# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# La Teoría de Números y la Teoría de Grupos en el estudio de escalas musicales microtonales

T E S I S

Que para obtener el título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

**JESUS DAVID GOMEZ TELLEZ**

Director de Tesis: Dr. Emilio Lluis Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

México, D. F. 1999

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# La Teoría de Números y la Teoría de Grupos en el estudio de escalas musicales microtonales

T E S I S

Que para obtener el título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

JESUS DAVID GOMEZ TELLEZ



Director de Tesis: Dr. Emilio Lluis Puebla

Codirectora de Tesis: M. en C. Mariana Montiel Hernández

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

México, D. F.



1999

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**
**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la**
**Facultad de Ciencias**
**Presente**

**Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:**

La Teoría de Números y la Teoría de Grupos
en el estudio de escalas musicales microtonales

realizado por Jesús David Gómez Téllez

con número de cuenta 9561338-9, pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis
Propietario Dr. Emilio Lluis Puebla — Emilio Lluis Puebla

Propietario Dr. Rodolfo San Agustín Chi

Propietario Dra. María de Lourdes Palacios Fabila — M. de Lourdes Palacios F.

Suplente Dr. Pablo Padilla Longoria — Pablo Padilla L.

Suplente M. en C. Mariana Montiel Hernández

**Consejo Departamental de** Matemáticas
Coordinadora de Licenciatura
Maestra María del Pilar Alonso Reyes

A ti, mamá, con profunda gratitud por el amor y el apoyo incondicional que durante toda mi vida he recibido de ti.

A ti, papá, con agradecimiento por el apoyo que me has brindado y la confianza que me has tenido.

A mis hermanos: José Antonio, Rafael, Ana Isabel, Angeles y Clara, que siempre me han otorgado su amistad y confianza.

También para ti, Vicky, que has sido mi compañera y amiga, y que fuiste para mí un gran apoyo durante nuestros estudios.

A todos los maestros que he tenido en mi vida. Todos ellos han dejado algo bueno en mí.

A mis compañeros de la UNAM, quienes -de una u otra manera- luchan por un México más justo y digno.

*Sin el apoyo de todos ustedes, jamás habría alcanzado este objetivo.* ¡Gracias!

## AGRADECIMIENTOS

Es para mí un agradable deber expresar mi agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. Emilio Lluis Puebla, por su desinteresado apoyo y orientación, elementos que probaron ser indispensables para que este trabajo llegase a buen término.

También agradezco a mi codirectora de tesis, la M. en C. Mariana Montiel Hernández, por sus numerosos comentarios y sugerencias, hechos con gran interés y conocimiento del tema.

A su vez, los doctores Lourdes Palacios, Rodolfo San Agustín y Pablo Padilla ayudaron a enriquecer la tesis en forma y contenido. Les agradezco el interés y el tiempo que me dedicaron.

La Act. Virginia Aceves me auxilió en ciertos pequeños grandes detalles de cómputo. Sin su ayuda, difícilmente habría yo concluido este trabajo en el tiempo preciso. ¡Gracias!

Por supuesto, todo error o imprecisión es de mi exclusiva responsabilidad.

Finalmente, debo hacer notar que durante parte del período en que elaboré esta tesis, recibí apoyo financiero por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), dentro de su Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación, debido a que gentilmente el Dr. Lluis me incluyó (de diciembre de 1998 a septiembre de 1999) como participante en el Proyecto 27552-E, que él dirige.

*Al final no nos necesitan más los que temprano se alejaron;*
*uno se desacostumbra suavemente de lo terrestre como se emancipa*
*en forma ligera de los pechos de la madre. Pero nosotros que*
*necesitamos tan grandes secretos, para quienes nace, tan a menudo,*
*de la tristeza el feliz progreso-: ¿Podríamos existir sin ellos?*
*¿Es inútil la leyenda de cómo, una vez, en la lamentación por Linos*
*la primera y osada música penetró la seca rigidez,*
*para que, por vez primera, en el espantado vacío, al que un joven casi divino*
*abandonara para siempre repentinamente, quedara el vacío en aquella*
*vibración que ahora nos arrebata, consuela y ayuda?*

Rainer Maria Rilke
Las Elegías de Duino

## CONTENIDO

## Introducción

Parece ser que Ferruccio Bussoni -el gran pianista, compositor y visionario italiano- fue el primer músico occidental que sugirió, en 1911, el empleo de escalas microtonales, en una época en la que Arnold Schönberg recién comenzaba su revolución dodecafónica. Después, a lo largo del siglo que termina, se hicieron varios esfuerzos en este sentido, entre los cuales tiene un lugar muy destacado el sistema del "sonido 13", del célebre compositor mexicano Julián Carrillo. Desafortunadamente, el sistema del músico mexicano ha ido quedando olvidado.

De esta manera, el concepto de escalas microtonales no le resulta ya tan extraño a una persona con mediana cultura musical. Sin embargo, la combinación de las palabras *diatónica* y *microtonal* sí puede sonar muy rara, y hasta contradictoria. ¿Acaso lo diatónico no se refiere única y exclusivamente a la escala occidental de siete sonidos, mientras que lo microtonal se refiere a la división de la octava en intervalos más finos, resultando sonidos que *en nada* se parecen a los intervalos diatónicos? Bien, la respuesta al acertijo la encontraremos al añadir a la combinación otra palabra: *Matemáticas.*

En este trabajo estudiaremos la escala mayor diatónica, caracterizándola como un conjunto de 7 notas (la escala mayor) contenido en otro de 12 notas (la escala cromática), y que cumple con ciertas propiedades; después intentaremos *generalizar* dichas propiedades, para averiguar si existe alguna o algunas escalas microtonales que las presenten también. Obviamente, tales propiedades deberán ser independientes del número de notas que contenga la escala.

Las escalas microtonales que estudiaremos serán de la siguiente forma: una división de la octava en $c$ partes iguales ($c > 12$, para mayor interés), a la cual llamaremos escala cromática (generalizada). De las $c$ notas resultantes, tomaremos un subconjunto de $d$ notas ($d \leq c$), las cuales forman una escala inmersa en la escala cromática de $c$ notas. Si esta pareja de escalas cumple con las propiedades que propondremos como específicamente diatónicas, entonces llamaremos escala diatónica (generalizada) al conjunto de $d$ notas (con su correspondiente escala .cromática), en virtud de las similitudes que -esperamos- tendrá dicha escala con la usual escala mayor inmersa en la escala cromática de 12 notas.

Al decir que dividiremos la octava en $c$ partes iguales, en realidad queremos decir que los intervalos resultantes son *logarítmicamente iguales*, en el siguiente sentido: es sabido que al comparar el número de vibraciones por segundo de una misma nota, por decir La, que es repetida a la distancia de una octava superior, resulta que tal frecuencia es duplicada. Ahora, el objetivo es que al dividir la octava en $c$ intervalos, la razón entre las frecuencias de dos notas consecutivas sea constante. Si le llamamos $p$ a tal razón, debemos tener que $p^c = 2$, o $p = 2^{\frac{1}{c}}$. *Si ahora tomamos los logaritmos -en base 2- de las frecuencias, obtenemos que la diferencia* entre los logaritmos de las frecuencias de dos notas consecutivas cualesquiera es $\frac{1}{c}$.

Otra forma de medir intervalos es por *céntimos*. Un céntimo es la centésima parte del semitono temperado, por lo que la octava mide en total 1200 céntimos. Así, si la octava es *dividida en $c$ intervalos iguales, entonces cada uno de estos intervalos mide* $\frac{1200}{c}$ céntimos.

Ahora bien, ¿cuál es el papel de la Matemática en este proceso? Pues sucede que la Matemática es la ciencia de la abstracción y la generalidad por excelencia. Ciertamente, esta ciencia ha alcanzado niveles asombrosos de abstracción. Pero la abstracción en Matemáticas *no es un fin por sí misma. En Matemáticas se abstraen las propiedades fundamentales* de un objeto o fenómeno para poder llegar a resultados y teorías *generales* que abarquen muchos casos particulares. Entre más abstracta una teoría, más general *puede* resultar (si es que está basada en el estudio de fenómenos observados). Estaría uno tentado a decir que la Matemática consiste *en abstraer y generalizar.*

Así, por muy extraño que pueda parecer el concepto de una escala diatónica microtonal, lo cierto es que en matemáticas está uno acostumbrado a generalizar conceptos que, después de la transformación, poca similitud tienen con el significado que originalmente les da la intuición común.

Por ejemplo, el concepto de *espacio* parte originalmente del espacio concreto, tridimensional, en que se desarrolla nuestra existencia material y la de los objetos que vemos y tocamos. En Matemáticas, se comienza por extender este concepto a espacios de 4, 5, o más dimensiones, para continuar después *con espacios de cualquier número de dimensiones*, hasta llegar a espacios de dimensión infinita. Yendo más allá, se puede hablar de *espacios de medida* o *espacios topológicos*, a los que no se puede asignar una dimensión en general, y que pueden llegar a ser objetos tan "extraños" que -para la intuición normal- difícilmente tendrán algo en común con el modesto espacio de tres *dimensiones que habitamos.*

De manera análoga, generalizaremos conceptos que en su origen se refieren solamente a la división por igual temperamento de la octava en doce partes. Ya se mencionó que llamaremos *escala diatónica microtonal* a la escala que cumpla con ciertas propiedades características de la escala mayor usual, y también hablaremos de su correspondiente *escala cromática*. En tal escala, llamaremos *semitono generalizado* al intervalo entre dos notas cromáticas consecutivas, y al intervalo formado por dos notas consecutivas de la escala diatónica generalizada, le llamaremos una *segunda generalizada*. Más aún, hablaremos de intervalos diatónicos que jugarán, en las nuevas escalas, el importante papel de las quintas de la escala mayor, razón por la cual tales intervalos serán llamados *quintas generalizadas*. Hablaremos también de *terceras generalizadas*, y con ellas, de acordes, etc.

Ante este panorama, ¿qué mejor apoyo en nuestro intento de generalizar el concepto de *escala diatónica*, que el de las ciencias matemáticas? Así pues, uno de los objetivos de este trabajo, será demostrar que el método matemático de observar, abstraer y generalizar, puede ser aplicado con cierto éxito a algunos aspectos de la Teoría Musical.

Desde luego que las propiedades que manejaremos como específicamente diatónicas, deberán ser tales que sea posible expresarlas en términos de índole matemática. Esto puede ser resuelto.

Por otra parte, surge la pregunta de qué tan relevantes, musicalmente, son tales propiedades de la escala diatónica. Es esta una cuestión musicólogica y artística que cae más allá (y por mucho) de los alcances de este trabajo. A un nivel práctico, se podría intentar componer con los medios aquí descritos, para determinar si los resultado que obtenemos en este trabajo tienen algún interés musical. También esto cae fuera de las posibilidades de quien esto escribe, que no es compositor.

En la primera parte se presenta un primer enfoque, escogiendo ciertas propiedades de la escala mayor usual, para ser generalizadas a escalas microtonales. Aunque estas propiedades -al parecer- no tienen mucha relevancia musical, desde el punto de vista de la teoría clásica, resultará que son equivalentes a la existencia de un *círculo de quintas generalizado*, lo cual tiene una importancia musical evidente. Como el título lo indica, en esta parte se hace uso de la Teoría de Números.

En el primer capítulo se analiza el caso de la escala mayor, para -en el segundo capítulo- generalizar a escalas microtonales los resultados obtenidos. Aquí, la aportación original del autor de la presente tesis es el Teorema 28 con su consecuencia, el Corolario 29, y la observación que sigue a éste. También es aportada la sección de Conclusiones, 2.5, incluyendo el ejemplo de la subsección 2.5.1. El principal resultado que se obtiene es la construcción de escalas diatónicas microtonales, dotadas de un círculo de quintas generalizado.

La segunda parte presenta otro enfoque, centrado en la Teoría de Grupos, para estudiar escalas. Aquí son otras las propiedades de la escala mayor que se destacan, si bien existe una conexión entre las partes I y II (de esto se habla en el Apéndice A). En esta ocasión, las propiedades estudiadas tienen una importancia musical más evidente.

De manera análoga a la Parte I, en el capítulo 3 se analiza la escala mayor, para generalizar los conceptos en el capítulo 4. En esta parte es más difícil delimitar las aportaciones, pues se incluyen muchos comentarios y observaciones. La sección 4.2 es original del autor de la presente tesis, así como la segunda mitad de la sección 4.4, donde se analiza la división de la octava en 20 partes: es original la observación de que el modo mayor debe ser el que comienza en la nota 0, y el desarrollo, a partir de allí, de la escala diatónica, con su estructura armónica (acordes) y su sistema de tonalidades, relacionadas entre sí por el *círculo de séptimas* (quintas generalizadas).

En la tercera parte se desarrolla una teoría de la modulación, la cual, además, arroja luz sobre ciertas dificultades que no fueron resueltas en la segunda parte. El capítulo 5 construye un modelo de modulación para la escala mayor, modelo que en el capítulo 6 (el cual es enteramente original) es adaptado para la escala que fue desarrollada en la sección 4.4. Se proporcionan tablas con información completa de cómo modular a la mayoría de los grados de dicha escala.

Por último, en el Apéndice A se dan las pruebas de ciertos resultados, las cuales no fueron incluidas en el cuerpo del texto para no interrumpir la fluidez de la lectura. También este Apéndice es enteramente original, así como, en general, todas las notas de pie de página.

# Part I

# La Teoría de Números en la construcción de escalas diatónicas microtonales

En esta primera parte estudiaremos el artículo de John Clough y Gerald Myerson *Variety and Multiplicity in Diatonic Systems* (La Variedad y la Multiplicidad en los Sistemas Diatónicos). Los conceptos que estudiaremos, nos proporcionarán el primero de los puntos de vista que adoptaremos para desarrollar este trabajo.

Es posible formular dos maneras de clasificar los acordes de la escala mayor, dependiendo del "universo" de notas a partir del cual estamos formando el acorde. Si nuestro conjunto de referencia es la escala cromática completa, es una clasificación *específica*; si tal conjunto de referencia se restringe a la escala diatónica, se trata de una clasificación *genérica*.

Como ejemplo, consideremos al acorde $\{B, D, F\}$. Desde el punto de vista diatónico (clasificación genérica), decimos que se trata de una tríada, un acorde por terceras (sus notas están separadas por intervalos de tercera), por lo que pertenece al *género diatónico* llamado "tríada". En otras palabras, dicho género contiene a todo acorde formado por tres notas, las cuales estén separadas por intervalos diatónicos de tercera, ya sea un acorde mayor, menor, o disminuido. Por otra parte, desde el punto de vista cromático (clasificación específica), las notas de $\{B, D, F\}$ están separadas por dos terceras menores, por lo que pertenece a la *especie cromática* llamada "tríada disminuida" (de hecho, este acorde es el único elemento de tal especie, si nos restringimos a la escala de do mayor); esta especie es, por supuesto, un subconjunto del género *tríada*. Los otros subconjuntos de este género son las especies "tríada mayor" y "tríada menor".

Otro ejemplo: la clase que incluye a $\{C, D, E\}$, $\{F, G, A\}$ y $\{G, A, B\}$ (pero no a $\{D, E, F\}$) es una especie (dos tonos enteros consecutivos); pero la clase que incluye a cualquier conjunto de tres notas consecutivas en la escala mayor, es el género al que pertenecen los cuatro conjuntos mencionados, entre otros.

Dicho de otra forma, la clasificación genérica constituye una partición del conjunto potencia de la escala diatónica, mientras que la clasificación específica es otra partición en especies cromáticas, la cual refina a la partición en géneros.

Demostraremos que -bajo una apropiada relación de equivalencia- existen conexiones fundamentales entre ambas clasificaciones (genérica y específica), conexiones que se aplican tanto a líneas melódicas como a acordes. Explicaremos tales relaciones, mostrando que la usual escala diatónica de siete notas, inmersa en la escala cromática de doce notas, es un caso particular dentro de un tipo especial de inmersiones teóricas, las cuales comparten ciertas propiedades generales, propiedades que se manifiestan en las mencionadas relaciones entre acordes y entre líneas melódicas.

En el primer capítulo, y *de una manera heurística*, mostraremos las siguientes relaciones para el caso de la escala diatónica usual, la escala mayor (una inmersión de "siete en doce"):

1. **La Cardinalidad es igual a la Variedad (CV)**. Para acordes con cardinalidad de 1 a 6, cada género contiene un número de especies igual a la cardinalidad del acorde. Aquí la palabra *variedad* es usada como sinónimo de *diversidad*. Es decir, la cardinalidad de un acorde es igual a la diversidad de especies contenidas en cada género de dicho acorde.

2. **La Estructura determina la Multiplicidad (EM)**. Por multiplicidad nos referimos al número de elementos que contiene cada especie del acorde. Para acordes con cardinalidad de 1 a 6, y dentro de un género específico, el número de acordes que contiene cada especie es directamente inferible de la estructura genérica del acorde.

En el segundo capítulo, procediendo con mayor formalidad , desarrollaremos los siguientes resultados para escalas diatónicas inmersas en universos cromáticos de tamaño arbitrario:

3. **La Propiedad de Myhill**. Diremos que una escala tiene la propiedad de Myhill si cada intervalo diatónico (es decir, cada género de cardinalidad dos) aparece exactamente en dos tamaños cromáticos (el género contiene dos especies). Tal escala exhibirá CV y EM para líneas melódicas , y también -bajo ciertas condiciones- para acordes. La demostración de este hecho involucra el concepto de un "círculo de quintas generalizado".

4. **Existencia y Unicidad**. Dados $c$ y $d$ coprimos (esto es, $(c, d) = 1$), donde $c$ es la cardinalidad de la escala "cromática" y $d$ es la cardinalidad de la escala "diatónica", existe una escala con la propiedad de Myhill, y tal escala es única (bajo ciertas condiciones).

5. **Construcción**. Existen una fórmula y un algoritmo sencillos para la construcción de tal escala.

# Chapter 1

# La escala mayor como modelo de escalas diatónicas

## 1.1 Clasificación de acordes: géneros y especies. Notación.

Para nuestro estudio, requeriremos clasificar los acordes de la escala mayor desde los puntos de vista diatónico y cromático, o según la terminología que hemos venido usando, clasificación genérica y clasificación específica. Conviene hacer algunas precisiones al respecto:

Considérese el conjunto de los sonidos representados en el teclado de un piano. Estamos hablando de más de 80 sonidos distintos. Ahora, la definición de cierta relación de equivalencia inducirá una partición sobre este conjunto, de la siguiente manera: consideraremos como equivalentes a todos los sonidos del mismo nombre -por ejemplo, a todos los sonidos 'do', o a todos los sonidos 'la bemol'- sin importar la octava en que se encuentren. A cada una de las clases de equivalencia generadas de esta manera, le llamaremos *nota*, y al conjunto de tales notas (que resultan ser doce), le llamaremos *escala cromática*. Esta escala cromática será nuestro universo de referencia para la clasificación específica de los acordes. Si de la escala cromática tomamos el subconjunto de notas representadas por las teclas blancas del piano, obtendremos la llamada *escala diatónica*. Para evitar ambigüedad, llamaremos *notas diatónicas* a los elementos de la escala diatónica, y *notas cromáticas* a los elementos de la escala cromática; pero la distinción será obvia casi siempre, ya sea que estemos hablando de la escala cromática o de la escala diatónica.

A continuación, considérese al conjunto de los intervalos existentes entre las notas de la escala cromática, a los cuales llamaremos *intervalos cromáticos.* Tales intervalos son, por ejemplo, la segunda menor, representada por una distancia de 1 nota cromática; la segunda mayor, representada por una distancia de 2; la tercera menor, una distancia de 3, etc. Utilizaremos estos intervalos en la clasificación específica (cromática) de los acordes. Pero si en el conjunto de tales intervalos cromáticos introducimos una relación de "equivalencia diatónica", obtendremos los que llamaremos *intervalos diatónicos.* Por ejemplo, incluiremos a las segundas menores y mayores en la denominación general de "segundas diatónicas", que representan una distancia de 1 nota diatónica, pero pueden corresponder a una longitud de una o dos notas cromáticas. Por supuesto, estos intervalos diatónicos son los mismos que existen entre las notas de la escala diatónica, y son los que utilizaremos en la clasificación genérica (diatónica) de los acordes. En ambos niveles de clasificación, se reconoce también una equivalencia bajo transposición; en términos musicales esto significa -por ejemplo- que el acorde de subdominante tiene siempre la misma clasificación, genérica y específica, sin importar si estamos hablando de la escala de do mayor o de la escala de la bemol mayor (o de cualquier otra escala mayor, por supuesto).

Representaremos la estructura específica y genérica de los acordes en notación interválica normal, tal como la define Clough en un artículo anterior.[1]

**Example 1** *Considérese $\{C, E, G\}$, tomado como subconjunto de cualquier escala diatónica que contenga a esas tres notas. Su estructura genérica se denota (223), lo cual indica las longitudes diatónicas de los intervalos ascendentes C-E, E-G y G-C. La estructura específica de este acorde está dada por (435), notación que muestra las longitudes cromáticas de los mismos intervalos.*

Formas rotadas no se consideran como distintas, de manera que (223), (232) y (322) son representaciones equivalentes,[2] de entre las cuales (223) es llamada la forma normal, en virtud de que la distancia mayor ocupa la última posición en la sucesión de intervalos. Los enteros '10','11' y '12' van precedidos por espacios en blanco, como en (2 10), para distinguir "diez" de "uno, cero".

[1] John Clough, "Aspects of Diatonic Sets", *Journal of Music Theory* 23 (1979), pp. 46-47.

[2] Tales formas rotadas, para el caso de acordes por terceras, corresponden a lo que en música se conoce como las distintas *inversiones* de un mismo acorde. Por ejemplo, mientras que (223) correspondería a C-E-G, (232) correspondería a E-G-C, y (322) a G-C-E.

Cuadro 1 CV

| 1 género | 2 especie | 3 acorde | 4 acorde | 5 especie | 6 género |
|---|---|---|---|---|---|
| | | B | | | |
| | | E | FGABCD | (222123) | |
| | | A | BCDEFG | (122124) | |
| (7) | (12) | D´ | EFGABC | (122214) | |
| | | G | ABCDEF | (212214) | (111112) |
| | | C | DEFGAB | (212223) | |
| | | F | GABCDE | | |
| | | | CDEFGA | (221223) | |
| | | BC | | | |
| | (111) | EF | GABCD | | |
| | | AB | CDEFG | (22125) | |
| (16) | | DE | FGABC | (22215) | (11113) |
| | (210) | GA | BCDEF | (12216) | |
| | | CD | EFGAB | (12225) | |
| | | FG | ABCDE | | |
| | | | DEFGA | (21225) | |
| | | BD | | | |
| | | EG | ABCDF | (21234) | |
| | (39) | AC | BDEFG | (32124) | |
| (25) | | DF | EGABC | | |
| | | GB | ACDEF | (32214) | (11122) |
| | (48) | CE | FGABD | (22233) | |
| | | FA | BCDEG | | |
| | | | EFGAC | (12234) | |
| | | BE | | | |
| | | EA | BCDFG | (12324) | |
| | (57) | AD | EFGBC | (12414) | |
| (34) | | DG | ABCEF | (21414) | |
| | | GC | DEFAB | (21423) | (11212) |
| | | CF | GABDE | | |
| | (66) | FB | CDEGA | (22323) | |
| | | | FGACD | | |

Cuadro 1 (continuación)

| 1 género | 2 especie | 3 acorde | 4 acorde | 5 especie | 6 género |
|---|---|---|---|---|---|
| | | BCD | | | |
| | (129) | EFG | ABCD | | |
| | | ABC | DEFG | (2127) | |
| (115) | (219) | DEF | GABC | | |
| | | GAB | CDEF | (2217) | (1114) |
| | (228) | CDE | FGAB | (2226) | |
| | | FGA | BCDE | | |
| | | | EFGA | (1227) | |
| | | BCE | | | |
| | (147) | EFA | GBCD | | |
| | | ABD | CEFG | (4125) | |
| (124) | | DEG | FABC | (4215) | |
| | (237) | GAC | BDEF | (3216) | (2113) |
| | | CDF | EGAB | | |
| | (246) | FGB | ACDE | (3225) | |
| | | | DFGA | | |
| | | BDE | | | |
| | (327) | EGA | BCDF | (1236) | |
| | | ACD | EFGB | (1245) | |
| (214) | | DFG | ABCE | | |
| | | GBC | DEFA | (2145) | |
| | (417) | CEF | GABD | | (1123) |
| | (426) | FAB | CDEG | (2235) | |
| | | | FGAC | | |
| | | | ABDE | | |
| | (156) | BCF | DEGA | | |
| | (165) | EFB | GACD | (2325) | |
| | | ABE | CDFG | | (1213) |
| (133) | | DEA | FGBC | (2415) | |
| | (255) | GAD | BCEF | (1416) | |
| | | CDG | EFAB | (1425) | |
| | | FGC | | | |
| | | | BDEG | | |
| | (336) | BDF | EGAC | (3234) | |
| | | EGB | ACDF | | |
| | (345) | ACE | BDFG | (3324) | (1222) |
| (223) | | DFA | BCEG | | |
| | | GBD | EFAC | (1434) | |
| | (435) | CEG | ABDF | (2334) | |
| | | FAC | | | |

En el Cuadro 1 han sido ordenados -en clases de equivalencia- todos los subconjuntos propios, no vacíos, de un conjunto diatónico en particular ( la escala de do mayor). Los 126 conjuntos de notas aparecen enlistados en la columnas 3 y 4; la columna 3 contiene a los conjuntos de cardinalidad 1, 2 y 3, mientras que la columna 4 contiene a los conjuntos de cardinalidad 4, 5 y 6. (Aquí, como en todo este trabajo, denotamos por yuxtaposición a los conjuntos no ordenados de notas, como en "CDE", en vez de escribirlos entre llaves.) Los conjuntos de notas de la columna 3 aparecen agrupados por género (columna 1) y por especie (columna 2). Los conjuntos de notas de la columna 4 aparecen agrupados de manera similar; sus géneros y especies se muestran en las columnas 6 y 5, respectivamente. En total, hay 18 géneros y 63 especies. En las columnas 3 y 4, los corchetes agrupan a acordes pertenecientes a una misma especie; donde no hay corchetes, un sólo acorde representa a una especie. En la mayoría de los casos, un conjunto que aparece en la columna 3, aparece horizontalmente alineado con su complemento (como subconjunto de la escala diatónica), el cual aparece en la columna 4, y viceversa. Sin embargo, tal alineación no pudo ser mantenida de manera consistente, pues en muchos casos, acordes de una misma especie tienen complementos pertenecientes a especies distintas.

## 1.2 La cardinalidad es igual a la variedad (CV).

Como se mencionó, aquí variedad debe ser entendido como sinónimo de diversidad. Esto es, la afirmación significa: "la cardinalidad de un acorde es igual a la diversidad (al número) de especies contenidas en cada género de dicho acorde".

En la escala mayor diatónica, cada intervalo (segunda, tercera, etc.) aparece en dos tamaños cromáticos; existen tres tipos de tríadas; y el tetracorde diatónico (cuatro notas consecutivas) aparece exactamente en cuatro especies, representadas por CDEF, DEFG, EFGA y FGAB. De manera que, para acordes de dos notas, cada género consta de dos especies; y dos conocidos géneros de acordes de 3 y 4 notas, se presentan en tres y cuatro especies, respectivamente. Bien, pues resulta que para acordes con k notas -donde k puede tomar *cualquier* valor de 1 a 6- ¡cada género diatónico contiene *exactamente* k especies cromáticas! Esto se puede verificar muy fácilmente en el Cuadro 1.

## 1.3 La estructura determina la multiplicidad (EM).

Hemos realizado la clasificación de los acordes de la escala mayor de acuerdo a su estructura interválica, es decir, midiendo la distancia -diatónica y cromática- entre sus notas. Al hacer esta medición de distancias, nos hemos basado en la adopción -más o menos obvia- del intervalo de segunda como unidad (el intervalo existente entre dos notas adyacentes de la escala), y esto equivale a decir que las distancias las hemos medido sobre la escala ascendente. Esta suposición subyace al procedimiento que produjo el Cuadro 1. Sin embargo, es posible adoptar otro intervalo como unidad, y aun así, ordenar los acordes en exactamente las mismas clases. Nos referimos al intervalo de quinta, y al tomar como unidad a este intervalo, estaremos midiendo las distancias sobre el *círculo de quintas* (también se puede usar la cuarta, dando como resultado los mismos géneros y especies). Un ejemplo ayudará a entender mejor este nuevo planteamiento.

**Example 2** *La estructura específica (cromática) de CEG es (138): 1 quinta de C a G, 3 quintas de G a E, y 8 quintas de E a C. La estructura genérica (diatónica) de CEG es (133), pues en este caso, se cuentan 3 quintas de E a C.*

El Cuadro 2 ordena de manera distinta los datos del Cuadro 1, pero ambos producen la misma división en géneros y especies. No se muestran los acordes individuales, pero la columna 4 muestra el número de acordes contenidos en cada especie. Lo nuevo -con respecto al Cuadro 1- es la estructura interválica de los géneros, medida en quintas de la manera como se describe en el párrafo anterior, la cual se muestra en la columna 2; la columna 1 muestra tal estructura medida en segundas. De acuerdo con la afirmación hecha en el sentido de que ambos procedimientos de medición producen idéntica división en géneros y especies, se puede apreciar una correspondencia biyectiva entre las columnas 1 y 2.

Ya se mencionó que por multiplicidad de una especie entendemos el número de elementos que tal especie contiene. En el Cuadro 2 podemos observar que la estructura en quintas de cada género (columna 2) es una lista de números idéntica a la lista de multiplicidades -convenientemente ordenadas- de las distintas especies contenidas en ese mismo género (columna 4). De esta manera, "la estructura -de un género- determina la multiplicidad -de las especies pertenecientes a ese género-". La razón de ser de este notable hecho, la estudiaremos más adelante.

