



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LOS PROCESOS
DE POISSON EN ESPACIOS EUCLIDIANOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARIA

PRESENTA:

SERGIO ALEJANDRO MUÑOZ MURATALLA

ASESOR: FIS. MANUEL VALADEZ RODRIGUEZ



DICIEMBRE, 2000



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Reconocimientos

Agradezco en primera instancia a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme permitido tener acceso a un verdadero ente social difusor de conocimiento universal, y en particular a su Campus Acatlán.

Al Fís. Manuel Valadez Rodríguez por aceptar formar parte en este proyecto. Por su apoyo incondicional.

Del mismo modo, quiero expresar mi gratitud al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por el apoyo material y humano que me otorgó durante todo el proceso que culminó con este trabajo, y en especial al Dr. José Alfredo López Mimbela por el tiempo que me dedicó, sus sugerencias, y su paciencia. Aprendí de él.

S.A.M.M.

Guanajuato, México.
Octubre del 2000.

Introducción

El presente trabajo se ocupa de estudiar algunas propiedades y características fundamentales de los procesos de Poisson en el espacio euclidiano d -dimensional \mathbb{R}^d . Estos procesos son subconjuntos aleatorios $\Phi(\omega) \subset \mathbb{R}^d$ definidos en algún espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) (donde Ω es un conjunto no vacío, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y P es una probabilidad definida en \mathcal{F}), que están sujetos a las siguientes dos condiciones:

(1) Si $A \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto de Borel, entonces el número de elementos $N(A)$ que contiene el conjunto $A \cap \Phi(\omega)$ es una variable aleatoria de Poisson.

(2) Si $A, B \subset \mathbb{R}^d$ son conjuntos de Borel ajenos, entonces $N(A)$ y $N(B)$ son variables aleatorias independientes.

También se puede definir a un proceso de Poisson como una medida aleatoria de contar $\Phi(\omega) = \sum_i \delta_{X_i(\omega)}$ con "átomos" $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$, y en este caso $N(A) = \Phi(A) =$ número de índices i que cumplen $X_i(\omega) \in A$.

Debido a que es posible que $N(A) \equiv 0$ o que $N(A) \equiv \infty$, requeriremos emplear una noción de variable de Poisson ligeramente más general que la usual: diremos que una variable aleatoria X que toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\mu > 0$ si $P(X = k) = e^{-\mu} \mu^k / k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$, y en cuyo caso escribimos $X \sim \text{Poi}(\mu)$.

Si $P(X = 0) = 1$, consideraremos a X como una variable aleatoria de Poisson de parámetro $\mu = 0$, y en caso de que $P(X = \infty) = 1$ pensaremos que X es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $\mu = \infty$.

Los procesos de Poisson poseen un buen número de propiedades interesantes que han hecho de ellos una herramienta fundamental en la modelación estocástica, y un instrumento importante de la matemática aplicada moderna. Muchas de estas propiedades serán tratadas con razonable detalle en esta tesis, destacando sus aspectos intuitivos, y poniendo énfasis en argumentos heurísticos cuando se disponga de ellos. Puesto que el objetivo de este trabajo es conocer y comprender las propiedades fundamentales de los procesos de

Índice General

Reconocimientos	i
Introducción	iii
Notación	v
1 Conjuntos Aleatorios de Poisson	1
1.1 Procesos de Poisson espaciales	1
1.1.1 Medida de intensidad	5
1.1.2 Postulados infinitesimales del proceso de Poisson	7
1.1.3 Invarianza ante movimientos rígidos del proceso homogéneo	9
1.2 Operaciones entre procesos de Poisson	11
1.2.1 Procesos adelgazados	11
1.2.2 Superposición de procesos	12
1.2.3 Procesos agrupados	17
1.2.4 Procesos restringidos	18
1.2.5 Teorema del mapeo	19
1.3 Un teorema de existencia	21
2 Momentos y Transformadas	25
2.1 Probabilidades asociadas	25
2.1.1 Probabilidades en el vacío	25
2.1.2 Distribuciones de contacto	26
2.1.3 Distribuciones de dimensión finita	27
2.2 Momentos de un proceso de Poisson	29
2.3 Sumas sobre procesos de Poisson	32
2.4 Transformadas de un proceso	34

2.4.1	Función generadora	34
2.5	Funcional de Laplace	39
2.6	Medida de Palm	40
3	Proceso de Poisson en la Recta	45
3.1	Proceso homogéneo sobre la recta I	45
3.2	Proceso bilateral	51
3.3	Procesos trasladados	53
3.4	Teorema de los intervalos	57
3.5	Ley fuerte de los grandes números	62
3.6	Proceso homogéneo sobre la recta II	63
4	Generalizaciones	67
4.1	Procesos multivariados	68
4.2	Procesos marcados	71
4.3	Proceso doblemente estocástico o de Cox	76
4.4	Aplicación a matemáticas actuariales	81
A	Medida y Probabilidad	89
A.1	Teoría de la medida	89
A.1.1	Clases de conjuntos	89
A.1.2	Espacios de medida	90
A.1.3	Funciones medibles	92
A.1.4	Integral de Lebesgue	94
A.1.5	Teoremas de convergencia	94
A.2	Probabilidad	97
A.2.1	Esperanza y probabilidad condicionales	97
A.2.2	Independencia estocástica	98
A.3	Medidas aleatorias	99
A.3.1	Procesos puntuales	100
A.4	Aditividad contable	101
	Referencias	103

Capítulo 1

Conjuntos Aleatorios de Poisson

En este capítulo introduciremos a los procesos de Poisson, que serán objeto de estudio a lo largo de este trabajo, y discutiremos algunas de sus propiedades fundamentales.

1.1 Procesos de Poisson espaciales

Un proceso de Poisson (o configuración de Poisson) en \mathbb{R}^d puede ser pensado como un subconjunto numerable y aleatorio $\Phi(\omega) = \{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots\}$ de puntos de \mathbb{R}^d , donde los números $N(A)$ y $N(B)$ de puntos pertenecientes a dos regiones disjuntas A y B son variables aleatorias independientes. Alternativamente, un proceso de Poisson puede concebirse como una medida aleatoria de contar

$$N(\omega, A) = \sum_i \delta_{X_i(\omega)}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

donde $\delta_x(\cdot)$ es la medida de Dirac concentrada en $x \in \mathbb{R}^d$, y $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ denota a la σ -álgebra de subconjuntos de Borel de \mathbb{R}^d .¹

Aquí adoptaremos por lo general el punto de vista de conjuntos aleatorios, aunque ocasionalmente emplearemos la otra caracterización cuando sea conveniente; formalmente tenemos la siguiente definición.

¹En los apéndices A.1.1 y A 3 se dan definiciones de los conceptos de σ -álgebra y de medida aleatoria.

Definición 1.1 Un proceso de Poisson Φ (o campo aleatorio de Poisson), definido en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , es un subconjunto aleatorio y contable de puntos de \mathbf{R}^d

$$\Phi = \{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots\}, \quad \omega \in \Omega,$$

tal que

(a). Para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$. $N(A) := |\Phi \cap A|$ es una variable aleatoria que toma valores en $\mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$ y que tiene distribución de Poisson de parámetro $\mu(A)$.

(b). Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ es cualquier colección disjunta de subconjuntos en $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, entonces las variables aleatorias $\{N(A_i)\}_{i=1}^n$ son independientes.

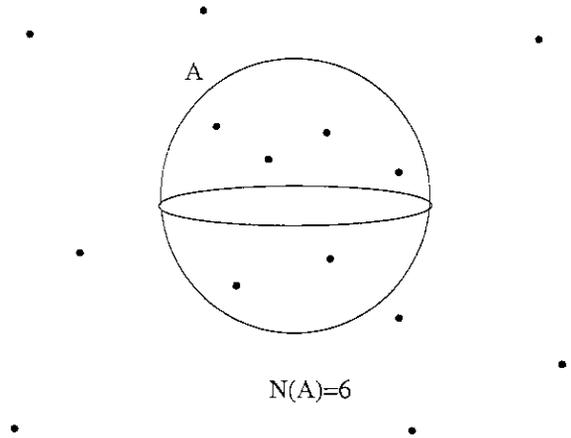


Figura 1.1: Puntos aleatorios en el espacio.

La anterior definición no tendría sentido matemático alguno a menos que se garantice la existencia de los objetos ahí referidos; por el momento se sugiere partir de ella y quizá revisar la Sección 2.1.3, donde se comenta brevemente sobre la existencia de procesos de Poisson.

Enseguida veremos algunos ejemplos, pero antes es importante mencionar que cuando hablemos de un conjunto medible debe entenderse un conjunto Borel medible (o conjunto Boreliano) si es que no se especifica alguna σ -álgebra particular.

Ejemplo 1.2 (*Ley de eventos raros*) La aparición de la distribución de Poisson en la Definición 1.1 se explica por la ley de eventos raros. Intuitivamente,

esta ley establece que cuando la probabilidad de que ocurra cierto evento en un ensayo dado es pequeña, entonces el número de veces que el evento ocurre en una población grande de ensayos independientes sigue aproximadamente una distribución de Poisson.

Más precisamente, sea $S \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto medible con $\mu_L(S) < \infty$. y sea X un punto aleatorio de S con distribución uniforme. De esta forma, si $A \subset S$ es un conjunto medible, entonces $P[X \in A] = \frac{\mu_L(A)}{\mu_L(S)}$.

Sea $I_A(x)$ la función indicadora del conjunto A , de modo que $P(I_A(X) = 1) = P(X \in A) := p_A$. Si X_1, X_2, \dots, X_n son puntos independientes y uniformemente distribuidos de S , entonces $\{I_A(X_i)\}_{i=1}^n$ son variables aleatorias de Bernoulli independientes de parámetro p_A . Por tanto $N(A) := |\{X_i\}_{i=1}^n \cap A| = \sum_{i=1}^n I_A(X_i)$ y $E[N(A)] = np_A$ (ver Figura 1.1). Más aún, $N(A)$ es una variable aleatoria binomial de parámetros n y p_A . Incrementando el número de puntos y haciendo que su ocurrencia sea cada vez más rara, de modo que $\mu(A) := np_A$ sea constante, entonces²

$$P(N(A) = k) \doteq \frac{e^{-\mu(A)}(\mu(A))^k}{k!}.$$

†

Ejemplo 1.3 (*Masa total en cuerpos espaciales, V. Yu. Korolev, 1998*) Sea $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, la densidad de concentración de alguna clase de partículas en el espacio, las cuales están distribuidas aleatoriamente de acuerdo a un proceso de Poisson tridimensional. Así, si $N(B)$ denota al número de partículas presentes en algún conjunto medible $B \subset \mathbb{R}^3$, entonces

$$P(N(B) = k) = \exp\{-\mu(B)\} \frac{\mu^k(B)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

donde $\mu(B) = \int_B \rho(x) dx$.

†

Una propiedad importante que se deduce de la Definición 1.1 es que el número de puntos de Φ contenidos en un conjunto acotado es finito con probabilidad uno: sea A un Boreliano tal que $\mu(A) < \infty^3$, entonces

$$P(N(A) < \infty) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} N(A) = i\right)$$

²Ver [6]. Vol. 1. Cap VI, Sección 5

³Notemos que la propiedad se cumple en general para medidas que son finitas sobre conjuntos acotados.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} P(N(A) = i) \\
&= e^{-\mu(A)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu(A)^i}{i!} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De este argumento se sigue también que Φ no posee puntos límite finitos.

Ejemplo 1.4 (*Proceso de Poisson homogéneo*) Un tipo especial de proceso de Poisson se consigue si en la propiedad (a) de la Definición 1.1 el parámetro $\mu(A)$ es tal que

$$\mu(A) = \lambda \mu_L(A),$$

donde $\mu_L(A)$ denota a la medida de Lebesgue del conjunto A y λ es una constante positiva. En tal caso, Φ se llama proceso de Poisson homogéneo o estacionario y a λ se le llama el parámetro característico o tasa del proceso. Este último valor se interpreta como el número promedio de puntos de Φ a encontrarse en una unidad de volumen.

Si en el Ejemplo 1.3 se cumpliera que $\rho(x) \equiv \lambda \forall x \in \mathbf{R}^3$, entonces tendríamos un proceso de Poisson de este tipo.

Por el momento diremos que el concepto de estacionariedad radica en que la probabilidad de hallar cierto número de puntos en un conjunto de Borel dado, depende únicamente del volumen de tal conjunto y no de su localización en el espacio. Más adelante se precisará esta idea (Invarianza ante movimientos rígidos, Sección 1.1.3). †

Ahora veamos un ejemplo interesante de una configuración o campo aleatorio de Poisson sobre \mathbf{R}^2 que puede extenderse a dimensiones mayores.

Ejemplo 1.5 (*Teselados Poisson-Voronoi, J. Gravner, D. Griffeath, 1997*) Un teselado Poisson-Voronoi (PVT) es un enrejado del plano euclidiano en el cual los centros de tejas individuales constituyen un campo de Poisson y cada teja agrupa a los puntos que son más cercanos a un centro dado con respecto a una norma prescrita (ver Figura 1.2).

Algunos sistemas espaciales en los cuales centros raros y distribuidos en forma aleatoria compiten por espacio podrían ser aproximados por un PVT. Esta clase de configuraciones se emplean como modelos en, por ejemplo, teoría de campos cuánticos, redes topológicamente aleatorias, autómatas celulares, formación de mosaicos aleatorios. etc. (ver especialmente [17]).

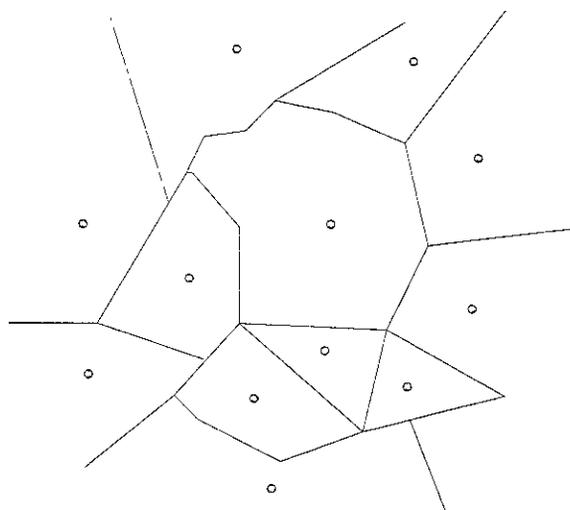


Figura 1.2: Teselado en el plano.

El procedimiento es como sigue: fijar una norma $\|\cdot\|$ sobre \mathbb{R}^2 (o \mathbb{R}^d) y considerar un conjunto numerable de centros F sobre el mismo espacio, no conteniendo puntos límite. Definir

$$\mathcal{V}(F) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \inf\{\|x - z\| : z \in F\} \text{ no se alcanza de forma única}\}.$$

Uno puede imaginar que cada punto en F posee su propio color, y entonces asignar a cualquier otro punto del plano el mismo color que el del punto más cercano en F . Así pues, el conjunto de “puntos de confusión” es precisamente $\mathcal{V}(F)$. Este conjunto es cerrado y es llamado el Teselado básico de Voronoi.

El ejemplo usual se obtiene cuando $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana sobre el plano, y entonces las rejas son conjuntos convexos e invariantes ante movimientos rígidos. El PVT básico, $\mathcal{V}(F)$, resulta al suponer que F es un campo aleatorio de Poisson con tasa constante 1 en \mathbb{R}^2 (un proceso de Poisson homogéneo). †

1.1.1 Medida de intensidad

Notemos que como consecuencia de la Definición 1.1,

$$E[N(A)] = \mu(A)$$

para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$. Ahora bien, si $\{A_j\}_{j \geq 1}$ es cualquier colección numerable y disjunta en $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ y $A := \sup A_j$, entonces el número de puntos del proceso Φ contenidos en A , $N(A)$, satisface

$$N(A) = \sum_{i=1}^{\infty} N(A_i). \quad (1.1)$$

Más aún, por el teorema de aditividad contable (ver Apéndice A.4), $N(A)$ es una variable aleatoria de Poisson con media $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. Tomar ahora el valor esperado en ambos lados de la Ecuación (1.1): el lado izquierdo indica que $E[N(A)] = \mu(A)$, y por su parte el derecho (ver Apéndice A.1.5) que $E[\sum_{i=1}^{\infty} N(A_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} E[N(A_i)]$, resultando al final

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

de donde se concluye que μ es una medida, la *medida de intensidad* del proceso Φ .

Definición 1.6 A la medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\mu(A) := E[N(A)]$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, se le llama la *medida de intensidad* (o *medida de media*, o *medida esperanza*) del proceso de Poisson Φ .

Un aspecto de suma importancia es que no cualquier medida sobre $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ puede fungir como medida de intensidad de un proceso de Poisson. Por ejemplo, si μ fuera una medida de intensidad tal que $\mu(\{x\}) > 0$ para algún $x \in \mathbf{R}^d$, entonces

$$\begin{aligned} P(N(\{x\}) \geq 2) &= 1 - P(N(\{x\}) \leq 1) \\ &= 1 - (e^{-\mu(\{x\})} + e^{-\mu(\{x\})} \mu(\{x\})) > 0. \end{aligned}$$

Pero

$$N(\{x\}) = |\Phi \cap \{x\}| \leq 1$$

y por tanto $P(N(\{x\}) \geq 2) = 0$, obteniendo una contradicción.

En otras palabras, para que una medida μ sea la medida de intensidad de algún proceso de Poisson en \mathbf{R}^d es menester que tal medida sea una medida difusa, es decir, que μ verifique

$$\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^d.$$

Sin embargo, esta es una propiedad sólo necesaria que deben cumplir las medidas candidatas a ser medidas de intensidad de algún proceso de Poisson. Postergamos para la Sección 1.3 la presentación de un teorema que garantiza la existencia de un proceso de Poisson con una medida de intensidad prescrita.

1.1.2 Postulados infinitesimales del proceso de Poisson

Una manera alternativa de definir a un proceso de Poisson es determinando la distribución de probabilidad de sus incrementos en conjuntos de medida pequeña. Supongamos que, cuando $\mu(B) \downarrow 0$, para algún Boreliano B

- 1) $P(N(B) = 0) = 1 - \mu(B) + o(\mu(B))$.
- 2) $P(N(B) = 1) = \mu(B) + o(\mu(B))$.
- 3) $P(N(B) > 1) = o(\mu(B))$.

Intuitivamente, el primer postulado expresa la idea de que el evento de no encontrar puntos aleatorios en una región B , de medida casi nula, es un evento prácticamente cierto; el segundo indica que la probabilidad de encontrar un único punto contenido en una región casi nula en medida, es aproximadamente igual al número promedio, $\mu(B)$, de puntos residentes en tal región; según el tercer postulado, el evento de encontrar puntos aleatorios coincidentes es imposible.

Enseguida veremos cómo estos postulados motivan y a la vez justifican la Definición 1.1. Sea $p_k(A) := P(N(A) = k)$, donde A es un Boreliano cualquiera. Mostraremos cómo estos postulados implican que $N(A)$ tiene la distribución

$$p_k(A) = \frac{(\mu(A))^k e^{-\mu(A)}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n \subset A$ conjuntos medibles disjuntos tales que $\mu(A_i) = \mu(A)/n$, y sea ϵ_i una función que toma el valor 1 si $A_i \cap A \neq \emptyset$ y 0 en otro caso. $i = 1, \dots, n$. Entonces $S_n := \sum_{i=1}^n \epsilon_i$ es el número de subconjuntos que contienen al menos un punto, y debido al Postulado (2), $p_i := P(\epsilon_i = 1) = \mu(A)/n + o(\mu(A)/n)$.

En este punto utilizaremos un resultado⁴ según el cual si $\{\epsilon_i\}_{i \geq 1}$ son variables aleatorias independientes de Bernoulli, donde $P(\epsilon_i = 1) = p_i$. y $S_n := \sum_{i=1}^n \epsilon_i$, entonces $|P(S_n = k) - \frac{e^{-\nu} \nu^k}{k!}| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$, donde $\nu := \sum_{i=1}^n p_i$.

⁴Ver [7], Teorema 2.1. Cap. V

Por tanto en nuestro caso debemos tener

$$\begin{aligned} |P(S_n = k) - \frac{e^{-\nu}\nu^k}{k!}| &\leq n(\mu(A)/n + o(\mu(A)/n))^2 \\ &= \mu^2(A)/n + 2\mu(A)o(\mu(A)/n) + no(\mu(A)/n)^2, \end{aligned}$$

donde $\nu = \sum_{i=1}^n p_i = \mu(A) + no(\mu(A)/n)$. Notando que $no(\mu(A)/n) = \mu(A) \frac{o(\mu(A)/n)}{\mu(A)/n} = \mu(A) \frac{o(\mu(A_i))}{\mu(A_i)}$ y haciendo $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = \frac{e^{-\nu}\nu^k}{k!}, \text{ y } \nu = \mu(A).$$

Debe ser claro que $S_n \neq N(A)$ sólo si $|A_i \cap A| \geq 2$ para algún (o algunos) A_i , pero el Postulado (3) excluye esa posibilidad si n es grande.

Ahora bien, como $[N(A) \neq k] = [N(A) < k] \cup [N(A) > k]$ y $[S_n = k] = [N(A) = k] \cup [N(A) > k]$, entonces

$$\begin{aligned} P(N(A) \neq k) &= P(N(A) < k) + P(N(A) > k), \quad y \\ P(S_n = k) &= p_k(A) + P(N(A) > k), \end{aligned}$$

por tanto

$$|p_k(A) - P(S_n = k)| = P(N(A) > k) \quad (1.2)$$

Luego a partir del evento $[N(A) > k]$ y de la relación cierta $S_n \leq N(A)$ se sigue el evento $[S_n > N(A)] \cup [S_n < N(A)] = [S_n < N(A)]$, y por tanto el evento $[S_n \neq N(A)]$, es decir, $[N(A) > k] \subseteq [S_n \neq N(A)]$. Así de la Ecuación (1.2) se obtiene

$$\begin{aligned} |p_k(A) - P(S_n = k)| &\leq P(N(A) \neq S_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P(N(A_i) \geq 2) \\ &\leq no(\mu(A_1)) \end{aligned}$$

por el Postulado (3). Permitiendo que n sea arbitrariamente grande concluimos que

$$P(N(A) = k) = \frac{e^{-\mu(A)}\mu(A)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

En el caso del proceso de Poisson homogéneo sobre \mathbb{R} es usual emplear un método alternativo para obtener las igualdades (1.3). El argumento consiste en definir $p_m(t) := e^{-\lambda t}(\lambda t)^m/m!$, de manera que se satisfagan las ecuaciones de Kolmogorov para el proceso de Poisson

$$\frac{\partial p_m(t)}{\partial t} = -\lambda p_m(t) + \lambda p_{m-1}(t), \quad t \geq 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

con la condición inicial $p_m(0) = 0$ y la convención $p_{-1}(t) = 0$. Un desarrollo detallado de este método aparece en el libro de S.M. Ross⁵.

1.1.3 Invarianza ante movimientos rígidos del proceso homogéneo

Retomando el caso particular del proceso de Poisson homogéneo (Ejemplo 1.4), es menester mencionar que $\mu = \lambda\mu_L$ es una medida difusa para cualquier $\lambda > 0$, pues μ_L lo es.

Ya hemos hablado en forma intuitiva de la homogeneidad o estacionariedad de los procesos de Poisson homogéneos, que no es sino la propiedad de invarianza ante movimientos rígidos. Antes de establecer formalmente esta propiedad es necesario considerar la definición siguiente.

Definición 1.7 Sean $c \in \mathbb{R}^d$ un vector constante, B una matriz cuadrada de orden d , y φ_c, φ_B las transformaciones dadas por $\varphi_c(A) = \{x+c : x \in A\}$, $\varphi_B(A) = \{Bx : x \in A\}$, $A \subset \mathbb{R}^d$. Así definidas, φ_c se denomina *traslación* por el vector c y φ_B *rotación* por la matriz B .

El proceso de Poisson homogéneo posee la siguiente importante propiedad.

Proposición 1.8 Sea $\Phi = \{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots\}$ un proceso de Poisson homogéneo con medida de intensidad $\mu = \lambda\mu_L$. Para cualquier $c \in \mathbb{R}^d$, el proceso trasladado $\varphi_c(\Phi) = \{X_1(\omega) + c, X_2(\omega) + c, \dots\}$ es de Poisson con media μ . Además, si la matriz B es tal que $\det(B) = 1$ y $B^T B = I$, entonces el proceso rotado $\varphi_B(\Phi) = \{BX_1(\omega), BX_2(\omega), \dots\}$ es también un proceso de Poisson con media μ .

⁵Introduction to Probability Models, (1985). Teorema 3.1

La proposición anterior es una consecuencia de una propiedad más general que veremos en una sección posterior (el teorema del mapeo, Sección 1.2.5) y por tanto diferimos su prueba para después (Ejemplo 1.19).

La primera propiedad en la Proposición 1.8 se denomina propiedad de estacionariedad, y la segunda propiedad de isotropía. En el contexto más general de los procesos puntuales (ver Apéndice A.3.1) ambas propiedades dan un significado riguroso a la idea de homogeneidad. En general, si un proceso puntual (arbitrario) es estacionario e isotrópico, entonces es denominado invariante ante movimientos rígidos, siendo el proceso de Poisson homogéneo el prototipo de tales procesos.

Hasta este punto podemos resumir las características esenciales de los proceso de Poisson mediante las tres propiedades siguientes:

1) *Simplicidad*, en el sentido de que no se permiten puntos múltiples (tercer postulado infinitesimal).

2) *Estacionariedad e Isotropía en el caso homogéneo*. en el sentido de las propiedades de invarianza ante movimientos rígidos (Proposición 1.8).

3) *Independencia de incrementos*. entendida a partir de la propiedad (2) que aparece en la introducción (formalmente es la condición (b) de la definición de proceso de Poisson).

1.2 Operaciones entre procesos de Poisson

Hay varias operaciones relevantes que pueden ser definidas y efectuadas con configuraciones aleatorias de Poisson, a saber: adelgazar, superponer, agrupar y restringir procesos.

1.2.1 Procesos adelgazados

La operación de *adelgazar* un proceso consiste en utilizar alguna regla definida para “borrar” puntos de un conjunto aleatorio inicial Φ_I y así producir el proceso adelgazado Φ , de tal modo que $\Phi \subset \Phi_I$ (Figura 1.3).

