UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA RECTA REAL Y SUS PROPIEDADES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ALFREDO ANTONIO ORTIZ DE LOS SANTOS

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

MEXICO, D.F. 2000

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis "LA RECTA REAL Y SUS PROPIEDADES"

realizado por ALFREDO ANTONIO ORTIZ DE LOS SANTOS

con numero de cuenta 6208757-5 , pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio

Atentamente

Director de Tesis
Propietario M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Propietario MAT. CESAR RINCON ORTA

Propietario M. en C. MIGUEL LARA APARICIO

Suplente M. en C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA

Suplente MAT. JOSE FERNANDO GARCIA GARCIA

Consejo Departamental de MATEMATICAS

Héctor Méndez L.
DR. HECTOR MENDEZ LANGO

LA RECTA REAL Y SUS PROPIEDADES

A CHARITO.

TE DEDICO ESTE TRABAJO,MANIFESTANDO CON ESTO,EL GRAN APOYO QUE SIEMPRE ME BRINDAS EN LOS MOMENTOS MAS SIGNIFICATIVOS DE MI VIDA.

GRACIAS.

A G R A D E C I M I E N T O

SICERAMENTE AGRADEZCO A TODOS MIS MAESTROS, POR LA EDUCACION QUE RECIBI DE PARTE DE ELLOS, PUES: ¿QUE PUEDO YO SABER, QUE ELLOS NO ME HAYAN ENSEÑADO?.

EN PARTICULAR, AGRADEZCO AL MAESTRO ALEJANDRO BRAVO MOJICA POR LAS ATENCIONES Y PACIENCIA QUE TUVO PARA CONMIGO. AGRADEZCO TAMBIEN A MIS SINODALES, POR LA DISPOSICION QUE MOSTRARON CUANDO RECURRI A ELLOS.

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

LA IDEA PRINCIPAL DE ESTE TRABAJO,RADICA EN ESTABLECER LA RELACION QUE EXISTE ENTRE LOS NUMEROS REALES Y UNA RECTA ORIENTADA. PARA ESTO,SE CONS TRUYE UN EJE DIRIGIDO,CONSTRUYENDOSE POSTERIORMENTE A LOS NUMEROS REALES.

TAL RELACION ESTA ENCAMINADA,PENSANDO EN QUE LA RECTA NO TIENE "HUECOS" Y QUE LOS NUMEROS REALES (FORMADOS POR LA UNION DE LOS RACIONALES CON TO DOS LOS NUMEROS IRRACIONALES) PUEDEN PONERSE EN CORRESPONDENCIA BIUNIVOCA CON LOS PUNTOS DE UNA RECTA.

EN EL DESARROLLO DE ESTA TESIS,SE CONSIDERAN: LAS RELACIONES,PROPIEDADES Y TEOREMAS CORRESPONDIENTES A LOS NUMEROS REALES Y AL FINAL SE HACE UN A NALISIS DEL NUMERO e,DEMOSTRANDO A LA VEZ,LA IRRACIONALIDAD DE ESTE.

CONSIDERO QUE ESTE TRABAJO,ES BASTANTE UTIL PARA UNA BUENA FORMACION DE UN ESTUDIANTE DE ANALISIS MATEMATICO.

CAPITULO I

ENTIENDASE POR SEGMENTO RECTILINEO, A LA PARTE DE UNA RECTA COMPRENDIDA ENTRE DOS PUNTOS DE ELLA. A ESTOS PUNTOS SE LES LLAMAN EXTREMOS DEL SEG - MENTO. ASI PUES, EN LA FIGURA 1, $\overline{PQ}$ ES UN SEGMENTO RECTILINEO DE EXTREMOS P ; Q.

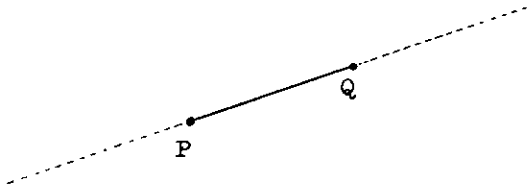

FIG. 1

LA LONGITUD DEL SEGMENTO $\overline{PQ}$, SE REPRESENTA MEDIANTE $|\overline{PQ}|$.

CUANDO DOS SEGMENTOS TIENEN LA MISMA LONGITUD,SE DIRA QUE SON CONGRUENTES.

EN SENTIDO GEOMETRICO,DIREMOS QUE DOS SEGMENTOS SON CONGRUENTES,CUANDO PUEDEN COLOCARSE LAS PUNTAS DE UN COMPAS EN LOS EXTREMOS DE AMBOS SEGMENTOS,SIN VARIAR LA ABERTURA DE ESTE.

PARA NUESTROS PROPOSITOS,INTRODUCIREMOS EL CONCEPTO DE SEGMENTO DIRIGIDO DICIENDO QUE EL SEGMENTO $\overline{PQ}$ DE UNA RECTA L, ESTA DIRIGIDO DE P A Q,CUANDO ESTA GENERADO POR UN"PUNTO QUE SE MUEVE" A LO LARGO DE TAL RECTA DESDE P, HASTA Q. A ESTE SEGMENTO LO DENOTAREMOS POR $\overrightarrow{PQ}$.

AL PUNTO P, SE LE LLAMARA EXTREMO INICIAL Y AL PUNTO Q, EXTREMO FINAL.

POR LO TANTO,SI SE TIENEN SEGMENTOS $\overrightarrow{AB}$ Y $\overrightarrow{BA}$, ESTOS TENDRAN IGUAL LONGITUD,SIN EMBARGO SI ACORDAMOS QUE $\overrightarrow{AB}$ TENGA SIGNO POSITIVO,ENTONCES DIREMOS QUE $\overrightarrow{BA}$ TIENE SIGNO NEGATIVO.

DEFINICION I-1. DIREMOS QUE DOS SEGMENTOS ESTAN IGUALMENTE ORIENTADOS, CUANDO SEAN PARALELOS Y TAL QUE,SI MEDIANTE UNA TRASLACION,HACEMOS COINCIDIR LOS EXTREMOS INICIALES DE AMBOS SEGMENTOS EN LA RECTA QUE CONTIENE A UNO DE ELLOS,SUS EXTREMOS FINALES SE LOCALIZARAN DEL MISMO LADO DEL EXTREMO INICIAL SOBRE LA RECTA MENCIONADA.

ENTENDEREMOS QUE DOS SEGMENTOS DIRIGIDOS SON IGUALES, SI SON CONGRUENTES Y ESTAN IGUALMENTE ORIENTADOS.

SI EN LA FIGURA 2, LAS RECTAS: L_1 , L_2 , L_3 SON PARALELAS Y $|\overline{AB}|$ = $|\overline{CD}|$ $|\overline{EF}|$ = $|\overline{GH}|$.

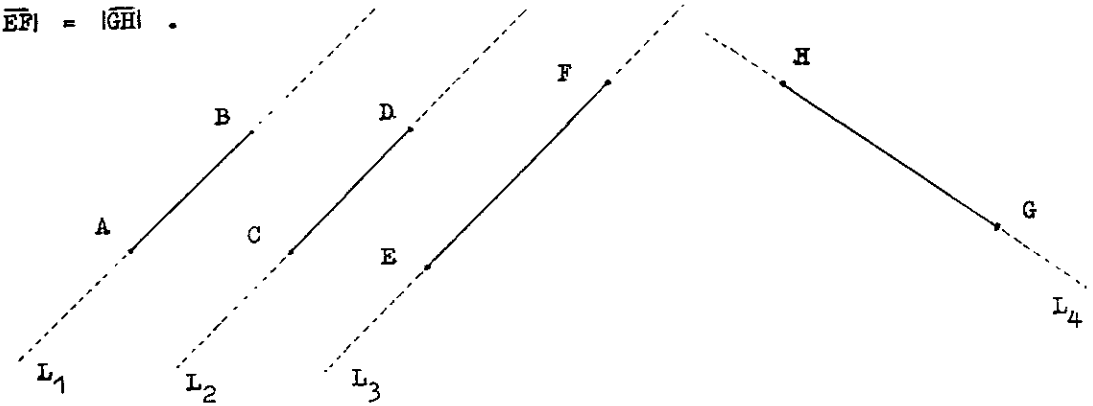

FIG. 2

SE OBSERVA QUE LOS SEGMENTOS:

$\vec{AB} = \vec{CD}$ (YA QUE, SON CONGRUENTES E IGUALMENTE ORIENTADOS)

$\vec{AB} \neq \vec{DC}$ (SON CONGRUENTES, PARALELOS PERO TIENEN ORIENTACIONES CONTRARIAS)

$\vec{AB} \neq \vec{EF}$ (SON PARALELOS, CON LA MISMA ORIENTACION, SIN EMBARGO NO SON CONGRUENTES)

$\vec{AB} \neq \vec{GH}$ (NO SON COMPARABLES, YA QUE: NO SON CONGRUENTES NI SON IGUALMENTE ORIENTADOS)

NOTA. LOS SEGMENTOS: $\vec{AB}$ Y $-\vec{DC}$, SON IGUALES.

PARA LA CONSTRUCCION DE UN EJE DIRIGIDO, CONSIDEREMOS UNA RECTA CUALQUIERA Y ESCOJAMOS ARBITRARIAMENTE DOS PUNTOS DE ELLA. A UNO DE ELLOS SE LE LLAMARA ORIGEN Y AL OTRO EXTREMO DE TAL MANERA QUE, FORMEN EL SEGMENTO DIRIGIDO $\overrightarrow{\text{ORIGEN-EXTREMO}}$. A ESTE SEGMENTO LE ASIGNAREMOS LA ORIENTACION POSITIVA Y LE LLAMAREMOS EL SEGMENTO UNIDAD.

ASIGNEMOSLE A TAL RECTA, LA ORIENTACION DEL SEGMENTO UNIDAD. A LA RECTA ASI CONSIDERADA. SE LE LLAMARA EJE DIRIGIDO.

AHORA BIEN, SI CUALQUIER SEGMENTO DEL EJE DIRIGIDO, TIENE LA MISMA ORIEN

TACION DEL SEGMENTO UNIDAD, SE DIRA QUE ES POSITIVO Y SERA NEGATIVO SI TIENE ORIENTACION CONTRARIA.

CONSIDEREMOS UN EJE HORIZONTAL ORIENTADO POSITIVAMENTE HACIA LA DERECHA Y SEA P, UN PUNTO DE TAL EJE. SE LE LLAMARA ABSCISA DE P, A LA LONGITUD DEL SEGMENTO $\overrightarrow{OP}$, CON LA CONDICION QUE DICHA LONGITUD SERA MEDIDA ESTRICTAMENTE DESDE EL ORIGEN HASTA EL PUNTO P, EN EL ENTENDIMIENTO QUE TAL LONGITUD ES POSITIVA SI $\overrightarrow{OP}$ ES POSITIVA Y ES NEGATIVA SI $\overrightarrow{OP}$ ASI ES.

AL EJE ASI CONSIDERADO, SE LE LLAMARA EJE DE ABSCISAS.

LLAMAREMOS SEMI-EJE POSITIVO,A LA COLECCION DE TODOS LOS PUNTOS P DEL EJE,TALES QUE $\overrightarrow{OP}$ TIENE ORIENTACION POSITIVA Y SEMI-EJE NEGATIVO,A LA COLECCION DE TODOS LOS PUNTOS Q DEL EJE,TALES QUE $\overrightarrow{OQ}$ TIENE ORIENTACION NEGATIVA.

COMENTARIO. SI $\overrightarrow{OI}$ DENOTA AL SEGMENTO UNIDAD, AL EXTREMO I LE ASIGNAREMOS ABSCISA IGUAL A UNO Y AL ORIGEN O, ABSCISA IGUAL A CERO.

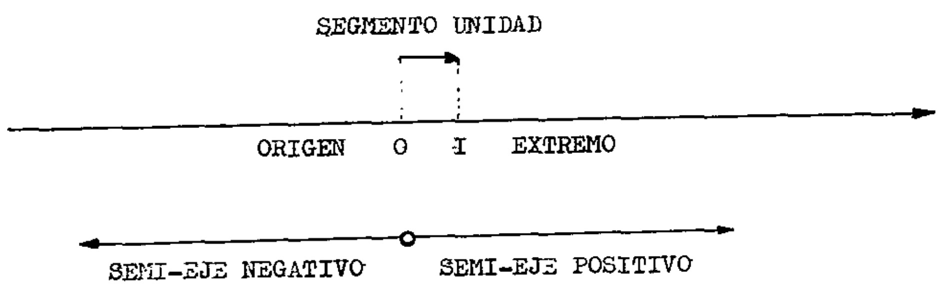

FIG. 3

COMO LA RECTA NO ES UNA SUCESION DE PUNTOS,PUES SE CONSIDERA GENERADA POR UN "PUNTO EN MOVIMIENTO" RECORRIENDO TODA UNA TRAYECTORIA ESPECIFICA POR LO TANTO, PARA CUALQUIER SEGMENTO $\overrightarrow{AB}$, EXISTEN PUNTOS UNICOS P ; Q EN LOS SEMI-EJES POSITIVO Y NEGATIVO RESPECTIVAMENTE, TALES QUE:

$|\overline{OP}|=|\overline{AB}|=|\overline{OQ}|$.

PARA HACER VER ESTO, TRACESE UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y DE RADIO IGUAL A $|\overline{AB}|$. ESTA CIRCUNFERENCIA CORTARA AL EJE DE LAS ABSCISAS EN LOS PUNTOS BUSCADOS (FIG. 4).

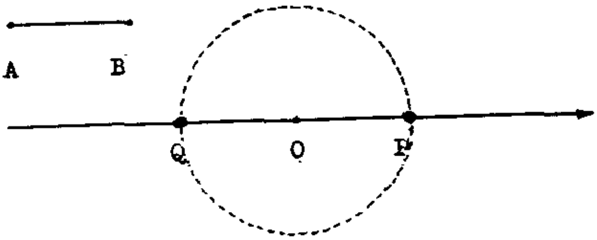

FIG. 4

MAS AUN, SI SE TIENEN: UN SEGMENTO DIRIGIDO $\vec{AB}$ Y UN PUNTO P ARBITRARIAMENTE ESCOGIDO, PODEMOS TRAZAR UN SEGMENTO DIRIGIDO IGUAL A $\vec{AB}$ QUE TENGA COMO EXTREMO INICIAL AL PUNTO P.

PARA LOGRAR LO ANTERIOR, PROCEDAMOS ASI: POR EL PUNTO P, TRACESE UNA PARALELA AL SEGMENTO $\overline{AB}$ (FIG. 5). TRACESE UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN P Y DE RADIO $|\overline{AB}|$. ESTA CIRCUNFERENCIA, CORTARA A LA PARALELA EN DOS PUNTOS A' Y B' UNO A CADA LADO DE P SOBRE TAL PARALELA. SABEMOS QUE:

$|\overline{PA'}| = |\overline{AB}| = |\overline{PB'}|$

Y SABEMOS TAMBIEN QUE UNO SOLAMENTE DE LOS SEGMENTOS DIRIGIDOS $\overrightarrow{PA'}$, $\overrightarrow{PB'}$ CON EL MISMO ORIGEN P ES IGUAL A $\vec{AB}$, SIENDO ESTE $\overrightarrow{PB'}$.

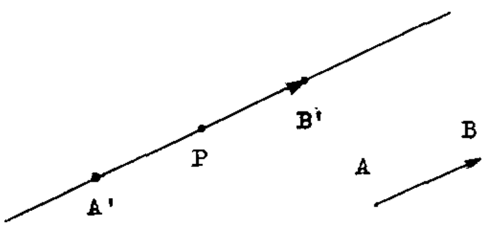

FIG. 5

SEAN: $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ DOS SEGMENTOS DIRIGIDOS Y SEA O CUALQUIER PUNTO. CONSIDEREMOS $\overrightarrow{OA}$ Y $\overrightarrow{AB}$, LOS CUALES SON LOS UNICOS SEGMENTOS DIRIGIDOS CON ORIGENES O Y A RESPECTIVAMENTE, TALES QUE: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{RS}$. SI A PARTIR DEL EXTREMO A, TRAZAMOS EL SEGMENTO $\overrightarrow{AB}$, ENTONCES DEFINAMOS DE ESTE MODO: EL SEGMENTO $\overrightarrow{OB}$, SERA IGUAL A LA SUMA DE $\overrightarrow{PQ}$ Y $\overrightarrow{RS}$, ES DECIR:

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$, SIENDO $\overrightarrow{OB}$ UNICO

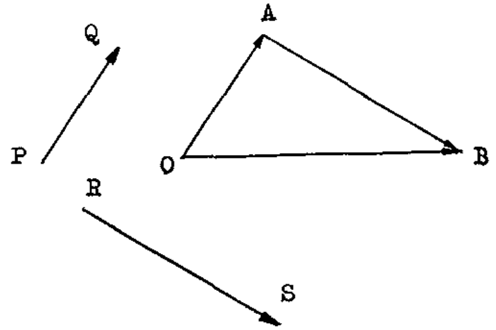

FIG. 6

COMO CASO PARTICULAR, SI SE DESEA SUMAR DOS SEGMENTOS DIRIGIDOS $\overrightarrow{PQ}$ Y $\overrightarrow{RS}$ QUE SEAN HORIZONTALES, SE PROCEDERA ASI:

POR CONVENIENCIA, TOMEMOS AL ORIGEN O DEL EJE DE ABSCISAS (PUEDE SER CUALQUIER OTRO PUNTO DE TAL EJE) Y CONSTRUYAMOS LOS SEGMENTOS DIRIGIDOS $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{RS}$. ENTONCES POR DEFINICION SE TENDRA: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$

ES DECIR (FIG. 6), TOMEMOS EL PRIMER SUMANDO CON ORIGEN O Y EL SEGUNDO SUMANDO CON ORIGEN EN EL EXTREMO A DEL PRIMER SUMANDO Y TENDRA SU EXTREMO EN ALGUN PUNTO B. POR LO TANTO, LA SUMA SERA EL SEGMENTO DIRIGIDO QUE TIENE POR ORIGEN, EL ORIGEN DEL PRIMER SUMANDO Y POR EXTREMO, EL EXTREMO DEL SEGUNDO SUMANDO.

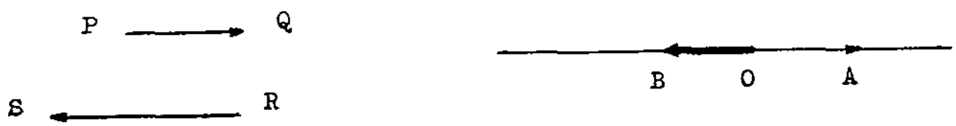

FIG. 7

SIENDO; A,B,C,D CUATRO PUNTOS EN EL EJE DE ABSCISAS TALES QUE:

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$, ENTONCES SE DEBERA CUMPLIR:

$\vec{BD} = \vec{AC}$; $\vec{CD} = \vec{AB}$

DEMOSTRACION. POR DEFINICION,SABEMOS:

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$.

POR LO QUE: $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

RESTANDO $\vec{AB}$ A AMBOS LADOS,SE TENDRA:

$\vec{AB} + \vec{BD} - \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AB}$.

DE LO QUE SE TIENE:

$\vec{BD} = \vec{AC}$.

TAMBIEN POR DEFINICION,SE SABE:

$\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$.

POR TANTO: $\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

RESTANDO $\vec{AC}$ A AMBOS LADOS,SE TENDRA:

$\vec{AC} + \vec{CD} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AC}$.

OBTENIENDOSE:

$\vec{CD} = \vec{AB}$. L.Q.Q.D.

UTILIZANDO LO ANTES MENCIONADO QUE DICE:

"DADOS DOS PUNTOS P ; Q DEL EJE DE LAS ABSCISAS,DIREMOS QUE $\vec{PQ}$ TIENE ORIENTACION POSITIVA,SI TIENE LA ORIENTACION DEL EJE DE LAS ABSCISAS Y TENDRA ORIENTACION NEGATIVA,SI SU ORIENTACION ES CONTRARIA A LA DE TAL EJE".

PODEMOS ESTABLECER UN ORDENAMIENTO PARA LOS PUNTOS DE DICHO EJE,PROCEDIENDO ASI:

$P < Q$, SI $\vec{PQ}$ TIENE ORIENTACION POSITIVA. EN DONDE EL SIMBOLO $<$ SIGNIFICA "ANTERIOR A" O BIEN "MENOR QUE". ANALOGAMENTE $P > Q$, SI $\vec{PQ}$ TIENE ORIENTACION NEGATIVA. EL SIMBOLO $>$ SIGNIFICA "POSTERIOR A" O BIEN "MAYOR QUE".

EN BASE A ESTO,DEFINAMOS A UN ORDEN, COMO UNA RELACION CON DETERMINADAS PROPIEDADES, QUE RIGEN ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO Y QUE SE EXPRE

SAN DEL SIGUIENTE MODO:

SI; A,B,C SON PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS, LAS PROPIEDADES QUE DAN AL SIGNO $<$ SU CARACTER DE RELACION DE ORDEN, SON LAS SIGUIENTES:

i). SI; $A < B$; $B < C$, ENTONCES: $A < C$. (PROPIEDAD TRANSITIVA).

ii). SE CUMPLE EXACTAMENTE UNA Y SOLO UNA DE LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

$A < B$; $A = B$; $B < A$. (PROPIEDAD DE TRICOTOMIA).

A LA RELACION QUE RIGE ENTRE LOS PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS Y QUE TIENE LAS PROPIEDADES i) ; ii), SE LE CONOCE CON EL NOMBRE DE ORDEN TOTAL.

LA EXPRESION: $B > A$ SIGNIFICA, $A < B$.

ESCRIBIREMOS; $A < B < C$, SI SE CUMPLEN AMBAS: $A < B$; $B < C$.

LA RELACION; $A \leqslant B$ (A MENOR O IGUAL A B) SE CUMPLE, SIEMPRE QUE SE CUMPLA AL MENOS UNA DE LAS SIGUIENTES RELACIONES: $A < B$; $A = B$.

TOMANDO EN CONSIDERACION ESTA NOTACION, SE OBSERVA LA SIGUIENTE CONSECUENCIA:

SI; $A \leqslant B$ Y $B \leqslant A$, ENTONCES: $A = B$.

PARA HACER VER ESTO, SUPONGAMOS QUE $A \neq B$. ENTONCES POR ii), SE DEBE CUMPLIR EXACTAMENTE UNA SOLA DE LAS CONDICIONES: $A < B$; $B < A$. SI SE CUMPLE: $A < B$, ENTONCES $B \leqslant A$ ES FALSA Y EN CONSECUENCIA, LA HIPOTESIS $A \leqslant B$ Y $B \leqslant A$ (AMBAS A LA VEZ) ES FALSA.

AHORA BIEN, SI SE CUMPLE $B < A$, ENTONCES $A \leqslant B$ ES FALSA Y POR LO TANTO LA HIPOTESIS $A \leqslant B$ Y $B \leqslant A$ (AMBAS A LA VEZ), ES FALSA.

POR TANTO EN CUALESQUIER DE LOS DOS CASOS, UNA PARTE DE LA HIPOTESIS SE CONTRADICE, POR TAL MOTIVO, LA AFIRMACION ES CIERTA. ES DECIR:

SI; $A \leqslant B$ Y $B \leqslant A$, ENTONCES: $A = B$.

CAPITULO II

SEA: $Z = \{-,\ldots,-10,-9,-8,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS.

DEFINICION II-1. LLAMASE NUMERO RACIONAL, A TODO NUMERO QUE PUEDE EXPRESARSE COMO UNA DIVISION ENTRE DOS NUMEROS ENTEROS, CON LA UNICA CONDICION, QUE EL DENOMINADOR SEA DISTINTO DE CERO (YA QUE LA DIVISION ENTRE CERO, NO ESTA DEFINIDA).

EJEMPLOS DE NUMEROS RACIONALES: $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{2}$, 7 , -8 , 0.

EL NUMERO $\frac{3}{4}$ ES RACIONAL, PUESTO QUE, ESTA EXPRESADO COMO UNA DIVISION DEL ENTERO 3, ENTRE EL ENTERO $4 \neq 0$.

$-\frac{5}{2}$ ES UN NUMERO RACIONAL, YA QUE: $-\frac{5}{2} = \frac{-5}{2} = \frac{5}{-2}$. ES DECIR, QUE EL NUMERO $-\frac{5}{2}$, SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA DIVISION DEL ENTERO -5 ENTRE EL ENTERO 2. O BIEN, COMO LA DIVISION DEL ENTERO 5 ENTRE EL ENTERO $-2 \neq 0$. AUNQUE POR CONVENIENCIA, SIEMPRE TOMAREMOS DE SIGNO POSITIVO EL DENOMINADOR.

CON RESPECTO AL 7, ESTE PUEDE EXPRESARSE COMO UNA DIVISION DEL ENTERO 14, ENTRE EL ENTERO $2 \neq 0$. O BIEN, SIMPLEMENTE COMO DIVISION DEL PROPIO ENTERO 7, ENTRE EL ENTERO $1 \neq 0$.

ANALOGAMENTE, SE PROCEDE PARA LOS NUMEROS RESTANTES.

DE ACUERDO A LA ANTERIOR DEFINICION, SE OBSERVA QUE LOS NUMEROS RACIONALES SE PUEDEN CLASIFICAR EN ENTEROS Y FRACCIONES.

$$\text{NUMEROS RACIONALES} \begin{cases} \text{ENTEROS} \\ \text{FRACCIONES} \end{cases}$$

SIENDO ENTEROS, LOS RACIONALES QUE PUEDEN REPRESENTARSE COMO $\frac{a}{1}$, EN DONDE a ES UN NUMERO ENTERO. Y FRACCIONES, LOS RACIONALES QUE NO ADMITEN TAL REPRESENTACION.

LOS NUMEROS RACIONALES, PUEDEN EXPRESARSE EN NOTACION DECIMAL, EFECTUANDO LA DIVISION CORRESPONDIENTE. POR EJEMPLO: $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{7}$.

```
    0.75000---
4 |3 0
     20
      00
       00
        --
```

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1.857142857142--- \\
7 & 13 \\
 & 6\ 0 \\
 & \ \ 40 \\
 & \ \ \ 50 \\
 & \ \ \ \ 10 \\
 & \ \ \ \ \ 30 \\
 & \ \ \ \ \ \ 20 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ 60 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ 40 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ -- \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ --
\end{array}
$$

LO CUAL NOS INDICA QUE:

$\frac{3}{4} = 0.75000--- = 0.75\overline{0}$ Y QUE

$\frac{13}{7} = 1.857142857142857142--- = 1.\overline{857142}$

EN DONDE LA BARRA, INDICA QUE EL NUMERO SOBRE EL QUE SE MARCA, SE REPETIRA SUCESIVAMENTE Y DE MANERA INDEFINIDA.

NOTAMOS, QUE APARECE UNA COLECCION DE DIGITOS EN LA FRACCION DECIMAL, QUE FORMA UN MODELO QUE SE REPITE INDEFINIDAMENTE, A ESTE MODELO SE LE LLAMARA PERIODO.

ESTO ES DE ESPERARSE, YA QUE, POR EL ALGORITMO DE LA DIVISION, TODOS LOS RESIDUOS ESTAN SUPEDITADOS A TOMAR VALORES ENTEROS COMPRENDIDOS ENTRE CERO Y EL ENTERO INMEDIATO ANTERIOR AL DIVISOR Y POR TAL MOTIVO, ALGUN RESIDUO SE REPETIRA EN CIERTA ETAPA DEL PROCEDIMIENTO, TRAYENDO CONSIGO, LA REPETICION DE TAL MODELO.

INVERSAMENTE, TODO NUMERO QUE EN SU NOTACION DECIMAL ADMITE UN PERIODO REPETITIVO, REPRESENTARA A UN NUMERO RACIONAL. ESTO PUEDE PROBARSE DEL SIGUIENTE MODO:

YA QUE, TODO NUMERO DECIMAL PERIODICO TIENE LA FORMA:

$$x + y(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + \ldots)$$

EN DONDE x, y, r SON NUMEROS RACIONALES Y

$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + \ldots$ ES LA SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA INFINITA CUYA RAZON r ES UNA POTENCIA DE $\frac{1}{10}$

ESTO, PODEMOS HACERLO VER DEL SIGUIENTE MODO: CONSIDEREMOS CUALQUIER DECIMAL PERIODICO, DIGAMOS; $a.b\overline{cd}$ CON a,b,c,d DIGITOS ENTRE CERO Y 9.

$$a.b\overline{cd} = a + \frac{b}{10} + \frac{cd}{1000} + \frac{cd}{100000} + \frac{cd}{10000000} + ----$$

$$= a + \frac{b}{10} + \frac{cd}{10^3} + \frac{cd}{10^5} + \frac{cd}{10^7} + ----$$

$$= a + \frac{b}{10} + cd\left(\frac{1}{10^3} \right) + cd\left(\frac{1}{10^5} \right) + cd\left(\frac{1}{10^7} \right) + ----$$

$$= a + \frac{b}{10} + cd\left(\frac{1}{10^3} \right)\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ---- \right)$$

$$= \frac{10a + b}{10} + \frac{cd}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ---- \right).$$

PUES BIEN, LLAMANDO $r = \frac{1}{10^2}$, SE TIENE:

$$a.b\overline{cd} = \frac{10a + b}{10} + \frac{cd}{10^3}\left(1 + r + r^2 + ---- \right).$$

Y COMO LA SUMA Y EL PRODUCTO DE ENTEROS ES OTRO NUMERO ENTERO, ENTONCES: $\frac{10a + b}{10}$; $\frac{cd}{10^3}$; $r = \frac{1}{10^2}$ SON NUMEROS RACIONALES.

POR LO TANTO, EL NUMERO $a.b\overline{cd}$, EN EFECTO TIENE LA FORMA:

$x + y(1 + r + r^2 + r^3 + - - - -)$, SIENDO x,y,r NUMEROS RACIONALES. MAS AUN, TAL DECIMAL QUEDA EXPRESADO ASI: $x + \frac{y}{1-r}$ EL CUAL ES UN NUMERO RACIONAL (YA QUE, LA SUMA, DIFERENCIA Y COCIENTE ENTRE DOS NUMEROS RACIONALES, ES OTRO RACIONAL).

NOTA. PARA HACER NOTAR ESTO ULTIMO, BASTARA PROBAR QUE:

$1 + r + r^2 + r^3 + \cdot\cdot\cdot + r^n + \cdot\cdot\cdot\cdot = \frac{1}{1-r}$. Y ESTO SE LOGRA, APLICANDO LA FORMULA DE LA SUMA DE UNA PROGRESION GEOMETRICA DE RAZON r.

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, Y COMO: $a_1 = 1$, RESULTA:

$$S_n = \frac{1(1-r^n)}{1-r} = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

COMO r ES UNA POTENCIA DE $\frac{1}{10}$, SI HACEMOS QUE n SEA TAN GRANDE COMO SE DESEE (DENOTANDOLO $n \to \infty$) ENTONCES, r^n TENDERA A VALER CERO Y EN CONSECUENCIA:

$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$. SI $n \to \infty$

POR LO TANTO:

$$x + y(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + \ldots) = x + y(\frac{1}{1 - r}).$$

ES DECIR:

$$x + y(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + \ldots) = x + \frac{y}{1 - r}.$$

L.Q.Q.D.

CABE MENCIONAR QUE AL ESCOGER r, EL EXPONENTE DE LA POTENCIA DE $\frac{1}{10}$, SE TOMARA IGUAL AL NUMERO DE DIGITOS QUE CONTENGA LA PARTE PERIODICA DE LA EXPRESION DECIMAL CORRESPONDIENTE.

EJEMPLO. CONSIDEREMOS: $2.1\overline{47} = 2.1474747$ ----

TAL DECIMAL SE EXPRESA ASI:

$$2.1\overline{47} = 2.1474747 \text{ ---- } = 2 + \frac{1}{10} + \frac{47}{1000} + \frac{47}{100000} + \frac{47}{10000000} + \ldots$$

$$= 2 + \frac{1}{10} + \frac{47}{10^3} + \frac{47}{10^5} + \frac{47}{10^7} + \ldots$$

$$= 2 + \frac{1}{10} + 47(10^{-3}) + 47(10^{-5}) + 47(10^{-7}) + \ldots$$

$$= 2 + \frac{1}{10} + 47(10^{-3})(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \ldots)$$

CUYA RAZON ES $r = 10^{-2}$. Y POR LO TANTO QUEDA:

$$2 + \frac{1}{10} + 47(10^{-3})(\frac{1}{1 - 10^{-2}})$$

$$= 2 + \frac{1}{10} + 47(10^{-3})(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}})$$

$$= 2 + \frac{1}{10} + 47(10^{-3})(\frac{1}{\frac{99}{100}})$$

$$= 2 + \frac{1}{10} + 47(10^{-3})(\frac{100}{99})$$

$$= 2 + \frac{1}{10} + 47(10^{-3})(\frac{10^2}{99})$$

$= 2 + \frac{1}{10} + \frac{47(10^{-1})}{99}$

$= 2 + \frac{1}{10} + \frac{47}{990} = \frac{1980 + 99 + 47}{990} = \frac{2126}{990} = \frac{1063}{495}$.

ES DECIR: $2.1\overline{47} = \frac{1063}{495}$ EL CUAL ES UN NUMERO RACIONAL.

POR LO TANTO, PODEMOS CARACTERIZAR A LOS NUMEROS RACIONALES, DICIENDO QUE SON AQUELLOS QUE EN SU NOTACION DECIMAL, ADMITEN UN PERIODO QUE SE REPITE INDEFINIDAMENTE.

DEFINICION II-2. LLAMASE NUMERO IRRACIONAL, A TODO NUMERO QUE NO ES RACIONAL.ES DECIR, A TODO NUMERO QUE NOPUEDE EXPRESARSE MEDIANTE UNA DIVISION ENTRE DOS NUMEROS ENTEROS.

ESTOS SE CARACTERIZAN, PORQUE EN SU NOTACION DECIMAL NO EXISTE PERIODO ALGUNO QUE SE REPITE, TAL COMO SUCEDE CON LOS SIGUIENTES NUMEROS:

$\sqrt{2} = 1.41421356$-----

$\pi = 3.14159265$----- (RAZON DE LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA A SU DIAMETRO).

$e = 2.7182818285$----- (BASE DEL SISTEMA DE LOS LOGARITMOS NEPERIANOS)

$c = 0.577215664$----- (LA CONSTANTE DE EULER)

1.10100100010000-----, ETC.

CONSIDERANDO LO ANTERIOR, CABE HECERNOS LA SIGUIENTE PREGUNTA. ¿ES RACIONAL EL NUMERO $\sqrt{2}$?

PARA DAR RESPUESTA A ESTO, PRIMERAMENTE DEMOSTRAREMOS LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES:

i). SI a ES UN NUMERO PAR, ENTONCES a^2 ES PAR.

ii). SI b ES UN NUMERO IMPAR, ENTONCES b^2 ES IMPAR.

DEMOSTRACION DE i). SI a ES UN NUMERO PAR, ENTONCES a ES UN MULTIPLO DE 2, ES DECIR:

$a = 2n$, CON n ENTERO.

POR TANTO: $a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$.

LUEGO: $a^2 = 2(2n^2)$.

Y COMO SABEMOS QUE EL PRODUCTO DE ENTEROS ES ENTERO, ENTONCES:

$2n^2 = 2nn$ ES ENTERO. EN CONSECUENCIA, a^2 ES PAR.

DEMOSTRACION DE ii). SI b ES UN NUMERO IMPAR, ENTONCES b TIENE LA FORMA:

$b = 2n + 1$, CON n ENTERO.

POR TANTO: $b^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$

LUEGO: $b^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.

COMO SE SABE QUE LA SUMA Y EL PRODUCTO DE ENTEROS ES ENTERO, POR LO TANTO: $2n^2 + 2n = 2nn + 2n$ ES ENTERO. EN CONSECUENCIA, b^2 ES IMPAR.

SON CIERTAS TAMBIEN LAS AFIRMACIONES:

iii). SI EL CUADRADO DE UN ENTERO ES PAR, ENTONCES TAL ENTERO ES PAR.

iv). SI EL CUADRADO DE UN ENTERO ES IMPAR, ENTONCES TAL ENTERO ES IMPAR.

PARA i). SEA a UN ENTERO. SUPONGAMOS QUE a^2 ES PAR, ENTONCES, a NO PUEDE SER IMPAR, PORQUE SI LO FUERA, UTILIZANDO ii), SE TENDRIA QUE a^2 SERIA TAMBIEN IMPAR. CONTRADICIENDO LA SUPOSICION.

ANALOGAMENTE PARA iv). SEA b UN ENTERO. SUPONGAMOS QUE b^2 ES IMPAR, ENTONCES, b NO PUEDE SER PAR, PORQUE SI LO FUERA, ENTONCES POR i), b^2 SERIA PAR. CONTRADICIENDO LA SUPOSICION.

CON TODO ESTO, YA ESTAMOS EN CONDICIONES DE RESPONDER A LA PREGUNTA ANTES HECHA.

SUPONGAMOS QUE $\sqrt{2}$ ES UN NUMERO RACIONAL, ES DECIR QUE: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ EN DONDE $\frac{a}{b}$ ES UN RACIONAL SIMPLIFICADO (DE NO SERLO, LO SIMPLIFICARIAMOS).

POR LO TANTO: $a = \sqrt{2}b$.

DE DONDE: $a^2 = 2b^2$ - - - - - (I)

LUEGO: a^2 ES UN NUMERO PAR (POR SER UN MULTIPLO DE 2). LO CUAL IMPLICA QUE: a ES PAR (POR iii).

POR LO TANTO, a DEBE SER MULTIPLO DE 2, ES DECIR: $a = 2n$, CON n ENTERO.

DE LO QUE SE INFIERE: $a^2 = 4n^2$

Y POR (I), $4n^2 = 2b^2$.

O BIEN, $b2 = 2n^2$

LUEGO: b^2 ES PAR (POR SER UN MULTIPLO DE 2).

POR LO QUE b ES PAR (POR iii).

AHORA BIEN, SE TIENE QUE AMBOS, a Y b SON PARES Y POR TAL MOTIVO, SERAN DE LA FORMA: $a = 2x$; $b = 2y$ CON x, y ENTEROS.

POR LO QUE: $\frac{a}{b} = \frac{2x}{2y}$.

ESTO SIGNIFICA QUE $\frac{a}{b}$ ES SIMPLIFICABLE, PUESTO QUE: a Y b TIENEN COMO FACTOR COMUN AL NUMERO 2, LO CUAL ES UNA CONTRADICCION, YA QUE, a Y b NO TIENEN FACTOR COMUN DIFERENTE DE 1 Y DE -1 ($\frac{a}{b}$ ERA POR HIPOTESIS UN NUMERO RACIONAL SIMPLIFICADO). EN CONCLUSION, $\sqrt{2}$ NO ES UN NUMERO RACIONAL, SINO IRRACIONAL. EN GENERAL, TODA RAIZ INEXACTA REPRESENTA A UN NUMERO IRRACIONAL.

POR DEFINICION, DIREMOS QUE EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES ES LA UNION DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES CON EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS IRRACIONALES.

EN TANTO, CONSIDEREMOS COMO SIGUIENTE OBJETIVO, EL PODER ASOCIAR A CADA NUMERO REAL, UN PUNTO EN EL EJE DE LAS ABSCISAS, PARA LO CUAL, COMENZAREMOS CON LOS NUMEROS RACIONALES Y ESTO SE HARA DEL SIGUIENTE MODO:

SEA $\frac{a}{b}$ UN NUMERO RACIONAL (SIMPLIFICADO) Y $\overrightarrow{OI}$ EL SEGMENTO UNIDAD. SUPONGAMOS QUE $\frac{a}{b} < 1$ CON a Y b ENTEROS POSITIVOS.

A PARTIR DEL ORIGEN O, TRACEMOS UNA SEMI-RECTA AUXILIAR L (FIG. II-1)

CON UNA ABERTURA CUALQUIERA DE UN COMPAS, CONSIDEREMOS SOBRE ESTA SEMI-RECTA, b SEGMENTOS CONSECUTIVOS IGUALES, TALES QUE, EL ORIGEN DEL PRIMERO DE ELLOS SEA O Y QUE SU EXTREMO COINCIDA CON EL ORIGEN DEL SEGUNDO. Y ASI SUCESIVAMENTE, CON LA CONDICION GENERAL QUE EL ORIGEN DE CUALQUIER DE ELLOS, COINCIDA CON EL EXTREMO DEL SEGMENTO INMEDIATO ANTERIOR A EL. DE ESTE MODO, SE OBTIENEN LOS PUNTOS DE DIVISION: B_1 , B_2 , B_3 , ... , B_b

TRACEMOS EL SEGMENTO $\overline{B_bI}$ Y TRACEMOS TAMBIEN, PARALELAS A $\overline{B_bI}$ POR CADA UNO DE LOS PUNTOS: B_1 , B_2 , B_3 , ... , B_{b-1} . ESTAS PARALELAS, CORTAN

AL SEGMENTO $\overrightarrow{OI}$ EN LOS PUNTOS: A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_{b-1} .

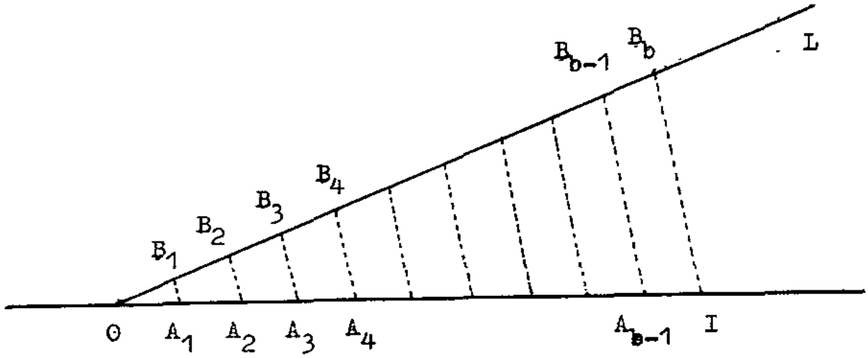

FIG. II-1

ASEGURAMOS QUE LOS SEGMENTOS:

$\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ... , $\overline{A_{b-1}I}$. SON DE IGUAL LONGITUD. PARA HACER VER ESTO (FIG. II-2), TRACEMOS PARALELAS A $\overrightarrow{OI}$ POR CADA UNO DE LOS PUNTOS: B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , ... , B_{b-1} , LAS CUALES CORTAN A LAS PARALELAS ANTES TRAZADAS (LAS PARALELAS A $\overline{B_bI}$) EN LOS PUNTOS: C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , ... , C_{b-1} FORMANDOSE EL SIGUIENTE CONJUNTO DE TRIANGULOS:

$\triangle OA_1B_1$, $\triangle B_1C_1B_2$, $\triangle B_2C_2B_3$, ... , $\triangle B_{b-1}C_{b-1}B_b$.

AHORA BIEN, SI TOMAMOS DOS CUALESQUIER DE ELLOS (POR EJEMPLO: $\triangle B_1C_1B_2$ Y $\triangle B_2C_2B_3$), OBSERVAMOS QUE ESTOS TRIANGULOS SON IGUALES, YA QUE, POR CONSTRUCCION, TIENEN UN LADO IGUAL ($\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3}$) Y LOS ANGULOS ADYACENTES A ESTOS, SON RESPECTIVAMENTE IGUALES ($\measuredangle C_1B_1B_2 = \measuredangle C_2B_2B_3$ Y TAMBIEN $\measuredangle B_1B_2C_1 = \measuredangle B_2B_3C_2$).

ESTO ULTIMO SE DEBE A QUE LOS ANGULOS: ($\measuredangle C_1B_1B_2$, $\measuredangle C_2B_2B_3$) Y ADEMAS ($\measuredangle B_1B_2C_1$, $\measuredangle B_2B_3C_2$) CONSTITUYEN PAREJAS DE ANGULOS CORRESPONDIENTES, QUE SE FORMAN CUANDO LAS PARALELAS A $\overline{OI}$ Y LAS PARALELAS A $\overline{B_bI}$ SON CORTADAS POR LA MISMA TRANSVERSAL $\overline{OL}$.

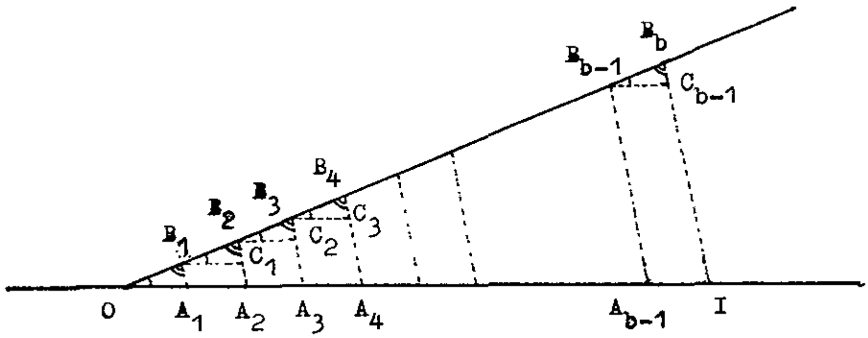

FIG. II-2

PUESTO QUE, LOS TRIANGULOS $\triangle B_1C_1B_2$; $\triangle B_2C_2B_3$ SON IGUALES, ENTONCES SE TIENE QUE: $\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$

Y COMO: $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1C_1}$; $\overline{A_2A_3} = \overline{B_2C_2}$ (YA QUE, SON SEGMENTOS PARALELOS COMPRENDIDOS ENTRE SEGMENTOS PARALELOS).

POR LO TANTO: $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$.

HACIENDO LO MISMO PARA TODA OTRA PAREJA EN ESTE CONJUNTO DE TRIANGULOS, SE OBTENDRA:

$\overline{OA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \cdots\cdots = \overline{A_{b-1}I}$.

Y EN CONSECUENCIA: $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2A_3} = \cdots\cdots = \overrightarrow{A_{b-1}I}$

POR ULTIMO, SI A PARTIR DE O, SUMAMOS a VECES CUALQUIER SEGMENTO DE ESTOS, DIREMOS QUE EL SEGMENTO SUMA OBTENIDO, REPRESENTA AL NUMERO RACIONAL $\frac{a}{b}$ Y QUE EL EXTREMO DE TAL SEGMENTO SUMA, ES EL PUNTO ASOCIADO AL RACIONAL $\frac{a}{b}$.

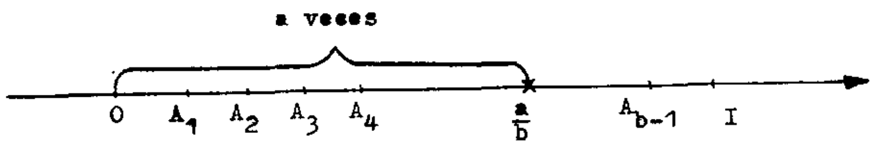

FIG. II-3

AHORA BIEN, SI A_1 ES EL PUNTO ASOCIADO AL RACIONAL POSITIVO $\frac{a_1}{b}$ Y A_2 EL PUNTO ASOCIADO AL RACIONAL POSITIVO $\frac{a_2}{b}$ (CON b POSITIVO), ES CLARO QUE SI $a_1 < a_2$, ENTONCES $A_1 < A_2$. PUESTO QUE, PARA EL PUNTO A_2 HAY NECESIDAD DE CONSIDERAR MAYOR CANTIDAD DE SEGMENTOS QUE PARA A_1 . EN GENERAL, SIENDO: $\frac{a_1}{b}$, $\frac{a_2}{b}$ CUALQUIER PAREJA DE NUMEROS RACIONALES TAL QUE $\frac{a_1}{b} < \frac{a_2}{b}$, SE OBSERVARA QUE EL PUNTO A_2 ASOCIADO A $\frac{a_2}{b}$, SE ENCONTRARA EN EL EJE, SITUADO MAS A LA DERECHA QUE EL PUNTO A_1 ASOCIADO A $\frac{a_1}{b}$ Y POR TAL MOTIVO, $A_1 < A_2$.

EN EL CASO QUE EL NUMERO RACIONAL ESTUVIERA EXPRESADO EN NOTACION DECIMAL, CON UNA TRANSFORMACION A LA FORMA DE DIVISION ENTRE DOS ENTEROS, EL PROBLEMA DE ASOCIARLE UN PUNTO ESTARIA RESUELTO. PARA HACER TAL TRANSFORMACION, DE LAS SIGUIENTES MANERAS PODEMOS PROCEDER:

1). SI EL NUMERO RACIONAL EN SU EXPRESION DECIMAL, ADMITE PERIODO IGUAL A CERO, ES DECIR, SI A PARTIR DE DETERMINADO INDICE k, TODOS LOS DIGITOS DE SU FRACCION DECIMAL SON CEROS, SE CONVIENE EN EXPRESAR AL DECIMAL HASTA EL INDICE k-1. EJEMPLO: 4.697000---- = 4.697, ESTE NUMERO PUEDE EXPRESARSE COMO UNA DIVISION EN LA CUAL, SU DENOMINADOR SEA UNA POTENCIA DE 10. ES DECIR: $4.697 = \frac{4697}{1000}$, DE IGUAL MODO: $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

2). EN EL CASO QUE EL RACIONAL EN SU EXPRESION DECIMAL ADMITA PERIODO DISTINTO DE CERO, EL PROCEDIMIENTO A SEGUIR SERA ASI:

i). LLAMANDO r A TAL NUMERO RACIONAL, SE RECORRERA EL PINTO DECIMAL, HASTA DONDE TERMINE EL PRIMER PERIODO. ESTO SE LOGRA, MULTIPLICANDO POR UNA POTENCIA DE 10 ESPECIFICA (CUYO EXPONENTE SERA IGUAL AL NUMERO DE CIFRAS QUE HABRA DE RECORRERSE EL PUNTO DECIMAL), POR TAL MOTIVO, LO QUE OBTENEMOS, ES DICHA POTENCIA DE 10 MULTIPLICADA POR EL MENCIONADO r.

ii). SE MULTIPLICA EL NUMERO RACIONAL r POR OTRA POTENCIA DE 10, DE TAL MANERA QUE AL HACERLO, EL PUNTO DECIMAL SE RECORRA HASTA DONDE COMIENCE EL MISMO PRIMER PERIODO.

iii). SE RESTAN MIEMBRO A MIEMBRO LAS EXPRESIONES OBTENIDAS.

iv). SE DESPEJA r, OBTENIENDOSE ASI EL RACIONAL BUSCADO, EL CUAL YA SE ENCUENTRA EXPRESADO COMO DIVISION ENTRE DOS NUMEROS ENTEROS.

EJEMPLO 1). EXPRESAR EN FORMA DE DIVISION ENTRE DOS ENTEROS EL RACIONAL $0.25\overline{6} = 2.56666----$

i). LLAMANDO: $0.256666---- = r$ . . . . (I)

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 1000 ($= 10^3$), SE TIENE:

$256.666---- = 1000r$ . . . . (II)

ii). DE MANERA ANALOGA, MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 100 ($= 10^2$), SE TENDRA:

$25.666---- = 100r$ . . . . (III)

iii). RESTANDO MIEMBRO A MIEMBRO (III) DE (II):

$$\begin{array}{rcr} 256.666---- & = & 1000r \\ -\ 25.666---- & =- & 100r \\ \hline 231.000---- & = & 900r \end{array}$$

iv). PUESTO QUE: $231.000---- = 231$

POR LO TANTO, DESPEJANDO r DE LA EXPRESION $231 = 900r$, SE OBTENDRA:

$$r = \frac{231}{900}$$

EJEMPLO 2). EXPRESAR EN FORMA DE DIVISION ENTRE DOS NUMEROS ENTEROS EL RACIONAL: $23.5\overline{47} = 23.547474747----$

i). LLAMANDO: $23.547474747---- = r$ . . . . (I)

MULTIPLICANDO PRIMERAMENTE AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 1000 ($= 10^3$), SE TIENE:

$23547.474747---- = 1000r$ . . . . (II)

ii). MULTIPLICANDO AHORA AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 10 ($= 10^1$), SE TEDRA:

$235.474747---- = 10r$ . . . . (III)

iii). RESTANDO MIEMBRO A MIEMBRO (III) DE (II):

$$\begin{array}{rcr} 23547.474747\text{----} & = & 1000r \\ -\ \ 235.474747\text{----} & = & -\ \ 10r \\ \hline 23312.000000\text{----} & = & 990r \end{array}$$

PUESTO QUE: 23312.0000---- = 23312

POR LO TANTO, DESPEJANDO r DELA EXPRESION 23312 = 990r, SE OBTENDRA:

$r = \frac{23312}{990}$

EJEMPLO 3). EXPRESAR EN FORMA DE DIVISION ENTRE ENTEROS EL RACIONAL:

$6.\overline{28} = 6.28282828\text{----}$;

i). LLAMANDO: 6.28282828----- = r . . . . (I)

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 100 (= 10^2), SE TIENE:

628.282828---- = 100r . . . . (II)

ii). AHORA BIEN, MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 1 (= 10^0), SE TENDRA:

6.282828---- = r . . . . (III)

iii). RESTANDO MIEMBRO A MIEMBRO (III) DE (II):

$$\begin{array}{rcr} 628.282828\ \text{----} & = & 100r \\ -\ \ 6.282828\ \text{----} & = & -\ \ r \\ \hline 622.000000\ \text{----} & = & 99r \end{array}$$

iv). PUESTO QUE: 622.000000 ---- = 622

POR LO TANTO, DESPEJANDO r DE LA EXPRESION 622 = 99r, SE OBTENDRA:

$r = \frac{622}{99}$

CON EL AFAN DE COMPROBACION, EFECTUEMOS LAS DIVISIONES CORRESPONDIENTES A LOS RESULTADOS OBTENIDOS:

0.2566----
900 ⟌ 231.0000----
51 00
6 000
6000

23.54747---
990 ⟌ 23312.0000 ---
3512
542 0
47 00
7 400
4700
7400
4700

6.2828---
99 ⟌ 622.0000---
28 0
8 20
280
820

ESTO MUESTRA QUE LOS RESULTADOS ANTERIORMENTE OBTENIDOS SON CORRECTOS.

CABE OBSERVAR, QUE ESTE PROCEDIMIENTO TAMBIEN ES APLICABLE A LOS DECIMALES CUYOS PERIODOS SON IGUALES A CERO, CON LO CUAL, SE LOGRA UNA GENERALIZACION DE LA VALIDEZ DEL METODO HACIA CUALQUIER DECIMAL PERIODICO, COMO SE **OBSERVARA** EN EL SIGUIENTE EJEMPLO.

COMO SE SABE, EL NUMERO DECIMAL:

$4.76\overline{0} = 4.760000---- = 4.76 = \frac{476}{100} = \frac{119}{25}$

PUES BIEN, APLICANDO EL PROCEDIMIENTO ANTES DESCRITO, SE TIENE QUE:

$4.76 = 4.760000----$

i). LLAMANDO: $4.760000---- = r$ . . . . (I)

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 1000 ($= 10^3$), SE TIENE:

$4760.000---- = 1000r$ . . . . (II)

ii). DE MANERA ANALOGA, MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 100 ($=10^2$), SE TENDRA:

$476.000---- = 100r$ . . . . (III)

iii). RESTANDO MIEMBRO A MIEMBRO (III) DE (II):

$$\begin{array}{rcr} 4760.000---- & = & 1000r \\ -\ 476.000---- & = & -\ 100r \\ \hline 4284.000---- & = & 900r \end{array}$$

iv). PUESTO QUE: $4284.000---- = 4284$

POR LO TANTO, DESPEJANDO r DE LA EXPRESION $4284 = 900r$, SE OBTENDRA:

$r = \frac{4284}{900} = \frac{119}{25}$. EL CUAL COINCIDE CON EL RESULTADO OBTENIDO ANTERIORMENTE.

A CONTINUACION, CONSIDEREMOS EL CASO EN QUE EL DECIMAL TENGA COMO PERIODO AL NUMERO 9, COMO VEREMOS EN EL SIGUIENTE EJERCICIO.

EJERCICIO. EXPRESAR EN FORMA DE DIVISION ENTRE DOS NUMEROS ENTEROS LOS DECIMALES: $0.\overline{9}$, $2.34\overline{9}$

APLICANDO EL MISMO PROCEDIMIENTO.

PARA: $0.\overline{9} = 0.9999----$

i). LLAMANDO: $0.9999---- = r$ . . . . (I)

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 10 ($= 10^1$), SE TIENE:

$9.9999---- = 10r$ . . . . (II)

ii). AHORA BIEN, MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 1 ($= 10^0$), SE TENDRA:

$0.9999---- = r$ . . . . (III)

iii). RESTANDO MIEMBRO A MIEMBRO (III) DE (II):

$$\begin{array}{rcr} 9.999---- & = & 10r \\ -0.999---- & =- & r \\ \hline 9.000---- & = & 9r \end{array}$$

iv). PUESTO QUE: $9.000---- = 9$

SE TENDRA: $9 = 9r$

DESPEJANDO r, SE OBTENDRA:

$$r = \frac{9}{9}$$

POR LO TANTO:

$r = 1$

ANALOGAMENTE PARA $2.34\overline{9} = 2.349999----$

LLAMEMOS: $r = 2.349999----$ (I)

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 1000 ($= 10^3$), SE TENDRA:

$1000r = 2349.999----$

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE (I) POR 100 ($= 10^2$), SE TENDRA:

$100r = 234.999----$

RESTANDO MIEMBRO A MIEMBRO LAS DOS ULTIMAS IGUALDADES OBTENIDAS:

$$\begin{array}{rcr} 1000r & = & 2349.999---- \\ -\ 100r & = & -\ 234.999---- \\ \hline 900r & = & 2115.000---- \end{array}$$

LA CUAL, NOS CONDUCE A LA IGUALDAD: $900r = 2115$, YA QUE $2115.000---- = 2115$.

DESPEJANDO, SE OBTIENE: $r = \frac{2115}{900}$

SIMPLIFICANDO: $r = \frac{47}{20}$

EL CUAL EXPRESADO EN NOTACION DECIMAL:

```
      2.35000----
20 |47.00000----
    07 0
     1 00
       000
        000
         000
          000
           ---
            ---
             ---
```

ANALIZANDO LOS RESULTADOS OBTENIDOS,SE OBSERVA QUE:

$0.\overline{9} = 0.999---- = \frac{9}{9} = 1 = 1.000----$

$2.34\overline{9} = 2.34999---- = \frac{2115}{900} = 2.35000----$

LUEGO:

$0.999---- = 1.000----$

$2.34999---- = 2.35000----$

LO CUAL INDICA QUE SI UN NUMERO DECIMAL TIENE POR PERIODO AL NUMERO 9, TAL DECIMAL SE IDENTIFICARA CON EL DECIMAL QUE SE OBTIENE AUMENTANDO UNO AL DIGITO INMEDIATO ANTERIOR AL PRIMER PERIODO (AL ULTIMO DIGITO DIFERENTE DE 9 QUE SE ENCUENTRA AL DIRIGIRSE DE IZQUIERDA A DERECHA) Y SUSTITUYENDO TODA LA "COLA DE NUEVES" POR UNA "COLA DE CEROS". ACEPTANDO POR TAL MOTIVO A $0.9999---- = 0.\overline{9}$ COMO OTRA EXPRESION EQUIVALENTE DEL NUMERO $1.0000---- = 1$ Y AL NUMERO $2.349999---- = 2.34\overline{9}$ COMO OTRA EXPRESION EQUIVALENTE DE 2.35, ES DECIR:

$0.\overline{9} = 1$ Y $2.34\overline{9} = 2.35$

ESTO SE HACE VER, TAMBIEN DEL SIGUIENTE MODO:

COMO SABEMOS, TODO NUMERO REAL SE EXPRESA EN NOTACION DECIMAL ASI:

$\pm N.a_1a_2a_3---- a_n----$

EN DONDE N, ES UN NUMERO ENTERO NO-NEGATIVO Y $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ SON DIGITOS COMPRENDIDOS ENTRE CERO Y 9.

LA NOTACION $N.a_1a_2a_3 ---- a_n ---$ ES EN SI, UNA ABREVIATURA DE LA SUMA INFINITA, LA CUAL TIENE LA FORMA:

$$N + a_1(10^{-1}) + a_2(10^{-2}) + a_3(10^{-3}) + ---- + a_n(10^{-n}) + ----$$

SI CONSIDERAMOS:

$$N = 0 ;\ a = a_1 = a_2 = a_3 = ---- = a_n = --------.$$

OBTENDREMOS, LA SUMA DE LOS TERMINOS DE LA PROGRESION GEOMETRICA INFINITA SIGUIENTE:

$a(10^{-1}) + a(10^{-2}) + a(10^{-3}) + --- + a(10^{-n}) + ---$ CUYA RAZON ES $r = \frac{1}{10}$

APLICANDO LA FORMULA QUE A CONTINUACION ENUNCIAREMOS Y QUE REPRESENTA A LA SUMA DE LOS PRIMEROS n TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

COMO: $a_1 = a(10^{-1})$; $r = \frac{1}{10}$ SE OBTIENE:

$$S_n = \frac{a(10^{-1})(1 - (\frac{1}{10})^n)}{1 - \frac{1}{10}}$$

SI HACEMOS QUE n SEA TAN GRANDE COMO SE DESEE (NOTACION: $n \to \infty$), ENTONCES $(\frac{1}{10})^n$ TIENDE A VALER CERO Y POR LO TANTO TENDREMOS:

$$a(10)^{-1} + a(10)^{-2} + a(10)^{-3} + --- + a(10)^{-n} + --- = \underset{n \to \infty}{S_n} = \frac{a(10^{-1})(1 - 0)}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{a(\frac{1}{10})(1)}{\frac{9}{10}} = \frac{a(\frac{1}{10})}{\frac{9}{10}} = \frac{a(10)}{90} = \frac{a}{9}$$ EN CONCLUSION:

$$a(10^{-1}) + a(10^{-2}) + a(10^{-3}) + --- + a(10^{-n}) + --- = \frac{a}{9}$$

AHORA BIEN, SI a = 9, SE OBSERVARA LO SIGUIENTE:

$$0.9999---- = 9(10^{-1}) + 9(10^{-2}) + 9(10^{-3}) + --- + 9(10^{-n}) + --- = \frac{9}{9} =$$

$$= 1 = 1.0000----$$

ES DECIR: $0.999--- = 1.000---$

Y GENERALIZANDO, SE TENDRA TAMBIEN:

2.349999---- = 2.350000---- = 2.35

ASI PUES, REDEFINIENDO: EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES, ESTARA FORMADO POR LA UNION DE TODOS LOS NUMEROS QUE NO ADMITEN PERIODO EN SU NOTACION DECIMAL (NUMEROS IRRACIONALES), CON TODOS LOS NUMEROS QUE SI ADMITEN PERIODO EN SU NOTACION DECIMAL (NUMEROS RACIONALES),SUSTITUYENDO AQUELLAS EXPRESIONES DECIMALES QUE TIENEN COLAS INFINITAS DE NUEVES, POR SUS CORRESPONDIENTES EXPRESIONES DECIMALES EQUIVALENTES, LAS CUALES TIENEN COLAS INFINITAS DE CEROS.

$$\text{NUMEROS REALES}\begin{cases}\text{NUMEROS RACIONALES (SI SDMITEN PERIODO)}\\ \text{NUMEROS IRRACIONALES (NO ADMITEN PERIODO)}\end{cases}$$

NOTA. DEBIDO A QUE, UN NUMERO DECIMAL CON PERIODO DISTINTO DE CERO,PRESENTA DIFICULTAD AL REPRESENTARLO EN EL EJE DE LAS ABSCISAS Y ASIMISMO EN SU MANEJO OPERACIONAL, OPTAREMOS POR EXPRESARLO EN LA FORMA $\frac{x}{y}$, SIENDO x, y NUMEROS ENTEROS, TAL FORMA SE LOGRARA CON EL PROCEDIMIENTO ANTES DESCRITO Y CON ESTO, SALVAREMOS LAS DIFICULTADES YA MENCIONADAS.

CABE OBSERVAR QUE ESTE PROCEDIMIENTO, SE APLICA A TODOS LOS NUMEROS DECIMALES PERIODICOS, SIN EMBARGO, SI PENSAMOS EN LOS NUMEROS QUE NO ADMITEN PERIODO ALGUNO (NUMEROS IRRACIONALES), TAL PROCESO FALLARIA POR NO PODER CONSIDERARSE A LA TOTALIDAD DE LOS DIGITOS EN LA FRACCION DECIMAL CORRESPONDIENTE.

PARA LOGRAR ASOCIARLES PUNTOS EN EL EJE DE LAS ABSCISAS A TALES EXPRESIONES DECIMALES, SE REQUERIRAN LOS SIGUIENTES CONCEPTOS: EL POSTULADO DE ARQUIMEDES, COTAS Y FRONTERAS DE UN CONJUNTO Y ADEMAS, EL AXIOMA DE CONTINUIDAD, LOS CUALES SE ENUNCIARAN A CONTINUACION.

POSTULADO DE ARQUIMEDES.

SI F ES CUALQUIER PUNTO FIJO EN EL SEMI-EJE POSITIVO DE LAS ABSCISAS. PARA CADA PUNTO P DEL MISMO SEMI-EJE, EXISTE UN NUMERO NATURAL n TAL QUE SE CUMPLE LO SIGUIENTE:

$P < F_n$

EN DONDE F_n ES EL EXTREMO DEL SEGMENTO OBTENIDO AL SUMAR n VECES $\overrightarrow{OF}$, A PARTIR DEL ORIGEN. ES DECIR: $|\overrightarrow{OP}| < |n\overrightarrow{OF}|$.

FIG. II-4

SIENDO: $\overrightarrow{OF_1} = \overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{F_2F_3} = \overrightarrow{F_3F_4} = ---- = \overrightarrow{F_{n-1}F_n} = \overrightarrow{OF}$.

Y: $n\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OF_1} + \overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_2F_3} + \overrightarrow{F_3F_4} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \overrightarrow{F_{n-1}F_n}$.

EN OTRAS PALABRAS, ESTO SIGNIFICA QUE CUALQUIER LONGITUD, ES SUPERADA POR UN DETERMINADO MULTIPLO DE UNA LONGITUD DADA.

EN ALGUNAS OCASIONES, SE CONSIDERA I (EXTREMO DEL SEGMENTO UNIDAD) COMO PUNTO FIJO. QUEDANDO LA CONCLUSION ASI: $P < I_n$.

EN DONDE I_n ES EL EXTREMO DEL SEGMENTO $n\overrightarrow{OI}$.

UNA CONSECUENCIA IMPORTANTE DEL POSTULADO DE ARQUIMEDES, ES LA SIGUIENTE:

SI F ES CUALQUIER PUNTO FIJO EN EL SEMI-EJE POSITIVO DE LAS ABSCISAS. PARA CADA PUNTO P DEL MISMO SEMI-EJE, SE CUMPLE ESTO: SI EL NUMERO NATURAL n ES SUFICIENTEMENTE GRANDE, EXISTE UN PUNTO Q PERTENECIENTE AL SEGMENTO $\overline{OF}$, TAL QUE $P = Q_n$, EN DONDE Q_n ES EL EXTREMO DEL SEGMENTO OBTENIDO AL SUMAR n VECES $\overrightarrow{OQ}$, A PARTIR DEL ORIGEN O. ES DECIR: $|\overrightarrow{OP}| = |n\overrightarrow{OQ}|$.

FIG. II-5

SIENDO: $\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_2Q_3} = \overrightarrow{Q_3Q_4} = ---- = \overrightarrow{Q_{n-1}Q_n} = \overrightarrow{OQ}$.

Y: $n\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{Q_2Q_3} + \overrightarrow{Q_3Q_4} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \overrightarrow{Q_{n-1}Q_n}$.

COTAS. SEA Ø UN CONJUNTO DE PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS.

DEFINICION II-3. SE DIRA QUE UN PUNTO C_s DEL EJE DE LAS ABSCISAS, ES COTA SUPERIOR DE Ø, SI: $X \leqslant C_s$ ES VALIDA PARA TODOS LOS PUNTOS X QUE PERTENECEN AL CONJUNTO Ø. ESTO SE DENOTA ASI: $Ø \leqslant C_s$.

EJEMPLOS.

1). CUALQUIER PUNTO DEL SEMI-EJE POSITIVO DE LAS ABSCISAS, ES COTA SUPERIOR DEL SEMI-EJE NEGATIVO.

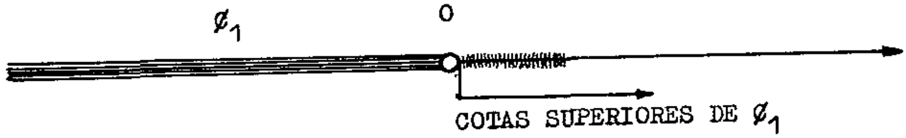

FIG. II-6

2). EL ORIGEN O, ES COTA SUPERIOR DEL SEMI-EJE NEGATIVO.

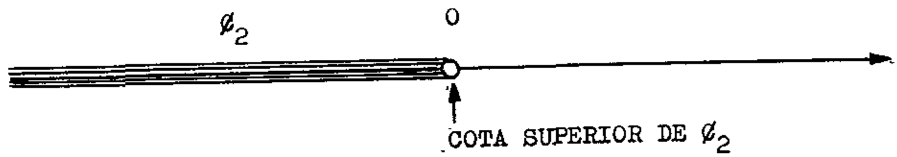

FIG. II-7

3). EL ORIGEN O, ES COTA SUPERIOR DEL CONJUNTO DE TODOS LOS PUNTOS X DEL EJE DE LAS ABSCISAS QUE CUMPLEN: $X \leqslant 0$.

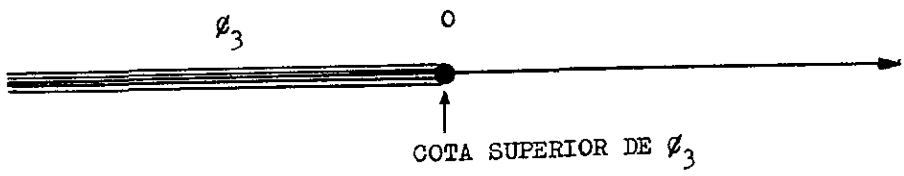

FIG. II-8

4). TODO PUNTO X DEL EJE DE LAS ABSCISAS QUE CUMPLE: $X \geqslant I$ (SIENDO I,EL EXTREMO DEL SEGMENTO UNIDAD), ES COTA SUPERIOR DEL CONJUNTO DE LOS PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS QUE SATISFACEN DE MANERA CONJUNTA: $X \geqslant 0$ Y $X \leqslant I$

(ESTO SE DENOTA ASI: $0 \leqslant X \leqslant I$).

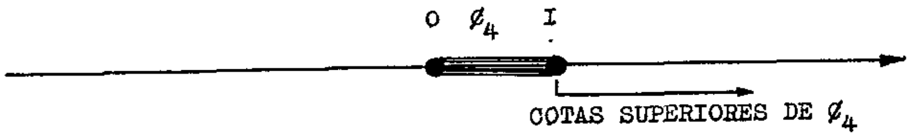

FIG. II-9

NOTA. EL SEMI-EJE POSITIVO, NO TIENE COTA SUPERIOR ALGUNA.

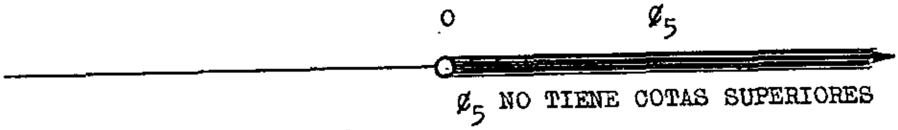

FIG. II-10

SEA ϕ UN CONJUNTO DE PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS.

DEFINICION II-4. SE DICE QUE F_s ES FRONTERA SUPERIOR DEL CONJUNTO ϕ, SI TIENE LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS:

i). F_s ES COTA SUPERIOR DE ϕ.

ii). F_s ES LA MAS PEQUEÑA DE LAS COTAS SUPERIORES ($F_s \leqslant C_s$ EN DONDE C_s ES UNA COTA SUPERIOR CUALQUIERA DE ϕ).

COMENTARIO. CUANDO ϕ ES UN CONJUNTO DE NUMEROS REALES, SE ACOSTUMBRA LLAMARLE SUPREMO DE ϕ A LA FRONTERA SUPERIOR DE ϕ Y SE DENOTA: SUP ϕ.

DE LA DEFINICION ANTERIOR, SE DESPRENDE QUE UN CONJUNTO DEL EJE DE LAS ABSCISAS, NO PUEDE TENER MAS DE UNA FRONTERA SUPERIOR.

DEMOSTRACION. SUPONGAMOS QUE: F_{s_1} Y F_{s_2} SON DOS DIFERENTES FRONTERAS SUPERIORES DE UN MISMO CONJUNTO DE ABSCISAS.

DE ACUERDO CON EL INCISO i) DE LA DEFINICION, AMBAS: F_{s_1} Y F_{s_2} DEBEN SER COTAS SUPERIORES DEL CONJUNTO.

PUESTO QUE, F_{s_1} ES UNA FRONTERA SUPERIOR DEL CONJUNTO Y F_{s_2} ES COTA SUPERIOR DEL MISMO CONJUNTO, ENTONCES DE ACUERDO CON EL INCISO ii), SE TIENE: $F_{s_1} \leqslant F_{s_2}$.

ANALOGAMENTE, PUESTO QUE F_{s_2} ES TAMBIEN UNA FRONTERA SUPERIOR DEL CONJUNTO Y F_{s_1} ES COTA SUPERIOR DEL MISMO CONJUNTO, ENTONCES POR ii), SE TIENE QUE: $F_{s_2} \leqslant F_{s_1}$.

APOYANDONOS EN LOS DOS RESULTADOS ANTES OBTENIDOS, SE CONCLUYE: $F_{s_1} = F_{s_2}$. POR LO TANTO, SE HABLARA DE LA FRONTERA SUPERIOR DE UN CONJUNTO DE ABSCISAS.

NOTESE QUE LA FRONTERA SUPERIOR DE UN CONJUNTO DE ABSCISAS, NO NECESARIAMENTE PERTENECE A DICHO CONJUNTO, AUNQUE EN CIERTOS CASOS PUEDE SER UN ELEMENTO DE EL, COMO VEREMOS EN LOS EJEMPLOS:

1). EN EL CONJUNTO C_1 DE TODOS LOS PUNTOS X DEL EJE DE LAS ABSCISAS TALES QUE: $X \leqslant 0$. (0 ES LA FRONTERA SUPERIOR DE C_1 Y SI PERTENECE A C_1).

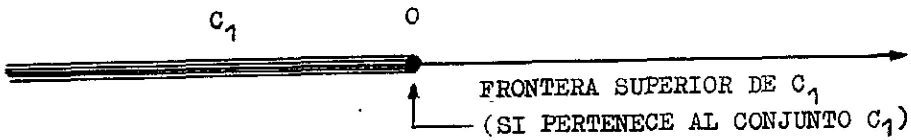

FIG. II-11

2). EN EL CONJUNTO C_2 DE TODOS LOS PUNTOS X DEL EJE DE LAS ABSCISAS TALES QUE CUMPLEN LA CONDICION: $0 < X < I$, COMO VEMOS, EL EXTREMO I, ES LA FRONTERA SUPERIOR DE C_2 (I,NO PERTENECE AL CONJUNTO C_2).

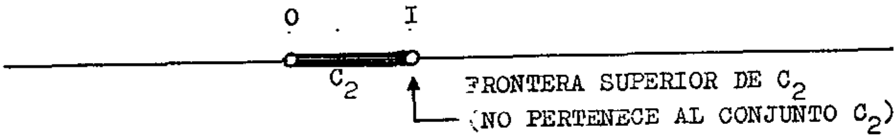

FIG. II-12

3). EN EL CONJUNTO C_3 DE TODOS LOS PUNTOS X DEL EJE DE LAS ABSCISAS QUE SATISFACEN LA CONDICION: $0 \leqslant X \leqslant I$, EL EXTREMO I, ES LA FRONTERA SUPERIOR DE C_3 (I, PERTENECE AL CONJUNTO C_3).

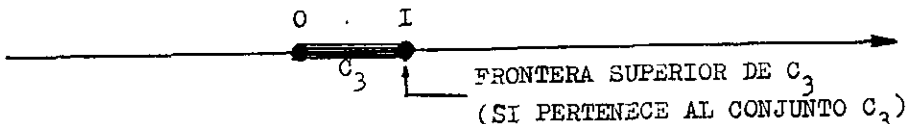

FIG. II-13

SIMILARMENTE, DEFINIREMOS LOS CONCEPTOS; COTA INFERIOR Y FRONTERA INFERIOR DEL SIGUIENTE MODO:

SI $\emptyset$ ES UN CONJUNTO DE PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS.

DEFINICION II-5. LLAMASE COTA INFERIOR DEL CONJUNTO $\emptyset$, A UN PUNTO C_i DEL MISMO EJE, QUE SATISFACE $C_i \leq X$, PARA TODOS LOS PUNTOS X PERTENECIENTES A $\emptyset$. ESTO SE DENOTA: $\emptyset \geq C_i$.

DEFINICION II-6. SE LE LLAMA FRONTERA INFERIOR DEL CONJUNTO $\emptyset$, A UN PUNTO F_i QUE CUMPLE LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

i). F_i ES COTA INFERIOR DE $\emptyset$.

ii). F_i ES LA MAS GRANDE DE LAS COTAS INFERIORES DE $\emptyset$. ($F_i \geq C_i$, EN DONDE C_i ES CUALQUIER COTA INFERIOR DE $\emptyset$).

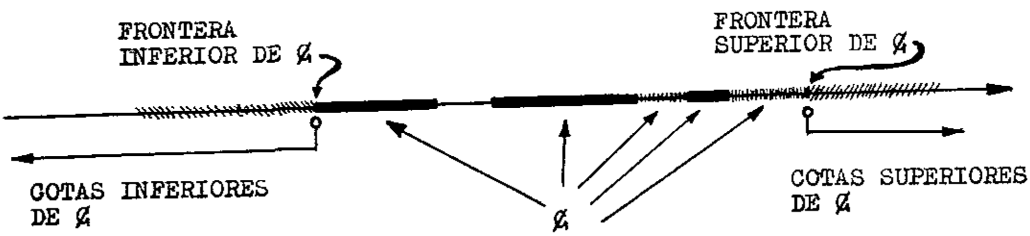

FIG. II-14

EN GENERAL, DIREMOS QUE UN CONJUNTO $\emptyset$ DE PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS, ESTA ACOTADO, SI LO ESTA SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE, ES DECIR, SI EXISTEN PUNTOS C_s Y C_i TALES QUE: $C_i \leq X \leq C_s$ PARA TODOS LOS PUNTOS X QUE PERTENECEN A $\emptyset$.

AXIOMA DE CONTINUIDAD. TODO CONJUNTO NO-VACIO DE PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS, QUE ESTE ACOTADO SUPERIORMENTE, TIENE FRONTERA SUPERIOR.

COMENTARIO. CUANDO SE TRATA DE UN CONJUNTO DE NUMEROS REALES, AL AXIOMA DE CONTINUIDAD SE LE CONOCE COMUNMENTE COMO EL PRINCIPIO DEL SUPREMO.

COMO UNA CONSECUENCIA DEL AXIOMA DE CONTINUIDAD, SE PUEDE ENUNCIAR LO

SIGUIENTE: TODO CONJUNTO NO-VACIO DE PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS QUE ESTE ACOTADO INFERIORMENTE, TIENE FRONTERA INFERIOR.

COMENTARIO. SI $\emptyset$ ES UN CONJUNTO DE NUMEROS REALES, A LA FRONTERA INFERIOR DE $\emptyset$ SE LE LLAMA, INFIMO DE $\emptyset$ Y SE LE DENOTA: INF $\emptyset$.

CON TODO LO VISTO ANTERIORMENTE, YA ESTAMOS EN CONDICIONES DE PODER ASOCIAR PUNTOS A NUMEROS REALES CUALESQUIER Y PARA ELLO, PROCEDEREMOS ASI:

TOMEMOS UN NUMERO REAL POSITIVO EXPRESADO EN NOTACION DECIMAL, DIGAMOS:

$No.n_1n_2n_3$ ---- n_k ---- EN DONDE:

$No,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots\ n_k,\ \ldots$ SON DIGITOS, ES DECIR, SON ENTEROS COMPRENDIDOS ENTRE 0 Y 9.

PARA CADA ENTERO NO-NEGATIVO k, CONSIDEREMOS EL PUNTO P_k DEL EJE DE LAS ABSCISAS ASOCIADO AL DECIMAL $No.n_1n_2n_3$ ---- n_k.

LLAMAREMOS $\emptyset$ A LA COLECCION DE TODOS ESOS PUNTOS P_k, POR LO QUE:

$\emptyset = \left\{Po,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots\ P_k,\ \ldots\right\}$ PARA TODA k.

ES CLARO QUE EL PUNTO ASOCIADO A: No + 1 ES COTA SUPERIOR DE $\emptyset$, POR LO QUE, EL CONJUNTO $\emptyset$ ES ACOTADO SUPERIORMENTE. DE ACUERDO AL AXIOMA DE CONTINUIDAD, $\emptyset$ TIENE FRONTERA SUPERIOR LLAMADA FRONT SUP $\emptyset$.

ES DE OBSERVARSE, QUE MIENTRAS MAS CIFRAS SE CONSIDEREN EN LA FRACCION DECIMAL, MAS NOS APROXIMAREMOS AL NUMERO: $No.n_1n_2n_3$----n_k---- Y ASIMISMO LA SUCESION DE PUNTOS:

$Po,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots\ P_k,\ \ldots$ MAS SE APROXIMARA A: FRONT SUP $\emptyset$.

ASI QUE, AL DECIMAL $No.n_1n_2n_3$----n_k---- SE LE ASOCIARA EL PUNTO: FRONT SUP $\emptyset$.

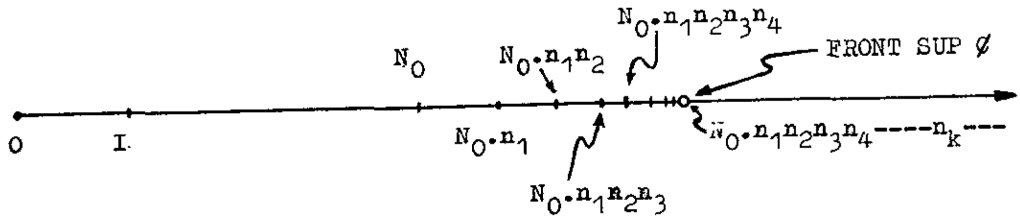

FIG. II-15

NOTA. EN EL CASO QUE EL NUMERO SEA: $-No.n_1n_2n_3$----n_k---- A ESTE LE ASOCIAREMOS EL SIMETRICO RESPECTO AL ORIGEN DEL PUNTO ASOCIADO AL NUMERO $No.n_1n_2n_3$----n_k----

EJEMPLO. ANALICEMOS LOS NUMEROS REALES:

n = 0.999---- (CON COLA INFINITA DE NUEVES)

m = 1.000---- (CON COLA INFINITA DE CEROS)

PARA ESTO, CONSIDEREMOS LAS SIGUIENTES COLECCIONES DE PUNTOS:

$N = \{No, N_1, N_2, N_3, \ldots N_k, \ldots\}$

$M = \{Io, I_1, I_2, I_3, \ldots I_k, \ldots\}$

EN DONDE:

No ES EL PUNTO ASOCIADO A 0.

N_1 " " " " " 0.9 (UNA VEZ)

N_2 " " " " " 0.99 (DOS VECES)

N_3 " " " " " 0.999 (TRES VECES)

- - - - - - ------------------

- - - - - - ------------------

- - - - - - ------------------

- - - - - - ------------------

N_k " " " " " 0.9999----9 (k VECES)

- - - - - - ------------------

- - - - - - ------------------

- - - - - - ------------------

Io ES EL PUNTO ASOCIADO A 1.

I_1 " " " " " 1.0 (UNA VEZ)

I_2 " " " " " 1.00 (DOS VECES)

I_3 " " " " " 1.000 (TRES VECES)

- - - - - - ------------------

- - - - - - ------------------

I_k ES EL PUNTO ASOCIADO A 1.000----0 (k VECES)

\- - - - - - ---------------------

\- - - - - - ---------------------

\- - - - - - ---------------------

OBSERVAMOS QUE EL PUNTO DEL EJE DE LAS ABSCISAS ASOCIADO AL DECIMAL $m = 1.000$---- SERA LA FRONTERA SUPERIOR DE M.

COMO: $1 = 1.0 = 1.00 = 1.000 = \text{----} = 1.000\text{----}0$ (k VECES) = ----=1.000---

ENTONCES: $Io = I_1 = I_2 = I_3 = \text{----} = I_k = \text{----} = I$. SIENDO I, EL EXTREMO DEL SEGMENTO UNIDAD.

POR LO QUE: $M = \{I, I, I, \ldots I, \ldots\} = \{I\}$

LUEGO: FRONT SUP M = FRONT SUP $\{I\}$ = I.

DEMOSTRAREMOS QUE TAMBIEN SE CUMPLE:

FRONT SUP N = I.

NOTAMOS CLARAMENTE QUE I ES COTA SUPERIOR DE N. SOLAMENTE NOS FALTA DEMOSTRAR QUE CUALQUIERA OTRA COTA SUPERIOR DE N, SERA MAYOR QUE I, ES DECIR QUE I ES LA MAS PEQUEÑA DE LAS COTAS SUPERIORES DE N.

PARA ESTO, CONSIDEREMOS CUALQUIER PUNTO ω ANTERIOR A I EN EL EJE DE LAS ABSCISAS Y DEMOSTRAREMOS QUE ω NO PUEDE SER COTA SUPERIOR DE N. PUES SI TOMAMOS $\omega < I$, DIVIDIENDO $\overline{OI}$ EN 10^k SEGMENTOS IGUALES, CON k SUFICIENTEMENTE GRANDE DE TAL MANERA QUE EL ULTIMO DE ESOS SEGMENTOS QUEDE TOTALMENTE CONTENIDO EN $\overline{\omega I}$.

SI LLAMAMOS S AL EXTREMO IZQUIERDO DEL ULTIMO DE ESTOS SEGMENTOS, ENTONCES S TENTDRA LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS:

1a). S ES EL PUNTO ASOCIADO AL DECIMAL 0.9999----9 (k VECES). LO CUAL NOS ASEGURA QUE S PERTENECE A N.

2a). $\omega < S$. ESTO NOS INDICA QUE ω NO ES COTA SUPERIOR DE N.

POR LO QUE: FRONT SUP N = I. L.Q.Q.D.

DE LO ANTERIOR SE TIENE QUE: FRONT SUP M = I = FRONT SUP N.

PERO COMO:

FRONT SUP M ES EL PUNTO ASOCIADO A: 1.0000----

Y:

FRONT SUP N ES EL PUNTO ASOCIADO A: 0.9999----

EN CONCLUSION, A LOS NUMEROS REALES 1.0000---- Y 0.9999----, SE LES ASOCIA EL MISMO PUNTO I EN EL EJE DE LAS ABSCISAS. POR LO CUAL, ENTENDEREMOS A 0.9999---- COMO OTRA REPRESENTACION DEL NUMERO 1.0000---- = 1.

EN GENERAL, SE TENDRA A: N.9999---- COMO OTRA REPRESENTACION DEL NUMERO N + 1.

ASI COMO PUDIMOS ASOCIARLE A CADA NUMERO RACIONAL, UN PUNTO EN EL EJE DE LAS ABSCISAS, DE MANERA ANALOGA, EMPLEANDO ARGUMENTOS PURAMENTE GEOMETRICOS LES ASOCIAREMOS PUNTOS EN EL EJE DE LAS ABSCISAS A ALGUNOS NUMEROS IRRACIONALES, POR EJEMPLO, AL NUMERO $\sqrt{2}$. PARA ELLO, PROCEDEREMOS DEL SIGUIENTE MODO:

CONSIDERANDO AL EJE DE LAS ABSCISAS SUMERGIDO EN UN PLANO, PODEMOS CONSTRUIR UN TRIANGULO ISOSCELES, RECTANGULO TAL QUE SUS CATETOS SEAN CONGRUENTES CON EL SEGMENTO UNIDAD Y ADEMAS, QUE SU HIPOTENUSA SE ENCUENTRE SITUADA EN EL EJE DE LAS ABSCISAS DE TAL MANERA QUE UNO DE LOS EXTREMOS DE ELLA COINCIDA CON EL ORIGEN. ESTO, SE LOGRA ASI:

1o). LEVANTEMOS POR EL ORIGEN, UNA RECTA PERPENDICULAR AL EJE DE LAS ABSCISAS.

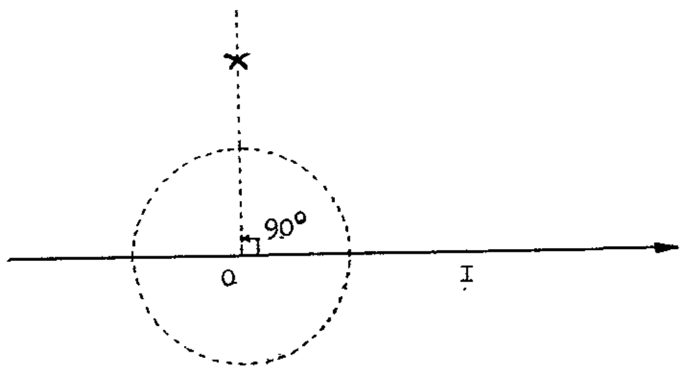

FIG. II-16

2o). TRACEMOS LA BISECTRIZ DEL ANGULO DE 90° MEDIDO DEL SEMI-EJE POSITIVO DE LAS ABSCISAS HACIA LA PERPENDICULAR (ESTA FORMARA CON EL EJE POSITIVO UN ANGULO DE 45°) Y EN LA BISECTRIZ CONSIDERESE UN SEGMENTO $\overline{OP}$ CONGRUENTE CON EL SEGMENTO UNIDAD A PARTIR DEL ORIGEN.

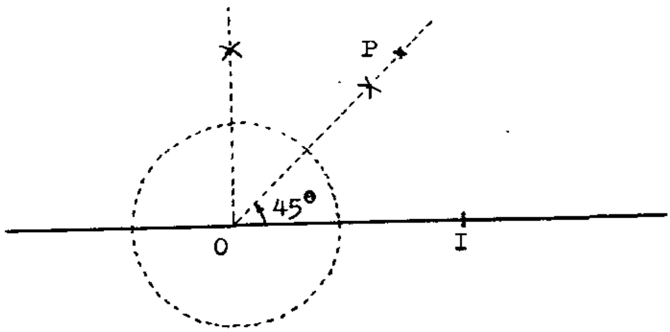

FIG. II-17

3o). CON CENTRO EN EL EXTREMO P, TRACESE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA DE RADIO $|\overrightarrow{OP}|$, EL CUAL CORTA AL EJE DE LAS ABSCISAS EN UN PUNTO Q.

COMO: $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OP}|$, POR SER DOS RADIOS DE LA MISMA CIRCUNFERENCIA, ENTONCES EL TRIANGULO OPQ ES ISOSCELES, POR LO QUE LOS ANGULOS EN LA BASE SON IGUALES E IGUALES A 45° EN CONSECUENCIA, EL ANGULO $\widehat{OPQ}$ ES RECTO, ES DECIR, QUE EL TRIANGULO OPQ ES RECTANGULO.

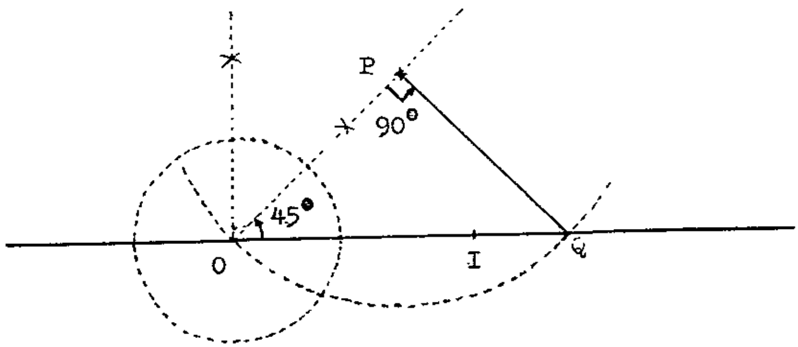

FIG. II-18

YA QUE: $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OI}| = 1.$

POR EL TEOREMA DE PITAGORAS, SE TIENE:

$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ (NUMERO IRRACIONAL)

ASI PUES, MEDIANTE ARGUMENTOS PURAMENTE GEOMETRICOS, SE LOCALIZO EL PUNTO Q (EL CUAL SE ENCUENTRA EN EL EJE DE LAS ABSCISAS), QUE RESULTO SER EL ASOCIADO AL NUMERO IRRACIONAL $+\sqrt{2} = 1.4142135$----

ESTA MANERA DE ASOCIAR PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS A LOS NUMEROS IRRACIONALES (DECIMALES NO PERIODICOS), PUEDE SUSTITUIRSE POR UNA SEMEJANTE A LA UTILIZADA PARA LOS DECIMALES CUYA FRACCION DECIMAL DISTINTA DE CERO SEA FINITA, CON LA UNICA DIFERENCIA, QUE TENDRIA QUE EMPLEARSE UN NUMERO NO-FINITO DE PASOS. NO OBSTANTE, EL POSTULADO DE ARQUIMEDES Y EL AXIOMA DE CONTINUIDAD, ASEGURAN LA EXISTENCIA DE ESTE PUNTO ASOCIADO.

ADEMAS, DESPUES DE UN NUMERO FINITO DE PASOS, SE PUEDE LOGRAR QUE EL PUNTO ASOCIADO SE ENCUENTRE TAN CERCANO COMO SE QUIERA AL PUNTO QUE CORRESPONDE AL NUMERO IRRACIONAL QUE SE TRATE.

INVERSAMENTE, SE CUMPLE TAMBIEN LO SIGUIENTE: A TODO PUNTO DEL EJE DE LAS ABSCISAS, SE LE HACE CORRESPONDER UN NUMERO REAL. ESTE, ES EL QUE LE CORRESPONDE AL MEDIR EL SEGMENTO QUE VA DEL ORIGEN HACIA DICHO PUNTO, CON UNA ESCALA DE UNIDAD $\overrightarrow{OI}$. ESTA IDEA SOMERA, SE LLEVARA A CABO DEL SIGUIENTE MODO:

1o). POR EL POSTULADO DE ARQUIMEDES, EL PUNTO PROPUESTO, SE ENCUENTRA EN UN SEGMENTO $\overrightarrow{I_{n-1} I_n}$, PARA ALGUNA n.

SI EL PUNTO COINCIDE CON UNO DE LOS EXTREMOS DE TAL SEGMENTO, ENTONCES EL NUMERO REAL QUE CORRESPONDE A DICHO EXTREMO, ES EL NUMERO REAL BUSCADO.

AHORA BIEN, SI EL PUNTO ES INTERIOR A ESE SEGMENTO, LA PARTE ENTERA DEL NUMERO REAL CORRESPONDIENTE A ESE PUNTO, SERA IGUAL A LA PARTE ENTERA DEL NUMERO REAL QUE CORRESPONDE AL PUNTO I_{n-1}. PROSIGUIENDO:

2o). DIVIDAMOS AL SEGMENTO $\overrightarrow{I_{n-1} I_n}$ EN 10 PARTES IGUALES. OBSERVEMOS EN CUAL DE ESAS PARTES SE LOCALIZA EL PUNTO EN CUESTION. SI ESE PUNTO COINCIDE CON UNO DE LOS EXTREMOS DE ALGUNA DE ESAS PARTES (LLAMEMOSLA $\overrightarrow{I'_{n-1} I'_n}$), ENTONCES, YA ENCONTRAMOS EL NUMERO REAL BUSCADO, QUE ES EL NUMERO REAL QUE LE CO

RRESPONDE A TAL EXTREMO.

SI EL PUNTO ES INTERIOR A ESA PARTE, ENTONCES LA PRIMERA CIFRA DE LA FRACCION DECIMAL (RECORRIENDO DE IZQUIERDA A DERECHA), SERA IGUAL A LA PRIMERA CIFRA DEL NUMERO REAL QUE CORRESPONDE A: I'_{n-1} . CONTINUANDO:

3o). DIVIDAMOS A LA VEZ, A ESA PARTE EN 10 SEGMENTOS IGUALES E INVESTI GUEMOS, EN CUAL DE ESOS SEGMENTOS ESTA SITUADO EL PUNTO CONSIDERADO. SI TAL PUNTO COINCIDE CON UNO DE LOS EXTREMOS DE ESE SEGMENTO (LLAMEMOSLO $\overrightarrow{I''_{n-1}\, I''_n}$), ENTONCES YA ENCONTRAMOS EL NUMERO REAL BUSCADO, TAL NUMERO REAL, ES EL QUE LE CORRESPONDE A DICHO EXTREMO.

SI EL PUNTO ES INTERIOR A ESE SEGMENTO, ENTONCES LA SEGUNDA CIFRA DE LA FRACCION DECIMAL (RECORRIENDO DE IZQUIERDA A DERECHA), SERA IGUAL A LA SE GUNDA CIFRA DEL NUMERO REAL QUE CORRESPONDE A: I''_{n-1} . Y ASI SUCESIVAMENTE.

NATURALMENTE, QUE MEDIANTE ESTE PROCESO, ES IMPOSIBLE OBTENER TODAS LAS CIFRAS DECIMALES DEL NUMERO REAL CORRESPONDIENTE. NO OBSTANTE, BASTENOS CON DECIR QUE UN NUMERO REAL ESTA DETERMINADO, CUANDO ESTEMOS EN POSIBILI DAD DE DETERMINAR CUALESQUIERA DE SUS CIFRAS DECIMALES Y MEDIANTE ESTE PRO CEDIMIENTO, ES POSIBLE HACERLO.

YA QUE A CADA NUMERO REAL LE CORRESPONDE UN PUNTO EN EL EJE DE LAS ABSCI SAS.Y QUE, CADA PUNTO EN EL EJE DE LAS ABSCISAS, ES EL ASOCIADO DE UN NU- MERO REAL, ENTONCES PODEMOS DEFINIR UN ORDEN EN EL CONJUNTO DE NUMEROS REA LES, INDUCIDO POR EL ORDEN DEFINIDO EN EL CONJUNTO DE LOS PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS. ESTO LO HAREMOS DEL SIGUIENTE MODO:

SEAN: r_1 , r_2 DOS NUMEROS REALES Y SEAN:

P_1 EL PUNTO ASOCIADO A:r_1

P_2 EL PUNTO ASOCIADO A:r_2

DIREMOS QUE $r_1 < r_2$ SI $P_1 < P_2$ (SI $\overrightarrow{P_1\, P_2}$ TIENE ORIENTACION POSITIVA)

EN VISTA DE ESTO, TANTO EL POSTULADO DE ARQUIMEDES COMO EL AXIOMA DE CON TINUIDAD QUE INICIALMENTE SE ENUNCIARON PARA PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS, AHORA SE TRANSFORMARAN EN ENUNCIADOS REFERENTES A NUMEROS REALES.

DE MANERA CONVENCIONAL, A LOS PUNTOS QUE SE ENCUENTRAN EN EL SEMI-EJE POSITIVO DE LAS ABSCISAS (PUNTOS SITUADOS A LA DERECHA DEL ORIGEN), LES ASOCIAREMOS NUMEROS REALES POSITIVOS, A LOS PUNTOS QUE SE ENCUENTREN LOCALIZADOS EN EL SEMI-EJE NEGATIVO (PUNTOS SITUADOS A LA IZQUIERDA DEL ORIGEN) LES ASOCIAREMOS NUMEROS REALES NEGATIVOS Y AL PUNTO ORIGEN LE ASOCIAREMOS EL NUMERO REAL CERO.

DE LO ANTERIOR, SE OBSERVA QUE TODO NUMERO REAL TIENE ESTRICTAMENTE UNA DE LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS: ES POSITIVO, NEGATIVO O CERO. ESTA PROPIEDAD SE CONOCE CON EL NOMBRE DE TRICOTOMIA.

ADEMAS, SE TIENE QUE SI UN NUMERO REAL $\underline{X}$ ES POSITIVO, SU INVERSO ADITIVO (SIMETRICO), SERA NEGATIVO. EJEMPLO. SI EL NUMERO REAL ES 5, SU SIMETRICO ES -5. SI UN NUMERO REAL ES NEGATIVO, SU SIMETRICO SERA POSITIVO. EJEMPLO. SI EL NUMERO REAL ES -4, SU SIMETRICO ES $-(-4) = +4$ (POSITIVO).

AUNQUE EL ORDEN EN LOS NUMEROS REALES, QUEDA PERFECTAMENTE DEFINIDO POR EL ORDEN INDUCIDO EN ELLOS POR EL CONJUNTO DE LOS PUNTOS DEL EJE DE LAS ABSCISAS, TAL ORDEN SE PUEDE ESTABLECER MEDIANTE EL ANALISIS DELAS CIFRAS DECIMALES DE LOS NUMEROS REALES, COMO A CONTINUACION LO HAREMOS. SEAN:

$$r_1 = x_0 \,.\, x_1x_2x_3x_4 \text{----} x_jx_{j+1} \text{----}$$
$$r_2 = y_0 \,.\, y_1y_2y_3y_4 \text{----} y_jy_{j+1} \text{----}$$

DOS NUMEROS REALES POSITIVOS, DE TAL MANERA QUE:

$$x_0 = y_0 \;;\; x_1 = y_1 \;;\; x_2 = y_2 \;;\; x_3 = y_3 \;;\; \text{----} \;;\; x_j = y_j \;;\; x_{j+1} \neq y_{j+1} \,.$$

SI SE TIENE QUE; $x_{j+1} > y_{j+1}$, ENTONCES: $r_1 > r_2$.

PARA PODER DEMOSTRAR ESTO, PROCEDEREMOS ASI. CONSIDEREMOS A LOS CONJUNTOS DE PUNTOS:

$$R_1 = \{ X_0 , X_1 , X_2 , X_3 , \ldots . \}$$
$$R_2 = \{ Y_0 , Y_1 , Y_2 , Y_3 , \ldots . \}$$

TALES QUE, PARA TODA $k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$

X_k ES EL PUNTO ASOCIADO A: $x_0 . x_1x_2x_3\text{----}x_k$.

Y_k ES EL PUNTO ASOCIADO A: $y_0 . y_1y_2y_3\text{----}y_k$.

SE SABE POR NOTACION:

$$x_0.x_1x_2x_3----x_k = x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + ---- + \frac{x_k}{10^k} = \frac{x_0x_1x_2x_3----x_k}{10^k}$$

LUEGO, PARA TODA k; $x_0.x_1x_2x_3----x_k = \dfrac{x_0x_1x_2x_3----x_k}{10^k}$ ------- (I)

AHORA BIEN, SI $k > j$ SE TIENE:

$$\frac{x_0x_1x_2x_3----x_jx_{j+1}\overbrace{000----0}^{k-(j+1)\text{ DIGITOS}}}{10^k} = x_0 + \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + ---- + \frac{x_j}{10^j} + \frac{x_{j+1}}{10^{j+1}} +$$

$$+ \overbrace{\frac{0}{10^{j+2}} + \frac{0}{10^{j+3}} + ---- + \frac{0}{10^k}}^{=0} = \frac{x_0x_1x_2x_3----x_{j+1}}{10^{j+1}}$$

POR LO TANTO: $\dfrac{x_0x_1x_2x_3----x_jx_{j+1}\overbrace{000----0}^{k-(j+1)\text{ DIGITOS}}}{10^k} = \dfrac{x_0x_1x_2x_3----x_{j+1}}{10^{j+1}}$ -------(II)

DE MANERA SIMILAR SE TIENE: $y_0.y_1y_2y_3 = \dfrac{y_0y_1y_2y_3----y_{j+1}----y_k}{10^k}$

OBSERVANDO QUE: $\dfrac{x_0x_1x_2x_3----x_{j+1}}{10^{j+1}}$ ES EL NUMERO REAL QUE CORRESPONDE AL PUNTO X_{j+1} Y QUE; $\dfrac{y_0y_1y_2y_3----y_{j+1}----y_k}{10^k}$ ES EL NUMERO REAL QUE CORRES PONDE AL PUNTO Y_k. COMO $x_{j+1} > y_{j+1}$, ENTONCES SE CUMPLE LA SIGUIENTE RE LACION ENTRE LOS ENTEROS: $x_0x_1x_2x_3----x_{j+1}\overbrace{000----0}^{k-(j+1)\text{ DIGITOS}} > y_0y_1y_2y_3----y_k$

POR LO QUE: $\dfrac{x_0x_1x_2x_3----x_{j+1}\overbrace{000----0}^{k-(j+1)\text{ DIGITOS}}}{10^k} > \dfrac{y_0y_1y_2y_3----y_k}{10^k}$ ------- (III)

AHORA BIEN: $x_0.x_1x_2x_3----x_{j+1} = \dfrac{x_0x_1x_2x_3----x_{j+1}}{10^{j+1}} =$ (POR I)

$$= \frac{x_0x_1x_2x_3----x_{j+1}\overbrace{000----0}^{k-(j+1)\text{ DIGITOS}}}{10^k} \qquad \text{(POR II)}$$

$$> \frac{y_0y_1y_2y_3----y_jy_{j+1}----y_k}{10^k} \qquad \text{(POR III)}$$

$$= y_0.y_1y_2y_3----y_{j+1}----y_k \qquad \text{(POR I)}$$

EN CONCLUSION SE TIENE:

$$x_0.x_1x_2x_3----x_{j+1} > y_0.y_1y_2y_3----y_{j+1}----y_k$$

POR LO TANTO, SI LOCALIZAMOS LOS PUNTOS ASOCIADOS A ESTOS NUMEROS REALES, SE OBSERVA QUE CONSERVAN EL MISMO ORDEN, ES DECIR: $X_{j+1} > Y_{j+1}$,SIEMPRE Y CUANDO $k > j$.

Y COMO: $Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant Y_3 \quad ----$

ENTONCES: X_{j+1} SERA COTA SUPERIOR DEL CONJUNTO R_2 ,POR LO TANTO TENDREMOS LAS RELACIONES:

$$\text{FRONT SUP } R_2 \leqslant X_{j+1} \leqslant \text{FRONT SUP } R_1$$

Y PUESTO QUE A LOS NUMEROS REALES DIFERENTES:

$$x_0.x_1x_2x_3----x_j----x_k---- \neq y_0.y_1y_2y_3----y_j----y_k$$

SE LES ASOCIAN PUNTOS DIFERENTES, ENTONCES SE TENDRA:

$$\text{FRONT SUP } R_2 \neq \text{FRONT SUP } R_1$$

DE DONDE: $\underbrace{\text{FRONT SUP } R_2}_{r_2} < \underbrace{\text{FRONT SUP } R_1}_{r_1}$

EN CONCLUSION: $r_2 < r_1$. L.Q.Q.D.

CAPITULO III

NOTACION. CON LA LETRA N, DENOTAREMOS AL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES,EL CUAL ESTA FORMADO POR TODOS LOS NUMEROS ENTEROS NO-NEGATIVOS,ES DECIR: $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, 10, 11, 12, \ldots\ldots\}$

A CONTINUACION,ENUNCIAREMOS CIERTAS PROPIEDADES,OPERACIONES Y RELACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES TALES COMO: LA IGUALDAD.

PARA HABLAR DE LA IGUALDAD ENTRE DOS NUMEROS RACIONALES,PRIMERAMENTE DIREMOS QUE LA IGUALDAD EN GENERAL,TIENE DOS ACEPCIONES: LA IGUALDAD CONSIDERADA COMO IDENTIDAD LOGICA Y LA IGUALDAD EN SENTIDO DE EQUIVALENCIA.

LA IDENTIDAD LOGICA,ES UNA RELACION DE IGUALDAD QUE SE DEFINE EN GENERAL PARA TODAS LAS COSAS,EN ESPECIAL PARA LOS NUMEROS NATURALES,LA CUAL,SE EXPRESA DE LA SIGUIENTE MANERA:

DOS COSAS SON IGUALES(COMO IDENTIDAD LOGICA), CUANDO CADA UNA DE ELLAS, TIENE TODAS LAS PROPIEDADES Y CARACTERISTICAS QUE TIENE LA OTRA Y UNICAMENTE EN ESE CASO.

PUESTO QUE LAS COSAS SE RECONOCEN POR SUS PROPIEDADES Y CARACTERISTICAS, ENTONCES DIREMOS: DOS COSAS IGUALES EN EL SENTIDO DE IDENTIDAD LOGICA,SON UNA MISMA COSA. EN ESTE CASO SE DIRA QUE ESTAS SON IDENTICAS.

POR LO ANTERIOR,SE TIENE QUE DOS COSAS SON IDENTICAS,CUANDO SON IGUALES EN TODOS LOS SENTIDOS EN QUE SE LES ANALICE.

CABE HACER NOTAR,QUE LA IGUALDAD EN LOS NUMEROS NATURALES,ES POR DEFINICION CONSIDERADA COMO IDENTIDAD LOGICA,ES DECIR, DOS NUMEROS NATURALES IGUALES,SON UN MISMO NUMERO.

ES COSTUMBRE UTILIZAR DIFERENTES DESIGNACIONES PARA UN MISMO NUMERO NATURAL,COMO POR EJEMPLO. EL NUMERO OCHO: SE DESIGNA MEDIANTE EL SIMBOLO "8", O BIEN,CON LAS NOTACIONES; "5 + 3" ; "2(4)" ; ETC.

EN EL LENGUAJE MATEMATICO,LLAMAREMOS IGUALDAD A UNA EXPRESION COMPUESTA POR DOS DESIGNACIONES DE UN MISMO NUMERO,SEPARADAS POR EL SIGNO " = ". A LA DESIGNACION QUE SE ENCUENTRA AL LADO IZQUIERDO DEL SIGNO " = ", SE LE LLAMA PRIMER MIEMBRO Y A LA DEL LADO DERECHO,SEGUNDO MIEMBRO.

ASI PUES, LA IGUALDAD: $5 + 3 = 8$ ES UNA IDENTIDAD LOGICA, YA QUE, TANTO $5 + 3$ COMO 8 SON DOS DESIGNACIONES DEL MISMO NUMERO NATURAL OCHO.

AHORA BIEN, EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES, LA IGUALDAD SE DEFINE DEL SIGUIENTE MODO:

SEAN: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ DOS NUMEROS RACIONALES.

DEFINICION III-1). $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ SI: $ad = bc$.

EJEMPLO. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ YA QUE: $3(8) = 4(6)$

COMO EL PRODUCTO DE DOS NUMEROS ENTEROS ES OTRO NUMERO ENTERO, ES DE OBSERVARSE QUE LA IGUALDAD ENTRE NUMEROS RACIONALES, SE DEFINE APOYANDOSE EN LA IGUALDAD ENTRE NUMEROS ENTEROS.

DEFINIDA ASI LA IGUALDAD ENTRE NUMEROS RACIONALES, ESTA NO RESULTA SER UNA IDENTIDAD LOGICA, PUESTO QUE, DOS NUMEROS RACIONALES PUEDEN SER IGUALES SIN LLEGAR A SER IDENTICOS.

EJEMPLO. LA IGUALDAD: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ SE VERIFICA PORQUE: $2(6) = 3(4)$. SIN EMBARGO, ESTA NO ES UNA IDENTIDAD LOGICA, YA QUE $\frac{2}{3}$ SE IDENTIFICA CON LA PAREJA $(2,3)$; $\frac{4}{6}$ CON LA PAREJA $(4,6)$ Y SE TIENE $(2,3) \neq (4,6)$.

POR TAL MOTIVO, DECIMOS QUE LA IGUALDAD ENTRE NUMEROS RACIONALES ES UNA IGUALDAD EN SENTIDO DE EQUIVALENCIA. EN ESTE CASO, ENTENDEREMOS QUE TALES RACIONALES SON EQUIVALENTES.

DE LA DEFINICION DE IGUALDAD ENTRE DOS NUMEROS RACIONALES, SE DESPRENDEN LAS PROPIEDADES QUE A CONTINUACION MENCIONAREMOS Y QUE JUNTAS SE CONOCEN CON EL NOMBRE DE: "TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES".

i). SI AMBAS PARTES (NUMERADOR Y DENOMINADOR) DE UN NUMERO RACIONAL SE MULTIPLICAN POR UN MISMO NUMERO ENTERO, SE OBTIENE UN NUMERO RACIONAL EQUIVALENTE.

ii). SI SE SUPRIMEN LOS FACTORES COMUNES A AMBAS PARTES (NUMERADOR Y DENOMINADOR) DE UN NUMERO RACIONAL, SE OBTIENE UN NUMERO RACIONAL EQUIVALENTE.

i). A PARTIR DE LA IGUALDAD ENTRE LOS NUMEROS ENTEROS: $a(kb) = b(ka)$, SE OBTIENE LA IGUALDAD:

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$$

ii). A PARTIR DE LA IGUALDAD ENTRE LOS NUMEROS ENTEROS: $(ka)b = (kb)a$, SE OBTIENE:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

DEFINICION III-2). SE LE LLAMA RELACION DE EQUIVALENCIA,A UNA RELACION ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO,LA CUAL TIENE LAS SIGUIENTES TRES PROPIEDADES LLAMADAS: REFLEXIVA,SIMETRICA Y TRANSITIVA,LAS QUE SE EXPRESAN DEL SIGUIENTE MODO:

SI; a, b, c SON TRES ELEMENTOS DE UN CONJUNTO C, DIREMOS QUE R ES UNA RELACION DE EQUIVALENCIA EN C,SI CUMPLE:

1). PROPIEDAD REFLEXIVA. aRa. ES DECIR, TODO ELEMENTO DEBE ESTAR RELACIONADO CON EL MISMO.

2). PROPIEDAD SIMETRICA, SI; aRb, ENTONCES: bRa. ESTO INDICA QUE,SI UN ELEMENTO ESTA RELACIONADO CON OTRO,ENTONCES EL SEGUNDO ESTARA RELACIONADO DEL MISMO MODO CON EL PRIMERO DE ELLOS.

3). PROPIEDAD TRANSITIVA. SI; aRb Y bRc, ENTONCES SE TENDRA QUE: aRc. ENTENDIENDOSE,QUE SI UN ELEMENTO ESTA RELACIONADO CON OTRO Y ESTE A LA VEZ ESTA RELACIONADO CON UN TERCERO,ENTONCES: EL PRIMERO DE ELLOS DEBERA ESTAR RELACIONADO CON EL TERCERO.

COMO UN EJEMPLO DE RELACION DE EQUIVALENCIA,SE TIENE LA RELACION: "SER HERMANO DE", EN EL ENTENDIMIENTO QUE: UN INDIVIDUO ES HERMANO DE OTRO,CUANDO AMBOS SON HIJOS DE LOS MISMOS PROGENITORES. ESTA RELACION CUMPLE LAS TRES PROPIEDADES MENCIONADAS,A SABER:

1). PROPIEDAD REFLEXIVA. TODO INDIVIDUO ES HERMANO DE SI MISMO.

2). PROPIEDAD SIMETRICA. SI UN INDIVIDUO ES HERMANO DE OTRO,ENTONCES EL SEGUNDO DE ELLOS ES HERMANO DEL PRIMERO.

3). PROPIEDAD TRANSITIVA. SI UN INDIVIDUO ES HERMANO DE OTRO Y ESTE A LA VEZ ES HERMANO DE UN TERCERO, ENTONCES EL PRIMERO DE ELLOS ES TAMBIEN HERMANO DEL TERCERO.

ES DE OBSERVARSE QUE LA IGUALDAD ENTRE NUMEROS RACIONALES (IGUALDAD EN SENTIDO DE EQUIVALENCIA), RESULTA SER UNA RELACION DE EQUIVALENCIA, PORQUE SATISFACE LAS TRES PROPIEDADES ANTES CITADAS. ES DECIR:

SI; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ SON TRES NUMEROS RACIONALES, ENTONCES SE CUMPLEN:

I). PROPIEDAD REFLEXIVA. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$. (TODO NUMERO RACIONAL ES IGUAL A SI MISMO).

II). PROPIEDAD SIMETRICA. SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ENTONCES: $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$. (SI UN NUMERO RACIONAL ES IGUAL A OTRO, ENTONCES EL SEGUNDO ES IGUAL AL PRIMERO DE ELLOS)

III). PROPIEDAD TRANSITIVA. SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Y $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, ENTONCES: $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$. (SI UN NUMERO RACIONAL ES IGUAL A OTRO Y ESTE A LA VEZ ES IGUAL A UN TERCERO, ENTONCES EL PRIMERO ES IGUAL AL TERCERO).

LA PRIMERA PROPIEDAD ES RAZONABLE. YA QUE, DE LA IGUALDAD $ab = ba$ (PRODUCTO DE ENTEROS), SE TIENE POR DEFINICION $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

LA SEGUNDA PROPIEDAD. SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ENTONCES: $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

POR DEFINICION: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ SI: $ad = bc$ (PRODUCTO DE ENTEROS). COMO: $bc = cb$ Y $ad = da$, ENTONCES SE OBTIENE LA IGUALDAD $cb = da$ Y POR DEFINICION SE TIENE: $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

LA TERCERA PROPIEDAD. SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Y $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, ENTONCES: $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$.

POR DEFINICION: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Y $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ SI: $ad = bc$ Y $cf = de$ RESPECTIVAMENTE.

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE LA IGUALDAD $ad = bc$, POR f Y AMBOS MIEMBROS DE LA IGUALDAD $cf = de$, POR b, SE OBTIENEN: $adf = bcf$; $bcf = bde$ RESPECTIVAMENTE (IGUALDAD ENTRE ENTEROS), POR LO QUE: $adf = bde$.

SE TIENE: DE LA IGUALDAD $adf = bde$, POR DEFINICION; $\frac{ad}{bd} = \frac{e}{f}$.

Y COMO: $\frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}} = \frac{a}{b}$ (TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES ii).

POR LO TANTO SE TENDRA: $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$. L.Q.Q.D.

ES DE OBSERVARSE QUE LA IDENTIDAD LOGICA TIENE LAS PROPIEDADES:REFLEXIVA, SIMETRICA Y TRANSITIVA,POR TAL MOTIVO,LA IDENTIDAD LOGICA ES UNA RELACION DE EQUIVALENCIA.

LA IDENTIDAD LOGICA,APARTE DE TENER LAS TRES PROPIEDADES ANTES CITADAS, TIENE TAMBIEN LA PROPIEDAD CONOCIDA CON EL NOMBRE DE "PRINCIPIO DE SUSTITUCION", EL CUAL SE EXPRESA DEL SIGUIENTE MODO.

PRINCIPIO DE SUSTITUCION. "EN CUALQUIER ENUNCIADO,SE PUEDE REEMPLAZAR UNA DESIGNACION DE UN OBJETO POR CUALQUIERA OTRA DESIGNACION DEL MISMO OBJETO,SIN QUE CAMBIE EL SIGNIFICADO DE TAL ENUNCIADO".

EJEMPLOS.

1). SI; $a + 4 = 7$ Y $a = b$, ENTONCES: $b + 4 = 7$.

2). SI; $8 + x = 15$ Y COMO $8 = 5 + 3$, ENTONCES: $(5 + 3) + x = 15$.

3). SI; $\frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5}$ Y COMO $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$, ENTONCES: $(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}) + 2 = \frac{13}{5}$.

EL PRINCIPIO DE SUSTITUCION ES INHERENTE A LA IDENTIDAD LOGICA Y NO ES NECESARIO DEMOSTRARLO EN EL CASO DE REEMPLAZAR UNA DESIGNACION DE UN NUMERO NATURAL POR OTRA DESIGNACION DEL MISMO NUMERO. SIN EMBARGO,CUANDO SE TRATA CON LOS NUMEROS RACIONALES,EN LOS QUE LA IGUALDAD SE DEFINE COMO UNA EQUIVALENCIA(NO COMO UNA IDENTIDAD LOGICA), SI ES FORZOSO DEMOSTRAR LA VALIDEZ DE ESTE PRINCIPIO AL HACER LOS REEMPLAZOS NECESARIOS EN LA ADICION, MULTIPLICACION,ETC.

POR EJEMPLO.

PROPOSICION III-1). SEAN; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ TRES NUMEROS RACIONALES CUALESQUIER.

SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ENTONCES: $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

DEMOSTRACION. POR DEFINICION $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ SI: $ad = bc$.

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS POR ff, SE OBTIENE: $adff = bcff$.

SUMANDO $bedf$ EN AMBOS MIEMBROS,OBTENEMOS:

$adff + bedf = bcff + bedf$

$afdf + bedf = cfbf + debf$ (PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA MULTIPLICACION)

APLICANDO LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION RESPECTO A LA

ADICION, SE TIENEN LAS SIGUIENTES IGUALDADES:

$afdf + bedf = (af + be)df$, $cfbf + debf = (cf + de)bf.$

POR LO QUE: $(af + be)df = (cf + de)bf$

LO CUAL SIGNIFICA POR DEFINICION:

$$\frac{af + be}{bf} = \frac{cf + de}{df}$$

UTILIZANDO LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA, SE TIENE:

$\frac{af + be}{bf} = \frac{af}{bf} + \frac{be}{bf}$; $\frac{cf + de}{df} = \frac{cf}{df} + \frac{de}{df}$ Y APLICANDO EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES ii), SE TIENE:

$\frac{a\cancel{f}}{b\cancel{f}} + \frac{\cancel{b}e}{\cancel{b}f} = \frac{a}{b} + \frac{e}{f}$; $\frac{c\cancel{f}}{d\cancel{f}} + \frac{\cancel{d}e}{\cancel{d}f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

POR LO CUAL SE CONCLUYE:

$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ L.Q.Q.D.

PROPOSICION III-2). SEAN; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ TRES NUMEROS RACIONALES CUALESQUIER. SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ENTONCES: $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f} = \frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$.

DEMOSTRACION. POR DEFINICION $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ SI: $ad = bc$.

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS POR ef, SE OBTIENE:

$adef = bcef$

$aedf = cebf$ (PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA MULTIPLICACION)

LO CUAL SIGNIFICA POR DEFINICION:

$\frac{ae}{bf} = \frac{ce}{df}$.

DE LO QUE SE CONCLUYE:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ L.Q.Q.D.

EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES, SE CUMPLE TAMBIEN LAS PROPIEDADES QUE A CONTINUACION MENCIONAREMOS, TALES COMO:

IV). PROPIEDAD ADITIVA. SEAN; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ CUATRO NUMEROS RACIONALES.

SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Y $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, ENTONCES:

$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{g}{h}$ (SI RACIONALES IGUALES SE SUMAN A RACIONALES IGUALES, LAS

SUMAS OBTENIDAS SON IGUALES)

POR DEFINICION: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ SI: $ad = bc$; $eh = fg$ RESPECTIVAMENTE.

MULTIPLICANDO POR fh A AMBOS MIEMBROS DE LA IGUALDAD $ad = bc$ Y POR bd A AMBOS MIEMBROS DE LA SEGUNDA IGUALDAD $eh = fg$, SE OBTIENEN:

$adfh = bcfh$; $bdeh = bdfg$

SUMANDO $bdeh$ EN AMBOS MIEMBROS DE LA PRIMERA IGUALDAD Y $adfh$ EN AMBOS MIEMBROS DE LA SEGUNDA IGUALDAD,SE OBTENDRAN:

$adfh + bdeh = bcfh + bdeh$

$bdeh + adfh = bdfg + adfh$

APLICANDO LA PROPIEDAD SIMETRICA EN LA SEGUNDA IGUALDAD,SE TIENE:

$adfh + bdeh = bcfh + bdeh$ ---- (I)

$bdfg + adfh = bdeh + adfh$ ---- (II)

RESTANDO MIEMBRO A MIEMBRO (I) - (II):

$ad\cancel{f}h + bdeh - bdfg - ad\cancel{f}h = bcfh + bd\cancel{e}h - bd\cancel{e}h - adfh$

$bdeh - bdfg = bcfh - adfh$

SUMANDO $bdfg + adfh$ A AMBOS MIEMBROS:

$bdeh - b\cancel{d}fg + b\cancel{d}fg + adfh = bcfh - a\cancel{d}fh + bdfg + a\cancel{d}fh$

$bdeh + adfh = bcfh + bdfg$

FACTORIZANDO:

$dh(be + af) = bf(ch + dg)$

LO CUAL,SIGNIFICA POR DEFINICION:

$$\frac{be + af}{bf} = \frac{ch + dg}{dh}$$

LUEGO:

$$\frac{\cancel{b}e}{\cancel{b}f} + \frac{a\cancel{f}}{b\cancel{f}} = \frac{c\cancel{h}}{d\cancel{h}} + \frac{\cancel{d}g}{\cancel{d}h}$$ (TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES ii).

$$\frac{e}{f} + \frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{g}{h}$$

Y EN CONCLUSION:

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{g}{h}$$ L.Q.Q.D.

IV). PROPIEDADA MULTIPLICATIVA. SEAN; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ CUATRO NUMEROS RACIONALES.

SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, ENTONCES: $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h}$ (SI RACIONALES IGUALES SE MULTIPLICAN POR RACIONALES IGUALES, LOS PRODUCTOS OBTENIDOS SON IGUALES)

POR DEFINICION: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ SI; $ad = bc$, $eh = fg$.

MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE LA PRIMERA IGUALDAD POR eh Y AMBOS MIEMBROS DE LA SEGUNDA IGUALDAD POR bc, SE OBTIENEN:

$adeh = bceh$; $bceh = bcfg$

APLICANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$adeh = bcfg$

LO CUAL SIGNIFICA POR DEFINICION: $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$

ES DECIR: $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h}$ L.Q.Q.D.

CLARAMENTE SE OBSERVA, QUE LAS PROPOSICIONES (III-1) Y (III-2), RESULTAN SER CASOS PARTICULARES DE LAS PROPIEDADES ADITIVA Y MULTIPLICATIVA RESPECTIVAMENTE SI EN LUGAR DE TOMAR $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, CONSIDERAMOS EN LA HIPOTESIS $\frac{e}{f} = \frac{e}{f}$. ES DECIR:

i). SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Y $\frac{e}{f} = \frac{e}{f}$, ENTONCES: $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$

ii). SI; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Y $\frac{e}{f} = \frac{e}{f}$, ENTONCES: $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

MEDIANTE EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES (INCISO i), SE SABE:

$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$; $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$

POR LO QUE:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ (PROPIEDAD ADITIVA)

$= \frac{ad + bc}{bd}$ (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)

RAZON POR LA CUAL, PODEMOS JUSTIFICAR LA ADICION DE DOS NUMEROS RACIONALES DICIENDO:

SEAN: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ DOS NUMEROS RACIONALES.

DEFINICION. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

QUEDANDO DEFINIDA LA MULTIPLICACION DE DOS NUMEROS RACIONALES ASI:

SEAN: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ DOS NUMEROS RACIONALES.

DEFINICION. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

CON RESPECTO A LA DESIGUALDAD ENTRE NUMEROS RACIONALES, EXPRESAREMOS LO SIGUIENTE:

SEAN $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ DOS NUMEROS RACIONALES.

SE DICE QUE; $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, SI: $ad < bc$.

DEFINICION. SE DICE QUE UN CONJUNTO C, ES CAMPO, SI EXISTEN DOS OPERACIONES EN C (DENOTADAS POR + , .) LLAMADAS RESPECTIVAMENTE ADICION Y MULTIPLICACION, QUE TIENEN LAS SIGUIENTE PROPIEDADES:

1). PROPIEDAD DE CERRADURA.

SI; x , y SON DOS ELEMENTOS DE C , ENTONCES: $x + y$; $x \cdot y$ TAMBIEN DEBERAN SER ELEMENTOS DE C.

2). PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA ADICION Y DE LA MULTIPLICACION.

SI: x , y SON ELEMENTOS CUALESQUIER DE C, ENTONCES SE TENDRAN:

$x + y = y + x$; $x \cdot y = y \cdot x$

3). PROPIEDAD ASICIATIVA DE LA ADICION Y DE LA MULTIPLICACION.

SI; x, y, z SON ELEMENTOS CUALESQUIER DE C, ENTONCES SE TENDRAN:

$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$

$x.y.z = x.(y.z) = (x.y).z$

4). EXISTEN ELEMENTOS UNICOS θ ; i EN C, LLAMADOS RESPECTIVAMENTE; IDENTICO ADITIVO E IDENTICO MULTIPLICATIVO TALES QUE:

$\theta + x = x + \theta = x$

$i \cdot x = x \cdot i = x$

5). PARA CADA ELEMENTO x QUE PERTENECE A C, EXISTE UN ELEMENTO UNICO EN C, DENOTADO POR $\bar{x}$ LLAMADO INVERSO ADITIVO TAL QUE:

$x + \bar{x} = \bar{x} + x = \theta$

PARA CADA ELEMENTO $x \neq \theta$ QUE PERTENECE A C, EXISTE UN ELEMENTO UNICO EN C, DENOTADO POR x' LLAMADO INVERSO MULTIPLICATIVO, TAL QUE:

$x \cdot x' = x' \cdot x = i$

6). PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION, RESPECTO A LA ADICION

SI; x, y, z SON ELEMENTOS CUALESQUIER DE C, ENTONCES SE TENDRA:

$x.(y + z) = x.y + x.z$ (POR LA IZQUIERDA)

Y ADEMAS:

$(y + z).x = y.x + z.x$ (POR LA DERECHA)

RECORDANDO LAS DEFINICIONES DE ADICION Y MULTIPLICACION DE NUMEROS RACIONALES:

DEFINICION. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

DEFINICION. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

OBSERVAMOS QUE EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES CON LAS OPERACIONES ADICION Y MULTIPLICACION FORMA CAMPO, PUESTO QUE SE CUMPLEN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

1). PROPIEDAD DE CERRADURA.

SI; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ SON DOS NUMEROS RACIONALES, ENTONCES: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ TAMBIEN SON NUMEROS RACIONALES. ESTO SE DEBE A QUE LA SUMA Y EL PRODUCTO DE ENTEROS, SON ENTEROS, ES DECIR:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, $\frac{\text{ENTERO}}{\text{ENTERO}}$ = RACIONAL

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{\text{ENTERO}}{\text{ENTERO}}$ = RACIONAL

2). PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA ADICION Y DE LA MULTIPLICACION.

SI; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ SON DOS NUMEROS RACIONALES, ENTONCES:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

YA QUE, LA ADICION Y LA MULTIPLICACION TIENEN LA PROPIEDAD CONMUTATIVA EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS, POR LO TANTO SE TENDRA:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{cb + da}{db} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \qquad \text{Y:}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

3). PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA ADICION Y DE LA MULTIPLICACION.

SI; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ SON TRES NUMEROS RACIONALES CUALESQUIER, ENTONCES:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{e}{f}$$

$$\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) \frac{e}{f}$$

ESTO SE EXPLICA, YA QUE:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} + \left(\frac{cf + de}{df} \right) = \frac{adf + b(cf + de)}{bdf} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf} =$$

(APLICANDO LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION RESPECTO A LA ADICION EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS).

ESTA ULTIMA EXPRESION OBTENIDA, RESULTA IGUAL A:

$$\frac{(ad + bc)f + bde}{bdf} \qquad \text{(FACTORIZANDO f)}$$

$$= \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} \qquad \text{(POR DEFINICION DE ADICION)}$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{e}{f} \qquad \text{(POR DEFINICION DE ADICION)}$$

Y PUESTO QUE:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\left(\frac{ce}{df}\right)$$ (POR DEFINICION DE MULTIPLICACION)

$$=\frac{ace}{bdf}$$

$$=\frac{(ac)e}{(bd)f}$$ (APLICANDO LA PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACION EN EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS)

$$=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}$$

4). EXISTENCIA DE LOS ELEMENTOS UNICOS $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$ QUE SON DOS NUMEROS RACIONALES LLAMADOS RESPECTIVAMENTE; EL IDENTICO ADITIVO Y EL IDENTICO MULTIPLICATIVO, TALES QUE CUMPLEN LO SIGUIENTE: PARA CUALQUIER NUMERO RACIONAL $\frac{a}{b}$, SE TIENE:

$$\frac{0}{1}+\frac{a}{b}=\frac{0.b+1.a}{1.b}=\frac{0+a}{b}=\frac{a}{b}$$ Y:

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a.1+b.0}{b.1}=\frac{a+0}{b}=\frac{a}{b}$$

TAMBIEN SE TIENE:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1.a}{1.b}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a.1}{b.1}=\frac{a}{b}$$

ESTO DEBIDO A LAS PROPIEDADES DEL CERO Y DEL 1 EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS.

5). SEA; $\frac{a}{b}$ UN NUMERO RACIONAL CUALQUIER, EXISTE UN UNICO NUMERO RACIONAL $-\frac{a}{b}$ LLAMADO EL INVERSO ADITIVO, TAL QUE:

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0=\frac{0}{1}$$

SI; $\frac{a}{b}$ ES UN NUMERO RACIONAL DISTINTO DE CERO, EXISTE UN UNICO NUMERO RACIONAL $\frac{b}{a}$ LLAMADO EL INVERSO MULTIPLICATIVO, TAL QUE:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{1}$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{ab}{ba}$$ (DEFINICION DE MULTIPLICACION DE $N_{\underline{o}s}$ RACIONALES)

$$= \frac{ab}{ab}$$ (PROP. CONMUTATIVA EN LOS NUMEROS ENTEROS)

$$= 1$$ (DIVISION DE UN ENTERO ENTRE SI MISMO)

$$= \frac{1}{1}$$

UTILIZANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{1}$$ L.Q.Q.D.

6). PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION RESPECTO A LA ADICION.

SI; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ SON TRES NUMEROS RACIONALES CUALESQUIER, ENTONCES:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

DEMOSTRACION. APLICANDO LA DEFINICION DE ADICION EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES, SE TIENE:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\left(\frac{cf + de}{df}\right)$$

$$= \frac{a\,(\,cf + de\,)}{bdf}$$ (MULTIPLICACION DE $N_{\underline{o}s}$ RACIONALES)

$$= \frac{acf + ade}{bdf}$$ (PROP. DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION EN LOS NUMEROS ENTEROS)

$$= \frac{acf}{bdf} + \frac{ade}{bdf}$$ (ADICION DE FRACCIONES HOMOGENEAS)

$$= \frac{ac\cancel{f}}{bd\cancel{f}} + \frac{a\cancel{d}e}{b\cancel{d}f}$$ (TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES INCISO ii)

$$= \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$ (DEFINICION DE MULTIPLICACION DE Nº RACIONALES)

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE CONCLUYE:

$$\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$ L.Q.Q.D.

CAPITULO IV

YA QUE, EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES (Q), RESULTA SER UN SUBCONJUNTO DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES (R), DESEAMOS QUE ESTE ULTIMO, TENGA LAS MISMAS CARACTERISTICAS QUE TIENEN LOS NUMEROS RACIONALES. ES DECIR, DESEAMOS QUE LOS AXIOMAS, TEOREMAS Y EN GENERAL TODAS LAS PROPIEDADES QUE HEMOS MENCIONADO DE LOS NUMEROS RACIONALES, SE HAGAN EXTENSIVAS A LOS NUMEROS REALES Y POR TANTO, SEAN APLICABLES A ESTE NUEVO CONJUNTO, TALES COMO LAS SIGUIENTES YA ANTES ENUNCIADAS:

I). SI; r_1 , r_2 SON DOS NUMEROS RACIONALES POSITIVOS, ENTOCES:

i). $r_1 + r_2$ ES UN NUMERO RACIONAL POSITIVO.

ii). $r_1 \cdot r_2$ ES UN NUMERO RACIONAL POSITIVO.

iii). UN NUMERO RACIONAL, CUMPLE EXCLUSIVAMENTE UNA DE LAS SIGUIENTES CONDICIONES: ES POSITIVO, CERO O NEGATIVO.

ESTAS PROPIEDADES SON VALIDAS EN EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS RACIONALES Y DESEAMOS, SE EXTIENDAN HACIA LOS NUMEROS REALES, ES DECIR:

I'). SI; R_1 , R_2 SON DOS NUMEROS REALES POSITIVOS, ENTONCES:

i'). $R_1 + R_2$ ES UN NUMERO REAL POSITIVO.

ii'). $R_1 \cdot R_2$ ES UN NUMERO REAL POSITIVO.

iii'). UN NUMERO REAL, CUMPLE EXCLUSIVAMENTE UNA DE LAS SIGUIENTES CONDICIONES: ES POSITIVO, CERO O NEGATIVO.

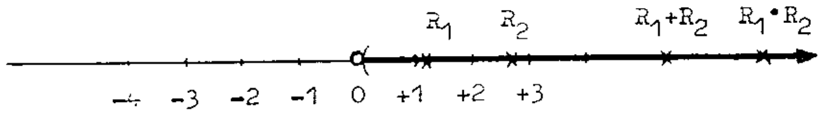

FIG. IV-1

SIENDO ASI, AHORA TENDREMOS LA SIGUIENTE ESTRUCTURA:

a). EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES.

b). DOS OPERACIONES BASICAS (ADICION Y MULTIPLICACION), DEFINIDAS PARA LOS ELEMENTOS DE ESTE CONJUNTO.

c). CIERTAS SUPOSICIONES RELACIONADAS CON LOS ELEMENTOS DE ESTE CONJUNTO, HECHAS EMPLEANDO TALES OPERACIONES, ASI COMO: LAS PROPIEDADES DE CERRADURA DE LA ADICION Y MULTIPLICACION; ASOCIATIVA DE LA ADICION Y MULTIPLICACION; CONMUTATIVA DE LA ADICION Y MULTIPLICACION; DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION RESPECTO A LA ADICION; PROPIEDAD DE IDENTIDAD PARA LA ADICION Y MULTIPLICACION; PROPIEDAD DEL INVERSO PARA LA ADICION Y MULTIPLICACION; PROPIEDADES: REFLEXIVA, SIMETRICA, TRANSITIVA, ADITIVA, MULTIPLICATIVA; ETC.

ESTAS PROPIEDADES NOS DICEN QUE EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES, CON LAS OPERACIONES DE ADICION Y MULTIPLICACION USUALES DEFINIDAS EN EL, FORMA CAMPO, COMO MAS ADELANTE VEREMOS.

d). ALGUNAS CONSECUENCIAS LOGICAS (TEOREMAS), COMO RESULTADOS DE LAS SUPOSICIONES (AXIOMAS) PREVIAMENTE HECHAS, LAS CUALES SE ENUNCIARAN TAMBIEN MAS ADELANTE.

PROPIEDADES DE CAMPO DE LOS NUMEROS REALES.

C1). PROPIEDADES DE CERRADURA.

PARA CUALESQUIER $a \in R$, $b \in R$ SE TIENEN:

$a + b \in R$; $a \cdot b \in R$

C2). PROPIEDADES CONMUTATIVAS.

PARA CUALESQUIER $a \in R$, $b \in R$ SE TIENEN:

$a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$

C3). PROPIEDADES ASOCIATIVAS.

PARA CUALESQUIER $a \in R$; $b \in R$; $c \in R$ SE TIENEN:

$(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$

C4). PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

PARA CUALESQUIER $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$ SE TIENE:

$a(b + c) = ab + ac$

C5). EXISTENCIA DE LOS ELEMENTOS DE IDENTIDAD.

EXISTE UN NUMERO REAL LLAMADO "CERO" (DENOTADO POR 0) TAL QUE, PARA CUALQUIER $a \in R$, SE TIENE:

$0 + a = a + 0 = a$

EXISTE UN NUMERO REAL DISTINTO DE CERO, LLAMADO "UNO" (DENOTADO POR 1) TAL QUE, PARA CUALQUIER $a \in R$, SE TIENE:

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

NOTA. AL NUMERO CERO (0), SE LE CONOCE COMO IDENTICO ADITIVO Y AL NUMERO UNO (1), COMO IDENTICO MULTIPLICATIVO.

C6). EXISTENCIA DE LOS ELEMENTOS INVERSOS.

PARA CUALQUIER $a \in R$, EXISTE UN NUMERO REAL (DENOTADO POR $-a$) TAL QUE:

$-a + a = a + (-a) = 0$

PARA CUALQUIER NUMERO REAL DISTINTO DE CERO a, EXISTE UN NUMERO REAL (DENOTADO POR $\frac{1}{a}$) TAL QUE:

$\frac{1}{a}(a) = a \cdot \frac{1}{a} = 1$

OBSERVACION. EL NUMERO REAL $-a$, ES EL INVERSO ADITIVO (SIMETRICO) DE a. EL NUMERO REAL $\frac{1}{a}$ ES EL INVERSO MULTIPLICATIVO (RECIPROCO) DE a.

AHORA BIEN, POR LAS PROPIEDADES CONMUTATIVAS, SE TIENEN (COMO ANTES LO EXPRESAMOS) LAS SIGUIENTES IGUALDADES:

$a + (-a) = (-a) + a = 0$; $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

ESTO ULTIMO, NOS ACLARA EL HECHO QUE a ES EL INVERSO ADITIVO DE $-a$ Y QUE $a \neq 0$ ES EL INVERSO MULTIPLICATIVO DE $\frac{1}{a}$.

COMO CONSECUENCIA DE LAS PROPIEDADES QUE DEFINEN A UN CAMPO, SE OBTENDRAN LOS TEOREMAS QUE A CONTINUACION MENCIONAREMOS, LOS CUALES, REPRESENTAN EN SI, OTRAS PROPIEDADES MAS DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES.

TEOREMA IV - 1). EL IDENTICO ADITIVO ES UNICO.

DEMOSTRACION. SUPONGAMOS QUE EXISTE OTRO IDENTICO ADITIVO, LLAMEMOSLO s. POR LO TANTO, SE TENDRA:

$0 = 0 + s = s$

APLICANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$0 = s.$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 2). EL IDENTICO MULTIPLICATIVO ES UNICO.

DEMOSTRACION. SUPONGAMOS QUE EXISTE OTRO IDENTICO MULTIPLICAYIVO, LLAMEMOSLO t. POR LO TANTO SE TENDRA:

$1 = 1 \circ t = t$

POR LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$1 = t.$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 3). EL INVERSO ADITIVO DE CUALQUIER NUMERO REAL a, ES UNICO.

DEMOSTRACION. SUPONGAMOS QUE EXISTE OTRO INVERSO ADITIVO DEL NUMERO REAL a, LLAMEMOSLO p. POR LO TANTO SE TENDRA:

$0 = a + p$

AHORA BIEN, SUMANDO $-a$ EN AMBOS LADOS DE ESTA IGUALDAD, TENEMOS:

$-a + 0 = -a + (a + p)$

PERO: $-a + 0 = -a$ (PROP. C5)

POR LO TANTO SE TENDRA:

$$\begin{aligned} -a = -a + 0 &= -a + (a + p) \\ &= (-a + a) + p && \text{(PROP. C3)} \\ &= 0 + p && \text{(PROP. C6)} \\ &= p && \text{(PROP. C5)} \end{aligned}$$

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$-a = p$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 4). EL INVERSO MULTIPLICATIVO DE CUALQUIER NUMERO REAL b DISTINTO DE CERO, ES UNICO.

DEMOSTRACION. SUPONGAMOS QUE EXISTE OTRO INVERSO MULTIPLICATIVO DEL NU

MERO REAL b, LLAMEMOSLO q. POR TAL MOTIVO, SE TENDRA:

$b \cdot q = 1$

AHORA BIEN, MULTIPLICANDO POR $\frac{1}{b}$ AMBOS MIEMBROS DE ESTA IGUALDAD, TENEMOS:

$(b \cdot q)\frac{1}{b} = 1 \cdot \frac{1}{b}$

$\frac{1}{b}(b \cdot q) = \frac{1}{b} \cdot 1$ (PROP. C2)

$(\frac{1}{b} \cdot b)\, q = \frac{1}{b}$ (PROPS. C3 ; C5)

$1 \cdot q = \frac{1}{b}$ (PROP. C6)

$q = \frac{1}{b}$ (PROP. C5)

L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 5). PARA CUALQUIER NUMERO REAL a, SE TENDRA:

$-(-a) = a$

DEMOSTRACION.

$(-a) + (\,-(-a)\,) = 0$ (PROP. C6)

Y TAMBIEN SE TIENE:

$(-a) + a = 0$ (PROP. C6)

ESTAS DOS IGUALDADES, NOS DICEN QUE AMBOS; $-(-a)$ Y a, SON INVERSOS ADITIVOS DE $-a$. POR EL TEOREMA IV -3, SE CONCLUYE QUE: $-(-a) = a$.

L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 6). PARA CUALQUIER NUMERO REAL a, SE TENDRA: $a \cdot 0 = 0$

DEMOSTRACION.

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ (PROP. C5)

$= a \cdot 0 + a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)]$ (PROP. C6)

$= (a \cdot 0 + a \cdot 0) + [-(a \cdot 0)]$ (PROP. C3)

$= a(0 + 0) + [-(a \cdot 0)]$ (PROP. C4)

$= a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)]$ (PROP. C5)

$= 0$ (PROP. C6)

APLICANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$a \cdot 0 = 0$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 7). SI a ES UN NUMERO REAL, TAL QUE $a \neq 0$, ENTONCES SE TENDRA QUE: $\frac{1}{a} \neq 0$.

DEMOSTRACION. SUPONGAMOS QUE: $\frac{1}{a} = 0$. PUESTO QUE:

$1 = a \cdot \frac{1}{a}$ (PROP. C6)

$= a \cdot 0$ (POR SUPOSICION: $\frac{1}{a} = 0$)

$= 0$ (TEOR. IV - 6)

UTILIZANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$1 = 0$. LO CUAL ES UNA CONTRADICCION, YA QUE, EN VIRTUD DE LA PROPIEDAD C5, SE SABE QUE: $1 \neq 0$.

POR LO TANTO, SE TENDRA QUE:

$\frac{1}{a} \neq 0$. L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 8). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES, TALES QUE: $ab = 0$, ENTONCES: $a = 0$, O BIEN, $b = 0$.

ESTO SE EXPRESA DICIENDO, QUE NO EXISTEN DIVISORES DE CERO.

DEMOSTRACION. SI; $a = 0$, EL TEOREMA CLARAMENTE SE VERIFICA. AHORA BIEN, SUPONGAMOS QUE: $a \neq 0$, POR TANTO $\frac{1}{a}$ ES UN NUMERO REAL Y COMO:

$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$ (YA QUE: $ab = 0$)

$= 0$. (TEOR. IV - 6)

PERO: $\frac{1}{a}(ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b$ (PROP. C3)

$= 1 \cdot b$ (PROP. C6)

$= b$ (PROP. C5)

CON ESTAS IGUALDADES: $b = \frac{1}{a}(ab)$ Y $\frac{1}{a}(ab) = 0$, APLICANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TENDRA: $b = 0$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 9). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, SE TENDRA:

$(-a)b = -(ab)$

DEMOSTRACION.

$$
\begin{aligned}
ab + (-a)b &= ba + b(-a) && \text{(PROP. C2)}\\
&= b(\,a + (-a)\,) && \text{(PROP. C4)}\\
&= b \cdot 0 && \text{(PROP. C6)}\\
&= 0 && \text{(TEOR. IV - 6)}
\end{aligned}
$$

POR TAL MOTIVO $(-a)b$ ES INVERSO ADITIVO DE ab Y PUESTO QUE $-(ab)$ ES TAMBIEN INVERSO ADITIVO DE ab. APLICANDO EL TEOREMA IV - 3), SE TIENE QUE:

$(-a)b = -(ab)$ L.Q.Q.D.

COROLARIO IV - 1). $(-a)b = a(-b)$

DEMOSTRACION.

$$
\begin{aligned}
(-a)b &= -(ab) && \text{(TEOR. IV - 9)}\\
&= -(ba) && \text{(PROP. C2)}\\
&= (-b)a && \text{(TEOR. IV - 9)}\\
&= a(-b) && \text{(PROP. C2)}
\end{aligned}
$$

APLICANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$(-a)b = a(-b)$ L.Q.Q.D.

COROLARIO IV - 2). $(-1)b = -b$.

DEMOSTRACION.

$$
\begin{aligned}
(-1)b &= -(1 \cdot b) && \text{(TEOR. IV - 9)}\\
&= -b && \text{PROP. C5)}
\end{aligned}
$$

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$(-1)b = -b$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 10). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, SE TIENE:

$(-a)(-b) = ab$

DEMOSTRACION.

$$
\begin{aligned}
(-a)(-b) &= -\left[a(-b)\right] && \text{(TEOR. IV - 9)}\\
&= -\left[(-a)b\right] && \text{(COROL. IV - 1)}\\
&= -\left[-(ab)\right] && \text{(TEOR IV - 9)}\\
&= ab && \text{(TEOR. IV - 5)}
\end{aligned}
$$

APLICANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$(-a)(-b) = ab$ L.Q.Q.D.

COMENTARIO. LOS TEOREMAS IV - 9, IV - 10 Y EL COROLARIO IV - 1, NOS DECLARAN LO SIGUIENTE: CUANDO UN SIGNO AFECTA A UNA MULTIPLICACION DE DOS FACTORES, TAL SIGNO SE LE PUEDE ASOCIAR A CUALESQUIER DE TALES FACTORES, PERO EXCLUSIVAMENTE A UNO DE ELLOS, ES DECIR:

$$
-(ab) = \begin{cases} (-a)b \\ a(-b) \\ \cancel{(-a)(-b)} \end{cases}
$$

SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER.

DEFINICION IV - 1). LA OPERACION SUSTRACCION, SE DEFINE COMO UNA ADICION MEDIANTE LA IGUALDAD:

$a - b = a + (-b)$.

TEOREMA IV - 11). SIENDO; a, b, c TRES NUMEROS REALES CUALESQUIER, SE TENDRA:

$a(b - c) = ab - ac$.

DEMOSTRACION.

$$
\begin{aligned}
a(b - c) &= a\left[b + (-c)\right] && \text{(DEF. IV - 1)}\\
&= ab + a(-c) && \text{(PROP. C4)}\\
&= ab + (-a)c && \text{(COROL. IV - 1)}\\
&= ab + \left[-(ac)\right] && \text{(TEOR. IV - 9)}\\
&= ab - ac && \text{(DEF. IV - 1)}
\end{aligned}
$$

APLICANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$a(b - c) = ab - ac$ L.Q.Q.D.

SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, TAL QUE: $b \neq 0$.

DEFINICION IV - 2). LA OPERACION DIVISION, SE DEFINE COMO UNA MULTIPLICACION MEDIANTE LA IGUALDAD:

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right).$$

TEOREMA IV - 12). SIENDO; b UN NUMERO REAL CUALQUIER TAL QUE, $b \neq 0$,SE TIENE:

$$\frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$$

DEMOSTRACION.

$$-b\left(\frac{1}{-b}\right) = 1 \qquad \text{(PROP. C6)}$$

PERO COMO:

$$-b\left(-\frac{1}{b}\right) = b\left(\frac{1}{b}\right) \qquad \text{(TEOR. IV - 10)}$$

$$= 1 \qquad \text{(PROP. C6)}$$

AHORA BIEN, EN LAS IGUALDADES:

$$-b\left(\frac{1}{-b}\right) = 1 \quad ; \quad -b\left(-\frac{1}{b}\right) = 1$$

SE OBSERVA QUE TANTO $\frac{1}{-b}$ COMO $-\frac{1}{b}$, SON INVERSOS MULTIPLICATIVOS DE $-b$ APLICANDO EL TEOREMA IV - 4, SE CONCLUYE QUE ESTOS DEBEN SER IGUALES, ES DECIR: $\frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 13). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, TAL QUE $b \neq 0$, SE TIENE:

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

DEMOSTRACION. UTILIZANDO LA DEFINICION IV - 2, SE TIENE:

$$\frac{a}{-b} = a\left(\frac{1}{-b}\right)$$

$$= a\left(-\frac{1}{b}\right) \qquad \text{(TEOR. IV - 12)}$$

$= (-a)(\frac{1}{b})$ (COROL. IV - 1)

$= -(a\frac{1}{b})$ TEOR. IV - 9)

$= -\frac{a}{b}$ (DEF. IV - 2)

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 14). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, TAL QUE $b \neq 0$, SE TIENE:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

DEMOSTRACION. DE ACUERDO A LA DEFINICION IV - 2, SE TIENE:

$\frac{-a}{b} = (-a)(\frac{1}{b})$

$= -(a\frac{1}{b})$ (TEOR. IV - 9)

$= -\frac{a}{b}$ (DEF. IV - 2)

UTILIZANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 15). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, TAL QUE $b \neq 0$, SE TIENE:

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

DEMOSTRACION.ASI PUES, SE TIENE:

$\frac{-a}{-b} = -a(\frac{1}{-b})$ (DEF. IV - 2)

$= -a(-\frac{1}{b})$ (TEOR. IV - 12)

$= a(\frac{1}{b})$ (TEOR. IV - 10)

$= \frac{a}{b}$ (DEF. IV - 2)

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ L.Q.Q.D.

COMENTARIO. LOS TEOREMAS IV - 13; IV - 14; IV - 15 NOS DICEN LO SIGUIENTE: CUANDO UN SIGNO AFECTA A UNA DIVISION, TAL SIGNO SE LE PUEDE ASOCIAR AL NUMERADOR O BIEN AL DENOMINADOR, PERO EXCLUSIVAMENTE A UNO DE ELLOS. ES DECIR:

$$-\frac{a}{b} = \begin{cases} \frac{a}{-b} \\ \frac{-a}{b} \\ \cancel{\frac{-a}{-b}} \end{cases}$$

TEOREMA IV - 16). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, TALES QUE $a \neq 0$, $b \neq 0$, ENTONCES SE TENDRA:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

DEMOSTRACION.

$$\begin{aligned} ab\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right) &= ab \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} && \text{(PROP. C3)} \\ &= a\frac{1}{a} \cdot b\frac{1}{b} && \text{(PROP. C2)} \\ &= \left(a \cdot \frac{1}{a}\right)\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) && \text{(PROP. C3)} \\ &= (1)(1) && \text{(PROP. C6)} \\ &= 1 && \text{(PROP. C5)} \end{aligned}$$

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$$ab\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right) = 1$$

POR LO TANTO: $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ ES INVERSO MULTIPLICATIVO DE ab Y PUESTO QUE, $\frac{1}{ab}$

ES TAMBIEN INVERSO MULTIPLICATIVO DE ab, APLICANDO EL TEOREMA IV - 4, SE TENDRA: $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 17). SIENDO; a, b, c, d CUATRO NUMEROS REALES CUALESQUIER TALES QUE, $b \neq 0$, $d \neq 0$, ENTONCES SE TENDRA:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

DEMOSTRACION. UTILIZANDO LA DEFINICION IV - 2, SE TIENE:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a\left(\frac{1}{b}\right) \cdot c\left(\frac{1}{d}\right)$$

$$= ac\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d}\right) \qquad \text{(PROP. C2)}$$

$$= ac\left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right) \qquad \text{(PROP. C3)}$$

$$= ac\left(\frac{1}{bd}\right) \qquad \text{(TEOR. IV - 16)}$$

$$= \frac{ac}{bd} \qquad \text{(DEF. IV - 2)}$$

APLICANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ L.Q.Q.D.

LA APLICACION REPETIDA DE ESTE TEOREMA, NOS MUESTRA QUE, EL PRODUCTO DE NUMEROS DE LA FORMA $\frac{x}{y}$, ES IGUAL AL PRODUCTO DE TODOS LOS NUMERADORES, DIVIDIDO ENTRE EL PRODUCTO DE TODOS LOS DENOMINADORES.

TEOREMA IV - 18). SIENDO; a, b, c TRES NUMEROS REALES CUALESQUIER TALES QUE, $b \neq 0$, $c \neq 0$ ENTONCES SE TENDRA:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

DEMOSTRACION. MEDIANTE LA APLICACION DEL TEOREMA IV - 17, SE TIENE:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot c\left(\frac{1}{c}\right)$$ (DEF. IV - 2)

$$= \frac{a}{b} \cdot 1$$ (PROP. C6)

$$= \frac{a}{b}$$ (PROP. C5)

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE OBTIENE:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$ L.Q.Q.D.

ESTE TEOREMA DECLARA LO SIGUIENTE: UN NUMERO DE LA FORMA $\frac{x}{y}$, NO SE ALTERA, SI SE DIVIDE TANTO EL NUMERADOR COMO EL DENOMINADOR ENTRE UN MISMO NUMERO REAL DISTINTO DE CERO, O BIEN, CUANDO SE MULTIPLICAN AMBOS POR UN MISMO NUMERO REAL DISTINTO DE CERO.

TEOREMA IV - 19). SIENDO; a, b, c TRES NUMEROS REALES CUALESQUIER, TAL QUE $c \neq 0$, ENTONCES SE TENDRA:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

DEMOSTRACION. EMPLEANDO LA DEFINICION IV - 2, SE TIENE:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a\left(\frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{c}\right)a + \left(\frac{1}{c}\right)b$$ (PROP. C2)

$$= \frac{1}{c}(a + b)$$ (PROP. C4)

$$= (a + b)\frac{1}{c}$$ (PROP. C2)

$$= \frac{a+b}{c}$$ (DEF. IV - 2)

UTILIZANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$ L.Q.Q.D.

ESTE TEOREMA PUEDE EXTENDERSE A MAS DE DOS NUMEROS REALES DE LA FORMA $\frac{x}{y}$ Y DECIR QUE, LA SUMA DE NUMEROS DE LA FORMA $\frac{x}{y}$ QUE TENGAN EL MISMO DENOMINADOR, ES IGUAL AL NUMERO REAL QUE TIENE COMO NUMERADOR, A LA SUMA DE LOS NUMERADORES Y COMO DENOMINADOR, AL DENOMINADOR COMUN.

TEOREMA IV - 20). SIENDO; a, b, c, d CUATRO NUMEROS REALES CUALESQUIER, TALES QUE $b \neq 0$, $d \neq 0$, ENTONCES SE TENDRA:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

DEMOSTRACION. APLICANDO EL TEOREMA IV - 18, SE TIENE:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db}$$

$$= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \qquad \text{(PROP. C2)}$$

$$= \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{(TEOR. IV - 19)}$$

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

TEOREMA IV - 21). SIENDO; a, b, c, d CUATRO NUMEROS REALES CUALESQUIER, TALES QUE $b \neq 0$, $d \neq 0$, ENTONCES SE TENDRA:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

DEMOSTRACION. UTILIZANDO LA DEFINICION IV - 1, SE TIENE:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d} \right)$$

$$= \frac{a}{b} + \left(\frac{-c}{d} \right) \qquad \text{(TEOR. IV - 14)}$$

$$= \frac{ad + (-bc)}{bd} \qquad \text{(TEOR. IV - 20)}$$

$$= \frac{ad - bc}{bd} \qquad \text{(DEF. IV - 1)}$$

UTILIZANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE.

NOTACION. LA DIVISION ENTRE DOS NUMEROS REALES $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$, SE DENOTARA ASI:

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ O BIEN:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} .$$

TEOREMA IV - 22). SEA; $\frac{a}{b}$ UN NUMERO REAL CUALQUIER, ENTONCES SE TENDRA:

$$\frac{\frac{a}{b}}{1} = \frac{a}{b}$$

DEMOSTRACION. UTILIZANDO LA DEFINICION IV - 2, SE TIENE:

$$\frac{\frac{a}{b}}{1} = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$= \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} \qquad \text{(TEOR. IV - 17)}$$

$$= \frac{a}{b} \qquad \text{(PROP. C5)}$$

APLICANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, OBTENEMOS:

$$\frac{\frac{a}{b}}{1} = \frac{a}{b}$$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 23). SEA; $\frac{a}{b}$ UN NUMERO REAL TAL QUE, $\frac{a}{b} \neq 0$ ENTONCES SE TENDRA:

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

DEMOSTRACION. MEDIANTE LA APLICACION DEL TEOREMA IV - 17, SE TIENE:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{ab}{ba}$$

$= \frac{ab}{ab}$ (PROP. C2)

$= ab\left(\frac{1}{ab}\right)$ (DEF. IV - 2)

$= 1$ (PROP. C6)

UTILIZANDO LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right) = 1$.

ESTAS ULTIMAS EXPRESIONES ACLARAN QUE:

$\frac{b}{a}$ Y $\frac{1}{\frac{a}{b}}$ SON AMBOS INVERSOS MULTIPLICATIVOS DE $\frac{a}{b}$ Y POR EL TEOREMA IV-4

SE SABE QUE, EL INVERSO MULTIPLICATIVO DE CUALQUIER NUMERO REAL DISTINTO DE CERO ES UNICO, POR LO TANTO SE TENDRA:

$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 24). SIENDO; a, b, c, d CUATRO NUMEROS REALES, TALES QUE, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ ENTONCES SE TENDRA:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

DEMOSTRACION. UTILIZANDO LA NOTACION CORRESPONDIENTE, SE TIENE:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

MULTIPLICANDO EL NUMERADOR Y EL DENOMINADOR POR $\frac{d}{c} \neq 0$, OBTENEMOS:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}}$$ (TEOR. IV - 18)

$$= \frac{\frac{ad}{bc}}{\frac{cd}{dc}} \qquad \text{(TEOR. IV - 17)}$$

$$= \frac{\frac{ad}{bc}}{\frac{cd}{cd}} \qquad \text{(PROP. C2)}$$

$$= \frac{\frac{ad}{bc}}{cd\left(\frac{1}{cd}\right)} \qquad \text{(DEF. IV - 2)}$$

$$= \frac{\frac{ad}{bc}}{1} \qquad \text{(PROP. C6)}$$

$$= \frac{ad}{bc} \qquad \text{(TEOR. IV - 22)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad \text{(TEOR. IV - 17)}$$

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ L.Q.Q.D.

OBSERVACION. ESTE TEOREMA NOS CONDUCE A ESTABLECER LA SIGUIENTE REGLA: PARA DIVIDIR DOS NUMEROS REALES DE LA FORMA $\frac{x}{y}$, MULTIPLICAMOS EL NUMERADOR POR EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL DENOMINADOR.

TEOREMA IV - 25). SEAN; a, b, c TRES NUMEROS REALES. SI; $a + c = b + c$, ENTONCES: $a = b$. (ESTE TEOREMA ES CONOCIDO TAMBIEN COMO "LEY DE CANCELACION")

DEMOSTRACION. SI TENEMOS; $a + c = b + c$, SUMANDO $-c$ EN AMBOS LADOS DE ESTA IGUALDAD, OBTENEMOS:

$$a + c + (-c) = b + c + (-c)$$

$$a + 0 = b + 0 \qquad \text{(PROP. C6)}$$

$$a = b \qquad \text{(PROP. C5)}$$

L.Q.Q.D.

TEOREMA IV - 26). SEAN; a, b, c TRES NUMEROS REALES TAL QUE $c \neq 0$.
SI $ac = bc$, ENTONCES: $a = b$.(ESTE TEOREMA SE CONOCE COMO "SIMPLIFICACION")

DEMOSTRACION. SI TENEMOS; $ac = bc$, MULTIPLICANDO POR $\frac{1}{c}$ EN AMBOS LADOS DE ESTA IGUALDAD, SE TIENE:

$$ac\left(\frac{1}{c}\right) = bc\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$a\left(c\cdot\frac{1}{c}\right) = b\left(c\cdot\frac{1}{c}\right) \qquad \text{(PROP. C3)}$$

$$a\cdot 1 = b\cdot 1 \qquad \text{(PROP. C6)}$$

$$a = b \qquad \text{(PROP. C5)}$$

L.Q.Q.D.

LA LEY DE CANCELACION, PUEDE APLICARSE EN LA DEMOSTRACION DEL YA EXPUESTO TEOREMA IV - 5, EL CUAL, SE ENUNCIO COMO SIGUE:

TEOREMA IV - 27). SI ; a ES UN NUMERO REAL CUALQUIER, ENTONCES SE TENDRA:

$-(-a) = a$

DEMOSTRACION. POR LA PROPIEDAD C6, SE SABE QUE:

$a + (-a) = 0$ Y TAMBIEN QUE: $0 = (-a) + [-(-a)]$, PERO:

$$0 = -(-a) + (-a) \qquad \text{(PROP. C2)}$$

MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA, SE TIENE:

$$a + (-a) = -(-a) + (-a)$$

APLICANDO LA "LEY DE CANCELACION" , OBTENEMOS:

$a = -(-a)$ L.Q.Q.D.

ADEMAS, SE TIENE QUE TAMBIEN ES VERDADERO LO QUE A CONTINUACION SE DICE:

TEOREMA IV - 28). SEAN; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, ENTONCES SE TENDRA:

$-(a + b) = -a-b$

DEMOSTRACION. YA QUE:

$$(a + b) + [-(a + b)] = 0 \qquad \text{(PROP. C6)}$$

Y COMO:

$$(a + b) + (-a-b) = (a + b - a) - b \qquad \text{(PROP. C3); (DEF. IV-1)}$$
$$= (a - a + b) - b \qquad \text{(PROP. C2)}$$
$$= (0 + b) - b \qquad \text{(PROP. C6)}$$
$$= b - b \qquad \text{(PROP. C5)}$$
$$= 0 \qquad \text{(PROP. C6)}$$

YA QUE AMBOS:

$(a + b) + \left[-(a + b)\right]$; $(a + b) + (-a-b)$ RESULTAN SER IGUALES A CERO, ENTONCES SE TENDRA:

$$(a + b) + \left[-(a + b)\right] = (a + b) + (-a-b)$$

APLICANDO LA "LEY DE CANCELACION" , OBTENEMOS:

$-(a + b) = -a-b$ L.Q.Q.D.

EJEMPLOS: $4 = -(-4)$; $-(4 + 7) = -4-7 = -11$

$-(5 + 2 + 8) = -5-2-8 = -15$

AHORA BIEN, SI DESEAMOS CALCULAR, $-(a - b)$, PROCEDEREMOS DEL SIGUIENTE MODO:

$$-(a - b) = -\left[a + (-b)\right] \qquad \text{(DEF. IV - 1)}$$
$$= -a - (-b) \qquad \text{(TEOR. IV - 28)}$$
$$= -a + \left[-(-b)\right] \qquad \text{(DEF. IV - 1)}$$
$$= -a + b \qquad \text{(TEOR. IV - 5)}$$

POR LO TANTO: $-(a - b) = -a + b$.

ESTE CALCULO PUEDE GENERALIZARSE A MAS DE DOS TERMINOS, DEL SIGUIENTE MODO:

$a - (b + c - d) = a - b - c + d$

EJEMPLOS: $4 - (5 - 7) = 4 - 5 + 7 = 6$

$-6 - (-3 + 2) = -6 + 3 - 2 = -5$

$-(-4 - 7 + 5 - 1) = 4 + 7 - 5 + 1 = 7$

$2 - (-3 + 4 - 5 + 6) = 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = 0$

CAPITULO V

DE ACUERDO CON LA COMPLECION, EXISTE UNA CORRESPONDENCIA UNO A UNO, ENTRE EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES Y EL CONJUNTO DE LOS PUNTOS DE UNA RECTA ORIENTADA, TAL ES EL CASO EN QUE, CADA NUMERO REAL SE PUEDE REPRESENTAR COMO UN PUNTO DEL EJE DE ABSCISAS Y RECIPROCAMENTE, A CADA PUNTO DEL EJE DE ABSCISAS, SE LE PUEDE ASOCIAR UN NUMERO REAL, EL CUAL, ES LA DISTANCIA DIRIGIDA DEL ORIGEN HACIA ESE PUNTO (SU ABSCISA). POR ESTE MOTIVO, DECIMOS QUE TAL RECTA ESTA COMPLETAMENTE "LLENA" CON LAS REPRESENTACIONES GRAFICAS DE TODOS LOS NUMEROS REALES. A LA RECTA ASI CONSTRUIDA, SE LE CONOCE COMO: EJE REAL O RECTA NUMERICA.

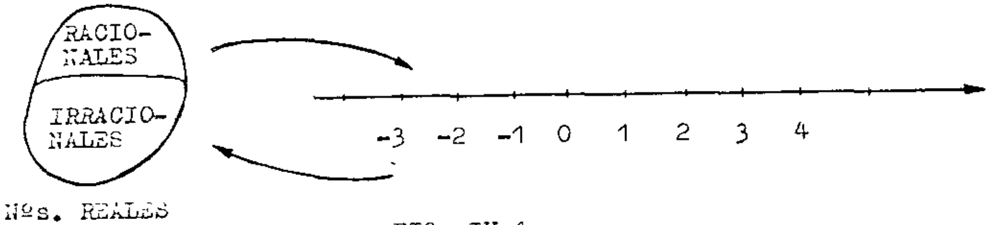

FIG. IV-1

EN BASE A ESTO ULTIMO, PUDIMOS OBTENER UN ORDEN EN EL CAMPO DE LOS NUMEROS REALES, INDUCIDO POR EL ORDEN QUE GUARDAN LOS PUNTOS DEL EJE DE ABSCISAS. ESTO SE LOGRO, EXPRESANDOLO DEL SIGUIENTE MODO:

SEAN; r_1 , r_2 DOS NUMEROS REALES Y SEAN:

P_1 EL PUNTO ASOCIADO A: r_1

P_2 EL PUNTO ASOCIADO A: r_2

DIREMOS QUE; $r_1 < r_2$ SI: $P_1 < P_2$. (ES DECIR: SI, $\overrightarrow{P_1P_2}$ TIENE ORIENTACION POSITIVA).

EN VISTA DE ESTO, SE OBSERVA LO SIGUIENTE: SI SE TIENEN DOS NUMEROS REALES DISTINTOS, EL PUNTO ASOCIADO AL MENOR DE ELLOS, ESTARA SITUADO EN LA RECTA NUMERICA A LA IZQUIERDA DEL PUNTO QUE LE CORRESPONDE AL NUMERO MAYOR Y VICEVERSA, SI SE TIENEN DOS PUNTOS EN LA RECTA NUMERICA, EL NUMERO REAL ASOCIADO AL PUNTO QUE SE ENCUENTRA A LA IZQUIERDA, SERA MENOR QUE EL NUMERO

REAL ASOCIADO AL PUNTO QUE SE LOCALIZA A LA DERECHA.

CUANDO SE CUMPLEN ESTAS CONDICIONES, SE DIRA, QUE LA CORRESPONDENCIA ENTRE LOS PUNTOS DE UNA RECTA DIRIGIDA Y LOS NUMEROS REALES, PRESERVA EL ORDEN ASI ESTABLECIDO.

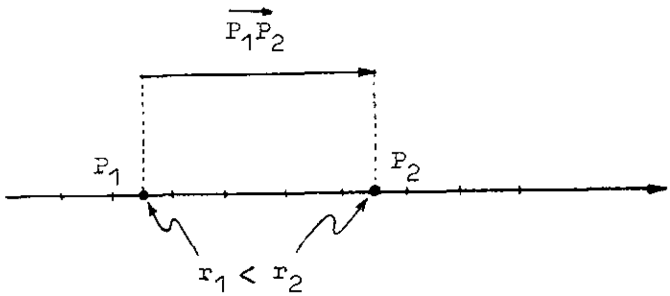

FIG. V-2

AHORA BIEN, A CONTINUACION TRATAREMOS DE ESTABLECER UN CONCEPTO GENERAL DE ORDEN EN UN CAMPO, DE MANERA QUE NO DEPENDA DIRECTAMENTE DE LOS PUNTOS ASOCIADOS EN EL EJE DE ABSCISAS, PARA TAL FIN, INTRODUCIREMOS LA SIGUIENTE DEFINICION.

SEA C, CAMPO.

DEFINICION V - 1). SE LE LLAMA CLASE POSITIVA (CONJUNTO DE ELEMENTOS POSITIVOS) EN C, A UN SUBCONJUNTO NO-VACIO C_P DE ELEMENTOS DEL CAMPO C, QUE SATISFACE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

i). SI; a, b PERTENECEN A C_P, ENTONCES: $a + b$ TAMBIEN PERTENECE A C_P. ESTO SIGNIFICA, QUE LA ADICION TIENE LA PROPIEDAD DE CERRADURA EN EL CONJUNTO C_P.

ii). SI; a, b PERTENECEN A C_P, ENTONCES $a \cdot b$ TAMBIEN PERTENECE A C_P. ES DECIR, LA MULTIPLICACION TIENE LA PROPIEDAD DE CERRADURA EN EL CONJUNTO C_P.

iii). SI; x PERTENECE A C, ENTONCES SE CUMPLE ESTRICTAMENTE UNA SOLA DE LAS SIGUIENTES VERSIONES:

x PERTENECE A C_P ; $x = 0$; $-x$ PERTENECE A C_P.

COMENTARIO. ESTA ULTIMA PROPIEDAD, SE CONOCE CON EL NOMBRE DE TRICOTOMIA

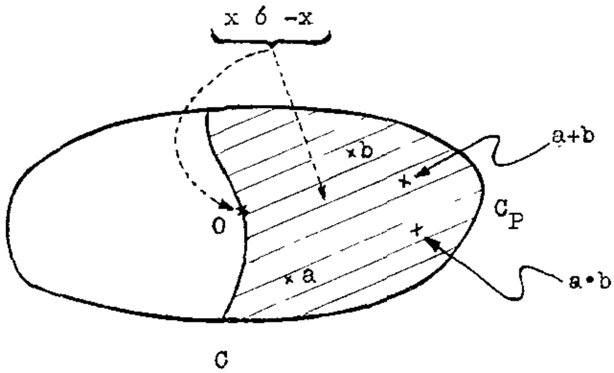

FIG. V-3

SI; C_P ES UNA CLASE POSITIVA EN UN CAMPO C , ENTONCES, DEFINAMOS COMO CLASE NEGATIVA EN C (CORRESPONDIENTE A C_P), AL CONJUNTO:

$C_N = \left\{ -x \in C \text{ , TAL QUE: } x \in C_P \right\}$

CLARAMENTE, SE OBSERVA QUE C_N NO TIENE ELEMENTOS EN COMUN CON C_P Y ADEMAS SE OBSERVA TAMBIEN QUE: $C = C_P \cup \{0\} \cup C_N$.

SI; C_P ES UNA CLASE POSITIVA DE ELEMENTOS DE UN CAMPO C , ENTONCES SE DIRA QUE C ESTA ORDENADO POR C_P Y QUE C ES UN CAMPO ORDENADO.

NOTACIONES.

DENOTAREMOS POR $x > 0$, SI: x PERTENECE A C_P .

EN ESTE CASO, SE DIRA QUE x ES UN ELEMENTO POSITIVO DE C.

$x \geqslant 0$, SI: x PERTENECE A C_P O BIEN $x = 0$. PARA LO CUAL, SE DIRA QUE x ES UN ELEMENTO NO-NEGATIVO.

UNA DE LAS PROPIEDADES DE UN CAMPO ORDENADO, ES QUE NOS PERMITE DECIDIR CUANDO UN ELEMENTO DE EL, ES ANTERIOR A OTRO Y ESTO SE LOGRA MEDIANTE LA SIGUIENTE DEFINICION.

DEFINICION V - 2). SIENDO; a, b DOS ELEMENTOS DEL CAMPO C. EXPRESARE SAREMOS, $a < b$ SI: $b - a$ PERTENECE A C_P .

ESCRIBIREMOS:

$a \leqslant b$, SI: $b - a$ PERTENECE A C_P , O BIEN, $b - a = 0$.

$a < b < c$, SI AMBAS: $a < b$; $b < c$, SE CUMPLEN.

$a \leqslant b \leqslant c$, SI AMBAS: $a \leqslant b$; $b \leqslant c$, SE CUMPLEN.

NOTACION. DENOTAREMOS POR; $a > b$, SI: $b < a$.

AHORA BIEN, SI TOMAMOS: $C = R$; $C_P = R_P$, SIENDO:

$R_P = \left\{ x \in R, \text{ TAL QUE: } x \text{ ES POSITIVO} \right\}$. HAREMOS VER QUE, R_P RESULTA SER CLASE POSITIVA EN R, PARA ELLO, COMO YA SE VIO ANTERIORMENTE, SE SABE QUE, LA ADICION Y LA MULTIPLICACION, AMBAS TIENEN LA PROPIEDAD DE CERRADURA EN EL CONJUNTO R_P. ES DECIR:

Vi_R). SI; a, b SON DOS NUMEROS REALES POSITIVOS, ENTONCES: $a + b$ TAMBIEN ES POSITIVO.

Vii_R). SI; a, b SON DOS NUMEROS REALES POSITIVOS, ENTONCES: $a \cdot b$ TAMBIEN ES POSITIVO.

AUNADA A ESTAS PROPIEDADES, SE TIENE LA SIGUIENTE:

$Viii_R$). SIENDO; x UN NUMERO REAL CUALQUIER. COMO HICIMOS VER ANTERIORMENTE, SE TIENE QUE SE CUMPLE ESTRICTAMENTE UNA SOLA DE LAS SIGUIENTES RELACIONES:

x ES POSITIVO; $x = 0$; $-x$ ES POSITIVO.

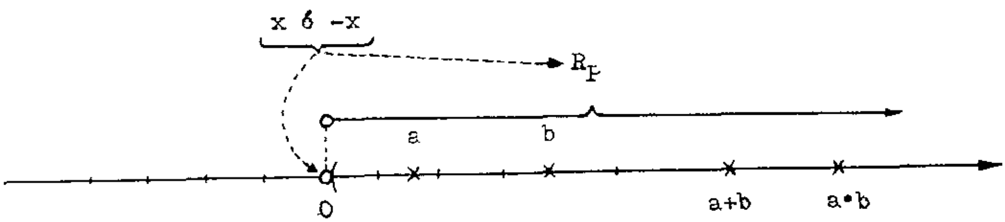

FIG. V-4

EN VIRTUD DE ESTO, SABEMOS QUE R_p ORDENA A R Y QUE R ES UN CAMPO ORDENADO. ESTO NOS PERMITE ENUNCIAR LA SIGUIENTE DEFINICION, LA CUAL RESULTA EQUIVALENTE A LA DEFINICION V - 2, EXPRESANDOSE ASI:

DEFINICION V - 3). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER. DIREMOS QUE a ES MENOR QUE b, SI: b - a ES UN NUMERO POSITIVO (O BIEN QUE: b - a PERTENECE A R_p).

NOTACION. LA EXPRESION; a ES MENOR QUE b, SE DENOTARA ASI: $a < b$.

EJEMPLOS.

$4 < 7$. PUESTO QUE: $7 - 4 = 3$, EL CUAL ES UN NUMERO POSITIVO.

$-5 < -2$. PUESTO QUE: $-2 - (-5) = -2 + 5 = 3$, ES POSITIVO.

$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ YA QUE: $-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, ES POSITIVO.

$-4 < 0$. YA QUE: $0 - (-4) = 0 + 4 = 4$, ES POSITIVO.

$0 \quad 4$. YA QUE: $4 - 0 = 4$, EL CUAL, ES UN NUMERO POSITIVO.

DIREMOS QUE, EL NUMERO b ES MAYOR QUE EL NUMERO a (DENOTADO POR; $b > a$), SI: $a < b$.

EJEMPLOS.

$7 > 4$, YA QUE, COMO VIMOS: $4 < 7$.

$-2 > -5$, PUESTO QUE: $-5 < -2$.

$-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$, YA QUE: $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$

$0 > -4$, DEBIDO A QUE: $-4 < 0$.

$4 > 0$, PUESTO QUE: $0 < 4$.

DIREMOS QUE; a ES MENOR O IGUAL QUE b (DENOTADO POR $a \leqslant b$), SI SE CUMPLE AL MENOS UNA DE ESTAS AFIRMACIONES: b - a ES POSITIVO ($a < b$), O BIEN: $b - a = 0$ ($a = b$).

ANALOGAMENTE, DIREMOS QUE: b ES MAYOR O IGUAL QUE a (DENOTADO POR $b \geqslant a$) SI SE CUMPLE AL MENOS UNA DE ESTAS RELACIONES: $a < b$, O BIEN: $a = b$.

EJEMPLOS.

$4 \leqslant 7$, YA QUE SE CUMPLE: $4 < 7$.

$7 \leqslant 7$, YA QUE SE CUMPLE: $7 = 7$.

$10 \geqslant 3$, DEBIDO A QUE SE CUMPLE: $10 > 3$.

$10 \geqslant 10$, PORQUE SE CUMPLE: $10 = 10$.

$-8 \leqslant -8$ Y $-8 \geqslant -8$, SE CUMPLEN AMBAS, DEBIDO A QUE: $-8 = -8$.

COMENTEARIO.

$7 \nleqslant 4$, YA QUE: $7 \nless 4$ Y $7 \neq 4$ (NINGUNA DE LAS DOS RELACIONES SE CUMPLEN)

AHORA BIEN, LA RELACION $<$, DESCRITA EN LA DEFINICION V - 3, ES EFECTIVAMENTE UNA RELACION DE ORDEN, YA QUE, CUMPLE LA PROPIEDAD TRANSITIVA Y CUMPLE TAMBIEN LA TRICOTOMIA, COMO A CONTINUACION LO PROBAREMOS.

PROPIEDAD TRANSITIVA.

SI; a, b, c SON TRES NUMEROS REALES CUALESQUIER, TALES QUE, $a < b$ Y $b < c$, ENTONCES POR LA DEFINICION V - 3, SE TIENE QUE AMBOS NUMEROS: $b - a$ Y $c - b$, SON POSITIVOS Y EN VIRTUD DE LA PROPIEDAD Vi_R, SE SABE QUE:

$(b - a) + (c - b)$ ES TAMBIEN UN NUMERO POSITIVO, PERO:

$(b - a) + (c - b) = c - a$.

POR LO CUAL SE TIENE QUE:

$c - a$ ES UN NUMERO POSITIVO Y MEDIANTE LA DEFINICION V - 3, SE CONCLUYE:

$a < c$. L.Q.Q.D.

PROPIEDAD DE TRICOTOMIA.

SI; a, b SON DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, ENTONCES, SE CUMPLIRA ESTRICTAMENTE, UNA SOLA DE LAS SIGUIENTES RELACIONES:

$a < b$; $a = b$; $a > b$.

DEMOSTRACION.

CONSIDERANDO EL NUMERO REAL $b - a$ Y APLICANDO LA PROPIEDAD $Viii_R$, SE OBSERVA QUE SE CUMPLE ESTRICTAMENTE UNA SOLA DE LAS SIGUIENTES RELACIONES:

$b - a$ ES POSITIVO; $b - a$ ES EL NUMERO CERO; $-(b - a)$ ES POSITIVO.

DE ESTO, SE INFIERE EL CUMPLIMIENTO DE UNA SOLA DE LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

1º). SI; $b - a$ ES POSITIVO, APLICANDO LA DEFINICION V - 3, SE TENDRA: $a < b$.

2º). SI; $b - a$ ES EL NUMERO CERO, ES DECIR, SI: $b - a = 0$, ENTONCES: $a = b$.

3º). SI; $-(b - a)$ ES POSITIVO, PUESTO QUE:

$$-(b - a) = -b + a$$
$$= a - b \qquad \text{(PROP. C2)}$$

ENTONCES; $a - b$ ES UN NUMERO POSITIVO Y APLICANDO LA DEFINICION V - 3, SE TENDRA QUE:

$b < a$, LO CUAL NOS DICE QUE:

$a > b$. L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 1). UN NUMERO REAL a , ES POSITIVO, SI Y SOLO SI: $a > 0$.

DEMOSTRACION.

SEA; a UN NUMERO REAL POSITIVO.

YA QUE: $a - 0 = a$

POR TANTO: $a - 0$ ES UN NUMERO POSITIVO Y POR LA DEFINICION V - 3, SE TIENE QUE: $0 < a$, POR LO TANTO: $a > 0$.

AHORA BIEN, SI $a > 0$, ENTONCES: $0 < a$ Y APLICANDO LA DEFINICION V - 3, SE TENDRA QUE: $a - 0$ ES UN NUMERO POSITIVO, PERO:

$a = a - 0$

POR LO TANTO: a ES UN NUMERO REAL POSITIVO. L.Q.Q.D.

CON ESTE ULTIMO TEOREMA, PODEMOS CONCLUIR LO SIGUIENTE:

$a \in R_P$ SI Y SOLO SI: $a > 0$.

TEOREMA V - 2). UN NUMERO REAL a , ES NEGATIVO, SI Y SOLO SI: $a < 0$.

DEMOSTRACION.

SEA; a UN NUMERO REAL NEGATIVO, ENTONCES: $-a$ ES POSITIVO.

YA QUE: $0 - a = -a$

POR TANTO: $0 - a$ ES UN NUMERO POSITIVO Y POR LA DEFINICION V - 3, SE

TIENE QUE: $a < 0$.

AHORA BIEN, SI: $a < 0$, APLICANDO LA DEFINICION V - 3, SE TIENE QUE: $0 - a$ ES UN NUMERO POSITIVO, PERO:

$-a = 0 - a$

POR LO TANTO, $-a$ ES UN NUMERO POSITIVO, LO CUAL NOS DICE QUE:

$-(-a)$ ES UN NUMERO NEGATIVO, PERO:

$-(-a) = a$ (TEOR. IV - 5)

POR TAL MOTIVO CONCLUIMOS QUE:

a ES UN NUMERO NEGATIVO. L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 3). SI; a ES UN NUMERO REAL TAL QUE, $a \neq 0$ ENTONCES: $a^2 > 0$.

DEMOSTRACION.

YA QUE; $a \neq 0$, POR LA PROPIEDAD DE TRICOTOMIA, SE OBSERVA QUE SE CUMPLE EXCLUSIVAMENTE UNA DE ESTAS RELACIONES: $a > 0$ <u>O</u> $-a > 0$.

SUPONGAMOS QUE; $a > 0$, ENTONCES SE TIENE:

$a \cdot a > 0$ (PROP. Vii_R)

Y COMO POR NOTACION; $a^2 = a \cdot a$

POR LO TANTO SE TENDRA:

$a^2 = a \cdot a = (-a)(-a) > 0$. (TEOR. IV - 10); (PROP. V_{ii_R})

ES DECIR: $a^2 > 0$. L.Q.Q.D.

COMO EN VIRTUD DEL TEOREMA IV - 6, SE SABE QUE: SI; $a = 0$. ENTONCES: $a^2 = a \cdot a = 0$.

POR LO TANTO, PODEMOS GENERALIZAR EL TEOREMA V - 3, ENUNCIANDO:

TEOREMA V - 4). SI; a ES UN NUMERO REAL, ENTONCES: $a^2 \geqslant 0$.

COMENTARIO. ESTE TEOREMA, NOS APORTA UNA CARACTERIZACION PRIMORDIAL DE LOS NUMEROS REALES, YA QUE: SI UN NUMERO x ES TAL QUE; $x^2 < 0$, ENTONCES SE TENDRA QUE x NO ES UN NUMERO REAL (SE DIRA QUE x ES UN NUMERO IMAGINARIO).

EJEMPLOS.

YA QUE; $\sqrt{-1}$ ES TAL QUE, $(\cancel{\sqrt{-1}})^{\cancel{2}} = -1 < 0$, ENTONCES: $\sqrt{-1}$ ES UN NU-

MERO IMAGINARIO. A ESTE NUMERO SE LE LLAMA i.

$(\sqrt{-9})^2 = -9 < 0$, POR LO TANTO, $\sqrt{-9}$ ES UN NUMERO IMAGINARIO,EN DONDE SE TENDRA: $\sqrt{-9} = \sqrt{(9)(-1)} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i$

NOTA. POR DEFINICION SE SABE: $1 \neq 0$.

POR LO TANTO: $1^2 > 0$. (TEOR. V - 3)

PERO: $1^2 = (1)(1) = 1$. (PROP. C5)

LO CUAL NOS DICE QUE: $1 > 0$.

TEOREMA V - 5). SEAN; a , b DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER. SI $a \leqslant b$ Y $b \leqslant a$, ENTONCES: $a = b$.

COMENTARIO. LA HIPOTESIS $a \leqslant b$ Y $b \leqslant a$, EXPRESA EL CUMPLIMIENTO DE AMBAS CONDICIONES DE MANERA CONJUNTA.

DEMOSTRACION. SUPONGAMOS LO CONTRARIO,ES DECIR QUE $a \neq b$ ($a = b$,FALSO). DE LA PROPIEDAD DE TRICOTOMIA EN LA DEFINICION V - 3 , SE SABE QUE SE CUMPLE ESTRICTAMENTE UNA SOLA DE LAS SIGUIENTES CONDICIONES: $a - b$ ES POSITIVO O BIEN $-(a - b) = b - a$ ES POSITIVO.

AHORA BIEN, UTILIZANDO LA MISMA DEFINICION V - 3 , SE OBSERVA QUE SE CUMPLE: $a < b$ O BIEN $b < a$ (VERIFICANDOSE EXCLUSIVAMENTE UNA SOLA DE ESTAS DOS CONDICIONES).

SI SE CUMPLE $a < b$, ENTONCES: $b \leqslant a$ ES FALSA. POR TANTO,EN CUALESQUIERA DE LAS DOS CONDICIONES: $a < b$ O BIEN $b < a$, SE OBSERVA QUE UNA PARTE DE LA HIPOTESIS: $a \leqslant b$ Y $b \leqslant a$ NO SE CUMPLE,POR LO TANTO TAL HIPOTESIS ES FALSA. ESTO ESTABLECE LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA EXPUESTO, ES DECIR:

SI; $a \leqslant b$ Y $b \leqslant a$, ENTONCES: $a = b$. L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 6). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES CUALESQUIER. SI $a < b$ ENTONCES SE TENDRA: $a + x \quad b + x$.

DEMOSTRACION. SI $a < b$, ENTONCES POR LA DEFINICION V - 3,SE TIENE QUE; $b - a$ ES UN NUMERO POSITIVO Y COMO:

$x - x = x + (-x)$ (DEF. IV - 1)

SIENDO: $x + (-x) = 0$ (PROP. C6)

ENTONCES: $x - x = 0$

AHORA BIEN, SUMANDO $b - a$ CON $x - x$ Y APLICANDO PROP. C5, SE TIENE:

$(b - a) + (x - x) = (b - a) + 0 = b - a$, EL CUAL ES UN NUMERO POSITIVO,

PERO, POR LAS PROPIEDADES; PROP. C2, PROP. C3 Y TEOR. IV - 28, SE TENDRA:

$(b - a) + (x - x) = (b + x) - (a + x)$.

POR TAL MOTIVO:

$(b + x) - (a + x)$ ES UN NUMERO POSITIVO.

APLICANDO LA DEFINICION V - 3, SE CONCLUYE:

$a + x < b + x$. L.Q.Q.D.

EJEMPLO.

COMO; $-3 < 7$, SI; $x = 4$, ENTONCES POR EL TEOREMA V - 6, SE TENDRA:

$-3 + 4 < 7 + 4$

ES DECIR:

$1 < 11$.

TEOREMA V - 7). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES CUALESQUIER.

SI; $a > b$, ENTONCES SE TENDRA: $a + x > b + x$.

DEMOSTRACION.

SI; $a > b$, ENTONCES: $b < a$ (POR DEFINICION)

POR LO TANTO:

$b + x < a + x$ (TEOR. V - 6)

Y EN CONSECUENCIA, CONCLUIMOS:

$a + x > b + x$ (POR DEFINICION)

L.Q.Q.D.

EJEMPLO.

COMO; $-2 > -5$, SI; $x = 3$, ENTONCES POR EL TEOREMA V - 7, SE TENDRA:

$-2 + 3 > -5 + 3$. ES DECIR:

$1 > -2$.

TEOREMA V - 8). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES CUALESQUIER.

SI; $a \leq b$, ENTONCES SE TENDRA: $a + x \leq b + x$.

DEMOSTRACION. PUESTO QUE; $a \leq b$, SIGNIFICA: $a < b$ O BIEN; $a = b$.

SI; $a < b$, UTILIZANDO EL TEOREMA V - 6, SE TIENE: $a + x < b + x$.

POR LO TANTO SE TENDRA:

$a + x < b + x$. YA QUE, BASTA QUE SE CUMPLA AL MENOS UNA DE LAS RELACIONES; $<$ Ó $=$ (EN ESTE CASO, SE CUMPLE $<$).

AHORA BIEN, SI; $a = b$, APLICANDO LA PROPIEDAD ADITIVA EXTENDIDA DE LOS NUMEROS RACIONALES HACIA LOS NUMEROS REALES, SE TENDRA: $a + x = b + x$,LUEGO

$a + x \leq b + x$. (YA QUE, SE CUMPLE LA IGUALDAD)

L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 9). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES CUALESQUIER. SI; $a \geq b$, ENTONCES SE TENDRA: $a + x \geq b + x$.

DEMOSTRACION. SI SE TIENE; $a \geq b$, ESTO SIGNIFICA: $a > b$ O BIEN; $a = b$.

SI; $a > b$, ENTONCES:

$a + x > b + x$ (TEOR. V - 7)

POR LO TANTO SE TENDRA QUE:

$a + x \geq b + x$. (BASTA QUE SE CUMPLA LA RELACION: $>$)

AHORA BIEN, SI; $a = b$, ENTONCES:

$a + x = b + x$ (POR EXTENSION DE LA PROPIEDAD ADITIVA HACIA EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES).

Y POR LO TANTO SE TENDRA QUE:

$a + x \geq b + x$ (BASTA QUE SE CUMPLA LA RELACION:$=$).

L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 10). SEAN; a, b, c, d CUATRO NUMEROS REALES CUALESQUIER.

SI; $a < b$ Y $c < d$, ENTONCES SE TENDRA: $a + c < b + d$.

DEMOSTRACION.

$a < b$ Y $c < d$, SIGNIFICAN RESPECTIVAMENTE QUE: $b - a$ y $d - c$ SON AMBOS POSITIVOS.

POR LO QUE TAMBIEN:

$b - a + d - c$ ES POSITIVO (PROP. Vi_R)

PERO: $b - a + d - c = b + d - a - c$ (PROP. C2)

Y COMO: $b + d - a - c = (b + d) - (a + c)$ (TEOR. IV- 28, PROP. C3)

POR LO TANTO: $(b + d) - (a + c)$ ES POSITIVO.

POR LO CUAL SE TENDRA QUE:

$a + c < b + d$. (DEF. V - 3)

L.Q.Q.D.

COMENTARIO. EN LA APLICACION DE LA EXTENSION DE LA PROPIEDAD MULTIPLICATIVA HACIA EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES, NOTAMOS QUE EN EL CASO DE TENER TRES NUMEROS REALES CUALESQUIER; a, b, x TALES QUE $a = b$, ENTONCES SE CUMPLE: $a \cdot x = b \cdot x$

SIN EMBARGO, EN EL CASO DE TENER; $a < b$, NO PODEMOS ASEGURAR QUE $a \cdot x$ SEA MENOR QUE $b \cdot x$. YA QUE, SI x ES UN NUMERO NEGATIVO, EN TONCES LA DESIGUALDAD SE INVIERTE.

ESTA DESIGUALDAD PERMANECERA INALTERABLE, EN EL CASO EN QUE x SEA UN NUMERO POSITIVO COMO LO HAREMOS NOTAR EN LOS SIGUIENTES EJEMPLOS.

EJEMPLO. SI; $4 < 7$ Y $x = -3$, ENTONCES:

$4(-3) = -12 > -21 = 7(-3)$

ES DECIR: $4(-3) > 7(-3)$.

OBSERVAMOS QUE LA DESIGUALDAD "MENOR QUE" CAMBIO A "MAYOR QUE" DESPUES DE MULTIPLICAR POR UN NUMERO NEGATIVO AMBOS LADOS DE TAL DESIGUALDAD.

EJEMPLO. SI; $4 < 7$ Y $x = 5$, ENTONCES SE TENDRA: $4(5) = 20 < 35 = 7(5)$.

NOTAMOS QUE LA DESIGUALDAD "MENOR QUE", NO SE ALTERO. (SIGUE SIENDO "MENOR QUE"), DESPUES DE MULTIPLICAR POR UN MISMO NUMERO POSITIVO, A AMBOS LADOS DE ELLA.

EJEMPLO. SI; $4 < 7$ Y $x = 0$, ENTONCES SE TENDRA: $4(0) = 0 = 7(0)$.

NOTAMOS QUE LA DESIGUALDAD "MENOR QUE", CAMBIO A "IGUAL QUE", DESPUES DE MULTIPLICAR POR CERO, A AMBOS LADOS DE TAL DESIGUALDAD.

TOMANDO EN CONSIDERACION ESTOS ULTIMOS EJEMPLOS, OBSERVAMOS QUE AL MULTIPLICAR A AMBOS LADOS DE UNA DESIGUALDAD POR UN MISMO NUMERO REAL, EL COM

PORTAMIENTO DE LA DESIGUALDAD DESPUES DE HECHA TAL *MULTIPLICACION*, DEPENDERA DIRECTAMENTE DEL FACTOR EMPLEADO. ESTO NOS CONDUCE A CONSIDERAR TRES CASOS:

i). SI EL FACTOR ES UN NUMERO POSITIVO, ENTONCES, SE CONSERVA LA DESIGUALDAD.

ii). SI EL FACTOR ES UN NUMERO NEGATIVO, ENTONCES, LA DESIGUALDAD SE INVIERTE.

iii). SI EL FACTOR ES EL *NUMERO CERO*, ENTONCES, LA DESIGUALDAD CAMBIA A SER UNA IGUALDAD.

NOTA. DE MANERA SIMILAR SE COMPORTARA LA DESIGUALDAD BAJO LA OPERACION DIVISION.

ESTOS CASOS SERAN ANALIZADOS DE MANERA FORMAL, EN LOS TEOREMAS QUE A CONTINUACION ENUNCIAREMOS.

TEOREMA V - 11). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES TALES QUE; $a < b$ Y $x > 0$, ENTONCES SE TENDRA: $ax < bx$.

DEMOSTRACION. SI; $a < b$, ENTONCES POR LA DEFINICION V - 3, SE TIENE QUE: $b - a$ ES UN NUMERO POSITIVO Y COMO $x > 0$, SE TIENE QUE:

x ES POSITIVO (TEOR. V - 1)

POR LO QUE: $(b - a)x$ ES POSITIVO (PROP. Vii_R)

PERO: $(b - a)x = bx - ax$ (TEOR. IV - 11 ; PROP. C2)

POR LO TANTO: $bx - ax$ ES POSITIVO

LO CUAL SIGNIFICA QUE:

$ax < bx$. L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 12). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES TALES QUE; $a < b$ Y $x < 0$, *ENTONCES* SE TENDRA: $ax > bx$.

DEMOSTRACION. $a < b$, SIGNIFICA QUE: $b - a$ ES POSITIVO Y COMO $x < 0$, ENTONCES SE TENDRA: x ES NEGATIVO. (TEOR, V - 2)

Y POR LO TANTO: $-x$ ES POSITIVO

POR LO QUE: $(b - a)(-x)$ ES POSITIVO (PROP. Vii_R)

PERO:

$(b - a)(-x) = -bx + ax$

$= ax - bx$ (TEOR. IV - 11 ; PROP. C2)

POR LO TANTO: $ax - bx$ ES POSITIVO.

ES DECIR: $bx < ax$ (DEF. V - 3)

LO CUAL SIGNIFICA QUE:

$ax > bx$ L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 13). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES TALES QUE, $a > b$ Y $x > 0$, ENTONCES SE TENDRA: $ax > bx$.

DEMOSTRACION. $a > b$ SIGNIFICA; $b < a$ Y COMO $x > 0$, ENTONCES:

$bx < ax$ (TEOR. V - 11)

DE LO CUAL SE INFIERE QUE:

$ax > bx$ L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 14). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES TALES QUE, $a > b$ Y $x < 0$, ENTONCES SE TENDRA: $ax < bx$.

DEMOSTRACION. $a > b$ SIGNIFICA; $b < a$ Y COMO $x < 0$, ENTONCES:

$bx > ax$ (TEOR. V - 12)

DE LO QUE SE INFIERE:

$ax < bx$ L.Q.Q.D.

COMENTARIO. COMO RECORDAREMOS: $a \leqslant b$ SIGNIFICA QUE SE CUMPLE AL MENOS UNA DE ESTAS DOS RELACIONES: $a < b$ O BIEN $a = b$.

TEOREMA V - 15). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES TALES QUE, $a \leqslant b$ Y $x > 0$, ENTONCES SE TENDRA: $ax \leqslant bx$.

DEMOSTRACION. $a \leqslant b$ SIGNIFICA; $a < b$ O BIEN $a = b$.

SI; $a < b$, COMO $x > 0$, ENTONCES:

$ax < bx$ (TEOR. V - 11)

Y POR LO TANTO SE TENDRA QUE:

$ax \leqslant bx$ (YA QUE AL MENOS SE CUMPLE LA RELACION: $<$)

AHORA BIEN, SI $a = b$, ENTONCES POR EXTENSION DE LA PROPIEDAD MULTIPLICA

TIVA HACIA EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES, SE TIENE QUE:

$ax = bx$

POR LO QUE SE TENDRA:

$ax \leqslant bx$ (YA QUE AL MENOS SE CUMPLE LA RELACION: $=$). L.Q.Q.D.

DE MODO SIMILAR, SE DEMOSTRARA EL SIGUIENTE TEOREMA.

TEOREMA V - 16). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES TALES QUE, $a \leqslant b$ Y $x < 0$, ENTONCES SE TENDRA: $ax \geqslant bx$.

DEMOSTRACION. $a \leqslant b$ SIGNIFICA; $a < b$ O BIEN $a = b$.

SI; $a < b$, COMO $x < 0$, ENTONCES:

$ax > bx$ (TEOR. V - 12)

POR LO QUE SE TENDRA:

$ax \geqslant bx$ (YA QUE AL MENOS SE CUMPLE LA RELACION: $>$).

AHORA BIEN, SI $a = b$ Y $x < 0$, ENTONCES POR LA EXTENSION DE LA PROPIEDAD MULTIPLICATIVA HACIA EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES, SE TENDRA QUE PARA TODO NUMERO REAL x:

$ax = bx$

POR LO QUE:

$ax \geqslant bx$ (YA QUE AL MENOS SE CUMPLE LA RELACION: $=$). L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 17). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES TALES QUE, $a \geqslant b$ Y $x > 0$, ENTONCES SE TENDRA: $ax \geqslant bx$.

DEMOSTRACION. COMO RECORDAREMOS; $a \geqslant b$, SIGNIFICA: $a > b$ O BIEN $a = b$.

SI; $a > b$ COMO $x > 0$, ENTONCES:

$ax > bx$ (TEOR. V - 13)

POR LO CUAL SE TENDRA:

$ax \geqslant bx$ (YA QUE AL MENOS SE CUMPLE LA RELACION: $>$).

AHORA BIEN, SI $a = b$, ENTONCES PARA TODO NUMERO REAL x:

$ax = bx$ (EXTENSION DE LA PROPIEDAD MULTIPLICATIVA)

POR LO QUE SE TENDRA:

$ax \geq bx$ (YA QUE AL MENOS SE CUMPLE LA RELACION: =). L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 18). SEAN; a, b, x TRES NUMEROS REALES TALES QUE, $a \geq b$ Y $x < 0$, ENTONCES SE TENDRA: $ax \leq bx$.

DEMOSTRACION. $a \geq b$ SIGNIFICA; $a > b$ O BIEN $a = b$.

SI; $a > b$ COMO $x < 0$, ENTONCES:

$ax < bx$ (TEOR. V - 14)

Y POR LO TANTO SE TENDRA QUE:

$ax \leq bx$ (YA QUE AL MENOS SE CUMPLE LA RELACION: <).

AHORA BIEN, SI $a = b$, ENTONCES, PARA TODO NUMERO REAL x SE TIENE:

$ax = bx$ (EXTENSION DE LA PROPIEDAD MULTIPLICATIVA)

Y POR LO TANTO SE TENDRA:

$ax \leq bx$ (YA QUE AL MENOS SE CUMPLE LA RELACION: =). L.Q.Q.D.

EJEMPLOS.

EJ. 1). SI; $6 < 8$ Y $3 > 0$, ENTONCES:

$6(3) = 18 < 24 = 8(3)$

ES DECIR: $6(3) < 8(3)$

EJ. 2). SI; $6 < 8$ Y $-3 < 0$, ENTONCES:

$6(-3) = -18 > -24 = 8(-3)$

ES DECIR: $6(-3) > 8(-3)$

EJ. 3). SI; $9 > 4$ Y $5 > 0$, ENTONCES:

$9(5) = 45 > 20 = 4(5)$

ES DECIR: $9(5) > 4(5)$

EJ. 4). SI; $9 > 4$ Y $-5 < 0$, ENTONCES:

$9(-5) = -45 < -20 = 4(-5)$

ES DECIR: $9(-5) < 4(-5)$

DE ACUERDO CON EL TEOREMA IV - 7, SE TIENE LO SIGUIENTE: SI; $a \neq 0$, ENTONCES $\frac{1}{a} \neq 0$.

PUES BIEN, CON LOS TEOREMAS QUE A CONTINUACION ENUNCIAREMOS, AFIRMARE-

MOS MAS AUN.

TEOREMA V - 19). SI; a ES UN NUMERO REAL TAL QUE $a > 0$, ENTONCES SE TENDRA QUE: $\frac{1}{a} > 0$.

DEMOSTRACION. SIENDO; $a > 0$, POR LA PROPIEDAD DE TRICOTOMIA, SE TIENE QUE: $a \neq 0$.

POR TANTO EXISTE $\frac{1}{a}$ Y ADEMAS: $\frac{1}{a} \neq 0$ (TEOR. IV - 7)

NUEVAMENTE POR LA PROPIEDAD DE TRICOTOMIA, SE TIENE QUE:

$\frac{1}{a} < 0$, O BIEN: $\frac{1}{a} > 0$.

SI SUPONEMOS QUE: $\frac{1}{a} < 0$, ENTONCES SE TENDRAN AMBAS DESIGUALDADES:

$a > 0$; $\frac{1}{a} < 0$.

APLICANDO EL TEOREMA V - 14, SE TENDRIA: $a(\frac{1}{a}) < 0(\frac{1}{a})$

Y COMO: $0(\frac{1}{a}) = 0$ (TEOR. IV - 6)

POR LO TANTO: $a(\frac{1}{a}) < 0$

PERO: $a(\frac{1}{a}) = 1$, POR TANTO SE TENDRIA QUE:

$1 < 0$. LO CUAL ES UNA CONTRADICCION.

POR TAL MOTIVO, SE CONCLUYE: $\frac{1}{a} > 0$. L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 20). SI; a ES UN NUMERO REAL TAL QUE $a < 0$, ENTONCES SE TENDRA QUE: $\frac{1}{a} < 0$.

SI; $a < 0$, ENTONCES: a ES NEGATIVO (TEOR. V - 2)

DE DONDE, $-a$ ES POSITIVO Y POR LO TANTO: $-a > 0$ (TEOR. V - 1)

DE LO CUAL SE TENDRA QUE: $\frac{1}{-a} > 0$ (TEOR. V - 19)

PERO: $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$ (TEOR. IV - 12)

POR LO QUE: $-\frac{1}{a} > 0$. Y POR LO TANTO:

$-\frac{1}{a}$ ES POSITIVO (TEOR. V - 1)

DE DONDE: $-\left(-\frac{1}{a}\right)$ ES NEGATIVO.

Y COMO: $-\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}$ (TEOR. IV - 5)

ENTONCES: $\frac{1}{a}$ ES NEGATIVO Y POR TAL MOTIVO:

$\frac{1}{a}<0$. (TEOR. V - 2)

L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 21). SEAN; a, b, c, d CUATRO NUMEROS REALES TALES QUE: $0<a<b$ Y $0<c<d$, ENTONCES SE TENDRA: $ac<bd$.

DEMOSTRACION. EL ENUNCIADO DE ESTE TEOREMA, NOS APORTA LAS SIGUIENTES RELACIONES: $a<b$; $c<d$; $b>0$; $c>0$.

APLICANDO EL TEOREMA V - 11, SE SABE QUE:

$ac<bc$ Y $cb<db$.

PERO: $cb<db \Longrightarrow bc<bd$. (PROP. C2)

EN SI,SE TIENEN:

$ac<bc$ Y $bc<bd$, QUE MEDIANTE LA PROPIEDAD TRANSITIVA DE LA RELACION $<$, OBTENDREMOS:

$ac<bd$. L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 22). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES TALES QUE: $ab>0$, ENTONCES, SE VERIFICA EXCLUSIVAMENTE UNA DE ESTAS AFIRMACIONES:

$a>0$ Y $b>0$, O BIEN: $a<0$ Y $b<0$.

COMENTARIO. ESTE TEOREMA DECLARA: SI EL PRODUCTO DE DOS FACTORES ES POSITIVO, ENTONCES AMBOS FACTORES SON POSITIVOS O AMBOS SON NEGATIVOS.

DEMOSTRACION. SI; $ab>0$, ENTONCES, NI a NI b PUEDEN SER IGUALES A CERO. YA QUE, SI ALGUNO DE ELLOS ES CERO, ENTONCES:

$ab=0$ (TEOR. IV - 6)

LO CUAL CONTRADIRIA LA HIPOTESIS. POR TAL MOTIVO, SI SUPONEMOS QUE:

$a>0$, SE TENDRA:

$\frac{1}{a} > 0$ (TEOR. V - 19)

Y POR TANTO:

$\frac{1}{a}(ab) > 0$ (PROP. V_{ii_R})

PERO: $\frac{1}{a}(ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b$ (PROP. C3)

Y COMO: $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ (PROP. C6)

ENTONCES: $\frac{1}{a}(ab) = 1 \cdot b$

Y PUESTO QUE: $1 \cdot b = b$ (PROP. C5)

POR LO TANTO SE TENDRA:

$\frac{1}{a}(ab) = b$

LO CUAL NOS DICE QUE:

$b > 0$

AHORA BIEN, SI SUPONEMOS QUE: $a < 0$, ENTONCES: $\frac{1}{a} < 0$. (TEOR. V - 20)

Y POR TANTO:

$\frac{1}{a}(ab) < \frac{1}{a}(0) = 0$ (TEOR. V - 14 ; TEOR. IV - 6)

ES DECIR: $\frac{1}{a}(ab) < 0$

PERO: $\frac{1}{a}(ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b$ (PROP. C3)

Y COMO: $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ (PROP. C6)

ENTONCES: $\frac{1}{a}(ab) = 1 \cdot b$

Y PUESTO QUE: $1 \cdot b = b$ (PROP. C5)

POR LO TANTO SE TENDRA:

$\frac{1}{a}(ab) = b$

LO CUAL NOS DICE QUE:

$b < 0$. L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 23). SIENDO; a,b DOS NUMEROS REALES TALES QUE: $ab < 0$, ENTONCES SE TIENEN; $a < 0$ Y $b > 0$, O BIEN $a > 0$ Y $b < 0$.

DEMOSTRACION. SI; $ab < 0$, ENTONCES: $-ab > 0$.

POR EL COMENTARIO A LOS TEOREMAS IV - 9, IV - 10 Y EL COROLARIO IV - 1 SE SABE QUE:

$$-ab = \begin{cases} (-a)b \\ \\ a(-b) \end{cases}$$

EN EL 1º CASO.

SI; $-ab = (-a)b > 0$.

APLICANDO EL TEOREMA V - 22, SE TENDRA:

$-a > 0$ Y $b > 0$. O BIEN, $-a < 0$ Y $b < 0$

LO CUAL NOS INDICA QUE:

$a < 0$ Y $b > 0$. O BIEN, $a > 0$ Y $b < 0$

EN EL 2º CASO.

SI; $-ab = a(-b) > 0$.

APLICANDO EL MISMO TEOREMA V - 22, SE TENDRA:

$a > 0$ Y $-b > 0$. O BIEN, $a < 0$ Y $-b < 0$

DE LO QUE SE INFIERE:

$a > 0$ Y $b < 0$. O BIEN, $a < 0$ Y $b > 0$

SE OBSERVA QUE EN AMBOS CASOS SE CUMPLE EL TEOREMA.

L.Q.Q.D.

TEOREMA V - 24). SI n ES CUALQUIER NUMERO NATURAL, ENTONCES: $n > 0$.

DEMOSTRACION. ESTE TEOREMA SE DEMOSTRARA POR INDUCCION MATEMATICA DEL SIGUIENTE MODO.

EL TEOREMA ES CIERTO PARA $n = 1$, YA QUE:

$1 > 0$ (NOTA DEL TEOREMA V - 4)

COMO SE DESIGNA: $2 = 1 + 1$

Y PUESTO QUE: $1 + 1 > 0$ (DEF. V - 2, Vi_R)

ENTONCES: $2 > 0$.

LO CUAL INDICA QUE EL TEOREMA VALE PARA $n = 2$.

SUPONGAMOS QUE EL TEOREMA ES CIERTO PARA $n = k$, ES DECIR: $k > 0$.

COMO SE TIENE QUE: $1 > 0$.

ENTONCES: $k + 1 > 0$ (DEF. V - 1, Vi_R)

LUEGO, EL TEOREMA ES VALIDO PARA CUALQUIER NUMERO NATURAL.

ES DECIR: $n > 0$ PARA TODOS LOS NUMEROS NATURALES.

L.Q.Q.D.

EL TEOREMA QUE A CONTINUACION SE ENUNCIARA, NOS APORTA UNA PROPIEDAD IM PORTANTE DE LOS NUMEROS REALES, LA CUAL SE EXPRESARA DEL SIGUIENTE MODO: "SI SE TIENEN DOS NUMEROS REALES DISTINTOS, SIEMPRE EXISTIRA UN TERCER NU MERO REAL ENTRE ELLOS". ESTE HECHO, NOS CONDUCE AL SIGUIENTE RESULTADO: "NO EXISTEN NUMEROS REALES CONSECUTIVOS".

TEOREMA V - 25). SIENDO; a, b DOS NUMEROS REALES TALES QUE, $a < b$, ENTONCES EXISTE UN NUMERO REAL c, QUE CUMPLE LO SIGUIENTE: $a < c < b$.

DEMOSTRACION.

SE SABE QUE: $2 > 0$ (TEOR. V - 24)

POR LO QUE: $\frac{1}{2} > 0$ (TEOR. V - 19)

PUES BIEN, SI; $a < b$, ENTONCES POR LA DEFINICION V - 3, SE TIENE QUE: $b - a$ ES UN NUMERO POSITIVO.

CONSIDEREMOS EL NUMERO $\frac{a + b}{2}$

YA QUE: $$\frac{a + b}{2} - a = \frac{a + b - 2a}{2}$$
$$= \frac{b - a}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(b - a).$$

PERO: $\frac{1}{2}(b - a) > 0$ (PROP. V_{ii_R})

POR LO TANTO: $\frac{a + b}{2} > a$

ES DECIR: $a < \frac{a+b}{2}$ (DEF. V - 3)

Y PUESTO QUE:

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b - a - b}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(b - a).$$

PERO: $\frac{1}{2}(b - a) > 0$ (PROP. V_{ii_R})

POR LO TANTO: $b - \frac{a+b}{2} > 0$

ES DECIR: $\frac{a+b}{2} < b$ (DEF. V - 3)

Y COMO SE SABIA QUE: $a < \frac{a+b}{2}$

COMBINANDO ESTOS DOS RESULTADOS, SE TENDRA:

$a < \frac{a+b}{2} < b.$

POR ULTIMO, LLAMANDO c AL NUMERO $\frac{a+b}{2}$, OBTENDREMOS:

$a < c < b.$ L.Q.Q.D.

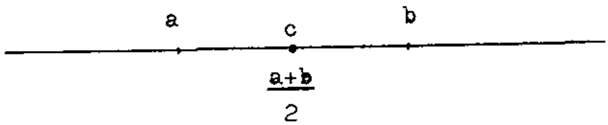

FIG. V - 5

COMENTARIO. SI TOMAMOS $a = 0$, ESTE TEOREMA IMPLICA LO SIGUIENTE: DADO UN NUMERO REAL ESTRICTAMENTE POSITIVO $(b > 0)$, EXISTE OTRO NUMERO REAL MENOR Y ESTRICTAMENTE POSITIVO (LLAMADO: $\frac{1}{2}b$) TAL QUE, NO EXISTE NUMERO REAL ESTRICTAMENTE POSITIVO QUE SEA MINIMO.

CAPITULO VI

VALOR ABSOLUTO.

SI; x ES UN NUMERO REAL TAL QUE: $x \neq 0$. LA PROPIEDAD DE TRICOTOMIA ASEGURA QUE UNO DE LOS NUMEROS x O BIEN -x ES ESTRICTAMENTE POSITIVO.

CONSIDERANDO ESTO ULTIMO, SE DENOTA AL VALOR ABSOLUTO DE x MEDIANTE EL SIMBOLO $|x|$ Y SE DEFINE ASI:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{SI: } x > 0 \\ 0 & \text{SI: } x = 0 \\ -x & \text{SI: } x < 0 \end{cases}$$

ESTO SIGNIFICA LO SIGUIENTE: EL VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL ES IGUAL AL MISMO NUMERO, SI TAL NUMERO ES POSITIVO; IGUAL AL SIMETRICO DEL NUMERO, SI DICHO NUMERO ES NEGATIVO E IGUAL A CERO, SI EL NUMERO ES CERO.

POR TAL MOTIVO SI $x \neq 0$, ENTONCES EL VALOR ABSOLUTO DE x SE DEFINE COMO EL NUMERO ESTRICTAMENTE POSITIVO DE LA PAREJA: $(x , -x)$. SI $x = 0$, ENTONCES EL VALOR ABSOLUTO DE x SE DEFINE COMO CERO.

LA ANTERIOR DEFINICION, TIENE EL SIGUIENTE COMPORTAMIENTO: A CADA NUMERO REAL, SE LE ASIGNA COMO VALOR ABSOLUTO UN NUMERO NO-NEGATIVO, DE TAL MANERA QUE A LOS NUMEROS x Y -x SE LES ASIGNA EL MISMO VALOR ABSOLUTO.

TEOREMA VI - 1). SI; x ES UN NUMERO REAL, ENTONCES: $|x| = |-x|$.

DEMOSTRACION. SI; $x = 0$, ENTONCES SE TENDRA: $|x| = |0| = |-0| = |-x|$.

SI $x \neq 0$, LA PROPIEDAD DE TRICOTOMIA ASEGURA: $x < 0$, O BIEN $x > 0$.

SI CONSIDERAMOS $x < 0$, ENTONCES: $|x| = -x$; COMO $-x > 0$, SE TIENE QUE: $|-x| = -x$. POR LO QUE, $|x| = -x = |-x|$.

AHORA BIEN, SI $x > 0$, ENTONCES: $|x| = x$; COMO $-x < 0$, SE TIENE QUE: $|-x| = -(-x) = x$. POR LO QUE, $|x| = x = |-x|$.

SE OBSERVA QUE EN LOS TRES CASOS SE CUMPLE EL TEOREMA. L.Q.Q.D.

TEOREMA VI - 2). SI; x, y SON DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, ENTONCES:

$|xy| = |x||y|$

DEMOSTRACION. PARA ESTO, CONSIDEREMOS CUATRO CASOS.

1º CASO). SI: $x > 0$; $y > 0$.

POR LA PROPIEDAD V_{ii_R} , SE TIENE QUE:

$xy > 0.$

POR TAL MOTIVO: $|x| = x$; $|y| = y$; $|xy| = xy$

LUEGO: $|xy| = xy = |x||y|$

POR LO TANTO: $|xy| = |x||y|$

2º CASO). SI: $x < 0$; $y > 0$.

ENTONCES: $xy < 0$ (TEOR. V - 11)

POR LO CUAL: $|x| = -x$; $|y| = y$; $|xy| = -(xy)$

COMO: $-(xy) = (-x)y$ (TEOR. IV - 9)

ENTONCES SE TENDRA: $|xy| = -(xy) = (-x)y = |x||y|$

POR LO TANTO: $|xy| = |x||y|$

3º CASO). SI: $x > 0$; $y < 0$.

DE ESTO SE TIENE QUE: $xy < 0$ (TEOR. V - 14)

POR LO QUE: $|x| = x$; $|y| = -y$; $|xy| = -(xy)$

COMO: $-(xy) = x(-y)$ (TEOR. IV - 9 ; COROL. IV - 1)

ENTONCES: $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x||y|$

POR LO TANTO: $|xy| = |x||y|$

4º CASO). SI: $x < 0$; $y < 0$.

SE TIENE QUE: $xy > 0$ (TEOR. V - 12)

LUEGO: $|x| = -x$; $|y| = -y$; $|xy| = xy$

COMO: $(-x)(-y) = xy$ (TEOR. IV-10)

ENTONCES SE TENDRA: $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

POR LO TANTO: $|xy| = |x||y|$

SE OBSERVA QUE EN LOS CUATRO CASOS SE CUMPLE EL TEOREMA.

L.Q.Q.D.

TEOREMA VI - 3). SEA k UN NUMERO REAL, TAL QUE $k \geqslant 0$. $|x| \leqslant k$ SI Y SOLO SI: $-k \leqslant x \leqslant k$.

DEMOSTRACION. SI; $|x| \leqslant k$, POR DEFINICION SE SABE, QUE EL VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL, ES COTA SUPERIOR TANTO DEL PROPIO NUMERO, COMO DEL SIMETRICO DE ESTE. ES DECIR:

$x \leqslant |x| \quad ; \quad -x \leqslant |x|$

COMO: $|x| \leqslant k$

ENTONCES: $x \leqslant k \quad ; \quad -x \leqslant k$

YA QUE; $-x \leqslant k$, MULTIPLICANDO A AMBOS LADOS DE ESTA DESIGUALDAD POR -1 SE OBTIENE:

$-x(-1) \geqslant k(-1)$ (TEOR. V - 12)

LUEGO: $x \geqslant -k$

ES DECIR: $-k \leqslant x$

Y COMO SE SABE QUE: $x \leqslant k$

COMBINANDO ESTOS ULTIMOS RESULTADOS, OBTENEMOS:

$-k \leqslant x \leqslant k$

AHORA BIEN, SI SE TIENE: $-k \leqslant x \leqslant k$

ENTONCES: $-k \leqslant x \quad ; \quad x \leqslant k$

MULTIPLICANDO POR -1 A AMBOS LADOS DE LA DESIGUALDAD $-k \leqslant x$, OBTENEMOS:

$-k(-1) \geqslant x(-1)$ (TEOR. V - 12)

POR LO QUE: $k \geqslant -x$

ES DECIR: $-x \leqslant k$

POR LO TANTO SE TENDRA: $x \leqslant k \quad ; \quad -x \leqslant k$

DE LO CUAL SE DESPRENDE:

$|x| \leqslant k$. L.Q.Q.D.

TEOREMA VI - 4). SI; x ES CUALQUIER NUMERO REAL, ENTONCES

$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

DEMOSTRACION. ESTO SE CUMPLE, AL APLICAR EL TEOREMA VI - 3 TOMANDO $k = |x|$. COMO SE SABE QUE: $|x| \geqslant 0$ Y $|x| \leqslant |x|$, ENTONCES SE TIENEN: $k = |x| \geqslant 0$ Y $|x| \leqslant |x| = k$, LAS CUALES SON LAS CONDICIONES NECESARIAS DEL TEOREMA VI - 3, POR LO TANTO SE CUMPLIRA:

$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, L.Q.Q.D.

TEOREMA VI - 5). SI; x, y SON DOS NUMEROS REALES CUALESQUIER, ENTONCES SE CUMPLE:

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$$

DEMOSTRACION.

POR EL TEOREMA VI - 4, SE SABE QUE:

$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$; $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$; $-|-y| \leqslant -y \leqslant |-y|$

YA QUE: $|-y| = |y|$ (TEOR. VI - 1)

ENTONCES: $-|y| \leqslant -y \leqslant |y|$

POR LO CUAL SE OBTIENE: $-|y| \leqslant \pm y \leqslant |y|$

Y PUESTO QUE: $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

ENTONCES:

$-|x| - |y| \leqslant x \pm y \leqslant |x| + |y|$ (TEOR. V - 10)

PERO: $-|x| - |y| = -(|x| + |y|)$

LUEGO: $-(|x| + |y|) \leqslant x \pm y \leqslant |x| + |y|$

DE ESTO SE INFIERE:

$|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$ (TEOR. VI - 3)

LO CUAL DEMUESTRA LA DESIGUALDAD DE LA DERECHA EN EL TEOREMA.

AHORA BIEN, UTILIZANDO ESTA DESIGUALDAD, SE TIENE:

$|x| = |x - y + y| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|$

ES DECIR: $|x| \leqslant |x - y| + |y|$

RESTANDO $|y|$ A AMBOS LADOS DE ESTA DESIGUALDAD:

$|x| - |y| \leqslant |x - y| + \cancel{|y|} - \cancel{|y|}$

POR LO TANTO: $|x| - |y| \leqslant |x - y|$

PROCEDIENDO DE MANERA ANALOGA, SE TIENE:

$|y| = |y - x + x| = |(y - x) + x| \leqslant |y - x| + |x|$

ES DECIR: $|y| - |x| \leqslant |y - x|$

PERO: $|y| - |x| = -(|x| - |y|)$; $|y - x| = |-(x - y)| = |x - y|$

POR LO QUE SE TIENE:

$-(|x| - |y|) \leqslant |x - y|$

MULTIPLICANDO POR -1, A AMBOS LADOS DE ESTA DESIGUALDAD, SE OBTIENE:

$|x| - |y| \geq -|x - y|$ (TEOR. V - 16)

ES DECIR: $-|x - y| \leq |x| - |y|$

Y COMO SE SABE QUE: $|x| - |y| \leq |x - y|$

COMBINANDO ESTAS DOS DESIGUALDADES, SE OBTIENE:

$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$

POR LO TANTO:

$||x| - |y|| \leq |x - y|$ (TEOR. VI - 3)

ESTO DEMUESTRA LA DESIGUALDAD DE LA IZQUIERDA CON EL SIGNO MENOS.

PUES BIEN, SI REEMPLAZAMOS $-y$ POR y EN ESTA DESIGUALDAD, SE OBTIENE:

$||x| - |-y|| \leq |x -(-y)|$

$||x| - |-y|| \leq |x + y|$

COMO: $|-y| = |y|$ (TEOR. VI - 1)

ENTONCES SE OBTENDRA:

$||x| - |y|| \leq |x + y|$

CON LO CUAL, SE DEMUESTRA LA DESIGUALDAD DE LA IZQUIERDA CON EL SIGNO MAS.

LUEGO, TAL DESIGUALDAD VALE PARA LOS SIGNOS MAS Y MENOS.

POR LO TANTO SE TENDRA:

$||x| - |y|| \leq |x \pm y|$

CON ESTO, SE DEMUESTRA LA DESIGUALDAD DE LA IZQUIERDA DEL TEOREMA.

EN CONCLUSION, SE TIENE QUE:

$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ L.Q.Q.D.

COMENTARIO. EL TEOREMA VI - 5, SE CONOCE COMO LA DESIGUALDAD DEL TRIANGULO Y SE PUEDE GENERALIZAR HACIA UNA CANTIDAD FINITA DE NUMEROS REALES, COMO SE OBSERVA A CONTINUACION.

TEOREMA VI - 6). SI; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ SON n CUALESQUIER NUMEROS REALES, ENTONCES SE CUMPLE:

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n|$$

DEMOSTRACION. ESTE TEOREMA SE DEMOSTRARA POR INDUCCION MATEMATICA DEL SIGUIENTE MODO.

EL TEOREMA ES CIERTO PARA $n = 2$, YA QUE:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \qquad \text{(TEOR. VI - 5)}$$

PUESTO QUE:

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + x_3| &= |(x_1 + x_2) + x_3| \\ &\leq |x_1 + x_2| + |x_3| && \text{(TEOR. VI -5)} \\ &\leq |x_1| + |x_2| + |x_3| && \text{(TEOR. VI - 5)} \end{aligned}$$

POR LO TANTO:

$$|x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

LO CUAL INDICA QUE EL TEOREMA VALE PARA $n = 3$.

SUPONGAMOS QUE EL TEOREMA ES CIERTO PARA $n = k$, ES DECIR:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|$$

COMO:

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}| &= |(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1}| \\ &\leq |x_1 + x_2 + \cdots + x_k| + |x_{k+1}| && \text{(TEOR.VI-5)} \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}| \end{aligned}$$

POR LO TANTO:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}|$$

LUEGO, EL TEOREMA ES VALIDO PARA CUALQUIER NUMERO NATURAL, ES DECIR: EL TEOREMA ES CIERTO PARA TODOS LOS NUMEROS NATURALES.

L.Q.Q.D.

INTERVALOS.

SE ESTABLECIO EL HECHO DE QUE TODO NUMERO REAL PUEDE REPRESENTARSE POR UN PUNTO EN LA RECTA NUMERICA Y RECIPROCAMENTE, DE TAL MANERA QUE, PODEMOS HABLAR INDISTINTAMENTE DE NUMERO REAL O BIEN, DE PUNTO REAL. TODO ESTO, NOS CONDUCE A REPRESENTAR EN LA RECTA NUMERICA A CONJUNTOS DE NUMEROS REALES MEDIANTE CONJUNTOS PUNTUALES Y VICEVERSA.

CIERTOS CONJUNTOS DE NUMEROS REALES, SE REPRESENTAN EN LA RECTA NUMERICA MEDIANTE ESTRUCTURAS LLAMADAS INTERVALOS, LOS CUALES SE DEFINEN DEL SIGUIENTE MODO.

DEFINICION VI - 2). EN LA RECTA NUMERICA, SE LE LLAMA INTERVALO, A UN CONJUNTO DE PUNTOS QUE ADMITE ALGUNA DE LAS SIGUIENTES FORMAS:

i). EL CONJUNTO VACIO: $\emptyset$; LA RECTA NUMERICA: R

ii). $\{x \in R : x < a\}$; $\{x \in R : x > a\}$; $\{x \in R : x \leqslant a\}$

$\{x \in R : x \geqslant a\}$ $\quad a \in R.$

iii). $\{x \in R : a < x < b\}$; $\{x \in R : a > x > b\}$

$\{x \in R : a \leqslant x \leqslant a\}$ $\quad a \in R,\ b \in R,\ a < b$

iv). $\{x \in R : a < x \leqslant b\}$; $\{x \in R : a \leqslant x < b\}$ $\quad a \in R,\ b \in R.$

CON RESPECTO AL INCISO ii). A ESTOS INTERVALOS SE LES LLAMAN RADIOS. AL PUNTO a (EL QUE DETERMINA A ESTOS INTERVALOS) SE LE LLAMA EXTREMO.

SI EN ESTE TIPO DE INTERVALO SE EXCLUYE AL EXTREMO, SE LE LLAMA RADIO ABIERTO, COMO SON LOS CASOS:

$\{x \in R : x < a\}$; $\{x \in R : x > a\}$ $\quad a \in R$

GRAFICAMENTE SE EXPRESAN RESPECTIVAMENTE ASI:

FIG. VI-1

EN DONDE LA EXCLUSION DE a, SE HACE VER GRAFICAMENTE MEDIANTE EL CIRCULO VACIADO DEL EXTREMO.

A TALES INTERVALOS SE LES ASIGNAN LAS NOTACIONES:

$\{x \in R : x < a\} = (-\infty\ ,\ a)$; $\{x \in R : x > a\} = (a\ ,\ \infty)$

NOTA. ∞ , $-\infty$ SON SIMPLEMENTE SIMBOLOS, LLAMADOS RESPECTIVAMENTE: INFINITO Y MENOS INFINITO, LOS CUALES NO DEBEN SER CONSIDERADOS COMO ELEMENTOS DE R.

SI EN ESTE MODELO DE INTERVALO SE INCLUYE AL EXTREMO, SE LE LLAMA RADIO CERRADO. COMO SON LOS CASOS:

$\{x \in R : x \leqslant a\}$; $\{x \in R : x \geqslant a\}$ $\quad a \in R$

GRAFICAMENTE SE EXPRESAN RESPECTIVAMENTE DEL SIGUIENTE MODO:

FIG. VI-2

EN DONDE LA INCLUSION DE a, SE HACE VER LLENANDO EL CIRCULO DEL EXTREMO.

ESTOS INTERVALOS SE DENOTAN ASI:

$\{x \in R : x \leqslant a\} = (-\infty, a]$; $\{x \in R : x \geqslant a\} = [a, \infty)$

CON REFERENCIA AL INCISO iii). ESTOS INTERVALOS RECIBEN EL NOMBRE DE CELDAS, LOS CUALES ESTAN CONSTITUIDOS POR TODOS LOS PUNTOS DE LA RECTA NUMERICA COMPRENDIDOS ENTRE DOS PUNTOS FIJOS DE ELLA. A TALES PUNTOS FIJOS SE LES LLAMAN EXTREMOS.

CUANDO ESTE INTERVALO EXCLUYE A AMBOS EXTREMOS, SE LE LLAMA CELDA ABIERTA. TAL ES EL CASO SIGUIENTE:

$\{x \in R : a < x < b\}$ $\quad a \in R, \; b \in R, \; a < b$

GRAFICAMENTE SE EXPRESA ASI:

FIG. VI-3

NOTACION. $\{x \in R : a < x < b\} = (a,b)$

OBSERVACION. $x \in R : x \in (-\infty, \infty) = R$

NOTACION. $R = (-\infty, \infty)$

CUANDO ESTE TIPO DE INTERVALO INCLUYE A AMBOS EXTREMOS, SE LE LLAMA CELDA CERRADA, COMO ES EL CASO:

$\{x \in R : a \leqslant x \leqslant b\}$ $\quad a \in R$, $b \in R$, $a < b$

GRAFICAMENTE SE EXPRESA DEL MODO SIGUIENTE:

FIG. VI-4

NOTACION. $\{x \in R : a \leqslant x \leqslant b\} = [a,b]$

EN EL CASO EN QUE $b = a$, SE TIENE EL INTERVALO: $\{x \in R : a \leqslant x \leqslant a\}$ EL CUAL DEGENERA EN EL PUNTO a, ES DECIR:

$\{x \in R : a \leqslant x \leqslant a\} = \{a\}$

CON REFERENCIA AL INCISO iv). A LOS INTERVALOS QUE EXCLUYEN A UNO DE LOS EXTREMOS E INCLUYEN AL OTRO, SE LES LLAMAN CELDAS SEMI-ABIERTAS O BIEN CELDAS SEMI-CERRADAS. TALES SON LOS CASOS:

$\{x \in R : a < x \leqslant b\}$; $\{x \in R : a \leqslant x < b\}$ $\quad a \in R$, $b \in R$, $a < b$

DE MANERA GRAFICA, SE EXPRESAN RESPECTIVAMENTE:

FIG. VI-5

NOTACION. CON $a \in R$, $b \in R$, $a < b$

$\{x \in R : a < x \leqslant b\} = (a , b]$; $\{x \in R : a \leqslant x < b\} = [a , b)$

PARA HABLAR DE LA LONGITUD DE UN INTERVALO, PRIMERAMENTE DIREMOS QUE LA LONGITUD ES UN NUMERO NO-NEGATIVO, ESTABLECIDA DEL MODO SIGUIENTE:

LA LONGITUD DE CADA UNO DE LOS INTERVALOS (a,b) ; $[a,b]$; $(a,b]$; $[a,b)$ SE DEFINE COMO: $b - a$, SIEMPRE Y CUANDO $a < b$.

LA LONGITUD DE CADA UNO DE LOS INTERVALOS (a,∞) ; $[a,\infty)$; $(-\infty, a)$; $(-\infty, a]$,SE DEFINE COMO: ∞.

LA LONGITUD DEL INTERVALO $\{x \in R : a \leqslant x \leqslant a\} = \{a\}$, SE DEFINE COMO CERO.

EN CONSECUENCIA,EXISTEN INTERVALOS FINITOS (LOS DE LONGITUD FINITA) E INTERVALOS INFINITOS (LOS DE LONGITUD: ∞).

TOMANDO EN CUENTA ESTAS DEFINICIONES,SURGE LA PREGUNTA:

¿ES POSIBLE QUE UN INTERVALO ABIERTO SE PUEDA HACER COINCIDIR CON UN INTERVALO CERRADO?

EN OTRAS PALABRAS,SIENDO (a,b) UN INTERVALO ABIERTO. ¿EXISTIRAN NUMEROS REALES c , d TALES QUE: $[c,d] = (a,b)$?

SIN PERDIDA DE GENERALIDAD,SE PUEDE CONSIDERAR EL CASO EN QUE $a = -1$, $b = 2$ Y HACERSE LA PREGUNTA DEL SIGUIENTE MODO:

¿EXISTEN NUMEROS REALES c , d TALES QUE: $[c,d] = (-1,2)$?

PARA PODER DAR RESPUESTA,SUPONGAMOS QUE EN EFECTO SE CUMPLE LA IGUALDAD $[c,d] = (-1,2)$ PARA ALGUN PAR DE NUMEROS REALES c,d. POR TAL MOTIVO SE DEBE TENER: $(-1,2) \subset [c,d]$ Y TAMBIEN $[c,d] \subset (-1,2)$

CONSIDERANDO PRIMERAMENTE $c = -1$; $d = 2$ SE OBSERVA FACILMENTE:

$(-1,2) \subset [-1,2] = [c,d]$

POR LO TANTO: $(-1,2) \subset [c,d]$

AL MISMO TIEMPO SE OBSERVA TAMBIEN,PUESTO QUE:

$(c,d) = (-1,2)$

ENTONCES: $(c,d) \subset (-1,2)$

LUEGO,EL PROBLEMA SE REDUCE A DEMOSTRAR QUE LOS EXTREMOS c,d DEL INTERVALO $[c,d]$ TAMBIEN PERTENECEN A $(-1,2)$.

PUES BIEN,DE ACUERDO A LA SUPOSICION $[c,d] = (-1,2)$

COMO: $c \in [c,d]$, ENTONCES SE TIENE QUE: $c \in (-1,2)$

ES DECIR: $c \leqslant c \leqslant d$, IMPLICA: $-1 < c < 2$

LUEGO: $c > -1$

COMO: $c + 1 > -1 + 1$ (TEOR. V - 7)

ENTONCES: $c + 1 > 0$

CONSIDERANDO EL NUMERO: $\frac{c - 1}{2}$

SE OBSERVA QUE:

$$\frac{c-1}{2} - (-1) = \frac{c-1}{2} + 1 = \frac{c - 1 + 2}{2} = \frac{c+1}{2} = \frac{1}{2}(c + 1)$$

PUESTO QUE: $\frac{1}{2} > 0$; $c + 1 > 0$

ENTONCES: $\frac{1}{2}(c + 1) > 0$ (PROP. Vii_R)

POR LO TANTO: $\frac{c-1}{2} - (-1) > 0$

LUEGO: $\frac{c-1}{2} > -1$

ES DECIR: $-1 < \frac{c-1}{2}$

AHORA BIEN,SI SE TOMA: $c - \frac{c-1}{2}$

EN TANTO QUE SE TIENE:

$$c - \frac{c-1}{2} = \frac{2c - c + 1}{2} = \frac{c+1}{2} = \frac{1}{2}(c + 1)$$

COMO SE TENIA: $\frac{1}{2}(c + 1) > 0$

ENTONCES: $c - \frac{c-1}{2} > 0$

POR LO QUE: $c > \frac{c-1}{2}$

LUEGO: $\frac{c-1}{2} < c$

COMBINANDO RESULTADOS, SE OBTIENE:

$$-1 < \frac{c-1}{2} < c$$

PUESTO QUE: $c < 2$

ENTONCES: $\frac{c-1}{2} < 2$

POR LO CUAL, SE TIENE: $-1 < \frac{c-1}{2} < 2$

ES DECIR: $\frac{c-1}{2} \in (-1,2)$

PUES BIEN, COMO SE SABE QUE: $\frac{c-1}{2} < c$

LA PROPIEDAD DE TRICOTOMIA ASEGURA QUE $\frac{c-1}{2} \geqslant c$, ES FALSO.

DE ESTO, SE INFIERE QUE $\frac{c-1}{2}$ NO PUEDE PERTENECER AL INTERVALO CERRADO $[c,d]$.

POR LO TANTO, EXISTE UN ELEMENTO ($\frac{c-1}{2}$) QUE PERTENECE AL INTERVALO ABIERTO $(-1,2)$, QUE NO PERTENECE AL INTERVALO CERRADO $[c,d]$ PARA CUALQUIER PAR DE NUMEROS REALES c, d.

SE HA DEMOSTRADO QUE NO EXISTE UN NUMERO REAL MAYOR QUE -1, QUE SEA MENOR QUE TODOS LOS NUMEROS MAYORES QUE -1.

DE MANERA ANALOGA SE PROCEDERIA, SI EN LUGAR DE TRATAR CON EL EXTREMO c, SE PROCEDIERA CON EL EXTREMO d, COMO A CONTINUACION LO HAREMOS:

SE PREGUNTA: ¿ $[c,d] = (-1,2)$ PARA ALGUN PAR DE NUMEROS REALES c , d ?

SUPONGAMOS: $[c,d] = (-1,2)$

COMO: $d \in [c,d]$, ENTONCES SE TIENE QUE: $d \in (-1,2)$

ES DECIR: $c \leqslant d \leqslant d$ IMPLICA: $-1 < d < 2$

ASI: $d < 2$

LUEGO: $2 - d > 0$

CONSIDERESE EL NUMERO REAL: $\frac{2 + d}{2}$

POR TANTO: $2 - \frac{2 + d}{2} = \frac{4 - 2 - d}{2} = \frac{2 - d}{2} = \frac{1}{2}(2 - d)$ EL CUAL ES POSITIVO, YA QUE:

$\frac{1}{2} > 0$; $2 - d > 0$ (PROP. V_{ii_R})

EN CONSECUENCIA: $2 - \frac{2 + d}{2} > 0$

DE DONDE: $\frac{2 + d}{2} < 2$ ------- (I)

DE MANERA SIMILAR, CONSIDERESE:

$\frac{2 + d}{2} - d = \frac{2 + d - 2d}{2} = \frac{2 - d}{2} = \frac{1}{2}(2 - d)$ EL CUAL COMO YA SE DIJO, ES POSITIVO.

LUEGO: $\frac{2 + d}{2} - d > 0$

POR LO TANTO: $d < \frac{2 + d}{2}$ ------- (II)

COMBINANDO (I) Y (II), SE OBTIENE:

$d < \frac{2 + d}{2} < 2$

Y EN TANTO QUE: $-1 < d$

SE TIENE: $-1 < \frac{2 + d}{2} < 2$

ES DECIR: $\frac{2 + d}{2} \in (-1,2)$

AHORA BIEN, YA QUE: $d < \frac{2 + d}{2}$

LA PROPIEDAD DE TRICOTOMIA ASEGURA QUE: $\frac{2 + d}{2} \leqslant d$ ES FALSO

COMO TAMBIEN SE TIENE: $c < d < \frac{2 + d}{2}$ ENTONCES, SE AFIRMA LO SIGUIENTE:

EXISTE UN ELEMENTO ($\frac{2 + d}{2}$) QUE PERTENECE AL INTERVALO ABIERTO $(-1,2)$ QUE NO PERTENECE AL INTERVALO CERRADO $[c,d]$ PARA CUALQUIER PAR DE NUMEROS REALES c , d.

HEMOS DEMOSTRADO QUE NO EXISTE UN NUMERO REAL MENOR QUE 2, QUE SEA MAYOR QUE TODOS LOS NUMEROS REALES MENORES QUE 2.

COMBINANDO LAS DOS ULTIMAS DEMOSTRACIONES,SE CONCLUYE LO SIGUIENTE:

$[c,d] \neq (-1,2)$ PARA CUALQUIER PAR DE NUMEROS REALES c , d.

L.Q.Q.D.

APENDICE

ENTRE LOS NUMEROS REALES NOTABLES, MENCIONAREMOS AL NUMERO e. PARA TRATAR LO REFERENTE A TAL NUMERO, PRIMERAMENTE ESTABLECEREMOS SU DEFINICION.

DEFINICION VII - 1). $e = \lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{1}{x}\right]^{x}$

SI ANALIZAMOS ESTA DEFINICION, SE OBSERVARA QUE EL VALOR DE e SE ENCUENTRA COMPRENDIDO ENTRE 2 Y 3 COMO LO HAREMOS VER EN LA SIGUIENTE PROPOSICION.

PROPOSICION VII - 1). $2 < e < 3$

EXPRESADO DE OTRO MODO, SE TRATA DE DEMOSTRAR:

$$2 < \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n} < 3$$

DEMOSTRACION. AL DESARROLLAR $\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n}$ POR EL BINOMIO DE NEWTON SIENDO n ENTERO POSITIVO, SE OBTIENE:

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n} = 1 + \frac{n}{1!}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{n(n-1)}{2!}\left[\frac{1}{n}\right]^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left[\frac{1}{n}\right]^{3} + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ \cdots\ 1}{n!}\left[\frac{1}{n}\right]^{n}$$

Y PUESTO QUE: $n(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-[n-1]) = n(n-1)(n-2)\ \cdots\ 1$

ENTONCES SE TENDRA:

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n} = 1 + \frac{n}{1!}\left[\frac{1}{n}\right] + \frac{n(n-1)}{2!}\left[\frac{1}{n}\right]^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left[\frac{1}{n}\right]^{3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-[n-1])}{n!}\left[\frac{1}{n}\right]^{n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{1!} + \frac{n(n-1)}{n^{2}}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^{3}}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-[n-1])}{n^{n}}\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$= 1 + \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\cdot\frac{1}{1!} + \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{n}\cdot n}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)}{\cancel{n}\cdot n^{2}}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-[n-1])}{\cancel{n}\cdot n^{n-1}}\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)}{n\cdot n}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-[n-1])}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{(n-1)\text{ veces}}}\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \left[\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right]\cdot\frac{1}{2!} + \left[\frac{n-1}{n}\right]\left[\frac{n-2}{n}\right]\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left[\frac{n-1}{n}\right]\left[\frac{n-2}{n}\right]\cdots\left[\frac{n-(n-1)}{n}\right]\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\cdot\frac{1}{2!} + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdots\left[1 - \frac{n-1}{n}\right]\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$= 2 + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\cdot\frac{1}{2!} + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdots\left[1 - \frac{n-1}{n}\right]\cdot\frac{1}{n!}$$

CLARAMENTE SE OBSERVA QUE SI $n \neq 1$, ENTONCES:

$$2 + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\cdot\frac{1}{2!} + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdots\left[1 - \frac{n-1}{n}\right]\cdot\frac{1}{n!} > 2$$

LUEGO: $\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n > 2$ ------- (I)

COMO: $1 > \left[1 - \frac{1}{n}\right]$; $1 > \left[1 - \frac{2}{n}\right]$; $1 > \left[1 - \frac{3}{n}\right]$; ....

SI EN LA EXPRESION:

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n = 2 + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\cdot\frac{1}{2!} + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdots\left[1 - \frac{n-1}{n}\right]\cdot\frac{1}{n!}$$

SE REEMPLAZA CADA UNA DE LAS DIFERENCIAS:

$1 - \frac{1}{n}$; $1 - \frac{2}{n}$; $1 - \frac{3}{n}$; .... POR EL NUMERO UNO (EL CUAL ES MAYOR QUE TODAS ELLAS), SE TENDRA QUE:

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n = 2 + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\cdot\frac{1}{2!} + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left[1 - \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{2}{n}\right]\cdots\left[1 - \frac{n-1}{n}\right]\cdot\frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

YA QUE: $2 = 2!$; $2^2 < 3!$; $2^3 < 4!$; .... ; Y EN GENERAL $2^{n-1} < n!$ PARA $n \geq 3$

ENTONCES: $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$; .... ; $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$

LUEGO: $2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

PERO: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1$. ESTO ULTIMO SE DEBE A QUE, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}$ ES UNA PROGRESION GEOMETRICA DE RAZON $r = \frac{1}{2}$, CUYA SUMA ES:

$$S_{n-1} = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right]}{-\cancel{\frac{1}{2}}} = -\left[\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1 \text{ . (YA QUE: } 0 < \frac{1}{2^{n-1}} < 1)$$

DE LO ANTERIOR SE OBSERVA QUE:

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \text{ . ES DECIR:}$$

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n < 3 \text{ ------- (II)}$$

COMBINANDO CON:

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n > 2 \text{ ------- (I)}$$

SE TENDRA: $2 < \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n < 3$

EN CONCLUSION:

$2 < e < 3$.

AHORA BIEN, SI $n \to \infty$, CONSIDERANDO PARA n VALORES ENTEROS POSITIVOS, TENDREMOS:

$$1 - \frac{1}{n} \to 1 - 0 = 1 \ ; \ 1 - \frac{2}{n} \to 1 - 0 = 1 \ ; \ \cdots \ ; \ 1 - \frac{k-1}{n} \to 1 - 0 = 1 \ .$$

Y ADEMAS:

$$1 - \frac{1}{n} \to 1 \ ; \ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \to (1)(1) = 1 \ ; \ \cdots \ ; \ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \to (1)(1)\cdots(1) = 1$$

POR LO QUE:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} \to \frac{1}{2!} \ ; \ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} \to \frac{1}{3!} \ ; \ \cdots \ ; \ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \to \frac{1}{k!}$$

LUEGO:

$$e = \lim_{n \to \infty}\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n =$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left\{1 + \frac{1}{1!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} + \cdots\right\} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots = 2.7182818285\text{----}$$

COMENTARIO. EQUIVALENTE A LA DEFINICION

$e = \lim_{n \to \infty}\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$ SE TIENE:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \qquad n \in N$$

COMO YA OBSERVAMOS, ESTA REPRESENTACION NOS PERMITIO OBTENER UNA BUENA APROXIMACION DEL NUMERO e, CUANDO SE TOMA UNA CANTIDAD FINITA DE TERMINOS, DEBIDO A QUE $\frac{1}{n!}$ DISMINUYE TAN RAPIDAMENTE QUE EL RESTO NO CONSIDERADO, RESULTA SER RELATIVAMENTE PEQUEÑO.

POR TAL MOTIVO, SI TOMAMOS LOS PRIMEROS $n+1$ SUMANDOS Y LLAMAMOS R_{n+1} AL RESTO DE ELLOS, OBTENEMOS:

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

EL CUAL ES POSITIVO, POR SER SUMA DE TERMINOS POSITIVOS, POR LO TANTO SE TENDRA:

$$0 < R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3}\cdot\frac{1}{n+4} + \cdots\right] \quad \text{FACTORIZANDO EN } (n+1)!$$

COMO: $n+1 < n+2 < n+3 < n+4 < \cdots$

ENTONCES: $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} > \frac{1}{n+4} > \cdots$

Y ADEMAS: $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3}$

ES DECIR: $\frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3}$

ANALOGAMENTE: $\frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3}\cdot\frac{1}{n+4}$

ES DECIR: $\frac{1}{(n+1)^3} > \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3}\cdot\frac{1}{n+4}$

Y ASI SUCESIVAMENTE, DE ESTO SE INFIERE LO SIGUIENTE:

$$\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\cdots\right] < \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}\cdots\right]$$

PERO: $1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots$ ES UNA PROGRESION GEOMETRICA INFINITA DE RAZON $\frac{1}{n+1}$, EN LA CUAL: $0 < \frac{1}{n+1} < 1$

Y POR LO TANTO: $S_k = \dfrac{1\left[\left(\frac{1}{n+1}\right)^k - 1\right]}{\frac{1}{n+1}-1} = \dfrac{1\,[0-1]}{\frac{1}{n+1}-1} = \dfrac{-1}{-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{n+\cancel{1}-\cancel{1}}{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n}$
SI: $k \to \infty$

DE ESTO ULTIMO, SE OBTIENE:

$$R_{n+1} \quad \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!\,(\cancel{n+1})}\cdot\frac{\cancel{n+1}}{n} = \frac{1}{n!\,n}$$

COMENTARIO. TAL Y COMO SE PROBO QUE $\sqrt{2}$ ES UN NUMERO IRRACION[illegible] [illegible]MO SE DEMOSTRARA LA IRRACIONALIDAD DEL NUMERO e Y PARA ESTO, SE PROCEDERA DEL SIGUIENTE MOL[illegible].

PROPOSICION VII - 2). e ES UN NUMERO IRRACIONAL.

DEMOSTRACION. PARA ESTO, SUPONGAMOS QUE e ES RACIONAL Y POR LO TANTO, PUEDE EXPRESARSE COMO DIVISION ENTRE DOS NUMEROS ENTEROS, ES DECIR:

$e = \frac{x}{y}$ CON $y \neq 0$. (CONVENCIONALMENTE TOMAREMOS $y > 0$ Y TAL QUE $\frac{x}{y}$ SEA UN RACIONAL SIMPLIFICADO. DE NO SER ASI, LO SIMPLIFICAREMOS PRIMERAMENTE).

POR DEFINICION SE TIENE:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

SI EN ESTA EXPRESION, CONSIDERAMOS LOS PRIMEROS $y+1$ SUMANDOS Y LLAMAMOS R_{y+1} AL RESTO DE ELLOS, SE OBTIENE:

$$e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{y!} \right) + R_{y+1} \,. \quad \text{EN DONDE}$$

$$R_{y+1} = \frac{1}{(y+1)!} + \frac{1}{(y+2)!} + \frac{1}{(y+3)!} + \cdots \qquad y \in N$$

POR LO QUE:

$$\frac{x}{y} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{y!} \right) + R_{y+1}$$

DE DONDE:

$$R_{y+1} = \frac{x}{y} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{y!} \right)$$

COMO SE SABE QUE: $0 < R_{y+1} < \frac{1}{y!y}$

ENTONCES:

$$0 < \frac{x}{y} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{y!} \right) < \frac{1}{y!y}$$

PUESTO QUE $y! > 0$, MULTIPLICANDO POR $y!$ CADA PARTE DE LAS DESIGUALDADES ANTERIORES, SE TENDRA:

$$0 = y!(0) < y! \left[\frac{x}{y} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{y!} \right) \right] < \cancel{y!}\left(\frac{1}{\cancel{y!}y} \right) = \frac{1}{y} \leqslant 1 \qquad \text{(TEOR. V - 11)}$$

LUEGO: $0 < y! \left[\frac{x}{y} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{y!} \right) \right] < 1$

PERO: $y! \left[\frac{x}{y} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{y!} \right) \right] = y!\left(\frac{x}{y} \right) - y!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{y!} \right) =$

$= (1)(2)(3)\cdots(y-1)x - \left(y! + \frac{y!}{1!} + \frac{y!}{2!} + \frac{y!}{3!} + \cdots + 1 \right)$

AHORA BIEN, DEBIDO A QUE EL MINUENDO DE ESTA SUSTRACCION ES ENTERO (POR SER UN PRODUCTO DE ENTEROS) Y EL SUSTRAENDO ES ENTERO TAMBIEN (POR SER UNA SUMA DE ENTEROS), ENTONCES LA DIFERENCIA ES UN NUMERO ENTERO Y POR TAL MOTIVO, EL NUMERO:

$y!\left[\frac{x}{y} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{y!}\right)\right]$ ES UN NUMERO ENTERO COMPRENDIDO ENTRE CERO Y UNO, LO CUAL ES UNA CONTRADICCION. POR LO TANTO, LA SUPOSICION INICIAL ES FALSA, ES DECIR: e NO ES UN NUMERO RACIONAL.

EN CONCLUSION: e ES NUMERO IRRACIONAL.

L.Q.Q.D.

B I B L I O G R A F I A

1. BARTLE ROBERT G., THE ELEMENTS OF REAL ANALYSIS.- JOHN WILEY AND SONS, INC., NEW YORK, 1980.
2. APOSTOL TOM M., MATHEMATICAL ANALYSIS.- ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC., MASSACHUSETTS, 1965.
3. WEISS • DUBISCH, HIGHER ALGEBRA FOR UNDERGRADUATE.- JOHN WILEY AND SONS, INC., NEW YORK, 1964.
4. HEMMERLING EDWIN M., FUNDAMENTALS OF COLLEGE GEOMETRY.- JOHN WILEY AND SONS, INC., NEW YORK, 1991.
5. TOMAS FRANCISCO, LOS NUMEROS REALES.- ASOCIACION NACIONAL DE UNIVERSIDADES E INSTITUTOS DE ENSEÑANZA SUPERIOR, MEXICO, 1973.
6. AYRES FRANK JR., CALCULUS.- McGRAW-HILL BOOK, Co., INC., U.S.A. 1978.
7. LIPSCHUTZ SEYMOUR, SET THEORY AND RELATED TOPICS.- McGRAW-HILL BOOK, Co. INC., U.S.A. 1977.