Cuadro 2. Estructura y Multiplicidad de los Acordes Diatónicos

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|
| g é n | e r o | e s p e c i e | no. de |
| (por segundas) | (por quintas) | (por semitonos) | conjuntos |
| (7) | (7) | ( 12) | 7 |
| (16) | (25) | (1 11) | 2 |
| | | (2 10) | 5 |
| (25) | (34) | (48) | 3 |
| | | (39) | 4 |
| (34) | (16) | (66) | 1 |
| | | (57) | 6 |
| (115) | (223) | (!29) | 2 |
| | | (219) | 2 |
| | | (228) | 3 |
| (124) | (124) | (246) | 1 |
| | | (147) | 2 |
| | | (237) | 4 |
| (214) | (214) | (417) | 2 |
| | | (426) | 1 |
| | | (327) | 4 |
| (133) | (115) | (156) | 1 |
| | | (165) | 1 |
| | | (255) | 5 |
| (223) | (133) | (336) | 1 |
| | | (345) | 3 |
| | | (435) | 3 |

Cuadro 2. (continúa)

| 1. género (segundas) | 2. género (quintas) | 3. especie (semitonos) | 4. no. de conjuntos |
|---|---|---|---|
| (1114) | (1222) | (2226) | 1 |
| | | (1227) | 2 |
| | | (2127) | 2 |
| | | (2217) | 2 |
| (2113) | (2113) | (4125) | 2 |
| | | (4215) | 1 |
| | | (3216) | 1 |
| | | (3225) | 3 |
| (1123) | (1123) | (1236) | 1 |
| | | (1245) | 1 |
| | | (2145) | 2 |
| | | (2235) | 3 |
| (1213) | (1114) | (2415) | 1 |
| | | 1416) | 1 |
| | | (1425) | 1 |
| | | (2325) | 4 |
| (1222) | (1213) | (3324) | 1 |
| | | (1434) | 2 |
| | | (2334) | 1 |
| | | (3234) | 3 |

Cuadro 2. (termina)

| 1. género (segundas) | 2. (quintas) | 3. especie (semitonos) | 4. no. de conjuntos |
|---|---|---|---|
| (11113) | (11122) | (22215) | 1 |
| | | (12216) | 1 |
| | | (12225) | 1 |
| | | (21225) | 2 |
| | | (22125) | 2 |
| (11122) | (11212) | (21234) | 1 |
| | | (32124) | 1 |
| | | (32214) | 2 |
| | | 22233) | 1 |
| | | (12234) | 2 |
| (11212) | (11113) | (12324) | 1 |
| | | (12414) | 1 |
| | | (21414) | 1 |
| | | (21423) | 1 |
| | | (22323) | 3 |
| (111112) | (111112) | (222123) | 1 |
| | | (122124) | 1 |
| | | (122214) | 1 |
| | | (212214) | 1 |
| | | (212223) | 1 |
| | | (221223) | 2 |

## 1.4 Líneas melódicas diatónicas.

Ahora, consideraremos líneas diatónicas de notas, desde la perspectiva de las propiedades que acabamos de describir para los acordes.

**Definition 3** *Definimos una línea como una sucesión finita de notas, las cuales pueden estar repetidas. Una línea diatónica será una línea cuyas notas pertenecen a una escala diatónica.*

A partir de un conjunto cualquiera de notas, se puede generar un número infinito de líneas. Diremos que una línea se colapsa a un acorde, si tal línea contiene *sólo* notas de ese acorde, y a *todas* las notas de ese acorde.

**Example 4** *Cada una de las siguientes líneas se colapsa a CDE:*

C - D - E

D - C - E

E - E - C - E - D - D - C

Puesto que la transposición diatónica preserva (por definición) las longitudes diatónicas de los intervalos, las siete transposiciones diatónicas de una línea tendrán todas la misma sucesión de intervalos diatónicos dirigidos.

**Example 5** *La sucesión de intervalos diatónicos de la línea G - B - C - G - G, es 2-1-4-6, y es la misma para todas sus transposiciones diatónicas, como se puede apreciar en el Cuadro 3.*

En cuanto al patrón específico de intervalos cromáticos dirigidos, uno esperaría, de manera intuitiva, que las especies de una línea deberían corresponder a las especies del acorde al cual se colapsa tal línea; en efecto, así sucede, como queda ilustrado en las dos columnas centrales del Cuadro 3.

*Cuadro 3.* *líneas basadas* en la sucesión 2-1-4-6

| elemento | | especie | | género | |
|---|---|---|---|---|---|
| línea | acorde | de líneas | de acordes | de líneas | de acordes |
| G-B-C-G-F | $\{F, G, B, C\}$ | 4-1-7-10 | (2415) | 2-1-4-6 | (1213) |
| C-E-F-C-B | $\{B, C, E, F\}$ | 4-1-7-11 | (1416) | | |
| F-A-B-F-E | $\{E, F, A, B\}$ | 4-2-6-11 | (1425) | | |
| B-D-E-B-A | $\{A, B, D, E\}$ | 3-2-7-10 | (2325) | | |
| E-G-A-E-D | $\{D, E, G, A\}$ | | | | |
| A-C-D-A-G | $\{G, A, C, D\}$ | | | | |
| D-F-G-D-C | $\{C, D, F, G\}$ | | | | |

De manera que CV se aplica también a líneas diatónicas, en el sentido de que, si definimos la cardinalidad de una línea como la cardinalidad del acorde al cual se colapsa, tal cardinalidad nos indica el número de especies (especies de líneas) que surgen bajo transposición diatónica de la línea en cuestión. También EM se cumple para líneas, si nos basamos de nuevo en el acorde correspondiente a una línea dada. La estructura genérica de tal acorde -medida en quintas- nos da la *multiplicidad de las distintas* especies de líneas que surgen bajo transposición diatónica de la línea. (Para el ejemplo del Cuadro 3, la estructura del acorde, por quintas, es (1114).)

Ahora bien, dada una sucesión de intervalos específicos, podemos inmediatamente obtener la correspondiente sucesión de intervalos genéricos dirigidos; esto significa que la propiedad de partición se extiende también a líneas. Sin embargo, hay una excepción a lo anterior: si una línea está *compuesta solamente por intervalos de longitud específica 6 (o 6 y 0)*, su clasificación genérica es ambigua. Por supuesto, estamos hablando del conocido e importante caso del tritono, y un ejemplo mostrará claramente la situación: la línea que tiene como intervalos específicos 6-6, corresponde a dos posibles estructuras genéricas, que son 3-4 y 4-3. Esta ambigüedad está latente aun en el caso de acordes, como lo muestra el siguiente caso: sabemos que el acorde cuya estructura específica es (66) -dos tritonos- tiene una *estructura genérica* dada por (34); sin embargo, no sabemos cuál 6 corresponde al 3 (la cuarta) ni cuál corresponde al 4 (la quinta). A diferencia de lo que sucede con los acordes, las propiedades CV y EM también se cumplen para líneas de cardinalidad 7. Un ejemplo muy claro de este hecho, lo constituye la existencia de los siete distintos modos diatónicos.

## 1.5 Líneas diatónicas y el círculo de quintas.

En esta sección estudiaremos de una manera más formal los hechos presentados en la sección anterior sobre líneas diatónicas. De hecho, llegaremos a una explicación de la razón de ser de las propiedades CV y EM. Todo esto será desarrollado -por lo pronto- en el marco familiar de la escala mayor, la inmersión diatónica de "siete en doce".

Por lo pronto, consideraremos solamente líneas sin notas repetidas, y es en este sentido restringido, que usaremos el término *línea*; más adelante lo usaremos en el sentido más amplio que permite repeticiones, pero esto no será fuente de confusión, pues los resultados se aplican a ambos casos.

**Definition 6** *Llamamos clase de líneas, o simplemente clase (cuando por el contexto sea claro que se trata de una clase de líneas), a un conjunto de siete líneas que son equivalentes bajo transposición diatónica.*

Como se habrá dado cuenta el lector, la clase de líneas es el término correspondiente a lo que, en el caso de acordes, hemos llamado género. Dentro de una clase de líneas, encontraremos subconjuntos cuyos elementos (líneas) tienen la misma estructura cromática de intervalos; a estos subconjuntos les llamaremos *especies*, y esta vez hay coincidencia de concepto y de terminología con el caso de acordes.

**Example 7** *Considérese la línea C-D-F. A la clase que contiene a esta línea, la denotaremos por $\langle C-D-F \rangle$, de manera que*

$$\langle C-D-F \rangle = \left\{ \begin{array}{c} C-D-F,\ D-E-G,\ E-F-A,\ F-G-B, \\ G-A-C,\ A-B-D,\ B-C-E \end{array} \right\}.$$

*Esta clase contiene tres especies cromáticas:*

$\{C-D-F,\ D-E-G,\ G-A-C,\ A-B-D\}$,

$\{E-F-A,\ B-C-E\}$ *y*

$\{F-G-B\}$.

*Las líneas de la primer especie, tienen todas intervalos de longitudes cromáticas 2 y 3; las de la segunda especie, longitudes 1 y 4; y la única línea perteneciente a la tercer especie, 2 y 4.*

La clase del ejemplo anterior contiene líneas de *tres* notas, y se divide en *tres* especies. Esto no es una mera coincidencia, como lo muestra el siguiente

**Theorem 8** *La cardinalidad es igual a la variedad (CV). Para la escala diatónica usual, y para cualquier línea diatónica de k notas, donde 1≤k≤7, la clase que contiene a dicha línea se divide en exactamente k especies.*

Podría darse una prueba muy poco creativa de este hecho, examinando las 13,699 líneas, agrupándolas en 1,957 (=13,699/7) clases, y contando las especies contenidas en cada clase (en el caso de acordes, podemos reducir estos números a 126 acordes y 18 géneros, como se puede observar en el Cuadro 1, pero debe excluirse k=7). Basándonos en el círculo de quintas, podemos dar una prueba más elegante, la cual nos conducirá a importantes generalizaciones:

**Proof.** En la figura 1 (el círculo de quintas), los números que se encuentran dentro del semicírculo superior representan longitudes diatónicas; todos los demás números representan longitudes cromáticas. Las longitudes se miden en el sentido de las manecillas del reloj (en el sentido contrario, estaríamos midiendo cuartas, en vez de quintas). Como motivación para el argumento que a continuación daremos, considérese de nuevo a la línea C-D-F. Las otras líneas pertenecientes a <C-D-F>, se pueden obtener rotando las tres posiciones iniciales alrededor del semicírculo superior, puesto que las distancias diatónicas en ese semicírculo -quintas- son constantes (ver Figura 2). Las tres especies contenidas en esta clase, surgen de las tres posibles posiciones de la quinta "corta" (B-F) con repecto a los dos intervalos que forman la línea: esta quinta disminuida puede aparecer dentro del segundo intervalo de la línea (como en la Figura 2, a-d), o dentro del primer intervalo de la línea (Figura 2, e y f), o en ninguno de estos (Figura 2, g).

Ahora en general, para cualquier k, 1<k<7, y para cualquier línea de k notas, podemos obtener todas las líneas de la misma clase por el mismo procedimiento anterior: rotando las posiciones correspondientes a las k notas, alrededor del semicírculo superior de la Figura 1. Las distintas especies cromáticas, se distinguirán entre sí por la posición que ocupe la quinta disminuida (B-F) con respecto a los k-1 intervalos que forman la línea; para esto, existen precisamente k distintas posibilidades. Esto demuestra el teorema. ∎

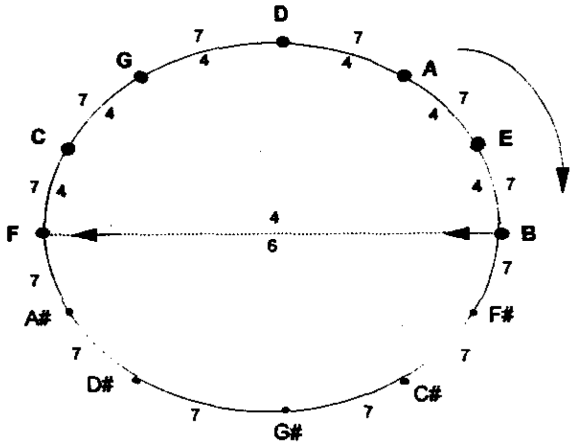



Figura 1 - Círculo de quintas.

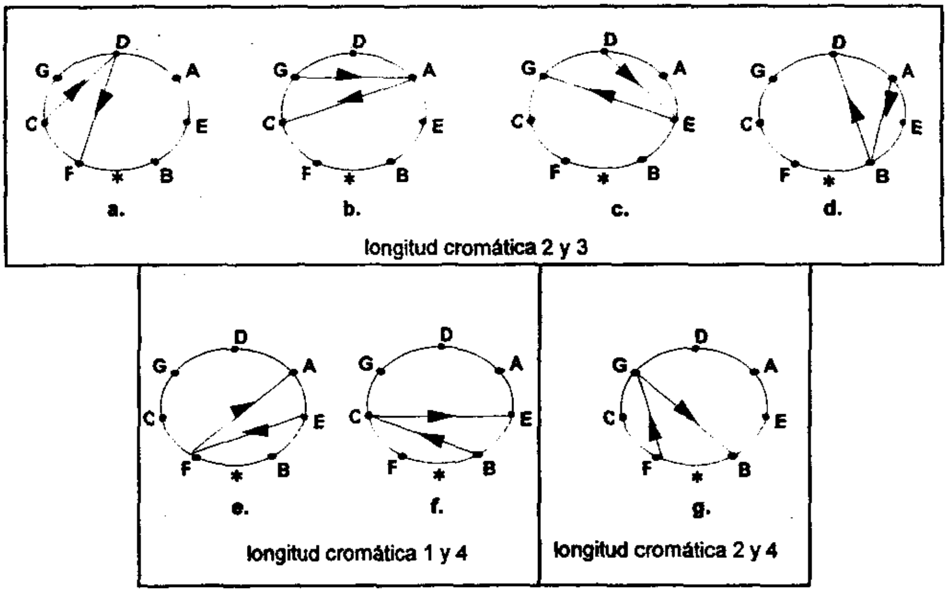



Figura 2 - CV y EM.
La quinta disminuida es indicada por un asterisco.

**Corollary 9** *La estructura determina la multiplicidad (EM). Dada una clase de líneas en la escala diatónica, las multiplicidades de las distintas especies pertenecientes a dicha clase corresponden a las distancias diatónicas -medidas en quintas- existentes entre las notas de la línea.*

**Proof.** De nuevo usaremos a la clase <C-D-F> como motivación para el argumento. Se puede observar en la Figura 2 que si la quinta disminuida se encuentra en el segundo intervalo de la línea, existen cuatro líneas distintas, porque la longitud diatónica de este segundo intervalo es de cuatro quintas. Si la quinta disminuida se encuentra en el primer intervalo, hay dos líneas posibles, porque la longitud diatónica del primer intervalo es de dos quintas. Finalmente, si la quinta disminuida no está incluida en ninguno de los dos intervalos anteriores, entonces hay sólo una posibilidad, porque el intervalo extra que "cierra el ciclo" de la última nota de la línea a la primera, tiene una longitud diatónica de una quinta.

En general, para cualquier línea de k notas, cada uno de los intervalos de la línea en que puede estar ubicada la quinta disminuida (incluyendo al intervalo extra que "cierra el ciclo"), determina un número de líneas igual a la longitud diatónica del intervalo en cuestión, medida en quintas. Así pues, la escala diatónica efectivamente tiene la propiedad EM. ■

# Chapter 2

# Escalas diatónicas generalizadas

En este capítulo desarrollaremos una serie de resultados, los cuales generalizan -a escalas "diatónicas" inmersas en universos cromáticos de tamaño arbitrario- aquellos que hemos obtenido para la escala mayor. De manera análoga al capítulo sobre la escala mayor, los resultados de este capítulo serán obtenidos, en primer lugar, para líneas sin notas repetidas; en seguida, serán permitidas las líneas con repeticiones, para considerar -por último- el caso de los acordes.

## 2.1 El contexto general.

En vez del conjunto usual de doce notas cromáticas, consideraremos un conjunto abstracto -finito- de c notas, al cual llamaremos *escala cromática*. De esta escala cromática, tomaremos un subconjunto de d notas, el cual será nuestra *escala diatónica*. A las notas cromáticas, les llamaremos $C_0$, $C_1$, $C_2$, ... ,$C_{c-1}$, mientras que a las notas diatónicas, las etiquetaremos $D_0$, $D_1$, ... ,$D_{d-1}$. Para cada caso particular, las $C_i$ y las $D_i$ representan elementos del grupo cíclico $Z_c$. Para aclarar esta notación, la aplicaremos al caso de la escala mayor en el siguiente cuadro, donde a la nota DO la etiquetamos como $C_0 = 0$, y proseguimos en orden ascendente. Nótese que, a cada nota, como elemento de la escala cromática, le corresponde un número $C_i$ fijo, pero su notación como elemento $D_j$ de la escala diatónica varía, pues dependiendo de qué escala diatónica se trate, una nota puede ocupar distintas posiciones dentro de tal escala, o ni siquiera pertenecer a ella. Por ejemplo, $D_0$ corresponde siempre a la tónica de la escala en cuestión, etc. En el cuadro, en la columna correspondiente a la escala de DO Mayor, $D_0$ corresponde a la nota DO; pero en la columna de la escala de SOL Mayor, $D_0$ corresponde a la nota SOL.

| Nota | Como elemento de la escala cromática | Como elemento de la escala diatónica de Do Mayor | Como elemento de la escala diatónica de Sol Mayor |
|---|---|---|---|
| DO | $C_0 = 0$ | $D_0 = 0$ | $D_3 = 0$ |
| DO# | $C_1 = 1$ | | |
| RE | $C_2 = 2$ | $D_1 = 2$ | $D_4 = 2$ |
| RE# | $C_3 = 3$ | | |
| MI | $C_4 = 4$ | $D_2 = 4$ | $D_5 = 4$ |
| FA | $C_5 = 5$ | $D_3 = 5$ | |
| FA# | $C_6 = 6$ | | $D_6 = 6$ |
| SOL | $C_7 = 7$ | $D_4 = 7$ | $D_0 = 7$ |
| SOL# | $C_8 = 8$ | | |
| LA | $C_9 = 9$ | $D_5 = 9$ | $D_1 = 9$ |
| LA# | $C_{10} = 10$ | | |
| SI | $C_{11} = 11$ | $D_6 = 11$ | $D_2 = 11$ |

Por otra parte, debe ser claro cómo definir, en este nuevo contexto, los conceptos de intervalo, acorde, línea melódica, longitud cromática y longitud diatónica, género de acordes, especie de acordes, clase de líneas, y especie de líneas.

**Definition 10** *Decimos que una escala tiene la propiedad CV (cardinalidad = variedad) si para cualquier línea de $k$ notas diatónicas, donde $1 \leq k \leq d$ , la clase que contiene a esa línea se divide exactamente en $k$ especies.*

El teorema 8 afirma que la escala mayor usual presenta CV. Ahora, nuestro objetivo será determinar bajo qué condiciones una escala arbitraria presenta CV.

## 2.2 La propiedad de Myhill y el círculo de quintas generalizado.

Como se ha mencionado, en toda esta sección se considerará sólo a líneas sin notas repetidas.

**Definition 11** *Definimos el espectro de un intervalo I, como el conjunto de todas las longitudes cromáticas de los intervalos pertenecientes a* $\langle I\rangle$ *(ver el ejemplo 7). Dado que* $\langle I\rangle$ *es la clase de líneas a la cual pertenece I, la cardinalidad del espectro de I es igual al número de especies contenidas en la clase a la cual pertenece I.*

**Example 12** *Consideremos en la escala de do mayor, un intervalo I particular, digamos C-E. Tal intervalo es una línea con dos notas, perteneciente a la clase de las terceras:*

$\langle C-E\rangle = \{C-E, D-F, E-G, F-A, G-B, A-C, B-D\}$.

*Esta clase comprende dos especies:*

$\{C-E, F-A, G-B\}$ *(terceras mayores), cuyos elementos tienen una longitud cromática de 4 semitonos, y*

$\{D-F, E-G, A-C, B-D\}$ *(terceras menores), cuyos elementos tienen una longitud cromática de 3 semitonos.*

*Por lo tanto, el espectro de C-E es* $\{3,4\}$*, un espectro con dos elementos.*

Si una escala cumple con CV, entonces, en particular, cada intervalo (línea de dos elementos) tiene un espectro con dos elementos. Es originalmente de John Myhill la conjetura de que la afirmación inversa es también cierta.

**Definition 13** *Decimos que una escala presenta la propiedad de Myhill (PM), si todo intervalo tiene un espectro de dos elementos.*

Demostraremos la conjetura de Myhill: PM implica CV. El método que seguiremos, será construir un "círculo de quintas generalizado" para cualquier escala que presente PM. Pero antes de proceder a demostrar este hecho, introduciremos un par de conceptos, los cuales simplificarán el número de escalas que tratará la teoría.

Si una escala presenta PM, en particular el intervalo $D_0$- $D_1$ (el intervalo de "segunda") tiene un espectro de dos elementos.

**Definition 14** *Considérese una escala que presenta PM. Diremos que tal escala es:*

*a) semirreducida, si el intervalo* $D_0$- $D_1$*, tiene un espectro consistente en dos enteros consecutivos.*

*b) reducida, si el espectro del intervalo $D_0$- $D_1$, es el conjunto $\{1,2\}$. Esto significa que entre dos notas diatónicas consecutivas, sólo puede haber una o ninguna nota cromática.*

Evidentemente, una escala reducida es semirreducida.

Dada una escala cualquiera no semirreducida que presenta PM, es posible obtener de ella al menos una escala semirreducida, eliminando notas cromáticas "sobrantes" (de hecho, se puede obtener una escala reducida); tal procedimiento de "eliminación" es ilustrado en la figura 3. Esta escala semirreducida tendrá dos características clave para nosotros: presentará también PM, y presentará CV si y sólo si la escala original presenta CV (no probaremos aquí este hecho, que el lector puede verificar heurísticamente, mediante un ejemplo). *Por esta razón, en lo que resta del capítulo consideraremos solamente escalas semirreducidas.*

**Definition 15** *Decimos que una escala tiene la propiedad de consecutividad (PC), si el espectro de cualquier intervalo consiste sólo de enteros consecutivos.*

**Lemma 16** *Toda escala semirreducida presenta PC.*

**Proof.** Sea h un entero tal que $0 < h < d$ , y considérese el intervalo $D_0$ - $D_h$ . Nótese que la propiedad de ser semirreducida fue definida sólo para escalas que presentan PM, por lo que, en particular, el espectro del intervalo en consideración consta de dos elementos; demostraremos que se trata de dos enteros consecutivos.[1] Dado que estos elementos del espectro son dos enteros distintos, existe un entero i tal que, si hacemos $j = i + h$ , entonces $|D_i - D_j| \neq |D_{i+1} - D_{j+1}|$ , donde los signos de valor absoluto denotan longitud cromática, y los subíndices deben ser leídos (mod d), si es necesario, para que pertenezcan al conjunto $\{0, 1, ..., d-1\}$. Pero entonces

$|D_{i+1} - D_{j+1}|$ - $|D_i - D_j| = |D_j - D_{j+1}|$ - $|D_i - D_{i+1}| = \pm 1$ ,

pues la escala es semirreducida (es decir, el intervalo $D_0$- $D_1$, tiene un espectro consistente en dos enteros consecutivos).

De esta manera, en la sucesión de distancias cromáticas definida de la siguiente manera:

$|D_0 - D_h|$ , $|D_1 - D_{h+1}|$ , . . . , $|D_{d-1} - D_{h-1}|$ ,

no hay dos elementos consecutivos que difieran en más de 1, por lo que los dos elementos del espectro de cualquier intervalo, son enteros consecutivos. ■

[1] Clough y Myerson consideran en su artículo el caso de que el espectro del intervalo contenga un sólo elemento. Como acabamos de ver, tal caso -por definición- no puede darse.

**Lemma 17** *Considérese a los d intervalos de longitud diatónica h, donde 0<h<d. La suma de las longitudes cromáticas de tales intervalos, es ch.*

**Proof.** Por definición, la escala cromática contiene c semitonos. Pensemos en uno cualquiera de dichos semitonos, ¿en cuántos intervalos de longitud diatónica h esta contenido? La respuesta: precisamente en h intervalos. ■

Un ejemplo aclarará la situación:

**Example 18** *En la escala mayor usual, consideremos el caso del intervalo de cuarta, esto es, h=3, mientras que c=12 y d=7. Entonces la suma de las longitudes cromáticas de las siete cuartas está dada por:*

$[Do - Fa] + [Re - Sol] + [Mi - La] + [Fa - Si] + [Sol - Do] + [La - Re] + [Si - Mi]$

*Seis de estas cuartas miden 5 semitonos, mientras que la otra mide 6 semitonos, por lo que la suma anterior es igual a* $36 = 12 \times 3 = ch$.

El siguiente lema de la Teoría de Números es fundamental para la construcción del círculo de quintas generalizado.

**Lemma 19** *Sean c y d dos enteros tales que (c,d) = 1 (esto es, c y d son coprimos). Entonces, existe un único entero no negativo c', c'<d, tal que cc' ≡ -1 (mod d).*

La demostración de este lema, la damos en el Apéndice A.

Obsérvese que el hecho de que c'<d, significa que un intervalo cuya longitud diatónica sea c', no sobrepasa la "octava".

**Lemma 20** *Considérese una escala que presenta PM, con (c,d) = 1. Sea c' como en el lema anterior. Entonces, todos los intervalos de longitud diatónica c' (excepto uno sólo) tienen longitud cromática d' = (cc' + 1) / d ; el intervalo de excepción, tiene longitud cromática d' - 1.*[2]

[2] *Nótese que, para la escala diatónica usual (la escala mayor), c = 12 (doce notas cromáticas); d = 7 (siete notas diatónicas); c' = 4 (longitud diatónica de la quinta); d' = 7 (longitud cromática de la quinta justa); y d'-1 = 6 (longitud cromática de la quinta disminuida, el intervalo "de excepción").*

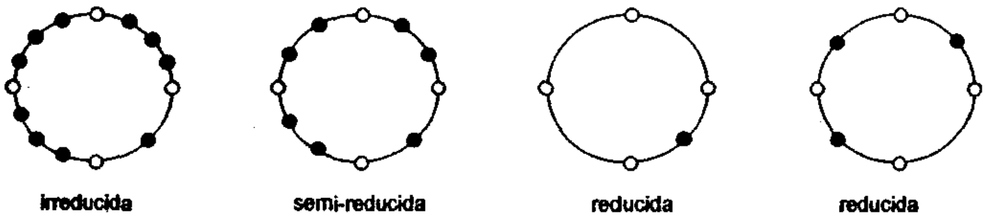



Fig. 3 Reducción de una escala

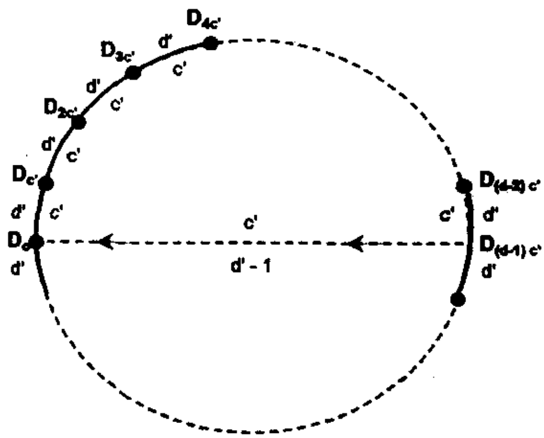



Fig. 4 Círculo generalizado de 5tas.

**Proof.** Hay d intervalos de longitud diatónica c'. Según el Lema 17, la suma de las longitudes cromáticas de estos d intervalos es cc'. Por otra parte, existe un entero d' tal que

cc' = dd' - 1 ; (1)

esto último se deduce de la forma en que se define a c' en el Lema 19: cc' $\equiv$ -1 (mod d).

De manera que tenemos d enteros (las d longitudes cromáticas de los intervalos de longitud diatónica c') que suman dd' - 1. Por PM, estos d enteros sólo toman dos valores distintos, los cuales son consecutivos (por el Lema 16). Entonces, de estos d enteros, d-1 toman el valor d', y el otro toma el valor d' - 1. De la ecuación (1), es fácil obtener el valor de d'. ■

Ahora podemos proceder a la anunciada construcción de un círculo de quintas generalizado, bajo las mismas hipótesis del lema anterior. (Como habrá notado el lector, el número c' es la longitud diatónica de la "quinta" generalizada, mientras que d' es la longitud cromática de la "quinta" justa, *y d' - 1 es la longitud cromática de la "quinta" disminuida.) Simplemente,* etiquetemos las notas diatónicas de tal manera que

$|D_0 - D_{c'}| = |D_{c'} - D_{2c'}| = \ldots = \left|D_{(d-2)c'} - D_{(d-1)c'}\right|$ = d', y

$\left|D_{(d-1)c'} - D_{dc'}\right|$ = d'-1 ,

donde todos los subíndices se leen (mod d). Ordenadas de este modo, las notas forman el círculo de quintas generalizado que estamos buscando, el cual es ilustrado en la Figura 4. Nótese que la nota $D_0$ es equivalente a la nota $D_{dc'}$ bajo transposición a la "octava", i. e. son la misma nota, pero en "octavas" distintas (están separadas exactamente por c' octavas, según el Lema 17).

**Lemma 21** *Considérese una escala construida con c y d coprimos, la cual presenta PM. Entonces, tal escala presenta CV.*

**Proof.** El argumento que demuestra el Teorema 8, basado en el círculo de quintas, se aplica de manera idéntica al círculo de quintas generalizado. ■

A continuación, demostraremos que es innecesaria la hipótesis de que c y d sean coprimos:

**Theorem 22** *PM implica CV.*

**Proof.** Por supuesto, es suficiente demostrar que PM implica (c,d) = 1. Supóngase que una escala presenta PM pero (c,d) = r > 1. Considérese la clase de líneas $\left\langle D_0 - D_{\frac{d}{r}}\right\rangle$. Esta clase está compuesta por d intervalos, cuyas longitudes cromáticas suman, por el lema 17, $c\frac{d}{r}$. De esta manera, tenemos d enteros que suman $\frac{c}{r}d$, donde $\frac{c}{r}$ es un entero. Por PM, estos d enteros toman dos valores distintos (el espectro de $D_0 - D_{\frac{d}{r}}$), por lo que no pueden ser todos $\frac{c}{r}$ ; así que al menos uno de ellos debe ser mayor que $\frac{c}{r}$ , y al menos uno menor que $\frac{c}{r}$ . Pero para satisfacer PC, $\frac{c}{r}$ también debería estar en el espectro del intervalo, con lo que tal espectro tendría al menos tres elementos, violando PM. ■

**Corollary 23** *PM implica EM.*

**Proof.** El argumento dado para el Corolario 9 se aplica igualmente al lema 21 y al teorema 22. ■

*Como se ve, CV y EM van juntas siempre que se presenta PM, razón por la cual, de aquí* en adelante, evitaremos mencionar explícitamente a EM.

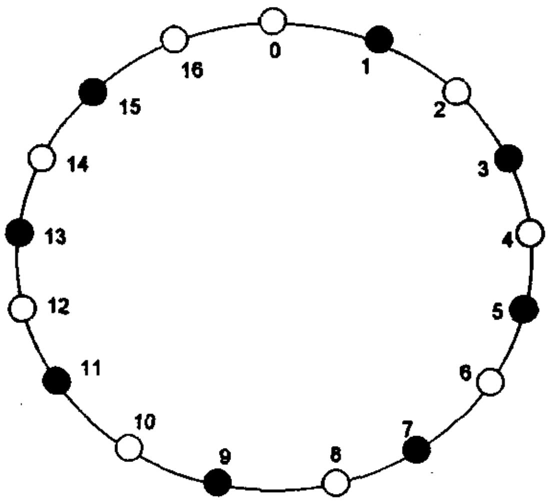
## 2.3 Líneas con repeticiones y acordes.

Hemos establecido en la sección anterior, ciertos resultados sobre líneas sin repetición de notas, resultados que nos gustaría ahora extender para líneas con repeticiones y para acordes.

Redefinamos ahora una línea como una sucesión finita de elementos del conjunto diatónico, permitiendo repeticiones, y definamos la cardinalidad de una línea como el número de elementos distintos en la sucesión (de manera que, por ejemplo, la cardinalidad de C - D - F - D - D es 3). Si la escala admite un círculo de quintas generalizado, entonces presenta CV, pues las repeticiones no introducen una nueva posible localización del intervalo corto d' - 1 dentro de la línea. Por lo tanto, una línea de cardinalidad k, da lugar a k especies, por lo que el Teorema 22 se cumple para líneas en general.