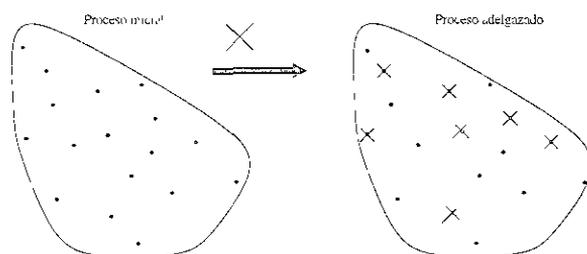


Figura 1.3: Adelgazar procesos.

Ejemplo 1.9 (*Gastwirth. 1964*) Un ejemplo de este tipo de procedimiento surge de considerar que las llamadas que recibe una central telefónica siguen un proceso de Poisson en \mathbb{R}^+ . La compañía que ofrece el servicio distingue entre dos tipos de llamadas: las que tardan más allá de cierto umbral de tiempo y las que no lo alcanzan. Así pues, se formarían dos conjuntos de llamadas donde el primero, posiblemente, consiste de las llamadas hechas por mujeres pues ellas hablan con más frecuencia y durante más tiempo. †

El resultado básico al respecto es el siguiente corolario.

Corolario 1.10 (Teorema de Adelgazamiento) *Sea Φ un proceso de Poisson tal que $E[\Phi] = \mu$. Si cada punto $x \in \Phi$ es “borrado” con probabilidad $q \in (0, 1)$, independientemente de los demás y de su posición, entonces el*

conjunto de puntos remanente. Φ_R , es un proceso de Poisson con medida de intensidad

$$\mu_R = p\mu, \quad \text{donde } p = 1 - q.$$

Este resultado surge como corolario de un teorema que será tratado después (teorema de los colores, Sección 4.1).

Ejemplo 1.11 (*Siniestros ocurridos y no reportados*) Suponer que el comportamiento observado en el número de siniestros ocurridos durante varios años en una metrópoli sugiere la utilización de un proceso de Poisson con medida de intensidad μ . De igual modo se tiene la estimación de que con probabilidad q se reporta un siniestro ante una compañía de seguros. Además es razonable pensar que el hecho de reportar un siniestro es independiente de lo que ocurra con otros siniestros. Entonces el conjunto de siniestros ocurridos y no reportados es un proceso de Poisson con medida de intensidad $\mu_{N_T} := \mu(1 - q)$. †

1.2.2 Superposición de procesos

La segunda operación considerada es la de *superponer* procesos de Poisson, la cual consiste en reunir varios procesos de Poisson independientes y conseguir de nuevo un proceso de Poisson (Figura 1.4).

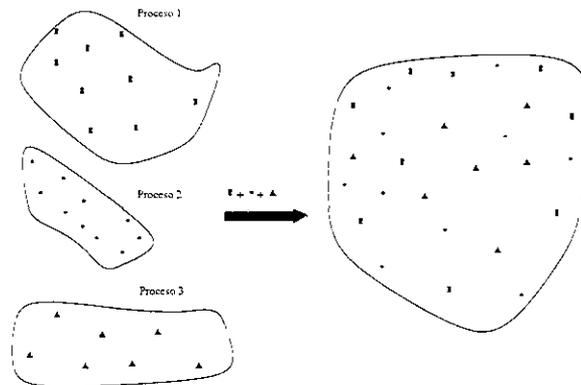


Figura 1.4: Superponer procesos.

Considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.12 (*Pérdida de recursos en redes, Zachary, 1999*) Considerar una colección finita J de recursos en una red y $C = \{c_j : j \in J\}$, donde c_j es la capacidad del recurso j . Sea R el conjunto finito de tipos de llamadas posibles en la red; llamadas de cada tipo $r \in R$ arriban de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa v_r , teniendo tiempos de servicio idénticamente distribuidos con media 1. Todos los procesos de arribo y de tiempos de servicio son independientes uno de otro.

Cada llamada de tipo r requiere capacidad A_j^r del recurso $j \in J$ para la duración del servicio. Si uno o más de los recursos no poseen suficiente capacidad libre para atender la llamada, entonces ésta es bloqueada y considerada perdida; en otro caso la llamada es aceptada.

El interés radica en conocer el comportamiento agregado de las llamadas a la red de tal modo que los recursos sean suficientes. El teorema de superposición (Teorema 1.13) coopera en este problema al sugerirnos que el conjunto de llamadas totales es, a su vez, un proceso de Poisson con tasa de intensidad igual con

$$\sum_{r \in R} v_r.$$

Un problema íntimamente relacionado con el precedente (Lewis, 1964) es estudiar el patrón de fallas de una computadora al superponer los ingredientes siguientes: a) fallas permanentes, b) fallas leves, y c) fallas catastróficas. Si suponemos que las clases de fallas son independientes y que se comportan, cada una, según un proceso de Poisson, entonces el patrón de interés resulta seguir un proceso de Poisson cuya intensidad es la suma de las intensidades individuales de cada clase. †

En realidad, este es el caso análogo al de una suma de variables aleatorias de Poisson independientes (teorema de aditividad contable, Apéndice A.4). El resultado principal es el

Teorema 1.13 (Superposición) *Sea $\{\Phi_i\}_{i=1,2,\dots}$ una colección numerable de procesos de Poisson independientes sobre \mathbb{R}^d con respectivas medidas de intensidad μ_i . Entonces su superposición*

$$\Phi := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i$$

es un proceso de Poisson con medida de intensidad μ dada por

$$\mu := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i.$$

La demostración de este teorema se facilita si consideramos un lema importante que por sí mismo es otra propiedad de los procesos de Poisson.

Lema 1.14 (Disjunción) Sean Φ_1 y Φ_2 procesos de Poisson independientes sobre \mathbf{R}^d con $\mu_1 = \mathbb{E}[\Phi_1]$ y $\mu_2 = \mathbb{E}[\Phi_2]$, y sea $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ tal que $\mu_1(A)$ y $\mu_2(A)$ son finitos. Entonces Φ_1 y Φ_2 son conjuntos aleatorios disjuntos con probabilidad 1 sobre A , esto es,

$$P(\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap A = \emptyset) = 1.$$

Prueba. Sea $(F_A, \mathcal{F}(A))$ un espacio medible donde $F_A = \{\Lambda \subset A : \Lambda \text{ es finito}\}$ y $\mathcal{F}(A)$ es la menor σ -álgebra de subconjuntos de F_A que hace medibles a las funciones

$$f_B : F_A \longrightarrow \mathbf{Z}^+ \cup \{0\} \text{ dadas por } f_B(\Lambda) = |\Lambda \cap B|,$$

para todo subconjunto medible $B \subseteq A$. Ahora bien, sean P_1 y P_2 las distribuciones de las variables aleatorias $N(\Phi_1 \cap (\cdot))$ y $N(\Phi_2 \cap (\cdot))$ sobre F_A respectivamente (ver Teorema 1.16). Notemos que

$$\begin{aligned} P(N(\Phi_1 \cap A) = m, N(\Phi_2 \cap A) = n) \\ = P_1(N(\Phi_1 \cap A) = m)P_2(N(\Phi_2 \cap A) = n), \quad m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, \end{aligned}$$

debido a la independencia de los procesos Φ_1 y Φ_2 .

En seguida pensaremos en un contexto *ad hoc* a la medida de probabilidad producto $(P_1 \times P_2)$ sobre $F_A \times F_A$. Sea $g : F_A \times F_A \longrightarrow F_{A \times A}$, tal que $g(\Lambda_1, \Lambda_2) = \Lambda_1 \times \Lambda_2$.

Sean $C = C_1 \times C_2 \subseteq A \times A$ y $E = E_1 \times E_2 \subset F_{A \times A}$ conjuntos medibles y $n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$. Entonces

$$\begin{aligned} g^{-1}(E : |E \cap C| = n) &= g^{-1}(E : |(E_1 \times E_2) \cap (C_1 \times C_2)| = n) \\ &= g^{-1}(E : |E_1 \cap C_1| = n_1, |E_2 \cap C_2| = n_2), \end{aligned}$$

donde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ son tales que $n_1 n_2 = n$. Debido a la definición de f_B , $g^{-1}(E : |E \cap C| = n)$ es un subconjunto medible de $F_A \times F_A$ para todo rectángulo medible C , pero se requiere que tal propiedad se cumpla para todos los conjuntos medibles del espacio $A \times A$. Lo anterior se satisface pues se puede ver que la clase de los rectángulos con tal propiedad contiene a todos los subconjuntos medibles de $A \times A$.⁶

Finalmente necesitamos un conjunto medible, J , tal que $(P_1 \times P_2)(J)$ corresponda a la probabilidad $P(\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap A = \emptyset)$ y además que sea igual a 1.

Sea $J = g^{-1}(\Lambda)$ tal que $|\Lambda \cap D_A| = 0$, donde $D_A = D \cap (A \times A)$ y $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x = y\}$ es la diagonal. D_A es medible en $A \times A$ si D lo es en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Luego J es medible en $F_A \times F_A$. Resta mostrar que $(P_1 \times P_2)(J) = 1$, pues el evento $[|\Lambda \cap D_A| = 0]$ se identifica con el evento $[(\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap A) = \emptyset]$.

Suponer que h es la densidad relativa a la medida producto $(P_1 \times P_2)$ y que se satisfacen las hipótesis del teorema de Fubini⁷, entonces

$$\begin{aligned} (P_1 \times P_2)(J) &= \int_{\Lambda} h(x, y) (P_1 \times P_2)(d(x, y)) \\ &= \int_{\Lambda_1} \left[\int_{\Lambda_2} h(x, y) P_2(dy) \right] P_1(dx) \\ &= \int_{\Lambda_1} [P_2(\Lambda_2 : (\Lambda_1, \Lambda_2) \in J)] P_1(dx). \end{aligned}$$

Si $P_2(\Lambda_2 : (\Lambda_1, \Lambda_2) \in J) = 1$ para todo Λ_1 P_2 -c.p. se tiene el resultado, pero esto es equivalente a tener que $P_2(N(\Phi_2 \cap \Lambda_1) = 0) = 1$. Como $\Lambda_1 \in F_A$ es finito, entonces $\mu_2(\Lambda_1) = 0$ para todo Λ_1 , luego lo anterior se cumple. \square

Una vez que contamos con el lema anterior se facilita la prueba siguiente.

Prueba del Teorema 1.13. Debido a que $\Phi_i \subset \mathbb{R}^d$ es numerable para cada i , se sigue que $\Phi = \bigcup_{i \geq 1} \Phi_i \subset \mathbb{R}^d$ es numerable.

Para cada subconjunto medible $A \subset \mathbb{R}^d$ definimos $N_n(A) := |\Phi_n \cap A|$. Suponer que $\mu_n(A) < \infty \forall n$. Entonces por el lema de disjunción (Lema 1.14) Φ_1, Φ_2, \dots son disjuntos sobre A y por tanto

$$N(A) := |\Phi \cap A|$$

⁶Basta con verificar que tal clase es *monótona* y cerrada bajo uniones disjuntos. Ver [5], Pág. 43

⁷Ver [5], Teorema 18.3

$$= \sum_n N_n(A).$$

Ahora, debido a que $\{N_n(A)\}_n$ es una familia de variables aleatorias independientes, pues los procesos Φ_1, Φ_2, \dots son independientes por hipótesis, resulta que

$$N(A) \sim \text{Poi}(\mu),$$

donde $\mu = \sum_n \mu_n$.

Notemos que si $\mu_n(A) = \infty$ para alguna n , la ecuación $N(A) = \sum_n N_n(A)$ también se cumple.

Por último, sea $\{A_i\}_{i=1}^k$ una colección disjunta de subconjuntos de \mathbf{R}^d . Entonces las variables aleatorias $\{N_n(A_j)\}_{n,j}$ son todas independientes: para n fija por ser Φ_n un proceso de Poisson, y para j fija por ser $\{\Phi_n\}_n$ procesos independientes. Así las variables aleatorias $\{N(A_j)\}_j$ son independientes por ser sumas de variables aleatorias pertenecientes a colecciones independientes. Recordando la Definición 1.1 se concluye que Φ es un proceso de Poisson con medida de intensidad $\mu = \sum_n \mu_n$. \square

Ejemplo 1.15 (*Modelo Multivariado de Impactos y preservación de Ordenes Estocásticos, T. Wong, 1997*) Considerar un par de sistemas con m componentes cada uno. Suponer que el componente i en el sistema k , $k = 1, 2$, está sujeto a una secuencia de “shocks” ocurrida de forma aleatoria en el tiempo y de acuerdo a un proceso de Poisson $\{\Gamma_i(t), t > 0\}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Los procesos así formados $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ son independientes entre sí y de $M_k = (M_{k,1}, \dots, M_{k,m})$, donde $M_{k,i}$ es el número de shocks que la i -ésima componente del sistema k puede soportar sin fallar. Denotar por $Z_{k,i}$ el tiempo de vida del componente i en el sistema k .

Un resultado inmediato que se sigue del teorema de superposición es que el conjunto total de shocks en cada sistema es un proceso de Poisson.

Un ejemplo de este modelo es el siguiente: considerar una compañía de seguros con m subsidiarias en m diferentes y no correlacionadas locaciones (ciudades o países). Ahora bien, el número de reclamos (shocks) que una subsidiaria recibe puede ser supuesto independiente del número de reclamos que recibe alguna otra subsidiaria. Como todas las subsidiarias pertenecen a una misma compañía, entonces el número de reclamos que una subsidiaria puede aceptar no es independiente del número de reclamos que otras subsidiarias puedan aceptar. La probabilidad conjunta de que la subsidiaria i

pueda administrar n_i reclamos. $i = 1, 2, \dots, m$, es

$$P\left(\bigcap_{i=1}^m (M_{k,i} \geq n_i)\right),$$

donde $M_{k,i}$ puede interpretarse como el número de reclamos que la subsidiaria i de la compañía k puede aceptar sin recurrir, por ejemplo, a cierto tipo de reaseguro. De esta forma

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^m (Z_{k,i} > t_i)\right) &= \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_m} P\left(\bigcap_{i=1}^m (\Gamma_i(t_i) = n_i)\right) P\left(\bigcap_{i=1}^m (M_{k,i} \geq n_i)\right) \\ &= \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_m} \prod_{i=1}^m \left[\frac{\exp(-A_i(t_i)) A_i^{n_i}(t_i)}{n_i!} \right] P\left(\bigcap_{i=1}^m (M_{k,i} \geq n_i)\right), \end{aligned}$$

donde $A_i(\cdot)$ es la medida de intensidad del i -ésimo proceso.

Ahora bien, considerar 2 compañías de seguros distintas con respectivos vectores aleatorios, M_1 y M_2 , de los números de reclamos que pueden administrar, y los correspondientes vectores aleatorios, Z_1 y Z_2 , de los tiempos antes de la ruina de las subsidiarias de tales compañías. Surge una pregunta: ¿cómo comparar en algún sentido estos vectores? Una propuesta es utilizar ordenes estocásticos (el lector interesado puede ver [24]).

1.2.3 Procesos agrupados

Otra operación útil que puede considerarse es la de *agrupar* los puntos aleatorios de un proceso de Poisson. Esta consiste en que cada punto x de un proceso de Poisson Φ_p dado, es reemplazado por un grupo o conjunto N^x de puntos. Los grupos así formados son, bajo ciertas condiciones, cada uno un proceso de Poisson con un número finito de puntos (Figura 4.1). Aún más, la unión de todos esos grupos, la superposición, es un proceso de Poisson agrupado Φ ,

$$\Phi = \bigcup_{x \in \Phi_p} N^x.$$

El resultado fundamental para este tipo de operación es el denominado teorema de los colores que será discutido en la Sección 4.1.

1.2.4 Procesos restringidos

La última operación importante que mencionaremos y que satisfacen los procesos aquí abordados es la de *restringir*, y se fundamenta en el siguiente teorema.

Teorema 1.16 (Restricción) *Sea Φ un proceso de Poisson en \mathbf{R}^d con medida de intensidad μ , y sea $S_1 \subset \mathbf{R}^d$ un conjunto medible. Entonces el conjunto aleatorio numerable $\Phi_1 = \Phi \cap S_1$ puede verse como un proceso de Poisson en $S_1 \subset \mathbf{R}^d$ con medida de intensidad*

$$\mu_1(A) := \mu(A \cap S_1),$$

o bien como un proceso de Poisson en \mathbf{R}^d con medida de intensidad

$$\mu_1 := \mu|_{S_1}.$$

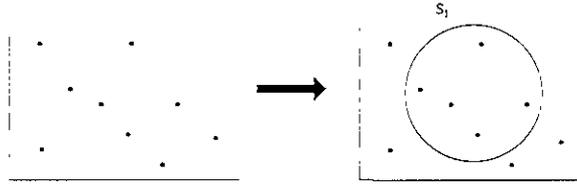


Figura 1.5: Proceso restringido.

Prueba. Para el primer caso procedemos como sigue: Φ_1 es un subconjunto numerable de \mathbf{R}^d , pues Φ lo es. Luego para $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$.

$$\begin{aligned} N_1(A) &:= |\Phi_1 \cap A| \\ &= |(\Phi \cap S_1) \cap A| \\ &= |\Phi \cap (S_1 \cap A)| \\ &= N(S_1 \cap A), \end{aligned}$$

y por tanto $N_1(A) \sim \text{Poi}(\mu(S_1 \cap A))$. Definir $\mu_1(A) := \mu(S_1 \cap A)$.

Ahora bien, sea $\{A_j\}_{j=1}^n$ una colección disjunta de subconjuntos de \mathbb{R}^d . Entonces $\{S_1 \cap A_j\}_{j=1}^n$ también es disjunta y por tanto $\{N(S_1 \cap A_j)\}_{j=1}^k$ es una familia de variables aleatorias independientes por ser Φ un proceso de Poisson. Por consiguiente la familia $\{N_1(A_j)\}_{j=1}^n$ consta de variables aleatorias independientes. Por la Definición 1.1, Φ_1 es un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d con medida de intensidad $\mu_1(\cdot) = \mu(S_1 \cap (\cdot))$.

Por otro lado, $\Phi_1 = \Phi \cap S_1 \subset S_1$ es numerable porque Φ lo es. Sea $\mu_1|_{S_1} : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\mu_1|_{S_1}(A) = \mu(A)$ para $A \in \mathcal{B}(S_1)$, esto es, la restricción de μ a S_1 . Los argumentos para este caso son similares a los del caso previo con la salvedad de que $N_1(A) \sim \text{Poi}(\mu_1|_{S_1})$. De inmediato se sigue que Φ_1 es un proceso de Poisson sobre S_1 con medida de intensidad $\mu_1|_{S_1}$. \square

1.2.5 Teorema del mapeo

Para finalizar este capítulo hablaremos de una propiedad especialmente relevante que poseen los procesos de Poisson. Esta propiedad es una extensión del hecho de que si el espacio de estados de un proceso de Poisson es transformado inyectivamente en otro espacio, entonces los puntos transformados conforman de nuevo un proceso de Poisson. El resultado es como sigue:

Teorema 1.17 (Mapeo) *Sea Φ un proceso de Poisson en $S \subseteq \mathbb{R}^d$ con medida de intensidad σ -finita μ y (T, \mathcal{T}) un espacio medible. Si $f : S \rightarrow T$ es una función medible e inyectiva tal que*

$$\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{T},$$

es una medida difusa, entonces el conjunto $f(\Phi) = \{f(x) : x \in \Phi\} \subset T$ es un un proceso de Poisson sobre T con medida de intensidad μ_f .

Prueba. El conjunto $f(\Phi)$ lo podemos ver como $\{f(X_1(\omega)), f(X_2(\omega)), \dots\}$ donde $\Phi = \{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots\}$. Así $f(\Phi)$ es un conjunto aleatorio en T y claramente es numerable. Sea $B \subset T$ medible y suponer que $\mu(S) < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} N_f(B) &:= |f(\Phi) \cap B| \\ &= |\{x \in \Phi : f(x) \in B\}| \\ &= |\Phi \cap f^{-1}(B)| \\ &= N(f^{-1}(B)), \end{aligned}$$

por lo que $N_f(B) \sim \text{Poi}(\mu_f(B))$, donde $\mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B))$.

Si $\{B_j\}_{j=1}^k$ es una familia disjunta de subconjuntos medibles de T , entonces $\{f^{-1}(B_j)\}_{j=1}^k$ es también disjunta, puesto que

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_j) \cap f^{-1}(B_i) &= f^{-1}(B_j \cap B_i) \\ &= f^{-1}(\emptyset) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

siempre que $i \neq j$. Así pues, $\{N(f^{-1}(B_j))\}_{j=1}^k$ es una familia de variables aleatorias independientes, y por tanto $\{N_f(B_j)\}_{j=1}^k$ son también variables aleatorias independientes. Por la Definición 1.1, $f(\Phi)$ resulta ser un proceso de Poisson sobre T con medida de intensidad μ_f .

En el caso en que $\mu(S)$ no es finito, usamos la hipótesis de σ -finitud. Sea $\{S_n\}_{n=1,2,\dots}$ una colección disjunta de subconjuntos medibles de S con $\mu(S_n) < \infty \forall n$ tal que $S = \bigcup_{n \geq 1} S_n$. Debido al teorema de restricción (Teorema 1.16), $\{\Phi_n := \Phi \cap S_n\}_n$ es una colección de procesos de Poisson independientes con medidas de intensidad finitas $\mu_n = \mu|_{S_n}$. De lo ya demostrado se desprende que $\{f(\Phi_n)\}_n$ son procesos de Poisson independientes con medidas de intensidad respectivas $\mu_f^{(n)}(\cdot) := \mu_n(f^{-1}(\cdot))$. Por el teorema de superposición,

$$f(\Phi) = f\left(\bigcup_n \Phi_n\right) = \bigcup_n f(\Phi_n)$$

es un proceso de Poisson con medida de intensidad $\mu_f(\cdot) := \sum_n \mu_f^{(n)}(\cdot) = \mu(f^{-1}(\cdot))$. \square

Ejemplo 1.18 (*Necesidad de la inyectividad*) Si la función f no fuese inyectiva el resultado no se cumple. Tómesese, para ilustrar, el caso extremo en que f es una función constante: suponer que $f(x) = t, \forall x \in S$. Si Φ y $f(\Phi) = \{t\}$ fueran procesos de Poisson siendo μ la medida de intensidad de Φ , entonces para la medida de intensidad μ_f de $f(\Phi)$ se cumpliría que

$$\mu_f(\{t\}) = \mu(f^{-1}(\{t\})) = \mu(S) > 0,$$

lo cual contradice la hipótesis de difusividad, necesaria para que μ_f sea medida de intensidad de un proceso de Poisson. \dagger

Ejemplo 1.19 (*Invarianza ante movimientos rígidos del proceso de Poisson homogéneo*) El presente ejemplo consiste de la prueba de la Proposición 1.8

de invarianza ante movimientos rígidos. Sea $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Bajo las hipótesis de la proposición citada y en el contexto del teorema del mapeo (Teorema 1.17),

$$\mu_{\varphi_c}(G) := \mu(\varphi_c^{-1}(G)) = \lambda\mu_L(\varphi_c^{-1}(G)).$$

Ahora bien, φ_c^{-1} es una transformación tal que $\varphi_c^{-1}(x) = x - c$ para cada $x \in \mathbb{R}^d$. Pero la medida de Lebesgue es invariante ante traslaciones⁸ y por tanto

$$\mu_{\varphi_c}(G) = \lambda\mu_L(G) = \mu(G), \quad \forall G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Luego entonces, el teorema del mapeo dice que $\varphi_c(\Phi)$ es un proceso de Poisson, de hecho homogéneo, con medida de intensidad μ .

Análogamente, si escribimos $\varphi_B^{-1}(x) = B^T x$ para cada $x \in \mathbb{R}^d$ y consideramos que la medida de Lebesgue también es invariante ante rotaciones⁹, entonces se tiene la misma conclusión de antes y la Proposición 1.8 queda probada. †

1.3 Un teorema de existencia

Al inicio de este capítulo se argumentó la importancia de considerar medidas difusas en el contexto de los procesos de Poisson y se subrayó también que la propiedad de difusividad es sólo necesaria. ¿Qué otras condiciones debe cumplir una medida para que ésta sea la medida de intensidad de un proceso de Poisson? La respuesta la da el siguiente resultado.

Teorema 1.20 (Existencia) *Sea $S \neq \emptyset$ cualquier subconjunto medible de \mathbb{R}^d . Si μ es una medida difusa que cumple*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{B}(S),$$

donde $\{\mu_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ es una familia de medidas finitas sobre S , entonces existe un proceso de Poisson sobre S con μ como su medida de intensidad.

Prueba. Sean $\{N_n\}_n$ y $\{X_r^{(n)}\}_{n,r}$ colecciones de variables aleatorias independientes definidas en algún espacio de probabilidad conveniente¹⁰, tales que $N_n \sim \text{Poi}(\mu_n(S))$; $n = 1, 2, \dots$, y para cada n $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_r^{(n)}$;

⁸[5], Teoremas 12.1 y 12.2

⁹Ver cita anterior.

¹⁰Una construcción como esta es consecuencia del teorema de consistencia de Kolmogorov. Ver por ejemplo [5] o [13].

$r = 1, 2, \dots$ son idénticamente distribuidas con distribución $p_n(\cdot) = \frac{\mu_n(\cdot)}{\mu_n(S)}$, para lo cual podemos suponer que $\mu_n(S) > 0$ para toda n .

Ahora bien, sean $\Phi_n := \{X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_{N_n}^{(n)}\}$, $\Phi := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$, y $N^{(n)}(A) := |\Phi_n \cap A|$, donde A es un conjunto medible. El objetivo es verificar que, así definido Φ , es un proceso de Poisson con medida de intensidad μ . El camino a seguir es probar que $\{\Phi_n\}_n$ son procesos de Poisson independientes y concluir el resultado gracias al teorema de superposición (Teorema 1.13).

Por definición Φ_n es un conjunto aleatorio y numerable. Sean $\{A_j\}_{j=1}^k$ una familia disjunta, $A_0 := S \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j$, y $m_0 := m - \sum_{j=1}^k m_j$, donde $\{m_j\}_{j=1}^k$ y m son enteros no negativos.

