \mathcal{I}_2 + n_{pk} \omega_{rk} \mathcal{J}) \tilde{\lambda}_k - \mu_k D_{mk} s_k \mathcal{J} i_{rk}, \quad (6.15)$$

y la ecuación dinámica del error del módulo cuadrado del flujo  $\tilde{F} = \hat{F} - F_d$  dada por

$$\dot{\tilde{F}} = -2\alpha\tilde{F} + B_F\hat{I}_1 - (\dot{F}_d + 2\alpha F_d) + 2B_m S\hat{I}_2 \quad (6.16)$$

con los parámetros y definiciones dados en el capítulo 4 y en los apéndices.

## 6.2.2 Ecuación del error combinado de seguimiento

Aquí se plantea la ecuación del error de seguimiento de la trayectoria deseada en el robot. El procedimiento está basado en el método de [SlotineLi86] descrito en el Apéndice B. Dado el error combinado de seguimiento  $s = \dot{\tilde{q}} + \Gamma_q \tilde{q}$ , se desea diseñar un controlador para lograr que  $s_k(t)$  sea uniformemente acotada, lo cual implica que  $\tilde{q}_k(t)$ ,  $\dot{\tilde{q}}_k(t)$  están uniformemente acotadas.

En términos de  $s$ , la ecuación del sistema mecánico completo (6.13) se escribe como

$$D(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s = B_m\hat{I}_2 + B_m\tilde{I}_2 - h(q, \dot{q}, \dot{q}_r; \ddot{q}_r), \quad (6.17)$$

donde  $h(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) = D(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + g(q) + F_f(\dot{q}) + T$ ,  $R_m = 0$  y  $\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Gamma_q \tilde{q}$ .

Por conveniencia, se hace un cambio de notación en la trayectoria deseada y se usan los superíndices  $(\cdot)^d$  y  $(\cdot)^r$  en lugar de los subíndices  $(\cdot)_d$  y  $(\cdot)_r$  para los valores deseados y de referencia, respectivamente. Se desarrolla el vector  $h(q, \dot{q}, \dot{q}^r, \ddot{q}^r)$  para obtener sus elementos  $h_k$  que se pueden expresar como (ver [SpongVidyasagar89])

$$h_k = \sum_{j=1}^n d_{kj}(q)\ddot{q}_j^r + \sum_{j=1}^n c_{kj}(q, \dot{q})\dot{q}_j^r + g_k(q) + F_{fk}(\dot{q}_k) + T_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.18)$$

Además, en el análisis de estabilidad, serán utilizados los siguientes Lemas:

*Lema 1:* Para un valor de  $\gamma_{qk}$  suficientemente elevado, existe un valor de  $\delta_{kj} \geq 0$ , tal que

$$|h_k| \leq \sum_{j=1}^n \delta_{kj} S_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.19)$$

donde  $S_k$  es definido de la siguiente manera

$$S_k \triangleq 1 + |s_k| + |s_k|^2. \quad (6.20)$$

*Prueba:* Utilizando la propiedad 6.1.1 se tiene que  $\forall q, \dot{q} \in R^n$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_{kj}(q, \dot{q})\dot{q}_j^r &\leq \sum_{j=1}^n |c_{kj}(q, \dot{q})| |\dot{q}_j^r| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n k_i^2 |\dot{q}_i| \right\} |\dot{q}_j^r| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left\{ k_j^6 |\dot{q}_j|^2 + k_j^7 |\dot{q}_j^r|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Debido a que la trayectoria deseada  $q^d$ ,  $\dot{q}^d$ ,  $\ddot{q}^d$  es acotada, se obtiene

$$\begin{aligned} |\ddot{q}_j^r| &= |\ddot{q}_j^d - \lambda_j \ddot{q}_j| \leq |\ddot{q}_j^d| + \lambda_j |\ddot{q}_j| \leq k_j^8 + k_j^9 |q_j|, \\ |\ddot{q}_j^r| &= |\ddot{q}_j^d - \lambda_j \dot{q}_j^d| \leq |\ddot{q}_j^d| + \lambda_j |\dot{q}_j^d| \leq k_j^{10} + k_j^{11} |\dot{q}_j|. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |h_k| &\leq \sum_{j=1}^n |m_{kj}(q)| |\ddot{q}_j^r| + \sum_{j=1}^n |c_{kj}(q, \dot{q})| |\dot{q}_j^r| + |g_k(q)| + k_k^3 + k_k^4 |\dot{q}_k| + k_k^5 \\ &\leq \sum_{j=1}^n k_{kj}^0 \{k_j^{10} + k_j^{11} |\dot{q}_j|\} + \sum_{j=1}^n \{k_j^6 |\dot{q}_j|^2 + k_j^7 (k_j^8 + k_j^9 |q_j|)^2\} + k_k^1 + k_k^3 + k_k^4 |\dot{q}_k| + k_k^5 \\ &= \sum_{j=1}^n \{k_j^{12} + k_j^{13} |q_j| + k_j^{14} |q_j|^2 + k_j^{15} |\dot{q}_j| + k_j^{16} |\dot{q}_j|^2\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Con el error combinado de seguimiento definido como

$$s_k = \ddot{q}_k + \gamma_{qk} \tilde{q}_k = \dot{q}_k + \gamma_{qk} q_k - (\dot{q}_k^d + \gamma_{qk} q_k^d), \quad (6.24)$$

se obtiene

$$\gamma_{qk} |q_k| \leq |s_k| + |\dot{q}_k| + k_k^{17}. \quad (6.25)$$

Por otro lado, las velocidades de los eslabones están acotados por

$$|\dot{q}_k| \leq k_k^{18} |q_k| + k_k^{19} \quad (6.26)$$

y si se usan valores de ganancias tales que

$$\gamma_{qk} > k_k^{18}, \quad (6.27)$$

en las dos últimas desigualdades se tiene

$$|q_k| \leq \frac{1}{\gamma_{qk} - k_k^{18}} \{|s_k| + k_k^{20}\}, \quad (6.28)$$

$$|\dot{q}_k| \leq \frac{k_k^{18}}{\gamma_{qk} - k_k^{18}} \{|s_k| + k_k^{21}\}. \quad (6.29)$$

Por último, sustituyendo en las desigualdades (6.23) y (6.29),

$$|h_k| \leq \sum_{j=1}^n \{k_{kj}^1 + k_{kj}^2 |s_j| + k_{kj}^3 |s_j|^2\} \leq \sum_{j=1}^n \delta_{kj} S_j. \quad (6.30)$$

*Lema 2:* Para el  $k$ -ésimo error combinado de seguimiento  $s_k$  y  $S_k$  definida en (6.20),

$$\sum_{k=1}^n |s_k| \sum_{j=1}^n S_j \leq n \sum_{k=1}^n |s_k| S_k. \quad (6.31)$$

*Prueba:* Se obtiene directamente de la desigualdad de Chebyshev

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \sum_{j=1}^n b_j \leq n \sum_{k=1}^n a_k b_j, \quad (6.32)$$

para  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ,  $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ .



### 6.2.3 Análisis de estabilidad del sistema

Para realizar este análisis se consideran las ecuaciones dinámicas de los errores (6.15), (6.16) y (6.17), se desarrolla (6.15) y se usa la siguiente función positiva definida como función de Lyapunov candidata

$$V = \frac{1}{2} s^T D(q) s + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{ak}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{bk}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tilde{F}_k^2. \quad (6.33)$$

La derivada con respecto del tiempo de (6.33) a lo largo de las trayectorias de los errores es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T D \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{D} s + \sum_{k=1}^n \tilde{F}_k \dot{\tilde{F}}_k + \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{ak} \dot{\tilde{\lambda}}_{ak} + \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{bk} \dot{\tilde{\lambda}}_{bk} \\ &= s^T (B_m \tilde{I}_2 + B_m \hat{I}_2 - h) + \frac{1}{2} s^T (\dot{D} - 2C) s \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{ak} [-\alpha_k \tilde{\lambda}_{ak} - n_{pk} \dot{q}_k \tilde{\lambda}_{bk} - s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{bk}] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{bk} [-\alpha_k \tilde{\lambda}_{bk} + n_{pk} \dot{q}_k \tilde{\lambda}_{ak} + s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{ak}] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \tilde{F}_k [-2\alpha_k \tilde{F}_k + 2\alpha_k L_{srk} \hat{i}_{1k} + 2s_k D_{mk} \mu_k \hat{i}_{2k} - \dot{F}_{dk}], \end{aligned}$$

usando la propiedad de anti-simetría de la matriz  $[\dot{D} - 2C]$  se obtiene  $[s^T (\dot{D} - 2C) s = 0]$ , desarrollando el término  $s^T B_m \tilde{I}_2 = \sum_{k=1}^n [s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{bk} \tilde{\lambda}_{ak} - s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{ak} \tilde{\lambda}_{bk}]$ , agrupando adecuadamente los términos similares y cancelando términos se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T (B_m \hat{I}_2 - h) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{ak} [-\alpha_k \tilde{\lambda}_{ak} - s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{bk}] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{bk} [-\alpha_k \tilde{\lambda}_{bk} + s_k D_{mk} \mu_k \dot{i}_{ak}] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \tilde{F}_k [-2\alpha_k (\tilde{F}_k + F_d) + 2\alpha_k L_{srk} \hat{i}_{1k} + 2s_k D_{mk} \mu_k \hat{i}_{2k} - \dot{F}_{dk}], \\ &= s^T (B_m \hat{I}_2 - h) + \sum_{k=1}^n [-\alpha_k \tilde{\lambda}_{ak}^2] + \sum_{k=1}^n [-\alpha_k \tilde{\lambda}_{bk}^2] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \tilde{F}_k [-2\alpha_k (\tilde{F}_k + F_d) + 2\alpha_k L_{srk} \hat{i}_{1k} + 2s_k D_{mk} \mu_k \hat{i}_{2k} - \dot{F}_{dk}]. \quad (6.34) \end{aligned}$$

Si se eligen

$$\hat{i}_{1k} = \frac{1}{2\alpha_k L_{srk}} (-\gamma_{fk} \tilde{F}_k + (\dot{F}_{dk} + 2\alpha_k F_{dk}) - 2s_k D_{mk} \mu_k \hat{i}_{2k}), \quad (6.35)$$

$$\hat{i}_{2k} = \frac{1}{D_{mk} \mu_k} (-\gamma_{sk} s_k + w_k), \quad (6.36)$$

donde  $\gamma_{fk} > 0$  y  $\gamma_{sk} > 0$  son ganancias de los controladores, y  $w_k$  es una señal adicional que se determina más adelante, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \sum_{k=1}^n \gamma_{sk} s_k^2 + \sum_{k=1}^n s_k (w_k - h_k) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \tilde{\lambda}_{ak}^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \tilde{\lambda}_{bk}^2 \\ & - \sum_{k=1}^n (\gamma_{fk} + 2\alpha_k) \tilde{F}_k^2. \end{aligned} \quad (6.37)$$

En esta expresión se observa que todos los términos del lado derecho, excepto el segundo, son negativos definidos, así que se debe analizar éste para obtener una señal  $w$  apropiada. La señal  $w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]^T$  se debe diseñar para compensar el acoplamiento entre las diferentes uniones del robot, los pares de fricción, las perturbaciones de carga y la incertidumbre en los parámetros del robot y para lograrlo se propone la señal

$$w_k = -(\delta S_k)^2 \frac{s_k}{\delta S_k |s_k| + \epsilon_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.38)$$

donde  $S_k$  está dada por (6.20),  $\epsilon_k > 0$  es un parámetro de diseño, y  $\delta > 0$  es un parámetro dependiente de la cota de la incertidumbre paramétrica de las perturbaciones y de las interconexiones (ver (6.40) definida posteriormente). Para que el análisis de estabilidad esté completo se introduce la señal propuesta y se desarrolla el segundo término de la derecha de la ecuación (6.37) para obtener el acotamiento del sistema

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n s_k (w_k - h_k) & \leq \sum_{k=1}^n \{s_k w_k + |s_k| |h_k|\} \\ & \leq \sum_{k=1}^n s_k w_k + \sum_{k=1}^n |s_k| \sum_{j=1}^n \delta_{kj} S_j \\ & \leq \sum_{k=1}^n s_k w_k + \max_{k,j} \{\delta_{kj}\} \sum_{k=1}^n |s_k| \sum_{j=1}^n S_j \\ & \leq \sum_{k=1}^n \{s_k w_k + \delta |s_k| S_k\} \\ & = \sum_{k=1}^n \left\{ -(\delta S_k)^2 \frac{s_k^2}{\delta S_k |s_k| + \epsilon_k} + \delta |s_k| S_k \right\} \\ & = \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon_k \delta |s_k| S_k}{\delta S_k |s_k| + \epsilon_k} \\ & \leq \sum_{k=1}^n \epsilon_k = \epsilon, \end{aligned} \quad (6.39)$$

donde

$$\delta \triangleq n \max_{i,j} \{\delta_{ij}\}. \quad (6.40)$$

De las ecuaciones (6.37) y (6.39) y un procedimiento similar al desarrollado en los capítulos 3 y capítulo 4 se encuentra que

$$\dot{V} \leq -cV + \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (6.41)$$

donde

$$c = \min\left(\frac{\lambda[\Gamma_s]}{\lambda[D]}, \lambda[\alpha], \lambda[\Gamma_F + 2\alpha]\right) \quad (6.42)$$

y por lo tanto

$$V(t) \leq \left\{V(t_0) - \frac{\epsilon}{c}\right\} e^{-c(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{c}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (6.43)$$