Mayor cuidado necesitamos al tratar con los acordes. En este caso, la escala diatónica usual presenta CV excepto para el caso $k = 7$, pues hay un único acorde de siete notas. En general, encontraremos problemas cuando la cardinalidad del acorde no sea coprima con d, la cardinalidad de la escala diatónica. Otro ejemplo ilustrará esta afirmación:

**Example 24** *La Figura 5 ilustra la escala con parámetros $c = 17$, $d = 9$. Esta escala presenta PM, por lo que admite un círculo de quintas generalizado. Sin embargo, el género de acordes (333), cuya cardinalidad es 3, no presenta CV, pues su única especie es (566).*




d=9, c=17
Escala diatónica: 0,2,4,6,8,10,12,14,16
Acordes {0,6,12},{2,8,14} y {4,10,16}
todas tienen la estructura (566).

*Fig. 5 Caso en que CV se cumple para líneas pero no para acordes*

Al parecer, lo mejor que podemos decir es que si una escala presenta PM entonces también presenta CV, excepto para ciertos acordes cuya cardinalidad sea no coprima con d.

## 2.4 Existencia y unicidad de escalas que presentan CV y EM. Construcción de escalas.

En esta sección mostraremos que para cualesquiera parámetros c y d, con (c,d) = 1, existe una escala con estos parámetros, tal que presenta la propiedad de CV. Más aún, tal escala es -esencialmente- única. Demostraremos la unicidad en primer lugar.

**Theorem 25** *Sean* $S = \{C_0, C_1, ..., C_{c-1}\}$ *y* $S' = \left\{C'_0, C'_1, ..., C'_{c-1}\right\}$ *dos escalas cromáticas de c notas, cada una de ellas conteniendo una escala diatónica de d notas, la cual presenta CV. Entonces existe un entero j tal que* $C_i$ *pertenece a la escala diatónica inmersa en S si y sólo si* $C'_{i+j}$ *pertenece a la escala diatónica inmersa en* $S'$. *(Aquí los subíndices deben ser interpretados (mod c).)*[3]

**Proof.** Puesto que ambas escalas comparten los parámetros c y d, también comparten los parámetros c' y d', por lo que, al construir los correspondientes círculos de quintas generalizados, existen notas $C_k$ en S y $C'_h$ en S' tales que la escala diatónica de S es $\{C_k, C_{k+d'}, C_{k+2d'}, ..., C_{k+(d-1)d'}\}$ y la escala diatónica de S' es $\left\{C'_h, C'_{h+d'}, C'_{h+2d'}, ..., C'_{h+(d-1)d'}\right\}$. Ahora, simplemente hágase j = h - k . ■

En cuanto a la existencia de escalas con CV, dados los parámetros c y d, ofreceremos una demostración constructiva, la cual motivaremos mostrando primero cómo construir la escala diatónica usual; en este caso, c = 12 y d = 7. Primero, escríbanse los múltiplos de $\frac{12}{7}$ como parte entera más parte fraccionaria:

$0\ ,\ 1 + \frac{5}{7}\ ,\ 3 + \frac{3}{7}\ ,\ 5 + \frac{1}{7}\ ,\ 6 + \frac{6}{7}\ ,\ 8 + \frac{4}{7}\ ,\ 10 + \frac{2}{7}\ ,\ 12\ , \ldots$

En seguida, tómese sólo la parte entera de cada número, obteniéndose así la sucesión

$0\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 10\ ,\ 12\ , \ldots$

[3] *Como el lector observará, este teorema significa, musicalmente, que ambas escalas son equivalentes bajo "transposición diatónica generalizada": la escala diatónica inmersa en S' se puede obtener desplazando la escala diatónica inmersa en S, una distancia cromática igual a j. En otras palabras, la escala es única salvo transposición (como era, ciertamente, de esperarse).*

Ahora, interprétese esta sucesión de enteros como las posiciones de las notas diatónicas, y los enteros omitidos, como las posiciones de las notas cromáticas. De esta manera, se ha obtenido una escala con CV. Si identificamos la posición 0 con la nota Si, la escala obtenida se identifica con la familiar escala de Do mayor, de la siguiente manera:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| B | C | C# | D | D# | E | F | F# | G | G# | A | A# | B |

Antes de demostrar que el procedimiento anterior funciona para el caso general, recordaremos otro conocido lema proveniente de la Teoría de Números, cuya demostración encontrará en el Apéndice B el lector interesado.

**Lemma 26** *Si r, s, t son enteros tales que r divide a st y (r,s) = 1, entonces r divide a t.*

**Theorem 27** *Sean c y d enteros tales que (c,d) = 1; defínase* $a_k = \left[\frac{kc}{d}\right]$ *, donde k = 0, ±1, ±2, . . .. Entonces, los enteros* $a_k$ *son las posiciones -en la correspondiente escala cromática- de las notas pertenecientes a la escala diatónica que presenta CV y tiene a c y d como parámetros.*

**Proof.** Es suficiente demostrar que la escala construida presenta PM y es semirreducida; es decir, que el espectro de cualquier intervalo es un conjunto de dos enteros, los cuales, en el caso del intervalo de segunda, son consecutivos. Más en general, demostraremos que los dos enteros que forman el espectro de cualquier intervalo, son consecutivos. Considérese el intervalo de tamaño diatónico j , $1 \leq j < d$ , cuyo espectro es el conjunto $\{a_{k+j} - a_k : \ k = 0, \pm 1, \pm 2 ...\}$ ; obsérvese que el entero $a_{k+j} - a_k$ es la distancia cromática entre las notas $a_k$ y $a_{k+j}$ . Ahora bien, puesto que para toda x se cumple que $x - 1 < [x] \leq x$ , podemos escribir las siguientes desigualdades para toda k:

$$\frac{(k+j)c}{d} - 1 < \left[\frac{(k+j)c}{d}\right] \leq \frac{(k+j)c}{d}$$
$$\frac{kc}{d} - 1 < \left[\frac{kc}{d}\right] \leq \frac{kc}{d} \ .$$

Al restar la segunda desigualdad de la primera, y puesto que $a_{k+j} - a_k = \left[\frac{(k+j)c}{d}\right] - \left[\frac{kc}{d}\right]$ , obtenemos

$$\frac{(k+j)c}{d} - \frac{kc}{d} - 1 < a_{k+j} - a_k < \frac{(k+j)c}{d} - \frac{kc}{d} + 1 \ .$$ [4]

[4] Esta desigualdad se puede simplificar a
$\frac{cj}{d} - 1 < a_{k+j} - a_k < \frac{cj}{d} + 1$

lo que demuestra que el intervalo (matemático) que contiene al espectro es independiente de la k.

Lo anterior significa que el espectro del intervalo (musical) de longitud diatónica j está contenido en un intervalo (matemático) abierto de longitud 2. Este intervalo abierto contiene a lo más dos enteros, por lo que el espectro del intervalo musical consta a lo más de dos elementos.

Ahora, supóngase que el espectro del intervalo consta sólo de un elemento.[5]

$\Rightarrow$ Entonces existe un entero e tal que, para toda k, $a_{k+j} - a_k = e$, de manera que podemos escribir

$$ed = \sum_{n=1}^{d} (a_{k+nj} - a_{k+(n-1)j})$$
$$= (a_{k+dj} - a_{k+(d-1)j}) + (a_{k+(d-1)j} - a_{k+(d-2)j}) + \ldots + (a_{k+2j} - a_{k+j}) + (a_{k+j} - a_k)$$
$$= a_{k+dj} - a_k = \left[\tfrac{(k+dj)c}{d}\right] - \left[\tfrac{kc}{d}\right] = cj$$

La última igualdad es cierta por la siguiente razón: si x es un entero, entonces $[x] = x$ , y además $[x+y] = x + [y]$. Por lo tanto,

$$\left[\tfrac{(k+dj)c}{d}\right] = \left[\tfrac{kc}{d} + cj\right] = \left[\tfrac{kc}{d}\right] + cj. \Leftarrow$$

De lo anterior se deduce que d divide a cj. Pero (c,d) = 1 , así que -aplicando el Lema 26- d divide a j. Sin embargo, habíamos supuesto que $1 \leq j < d$ , por lo que hemos generado una contradicción. Por lo tanto, el espectro del intervalo contiene dos elementos, y la escala presenta PM; evidentemente, estos dos elementos son dos enteros consecutivos, pues están contenidos en un intervalo abierto de longitud 2, así que la escala es semirreducida. ■

El Teorema anterior nos asegura que hemos construido una escala que presenta PM y además es semirreducida. ¿Es posible saber bajo qué condiciones el método generará una escala reducida? El siguiente resultado responde esta pregunta; pero más aún, nos dice con exactitud cuáles son los dos posibles tamaños cromáticos en que se presentará el intervalo de segunda.

**Theorem 28** *Bajo las mismas condiciones del teorema anterior, y para la escala construida mediante el procedimiento allí descrito, el intervalo de segunda tiene como espectro al conjunto* $\left\{\left[\frac{c}{d}\right], \left[\frac{c}{d}\right] + 1\right\}$.

**Proof.** Por el teorema anterior, dicha escala presenta PM y es semirreducida. En particular, el intervalo de segunda se presenta en dos tamaños cromáticos, los cuales son dos enteros

[5] El argumento marcado entre flechas dobles es el que aparece originalmente en el artículo de Clough y Myerson. Sin embargo, se puede sustituir por este otro, más directo:
La única manera de que el intervalo abierto $\left(\frac{cj}{d} - 1, \frac{cj}{d} + 1\right)$ contenga un sólo entero, sería que el centro del intervalo, $\frac{cj}{d}$ , sea tal entero; es decir, $\frac{cj}{d} = e$. De aquí, se sigue que d divide a cj.

consecutivos; sólo resta averiguar de qué enteros se trata. Para ello, tomemos como "primer" nota de la escala a la generada con k=0, es decir, $a_0 = 0$; así, la "última" nota de la escala será $a_{d-1}$ . ¿Cuál es la distancia cromática entre $a_0$ y $a_1$? Evidentemente, $\left[\frac{c}{d}\right]$.

Considérese ahora la distancia cromática entre $a_0$ y $a_{-1}$. Tal distancia queda representada por $a_0 - a_{-1}$ .Utilizando el hecho de que $[-x] = -([x]+1)$ para cualquier x $\geq 0$, podemos escribir

$$a_0 - a_{-1} = 0 - \left[-\frac{c}{d}\right] = 0 - \left\{-\left(\left[\frac{c}{d}\right]+1\right)\right\} = \left[\frac{c}{d}\right] + 1. \blacksquare$$

**Corollary 29** *Considérese una escala construida mediante el procedimiento que se describe en el Teorema 27. Para que tal escala resulte ser reducida, es condición necesaria y suficiente que $d < c < 2d$.*

**Proof.** Este resultado se sigue de manera inmediata del teorema anterior. Evidentemente, el caso c < d no tiene sentido, y si c = d, no es posible tener PM. ■

Por supuesto, una escala reducida resulta ser lo más parecido que hemos obtenido a la escala diatónica usual, en el sentido de que entre dos notas diatónicas consecutivas sólo hay una o ninguna nota cromática.

**Remark 1** *Nótese que, por la manera como fue construida la escala, resulta que entre las notas $a_0$ y $a_1$ siempre encontraremos la menor de las longitudes cromáticas del intervalo de segunda, i.e. será una "segunda menor" generalizada. Esto concuerda con el hecho de que, al aplicar el método a la escala mayor, $a_0$ resulta ser la sensible (la nota si, en la escala de do mayor). Sin embargo, hay que reconocer que podría haberse tratado de la mediante (la nota mi). ¿Siempre resultará ser $a_0$ la "sensible" de la escala construida, si es que esto tiene algún significado?*

## 2.5 Conclusiones del capítulo.

Hemos generado un método mediante el cual podemos construir escalas microtonales, las cuales resultan exhibir ciertas propiedades que originalmente habíamos descubierto en la escala mayor usual. En virtud de este hecho, a tales escalas microtonales les hemos llamado escalas diatónicas generalizadas. Cada una de estas escalas está inmersa en otra escala microtonal que la contiene, a la cual nos hemos referido como la correspondiente escala cromática. Las propiedades de la escala mayor usual que hemos generalizado son las de CV y EM. La Propiedad de Myhill resultó también de suma importancia, pues es más fácil de expresar ("todo intervalo diatónico se presenta en dos tamaños cromáticos") y es aparentemente más débil, pero -según se demostró- implica EM y es equivalente con CV. La principal herramienta teórica usada para demostrar estos hechos, fue la construcción de un círculo de quintas generalizado para cualquier escala que presente la Propiedad de Myhill; la existencia de este círculo de quintas depende, en última instancia, de cierto resultado proveniente de la Teoría de Números.

Una escala que presenta la Propiedad de Myhill, necesariamente cumple con la relación (c,d) = 1, es decir, c y d son primos relativos. Por otra parte, para c y d dados, tales que (c,d) = 1, siempre es posible construir una escala semirreducida que, teniendo a c y d como parámetros, presente la Propiedad de Myhill; además dicha escala es única hasta transposición diatónica generalizada. Todo esto se demuestra en el Teorema 27. Si también queremos que la escala sea reducida, basta con que se cumpla la relación $c < 2d$, según el Corolario 29.

### 2.5.1 Un ejemplo.

*Ilustraremos con un ejemplo los resultados obtenidos en este capítulo.* Tomemos $c = 20$ *y* $d = 11$, es decir, construiremos una escala diatónica de 11 notas, inmersa en una escala cromática de 20 notas. Estos enteros son primos relativos, por lo que podemos aplicar el método descrito en el Teorema 27 para construir una escala diatónica semirreducida que presente la Propiedad de Myhill (y con ella, las propiedades de CV y EM). Más aún, la escala resultará ser reducida (entre dos notas diatónicas consecutivas habrá sólo una o ninguna nota cromática). Procedamos a su construcción.

Siguiendo el procedimiento ya mencionado, y dando valores para k entre 0 y 11, obtenemos los siguientes valores para los $\frac{kc}{d}$ :

$\frac{0}{11}, \frac{20}{11}, \frac{40}{11}, \frac{60}{11}, \frac{80}{11}, \frac{100}{11}, \frac{120}{11}, \frac{140}{11}, \frac{160}{11}, \frac{180}{11}, \frac{200}{11}, \frac{220}{11}$.

Al tomar la parte entera de cada uno de estos números se obtiene la siguiente sucesión:

0, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Estos números representan las posiciones de las notas diatónicas dentro de la escala cromática de 20 notas. El lector observador habrá notado que son 12 números y no 11; esto es porque deliberadamente hemos tomado 12 valores de k, para ilustrar cómo es que los números deben ser tomados (módulo 20) ((módulo c), en general). En este caso, en la lista de números aparecen el 0 y el 20, pero $0 \equiv 20 \pmod{20}$, por lo que la escala debe escribirse así:

0, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 0.

El que la nota 0 aparezca dos veces significa que la estamos repitiendo duplicada a la "octava" superior. En analogía con la escala mayor, es como si escribiéramos la escala de "si" a "si". Y digo de si a si, por la siguiente razón: recordando lo dicho en la Observación 1, podría pensarse que la nota 0 vendría a ser como la "sensible" de la escala, por lo que para escribir la escala de "do" a "do", habrá que renombrar las notas: la nota 1 será la primera de la escala, por lo que le llamaremos 0, y en general restaremos 1 a todos los números, por lo que la escala queda de la siguiente manera:

0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 0.

Obsérvese que -escrita de esta manera- la estructura de la escala, expresada en términos de "tonos" y "semitonos" (entendiendo aquí por semitono una distancia de una nota cromática, y por tono una distancia de dos notas cromáticas), resulta ser

$\underbrace{TTTTS}\ \mathrm{T}\ \underbrace{TTTTS},$

la cual es muy parecida a la estructura de la escala mayor usual:

$\underbrace{TTS}\ \mathrm{T}\ \underbrace{TTS},$

*en el sentido de que ambas escalas están formadas por una estructura que se repite a una* distancia de un tono; tal estructura es, en el caso de la escala mayor usual, el tetracorde mayor T T S, y para la otra escala, lo que vendría a ser un "tetracorde mayor generalizado" -hexacorde, en este caso-, T T T T S.

La estructura en tetracordes de la escala mayor usual es como sigue:

$\underbrace{0,2,4,5},\ \underbrace{7,9,11,0}.$

La estructura de la otra escala, en hexacordes, sería:

$\underbrace{0,2,4,6,8,9},\ \underbrace{11,13,15,17,19,0}.$

Hasta aquí, hemos visto que esta escala guarda un gran parecido con la escala mayor, tanto en apariencia como en que presenta las mismas propiedades estructurales (al menos, las propiedades que hemos estudiado hasta ahora). Seguiremos discutiendo esta escala en los capítulos siguientes, y será demostrado que tiene aún más características en común (y otras en desacuerdo) con la escala mayor.

# Part II

# La Teoría de Grupos en la estructura armónica y tonal de ciertas escalas diatónicas microtonales

En la primera parte hemos obtenido un algoritmo para la construcción de escalas diatónicas microtonales. Tales escalas han sido llamadas "diatónicas" en virtud de que -como fue demostrado- presentan ciertas propiedades en común con la escala mayor usual, propiedades que se refieren de una manera muy general a ciertas relaciones entre notas y entre conjuntos de notas, las cuales no necesariamente tienen mucha importancia en la teoría musical tradicional. Sin embargo, como se vio, tales propiedades están profundamente relacionadas con la existencia del círculo de quintas, el cual sí tiene una importancia central en la Armonía tradicional.

En esta segunda parte intentaremos obtener una descripción de la estructura armónica y tonal de la escala mayor, en términos de la Teoría de Grupos, de manera que tal estructura pueda ser generalizada a ciertas escalas microtonales.[6] Es necesario, desde luego, encontrar ciertas propiedades estructurales de la escala mayor que sean expresables en términos matemáticos, y que sean de utilidad a nuestros objetivos. Adelantamos que, en esta ocasión, tales propiedades tendrán una interpretación más clara en términos de la teoría musical tradicional. De manera análoga a lo hecho en la primera parte, llamaremos escalas microtonales "diatónicas" a aquellas escalas microtonales que presenten estas mismas propiedades.

En este punto conviene hacer una aclaración: las propiedades consideradas relevantes en esta parte, son distintas a aquellas discutidas en la primera parte, por lo que, estrictamente hablando, la definición de "escala microtonal diatónica" implícita en los argumentos usados en los dos próximos capítulos, es distinta de aquella usada en los capítulos anteriores. Esto es parte de un problema fundamental: no existe un acuerdo definitivo, entre los autores que han estudiado estos temas, sobre cuales deben ser las propiedades de la escala mayor que determinen una posible definición de su calidad diatónica, lo cual permita su generalización a otras escalas más generales. En este trabajo presentamos sólo dos de varios enfoques que han sido estudiados por diversos autores. El lector interesado en conocer otros enfoques, puede consultar los artículos incluidos en la Bibliografía Complementaria, al final de este trabajo, y referencias citadas en los mismos.

[6] Por estructura armónica de la escala mayor, me refiero a su estructura en acordes y las relaciones entre ellos; por supuesto, aquí el concepto de acorde será usado en el sentido de la teoría musical tradicional, a diferencia de los capítulos anteriores, donde acorde significaba cualquier subconjunto de la escala diatónica.

Por estructura tonal de la escala mayor, entiendo la existencia de las distintas tonalidades (es decir, las traslaciones de la escala mayor a distintas alturas) y las relaciones entre ellas. El problema de cómo modular de una tonalidad a otra, en una escala microtonal, será tratado en la tercera parte.

Nosotros adoptaremos la actitud conciliatoria de buscar qué escalas cumplen con ambas "definiciones" de escala diatónica; tarea que, por otra parte, no es nada difícil, pues ambos enfoques establecen ciertas condiciones muy específicas que deben cumplir las escalas para aspirar a presentar las mismas propiedades estructurales que tiene la escala mayor tradicional. Como se recordará de la primera parte, basta con que los parámetros c y d sean coprimos, para que podamos aplicar el método de construcción descrito por el Teorema 27, y obtengamos una escala que presenta las propiedades de CV y EM. Por otra parte, y adelantando un poco los resultados del próximo capítulo, la condición para que una escala presente las propiedades que estudiaremos enseguida, será que el parámetro c sea de la forma $k(k+1)$, donde k es un entero, y $d = 2k+1$ ó $d = c - (2k+1)$.

Sin embargo, en esta segunda parte, una vez que se tienen establecidos los parámetros c y d, el algoritmo para la construcción de la escala es distinto al empleado en la primera parte, por lo que la pregunta obligada es ¿obtendremos la misma escala, de manera que ésta presente las propiedades estudiadas por ambos enfoques? Como se insinuó al final de la primera parte, un caso importante a considerar será la escala diatónica de 11 notas inmersa en una escala cromática de 20 notas, la cual (al igual que la usual escala mayor) satisface ambos conjuntos de condiciones.

Esta segunda parte está basada en el artículo *Generalized Diatonic and Pentatonic Scales: A Group Theoretic Approach* (Escalas Diatónicas y Pentatónicas Generalizadas: Un Enfoque con Teoría de Grupos), escrito por Paul F. Zweifel, quien a su vez toma como punto de partida los métodos desarrollados por Gerald J. Balzano en su artículo *The Group Theoretic Description of 12-fold and Microtonal Pitch Systems* (Descripción, con Teoría de Grupos, de Sistemas de Afinación de 12 notas y Microtonales).

Presentaremos un breve resumen del artículo de Gerald Balzano, y enseguida analizamos los argumentos de Paul Zweifel. No vamos a estudiar a fondo dichos artículos, porque queremos llegar rápidamente a los resultados que en ellos se obtienen; sobre todo, discutiremos las conclusiones de Paul Zweifel, y propondremos una alternativa, presentando algunos argumentos a nuestro favor (la otra parte de tales argumentos, empero, no podrá ser discutida sino hasta que hayamos desarrollado las herramientas correspondientes a la tercera parte de este trabajo). La otra buena razón para no estudiar a fondo, al menos el artículo de Balzano, es que esto ya fue hecho por alguien más, como se refiere en el siguiente párrafo.

Al lector que desee profundizar en este tema, y que tenga algunos conocimientos de Teoría de Grupos, se le recomienda leer los artículos originales, sobre todo el de Balzano. Dado que no es muy fácil conseguir dicho artículo, una buena alternativa consiste en leer la excelente reseña -en español- que de él hace la M. en C. Mariana Montiel en el capítulo IV ( pp. 45-58) de su Tesis de Licenciatura [*Montiel*]. Además, dicha tesis contiene muchos otros temas muy interesantes, todos relacionados con las Matemáticas en la Música.

# Chapter 3

# La escala mayor y el grupo cíclico $\mathbf{Z}_{12}$

## 3.1 Escalas musicales y grupos cíclicos.

Llamaremos escala de N notas a la división de la octava en N intervalos logarítmicamente iguales, de manera que la razón entre dos frecuencias sucesivas es $2^{\frac{1}{N}}$ o $\frac{1200}{N}$ céntimos (esto fue explicado con detalle en la Introducción.). De manera análoga a lo hecho en la primera parte, los sonidos que llevan el mismo nombre, pero en distintas octavas, son considerados dentro de una misma clase de equivalencia, y a tales clases les llamamos notas. Si estas notas son etiquetadas en orden de 0 a N-1, y si definimos entre ellas la operación de suma (mod N), entonces, con esta operación, forman el grupo cíclico $\mathbf{Z}_N$.

Por ejemplo, en el caso de la familiar escala mayor, N = 12, la distancia entre dos notas sucesivas es llamada "semitono", mide 100 céntimos y es denotada por S. Las notas son etiquetadas en orden ascendente así: Do = 0, Do$^{\#}$ = 1, Re = 2, . . . , Si = 11. De esta manera, la escala mayor puede ser representada en el grupo $\mathbf{Z}_{12}$.[1]

[1] Véanse las dos primeras columnas del cuadro que aparece en la sección 2.1

## 3.2 Los elementos generadores de un grupo cíclico.

Los grupos cíclicos $Z_N$ se caracterizan por la existencia de elementos primitivos o generadores: decimos que un elemento n genera a $Z_N$ si $nk \neq 0$ (mod N), $0 < k < N$. Dicho de otra forma, en la sucesión 0, n, 2n, . . . , (N-1)n (mod N), cada elemento del grupo $Z_N$ aparece exactamente una vez. Por supuesto, basta con que N y n sean primos relativos, para que n genere a $Z_N$ (esta afirmación es demostrada en el Apéndice A).

**Example 30** *El grupo $Z_{12}$ tiene cuatro generadores: 1 y su inverso 11; 5 y su inverso 7.*[2] *La sucesión generada por 1 es sencillamente la escala cromática ascendente, y la generada por 11, la escala cromática descendente, mientras que 7 genera al círculo de quintas, y 5 genera al círculo de cuartas (o al círculo de quintas en orden ascendente y descendente, respectivamente).*

Cuando hablemos de los grupos $Z_N$ con N > 12, en este mismo capítulo, identificaremos a ciertos de sus elementos generadores como cuartas y quintas generalizadas. Sin embargo, debe notarse que este concepto de quinta generalizada es distinto del que fue manejado en el capítulo anterior. Aquí la pregunta interesante es *¿bajo qué condiciones coinciden ambos conceptos*, si es que lo llegan a hacer? (véase el Apéndice A.)

## 3.3 Subgrupos y grupos cociente.

En general, $Z_k$ es un subgrupo de $Z_N$ si y sólo si k divide a N. Una implicación se sigue del Teorema de Lagrange, y la otra es resultado del hecho de que estamos tratando con grupos cíclicos.

**Example 31** *$Z_{12}$ contiene como subgrupos a $Z_2$, $Z_3$, $Z_4$ y $Z_6$.*

Es muy interesante la interpretación que hace Balzano de los subgrupos de $Z_{12}$. $Z_2$ = (0,6) representa al tritono do-fa#, y cada una de sus clases laterales representan a los otros tritonos de la escala cromática, por lo que el grupo cociente $Z_{12}/Z_2$ representa al conjunto de los seis tritonos. El subgrupo $Z_3$ = (0, 4, 8) representa al acorde aumentado do-mi-sol#,

[2] *Dado un elemento g de un grupo aditivo G, se define su inverso (-g) tal que g + (-g) = 0. Todo elemento de un grupo tiene un único inverso. Además, si g genera a G, también (-g) genera a G.*

sus clases laterales representan a los otros acordes aumentados, y el grupo cociente $Z_{12}/Z_3$ representa al conjunto de los cuatro acordes aumentados de la escala cromática. El subgrupo $Z_4 = (0, 3, 6, 9)$ representa al acorde de séptima disminuida do-mi$^b$-sol$^b$- la$^b$, y el grupo cociente $Z_{12}/Z_4$ representa al conjunto de los tres acordes de séptima disminuida que existen en la escala cromática. Por último, el subgrupo $Z_6 = (0, 2, 4, 6, 8, 10)$ representa a la escala de tonos enteros do-re-mi-fa$^\#$-sol$^\#$-la$^\#$, y el conjunto de las dos escalas de tonos enteros queda representado en el grupo cociente $Z_{12}/Z_6$.

El hecho de que el grupo cociente $Z_N/Z_k$ tenga $\frac{N}{k}$ elementos, permite calcular fácilmente cuántos acordes o escalas de los tipos mencionados anteriormente existen en la escala $Z_N$. Esto no nos dice nada nuevo en el caso N = 12, pues cualquiera sabe de inmediato la respuesta, pero nos será de utilidad cuando trabajemos en *sistemas de afinación con más de 12 notas.*

Y ahora, dejando de lado a los subgrupos de $Z_{12}$, pasemos a la parte más importante del *trabajo de Balzano*, donde propone que la escala cromática $Z_{12}$ puede ser representada en tres grupos isomorfos.

## 3.4 El grupo de semitonos (estructura melódica).

En efecto, la primera de tales representaciones se basa en el semitono, o segunda menor (2m), como generador del grupo, y es ilustrada en la Figura 1. Dos puntos adyacentes en esta representación, están separados por una distancia de un semitono. Doce iteraciones del semitono resultan en una octava, equivalente a la identidad: $(2m)^{12} = I$. Para recorrer el ciclo en orden inverso, se utiliza al inverso del semitono, la séptima mayor: (7M) = I. Esto refleja el hecho de que 1 y 11, inversos uno del otro, generan el mismo grupo. En esta representación de $Z_{12}$, la cercanía entre dos notas está dada por el número de semitonos que las separa, o sea el número de iteraciones de la transformación dada por el elemento 1 (traslación por un semitono) que son necesarias para ir de una nota a la otra. Es precisamente a esta noción de "distancia" entre las notas a la que se hace referencia cuando se habla de que un movimiento melódico es grande o pequeño. Podría decirse que esta representación de $Z_{12}$, la cual será llamada *grupo de semitonos*, subyace a la estructura melódica de la escala.

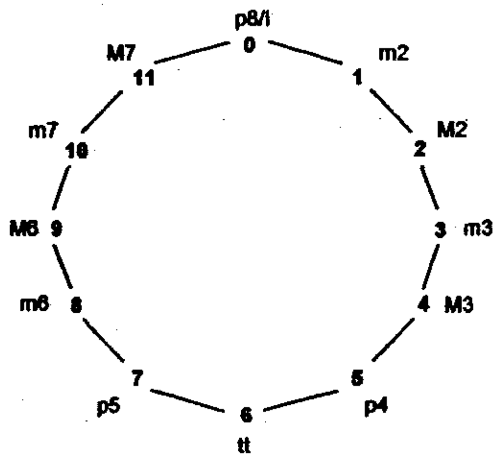



Fig. 1 Grupo de semitonos

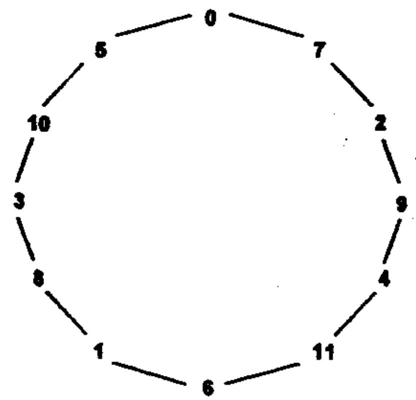



Fig. 2 Grupo de 5tas.

En la Figura 1 se puede observar que $Z_{12}$ contiene elementos de distintos periodos, hecho que está directamente relacionado con la existencia de los varios subgrupos de $Z_{12}$ discutidos anteriormente: los elementos 2 (segunda mayor ó 2M) y 10 (séptima menor ó 7m), inversos uno del otro, son ambos de período 6, es decir, $(2M)^6 = (7m)^6 = I$. Cualquiera de ellos genera a la escala de tonos enteros, el subgrupo $Z_6 = (0, 2, 4, 6, 8, 10)$. De manera similar, 3 (3m) y 9 (6M) son ambos de período 4 y generan al acorde de séptima disminuida. Los elementos 4 (3M) y 8 (6m) son de período 3 y generan a la tríada aumentada. Por último, el elemento 6, el diabólico tritono, sólo se genera a sí mismo y a la identidad.