Notemos que el evento $[N^{(n)}(A_j) = m_j]$ es equivalente al evento de observar los puntos aleatorios $X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \dots, X_{t_{m_j}}^{(n)}$ contenidos en el conjunto A_j , por lo tanto

$$\begin{aligned} P(N^{(n)}(A_1) = m_1, N^{(n)}(A_2) = m_2, \dots, N^{(n)}(A_k) = m_k | N_n = m) \\ &= \binom{m}{m_1} p_n(A_1)^{m_1} \binom{m - m_1}{m_2} p_n(A_2)^{m_2} \dots \binom{m - (m_1 + m_2 + \dots + m_k)}{m_0} p_n(A_0)^{m_0} \\ &= \frac{m!}{\prod_{j=0}^k m_j!} \prod_{j=0}^k p_n^{m_j}(A_j), \end{aligned}$$

que son las probabilidades correspondientes a una distribución multinomial con frecuencias $\{m_j\}_{j=0}^k$ y parámetros m y $\{p_n(A_j)\}_{j=0}^k$. Finalmente necesitamos la probabilidad marginal de las $N^{(n)}(A_j)$ esperando que sean variables independientes. Sea $\pi_{m_j}(\mu_n(A_j)) := \frac{\exp(-\mu_n(A_j)) \mu_n(A_j)^{m_j}}{m_j!}$, entonces

$$\begin{aligned} P(N^{(n)}(A_1) = m_1, N^{(n)}(A_2) = m_2, \dots, N^{(n)}(A_k) = m_k) \\ &= \sum_{\{m: m \geq \sum_{j=0}^k m_j\}} \frac{\exp(-\mu_n(S)) \mu_n^m(S)}{m!} \frac{m!}{\prod_{j=0}^k m_j!} \prod_{j=0}^k p_n^{m_j}(A_j), \\ &= \sum_{\{m: m \geq \sum_{j=0}^k m_j\}} \exp(-\mu_n(S)) \prod_{j=0}^k \frac{\mu_n^{m_j}(A_j)}{m_j!} \\ &= \sum_{\{m: m \geq \sum_{j=0}^k m_j\}} \frac{\exp(-\mu_n(A_0)) \mu_n^{m_0}(A_0)}{m_0!} \exp\{-\mu_n(S) + \mu_n(A_0)\} \prod_{j=1}^k \frac{\mu_n^{m_j}(A_j)}{m_j!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\{m \geq \sum_{j=0}^k m_j\}} \pi_{m-\sum m_j}(\mu_n(A_0)) \prod_{j=1}^k \pi_{m_j}(\mu_n(A_j)).$$

Por lo tanto

$$P(N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k) = \prod_{j=1}^k \pi_{m_j}(\mu_n(A_j)),$$

esto es, $\{N^{(n)}(A_j)\}_j$ es una familia de variables de Poisson independientes. Entonces Φ_n es un proceso de Poisson con medida de intensidad μ_n , y por la independencia de las variables aleatorias $X_r^{(n)}$, $\{\Phi_n\}_n$ es una colección de procesos de Poisson independientes, lo que permite concluir que Φ es un proceso de Poisson con medida de intensidad $\mu = \sum_n \mu_n$. \square

Ejemplo 1.21 (*Existencia del proceso de Poisson homogéneo*) Sean $S = \mathbb{R}^d$ y $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la σ -álgebra de Borel en ese espacio. Para todo conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definir

$$\mu(A) := \lambda \mu_L(A), \quad \lambda > 0.$$

Así μ es una medida difusa. Más aún, μ puede ser escrita como $\mu = \sum \mu_n$ con $\mu_n(A) := \lambda \mu_L(D_n \cap A)$, donde $D_n = \{x : n-1 \leq \|x\| < n\}$, y de esta forma $\mu_n(S) = \lambda \mu_L(D_n) < \infty \forall n$, cumpliéndose además que $\mathbb{R}^d = \bigcup_n D_n$. El Teorema 1.20 garantiza que existe un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d con medida de intensidad $\mu(\cdot)$, que es el proceso de Poisson homogéneo. \dagger

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, los procesos de Poisson tienen un buen número de propiedades especiales las cuales hacen su uso y el cálculo de las probabilidades asociadas, sorprendentemente simples.

Capítulo 2

Momentos y transformadas de los procesos de Poisson

En el presente capítulo se definen los momentos de primer y segundo ordenes de un proceso de Poisson y se introducen varias transformadas que caracterizan la distribución de un tal proceso.

2.1 Probabilidades asociadas a un proceso de Poisson

Antes de hablar de momentos y transformadas vale la pena introducir algunos conceptos que suelen ser útiles en la teoría general de los procesos puntuales donde los procesos de Poisson son sólo un ejemplo.

El primer concepto que discutiremos son las denominadas probabilidades en el vacío, que juegan un papel importante en la caracterización de los procesos de Poisson en el espacio euclideo d -dimensional, concretamente en el teorema de Rényi (Teorema 2.17). Tales probabilidades, $V_{(\cdot)}$, se definen como sigue.

2.1.1 Probabilidades en el vacío

Definición 2.1 (*Probabilidades en el vacío*) Sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d con medida de intensidad μ . Las probabilidades en el vacío, $V_{(\cdot)}$,

del proceso Φ se definen por

$$V_{(B)} = P(N(B) = 0) = \exp(-\mu(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d).$$

Cuando Φ es un proceso de Poisson homogéneo con tasa λ , se tiene

$$V_{(\cdot)} = \exp(-\lambda\mu_L(\cdot)).$$

Debe notarse que

$$V_{(\cdot)} = P(N(\cdot) = 0) = P(\{\Phi \cap (\cdot)\} = \emptyset)$$

y de ahí la denominación dada.

2.1.2 Distribuciones de contacto

Otra función de interés son las funciones de distribución de contacto.

Definición 2.2 (*Distribuciones de contacto*) Sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbf{R}^d con medida de intensidad μ . Las distribuciones de contacto $H_{(\cdot)}(\cdot)$ del proceso Φ se definen como

$$H_{(B)}(r) = 1 - V_{(rB)} = P(N(rB) \neq 0), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \quad r \geq 0,$$

siempre que $\mu(B) > 0$.

Ejemplo 2.3 (*Distribución de Contacto Esférico*) Un caso particular de distribuciones de contacto se obtiene cuando los conjuntos B son las bolas cerradas

$$B = \{x : \|x - y\| \leq r\} := b(y, r), \quad y \in \mathbf{R}^d, \quad r \geq 0,$$

en cuyo caso $H_{(B)}(r)$ se denomina distribución de contacto esférico o de primer contacto.

Si Φ es el proceso de Poisson homogéneo de tasa λ , entonces

$$H_{(B)}(r) = 1 - P(N(b(y, r)) = 0) = 1 - \exp(-\lambda\mu_L(b(y, r))), \quad r > .$$

Esta expresión se interpreta como la función de distribución de la distancia desde el punto y hasta el punto más cercano del proceso Φ . Notar que si $r = 0$, entonces tal distribución vale 0 por ser μ una medida difusa. Esto indica que el evento de hallar al menos un punto del proceso Φ en la bola $b(y, 0)$ es un evento imposible, pues el único punto en esta bola es y que no es, en principio, un punto aleatorio. Concluimos que la condición $\mu(\cdot) > 0$ en la Definición 2.2 es importante. †

2.1.3 Distribuciones de dimensión finita

Un concepto que surge a partir de la necesidad de construir espacios de probabilidad para los procesos de Poisson son las denominadas distribuciones de dimensión finita, y que definimos a continuación.

Definición 2.4 (*Distribuciones de dimensión finita*) Sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d con medida de intensidad μ . Las distribuciones de dimensión finita del proceso Φ se definen como

$$\begin{aligned} P(N(B_1)=n_1, N(B_2)=n_2, \dots, N(B_k)=n_k) &= \prod_{j=1}^k \frac{\exp(-\mu(B_j))\mu^{n_j}(B_j)}{n_j!} \\ &= \exp\left(-\sum_{j=1}^k \mu(B_j)\right) \prod_{j=1}^k \frac{\mu^{n_j}(B_j)}{n_j!} \\ &= \exp(-\mu(B)) \prod_{j=1}^k p_j^{n_j}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

donde k es un entero positivo, $\{B_j\}_{j=1}^k$ es una familia disjunta de conjuntos Borelianos, $\{n_j\}_{j=1}^k$ es una colección de enteros no negativos, $B := \bigcup_{j=1}^k B_j$, y $p_j := \frac{\mu(B_j)}{(n_j)!^{1/n_j}}$.

Esta expresión es útil cuando se requiere calcular probabilidades conjuntas sobre Borelianos más generales y no necesariamente ajenos. Además juegan un papel principal en la teoría de procesos estocásticos, donde por medio del teorema de Kolmogorov¹, se emplean para demostrar existencia de procesos estocásticos correspondientes a familias dadas de distribuciones de dimensión finita.

En nuestro contexto, el problema de existencia de medidas aleatorias no triviales, en particular de un proceso de Poisson, es equivalente al de definir sobre el espacio medible $(\mathcal{N}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)))^2$ de medidas de contar en \mathbb{R}^d , un proceso estocástico $\{\Pi_\mu^B\}$, parametrizado por los subconjuntos de Borel $B \subseteq \mathbb{R}^d$ cuyas "proyecciones" $\Pi_\mu^B := N(B)$ tienen distribuciones conjuntas dadas por (2.1). El lector interesado encontrará una construcción detallada del proceso de Poisson en [2], Pág. 212, donde se obtiene la distribución Π_μ de

¹[5], Teorema 36.1.

²Revisar el Apéndice A.3

$\{\Pi_\mu^B\}$ a partir de distribuciones de dimensión finita funcionalmente idénticas a las dadas en la Definición 2.4. De esta forma, cualquier proceso puntual con distribución Π_μ es un proceso de Poisson con medida de intensidad μ .

En resumen, en la Definición 2.4 se parte de un proceso de Poisson Φ con medida de intensidad μ (la cual es necesariamente difusa según la Sección 1.1.1) y por consiguiente posee distribuciones de dimensión finita dadas en dicha definición. En la construcción del proceso de Poisson se parte de la familia de distribuciones de dimensión finita dadas por (2.1), donde μ es una medida difusa en \mathbf{R}^d de Borel-Radon, y se concluye la existencia de una única medida de probabilidad, que es la distribución del proceso de Poisson con intensidad μ .

Sin embargo, una forma intuitiva y elemental de construir el proceso de Poisson es la contenida en el Ejemplo 1.2, que se basa en la ley de eventos raros.

Ejemplo 2.5 Considerar un proceso de Poisson homogéneo Φ con tasa λ y definamos $n := \sum_{j=1}^k n_j$ y $p_j := \frac{\mu_L(B_j)}{(n_j!)^{1/n_j}}$. Entonces las distribuciones de dimensión finita del proceso Φ quedan expresadas como

$$P(N(B_1)=n_1, N(B_2)=n_2, \dots, N(B_k)=n_k) = \lambda^n \exp(-\lambda \mu_L(B)) \prod_{j=1}^k p_j^{n_j}.$$

†

Notemos que $\{p_j\}_{j=1}^k$ no determina una función masa de probabilidad, pues $\sum_{j=1}^k p_j \neq 1$. Si esta suma fuera igual a 1 para alguna k^* , entonces podríamos decir que la distribución conjunta de probabilidad de las variables aleatorias $N(B_j)$, $j = 1, 2, \dots, k^*$, es proporcional a una distribución multinomial con parámetros n y $\{p_j\}_{j=1}^{k^*}$. Sin embargo consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6 (*Distribución multinomial asociada a un proceso de Poisson*)

En el contexto de la Definición 2.4 sean $S_k := \sum_{j=1}^k N(B_j)$, $n := \sum_{j=1}^k n_j$, $N(B_j) := N_j$, y $\mu(B_j) := \mu_j$. Entonces para cada entero positivo k , $S_k \sim \text{Poi}(\sigma_k)$, donde

$$\sigma_k := \sum_{j=1}^k \mu_j = \mu(B).$$

Así

$$\begin{aligned} P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_k = n_k | S_k = s) &= \left(\prod_{j=1}^k \frac{\exp(-\mu_j) \mu_j^{n_j}}{n_j!} \right) / \left(\frac{\sigma_k^s \exp(-\sigma_k)}{s!} \right) \\ &= \frac{s!}{\prod_{j=1}^k n_j} \prod_{j=1}^k p_j^{n_j}, \end{aligned}$$

donde $p_j = \frac{\mu_j}{\sigma_k}$, cumpliéndose que $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Ahora sí tenemos una distribución multinomial con parámetros n y $\{p_j\}_{j=1}^k$. †

2.2 Momentos de un proceso de Poisson

Duda no cabe que cuando se habla de variables aleatorias es importante considerar objetos asociados a ellas tales como sus momentos o ciertas transformadas. A partir de esto resulta natural pensar en definir entidades análogas para los procesos que estamos estudiando.

Definición 2.7 Sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d con medida de intensidad μ .

1) El primer momento o medida de intensidad $\mu^{(1)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^+$ del proceso Φ se define como

$$\mu^{(1)}(B) := E[N(B)] = \mu(B).$$

2) La covarianza no centrada o medida de momentos de segundo orden $\mu^{(2)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^+$ del proceso Φ se define como la medida

$$\mu^{(2)}(A \times B) := E[N(A)N(B)].$$

En el capítulo precedente vimos que la función de primer momento $\mu^{(1)}$ es una medida que representa el número promedio de puntos del proceso Φ esparcidos en alguna región espacial. En el caso del proceso homogéneo el primer momento es $\lambda\mu_L$.

La medida de momentos de segundo orden $\mu^{(2)}$ es una medida sobre el espacio producto $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ que puede calcularse fácilmente si vemos al proceso Φ como una medida aleatoria (ver Apéndice A.3). Si B_1 y B_2 son dos conjuntos medibles de \mathbb{R}^d , entonces podemos escribir

$$B_1 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \setminus B_2) \text{ y } B_2 = (B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \setminus B_1).$$

donde las uniones son ajenas. Así,

$$\begin{aligned}
\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) &= E[N^2(B_1 \cap B_2)] + E[N(B_1 \cap B_2)]E[N(B_2 \setminus B_1)] \\
&\quad + E[N(B_1 \setminus B_2)]E[N(B_1 \cap B_2)] + E[N(B_1 \setminus B_2)]E[N(B_2 \setminus B_1)] \\
&= E[N^2(B_1 \cap B_2)] + E[N(B_1 \cap B_2)](E[N(B_2 \setminus B_1)] + E[N(B_1 \setminus B_2)]) \\
&\quad + E[N(B_1 \setminus B_2)]E[N(B_2 \setminus B_1)] \\
&= E[N^2(B_1 \cap B_2)] + E[N(B_1 \setminus B_2)]E[N(B_2 \setminus B_1)] \\
&\quad + E[N(B_1 \cap B_2)] \left(E[N(B_1 \cup B_2)] - E[N(B_1 \cap B_2)] \right),
\end{aligned}$$

y además

$$E[N(B_1)]E[N(B_2)] = E[N(B_1 \cap B_2)]E[N(B_1 \cup B_2)] + E[N(B_1 \setminus B_2)]E[N(B_2 \setminus B_1)].$$

De lo anterior se concluye que

$$\begin{aligned}
\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) &= E[N(B_1)]E[N(B_2)] \\
&\quad + \left(E[N^2(B_1 \cap B_2)] - E^2[N(B_1 \cap B_2)] \right).
\end{aligned}$$

El segundo sumando de esta expresión lo podemos ver como

$$E[N(B_1 \cap B_2) - E[N(B_1 \cap B_2)]]^2.$$

es decir, como la varianza de la variable aleatoria $N(B_1 \cap B_2)$. Ahora bien, debido a que en el caso de la distribución de Poisson la media y la varianza coinciden, deberíamos tener

$$\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) = \mu(B_1)\mu(B_2) + \mu(B_1 \cap B_2),$$

lo cual sugiere definir lo siguiente:

Definición 2.8 En el contexto de la Definición 2.7 definimos la varianza, $\text{Var}[N(\cdot)] : \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}^+$, y la covarianza centrada, $\text{Cov}[N(\cdot), N(\cdot)] : \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}^+$, del proceso Φ como

$$\begin{aligned}
\text{Var}[N(B)] &:= \mu^{(2)}(B \times B) - (\mu(B))^2, \text{ y} \\
\text{Cov}[N(A), N(B)] &:= \mu^{(2)}(A \times B) - \mu(A)\mu(B).
\end{aligned}$$

La función $\text{Var}[N(\cdot)]$ da información relativa a la dispersión que presentan los puntos del proceso contenidos en alguna región (en el caso del proceso de Poisson, la dispersión de los puntos es explicada por el número promedio de los puntos) y la covarianza $\text{Cov}[N(\cdot), N(\cdot)]$ da información sobre la correlación que pudiera existir entre el número de puntos del proceso contenidos en dos regiones espaciales distintas.

En el caso especial de un proceso de Poisson homogéneo con tasa de intensidad λ , tenemos que $E[N(B)] = \lambda\mu_L(B)$ para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, de modo que $\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) = \lambda^2\mu_L(B_1)\mu_L(B_2) + \lambda\mu_L(B_1 \cap B_2)$, resultando que en este caso la covarianza es

$$\text{Cov}[\Phi(B_1), \Phi(B_2)] = \lambda\mu_L(B_1 \cap B_2), \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

A partir de la última igualdad podemos decir que la correlación entre los números de puntos del proceso homogéneo Φ , contenidos en regiones disjuntas, es nula, lo cual es consistente con la propiedad de incrementos independientes de Φ .

Obsérvese que la medida de momentos de segundo orden, $\mu^{(2)}$, puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(B_1 \times B_2) &= E[|\{x, y \in \Phi : x \in B_1, y \in B_2\}|] \\ &= E\left[\sum_{x, y \in \Phi} I_{B_1}(x)I_{B_2}(y)\right], \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

donde $I_{B_i}(x)$ es la función indicadora del conjunto B_i , $i = 1, 2$.

Como se vió, $\mu^{(2)}(B_1 \times B_2)$ se compone de dos contribuciones: una proveniente de los puntos de Φ contenidos en las regiones B_1 y B_2 por separado, y otra proveniente de los puntos en la región común $B_1 \cap B_2$. Esta distinción motiva definir una función más.

Definición 2.9 En el contexto de la Definición 2.7, la medida de momentos factoriales de segundo orden del proceso Φ se define como

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) &:= E[|\{x, y \in \Phi : x \in \Phi \cap B_1, y \in \Phi \cap B_2, x \neq y\}|] \\ &= E\left[\sum_{\substack{x, y \in \Phi \\ x \neq y}} I_{B_1}(x)I_{B_2}(y)\right], \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

donde $\sum_{\substack{x, y \in \Phi \\ x \neq y}}$ representa la suma sobre $x, y \in \Phi$ pero $x \neq y$.

A partir de esta definición podemos escribir lo siguiente:

$$\mu^{(2)}(B_1 \times B_2) = \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) + \mu(B_1 \cap B_2).$$

Notar que en el caso de un proceso de Poisson homogéneo de intensidad λ , la medida de momentos factoriales de segundo orden es de la forma

$$\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) = \mu^{(1)}(B_1)\mu^{(1)}(B_2) = \lambda^2 \mu_L(B_1)\mu_L(B_2),$$

de donde se sigue que la medida $\alpha^{(2)}$ tiene una densidad $\rho^{(2)}$ respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$. Esta última se denomina densidad producto de segundo orden, que en este caso es la función

$$\rho^{(2)}(x_1, x_2) = \lambda^2, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}^d,$$

puesto que se cumple la relación

$$\alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) = \int_{B_1 \times B_2} \int \rho^{(2)} d(\mu_L \times \mu_L).$$

A partir de la última igualdad se deduce una útil interpretación infinitesimal, a saber: si B_1 y B_2 son dos conjuntos disjuntos con volumen respectivo dv_1 y dv_2 , y $x_i \in B_i$, $i = 1, 2$, entonces

$$\rho^{(2)}(x_1, x_2)dv_1dv_2 \doteq \lambda^2dv_1dv_2$$

es la probabilidad de que Φ contenga un punto en cada B_i . Claro está que en este caso $\mu^{(1)}$ tiene densidad $\rho^{(1)}(x) = \lambda$.

Cabe aclarar que para los fines de este trabajo basta introducir medidas de momentos de orden 2. sin embargo, en la teoría general de los procesos puntuales juegan un papel importante, además de éstas, las medidas de momentos de orden mayor que 2.³

2.3 Sumas sobre procesos de Poisson

Debido a que un proceso de Poisson Φ es una medida aleatoria, un problema fundamental en el estudio de estos procesos es determinar condiciones bajo las cuales una función medible $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ es Φ -integrable.

³Se recomienda ver [3], Sección 5.4.

Ya que Φ es una medida aleatoria puntual, el problema anterior conduce a estudiar series aleatorias de la forma

$$\Sigma := \sum_{x \in \Phi} f(x). \quad (2.2)$$

donde Φ es un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d y $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible. Es menester mencionar que tal función Σ puede no estar definida, pues la serie involucrada puede no converger.⁴

Ejemplo 2.10 (*Monto total por reclamos*) La serie en (2.2) puede representar el monto total por reclamaciones para una compañía de seguros si suponemos que los reclamos ocurren en el transcurso del tiempo de acuerdo a un proceso de Poisson en \mathbb{R}^+ , y que conocemos una función medible indicando el monto relativo a cada ocurrencia. Así Σ modelará el monto agregado. †

Ejemplo 2.11 (*Predicción de Shot-noise, R. Lund, 1999*) Considerar un proceso de disparos sobre un enrejado discreto de puntos. Sean $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ las magnitudes o efectos de los disparos (grado de daño producido al enrejado) independientes e idénticamente distribuidos. Suponemos que la ocurrencia de los disparos está relacionada con un proceso de Poisson Φ sobre \mathbb{R}^+ , en el sentido de que el número de disparos efectuados en un intervalo de tiempo corresponde al número de puntos del proceso Φ contenidos en tal intervalo.

Considerar los incrementos $\tau_i = X_i - X_{i-1}$, $i \geq 2$, $\tau_1 = X_1$, donde $X_i \in \Phi$. Los efectos debidos a los disparos se acumulan aditivamente y son medidos por una función dependiente del tiempo, A_t , dada por

$$A_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i h(t - \tau_i),$$

donde $N_t = |\Phi \cap [0, t]|$.

Las magnitudes Y_i se denominan "shot marks" y se suponen independientes de Φ . La función h se denomina función de disparo (o función de respuesta

⁴De hecho una suma como en la Ecuación (2.2) es una integral de Stiltjes aleatoria, pues cumple la relación

$$\int f(x) \Phi(dx) = \sum_{x \in \Phi} f(x).$$

al impulso) y se supone acotada en el tiempo. Si $h(t) = I_{[0,\infty)}(t)$, entonces A_t es un ejemplo de lo que se llama un proceso de Poisson compuesto. Otro caso de este tipo especial de proceso de Poisson se describe en el siguiente ejemplo. †

Ejemplo 2.12 (*Movimiento Browniano unidimensional, V.Y. Korolev, 1998*)

El presente ejemplo se relaciona con el movimiento térmico (movimiento debido a la temperatura) de una partícula que sufre colisiones con las moléculas del medio a través del cual la partícula se mueve. Sea $N(t)$ el número de colisiones que la partícula sufre con moléculas hasta el tiempo t .

Si el medio y las propiedades de la partícula no cambian al transcurrir el tiempo, entonces podríamos suponer que $N(t)$ sigue un proceso de Poisson homogéneo. Sin embargo, bajo el supuesto de que el medio y/o las propiedades de la partícula cambian sobre el tiempo, entonces la intensidad de colisiones no debería suponerse constante. Por tanto, denotando al cambio de posición de la partícula debido a la j -ésima colisión por X_j , concluimos que el proceso

$$S(t) := \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0,$$

describe la posición de la partícula en el tiempo t . El proceso $S(t)$ es otro ejemplo de proceso de Poisson Compuesto. †

2.4 Transformadas de un proceso (Teorema de Campbell)

La pregunta importante bajo este contexto es: ¿qué podemos decir de series como (2.2) y para qué nos serviría tal conocimiento? Una respuesta es que esta serie aparece en ciertas transformadas que caracterizan a las distribuciones, tales como la función característica, la transformada de Laplace o la función generadora de momentos. Comencemos con la función generadora.

2.4.1 Función generadora

La transformada que aquí describiremos (en el caso de procesos de Poisson) corresponde al concepto de función generadora de momentos, estudiado en la teoría de probabilidad elemental.

Sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d con medida de intensidad μ y $\Sigma = \sum_{x \in \Phi} f(x)$, donde f es una función medible de rango finito $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Poniendo $A_j = f^{-1}(\{a_j\})$, $j = 1, 2, \dots, n$, se sigue que $\{N(A_j)\}_{j=1}^n$ es una familia de variables aleatorias de Poisson independientes con parámetros respectivos $\mu(A_j)$. Así,

$$\Sigma = \sum_{x \in \Phi} f(x) = \sum_{i=1}^n a_i N(A_i).$$

Recordemos que si N es variable aleatoria de Poisson de parámetro μ , entonces su función generadora de momentos es de la forma $E[e^{\theta N}] = \exp\{(e^\theta - 1)\mu\}$.

Debido a la independencia de las variables aleatorias $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ obtenemos, para $\theta \in \mathbb{C}$,

$$E[e^{\theta \Sigma}] = \prod_{i=1}^n \exp\{(e^{\theta a_i} - 1)\mu(A_i)\} = \exp\left\{\sum_{i=1}^n (e^{\theta a_i} - 1)\mu(A_i)\right\}.$$

Debido a la aditividad de la integral (Apéndice A.1.5), y a que $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^n A_j$ (unión ajena) resulta

$$\begin{aligned} E[e^{\theta \Sigma}] &= \exp\left\{\sum_{i=1}^n \int_{A_i} (e^{\theta f(x)} - 1)\mu(dx)\right\} \\ &= \exp\left\{\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\theta f(x)} - 1)\mu(dx)\right\}. \end{aligned}$$

Como conclusión, si f es una función simple (Apéndice A.1.4), la función generadora de momentos de la variable aleatoria Σ está dada por

$$E[e^{\theta \Sigma}] = \exp\left\{\int (e^{\theta f(x)} - 1)\mu(dx)\right\}, \quad \theta \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Empleando el método usual de la teoría de la medida se verifica que la Ecuación (2.3) también es válida cuando f es cualquier función medible y acotada.

Dependiendo de la forma del parámetro θ en (2.3), se obtienen las siguientes transformadas de Φ .

Definición 2.13 i) Sea $\theta = it$ con $t \in \mathbb{R}$. Entonces la Ecuación (2.3) se reduce a

$$E[e^{it\Sigma}] = \exp\left\{\int (e^{itf(x)} - 1)\mu(dx)\right\}.$$

La función $\varphi_f(t) := E[e^{it\Sigma}]$, donde $t \in \mathbf{R}$ y f es una función medible y acotada, se denomina función característica o transformada de Fourier de Σ .

ii) Sea $\theta = -r$, donde $r \in \mathbf{R}^+$. En este caso la Ecuación (2.3) se reduce a la transformada de Laplace de Σ , dada por

$$E[e^{-r\Sigma}] = \exp \left\{ \int (e^{-rf(x)} - 1) \mu(dx) \right\},$$

siendo f una función medible y no negativa.

