



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

*La teselación Delaunay y su posible aplicación a la estimación de distorsión en rocas deformadas*

T E S I S

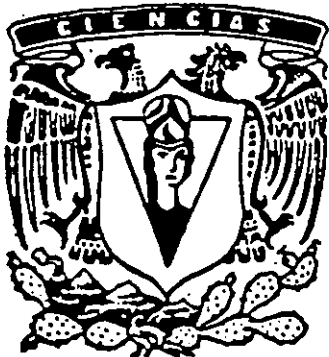
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

ALEJANDRA AGUILAR HERNÁNDEZ

926882

DIRECTOR DE TESIS: DR. GUSTAVO TOLSON JONES



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
SISTEMA DE  
MATEMÁTICAS

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "La Tesselación  
Delaunay y su posible aplicación a la estimación de distorsión en  
rocas deformadas"

realizado por AGUILAR HERNÁNDEZ ALEJANDRA

con número de cuenta 9355353-4, pasante de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DR. GUSTAVO TOLSON JONES

*Gustavo Tolson Jones*

Propietario DRA. MARIA DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER

*Maria de la Paz Alvarez Scherer*

Propietario DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ

*Fernando Brambila Paz*

Suplente M. en C. DIANA MAYA PADILLA

*Diana Maya Padilla*

Suplente M. en C. FRANCISCO STROCK CHAVEZ

*Francisco Strock Chavez*

Consejo Departamental de Matemáticas

*Héctor Méndez Largo*

COORDINADOR DR. HECTOR MENDOZA LARGO

## CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>2</b>
<b>ANTECEDENTES .....</b>	<b>4</b>
DEFINICIONES.....	4
CONSTRUCCIÓN DE LAS TESELACIONES.....	8
<b>POBLACIONES DE PUNTOS.....</b>	<b>15</b>
ANTIAGLOMERAMIENTO .....	15
SELECCIÓN DE OBJETOS.....	22
EL PROGRAMA ANTICLUS.....	24
DEFORMACIONES.....	25
EFECTOS DE LA DISTORSIÓN INTERNA EN LA TESELACIÓN DELAUNAY .....	38
<b>MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE DISTORSIÓN.....</b>	<b>42</b>
MÉTODO DE CENTRO A CENTRO.....	42
EL MÉTODO FRY.....	44
<b>¿ES POSIBLE DESARROLLAR UN MÉTODO BASADO EN LA TESELACIÓN DELAUNAY? .....</b>	<b>48</b>
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	48
METODOLOGÍA.....	49
RESULTADOS .....	61
DISCUSIÓN.....	65
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>68</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>69</b>
<b>APÉNDICE .....</b>	<b>71</b>
DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS.....	71
PROGRAMA PARA GENERAR LAS TESELACIONES DELAUNAY Y VORONOI.....	79
PROGRAMA PARA GENERAR POBLACIONES ARTIFICIALES DE PUNTOS.....	79
<b>GLOSARIO.....</b>	<b>79</b>

## INTRODUCCIÓN

Una de las características más importantes de las matemáticas es su alto grado de abstracción. Esto es uno de los principales problemas que conlleva su estudio. Es necesario desarrollar temas fundamentales de las mismas para mostrar su compatibilidad con las otras disciplinas y así mismo resaltar que en ellas se encuentran cosas comprensibles, interesantes y útiles.

Así como no tendría sentido que un músico hiciera música si no hubiera quien la interpretara, y peor aún si no hubiera quien la escuchara, hacer matemáticas sería vano si no fuera posible su aplicación, ya sea en ellas mismas o en otras esferas de la actividad humana, ya que sin ésta no podrían trascender las matemáticas en ellas mismas y en el tiempo.

En la actualidad, las matemáticas se aplican a muy diversos campos del conocimiento humano. Constituyen una ayuda indispensable para los profesionales de la economía, la biología, la física, la psicología y otras ciencias. En la geología, las matemáticas han contribuido a la mejor utilización de los recursos mundiales, y a entender los fenómenos físicos relacionados con la atmósfera y la estructura terrestre. Para comprender la evolución de esta última, se han desarrollado algunos métodos con bases matemáticas que estiman el grado de distorsión de las rocas deformadas.

La estimación de distorsión tiene gran importancia en la geología estructural porque es un paso importante en la caracterización cuantitativa de rocas deformadas. Hay un gran número de técnicas para estimar la distorsión en el plano, pero pocas tienen buena aceptación por parte de los geólogos, porque éstas suelen ser tediosas en su aplicación.

Este trabajo tiene por objetivo analizar la posibilidad de automatizar un método de estimación de distorsión ya existente. Las bases de esta

automatización se centran en una estructura matemática surgida el siglo pasado y que hoy es un concepto comúnmente utilizado en la geometría computacional: la *Teselación Delaunay*\*.

En el primer capítulo del presente trabajo se dan las definiciones informales de la triangulación Delaunay y del diagrama Voronoi, así como una descripción del procedimiento para construirlos.

En el segundo y tercer capítulos se abordan algunos temas relacionados con la geología estructural que son requisito para la idea central de este trabajo.

En el cuarto capítulo es descrito y desarrollado el problema propuesto y se muestran los resultados que se obtuvieron de dicho desarrollo.

El quinto capítulo contiene las conclusiones del problema propuesto, el sexto la bibliografía citada y de consulta de los temas abordados.

El séptimo capítulo consiste en una serie de apéndices que contienen tanto los listados de los programas computacionales usados para el desarrollo de este trabajo, así como un glosario de conceptos matemáticos y una sección de definiciones formales de los conceptos principales del mismo.

---

\*Las palabras marcadas con un asterisco consultarlas en el Glosario.

## ANTECEDENTES

### DEFINICIONES

Dada una población de puntos distribuidos de tal forma que no sean todos colineales, se dice que el diagrama Voronoj\* correspondiente a ésta, es la unión de regiones poligonales contiguas, cuyo contorno se forma sobre las mediatrices de las líneas que unen a los puntos más cercanos de dicha población.

El diagrama Voronoj\*\* de  $n$  puntos distintos en el plano, divide al plano en  $n$  regiones distintas que contienen a los puntos en el plano que están más cerca a cada punto de la población. Dicho de otro modo, sea  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  con  $n > 2$ , una población de puntos distintos no colineales y distribuidos en el plano euclidiano,  $p$  cualquier punto en el plano y  $d(p_i, p_j)$  la distancia euclidiana del punto  $i$  al punto  $j$ , entonces  $PV(P) = \{p \mid d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j=1, \dots, n\}$  es la región asociada al  $i$ -ésimo punto de la población (fig. 1a).

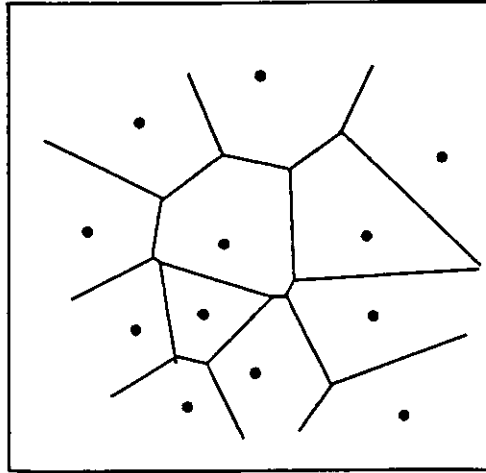
De esta manera, la región asociada a cada punto, llamada polígono Voronoj y determinada por la distribución de la población, es única y define la región de influencia de cada punto.

Por otro lado, la triangulación Delaunay\*\*, se construye uniendo con líneas a los puntos cuyos polígonos Voronoj asociados comparten un mismo lado. Por lo tanto, un triángulo Delaunay es formado por tres puntos cuyos polígonos Voronoj asociados concurren en un vértice común que es el centro del círculo que inscribe a este triángulo.

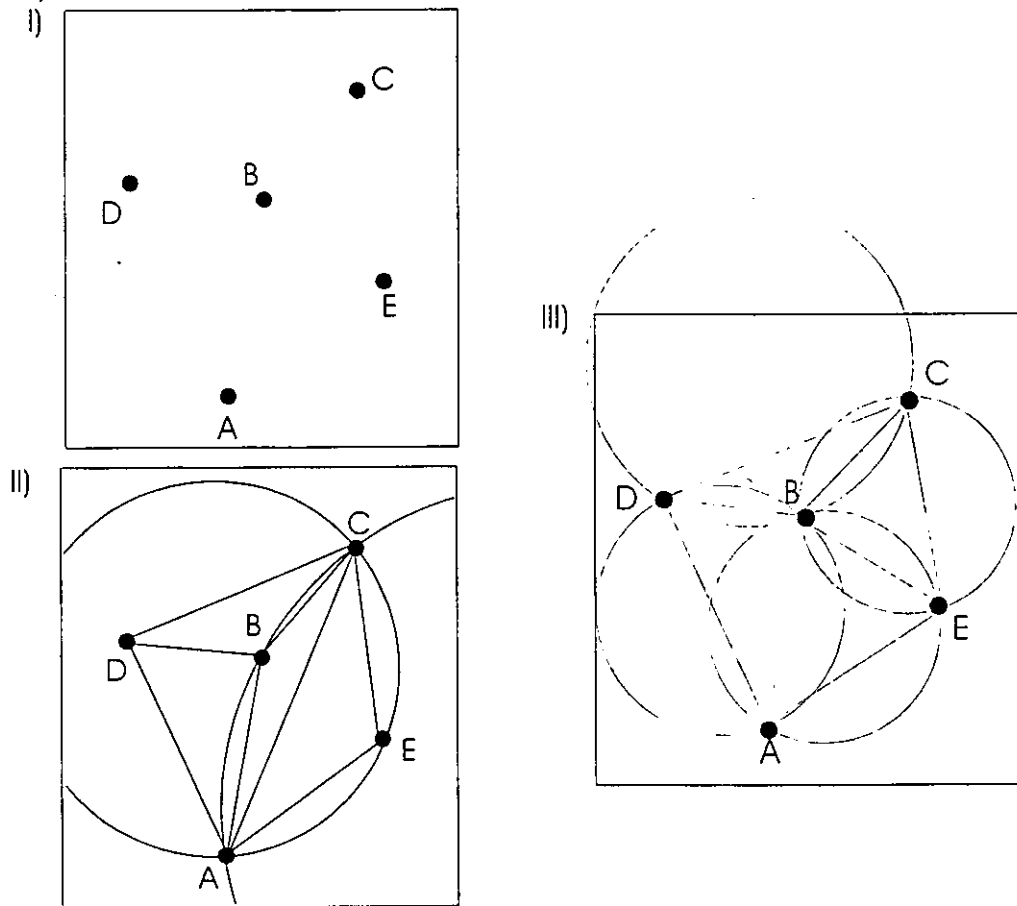
Además, la triangulación Delaunay satisface dos propiedades

---

\*\*Ver definición formal en el apéndice de definiciones y propiedades básicas.



**Fig.1a)** Este es el diagrama Voronoi de una población de puntos en el plano.



**Fig.1b)** I) muestra una población de puntos en el plano, II) una triangulación cualquiera de la población de I), y III) la triangulación Delaunay de la misma población. Observe que los circuncírculos de los triángulos en III) no contienen a ningún otro punto de la población lo cual no es garantizado en II) ya que por lo menos el circuncírculo del triángulo ABC contiene a otro punto de la población, a saber el punto E.



interesantes:

- I) cumple con el criterio del ángulo MAX-MIN según el cual la medida del ángulo menor en cada triángulo de la triangulación es maximizada, es decir, se evade en lo posible ángulos pequeños (Macedonio y Pareschi, 1991), y
- II) en una triangulación Delaunay el círculo que inscribe a cada triángulo no contiene a ningún otro punto de la población.

Definidas así estas teselaciones, es claro que dada la teselación Voronoj, se puede obtener de ésta la teselación Delaunay por la dualidad\* que existe entre ellas que permite definir de manera inversa estas teselaciones, es decir, dada la teselación Delaunay, se obtiene de aquí la teselación Voronoj. Para resaltar el concepto de dualidad que aquí existe, se introduce ahora otra definición.

Dada una población de puntos no todos colineales, se dice que la triangulación Delaunay correspondiente a esta población, es el conjunto de triángulos que une a cada punto de la población con sus vecinos más cercanos. Dicho de otro modo, sea  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  con  $n > 2$ , un conjunto de puntos distintos no colineales y distribuidos en el plano euclidiano, entonces la triangulación Delaunay para esta población es  $TD(P) = \{\text{triángulo}(p_i, p_j, p_k) \mid \text{su circuncírculo no contiene a otro punto de la población}\}$  (fig. 1b).

De su definición se ve que la triangulación Delaunay es única porque relaciona a cada uno de los puntos de una población con los puntos en la población más cercanos a cada uno.

El número de triángulos de la teselación Delaunay está relacionado con el número de puntos en la población y el número de puntos de su envolvente convexa\*. Esta última es la intersección de la población de puntos con la frontera del conjunto convexo de menor cardinalidad que contiene a dicha población.

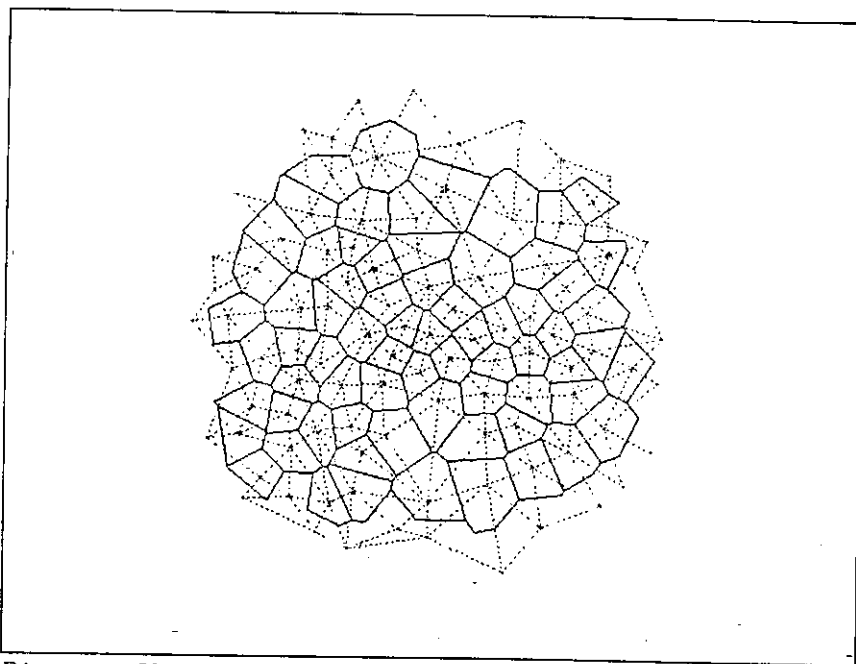
Para obtener el número de triángulos que tendrá la teselación y el número de lados resultante, se tienen dos fórmulas:

$$Nt=2(N-1)-Nen$$

$$Nl=3(N-1)-Nen$$

donde  $Nt$  representa al número de triángulos,  $Nl$  al número de lados en la teselación,  $Nen$  al número de puntos en la envolvente convexa de la población y  $N$  el número de puntos de la población.

Para obtener el centro del circuncírculo de un triángulo, basta con prolongar las mediatrices y obtener el punto de intersección de éstas. Si se obtienen los centros de los circuncírculos de los triángulos de la teselación Delaunay y si se unen los correspondientes a triángulos adyacentes con segmentos de rectas (que son las mediatrices de los lados), se obtendrá entonces un conjunto de polígonos el cual es el Diagrama Voronoi correspondiente (fig. 1c). Dadas estas definiciones es clara la dualidad que existe entre ambas teselaciones.



**Fig.1c)** Diagrama Voronoi y teselación Delaunay correspondiente.

## CONSTRUCCIÓN DE LAS TESELACIONES

El objetivo de este trabajo es elaborar un método que emplee la triangulación Delaunay para calcular la distorsión interna de rocas deformadas. En realidad este método es una modificación de un método ya existente denominado *distancia entre centros* que estima esta distorsión. Para poder asignar la triangulación Delaunay correspondiente a cada población de puntos a analizar fue necesario escribir un programa de cómputo que realizara tal trabajo y posteriormente estimara la distorsión. Las poblaciones de puntos que aquí se emplean son artificiales y se deforman intencionalmente (según se requiera) dentro del mismo programa.

El algoritmo\* para construir la triangulación Delaunay que se ha empleado en este trabajo y que también dibuja la teselación Voronoi, fue modificado del original escrito por Reinhard Ludwig (1994) y publicado en la revista "C't". El programa consta de tres fases. La primera lee la lista de coordenadas de los puntos de la población y dibuja a estos puntos. En la segunda fase, se designa a los vecinos cercanos de cada punto de la población, se despliega la triangulación Delaunay y se enlistan los vértices de los polígonos Voronoi de cada punto. En la última fase se desarrolla gráficamente la teselación Voronoi trazando una línea de vértice a vértice de cada polígono.

El programa acabado se maneja desde un menú de ventanas que brindan opciones según las necesidades. Por ejemplo, para llevar a cabo la primera fase del algoritmo para construir las teselaciones, las opciones son varias poblaciones de puntos que varían en número de puntos y/o grado de antiaglomeramiento; cabe mencionar que en el programa original se generaba una lista aleatoria de puntos, aquí las listas de puntos se generan en un programa aparte que está escrito también en Pascal y el cual se describirá más

adelante. Para la segunda fase las opciones son, desplegar la triangulación Delaunay para poblaciones de puntos con o sin deformación y desplegar la triangulación deformada. El programa también brinda la opción de almacenar gráficamente las teselaciones y visualizarlas juntas o por separado. También obtiene los valores de la distorsión calculada con el método desarrollado en el marco del presente proyecto.

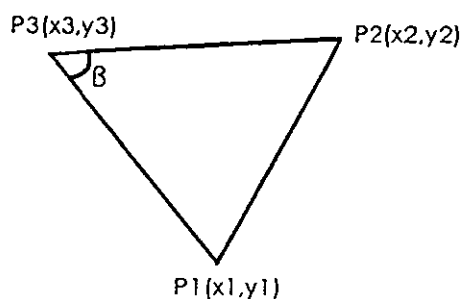
Con el fin de mostrar la lógica del algoritmo para construir las teselaciones Delaunay y Voronoi, a continuación se describirán las tres fases del programa que las construyen. Para poder dar origen tanto a las teselaciones como a cualquier otro gráfico del programa, éste comienza por inicializar la tarjeta y los parámetros gráficos que utilizará durante su ejecución.

La primera fase se lleva a cabo cuando en el programa principal se llama a la subrutina `GeneracionDeDatos`, ésta llama a otra, `FuenteDePuntos`, la cual lee la lista de puntos y llama al procedimiento que los dibuja. Después, `GeneracionDeDatos` añade a la lista de puntos otros cuatro que están fuera de la pantalla y son los vértices de un cuadrado que contiene a la población de puntos; es decir, estos cuatro puntos forman una envolvente convexa de la población. Esto se hace porque hay dos subconjuntos de la población de puntos que *a priori* están en la triangulación Delaunay; estos son, los dos puntos más cercanos entre sí y los puntos que están en su envolvente convexa. En el programa se encuentran los vecinos Delaunay a partir de esta envolvente convexa, es decir de afuera hacia dentro de la población.

Para realizar la segunda fase se lleva a cabo con el procedimiento `TriangulacionDelaunay`, el cual, primero inicializa las listas donde se guardarán los vecinos de cada punto y los vértices de los polígonos, luego crea una lista llamada "Cola" con los cuatro puntos de la envolvente convexa.

Después con la sentencia `Triangulo`, toma los dos primeros puntos de la "Cola" y los elimina de ella; enseguida recorre toda la lista de puntos de la población buscando un tercer punto que esté más cerca a éstos. Esto lo hace con la subrutina `EncuentraPunto`; aquí con ayuda de la función `SentidoDeGiro`, se buscan inicialmente los puntos que no sean colineales con los dos primeros y, con esta misma función, que está basada en el desarrollo del determinante de la matriz formada por los vértices del triángulo en cuestión y con el cual se calcula su área, se determina si el tercer punto buscado está hacia el centro de la población o hacia fuera; es muy importante determinar esto, ya que así se considerarán sólo los puntos que no pertenezcan todavía a algún triángulo.

Para ver más detalladamente la función `SentidoDeGiro`, se considerará el siguiente triángulo,



**Fig. 2)**

donde la altura de P3 sobre el lado P1P2, tiene una longitud de  $h$  y la longitud de P1P2 es de  $b$ . El área de este triángulo está dada por la fórmula

$$A = \frac{bh}{2}$$

y por la fórmula de distancia entre dos puntos, se tiene que

$$b = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la ecuación de la recta que pasa por P1 y P2 tiene la forma

$$y - y_1 = -\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1),$$

que también se puede escribir de la siguiente forma

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Si usamos esta última ecuación y el punto P3(x3,y3) en la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta, se obtiene que

$$h = \frac{(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

por lo que deducimos que el área del triángulo está dada por

$$A = \frac{(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}$$

Además, la expresión que está dentro de las barras del segundo miembro de esta última ecuación, es el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1$$

entonces el área del triángulo es también un medio del valor absoluto de éste determinante. Se toma el valor absoluto porque el determinante puede ser negativo o positivo.

En el caso del programa, para cada terna de puntos analizada, se calcula el área del triángulo que forman usando este determinante sin considerar su valor absoluto, ya que de esta forma se sabrá en qué sentido se están tomando los puntos. Si el valor del área es igual a cero, la función SentidoDeGiro da un valor de cero, con lo que quiere decir que los puntos son colineales. Si el

valor es negativo, la función da un valor de -1, con el que quiere decir que los puntos están tomados de adentro hacia fuera de la población, y entonces el punto en cuestión o está afuera de la población o ya le han sido asignados sus tres triángulos respectivos. Si el valor es positivo, la función da un valor de 1, con el que indica que los puntos están tomados de afuera hacia dentro y el punto en cuestión es un candidato viable para formar el triángulo Delaunay. En otras palabras, esta función garantiza que los puntos considerados como candidatos para formar los triángulos Delaunay, forman con los dos puntos de la "Cola" un ángulo menor de  $180^\circ$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

En la misma subrutina, **EncuentraPunto**, se analizan los puntos candidatos para formar el triángulo Delaunay, se calcula el ángulo que forma cada uno de ellos con respecto a los otros dos y se comparan; el punto elegido es el que satisface de mejor manera el criterio de máximo paralaje, es decir, aquel con el cual se forma el mayor ángulo, porque a mayor ángulo menor distancia. Con ayuda de la función **Cosgam**, **EncuentraPunto** compara los valores de los cosenos de los ángulos que forman los dos puntos en turno de la "Cola" con cada uno de los puntos candidatos y escoge el punto cuyo coseno correspondiente es menor, ya que entre 0 y 180 grados el coseno es menor cuando el ángulo es mayor. La función **Cosgam** calcula el coseno del ángulo haciendo uso de la ley de los cosenos para triángulos oblicuángulos, y además está apoyada en otras funciones que realizan operaciones básicas.

Dicho de otro modo, del triángulo anterior (Fig. 2), se supondrá que P1 y P2 son los dos puntos de la "Cola" para los cuales se busca un tercero para formar un triángulo Delaunay y P3 el candidato en cuestión,  $\beta$  es el ángulo a calcular. Por la ley de los cosenos para triángulos oblicuángulos se tiene que

$$\cos \beta = \frac{d^2(P_1P_3) + d^2(P_2P_3) - d^2(P_1P_2)}{2d(P_1P_3)d(P_2P_3)}$$

que escrito más detalladamente es

$$\cos \beta = \frac{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}{2 \left[ \left[ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \right] \left[ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \right] \right]}$$

de donde se deduce que

$$2 \cos \beta = \frac{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}{\left[ \left[ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \right] \left[ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \right] \right]}$$

y como

$$-1 \leq \cos \beta \leq 1$$

entonces

$$-2 \leq 2 \cos \beta \leq 2.$$

El valor que en realidad obtiene la función Cosgam, es el de 2 veces el coseno del ángulo (arriba descrito), por lo que EncuentraPunto compara estos valores obtenidos con 2; es decir, si 2 veces el coseno de  $\beta$  es menor que 2 entonces se guarda este valor como referencia y ahora se comparan con éste los valores que se obtengan de Cosgam para los otros puntos candidatos (candidatos para formar el triángulo Delaunay) y siempre se tomará al más chico ya que la función coseno es decreciente entre 0 y 180 grados.