¿Qué hay con los elementos 5 y 7, inverso uno del otro? Bueno, estos elementos corresponden a la cuarta y quinta perfectas, respectivamente, y no generan a ningún subgrupo propio de $Z_{12}$. De hecho, no pertenecen a ninguno de los subgrupos mencionados anteriormente. Pero sí generan a la escala entera, y este hecho motiva la segunda representación de $Z_{12}$, la cual es ilustrada en la Figura 2. Se trata precisamente del grupo generado por el elemento 7, al cual llamaremos *grupo de quintas*.

## 3.5 El grupo de quintas (estructura tonal).

Se puede observar que la transformación de la Figura 1 en la Figura 2 dada por la multiplicación por 7, i. e., $0 \to 0$, $1 \to 7$, $2 \to 14 \pmod{12} = 2$, etc., es un isomorfismo de $Z_{12}$ en sí mismo. Las otras transformaciones de $Z_{12}$ en sí mismo son: multiplicación por 11, que produce la misma Figura 1, pero en sentido inverso; multiplicación por 5, que produce la Figura 2, pero en sentido inverso (círculo de cuartas); y multiplicación por 1, que no es otra que la identidad. Todas estas transformaciones son los elementos del grupo de automorfismos de $Z_{12}$, Aut $(Z_{12})$[3]. Si representamos a estas transformaciones por los elementos que las generan, es decir, 7, 11, 5 y 1, respectivamente, podemos escribir Aut $(Z_{12}) = \{7, 11, 5, 1\}$. Se puede demostrar que Aut $(Z_{12})$ es isomorfo al grupo producto $Z_2 \times Z_2$. Pero, por el momento, lo que deseamos resaltar es que todos estos isomorfismos producen no más que las dos estructuras mostradas en las Figuras 1 y 2, ya sea tal como aparecen allí, o invertidas (es decir, reflejadas con respecto al eje 0-6, unísono-tritono).

[3]El grupo de automorfismos Aut (G) de un grupo G, se define como el conjunto de isomorfismos de G en sí mismo, con la composición como operación de grupo.

El lector que reconozca en la Figura 2 al familiar círculo de quintas, podrá darse cuenta de que éste representa mucho más que una mnemotecnia para recordar el orden en que aparecen los sostenidos y los bemoles: desde el punto de vista de la Teoría de Grupos, es la única estructura cíclica isomorfa al círculo de semitonos, el cual es más familiar e intuitivo. En otras palabras, el círculo de quintas está profunda y esencialmente integrado en nuestro sistema de afinación, la escala cromática de doce sonidos.

Por supuesto, el círculo de quintas también sirve como una mnemotecnia para recordar el orden de los sostenidos y los bemoles, y las relaciones entre las tonalidades; pero este hecho tiene su razón de ser, y es lo que vamos a estudiar enseguida. Cuando una escala mayor es transportada una quinta hacia arriba, digamos que transportamos de do mayor a sol mayor, ambas escalas tienen en común todas la notas excepto una, la cual es alterada por un semitono: fa cambia a fa$^\#$. Más aún, la distancia en quintas (medida en el círculo de quintas) entre dos tonalidades cualesquiera es un indicativo de cuántas notas tendrán en común dichas escalas, y cuántas notas habrán cambiado un semitono hacia arriba o hacia abajo. Esto parece indicar que el sistema de tonalidades y de armaduras fue desarrollado específicamente para describir las distintas traslaciones de la escala mayor.

La razón de estos hechos es la siguiente: lo que llamamos escalas diatónicas, son subconjuntos muy especiales de $Z_{12}$, si lo vemos en su representación en el grupo de quintas. Como lo muestra la Figura 3, una escala diatónica es un subconjunto de puntos adyacentes o "conectados" en el círculo de quintas. De hecho, cualquier conjunto de siete puntos adyacentes en este grupo es una escala diatónica, y las doce escalas diatónicas son de esta forma. En la Figura 3 la escala de do mayor se muestra conectada por líneas continuas, y la escala de sol mayor, conectada por líneas discontinuas. Se puede observar que el hecho de que, al pasar de do mayor a sol mayor, se conserven todas las notas excepto fa -que cambia a fa$^\#$-, es consecuencia directa de la "conexidad" de las escalas, y de que cada escala tiene precisamente 7 notas. A esta propiedad de las escalas diatónicas la denominaremos como "la propiedad F$\rightarrow$F$^\#$". Esto equivale a afirmar que si ascendemos un intervalo de quinta perfecta, y repetimos esta operación siete veces, es lo mismo que ascender un semitono (con equivalencia entre octavas). Es decir, $7^7 \equiv 1 \pmod{12}$.

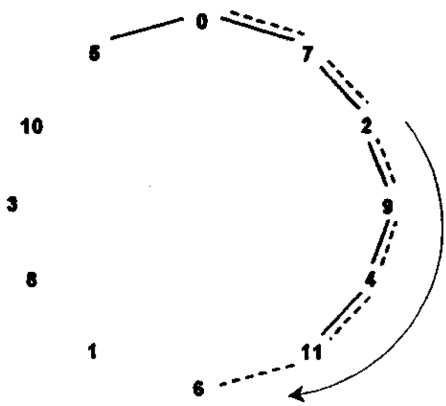



**Fig. 3 Grupo de "5tas". Escala de puntos conectados**

Por supuesto, también podría tomarse subconjuntos conectados de 4, 5, 6, etc. notas en el círculo de quintas, y todos ellos exhibirían la propiedad de que, al ser transportados una quinta ascendente, conservarían en común todas las notas menos una. Sin embargo, los únicos conjuntos conectados en el círculo de quintas, que tienen la propiedad F→F#, son los de 7 y 5 notas. Es por demás interesante que un conjunto de 5 notas adyacentes en el grupo de quintas, no es otra cosa que una escala pentatónica; de hecho, una vez elegido un conjunto de 7 notas adyacentes (una escala diatónica), su complemento en $Z_{12}$ es precisamente una escala pentatónica. Sin embargo, debe observarse un detalle sutil: al ser transportada una quinta ascendente, la escala pentatónica no presenta la propiedad F→F#, sino F# →F. Si se quiere que la escala pentatónica presente F→F#, debe ser transportada en sentido contrario al de las manecillas del reloj en la Figura 3, es decir, en la dirección de las **cuartas**, no de las quintas.

¿Y cuál es la importancia de la propiedad F→F#? Piénsese en cualquier "escala", es decir, cualquier subconjunto de $Z_{12}$. Tal vez la manera más sencilla e intuitiva de formar una tal escala arbitraria, digamos de 7 elementos, sea escoger 7 notas adyacentes en el círculo de semitonos, digamos las notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6). *¿Puede el lector imaginar alguna manera lógica de* deducir, de esta sucesión de notas, la existencia del círculo de quintas? Tratemos ahora de usar el círculo de quintas para formar nuestra escala: podríamos tomar 6 notas adyacentes en este grupo, digamos (5, 0,7, 2, 9, 4) = (0, 2, 4, 5, 7, 9) ¿Tiene esta escala alguna propiedad que la relacione con el grupo de semitonos, de una manera tan transparente como lo hace la propiedad F→F# para las escalas mayor y pentatónica?

Quizá la escala de tonos enteros tenga alguna posibilidad, pues su construcción es muy sencilla: basta tomar una nota sí y otra no en el círculo de semitonos, por ejemplo, las notas (0, 2, 4, 6, 8, 10). Es notable el hecho de que se construye exactamente de la misma manera en el grupo de quintas: cada tercer nota. Como se ve, tiene una simetría muy especial, que relaciona a las dos representaciones isomorfas de $Z_{12}$. Sin embargo, es tan simétrica, que resulta terriblemente monótona: todas las notas están a la misma distancia, y sólo hay dos escalas de tonos enteros distintas. Esto no significa que no sea usada por los músicos, por ejemplo, por los impresionistas. Pero, desde luego, no tiene la riqueza de posibilidades y recursos que tiene la escala diatónica.

Aunque todo músico sabe que la cercanía entre tonalidades se mide en quintas, hay que hacer notar lo que el análisis anterior, hecho en términos de la Teoría de Grupos, nos ha revelado: que las escalas diatónica y pentatónica son las únicas que revelan, en su estructura, los dos grupos en que $Z_{12}$ puede ser representado. Estas escalas constituyen una región conexa en el grupo de quintas, de manera que, al transportar una quinta ascendente o descendente, es decir, al efectuarse un movimiento mínimo entre dos escalas (mínimo según la noción de distancia en el grupo de quintas), se conservan todas las notas excepto una sola, y el cambio de esta nota es mínimo (mínimo según la forma de medir distancias en el grupo de semitonos).

De las dos representaciones isomorfas de $Z_{12}$ que hemos estudiado, el grupo de semitonos refleja relaciones melódicas, con su noción de cercanía entre notas individuales. La otra, el grupo de quintas, contiene relaciones tonales, es decir que refleja una noción de cercanía entre tonalidades.

- Me parece conveniente hacer aquí una reflexión: en el desarrollo histórico de la teoría musical, el aspecto melódico es desde luego muy anterior al desarrollo del sistema de *tonalidades*, y ambos precedieron por siglos al desarrollo de la Teoría de Grupos. ¿Sería muy descabellado pensar que la evolución de la escala diatónica iba *dirigida* a "hacer surgir" en el sistema de afinación una estructura de grupo, estructura que hemos encontrado en la escala cromática de 12 notas varios siglos después?

  Bien, piénsese en lo siguiente: antes del siglo XVII era impensable poder usar la escala mayor transportada a las doce notas cromáticas, y no fue sino hasta después de una larga búsqueda, que culminó en la invención del temperamento igual, que fue posible utilizar en la práctica las doce tonalidades mayores, hecho que marcó la posibilidad de un desarrollo que va desde Bach hasta nuestros días, con la destrucción (o, si se prefiere, disolución), a *principios de este siglo* (aún), de la *tonalidad*, a manos de tan despiadada "igualdad" entre las doce notas. ¿Qué propiedad se pretendía hacer surgir en el sistema de afinación, que sólo se logró con el temperamento (es decir, con grandes muestras de carácter)? Pues precisamente la propiedad de que la escala diatónica, con todos sus intervalos, fuera invariante ante las doce traslaciones; es decir, se quería dotar al sistema de afinación de una perfecta simetría. Y ¿cuál es la principal propiedad (hablando a un nivel perceptivo) que estudia y presenta la Teoría de Grupos, si no la simetría?

A medio camino entre la nota individual (estructura melódica) y la escala (estructura tonal), se encuentra otra entidad de fundamental importancia en el desarrollo de la música desde el siglo XVII: el acorde, que conforma la estructura armónica de la escala diatónica. La tercera representación de $Z_{12}$ refleja este otro nivel estructural.

## 3.6 El grupo de terceras (estructura armónica).

Hasta ahora, hemos estudiado el grupo de semitonos y el de quintas. Ambos son unidimensionales, en el sentido de que pueden ser descritos en términos de un sólo generador. $Z_{12}$ también puede ser representado como un grupo, por así decirlo, bidimensional. Es lo que se conoce como un producto directo de grupos.

En efecto, se puede demostrar que $Z_{12}$ es isomorfo al producto de dos de sus subgrupos: $Z_3$ y $Z_4$, lo cual se escribe $Z_{12} \approxeq Z_3 \times Z_4$. Esto significa que cualquier elemento de $Z_{12}$ puede ser representado como una pareja (a,b), con $a \in Z_3$ y $b \in Z_4$. El isomorfismo particular entre estas dos representaciones de $Z_{12}$ es el siguiente:

$$(a, b) \longleftrightarrow (4a + 3b)(\bmod 12)$$

Recuérdese que $Z_3$ representa a la tríada aumentada C-E-G$^{\#}$, con intervalos de tercera mayor (3M) entre sus notas, mientras que $Z_4$ representa al acorde de séptima disminuida C-E$^{b}$-G$^{b}$-A, con intervalos de tercera menor (3m) entre sus notas. Con esto en mente, el isomorfismo dado puede interpretarse de la siguiente manera:

En la Figura 4 está representado el producto directo $Z_3 \times Z_4$, con $Z_3$ en el eje X (generado por terceras mayores) y $Z_4$ en el eje Y (generado por terceras menores). Pero sus elementos, en vez de estar escritos en la forma (a,b), están escritos como elementos de $Z_{12}$, de manera que a cada punto (a,b) le corresponde su imagen bajo el isomorfismo mencionado. Por ejemplo, la imagen del punto (0,0) es $0_{12}$, y la imagen de (1,1) es $7_{12}$. Musicalmente, esto significa que todos los intervalos de la escala cromática pueden ser expresados como la combinación de cero a dos terceras mayores y de cero a tres terceras menores, y toda combinación de esta forma corresponde a un y sólo a un intervalo. $7_{12}$ corresponde a una quinta perfecta, la cual, en efecto, puede ser descompuesta en una 3M y una 3m.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 |
| 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 |
| 1 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 |
| 0 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 |
| 3 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 |
| 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 |
| 1 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 |
| $Z_4$ 0 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 |
| 3 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 |
| 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 |
| 1 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 |
| 0 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 |
| 3 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 |
| 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 |
| 1 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 |
| 0 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 |
| | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |

$Z_3$

**Fig. 4 Grupo de Terceras $Z_3 \times Z_4 = Z_{12}$**

Otro ejemplo: el punto (2,1) corresponde a $11_{12}$, la séptima mayor, la cual, ciertamente, se descompone en dos terceras mayores y una menor. Obsérvese que este grupo debería propiamente ser representado como un toro (o como puntos sobre un toro, para ser más precisos); en la Figura 4 este toro ha sido "desenrollado", y varias copias han sido "pegadas" con la finalidad de mostrar todas las relaciones de adyacencia. Pero debe recordarse que todas las repeticiones de un elemento dado, por ejemplo el 2, representan el mismo punto sobre el toro.

Notemos ahora algunos hechos. En primer lugar, las estructuras conectadas maximalmente compactas que pueden construirse, son las tríadas básicas, los acordes mayor y menor, representados por triángulos rectángulos congruentes, que difieren entre sí por una rotación de 180 grados. También aparecen el acorde aumentado y el disminuido, como triángulos "degenerados" en una sola de las dos dimensiones del grupo. Más notable aún es la estructura que representa a la escala diatónica. Así como los triángulos de los acordes se construyen uniendo terceras, de forma análoga la escala diatónica se construye uniendo triángulos de acordes, de una manera tal que resulta una estructura conectada y convexa, la cual abarca una distancia máxima a lo largo de ambos ejes. Esto último puede verse en que, en la Figura 4, la escala contiene dos números 2; como éstos representan el mismo punto, se ve que la escala, al recorrer desde la esquina inferior izquierda del grupo hasta la esquina superior derecha, pasa por todos los valores posibles en los dos ejes. De las otras escalas que se pueden construir como conjuntos de notas adyacentes en el grupo de quintas (con cardinalidad distinta de 7), ninguna presenta estas propiedades, de ser una estructura de terceras/tríadas conectada, convexa, "abarcando" todo el grupo. Por otra parte, no existe otro producto directo de grupos que sea isomorfo a $Z_{12}$.

Gracias a que la Figura 4 muestra varias copias unidas de $Z_3 \times Z_4$, es posible observar que este grupo contiene a las otras dos representaciones de $Z_{12}$. Las líneas diagonales análogas a $x = y + c$, son círculos de quintas desenrollados. Las líneas de la forma $x = -y + c$, son círculos de semitonos. Estos largos círculos, al desenrollarse, se "salen" de la región que contiene a todas las notas de la escala. Esto significa que, si representamos a este grupo de terceras como un toro, el círculo de quintas y el de semitonos dan varias vueltas al toro antes de completar un ciclo.

Este grupo de terceras es el adecuado para definir otro concepto de "cercanía"; ¿en qué sentido afirmamos esto? Estamos hablando de cercanía armónica. Ciertamente, puede decirse que las dos notas que forman un intervalo de tercera, son armónicamente cercanas: pertenecen a un mismo acorde (de hecho, a dos); además, el único movimiento paralelo de notas que se permite en la armonía y el contrapunto clásicos, es precisamente el de las terceras (o su inversión, las sextas). Pero también podemos hablar de una cercanía entre acordes: por ejemplo, en la Figura 4, los conjuntos $\{2, 5, 9\}$ y $\{5, 9, 0\}$ son dos triángulos que están unidos, compartiendo uno de sus lados. Es sabido que, en ocasiones el acorde de segundo grado puede ser sustituido por el de cuarto grado; estos acordes son precisamente los que representan los dos triángulos mencionados.

Hay otro hecho sobresaliente en esta representación de la escala diatónica. A partir del siglo XVII, y en cercana relación con el desarrollo del sistema de tonalidades, la armonía basada en los acordes mayores y menores cobró una importancia central. Al mismo tiempo que el conjunto diatónico se resumió en sólo dos de sus siete modos (la escala mayor y la escala menor natural), cobró importancia el concepto de la tónica; pero como algunos teóricos han señalado, el concepto armónico importante no es tanto el de una nota tónica, sino el del acorde de tónica.

Este último concepto queda reflejado en el grupo de terceras. Como se ve en la Figura 4, la escala diatónica esta formada por tres triángulos "mayores" y tres triángulos "menores". El triángulo mayor ubicado en el centro de la estructura diatónica, es 0, 4, 7, y el triángulo menor central, es 9, 0, 4. Estos dos triángulos corresponden a los acordes de tónica de los modos mayor y menor. Sin embargo, ninguno de estos acordes, ni sus notas fundamentales 0 y 9, tienen una posición privilegiada en el grupo de quintas ni en el grupo de semitonos. Es en este grupo de terceras donde cobra fuerza la estructura armónica del conjunto diatónico.

# Chapter 4

# Escalas diatónicas generalizadas según la Teoría de Grupos

En el capítulo anterior vimos cómo el sistema de afinación occidental, la escala cromática de 12 notas conteniendo a la escala diatónica de 7, puede ser representado en tres grupos isomorfos a $Z_{12}$, y vimos cómo las notables características del conjunto diatónico, en el contexto de cada uno de los tres grupos, reflejan sus propiedades melódicas, armónicas y tonales.

Ahora generalizaremos los conceptos que hemos estudiado, señalando la existencia de otros grupos $Z_n$ que comparten -en su mayoría- las mencionadas propiedades de $Z_{12}$. Esto nos permitirá definir, para escalas microtonales, estructuras análogas a la escala diatónica, los acordes y el círculo de tonalidades.

## 4.1 Generalización a escalas microtonales.

En seguida enunciamos, sin demostraciones, los principales resultados obtenidos por Balzano respecto a la posible generalización de los conceptos estudiados en el capítulo anterior.

Desde luego, cualquier grupo $Z_n$ presenta una analogía con el grupo de semitonos, simplemente tomado como generador al elemento $1_n$. La pregunta importante es ¿cuáles de estos grupos tienen otros dos grupos isomorfos que presenten las siguientes características?

1. Uno de ellos, al que podemos llamar "círculo -o grupo- de quintas", es generado por un elemento distinto de $1_n$.

2. El otro es un producto directo de dos subgrupos de $Z_n$.

3. Cierto subconjunto "conexo" (cuyos puntos son adyacentes) en el grupo de quintas -conjunto al cual llamaremos escala diatónica- resulta ser una estructura conexa y convexa en el grupo producto, donde además abarca una distancia máxima a lo largo de ambos ejes.

Resulta que los grupos $Z_n$ que presentan los anteriores recursos estructurales son aquellos para los cuales n = k(k+1) para algún entero k. De hecho, es esta una condición necesaria y suficiente. Bajo esta condición, el grupo producto está dado por $Z_n \cong Z_k \times Z_{k+1}$. El elemento análogo a la quinta perfecta es $k_n + (k+1)_n = (2k+1)_n$, el cual es generador del grupo de quintas o de tonalidades. Un subconjunto de 2k + 1 notas adyacentes en este grupo de quintas presenta las propiedades deseadas, y es llamado por Balzano *escala diatónica*. Tales propiedades son:

a) la propiedad F→F#, de que dos escalas adyacentes (en el grupo de quintas), difieren en una sola nota, la cual cambia mínimamente (por un "semitono"). Dicho de otra forma, $(2k+1)^2 \equiv 1 \pmod{k(k+1)}$.

b) los elementos $k_n$ y $(k+1)_n$ se comportan estructuralmente como las terceras menor y mayor, respectivamente, en el sentido de que el intervalo diatónico de tercera tiene las longitudes cromáticas k y (k + 1). Esto trae como consecuencia que los acordes por terceras están representados por triángulos rectángulos en el grupo producto, lo cual significa que tales acordes contienen una tercera mayor y una menor.[1]

Ahora bien, para $k < 3$, el $Z_n$ resultante ($Z_6$) no tiene una estructura suficientemente rica: su único generador es $1_6$, así que no hay círculo de quintas posible. El caso k = 3 es $Z_{12}$, y ya hemos visto que $7_{12}$ (o su inverso $5_{12}$) es el único generador, aparte de $1_{12}$. Cuando $k > 3$, hay aparentemente más generadores para escoger, pero de todos ellos, el elemento $(2k+1)_n$ es el único que, como se mencionó, presenta las propiedades buscadas.

La Figura 5 presenta el grupo de terceras para $Z_{20}$, el caso k = 4. Los análogos al círculo de quintas y al círculo de semitonos, pueden identificarse en las líneas diagonales de pendiente positiva y negativa, respectivamente, de la misma manera como lo vimos en $Z_{12}$. La escala diatónica es generada por el elemento $(2k+1)_n = 9_n$ (el análogo de la quinta perfecta).

[1] Con excepción de los acordes disminuido y aumentado, que son triángulos "degenerados" -en una sola dimensión- y contienen sólo terceras menores o sólo terceras mayores, respectivamente.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 |
| 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 |
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | **18** | **3** | **8** | **13** | **18** | 3 | 8 | 13 | 18 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | **14** | **19** | **4** | **9** | **14** | 19 | 4 | 9 | 14 |
| $Z_5$ 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | **10** | **15** | **0** | **5** | **10** | 15 | 0 | 5 | 10 |
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | **6** | **11** | **16** | **1** | **6** | 11 | 16 | 1 | 6 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | **2** | **7** | **12** | **17** | **2** | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | **18** | **3** | **8** | **13** | **18** | 3 | 8 | 13 | 18 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 |
| 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 |
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 |
| 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 |

$Z_4$

**Fig. 5 Grupo de "Terceras" $Z_4 \times Z_5 = Z_{20}$**

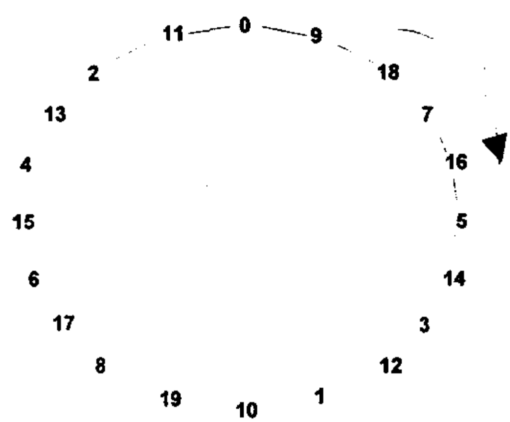



**Fig. 6 Círculo de "Quintas" para $Z_{20}$**

| $Z_6$ | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 25 | 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 1 | 7 | 13 | 19 |
| 4 | 20 | 26 | 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 2 | 8 | 14 |
| 3 | 15 | 21 | 27 | **3** | **9** | **15** | **21** | **27** | **3** | 9 | 15 | 21 | 27 | 3 | 9 |
| 2 | 10 | 16 | 22 | **28** | **4** | **10** | **16** | **22** | **28** | 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 4 |
| 1 | 5 | 11 | 17 | **23** | **29** | **5** | **11** | **17** | **23** | 29 | 5 | 11 | 17 | 23 | 29 |
| 0 | 0 | 6 | 12 | **18** | **24** | **0** | **6** | **12** | **18** | 24 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| 5 | 25 | 1 | 7 | **13** | **19** | **25** | **1** | **7** | **13** | 19 | 25 | 1 | 7 | 13 | 19 |
| 4 | 20 | 26 | 2 | **8** | **14** | **20** | **26** | **2** | **8** | 14 | 20 | 26 | 2 | 8 | 14 |
| 3 | 15 | 21 | 27 | **3** | **9** | **15** | **21** | **27** | **3** | 9 | 15 | 21 | 27 | 3 | 9 |
| 2 | 10 | 16 | 22 | 28 | 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 4 |
| 1 | 5 | 11 | 17 | 23 | 29 | 5 | 11 | 17 | 23 | 29 | 5 | 11 | 17 | 23 | 29 |
| 0 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| 5 | 25 | 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 1 | 7 | 13 | 19 |
| 4 | 20 | 26 | 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 2 | 8 | 14 |
| 3 | 15 | 21 | 27 | 3 | 9 | 15 | 21 | 27 | 3 | 9 | 15 | 21 | 27 | 3 | 9 |
| 2 | 10 | 16 | 22 | 28 | 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 4 |
| 1 | 5 | 11 | 17 | 23 | 29 | 5 | 11 | 17 | 23 | 29 | 5 | 11 | 17 | 23 | 29 |
| 0 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

$Z_5$

**Fig. 7 Grupo de "Terceras" $Z_5$ X $Z_6$ = $Z_{30}$**

Esta escala diatónica consiste en nueve notas conectadas en el círculo de "quintas":

$\{2, 11, 0, 9, 18, 7, 16, 5, 14\} = \{0, 2, 5, 7, 9, 11, 14, 16, 18\}$.

Respecto a la propiedad F→F#, nótese en la Figura 6 que cuando la escala es transportada 9 semitonos hacia arriba, obtenemos las mismas notas, excepto por el 2, que es reemplazado por el 3, resultando en la escala $\{9, 11, 14, 16, 18, 0, 3, 5, 7\}$.

Las estructuras análogas a los acordes mayor y menor son, respectivamente, $\{0,5,9\}$ y $\{0, 4, 9\}$. Obsérvese que esta escala puede ser vista como un conjunto de notas adyacentes en el círculo de "quintas", pero también como un conjunto de nueve tríadas adyacentes en el grupo producto, cuatro de las cuales son mayores, cuatro menores y una disminuida. De hecho, todas estas escalas con 2k + 1 notas tienen k acordes mayores, k acordes menores y uno disminuido. También es de notarse el hecho de que las tríadas están construidas por "terceras", i. e. cada tercer nota de la escala "diatónica".

Digamos algo ahora sobre $Z_{30}$, el caso siguiente. La Figura 7 muestra el grupo producto isomorfo a $Z_{30}$, $Z_5 \times Z_6$. Las tríadas mayor y menor son $\{0, 6, 11\}$ y $\{0, 5, 11\}$, respectivamente. El elemento generador del círculo de tonalidades es $11_{30}$, y la escala diatónica de 11 notas adyacentes en dicho círculo es: $\{8, 19, 0, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28\} = \{0, 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19, 22, 25, 28\}$

Esta escala, por supuesto, presenta la propiedad F→F#, y los acordes que tienen una localización central en el grupo producto son: el acorde "mayor" $\{0, 6, 11\}$ y su "relativo menor" $\{25, 0, 6\}$.

Todo lo que se ha dicho en esta sección son resultados que Gerald Balzano presenta en su artículo, en el que, después de lo anterior, menciona algunos hechos más sobre $Z_{20}$ y $Z_{30}$, e incluso sobre los sistemas correspondientes a otros valores de k: $Z_{42}$, $Z_{56}$, $Z_{72}$ y $Z_{90}$. Nosotros, en vez de abundar en ello, pasaremos a estudiar más a fondo a $Z_{20}$ en las próximas secciones, basándonos para ello en las observaciones hechas por Paul Zweifel en su artículo, ya citado.

## 4.2 Un problema en el modelo.

Antes de comenzar a citar a Zweifel, quiero hacer una observación sobre las conclusiones de Balzano. Recuérdese que las escalas de Balzano son escalas de n elementos, con n = k(k+1), donde k y k+1 son los tamaños cromáticos de la tercera menor y mayor, respectivamente (véase la propiedad b de estas escalas, descrita en la sección anterior). Nótese que n es igual a $k^2 + k$, es decir que cuando crece el número de divisiones de la octava, el incremento en n es del orden del cuadrado del incremento en k. Esto significa que, a medida que se incremente el número de notas en la octava, la tercera diatónica será proporcionalmente más corta, en relación con la octava. Si queremos que en estas escalas microtonales los acordes sigan estando formados por terceras diatónicas (cada tercer nota de la respectiva escala diatónica), es inevitable que serán cada *vez más* "estrechos", a medida que dividamos más y más la octava. Esto está en relación directa también con el tamaño de la quinta, que está definida como la suma de una tercera mayor y una menor: k + (k + 1) = 2k + 1. Por ejemplo, para la escala diatónica contenida en $Z_{42}$, la quinta de Balzano mide 371.4 céntimos: es más pequeña que la tercera mayor temperada de la escala usual. Para el caso de $Z_{90}$ la situación ya es mucho peor, pues la quinta de Balzano mide 253.3 céntimos: casi exactamente una segunda mayor más un cuarto de tono (de la escala usual). ¿Se imagina el lector cómo sonaría un "acorde" de tres notas apiñadas en tan pequeño espacio? Además, la diferencia entre la tercera menor y la mayor sería también cada vez menor. Evidentemente, habrá muy pocas posibilidades para una armonía interesante a medida que el número de divisiones de la octava sea más grande.

Ante este problema, podemos adoptar dos posturas. La primera consiste en tratar de conservar *todas* las propiedades enunciadas por Balzano, en especial, la propiedad b de las escalas diatónicas por él descritas. Al hacer esto, deberemos aceptar las consecuencias analizadas en el párrafo anterior.

La postura alternativa consiste en flexibilizar las condiciones impuestas sobre las escalas construidas; en particular, la que se refiere a la mencionada propiedad b, permitiendo que los acordes se formen por intervalos mayores que las terceras diatónicas (por ejemplo, por cuartas) para, de esta manera, contrarrestar el "empequeñecimiento" proporcional de los intervalos. Esto implica renunciar a los acordes por terceras; sin embargo, resuelve el mencionado problema, proporcionando -tal vez- acordes que suenen "bien", y abarquen un mayor rango de la escala. Sin embargo, es cierto que surgen otros problemas: ¿Cómo podría definirse a la "quinta"? ¿También como la suma de una "tercera" mayor (o el intervalo que sustituya a la tercera) más una "tercera" menor? La "quinta" definida de esta manera, claramente sería distinta del elemento 2k + 1 propuesto por Balzano. Esta nueva quinta ¿coincidiría con algún generador de

$Z_n$, que pueda ser identificado con un "círculo de quintas"? Sorprendentemente, estas cuestiones pueden ser resueltas de manera satisfactoria, al menos para el caso de $Z_{20}$. Así lo hace Zweifel con su propuesta, aunque él no identificó este problema (o al menos no lo menciona), y sus motivaciones son otras. Primero veamos cómo se resuelve el problema de las quintas.