A partir de la función generadora de momentos de la variable aleatoria Σ podemos obtener la media y la varianza de la misma.

Sustituyendo en la Ecuación (2.3) los desarrollos en serie de potencias de las funciones $e^{\theta\Sigma}$ y $e^{\theta f(x)}$ obtenemos

$$E[1 + \theta\Sigma + \theta^2 g_1(\Sigma; \theta)] = \exp \left\{ \int (\theta f(x) + \theta^2 g_2(f(x); \theta)) \mu(dx) \right\},$$

donde $g_1(\Sigma; \theta) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\theta^{i-2} \Sigma^i}{i!}$ y $g_2(f(x); \theta) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\theta^{i-2} (f(x))^i}{i!}$.

Suponiendo que es válido derivar respecto a θ las series g_1 y g_2 y bajo el signo de integral (lo cual se sigue de los resultados en el Apéndice A.1.5), se desprende que

$$\begin{aligned} & E \left[\Sigma + \theta^2 \frac{\partial g_1}{\partial \theta} + 2\theta g_1 \right] \\ &= \exp \left\{ \int (\theta f(x) + \theta^2 g_2(f(x); \theta)) \mu(dx) \right\} \int (f(x) + \theta^2 \frac{\partial g_2}{\partial \theta} + 2\theta g_2) \mu(dx). \end{aligned}$$

Evaluando en $\theta = 0$ obtenemos que la media de Σ está dada por

$$E[\Sigma] = \int f(x) \mu(dx).$$

y de forma análoga obtenemos una expresión sencilla para la varianza:

$$\text{Var}[\Sigma] = \int f^2(x) \mu(dx).$$

Mediante esta técnica (que es la usual al tratar con variables aleatorias) también podemos calcular la covarianza entre dos sumas $\Sigma_1 = \sum f_1$ y $\Sigma_2 = \sum f_2$ sobre los puntos de un proceso de Poisson: escribiendo $\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2$ en

vez de θf en la Ecuación (2.3) (donde θ_1 y θ_2 son parámetros complejos) resulta que

$$E[e^{\theta_1 \sum f_1 + \theta_2 \sum f_2}] = \exp \left\{ \int (e^{\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2} - 1) \mu(dx) \right\}.$$

Sustituyendo, al igual que antes, los desarrollos en series de potencias de $e^{\theta_1 \sum f_1 + \theta_2 \sum f_2}$ y de $e^{\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2}$, pero ahora poniendo atención en el coeficiente de $\theta_1 \theta_2$, se obtiene

$$E[\sum f_1 \sum f_2] = \int f_1 d\mu \int f_2 d\mu + \int f_1 f_2,$$

y así

$$\text{Cov}[\sum f_1, \sum f_2] = \int f_1 f_2 d\mu.$$

Hasta este punto no hemos tocado la pregunta de si la serie aleatoria (2.2) converge en algún sentido. La respuesta contundente la da el teorema de Campbell.

Teorema 2.14 (Campbell) Sean Φ un proceso de Poisson sobre un conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ con medida de intensidad μ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces

i) $\Sigma = \sum_{x \in \Phi} f(x)$ es absolutamente convergente con probabilidad 1 si y sólo si

$$\int_S \min(|f(x)|, 1) \mu(dx) < \infty, \quad (2.4)$$

en cuyo caso se cumple la Ecuación (2.3), siempre que la integral en el exponente a la derecha de (2.3) sea convergente.

ii) La media $E[\Sigma]$ existe si y sólo si la integral $\int_S f(x) \mu(dx)$ converge, en cuyo caso $E[\Sigma] = \int_S f(x) \mu(dx)$.

iii) Si la integral $\int_S f(x) \mu(dx)$ converge, entonces

$$\text{Var}[\Sigma] = \int f^2(x) \mu(dx),$$

pudiendo ser $\text{Var}[\Sigma] = +\infty$.

La demostración de este teorema sigue el método usual de teoría de la medida, cuyo primer paso ya fue hecho al considerar que la función f tenía rango finito (función simple). El paso siguiente es extender el teorema al caso de funciones medibles no negativas, y por último al de funciones medibles arbitrarias.

Ejemplo 2.15 Sean f_1, f_2, \dots, f_n funciones medibles que satisfacen la expresión (2.4) en el teorema de Campbell y definir $\Sigma_j := \sum_{x \in \Phi} f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Entonces Σ_j converge con probabilidad 1 y además

$$\mathbb{E}[e^{\sum_{j=1}^n t_j \Sigma_j}] = \exp \left\{ \int (e^{\sum_{j=1}^n t_j f_j} - 1) d\mu \right\},$$

donde t_1, t_2, \dots, t_n son números reales.

Si $\int f_j^2(x) \mu(dx) < \infty$ para cada j deberíamos tener

$$\text{Cov}[\Sigma_k, \Sigma_j] = \int f_k(x) f_j(x) \mu(dx).$$

En efecto, la demostración se sigue del teorema anterior escribiendo $f = \sum_{j=1}^n t_j f_j$, y con $\theta = i$. †

2.5 Funcional de Laplace

Dada una configuración aleatoria y contable de puntos en \mathbb{R}^d , ¿cómo determinar si ésta es un proceso de Poisson? Para dar una respuesta a esta pregunta supongamos que en el teorema de Campbell (Teorema 2.14) la función f es no negativa y que $\theta = -1$. Entonces resulta

$$\mathbb{E}[e^{-\Sigma}] = \exp \left\{ - \int (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right\},$$

donde $\Sigma := \sum_{x \in \Phi} f(x)$.

Notemos que $T_{\Phi}(f) := \mathbb{E}[e^{-\Sigma}]$ puede verse como un funcional (no lineal) definido en el espacio de funciones medibles no negativas de S en \mathbb{R} , es decir,

$$T_{\Phi}(f) = \exp \left\{ - \int_S (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right\}. \quad (2.5)$$

A T_{Φ} se le llama funcional de Laplace del proceso Φ ; tal nombre obedece a que T_{Φ} es una extensión al contexto de procesos puntuales del concepto familiar de transformada de Laplace de una variable aleatoria no negativa.

Una respuesta satisfactoria a la pregunta formulada en el párrafo anterior la da el siguiente corolario.

Corolario 2.16 *Sea Φ un subconjunto aleatorio y numerable de puntos sobre \mathbb{R}^d . Si para alguna medida μ se cumple la Ecuación (2.5) para toda función $f \in \mathcal{F}$, donde \mathcal{F} es una familia de funciones medibles en \mathbb{R}^d que contiene a todas las funciones de rango finito, entonces el conjunto aleatorio Φ es un proceso de Poisson con $\mathbb{E}[N(\cdot)] = \mu(\cdot)$.*

Prueba. La prueba de esta aseveración resulta del argumento siguiente: sea $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ el rango de una función $f \in \mathcal{F}$. Debido a la Ecuación (2.5) tenemos que

$$T_{\Phi}(f) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n (1 - e^{-a_j}) \mu(A_j) \right\} = \prod_{j=1}^n e^{\mu(A_j)(z_j - 1)},$$

donde $z_j := e^{-a_j}$ y $A_j := f^{-1}(\{a_j\})$. Luego

$$\mathbb{E}[z_1^{N(A_1)} \dots z_n^{N(A_n)}] = \prod_{j=1}^n e^{\mu(A_j)(z_j - 1)},$$

siendo el lado derecho de la última ecuación, la función generadora de una familia de variables aleatorias de Poisson independientes $\{N(A_j)\}_{j=1}^n$, con correspondientes parámetros $\{\mu(A_j)\}_{j=1}^n$. Así pues, por definición, Φ es un proceso de Poisson con medida de intensidad μ . \square

El corolario anterior ofrece un criterio que permite determinar, por medio del funcional de Laplace, si una colección aleatoria de puntos en \mathbf{R}^d es un proceso de Poisson.

Otra caracterización de los procesos de Poisson en \mathbf{R}^d , debida a Rényi⁵, se basa en el comportamiento de las “probabilidades en el vacío” de un proceso puntual Φ .

Teorema 2.17 (Rényi) *Sea μ una medida difusa sobre \mathbf{R}^d finita sobre conjuntos acotados. Sea Φ un subconjunto aleatorio y numerable de puntos de \mathbf{R}^d que cumple*

$$V_A = e^{-\mu(A)},$$

donde A es cualquier unión finita de rectángulos d -dimensionales y $V_{(\cdot)} = P(\Phi \cap (\cdot) = \emptyset)$ son las probabilidades en el vacío de Φ . Entonces Φ es un proceso de Poisson con medida de intensidad μ .

La prueba de este teorema puede leerse en [2], Proposición 4.2. o en [1], Pág. 35.

Un resultado similar al de Rényi, debido a Prékopa, establece que un proceso puntual cualquiera es un proceso de Poisson si y sólo si 1) es una medida aleatoria difusa, y 2) adolece de puntos múltiples.

2.6 Medida de Palm

Cuando se habla de probabilidades asociadas a variables aleatorias es fundamental estudiar probabilidades condicionales, y de acuerdo al camino seguido, uno esperaría efectuar un estudio análogo en relación a los procesos de Poisson.

Un tipo especial de probabilidad condicional, en el contexto de un proceso de Poisson, es la denominada medida de Palm.

Imaginemos que poseemos la información de que cierto punto de \mathbf{R}^d pertenece a algún proceso de Poisson Φ con medida de intensidad μ . El objetivo es hacer inferencias acerca del proceso como tal a partir de dicha información.

⁵Remarks on the Poisson process. Studia Sci. Math. Hungarica 2. 1967.

Ahora bien, para poder inferir algo sobre Φ mediante este camino (probabilidad condicional) es deseable que ese punto tenga nada de particular, pero ¿cómo lograr esto último o qué significa? En principio, un punto con tal característica se denomina punto típico.

Una propuesta natural es que tal punto sea el resultado de un procedimiento de selección en el cual cada punto del proceso tiene la misma oportunidad de ser seleccionado (muestreo aleatorio y uniforme).

Un ejemplo de tal procedimiento es considerar la función de distribución, D_{vc} , de la distancia del vecino más cercano. Ésta describe la distribución de la distancia desde un punto cualquiera $x \in \Phi$ hasta el punto más cercano en el conjunto $\Phi \setminus \{x\}$.

Por otro lado, notemos que seleccionar puntos por cualquier método elimina, intrínsecamente, la idea de punto cualquiera (punto típico). Es más, al decir que un punto tiene nada de particular estamos diciendo al mismo tiempo que tal punto posee una característica.

A pesar de los inconvenientes antes mencionados el problema de obtener información sobre un proceso a partir de alguna información previa es tratado en la teoría general de los procesos puntuales. En el caso en que la información previa con que se cuenta se refiere a la de un punto típico la herramienta utilizada es la denominada distribución o medida de Palm, que no es más que considerar probabilidades condicionales sobre puntos típicos.

Un primer enfoque a esta distribución, en el caso de un proceso de Poisson homogéneo, es como sigue: sean $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y $\Phi = \{x_1, x_2, \dots\}$ un proceso homogéneo sobre \mathbb{R}^d . Es decir, Y es alguna propiedad posible que pudiera poseer el proceso Φ , por ejemplo, que el número de puntos del proceso contenidos en cierta región sea igual con n .

Definamos la siguiente probabilidad:

$$P(\Phi \in Y|x) \equiv P(\Phi \text{ tenga la propiedad } Y|x) := P(\Phi \in Y|x \in \Phi),$$

donde $x \in \mathbb{R}^d$. Luego, por la propiedad de homogeneidad del proceso Φ , se cumple que

$$P(\Phi \in Y|x) = P(\Phi_{-x} \in Y|x \in \Phi),$$

donde Φ_{-x} es un proceso trasladado consistiendo de los puntos $\{x_1 - x, x_2 - x, \dots\}$. Ahora definamos la función de distribución $D_{vc}(\cdot)$ (Dist. del Vec. más cercano) relativa al proceso homogéneo Φ del siguiente modo:

Definición 2.18 Sea Φ un proceso de Poisson homogéneo sobre \mathbf{R}^d . Entonces la función de distribución del vecino más cercano se define como

$$\begin{aligned} D_{vc}(r) &:= P(N(b(x, r)) > 1|x) \\ &= 1 - P(N(b(x, r)) = 1|x), \end{aligned}$$

donde $b(x, r)$ es la bola de radio r y centro en x .

Esta función no es sino la probabilidad de hallar al menos un punto del proceso Φ distinto del punto conocido $x \in \Phi$ contenido en una bola rodeando a x , lo cual puede interpretarse como la distancia del vecino más cercano a x .

Sin embargo, en la Definición 2.18 puede haber un problema puesto que el evento $[x \in \Phi]$ tiene medida de probabilidad cero. cuando hablamos de procesos de Poisson, debido a que las medidas de intensidad son difusas.

Una forma de dar un significado riguroso a la Definición 2.18 es seguir el camino usual en teoría de la probabilidad construyendo una probabilidad condicional mediante el teorema de Radon-Nikodym⁶.

Otro camino más elemental es el siguiente: para $0 < \epsilon \leq r$, sea $b(x, \epsilon)$ la bola de radio ϵ centrada en x . Considerar la función

$$D_\epsilon(r) := 1 - P(N(b(x, r) \setminus b(x, \epsilon)) = 0 | N(b(x, \epsilon)) = 1),$$

la cual está bien definida pues sabemos que

$$P(N(b(x, \epsilon)) = 1) = \lambda \mu_L(b(x, \epsilon)) e^{-\lambda \mu_L(b(x, \epsilon))} > 0,$$

donde λ es la tasa de intensidad del proceso Φ . Es decir, $D_\epsilon(r)$ es la probabilidad de hallar al menos un punto del proceso Φ distinto de $x \in \Phi$ y contenido en el disco $\{y \in \mathbf{R}^d : r \geq \|y\| \geq \epsilon\}$ (Figura 2.1). Así pues. si permitimos que $\epsilon \rightarrow 0$, $D_\epsilon(r)$ deberá aproximarse a la medida de Palm $D_{vc}(r)$.

Notemos que los conjuntos $(b(x, r) \setminus b(x, \epsilon))$ y $b(x, \epsilon)$ son ajenos y por tanto

$$\begin{aligned} D_\epsilon(r) &= 1 - \frac{P(N(b(x, r) \setminus b(x, \epsilon)) = 0)P(N(b(x, \epsilon)) = 1)}{P(N(b(x, \epsilon)) = 1)} \\ &= 1 - P(N(b(x, r) \setminus b(x, \epsilon)) = 0) \\ &= 1 - \exp\{-\lambda[\mu_L(b(x, r)) - \mu_L(b(x, \epsilon))]\}. \end{aligned}$$

⁶Ver Apéndices A.1.5 y A.2.1

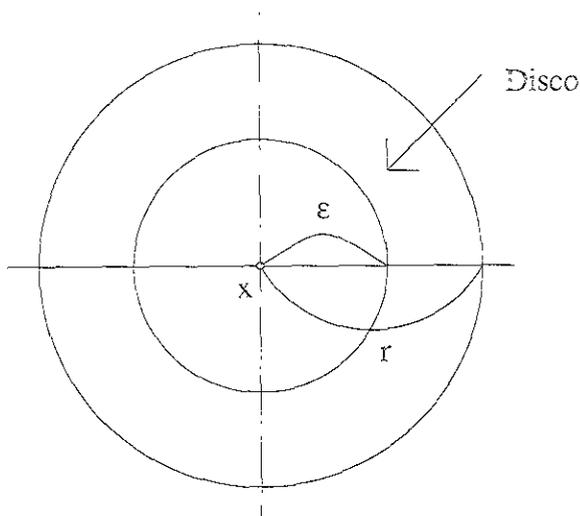


Figura 2.1: Disco.

De esta forma podemos definir a la función $D_{vc}(r)$ como el límite de $D_\epsilon(r)$ cuando hacemos tender al número ϵ hacia el valor cero. Esto es,

$$\begin{aligned} D_{vc}(r) &:= \lim_{\epsilon \searrow 0} D_\epsilon(r) \\ &= 1 - \exp\{-\lambda\mu_L(b(x, r))\}, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Notar que el lado derecho en la última expresión coincide con una distribución de contacto esférico (ver Ejemplo 2.3). Por tanto para el proceso de Poisson homogéneo,

$$D_{vc}(r) = H_{b(\cdot, r)}(r) = 1 - V_{b(\cdot, r)}, \quad r \geq 0,$$

donde $V_{b(\cdot, r)}$ es una probabilidad en el vacío.

Lo anterior indica que la distribución de Palm de un proceso de Poisson homogéneo queda completamente especificada por la distribución del proceso original y por un punto conocido de \mathbb{R}^d . Además es claro que esta función no depende del punto x cuando se trata del proceso homogéneo, pues el volumen de cualquier bola de radio r coincide sin importar el centro asociado.

El resultado que formaliza este comentario es el denominado teorema de Slivnyak, según el cual se cumple la igualdad

$$P(\Phi \in Y|x) = P(\Phi \cup \{x\} \in Y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Otro enfoque de la medida de Palm que conduce al resultado ya obtenido es examinar todos los puntos de Φ que caen en algún conjunto de prueba $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, con $\mu_L(B) > 0$. Sea N el número de puntos tales que $\Phi_{-x} \in Y$. Entonces

$$P(\Phi \in Y|x) = \frac{E[N(\Phi, B, Y)]}{\lambda\mu_L(B)},$$

que es la distribución de Palm correspondiente a la propiedad Y , y no es sino una proporción de valores esperados.

De manera similar se pueden definir las distancias hasta el segundo, tercero, etc., vecino más cercano de un punto $x \in \Phi$ (lo cual queda fuera de nuestro objetivo).

Capítulo 3

Proceso de Poisson en la Recta

Es claro, o al menos debería serlo, que en todo lo dicho previamente no se ha utilizado propiedad alguna del espacio \mathbb{R}^d . Sin embargo, es imperativo analizar de forma aislada el caso en que se tiene un proceso de Poisson sobre los números reales debido a que podemos aprovechar la estructura de orden que satisface tal espacio en favor de algunos resultados importantes para los procesos que nos ocupan.

3.1 Proceso homogéneo sobre la recta I

Sea Φ un proceso de Poisson homogéneo sobre \mathbb{R} con medida de intensidad $\mu = \lambda\mu_L$. Así, si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces

$$P(N(A) = n) = \frac{e^{-\lambda\mu_L(A)}(\lambda\mu_L(A))^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

donde $\mu_L(A)$ es la medida de Lebesgue de A (notar que en algunos casos esta medida corresponde al concepto de longitud, a saber, cuando A es unión de una familia finita de intervalos). En este caso es más usual referirse a λ como la tasa de intensidad de Φ .

Ejemplo 3.1 Suponer que los ciudadanos de un país cambian de preferencia electoral de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa de intensidad de 10 individuos por semana. Ahora bien, suponer que la probabilidad de que un ciudadano de tendencia izquierdista abjure y sufrague por un partido de derecha es 10^{-10} . entonces ¿cuál es la probabilidad de que ningún individuo de izquierda sufrague en favor de un partido de derecha durante el mes de

junio? Recordando el Corolario 1.10 se concluye que el número de individuos de izquierda de dudosa firmeza en sus principios políticos en el mes de junio es una variable aleatoria de Poisson con media $(10)(4)(10^{-10})$. Por tanto la probabilidad deseada es $e^{-4/10^9}$. †

Partiendo de que la medida de Lebesgue asigna masa cero a los puntos, i.e., $\mu_L(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbf{R}$, si $S \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ es un conjunto finito o numerable tendremos que la variable aleatoria $N(S)$ está concentrada en el 0, es decir, $P(N(S) = 0) = 1$, y en particular, $P(\Phi \cap \{x\}) = 0$ para todo punto $x \in \mathbf{R}$.

En otras palabras, siempre es posible soslayar un conjunto numerable de puntos de un proceso homogéneo dado sin alterar su distribución. En base a esto podemos suponer en adelante, que el punto de \mathbf{R} correspondiente al número real 0 no pertenece al proceso homogéneo Φ .

Veamos otro ejemplo,

Ejemplo 3.2 (*Proceso no homogéneo en \mathbf{R} generado por un proceso homogéneo en \mathbf{R}^2 , P. Brémaud, 1984*) Considerese un proceso de Poisson homogéneo de tasa 1 sobre \mathbf{R}^2 y una función $y = \lambda(x)$, $x \in \mathbf{R}$, continua por tramos (Figura 3.1).

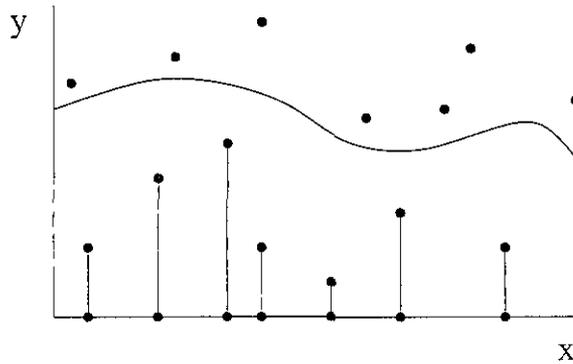


Figura 3.1: Proceso de Poisson en la recta.

La idea es construir un proceso de Poisson sobre \mathbf{R} consistiendo de las proyecciones sobre el eje horizontal de los puntos del proceso de Poisson inicial localizados entre el eje horizontal inclusive y la función y inclusive.

Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ el proceso resultante. De esta forma el número de puntos $N(b) - N(a)$ sobre el intervalo $(a, b]$ es igual al número de puntos sobre \mathbb{R}^2 del proceso bidimensional inicial contenidos en la región $A = \{(x, y) : a < x \leq b, 0 \leq y \leq \lambda(x)\}$, cuya superficie está dada por $\int_a^b \lambda(x) dx$.

Por tanto

$$P(N(b) - N(a) = k) = \exp \left\{ - \int_a^b \lambda(x) dx \right\} \frac{\left(\int_a^b \lambda(x) dx \right)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ahora notemos que si $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, entonces los conjuntos $A_i = \{(x, y) : t_{i-1} < x \leq t_i, 0 \leq y \leq \lambda(x)\}$ son disjuntos, y por lo tanto las variables aleatorias $N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ son independientes.

Así pues, $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad $\lambda(x)$. Si la gráfica de la función $\lambda(x)$ es una recta, entonces obtenemos un proceso de Poisson homogéneo sobre \mathbb{R} . †

Una aplicación del proceso de Poisson en \mathbb{R} es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3 (*Sistemas Dinámicos discretos gobernados por un proceso de Poisson*, Lasota, 1994) En el presente ejemplo se describe la evolución en el tiempo de un proceso estocástico $\{S^{N(t)}, t \geq 0\}$, construido a partir de un proceso de Poisson homogéneo en \mathbb{R} , $\{N_t, t \geq 0\}$, y de una transformación no singular¹ $S : X \rightarrow X$ de un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) .

Sea $(S^n)_{n \geq 0}$ la sucesión de iteraciones de S , es decir,

$$S^n(x) = S(S^{n-1}(x)), \quad n \geq 1.$$

y $S^0(x) = x \forall x \in X$. Así, las trayectorias de (S^n) son sucesiones x_0, x_1, \dots de elementos de X que cumplen $x_n = S^n(x_0)$, $n \geq 1$.

Considerese la situación en la que el punto $x \in X$ es transformado en $S^{N_t}(x)$, donde $t \in [0, \infty)$. El problema que interesa es: dada una distribución inicial de puntos $x \in X$ con densidad f . ¿cómo evoluciona esta distribución en el tiempo?.

¹Una transformación medible $S : X \rightarrow X$ sobre un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) es no singular si siempre que $\mu(A) = 0$ se cumple que

$$\mu(S^{-1}(A)) = 0.$$

Denotemos por $\tau(t, x)$ a la densidad dependiente del tiempo, donde $\tau(0, x) = f(x)$. El objetivo es conocer la probabilidad

$$P((\omega, x) \in \mathbf{R} \times X : S^{N_t(\omega)}(x) \in A),$$

donde $A \in \mathcal{A}$ y P es la medida de probabilidad en $\mathbf{R} \times X$ determinada por

$$P(C \times A) = Pr(C)\mu_f(A), \quad C \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), A \in \mathcal{A},$$

donde $\mu_f(A) := \int_A f(x)\mu(dx)$. Lo anterior indica que la posición inicial de los puntos $x \in X$ y el proceso $\{N_t\}_{t \geq 0}$ son independientes.

Notemos el siguiente hecho

$$\begin{aligned} \{(\omega, x) : S^{N_t(\omega)}(x) \in A\} &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \{N_t(\omega) = k, S^k(x) \in A\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \{N_t(\omega) = k\} \times \{S^k(x) \in A\}, \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} P(S^{N_t} \in A) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t(\omega) = k, S^k(x) \in A) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Pr(N_t = k)\mu_f(x \in S^{-k}(A)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) \int_{S^{-k}(A)} f(x)\mu(dx), \end{aligned}$$

donde

$$p_k(t) := Pr(N_t = k) = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^k}{k!}.$$

Ahora bien, si definimos

$$\nu(A) := \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx),$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \nu(\bigcup A_i) &= \int_{S^{-1}(\bigcup A_i)} f d\mu \\
 &= \int_{\bigcup S^{-1}(A_i)} f d\mu \\
 &= \sum \int_{S^{-1}(A_i)} f d\mu \\
 &= \sum \nu(A_i),
 \end{aligned}$$

concluyendo que ν es una medida. Más aún, $\nu \ll \mu$ y por tanto existe Pf (Radon-Nykodim, Apéndice A.1.5). tal que

$$\nu(A) = \int_A Pf du,$$

equivalentemente

$$\int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) = \int_A Pf du,$$

donde Pf se denomina el operador de Frobenius-Perron asociado a la transformación S .

Por lo tanto, suponiendo que podemos intercambiar los símbolos de suma y de integral (ver Apéndice A.1.5), y utilizando el argumento previo, tendremos que

$$P(S^{N_t} \in A) = \int_A \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) P^k f(x) \mu(dx), \quad A \in \mathcal{A}.$$

De esta manera la densidad dependiente del tiempo posee la expresión siguiente

$$\tau(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) P^k f(x).$$

Ahora bien, si suponemos que es válido derivar bajo el signo de suma, tenemos que

$$\frac{\partial \tau(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} P^k f(x)$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) P^k f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) P^k f(x) \\
&= -\lambda \tau(t, x) + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) P^{k+1} f(x) \\
&= -\lambda \tau(t, x) + \lambda P f \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) P^k f(x) \\
&= -\lambda \tau(t, x) + \lambda P f \tau(t, x).
\end{aligned}$$

Tal expresión se denomina ecuación de Boltzman lineal abstracta correspondiente a un operador de colisión Pf .