Encontrado el tercer punto más cercano a cada par de puntos de la "Cola", se almacenan en otra lista estas ternas de puntos que ahora forman los triángulos Delaunay y se ordena dibujar sus lados; se obtienen las coordenadas de los puntos que resultan ser los centros de los circuncírculos de estos triángulos y se guardan en otra lista como los vértices de los polígonos Voronoi.

Para encontrar las coordenadas del circuncentro, teniendo ya con las coordenadas de los tres vértices del triángulo  $P_1, P_2, P_3$ , en la subrutina



EncuentraPunto se obtienen las ecuaciones de las rectas que pasan por P1 y P2 y P1 y P3, y se resuelve este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que da como resultado las coordenadas esperadas.

Por último, en la subrutina Triangulo, se añaden a la "Cola" los vértices del nuevo triángulo. Estos se añaden por pares, es decir, como extremos de los lados del triángulo, pero no se incluye al par que dio origen a la búsqueda y el cual fue borrado de la "Cola" al principio de la subrutina Triangulo.

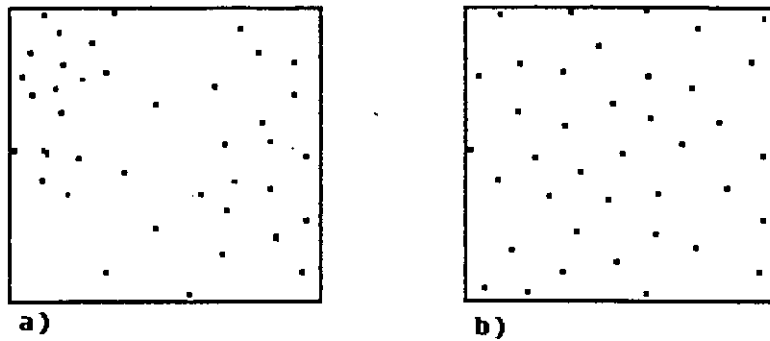
Para la última fase se llama a las subrutinas OrdenarListaDePuntos y DibujarPoligonosVoronoj. La primera recorre la lista de vértices de los polígonos Voronoj y los ordena de la siguiente manera: obtiene los ángulos que se forman con los segmentos que unen a los vértices del polígono de cada punto con cada punto, y la horizontal por medio de la función Theta, y los ordena con la sentencia OrdenamientoRapido en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Ya ordenados los vértices de cada polígono, la segunda sentencia dibuja las líneas de vértice a vértice según el orden establecido y dando origen al diagrama Voronoj.

Aunque el diagrama Voronoj no es necesario para la realización del análisis de distorsión, se ha descrito el algoritmo para su construcción sólo para resaltar, nuevamente, la dualidad existente entre ésta y la triangulación Delaunay y así facilitar su comprensión. Tampoco se excluye la posibilidad de utilizar dicho diagrama en algún método de estimación de distorsión. Por ejemplo es posible que la distribución estadística de las áreas de los polígonos Voronoj constituya una parametrización del grado de antiaglomeramiento\* de una población de puntos.

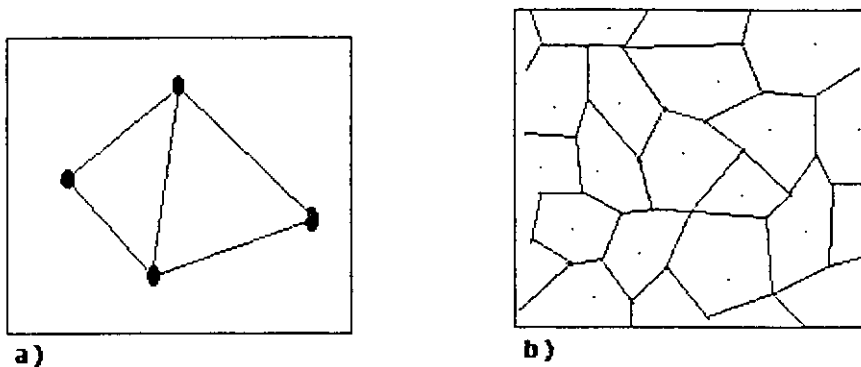
## POBLACIONES DE PUNTOS ANTIAGLOMERAMIENTO

En una población finita de puntos distribuidos aleatoriamente sobre una superficie, cuyas coordenadas son seleccionadas desde una lista de números aleatorios, hay tanto vacíos de puntos (puntos muy separados), como pequeños grupos de ellos (puntos muy amontonados). Este tipo de distribuciones tienen lugar en eventos que ocurren libremente, por ejemplo las partículas de polvo que caen sobre una mesa o el confeti en el suelo del lugar donde se realice una fiesta infantil. Pero hay diferentes modelos de poblaciones que surgen de diferentes situaciones físicas. Por ejemplo si estos puntos representaran una población de plantas de la misma especie, no podrían quedar muy amontonados porque las plantas no crecen así. Es decir, en el caso de los árboles, éstos pueden crecer casi en cualquier lugar pero necesitan espacio, luz y agua, entre otras cosas, para que tanto sus raíces como sus ramas crezcan óptimamente, por lo que es necesario que haya una determinada distancia entre ellos. Con esto se entiende que en algunas poblaciones de puntos la posición de cada uno de éstos depende de la posición de los demás, según lo que estén representando. Cuando existe esta dependencia, la distribución de la población de puntos también depende tanto del área que ocupa esta población como del número de puntos en ella (densidad de la población), ya que en el caso de los árboles además de saber cual es la distancia mínima que puede haber entre ellos, es necesario saber cuántos árboles pueden crecer en una determinada área.

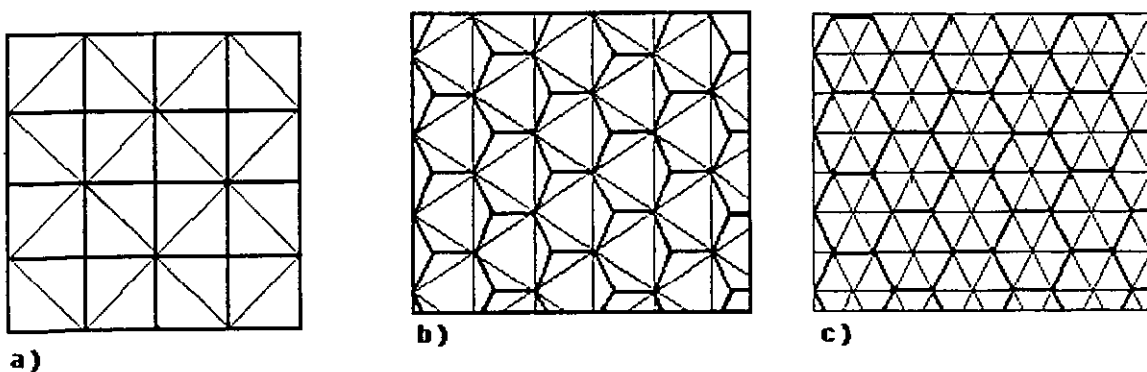
Así, una de las diferencias que hay entre las poblaciones de puntos distribuidos aleatoriamente y las poblaciones de puntos distribuidos uniformemente es que, en las primeras la posición de cada uno de los puntos



**Fig. 3)** a) Representa una población de puntos con distribución aleatoria y, b) una población de puntos con distribución antiaglomerada.



**Fig. 4)** a) Vecinos contiguos o inmediatos los cuales están conectados por una línea que no cruza a otra de otro par de vecinos contiguos. b) Polígonos formados por los vecinos contiguos correspondientes. Los vértices de cada polígono también son puntos de la población, y aunque no se han marcado los polígonos para esos puntos, sus vecinos contiguos correspondientes son los otros extremos de cada arista que forman y los puntos que encierran los polígonos a los que pertenecen.



**Fig. 5)** a) Población de puntos con distribución cuadrangular; los polígonos formados por los vecinos contiguos forman rejillas cuadrangulares. b) Población de puntos con distribución hexagonal donde los polígonos formados por los vecinos contiguos forman una rejilla triangular. c) Población de puntos distribuidos de manera triangular, donde los triángulos que forman son equiláteros. Los polígonos formados por los vecinos contiguos forman varias rejillas hexagonales superpuestas.

es independiente de la posición de los demás (donde puede haber pequeños grupos de puntos amontonados y pequeñas áreas vacías de ellos, fig. 3a); en las segundas, la posición de cada uno de los puntos sí depende tanto de la posición de los demás como de la densidad de la población (donde nunca hay puntos amontonados ni huecos, fig.3b).

En estas poblaciones donde no hay puntos amontonados ni huecos, la distancia entre cualquier par de puntos es más o menos la misma, mayor que cero y finita porque estas distancias están restringidas en el área que contiene a la población. Como no tiene sentido calcular la distancia entre dos puntos que están en orillas opuestas de una población, puesto que hay otros puntos entre ellos, es conveniente considerar las distancias entre puntos que sean vecinos inmediatos, o sea de aquellos que estén conectados por un segmento de recta que no cruce a otro de otro par de puntos (fig. 4a). A los puntos tomados de esta manera, aquí se les llama vecinos naturales.

Así pues, a partir de aquí, las poblaciones finitas de puntos en un área determinada, con una distancia finita y media entre los que sean vecinos naturales, se llamará *población antiaglomerada*.

En una población antiaglomerada de puntos, para cada punto (excluyendo a los de la frontera) sus vecinos naturales son los vértices de un polígono alrededor de él (fig. 4b). Estos polígonos además de que en general no son regulares, varían en número de lados para cada punto; es decir, no todos los puntos de la población tienen el mismo número de vecinos naturales. Esto se debe a que la uniformidad de la distribución se da en la longitud de las distancias entre vecinos naturales y no en el orden de la posición de los puntos. Entonces, para que en una población antiaglomerada los puntos tengan el mismo número de vecinos naturales (sin considerar a los de la frontera), su distribución debe ser uniforme; es decir, los puntos de la

población deben de estar dispersos en una determinada colocación que les permita relacionarse a cada uno con un mismo número de puntos. Por ejemplo, si se tiene una población de puntos distribuida en los vértices de una rejilla cuadrangular, los vecinos naturales de cada punto serán los vértices de un cuadrado (fig. 5a). Ahora bien, si la población de puntos está distribuida sobre los vértices de una rejilla hexagonal, entonces cada punto tendrá tres vecinos naturales que serán los vértices de un triángulo (fig. 5b); pero si la población está distribuida sobre una rejilla de triángulos equiláteros, entonces cada punto tendrá seis vecinos naturales y será el centro de un hexágono regular formado por sus vecinos (fig. 5c).

Entonces, el hablar de un mismo número de vecinos naturales para cada punto en una población antiaglomerada, es similar a hablar de un orden en la posición de los puntos de la distribución, pero aquí van implícitos tanto las distancias entre vecinos naturales como la densidad de la población.

La densidad de una población es expresada como el número de puntos por unidad de área, donde la unidad de medida es la misma que se usa al calcular las distancias entre puntos (Clark y Evans, 1954). Además es un factor determinante en la cuantificación del grado de antiaglomeramiento de la población. El grado de antiaglomeramiento se puede obtener en función de la densidad, ya que ésta resuelve la forma de la distribución porque controla la separación entre los puntos. Es decir que la distancia entre puntos de una población debe ajustarse con el número total de puntos y el área que los contiene. De esta manera puede haber poblaciones con el mismo grado de antiaglomeramiento pero de diferente densidad.

El grado de antiaglomeramiento está dado por la expresión

$$a = d_c \sqrt{\rho}$$

(Clark y Evans, 1954), donde  $\rho$  es la densidad de la población y  $d_c$  es la media de las distancias entre cada uno de los puntos y su vecino natural más cercano (distancia de corte, Tolson, 1998); es decir, si la población tiene  $n$  puntos y  $d_i$  es la distancia del punto  $i$  a su vecino natural más cercano entonces,

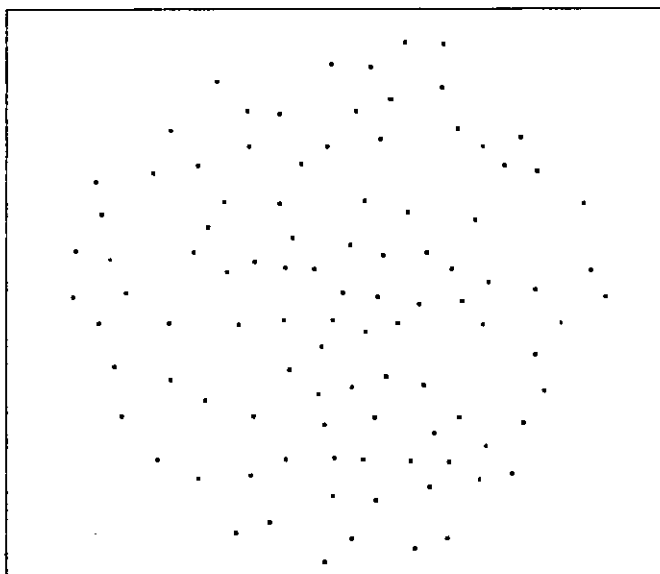
$$d_c = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}.$$

Esta cuantificación del antiaglomeramiento, por estar en función de la densidad, brinda una visión más general de la distribución de la población. Cuanto más bajo es el grado de antiaglomeramiento más tiende la distribución a la distribución aleatoria (fig. 6a) y, más tiende a una distribución uniforme más elevada sea esta cuantificación (fig. 6b).

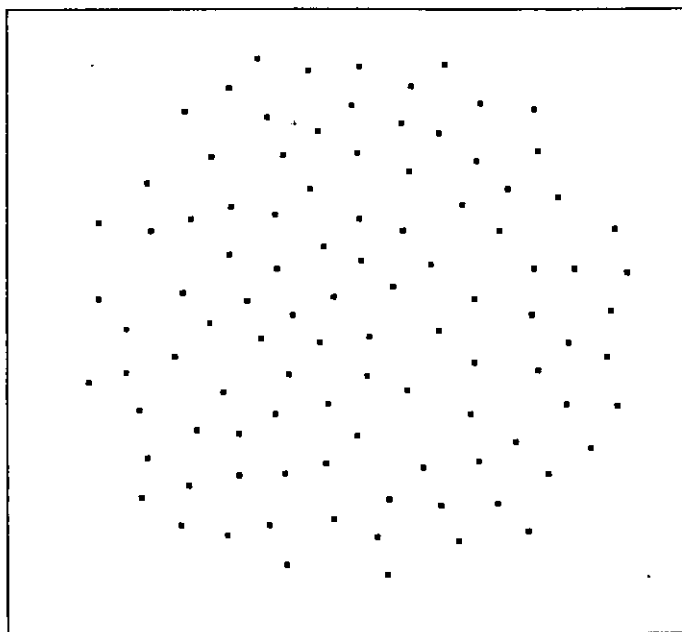
Entonces, una población de puntos cuya distribución sigue un estricto orden (como las de la figura 5) es una población antiaglomerada, pero es un caso extremo de antiaglomeramiento, es decir las poblaciones antiaglomeradas tienden a ser ordenadas, de hecho, tienden sólo a la población cuyos puntos están ordenados como vértices de triángulos equiláteros. Esto se debe a que esta población optimiza el número de vecinos cercanos para cada punto, esto es, el mayor número posible de vecinos cercanos equidistantes para cada punto. En esta población, cada punto tiene seis vecinos cercanos que son los vértices de un hexágono regular (fig. 5c).

El hexágono es el polígono regular de mayor número de lados que tesela (llena el plano), por esto no puede haber una población de puntos cuya distribución permita tener a cada punto siete o más vecinos cercanos. En otras palabras, la población de puntos en la que todos los puntos tienen seis vecinos equidistantes, es la ideal.

a)



b)



**Fig. 6)** a) Población con bajo grado de antiaglomeramiento. b) Población altamente antiaglomerada.

Las distancias de corte varían entre cero y  $1.075 \rho^{-1/2}$  para distribuciones aleatorias e ideales respectivamente (Crespi, 1986). Así pues, el grado de antiaglomeramiento de una distribución ideal es aproximadamente  $1.075 \rho^{-1/2}$ .

En muchos materiales geológicos las partículas que los componen tienen una distribución no aleatoria en un sentido amplio. Las partículas pueden estar aisladas pero distribuidas en tal forma que las distancias entre ellas son más o menos constantes. En tal agregado no se ven pequeños grupos de puntos ni huecos como en una distribución verdaderamente aleatoria. Esto sucede porque las partículas tienen un tamaño inicial característico, y la medida de la separación de centro a centro de partículas vecinas (vecinas naturales) es controlada por la coacción geométrica del empaquetamiento\*. En estos materiales la distribución de partículas coplanarias tiene características similares a la distribución antiaglomerada.



## SELECCIÓN DE OBJETOS

Una roca es un agregado natural de minerales que se clasifican en tres modalidades, según el mecanismo de formación: rocas sedimentarias, rocas ígneas y rocas metamórficas. Las primeras se forman por deposición y las segundas por la actividad volcánica o solidificación de roca fundida por debajo de la superficie; las terceras son rocas de alguno de los dos tipos anteriores transformadas por el calor o la presión.

Las rocas sedimentarias se forman a partir de materiales disgregados por agua, viento o glaciares, llamados sedimentos. Las rocas formadas por la sedimentación de detritos se clasifican como conglomerados, areniscas, o lutitas y, reciben el nombre de detríticas. Pero las rocas sedimentarias también se pueden formar por precipitación de sustancias disueltas y por reacciones químicas entre ellas, como las calizas, o a partir de restos de seres vivos de las cuales hay tres tipos: calcáreas, carbonosas y silíceas.

Las rocas ígneas se forman en la superficie o a cierta profundidad por la cristalización de un magma. El magma está compuesto por minerales en estado fundido y por gases disueltos.

Las presiones intensas, las altas temperaturas y el escape de fluidos y gases asociados con zonas de intensos movimientos de la Tierra, la actividad ígnea y la mineralización transforman las rocas ígneas y sedimentarias en una amplia gama de rocas metamórficas (del griego "cambio de forma"). Existen dos clases de metamorfismo: el regional y el de contacto. Al primero lo constituyen los extensos procesos que acompañaron a la formación de montañas. El segundo hace referencia a los efectos producidos en las cercanías de las intrusiones, que en general cubren extensiones limitadas de terreno.

Para cuantificar los cambios geométricos sufridos en una roca metamórfica es necesario contar con una muestra de ésta para poder aplicar alguno de los métodos existentes que calculan su distorsión. Básicamente estos métodos consisten en observar la posición de las partículas que constituyen a la roca y determinar por procedimientos teóricos matemáticos cuál era su posición original; esto a pesar de estar sujeto a ambigüedad, es con lo único que se cuenta para poder ofrecer una idea de no sólo la forma original de una roca, sino del panorama en general que pudo haber tenido nuestro planeta hace millones de años.

Las muestras que se emplean para hacer el análisis de distorsión son delgadas placas de un grosor de  $30\mu m$  obtenidas de varios cortes de la roca. En estas muestras las partículas que componen la roca conforma una población real de puntos antiaglomerados casi en el plano. A estas partículas vistas así se les llaman objetos y, como varían de tamaño, a veces se consideran sólo sus centros. Para realizar el presente trabajo, se hizo uso de poblaciones de puntos con distribuciones antiaglomeradas generadas artificialmente que simulaban ser las poblaciones de puntos obtenidas de los centros de objetos de muestras geológicas. El programa empleado para generar dichas poblaciones se describirá enseguida.

## EL PROGRAMA ANTICLUS

El programa para generar poblaciones artificiales de puntos fué elaborado por Gustavo Tolson, en el Instituto de Geofísica de la UNAM en 1993 y está escrito en lenguaje Turbo Pascal 5.5 (ver Tolson 1998).

Las poblaciones que genera este programa, están trazadas en un espacio circular con un radio de  $r$  unidades. Al inicio del programa el usuario proporciona el número de puntos  $N$  que requiere en la población, el grado de antiaglomeramiento  $a$  y el número de poblaciones diferentes que desea. Con estos datos la computadora calcula la distancia de corte  $d_c$  usando la fórmula ya descrita

$$d_c = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{n},$$

y pasa a una subrutina donde se genera aleatoriamente un par de coordenadas polares para un punto. Se escoge otro punto que diste del primero en más que  $d_c$  y no más que el radio  $r$ , donde

$$r = \sqrt{\frac{Nd_c}{a^2\pi}}$$

(Tolson, 1993) y se guardan sus coordenadas en una lista, después se escoge otro punto que diste de cada uno de los dos anteriores no menos que  $d_c$  y no más que  $r$  y así continua el bucle hasta que se completa el número de puntos deseado, cuyas coordenadas  $(x,y)$  son almacenadas en un archivo.

## DEFORMACIONES

Es necesario un estudio de la geometría de los cambios que se dan durante una deformación para entender las rocas deformadas y para la interpretación del significado geológico de las estructuras tectónicas. En la evolución de la Tierra ha actuado constantemente un campo de fuerzas inestable que ha provocado variaciones en el estado de esfuerzos de las rocas. La aplicación de fuerza a un material causa que su masa cambie de posición y a menudo de forma. Un cuerpo puede ser sometido a una *traslación*, una *rotación*, una *distorsión interna* o alguna combinación de éstos. Desde el punto de vista geométrico, existe una relación entre la posición, orientación y forma del cuerpo antes y después del cambio de estado. Pero, para registrar la deformación interna de una roca, da lo mismo que ésta se encuentre en su lugar de afloramiento con cierta orientación, que trasladada a algún museo por ejemplo y colocada de manera diferente a la que se halló; por lo que las traslaciones y las rotaciones de cuerpo rígido suelen ser ignoradas al estimar esta distorsión.

La distorsión interna ocasiona cambios en la posición de las partículas de un cuerpo que son conocidos como *desplazamiento*, también puede ocasionar cambios en la forma del cuerpo los cuales son conocidos como *torsión*. Las distorsiones pueden ser pequeñas y reversibles, es decir el cuerpo puede regresar a su forma original si se elimina el esfuerzo aplicado. Tales deformaciones son características de cuerpos sólidos deformados en su rango elástico. En un cierto estado de deformación elástica, en el límite elástico, las rocas pierden su cohesión interna en ciertas superficies y sufren *deformación dúctil*.

Aunque pueda anularse la deformación en una roca y conocer su forma original esto no constituye una descripción completa del fenómeno de deformación, ya que no incluye el desarrollo progresivo de éste, es decir sólo hace referencia a los estados inicial y final de la roca. La relación geométrica de los estados inicial y final puede describirse con transformaciones lineales de  $R^2$  en  $R^2$  y de  $R^3$  en  $R^3$ , a estas transformaciones se les llama *deformación finita*.

Una deformación finita homogénea transforma una esfera en elipsoide; las líneas rectas y paralelas que hayan estado en la esfera, siguen siendo rectas y paralelas después de la deformación. A cada cuerpo deformado le asociamos un elipsoide, el cual es el resultado de someter a una esfera a la misma deformación a la que fue sometido el cuerpo. Los vectores compuestos de las magnitudes y direcciones de los ejes del elipsoide tienen la misma magnitud y orientación independientemente del marco de referencia que uno escoja para describirlos. Los vectores cuyos componentes no presentan variación al cambiar el marco de referencia, llevan el nombre de tensores. El tensor asociado al elipsoide de deformación, llamado tensor de deformación, tendrá nueve cantidades independientes: tres que describen la longitud de los ejes principales del elipsoide, y tres pares que definen la magnitud y orientación de la deformación en tres planos perpendiculares. La transformación geométrica de esfera a elipsoide se puede representar con el producto del tensor de deformación y los vectores que definen la esfera. Los vectores así transformados definirán el elipsoide.