## 4.3 Cuartas y quintas generalizadas. Escalas diatónicas y pentatónicas.

En el capítulo anterior, entre las propiedades de $Z_{12}$, se mencionó que no sólo el correspondiente elemento $(2k + 1)_{12}$, que en este caso es $7_{12}$, genera al grupo de quintas, pues éste también es generado por $5_{12}$, el inverso de $7_{12}$. Bueno, para ser exactos, $5_{12}$ genera al círculo de cuartas, es decir, al círculo de quintas, pero recorrido en sentido inverso. Además, se señaló el notable hecho de que, así como 7 notas adyacentes en el círculo de quintas forman una escala diatónica, de manera análoga 5 notas adyacentes forman una escala pentatónica, la cual, al igual que la escala diatónica, presenta la propiedad F→F#. Bueno, para ser fieles a la verdad, la escala pentatónica presenta la propiedad F# →F en el círculo de quintas. Pero si observamos a esta escala pentatónica en el círculo de cuartas (que podríamos decir que es su "espacio natural"), resulta que presenta ni más ni menos que la propiedad F→F#.

Esta dualidad entre las escalas diatónica y pentatónica en $Z_{12}$ fue observada por Balzano, pero no le prestó importancia al momento de generalizar los resultados a otras escalas. Resulta que, en general, si j es un elemento generador del grupo $Z_n$, también lo es su inverso, n-j. Esta es la observación fundamental de Zweifel: en las otras escalas, donde Balzano considera como generador sólo al elemento $(2k+1)_n$ (aparte, claro está, de $1_n$), deberíamos también considerar a su inverso, $(n-(2k+1))_n$ (recuérdese que $n=k(k+1)$), de manera que uno de ellos será la quinta generalizada, y el otro, la cuarta generalizada.

Pero ¿qué criterio usaremos para decidir cuál será la "quinta", y cuál la "cuarta"? Seguramente que lo más lógico sería asignar el papel de quinta al intervalo de mayor longitud, y el papel de cuarta, al de menor longitud. Aquí sucede un fenómeno curioso: mientras que para el caso de $Z_{12}$, es decir $k=3$, tenemos que $(2k+1)$ es mayor que su inverso, para todos los valores de k mayores a 3 sucede lo contrario, pues $(n-(2k+1))>2k+1$ (esta afirmación es demostrada en el apéndice A). Esto sugiere que para k>3, el elemento $(2k+1)_n$, al cual Balzano asigna el papel de la quinta, en realidad vendría a ser como la cuarta, dejando el papel de quinta a su inverso, el elemento $(n-(2k+1))_n$. Además, ambos elementos generan el mismo grupo de quintas (aunque en sentidos inversos); en este grupo, de acuerdo con lo anterior, un conjunto de 2k+1 notas adyacentes formaría el análogo de la escala pentatónica, mientras que un conjunto de n-(2k+1) notas adyacentes, sería el verdadero análogo de la escala diatónica.

Balzano demostró que la escala de 2k+1 notas tiene la propiedad F→F# probando que $(2k+1)(2k+1)\equiv 1 \pmod{k(k+1)}$, lo cual significa que, en el grupo de quintas, si recorremos 2k+1 notas en el sentido de las cuartas generalizadas, equivale a movernos un semitono ascendente desde la nota inicial. Ahora, la pregunta importante es ¿qué hay con la escala de n-(2k+1) notas? ¿presenta la propiedad F→F#? Esto equivale a preguntarnos si, en el mismo grupo de quintas, el recorrer n-(2k+1) notas en el sentido de las quintas generalizadas, equivale a movernos un semitono ascendente desde la nota inicial, es decir, si $(n-(2k+1))^2 \equiv 1 \pmod n$.

La respuesta es afirmativa, y es muy fácil demostrarlo, ya que

$(n-(2k+1))^2 \pmod n = \left[n^2 - 2n(2k+1) + (2k+1)^2\right] \pmod n$.

Los dos primeros términos son, evidentemente, iguales a cero (mod n); en cuanto al último, $(2k+1)^2 \equiv 1 (mod\ n)$ *es precisamente lo que ya había demostrado Balzano. Por lo tanto, la escala* de n-(2k+1) notas, generada por el elemento $(n-(2k+1))_n$ (la quinta generalizada), efectivamente presenta también la propiedad F→F#.

Considérese la acción de transportar la escala "diatónica" de n-(2k+1) notas, a una quinta descendente (o, lo que es lo mismo, una cuarta ascendente); o de transportar la escala "pentatónica" de 2k+1 notas, a una cuarta descendente (o una quinta ascendente). Es fácil demostrar que ambas traslaciones resultan en que una sola de las notas de la escala desciende un semitono; esta es la propiedad F# →F para ambas escalas, y es -en ambos casos- equivalente a demostrar que $(2k+1)(n-(2k+1))\equiv -1 \pmod n$. Pero

$(2k+1)(n-(2k+1)) \pmod n = \left[n(2k+1) - (2k+1)^2\right] \pmod n$

Claramente, $n(2k+1)\equiv 0 \pmod n$, por lo que el resultado es inmediato.

Así pues, tanto las escalas diatónicas de n-(2k+1) notas, como las escalas pentatónicas de 2k+1 notas, presentan la propiedad F→F#. Queda por resolver el problema, planteado en la sección anterior, de la relación entre la nueva "quinta" y las terceras; o más aún, de definir un sustituto conveniente para las terceras. Como se mencionó, la propuesta de Zweifel resuelve tal problema para el caso de $Z_{20}$. A continuación se describe cómo sucede esto.

## 4.4 Un caso interesante: $Z_{20}$.

En $Z_{20}$, llamaremos *escala diatónica* a la escala de n-(2k+1) = 11 notas adyacentes en el grupo de quintas, generado por el elemento $11_{20}$. Esto se muestra en la página 73. Ordenando las notas, la escala queda así:

$$\{0,2,4,6,8,9,11,13,15,17,19\}. \qquad (1)$$

Puesto que en esta sección nos referiremos continuamente a esta escala diatónica inmersa en la escala cromática de 20 notas, tendremos que acostumbrarnos a su particular terminología. Así pues, la "cuarta generalizada" es ahora una sexta diatónica (de longitud cromática 9), y la "quinta generalizada" es una séptima diatónica (de longitud cromática 11). El círculo de tonalidades será llamado "círculo de séptimas". Cuando haya posibilidad de confusión, aplicaremos el subíndice $_{20}$ a todos los conceptos que lo necesiten.

Ahora que la "quinta generalizada" es una séptima, surge la pregunta ¿cómo construiremos acordes? Al intervalo de longitud cromática 6, llámesele cuarta mayor, y al de longitud cromática 5, llámesele cuarta menor. Nótese en la escala (1) que, con estas definiciones, la séptima perfecta es igual a una cuarta mayor más una cuarta menor. Así pues, podemos construir acordes por cuartas. Por ejemplo, el acorde $\{0,6,11\}$ sería un acorde "mayor", mientras que $\{6,11,17\}$ sería un acorde "menor". Esto resuelve el problema de definir "terceras generalizadas" (y acordes) que sean congruentes con la "quinta generalizada".

Sin embargo, nuestra solución tiene el problema descrito en la sección 4.2, de no cumplir con la propiedad b) de la sección 4.1; es decir, nuestras "terceras generalizadas", que son la cuarta mayor y menor (elementos $6_{20}$ y $5_{20}$), no coinciden con los elementos k y k+1, que son los generadores del grupo producto. Obsérvese la Figura 8, donde el conjunto de notas unidas por líneas dobles representa a nuestra escala diatónica (1). El problema señalado se refleja en el hecho de que los triángulos rectángulos que forman la estructura no coinciden con los acordes por cuartas que hemos definido para esta escala.

Ahora, en la misma Figura 8, obsérvese el conjunto de notas unidas por líneas sencillas. Paul Zweifel halló esta estructura, que representa igualmente a la escala (1), pero cuyos triángulos sí coinciden con los acordes por cuartas de la escala. Por supuesto, era imposible que esto sucediera con triángulos rectángulos, así que hubo que "inclinarlos". ¿Por qué es posible esta notable "distorsión"? Eso lo discutiremos algunos párrafos más adelante. Por el momento, bástenos con saber que tal distorsión permite que nuestra escala, con su estructura de acordes por cuartas, pueda ser representada como una estructura de triángulos (acordes) conexa y convexa, en el grupo producto $Z_4 \times Z_5$.

Continuando con la adaptación de la terminología usual a esta escala, llamaremos semitono al intervalo existente entre las notas $0_{20}$ y $1_{20}$, el cual mide 60 céntimos ($= \frac{1200}{20}$); análogamente, un tono será el intervalo que hay entre las notas $0_{20}$ y $2_{20}$, que tiene una longitud de 120 céntimos. Analicemos a los subgrupos de $Z_{20}$.

$Z_{20}$ tiene como subgrupos a $Z_{10}$, $Z_5$, $Z_4$, y $Z_2$. El primero, $Z_{10} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, es una de las dos escalas de tonos enteros en $Z_{20}$. $Z_5 = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ no es interpretable como acorde, pues el intervalo de longitud cromática 4 es una tercera diatónica, y hemos decidido que los acordes los construiremos por cuartas.

$Z_4$ es muy interesante; como se recordará, también es subgrupo de $Z_{12}$. Evidentemente, al medir sus intervalos en céntimos, es idéntico como acorde de una escala o de la otra; es decir, suena igual. Pero en $Z_{20}$ sus notas son $\{0, 5, 10, 15\}$. Analicemos esto con cuidado: en la escala (1) inmersa en $Z_{20}$, la cuarta$_{20}$ menor tiene una longitud de 5 semitonos$_{20}$, que equivale a 300 céntimos; pero esta longitud es idéntica a la longitud de la tercera$_{12}$ menor temperada de $Z_{12}$: 3 semitonos$_{12}$ = 300 céntimos. Resultado: la cuarta$_{20}$ menor suena igual que la tercera$_{12}$ menor, por lo que el acorde $\{0_{20}, 5_{20}, 10_{20}, 15_{20}\}$ suena igual que el acorde $\{0_{12}, 3_{12}, 6_{12}, 9_{12}\}$.

¿Qué nombre será conveniente, en $Z_{20}$, para este acorde? Es un acorde de *decena disminuida*; he aquí la explicación: al construir por cuartas los acordes, se sigue que un acorde de tres notas en la escala (1) contiene a las notas que están a intervalos de una cuarta y una séptima sobre la fundamental. Consecuentemente, un acorde de cuatro notas contiene, además de las anteriores, una decena sobre la fundamental. Ahora bien, la nota 19 puede ser considerada como la *sensible* de esta escala, por lo que $\{19, 4, 9, 15\}$ sería el acorde de *decena de sensible* (análogo del acorde de *séptima de sensible* de la escala mayor de $Z_{12}$).

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 |
| 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 |
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 |
| $Z_5$ 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 |
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 |
| 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 |
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 |
| 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 |

$Z_4$

B A

Fig. 8

Finalmente, disminuyamos en un semitono la decena de este acorde, obteniendo $\{19, 4, 9, 14\}$. Es evidente que este acorde, que tiene la misma estructura interválica que $\{0, 5, 10, 15\}$, es el análogo exacto del acorde de séptima disminuida de $Z_{12}$, por lo que debe llamarse *acorde de decena disminuida*; contiene, sobre la fundamental, una cuarta menor (intervalo análogo de la tercera menor de $Z_{12}$), una séptima disminuida (intervalo análogo de la quinta disminuida de $Z_{12}$), y una decena disminuida (intervalo análogo de la séptima disminuida de $Z_{12}$). Ahora debe ser claro que llamar a $\{0, 5, 10, 15\}$ "acorde de novena" en $Z_{20}$ -como lo propone Zweifel- sólo porque la nota 15 es la novena de la escala diatónica (1), sería tan erróneo como llamar "acorde de sexta" a $\{Do, Mi^b, Sol^b, La\}$, sólo porque La es la sexta de la escala de Do Mayor.

Por último, el subgrupo $Z_2 = \{0, 10\}$ es uno de los diez tritonos que contiene $Z_{20}$. Si la primera nota de la escala es $0_{20}$, entonces su tritono es la nota $10_{20}$. Nótese que esta nota se encuentra entre los generadores $9_{20}$ y $11_{20}$, de la misma manera que en $Z_{12}$ el tritono $6_{12}$ se encuentra entre los generadores $5_{12}$ y $7_{12}$.

Ya hemos observado que el acorde de $\text{decena}_{20}$ disminuida suena igual que el de $\text{séptima}_{12}$ disminuida, al cual vendría a sustituir (tal vez incluso en funciones); esto es así, por supuesto, porque la $\text{cuarta}_{20}$ menor suena igual que la $\text{tercera}_{12}$ menor, ya que ambas miden 300 céntimos (recuérdese que el $\text{semitono}_{20}$ mide 60 céntimos, y que la $\text{cuarta}_{20}$ menor y mayor mide, respectivamente, 5 y 6 $\text{semitonos}_{20}$). Ahora, notemos que la $\text{cuarta}_{20}$ mayor (360 céntimos), aunque está relativamente alejada de la $\text{tercera}_{12}$ mayor temperada (400 céntimos), no lo está tanto de la $\text{tercera}_{12}$ mayor justa (386 céntimos). La $\text{séptima}_{20}$ justa (que sustituye a la $\text{quinta}_{12}$ justa, de 700 céntimos -la temperada-) mide 11 $\text{semitonos}_{20}$ y 660 céntimos. Como resultado, podría esperarse que tampoco los otros acordes, construidos por $\text{cuartas}_{20}$, suenen *muy* distinto de los acordes de la familiar escala mayor.

Ahora, volvamos a la Figura 8. Nótese que la estructura en líneas dobles -a la que llamaremos A- y la estructura en líneas sencillas -a la que llamaremos B- son casi idénticas; sólo cambia la manera de construir los triángulos. Ambas estructuras tienen en común las líneas de la forma $y = x + c$ (es decir, el círculo de $\text{séptimas}_{20}$) y las líneas horizontales (de una longitud de 5 $\text{semitonos}_{20}$). Esto significa que los intervalos que miden 11 y 5 $\text{semitonos}_{20}$ (a los que hemos llamado $\text{séptima}_{20}$ perfecta y $\text{cuarta}_{20}$ menor, respectivamente) forman parte de los acordes en ambas estructuras. Pero las líneas verticales han sido sustituidas por otras. Véase, por ejemplo, el rombo que tiene por vértices a las notas 6, 11, 0, 15; de sus dos diagonales, la estructura A incluye a la vertical, mientras que B incluye a la otra. De igual manera, en todos los rombos que -en la estructura A- tienen una línea vertical como diagonal, ésta ha sido sustituida -en la estructura B- por la otra diagonal. Por cierto, las líneas verticales representan una longitud de 4 semitonos$_{20}$, mientras que las diagonales que las sustituyen representan 6 semitonos$_{20}$, que es la longitud de la cuarta$_{20}$ mayor.

El lector observador habrá notado que la escala (1) es idéntica a la escala discutida en la sección 2.5. En este momento, tal vez convenga releer dicha subsección para recordar las propiedades que, según se discutió, tiene esta escala en común con la escala mayor de $Z_{12}$; en particular, los comentarios sobre su estructura de tonos y semitonos. A continuación recordamos la escala (1), con una propuesta de nombres (en letras) para sus notas. Las líneas dobles verticales, representan una distancia de un tono, y las sencillas, de un semitono.

| número | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| letra | C | D | E | F | G | H | I | J | K | A | B | C |

Para una referencia completa, reproducimos la estructura en "hexacordes" y en tonos-semitonos de esta escala, dadas en la sección 2.5:

$$\underbrace{0,2,4,6,8,9}, \underbrace{11,13,15,17,19,0}.$$
$$\underbrace{T\,T\,T\,T\,S}\ \mathrm{T}\ \ \underbrace{T\,T\,T\,T\,S}$$

En la usual escala diatónica, el modo mayor determina cuáles son los intervalos mayores: los que se miden desde la tónica Do a cada una de las notas de la escala, y la distancia cromática de Do a cada nota indica la medida en semitonos de estos intervalos mayores. Si aceptamos que, en la escala diatónica de $Z_{20}$, el modo mayor es el que comienza en la nota 0, entonces los intervalos mayores son los siguientes (señalados con una M). También se incluyen los intervalos perfectos (señalados con una P): el unísono y la "octava" (que en este caso es una docena), y la "cuarta" y "quinta" generalizadas. Para todos los intervalos se muestra su medida en semitonos$_{20}$.

| Intervalo | 1P | 2M | 3M | 4M | 5M | 6P | 7P | 8M | 9M | 10M | 11M | 12P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Semitonos | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 20 |

Nótese que al definir los respectivos intervalos menores, quedarán cubiertas todos los elementos de $Z_{20}$, a excepción del tritono $10_{20}$, que puede ser llamado sexta$_{20}$ aumentada o séptima$_{20}$

disminuida (de manera similar al tritono $6_{12}$ de $Z_{12}$, que se llama cuarta$_{12}$ aumentada o quinta$_{12}$ disminuida).

A continuación se muestran los acordes de tres notas, y se indica, junto con el grado, cuáles son mayores, cuáles menores, y cuál es el acorde disminuido (el cual, como sería deseable, es el acorde de "sensible"):

Acordes de la escala mayor de C en $Z_{20}$

| Séptima | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cuarta | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 0 | 2 | 4 |
| Fundamental | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| Grado | I | II | *iii* | *iv* | *v* | VI | VII | VIII | *ix* | *x* | $xi_o$ |

Los nombres -con letras y alteraciones- para las 20 notas, quedan entonces de la siguiente manera:

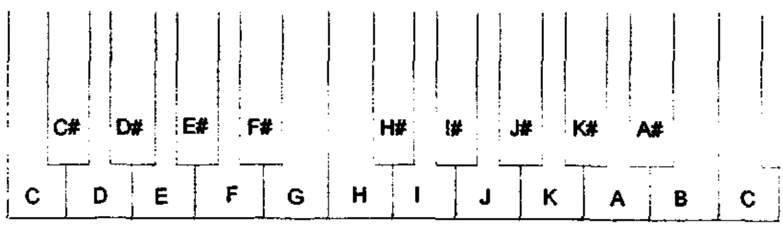
| nota | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| letra | C | C# <br> $D^b$ | D | D# <br> $E^b$ | E | E# <br> $F^b$ | F | F# <br> $G^b$ | G | H | H# <br> $I^b$ | I | I# <br> $J^b$ | J | J# <br> $K^b$ | K | K# <br> $A^b$ | A | A# <br> $B^b$ | B |

La siguiente página es una propuesta de afinación de esta escala, con las frecuencias de cada nota en ciclos por segundo. Se hizo de manera que la nota $C_{20}$ tenga el mismo número de vibraciones por segundo que la nota Do de la escala usual. Gracias al hecho de que las cuartas$_{20}$ menores suenan igual que las terceras$_{12}$ menores, resulta que también la nota $K_{20}$ tiene el mismo número de vibraciones que la nota La$_{12}$, y la nota H#$_{20}$ tiene las mismas que la nota Fa# de la escala usual.

El rango de frecuencias mostrado corresponde a lo que podría llamarse la octava "central" (incluye a la nota K(5) = 440 Hz). Para calcular las frecuencias correspondientes a otras octavas, puede procederse como en la escala usual: multiplicando o dividiendo sucesivamente por 2 la frecuencia de una nota dada, para obtener la misma nota en otra octava.

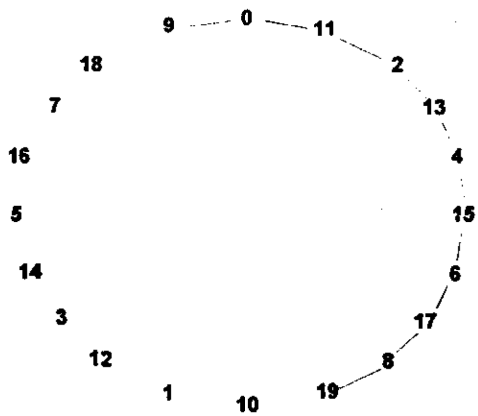
Por ejemplo, en la escala usual, La(3) = 110 Hz, La(4) = 220 Hz, La(5) = 440 Hz, La(6) = 880 Hz, La(7) = 1760 Hz, etc. De la misma manera, para $Z_{20}$ tendríamos: K(3) = 110 Hz, K(4) = 220 Hz, K(5) = 440 Hz, K(6) = 880 Hz, K(7) = 1760 Hz, etc.

| Nota | | frecuencia |
|---|---|---|
| número | letra | ciclos / seg. |
| 0 | C | 261.6 |
| 1 | C# | 270.9 |
| 2 | D | 280.4 |
| 3 | D# | 290.3 |
| 4 | E | 300.5 |
| 5 | E# | 311.1 |
| 6 | F | 322.1 |
| 7 | F# | 333.5 |
| 8 | G | 345.2 |
| 9 | H | 357.4 |
| 10 | H# | 370.0 |
| 11 | I | 383.0 |
| 12 | I# | 396.6 |
| 13 | J | 410.5 |
| 14 | J# | 425.0 |
| 15 | K | 440.0 |
| 16 | K# | 455.5 |
| 17 | A | 471.6 |
| 18 | A# | 488.2 |
| 19 | B | 505.4 |
| 0 | C | 523.3 |



También se muestra cómo podría construirse un teclado para $Z_{20}$. Las teclas podrían construirse un poco más delgadas que las de los teclados normales, para que un pianista pueda alcanzar por lo menos una "octava" (que en este caso es una docena).

Las distintas tonalidades, al igual que en $Z_{12}$, pueden ser ordenadas según el círculo de séptimas (el cual aparece a continuación) en número creciente de alteraciones. En la siguiente página se muestran las 20 tonalidades mayores, con sus respectivas armaduras. Recuérdese que cada tonalidad difiere de la anterior en sólo una nota, la que aparece alterada. Es decir, para los sostenidos, la nueva nota con sostenido, asciende un semitono; para los bemoles, la nota en la que desaparece el bemol, asciende un semitono. En la Tercera Parte trataremos el problema de cómo modular entre tonalidades.




**Círculo de séptimas en $Z_{20}$, con su escala diatónica.**

| Tonalidad | A r m a d u r a | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C=0 | | | | | | | | | | |
| I =11 | $H^{\#}=10$ | | | | | | | | | |
| D=2 | $H^{\#}=10$ | $C^{\#}=1$ | | | | | | | | |
| J =13 | $H^{\#}=10$ | $C^{\#}=1$ | $I^{\#}=12$ | | | | | | | |
| E =4 | $H^{\#}=10$ | $C^{\#}=1$ | $I^{\#}=12$ | $D^{\#}=3$ | | | | | | |
| K=15 | $H^{\#}=10$ | $C^{\#}=1$ | $I^{\#}=12$ | $D^{\#}=3$ | $J^{\#}=14$ | | | | | |
| F =6 | $H^{\#}=10$ | $C^{\#}=1$ | $I^{\#}=12$ | $D^{\#}=3$ | $J^{\#}=14$ | $E^{\#}=5$ | | | | |
| A=17 | $H^{\#}=10$ | $C^{\#}=1$ | $I^{\#}=12$ | $D^{\#}=3$ | $J^{\#}=14$ | $E^{\#}=5$ | $K^{\#}=16$ | | | |
| G=8 | $H^{\#}=10$ | $C^{\#}=1$ | $I^{\#}=12$ | $D^{\#}=3$ | $J^{\#}=14$ | $E^{\#}=5$ | $K^{\#}=16$ | $F^{\#}=7$ | | |
| B=19 | $H^{\#}=10$ | $C^{\#}=1$ | $I^{\#}=12$ | $D^{\#}=3$ | $J^{\#}=14$ | $E^{\#}=5$ | $K^{\#}=16$ | $F^{\#}=7$ | $A^{\#}=18$ | |
| H=10 | $H^{\#}=10$ | $C^{\#}=1$ | $I^{\#}=12$ | $D^{\#}=3$ | $J^{\#}=14$ | $E^{\#}=5$ | $K^{\#}=16$ | $F^{\#}=7$ | $A^{\#}=18$ | $G^{\#}=9$ |
| $D^{b}=1$ | $I^{b}=10$ | $D^{b}=1$ | $J^{b}=12$ | $E^{b}=3$ | $K^{b}=14$ | $F^{b}=5$ | $A^{b}=16$ | $G^{b}=7$ | $B^{b}=18$ | |
| $J^{b}=12$ | | $D^{b}=1$ | $J^{b}=12$ | $E^{b}=3$ | $K^{b}=14$ | $F^{b}=5$ | $A^{b}=16$ | $G^{b}=7$ | $B^{b}=18$ | |
| $E^{b}=3$ | | | $J^{b}=12$ | $E^{b}=3$ | $K^{b}=14$ | $F^{b}=5$ | $A^{b}=16$ | $G^{b}=7$ | $B^{b}=18$ | |
| $K^{b}=14$ | | | | $E^{b}=3$ | $K^{b}=14$ | $F^{b}=5$ | $A^{b}=16$ | $G^{b}=7$ | $B^{b}=18$ | |
| $F^{b}=5$ | | | | | $K^{b}=14$ | $F^{b}=5$ | $A^{b}=16$ | $G^{b}=7$ | $B^{b}=18$ | |
| $A^{b}=16$ | | | | | | $F^{b}=5$ | $A^{b}=16$ | $G^{b}=7$ | $B^{b}=18$ | |
| $G^{b}=7$ | | | | | | | $A^{b}=16$ | $G^{b}=7$ | $B^{b}=18$ | |
| $B^{b}=18$ | | | | | | | | $G^{b}=7$ | $B^{b}=18$ | |
| H =9 | | | | | | | | | $B^{b}=18$ | |

El lector ya debe estar convencido de que esta escala tiene todo el derecho a ser llamada "escala mayor diatónica" en $Z_{20}$, por las similitudes que guarda con la escala mayor usual en $Z_{12}$ (similitudes halladas tanto en este capítulo, como en los anteriores). Zweifel propone que el modo mayor de esta escala debe ser el que comienza en la nota 11, es decir, $\{11, 13, 15, 17, 19, 0, 2, 4, 6, 8, 9\}$. La razón que da para ello, se basa en la observación de Balzano sobre $Z_{12}$: en el grupo producto $Z_3 \times Z_4$, los triángulos que representan a los acordes de Do mayor y La menor, se encuentran exactamente en el centro de la estructura que representa a la escala diatónica, y esto explica que los modos de Do y La sean el principal mayor y su relativo menor, respectivamente. Siguiendo este razonamiento, Zweifel encuentra, en el grupo producto $Z_4 \times Z_5 \cong Z_{20}$, que los acordes $\{6, 11, 17\}$ y $\{11, 17, 2\}$ son los que ocupan una posición central en la estructura de la escala, y que, por lo tanto, el modo mayor debe ser el que comienza en la nota $11_{20}$, mientras que su relativo menor, el que comienza en la nota $6_{20}$.

Sin embargo, de esta manera se pierden muchas de las similitudes que hemos encontrado con la escala mayor usual. Por otra parte, el hecho de que, en $Z_{12}$, los acordes de Do mayor y La menor se encuentren en el centro de la escala, podría apuntar más hacia una característica de simetría de la escala, que al mero hecho de que se encuentren *exactamente* en el centro. Obsérvese nuevamente la Figura 8; en la estructura B, los acordes $\{0, 6, 11\}$ y $\{17, 2, 8\}$ ocupan una posición simétrica uno del otro, respecto al centro de la escala, que es el rombo que tiene por vértices a las notas 17, 2, 6 y 11. Nosotros proponemos a $\{0, 6, 11\}$ como el acorde mayor de tónica, y a $\{17, 2, 8\}$ como su relativo menor. Las razones para escoger a $\{0, 6, 11\}$ como el acorde de tónica, son las similitudes con la escala mayor halladas; sobre todo, la posición de los semitonos, la estructura en hexacordes, y la distribución de los grados de la escala. Las razones para elegir a $\{17, 2, 8\}$ como el relativo menor, serán formalizadas con las herramientas que desarrollaremos en la Tercera Parte de este trabajo, y están relacionadas con el grupo de simetrías de la escala.

# Part III

# Una teoría de la modulación basada en simetrías

Recientemente, el concepto de simetría ha sido aplicado exitosamente a problemas de teoría musical [*Mazzola*1990]. Por ejemplo, los fenómenos del contrapunto y la modulación han sido abordados por los creadores de la Teoría Matemática de la Música, quienes, con un lenguaje análogo al de la física moderna, utilizan simetrías para explicar "fuerzas de transición". En contrapunto, se menciona la existencia de simetrías locales [*Mazzola*1989] mientras que, por otro lado, se postula la existencia de un cuanto de modulación [*Mazzola*1990]. Lo interesante es que, en ambos casos, los resultados obtenidos pueden ser interpretados como generalizaciones de la teoría musical clásica.

En [*Mazzola*1985], el matemático y compositor suizo Guerino Mazzola desarrolla un modelo que proporciona una modulación directa entre dos escalas -cualquiera que sea su grado de relación en el círculo de quintas- pertenecientes a una misma clase de traslación (es decir, dos escalas equivalentes bajo traslación, o en términos musicales, transposición) para las escalas musicales más usadas en la afinación de igual temperamento, con una división de la octava en doce partes. Las modulaciones obtenidas para los grados clásicos de relación entre tonalidades, concuerdan con la teoría clásica. Un modelo similar fue desarrollado para la afinación justa [*Mazzola*1990], pero aquí nos apegaremos a la afinación de igual temperamento.[2]

[2] Aquí debemos hacer una aclaración: dado que al momento de realizar este trabajo sólo es posible encontrar las fuentes originales de Mazzola en idioma alemán, nos basaremos en el artículo ***Musical Modulation by Symmetries*** (Modulación Musical por Simetrías), de Daniel Muzzulini, quien extiende el modelo para incluir escalas arbitrarias de 7 notas en $Z_{12}$.

# Chapter 5

# Las simetrías de $Z_{12}$ en la modulación musical

## 5.1 La interpretación triádica de una escala.

**Definition 32** *Una escala de siete notas es un subconjunto $s$ de $Z_{12}$ formado por siete elementos.*

Si representamos a $Z_{12}$ en el círculo de semitonos, podemos escoger una nota arbitraria, digamos $D_1$, como la *tónica* de $s$, y numerar en sentido creciente las notas de $s$: $D_1, D_2, \ldots, D_7$.

**Definition 33** *Para $n = 1, \ldots, 7$, definimos el acorde o tríada sobre el enésimo grado como el conjunto $s_n = \{D_n, D_{(n+2) \bmod 7}, D_{(n+4) \bmod 7}\}$*

por ejemplo, $s_1 = \{D_1, D_3, D_5\}$, $s_2 = \{D_2, D_4, D_6\}, \ldots, s_7 = \{D_7, D_2, D_4\}$.

**Definition 34** *La cubierta $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$ de la escala $s$ por sus tríadas es llamada la interpretación triádica de $s$, y es denotada por $s^{(3)}$.*

Es claro que esta definición de $s^{(3)}$ es independiente de la elección de la tónica de $s$.

Se puede dar una interpretación geométrica precisa de estos conceptos. Aquí no ahondaremos en este tema; sólo mencionaremos, para despertar la curiosidad del lector, que el *nervio* de la interpretación triádica $s^{(3)}$ de una escala $s$ de siete notas es una banda de Möbius. El lector interesado, puede consultar [$Mazzola$1990], [$Muzzulini$] o [$Montiel$].

## 5.2 Conjuntos cadenciales.

**Definition 35** *Decimos que dos escalas $r$ y $s$ pertenecen a la misma clase de traslación, si existe una traslación definida en $Z_{12}$ que transforma $r$ en $s$.*

Sean $x,p \in \mathrm{Z}_{12}$; denotaremos como $e^p(x) = x + p$ a una traslación de $p$ semitonos en $Z_{12}$, para obtener la "ley exponencial" $e^p \cdot e^q = e^{p+q}$ para dos traslaciones sucesivas. Nótese que una traslación corresponde a una rotación del círculo de semitonos.

**Definition 36** *Un subconjunto $\mu$ de tríadas de $s^{(3)}$ es un conjunto cadencial de $s$ si no existe ninguna otra escala $r$, en la misma clase de traslación de $s$, tal que todos los elementos de $\mu$ sean también tríadas de $r^{(3)}$. El conjunto cadencial $\mu$ es un conjunto cadencial mínimo si ningún subconjunto propio de $\mu$ es un conjunto cadencial.*

La importancia de los conjuntos cadenciales mínimos es que nos permiten distinguir entre escalas pertenecientes a la misma clase de traslación, pero sin tener que enumerar todas sus notas o tríadas[$Mazzola$1990].

Denotaremos de la manera usual a las tríadas de una escala diatónica: con números romanos, añadiendo un superíndice de la tonalidad cuando sea necesario. Por ejemplo, $\mathrm{IV}^C$ denota la tríada del cuarto grado en la tonalidad de C Mayor (la cual es un acorde mayor).

**Example 37** *1. Una escala mayor diatónica tiene los siguientes conjuntos cadenciales mínimos: $\{ii, iii\}$, $\{iii, IV\}$, $\{IV, V\}$, $\{ii, V\}$ y $\{vii_o\}$. El conjunto $\{I^C, V^C\}$ no es un conjunto cadencial de Do Mayor, por ejemplo, pues ambos acordes pertenecen también a la interpretación triádica de Sol Mayor. El conjunto $\{I, IV, V\}$ es un conjunto cadencial, pero no es mínimo.*

*2. Para la escala menor armónica, cualquier pareja de tríadas pertenecientes a su interpretación triádica es un conjunto cadencial mínimo. Luego, una escala menor armónica tiene 21 (= $C_2^7$) distintos conjuntos cadenciales mínimos.*

Aquí se puede hacer una observación interesante: uno de los resultados obtenidos por Muzzulini es que, entre todas las posibles escalas de siete notas en $Z_{12}$, la escala menor armónica es la que tiene el mayor número de conjuntos cadenciales mínimos.

## 5.3 Las simetrías de una interpretación triádica.

Considérese el grupo $Aut(Z_{12}) = \{1,5,7,11\}$ de automorfismos de $Z_{12}$, donde para $x \in Z_{12}$, $u, v \in Aut(Z_{12})$, $u(x) = ux(mod 12)$, y $u \circ v(x) = uvx (\mathrm{mod}\, 12)$ (o, abusando de la notación, $u \circ v = uv(\mathrm{mod}\, 12)$).

**Definition 38** *Una transformación afín invertible en $Z_{12}$ es de la forma, $e^p u$, con $p \in Z_{12}$ y $u \in Aut(Z_{12})$, y se define como $e^p u(x) = p + ux$ para $x \in Z_{12}$. A las transformaciones afines invertibles en $Z_{12}$ les llamaremos simetrías de $Z_{12}$, y también forman un grupo.*

**Definition 39** *Llamaremos simetrías internas de una escala $s \subset Z_{12}$ a las simetrías de $Z_{12}$ bajo las cuales $s$ es invariante, i.e. $e^p u(s) = s$. Estas forman el grupo de simetría de $s$.*

Una escala con grupo de simetría trivial será llamada *rígida.*

**Example 40** *1. La escala de Do Mayor = 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11 tiene sólo una simetría interna no trivial: $e^4 11$, la inversión en D = 2.*

*2. Las escalas menores armónicas son rígidas.*

*3. La escala $\{0,1,2,4,6,8,10\}$ tiene tres simetrías internas no triviales: $e^8 5$, $e^6 7$ y $e^2 11$.*

El concepto de simetría interna de una escala puede ser adaptado para su interpretación triádica.

**Definition 41** *Una simetría interna $f$ de una escala $s$ es llamada una simetría interna de la interpretación triádica $s^{(3)}$, si para todo $s_i \in s^{(3)}$, $f(s_i) \in s^{(3)}$. Estas forman el grupo de simetría de la interpretación triádica $s^{(3)}$.*

Una interpretación triádica $s^{(3)}$ es llamada *rígida* si el grupo de simetría de $s^{(3)}$ es trivial. Tenemos el siguiente resultado, tomado de [*Mazzola*1990], el cual no probaremos aquí:

**Lemma 42** *(1) Cualquier inversión perteneciente al grupo de simetría de una escala $s$ induce una simetría interna en $s^{(3)}$.*

*(2) Las únicas simetrías internas no triviales de una interpretación triádica son las inversiones.*

En particular, una interpretación triádica $s^{(3)}$ es rígida si y sólo si el grupo de simetría de $s$ no contiene ninguna inversión. (En $Z_{12}$, las inversiones son de la forma $e^p 11$.)

**Example 43** *1. Para la escala de Do Mayor $s = C$, la única simetría interna no trivial es la inversión $e^4 11$, la cual opera sobre las tríadas de $C^{(3)}$ de la manera siguiente:*

| | | |
|---|---|---|
| $I$ | $\leftrightarrow$ | $vi$ |
| $ii$ | $\leftrightarrow$ | $V$ |
| $iii$ | $\leftrightarrow$ | $IV$ |
| $vii_o$ | $\leftrightarrow$ | $vii_o$ |

*Obsérvese que transforma los acordes mayores en menores, y sólo al acorde disminuido lo deja invariante.*

*2. La simetría interna $e^8 5$ de la escala $s = \{0,1,2,4,6,8,10\}$ no es una simetría interna de $s^{(3)}$, puesto que la imagen de la tríada $s_1 = \{0,2,6\}$ bajo $e^8 5$ es $\{8,6,2\}$, conjunto que no es una tríada perteneciente a $s^{(3)}$.*

## 5.4 Modulación y simetrías.

Arnold Schönberg ([Schönberg]) define la modulación como un proceso en tres etapas:

| A | B | C |
|---|---|---|
| tonalidad actual | tonalidad nueva | tonalidad nueva |
| **acordes neutrales** para debilitar la tonalidad actual | **progresión "de pivote"** para introducir la tonalidad nueva | **cadencia** para establecer la tonalidad nueva |

Al principio deben aparecer acordes neutrales, en el sentido de que sean comunes a ambas tonalidades, y así puedan mediar entre ellas. Enseguida, progresiones armónicas "de pivote", que presentan a los acordes modulantes necesarios para introducir la nueva tonalidad. Finalmente, la cadencia confirma la nueva tonalidad.

El siguiente modelo desarrollado por Mazzola formaliza la teoría de modulación de Schönberg:

Considérense dos escalas $r$ y $s$ pertenecientes a la misma clase de traslación, i.e. $r = e^p(s)$ con $p \in Z_{12}$.

**Definition 44** *Definimos un modulador para la pareja* $(s^{(3)}, r^{(3)})$ *como una simetría* $g$ *que transforma la interpretación triádica* $s^{(3)}$ *en la interpretación triádica* $r^{(3)}$, *i.e.* $r^{(3)} = g(s^{(3)})$.

Estos moduladores se pueden escribir de la forma $g = e^p f$, donde $f$ es una simetría interna de $s^{(3)}$. Por el Lema 42, $f$ sólo puede ser una inversión o la identidad; por lo tanto, los únicos candidatos a moduladores son las traslaciones[1] y las inversiones.

**Definition 45** *Una modulación para la pareja* $(s^{(3)}, r^{(3)})$ *es una pareja* $(\mu, g)$, *donde* $\mu$ *es un conjunto cadencial mínimo de la escala "objetivo"* $r$ *y* $g$ *es un modulador para* $(s^{(3)}, r^{(3)})$.

Dados $s$, $r$, y $\mu$, se busca un *cuanto de modulación* $Q$ para alguna modulación $(\mu, g)$.

**Definition 46** *Un cuanto* $Q$ *para la modulación* $(\mu, g)$ *es un subconjunto de* $Z_{12}$ *que cumple con el sistema de propiedades* $(\mathcal{L}_\mu)$ *(dado más abajo).*

Mazzola explica su modelo haciendo una analogía con la electrodinámica cuántica, la cual también hace uso de simetrías: la simetría "oculta" $g$ es la *fuerza* que transforma una tonalidad en la otra; esta fuerza se manifiesta en el cuanto de modulación, que es el *medio* que transmite la transformación entre las tonalidades, de manera análoga a como el fotón es el *medio* que transmite la fuerza electromagnética. Sin embargo, este cuanto simétrico no es directamente detectable, sino a través de la "traza" $\tau$ que deja en la escala objetivo $r$; esta "traza" son las tríadas de $r^{(3)}$ cuyas notas pertenecen a $r \bigcap Q$.

Precisamente estos acordes son los pivotes de la modulación, los que deben ser usados en la etapa B del modelo de Schönberg. Esto, junto con el hecho de que conjunto cadencial $\mu$ es el que se usa en la cadencia de la etapa C, resuelve el problema de cómo realizar la modulación; de aquí la importancia del modelo: para un $\mu$ dado, basta determinar $Q$ para poder encontrar los acordes pivote de la modulación.

[1] Estas traslaciones, en Música, son llamadas transposiciones.

Para un determinado conjunto cadencial mínimo $\mu$ de la escala objetivo $r$, se pide que el cuanto de modulación $Q \subsetneq Z_{12}$ cumpla con el sistema de propiedades $(\mathcal{L}_\mu) = \{(1), (2)_\mu, (3), (4)\}$, donde:

$(1) =$ Existe un modulador $g$ para $(s^{(3)}, r^{(3)})$, el cual es una simetría interna de $Q$, esto es $g(Q) = Q$.

$(2)_\mu =$ Todas las tríadas de $\mu$ son subconjuntos de $Q$.

$(3) =$ La única simetría interna de $r^{(3)}$ que también es una simetría interna de $\tau = r \bigcap Q$ es la identidad, y $\tau$ es cubierto por tríadas de $r^{(3)}$.

$(4) =$ $Q$ es un conjunto minimal con respecto a las propiedades (1) y $(2)_\mu$.

La propiedad (1) requiere que el modulador (la simetría $g$) se materialice en $Q$. La propiedad $(2)_\mu$ garantiza que $Q$ tenga suficientes notas para formar al conjunto cadencial mínimo $\mu$ y, de esta manera, capturar de manera inequívoca a $r^{(3)}$. La propiedad (4) expresa nuestro interés en encontrar la modulación más económica. Por (3), el modulador de (1) es determinado de manera única por $Q$ y la pareja $(s^{(3)}, r^{(3)})$. A la inversa, $Q$ es reconstruible a partir del modulador $g$ y las tríadas de $r^{(3)}$ cuyas notas pertenecen a $\tau = r \bigcap Q$, pues $\tau$ es cubierto por tríadas de $r^{(3)}$, y gracias a la minimalidad de $Q$.

**Definition 47** *Decimos que la modulación $(\mu, g)$ de $s^{(3)}$ a $r^{(3)}$ está cuantizada si, para tal modulación, existe un cuanto $Q$ que cumple con las propiedades $(\mathcal{L}_\mu)$.*

En caso de que exista un cuanto $Q$, será posible encontrar los acordes de transición o "pivotes" de la modulación: las tríadas de $r^{(3)}$ cuyas notas pertenecen a $\tau$.

## 5.5 Aplicación del modelo.

El mismo G. Mazzola aplicó su modelo y, de una manera algorítmica, demostró la existencia de al menos una modulación directa entre cualesquiera dos traslaciones de la escala mayor; es decir, existe una modulación cuantizada entre $s^{(3)}$ y $r^{(3)} = e^p(s^{(3)})$, para cualquier $p \in Z_{12}$. Después, el modelo fue aplicado con éxito al análisis de modulaciones difíciles en Mozart, Beethoven y Debussy en [*Mazzola*1990] y a la composición de una sonata (ver [*Mazzola*1985]).

Pero lo más significativo es que los pivotes de la modulación encontrados por Mazzola coinciden con los propuestos por Schönberg en [Schönberg], en los casos en los que este último indica modulaciones directas ([*Mazzola*1985]). Esta afirmación se basa en el Cuadro 1, tomado de [Muzzulini], en el cual se muestran todas las modulaciones cuantizadas de una escala $s$ (perteneciente a la clase de traslación de la escala mayor) a su traslación $r = e^p(s)$, para $p = 1, 2, ..., 11$.

Para cada valor de $p$ se muestran los conjuntos cadenciales $\mu$ para los cuales fue encontrado un modulador $g$ y un cuanto $Q$ que cumplen con las propiedades $(\mathcal{L}_\mu)$. Los acordes de pivote son las tríadas de $r^{(3)}$ formadas con notas pertenecientes a $\tau = r \bigcap Q$. Recuérdese que tanto los acordes de pivote como los acordes de la cadencia $\mu$, son tríadas de $r^{(3)}$, y como tales, están dados como grados de la escala "objetivo" $r$. En la notación para $Q$, los asteriscos indican las posiciones -en $Z_{12}$- de las notas pertenecientes a $Q$. Por ejemplo, para $p = 1$, el cuanto indicado es $Q = \{0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; los ceros indican las posiciones correspondientes a $1, 4 \notin Q$.

Cuadro 1

| $p$ | $\mu$ | $Q$ | $g$ | pivotes |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ( *ii*,V ) | *0**0******* | $e^5 11$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| | ( *ii*, *iii* ) | *0**0******* | $e^5 11$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| 2 | ( vii$_o$ ) | 0**0**0*000* | $e^6 11$ | *ii*, IV, vii$_o$ |
| | ( *ii*,V ) | 0**0**0*0*0* | $e^6 11$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |
| | ( IV, V ) | 0**0**0*0*0* | $e^6 11$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |
| 3 | ( *ii*,V ) | *0*00*0***** | $e^7 11$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| | ( *ii*, *iii* ) | *0*00*0***** | $e^7 11$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| 4 | ( vii$_o$ ) | 00**0**00*0* | $e^8 11$ | V, vii$_o$ |
| | ( IV, V ) | 0*******0*0* | $e^8 11$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |
| | ( *ii*, *iii* ) | ****0*****0* | $e^8 11$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| 5 | ( vii$_o$ ) | 00*0**0*00** | $e^9 11$ | *ii*, IV, vii$_o$ |
| 6 | ( *ii*, *iii* ) | 0*****0***** | $e^6$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| | ( IV, V ) | 0*********0* | $e^{10} 11$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |
| | ( IV, V ) | ****0*****0* | $e^6$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |
| | ( *ii*, *iii* ) | ****0*0***** | $e^{10} 11$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| 7 | ( vii$_o$ ) | *0*00**00*0* | $e^{11} 11$ | *iii*, V, vii$_o$ |
| 8 | ( vii$_o$ ) | 0**00*0*00** | $e^0 11$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| | ( IV, V ) | 0*****0***** | $e^0 11$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |
| | ( *ii*, *iii* ) | ****0*0*0*** | $e^0 11$ | |
| 9 | ( *ii*,V ) | 00*0******0* | $e^1 11$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |
| | ( IV, V ) | 00*0******0* | $e^1 11$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |
| 10 | ( vii$_o$ ) | *0**0*000*0* | $e^2 11$ | *iii*, V, vii$_o$ |
| | ( *ii*,V ) | *0**0*0*0*0* | $e^2 11$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| | ( *ii*, *iii* ) | *0**0*0*0*0* | $e^2 11$ | *ii*, *iii*, V, vii$_o$ |
| 11 | ( *ii*,V ) | 0**0******** | $e^3 11$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |
| | ( IV, V ) | 0**0******** | $e^3 11$ | *ii*, IV, V, vii$_o$ |

Muzzulini, además, calculó las modulaciones cuantizadas para *todas* las posibles escalas (subconjuntos) de siete notas en $Z_{12}$, y reporta los siguientes hallazgos interesantísimos:

- En cuanto a la cantidad de conjuntos cadenciales mínimos que contiene una escala, el mínimo de 5 se alcanza en tres escalas, una de las cuales es la escala mayor diatónica. La cantidad máxima es presentada por la escala menor armónica con 21 conjuntos cadenciales mínimos, a la que le siguen una escala con 18 y la escala menor melódica con 15 conjuntos cadenciales mínimos (el mayor número, entre las escalas no rígidas).

- Con respecto al número de diferentes cuantos encontrados para las escalas, divididas en escalas rígidas y no rígidas, la situación es como sigue:

  1. escalas rígidas
     - máximo: 32, en la escala menor armónica.
     - mínimo: 13.
  2. escalas no rígidas
     - máximo: 66, en la escala menor melódica.
     - mínimo: 20, en la escala mayor diatónica.

- Por último, para el número de modulaciones cuantizadas para las distintas escalas, los valores extremos son los siguientes:

  1. escalas rígidas
     - máximo: 226 para la escala menor armónica.
     - mínimo: 53 modulaciones cuantizadas.
  2. escalas no rígidas
     - máximo: 114 modulaciones cuantizadas para la escala menor melódica.
     - entre las escalas con modulaciones cuantizadas *para todos* los valores de p, el mínimo de 26 ocurre para la escala mayor diatónica.

Como se ve, también desde el punto de vista desarrollado en este capítulo, la escala mayor presenta características especiales. Pero también para las escalas menores hemos encontrado resultados interesantes.

# Chapter 6

# Simetría y modulación en la escala diatónica de $Z_{20}$

En este capítulo, el modelo de modulación presentado en el capítulo anterior será adaptado a la escala diatónica de 11 notas inmersa en $Z_{20}$, la cual fue desarrollada en la sección 2.5 y en la sección 4.4. Tal escala será llamada $s$.

Si representamos a $Z_{20}$ en el círculo de semitonos, escogeremos a $D_1 = 0$, como la *tónica* de $s$, y numeraremos en sentido creciente las notas de $s$: $D_1, D_2, \ldots, D_{12}$.

**Definition 48** *Para $n = 1, \ldots, 12$, definimos el acorde o tríada sobre el enésimo grado como el conjunto* $s_n = \{D_n, D_{(n+3) \bmod 12}, D_{(n+6) \bmod 12}\}$

Ahora, la interpretación triádica $s^{(3)}$ de la escala $s$ está formada por acórdes construidos por cuartas, pero los demás conceptos son definidos de la misma manera. Los conjuntos cadenciales mínimos de $s$ son los siguientes.

$\{iii, v\}$

$\{v, VI\}$

$\{iii, VIII\}$

$\{VI, VIII\}$

$\{xi_o\}$

Nótense las similitudes con la escala mayor usual: hay cuatro acordes incluidos en los conjuntos cadenciales (dos menores, dos mayores y uno disminuido); un conjunto $\mu$ está formado por dos acordes menores, otro está formado por dos acordes mayores, dos están formados por un acorde menor y uno mayor, y otro contiene sólo al acorde de sensible. Por semejanza con la escala mayor, a los dos grados mayores que aparecen en los conjuntos cadenciales mínimos, les llamaremos subdominante y dominante. Su importancia se comprobará también al ver que repetidamente aparecen como pivotes de las modulaciones. En el caso del grado VIII (dominante), su importancia armónica está relacionada con el hecho de que contiene en su acorde a la sensible de la escala.

Se puede comprobar que las únicas notas que aparecen en todos los conjuntos cadenciales mínimos son las que forman el tritono de la escala, $9_{20}$ y $19_{20}$, correspondientes a los grados subdominante y sensible. Esto también sucede en la escala mayor de $Z_{12}$.

La única simetría no trivial de $s^{(3)}$ es la inversión en la nota 4, $e^8 19$, la cual actúa de la siguiente manera sobre las tríadas:

| | | |
|---|---|---|
| I | $\leftrightarrow$ | *x* |
| II | $\leftrightarrow$ | *ix* |
| *iii* | $\leftrightarrow$ | VIII |
| *iv* | $\leftrightarrow$ | VII |
| *v* | $\leftrightarrow$ | VI |
| $xi_o$ | $\leftrightarrow$ | $xi_o$ |

Nótese el parecido con la simetría de la escala mayor usual: transforma a los acordes mayores en menores y viceversa, y deja invariante al acorde disminuido. Este parecido entre ambas escalas nos permitirá entender mejor su representación en el grupo producto de la segunda parte. Las Figuras 1 y 2 muestran esta representación para ambas escalas, pero en esta ocasión no nos ha interesado que la estructura de acordes sea convexa, sino algo -a nuestro parecer- más relevante: que refleje la simetría de la escala. En efecto, se puede apreciar de manera perfectamente clara el efecto de cada simetría ($e^4 11$ para la escala mayor usual, y $e^8 19$ para la escala s de $Z_{20}$) sobre la escala correspondiente: se trata de una rotación de $180^O$ alrededor del centro del acorde disminuido, que es el centro de la escala (la nota re $= 2_{12}$ en la escala mayor, y la nota $4_{20}$ en la escala s de $Z_{20}$).

Es como si claváramos un alfiler en dicha nota central, y girásemos $180^O$ la hoja, para hacer coincidir la escala consigo misma, pero intercambiando los acordes como se indicó anteriormente.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 |
| 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 |
| 1 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 |
| 0 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 |
| 3 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 |
| $Z_4$ 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 |
| 1 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 |
| 0 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 |
| 3 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 |
| 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 2 |
| 1 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 | 3 | 7 | 11 |
| 0 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 |
| | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |

$Z_3$

**Fig. 1 La escala diatónica y su simetría en $Z_{12}$.**

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 |
| 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 |
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 |
| $Z_5$ 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 |
| 4 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 |
| 3 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 2 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 |
| 1 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 |
| 0 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 | 15 | 0 | 5 | 10 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 |

$Z_4$

**Fig. 2 La escala diatónica y su simetría en $Z_{20}$.**

Más aún, si reescribimos los cuadros de transformación de acordes de la siguiente manera para la escala mayor usual:

| | | |
|---|---|---|
| I | $\leftrightarrow$ | *vi* |
| *iii* | $\leftrightarrow$ | IV |
| V | $\leftrightarrow$ | *ii* |
| $vii_o$ | $\leftrightarrow$ | $vii_o$ |

,

y de la siguiente manera para la escala $s$ de $Z_{20}$:

| | | |
|---|---|---|
| *iv* | $\leftrightarrow$ | VII |
| I | $\leftrightarrow$ | *x* |
| *ix* | $\leftrightarrow$ | II |
| VI | $\leftrightarrow$ | *v* |
| *iii* | $\leftrightarrow$ | VIII |
| $xi_o$ | $\leftrightarrow$ | $xi_o$ |

,

vemos que todos los acordes del lado izquierdo del cuadro pertenecen a la misma "ala" de la estructura en la figura correspondiente, y bajo la transformación, son intercambiados con el correspondiente acorde del lado derecho, que pertenece a la otra ala de la estructura.

Ahora bien, de la misma manera que, en la escala mayor usual, el acorde de Do mayor es transformado en el de La, su relativo menor, así también en la escala $s$ de $Z_{20}$ el acorde del grado I es transformado por la simetría interna en el acorde menor del grado *x*. Es este nuestro principal argumento para proponer que la tonalidad menor relativa de la escala $s$ debe ser la que comienza en el décimo grado, la nota $17_{20}$.

Esto justifica que el décimo grado sea el relativo menor del primer grado, pero ¿qué justifica que el modo mayor de la escala comience en la nota 0? Las analogías que este modo guarda con el modo mayor de la escala diatónica usual. Principalmente, la estructura en hexacordes (tetracordes generalizados) y la posición de los semitonos, lo que se refleja también en la existencia de un acorde disminuido, que es el de la "sensible".

Con esto, ha perdido fuerza el argumento de Balzano de que los acordes de Do y La tienen una posición "central" en la escala mayor. Siguen siendo simétricos uno del otro, respecto al verdadero centro de la escala, el acorde disminuido, y esto justifica que La sea el relativo menor de Do mayor. Pero entonces ¿por qué el de Do es el modo principal de la escala diatónica? Hemos de confesar que, dentro del modelo que estamos estudiando, no se ocurre una razón objetiva. Las reflexiones de Balzano, y las que hemos hecho aquí mismo, sugieren que la estructura de grupo de $Z_{12}$, con sus tres grupos isomorfos, influyó en el desarrollo de la escala diatónica como la conocemos, con sus características de simetría. Pero la causa de que el modo principal sea el de Do tal vez deba ser buscada fuera de este modelo: en la proporción que guardan entre sí las frecuencias correspondientes a las notas de la escala pitagórica, que son razones de enteros pequeños. Para la escala de igual temperamento, el modo de Do es el que mejor aproxima a la afinación pitagórica.

El cuadro 2 resume las modulaciones encontradas para la escala s de $Z_{20}$, con notación semejante a la usada en el cuadro 1 para la escala mayor de $Z_{12}$. En las páginas que le siguen, se muestran de manera más completa los resultados obtenidos. En cada página se analizan las modulaciones para un valor de $p$.

Los cálculos se hicieron de la siguiente manera: para cada modulación $(\mu, g)$ de la pareja $(s^{(3)}, r^{(3)})$, con $r = e^p(s)$, hay exactamente un subconjunto $Q \subseteq Z_{20}$ que cumple con las condiciones $(1), (2)_\mu$ y $(4)$ de $(\mathcal{L})_\mu$. ($Q$ es la unión de las órbitas de los elementos de $\mu$, bajo el grupo de transformaciones generado por $g$, o en otras palabras, $Q = \bigcup_i g^i(\mu)$.) Si este candidato no cumple con la condición (3), es rechazado como cuanto de modulación ( $h$ es la única simetría no trivial de $r^{(3)}$ ). Si no es rechazado, los pivotes de la modulación, como ya se ha mencionado, son las tríadas de $r^{(3)}$ cuyas notas pertenecen a $\tau$.

No está por de más enfatizar que tanto la cadencia $\mu$ como los acordes de transición están indicados como grados de $r$, la escala "objetivo" de la modulación.

Otra observación que debe ser tomada en cuenta, sobre todo por quien quisiere hacer uso práctico de estos resultados, es que las modulaciones están calculadas con la escala de C mayor como punto de partida. Para el caso de que se quiera usar otra tonalidad "inicial", debe hacerse el transporte necesario para obtener la escala objetivo $r$ en notación de números. Por supuesto, aquí se hace patente la ventaja de haber usado los grados de la escala $r$ para señalar la cadencia $\mu$ y los pivotes de la modulación.

Hay un hecho sorprendente que se desprende de estos resultados. En virtud de que el grado VIII contiene a la sensible como "tercera" de su acorde, y que aparece cumpliendo las funciones de dominante tanto en los conjuntos cadenciales mínimos como en los conjuntos pivote de las modulaciones, es lo más lógico que este grado sea considerado precisamente como la dominante *armónica* de la escala.

Sin embargo, el grado VIII no corresponde a la quinta generalizada de la escala, que es la séptima$_{20}$, o sea la nota $11_{20}$ (grado VII). Como se recordará, en el círculo de séptimas se miden distancias entre tonalidades. Esto significa que, en $Z_{20}$, la quinta generalizada ya no reúne en sí los atributos de, por una parte, determinar cuáles son las tonalidades más cercanas, y por la otra, de realizar la función armónica de grado dominante. En esta escala, estas dos funciones han sido divididas entre los grados VII y VIII, respectivamente.

Cuadro 2

| p | μ | Q | g | pivotes |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ( *iii* , *v* ) | *000**000**00****00* | $e^{9}19$ | ( *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( *iii* , VIII ) | **000000***00****00* | $e^{9}19$ | ( *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| 2 | ( *iii* , *v* ) | **00*0*00***0*0*0*0* | $e^{10}19$ | ( II, *iii*, *v*, VII, VIII, *x*, $xi_o$ ) |
| | ( *v* , VI ) | ***00000****0*0*0*0* | $e^{10}19$ | ( I, *iv*, *v*, VI, *ix* ) |
| | ( *iii* , VIII ) | 0*00*0*00*0*0*0*0*0* | $e^{10}19$ | ( *iii*, VII, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( VI , VIII ) | 0**0*0*0**0*0*0*0*0* | $e^{10}19$ | ( I, *iii*, *iv*, VI, VII, VIII, *ix*, $xi_o$ ) |
| 3 | ( VI , VIII ) | 00***00***00**0**0** | $e^{11}19$ | ( *iii*, VI, VIII, *ix*, $xi_o$ ) |
| 4 | ( $xi_o$ ) | 000**000**000*00000* | $e^{12}19$ | ( *iii*, VI, $xi_o$ ) |
| 5 | ( *iii* , *v* ) | *000*0000*000***00** | $e^{13}19$ | ( *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( *iii* , VIII ) | *000*0000*000***00** | $e^{13}19$ | ( *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| 6 | ( *iii* , *v* ) | **00**000**00***000* | $e^{14}19$ | ( *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( *v* , VI ) | **000**0**000***000* | $e^{14}19$ | ( II, *v*, VI ) |
| | ( $xi_o$ ) | 0000**000**0000*000* | $e^{14}19$ | ( VIII, $xi_o$ ) |
| 7 | ( VI , VIII ) | *0*0*0****0*0*0**00* | $e^{15}19$ | ( II, *iii*, *v*, VI, VIII, *ix*, *x*, $xi_o$ ) |
| 8 | - | - | $e^{16}19$ | - |
| 9 | ( *iii* , *v* ) | *0*0*000**000*0*0*** | $e^{17}19$ | ( I, *iii*, *v*, VI, VIII, *ix*, $xi_o$ ) |
| | ( *v* , VI ) | *0*0*000**000*0*0*** | $e^{17}19$ | ( I, *iii*, *v*, VI, VIII, *ix*, $xi_o$ ) |
| | ( *iii* , VIII ) | 00*0*000**000*0*00** | $e^{17}19$ | ( *iii*, VI, VIII, *ix*, $xi_o$ ) |
| | ( VI , VIII ) | 00*0*000**000*0*00** | $e^{17}19$ | ( *iii*, VI, VIII, *ix*, $xi_o$ ) |
| | ( $xi_o$ ) | 0000*000**000*0000** | $e^{17}19$ | ( *iii*, VI, $xi_o$ ) |
| 10 | ( *iii* , *v* ) | *00***000*000***00** | $e^{18}19$ | ( *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( VI , VIII ) | 000***00***00***000* | $e^{18}19$ | ( *iii*, VI, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( *iii* , *v* ) | 000***00**000***00** | $e^{10}$ | ( *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( VI , VIII ) | *00***000**00***000* | $e^{10}$ | ( *iii*, VI, VIII, $xi_o$ ) |
| 11 | ( *iii* , *v* ) | *000*0*00**00*0*000* | $e^{19}19$ | ( II, *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( *v* , VI ) | *000*0*0****0*0*000* | $e^{19}19$ | ( II, *iii*, *v*, VI, VIII, *x*, $xi_o$ ) |
| | ( *iii* , VIII ) | *000*0*00**00*0*000* | $e^{19}19$ | ( II, *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( VI , VIII ) | *000*0*0****0*0*000* | $e^{19}19$ | ( II, *iii*, *v*, VI, VIII, *x*, $xi_o$ ) |
| | ( $xi_o$ ) | *000*0000**0000*000* | $e^{19}19$ | ( *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| 12 | - | - | $e^{0}19$ | - |
| 13 | ( *iii* , *v* ) | ***0*0*0**00**0*0*0* | $e^{1}19$ | ( I, II, *iii*, *v*, VI, VIII, *ix*, $xi_o$ ) |
| 14 | ( *v* , VI ) | *0**000***000***000* | $e^{2}19$ | ( *v*, VI, *ix* ) |
| | ( VI , VIII ) | 000**00***000***00** | $e^{2}19$ | ( *iii*, VI, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( $xi_o$ ) | 000**0000*000*0000** | $e^{2}19$ | ( *iii*, $xi_o$ ) |
| 15 | ( *iii* , VIII ) | 0000*000***00***000* | $e^{3}19$ | ( *iii*, VI, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( VI , VIII ) | 0000*000***00***000* | $e^{3}19$ | ( *iii*, VI, VIII, $xi_o$ ) |
| 16 | ( $xi_o$ ) | *000**000*00000*000* | $e^{4}19$ | ( *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| 17 | ( *iii* , *v* ) | **00***00**0**0**00* | $e^{5}19$ | ( II, *iii*, *v*, VIII, $xi_o$ ) |
| 18 | ( *iii* , *v* ) | *0*0*0**0*0*0*0*0*0* | $e^{6}19$ | ( II, *iii*, *iv*, *v*, VII, VIII, *x*, $xi_o$ ) |
| | ( *v* , VI ) | *00000****0*0*0*0*** | $e^{6}19$ | ( II, *v*, VI, VII, *x* ) |
| | ( *iii* , VIII ) | 00*0*00*0*0*0*0*0*0* | $e^{6}19$ | ( *iii*, *iv*, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( VI , VIII ) | 00*0*00***0*0*0*0*** | $e^{6}19$ | ( I, *iii*, *iv*, VI, VIII, *ix*, $xi_o$ ) |
| 19 | ( *iii* , VIII ) | 000**000**00****00** | $e^{7}19$ | ( *iii*, VI, VIII, $xi_o$ ) |
| | ( VI , VIII ) | 000**000**00****00** | $e^{7}19$ | ( *iii*, VI, VIII, $xi_o$ ) |

$p = 1$ $\qquad$ $r = (1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 0)$

$g = e^{9}19$ $\qquad$ $h = e^{10}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación cuantizada? | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 5 | 4 | 5 | 0 | 10 | SI | ( 5, 10, 16 ) | *iii* |
| | 9 | 0 | 9 | 5 | 5 | | ( 9, 14, 0 ) | *v* |
| | 10 | 19 | 10 | 9 | 1 | | ( 14, 0, 5 ) | VIII |
| | 14 | 15 | 14 | 10 | 0 | | ( 0, 5, 10 ) | $xi_o$ |
| | 16 | 13 | 16 | 14 | 16 | | | |
| | 0 | 9 | 0 | 16 | 14 | | | |
| ( *v*, VI ) | 1 | 8 | 1 | 0 | 10 | NO | | |
| | 9 | 0 | 9 | 1 | 9 | | | |
| | 10 | 19 | 10 | 9 | 1 | | | |
| | 14 | 15 | 14 | 10 | 0 | | | |
| | 16 | 13 | 16 | 14 | 16 | | | |
| | 0 | 9 | 0 | 16 | 14 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | SI | ( 5, 10, 16 ) | *iii* |
| | 10 | 19 | 10 | 9 | 1 | | ( 9, 14, 0 ) | *v* |
| | 14 | 15 | 14 | 10 | 0 | | ( 14, 0, 5 ) | VIII |
| | 16 | 13 | 16 | 14 | 16 | | ( 0, 5, 10 ) | $xi_o$ |
| | 0 | 9 | 0 | 16 | 14 | | | |
| | | | | 0 | 10 | | | |
| ( VI, VIII ) | 1 | 8 | 1 | 0 | 10 | NO | | |
| | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | | | |
| | 10 | 19 | 10 | 9 | 1 | | | |
| | 14 | 15 | 14 | 10 | 0 | | | |
| | 16 | 13 | 16 | 14 | 16 | | | |
| | 0 | 9 | 0 | 16 | 14 | | | |
| | | | | 1 | 9 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 5 | 4 | 5 | 0 | 10 | NO | | |
| | 10 | 19 | 10 | 5 | 5 | | | |
| | 0 | 9 | 0 | 9 | 1 | | | |
| | | | | 10 | 0 | | | |

$p = 2$ r = ( 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 1 )
$g = e^{10}19$ $h = e^{12}19$

| μ | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación cuantizada? | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | μ ( r ) | g(μ) | $g^2(\mu)$ | τ | h(τ) | | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 6 | 4 | 6 | 1 | 11 | SI | ( 4, 10, 15 ) | II |
| | 10 | 0 | 10 | 4 | 8 | | ( 6, 11, 17 ) | *iii* |
| | 11 | 19 | 11 | 6 | 6 | | ( 10, 15, 1 ) | *v* |
| | 15 | 15 | 15 | 10 | 2 | | ( 13, 19, 4 ) | VII |
| | 17 | 13 | 17 | 11 | 1 | | ( 15, 1, 6) | VIII |
| | 1 | 9 | 1 | 13 | 19 | | ( 19, 4, 10 ) | *x* |
| | | | | 15 | 17 | | ( 1, 6, 11 ) | $xi_o$ |
| | | | | 17 | 15 | | | |
| | | | | 19 | 13 | | | |
| ( *v*, VI ) | 2 | 8 | 2 | 1 | 11 | SI | ( 2, 8, 13 ) | I |
| | 10 | 0 | 10 | 2 | 10 | | ( 8, 13, 19 ) | *iv* |
| | 11 | 19 | 11 | 8 | 4 | | ( 10, 15, 1 ) | *v* |
| | 15 | 15 | 15 | 10 | 2 | | ( 11, 17, 2 ) | VI |
| | 17 | 13 | 17 | 11 | 1 | | ( 17, 2, 8 ) | *ix* |
| | 1 | 9 | 1 | 13 | 19 | | | |
| | | | | 15 | 17 | | | |
| | | | | 17 | 15 | | | |
| | | | | 19 | 13 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 6 | 4 | 6 | 1 | 11 | SI | ( 6, 11, 17 ) | *iii* |
| | 11 | 19 | 11 | 4 | 8 | | ( 13, 19, 4 ) | VII |
| | 15 | 15 | 15 | 6 | 6 | | ( 15, 1, 6) | VIII |
| | 17 | 13 | 17 | 11 | 1 | | ( 1, 6, 11 ) | $xi_o$ |
| | 1 | 9 | 1 | 13 | 19 | | | |
| | | | | 15 | 17 | | | |
| | | | | 17 | 15 | | | |
| | | | | 19 | 13 | | | |
| ( VI, VIII ) | 2 | 8 | 2 | 1 | 11 | SI | ( 2, 8, 13 ) | I |
| | 6 | 4 | 6 | 2 | 10 | | ( 6, 11, 17 ) | *iii* |
| | 11 | 19 | 11 | 4 | 8 | | ( 8, 13, 19 ) | *iv* |
| | 15 | 15 | 15 | 6 | 6 | | ( 11, 17, 2 ) | VI |
| | 17 | 13 | 17 | 8 | 4 | | ( 13, 19, 4 ) | VII |
| | 1 | 9 | 1 | 11 | 1 | | ( 15, 1, 6) | VIII |
| | | | | 13 | 19 | | ( 17, 2, 8 ) | *ix* |
| | | | | 15 | 17 | | ( 1, 6, 11 ) | $xi_o$ |
| | | | | 17 | 15 | | | |
| | | | | 19 | 13 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 6 | 4 | 6 | 1 | 11 | NO | | |
| | 11 | 19 | 11 | 4 | 8 | | | |
| | 1 | 9 | 1 | 6 | 6 | | | |
| | | | | 11 | 1 | | | |
| | | | | 19 | 13 | | | |

$p = 3$ $\qquad$ $r = (3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 0, 2)$

$g = e^{11}19$ $\qquad$ $h = e^{14}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 7 | 4 | 7 | 0 | 14 | NO | | |
| | 11 | 0 | 11 | 2 | 12 | | | |
| | 12 | 19 | 12 | 7 | 7 | | | |
| | 16 | 15 | 16 | 11 | 3 | | | |
| | 18 | 13 | 18 | 12 | 2 | | | |
| | 2 | 9 | 2 | 16 | 18 | | | |
| | | | | 18 | 16 | | | |
| ( *v*, VI ) | 3 | 8 | 3 | 0 | 14 | NO | | |
| | 11 | 0 | 11 | 2 | 12 | | | |
| | 12 | 19 | 12 | 3 | 11 | | | |
| | 16 | 15 | 16 | 9 | 5 | | | |
| | 18 | 13 | 18 | 11 | 3 | | | |
| | 2 | 9 | 2 | 12 | 2 | | | |
| | | | | 16 | 18 | | | |
| | | | | 18 | 16 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 7 | 4 | 7 | 7 | 7 | NO | | |
| | 12 | 19 | 12 | 9 | 5 | | | |
| | 16 | 15 | 16 | 12 | 2 | | | |
| | 18 | 13 | 18 | 16 | 18 | | | |
| | 2 | 9 | 2 | 18 | 16 | | | |
| | | | | 2 | 12 | | | |
| ( VI, VIII ) | 3 | 8 | 3 | 3 | 11 | SI | ( 7, 12, 18 ) | *iii* |
| | 7 | 4 | 7 | 7 | 7 | | ( 12, 18, 3 ) | VI |
| | 12 | 19 | 12 | 9 | 5 | | ( 16, 2, 7 ) | VIII |
| | 16 | 15 | 16 | 12 | 2 | | ( 18, 3, 9 ) | *ix* |
| | 18 | 13 | 18 | 16 | 18 | | ( 2, 7, 12 ) | $xi_o$ |
| | 2 | 9 | 2 | 18 | 16 | | | |
| | | | | 2 | 12 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 7 | 4 | 7 | 7 | 7 | NO | | |
| | 12 | 19 | 12 | 9 | 5 | | | |
| | 2 | 9 | 2 | 12 | 2 | | | |
| | | | | 2 | 12 | | | |

$p = 4$ $\quad$ $r = (4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 1,\ 3)$

$g = e^{12}19$ $\quad$ $h = e^{16}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| *( iii, v )* | 8 | 4 | 8 | 4 | 12 | NO | | |
| | 12 | 0 | 12 | 8 | 8 | | | |
| | 13 | 19 | 13 | 12 | 4 | | | |
| | 17 | 15 | 17 | 13 | 3 | | | |
| | 19 | 13 | 19 | 15 | 1 | | | |
| | 3 | 9 | 3 | 17 | 19 | | | |
| | | | | 19 | 17 | | | |
| | | | | 3 | 13 | | | |
| ( *v*, VI ) | 4 | 8 | 4 | 4 | 12 | NO | | |
| | 12 | 0 | 12 | 8 | 8 | | | |
| | 13 | 19 | 13 | 12 | 4 | | | |
| | 17 | 15 | 17 | 13 | 3 | | | |
| | 19 | 13 | 19 | 15 | 1 | | | |
| | 3 | 9 | 3 | 17 | 19 | | | |
| | | | | 19 | 17 | | | |
| | | | | 3 | 13 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 8 | 4 | 8 | 4 | 12 | NO | | |
| | 13 | 19 | 13 | 8 | 8 | | | |
| | 17 | 15 | 17 | 13 | 3 | | | |
| | 19 | 13 | 19 | 15 | 1 | | | |
| | 3 | 9 | 3 | 17 | 19 | | | |
| | | | | 19 | 17 | | | |
| | | | | 3 | 13 | | | |
| ( VI, VIII ) | 4 | 8 | 4 | 4 | 12 | NO | | |
| | 8 | 4 | 8 | 8 | 8 | | | |
| | 13 | 19 | 13 | 13 | 3 | | | |
| | 17 | 15 | 17 | 15 | 1 | | | |
| | 19 | 13 | 19 | 17 | 19 | | | |
| | 3 | 9 | 3 | 19 | 17 | | | |
| | | | | 3 | 13 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 8 | 4 | 8 | 4 | 12 | SI | ( 8, 13, 19 ) | *iii* |
| | 13 | 19 | 13 | 8 | 8 | | ( 13, 19, 4 ) | VI |
| | 3 | 9 | 3 | 13 | 3 | | ( 3, 8, 13 ) | $xi_o$ |
| | | | | 19 | 17 | | | |
| | | | | 3 | 13 | | | |

p = 5
$g = e^{13}19$

r = ( 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 0, 2, 4 )
$h = e^{18}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación cuantizada? | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 9 | 4 | 9 | 9 | 9 | SI | ( 9, 14, 0 ) | *iii* |
| | 13 | 0 | 13 | 13 | 5 | | ( 13, 18, 4 ) | *v* |
| | 14 | 19 | 14 | 14 | 4 | | ( 18, 4, 9 ) | VIII |
| | 18 | 15 | 18 | 18 | 0 | | ( 4, 9, 14 ) | $xi_o$ |
| | 0 | 13 | 0 | 0 | 18 | | | |
| | 4 | 9 | 4 | 4 | 14 | | | |
| ( *v*, VI ) | 5 | 8 | 5 | 5 | 13 | NO | | |
| | 13 | 0 | 13 | 9 | 9 | | | |
| | 14 | 19 | 14 | 13 | 5 | | | |
| | 18 | 15 | 18 | 14 | 4 | | | |
| | 0 | 13 | 0 | 18 | 0 | | | |
| | 4 | 9 | 4 | 0 | 18 | | | |
| | | | | 4 | 14 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 9 | 4 | 9 | 9 | 9 | SI | ( 9, 14, 0 ) | *iii* |
| | 14 | 19 | 14 | 13 | 5 | | ( 13, 18, 4 ) | *v* |
| | 18 | 15 | 18 | 14 | 4 | | ( 18, 4, 9 ) | VIII |
| | 0 | 13 | 0 | 18 | 0 | | ( 4, 9, 14 ) | $xi_o$ |
| | 4 | 9 | 4 | 0 | 18 | | | |
| | | | | 4 | 14 | | | |
| ( VI, VIII ) | 5 | 8 | 5 | 5 | 13 | NO | | |
| | 9 | 4 | 9 | 9 | 9 | | | |
| | 14 | 19 | 14 | 13 | 5 | | | |
| | 18 | 15 | 18 | 14 | 4 | | | |
| | 0 | 13 | 0 | 18 | 0 | | | |
| | 4 | 9 | 4 | 0 | 18 | | | |
| | | | | 4 | 14 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 9 | 4 | 9 | 9 | 9 | NO | | |
| | 14 | 19 | 14 | 14 | 4 | | | |
| | 4 | 9 | 4 | 4 | 14 | | | |

p = 6
g = $e^{14}19$

r = ( 6, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 1, 3, 5 )
h = $e^{0}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu$( r ) | g($\mu$) | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | h($\tau$) | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 10 | 4 | 10 | 10 | 10 | SI | ( 10, 15, 1 ) | *iii* |
| | 14 | 0 | 14 | 14 | 6 | | ( 14, 19, 5 ) | *v* |
| | 15 | 19 | 15 | 15 | 5 | | ( 19, 5, 10 ) | VIII |
| | 19 | 15 | 19 | 19 | 1 | | ( 5, 10, 15 | $xi_o$ |
| | 1 | 13 | 1 | 1 | 19 | | | |
| | 5 | 9 | 5 | 5 | 15 | | | |
| ( *v*, VI ) | 6 | 8 | 6 | 6 | 14 | SI | ( 8, 14, 19 ) | II |
| | 14 | 0 | 14 | 8 | 12 | | ( 14, 19, 5 ) | *v* |
| | 15 | 19 | 15 | 14 | 6 | | ( 15, 1, 6 ) | VI |
| | 19 | 15 | 19 | 15 | 5 | | | |
| | 1 | 13 | 1 | 19 | 1 | | | |
| | 5 | 9 | 5 | 1 | 19 | | | |
| | | | | 5 | 15 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 10 | 4 | 10 | 10 | 10 | NO | | |
| | 15 | 19 | 15 | 15 | 5 | | | |
| | 19 | 15 | 19 | 19 | 1 | | | |
| | 1 | 13 | 1 | 1 | 19 | | | |
| | 5 | 9 | 5 | 5 | 15 | | | |
| ( VI, VIII ) | 6 | 8 | 6 | 6 | 14 | NO | | |
| | 10 | 4 | 10 | 8 | 12 | | | |
| | 15 | 19 | 15 | 10 | 10 | | | |
| | 19 | 15 | 19 | 15 | 5 | | | |
| | 1 | 13 | 1 | 19 | 1 | | | |
| | 5 | 9 | 5 | 1 | 19 | | | |
| | | | | 5 | 15 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 10 | 4 | 10 | 10 | 10 | SI | ( 19, 5, 10 ) | VIII |
| | 15 | 19 | 15 | 15 | 5 | | ( 5, 10, 15 | $xi_o$ |
| | 5 | 9 | 5 | 19 | 1 | | | |
| | | | | 5 | 15 | | | |

p = 7
$g = e^{15}19$

r = ( 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 0, 2, 4, 6 )
$h = e^{2}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu$ ( r ) | g($\mu$) | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | h($\tau$) | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 11 | 4 | 11 | 9 | 13 | NO | | |
| | 15 | 0 | 15 | 11 | 11 | | | |
| | 16 | 19 | 16 | 13 | 9 | | | |
| | 0 | 15 | 0 | 15 | 7 | | | |
| | 2 | 13 | 2 | 16 | 6 | | | |
| | 6 | 9 | 6 | 0 | 2 | | | |
| | | | | 2 | 0 | | | |
| | | | | 4 | 18 | | | |
| | | | | 6 | 16 | | | |
| ( *v*, VI ) | 7 | 8 | 7 | 7 | 15 | NO | | |
| | 15 | 0 | 15 | 9 | 13 | | | |
| | 16 | 19 | 16 | 13 | 9 | | | |
| | 0 | 15 | 0 | 15 | 7 | | | |
| | 2 | 13 | 2 | 16 | 6 | | | |
| | 6 | 9 | 6 | 0 | 2 | | | |
| | | | | 2 | 0 | | | |
| | | | | 6 | 16 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 11 | 4 | 11 | 9 | 13 | NO | | |
| | 16 | 19 | 16 | 11 | 11 | | | |
| | 0 | 15 | 0 | 13 | 9 | | | |
| | 2 | 13 | 2 | 15 | 7 | | | |
| | 6 | 9 | 6 | 16 | 6 | | | |
| | | | | 0 | 2 | | | |
| | | | | 2 | 0 | | | |
| | | | | 4 | 18 | | | |
| | | | | 6 | 16 | | | |
| ( VI, VIII ) | 7 | 8 | 7 | 7 | 15 | SI | ( 9, 15, 0 ) | II |
| | 11 | 4 | 11 | 9 | 13 | | ( 11, 16, 2 ) | *iii* |
| | 16 | 19 | 16 | 11 | 11 | | ( 15, 0, 6 ) | *v* |
| | 0 | 15 | 0 | 13 | 9 | | ( 16, 2, 7 ) | VI |
| | 2 | 13 | 2 | 15 | 7 | | ( 0, 6, 11 ) | VIII |
| | 6 | 9 | 6 | 16 | 6 | | ( 2, 7, 13 ) | *ix* |
| | | | | 0 | 2 | | ( 4, 9, 15 ) | *x* |
| | | | | 2 | 0 | | ( 6, 11, 16 ) | $xi_o$ |
| | | | | 4 | 18 | | | |
| | | | | 6 | 16 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 11 | 4 | 11 | 9 | 13 | NO | | |
| | 16 | 19 | 16 | 11 | 11 | | | |
| | 6 | 9 | 6 | 16 | 6 | | | |
| | | | | 4 | 18 | | | |
| | | | | 6 | 16 | | | |

p = 8 r = ( 8, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 1, 3, 5, 7 )

g = $e^{16}19$ h = $e^{4}19$

| μ | cuanto Q | | | τ = Q ∩ r | | ¿modulación cuantizada? | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | μ ( r ) | g(μ) | $g^2(\mu)$ | τ | h(τ) | | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 12 | 4 | 12 | 12 | 12 | NO | | |
| | 16 | 0 | 16 | 16 | 8 | | | |
| | 17 | 19 | 17 | 17 | 7 | | | |
| | 1 | 15 | 1 | 19 | 5 | | | |
| | 3 | 13 | 3 | 1 | 3 | | | |
| | 7 | 9 | 7 | 3 | 1 | | | |
| | | | | 7 | 17 | | | |
| ( *v*, VI ) | 8 | 8 | 8 | 8 | 16 | NO | | |
| | 16 | 0 | 16 | 16 | 8 | | | |
| | 17 | 19 | 17 | 17 | 7 | | | |
| | 1 | 15 | 1 | 19 | 5 | | | |
| | 3 | 13 | 3 | 1 | 3 | | | |
| | 7 | 9 | 7 | 3 | 1 | | | |
| | | | | 7 | 17 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 12 | 4 | 12 | 12 | 12 | NO | | |
| | 17 | 19 | 17 | 17 | 7 | | | |
| | 1 | 15 | 1 | 19 | 5 | | | |
| | 3 | 13 | 3 | 1 | 3 | | | |
| | 7 | 9 | 7 | 3 | 1 | | | |
| | | | | 7 | 17 | | | |
| ( VI, VIII ) | 8 | 8 | 8 | 8 | 16 | NO | | |
| | 12 | 4 | 12 | 12 | 12 | | | |
| | 17 | 19 | 17 | 17 | 7 | | | |
| | 1 | 15 | 1 | 19 | 5 | | | |
| | 3 | 13 | 3 | 1 | 3 | | | |
| | 7 | 9 | 7 | 3 | 1 | | | |
| | | | | 7 | 17 | | | |
| ( *xi*$_o$ ) | 12 | 4 | 12 | 12 | 12 | NO | | |
| | 17 | 19 | 17 | 17 | 7 | | | |
| | 7 | 9 | 7 | 19 | 5 | | | |
| | | | | 7 | 17 | | | |

$p = 9$ $\qquad$ $r = (9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 18,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8)$

$g = e^{17}19$ $\qquad$ $h = e^{6}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 13 | 4 | 13 | 9 | 17 | SI | ( 9, 15, 0 ) | I |
| | 17 | 0 | 17 | 13 | 13 | | ( 13, 18, 4 ) | *iii* |
| | 18 | 19 | 18 | 15 | 11 | | ( 17, 2, 8 ) | *v* |
| | 2 | 15 | 2 | 17 | 9 | | ( 18, 4, 9 ) | VI |
| | 4 | 13 | 4 | 18 | 8 | | ( 2, 8, 13 ) | VIII |
| | 8 | 9 | 8 | 0 | 6 | | ( 4, 9, 15 ) | *ix* |
| | | | | 2 | 4 | | ( 8, 13, 18 ) | $xi_o$ |
| | | | | 4 | 2 | | | |
| | | | | 8 | 18 | | | |
| ( *v*, VI ) | 9 | 8 | 9 | 9 | 17 | SI | ( 9, 15, 0 ) | I |
| | 17 | 0 | 17 | 13 | 13 | | ( 13, 18, 4 ) | *iii* |
| | 18 | 19 | 18 | 15 | 11 | | ( 17, 2, 8 ) | *v* |
| | 2 | 15 | 2 | 17 | 9 | | ( 18, 4, 9 ) | VI |
| | 4 | 13 | 4 | 18 | 8 | | ( 2, 8, 13 ) | VIII |
| | 8 | 9 | 8 | 0 | 6 | | ( 4, 9, 15 ) | *ix* |
| | | | | 2 | 4 | | ( 8, 13, 18 ) | $xi_o$ |
| | | | | 4 | 2 | | | |
| | | | | 8 | 18 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 13 | 4 | 13 | 9 | 17 | SI | ( 13, 18, 4 ) | *iii* |
| | 18 | 19 | 18 | 13 | 13 | | ( 18, 4, 9 ) | VI |
| | 2 | 15 | 2 | 15 | 11 | | ( 2, 8, 13 ) | VIII |
| | 4 | 13 | 4 | 18 | 8 | | ( 4, 9, 15 ) | *ix* |
| | 8 | 9 | 8 | 2 | 4 | | ( 8, 13, 18 ) | $xi_o$ |
| | | | | 4 | 2 | | | |
| | | | | 8 | 18 | | | |
| ( VI, VIII ) | 9 | 8 | 9 | 9 | 17 | SI | ( 13, 18, 4 ) | *iii* |
| | 13 | 4 | 13 | 13 | 13 | | ( 18, 4, 9 ) | VI |
| | 18 | 19 | 18 | 15 | 11 | | ( 2, 8, 13 ) | VIII |
| | 2 | 15 | 2 | 18 | 8 | | ( 4, 9, 15 ) | *ix* |
| | 4 | 13 | 4 | 2 | 4 | | ( 8, 13, 18 ) | $xi_o$ |
| | 8 | 9 | 8 | 4 | 2 | | | |
| | | | | 8 | 18 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 13 | 4 | 13 | 9 | 17 | SI | ( 13, 18, 4 ) | *iii* |
| | 18 | 19 | 18 | 13 | 13 | | ( 18, 4, 9 ) | VI |
| | 8 | 9 | 8 | 18 | 8 | | ( 8, 13, 18 ) | $xi_o$ |
| | | | | 4 | 2 | | | |
| | | | | 8 | 18 | | | |

p = 10 r = ( 10, 12, 14, 16, 18, 19, 1, 3, 5, 7, 9 )
$g = e^{18}19$ $h = e^{8}19$

| μ | cuanto Q μ ( r ) | g(μ) | $g^2(\mu)$ | τ = Q ∩ r τ | h(τ) | ¿modulación cuantizada? | pivotes acordes | grados |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ( *iii*, *v* ) | 14 | 4 | 14 | 14 | 14 | SI | ( 14, 19, 5 ) | *iii* |
| | 18 | 0 | 18 | 18 | 10 | | ( 18, 3, 9 ) | V |
| | 19 | 19 | 19 | 19 | 9 | | ( 3, 9, 14 ) | VIII |
| | 3 | 15 | 3 | 3 | 5 | | ( 9, 14, 19 ) | $xi_o$ |
| | 5 | 13 | 5 | 5 | 3 | | | |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 19 | | | |
| ( *v*, VI ) | 10 | 8 | 10 | 10 | 18 | NO | | |
| | 18 | 0 | 18 | 18 | 10 | | | |
| | 19 | 19 | 19 | 19 | 9 | | | |
| | 3 | 15 | 3 | 3 | 5 | | | |
| | 5 | 13 | 5 | 5 | 3 | | | |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 19 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 14 | 4 | 14 | 14 | 14 | NO | | |
| | 19 | 19 | 19 | 19 | 9 | | | |
| | 3 | 15 | 3 | 3 | 5 | | | |
| | 5 | 13 | 5 | 5 | 3 | | | |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 19 | | | |
| ( VI, VIII ) | 10 | 8 | 10 | 10 | 18 | SI | ( 14, 19, 5 ) | *iii* |
| | 14 | 4 | 14 | 14 | 14 | | ( 19, 5, 10 ) | VI |
| | 19 | 19 | 19 | 19 | 9 | | ( 3, 9, 14 ) | VIII |
| | 3 | 15 | 3 | 3 | 5 | | ( 9, 14, 19 ) | $xi_o$ |
| | 5 | 13 | 5 | 5 | 3 | | | |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 19 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 14 | 4 | 14 | 14 | 14 | NO | | |
| | 19 | 19 | 19 | 19 | 9 | | | |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 19 | | | |

$p = 10$ $\quad$ $r = (10, 12, 14, 16, 18, 19, 1, 3, 5, 7, 9)$

$g = e^{10}$ $\quad$ $h = e^{8}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación cuantizada? | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | | acordes | grados |
| (*iii*, *v*) | 14 | 4 | 14 | 14 | 14 | SI | (14, 19, 5) | *iii* |
| | 18 | 8 | 18 | 18 | 10 | | (18, 3, 9) | *v* |
| | 19 | 9 | 19 | 19 | 9 | | (3, 9, 14) | VIII |
| | 3 | 13 | 3 | 3 | 5 | | (9, 14, 19) | $xi_o$ |
| | 5 | 15 | 5 | 5 | 3 | | | |
| | 9 | 19 | 9 | 9 | 19 | | | |
| (*v*, VI) | 10 | 0 | 10 | 10 | 18 | NO | | |
| | 18 | 8 | 18 | 18 | 10 | | | |
| | 19 | 9 | 19 | 19 | 9 | | | |
| | 3 | 13 | 3 | 3 | 5 | | | |
| | 5 | 15 | 5 | 5 | 3 | | | |
| | 9 | 19 | 9 | 9 | 19 | | | |
| (*iii*, VIII) | 14 | 4 | 14 | 14 | 14 | NO | | |
| | 19 | 9 | 19 | 19 | 9 | | | |
| | 3 | 13 | 3 | 3 | 5 | | | |
| | 5 | 15 | 5 | 5 | 3 | | | |
| | 9 | 19 | 9 | 9 | 19 | | | |
| (VI, VIII) | 10 | 0 | 10 | 10 | 18 | SI | (14, 19, 5) | *iii* |
| | 14 | 4 | 14 | 14 | 14 | | (19, 5, 10) | VI |
| | 19 | 9 | 19 | 19 | 9 | | (3, 9, 14) | VIII |
| | 3 | 13 | 3 | 3 | 5 | | (9, 14, 19) | $xi_o$ |
| | 5 | 15 | 5 | 5 | 3 | | | |
| | 9 | 19 | 9 | 9 | 19 | | | |
| ($xi_o$) | 14 | 4 | 14 | 14 | 14 | NO | | |
| | 19 | 9 | 19 | 19 | 9 | | | |
| | 9 | 19 | 9 | 9 | 19 | | | |

p = 11 r = ( 11, 13, 15, 17, 19, 0, 2, 4, 6, 8, 10 )