Si consideramos un cambio de escala del tiempo se tiene lo siguiente

$$\frac{d\tau(t, x)}{dt} = -\tau(t, x) + P f \tau(t, x),$$

con la condición inicial $\tau(0, x) = f(x)$.

Un ejemplo de este procedimiento es cuando $X = \mathbf{N}^+ \cup \{0\}$, μ es una medida de contar², y $S(x) = x + 1$. Para un punto individual, $n \geq 1$, $Pf(n) = f(n - 1)$, y cuando $n=0$, $Pf(0) = 0$. Entonces

$$\frac{d\tau(t, x)}{dt} = -\lambda \tau(t, n) + \lambda \tau(t, n - 1), \quad n \geq 1.$$

y

$$\frac{d\tau(t, 0)}{dt} = -\lambda \tau(t, 0),$$

que no son sino el sistema de ecuaciones de Kolmogorov para un proceso de Poisson con una condición inicial más general. $\mu(0, n) = f(n)$ (ver último párrafo de la Sección 1.1.2).

Por último, cabe mencionar que el proceso $\{S^{N_t}(x)\}$ puede ser estudiado a través de la función de autocovarianza (L.A. Baxter, 1998)

$$C_x(y, t) := \text{Cov}(S^{N_t}(x), S^{N_{t+y}}(x))$$

²Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. A cada $x_i \in X$ le asociamos una masa p_i , de tal forma que

$$\mu(\{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}\}) = \sum_{i=1}^k p_{\alpha_i}.$$

Si $p_i = 1$, entonces μ es una medida de contar.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} S^{n+m}(x) S^n(x) p_n(t) p_m(y) - \sum_{n=0}^{\infty} S^n(x) p_n(t) \sum_{m=0}^{\infty} S^m(x) p_m(t+y),$$

pues $\text{Cov}(u, v) = \mathbb{E}[uv] - \mathbb{E}[u]\mathbb{E}[v]$.

En el caso en que $S(x) = x + 1$, pero con $X = \mathbb{R}$, se llega al resultado

$$C_2(y, t) = \lambda t$$

que no depende de x ni de y , y es no acotada cuando $t \rightarrow \infty$. †

El ejemplo previo generaliza de alguna manera al proceso de Poisson sobre \mathbb{R} (se recomienda verificar el desarrollo posterior al Ejemplo 3.8).

3.2 Proceso bilateral

Sea Φ un proceso de Poisson en \mathbb{R} con medida de intensidad $\lambda\mu_L$, y $\Phi' := \Phi \setminus \{0\}$. Entonces Φ' es otro proceso homogéneo de Poisson que cumple $\Phi' = \Phi$ con probabilidad 1, y por tanto (también con probabilidad 1) Φ consta de los puntos aleatorios ordenados

$$\dots X_{-2} < X_{-1} < X_1 < X_2 \dots,$$

donde

$$\begin{aligned} \{X_1, X_2, \dots\} &= \Phi \cap (0, \infty) := \Phi^+, \text{ y} \\ \{\dots, X_{-2}, X_{-1}\} &= \Phi \cap (-\infty, 0) := \Phi^-. \end{aligned}$$

En algunas ocasiones, cuando se tiene un proceso con puntos positivos y negativos, se habla de procesos bilaterales (Figura 3.2).

Notemos que

$$\begin{aligned} \{\omega : X_n(\omega) \leq x\} &= \{\omega : N(0, x] \geq n\}, & n \geq 1, x \geq 0. \text{ y} \\ \{\omega : X_{-n}(\omega) \geq x\} &= \{\omega : N[x, 0) \geq n\}, & n \geq 1, x \leq 0. \end{aligned}$$

y así, X_n y X_{-n} son variables aleatorias para toda $n \geq 1$. En consecuencia, la designación de Φ es consistente con la definición usual de un proceso estocástico. esto es, una familia indizada de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad.

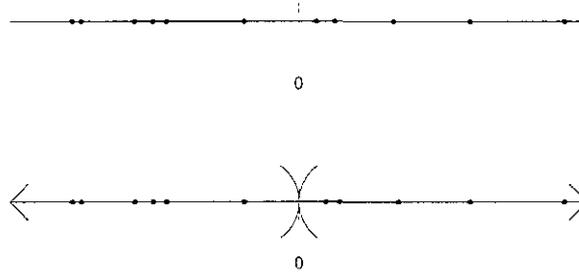


Figura 3.2: Proceso bilateral.

Ahora bien, los conjuntos aleatorios Φ^+ y Φ^- son, debido al teorema de restricción (Teorema 1.16), procesos de Poisson homogéneos; los cuales son independientes por la propiedad de incrementos independientes de Φ (propiedad (b) en la Definición 1.1).

En seguida veremos un ejemplo en el que un proceso de Poisson es partido en dos subprocesos sin ser el punto de división el número cero perteneciente a \mathbf{R} .

Ejemplo 3.4 (*Tráfico de vehículos sobre una pista, Rényi, 1964*) Considerar vehículos corriendo sobre una pista asfaltada tales que los instantes de entrada a la carrera forman un proceso de Poisson homogéneo en \mathbf{R}^+ con tasa λ .

Cada piloto elige una cierta velocidad v_k de tal forma que se consigue una colección $\{v_k\}_{k \in K}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas e independientes de los arriros.

Suponer que nosotros conducimos uno de estos vehículos a la velocidad v_0 . Sean τ_k^+ los instantes en que nuestro vólido rebasa a otros vehículos con velocidades inferiores a v_0 , y análogamente, denotemos por τ_k^- a los instantes en que otros carros más veloces nos dejan atrás sobre la pista.

El interés radica, en principio, en que como consecuencia de las propiedades de los números reales y del teorema del mapeo (Teorema 1.17), las colecciones de puntos $\{\tau_k^+\}$ y $\{\tau_k^-\}$ resultan ser procesos de Poisson homogéneos e independientes.

Cabe mencionar que un proceso como el de este ejemplo es un caso particular de un tipo especial de proceso que veremos en el capítulo siguiente, denominado proceso marcado, en donde cada punto del proceso (arriros a la pista) es marcado con una variable aleatoria (velocidades). †

Así pues, resulta natural preguntarnos por la relación que pudieran satisfacer los “subprocesos” aleatorios Φ^+ y Φ^- : una respuesta es como sigue: sea f una función real de variable real con regla de correspondencia $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Esta función es inyectiva y medible, por tanto el teorema del mapeo indica que el conjunto aleatorio

$$f(\Phi^-) = \{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots\}, \text{ donde } X^{(n)} := -X_{-n} > 0,$$

es un proceso de Poisson homogéneo con medida de intensidad $\lambda\mu_L(f^{-1}(\cdot))$ (notar que $f^{-1}(x) = -x$). De esto se concluye que los procesos Φ^+ y $f(\Phi^-)$ coinciden en distribución, especificándose así la relación posible solicitada.

Una conclusión relevante de lo anterior es que basta con pensar en colecciones aleatorias numerables de puntos positivos cuando del proceso de Poisson homogéneo real se trata.

3.3 Procesos trasladados

El proceso $f(\Phi^-)$ es sólo un ejemplo de cómo trasladar rígidamente un conjunto de puntos, pero muchas veces es útil considerar otro tipo de traslaciones. Pensemos en un proceso de Poisson real $\Phi = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$, con $X_n > 0 \forall n$, y considerar el siguiente proceso trasladado

$$\Phi_1 = \{X_2 - X_1, X_3 - X_1, X_4 - X_1, \dots\}, \text{ donde } X_n - X_1 > 0, n \geq 2,$$

que se obtiene al mover el origen al punto inicial del proceso, es decir, a X_1 .

A partir de esto, ¿qué podemos decir sobre el punto X_1 y el proceso Φ_1 ? Un camino fructífero es el resultado siguiente, que está relacionado con la propiedad fuerte de Markov.³

Proposición 3.5 *Sea $\Phi = \{X_1, X_2, \dots\}$ un proceso de Poisson homogéneo con tasa de intensidad λ sobre \mathbb{R}^+ . Definamos $Y_1 := X_1$ y $\tilde{\Phi}_m := \{Y_{m-1}, X_{m+2} - X_m, X_{m+3} - X_m, \dots\}$, donde $Y_n := X_n - X_{n-1}$, $n \geq 2$. Entonces*

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m \text{ y } \tilde{\Phi}_m$$

son independientes para $m \in \mathbb{N}^+$. y además $\tilde{\Phi}_m$ es un proceso de Poisson homogéneo con tasa de intensidad λ .

³Ver, por ejemplo, [5], Cap. 37.

Prueba. Empecemos con $m = 1$. Un resultado inmediato es que el conjunto aleatorio Φ_1 es un proceso de Poisson homogéneo con tasa λ debido al teorema del mapeo (Teorema 1.17), y a que la medida de Lebesgue es invariante ante traslaciones. Notése que este caso corresponde al escenario que ha motivado esta proposición.

Sea $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ una función continua y acotada tal que $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ y definamos

$$\Psi := \sum_{n=2}^{\infty} f(X_n - X_1).$$

Sea φ_k una función medible tal que $\varphi_k(\omega) = s2^{-k}$ si $(s-1)2^{-k} < X_1(\omega) \leq s2^{-k}$, donde $s = 1, 2, \dots$, de modo que $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = X_1$.

Así por ser f continua

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(X_n - \varphi_k) = f(X_n - \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k).$$

Definamos $\Sigma_m^k := \sum_{n=2}^m f(X_n - \varphi_k)$, entonces $\{\Sigma_m^k\}_m$ es una sucesión monótona de funciones acotadas, continuas y no negativas (puesto que f lo es). Por lo tanto, deberíamos tener que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_m^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_m^k.$$

Así pues, si $\Sigma^k := \lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_m^k$, entonces

$$\Psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma^k.$$

Por otro lado, notemos que el evento $[\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x]$ se puede expresar como el evento $[\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x, \bigcup_{s=1}^{\infty} ((s-1)2^{-n} < X_1 \leq s2^{-n})]$, entonces

$$P(\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x) = \sum_{s=1}^{\infty} P(\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x, \varphi_k = s2^{-k}). \quad (3.1)$$

Ahora bien, los puntos del proceso Φ contenidos en el intervalo $(s2^{-k}, \infty)$, para cada entero s , forman a su vez un proceso de Poisson debido al teorema de restricción (Teorema 1.16), el cual es independiente de $X_1 \leq s2^{-k}$. Además para cada k , $\{X_n - s2^{-k}\}_n$ es un proceso trasladado por la constante $s2^{-k}$ con la misma distribución que el proceso Φ debido a la homogeneidad de éste último. Por lo tanto

$$\Sigma^k = \sum_{n=2}^{\infty} f(X_n - s2^{-k})$$

tiene la misma distribución que $\Sigma := \sum_{n=1}^{\infty} f(X_n)$. Estos dos últimos hechos indican conjuntamente que

$$P(\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x, \varphi_k = s2^{-k}) = P(\Sigma \leq z)P(X_1 \leq x, \varphi_k = s2^{-k}), \quad (3.2)$$

de modo que sustituyendo (3.2) en (3.1) se obtiene

$$\begin{aligned} P(\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x) &= P(\Sigma \leq z) \sum_{s=1}^{\infty} P(X_1 \leq x, \varphi_k = s2^{-k}) \\ &= P(\Sigma \leq z)P(X_1 \leq x) \\ &= P(\Sigma \leq z)P(\Phi((0, x]) \geq 1) \\ &= P(\Sigma \leq z)(1 - e^{-\lambda x}), \end{aligned}$$

donde el lado derecho de esta igualdad es funcionalmente independiente de k , de manera que si $k \rightarrow \infty$, entonces

$$P(\Psi \leq z, X_1 \leq x) = P(\Sigma \leq z) \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy,$$

concluyendo que Ψ tiene la misma distribución que Σ y además es independiente de X_1 , luego X_1 es independiente de $\{X_n - X_1\}_{n \geq 2}$, puesto que la independencia de variables aleatorias se preserva bajo funciones medibles, y las funciones continuas son medibles (ver Apéndice A.1.3). Más aún, X_1 posee la función de densidad de probabilidad $g(y)$ dada por

$$g(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y > 0.$$

o equivalentemente, $Y_1 = X_1$ sigue una distribución exponencial con parámetro λ .

Finalmente, como $X_{1+l} - X_1 = X_{1+l} - X_{1+l-1} + X_{1+l-1} - \dots + X_{1+1} - X_1 = Y_{1+1} + Y_{1+2} + \dots + Y_{1+l}$, entonces Y_1 es independiente de $\{Y_2, Y_2 + Y_3, \dots\}$, y por tanto Y_1 es independiente de $\{Y_2, Y_3, \dots\}$.

Sean m algún entero positivo y $\{\varphi_k\}_k$ una sucesión de funciones medibles tal que $\varphi_k(\omega) = s2^{-k}$ si $(s-1)2^{-k} < X_m(\omega) \leq s2^{-k}$, donde $s = 1, 2, \dots$, de modo que $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = X_m$.

Definamos ahora $\Psi := \sum_{n=m+1}^{\infty} f(X_n - X_m)$, $\Sigma_m^k := \sum_{n=m+1}^m f(X_n - \varphi_k)$, y $\Sigma := \sum_{n=m+1}^{\infty} f(X_n)$. Consideremos lo siguiente:

$$P(\Sigma^k \leq z, X_{m+1} > x + \sum_{i=1}^m y_i, Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_m = y_m)$$

$$\begin{aligned}
&= P(\Sigma^k \leq z, X_{m+1} > x + \sum_{i=1}^m y_i | Y_1 = y_1, \dots, Y_m = y_m) \cdot \\
&\quad \cdot P(Y_1 = y_1, \dots, Y_m = y_m). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Suponiendo una hipótesis de inducción, y siguiendo los mismos pasos que en el caso $m = 1$, se concluye que (3.3) coincide con

$$P(\Sigma \leq z)P(X_{m+1} > x + \sum_{i=1}^m y_i | Y_1 = y_1, \dots, Y_m = y_m)P(Y_1 = y_1, \dots, Y_m = y_m),$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
&P(\Sigma^k \leq z, X_{m+1} - \sum_{i=1}^m y_i > x, Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_m \leq y_m) \\
&= P(\Sigma \leq z) \int_0^{y_1} \cdots \int_0^{y_m} P(X_{m+1} - \sum_{i=1}^m y_i > x | Y_1 \leq y_1, \dots, Y_m \leq y_m) \cdot \\
&\quad \cdot \prod_{i=1}^m f_i(y_i) dy_1 \cdots dy_m \\
&= P(\Sigma \leq z) E[P(X_{m+1} - \sum_{i=1}^m y_i > x | Y_1 \leq y_1, \dots, Y_m \leq y_m)] \\
&= P(\Sigma \leq z) E\{E[I_{\{X_{m+1} - \sum_{i=1}^m y_i > x\}} | Y_1 \leq y_1, \dots, Y_m \leq y_m]\} \\
&= P(\Sigma \leq z) P(X_{m+1} - \sum_{i=1}^m y_i > x), \\
&= P(\Sigma \leq z) P(Y_{m+1} > x),
\end{aligned}$$

donde f_i es la densidad de Y_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

Nótese que $X_1 = y_1, X_2 = y_1 + y_2, \dots, X_m = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$, luego entonces

$$\begin{aligned}
P(X_{m+1} - \sum_{i=1}^m y_i > x | Y_1 \leq y_1, \dots, Y_m \leq y_m) &= P(N((a_m, a_m + x]) = 0) \\
&= e^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

donde $a_m = \sum_{i=1}^m y_i$.

Así pues, Y_1, \dots, Y_{m+1} y Φ_{m+1} son independientes, Φ_{m+1} es un proceso de Poisson homogéneo de tasa λ , y Y_{m+1} se distribuye de forma exponencial con parámetro λ . \square

3.4 Teorema de los intervalos

La proposición anterior, que por sí misma es interesante, en realidad resulta ser un paso previo para probar un teorema de suma importancia (Kingman arguye que es el teorema fundamental de la teoría de Poisson) que no posee uno análogo para los procesos espaciales y que se denomina teorema de los intervalos. Concretamente se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.6 (Intervalos) *Sea $\Phi = \{X_1, X_2, \dots\}$ un proceso de Poisson de tasa constante λ sobre los números reales positivos, donde $0 \leq X_1 < X_2 < \dots$, y considerar las variables aleatorias*

$$Y_1 := X_1, \quad Y_n := X_n - X_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Entonces

- 1) $\{Y_m\}_{m \geq 1}$ es una familia de variables aleatorias independientes, y
- 2) Cada Y_i tiene función de densidad de probabilidad $g(y) = \lambda e^{-\lambda y}$.

Prueba. 1) Como consecuencia de la proposición anterior tenemos que Y_m es independiente de Φ_m ; en particular Y_m es independiente de Y_{m+1} para $m \geq 1$. Más aún, debido a que

$$\begin{aligned} X_{m+l} - X_m &= X_{m+l} - X_{m+l-1} + X_{m+l-1} - \dots + X_{m+1} - X_m \\ &= Y_{m+1} + Y_{m+2} + \dots + Y_{m+l}; \end{aligned}$$

se sigue que Y_m es independiente de $\{Y_{m+1}, Y_{m+1} + Y_{m+2}, \dots, Y_{m+1} + \dots + Y_{m+l}, \dots\}$, y por tanto Y_m es independiente de $\{Y_{m+1}, Y_{m+2}, Y_{m+3}, \dots\}$. De esta forma se concluye que $\{Y_n\}_n$ es un familia de variables aleatorias independientes. 2) Este punto resultó formar parte de la conclusión en la prueba de la demostración anterior. \square

Es prudente mencionar que en este teorema es imprescindible ordenar los puntos del proceso, pues de lo contrario el conjunto aleatorio Φ_m , $m \geq 1$, no resultaría ser un proceso de Poisson.

Ejemplo 3.7 (Paradoja de los tiempos de espera) Sea $\Phi = \{\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_1, X_2, \dots\}$ un proceso de Poisson homogéneo sobre \mathbb{R} , y considerar el conjunto aleatorio $\Phi_{-1} := \{X_n - X_{-1} : n \in \mathbb{Z}, n \neq -1\}$.

Lo que uno esperaría es que tal conjunto resulte ser un proceso de Poisson homogéneo por ser un conjunto trasladado de Φ . sin embargo, esto no es así:

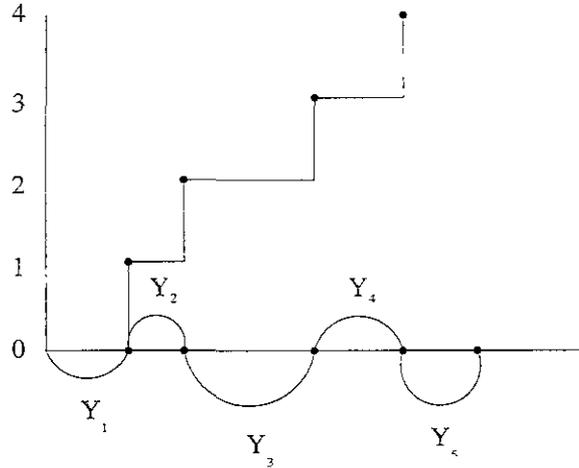


Figura 3.3: Intervalos.

si Φ_{-1} fuera un proceso de Poisson homogéneo, entonces por el teorema de los intervalos (Teorema 3.6) la variable aleatoria $L = X_1 - X_{-1}$ tendría densidad exponencial.

Por otro lado la longitud L del intervalo conteniendo al 0 posee la densidad de $X_2 = Y_1 + Y_2$. Como X_2 es la suma de dos variables aleatorias independientes de densidad exponencial, su densidad g_{X_2} es la convolución

$$g_{X_2}(y) = \int_0^y g(t)g(y-t)dt = \int_0^y (\lambda e^{-\lambda t})(\lambda e^{-\lambda(y-t)}) dt = \lambda^2 \int_0^y e^{-\lambda y} dt = \lambda^2 y e^{-\lambda y},$$

lo cual es una contradicción.

Lo que sí se puede afirmar es lo siguiente:

a) Para $x \in \mathbf{R}$, la distancia de x hasta el punto más próximo de Φ a la derecha y la distancia de x hasta el punto más próximo a la izquierda son variables independientes, con distribución exponencial.

b) La suma de esas longitudes, la longitud del intervalo que contiene a x , tiene densidad $\lambda^2 y e^{-\lambda y}$.

Esta paradoja se denomina de los tiempos de espera y en realidad es un tópico de interés general en los procesos puntuales o de contar⁴. †

Retomando el teorema de los intervalos, resulta que podemos decir algo más sobre los puntos de un proceso de Poisson homogéneo $\Phi = \{X_1, X_2, \dots\}$

⁴Un ejemplo de esta paradoja puede verse en [6], Vol. 2

en \mathbb{R}^+ , que como se mostró, son variables aleatorias.

Debido a que $X_1 = Y_1, X_2 = Y_1 + Y_2, \dots, X_n = Y_1 + \dots + Y_n, \dots$, donde Y_1, Y_2, \dots son, según el teorema de los intervalos, variables independientes con densidad $g(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \lambda > 0$, se sigue de un resultado bien conocido en probabilidad elemental que X_n tiene distribución gamma de parámetros n y λ , es decir.

$$\begin{aligned} P(X_n \leq x) &= P(\Phi((0, x]) \geq n) \\ &= \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} dt. \end{aligned}$$

Un ejemplo interesante relacionado con el teorema de los intervalos y con el Ejemplo 2.10 es el siguiente.

Ejemplo 3.8 (*Modelo de Lundberg de Riesgo Colectivo*) El modelo básico de riesgo se debe a Filip Lundberg. Su tesis alberga el fundamento de la teoría actuarial del Riesgo y fue publicada en 1903 (Upsala, Suecia). Sin embargo, tuvieron que transcurrir 30 años más para que tal tesis sirviera de inspiración para desarrollar nuevas herramientas probabilísticas y fue así como Harold Cramér y su escuela de Estocolmo incorporaron las ideas de Lundberg en sus investigaciones, contribuyendo substancialmente en el desarrollo de la teoría de los procesos estocásticos en general.

Como resultado del trabajo de Lundberg y de Cramér surgieron los modelos de Cramér-Lundberg y de renovación, que consisten de los siguientes ingredientes.

Definición. (*Modelo de Cramér-Lundberg y Modelo de Renovación*) El modelo de C-L queda determinado por los siguientes supuestos:

1) *Proceso de Reclamo:*

Sea $X_{k \in \mathbb{N}}$ la v.a. que denota el monto relativo al k -ésimo reclamo. El proceso de reclamo es la sucesión $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de variables aleatorias i.i.d. con $\mu := E[X_1] < +\infty$ y varianza $\sigma^2 := \text{Var}(X_1) \leq \infty$ comunes.

2) *Tiempos de Reclamo:*

Los reclamos ocurren en los instantes aleatorios de tiempo

$$0 < T_1 < T_2 < \dots, \quad c.p.$$

3) *Proceso del Número de Reclamos:*

El número de reclamos en el intervalo de tiempo $[0, t]$ es definido como:

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \geq t\}, \quad t \geq 0.$$

(Por convención, $\sup \emptyset = 0$).

4) *Tiempos entre Reclamos Sucesivos:*

Los tiempos entre reclamos sucesivos.

$$Y_1 = T_1, Y_k = T_k - T_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial y media finita $E[Y_1] = \frac{1}{\lambda}$.

5) Las sucesiones $\{X_k\}$ y $\{Y_k\}$ son mutuamente independientes.

Por otro lado, el modelo de Renovación es dado por (1)-(3), (5), y por

6) Los tiempos entre reclamos sucesivos $\{Y_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita $E[Y_1]$.

De la definición anterior podemos considerar un proceso más. el proceso del Monto Total o Agregado por reclamos, $S(t)_{t \geq 0}$, dado por

$$S(t) = I_{[N(t) > 0]} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

En este escenario, es relevante investigar sobre la función de distribución de probabilidad del monto agregado por reclamos, para lo cual, el primer requisito en la definición del modelo de C-L es de gran ayuda.

El proceso que resulta de todas estas consideraciones es el denominado proceso de Riesgo $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, definido por

$$U(t) := u + c(t) - S(t), \quad t \geq 0,$$

en donde u es el capital inicial con que cuenta el asegurador al comenzar el proceso (esto es, $u = U(0)$), $c(t)$ denota las primas cobradas hasta el tiempo t , y $S(t)$ representa el reclamo agregado en el tiempo t . De esta forma, $U(t)$ coincide con el exceso o superávit al tiempo t a favor del asegurador.

Es claro que, en general, el exceso podría ser negativo para determinados valores de t . Cuando esto ocurre por primera vez, estaremos hablando de que la "ruina" ha ocurrido. †

Para finalizar este apartado veremos como se relacionan el punto (4) en el modelo del Ejemplo 3.8 y el Teorema 3.6. Propiamente se trata de una especie de proposición recíproca del teorema mencionado.

Proposición 3.9 Si $\{\eta_i\}_{i=1,2,\dots}$ es una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo a una ley exponencial de parámetro λ . $\epsilon_n := \sum_{i=0}^n \eta_i$ (con la convención $\epsilon_0 = 0$), y $N(t) := \max\{n : t \geq \epsilon_n\}$. con $t \geq 0$ y $N(0) = 0$. Entonces

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}. \quad (3.4)$$

Prueba. Obsérvese que $[N(t) < n] = [\epsilon_n > t]$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(N(t) < n+1) - P(N(t) < n) \\ &= P(\epsilon_{n+1} > t) - P(\epsilon_n > t). \end{aligned}$$

Mostraremos que

$$P(\epsilon_n > t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (3.5)$$

Para el caso $n \equiv 1$, (3.2) se cumple por hipótesis, pues $P(\epsilon_1 > t) = P(\eta_1 > t) = e^{-\lambda t}$. Suponer que la Ecuación (3.2) se satisface para algún $n > 1$. Entonces

$$\begin{aligned} P(\epsilon_{n+1} > t) &= P(\epsilon_n + \eta_{n+1} > t) \\ &= P(\eta_{n+1} > t) + P(\epsilon_n > t - \eta_{n+1}, t \geq \eta_{n+1} > 0) \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t P(\epsilon_n > t-s) f_{\eta_{n+1}}(s) ds \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_0^t (t-s)^k ds \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \end{aligned}$$

donde $f_{\eta_{n+1}}(s)$ es la densidad de η_{n+1} . Concluyendo finalmente la validez de la Ecuación (3.1). \square

Ahora debe ser más clara la relevancia del Ejemplo 3.3. La definición de proceso de Poisson homogéneo en \mathbb{R} implica que los puntos del proceso son

realizaciones de variables aleatorias con distribución gamma (ver desarrollo posterior al ejemplo 3.7).