Por lo anteriormente expuesto, todos los estados en las ecuaciones dinámicas de los errores están uniformemente acotados y tienden exponencialmente a un conjunto residual centrado en el origen y con un radio proporcional a  $\epsilon/c$ , el cual puede hacerse arbitrariamente pequeño si se eligen adecuadamente los parámetros de diseño. De la ecuación

$$\dot{\tilde{q}}_k(t) = -\gamma_{qk} \tilde{q}_k(t) + s_k(t),$$

se deduce que  $\tilde{q}_k(t)$ ,  $\dot{\tilde{q}}_k(t)$  están uniformemente acotados, y el error de seguimiento  $\tilde{q}(t)$  converge exponencialmente a un conjunto residual. También la señal de control está acotada ya que es una función acotada de los estados.

Los resultados anteriores son presentados en el siguiente teorema:

**Teorema 6.1** *Considerar el robot rígido accionado directamente por motores de inducción (6.13)-(6.8). Si se utiliza la ley de control PI (6.5) con las corrientes de referencia  $i_{rk} = [i_{1k} \ i_{2k}]^T$  dadas por*

$$\begin{bmatrix} i_{ak} \\ i_{bk} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{F}_k} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{ak} & -\hat{\lambda}_{bk} \\ \hat{\lambda}_{bk} & \hat{\lambda}_{ak} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{1k} \\ \hat{i}_{2k} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

donde  $\hat{F}_k = \hat{\lambda}_k^T \hat{\lambda}_k$ ,  $\hat{I}_1 = [\hat{i}_{11} \ \hat{i}_{12}]^T$  e  $\hat{I}_2 = [\hat{i}_{21} \ \hat{i}_{22}]^T$  están dadas por las ecuaciones (6.35) y (6.36), y  $\hat{\lambda}_k = [\hat{\lambda}_{ak} \ \hat{\lambda}_{bk}]^T$  por el observador de flujos (6.14), se asegura que todas las señales en el lazo cerrado están uniformemente acotadas y el error de seguimiento  $\tilde{q}(t)$ ,  $\dot{\tilde{q}}(t)$  y  $F(t) - F_d(t)$  están uniformemente acotadas.

*Observación 6.1:* Si el observador de flujos se inicializa adecuadamente con  $\hat{\lambda}_k^T(0)\hat{\lambda}_k(0) \geq F_d(0) > 0$ , la ley de control dada por la ecuación (6.44) no contiene singularidades y esta condición siempre se satisface en la implementación práctica del controlador. La demostración se desarrolló en el capítulo 4.

## 6.3 Simulaciones

Un robot rígido de dos eslabones que se mueve solamente en el plano horizontal y que es accionado por motores de inducción acoplados directamente en las uniones del robot (descrito en el capítulo 2) se utilizó en las simulaciones para ilustrar el desempeño del controlador propuesto. Los parámetros del robot, de los motores de inducción (cada uno de 2.2 KW) y las condiciones iniciales se eligieron iguales a las reportadas en [Hu, et al. 96] (ver también [PanteleyOrtega97]) y están dados en el Apéndice C. Las señales de referencia para las posiciones de los eslabones son  $q_k^d = \sin[(1 - e^{-5t^3})t]$ , y el módulo cuadrado del flujo deseado es  $F_{dk} = 4$  que corresponde al valor promedio del flujo considerado en [Hu, et al. 96]. Las ganancias de los controladores de corriente y las de los controladores **PI** para los dos grados de libertad son

$$\Gamma_F = 50\mathcal{L}_2, \Gamma_q = 50\mathcal{L}_2, \Gamma_s = 20\mathcal{L}_2,$$

$$K_P = 2\mathcal{L}_2, K_I = 4\mathcal{L}_2$$

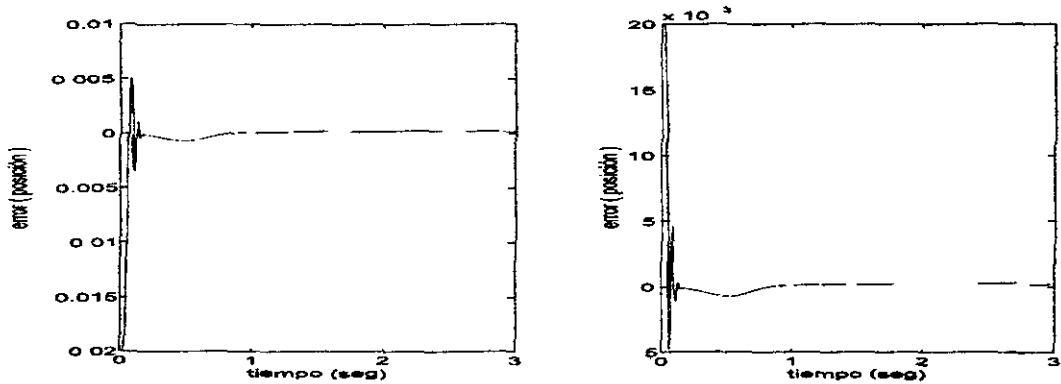
y los parámetros de diseño son  $\delta_k = 0.1$ ,  $\epsilon_k = 0.01$ .

los resultados de la simulación del desempeño del sistema son mostrados en las figuras 6.1-6.5. Se observa claramente que los objetivos del control se cumplen: la figura 6.1 muestra los errores de seguimiento de posición para ambos eslabones; la figura 6.2 muestra los errores de seguimiento de velocidad para ambos eslabones; las entradas de control y los estados de los controladores se muestran en las figuras 6.3-6.5: en la figura 6.3 se tienen las corrientes reales y las de referencia y en la figura 4.6 los voltajes de entrada de los devanados del estator de ambos motores; por último, en la figura 6.5 se tienen los errores de estimación de los flujos.

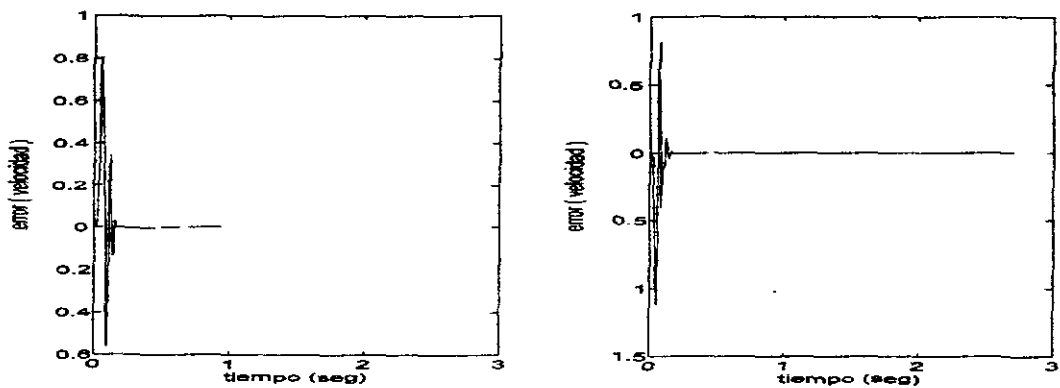
## 6.4 Conclusiones

En este capítulo abordamos el problema de control de trayectoria de un robot rígido con movimiento en el plano horizontal accionado directamente por motores de inducción. Se diseña un controlador suponiendo que se conocen los parámetros de los MI y considerando incertidumbre paramétrica en el robot. En el subsistema mecánico se utiliza la técnica de control descentralizado para compensar la incertidumbre, las interconexiones entre los eslabones y las perturbaciones de la carga. En los motores de inducción se utiliza el control con comando de corrientes tomando como base el modelo reducido de cuarto orden del MI, se retroalimentan las señales de posición y velocidad del robot y las corrientes de los devanados del estator, mientras que los flujos del rotor son estimados mediante un observador en lazo cerrado. Si el observador de flujos del rotor es inicializado apropiadamente, el controlador resultante para el sistema completo MI-robot rígido no contiene singularidades, asegura el seguimiento de la trayectoria deseada en el robot, el acotamiento de las señales internas y la

estabilidad práctica del sistema. Además, el error de seguimiento se puede hacer arbitrariamente pequeño si se eligen adecuadamente los parámetros de diseño.



**Figura 6.1:** Error de seguimiento de posición  $\tilde{q}_k$  para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha).



**Figura 6.2:** Error de seguimiento de velocidad  $\dot{\tilde{q}}_k$  para el lazo 1 (izquierda) y para el lazo 2 (derecha).

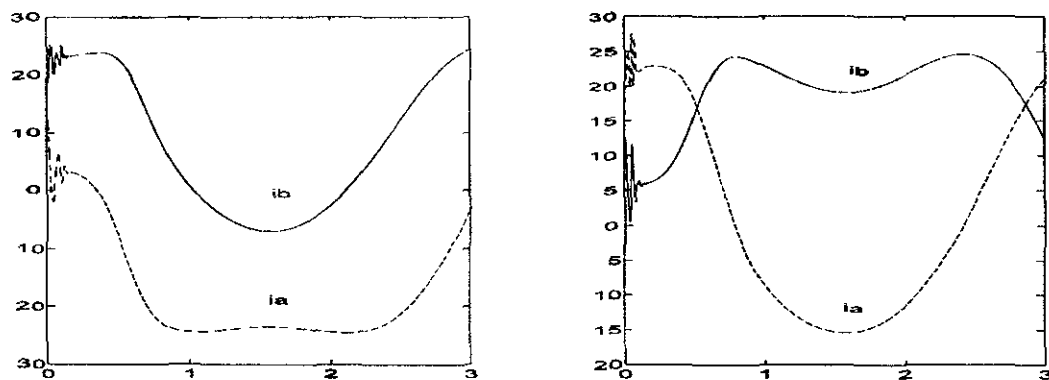


Figura 6.3: Corrientes de los devanados del estator para el motor 1 (izquierda) y motor 2 (derecha): corriente  $i_a$  (línea punteada) y corriente  $i_b$  (línea sólida).

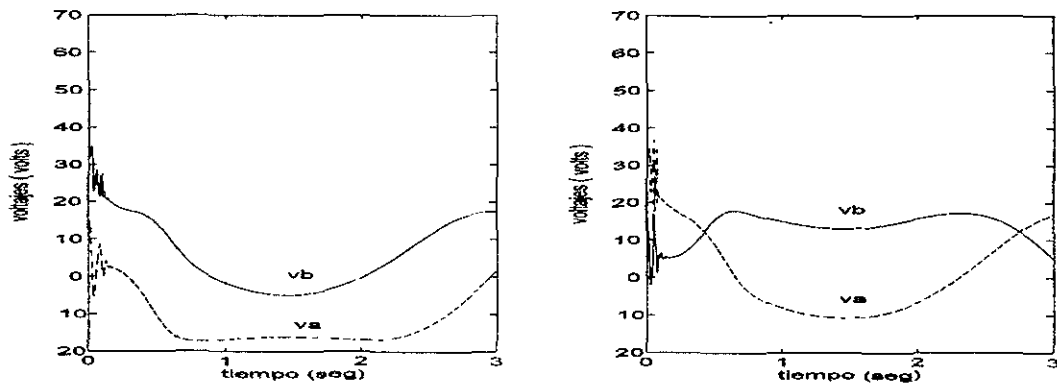


Figura 6.4: Voltajes de entrada para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha):  $v_a$  (línea punteada) y  $v_b$  (línea sólida).

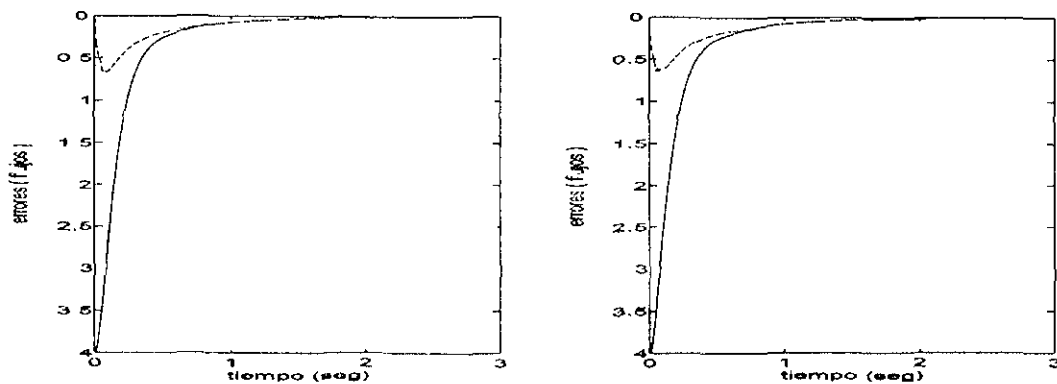


Figura 6.5: Errores de estimación y de seguimiento de flujos para el motor 1 (izquierda) y para el motor 2 (derecha):  $\tilde{F} = \hat{F} - F_d$  (línea punteada) y  $F - F_d$  (línea sólida).



# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo se han presentado varios esquemas de control de un robot rígido accionado directamente por motores de inducción con el objetivo de seguir una trayectoria deseada de posición y velocidad. Ya que el objetivo fundamental de control es lograr una alta precisión en el seguimiento de la trayectoria deseada, se considera indispensable utilizar métodos de diseño basados en la teoría de sistemas no lineales utilizando la formalidad matemática y el rigor analítico requerido. En este aspecto, el procedimiento de diseño delineado en el capítulo 1, consta de los siguientes pasos:

1. Se considera la trayectoria deseada del sistema combinado (MI+robot) para diseñar un par (deseado) que cumpla con dicha trayectoria.
2. El par deseado impone ciertas restricciones a la operación de los MI, en forma de los flujos magnéticos deseados; el par y los flujos deseados se pueden expresar en función de corrientes deseadas; En caso de ser necesario, se utilizan observadores de estado para las variables que no se pueden medir; se obtienen las ecuaciones dinámicas de los errores de seguimiento y observación del sistema.
3. Se realiza el análisis de Lyapunov y se diseñan las leyes de control y adaptación (en caso de ser necesario) que aseguran el comportamiento deseado del sistema.

Siguiendo los pasos de este procedimiento se diseñaron los diferentes controladores expuestos en este trabajo.

En el primer esquema de control propuesto se considera el conocimiento exacto del modelo del robot y un control centralizado del mismo basado en la técnica de control del error combinado de seguimiento [SlotineLi86] del sistema mecánico combinado (MI+robot). Para el diseño del controlador se parte de los resultados obtenidos en [EspinosaOrtega94] en donde utilizando una metodología basada en pasividad y moldeo de energía se desarrolla un controlador nominal para un motor de inducción que asegura la estabilidad exponencial del sistema en lazo cerrado considerando que se conocen con precisión los parámetros del MI. *La aportación principal en el esquema presentado aquí es el diseño de un controlador no lineal robusto basado en*



*la técnica de rediseño de Lyapunov para enfrentar la incertidumbre paramétrica. Se utiliza el modelo completo del motor, suponiendo conocido el estado del sistema y considerando incertidumbre paramétrica en las resistencias eléctricas de los devanados. El controlador robusto resultante es simple ya que no se utilizan técnicas de adaptación de parámetros para enfrentar la incertidumbre paramétrica, se garantiza el seguimiento de la trayectoria deseada, el acotamiento de todas las señales y la estabilidad práctica del sistema. Una característica relevante de este esquema es utiliza el modelo completo del MI, que considera la incertidumbre paramétrica de ambos devanados (del estator y del rotor) y su principal desventaja es la consideración del conocimiento del estado completo.*

En el segundo esquema de control presentado, basado en el control por campo orientado comandado por corrientes (control PI en el lazo externo de corrientes) para el MI, se usa el modelo reducido de cuarto orden del motor y se diseña un controlador no lineal que considera el conocimiento exacto del sistema (robot y motores), se utiliza retroalimentación de salida por lo que es necesario estimar las variables de estado del rotor por medio de un observador de lazo cerrado. El controlador se diseña usando el método de Lyapunov y se logra el seguimiento de la trayectoria deseada, acotamiento de señales y estabilidad exponencial. *Aunque la principal limitación de este esquema es la suposición del conocimiento exacto de los parámetros del sistema, el controlador resultante presenta cierto grado de robustez ante la presencia de incertidumbre paramétrica. Este esquema sirve como base para los controladores adaptable y descentralizado diseñados posteriormente.*

Para subsanar la limitación del esquema anterior, se desarrolla un controlador no lineal adaptable en el cual se considera el modelo reducido del MI con incertidumbre paramétrica en las resistencias eléctricas de los devanados del rotor y se utiliza la retroalimentación de salida, por lo que es necesario un observador para estimar las variables del rotor no disponibles para medición y otros observadores para estimar otras variables que son de utilidad en el análisis de estabilidad y para lograr la adaptación de los parámetros constantes desconocidos del rotor; en el robot se considera un control centralizado y se supone el conocimiento exacto del modelo. Con este controlador no lineal adaptable se logra el seguimiento de la trayectoria deseada, acotamiento de señales y estabilidad asintótica del sistema. *Una característica relevante de este esquema es que en el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado se consideran el controlador, el observador de flujos y la ley de adaptación de los parámetros del motor, es decir, se consideran las condiciones reales del comportamiento del MI, lo que lo hace muy completo. Su principal desventaja es que su implementación resulta ser más complicada, comparada con los otros esquemas presentados.*

El último esquema de control desarrollado considera que no se conoce con precisión el modelo del robot y se utiliza una técnica de control robusto descentralizado para enfrentar la incertidumbre paramétrica, los acoplamientos entre las uniones del

---

robot y las perturbaciones de la carga. En el motor de inducción se considera que se conoce el modelo pero no el estado completo, por lo que se utiliza un observador de lazo cerrado para estimar las variables del rotor no disponibles para medición y se diseña un controlador no lineal para garantizar el acotamiento de todas las señales del sistema y la estabilidad práctica del sistema. *La principal aportación de este esquema es el uso del control descentralizado para enfrentar la incertidumbre paramétrica y los acoplamientos entre las uniones del robot. No es necesario conocer con precisión el modelo del sistema mecánico combinado. Su principal ventaja es la facilidad de su implementación, debido a su eficiencia computacional.*

Como líneas de investigación abiertas se tiene en primer lugar el caso particular del control robusto que considera incertidumbre paramétrica tanto en el motor como en el robot y retroalimentación de salida. Se ha analizado el tema y se tiene un avance pero no ha sido posible completar la prueba estricta de la estabilidad del sistema. Es necesario aclarar que este problema ya ha sido resuelto considerando un controlador adaptable [Marino, et al. 98]. Además, se tiene el caso de la mejora del desempeño del sistema completo, es decir, lograr un desempeño óptimo del sistema tanto en el comportamiento transitorio como de régimen permanente del MI.

Por otro lado, sería deseable la implementación práctica de las diferentes técnicas desarrolladas y así poder validar los resultados obtenidos en el presente trabajo. Para esto se requiere de la construcción de un banco de pruebas y la participación de un grupo interdisciplinario de trabajo.

# Apéndice A

## Control comandado por corriente.

Las técnicas de control por campo orientado han hecho posible la utilización de los motores de CA en aplicaciones de alto desempeño dinámico antes reservados para los motores de CD. El fundamento de estos métodos es controlar a las máquinas de CA de manera similar a una máquina de CD de excitación separada donde una corriente (del devanado de campo) controla el campo magnético y la otra (del devanado de armadura) controla el par electromagnético producido por el motor en forma independiente (o desacoplada). Sin embargo, las máquinas de CA trifásicas tienen tres señales de corriente (y de voltaje) relacionadas entre sí y el diseño de un controlador de flujo magnético y de par electromagnético no es evidente a partir del sistema trifásico. En general, los métodos de control por campo orientado (o vectorial) de motores de inducción involucran una transformación de  $3\phi$  a  $2\phi$  y una vez en el sistema transformado de dos fases se asocia una de las componentes de corriente ( $i_{ds}$ ) con el flujo magnético y la otra ( $i_{qs}$ ) con el par producido por el motor, aunque no siempre se logra un desacoplamiento entre estas variables, y en este caso, es práctica común llevar la corriente relacionada con el flujo a un valor constante para producir el flujo magnético requerido y posteriormente variar la componente relacionada con el par para llevarlo al valor de referencia deseado. En forma resumida, la técnica de control involucra la comparación del flujo magnético y el par motor de referencia con el flujo magnético y el par motor reales, respectivamente, para obtener las señales de corrientes de referencia que a su vez son comparadas con las corrientes reales (control comandado por corriente), para obtener una señal de error de seguimiento de corrientes que es usada en un compensador Proporcional-Integral PI (aunque también se usan otros métodos, como el comparador con histéresis) para generar las señales que, convenientemente tratadas, producirán las señales de alimentación al motor para alcanzar el objetivo de control deseado. Un requisito indispensable para lograr la transformación del sistema  $3\phi$  al sistema  $2\phi$  es el conocimiento (por medición directa o por algún método de estimación) del flujo producido por los devanados del estator, del flujo producido por los devanados del rotor y/o del flujo resultante en el entrehierro de la máquina. Así, existen diferentes técnicas de control vectorial.



## Apéndice B

# Ecuación del error combinado de seguimiento.

El procedimiento para obtener la ecuación dinámica del error de seguimiento de la trayectoria deseada en el robot está basado en el método de [SlotineLi86]. Se desea lograr que las posiciones  $q$  y las velocidades  $\dot{q}$  sigan a los valores deseados  $q^d$  y  $\dot{q}^d$ , respectivamente. Se supone que la posición deseada  $q^d$  y su primera, segunda y tercera derivada son funciones del tiempo acotadas.

Para el caso del robot que nos ocupa, si el vector de errores de seguimiento de posición se define como  $\tilde{q} = q - q^d$ , entonces se tiene que  $\dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}^d$ . Si se define un vector que proporcione una medida de la precisión en el seguimiento de la trayectoria deseada (el error combinado de seguimiento  $s$ ) como

$$s = \dot{\tilde{q}} + \Gamma_q \tilde{q} = \dot{q} - \dot{q}^d + \Gamma_q \tilde{q} = \dot{q} - \dot{q}^r, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\Gamma_q = \text{diag}[\gamma_{q1} \ \gamma_{q2}] > 0$ , es una matriz de ganancias, simétrica y definida positiva, y  $\dot{q}^r = \dot{q}^d - \Gamma_q \tilde{q}$  definido como el vector de velocidad de referencia se introduce para garantizar la convergencia del error de seguimiento de trayectoria a cero.

El vector  $s$  contiene información acerca del acotamiento y convergencia de  $q$  y  $\dot{q}$ , ya que su definición se puede interpretar como una ecuación diferencial de primer orden estable en  $\tilde{q}$ , con entrada  $s$ . De la relación  $\tilde{q}_k = \frac{1}{d + \gamma_{qk}} s_k$ , donde  $d$  denota al operador derivada con respecto del tiempo, se observa que si  $s_k(t) \rightarrow 0$  exponencialmente, entonces  $\tilde{q}_k(t)$ ,  $\dot{\tilde{q}}_k(t) \rightarrow 0$  también exponencialmente. De manera que el controlador se debe diseñar para lograr que  $s_k(t) \rightarrow 0$  exponencialmente. Equivalentemente, si  $s_k(t)$  es uniformemente acotada, entonces también  $\tilde{q}_k(t)$ ,  $\dot{\tilde{q}}_k(t)$  están uniformemente acotadas.

La ecuación combinada del sistema mecánico (MI+robot) se puede escribir en términos de  $s$ . Al combinarse las ecuaciones se tiene que  $q = \Theta_r$ ,  $\dot{q} = \Omega_r = \dot{\Theta}_r$  y

$\ddot{q} = \dot{\Omega}_r = \ddot{\Theta}_r$ , se tiene

$$[D_m + M(q)]\ddot{q} + [C(q, \dot{q}) + R_m]\dot{q} + g(q) = \tau_{em} \quad (\text{B.2})$$

y si se agregan los términos  $-[D_m + M(q)]\ddot{q}^r - [C(q, \dot{q}) + R_m]\dot{q}^r$  a ambos lados de la ecuación anterior se tiene la ecuación

$$[D_m + M(q)](\ddot{q} - \ddot{q}^r) + [C(q, \dot{q}) + R_m](\dot{q} - \dot{q}^r) = \tau_{em} - [(D_m + M(q))\ddot{q}^r + (C(q, \dot{q}) + R_m)\dot{q}^r + g(q)], \quad (\text{B.3})$$

que expresada en términos de  $s$  y  $q^r$  está dada por

$$D\dot{s} + [C(q, \dot{q}) + R_m]s = \tau_{em} - Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}^r, \ddot{q}^r) p_c, \quad (\text{B.4})$$

donde  $D = [D_m + M(q)]$  y se utiliza la propiedad de parametrización lineal  $Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}^r, \ddot{q}^r) p_c = \{ (D_m + M(q))\ddot{q}^r + (C(q, \dot{q}) + R_m)\dot{q}^r + g(q) \}$  con el regresor  $Y_c(q, \dot{q}, \dot{q}^r, \ddot{q}^r) \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  y el vector de parámetros  $p_c \in \mathbb{R}^{n_r}$ , ambos del sistema mecánico combinado.

Esta última ecuación representa el comportamiento dinámico del error combinado de seguimiento y será utilizada en el diseño de los diferentes controladores de este trabajo.

# Apéndice C

## Definición de parámetros.

En el desarrollo se utilizan las unidades básicas del sistema SI.

significado	parámetro	valor
momento de inercia	$D_{mk}$	0.0300
resistencia de devanados del rotor	$R_{rk}$	0.8420
inductancia de devanados del rotor	$L_{rk}$	0.0852
resistencia de devanados del estator	$R_{sk}$	0.6870
inductancia de devanados del estator	$L_{sk}$	0.0840
inductancia mutua	$L_{srk}$	0.0813
número de pares de polos	$n_{pk}$	2

**Tabla C.1:** Parámetros físicos del  $k$ -ésimo ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) motor de inducción y sus valores en la simulación ( $n = 2$ ).

**Nota:** La información dada aquí será utilizada en los diferentes esquemas de control desarrollados, por lo que se harán varias referencias a estos apéndices.

definición de parámetros	valor
$\alpha_k = \frac{R_{rk}}{L_{rk}}$	9.8826
$\delta_k = \frac{R_{sk}}{L_{sk}}$	8.1786
$\beta_k = \frac{L_{srk}}{\sigma_k L_{sk} L_{rk}}$	148.5990
$\sigma_k = 1 - \frac{L_{srk}}{L_{sk} L_{rk}}$	0.0764
$\mu_k = \frac{p_k L_{srk}}{D_{mk} L_{rk}}$	63.6150
$\gamma_k = \frac{1}{\sigma_k L_{sk}}$	155.7274
$\eta_k = \frac{1}{\sigma_k}$	13.0840

**Tabla C.2:** Parámetros usados en el modelo del  $k$ -ésimo ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) motor de inducción y sus valores en la simulación ( $n = 2$ ).



# Bibliografía

- [Abdallah, et al. 91] C. Abdallah, D. Dawson, P. Dorato and M. Jamshidi, "Survey of robust control for rigid robots", *IEEE Contr. Syst. Magz.* , Vol. 11, No. 2, pp. 24-30, 1991.
- [Amestegui87] Mauricio Améstegui M., "El problema de control de robots", 1987
- [BilalovicSabanovic91] F. Bilalovic and A. Sabanovic, "AC Motor Control - Application to Robotics", *IECON 91*, pp 402-407.
- [Blaschke72] F. Blaschke, "The principle of field orientation applied to the new transvector closed-loop control system for rotating field machine", *Siemens-Rev.*, Vol. 39, pp. 217-220, 1972.
- [Bodson, et al. 94] M. Bodson, J. Chiasson, and R. Novotnak, "High-performance induction motor control via input-output linearization", *IEEE Control Systems*, Vol. 14, pp. 25-33, 1994.
- [Bose97] Bimal K. Bose, *Power electronic and variable frequency drives*, IEEE Press, 1997.
- [Cafuta, et al. 91] P. Cafuta and Karel Jezernik, "Control of robot manipulator joint driven by induction motor", *IECON 91* , pp 547-552.
- [Canudas, et al. 93] C. Canudas de Wit, R. Ortega, S. I. Seleme Jr., "Robot motion control using induction motor drives", *Proc. IEEE ICRA* , Atlanta, Georgia, pp. 533-538, 1993.
- [Chiasson93] J. Chiasson, "Dynamic feedback linearization of the induction motor", *IEEE Transactions on Automatic Control* , Vol. 38, No. 10, pp. 1588-1594, 1993.
- [Corless81] M. Corless and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic system", *IEEE Trans. Automat. Contr.* , Vol. 26, pp. 1139-1144, 1981.
- [Clay71] Richard Clay *Nonlinear Networks and Systems*, Wiley Interscience, 1971

- [Craig88] J. J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, New York: Addison-Wesley, 1988.
- [DeLucaUlivi88] A. De Luca and G. Ulivi, "Design of exact nonlinear controller for induction motors", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 1304-1307, 1989.
- [Espinosa93] G. Espinosa Pérez, "Control No Lineal de Motores de Inducción", Tesis de Doctorado, DEPMI-UNAM, 1993.
- [EspinosaOrtega94] G. Espinosa, R. Ortega, "State observers are unnecessary for induction motor control", *Systems and Control Letters*, Vol. 23, pp. 315-323, 1994.
- [EspinosaOrtega95] G. Espinosa-Pérez and R. Ortega, "An output feedback globally stable controller for induction motors", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, No. 1, pp. 138-143, 1995.
- [Espinosa, et al. 97] G. Espinosa-Pérez, R. Ortega and P. J. Nicklasson, "Torque and flux tracking of induction motors", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 7, pp. 1-9, 1997.
- [Fitzgerald, et al. 90] A.E. Fitzgerald, Ch. Kingsley, Jr. and S.D. Umans *Electric Machinery*, McGraw-Hill, 1990.
- [Fu92] L. C. Fu, "Robust adaptive decentralized control of robot manipulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, pp. 106-110, 1992.
- [GavelHsia86] D. T. Gavel and T. C. Hsia, "Decentralized adaptive control of robot manipulators" *Proc. IEEE Int. Confr. Robotics Automation*, pp. 1230-1235, 1986.
- [GuerreroTang99a] G. Guerrero-Ramirez and Y. Tang, "A simple robust control of induction motors" , *ACC'99, San Diego, Ca. USA.*, 1999.
- [GuerreroTang99b] G. Guerrero-Ramirez and Y. Tang, "Motion control of rigid robots driven by current-fed induction motors" , *14th World congress IFAC'99, Beijing, China*, 1999.
- [GuerreroTang99c] G. Guerrero-Ramirez and Y. Tang, "Adaptive trajectory control of robots driven by current-fed induction motors", *IEEE HK Symposium on Robotics and Control*, Hong Kong 1999.
- [GuerreroTang00a] G. Guerrero-Ramirez and Y. Tang, "Motion control of rigid robots driven by current-fed induction motors" , *Mechatronics, 2000*.

- [GuerreroTang00b] G. Guerrero-Ramirez and Y. Tang, "Decentralized robust control of rigid robots driven by current-fed induction motors", *Proc. ACC'2000, Chicago, USA, Junio de 2000*.
- [GuerreroTang00c] G. Guerrero-Ramirez and Y. Tang, "Robust nonlinear control of rigid robots driven by induction motors", *Proc. CCC'2000*.
- [Hu, et al. 95] J. Hu, D. Dawson and Y. Qian, "A global adaptive link position tracking controller for robot manipulators driven by induction motors", *Proc. 34th IEEE CDC, New Orleans, 1995*.
- [Hu, et al. 96] J. Hu, D. Dawson and Y. Qian, "Position tracking control for robot manipulators driven by induction motors without flux measurement", *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 12, pp. 419-438, 1996.
- [Kanellakopoulos, et al. 92] I. Kanellakopoulos, P.T. Krein and F. Disilvestro, "Nonlinear flux-observer-based control of induction motors", *Proc. Amer. Contr. Confr.*, Chicago IL, 1992.
- [Khalil91] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, MacMillan, New York, 1991.
- [Kim, et al. 92] G. S. Kim, I. J. Ha and M. S. Ko, "Control of induction motors for both high dynamic performance and high-power efficiency", *IEEE Trans. Ind. Elect.*, Vol. 39, pp. 323-333, 1992.
- [Kim, et al. 97] K. C. Kim, R. Ortega, A. Charara and J. P. Vilain, "Theoretical and experimental comparison of two nonlinear controllers for current-fed induction motors", *IEEE Trans. Contr. Syst. Techn.*, Vol. 5, pp. 338-348, 1997.
- [Krause87] Paul C. Krause, *Analysis of electric machinery*, McGraw-Hill, 1987.
- [Krzeminski87] Z. Krzeminski, "Nonlinear control of induction motors", *Proc. 10th IFAC World Congress, Munich*, pp. 349-354, 1987.
- [Leonhard85] W. Leonhard, *Control of Electrical Drives*, New York: Springer-Verlag, 1985.
- [LyashevskiyChen96] S. Lyashevskiy and Y. Chen, "Feedback control of robotic manipulators with induction motors", *1996 IFAC*, pp. 379-384, 1996.
- [Marino, et al. 93] R. Marino, S. Peresada and P. Valigi, "Adaptive input-output linearizing control of induction motors", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 38, pp. 208-221, 1993.
- [Marino, et al. 96] R. Marino, S. Peresada and P. Tomei, "Output feedback control of current-fed induction motors with unknown rotor resistance", *IEEE Trans. Contr. Syst. Techn.*, Vol. 4, pp. 336-347, 1996.

- [Marino, et al. 98] R. Marino, S. Peresada and P. Tomei, "Adaptive output feedback control of current-fed induction motors with uncertain rotor resistance and load torque", *Automatica*, Vol. 34, No. 5, pp. 617-624, 1998.
- [Meisel66] J. Meisel, *Principles of electromechanical-energy conversion*, McGraw-Hill, 1966.
- [Ortega, et al. 98] R. Ortega, A. Loría, P.J. Nicklasson and H. Sira-Ramírez, *Passivity-based control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, electrical and electromechanical applications*, Springer-Verlag, 1998.
- [Ortega, et al. 96] R. Ortega, P.J. Nicklasson and G. Espinosa-Pérez, "On Speed control of induction motors", *Automatica*, Vol. 32, pp. 455-460, 1996.
- [OrtegaEspinosa93] R. Ortega and G. Espinosa, "Torque Regulation of Induction Motors", *Automatica*, Vol. 29, No. 3, pp. 621-633, 1993.
- [OrtegaSpong89] R. Ortega and M. Spong, "Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial", *Automatica*, Vol. 25, pp. 877-888, 1989.
- [PanteleyOrtega97] E. Panteley and R. Ortega, "Cascaded control of feedback interconnected nonlinear systems: application to robots with AC drives", *Automatica*, Vol. 33, pp. 1935-1848, 1997.
- [SabonovicIzosimov81] A. Sabanovic and D. Izosimov, "Application of sliding modes to induction motor control", *IEEE Trans. Indust. Appl.*, Vol. 17, pp. 41-49, 1981.
- [Seraji89] H. Seraji. "Decentralized adaptive control of manipulators: theory, simulation, and experimentation," *IEEE Trans. Rob. Automat.*, Vol. 5, 00. 183-201, 1989.
- [SlotineLi86] J. J. Slotine and W. Li, "On the adaptive control of robot manipulators", *Int. J. Robotics Res.*, Vol. 6, pp. 49-59, Fall, 1987.
- [SpongVidyasagar89] M. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, 1989.
- [SteinHunt79] R. Stein and W. T. Hunt, *Electric Power System Components: Transformers and Rotating Machines*, Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
- [Tang96] Y. Tang, "Simple Robust Adaptive Control for a Class of Nonlinear Systems : An Adaptive Signal Synthesis Approach", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 10, No. 4/5, pp. 481-488, 1996.

- [Tang, et al. 97] Y. Tang, M. Tomizuka and G. Guerrero-Ramirez, "Robust control of robot manipulators", *Proc. IEEE CDC*, San Diego, CA, 1997.
- [TangGuerrero98] Y. Tang and G. Guerrero-Ramirez, "Decentralized robust control of robot manipulators", *Proc. IEEE ACC*, San Diego, CA, 1998.
- [Tang, et al. 00] Y. Tang, M. Tomizuka, G. Guerrero and G. Montemayor, "Decentralized robust control of mechanical systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, April 2000.
- [Taylor94] D. G. Taylor, "Nonlinear control of electrical machines: an overview", *IEEE Control System Mag.*, Vol. 14, pp. 41-51, 1994.
- [Teel, et al. 91] A. Teel, R. Kadiyala, P. Kokotovic and S. S. Sastry, "Indirect techniques for adaptive input-output linearization on nonlinear systems", *Int. J. Contr.*, Vol. 53, pp. 193-222, 1991.
- [WhiteWoodson59] D. C. White, H. H. Woodson, "Electromechanical energy conversion", *John Wiley and Sons*, 1959.
- [Yang, et al. 95] J-H. Yang, W-H Yu, and L-C Fu, "Nonlinear Observer-Based Adaptive Tracking Control for Induction Motors with Unknown Load", *IEEE T on IE*, Vol. 42, pp. 579-586, 1995.