$g = e^{19}19$ $h = e^{10}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 15 | 4 | 15 | 13 | 17 | SI | ( 13, 19, 4 ) | II |
| | 19 | 0 | 19 | 15 | 15 | | ( 15, 0, 6 ) | *iii* |
| | 0 | 19 | 0 | 19 | 11 | | ( 19, 4, 10 ) | *v* |
| | 4 | 15 | 4 | 0 | 10 | | ( 4, 10, 15 ) | VIII |
| | 6 | 13 | 6 | 4 | 6 | | ( 10, 15, 0 ) | $\mathit{xi}_o$ |
| | 10 | 9 | 10 | 6 | 4 | | | |
| | | | | 10 | 0 | | | |
| ( *v*, VI ) | 11 | 8 | 11 | 11 | 19 | SI | ( 13, 19, 4 ) | II |
| | 19 | 0 | 19 | 13 | 17 | | ( 15, 0, 6 ) | *iii* |
| | 0 | 19 | 0 | 15 | 15 | | ( 19, 4, 10 ) | *v* |
| | 4 | 15 | 4 | 19 | 11 | | ( 0, 6, 11 ) | VI |
| | 6 | 13 | 6 | 0 | 10 | | ( 4, 10, 15 ) | VIII |
| | 10 | 9 | 10 | 4 | 6 | | ( 8, 13, 19 ) | *x* |
| | | | | 6 | 4 | | ( 10, 15, 0 ) | $\mathit{xi}_o$ |
| | | | | 8 | 2 | | | |
| | | | | 10 | 0 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 15 | 4 | 15 | 13 | 17 | SI | ( 13, 19, 4 ) | II |
| | 0 | 19 | 0 | 15 | 15 | | ( 15, 0, 6 ) | *iii* |
| | 4 | 15 | 4 | 19 | 11 | | ( 19, 4, 10 ) | *v* |
| | 6 | 13 | 6 | 0 | 10 | | ( 4, 10, 15 ) | VIII |
| | 10 | 9 | 10 | 4 | 6 | | ( 10, 15, 0 ) | $\mathit{xi}_o$ |
| | | | | 6 | 4 | | | |
| | | | | 10 | 0 | | | |
| ( VI, VIII ) | 11 | 8 | 11 | 11 | 19 | SI | ( 13, 19, 4 ) | II |
| | 15 | 4 | 15 | 13 | 17 | | ( 15, 0, 6 ) | *iii* |
| | 0 | 19 | 0 | 15 | 15 | | ( 19, 4, 10 ) | *v* |
| | 4 | 15 | 4 | 19 | 11 | | ( 0, 6, 11 ) | VI |
| | 6 | 13 | 6 | 0 | 10 | | ( 4, 10, 15 ) | VIII |
| | 10 | 9 | 10 | 4 | 6 | | ( 8, 13, 19 ) | *x* |
| | | | | 6 | 4 | | ( 10, 15, 0 ) | $\mathit{xi}_o$ |
| | | | | 8 | 2 | | | |
| | | | | 10 | 0 | | | |
| ( $\mathit{xi}_o$ ) | 15 | 4 | 15 | 15 | 15 | SI | ( 19, 4, 10 ) | *v* |
| | 0 | 19 | 0 | 19 | 11 | | ( 4, 10, 15 ) | VIII |
| | 10 | 9 | 10 | 0 | 10 | | ( 10, 15, 0 ) | $\mathit{xi}_o$ |
| | | | | 4 | 6 | | | |
| | | | | 10 | 0 | | | |

$p = 12$ $\quad$ $r = (12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11)$

$g = e^{0}19$ $\quad$ $h = e^{12}19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 16 | 4 | 16 | 16 | 16 | NO | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | | | |
| | 1 | 19 | 1 | 1 | 11 | | | |
| | 5 | 15 | 5 | 5 | 7 | | | |
| | 7 | 13 | 7 | 7 | 5 | | | |
| | 11 | 9 | 11 | 9 | 3 | | | |
| | | | | 11 | 1 | | | |
| ( *v*, VI ) | 12 | 8 | 12 | 12 | 0 | NO | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | | | |
| | 1 | 19 | 1 | 1 | 11 | | | |
| | 5 | 15 | 5 | 5 | 7 | | | |
| | 7 | 13 | 7 | 7 | 5 | | | |
| | 11 | 9 | 11 | 9 | 3 | | | |
| | | | | 11 | 1 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 16 | 4 | 16 | 16 | 16 | NO | | |
| | 1 | 19 | 1 | 1 | 11 | | | |
| | 5 | 15 | 5 | 5 | 7 | | | |
| | 7 | 13 | 7 | 7 | 5 | | | |
| | 11 | 9 | 11 | 9 | 3 | | | |
| | | | | 11 | 1 | | | |
| ( VI, VIII ) | 12 | 8 | 12 | 12 | 0 | NO | | |
| | 16 | 4 | 16 | 16 | 16 | | | |
| | 1 | 19 | 1 | 1 | 11 | | | |
| | 5 | 15 | 5 | 5 | 7 | | | |
| | 7 | 13 | 7 | 7 | 5 | | | |
| | 11 | 9 | 11 | 9 | 3 | | | |
| | | | | 11 | 1 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 16 | 4 | 16 | 16 | 16 | NO | | |
| | 1 | 19 | 1 | 1 | 11 | | | |
| | 11 | 9 | 11 | 9 | 3 | | | |
| | | | | 11 | 1 | | | |

p = 13 r = ( 13, 15, 17, 19, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 )

$g = e^{1}19$ $h = e^{14}19$

| $\mu$ | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación cuantizada? | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mu$ ( r ) | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 17 | 4 | 17 | 13 | 1 | SI | ( 13, 19, 4 ) | I |
| | 1 | 0 | 1 | 15 | 19 | | ( 15, 1, 6 ) | II |
| | 2 | 19 | 2 | 17 | 17 | | ( 17, 2, 8 ) | *iii* |
| | 6 | 15 | 6 | 19 | 15 | | ( 1, 6, 12 ) | *v* |
| | 8 | 13 | 8 | 1 | 13 | | ( 2, 8, 13 ) | VI |
| | 12 | 9 | 12 | 2 | 12 | | ( 6, 12, 17 ) | VIII |
| | | | | 4 | 10 | | ( 8, 13, 19 ) | *ix* |
| | | | | 6 | 8 | | ( 12, 17, 2 ) | $xi_o$ |
| | | | | 8 | 6 | | | |
| | | | | 12 | 2 | | | |
| ( *v*, VI ) | 13 | 8 | 13 | 13 | 1 | NO | | |
| | 1 | 0 | 1 | 15 | 19 | | | |
| | 2 | 19 | 2 | 19 | 15 | | | |
| | 6 | 15 | 6 | 1 | 13 | | | |
| | 8 | 13 | 8 | 2 | 12 | | | |
| | 12 | 9 | 12 | 6 | 8 | | | |
| | | | | 8 | 6 | | | |
| | | | | 12 | 2 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 17 | 4 | 17 | 13 | 1 | NO | | |
| | 2 | 19 | 2 | 15 | 19 | | | |
| | 6 | 15 | 6 | 17 | 17 | | | |
| | 8 | 13 | 8 | 19 | 15 | | | |
| | 12 | 9 | 12 | 2 | 12 | | | |
| | | | | 4 | 10 | | | |
| | | | | 6 | 8 | | | |
| | | | | 8 | 6 | | | |
| | | | | 12 | 2 | | | |
| ( VI, VIII ) | 13 | 8 | 13 | 13 | 1 | NO | | |
| | 17 | 4 | 17 | 15 | 19 | | | |
| | 2 | 19 | 2 | 17 | 17 | | | |
| | 6 | 15 | 6 | 19 | 15 | | | |
| | 8 | 13 | 8 | 2 | 12 | | | |
| | 12 | 9 | 12 | 4 | 10 | | | |
| | | | | 6 | 8 | | | |
| | | | | 8 | 6 | | | |
| | | | | 12 | 2 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 17 | 4 | 17 | 17 | 17 | NO | | |
| | 2 | 19 | 2 | 19 | 15 | | | |
| | 12 | 9 | 12 | 2 | 12 | | | |
| | | | | 4 | 10 | | | |
| | | | | 12 | 2 | | | |

$p = 14$ $r = (14, 16, 18, 0, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13)$

$g = e^2 19$ $h = e^{16} 19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 18 | 4 | 18 | 18 | 18 | NO | | |
| | 2 | 0 | 2 | 0 | 16 | | | |
| | 3 | 19 | 3 | 2 | 14 | | | |
| | 7 | 15 | 7 | 3 | 13 | | | |
| | 9 | 13 | 9 | 7 | 9 | | | |
| | 13 | 9 | 13 | 9 | 7 | | | |
| | | | | 13 | 3 | | | |
| ( *v*, VI ) | 14 | 8 | 14 | 14 | 2 | SI | ( 2, 7, 13 ) | *v* |
| | 2 | 0 | 2 | 0 | 16 | | ( 3, 9, 14 ) | VI |
| | 3 | 19 | 3 | 2 | 14 | | ( 9, 14, 0 ) | *ix* |
| | 7 | 15 | 7 | 3 | 13 | | | |
| | 9 | 13 | 9 | 7 | 9 | | | |
| | 13 | 9 | 13 | 9 | 7 | | | |
| | | | | 13 | 3 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 18 | 4 | 18 | 18 | 18 | NO | | |
| | 3 | 19 | 3 | 3 | 13 | | | |
| | 7 | 15 | 7 | 7 | 9 | | | |
| | 9 | 13 | 9 | 9 | 7 | | | |
| | 13 | 9 | 13 | 13 | 3 | | | |
| ( VI, VIII ) | 14 | 8 | 14 | 14 | 2 | SI | ( 18, 3, 9 ) | *iii* |
| | 18 | 4 | 18 | 18 | 18 | | ( 3, 9, 14 ) | VI |
| | 3 | 19 | 3 | 3 | 13 | | ( 7, 13, 18 ) | VIII |
| | 7 | 15 | 7 | 7 | 9 | | ( 13, 18, 3 ) | $xi_o$ |
| | 9 | 13 | 9 | 9 | 7 | | | |
| | 13 | 9 | 13 | 13 | 3 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 18 | 4 | 18 | 18 | 18 | SI | ( 18, 3, 9 ) | *iii* |
| | 3 | 19 | 3 | 3 | 13 | | ( 13, 18, 3 ) | $xi_o$ |
| | 13 | 9 | 13 | 9 | 7 | | | |
| | | | | 13 | 3 | | | |

$p = 15$ $\qquad$ $r = (15, 17, 19, 1, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14)$

$g = e^3 19$ $\qquad$ $h = e^{18} 19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 19 | 4 | 19 | 15 | 3 | NO | | |
| | 3 | 0 | 3 | 19 | 19 | | | |
| | 4 | 19 | 4 | 3 | 15 | | | |
| | 8 | 15 | 8 | 4 | 14 | | | |
| | 10 | 13 | 10 | 8 | 10 | | | |
| | 14 | 9 | 14 | 10 | 8 | | | |
| | | | | 14 | 4 | | | |
| ( *v*, VI ) | 15 | 8 | 15 | 15 | 3 | NO | | |
| | 3 | 0 | 3 | 19 | 19 | | | |
| | 4 | 19 | 4 | 3 | 15 | | | |
| | 8 | 15 | 8 | 4 | 14 | | | |
| | 10 | 13 | 10 | 8 | 10 | | | |
| | 14 | 9 | 14 | 10 | 8 | | | |
| | | | | 14 | 4 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 19 | 4 | 19 | 15 | 3 | SI | ( 19, 4, 10 ) | *iii* |
| | 4 | 19 | 4 | 19 | 19 | | ( 4, 10, 15 ) | VI |
| | 8 | 15 | 8 | 4 | 14 | | ( 8, 14, 19 ) | VIII |
| | 10 | 13 | 10 | 8 | 10 | | ( 14, 19, 4 ) | $xi_o$ |
| | 14 | 9 | 14 | 10 | 8 | | | |
| | | | | 14 | 4 | | | |
| ( VI, VIII ) | 15 | 8 | 15 | 15 | 3 | SI | ( 19, 4, 10 ) | *iii* |
| | 19 | 4 | 19 | 19 | 19 | | ( 4, 10, 15 ) | VI |
| | 4 | 19 | 4 | 4 | 14 | | ( 8, 14, 19 ) | VIII |
| | 8 | 15 | 8 | 8 | 10 | | ( 14, 19, 4 ) | $xi_o$ |
| | 10 | 13 | 10 | 10 | 8 | | | |
| | 14 | 9 | 14 | 14 | 4 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 19 | 4 | 19 | 19 | 19 | NO | | |
| | 4 | 19 | 4 | 4 | 14 | | | |
| | 14 | 9 | 14 | 14 | 4 | | | |

$p = 16$ $r = (16, 18, 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15)$

$g = e^4 19$ $h = e^0 19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| *(iii, v)* | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | NO | | |
| | 4 | 0 | 4 | 4 | 16 | | | |
| | 5 | 19 | 5 | 5 | 15 | | | |
| | 9 | 15 | 9 | 9 | 11 | | | |
| | 11 | 13 | 11 | 11 | 9 | | | |
| | 15 | 9 | 15 | 13 | 7 | | | |
| | | | | 15 | 5 | | | |
| ( *v*, VI ) | 16 | 8 | 16 | 16 | 4 | NO | | |
| | 4 | 0 | 4 | 0 | 0 | | | |
| | 5 | 19 | 5 | 4 | 16 | | | |
| | 9 | 15 | 9 | 5 | 15 | | | |
| | 11 | 13 | 11 | 9 | 11 | | | |
| | 15 | 9 | 15 | 11 | 9 | | | |
| | | | | 13 | 7 | | | |
| | | | | 15 | 5 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | NO | | |
| | 5 | 19 | 5 | 4 | 16 | | | |
| | 9 | 15 | 9 | 5 | 15 | | | |
| | 11 | 13 | 11 | 9 | 11 | | | |
| | 15 | 9 | 15 | 11 | 9 | | | |
| | | | | 13 | 7 | | | |
| | | | | 15 | 5 | | | |
| ( VI, VIII ) | 16 | 8 | 16 | 16 | 4 | NO | | |
| | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | 5 | 19 | 5 | 4 | 16 | | | |
| | 9 | 15 | 9 | 5 | 15 | | | |
| | 11 | 13 | 11 | 9 | 11 | | | |
| | 15 | 9 | 15 | 11 | 9 | | | |
| | | | | 13 | 7 | | | |
| | | | | 15 | 5 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | SI | ( 4, 9, 15 ) | *v* |
| | 5 | 19 | 5 | 4 | 16 | | ( 9, 15, 0 ) | VIII |
| | 15 | 9 | 15 | 5 | 15 | | ( 15, 0, 5 ) | $xi_o$ |
| | | | | 9 | 11 | | | |
| | | | | 15 | 5 | | | |

p = 17 $\qquad$ r = ( 17, 19, 1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16 )

$g = e^5 19$ $\qquad$ $h = e^2 19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 1 | 4 | 1 | 19 | 3 | SI | ( 19, 5, 10 ) | II |
| | 5 | 0 | 5 | 1 | 1 | | ( 1, 6, 12 ) | *iii* |
| | 6 | 19 | 6 | 5 | 17 | | ( 5, 10, 16 ) | *v* |
| | 10 | 15 | 10 | 6 | 16 | | ( 10, 16, 1 ) | VIII |
| | 12 | 13 | 12 | 10 | 12 | | ( 16, 1, 6 ) | $xi_o$ |
| | 16 | 9 | 16 | 12 | 10 | | | |
| | | | | 16 | 6 | | | |
| ( *v*, VI ) | 17 | 8 | 17 | 17 | 5 | NO | | |
| | 5 | 0 | 5 | 19 | 3 | | | |
| | 6 | 19 | 6 | 5 | 17 | | | |
| | 10 | 15 | 10 | 6 | 16 | | | |
| | 12 | 13 | 12 | 8 | 14 | | | |
| | 16 | 9 | 16 | 10 | 12 | | | |
| | | | | 12 | 10 | | | |
| | | | | 16 | 6 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 1 | 4 | 1 | 19 | 3 | NO | | |
| | 6 | 19 | 6 | 1 | 1 | | | |
| | 10 | 15 | 10 | 6 | 16 | | | |
| | 12 | 13 | 12 | 10 | 12 | | | |
| | 16 | 9 | 16 | 12 | 10 | | | |
| | | | | 16 | 6 | | | |
| ( VI, VIII ) | 17 | 8 | 17 | 17 | 5 | NO | | |
| | 1 | 4 | 1 | 19 | 3 | | | |
| | 6 | 19 | 6 | 1 | 1 | | | |
| | 10 | 15 | 10 | 6 | 16 | | | |
| | 12 | 13 | 12 | 8 | 14 | | | |
| | 16 | 9 | 16 | 10 | 12 | | | |
| | | | | 12 | 10 | | | |
| | | | | 16 | 6 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 1 | 4 | 1 | 19 | 3 | NO | | |
| | 6 | 19 | 6 | 1 | 1 | | | |
| | 16 | 9 | 16 | 6 | 16 | | | |
| | | | | 16 | 6 | | | |

$p = 18$ $\quad r = (18, 0, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17)$

$g = e^6 19$ $\quad h = e^4 19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 2 | 4 | 2 | 0 | 4 | SI | ( 0, 6, 11 ) | II |
| | 6 | 0 | 6 | 2 | 2 | | ( 2, 7, 13 ) | *iii* |
| | 7 | 19 | 7 | 4 | 0 | | ( 4, 9, 15 ) | *iv* |
| | 11 | 15 | 11 | 6 | 18 | | ( 6, 11, 17 ) | *v* |
| | 13 | 13 | 13 | 7 | 17 | | ( 9, 15, 0 ) | VII |
| | 17 | 9 | 17 | 9 | 15 | | ( 11, 17, 2 ) | VIII |
| | | | | 11 | 13 | | ( 15, 0, 6 ) | *x* |
| | | | | 13 | 11 | | ( 17, 2, 7 ) | $xi_o$ |
| | | | | 15 | 9 | | | |
| | | | | 17 | 7 | | | |
| ( *v*, VI ) | 18 | 8 | 18 | 18 | 6 | SI | ( 0, 6, 11 ) | II |
| | 6 | 0 | 6 | 0 | 4 | | ( 6, 11, 17 ) | *v* |
| | 7 | 19 | 7 | 6 | 18 | | ( 7, 13, 18 ) | VI |
| | 11 | 15 | 11 | 7 | 17 | | ( 9, 15, 0 ) | VII |
| | 13 | 13 | 13 | 9 | 15 | | ( 15, 0, 6 ) | *x* |
| | 17 | 9 | 17 | 11 | 13 | | | |
| | | | | 13 | 11 | | | |
| | | | | 15 | 9 | | | |
| | | | | 17 | 7 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | SI | ( 2, 7, 13 ) | *iii* |
| | 7 | 19 | 7 | 4 | 0 | | ( 4, 9, 15 ) | *iv* |
| | 11 | 15 | 11 | 7 | 17 | | ( 11, 17, 2 ) | VIII |
| | 13 | 13 | 13 | 9 | 15 | | ( 17, 2, 7 ) | $xi_o$ |
| | 17 | 9 | 17 | 11 | 13 | | | |
| | | | | 13 | 11 | | | |
| | | | | 15 | 9 | | | |
| | | | | 17 | 7 | | | |
| ( VI, VIII ) | 18 | 8 | 18 | 18 | 6 | SI | ( 18, 4, 9 ) | I |
| | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | | ( 2, 7, 13 ) | *iii* |
| | 7 | 19 | 7 | 4 | 0 | | ( 4, 9, 15 ) | *iv* |
| | 11 | 15 | 11 | 7 | 17 | | ( 7, 13, 18 ) | VI |
| | 13 | 13 | 13 | 9 | 15 | | ( 11, 17, 2 ) | VIII |
| | 17 | 9 | 17 | 11 | 13 | | ( 13, 18, 4 ) | *ix* |
| | | | | 13 | 11 | | ( 17, 2, 7 ) | $xi_o$ |
| | | | | 15 | 9 | | | |
| | | | | 17 | 7 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | NO | | |
| | 7 | 19 | 7 | 4 | 0 | | | |
| | 17 | 9 | 17 | 7 | 17 | | | |
| | | | | 9 | 15 | | | |
| | | | | 17 | 7 | | | |

$p = 19$ $\quad$ $r = (19, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18)$

$g = e^7 19$ $\quad$ $h = e^6 19$

| | cuanto Q | | | $\tau = Q \cap r$ | | ¿modulación | pivotes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\mu(r)$ | $g(\mu)$ | $g^2(\mu)$ | $\tau$ | $h(\tau)$ | cuantizada? | acordes | grados |
| ( *iii*, *v* ) | 3 | 4 | 3 | 19 | 7 | NO | | |
| | 7 | 0 | 7 | 3 | 3 | | | |
| | 8 | 19 | 8 | 7 | 19 | | | |
| | 12 | 15 | 12 | 8 | 18 | | | |
| | 14 | 13 | 14 | 12 | 14 | | | |
| | 18 | 9 | 18 | 14 | 12 | | | |
| | | | | 18 | 8 | | | |
| ( *v*, VI ) | 19 | 8 | 19 | 19 | 7 | NO | | |
| | 7 | 0 | 7 | 7 | 19 | | | |
| | 8 | 19 | 8 | 8 | 18 | | | |
| | 12 | 15 | 12 | 12 | 14 | | | |
| | 14 | 13 | 14 | 14 | 12 | | | |
| | 18 | 9 | 18 | 18 | 8 | | | |
| ( *iii*, VIII ) | 3 | 4 | 3 | 19 | 7 | SI | ( 3, 8, 14 ) | *iii* |
| | 8 | 19 | 8 | 3 | 3 | | ( 8, 14, 19 ) | VI |
| | 12 | 15 | 12 | 8 | 18 | | ( 12, 18, 3 ) | VIII |
| | 14 | 13 | 14 | 12 | 14 | | ( 18, 3, 8 ) | $xi_o$ |
| | 18 | 9 | 18 | 14 | 12 | | | |
| | | | | 18 | 8 | | | |
| ( VI, VIII ) | 19 | 8 | 19 | 19 | 7 | SI | ( 3, 8, 14 ) | *iii* |
| | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | | ( 8, 14, 19 ) | VI |
| | 8 | 19 | 8 | 8 | 18 | | ( 12, 18, 3 ) | VIII |
| | 12 | 15 | 12 | 12 | 14 | | ( 18, 3, 8 ) | $xi_o$ |
| | 14 | 13 | 14 | 14 | 12 | | | |
| | 18 | 9 | 18 | 18 | 8 | | | |
| ( $xi_o$ ) | 3 | 4 | 3 | 19 | 7 | NO | | |
| | 8 | 19 | 8 | 3 | 3 | | | |
| | 18 | 9 | 18 | 8 | 18 | | | |
| | | | | 18 | 8 | | | |

# Apéndice A

## Resultados de la Parte 1.

Demostraremos el Lema 18, el cual aparece en la sección 2.2. Lo haremos usando métodos de la Teoría de Grupos aplicados a la Teoría de Números, por lo que primero probaremos la siguiente

**Proposition** *Sean $c$ y $d$ dos enteros tales que $(c, d) = 1$. Entonces $c(\bmod d)$ genera al grupo cíclico $Z_d$.*

**Proof.** Un elemento $g$ genera al grupo cíclico $Z_d$ si $kg \not\equiv 0(\bmod N)$, $\forall\ k \in Z, 0 < k < d$. Evidentemente, $dg \equiv 0(\bmod d)$, por lo cual lo anterior significa que en la sucesión 0, $g$, $2g$, ... , $(d-1)g$ $(\bmod d)$, cada elemento de $Z_d$ aparece exactamente una vez. Demostraremos la proposición por contraposición: supongamos que $c(\bmod d)$ no genera a $Z_d$, esto es, que existe algún entero positivo $k < d$ tal que $kc \equiv 0$ $(\bmod d)$. Sea $k_0$ el menor de tales enteros. La ecuación

$k_0c \equiv 0(\bmod d)$

significa que existe algún entero $j$ tal que

$$k_0c = jd, \qquad (1)$$

pero también significa que $c$ $(\bmod d)$ genera a $Z_{k_0}$ , y que este es un subgrupo propio de $Z_d$. Si llamamos $p$ al índice de $Z_{k_0}$ en $Z_d$, entonces $p = \frac{d}{k_0}$, o

$$k_0 = \frac{d}{p} \qquad (2)$$

es decir que $p$ divide a $d$. Al multiplicar por $c$ la ecuación (2), resulta

$k_0 c = \frac{dc}{p}$ (3)

Combinando las ecuaciones (1) y (3) obtenemos

$j = \frac{c}{p}$

es decir, $p$ divide también a $c$. Pero como $Z_{k_0}$ es un subgrupo propio de $Z_d$, su índice $p$ es mayor que 1, *por lo que* $(c,d) > 1$. Luego, si $(c,d) = 1$, entonces $c(\text{mod}\, d)$ genera a $Z_d$. ∎

Ahora podemos pasar a demostrar el

**Lemma** *Sean c y d dos enteros tales que* $(c,d) = 1$ *(esto es, c y d son coprimos). Entonces existe un único entero no negativo* $c'$, $c' < d$, *tal que* $cc' \equiv -1(\text{mod}\, d)$.

**Proof.** Por la proposición anterior, $c$ (mod $d$) genera al grupo cíclico $Z_d$; esto significa que en la sucesión $0$, $c$, $2c$, ... , $(d-1)c$ $(\text{mod}\, d)$, en particular el elemento $d - 1 = -1(\text{mod}\, d) \in Z_d$ aparece exactamente una vez. De aquí se sigue el resultado. ∎

Por cierto que aquí surge una cuestión en relación al lema 19: si se demostró que $c'$, la longitud diatónica de la quinta generalizada, es único, ¿cómo se explica el caso de la cuarta, en la que el intervalo de excepción es aumentado, no disminuido? La respuesta a esta pregunta constituye la clave de la conexión entre los enfoques de la primera y segunda partes.

En la segunda parte se propone que la quinta y la cuarta generalizadas son elementos inversos uno del otro en el grupo $Z_N$. Esto se verifica con los métodos de la primera parte, como lo muestran los siguientes resultados, duales de los Lemas 18 y 19:

**Lemma** *Sean c y d dos enteros tales que* $(c,d) = 1$. *Entonces existe un único entero no negativo* $c'' < d$, *tal que* $cc'' \equiv 1(\text{mod}\, d)$.

**Proof.** Definamos a $c''$ como el inverso de $c'$ en $Z_d$, esto es, $c'' = d - c'$. Entonces

$cc'' \equiv c(d - c') \equiv cd - cc' \;(\text{mod}\, d)$

Evidentemente, $cd \equiv 0(\text{mod}\, d)$, por lo que, recordando el lema anterior, el resultado es inmediato. ∎

**Lemma** *Considérese una escala que presenta PM, con* $(c,d)=1$. *Sea* $c''$ *como en el lema anterior. Entonces, todos los intervalos de longitud diatónica* $c''$ *(excepto uno sólo) tienen longitud cromática* $d''=(cc''-1)/d$ *; el intervalo de excepción, tiene longitud cromática* $d''+1$.

**Proof.** Aplíquese el mismo razonamiento que demuestra el Lema 19, tomando en cuenta que $cc''\equiv 1(\bmod d)$ significa que existe algún entero $d''$ tal que

$cc''=dd''+1$,

ecuación de la que se obtiene el valor de $d''$ ■

En este caso, $c''$ es la longitud diatónica de la cuarta generalizada, mientras que $d''$ es la longitud cromática de la cuarta generalizada perfecta, y $d''+1$ es la longitud cromática de la cuarta generalizada aumentada.

Obsérvese que, gracias a la unicidad en los resultados anteriores, se puede afirmar que los elementos que hemos llamado quinta y cuarta generalizada, son los únicos intervalos diatónicos que presentan la peculiaridad de que todos sus representantes, excepto uno sólo, tienen la misma longitud cromática.

### Resultados de la Parte 2.

Aquí demostraremos la afirmación de que, para valores de $k>3$, $(n-(2k+1))>2k+1$. Esto es fácil de probar por inducción, recordando que se definió $n=k(k+1)$, con lo que la desigualdad se escribe así:

$$k^2-k-1>2k+1 \qquad (1)$$

Es fácil comprobar que (1) se cumple para k = 4. Veamos el paso inductivo. Supongamos que (1) se cumple para un valor arbitrario k > 3. Entonces

$k^2-k-1>2k+1>k>3$

y las siguientes implicaciones entre desigualdades son ciertas:

$k^2-k-1>3$

$\Rightarrow k^2+k-1>2k+3$

$\Rightarrow (k^2+2k+1)-k-2>2k+3$

$\Rightarrow (k+1)^2-(k+1)-1>2(k+1)+1$

Lo que prueba para $(k+1)$ la desigualdad deseada.

Ya cumplidas las hipótesis para la inducción, aplicamos ésta, y obtenemos el resultado.

# Apéndice B

Tomaremos como ya dado el importante resultado de que todo número compuesto (no primo) tiene una única descomposición en factores primos.

**Proposition** *Si $r$ y $s$ son primos entre sí, y cada uno divide a $k$, entonces su producto $rs$ divide a $k$.*

**Proof.** Si el producto $rs$ contiene en su factorización prima a la potencia de un primo, digamos $p^{\pi}$, entonces $p^{\pi}$ debe ocurrir en la factorización prima de uno de los factores de $rs$; supongamos que ocurre en $r$. Entonces $k$, que es múltiplo de $r$, debe tener a $p^{\pi}$ como factor. De manera análoga, cualquier otra potencia de un primo contenida en la factorización prima de $rs$ debe ser factor de $k$. Luego, $k$ es múltiplo de $rs$. ■

**Lemma** *Si $r$, $s$, $t$ son enteros tales que $r$ divide a $st$ y $(r,s) = 1$, entonces $r$ divide a $t$.*

**Proof.** $st$ es divisible por $r$ y por $s$; por lo tanto, por la proposición anterior, $rs$ divide a $st$, esto es,

$\frac{st}{rs} = \frac{t}{r}$

es un entero. ■

## Bibliografía

Balzano, Gerald J. The Group-theoretic Description of 12-fold an Microtonal Pitch Systems. *Computer Music Journal*, Vol. 4, No. 4, Winter 1980, pp. 66-84. Massachusetts Institute of Technology.

Clough, J. and Myerson, G. Variety and Multiplicity in Diatonic Systems. *Journal of Music Theory*, No. 29, pp. 249-270.

Clough, J. and Myerson, G. Musical Scales and the Generalized Circle of Fifths. *American Mathematics Monthly*, No. 93, pp. 695-701.

Fraleigh, J. B. *Algebra Abstracta*. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delawere, 1987.

Herstein, I. N. *Algebra Moderna*. Trillas, México, 1990.

Mathews, G. B. *Theory of Numbers*: Chelsea Publishing Company, New York, N. Y.

[Mazzola1985] Mazzola, G. *Gruppen und Kategorien in der Musik*. Heldermann, Berlin, 1985.

[Mazzola1990] Mazzola, G. *Geometrie der Töne, Elemente der Mathematischen Musiktheorie*. Birkhäuser, Basel, 1990.

[Montiel] Montiel Hernández, M. *Matemáticas y Música: Perspectivas a través del Tiempo*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1996.

[Muzzulini] Muzzulini, D. Musical Modulation by Symmetries. *Journal of Music Theory*, 1995.

Rotman, J. J. *An Introduction to the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics 148. Springer Verlag, 1995.

[Schönberg] Schönberg, A. *Harmonielehre* (1911). Universal Edition, Wien, 1996.

Zweifel, Paul F. Generalized Diatonic and Pentatonic Scales: a Group-theoretic Aproach. *Perspectives of New Music*, No. ? pp. 141-161.

## Bibliografía Complementaria

Agmon, E. A Mathematical Model of the Diatonic System. *Journal of Music Theory*, No. 33, pp. 1-25

Budden, Frank J. *The Fascination of Groups*, Capítulo 23. Cambridge University Press, London, 1972.

Clough, J. Aspects of Diatonic Sets. *Journal of Music Theory*, No. 23,

Clough, J. and Douthett, J. Maximally Even Sets. *Journal of Music Theory*, No. 35, pp. 93-173.

Helmholtz, H. *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*. Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1954.