En el ejemplo citado se parte de puntos esparcidos sobre la recta de acuerdo a cierta distribución, y mediante el emparentamiento con un proceso de Poisson homogéneo, se llegó a un nuevo proceso análogo al proceso de Poisson pero más general.

3.5 Ley fuerte de los grandes números

Por otro lado, el hecho de que cada X_n puede ser escrita como la suma $X_n = \sum_{i=1}^n Y_n$ de variables aleatorias independientes exponencialmente distribuidas con media $\lambda^{(-1)}$ permite, en un momento dado, hacer inferencias asintóticas sobre el proceso de Poisson original, y eso es precisamente lo que haremos.

En concreto, veremos una adaptación de la denominada ley fuerte de los grandes números al proceso de Poisson homogéneo. Según esta ley, si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de media finita, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E[X_1]$ con probabilidad 1 (o “casi seguramente”).

Bajo las hipótesis del teorema de los intervalos (Teorema 3.6), se puede escribir

$$\frac{X_n}{n} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}.$$

y como resultado de tal ley fuerte de los grandes números, tenemos que

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} X_n = \frac{1}{\lambda}\right) = 1.$$

Así si concedemos que $t \rightarrow \infty$, entonces $N((0, t]) \rightarrow \infty$, pues tendríamos una variable aleatoria concentrada en $+\infty$ dado que $\mu_L((0, t]) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$.

Así pues,

$$\frac{X_{N((0, t])}}{N((0, t])} \longrightarrow \frac{1}{\lambda}, \quad \text{siempre que } t \rightarrow \infty.$$

con probabilidad uno.

Luego, por la definición de proceso de Poisson

$$X_{N((0, t])} \leq t < X_{N((0, t]) + 1}.$$

entonces

$$\frac{X_{N((0,t])}}{N((0,t])} \leq \frac{t}{N((0,t])} < \frac{X_{N((0,t])+1}}{N((0,t])}. \quad (3.6)$$

Si permitimos que $t \rightarrow \infty$, implicando que $N((0,t]) \rightarrow \infty$ en las tres partes de la desigualdad (3.3), obtendremos como resultado equivalente que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N((0,t])}{t} = \frac{1}{\lambda^{-1}} = \lambda$$

con probabilidad 1. Es decir, obtuvimos el número promedio de puntos del proceso en los reales positivos.

En resumen, hemos probado el resultado siguiente.

Proposición 3.10 (Ley fuerte de los grandes números) *Sea Φ un proceso de Poisson homogéneo de tasa constante λ sobre los reales positivos. Entonces el número $N((0,t])$ de puntos de Φ contenidos en el intervalo $(0,t]$ satisface que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N((0,t])}{t} = \lambda,$$

con probabilidad 1.

Notemos que como consecuencias inmediatas de esta proposición tenemos que $\frac{N((0,t])}{t} \rightarrow \lambda$, cuando $t \rightarrow \infty$, en probabilidad y en distribución.

Cabe aclarar que la Proposición 3.10 se puede extender al caso de los procesos de Poisson espaciales.

3.6 Proceso homogéneo sobre la recta II

Ya hemos enfatizado con anterioridad que en el caso de los procesos de Poisson reales basta considerar únicamente procesos de puntos no negativos. Veremos ahora que, en el mismo contexto, es suficiente trabajar con procesos de Poisson homogéneos, esto es, con aquellos cuya medida de intensidad es proporcional a la medida de Lebesgue

Sea Φ un proceso de Poisson real (no necesariamente homogéneo) con medida de intensidad μ definida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ finita sobre conjuntos acotados.

Es un hecho bien conocido en teoría de la medida que μ queda completamente determinada por sus valores sobre los intervalos de la forma $(a, b]$ con

$a < b$, debido a que la familia de tales intervalos genera a la σ -álgebra de Borel en \mathbf{R} (ver Apéndice A.1.1).

Para lograr nuestro propósito definamos la función siguiente:

$$M(t) = \begin{cases} \mu((0, t]) = \mathbf{E}[N((0, t])], & t \geq 0, \\ -\mu((t, 0]) = -\mathbf{E}[N((t, 0])], & t < 0. \end{cases}$$

Así definida M es una función no decreciente y cumple la relación

$$\begin{aligned} M(b) - M(a) &= \mu((0, b]) - \mu((0, a]) \\ &= \mathbf{E}[N((0, b]) - N((0, a])] \\ &= \mathbf{E}[N((a, b])] \\ &= \mu((a, b]), \end{aligned}$$

para $0 < a < b$. Debido a esta relación μ se denomina medida de Stieltjes asociada a la función M .

Por otra parte, la ausencia de átomos de μ implica que para $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(\{x\}) \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \mu((x - \epsilon, x + \epsilon]) \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} [M(x + \epsilon) - M(x - \epsilon)] \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} M(x + \epsilon) - \lim_{\epsilon \searrow 0} M(x - \epsilon). \end{aligned}$$

y por tanto M es una función continua y medible.

La idea subsecuente es aplicar el teorema del mapeo (Teorema 1.17) para conseguir, a partir de un proceso de Poisson de intensidad μ , un nuevo proceso con la particularidad de ser un proceso homogéneo.

Para concretar esta idea, tomemos a la función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ en el teorema del mapeo como la función M previamente definida. esto es, $f(\cdot) = M(\cdot)$. Sea $t \geq 0$ y $x = M(t)$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_f(0, x] &= \mu_f(0, M(t)] \\ &= \mu(f^{-1}(0, M(t)]) \\ &= \mu(M^{-1}(0, M(t)]) \\ &= \mu(0, t] \\ &= M(t) \\ &= x. \end{aligned}$$

Así pues, si Φ es un proceso de Poisson real de intensidad μ , entonces $f(\Phi) = M(\Phi)$ es un proceso de Poisson homogéneo con medida de intensidad $\mu_f = (1)\mu_L$ sobre el intervalo $(M(-\infty), M(\infty))$.

En conclusión, en el contexto de los procesos de Poisson reales, sólo el proceso de Poisson homogéneo sobre $(0, +\infty)$ es de importancia fundamental

Capítulo 4

Generalizaciones del proceso de Poisson

En los primeros dos capítulos de este trabajo se han tratado propiedades que satisfacen los procesos de Poisson en espacios euclidianos generales. Sin embargo, en el capítulo anterior pudimos hacer un estudio más detallado del proceso de Poisson en \mathbb{R} gracias a la relación de orden definida en dicho espacio, e incluso hablamos de la distribución de probabilidad de cada punto aleatorio del proceso.

En el presente capítulo retomamos el contexto de los procesos de Poisson en espacios generales con el objeto de presentar algunas extensiones de estos modelos, que han resultado ser de interés, tanto teórico como en aplicaciones.

Al final del presente capítulo discutimos algunas aplicaciones de estos modelos a las matemáticas actuariales.

Supongamos que $\Phi = \{X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), \dots\}$ es un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d y que deseamos asociar a cada punto $X_j(\omega)$ alguna característica o particularidad de forma que se preserve la propiedad de incrementos independientes de Φ . Algunos ejemplos de asociación de características son las siguientes:

1) $X_n(\omega)$ denota el centro de una partícula al cual le asociamos el volumen de la misma.

2) $X_n(\omega)$ es la posición de un árbol en un bosque y le asociamos el diámetro de su tronco.

3) $X_n(\omega)$ representa la ocurrencia de un siniestro y le asociamos la gravedad alcanzada, por ejemplo, el monto emanado.

4) $X_n(\omega)$ indica el momento en que fallece un individuo y le asociamos

un índice relativo al grupo de edad que para entonces corresponda.

Notemos que la característica asociada a cada punto de un proceso puede ser una variable continua (ejemplos 1 y 2), una cantidad aleatoria (ejemplo 3), o un indicador de tipo (último ejemplo).

En este escenario, podemos pensar en el conjunto de parejas

$$\Delta = \{(X_n, C_n)\}.$$

donde C_n es la característica asociada al punto X_n ; cuando C_n es una variable aleatoria (o más generalmente, un vector aleatorio), el conjunto Δ se denomina proceso de Poisson marcado (Matthes, 1963, pero las primeras aplicaciones llegaron hasta 1980 con Frankal et al.). En el caso en que C_n es un indicador de tipo, el conjunto Δ se nombra proceso de Poisson multivariado o multitipo (Diggle y Cox, 1983).

4.1 Procesos multivariados y el teorema de los colores

En el caso de los procesos marcados, si bien se asocia una variable aleatoria a cada punto de un proceso de Poisson, esta asignación es propia al punto en cuestión. En cambio, en los procesos multitipo la asignación es aleatoria.

Empezaremos con los procesos multivariados. Como antes, sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbf{R}^d con medida de intensidad μ .

Supongamos que sólo hay un número finito, n , de características o tipos posibles para ser asociados a los puntos del proceso y que tal asociación es aleatoria. Denotemos por p_i a la probabilidad de que un punto sea designado ser del i -ésimo tipo, donde $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Supongamos adicionalmente que los tipos de puntos distintos son independientes unos de otros y de las posiciones de los puntos en el espacio. De este modo, sea $\Phi^{(i)} \subset \Phi$ el conjunto de puntos que poseen el i -ésimo tipo. Es decir, tenemos n subconjuntos aleatorios y numerables de puntos de Φ .

A partir de lo anterior es inmediato preguntarnos si estos conjuntos son o no procesos de Poisson (Figura 4.1).

Debemos notar que en realidad estamos considerando una forma de la operación de agrupar procesos que fue previamente mencionada (en el Capítulo I), donde además se sugirió la respuesta a la pregunta en cuestión; lo nuevo aquí radica en que ya hemos puntualizado la regla para construir las clases.

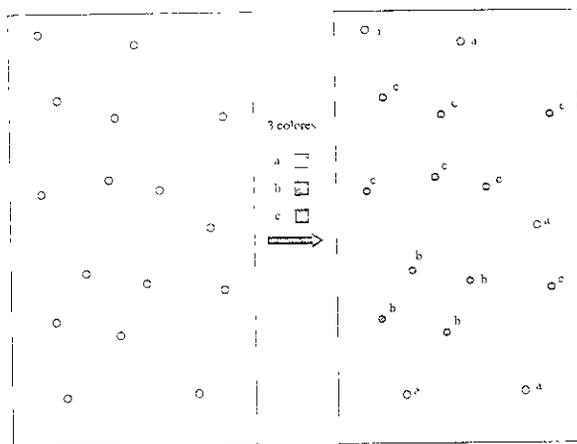


Figura 4.1: Proceso coloreado (agrupado).

Así pues, resulta que $\{\Phi^{(i)}\}_{i=1}^n$ es una familia de procesos de Poisson independientes con medidas de intensidad respectivas $\{\mu_i := p_i\mu\}_{i=1}^n$. Formalmente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.1 (Colores) *Sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d con medida de intensidad μ . Suponer que los puntos del proceso son coloreados aleatoria e independientemente con n colores diferentes y que la probabilidad de que un punto reciba el i -ésimo color es p_i . Suponer además que los colores de diferentes puntos son independientes de la posición de los puntos en el espacio. Sea $\Phi^{(i)}$ el conjunto de puntos con el color i . Entonces los conjuntos $\Phi^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, son procesos de Poisson independientes con medidas de intensidad respectivas*

$$\mu_i = p_i\mu, \quad i = 1, \dots, n.$$

Prueba. Usaremos inducción matemática. Sea $n = 2$ el número posible de colores con probabilidades asociadas p_1 y $p_2 = (1 - p_1)$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Sea $N^{(i)}(A)$ el número de puntos de Φ con el color i que están en el conjunto A , $i = 1, 2$.

En virtud de que Φ es un proceso de Poisson $N(A) \sim \text{Poi}(\mu(A))$ y debido a las condiciones de independencia en que se asignan colores se sigue que

$$P(N^{(1)}(A) = s | N(A) = r) = \binom{r}{s} p_1^s p_2^{r-s}, \quad r, s \in \mathbb{Z}^+, s \leq r.$$

Ahora bien, notando que $\Phi^{(2)} = \Phi \setminus \Phi^{(1)}$ se concluye que

$$\begin{aligned} P(N^{(1)}(A) = s, N^{(2)}(A) = t) &= P(N(A) = s + t)P(N^{(1)}(A) = s | N(A) = s + t) \\ &= \frac{e^{-\mu(A)}(\mu(A))^{s+t}}{(s+t)!} \binom{s+t}{s} p_1^s p_2^{(s+t)-s} \\ &= \frac{e^{-\mu(A)p_1}(\mu(A)p_1)^s e^{-\mu(A)p_2}(\mu(A)p_2)^t}{s! t!}. \end{aligned}$$

pues $p_2 = 1 - p_1$. De este resultado se sigue que $N^{(1)}(A)$ y $N^{(2)}(A)$ son variables aleatorias de Poisson independientes con parámetro respectivo $\mu(A)p_i$, $i = 1, 2$.

Más aún, si $\{A_i\}_{i=1}^k$ es una familia disjunta en $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, entonces las ternas

$$\{N(A_j), N_1(A_j), N_2(A_j)\}_{j, \quad j = 1, 2, \dots, k},$$

son independientes, puesto que las variables aleatorias $\{N(A_j)\}_{j=1}^k$ lo son. Luego, las variables aleatorias $N^{(1)}(A_1), \dots, N^{(1)}(A_n)$ y $N^{(2)}(A_1), \dots, N^{(2)}(A_n)$ son todas independientes. Se sigue que $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$ son procesos de Poisson independientes con las medidas de intensidad indicadas.

Sea $k + 1 \geq 2$ el número de colores disponibles y $p_{k+1} := 1 - \sum_{i=1}^k p_i$. Escribamos

$$\Phi^{(k+1)} := \Phi \setminus \bigcup_{j=1}^k \Phi^{(j)}.$$

Por la hipótesis de inducción y el teorema de superposición (Teorema 1.13) $\Pi := \bigcup_{j=1}^k \Phi^{(j)}$ es un proceso de Poisson con medida de intensidad $\mu(\cdot)(1 - p_{k+1})$. Más aún, la probabilidad de colorear algún punto del proceso Φ con alguno de los colores empleados en el proceso Π es $\sum_{i=1}^k p_i = 1 - p_{k+1}$. Sea $N^*(\cdot) := |\Pi \cap (\cdot)|$. Entonces, procediendo como en el caso $n = 2$, con Π y $\Phi^{(k+1)}$ en lugar de $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$ respectivamente, se concluye que $\Phi^{(k+1)}$ es un proceso de Poisson con medida de intensidad $\mu(\cdot)p_{k+1}$ e independiente del proceso Π . Esto termina la demostración del teorema.

Debe notarse que el presente resultado es consistente con el teorema de superposición. \square

Ejemplo 4.2 (Adelgazamiento) Recordemos el Corolario 1.10 útil para adelgazar un proceso de Poisson; si en tal resultado pensamos que borrar puntos equivale a asignarles el color 1 y que por tanto los puntos no borrados lucen

el color 2, entonces el caso $n = 2$ en la prueba del teorema anterior sirve también como demostración del teorema de adelgazamiento (corolario citado).

†

4.2 Procesos marcados

Enseguida trataremos el caso en que la característica asociada a cada punto es una variable aleatoria tal que la asignación no es aleatoria.

Sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^d con medida de intensidad μ . Ahora bien, a cada punto $X \in \Phi$ le asociamos una característica m_X . Llamada en adelante marca, la cual es una variable aleatoria. Supongamos que la distribución de probabilidad de m_X puede depender de la posición que guarda en el espacio el punto X , pero no de la distribución de los puntos aleatorios en el conjunto remanente $\Phi \setminus \{X\}$, ni tampoco de las marcas de los demás puntos. De este modo, tenemos un nuevo conjunto

$$\Theta = \{(X, m_X) : X \in \Phi\}$$

de puntos aleatorios en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, el cual se denomina proceso marcado de Φ (más adelante se da una definición formal).

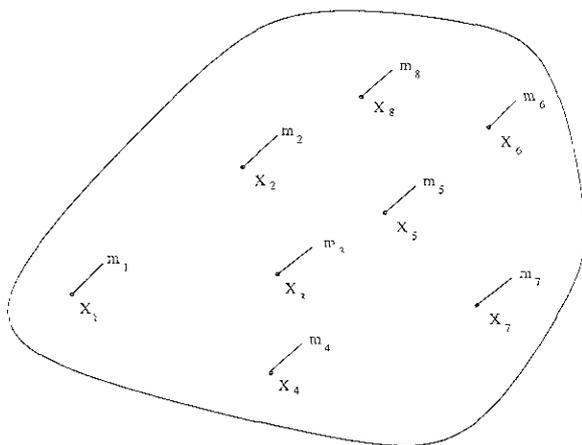


Figura 4.2: Proceso marcado.

Para $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, denotamos por $N(A \times B)$ al número de puntos de Φ contenidos en A cuyas marcas pertenecen a B .

Si ahora pensamos en el conjunto

$$\Theta_c = \{(X + c, m_X) : X \in \Phi\}, \quad c \in \mathbf{R}^d,$$

tendremos el proceso trasladado para Θ ; cuando Θ_c y el propio Θ coinciden en sus probabilidades, Θ se denomina (como antes) estacionario, e invariante ante movimientos euclidianos, si además el conjunto rotado $R\Theta$ coincide en distribución con Θ para R una rotación rígida. En conclusión, podemos hablar de procesos marcados homogéneos.

Es menester mencionar que el trasladar o rotar un conjunto no afecta a las marcas inherentes.

Sea $p(x, \cdot)$ la distribución de probabilidad sobre \mathbf{R} del proceso Θ dependiendo de $x \in \mathbf{R}^d$ de tal modo que si $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, entonces $p(\cdot, B)$ es una función medible sobre \mathbf{R}^d . A partir de todo esto formulamos la siguiente definición.

Definición 4.3 *Sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbf{R}^d con medida de intensidad μ . Un proceso marcado de Φ es un subconjunto aleatorio y numerable $\Theta \subset \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ tal que*

- 1) *La proyección de Θ sobre \mathbf{R}^d coincide con el proceso original Φ .*
- 2) *Las marcas m_X , $X \in \Phi$, son independientes con distribución de probabilidad $p(X, \cdot)$ sobre \mathbf{R} .*

En principio sólo sabemos que Θ es un conjunto aleatorio y numerable de puntos; en el contexto presente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.4 (Marcas) *Sea Φ un proceso de Poisson con medida de intensidad μ y supongamos que se cumplen las condiciones de la definición anterior. Entonces el conjunto aleatorio $\Theta := \{(X, m_X) : X \in \Phi\}$ es un proceso de Poisson sobre $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ con medida de intensidad dada por*

$$\Lambda(\cdot) = \int \int_{(x,m) \in (\cdot)} \mu(dx) p(x, dm).$$

Prueba. Sea

$$\Sigma^* = \sum_{X \in \Phi} f(X, m_X).$$

donde f es una función medible definida en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. En virtud de que las variables aleatorias m_X , $X \in \Phi$, son independientes se tiene que $E[e^{-\Sigma^*}] = \prod_{X \in \Phi} E[e^{-f(X, m_X)}]$ y por tanto $E[e^{-\Sigma^*}] = \prod_{X \in \Phi} \int_{\mathbb{R}} e^{-f(X, m)} p(X, dm)$.

Definamos $g(X) := -\log \int_{\mathbb{R}} e^{-f(X, m)} p(X, dm)$. entonces

$$\begin{aligned} E[e^{-\Sigma^*}] &= \prod_{X \in \Phi} e^{\log \int_{\mathbb{R}} e^{-f(X, m)} p(X, dm)} \\ &= \exp\left\{-\sum_{X \in \Phi} \left[-\log \int_{\mathbb{R}} e^{-f(X, m)} p(X, dm)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{X \in \Phi} g(X)\right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Calculando el valor esperado en ambos lados de (4.1) y recordando la expresión del funcional de Laplace para un proceso de Poisson (Ecuación (2.5)) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} E[e^{-\Sigma^*}] &= \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}^d} [1 - e^{\log \int_{\mathbb{R}} e^{-f(x, m)} p(x, dm)}] \mu(dx)\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} [1 - e^{-f(x, m)}] \mu(dx) p(x, dm)\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} (1 - e^{-f}) d\Lambda\right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

puesto que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} p(x, dm) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(dx)$$

por ser p una medida de probabilidad en \mathbb{R} .

El hecho está en notar que la expresión (4.2) coincide con el funcional de Laplace de un proceso de Poisson con medida de intensidad Λ , lo cual prueba el teorema. \square

En el caso en que se tenga un proceso marcado de Poisson homogéneo Θ , entonces para cada Boreliano $M \in \mathbb{R}$ fijo

$$\Lambda(\cdot \times M) = \lambda_M \mu_L(\cdot).$$

donde λ_M es la intensidad o parámetro característico de Θ con respecto a M , esto es, el número promedio de puntos de Θ por unidad de volumen con vértices en M .

Veamos un ejemplo de un proceso marcado.

Ejemplo 4.5 (*Conjuntos de partículas dispersas en el plano cubiertos por un conjunto convexo*¹, M. Månsson, 1999) Sean n partículas independientes y uniformemente distribuidas en un rectángulo $A \subset \mathbf{R}^2$, $C \subset A$ un conjunto convexo dado, y $k < n$ fijo. Los conjuntos constituidos por k partículas y que son cubiertos por el conjunto C , o por una traslación de él, son llamados k -subconjuntos.

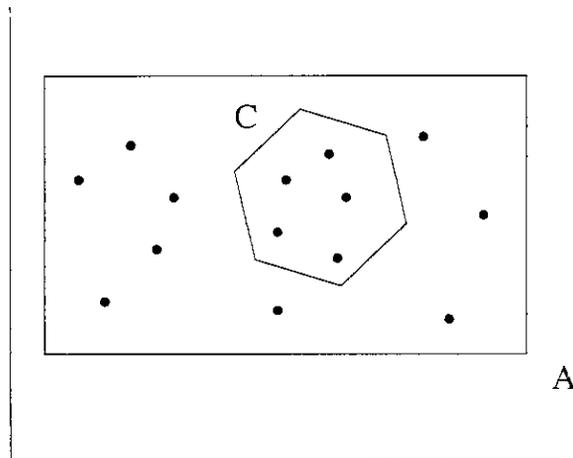


Figura 4.3: Conjunto convexo C .

El número inicial de k -subconjuntos que son cubiertos por traslaciones de C es denotado por W . Las posiciones de tales subconjuntos constituyen un proceso de Poisson sobre A . Cada punto de este proceso puede ser marcado con el menor tamaño necesario de un conjunto, de la misma forma y orientación como C , el cual cubra las partículas determinando al punto.

Lo descrito anteriormente resulta ser un proceso marcado

$$W = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} I_i,$$

donde

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo } k\text{-subconjunto es cubierto por alguna traslación de } C. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¹Un conjunto en \mathbf{R}^2 es convexo, si cualquier par de sus puntos puede ser unido mediante una línea completamente contenida en tal conjunto

El conjunto convexo C puede ser, por ejemplo, una línea, un círculo, un rectángulo, un disco, etc..

Un ejemplo es cuando k es igual con 2 y C es un círculo, en cuyo caso, el número de k -subconjuntos es igual al número de parejas de partículas cuya distancia es menor que el diámetro de C .

El aspecto de interés en cualquier caso es conocer

$$P(\text{ exista } x \in A : p_1, p_2, \dots, p_k \in C + x),$$

donde p_1, p_2, \dots, p_k son partículas independientes e idénticamente distribuidas sobre un rectángulo $A \subset \mathbb{R}^2$.

Notar que los k -subconjuntos podrían contener partículas comunes y por tanto no son independientes. †

Es importante mencionar que el teorema del mapeo (Teorema 1.17) nos ofrece una aplicación más bajo el contexto precedente.

Sea $\pi_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\pi_2(x, m) = m$. En virtud de que Θ es un proceso de Poisson sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, entonces $\pi_2(\Theta) = \{m_{X_1}, m_{X_2}, \dots\}$, $X_1, X_2, \dots \in \Phi$, es un proceso de Poisson real denominado el proceso de las marcas, el cual posee la medida de intensidad

$$\mu_M(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_B \mu(dx) p(x, dm)$$

para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Recordemos que cuando hablamos de procesos de Poisson multivariados la asignación de tipos se hizo bajo el supuesto de que la probabilidad asociada no depende de la posición de los puntos. Pues bien, el teorema de las marcas nos permite generalizar esta clase de procesos en el sentido de permitir que la distribución de probabilidad de las marcas sí pueda depender de la posición de los puntos.

Ejemplo 4.6 (*Proceso multivariado generalizado*) En concreto, pensemos que hay un número finito n de marcas distintas, luego entonces tendremos conjuntos aleatorios y numerables

$$\tilde{\Phi}^{(i)} = \{(X, m^{(i)}) : X \in \tilde{\Phi}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde $\tilde{\Phi}$ un proceso de Poisson.

Así pues, el teorema de las marcas (Teorema 4.4) afirma que $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(n)}$ son procesos de Poisson independientes con medidas de intensidad respectivas dadas por

$$\Lambda_i(\cdot) = \int_{(\cdot)} \mu(dx) p(x, \{m^{(i)}\}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Es decir, ahora las probabilidades p_i en el teorema de los colores (Teorema 4.1) son $p_i = p(X, \{m^{(i)}\})$ que dependen, en general, del punto aleatorio X en cuestión. †

4.3 Proceso doblemente estocástico o de Cox

Una última generalización asociada a un proceso de Poisson que aquí trataremos, será el caso en que se tiene un proceso generado por un mecanismo aleatorio en dos pasos denominado doblemente estocástico o De Cox.

El primer paso genera una medida μ sobre \mathbf{R}^d no negativa de Borel-Radon y el segundo paso genera un proceso de Poisson con medida de intensidad μ^2 .

Formalmente se escoge una distribución de probabilidad Q sobre el espacio medible $(\mathcal{M}(\mathbf{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)))$ (medidas no negativas de Borel-Radon) concentrada en las medidas difusas. Sea P_μ la distribución de un proceso de Poisson con medida de intensidad μ , y η la medida aleatoria con distribución Q .

Definición 4.7 *En este escenario, un conjunto aleatorio de puntos Y (proceso puntual) es un proceso de Cox asociado a la medida aleatoria η si posee la distribución dada por*

$$P(Y) = \int P_\mu(Y) Q(d\mu), \quad Y \in \mathcal{B}(\mathcal{N}(\mathbf{R}^d)),$$

donde $\mathcal{N}(\mathbf{R}^d)$ es el espacio de medidas de Borel-Radon tomando valores en \mathbf{Z}^+ .