Muchos problemas de la deformación en tres dimensiones se resuelven utilizando cálculos bidimensionales con el fin de simplificar las manipulaciones matemáticas, ya que la geometría de deformaciones en dos dimensiones ayuda a comprender la deformación tridimensional. Esta

simplificación implica que la esfera se reduce a círculo, el elipsoide a elipse y las nueve componentes del tensor a cuatro (dos que describen la longitud de los ejes principales de la elipse y otros dos que definen la magnitud y orientación de la deformación). La restricción al plano de la representación de deformaciones, restringe también el movimiento de las partículas materiales a éste, y si además se añade la que la deformación se lleva a cabo preservando el área del cuerpo, el determinante del tensor de deformación es igual a 1.

Para analizar la deformación interna en dos dimensiones se establece un sistema de ejes de coordenadas rectangulares, se considera lo que sucede si se conserva un punto fijo del cuerpo, el punto  $(0,0)$  y se hace que los demás puntos se desplacen de acuerdo con una ley lineal. De esta forma es posible investigar el cambio en la orientación de unos puntos con relación a otros, lo que es, por definición, la deformación interna. Se describirán a continuación algunos tipos sencillos de desplazamiento que lleva consigo el estado deformado.

**1. Extensión simple paralela a un eje (Fig. 7a).** Las coordenadas  $x, y$  de un punto, antes de deformación, se desplazan a las posiciones  $x_1, y_1$ , de tal modo que

$$x_1 = (e + 1)x \quad (\text{e0})$$

$$y_1 = y$$

que en términos de la matriz asociada a la transformación, se escribe:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{e1})$$

**2. Extensión paralela a ambos ejes (Fig. 7b).**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x + 1 & 0 \\ 0 & e_y + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{e2})$$

El cambio de área después de la deformación es  $(e_x + 1)(e_y + 1) - 1$ .

Cuando  $(e_x + 1) = 1/(e_y + 1)$  no hay incremento de área y esta deformación se le denomina *cizalla pura*.

3. **Cizalla simple (Fig. 7c).** Las partículas se desplazan en una dirección paralela al eje  $X$ , de modo que la línea ordenada de cualquier punto se deforma por cizalla según un ángulo  $\psi_1$ .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{tag} \psi_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{e3})$$

No hay cambio de área.

4. **Cizallas simples superpuesta (Fig. 7d,e).** Si se somete el cuerpo deformado de la figura 7c a otra cizalla paralela al eje  $Y$ , de modo que las líneas paralelas al eje  $X$  sean desviadas según un ángulo  $\psi_2$  (Fig. 7d), se tiene

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \text{tag} \psi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (\text{e3 bis})$$

o bien sustituyendo según (e3)

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{tag} \psi_1 \\ \text{tag} \psi_2 & 1 + \text{tag} \psi_1 \text{tag} \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{e4})$$

Si se cambia el orden pero no la intensidad de las sucesivas deformaciones por cizalla, la transformación final no es la misma que la correspondiente a la ecuación (e4) (Fig. 7e).

Primera deformación:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \text{tag} \psi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{e5})$$

Segunda deformación:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{tag} \psi_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (\text{e5 bis})$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \operatorname{tag} \psi_1 \operatorname{tag} \psi_2 & \operatorname{tag} \psi_1 \\ \operatorname{tag} \psi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{e6})$$

En general, se cumple cuando dos deformaciones internas se superponen, la naturaleza del producto final depende del orden de las deformaciones. La superposición de transformaciones lineales *no es un proceso conmutativo*.

**5. Cizalla simple y extensión paralela a ambos ejes (Fig. 7f).** Si la deformación por cizalla simple va seguida por la que corresponde a la figura 7c, las coordenadas de los puntos después de dos deformaciones se convierten en

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x + 1 & e_x \operatorname{tag} \psi_1 + \operatorname{tag} \psi_2 \\ 0 & e_y + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{e7})$$

Por otra parte, si el orden de la deformación se invierte, la posición final es diferente de la que corresponde a la ecuación (e7).

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x + 1 & \operatorname{tag} \psi_1 (e_y + 1) \\ 0 & e_x + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{e7bis})$$

**6. Transformación general.** El desplazamiento en general de la deformación interna es dado por la transformación  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que si  $(x, y)$  está en  $\mathbb{R}^2$  entonces  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ . O si se prefiere, en términos de la matriz asociada a  $T$  (en la base canónica):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{e8})$$

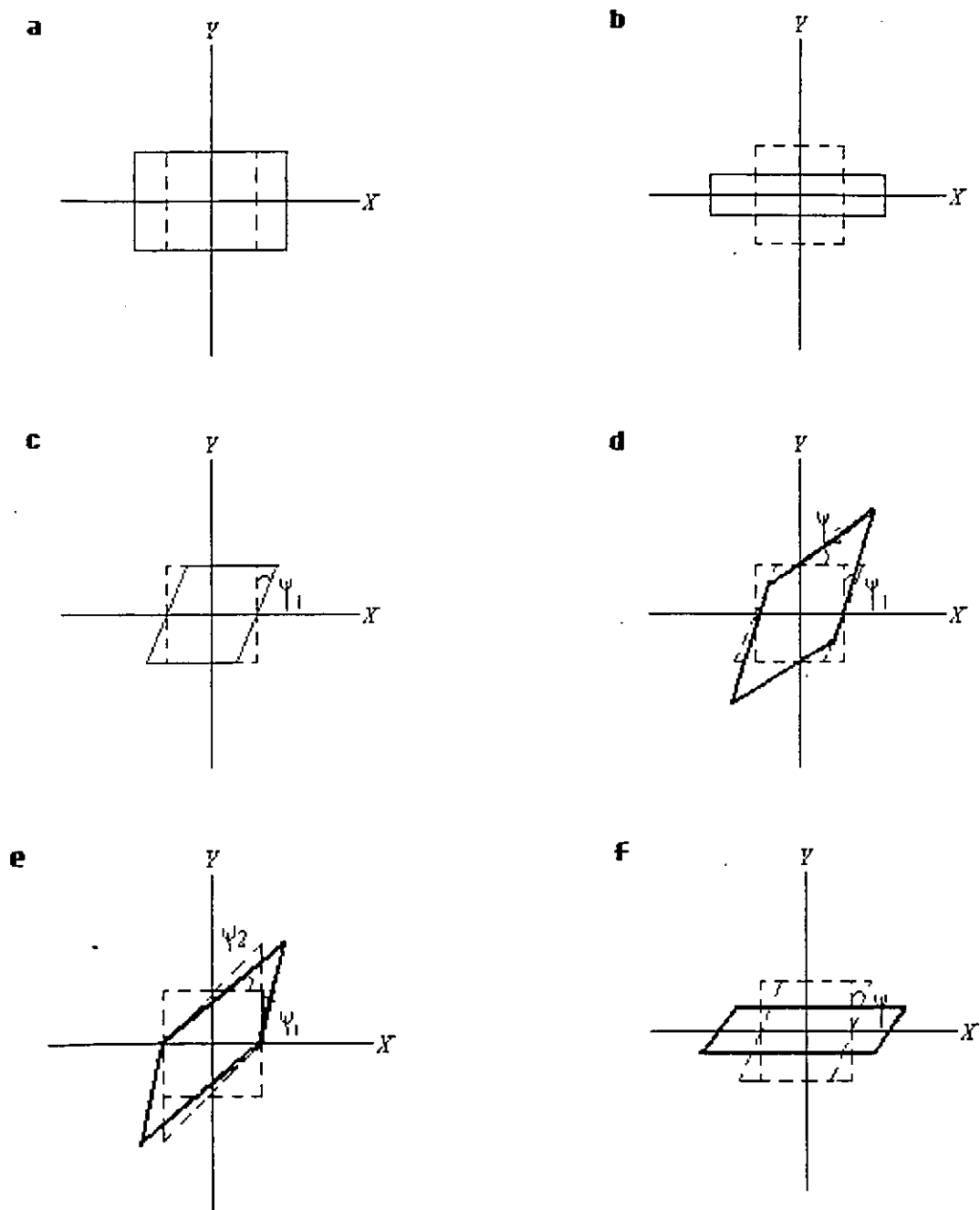
(donde  $a > 0$  y  $d > 0$ ), o sea

$$x = \frac{dx_1 - by_1}{ad - bc} \quad y = \frac{-cx_1 + ay_1}{ad - bc} \quad (\text{e8 bis})$$

siempre y cuando  $ad - bc \neq 0$ .

Esta transformación se representa gráficamente en la figura 8. El rectángulo original formado por la unión de los cuatro puntos  $(0, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(x, y)$  y  $(0, y)$  se deforma dando el paralelogramo  $(0, 0)$ ,  $(ax, cx)$ ,  $(ax + by, cx + dy)$ ,  $(by, dy)$ . El significado geométrico de cada una de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y  $d$  es





**Fig. 7)** Tipos de traslaciones especiales que dan lugar a un estado de deformación interna. Los cuadrados punteados representan el estado no deformado.

el siguiente:  $a$  y  $d$  pueden ser consideradas como componentes de la deformación interna longitudinal paralela a los ejes de coordenadas  $X$  e  $Y$ , respectivamente, mientras que  $b$  y  $c$  son en parte componentes de cizalla que reflejan los desplazamientos angulares de los lados del rectángulo originalmente perpendiculares, esto es,  $b = d \operatorname{tag} \alpha$  y  $c = a \operatorname{tag} \beta$ .

Sustituyendo los valores de  $x$  e  $y$  de (e8) en la ecuación general de la recta

$$y = mx + k, \quad (\text{e9})$$

se encuentra que una recta se transforma en otra recta

$$y_1 = \frac{c + dm}{a + bm} x_1 + \frac{ad - bc}{a + bm} k \quad (\text{e10})$$

por lo que se concluye que este desplazamiento se ajusta a los criterios anteriormente dados para la deformación interna homogénea.

El efecto del desplazamiento general (e8) sobre los puntos situados en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  es una transformación a la ecuación

$$(c^2 + d^2)x_1^2 - 2(ac + bd)x_1y_1 + (a^2 + b^2)y_1^2 - (ad - bc)^2 = 0 \quad (\text{e11})$$

Esta es la expresión de una elipse, la *elipse de la distorsión interna*, y los ejes mayor y menor de esta elipse representan las posiciones de *máxima* y *mínima distorsión interna longitudinal*, siendo sus longitudes  $1 + e_1 = \sqrt{\lambda_1}$ , y  $1 + e_2 = \sqrt{\lambda_2}$ .

Si el desplazamiento general (e8) se aplica a la ecuación general de una elipse centrada en el origen ( $lx^2 - 2mxy + ry^2 = 1$ ), esta elipse se transforma en otra elipse

$$px_1^2 - 2qx_1y_1 + ry_1^2 = 1 \quad (\text{e12})$$

donde

$$p = \frac{ld^2 + 2mcd + nc^2}{(ad - bc)^2} \quad q = \frac{-m(ad + bc) + lbd + nac}{(ad - bc)^2} \quad r = \frac{lb^2 + 2mab + na^2}{(ad - bc)^2}$$

Esto es importante, porque significa que los efectos geométricos de diversas deformaciones homogéneas bidimensionales finitas superpuestas pueden describirse siempre mediante una sola elipse de deformación finita. No obstante, existe una elipse que se transforma en la circunferencia  $x_1^2 + y_1^2 = 1$  dada por la ecuación

$$(a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2 = 1. \quad (e13)$$

Esta elipse es conocida como *elipse recíproca de la distorsión interna*.

En general, la deformación (e8) conduce a un cambio en el valor del ángulo entre dos líneas originalmente perpendiculares. Sin embargo, existen dos líneas que son perpendiculares antes de la deformación y que permanecen así después de la misma. La ecuación de una recta que pasa por el origen y que es inicialmente perpendicular a  $y = mx$  es

$$y = -\frac{x}{m}. \quad (e14)$$

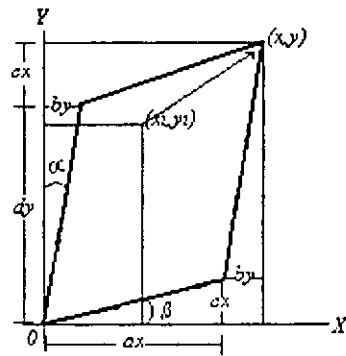
Después de la deformación, ésta tendrá una pendiente [según (e10)] de

$$\frac{mc - d}{ma - b} \quad (e15)$$

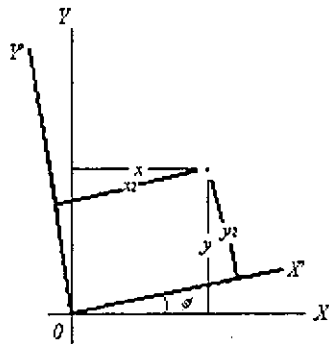
si estas dos líneas perpendiculares de pendientes iniciales  $m$  y  $-1/m$  han de permanecer perpendiculares, el producto después de la deformación debe ser  $-1$ , lo que conduce a

$$\frac{(md + c)(mc - d)}{(mb + a)(ma - b)} = -1 \quad \Rightarrow \quad m^2 + m \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{ab + cd} - 1 = 0. \quad (e16)$$

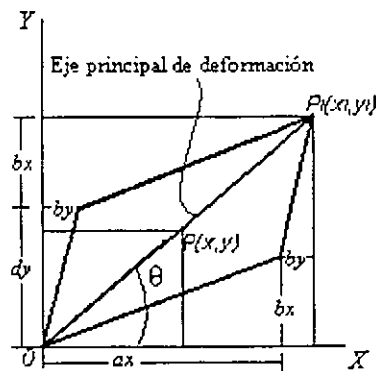
Suponiendo que  $ab + cd$  no es cero, las raíces de esta ecuación siempre son reales y por lo tanto siempre hay dos líneas inicialmente perpendiculares que permanecen perpendiculares después de la deformación. Las *orientaciones finales* de las líneas de pendiente  $m$  y  $-1/m$  se definen como los *ejes principales de la deformación interna*. En su condición deformada, estos ejes



**Fig. 8)** *Traslación asociada a la distorsión interna general.*



**Fig. 9)** *Traslación especial que produce la rotación de un cuerpo sin que se produzca deformación interna (rotación de cuerpo rígido).*



**Fig. 10)** *Determinación de las dos deformaciones principales,  $P(x, y)$  ha sido escogido de forma que se sitúe sobre el eje principal de la deformación, desplazándose a  $P_1(x_1, y_1)$ .*

coinciden con las direcciones de máxima y mínima elongación, esto es, con los ejes de la elipse de deformación. En general, la orientación original de estas líneas perpendiculares no necesariamente coincide con la que adquieren después de la deformación y en este caso se habla de *deformación rotacional*. Sin embargo, si dichas líneas coinciden, la deformación se conoce como *deformación irrotacional*. La condición necesaria para que se produzca la deformación irrotacional es que las pendientes de estas rectas sean las mismas antes y después de la deformación

$$\frac{md+c}{mb+a} = m \quad \text{o} \quad m^2b + m(a-d) - c = 0 \quad (\text{e17a})$$

$$y \quad \frac{mc-d}{ma-b} = -\frac{1}{m} \quad \text{o} \quad m^2c + m(a-d) - b = 0. \quad (\text{e17b})$$

Cuando estas condiciones se cumplen simultáneamente, se obtiene la condición necesaria para que se produzca la deformación irrotacional:  $b = c$ . La *rotación simple* (o rotación de cuerpo rígido) es una transformación sin distorsión interna. El desplazamiento del punto  $(x,y)$  puede determinarse rotando los ejes de coordenadas  $x$  e  $y$  a un ángulo  $\phi$  para ocupar las nuevas posiciones  $x'$  e  $y'$ . Las relaciones entre  $(x,y)$  y  $(x',y')$  son, de acuerdo con la figura 9,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{e18})$$

Junto con la deformación interna, generalmente tiene lugar una deformación rotacional de este tipo, pudiendo considerarse una deformación general como el producto de dos tipos de desplazamiento, una deformación irrotacional seguida de una rotación finita. Por ejemplo, el punto  $(x,y)$  puede desplazarse a  $(x',y')$  por una deformación irrotacional finita (recuérdese que la condición para aplicar (e8) es que  $b = c$ ) y el desplazamiento general se convierte en

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{e19})$$

Si esto experimenta a continuación una rotación finita de un ángulo  $\phi$ , entonces, utilizando la transformación (e18) se obtiene la posición final de cualquier punto  $(x_2, y_2)$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{e19bis})$$

$$\text{donde } A = a \cos \phi + b \operatorname{sen} \phi \quad (\text{e20a})$$

$$B = b \cos \phi + d \operatorname{sen} \phi \quad (\text{e20b})$$

$$C = -a \operatorname{sen} \phi + b \cos \phi \quad (\text{e20c})$$

$$D = -b \operatorname{sen} \phi + d \cos \phi \quad (\text{e20d})$$

Como  $B - C = (a + d) \operatorname{sen} \phi$  y  $A + D = (a + d) \cos \phi$ , se puede obtener la parte rotacional  $\phi$  de una deformación si se conocen los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  según

$$\operatorname{tag} \phi = \frac{B - C}{A + D} \quad (\text{e21a})$$

Análogamente, es posible obtener los valores de  $a$ ,  $b$  y  $d$  de la parte irrotacional de la deformación en función de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $\phi$ . Multiplicando (e20a) por  $\cos \phi$ , (e20c) por  $\operatorname{sen} \phi$  y restando, se obtiene

$$a = A \cos \phi - C \operatorname{sen} \phi \quad (\text{e21b})$$

Multiplicando (e20a) por  $\operatorname{sen} \phi$ , (e20c) por  $\cos \phi$  y sumando se tiene

$$b = A \operatorname{sen} \phi + C \cos \phi \quad (\text{e21c})$$

Multiplicando (e20b) por  $\operatorname{sen} \phi$ , (e20d) por  $\cos \phi$  y sumando, se tiene

$$d = B \operatorname{sen} \phi + D \cos \phi \quad (\text{e21d})$$

Como se tienen los valores de  $a$ ,  $b$  y  $d$  de la transformación irrotacional, se pueden obtener las deformaciones principales de la parte irrotacional del

siguiente modo. En la figura 10, se sitúa el punto  $P(x,y)$  a una distancia unitaria a partir del origen y sea  $OP$  uno de los ejes principales de la deformación interna, el cual forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $X$ . Si se hace que la posición deformada de  $P$  sea  $P_1(x_1,y_1)$ , entonces, dado que la deformación es irrotacional y que  $P$  se sitúa sobre un eje principal de la deformación interna, se cumple que el ángulo  $P_1Ox = \text{ángulo } POx = \theta$ . Como por otra parte  $P_1O$  coincide con uno de los ejes principales de la elipse de deformación interna la longitud de  $P_1O = (1+e)$  será una deformación interna principal. Por lo que se cumple que

$$\cos\theta = x = \frac{ax + by}{1+e} \quad \text{y} \quad \text{sen}\theta = y = \frac{bx + dy}{1+e}$$

$$0 = x[a - (1+e)] + by \quad \text{(e22a)}$$

$$0 = bx + y[d - (1+e)] \quad \text{(e22b)}$$

Eliminando  $x$  e  $y$  de estas ecuaciones se tiene

$$[a - (1+e)][d - (1+e)] = b^2$$

$$(1+e)^2 - (1+e)(a+d) + ad - b^2 = 0 \quad \text{(e23)}$$

y las dos raíces de esta ecuación son las dos deformaciones internas principales  $1+e_1$  y  $1+e_2$ . La forma de la elipse de deformación es

determinada por el cociente  $\frac{1+e_1}{1+e_2}$  que es la razón axial (R) de esa elipse y la

cual es siempre mayor o igual a 1. Entre mayor sea el valor de R, mayor es el grado de distorsión interna. Para determinar el valor de  $\theta$ , se sustituyen  $x$  por  $\cos\theta$  e  $y$  por  $\text{sen}\theta$  en las ecuaciones (e22)

$$0 = [a - (1+e)] + b\text{tag}\theta \quad 0 = \frac{b}{\text{tag}\theta} + [d - (1+e)] \quad \text{(e24)}$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene una ecuación de segundo grado en  $\text{tag } \theta$  que define la posición de los dos ejes perpendiculares entre sí de la elipse de deformación interna

$$\text{tag}^2\theta + \frac{a-d}{b} \text{tag}\theta - 1 = 0 \quad (\text{e25})$$

La forma y orientación de la elipse caracterizan la deformación interna en cuanto a su magnitud y orientación en el espacio. La elipse describe la deformación finita que ha sufrido el cuerpo, más no la trayectoria de deformación. La trayectoria puede ser definida por la forma y orientación de una secuencia de elipses que definen las *deformaciones incrementales o infinitesimales* a las que se está sometiendo el cuerpo. La elipse de deformación finita es entonces el producto de una serie de incrementos de deformación.



## EFECTOS DE LA DISTORSIÓN INTERNA EN LA TESELACIÓN DELAUNAY

Si se considera una población de puntos distribuidos aleatoriamente y se somete a una transformación general (antes descrita), se observará que su distribución sigue siendo aleatoria después de la transformación. Pero si se tiene una población antiaglomerada de puntos y se le aplica una transformación general ¿sigue siendo antiaglomerada su distribución? ¿cómo cambia la posición de cada uno de sus puntos con respecto a los demás?

Como la teselación Delaunay relaciona a cada punto de una población con los puntos de ésta misma más cercanos a él, puede ayudar a contestar estas interrogantes.

La teselación Delaunay de una población de puntos en estado no deformado, identifica vecinos naturales diferentes a los que identifica la teselación Delaunay de la misma población pero en estado deformado.

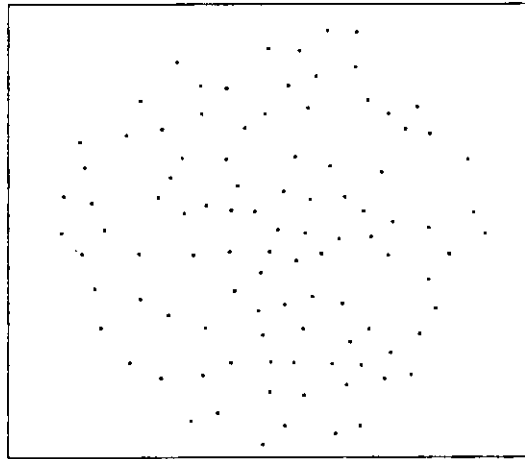
Las deformaciones que se emplearon en el presente trabajo para analizar lo anteriormente dicho, fueron la cizalla pura y la cizalla simple ya que por tener definiciones tensoriales sencillas ( $D_{cp}$ ,  $D_{cs}$  respectivamente (Ec26)) fue fácil su programación. Además parecen estar representadas en rocas naturales; es decir no son sólo transformaciones matemáticas bonitas.

$$D_{cp} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \quad D_{cs} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec26})$$

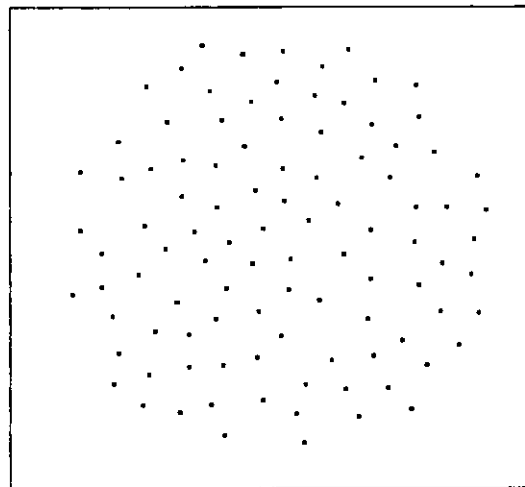
Se analizaron poblaciones artificiales de 100 a 250 puntos con grados de antiaglomeramiento de  $0.6\rho^{-1/2}$  y  $0.8\rho^{-1/2}$ , o sea poblaciones que tienden a una distribución aleatoria y poblaciones que tienden a una distribución uniforme (fig. 11a,b). Los factores de distorsión  $k$  y  $\gamma$  tomaron valores de 1.3 a 3.5 y

0.3 a 2.5 respectivamente con los que las poblaciones se mostraron desde casi sin deformación hasta muy deformadas ( $R=12.25$ , fig. 11b,c).

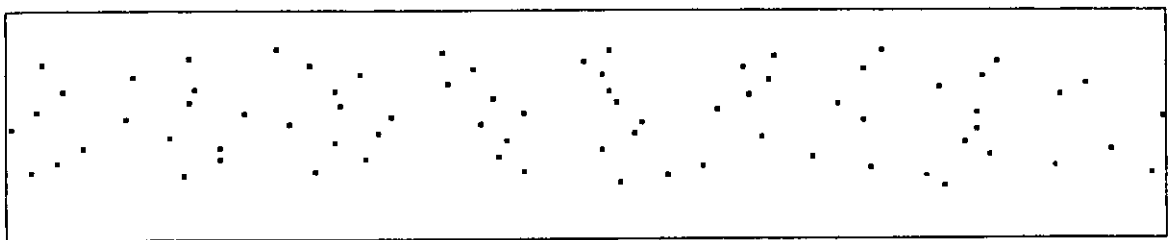
a)



b)



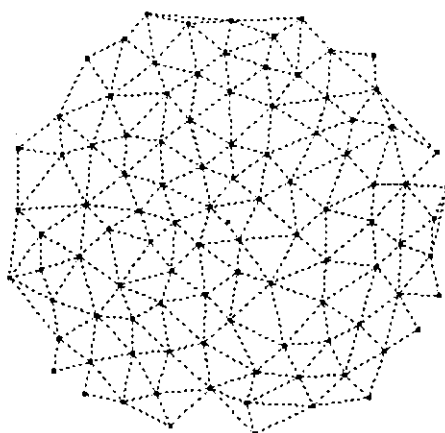
c)



**Fig. 11)** Poblaciones de 100 puntos, a) y b) en estado no deformado con grados de antiaglomeramiento  $0.6\rho^{-1/2}$  y  $0.8\rho^{-1/2}$  respectivamente. c) representa el estado deformado de b) con  $k=3.5$  de cizalla pura.

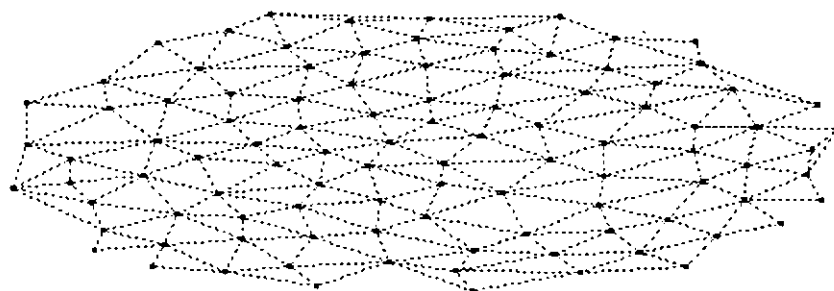
El grado de antiaglomeramiento disminuyó cuando aumentó el factor de distorsión (fig.14), es decir el grado de antiaglomeramiento disminuye conforme aumenta la deformación (fig.11c).

Entre menor sea el grado de antiaglomeramiento mayor es la aleatoriedad de la distribución de la población. A mayor deformación mayor cambio en la teselación Delaunay con respecto a la teselación de la población si deformar (figs. 11 y 12). Los puntos se acercan más en una dirección y se alejan en otra, sus vecinos cercanos correspondientes a cada punto cambian y con ello la teselación Delaunay (fig. 13).

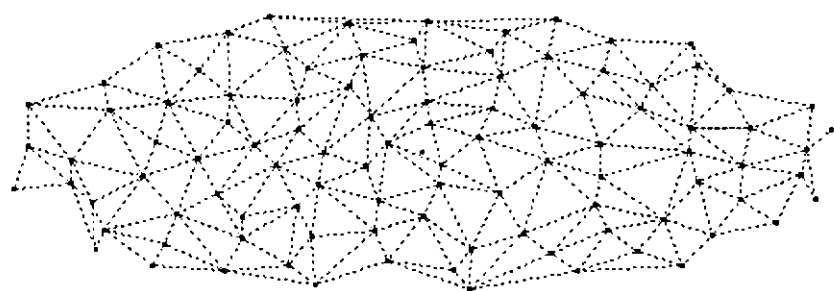


**Fig. 12)** *Teselación Delaunay de la figura 11b.*

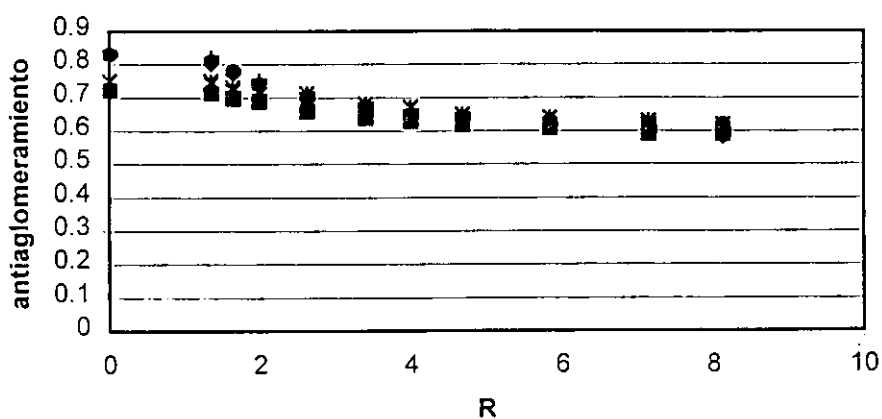
a)



b)



**Fig. 13)** a) muestra la teselación Delaunay de la figura 12 deformada junto con la población, b) muestra la teselación Delaunay de esta misma población obtenida después de la deformación.



**Fig. 14)** Gráfica que muestra el decremento del grado de antiaglomeramiento en función de la deformación.

## MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE DISTORSIÓN

### MÉTODO DE CENTRO A CENTRO

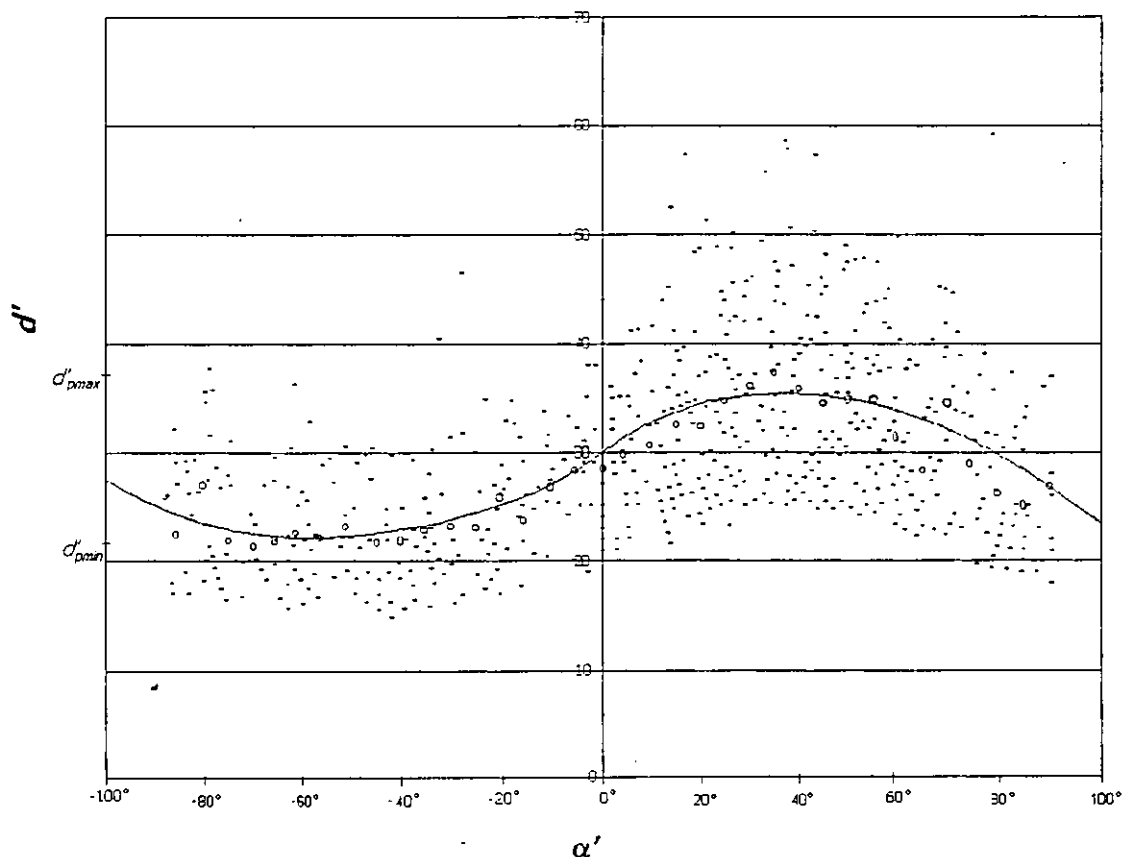
Las rocas están formadas por partículas que se pueden localizar (oolitas, granos de arena de una arenisca, los clastos de un conglomerado o los porfidoclastos de una milonita) pero cuya forma no se puede usar para determinar la distorsión. Las partículas de un conglomerado deformado, por ejemplo, son a menudo muy diferentes unas de otras. La forma de estas partículas es a veces casi elíptica, pero estas formas no necesariamente describen de manera directa la forma de la elipse de distorsión de toda la roca. La relación de la forma de las partículas después de la deformación es una función complicada de la forma original, donde interviene la partícula y las partículas vecinas.

El *método de centro a centro* es una técnica que permite determinar la distorsión finita en un plano de la roca usando la distribución de puntos en su estado deformado y la distancia entre estos puntos.

Este método se puede usar cuando se tiene un agregado de objetos antiaglomerados cuyos centros son relativamente fáciles de definir (oolitas, conglomerados, granos de arena) y se establecen visualmente los vecinos naturales iniciales de cada objeto.

Se obtienen las longitudes ( $d'$ ) de las líneas que unen los centros de vecinos naturales iniciales y se examinan las variaciones en éstas en función de su orientación. Las longitudes de estas líneas antes de la deformación es independiente de la dirección original ( $\alpha$ ) y muestran una longitud estadística relacionada con el tamaño de las partículas y el empaquetamiento\* de las mismas. Después de la deformación, las líneas cambian su orientación ( $\alpha'$ )

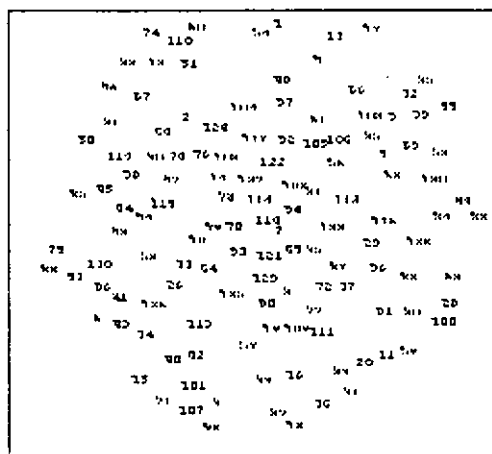
respecto a un marco de referencia y su longitud, variando de acuerdo a la distorsión interna. Las líneas que van de centro a centro pueden por lo tanto, ser usadas para calcular la forma y orientación de la elipse de distorsión. Para calcular la razón axial de la elipse de deformación, se toman los promedios de las distancias ( $d'_p$ ) agrupadas según su orientación y el cociente de las distancias mayor y menor ( $d'_{pmax} / d'_{pmin}$ ) representan la razón axial, y su orientación es la orientación de  $d'_{pmax}$ . Si se hace una gráfica de  $d'$  contra  $\alpha'$  incluyendo los promedios, se tiene que los promedios se aproximan a una curva sinusoidal (fig. 15).



**Fig. 15)** Gráfica de distancias contra orientaciones. Los círculos representan las distancias promedio en cada clase de ángulo. Los promedios tienden a una curva sinusoidal.

## EL MÉTODO FRY

Esta técnica desarrollada por Norman Fry (1979), provee un excelente método práctico para encontrar una aproximación a la elipse de distorsión. La ventaja del método Fry es que proporciona una solución gráfica para el método de centro a centro, además de ser rápido y lo suficientemente preciso para la investigación.



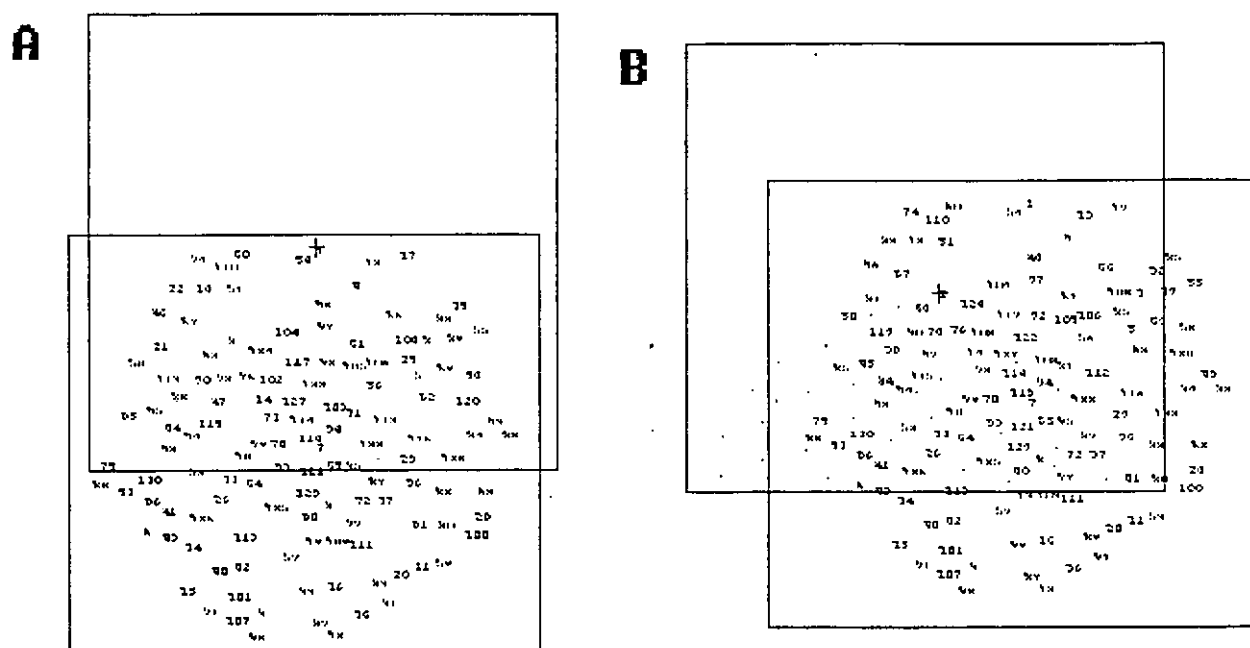
**Fig. 16)** Para hacer el análisis de deformación con el método Fry, primero se enumeran de manera aleatoria los puntos de la población.

Este método es muy simple. Considerando la población antiaglomerada que forman los centros de objetos que antes de la deformación eran de un tamaño estadísticamente uniforme, la construcción Fry es como sigue:

1. En una hoja de papel se marcan los centros de objetos de una muestra y se enumeran (fig. 16).
2. Se toma un acetato y se marca un punto central de referencia. Se pone la referencia sobre el punto 1 y se trazan las posiciones de los demás puntos (2,3,4,...) sobre el acetato (fig. 17A).

3. Se mueve el acetato, conservando su orientación respecto a la hoja de papel, de modo que la referencia del acetato se asiente sobre el punto 2. Se trazan las posiciones de los demás puntos (1,3,4,...) en el acetato (fig. 17B).
4. Se repite el paso 3 para el resto de los puntos.

Muchos puntos acumulados en el acetato no están uniformemente distribuidos (fig. 17C).



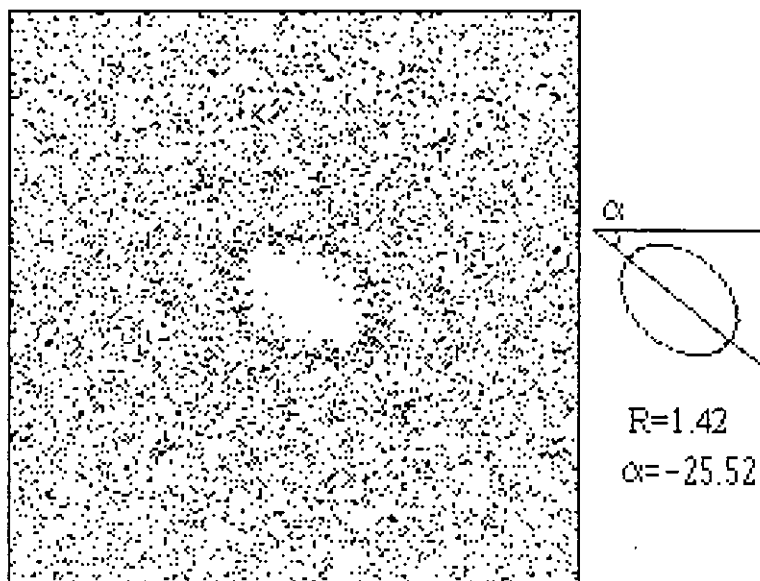
**Fig. 17)** *A muestra la superposición del acetato centrado sobre el punto 1. La posición de todos los otros puntos es copiada en el acetato. B muestra la superposición del acetato centrado en el punto 2 de acuerdo a un acimut constante. La posición de todos los otros puntos es copiada en el acetato.*

Alrededor de la referencia del acetato hay una región vacía de puntos que puede tener una forma circular o elíptica. El vacío surge del hecho de que dos partículas originalmente contiguas, no están más cerca que la suma de sus radios. Un vacío circular implica que no ha habido distorsión y un vacío elíptico implica que la roca ha experimentado deformación. La forma y orientación de la elipse de distorsión son directamente registradas por la forma y orientación del vacío. Si el vacío no se ve después de asentar la referencia



del acetato en 100 o 150 puntos, implica que el agregado tiene una distribución con un bajo grado de antiaglomeramiento. Bajo estas circunstancias no se llega a una solución final. La configuración geométrica inicial de la roca deformada o no, fue controlada por la distribución de Poisson (fig.3a).

1. Alrededor del vacío puede que haya alta concentración de puntos. Esta concentración puede tener forma elíptica o circular semejante al vacío central del acetato. Esta concentración relaciona el empaquetamiento con las distancias entre las partículas. Si el tamaño inicial de las partículas era uniforme y su empaquetamiento cerrado, esta concentración es bien marcada. Si las partículas antes de la deformación tienen variadas formas o si el empaquetamiento no estaba muy apretado, esta concentración es débil. La forma elíptica o circular, semejante a la del área vacía, refleja la forma de la elipse de distorsión.
2. Alrededor de esta fuerte concentración está una débil concentración de puntos que refleja la escasez de ciertas distancias entre partículas.
3. Si la población es altamente antiaglomerada, se obtienen otras zonas circulares o elípticas concéntricas de alta y baja densidad de puntos en el diagrama, lo cual se debe al hecho de que haya tanto vecinos de primer orden (contiguos) como de segundo, tercero y sucesivamente (vecinos más cercanos después de los contiguos, vecinos más cercanos después de los de segundo orden y así sucesivamente).



**Fig. 17C)** Características del diagrama final. La distribución elíptica con alta densidad de puntos alrededor del vacío, da la forma y orientación de la elipse de distorsión.

## ¿ES POSIBLE DESARROLLAR UN MÉTODO BASADO EN LA TESELACIÓN DELAUNAY?

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para reconstruir la geometría original de una roca deformada es preciso estimar el elipsoide de deformación tridimensional. Éste se construye a partir de las elipses de deformación obtenidas de tres planos arbitrarios no paralelos entre sí. Sin embargo, las técnicas para estimar tales elipses son tediosas y tardadas (método de centro a centro,  $R/f/\phi$ ), por lo que casi no son usadas.

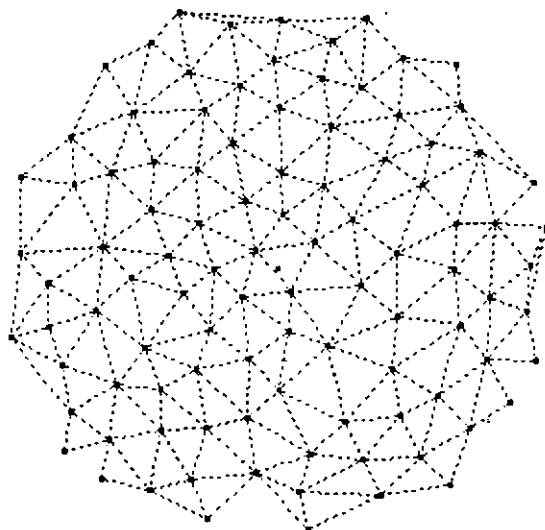
Sería una gran ventaja poder automatizar las técnicas para estimar la distorsión bidimensional, pero para algunas de ellas esto es difícil. En el caso del método de centro a centro la dificultad radicaría en la determinación de vecinos naturales originales entre los objetos de la muestra, lo cual no es posible sin inspección visual.

La teselación Delaunay identifica los vecinos naturales de cada punto de una población de puntos. Además existen cientos de programas computacionales para calcular esta teselación. El inconveniente que presenta la teselación Delaunay para simplificar la automatización del método de centro a centro, es que identifica vecinos naturales distintos en los estados deformado e indeformado de una población. Pero quizá se pueda rescatar a partir de la teselación Delaunay, de los centros de objetos del estado deformado, suficiente información para estimar la deformación.

¿Será posible obtener de la teselación Delaunay una teselación Delaunay' que relacione a cada punto de una población deformada con sus vecinos naturales del estado no deformado? ¿Cuál sería el resultado del método de centro a centro si se aplicara con la información de la teselación Delaunay'?

## METODOLOGÍA

Sería bueno conocer la respuesta a la segunda pregunta para saber si vale la pena encontrar la forma de pasar de Delaunay a Delaunay', lo cual no parece ser fácil. O bien, ver de qué forma puede ayudar la teselación Delaunay a automatizar el método de centro a centro.



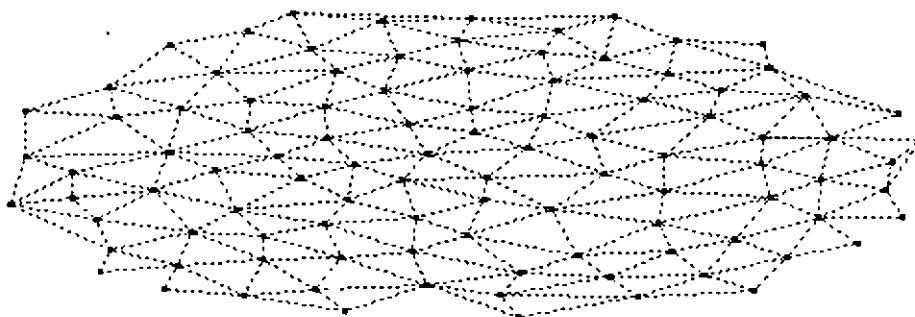
**Fig. 18)** *Teselación Delaunay de una población de puntos antiaglomerados sin deformación.*

Para tal objetivo se analizaron poblaciones antiaglomeradas generadas artificialmente con 100 a 250 puntos, con grados de antiaglomeramiento de  $0.6\rho^{-1/2}$  y  $0.8\rho^{-1/2}$ . Las poblaciones generadas de manera artificial, asemejan poblaciones generadas por los centros de objetos de muestras de materiales geológicos en estado no deformado y posteriormente son sometidas a deformación. Las deformaciones a las que fueron sometidas son:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xk \\ y/k \end{pmatrix} \quad \text{cizalla pura } y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\gamma \\ y \end{pmatrix} \quad \text{cizalla simple}$$

De los valores que toman los factores de distorsión  $k$  y  $\gamma$  ( $k \neq 0$ ) se obtiene la razón axial ( $R$ ) de la elipse de deformación correspondiente a la cizalla pura o a la cizalla simple. Es decir, si se tiene una población de puntos y se le somete a una cizalla simple con un factor  $\gamma$  de 1.3, la razón axial de la elipse de deformación correspondiente será aproximadamente de 3.4. De este modo la razón axial obtenida representa verdaderamente la deformación, porque se está partiendo de una población de puntos no deformada que es sometida a deformación conocida. En el caso de muestras geológicas las poblaciones se encuentran ya en estado deformado y no se conoce el valor de esta deformación, por lo que al calcularla el resultado no es otra cosa que una mera suposición.



**Fig. 19)** *Teselación Delaunay'. Es la misma teselación Delaunay del estado no deformado pero trazada en el estado deformado.*

Una manera de señalar el error asociado a las determinaciones de distorsión obtenidas con las técnicas para medir la deformación, es usando poblaciones no deformadas, a las cuales se les somete a deformación conocida y ya en ese estado se les aplica la técnica. Si la diferencia entre el valor real y el calculado es pequeña, se puede decir entonces que la técnica es buena.

Para el caso del método de centro a centro, no basta con aplicarlo a una población que tiene una deformación conocida ya que la elección de vecinos naturales hecha por inspección visual, es un proceso ambiguo. Así pues, es necesario encontrar de manera estricta los vecinos naturales originales de los puntos de una población deformada para verificar el método de centro a centro.

Si se obtiene la teselación Delaunay de una población antiaglomerada de puntos en su estado no deformado, se tienen los vecinos naturales originales de la población (fig.18), y si se aplica a la población una deformación conocida y posteriormente se unen con líneas a todos los vecinos naturales identificados con la teselación Delaunay, se da origen a la teselación Delaunay' (fig.19) que es la teselación que identifica a los vecinos naturales originales de una población de puntos deformada. Ya en el estado deformado y con la teselación Delaunay', se tiene entonces una población deformada de la cual se conocen los vecinos naturales originales. En esta situación puede ser determinada la deformación con el método de centro a centro.

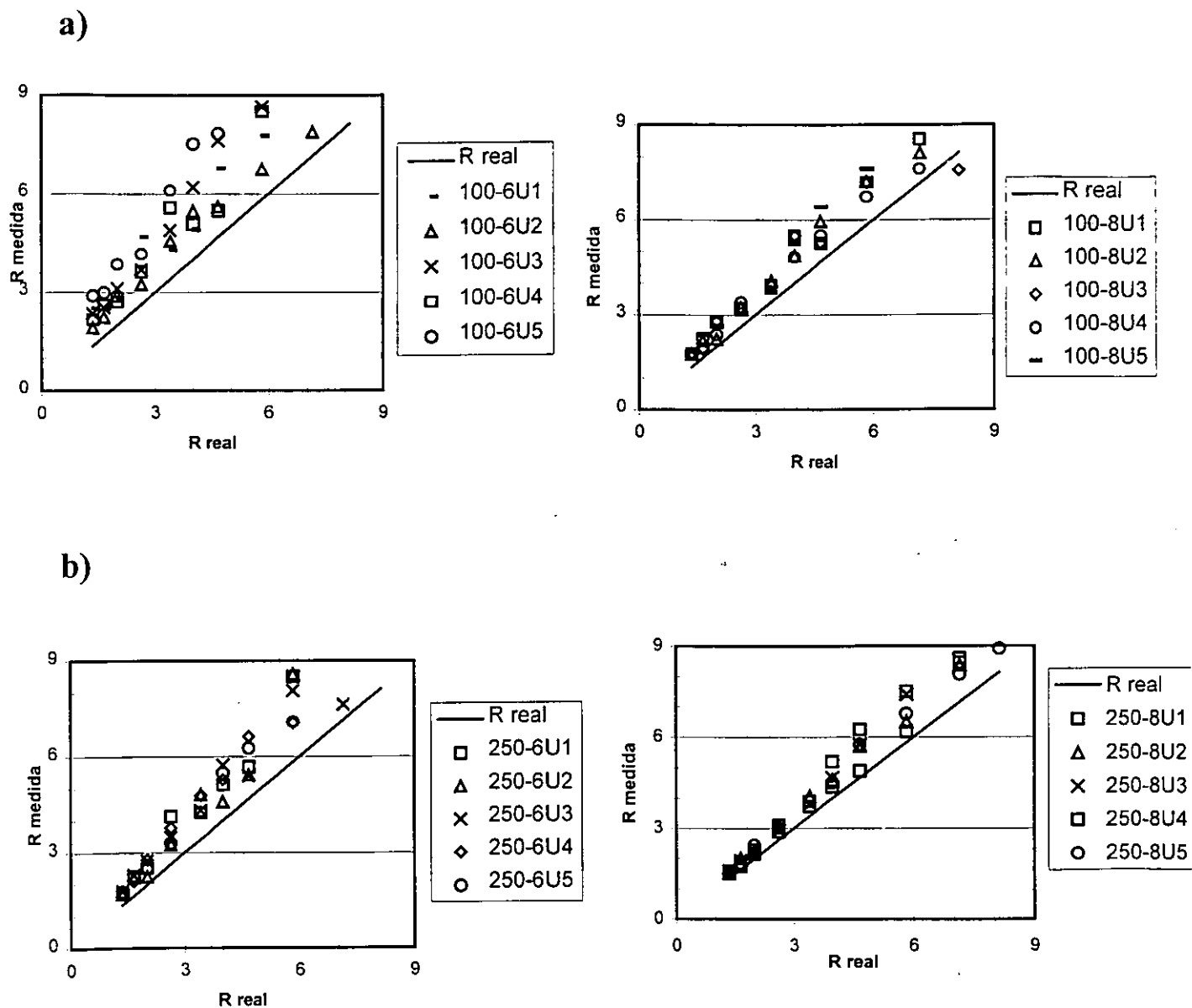
Para realizar lo anterior, se asignaron diversos valores a  $k$  y  $\gamma$  para que fueran analizados los resultados en diferentes valores de deformación. Con el fin de evitar confusiones, se llamará a partir de aquí  $R$  real a la razón axial de la elipse de deformación conocida, y  $R$  medida  $D'$  a la razón axial de la elipse de deformación determinada con el método de centro a centro y con los vecinos identificados por Delaunay'. Los valores que toman los factores de distorsión  $k$  y  $\gamma$  se escogieron de modo que representaran cambios significativos en las deformaciones gráficas, los cuales están contenidos en la siguiente tabla con la correspondiente razón axial:

$K$	R real	$\gamma$	R real
1.3	1.96	0.3	1.35
1.5	2.25	0.5	1.64
1.7	2.89	0.7	1.99
2.0	4.0	1.0	2.62
2.3	5.29	1.3	3.4
2.5	6.25	1.5	4.0
2.7	7.29	1.7	4.68
3.0	9.0	2.0	5.83
3.3	10.89	2.3	7.15
3.5	12.25	2.5	8.13

Las poblaciones fueron analizadas de la siguiente manera: a cada una se le deformó en cizalla pura y en cizalla simple con todos los valores de  $k$  y  $\gamma$  de la tabla anterior, y se calcularon las teselaciones Delaunay y Delaunay' para todas las poblaciones en cada estado de deformación. Se formaron conjuntos de datos con los valores obtenidos al aplicar el método de centro a centro con Delaunay o Delaunay' a 10 poblaciones con el mismo número de puntos (cinco con grado de antiaglomeramiento  $0.6\rho^{-1/2}$  y cinco con  $0.8\rho^{-1/2}$ ). Es decir, cada conjunto de datos fue formado por el análisis de 10 poblaciones con el mismo número de puntos y diferentes tipos de distribuciones.

Al analizar las poblaciones deformadas con deformación conocida, el método de centro a centro y los vecinos identificados con Delaunay', se determinó que el método tiende a sobreestimar el valor de la deformación; es decir, los valores de R medida casi siempre están por arriba de los correspondientes valores de R real. Cuanto menor sea el número de puntos y el grado de antiaglomeramiento mayor es la sobreestimación, y cuanto mayor sea el número de puntos y el grado de antiaglomeramiento menor es ésta

(fig. 20). El error en la orientación de la elipse de deformación disminuyó conforme aumentó la deformación (fig. 21).



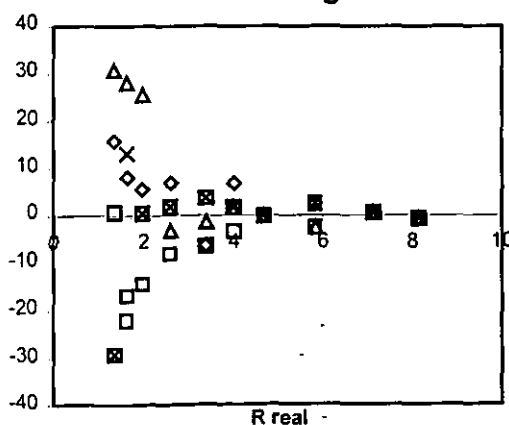


Se puede hacer que los valores obtenidos así con el método de centro a centro se aproximen más a los valores reales, pero eso no resuelve todo el problema si no se puede obtener Delaunay' sin partir del estado no deformado de la población. Quizá un análisis de la deformación con el mismo método pero utilizando la teselación Delaunay ayude a darle la vuelta al problema de encontrar Delaunay'.

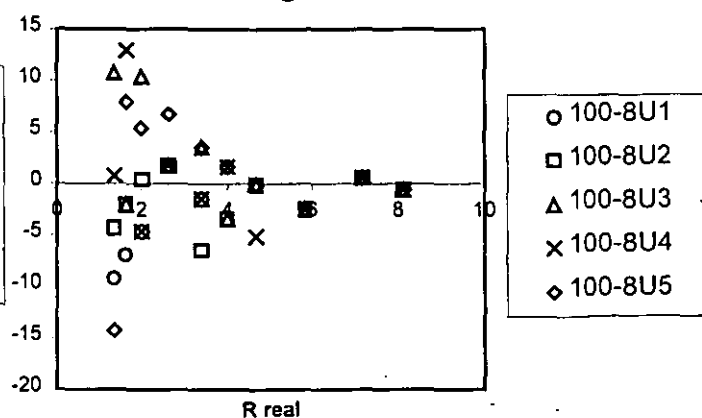
Del análisis con las poblaciones, a las que se les aplicó deformación conocida, usando los vecinos identificados con la teselación Delaunay correspondiente a los estados deformados (fig. 22) y con el método de centro a centro, se determinó que los valores obtenidos para R medida D tendieron a subestimar los valores reales de la deformación. La varianza de los valores obtenidos, es mayor cuanto menor son el número de puntos y el grado de antiaglomeramiento, y menor cuanto mayor son éstos, pero en ambos casos se tendió a la subestimación de la deformación (fig. 23). La desviación en la orientación de la elipse de deformación disminuyó con el aumento de la deformación (fig.24).

a)

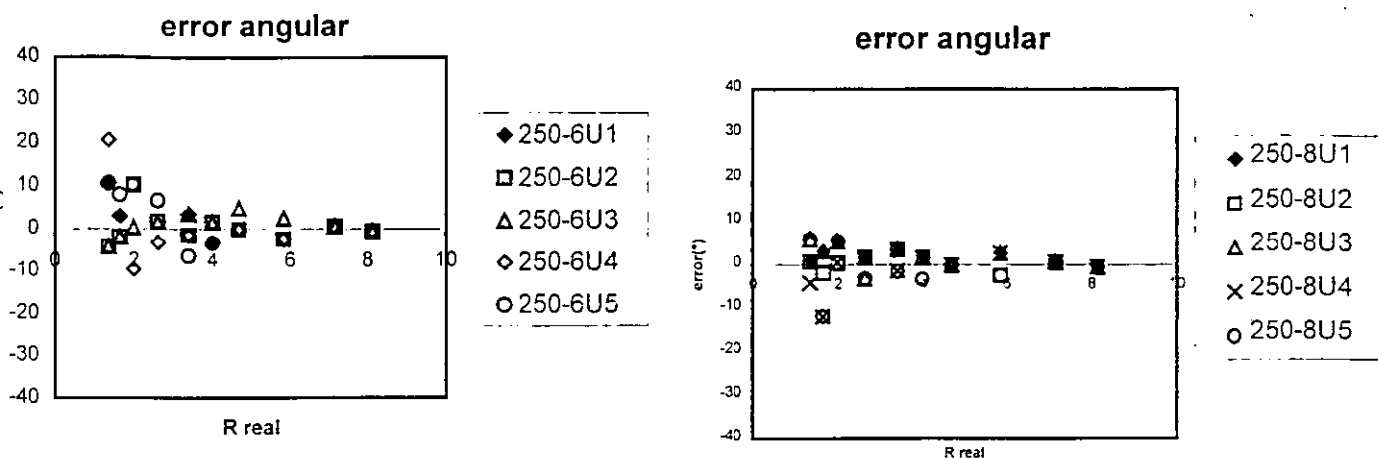
error angular



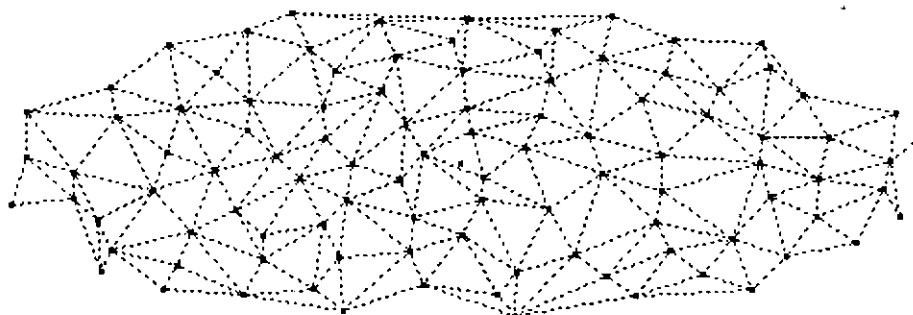
error angular



b)



**Fig. 21)** Gráficas de la desviación en las orientaciones de las elipses de deformación determinadas con el método de centro a centro aplicado a poblaciones de 100(a) y 250 (b) puntos y grados de antiaglomeramiento  $0.6\rho^{-1/2}$  y  $0.8\rho^{-1/2}$ .



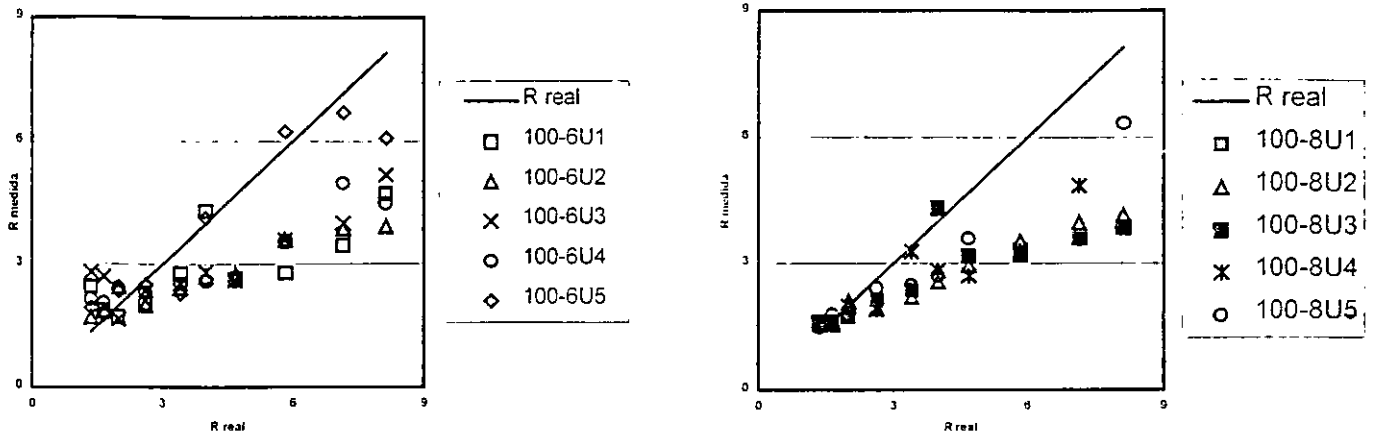
**Fig. 22)** Teselación Delaunay de una población en estado deformado. Identifica a los vecinos naturales de la población en ese estado.

Se aproximaron los valores de R medida D (R<sub>MD</sub>), que son los obtenidos con el método de centro a centro y los vecinos identificados con Delaunay, a los valores de R real con un análisis de regresión lineal.

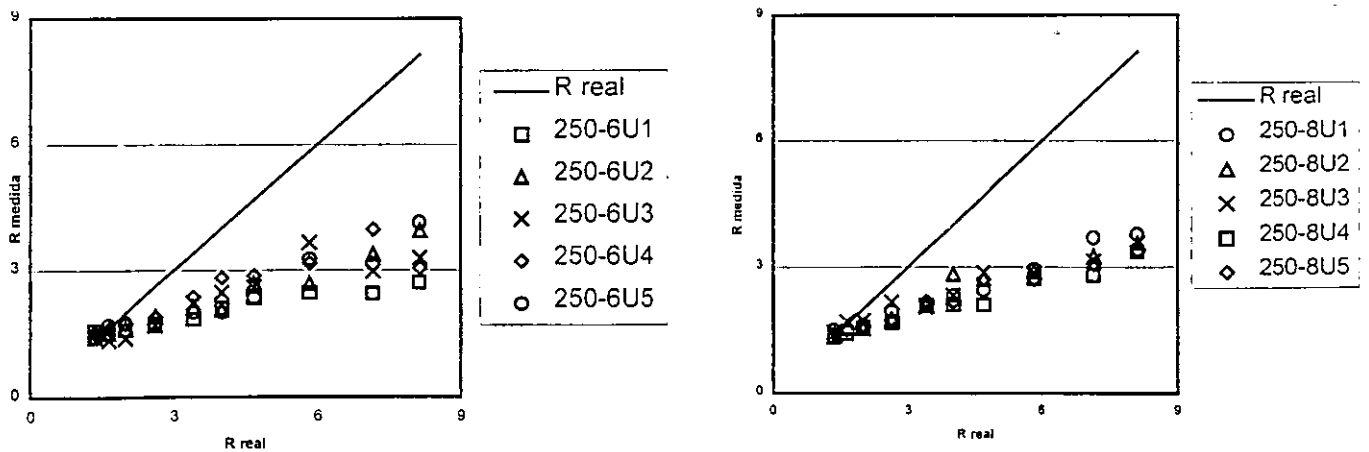
Se calculó la curva de regresión lineal de cada conjunto de éstos datos (cada dato es el valor R<sub>MD</sub> obtenido para cada estado de deformación de cada

población) y se aproximó a la recta  $y = x$  que representa los valores reales de la deformación.

a)

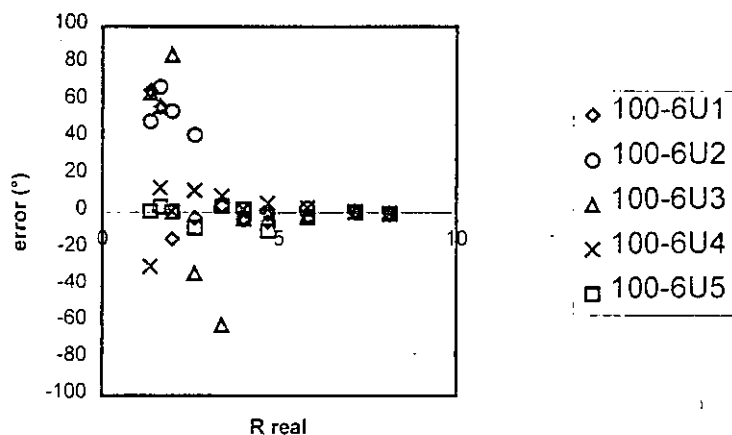


b)

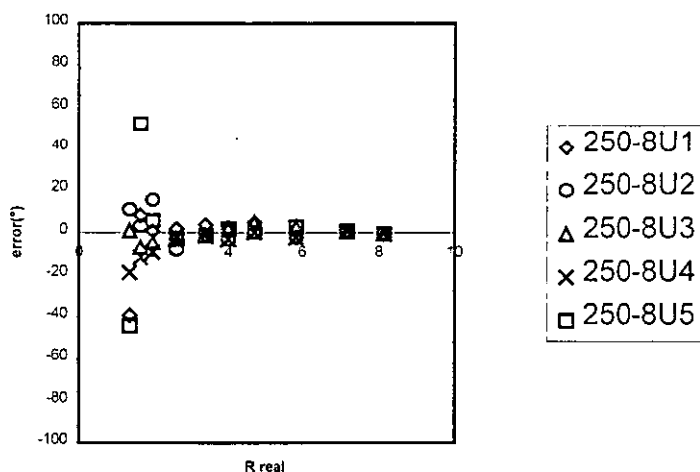


**Fig. 23)** Gráficas que muestra los valores de  $R_m$  y  $R_r$ .  $R_m$  se obtuvo con el método de centro a centro y los vecinos identificados con Delaunay en poblaciones de 100 (a) y 250 (b) puntos y grados de antiaglomeramiento  $0.6\rho^{-1/2}$  y  $0.8\rho^{-1/2}$ . La recta representa a  $R_m = R_r$ .

a)



b)



**Fig. 24)** Gráficas de la desviación en las orientaciones de las elipses de deformación determinadas con el método de centro a centro y los vecinos determinados con Delaunay en poblaciones de 100 (a) y 250 (b) puntos y grados de antiaglomeramiento  $0.6\rho^{-1/2}$  y  $0.8\rho^{-1/2}$  respectivamente.

La ecuación de una recta está dada por  $y = mx + b$ , donde  $m$  representa la pendiente de la recta y  $b$  la intersección de ésta con el eje Y. Para igualar una recta a  $x$  basta con sustraer de  $y$  el valor de la ordenada  $b$  y dividir la diferencia entre la pendiente  $m$ .

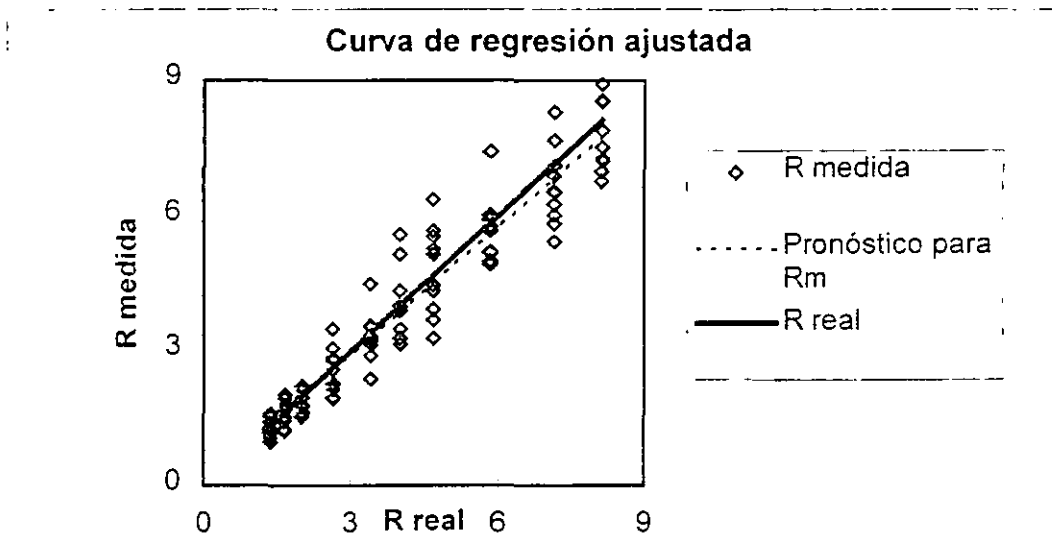
$$\frac{y-b}{m} = x$$

Al aproximar las líneas de regresión ajustadas de los conjuntos de datos a la recta  $x$  se busca:

- 1) Aproximar los valores de  $R$  medida  $D$  a los valores de  $R$  real. Esto es operar los valores de  $R$  medida  $D$  para que la curva de regresión lineal correspondiente a cada grupo de datos sea la recta  $x$  (que representa los valores reales de la deformación) o una muy cercana a ella.
- 2) Optimizar la aproximación, o sea no tener que hacer una aproximación para cada número de puntos.

Para tal fin, se promediaron las pendientes de estas líneas de regresión ajustadas de los conjuntos de datos, así como los valores de sus intersecciones con el eje  $Y$ . Los promedios se sacaron de acuerdo a la variabilidad en la suma de los cuadrados de cada conjunto de datos. Por ejemplo, en los conjuntos de datos de 100, 115 y 130 puntos las sumas de los cuadrados en sus poblaciones variaron entre 9 y 107 y en los conjuntos de datos de 145 y 160 puntos, las sumas variaron entre 3 y 34, por lo que se promediaron las pendientes y ordenadas de las líneas de regresión de los conjuntos de datos de 100 a 130 puntos y las de los conjuntos de datos de 145 y 160 puntos. En los conjuntos de datos de 175 y 190 puntos, las sumas variaron entre 3 y 24 y en los conjuntos de datos de 205, 220, 235 y 250 puntos las sumas de los cuadrados variaron de 1 a 23. Así, se promediaron los valores de las pendientes e intersecciones de las líneas de regresión ajustadas a los siguientes grupos de conjuntos de datos: de 100, 115 y 130 puntos, de 145 y 160 puntos, de 175 y 190 puntos y de 205, 220, 235 y 250 puntos. Ya con los promedios de pendientes e intersecciones de las líneas de regresión ajustadas a los conjuntos

de datos según su variabilidad, se procedió a aproximar los valores de R medida D a los de R real que están representados en la recta  $x$ .



**Fig. 25)** Curva de regresión ajustada del conjunto de datos de 250 puntos obtenidos con la aproximación  $R_D$  de R medida D.

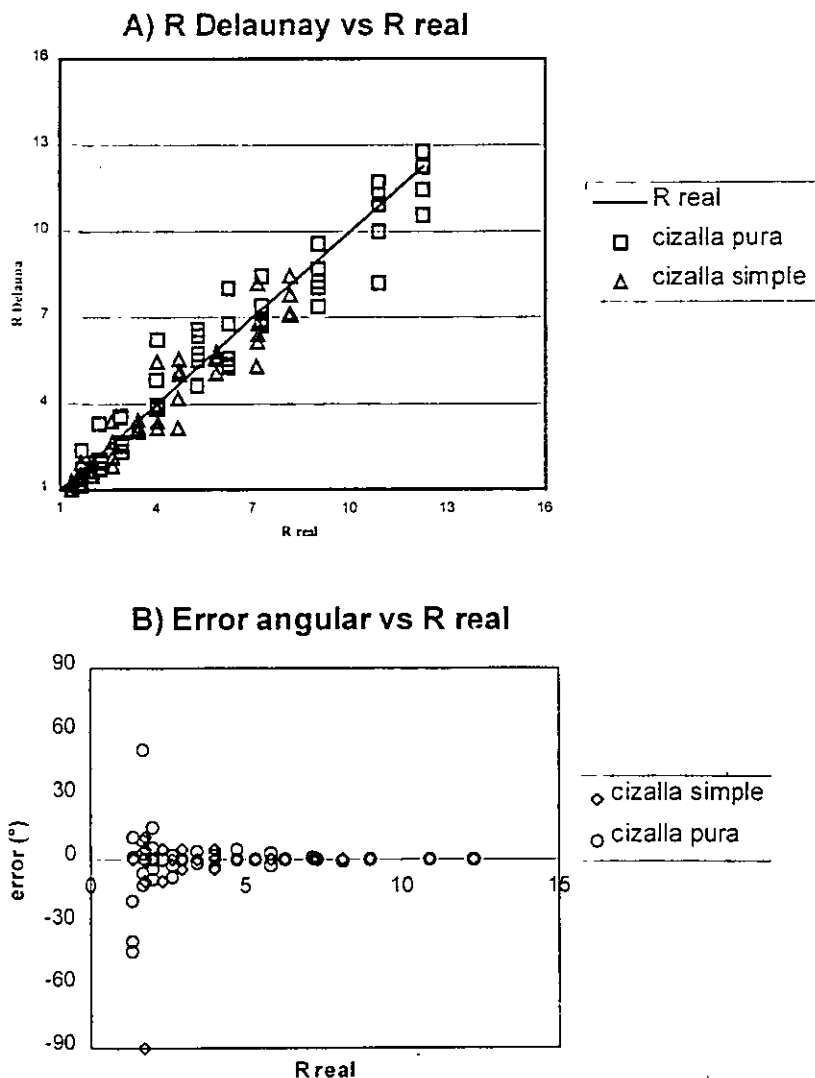
Se operaron los valores de R medida obtenidos con Delaunay y el método de centro a centro de la siguiente manera

$$R_D = \frac{Rm_D - b_p}{m_p} \approx Rr$$

donde  $R_D$  representa el valor ajustado de R medida D,  $Rm_D$  es R medida D (la que se obtiene con el método de centro a centro y los vecinos identificados con Delaunay) y  $m_p$  y  $b_p$  la pendiente y la ordenada promedios respectivamente del bloque de conjuntos de datos que se esté considerando.  $Rr$  es r real. Ya con los valores  $R_D$ , se obtuvieron las líneas de regresión de los conjuntos de datos. Estas líneas, ajustadas a los nuevos conjuntos de datos (los que contienen los valores de  $R_D$ ) se aproximan verdaderamente a la recta  $x$  (fig.25). La figura 26 muestra los valores obtenidos de esta manera para poblaciones de 250 puntos en cizalla simple y cizalla pura.

Así pues, los promedios obtenidos para los bloques de conjuntos de datos anteriormente expuestos están dados en la siguiente tabla:

Número de puntos	Pendiente promedio	Ordenada promedio
De 100 a 144	0.399	1.30
De 145 a 160	0.365	1.10
De 161 a 204	0.343	1.09
De 205 a 250	0.320	1.08



**Fig. 26) A** Gráfica que muestra los valores de  $RD$  para cizalla simple y cizalla pura en poblaciones de 250 puntos y grado de antiaglomeramiento  $0.8\rho^{-1/2}$ . La recta representa los valores  $RD=Rr$ . **B** Gráfica del error angular para las mismas poblaciones.

## RESULTADOS

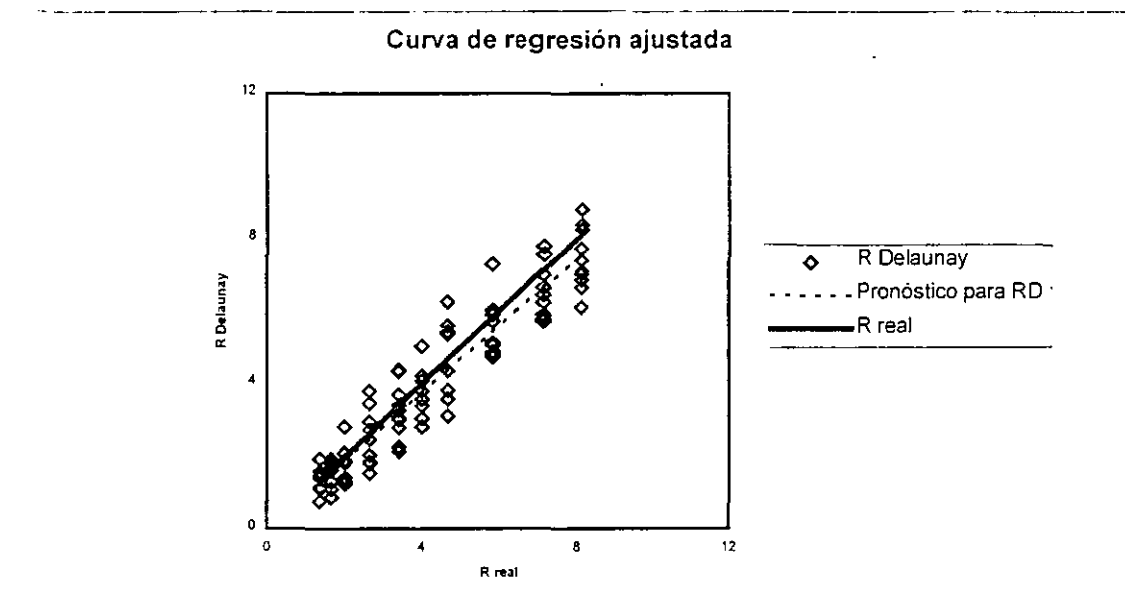
De lo anterior se origina un método para estimar la distorsión interna en rocas deformadas, que es la siguiente modificación del método de centro a centro, el cual se aplica a poblaciones de puntos con distribución antiaglomerada.

1. Se calcula la teselación Delaunay de la población en cuestión.
2. Se obtienen las longitudes ( $d$ ) a vecinos naturales indicados por la teselación Delaunay.
3. Se determinan las longitudes mayor ( $d_{max}$ ) y menor ( $d_{min}$ ) de las obtenidas anteriormente.
4. Se saca la orientación de  $d_{max}$  respecto a una línea de referencia.
5. Se obtiene el valor de R medida con la razón  $d'_{max} / d'_{min}$ .
6. Se determina el valor aproximado a R real como sigue:
  - a) Si el número de puntos de la población está entre 100 y 144 el valor aproximado a R real se calcula con  $\frac{Rm - 1.30}{0.399}$ .
  - b) Si el número de puntos de la población está entre 145 y 160 el valor aproximado a R real se calcula con  $\frac{Rm - 1.10}{0.365}$ .
  - c) Si el número de puntos de la población está entre 161 y 204 el valor aproximado a R real se calcula con  $\frac{Rm - 1.09}{0.343}$ .
  - d) Si el número de puntos de la población está entre 205 y 250 el valor aproximado a R real se calcula con  $\frac{Rm - 1.08}{0.320}$ .

La razón axial de la elipse de deformación finita provista por este método es la que se obtiene del paso 6, y la orientación de esta elipse es la de  $d_{max}$ .



Aparentemente no hay mucha diferencia entre el método de centro a centro y esta modificación, pero la ventaja de esta modificación es que se ha implementado en un programa para PC que realiza este análisis de distorsión de manera automática, sin la necesidad de determinar visualmente los vecinos originales. Además, los valores para la razón axial de la elipse de deformación finita que se obtienen con esta modificación son más precisos que los obtenidos con el método de centro a centro, ya que la curva de regresión ajustada a los valores obtenidos con la modificación del método de centro a centro para poblaciones sintéticas con deformación conocida, es más cercana a la línea que representa los valores reales de la deformación (fig. 27) que la curva de regresión ajustada a los valores obtenidos con el método de centro a centro para las mismas poblaciones (fig. 28).

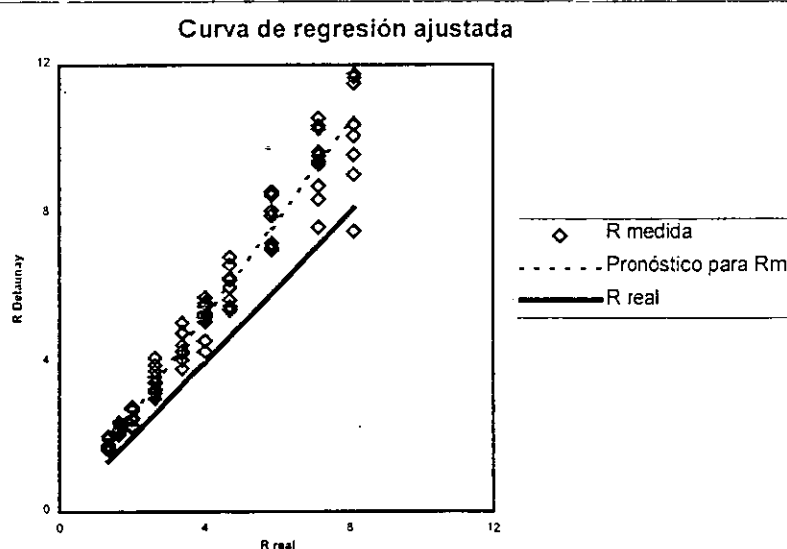


**Fig. 27)** Curva de regresión ajustada a valores obtenidos de la modificación del método de centro a centro aplicado a poblaciones sintéticas de 250 puntos con deformación conocida.

El programa se maneja desde un menú de ventanas con diferentes opciones, calcula y captura la teselación Delaunay de las poblaciones analizadas así como el diagrama Voronoi de éstas aunque no es necesario para

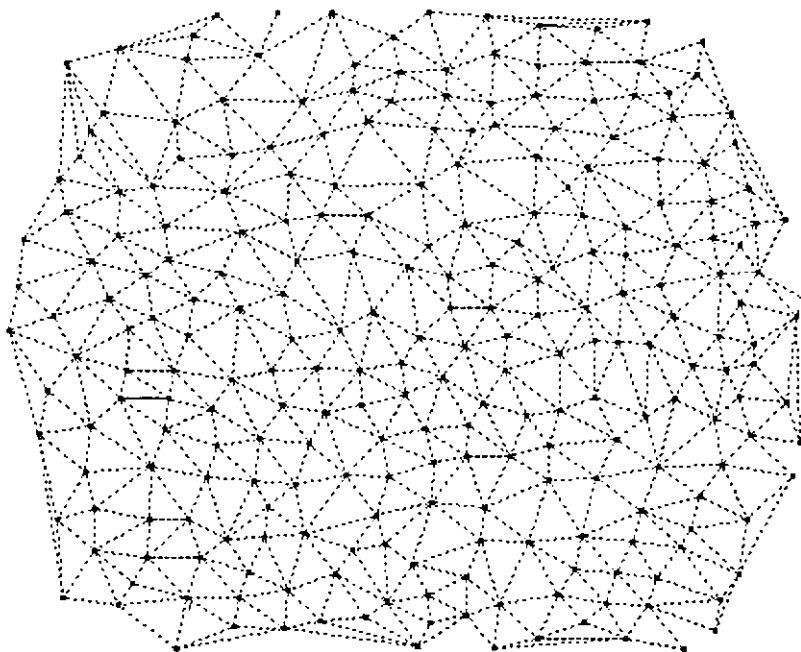
el análisis de distorsión; también obtiene el valor del grado de antiaglomeramiento de las poblaciones. Para hacer el análisis de distorsión de materiales geológicos (fig. 30) es necesario digitalizar anticipadamente los centros de objetos de sus muestras.

Para mejores resultados del análisis de distorsión finita con este nuevo método, se recomienda aplicarlo a poblaciones de 200 a 250 puntos, es decir deben ser digitalizados de 200 a 250 centros de objetos de cada muestra, ya que los resultados con poblaciones sintéticas y deformación conocida, indicaron que entre mayor es el número de puntos mejor es la aproximación a los valores reales de la deformación porque la varianza entre estos valores es menor (fig.23).



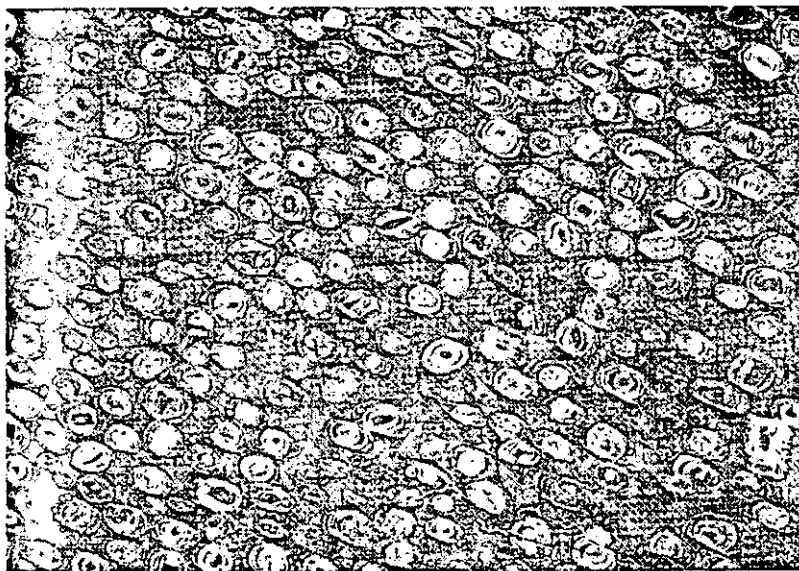
**Fig. 28)** Curva de regresión ajustada a los valores obtenidos con el método de centro a centro a poblaciones sintéticas de 250 puntos con deformación conocida.

La figura 29 muestra los resultados obtenidos de este análisis aplicado una muestra de materiales geológicos.



Razón axial: 1.40    Orientación: -18.0

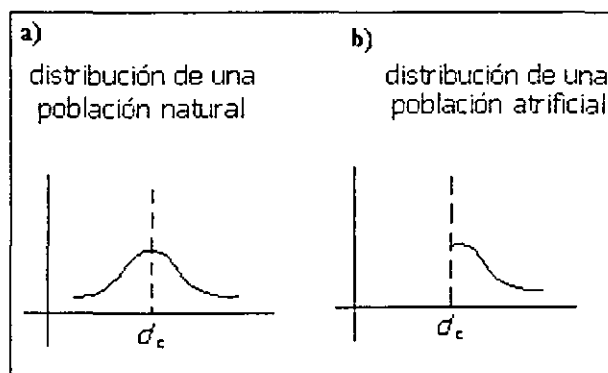
**Fig.29)** Aquí se muestran los resultados obtenidos, del análisis con la modificación automatizada del método de centro a centro, en una sección de caliza oolítica.



**Fig. 30)** La figura muestra una fotografía de la sección de caliza oolítica anteriormente analizada. La población de puntos de la figura 29 está determinada con los centros de cada uno de los objetos de esta foto.

## DISCUSIÓN

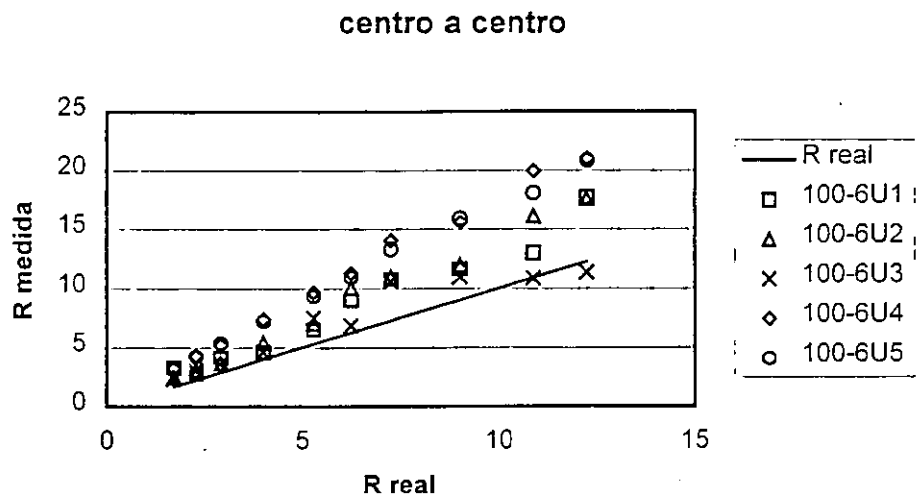
Es importante mencionar que las poblaciones sintéticas de puntos empleadas en el presente trabajo no representan una muestra estrictamente estadística, ya que éstas no fueron elegidas al azar. Aunque la elección de puntos en la generación de estas poblaciones es arbitraria, ellas están restringidas al número de puntos y al grado de antiaglomeramiento deseado. El número de puntos en las poblaciones utilizadas varió cada quince entre 100 y 250, que son el número de objetos mayor y menor que aproximadamente se encuentran en las muestras de materiales geológicos. Así pues se usaron poblaciones de 100, 115, 130, ..., 250 puntos que no es una muestra estrictamente estadística.



**Fig. 31)** a) muestra la curva que representa la densidad de la distribución normal, ésta es la que corresponde a la distribución de una población natural. La distancia de corte  $d_c$  es obedecida en promedio por lo que puede haber distancias menores pero mayores que cero. b) muestra la curva de la densidad de distribución para una población artificial. La distancia de corte  $d_c$  es obedecida estrictamente.

El error asociado a la determinación de distorsión con el método de centro a centro, sería cien por ciento certero si las poblaciones artificiales que se han empleado, fueran más fieles a las poblaciones de puntos obtenidas de muestras geológicas. Es decir, las poblaciones que se sacan de muestras

geológicas verdaderamente son poblaciones antiaglomeradas como las artificiales, con la diferencia de que en estas últimas la distancia de corte es obedecida estrictamente y en las poblaciones naturales sólo en promedio (fig. 31). Por lo que no se sabe si la sobreestimación que se obtuvo al aplicar el método de centro a centro con Delaunay' sea debida a este hecho.



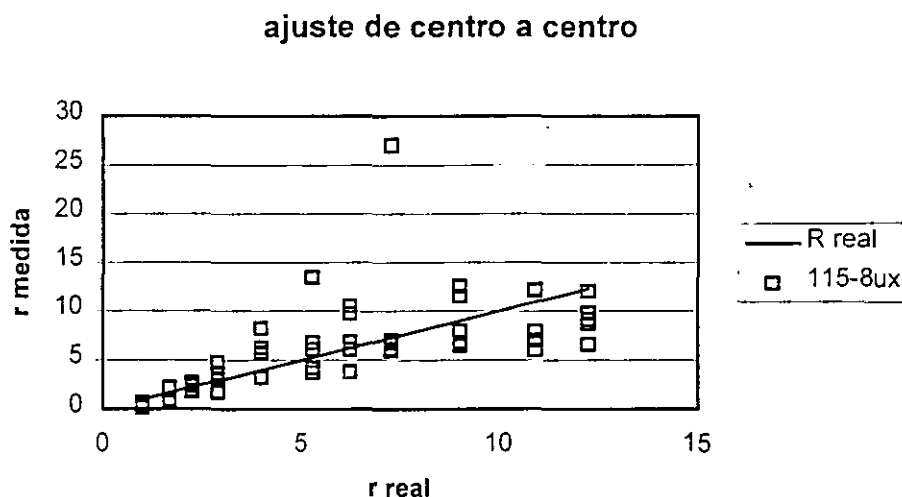
**Fig. 32)** Gráfica que muestra los valores obtenidos con el método de centro a centro y Delaunay' en cizalla pura, para poblaciones de 100 puntos y antiaglomeramiento  $0.6\rho^{-1/2}$ . Nótese que a mayor deformación algunos valores casi doblan el valor real.

La sobreestimación de los resultados con el método de centro a centro y Delaunay' es sistemática en el sentido de que disminuye conforme aumentan el número de puntos y el grado de antiaglomeramiento. Su varianza parece disminuir de la misma manera, sin embargo este análisis da valores que se disparan casi el doble del valor real correspondiente (fig. 32).

Los valores obtenidos con el método de centro a centro y Delaunay subestiman los valores reales de la deformación, y aunque esta subestimación no difiere mucho de población a población, la varianza de estos valores si disminuye notoriamente conforme aumenta el número de puntos y el grado de antiaglomeramiento. Por lo anterior, el ajuste que se hizo a los valores

obtenidos (para acercarlos a los valores reales de la deformación), se separó por bloques de poblaciones de las que se obtuvieran valores de deformación con varianza parecida. Aún con este ajuste no se garantiza que los valores no se disparen, de hecho después del ajuste se obtuvieron valores que se dispararon más del triple de valor real correspondiente (fig. 33).

Los valores de deformación obtenidos con el “nuevo método” tienden a ser más precisos cuando el número de puntos es de 250 y el grado de antiaglomeramiento  $0.8\rho^{-1/2}$ , según los resultados con poblaciones artificiales. Pero esto es una desventaja de este método porque las poblaciones naturales no se pueden condicionar.



**Fig. 33)** Gráfica de los valores obtenidos del ajuste para el método de centro a centro en cizalla pura, para poblaciones de 115 puntos y antiaglomeramiento  $0.8\rho^{-1/2}$ . Este ajuste dio un valor que es un poco más del triple del valor real de la deformación correspondiente.

## CONCLUSIONES

Se ha logrado automatizar el análisis de distorsión con el método de centro a centro dándole vuelta al problema de seleccionar a los vecinos naturales originales de una población deformada. Se detectó un supuesto error en la determinación de la deformación con la aplicación original de este método, y aunque no se ha investigado sobre el origen de este supuesto, en el presente trabajo se propuso una solución para resolver este problema. Sin embargo, todas las derivaciones de este trabajo están sujetas a investigaciones posteriores.

El método resultante de esta investigación se ha implementado en un programa para PC que facilita y acelera el proceso de estimación de distorsión en el plano apoyado del método de centro a centro.

Los resultados obtenidos con el uso de poblaciones artificiales, aparentemente controlan las discrepancias dadas en el aspecto cuantitativo, pero en el caso de poblaciones obtenidas de materiales geológicos, los resultados obtenidos son sólo suposiciones. Aún con esto, se ha dado un paso importante ante el problema de cuantificar la deformación porque se han aprovechado, aunque sea de manera parcial, las matemáticas que yacen en la naturaleza de la evolución de las rocas.

Aunque los logros han sido satisfactorios, éstos siguen siendo pequeños ante el problema de reconstruir los efectos del tiempo sobre la Tierra.

## BIBLIOGRAFÍA

Charles Eugene Delaunay. Orbits and gravitation.

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Delaunay.html>.  
1999.

Clark, Philip J. and Evans, Francis C. 1954. Distance to nearest neighbor as a measure of spatial relationships in populations. Ecology, Vol. 35, pp. 445-453.

Crespi, Jean M. 1986. Some guidelines for the practical application of Fry's method of strain analysis. Journal of Structural Geology, Vol. 8, No. 7, pp. 799-808.

Dacey, M. F. 1964. Two dimensional random point patterns: a review and an interpretation. Papers, Regional. Sci. Ass. Vol. 13, pp. 41-55.

Enciclopedia Universal Ilustrada, Espasa-Calpe, Editores. Madrid.

Erslev, E. A. 1998. Normalized center-to-center strain analysis of packed aggregates. Journal of Structural Geology, Vol. 10, pp. 201-209.

Erslev, E. A. and Ge, H. 1990. Least-squares center-to-center and mean object ellipse fabric analysis. Journal of Structural Geology, Vol. 12, pp. 1047-1059.

Fry, N. 1979. Random point distributions and strain measurement in rocks. Tectonophysics, 60, pp. 89-105.

Georgy Fedoseevich Voronoy.

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Voronoy.html>.  
1999.

Kreyszig, E. 1974. Estadística matemática. México, Ed. LIMUSA.

Ludwig, Reinhard. 1994. DREIECKSGESCHICHTEN. Wie man mit dem Voronoi-Diagramm das Vier-Farben-Problem löst. C't.



Macedonio, G. and Pareschi, M. T. 1991. An algorithm for the triangulation fo arbitrarily distributed points: applications to Volume estimate and terrain fitting. Computers & Geosciences, Vol. 17, No. 7, pp. 859-874.

Montgomery, D.C. y Runger, G. 1996. Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería. México, Ed. McGRAW-HILL.

Panozzo, René H. 1983. Two-dimensional analysis of shape-fabric using projections of digitized lines in a plane. Tectonophysics, vol. 95, pp. 279-294.

Senechal, Marjorie. Quasicrystals and Geometry. Cambridge U.P.

Ramsay, J.G. 1977. Plegamiento y fracturación de las rocas. Madrid, Ed. HB.

Ramsay, J. G. y Huber, M. 1983. Structural Geology: Strain Analysis. Academic Press, London, pp. 307.

Shively, L.S. 1984. Introducción a la geometría moderna. México, Ed. Continental.

Tolson, Gustavo. 1998. Deformación, Exhumación y Neotectónica de la Margen Continental de Oaxaca: datos estructurales, petrológicos y geotermobarométricos. Tesis doctoral. UNAM.

Tsali, Victor J. D. 1993. Fast topological construction of Delaunay triangulations and Voronoi diagrams. Computers & Geosciences, Vol. 19 No. 10, pp. 1463-1474.

Watson, Dave. 1999. The natural neighbor series manuals and source codes. Computers & Geosciences, Vol. 25, pp. 463-466.

## APÉNDICE

### DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

#### ANTIAGLOMERAMIENTO

Imagine un inmenso bosque en el cual hay cierto número de torres de vigilancia para prevenir incendios. Cada guardabosque es responsable de controlar el incendio provocado cerca de su torre que de cualquier otra. El conjunto de árboles para los cuales un guardabosques es responsable constituye una "región Voronoj" asociada con su torre. El diagrama Voronoj está determinado por las líneas que delimitan las áreas de responsabilidad: las zonas en el bosque que equidisten a dos o más torres.

El número de torres y su distribución en el bosque depende del área que éste tenga, es decir que debe de haber un número suficiente de torres para vigilar todo el bosque sin que éstas se encuentren ni tan alejadas ni tan cercanas.

Para poder distribuir adecuadamente las torres en el bosque, se puede representar el problema en dos dimensiones con puntos (torres) en el plano (bosque). Estas poblaciones de puntos deben entonces, estar distribuidas uniformemente en el área del plano representativo del bosque.

Para poder dar formalidad a tal distribución de puntos en el plano, son necesarias las siguientes definiciones.

#### **Conjunto discreto de puntos**

Un conjunto de puntos  $P \subset E^n$  (espacio euclidiano) se dice que es discreto si  $\exists r \in R^+$  tal que  $\forall x, y \in P \quad x - y \geq 2r$ .

#### **Conjunto relativamente denso**

Un conjunto de puntos  $P$  es relativamente denso en  $E^n$  si  $\exists s \in R^+$  tal que  $\forall B_r(x)$  con  $r > s$  y  $x \in E^n$ ,  $B_r(x) \cap P \neq \Phi$ .

#### **Conjunto Delone**

Un conjunto de puntos  $P \subset E^n$  es un conjunto Delone si es discreto y relativamente denso.

Un conjunto Delone es entonces la definición formal de una distribución uniforme de puntos en el plano. Es importante esta definición formal porque a pesar de que las teselaciones Delaunay y Voronoy se pueden trazar en cualquier conjunto de puntos no todos colineales, el contexto de este trabajo está restringido a conjuntos Delone, a los cuales se les ha llamado poblaciones de puntos antiaglomeradas.

#### **Distribuciones antiaglomeradas**

La definición formal de una población de puntos con distribución antiaglomerada es precisamente la de conjunto Delone.

## TESELACIONES DELAUNAY Y VORONÓJ

Sea  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  un conjunto Delone en el plano Euclidiano. Hay una partición del plano originada con la asociación de todos los puntos en éste más cercanos a cada punto de  $P$ . Todos los puntos asociados a  $p_i$  forman la región Voronój  $V(p_i)$ .  $V(p_i)$  consiste de todos los puntos en el plano más cercanos a  $p_i$

$$V(p_i) = \{x : p_i - x \leq p_j - x \forall j \neq i\},$$

a  $p_i$  se le llama el vecino cercano de todos los puntos de  $V(p_i)$ .

Por definición este conjunto es cerrado porque contiene a todos sus puntos de acumulación. Entonces algunos puntos no tienen un único vecino cercano. El conjunto de puntos que tienen más de un vecino cercano forma el **diagrama Voronój**  $V(P)$ .

Primero se mostrarán algunos ejemplos de diagramas Voronój en poblaciones de pocos puntos antes de detallar sus propiedades.

### Dos puntos

Cuando la población consta sólo de dos puntos,  $p_1$  y  $p_2$ . Sea  $B(p_1, p_2) = B_{12}$  la mediatriz del segmento  $p_1 p_2$ . Entonces todo punto  $x$  en  $B_{12}$  es equidistante tanto a  $p_1$  como a  $p_2$ . Esto se puede ver en el dibujo del triángulo  $(p_1, p_2, x)$  como se muestra en la figura A1. Por el criterio de lado-ángulo-lado de los elementos de Euclides  $p_1 x = p_2 x$ . El diagrama Voronój para una población con dos puntos, es entonces la mediatriz del segmento que los une.

### Tres puntos

Para tres puntos es claro que hacia fuera del triángulo  $(p_1, p_2, p_3)$ , el diagrama contiene a las mediatrices  $B_{12}$ ,  $B_{23}$  y  $B_{31}$ . Lo que no es tan claro, es que también esté contenida la parte de las mediatrices que quedan dentro del triángulo. Por el teorema 5 del libro IV de los elementos de Euclides sabemos que las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto, que es el centro del círculo que inscribe a dicho triángulo. Por lo tanto el diagrama Voronój para tres puntos debe ser como el de la figura A2. (Sin embargo, el circuncentro del triángulo no está siempre dentro de éste.)

### Semiplanos

La generalización más allá de tres puntos puede no ser muy clara, pero lo que sí es claro es que las mediatrices  $B_{ij}$  juegan un papel importante. Sea  $H(p_i, p_j)$  el semiplano cerrado con frontera  $B_{ij}$  y que contiene a  $p_i$ . Entonces  $H(p_i, p_j)$  se puede ver como todos los puntos que están más cerca de  $p_i$  que a  $p_j$ . Ahora recalquemos que  $V(p_i)$  es el conjunto de todos los puntos más cerca de  $p_i$  que a cualquier otro punto: en otras palabras los puntos más cercanos a  $p_i$  que a  $p_1$ ,

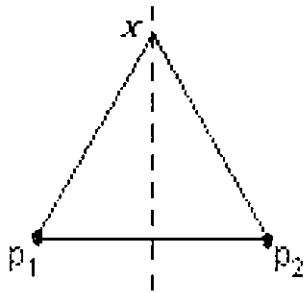


Fig. A1 Dos puntos:  $p_1x = p_2x$ .

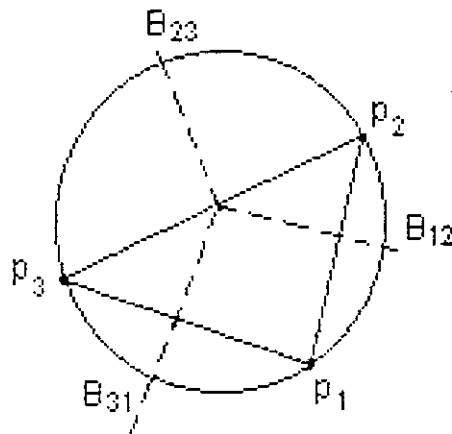


Fig. A2 Tres puntos: las mediatrices se intersectan en el circuncentro.

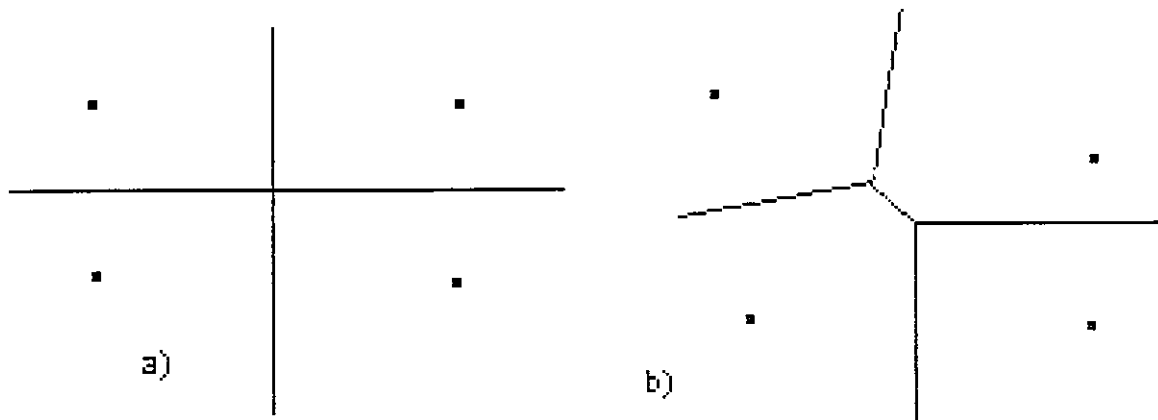


Fig. A3 a) es el diagrama Voronoi de cuatro puntos cocirculares, b) es el diagrama después de mover el punto de la esquina superior izquierda.

más cercanos a  $p_1$  que a  $p_2$ , más cercanos a  $p_1$  que a  $p_3$  y así sucesivamente. De aquí obtenemos que podemos escribir esta ecuación para  $v(p_i)$ :

$$v(p_i) = \bigcap_{i \neq j} H(p_i, p_j). \quad (\text{Ec1})$$

Note que la conjunción “y” a sido cambiada a intersección de conjuntos.

La ecuación (Ec1) da inmediatamente una propiedad importante del diagrama Voronoi: las regiones Voronoi son convexas, ya que la intersección de cualquier número de semiplanos es un conjunto convexo. Cuando las regiones están acotadas, ellas son polígonos convexas. Los lados de las regiones Voronoi se llaman lados Voronoi, y los vértices se llaman vértices Voronoi. Note que un punto que está en un lado Voronoi tiene dos vecinos cercanos, y un vértice Voronoi tiene por lo menos tres vecinos cercanos.

### Cuatro puntos

El diagrama para cuatro puntos que están en las esquinas de un cuadrilátero cíclico, está formado por las fronteras de los medios planos correspondientes a cada punto en la figura A3a. El vértice Voronoi es de cuarto grado. Ahora supongamos que uno de los puntos es movido ligeramente, como en la figura A3b. Aquí se dice que el diagrama es normal, y en la figura A3a es anormal o “degenerado” porque los cuatro puntos son cocirculares.

### Muchos puntos

Un diagrama típico con muchos puntos se muestra en la figura A4. Algunos vértices Voronoi no han sido mostrados en la figura: Los rayos horizontales y verticales casi paralelos interceptan a vértices Voronoi que se encuentran más o menos a 120 centímetros del centro de la figura.

Es necesario resaltar la diferencia entre las regiones Voronoi y el diagrama Voronoi. Las regiones Voronoi son pequeños polígonos alrededor de cada punto y el diagrama Voronoi consta sólo de las fronteras de los polígonos.

### Gráfica dual del diagrama $V(P)$

En una población de  $n$  puntos, hay  $n$  regiones Voronoi. En el caso en el que cada cuatro puntos de la población no sean cocirculares, cada vértice Voronoi es de grado tres. Del diagrama Voronoi  $V(P)$  se puede obtener una gráfica dual  $G$  como sigue: Los nodos de  $G$  son los puntos de  $P$ , y dos nodos están unidos por un arco si sus correspondientes regiones Voronoi comparten un lado Voronoi.

Esta gráfica es plana. Encajando los nodos de  $G$  en sus lugares sobre  $V(P)$ , todos los arcos que unen a los nodos generalmente cruzan a los lados Voronoi formados entre las regiones Voronoi correspondientes (fig.A6). Todas las caras de  $G$  son triangulares, esto corresponde al grado tres de los vértices Voronoi.

En 1934 Delone probó que cuando la gráfica dual es dibujada con líneas rectas, ésta produce una triangulación plana de los puntos de  $P$ , ahora llamada **triangulación Delaunay  $D(P)$** . La figura A5 muestra la triangulación Delaunay para el diagrama Voronoi de la figura A4, y la figura A6 muestra la triangulación Delaunay sobrepuesta en el correspondiente diagrama Voronoi. El segmento dual entre dos puntos no necesariamente cruza al lado Voronoi formado entre sus regiones Voronoi.

### Propiedades de la triangulación Delaunay

Como la triangulación Delaunay y el diagrama Voronoi son estructuras duales, cada una contiene la misma información en algún sentido, representada de diferente modo. Para comprender estas complejas estructuras, es importante comprender completamente las relaciones entre la triangulación Delaunay y su correspondiente Diagrama Voronoi. A continuación se enlistan algunas propiedades de la triangulación Delaunay seguidas de una lista de propiedades del diagrama Voronoi. Solo las propiedades **D6** y **D7** no habían sido mencionadas antes. Fijemos un conjunto de puntos  $P$ .

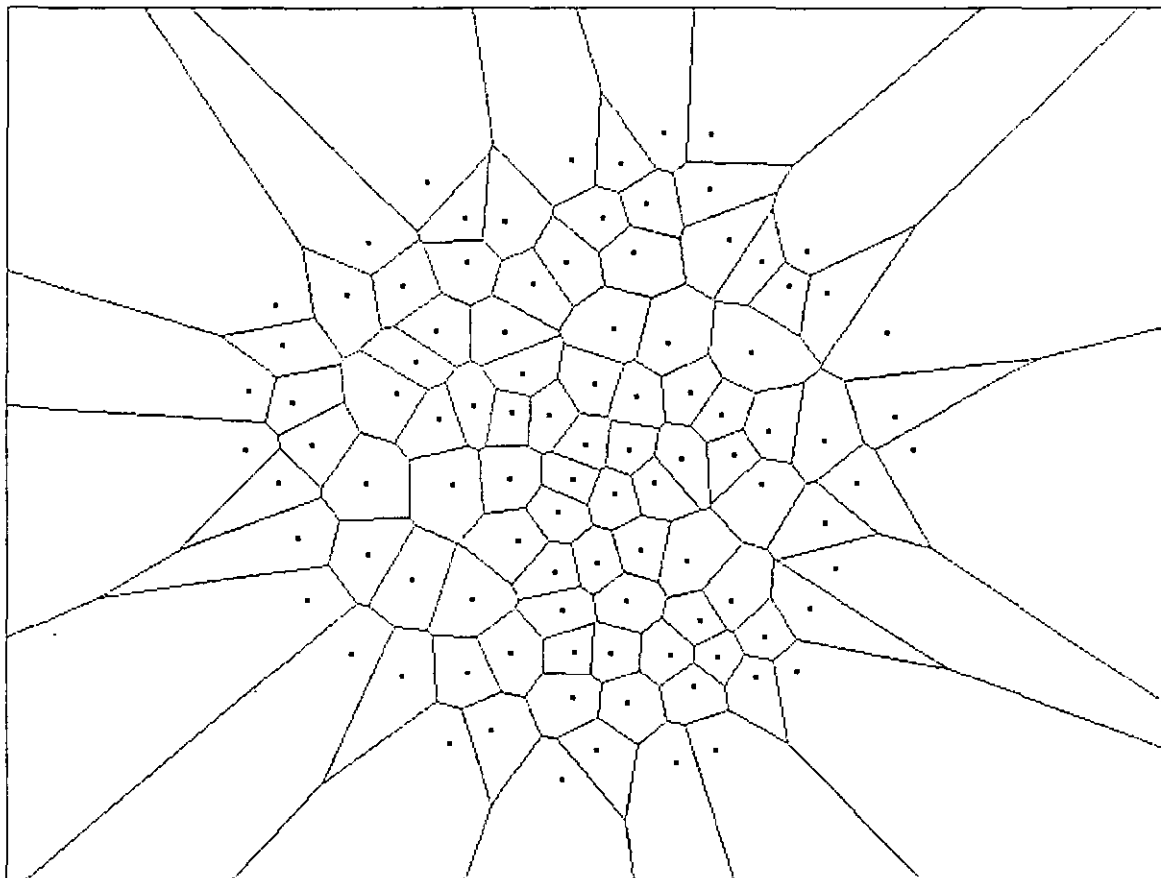
- D1.**  $D(P)$  es el dual de líneas rectas de  $V(P)$ . (Por definición)
  - D2.**  $D(P)$  es una triangulación si cada cuatro puntos de  $P$  no son cocirculares:  
Toda cara es un triángulo. Este es el teorema Delaunay.  
Las caras de  $D(P)$  se llaman *triángulos Delaunay*.
  - D3.** Cada cara (triángulo) de  $D(P)$  corresponde a un vértice de  $V(P)$ .
  - D4.** Cada lado de  $D(P)$  corresponde a un lado de  $V(P)$ .
  - D5.** Cada nodo de  $D(P)$  corresponde a una región de  $V(P)$ .
  - D6.** La frontera de  $D(P)$  es la envolvente convexa de los puntos.
  - D7.** El interior de cada cara (triángulo) de  $D(P)$  no contiene puntos de  $P$ .
- Las propiedades **D6** y **D7** son las más interesantes y pueden verificarse en las figuras A5 y A6.

### Propiedades del diagrama Voronoi

- V1.** Cada región Voronoi  $V(p_i)$  es convexa.
- V2.**  $V(p_i)$  es ilimitado si  $p_i$  está en la envolvente convexa del conjunto.  
(compare con **D6**)
- V3.** Si  $v$  es un vértice Voronoi donde se juntan  $V(p_1)$ ,  $V(p_2)$  y  $V(p_3)$ , entonces  $v$  es el centro del círculo  $C(v)$  determinado por  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$ .  
(Esto se vale para cualquier vértice voronoi de cualquier grado.)
- V4.**  $C(v)$  es el circuncírculo del triángulo Delaunay correspondiente a  $v$ .
- V5.** El interior de  $C(v)$  no contiene puntos de  $P$ . (compare con **D7**)
- V6.** Si  $V(p_i)$  y  $V(p_j)$  comparten un lado Voronoi, entonces  $(p_i, p_j)$  es un lado de  $D(P)$ .
- V7.** Si hay un círculo a través de  $p_i$  y  $p_j$  que no contenga a otro punto de  $P$ , entonces  $(p_i, p_j)$  es un lado de  $D(P)$ . El regreso también es válido: Para

todo lado Delaunay hay un círculo vacío.

Las propiedades **V5** y **V7** son las más intuitivas e importantes caracterizaciones de los lados Delaunay, por esta razón serán demostradas.

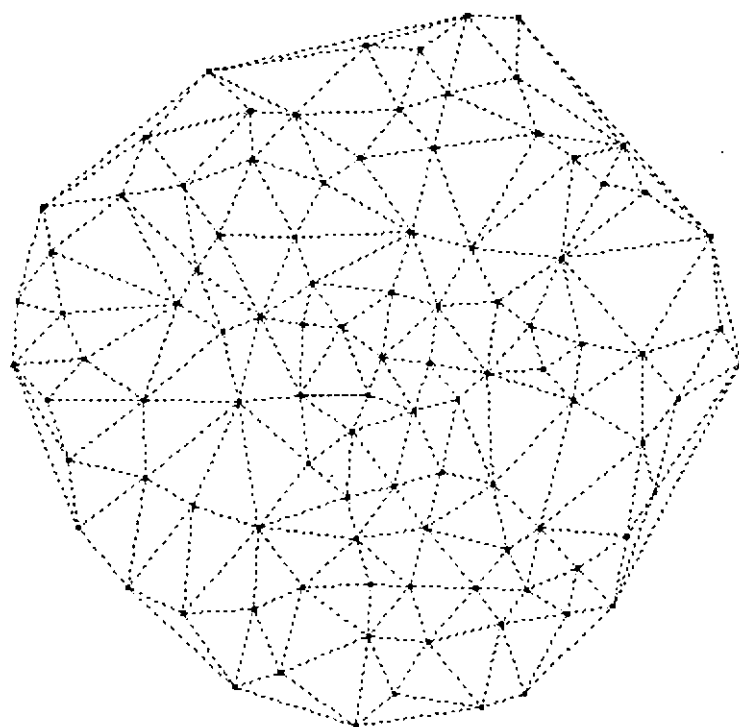


**Fig. A4** Diagrama Voronoi para una población con 100 puntos.

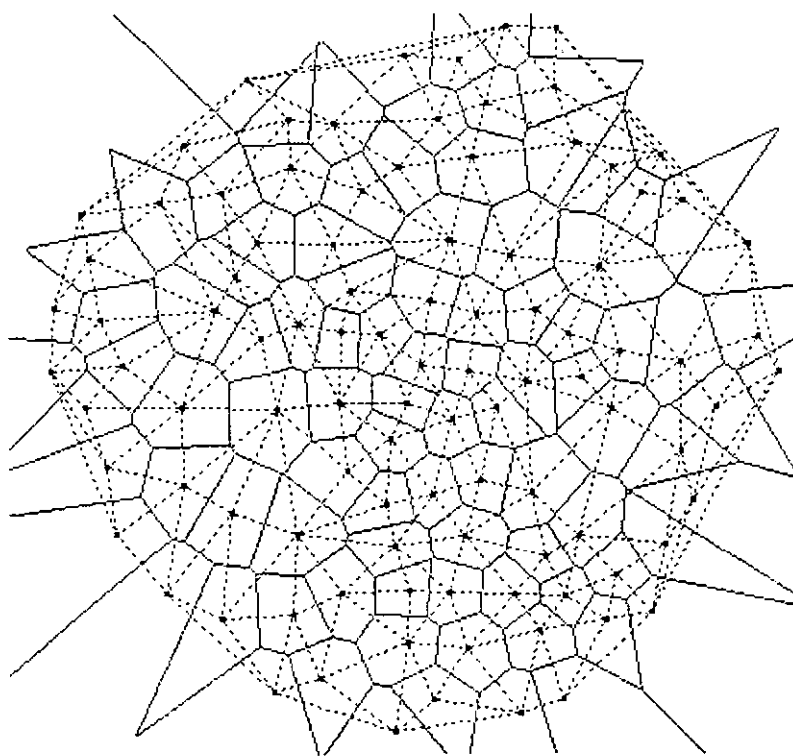
**Teorema**  $ab \in D(P) \Leftrightarrow$  existe un círculo vacío a través de  $a$  y  $b$ : el disco cerrado que limita al círculo no contiene a puntos de  $P$  más que  $a$  y  $b$ .

Dem.  $\Rightarrow$ ) Si  $ab$  es un lado Delaunay, entonces  $V(a)$  y  $V(b)$  tienen un común lado Voronoi  $e \in V(P)$ . El círculo  $C(x)$  con centro en  $x \in e$  y radio  $ax = xb$ . Este círculo no contiene puntos de  $P$ , ya que si hubiera un punto de  $P$  contenido en el círculo, es decir  $c \in P$  t.q.  $c \in C(x) \Rightarrow x \in V(c)$  pero  $x$  está solamente en  $V(a)$  y  $V(b)$ .

$\Leftarrow$ ) Sup.  $\exists C(x)$  a través de  $a$  y  $b$  y centro en  $x$ . P.D.  $ab \in D(P)$ . Como  $x$  es equidistante a  $a$  y  $b$ ,  $x \in V(a)$  y  $x \in V(b) \Rightarrow x \in V(a) \cap V(b)$  pero las regiones Voronoi son conjuntos cerrados  $\Rightarrow x \in B_{ab}$  (la mediatriz de  $ab$ ) y como  $C(x)$  es vacío  $\Rightarrow x$  está en un lado Voronoi  $ab \in D(P)$ .



**Fig. A5** *Triangulación Delaunay para los puntos de la figura A4.*



**Fig. A6** *Triangulación Delaunay y Diagrama Voronoi: figuras A4 y A5 juntas.*



**Teorema** El interior de  $C(v)$  no contiene puntos de  $P$ .

Sean  $p_1, p_2, y p_3$  un triángulo en  $D(P)$  y  $C(v)$  su circuncírculo con centro en  $v$ , vértice Voronoi de  $V(p_1), V(p_2)$  y  $V(p_3)$ .

P.D.  $C(v) \cap P = \emptyset$

sup. que no, es decir que  $C(v) \cap P \neq \emptyset$

Entonces  $\exists p \in P$  que también está en  $C(v) \Rightarrow y \ p-v < p_1-v$  y  $p-v < p_2-v$  y

$p-v < p_3-v \Rightarrow v \in V(p)$  pero  $v$  es vértice  $\Rightarrow p_1, p_2, p_3$  y  $p$  son cocirculares  $\Rightarrow$   
 $p$  está en la circunferencia y no en el circuncírculo  $\nabla \therefore C(v) \cap P = \emptyset$

# PROGRAMA PARA GENERAR LAS TESELACIONES DELAUNAY Y VORONOJ

Program Voronoj;

```
{$IFDEF DEBUG}
{$A+,B-,D+,E+,F+,G+,I+,L+,N+,R+,S+,X+}
{$ELSE}
{$A+,B-,D-,E+,F+,G+,I-,L-,N+,R-,S-,X+}
{$ENDIF}

uses
  DOS,crt,graph,Standard,Xtra2;
const
  MAX=120;
type
  tipoPunto=Record
    x,y:integer;
  end;
  tipoConjuntoDePuntos=array[0..4*MAX] of tipoPunto;
  tipoIndice=array[0..MAX+4] of byte;
  tipoValor=array[0..MAX+4] of real;
  tipoLista=array[1..MAX+4] of string[48];
var
  Alto,Visible:boolean;
  p,VP:tipoConjuntoDePuntos;
  LL,VV:tipoLista;
  w:tipoValor;
  i0,iy:tipoIndice;
  np,npp,ip,nd,nk,nv,xmax,ymax:integer;
  Color,Cola:string;
  c:char;

Procedure Graphinit;
{ Inicializa la tarjeta grafica y los parametros graficos }
var
  gd,gm:integer;
  errc:integer;
begin
  Standard.Graflnit; { procedure en unit Standard }
  Setlinestyle(solidln,0,normwidth);
  SetFillstyle(Solidfill,15);
  SetTextstyle(Defaultfont,HorizDir,1);
  SetTextjustify(LeftText,Toptext);
```

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

```

SetUserCharSize(1,1,1,1);
end;
Procedure OrdenamientoRapido(var a:tipoValor;var ind:tipoIndice;
min,max:integer);
  Procedure Ordenar(izq,der:integer);
    { Ordena los datos segun el campo indicado }
    var
      i,j:integer;
      ayuda:Integer;
      valor:real;
    begin
      i:=izq; j:=der;
      valor:=a[ind[(izq+der) div 2]];
      repeat
        while a[ind[i]]<valor do inc(i);
        while a[ind[j]]>valor do dec(j);
        if i<=j then begin
          ayuda:=ind[i]; ind[i]:=ind[j]; ind[j]:=ayuda;
          inc(i); dec(j);
        end
      until i>j;
      if izq<j then Ordenar(izq,j);
      if i<der then Ordenar(i,der);
    end;

  begin { OrdenamientoRapido }
    Ordenar(min,max)
  end;

Procedure teclaEspacio;
{ Detiene el programa y continua con espacio }
begin
  repeat
    c:=ReadKey;
  until (c=' ') or (c=#27);
end;

Procedure IndiceCero(var ind:tipoIndice);
{ Inicializa el vector indice }
{ El vector indice contiene la posicion del elemento [i] }
var
  i:integer;
begin
  for i:=1 to 80 do ind[i]:=i;
end;

Procedure dibujarPunto(p:tipoPunto; i:integer);

```

```

{ Dibuja un punto de 3x3 pixeles }
begin
  with p do
    begin
    { OutTextXY(x,y,IntToString(i));
    } Bar(pred(x),pred(y),succ(x),succ(y));
      end;
    end;
end;

```

```

Procedure dibujarConjuntoPuntos(Color:byte);
{ Dibuja np puntos de color 'Color' }
var
  i:integer;
begin
  SetFillStyle(SolidFill,Color);
  for i:=1 to np do dibujarPunto(p[i],i);
end;

```

```

Procedure fuenteDePuntos;
{ Lee una lista de puntos de un archivo }
{ En el programa original se generaba una lista aleatoria }
{ En esta version se lee una lista de puntos con o sin deformacion }
var
  ArchivoLectura: text;
begin
  np:=0;
  SetFillStyle(SolidFill,lightred);
  assign(ArchivoLectura,'C:\USR\ALEX\POBPUN\100-6u1.DAT');
  reset(ArchivoLectura);
  while ((not eof(ArchivoLectura)) and (np<MAX)) do
  begin
    inc(np);
    with p[np] do begin
      readln(ArchivoLectura,x,y);
      x:=CartXtoScreenX(x);y:=CartYtoScreenY(y);
      end;
    dibujarPunto(p[np],np);
  end;
  close(ArchivoLectura);
  SetColor(white);
  OutTextXY(0,ymax-10,'Poblacion de puntos: '+IntToString(np)+' puntos');
  if Alto then teclaEspacio else Delay(2000);
end;

```

```

procedure GeneracionDeDatos;
{ np puntos leidos + 4 puntos externos }
begin

```

```

fuenteDePuntos;
npp:=np+4;
p[np+1].x:=xmax div 2; p[np+1].y:=-5000;
p[np+2].x:=5000; p[np+2].y:=ymax div 2;
p[np+3].x:=xmax div 2; p[np+3].y:=5000;
p[np+4].x:=-5000; p[np+4].y:=ymax div 2;
IndiceCero(i0);
SetFillstyle(SolidFill,emptyfill);
Bar(0,ymax-10,xmax,ymax);
end;

```

```

Procedure DibujarLineas(ind:tipoIndice;n:integer);
{ Dibuja n-1 lineas entre n puntos }
var
  i:integer;
begin
  with p[ind[1]] do Moveto(x,y);
  for i:=2 to n do with p[ind[i]] do lineto(x,y);
  LineTo(p[ind[1]].x,p[ind[1]].y);
  if Alto then teclaEspacio else Delay(2000);
end;

```

```

Function Theta(p1,p2:tipoPunto):real;
{ Angulo entre p1 y p2 y la horizontal }
var
  dx,dy,ax,ay:integer;
  t:real;
begin
  dx:=p2.x-p1.x; ax:=abs(dx);
  dy:=p2.y-p1.y; ay:=abs(dy);
  if (dx=0) and (dy=0) then t:=0 else t:=dy/(ax+ay);
  if dx<0 then t:=2-t else if dy<0 then t:=4+t;
  theta:=t*90;
end;

```

```

function sentidoDeGiro(p1,p2,p3:tipoPunto):shortint;
{ horario=+1 }
var
  d,sx1,sx2,sx3,dy1,dy2,dy3:longint;
begin
  sx1:=p2.x+p1.x; sx2:=p3.x+p2.x; sx3:=p1.x+p3.x;
  dy1:=p2.y-p1.y; dy2:=p3.y-p2.y; dy3:=p1.y-p3.y;
  d:=dy1*sx1+dy2*sx2+dy3*sx3;
  if d=0 then sentidoDeGiro:=0 else if d<0 then sentidoDeGiro:=-1 else
    sentidoDeGiro:=1;
end;

```

```

Function distanciaCuadrada(p1,p2:tipoPunto):real;
{ distancia entre p1 y p2 al cuadrado }
var
  x1,x2,y1,y2:real;
begin
  x1:=p1.x; x2:=p2.x; y1:=p1.y; y2:=p2.y;
  distanciaCuadrada:=Sqr(x1-x2)+Sqr(y1-y2);
end;

```

```

Function Rho(p1,p2,p3:tipoPunto):real;
{ Rho=radio del circuncirculo }
var
  r,s,z,a,b,c:real;
begin
  a:=Sqrt(distanciaCuadrada(p1,p2));
  b:=Sqrt(distanciaCuadrada(p2,p3));
  c:=Sqrt(distanciaCuadrada(p1,p3));
  s:=0.5*(a+b+c);
  z:=s*(s-a)*(s-b)*(s-c);
  if z<1E-4 then r:=5000 else r:=0.25*a*b*c/Sqrt(z);
  if r>5000 then r:=5000;
  Rho:=r;
end;

```

```

function Cosgam(p1,p2,p3:tipoPunto):real;
{ Criterio de seleccion para un nuevo punto Delaunay }
var
  a,b,c:real;
begin
  a:=distanciaCuadrada(p1,p3);
  b:=distanciaCuadrada(p2,p3);
  c:=distanciaCuadrada(p1,p2);
  cosgam:=(a+b-c)/Sqrt(a*b);
end;

```

```

Procedure GuardarPuntoVoronoj(i,j,k:byte;pv: tipoPunto);
begin
  inc(ip); VP[ip]:=pv; { Guardar coordenadas del nuevo punto Voronoj }
  VV[i]:=VV[i]+chr(ip); { Punto nuevo en el contador de vecinos: }
  VV[j]:=VV[j]+chr(ip); { der 3 erzeugenden Ursprungspunkte aufnehmen.}
  VV[k]:=VV[k]+chr(ip);
end;

```

```

Procedure EncuentraPunto(k,l:byte;var m:byte;var encontrado:boolean);
var
  i,a,b:byte;
  rr,x4,y4:integer;

```

```

dx1,dy1,cq,r,w,min:real;
p1,p2,p3,pv:tipoPunto;
begin
min:=2; encontrado:=false; { Determinacion del proximo punto Delaunay}
p1:=p[k]; p2:=p[l];      { por el metodo de maximo paralejo.}
for i:=1 to npp do begin
  if (i<>k) and (i<>l) and (sentidoDeGiro(p1,p2,p[i])=1) then begin
    w:=cosgam(p1,p2,p[i]);
    if (w<min) then begin
      min:=w; m:=i; p3:=p[i]; encontrado:=true;
    end;
  end;
end;
end;
if encontrado then begin
  dx1:=p2.x-p1.x;      { Determinacion del proximo punto Voronoj }
  dy1:=p2.y-p1.y;      { como centro del circuncirculo del triangulo }
  cq:=Sqr(dx1)+Sqr(dy1); { p1,p2,p3.}
  r:=Rho(p1,p2,p3);
  w:=Sqrt(abs(Sqr(r)/cq-0.25));
  if min<0 then w:=-w;
  pv.x:=round(0.5*dx1-dy1*w+p1.x);
  pv.y:=round(0.5*dy1+dx1*w+p1.y);
  if (Pos(chr(m),LL[k])=0) and (Pos(chr(m),LL[l])=0) then begin
    GuardarPuntoVoronoj(k,l,m,pv); inc(nd);
    if (k<=np) and (l<=np) and (m<=np) then inc(nv)
  end;
end;
end;
end;

```

Procedure triangulo; { Determinacion del proximo triangulo Delaunay }

```

var
  i,j,k:byte;
  encontrado:boolean;
begin
i:=ord(Cola[1]); j:=ord(Cola[2]); { Linea de la cola }
Delete(Cola,1,2);                { se despeja esta linea }
if (Pos(chr(j),LL[i])=0) then begin { de la cola. }
  if (i<=np) and (j<=np) then begin
    LL[i]:=LL[i]+chr(j); LL[j]:=LL[j]+chr(i); { Linea en contador }
    line(p[i].x,p[i].y,p[j].x,p[j].y);      { Dibujar nueva linea }
    inc(nk);
  end;
  EncuentraPunto(i,j,k, encontrado);      { En el caso de encontrar }
  if encontrado and (k<=np) then begin   { un nuevo punto Delaunay: }
    if length(Cola)>251 then begin
      beep;
      teclaEspacio;
    end;
  end;
end;

```

```

    end;
    Cola:=Cola+chr(k)+chr(j);      { poner 2 triangulos nuevos }
    Cola:=Cola+chr(i)+chr(k);      { en la cola. }
  end;
end;
end;

Procedure TriangulacionDelaunay; { Crear y desplegar triangulacion
                                { Delaunay segun la cola }
var
  i,j,k:byte;
begin
  ip:=0; nd:=0; nv:=0; nk:=0; iy:=i0;
  Fillchar(VV,SizeOf(VV),#0); { borrar contador }
  Fillchar(LL,SizeOf(LL),#0);
  Cola:=chr(np+1)+chr(np+2)+chr(np+2)+chr(np+3)+chr(np+3)
    +chr(np+4)+chr(np+4)+chr(np+1); { envolvente convexa al principio }
  for i:=1 to npp do w[i]:=p[i].y; { de la cola }
  OrdenamientoRapido(w,iy,1,npp);
  SetColor(lightgreen);
  SetLineStyle(DottedLn,0,Normwidth);
  While Length(Cola)>0 do triangulo; { Determinar un triangulo tras otro }
  dibujarConjuntoPuntos(lightred); { hasta vaciar la cola. }
  OutTextXY(5,ymax-10,'Triangulos de la triangulacion Delaunay: '
    +IntToString(nv)+' Catetos: '+IntToString(nk));
  if Alto then teclaEspacio else Delay(2000);
end;

Procedure OrdenarListaPuntos(var S:tipoLista);
                                { Los puntos Voronoj de cada punto de la }
                                { poblacion se ordenan con respecto a su }
                                { angulo teta. }
var
  w:tipoValor;
  i,j,l:byte;
  Oracion:string;
  io:tipoIndice;
begin
  for i:=1 to np do begin
    l:=Length(S[i]); io:= i0;
    for j:=1 to l do w[j]:=Theta(P[i],VP[ord(S[i,j])]);
    OrdenamientoRapido(w,io,1,l);
    Oracion[0]:=chr(l);
    for j:=1 to l do Oracion[j]:=S[i, io[j]];
    S[i]:=Oracion;
  end;
end;
end;

```



```
Procedure DibujarPoligonosVoronoj(Color:byte);
var
  i,j,l:byte;
begin
  SetColor(yellow);
  OutTextXY(5,5,'Diagrama de Voronoj con Puntos Voronj: '+IntToString(nv));
  aglomeramiento;
  SetColor(Color);
  SetLineStyle(SolidLn,0,Normwidth);
  for i:=1 to np do begin
    l:=Length(VV[i]);
    with VP[ord(VV[i,l])] do moveto(x,y);
    for j:=1 to l do with VP[ord(VV[i,j])] do lineto(x,y);
  end;
  moveto(0,0); lineto(xmax,0); lineto(xmax,ymax); lineto(0,ymax);
  lineto(0,0);
  if Alto then teclaEspacio else Delay(2000);
end.
```

## PROGRAMA PARA GENERAR POBLACIONES ARTIFICIALES DE PUNTOS

```

Program Anticlustered(input,output);
uses crt, Xtra2, MathStuff, objetos;
const CUT_OFF=20; { distancia de corte (en pixels) usada para la
  aritmética }
DIRECTORY='D:\USER\FRY\ANTICLUS\';
var
  AnticlusteredPointList: List;
  Files_so_far, No_of_Files, No_of_Points: integer;
  Anticlustering: real;
  File_Name: string;
procedure input_values(var num_of_pts, num_of_files: integer; var anti_clus: real);
begin
  ClrScr;
  PromptAt(5,3,'Please enter the desired number of points:   ');
  readln(num_of_pts);
  PromptAt(5,5,'Please enter the desired degree of anticlustering: ');
  readln(anti_clus);
  PromptAt(5,7,'Please enter the desired number of files:   ');
  readln(num_of_files);
end;

procedure GenerateList(var point_list: List; num_of_pts: integer;
  anticlus: real);
var new_point: Location;
  iteration_count, radius, x_dist, y_dist: integer;
  N: NodePtr;
  new_point_OK: boolean;

procedure make_new_point(var new_pt: Location; radius:integer);
var new_r, new_theta, new_x, new_y: integer;
begin
  new_r:=random(radius); new_theta:=random(360);
  new_x:=round(new_r*cos(DegToRad(int(new_theta))));
  new_y:=round(new_r*sin(DegToRad(int(new_theta))));
  new_pt.Init(new_x, new_y);
end; { procedure make_new_point }
begin
  point_list.Init;
  iteration_count:=1;
  radius:= round(sqrt(num_of_pts/(sqr(anticlus/CUT_OFF)*PI)));
  make_new_point(new_point, radius);

```

```

point_list.AddItem(new(LocationPtr,Init(new_point.GetX,new_point.GetY)));
while (point_list.GetLength < num_of_pts) do
begin
iteration_count:=iteration_count+1;
make_new_point(new_point, radius);
new_point_OK:=true;
with point_list do
begin
N:=Nodes;
while ((N<>nil) and new_point_OK) do

    { bucle que comprueba si todos los puntos de la lista distan entre ellos en
menos que la distancia de corte}

```

```

begin
x_dist:=abs(N^.item^.GetX-new_point.GetX);
y_dist:=abs(N^.item^.GetY-new_point.GetY);
new_point_OK:=(VectorLength(x_dist,y_dist) >= CUT_OFF);
N:=N^.Previous;
end; { mientras el bucle revisa la lista }
if new_point_OK then
AddItem(new(LocationPtr,Init(new_point.GetX,new_point.GetY)));
promptAt(5,15, IntToString(iteration_count)+' Iterations');
promptAt(5,17, IntToString(GetLength)+' Length of list');
promptAt(5,19, IntToString(Files_so_far-1)+' Files so far');
end;
end;
end; { procedure GenerateList }

```

```

procedure Make_File_Name(no_pts: integer; anticlust: real; fls_so_far: integer;
var nombre_arch: string);
begin
nombre_arch:=IntToString(no_pts)+'-'+IntToString(round(anticlust*10))+
'u'+IntToString(fls_so_far)+' .dat';
nombre_arch:=DIRECTORY+nombre_arch;
end; { procedure Make_File_Name }

```

```

procedure WriteFile(PointList: List; filename: string);

```

```

{*****
* Subrutina para la escritura a disco de la lista generada por el *
* usuario. *
*****}

```

```

var N: NodePtr;
fileToWrite: text;

```

```
begin
  assign(fileToWrite,filename);
  rewrite(fileToWrite);
  N:=PointList.Nodes;
  while N<>nil do begin
    writeln(fileToWrite,N^.Item^.GetX, ' ', N^.Item^.GetY);
    N:=N^.Previous;
  end; { for }
  close(fileToWrite);
end; { WriteFile }
begin { MAIN PROGRAM }
  repeat
    randomize;
    input_values(No_of_Points, No_of_Files, Anticlustering);
    Files_so_far:=0;
    while Files_so_far<No_of_Files do
      begin
        Files_so_far:=Files_so_far+1;
        GenerateList(AnticlusteredPointList, No_of_Points, Anticlustering);
        Make_File_Name(No_of_Points, Anticlustering, Files_so_far, File_Name);
        WriteFile(AnticlusteredPointList, File_Name);
        Make_File_Name(No_of_Points, Anticlustering, Files_so_far, File_Name);
      end; { mientras que el número de archivos es menor que el deseado }
      GoToXY(5,21);
    until (not (Verified('Generate another sequence of files')));
  end.
```

## GLOSARIO

**Algoritmo.** Procedimiento y notación de cálculo ordenados y lógicos.

**Antiaglomeramiento.** Medida del esparcimiento de una población de puntos en función de su densidad.

**Circuncírculo.** Circunferencia circunscrita a un polígono.

**Diagrama Voronoj.** Conjunto de las fronteras de los polígonos convexos contiguos que dividen el área en la que se encuentra una población de puntos. Cada polígono contiene sólo un punto de la población, y cualquier otro punto dentro del polígono está más cerca del primero que cualquiera que esté fuera.

**Distorsión interna.** Cambio en la orientación entre partículas que componen una roca.

**Dualidad (principio).** Si en dos definiciones geométricas las palabras “punto” y “recta” se intercambian y con algunas pequeñas modificaciones al lenguaje cada una de estas definiciones se convierte en la otra, se dice que son duales. Los siguientes ejemplos dan más claridad al concepto de dualidad.

a) Dos puntos determinan una línea.

a') Dos rectas determinan un punto.

b) Tres puntos en un plano dado, o están alineados, o determinan un triángulo.

b') Tres rectas en un plano dado, o pasan por un punto, o determinan un trilátero.

c) Un haz de rectas consiste en líneas que pasan todas ellas por un mismo punto.

c') Una hilera de puntos, consiste en puntos que están todos en una línea.

**Empaquetamiento.** Geometría que adquiere un conjunto de de cuerpos esféricos al ocupar un volumen.

**Enteros algebraicos.** Números enteros que satisfacen ecuaciones algebraicas con coeficientes negativos o positivos.

**Envoltente convexa.** La envoltura convexa de un conjunto de puntos  $P$  en  $\mathfrak{R}^n$  es la frontera del dominio convexo más pequeño en  $\mathfrak{R}^n$  que contiene a  $P$ .

**Mediatriz.** Perpendicular que se levanta en el punto medio de un segmento de recta.

**Paralaje.** Ángulo del desplazamiento aparente de un objeto sobre un fondo distante, cuando el observador cambia de punto de vista. Conociendo la distancia entre los dos puntos de observación y el ángulo de paralaje, se puede calcular por trigonometría la distancia del objeto observado.

**Polinomios irreducibles.** Polinomios que admiten sólo la factorización trivial ( $p=ab$  donde  $a$  o  $b$  es la unidad).

**Rotación.** Giro del sistema de coordenadas un ángulo  $f$  en torno de su origen como centro de rotación.

**Teselación Delaunay.** Triangulación que se dibuja sobre una población de puntos de modo que éstos sean los vértices de los triángulos y el circuncírculo de cada triángulo no contenga a ningún otro punto de la población. Se dice que es una teselación porque cubre perfectamente el área en la que se encuentra la población de puntos.

**Traslación.** Proceso que consiste en cambiar el sistema de coordenadas.

**Trilátero.** Es una figura que consiste en tres líneas no concurrentes y los tres puntos que ellas determinan. Es el dual de un triángulo, que consiste en tres puntos no colineales y las tres líneas que determinan. La figura de un triángulo es también una figura trilateral.