La razón que motiva a esta definición es que si A_1, A_2, \dots, A_n es una colección finita y disjunta de conjuntos de $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, y $N(A_i)$ es el número de

²Para un mejor entendimiento de este modelo se sugiere revisar el Apéndice A.3

puntos de Υ contenidos en A_i , $i = 1, \dots, n$, entonces

$$P(N(A_1) = k_1, \dots, N(A_n) = k_n \mid \mu) = \prod_{j=1}^n \frac{\mu^{k_j}(A_j) e^{-\mu(A_j)}}{k_j!},$$

para cualesquiera k_1, k_2, \dots, k_n enteros no negativos.

En algunas ocasiones la medida aleatoria de intensidad es definida mediante una densidad τ , esto es

$$\mu(A) = \int_A \tau(x) dx, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

así pues

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(A)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(A) \mid \mu]] \\ &= \mathbb{E}[\mu(A)] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_A \tau(x) dx\right], \end{aligned}$$

que representa el número de puntos de Υ contenidos en un Boreliano A .

Intuitivamente lo que se está haciendo es considerar puntos aleatorios tales que el número de puntos contenidos en conjuntos Borelianos de \mathbb{R}^d es aleatorio, lo cual sugiere que la distribución de estos puntos no es simple. Partiendo de lo anterior, lo que se hace es obtener otra distribución menos complicada, como lo es la distribución de Poisson, mediante un condicionamiento.

Un argumento que ilustra la conveniencia de obtener el proceso condicionado es el siguiente: sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N^2(A)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N^2(A) \mid \mu]] \\ &= \mathbb{E}[\text{Var}[N(A) \mid \mu] + \mathbb{E}^2[N(A) \mid \mu]] \\ &= \mathbb{E}[\mu(A) + \mu^2(A)], \end{aligned}$$

debido a que la media y la varianza coinciden para una variable aleatoria de Poisson.

Así pues, $\mathbb{E}[N^2(A)] = \mathbb{E}[\mu(A)] + \mathbb{E}^2[\mu(A)] + \text{Var}[\mu(A)]$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Var}[N(A)] &= \mathbb{E}[\mu(A)] + \mathbb{E}^2[\mu(A)] + \text{Var}[\mu(A)] - \mathbb{E}^2[N(A)] \\ &= \mathbb{E}[\mu(A)] + \text{Var}[\mu(A)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(A) \mid \mu]] + \text{Var}[\mu(A)] \\ &= \mathbb{E}[N(A)] + \text{Var}[\mu(A)]. \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\text{Var}[N(A)] \geq \text{Var}[N(A)|\mu] \text{ y } \text{Var}[N(A)] \neq \text{E}[N(A)].$$

El punto estriba en que la variable aleatoria condicionada $N(A)|\mu$, que es de Poisson de parámetro $\mu(A)$, posee varianza y media idénticas, pero la variable aleatoria no condicionada $N(A)$, relativa al proceso de Cox, no satisface tal propiedad. Más significativo aún es el hecho de que la variable no condicionada presenta mayor variabilidad que la variable condicionada.

Análogamente al caso de los procesos de Poisson simples, en los procesos de Cox existe una versión de un proceso homogéneo y será tratado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.8 (*Proceso de Poisson mezclado*) El proceso de Poisson mezclado es la versión más simple de un proceso de Cox. Tal proceso puede ser pensado como un proceso de Poisson homogéneo con tasa de intensidad aleatoria, esto es, un proceso con medida de intensidad

$$\mu = X\mu_L,$$

donde X es una variable aleatoria no negativa. El efecto es que cada muestra de este proceso luce como una muestra de algún proceso de Poisson homogéneo.

Veamos el siguiente ejemplo (J. Grandell, 1997): sea N la variable aleatoria describiendo el número de accidentes de tráfico no fatales en un año para cierto individuo.

Durante ese año tal individuo está expuesto a distintas situaciones de riesgo, de las cuales sólo unas pocas resultan en accidentes.

Supongamos que N sigue una distribución de Poisson con parámetro α , es decir

$$P(N = k) = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

El valor de α podría depender de factores como:

- a) La distancia recorrida.
- b) El ambiente de tráfico.
- c) La habilidad del individuo como conductor.

En algunos casos, α es un parámetro que caracteriza la propensión individual a tener accidentes.

Supongamos ahora que consideramos al mismo individuo durante varios años. Naturalmente el valor de α podría ser diferente año con año, debido

a los cambios en el comportamiento del individuo. A pesar de ello, suponemos que el número de accidentes en años distintos son variables aleatorias independientes de Poisson con el mismo parámetro α . También podríamos suponer que el patrón de accidentes es descrito por un proceso de Poisson con intensidad α .

Ahora consideremos el número de accidentes de tráfico para varios individuos durante un mismo año, todos conduciendo sobre la misma distancia y en un ambiente de tráfico similar.

En el caso de despreciar tales características de similitud y del modelo Poisson, el número de accidentes probablemente variaría más de lo debido si la suposición es de observaciones independientes de una distribución de Poisson. La explicación natural es que individuos diferentes tienen diferente propensión a tener accidentes, es decir, a cada individuo le corresponde un valor personal de α .

Por supuesto que es muy difícil (o más o menos imposible) determinar tales valores individuales a menos que el patrón individual de accidentes fuera conocido.

Además, puesto que los accidentes de tráfico son eventos raros, entonces habría que observar a los individuos durante un largo período de tiempo para obtener conclusiones razonables sobre α .

Debemos tener en consideración que es razonable pensar que la variación en la propensión de individuos distintos es mayor que la variación de la propensión para un mismo individuo a través del tiempo.

Supongamos que a cada individuo le corresponde un proceso de Poisson describiendo el patrón de accidentes futuros. Si bien el α personal es desconocido, nosotros bien podríamos tener una idea general sobre la variación de individuo a individuo; al menos si todos los individuos forman un grupo razonablemente homogéneo.

Así pues, parece natural pensar un α personal como el resultado de una variable aleatoria Λ con distribución conocida U . La distribución U es llamada la distribución de estructura (del grupo) y puede mirarse como una distribución *a priori*. La noción de una distribución como ésta usualmente refiere a una descripción de una opinión subjetiva o creencia³.

De esta manera, podemos interpretar a la probabilidad $P(N = k)$ de antes como la distribución condicional, $P(N|\Lambda = \alpha)$, de N dado el resultado

³Ver, por ejemplo, Berger, J., *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer-Verlag, (1985)

$\Lambda = \alpha$, esto es, un proceso de Cox. Entonces

$$P(N, \Lambda) = P(N|\Lambda)P(\Lambda),$$

y así

$$\begin{aligned} P(N) &= \int_0^\infty X P(N|\Lambda) dU \\ &= \int_0^\infty \frac{l^k e^{-l}}{k!} dU(l), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Esta distribución es llamada una distribución mezclada de Poisson la cual satisface que

$$E[N] = E[\Lambda], \text{ y } \text{Var}[N] = E[\Lambda] + \text{Var}[\Lambda] \geq E[\Lambda],$$

que como ya se había mostrado, comparando con el caso Poisson simple (en donde la media y la varianza coinciden) vemos que la distribución de Poisson mezclada es “sobre-dispersa”.

Greenwood y Yule (1920), y Newbold (1926), miraron a la propensión individual a tener accidentes como el resultado de una variable aleatoria con distribución gamma con densidad

$$u(l) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} l^{\gamma-1} e^{-\beta l}, \quad l \geq 0,$$

donde γ y β son parámetros positivos. En este caso N posee la distribución binomial negativa

$$P(N = k) = \binom{\gamma + k - 1}{k} \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^\gamma \left(\frac{1}{\beta + 1} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Si $\gamma = 1$ en la densidad $u(l)$, es decir, Λ posee una distribución exponencial, entonces

$$P(N = k) = \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right) \left(\frac{1}{\beta + 1} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

y en este caso N sigue una distribución Geométrica.

El caso en que cada individuo sigue un (condicional) proceso de Poisson, el proceso de Poisson mezclada con distribución de estructura como $u(l)$ es llamado proceso de Pólya.

Ahora consideremos a un individuo el cual es asegurado contra accidentes de tráfico. El individuo fue asegurado al tiempo $t = 0$. Hasta el tiempo t habrán habido $N((0, t])$ reclamos y la compañía de seguros querrá predecir el número de reclamos durante el próximo período de vigencia del seguro $(t, t + h]$, es decir, esta compañía necesita predecir $N((t + h]) - N((0, t])$, y utilizar tal información en lo particular de este individuo. Un predictor natural es

$$\begin{aligned} & E [N((t + h]) - N((0, t]) | N((0, t]) = n] \\ &= E\{E[N((t + h]) - N((0, t]) | \Lambda, N((0, t]) = n] | N((0, t]) = n\} \\ &= hE[\Lambda | N((0, t]) = n]. \end{aligned}$$

En el caso del proceso de Pólya

$$E[\Lambda | N((0, t]) = n] = \frac{\gamma + n}{\beta + t}.$$

Para finalizar este apartado vale la pena enfatizar las hipótesis necesarias para utilizar este tipo de modelo:

- 1) La propensión a tener accidentes varía en individuos distintos.
- 2) Los accidentes ocurridos en el pasado no influyen en la ocurrencia de accidentes futuros.
- 3) La propensión individual a sufrir accidentes permanece constante en el tiempo. †

Cabe comentar que aunque parezca natural pensar en el modelo de Cox (pensar en que la medida de intensidad es también aleatoria), su formulación y construcción no es simple.

Concluimos el presente capítulo con varios ejemplos que ilustran algunas de las propiedades de los procesos de Poisson tratadas en los capítulos precedentes dentro del contexto de las matemáticas actuariales.

Notemos que el ejemplo anterior bien podría estar contenido en la sección siguiente; lo mismo puede decirse de los ejemplos 1.11, 1.15, 2.10, y 3.8.

4.4 Aplicación a matemáticas actuariales

Si bien la modelación matemática en finanzas y seguros se remonta hacia algunos siglos antes, el avance ha sido lento. Hoy por hoy aún son considerados

los trabajos de Louis Bachelier (1900) los cuales postulan que el movimiento de Brown se relaciona con situaciones de carácter financiero (por ejemplo, valorar opciones). Asimismo, F. Lundberg, al introducir el modelo de riesgo (Ejemplo 3.8), sugiere que el proceso de Poisson es un modelo natural que representa la llave para tratar esquemas de riesgo en seguros.

A éste respecto es útil comentar que hay cierto consenso entre los autores actuales en seguir esa línea y, dicho sea de paso, el esquema de Lundberg sólo se utiliza como un ejemplo en donde aplicar teorías más generales como la de los procesos puntuales (ver Apéndice A.3.1).

De acuerdo a lo anterior, resulta plausible aplicar algunos de los modelos de Poisson aquí revisados en situaciones específicas de riesgo cuyo interés actuarial es imperativo⁴.

El riesgo inherente al modelo de riesgo colectivo puede dividirse de la forma siguiente:

- Riesgo del Seguro.
- Riesgo de Inversión.
- Riesgo de Negocios.

Pongamos atención en el primer ingrediente de esta lista, el cual se refiere a estudiar el comportamiento de los costos por reclamaciones en comparación con los costos generados por la acumulación de primas. Nuestra discusión se centrará sólo en los aspectos fundamentales. Lo que se hará es calcular probabilidades del número de reclamaciones que se efectúan en escenarios específicos.

Los factores de interés que consideraremos aquí y que pertenecen a un contexto actuarial son, entre otros:

1. Monto de un Reclamo.
2. Incidencia de un Reclamo.
3. Volumen de Reclamos Potenciales.
4. Concentración de Riesgos.

⁴Algunas referencias útiles para el contexto presente son: Booth, P., *Modern Actuarial Theory and Practice*, Chapman & Hall, (1999); y Klüppelberg, C., *The Extreme Value Theory* Springer-Verlag, (1999).

Ejemplo 4.9 Suponer que un compañía de seguros desea establecer rangos de siniestralidad con el objeto de agrupar pólizas de acuerdo al monto reclamado y al tiempo de ocurrencia.

De esta forma, supongamos que puntos X_t en el plano euclidiano representan pólizas con reclamos (montos) X_t en los tiempos de ocurrencia t (Figura 4.4).

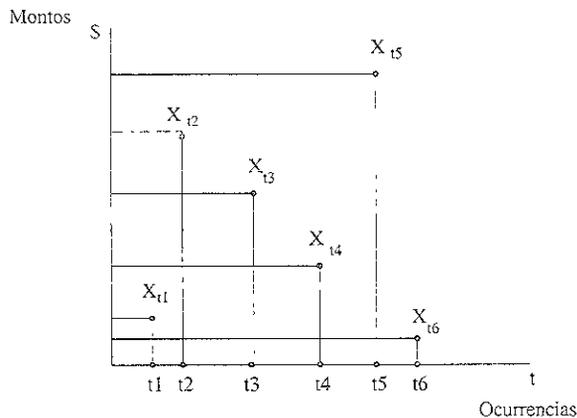


Figura 4.4: Siniestros.

Pensemos además que esta compañía postula como regiones de interés a los conjuntos $A_i = \{(x_i, y_i) : x_i \text{ es un monto e } y_i \text{ es un tiempo, } x_i, y_i > 0\}$ para $i = 1, 2, \dots, k$, donde x_i e y_i deben cumplir alguna condición de interés. Evidentemente el número de pólizas que pertenecen a determinado A_i es una cantidad aleatoria.

Conocer algún indicador de este número, por ejemplo una probabilidad, tendría algunas ventajas:

- 1) Redefinir los conjuntos A_i .
- 2) Determinar épocas de alta siniestralidad.
- 3) Diseñar nuevos productos.

Por lo general, los libros de texto de matemática actuarial que incluyen modelación estocástica sólo consideran el problema de determinar el número de reclamos en cierto intervalo de tiempo que, en nuestro contexto, equivale a proyectar los puntos del plano sobre el eje horizontal (ver Ejemplo 3.2). Aquí tratamos de hacer un estudio bidimensional.

Suposiciones.

1) Los puntos están distribuidos aleatoria e independientemente sobre el plano.

2) No se consideran reclamos de idéntico monto cuya ocurrencia se da en el mismo instante.

3) $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Estas suposiciones sugieren que el número de puntos en cierto subconjunto de \mathbf{R}^2 puede modelarse mediante una distribución de Poisson.

Sea Φ un proceso de Poisson sobre \mathbf{R}^2 con medida de intensidad Λ , dada por

$$\Lambda(A) = \int_A \lambda(x) dx \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2),$$

es decir, tenemos un modelo no homogéneo. La función $\lambda(\cdot)$ puede interpretarse como la densidad de concentración de riesgos en el plano. Por tanto, asumiendo este modelo de Poisson bidimensional

$$P(N(A_i) = n_i, i = 1, 2, \dots, k) = \prod_{i=1}^k \frac{\Lambda(A_i)^{n_i}}{n_i!} \exp\{-\Lambda(A_i)\},$$

donde $A_i \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$, y $n_i \in \mathbf{Z}^+$. En particular $E[N(A_i)] = \Lambda(A_i)$ y $\text{Cov}[N(A_i), N(A_j)] = \Lambda(A_i \cap A_j)$, $i, j = 1, \dots, k$.

Este modelo es aplicable cuando diferentes pólizas tienen distinta propensión a proceder, i.e., a reportar el reclamo a causa de la ocurrencia del siniestro considerado. En el caso en que la función $\lambda(\cdot)$ sea constante, esto es, $\Lambda(A) = \lambda \mu_L(A)$, donde $\mu_L(A)$ es el área de A , el modelo es homogéneo y se aplica cuando todas las pólizas están igualmente propensas a proceder.

Observaciones.

1) Por el lema de disjunción (Lema 1.14), si Φ_i es un proceso de Poisson relacionado con el seguro de tipo i , donde $i = 1, 2$ y Φ_1 y Φ_2 son procesos independientes, entonces Φ_1 y Φ_2 son disjuntos con probabilidad 1.

2) Suponer que tenemos un portafolio que involucra n tipos de seguro, cada uno siguiendo un proceso de Poisson con medida de intensidad Λ_i , $i = 1, \dots, n$. Si los procesos son mutuamente independientes, entonces debido al teorema de superposición (Teorema 1.13), el número de reclamos en tiempo y espacio de todo el portafolio sigue un proceso de Poisson con medida de intensidad

$$\Lambda := \sum_{i=1}^n \Lambda_i.$$

†

Ejemplo 4.10 Modifiquemos un poco el problema anterior. Suponer que deseamos responder a la siguiente pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que simultáneamente ocurra $N(A_i) = n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, pero dado que el número total de reclamos ocurridos en tiempo y espacio es n ? De acuerdo a los supuestos ya hechos, tal probabilidad está dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} P \{N(A_1) = n_1, N(A_2) = n_2, \dots, N(A_k) = n_k | N(S) = n\} \\ &= \left(\prod_{j=0}^k \frac{e^{-\Lambda(A_j)} \Lambda(A_j)^{n_j}}{n_j!} \right) \left(\frac{e^{-\Lambda(S)} \Lambda(S)^n}{n!} \right)^{(-1)} \\ &= \frac{n!}{n_0! n_1! \dots n_k!} \left(\frac{\Lambda(A_0)}{\Lambda(S)} \right)^{n_0} \dots \left(\frac{\Lambda(A_k)}{\Lambda(S)} \right)^{n_k}, \end{aligned}$$

donde $n_0 := n - \sum_{j=1}^k n_j$, $A_0 := \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right)$ y $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Por lo tanto, se tiene un proceso Bernoulli con parámetros n y $p(\cdot) := \frac{\Lambda(\cdot)}{\Lambda(S)}$.

Este modelo es aplicable en una situación en que una compañía de seguros tiene información (únicamente) sobre el número total de reclamos durante cierto intervalo de tiempo y dentro un rango determinado de tamaños de monto; por ejemplo, reclamos efectuados entre enero y marzo con montos no mayores a \$100,000. A partir de tal información esta compañía desea conocer la probabilidad de haber tenido cierta siniestralidad en alguna subregión de tiempo y espacio contenida en la región de la cual sí se sabe el número total de reclamos, por decir, reclamos con monto entre \$10,000 y \$50,000 efectuados en la primer quincena de enero.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ algún conjunto de interés, por ejemplo, puntos (reclamos) durante los primeros 15 años de operación de una compañía de seguros con "severidad" entre \$10,000 y \$500,000,000, y k el número de tipos de seguro manejados por tal institución: vida, cesantía en edad avanzada, gastos médicos mayores, autos, daños en casa habitación, daños a terceros, etc..

Denotemos por $N(A)$ al número total de puntos hallados en la región A , y por $N_i(A)$ a la misma magnitud pero referente únicamente a los puntos (reclamos) del seguro de tipo i , $i = 1, 2, \dots, k$ en el mismo conjunto.

Suponer además que Φ sigue un proceso de Poisson con medida de intensidad $\Lambda(\cdot)$ y que las ocurrencias de siniestros de distintos tipos son mutuamente independientes. Entonces $N(A) := |\Phi \cap A|$ tiene distribución de Poisson con parámetro $\Lambda(A)$ y además:

1) La variable aleatoria condicional $N_i(A)|N(A)$ sigue una ley de probabilidad binomial con parámetros $\Lambda(A)$ y p_i , donde p_i es la probabilidad de que ocurra un siniestro de tipo i , $i = 1, 2, \dots, k$, donde $\sum_i p_i = 1$.

Aún más, $N_i(A)$ es independiente de $N(A) - N_i(A) = \sum_{j \neq i} N_j(A)$, y ambas variables siguen una ley de Poisson con parámetros $p_i \Lambda(A)$ y $(1 - p_i) \Lambda(A)$ respectivamente, $i = 1, \dots, k$.

2) Si A_1, A_2, \dots, A_r son subconjuntos disjuntos en \mathbf{R}^2 (que representan regiones de siniestralidad), entonces los vectores $(N(A_s), N_1(A_s), N_2(A_s), \dots, N_k(A_s))$, $s = 1, 2, \dots, r$, son independientes. Por tanto, las variables aleatorias $N_p(A_s)$ y $N_q(A_s)$, $s = 1, 2, \dots, r$, y $p, q = 1, 2, \dots, k$ distintas, son independientes.

De lo anterior y del teorema de los colores (Teorema 4.1) se sigue que el conjunto de pólizas del seguro tipo i es independiente del relativo al tipo j , $i \neq j$, y cada uno de ellos sigue un proceso de Poisson con medida de intensidad $\Lambda_i = p_i \Lambda$ y $\Lambda_j = p_j \Lambda$, respectivamente, para $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Este modelo podría ser utilizado para diseñar y administrar portafolios de pólizas de seguros de acuerdo a la experiencia siniestral obtenida. †

Ejemplo 4.11 Denotemos por X_t un punto sobre la recta real que denota un reclamo ubicado en el instante t . Suponer que tales puntos siguen un proceso de Poisson Φ con medida de intensidad Λ sobre \mathbf{R}^+ , y además suponer una función de distribución de probabilidad $p(x, \cdot)$ sobre algún espacio $(M, \mathcal{B}(M))$ dependiendo de $x \in \mathbf{R}^+$, tal que $p(\cdot, B)$ es una función medible para $B \subseteq (M)$.

A cada X_t asociamos una variable aleatoria $\zeta_{X_t} : (M, \mathcal{B}(M)) \rightarrow \mathbf{R}^+$, denotando la gravedad del siniestro. Las variables aleatorias ζ_X para diferentes puntos son independientes. De esta forma, tendremos puntos aleatorios $X^* = (X, \zeta_X) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$.

Considerar el proceso $\Phi^* = \{(X, \zeta_X) : X \in \Phi\}$ sobre $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$. Entonces Φ^* así definido y en virtud del teorema de las marcas (Teorema 4.4) resulta que es un proceso de Poisson con medida de intensidad Λ^* dada por

$$\Lambda^*(C) = \int \int_{(x, \zeta) \in C} \Lambda(dx) p(x, d\zeta).$$

Observaciones. A partir del teorema citado se sigue lo siguiente:

1) Las variables aleatorias ζ_X (i.e., los montos por reclamo) forman un proceso de Poisson en \mathbf{R}^+ con medida de intensidad

$$\Lambda_m(B) = \int \int_B \Lambda(dx) p(x, d\zeta).$$

2) Si sólo se considera un conjunto finito de montos posibles, entonces las pólizas relativas al monto i -ésimo también forman un proceso de Poisson $\Phi^{(i)}$ con medida de intensidad

$$\Lambda_i(A) = \int_A \Lambda(dx) p(x, \{\zeta_i\})$$

y los procesos $\Phi^{(i)}$ son independientes.

Notemos que en el modelo anterior (Ejemplo (4.10)) la probabilidad de que ocurra un siniestro de tipo j era p_j sin considerar el monto de tal fatalidad. Pero en el último modelo discutido, tal probabilidad es una función que cambia en función del monto (que es una magnitud aleatoria) del reclamo.

Este modelo puede utilizarse cuando, además de considerar el tiempo en que ocurre un siniestro y el número de siniestros, se tiene interés en la distribución del tamaño de los montos. †

Apéndice A

Medida y Probabilidad

El presente apéndice consta de 3 partes: medida, probabilidad, y medidas aleatorias y procesos puntuales. El contenido corresponde a los conceptos y resultados que se utilizan con mayor frecuencia en el desarrollo de los capítulos precedentes. En él se encontrarán definiciones, resultados (sin prueba) y comentarios, en el orden secuencial usual. Asimismo, al final se presenta el teorema de aditividad contable para variables aleatorias de Poisson independientes, que es similar a la superposición de procesos de Poisson independientes.

A.1 Teoría de la medida

A.1.1 Clases de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío de puntos ω . Para subconjuntos cualesquiera E y F de Ω , denotemos por $E \cup F$, $E \cap F$ y $E \setminus F := E \cap F^c$ respectivamente a la unión, intersección y diferencia de E y F , donde, para $F \subset \Omega$, $F^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin F\}$ es el complemento de F . Decimos que E y F son ajenos (o disjuntos) cuando $E \cap F = \emptyset$, donde $\emptyset \subset \Omega$ denota al conjunto vacío.

Más generalmente, sea $\{A_i, i \in I\}$ una familia de subconjuntos de Ω . Diremos que los conjuntos $A_i, i \in I$ son mutuamente ajenos cuando $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cualesquiera índices distintos $i, j \in I$. Denotamos $\sup A_i = \bigcup_i A_i$ e $\inf A_i = \bigcap_i A_i$.

Si $A_n \subset A_{n+1}$ y $A = \sup A_n$, entonces se dice que $A = \lim_n A_n$ y se escribe $A_n \nearrow A$. Análogamente, si $A_{n-1} \subset A_n$ y $A = \inf A_n$, entonces se dice que

$A = \lim_n A_n$ y se escribe $A_n \searrow A$.

Sea \mathcal{F} una colección no vacía de subconjuntos de Ω . Considerar las siguientes condiciones en \mathcal{F} :

- (i) Si $E \in \mathcal{F}$, entonces $E^c \in \mathcal{F}$.
- (ii) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, entonces $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$.
- (iii) Si $E_j \in \mathcal{F}, E_j \subset E_{j-1} \forall j = 1, 2, \dots$, entonces $\sup E_j \in \mathcal{F}$.
- (iv) Si $E_j \in \mathcal{F}, E_{j+1} \subset E_j \forall j = 1, 2, \dots$, entonces $\inf E_j \in \mathcal{F}$.
- (v) Si $E_j \in \mathcal{F} \forall j = 1, 2, \dots$, entonces $\sup E_j \in \mathcal{F}$.

Definición. La colección \mathcal{F} se llama álgebra (o campo) si y sólo si se cumplen (i) y (ii); se llama clase monótona si y sólo si se cumplen (iii) y (v); se llama σ -álgebra (o σ -campo) si y sólo si se cumplen (i) y (v).

Dado cualquier conjunto Ω , siempre es posible definir por lo menos dos σ -álgebras de subconjuntos de Ω , a saber, la σ -álgebra discreta, definida como el conjunto potencia $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω , y la σ -álgebra indiscreta, constituida por los conjuntos \emptyset y Ω .

No es difícil probar que la intersección de cualquier familia de σ -álgebras es, de nuevo, una σ -álgebra, y que la σ -álgebra discreta incluye a cualquier familia de subconjuntos de Ω . En virtud de esto se puede definir lo siguiente.

Definición. Sea \mathcal{C} una colección no vacía de subconjuntos de Ω . A la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{C} , denotada por $\sigma(\mathcal{C})$, se le llama σ -álgebra generada por \mathcal{C} .

Ejemplo. (σ -álgebra de Borel en \mathbf{R}^d) Sea $\Omega = \mathbf{R}^d$ y \mathcal{C} la clase de los conjuntos abiertos (o de los cerrados) de \mathbf{R}^d . Entonces $\sigma(\mathcal{C})$ se denomina σ -álgebra de Borel y es denotada por $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$. En el caso $d = 1$ la σ -álgebra de Borel es también generada por los intervalos de la forma (a, b) o $[a, b]$ o $[a, b)$ o $(a, b]$ o $[a, \infty)$ o $(-\infty, b)$ o (a, ∞) o $(-\infty, b]$, donde $a, b \in \mathbf{R}$. En general, tomando como \mathcal{C} a la familia de abiertos de un espacio topológico dado, se define la σ -álgebra de Borel de tal espacio. †

A.1.2 Espacios de medida

Definición. Un espacio medible es una pareja (Ω, \mathcal{F}) , formada por un espacio no vacío de puntos Ω y por una σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω . A los elementos de la σ -álgebra \mathcal{F} los llamamos conjuntos medibles.

En base a la definición anterior, tenemos lo siguiente.

Definición. Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Una medida definida en la σ -álgebra \mathcal{F} es una función $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ que cumple lo siguiente:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$
- 2) Si $\{A_n\}_n$ es cualquier colección numerable de elementos de \mathcal{F} mutuamente ajenos, entonces

$$\mu(\sup A_n) = \sum_n \mu(A_n) = \sup_n \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Si $\mu(\Omega) < \infty$ se dice que μ es medida finita. Si existe una familia A_1, A_2, \dots de conjuntos en \mathcal{F} satisfaciendo

$$\Omega = \sup A_i \text{ y } \mu(A_i) < \infty \forall i,$$

entonces decimos que μ es σ -finita.

En el caso en que Ω sea un espacio euclidiano (o cualquier otro espacio métrico), y \mathcal{F} sea la σ -álgebra de Borel en Ω , diremos que una medida $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ es localmente finita si se cumple $\mu(A) < \infty$ para todo conjunto A medible y acotado.

Por otro lado, si los conjuntos $\{\omega\}$ (llamados singuletes) son medibles y $\mu(\{\omega\}) = 0 \forall \omega$, entonces μ se denomina medida difusa.

Un espacio de medida es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, donde (Ω, \mathcal{F}) es un espacio de medida y μ es una medida definida en \mathcal{F} .

Ejemplo. Un ejemplo de espacio de medida es cuando $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y $\mu = \mu_L$, donde μ_L es la medida de Lebesgue; esta medida es una generalización del concepto de longitud, área o volumen, según la dimensión del espacio. Así en el caso $d = 1$, $\mu_L((a, b)) = \mu_L([a, b]) = \mu_L((a, b]) = \mu_L([a, b)) = b - a$.¹

Un caso especial de las medidas finitas son las medidas de probabilidad, que se definen como aquellas medidas P que cumplen $P(\Omega) = 1$, y en este caso las ternas (Ω, \mathcal{F}, P) son nombradas espacios de probabilidad.

A continuación se resumen las propiedades de medidas que son más relevantes para este trabajo.

Proposición. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

- 1) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, y $A_1 \subset A_2$, entonces $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. Si además $\mu(A_2) < \infty$, entonces $\mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$.

¹Un estudio detallado de la medida de Lebesgue puede encontrarse en [5] o en Bartle, R.. *The Elements of Integration and Measure*. John Wiley, (1995).

2) Si $\{A_n\}_n$ es una colección numerable de elementos de \mathcal{F} , donde $A_n \subset A_{n+1} \forall n$, entonces $\mu(\sup A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

3) Si $\{A_n\}_n$ es una colección numerable de elementos de \mathcal{F} , donde $A_{n+1} \subset A_n \forall n$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(\inf A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

4) Si $\{A_n\}_n$ es una colección numerable de elementos de \mathcal{F} , entonces $\mu(\sup A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

5) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, entonces $\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Por último, veamos la siguiente definición.

Definición. Diremos que una propiedad se cumple “ μ -casi dondequiera” o “ μ -casi en todas partes”(c.p.) si ésta es satisfecha en todo un espacio excepto en un conjunto de medida cero; cuando la medida es de probabilidad se dice usualmente que la propiedad se cumple “con probabilidad 1” o “casi seguramente”.

A.1.3 Funciones medibles

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos espacios medibles. Una función $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ se nombra medible (relativa a las σ -álgebras \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2), si cumple

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1 \text{ para todo } A \in \mathcal{F}_2.$$

La idea inherente a esta definición es garantizar que los conjuntos $f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) \in A\}$ puedan ser “medidos”, i.e., que pertenezcan al dominio de cualquier medida sobre \mathcal{F}_1 .

Una función real f definida en un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) con regla de correspondencia $f(\omega) = 1$ si $\omega \in E$ y $f(\omega) = 0$ si $\omega \notin E$ es medible si y sólo si $E \in \mathcal{F}$. A tal función se le denomina función indicadora del conjunto E y se denota por I_E .

Proposición. Sean dados dos espacios medibles como en la definición anterior, y $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una función.

1) Suponer que existe una clase \mathcal{C} de subconjuntos de Ω_2 tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$. Si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1 \forall A \in \mathcal{C}$, entonces f es medible.

2) Sea f medible. Si $(\Omega_3, \mathcal{F}_3)$ es un tercer espacio medible y si $g : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ es una función medible, entonces la composición $g \circ f$ es medible relativa a las σ -álgebras \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_3 .

3) Suponer que Ω_1 y Ω_2 son espacios topológicos y que \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 son las σ -álgebras de Borel respectivas. Si f es una función continua, entonces es

medible.

De acuerdo al inciso (1) de esta proposición, si el segundo espacio medible $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ es $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, entonces basta que $f^{-1}((-\infty, x)) = \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) < x\} \in \mathcal{F}_1 \forall x \in \mathbb{R}$ para que f sea medible. La razón es que los intervalos $(-\infty, x)$ generan a la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} .

En este contexto, una variable aleatoria es cualquier función medible $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde (Ω, \mathcal{F}) es un espacio medible dado.

Corolario. Si X es una variable aleatoria y f es una función continua sobre \mathbb{R} , entonces $f(X)$ es una variable aleatoria.

Como consecuencia, las funciones $X^n, |X|^n, e^{-\lambda X}$, y e^{itX} son variables aleatorias si X lo es, donde $n \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda, t \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

El siguiente resultado es de gran utilidad.

Lema. Sea f una función medible y no negativa. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones medibles tal que

- a) $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall x$.
- b) $f(x) = \lim_n f_n(x)$ para cada x .
- c) f_n toma un número finito de valores, i.e., el rango de f es un conjunto finito.

Prueba. Para cada $n = 1, 2, \dots$ y cada x definir la función

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{si } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}, \quad k = 1, 2, \dots, n2^n, \\ n & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$

□

Cuando nuestra función medible f no es mayor o igual que cero, podemos definir las funciones

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \text{ y } f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

las cuales son no negativas y medibles y cumplen $f = f^+ - f^-$, y entonces podemos aplicar el lema anterior a cada una de ellas. Un método usual para demostrar resultados en teoría de la medida y en probabilidad consiste en verificar tales resultados primero para funciones indicadoras, luego para funciones simples (las cuales son combinaciones lineales finitas de indicadoras y se definen más adelante), después para las funciones medibles no negativas, y finalmente hacer la demostración para funciones medibles generales apelando a la descomposición anterior.

A.1.4 Integral de Lebesgue

La relevancia del concepto de Integral de Lebesgue en teoría de probabilidad se manifiesta al tratar de formular rigurosamente el concepto de esperanza matemática.

Definición. Una función $\varphi : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ se denomina simple si es medible y toma sólo un número finito de valores.

De acuerdo a la definición anterior, una función simple φ puede ser escrita como

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i I_{\varphi^{-1}(a_i)}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

donde $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbf{R}$ es el rango de φ y $\varphi^{-1}(a_i) \in \mathcal{F}$. Esta forma de escribir a la función φ se denomina representación canónica.

Definición. Sea φ una función simple no negativa, definida en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Definimos la integral de Lebesgue de φ respecto a la medida μ como el número real extendido

$$\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i),$$

donde $A_i = \{\omega : \varphi(\omega) = a_i\}$. Tal número es denotado por $\int_{\Omega} \varphi d\mu$.

En esta definición adoptamos la convención, usual en teoría de la medida, de que $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$.

La representación de una función simple φ como combinación lineal de funciones indicadoras no es única, sin embargo se puede probar que la integral de φ no depende de la representación que se utilice.

Definición. Si $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ es una función medible y no negativa, entonces definimos su integral respecto a μ como el número real extendido

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sup_{\{\varphi : \varphi \leq f\}} \int_{\Omega} \varphi d\mu,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones simples y no negativas φ que minoran a f .

A.1.5 Teoremas de convergencia

Los resultados más notables asociados con la Integral de Lebesgue son los relativos a situaciones de convergencia.

Teorema de convergencia monótona (B. Levi). Sea $\{f_n\}_n$, $f_n : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\forall n$ una sucesión monótona de funciones medibles no negativas, i.e.. $\forall n$, $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Entonces

$$\int \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Algunas propiedades importantes que posee la integral de Lebesgue son las siguientes:

Proposición. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f, g, f_n : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n = 1, 2, \dots$ funciones medibles y no negativas.

(i) Si $a, b \geq 0$, entonces

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

(ii) La función λ definida por

$$\lambda(A) := \int_A f d\mu. \quad A \in \mathcal{F},$$

es una medida.

(iii) $f(x) = 0$ μ -casi donde quiera si y sólo si $\int f d\mu = 0$.

(iv) Se cumple la igualdad siguiente

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

La integral de Lebesgue para funciones medibles generales se establece en la siguiente definición.

Definición. Sea $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ una función medible. Si se cumple $\int |f| d\mu < \infty$, se dice que f es integrable y al número

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

se le llama la integral de Lebesgue de f .

Notemos que $|f| = f^+ + f^-$ y por tanto que la condición $\int |f| d\mu < \infty$ implica $0 < \int f^+ d\mu < \infty$ y $0 < \int f^- d\mu < \infty$. Al conjunto de funciones

medibles $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ que son μ -integrables se le denota por $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Algunas propiedades importantes que satisface esta integral se hallan en el siguiente resultado.

Proposición.

1) Si $f \in L^1$ y λ es definida por $\lambda(E) := \int_E f d\mu$, entonces λ es una medida (signada).

2) Si $f, g \in L^1$ y $c \in \mathbf{R}$, entonces $\int c f d\mu = c \int f d\mu$ y $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Notar que en el inciso (1) la medida λ podría tomar valores negativos. Una medida que toma valores positivos y negativos se denomina medida signada o carga.

Un teorema de importancia capital en teoría de la medida es el siguiente:

Teorema de Lebesgue de convergencia dominada. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones μ -integrables tal que el límite $f(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ existe para toda $\omega \in \Omega$. Si existe una función μ -integrable g tal que $|f_n(\omega)| \leq g(\omega) \forall n$ y $\forall \omega \in \Omega$. entonces f es μ -integrable y cumple

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Enseguida revisaremos algunos conceptos relacionados con las nociones de esperanza condicional, probabilidad condicional y de función de densidad de probabilidad.

Definición. Sean λ y μ dos medidas definidas en una σ -álgebra \mathcal{F} . Se dice que λ es absolutamente continua respecto a la medida μ , y escribimos $\lambda \ll \mu$, si $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = 0$ implica que $\lambda(A) = 0$.

El resultado fundamental relacionado con el concepto de continuidad absoluta es el siguiente teorema.

Teorema de Radon-Nikodym. Sea μ una medida σ -finita y λ una medida signada, ambas definidas en la misma σ -álgebra, \mathcal{F} , de subconjuntos de un espacio Ω . Si $\lambda \ll \mu$, entonces existe una función $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ que es \mathcal{F} -medible y tal que

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Si h es otra función \mathcal{F} -medible que cumple $\lambda(A) = \int_A h d\mu$, entonces $f = h$ μ -casi donde quiera. A la función f se le denota por $\frac{d\lambda}{d\mu}$ y se denomina derivada de Radon-Nikodym de λ respecto a μ .

A.2 Probabilidad

Recuérdese que una variable aleatoria X es una función real definida en cierto espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y que cumple $X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Un espacio de probabilidad es un espacio de medida (Ω, \mathcal{F}, P) en el que se cumple $P(\Omega) = 1$. En este contexto, a los elementos de \mathcal{F} se les llama, comúnmente, eventos.

Definición. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria definida en él. Entonces la medida P_X definida sobre el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ y dada por

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

es llamada la medida distribución de probabilidad de la variable aleatoria X . A la función

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), x \in \mathbb{R}.$$

se le llama función de distribución de la variable aleatoria X .

Definición. Sea P_X la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X . Si $P_X \ll \mu_L$, entonces por el teorema de Radon-Nikodym existe una función medible f tal que

$$P_X(A) = P(X \in A) = \int_A f d\mu_L, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Tal función se denomina función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X .

Definición. Cuando la variable aleatoria X es P -integrable, se define su esperanza matemática $E[X]$ como la integral $\int X dP$, y se cumple la igualdad

$$E[X] := \int_{\Omega} X dP = \int_{-\infty}^{\infty} x dP_X(x).$$

A.2.1 Esperanza y probabilidad condicionales

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una σ -álgebra. Para $A \in \mathcal{F}$ definimos una medida de probabilidad ν en \mathcal{G} . dada por

$$\nu(G) := P(A \cap G) = \int_G I_A dP, \quad G \in \mathcal{G}.$$

Entonces $\nu \ll P$ y, por tanto, existe una función f , la cual es \mathcal{G} -medible y P -integrable, tal que

$$\nu(G) = \int_G f dP, \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

Debido a que $f = \frac{\partial \nu}{\partial P}$, donde la función f es única módulo conjuntos de probabilidad 0.

Definición. A la función f se le llama la probabilidad condicional de A dado \mathcal{G} , y se denota por $P(A|\mathcal{G})$. Es decir

$$P(A \cap G) = \int_G P(A|\mathcal{G}) dP, \quad G \in \mathcal{G}$$

Una construcción análoga a la anterior conduce a la siguiente

Definición. Cuando la variable aleatoria X es P -integrable, se define su esperanza condicional respecto a la σ -álgebra \mathcal{G} como la función $E[X|\mathcal{G}]$ caracterizada porque cumple lo siguiente:

- 1) $E[X|\mathcal{G}]$ es \mathcal{G} -medible.
- 2)

$$\int_A X dP = \int_A E[X|\mathcal{G}] dP, \quad A \in \mathcal{G}.$$

En particular, $E[X] = E[E[X|\mathcal{G}]]$.

En este contexto es útil el resultado siguiente.

Proposición. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria definida en éste espacio y P -integrable. y $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ dos σ -álgebras tales que $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$. Entonces, con probabilidad 1,

$$E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[X|\mathcal{G}_1],$$

y

$$E[E[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = E[X|\mathcal{G}_1].$$

Una exposición completa de los conceptos anteriores puede verse en Ash, R.. *Real Analysis and Probability*, Academic Press. INC.

A.2.2 Independencia estocástica

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad.

Definición. 1) Sea $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ una colección finita de σ -álgebras satisfaciendo $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F} \forall i$. Estas σ -álgebras se denominan independientes cuando para cualesquiera $F_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_n$ se cumple

$$P\left(\bigcap_i F_i\right) = \prod_i P(F_i).$$

2) Una colección arbitraria de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} se dice independiente si toda subcolección finita de ella es independiente.

Sea X una variable aleatoria y $\mathcal{F}(X) := \{F : F = X^{-1}(B) \text{ para algún } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Entonces $\mathcal{F}(X)$ es una σ -álgebra la cual está contenida en \mathcal{F} por ser X una variable aleatoria.

Definición Una colección X_1, X_2, \dots , de variables aleatorias se dice independiente si la colección de σ -álgebras respectivas $\mathcal{F}(X_1), \mathcal{F}(X_2), \dots$, es independiente.

En este contexto, una colección de conjuntos medibles A_1, A_2, \dots donde $A_i \in \mathcal{F} \forall i$, se dice independiente si la colección de funciones indicadoras I_{A_1}, I_{A_2}, \dots es independiente.

Proposición. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes y $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces $f_n(X_1), f_n(X_2), \dots, f_n(X_n)$ son variables aleatorias independientes.

A.3 Medidas aleatorias

Sea E un espacio euclidiano² y $\mathcal{B}(E)$ su σ -álgebra de Borel. Sea $\mathcal{M}(E)$ el conjunto de medidas de Borel-Radon i.e., de las medidas no negativas definidas en $\mathcal{B}(E)$ que son finitas sobre conjuntos acotados, y sea $\mathcal{N}(E) \subset \mathcal{M}(E)$ el conjunto de medidas con valores en los enteros no negativos, llamadas medidas de contar.

Dotamos al conjunto $\mathcal{M}(E)$ de la σ -álgebra generada por los conjuntos de la forma

$$\left\{ \mu \in \mathcal{M}(E) : \left\| \int f_j d\mu - \int f_j d\nu \right\| < \epsilon, 1 \leq j \leq n, n = 1, 2, \dots \right\},$$

²La teoría puede desarrollarse para espacios más generales como, por ejemplo, los espacios topológicos de Hausdorff que son localmente compactos y que tienen una base numerable para su topología. Ver [2].

donde f_1, f_2, \dots, f_n son funciones continuas de soporte compacto, $\nu \in \mathcal{M}(E)$, y $\epsilon > 0$. A tal σ -álgebra la denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{M}(E))$.

Definición. Una medida aleatoria sobre E es una aplicación medible Φ definida en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y que toma valores en el espacio medible $(\mathcal{M}(E), \mathcal{B}(\mathcal{M}(E)))$.

La idea que motiva a esta definición es que a cada punto $\omega \in \Omega$ asociamos una realización particular de una población o de una distribución de masa $\Phi(\omega)$, la cual es una medida de Borel-Radon sobre el espacio E ; ésta puede ser denotada por $\Phi(\cdot, \omega)$ o simplemente $\Phi(\cdot)$ (o aún Φ) cuando no es necesario poner atención al espacio de probabilidad subyacente. Tal realización tiene el valor $\Phi(A, \omega)$ sobre el conjunto de Borel $A \in \mathcal{B}(E)$.

Notemos que para cada conjunto $A \in \mathcal{B}(E)$ fijo, $\Phi_A \equiv \Phi(A, \cdot)$ es una función que mapea a Ω en \mathbf{R}^+ , y así tal función es un candidato a variable aleatoria no negativa³.

Si Φ es una medida aleatoria, entonces la medida de probabilidad $P\Phi^{-1}$ en $(\mathcal{M}(E), \mathcal{B}(\mathcal{M}(E)))$ dada por

$$P\Phi^{-1}(A) = P(\{\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{M}(E)),$$

se llama la distribución de probabilidad de Φ .

A.3.1 Procesos puntuales

Un caso particular de medida aleatoria son los procesos puntuales, que son aquellas medidas aleatorias que toman valores en $\mathcal{N}(E)$, i.e., en el espacio de medidas de contar.

Definición. Un proceso puntual N es una medida aleatoria definida en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) que toma valores en el espacio medible $(\mathcal{N}(E), \mathcal{B}(\mathcal{N}(E)))$.

El prototipo de los procesos puntuales es el proceso de Poisson: sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Un proceso de Poisson en \mathbf{R}^d es una medida aleatoria $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{R}^d)$ tal que, denotando

$$\Phi(\omega, \cdot) := \sum_i \delta_{x_i(\omega)}(\cdot), \quad x_i(\omega) \in \mathbf{R}^d \forall i, \text{ y}$$

$$N(A) := \Phi(\omega, A) = \sum_i \delta_{x_i(\omega)}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d),$$

³Una caracterización de una medida aleatoria mediante esta idea puede verse en [3], Proposición 6.1.III

donde δ_z denota a la medida de Dirac en z . se cumple:

1) Si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ son ajenos, entonces $N(A)$ y $N(B)$ son variables aleatorias independientes.

2) $N(A) \sim \text{Poi}(\mathbb{E}[\Phi(\omega, A)])$.

A.4 Aditividad contable de la distribución de Poisson

De manera aislada presentamos el teorema que garantiza la propiedad de cerradura de la distribución de Poisson respecto a la suma usual.

Teorema de aditividad contable. *Sea $\{X_j\}_{j \geq 1}$ una familia de variables aleatorias independientes, donde X_j tiene distribución de Poisson de parámetro μ_j . $j \geq 1$. Si la serie*

$$\mu := \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j,$$

converge, entonces la serie aleatoria

$$S := \sum_{j=1}^{\infty} X_j.$$

converge con probabilidad 1 y el límite S tiene distribución de Poisson de parámetro μ . De otra forma, si $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$ diverge, entonces S diverge con probabilidad 1.

Prueba. Procedamos mediante inducción matemática. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetros μ_1 y μ_2 respectivamente, y sea m un entero positivo. Entonces

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = m) &= \sum_{r=0}^m P(X_2 = m - r, X_1 = r) \\ &= \sum_{r=0}^m \frac{\mu_2^{m-r} e^{-\mu_2}}{(m-r)!} \frac{\mu_1^r e^{-\mu_1}}{r!} \\ &= \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)}}{m!} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \mu_1^r \mu_2^{m-r} \\ &= \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)}}{m!} (\mu_1 + \mu_2)^m, \end{aligned}$$

es decir. $(X_1 + X_2) \sim \text{Poi}(\mu_1 + \mu_2)$.

Supongamos ahora que $S_{(n)} := \sum_{j=1}^n X_j \sim \text{Poi}(\mu_{(n)} := \sum_{j=1}^n \mu_j)$. Entonces

$$P(X_{n+1} + S_{(n)} = m) = \sum_{r=0}^m P(S_{(n)} = m - r, X_{n+1} = r).$$

Bajo la hipótesis de inducción y siguiendo los mismos pasos que en el caso inicial, se sigue que $S_{(n+1)} \sim \text{Poi}(\mu_{(n+1)})$, y así el teorema se cumple para sumas de variables aleatorias.

En virtud de que

$$\begin{aligned} P(S_{(n)} \leq m) &= \sum_{i=0}^m P(S_{(n)} = i) \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{\mu_{(n)}^i e^{-\mu_{(n)}}}{i!}, \end{aligned}$$

y debido a la relación de eventos

$$[S_{(n)} \leq m] \subset [S_{(n-1)} \leq m] \subset \cdots \subset [S_{(1)} \leq m], \text{ y } [S \leq m] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [S_{(n)} \leq m].$$

se sigue que

$$\begin{aligned} P(S \leq m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_{(n)} \leq m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \frac{\mu_{(n)}^i e^{-\mu_{(n)}}}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{\mu^i e^{-\mu}}{i!} \end{aligned}$$

cuando $\mu := \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j < \infty$, y por lo tanto $S \sim \text{Poi}(\mu)$.

Si $\mu = \infty$, entonces $P(S_n \leq m) = 0 \forall m$ y por tanto $P(S > m) = 1 \forall m$. es decir, $S = +\infty$ con probabilidad 1. \square

Referencias

Básicas

- [1] Kingman, J., *Poisson Processes*, Oxford University Press, (1993).
- [2] Jagers, P., *Aspects of Random Measures and Point Processes*, Advances in Probability and Related Topics, Vol. 3, Marcel Dekker, (1974).
- [3] Daley, D., Vere-Jones, D., *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer-Verlag, (1988).
- [4] Stoyan, D., *Stochastic Geometry and its Applications*. John Wiley & Sons, (1995).
- [5] Billingsley, P., *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, (1995).
- [6] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. I y II, John Wiley & Sons, (1978).
- [7] Taylor, H. M., Karlin, S., *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press, INC., (1998).
- [8] Panjer, H., *Insurance Risk Models*. The Society of Actuaries, (1992).

Complementarias

- [9] Solomon, H., *Geometric Probability*, SIAM, CBMS-NSF Regional Conference Series and Applied Mathematics, (1989).
- [10] Grandell, J., *Mixed Poisson Processes*. Chapman & Hall, (1997).
- [11] Grandell, J., *Doubly Stochastic Poisson Processes*, Lectures Notes in Mathematics, No. 529. Springer-Verlag, (1976).
- [12] Kutoyants, Y., *Statistical Inference for Spatial Poisson Processes*, Lectures Notes in Statistics. No. 134, Springer-Verlag, (1998).
- [13] Shiryaev, A., *Probability*. Springer-Verlag, (1984).
- [14] Neveu, J., *Bases Mathématiques Du Calcul Des Probabilités*, Masson et

C^{ie}, Éditeurs, (1970).

[15] Brémaud, P., *Introduction aux Probabilités*, Springer-Verlag, (1984).

[16] Lasota, A., *Chaos, Fractals, and Noise*. (Stochastic Aspects of Dynamics), Springer-Verlag, (1995).

[17] Okabe, A., *Spatial Tessellations*, (Concepts and Applications of Voronoi Diagrams), John Wiley & Sons , (2000).

[18] Kopka. H., *A Guide to L^AT_EX₂ ϵ* , (Document Preparation for Beginners and Advanced Users), Addison Wesley, (1995).

Artículos de Investigación

En The Annals of Applied Probability:

[19] Gravner, J., *Multitype threshold growth: convergence to Poisson-Voronoi Tessellations*, (1997), Vol. 7, No. 3, Págs. 615-647.

[20] Månsson, M., *Poisson approximation in connection with clustering of random points*. (1999), Vol. 9, No. 2, Págs. 465-492.

En Journal of Applied Probability:

[21] Gastwirth, J., *On a telephone traffic system with several kinds of service distributions*, (1964), Vol. 1, No. 1, Págs. 77-84.

[22] Rényi, A., *On two mathematical models of the traffic on a divided highway*, (1964), Vol. 1, No. 2, Págs. 311-320.

[23] Lewis, P., *Implications of a failure model for the use and maintenance of computers*, (1964), Vol. 1, No. 2, Págs. 347-368.

[24] Wong, T., *Preservation of multivariate stochastic orders under multivariate Poisson shock models*, (1997), Vol. 34, No. 4, Págs. 1009-1020.

[25] Baxter. L., *Dynamical systems defined on point processes*, (1998). Vol. 35, No. 3, Págs. 403-414.

[26] Lund. R., *Prediction of shot noise*. (1999), Vol. 36, No. 2, Págs. 374-388.

[27] Zachary, S., *Loss networks and markov random fields*, (1999), Vol. 36, No. 2, Págs. 403-414.

En SIAM, Theory of Probability and its Applications: