

01183



**MALLAS ADAPTABLES PARA LA SOLUCIÓN DE  
LA HIDRODINÁMICA DE CUERPOS DE AGUA**

**Gabriel Soto Cortés**

Tesis propuesta a la División de Estudios de Posgrado de la  
Facultad de Ingeniería para obtener el grado de

**Doctor en Ingeniería Hidráulica**

Dirigida por

**Dr. Moisés Berezowsky Verduzco**

Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria, noviembre de 2000.

286755



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*La autonomía de la voluntad es el principio  
único de todas las leyes morales y de los deberes  
que resultan de ellas.*

*Emmanuel Kant*

Este trabajo está dedicado a mi madre, María Elena Cortés, y a la memoria de mi padre, José Cruz Soto.

Con especial cariño a Graciela y a Mayra

## AGRADECIMIENTOS

Esta es la sección de la tesis más difícil de escribir. No siempre se encuentran las palabras adecuadas para agradecer a todas las personas involucradas en un proyecto que significa tanto en tu vida. Por supuesto debo de comenzar por agradecer al Dr. Moisés Berezowsky por el apoyo incondicional que me ofreció y por aceptar compartir conmigo su experiencia. Tuve la fortuna de trabajar a su lado durante estos tres años bajo una completa libertad y confianza la cual, me permitió saborear los éxitos y los fracasos de esta empresa. Mil gracias.

A los Doctores Carlos Cruickshank, Ramón Domínguez, Oscar Fuentes, Jesús Gracia y Rodolfo Silva por su revisión crítica y sus aportaciones con las cuales se pudo mejorar este trabajo.

Muy especialmente al Dr. Carlos A Escalante por ofrecerme siempre su respaldo y confianza, alentándome con su ejemplo a continuar superándome día con día.

Por supuesto al Instituto de Ingeniería pero sobre todo a su gente, de manera particular al Ing. Víctor Franco y al Dr. Abel Jiménez.

Mi sincera gratitud a Ana, Carlos y David por su entusiasmo y colaboración en el trabajo experimental.

A la Universidad Nacional en su conjunto por todos los apoyos ofrecidos. Particularmente a la Facultad de Ingeniería y la Dirección General de Estudios de Posgrado.

También merece mención especial el apoyo económico y moral brindado por el CONACYT gracias al cual tuve el privilegio de concentrar mi tiempo y esfuerzo de manera exclusiva para alcanzar la meta que se fijó al inicio de este proyecto.

A la Universidad Autónoma Metropolitana por reconocer en ella la base fundamental de mi formación e inevitablemente con esta remembranza al Dr. Arturo Trejo, al Ing. Darío Guaycochea y al Dr. Rubén Dorantes.

Deseo agradecer a aquellas personas que, probablemente sin saberlo, forman parte importante de este trabajo pero sobre todo de mi vida, mis amigos, Luis Zúñiga, Miguel Villegas, Adriana Palma y Eliseo Carrizosa.

Por supuesto gracias a mi entrañable amigo Fabián Rivera, por compartir todos estos años de esfuerzos, trabajo y amistad sincera. Mejor que nadie sabes lo que ha significado esta aventura y no puedo más que reconocer el valor de tu apoyo.

Gracias Graciela por tu comprensión. Por todo ese tiempo que te quité para entregárselo a mi trabajo. Gracias a Mayra por ser el empujón que necesitaba. Aunque al final de la lista las primeras en mi corazón.

# Índice

Índice de figuras .....	iii
Glosario .....	v
Resumen .....	vii
1. Introducción.....	1
2. Mallas adaptables como alternativa para el cálculo hidrodinámico con fronteras móviles.....	5
2.1 Cálculo hidrodinámico en flujo bidimensional .....	5
2.2 Estado del arte de los problemas con fronteras móviles.....	8
2.3 Diversos enfoques a los problemas con fronteras móviles.....	10
3. Desarrollo del modelo.....	15
3.1 Ecuaciones hidrodinámicas fundamentales .....	15
3.2 Algoritmo adaptable de solución .....	22
3.3 Esquema numérico en cada etapa .....	24
3.4 Condiciones iniciales y de frontera.....	30
3.5 Generalidades sobre el algoritmo de solución propuesto.....	32
Capítulo 4. Validación del modelo para malla fija .....	37
4.1 Introducción.....	37
4.2 Flujo gradualmente variado en un canal rectangular recto.....	37
4.3 Flujo en un canal curvo .....	39
Capítulo 5. Validación del modelo para malla adaptable.....	45
5.1 Introducción.....	45
5.2 Flujo en un canal con sección transversal trapecial .....	45
5.3 Flujo en cauces .....	52
5.4 Comentarios finales .....	60
Conclusiones.....	61
Apéndice A. Principios básicos de la transformación de ecuaciones.....	65

## Índice de figuras

Figura 1.1 Variabilidad del volumen de control en un río para diferentes gastos .....	2
Figura 3.1 Cambio de la cota del agua durante el proceso de cálculo .....	20
Figura 3.2 Modelo numérico de solución .....	24
Figura 3.3 Malla de cálculo .....	29
Figura 3.4 Celda representativa del espacio físico .....	30
Figura 3.5 Condiciones de frontera en las márgenes .....	32
Figura 3.6 Algoritmo general de solución .....	34
Figura 3.7 Módulo hidrodinámico .....	35
Figura 4.1 Representación tridimensional de la superficie libre .....	38
Figura 4.2 Tirantes calculados con el modelo 2D vs 3D .....	39
Figura 4.3 Malla de cálculo y secciones de estudio .....	40
Figura 4.4 Campo de velocidades .....	41
Figura 4.5 Perfiles de velocidad calculados y medidos .....	42
Figura 4.6 Nivel de superficie libre a lo largo de las márgenes en la curva .....	43
Figura 5.1 Canal de pendiente variable del Instituto de Ingeniería de la UNAM .....	46
Figura 5.2 Sección transversal del canal .....	46
Figura 5.3 Vista de la sección transversal y de los sensores de nivel. ....	47
Figura 5.4 Equipo de medición y adquisición de datos .....	48
Figura 5.5 Cota de la superficie libre medida aguas abajo, canal horizontal. ....	50
Figura 5.6 Cota de la superficie libre medida aguas abajo, canal con pendiente .....	50
Figura 5.7 Representación tridimensional de la topografía y de la superficie libre del agua en dos instantes diferentes, canal horizontal .....	51
Figura 5.8 Representación tridimensional de la topografía y de la superficie libre del agua en dos instantes diferentes, canal con pendiente. ....	51
Figura 5.9 Cotas de agua experimentales y calculadas a cinco metros aguas arriba de la compuerta, canal horizontal .....	51
Figura 5.10 Cotas de agua experimentales y calculadas a cinco metros aguas arriba de la compuerta, canal con pendiente .....	51
Figura 5.11 Aspecto general del modelo visto desde aguas abajo hacia aguas arriba .....	53
Figura 5.12 Topografía de la zona en estudio y ubicación de los sensores de nivel .....	53
Figura 5.13 Malla de cálculo usada durante la verificación del modelo para flujo permanente .....	54
Figura 5.14(A) Perspectiva tridimensional de la superficie libre del agua adaptada a la topografía de la zona en estudio (B) Aspecto de la superficie libre del agua para la verificación en flujo permanente .....	56
Figura 5.15 Perfiles hidráulicos medidos y calculados a lo largo de la zona de estudio para la verificación del modelo adaptable para flujo permanente .....	56



Figura 5.16 Condiciones de frontera aguas abajo y cotas de superficie libre medidas y calculadas aguas arriba.....	57
Figura 5.17 Forma de la zona inundada. Márgenes calculadas considerando malla adaptable vs. márgenes medidas experimentalmente.....	58
Figura 5.18 Rango de variación experimental de la forma de la zona inundada para flujo permanente.....	60
Figura e.1. Celda de cálculo .....	67

## GLOSARIO

CI Condiciones iniciales

CF Condiciones de frontera

*div* Operador Divergencia

DF Diferencias finitas

EDP Ecuaciones diferenciales parciales

EF Elemento finito

ES Estado del sistema

*grad* Operador Gradiente

*lap* Operador Laplaciano

MAF Mallas ajustadas a las fronteras

MLE Métodos Lagrangeanos-Eulerianos

ON Operador numérico

PFM Problemas con fronteras móviles

RSF Representación del sistema físico

## RESUMEN

Se estudió el uso de *mallas adaptables* aplicadas a la resolución de problemas de hidrodinámica en los cuales el dominio físico sobre el que se resuelven las ecuaciones fundamentales depende del tiempo; en estos casos, se requiere determinar simultáneamente con el campo de velocidades y las cotas de la superficie libre del agua la forma de volumen de control. Aunque es clara la dependencia entre la solución al problema hidrodinámico y el cambio en la forma del dominio de integración, el problema aquí descrito no se trata frecuentemente en la literatura. Con el fin de abordarlo, en este trabajo se desarrolla un modelo numérico de *malla adaptable* en el cual las ecuaciones fundamentales se disocian, a partir del método de pasos fraccionados, en cuatro etapas que representan procesos físicos fundamentales llamados *advección, difusión, propagación y dependencia temporal*. El sistema resultante de ecuaciones diferenciales por resolver, se escribe en términos de un sistema curvilíneo generalizado de coordenadas con la ventaja de poder considerar de manera más adecuada, fronteras irregulares. Los métodos numéricos de solución en cada etapa hacen posible describir la solución en función de sistemas lineales con estructura tridiagonal lo que reditúa en economía de cómputo.

El *modelo adaptable* desarrollado a lo largo de este trabajo se verificó y comparó numérica y experimentalmente para diferentes casos tanto para malla fija como para malla adaptable. En términos generales, se encontraron resultados muy alentadores acerca del potencial de aplicación práctica de la modelación adaptable los cuales sugieren la necesidad de profundizar en la investigación; sobre todo, en aspectos relacionados con dominios físicos topológicamente más complicados que los aquí ensayados.

*Trátese de una bestia o de un niño, convencer es debilitar.*

*Cotelle*

## *Capítulo 1*

### INTRODUCCIÓN

Para el cálculo de la hidrodinámica en flujos a superficie libre, son fundamentales tanto las condiciones de frontera como la forma del dominio físico, definida como la proyección en planta de la zona inundada. Sin embargo, el problema de cómo obtener la forma del dominio físico o volumen de control no se trata con frecuencia en la literatura. De hecho, una buena parte de las técnicas numéricas actuales suponen conocido el volumen de control o dominio de integración, lo cual puede ser falso en flujos no permanentes. En la figura 1.1, por ejemplo, se muestra la forma de la zona inundada para dos diferentes niveles de superficie libre en un río que fluye sobre una planicie. Como se ve, entre los dos estados de flujo, existe un cambio apreciable del espacio físico, el cual repercute directamente en la solución del problema hidrodinámico mientras que la solución del problema hidrodinámico está ligada directamente con la forma del dominio de integración. Esta dependencia recíproca se conoce como “problema de fronteras móviles”. En estos casos, la posición de las fronteras no es conocida *a priori* debiendo ser determinada como parte integral de la solución y considerando su dependencia del tiempo y del espacio.

En lo que resta de este trabajo se presenta una metodología para abordar algunos problemas con fronteras móviles en hidrodinámica usando un modelo matemático de malla adaptable. La adaptación de la malla es una función de las variaciones del nivel de la superficie libre y se calcula simultáneamente usando un modelo hidrodinámico 2D promediado en la profundidad. Hasta el momento, el modelo propuesto cuenta con un grado de desarrollo que lo hace aplicable a situaciones en las que no aparecen configuraciones geomorfológicas complicadas como brazos, islas etcétera.

Los problemas con fronteras móviles han sido estudiados desde la segunda mitad del siglo XIX sobre todo en flujos en los que interviene múltiples fases. Sin embargo, para el caso del agua las aplicaciones relacionadas con la Hidráulica y con la Hidrología son escasas y generalmente basadas en la técnica del elemento finito (tal como se comenta ampliamente en el capítulo 2).

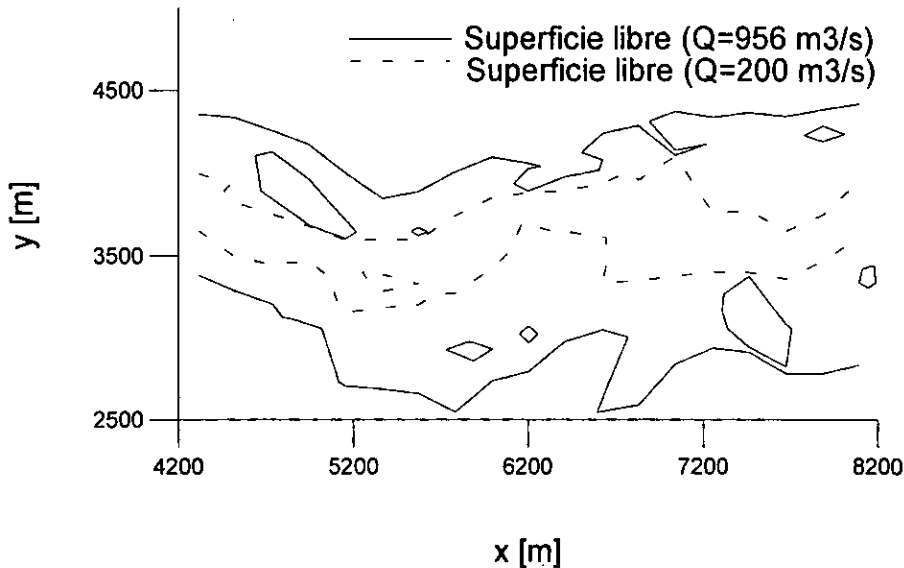


Figura 1.1 Variabilidad del volumen de control en un río para diferentes gastos.

Con esta motivación, el modelo numérico en diferencias finitas desarrollado a lo largo de estas páginas considera la variabilidad del espacio físico con respecto al tiempo con la intención fundamental de estudiar el cálculo de la hidrodinámica de flujos en estas condiciones. El modelo que se describe está referido a un sistema curvilíneo de coordenadas con la finalidad de abordar de manera adecuada las fronteras físicas irregulares. Adicionalmente, en la solución numérica que se propone se usa un esquema que considera por separado los procesos físicos involucrados en el fenómeno: *advección, difusión, propagación y dependencia temporal*.

Con la intención de describir la problemática de las fronteras móviles en el cálculo hidrodinámico de flujos a superficie libre, este trabajo se ha dividido de la siguiente manera:

---

En el capítulo 2, se presenta el estado del arte en el uso de mallas móviles y de sistemas adaptables; se inicia describiendo el cálculo hidrodinámico bidimensional tradicional, destacando la conveniencia de los sistemas de referencia ajustados a las fronteras con la intención de atacar fronteras físicas con geometrías topológicamente complicadas. Se plantea el problema del flujo a superficie libre con fronteras móviles y se describen los diferentes enfoques usados para abordar la dificultad de considerar la dependencia del espacio con respecto al tiempo.

En el capítulo 3, se describe el desarrollo teórico y numérico que sustenta el modelo adaptable propuesto.

En el capítulo 4, se verifica el modelo para el caso de malla fija encontrando resultados ampliamente satisfactorios. Se compara el cálculo *bidimensional adaptable* de la hidrodinámica de un flujo gradualmente variado en un canal prismático con los resultados obtenidos con un modelo 1D. Adicionalmente, se estudia la hidrodinámica de un flujo sobre una curva a 180° y se compara contra resultados experimentales reportados en la bibliografía.

En el capítulo 5, se presenta la verificación del modelo para el caso de una malla que se adapta automáticamente a su nuevo estado a partir del conocimiento de los valores de las variables hidrodinámicas y de la topografía de la zona en estudio. Se inicia con un problema en el que la topografía puede determinarse analíticamente y la adaptación de la malla se realiza, prácticamente, en una sola dirección curvilínea. Finalmente, se describen las cualidades del modelo propuesto al comparar sus resultados contra aquellos obtenidos en un modelo físico que representa un tramo de un río. Al igual que en el caso de la verificación para malla fija, en las experiencias comentadas en el capítulo 5, los resultados obtenidos se consideran satisfactorios.

*El concepto es lo que impide al pensamiento ser una simple opinión, una habladuría.*

*Gilles Deleuze*

## *Capítulo 2*

### MALLAS ADAPTABLES COMO ALTERNATIVA PARA EL CÁLCULO HIDRODINÁMICO CON FRONTERAS MÓVILES

#### **2.1 Cálculo hidrodinámico en flujo bidimensional**

##### *2.1.1 Enfoque tradicional y la conveniencia de los sistemas ajustados a las fronteras*

Se puede obtener información acerca del comportamiento hidrodinámico de un campo de flujo a partir de trabajo experimental y de simulación numérica. Este último método cobra especial relevancia e interés cuando limitaciones técnicas o económicas hacen impráctica e inclusive imposible la modelación experimental. En los últimos años, la simulación numérica se ha visto notablemente favorecida al mejorarse las capacidades de cómputo que aunadas a la introducción de novedosas técnicas numéricas hacen posible abordar problemas cada vez más completos y complicados.

En una primera aproximación, en los casos en que no resulta relevante la descripción detallada del campo de velocidades, algunos problemas hidrodinámicos se resuelven de manera aceptable con modelos matemáticos unidimensionales (gradientes verticales y transversales poco significativos); sin embargo, en ocasiones esto no es suficiente, por lo cual se recurre a modelos bidimensionales o tridimensionales. El modelo que se describe a lo largo de este trabajo se fundamenta en la hipótesis de flujo en aguas someras para las cuales la modelación bidimensional promediada en la profundidad es adecuada y aceptable.

En general, el problema de determinar el campo de velocidades y la cota de la superficie libre del agua se plantea a partir de la solución de las ecuaciones hidrodinámicas fundamentales expresadas como un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que deben resolverse dentro de un dominio irregular sujetas a condiciones iniciales (CI) y de frontera (CF). En una buena parte de los trabajos referidos a este tema y que usan la técnica de las diferencias finitas, la

solución del sistema acoplado de EDP para aguas poco profundas, se basa en esquemas numéricos referidos a sistemas rectilíneos rectangulares. Así, la solución de las EDP se plantea a partir de discretizar la zona en estudio con una malla rectangular sobre el plano horizontal. En general, las fronteras irregulares del problema físico no coinciden, necesariamente, con la frontera generada a partir de la malla rectangular, de tal suerte que la pertenencia parcial de las celdas a la superficie de solución obliga a tomar la decisión de aproximar las líneas de la frontera física hacia las líneas más cercanas de la malla, lo cual se traduce en errores de aproximación cuya magnitud depende de la resolución de la malla.

Se han empleado concepciones más elaboradas con objeto de salvar algunos de los inconvenientes computacionales surgidos a partir del uso de mallas rectangulares. Por ejemplo el uso de mallas desigualmente espaciadas que se expanden o se estrechan en las zonas de interés (ver por ejemplo Anderson, 1995) o la técnica de anidamiento de mallas que permite resolver problemas hidrodinámicos mediante mallas reticulares cuya magnitud depende de la escala del problema a tratar (por ejemplo, Benqué *et al* 1982 b). Así, con acercamientos sucesivos a las zonas de interés que requieren refinamientos localizados, se pueden encontrar soluciones satisfactorias a problemas que requieren gran detalle en zonas específicas. En muchos casos, por depender de la escala de estudio, un análisis detallado usando esta técnica necesita un número importante de anidamientos para obtener resultados representativos de la realidad.

A pesar de que en general, las mallas rectangulares han mostrado ser una herramienta poderosa en diversas aplicaciones, diferentes autores coinciden en que el costo computacional exigido por esta técnica es excesivo (Nielsen y Skovgaard, 1990; Spaulding, 1984; Oey y Mellor, 1985; Haeuser *et al*, 1985). Piénsese por ejemplo en problemas a gran escala; oceanográficos o ambientales, especialmente aquellos relacionados con dispersión de contaminantes en agua en los que se involucran líneas costeras, islas o topografías complejas en los cuales, la densidad de la malla rectangular crece debido a la necesidad de describir los detalles de las fronteras físicas. Por



otra parte, en esta escala de problemas, si la resolución o densidad de la malla es pobre, la precisión de las predicciones puede alejarse notablemente de la realidad (Nielsen y Skovgaard, 1990).

Por la importancia del tema, diversos autores presentan metodologías alternas con la intención de describir de manera más adecuada la frontera física del problema en cuestión. Entre estas se encuentran: elemento finito, volumen finito y diferencias finitas con mallas ajustadas a las fronteras (ver por ejemplo, Spaulding, 1984; Mejía y Berezowsky, 1996). En particular, la técnica del elemento finito se ha visto favorecida en aplicaciones prácticas por su capacidad de describir geometrías complejas (previo a la aparición de los sistemas ajustados a las fronteras, véase apartado 2.1.2). Sin embargo, desde el punto de vista computacional, este método es menos eficiente. En el cálculo de flujos en aguas someras en una malla con elementos desigualmente espaciados, para la misma precisión, el método de diferencias finitas es aproximadamente un orden de magnitud más rápido que el del elemento finito (Thacker, 1980).

Con estos argumentos, para este trabajo, resulta natural optar por un esquema y metodología de solución que mantenga la eficiencia computacional de las diferencias finitas y la capacidad para describir geometrías complejas como lo hace el elemento finito. Lo anterior, como se verá, es factible a partir de la transformación curvilínea del sistema de ecuaciones por resolver (Johnson y Thompson, 1978; Mejía y Berezowsky, 1996). Este método es conocido como el de Mallas Ajustadas a las Fronteras (MAF).

### *2.1.2 Mallas ajustadas a las fronteras*

El método de MAF consiste en una transformación del dominio de solución del sistema de EDP a un rectángulo en el plano computacional; el sistema curvilíneo coordinado se construye al resolver un sistema diferencial parcial elíptico. Así, la solución al sistema de EDP se realiza totalmente en el plano transformado (Anderson, 1995; Thompson *et al*, 1985).

Las MAF son especialmente útiles en problemas con geometrías complejas (alrededor de islas u obstáculos, ondas a superficie libre, fondos móviles, planicies de inundación, líneas costeras, etc). Como comentan Davies *et al* (1997 a y 1997 b), en los últimos años las aportaciones a la teoría y aplicación de las MAF han sido muchas y muy variadas destacándose los importantes avances en lo que a modelación hidrodinámica de mareas se refiere.

Es a partir del concepto de las MAF que, a lo largo del capítulo 3 de este trabajo, se desarrolla y describe el modelo matemático propuesto. Pero antes y ya que en dicho modelo se desea considerar la dependencia entre el espacio, el tiempo y el estado del sistema (definido a partir de las variables hidrodinámicas), el apartado siguiente describe los diferentes enfoques que permitan afrontar este problema.

## 2.2 Estado del arte de los problemas con fronteras móviles

El cálculo hidrodinámico se dificulta sobre todo en régimen de flujo no permanente ya que, los cambios en la cota de la superficie libre del agua implican, en ocasiones, modificaciones importantes en la forma del volumen de control en función de la topografía de la zona.

Lo descrito arriba es conocido como problema de fronteras móviles (PFM) y ha sido ampliamente estudiado para flujos que involucran múltiples fases (problemas de Stefan; Zerroukat y Chatwin, 1994). En estos problemas, la posición de las fronteras no es conocida *a priori* debiendo ser determinada como una parte integral de la solución. En los PFM existe una dependencia en el tiempo de la frontera física de tal suerte que su posición debe de ser determinada como una función del tiempo y el espacio. Como comentan Zerroukat y Chatwin (1994), los PFM han sido estudiados desde 1831; sin embargo, no se popularizaron hasta finales de ese siglo.

La formulación de los PFM requieren sean conocidas no solamente las condiciones iniciales y de frontera sino que involucran, adicionalmente, la necesidad de determinar la frontera del

problema en sí misma durante la solución del sistema de EDP que gobiernan la naturaleza del proceso en cuestión. Las aplicaciones de los PFM son muchas y muy variadas y de ninguna manera exclusivas de un área de conocimiento en particular; sin embargo, éstas son más abundantes en problemas relativos a sistemas multifásicos, flujo de fluidos en medios porosos, ondas de choque, problemas de difusión, problemas de transferencia de calor que involucran cambios de fase, etc. Las fronteras móviles también se presentan en muchos procesos asociados con la industria del metal, plástico y petróleo, la preservación de alimentos, la teoría estadística de decisiones, el tratamiento térmico de semiconductores, la astrofísica, meteorología, geofísica y física de plasma por mencionar algunos (Zerroukat y Chatwin, 1994).

### *2.2.1 Aplicaciones a la hidráulica del concepto "frontera móvil"*

Específicamente en las áreas de la hidráulica y de la hidrología, las aplicaciones son escasas y generalmente enfocadas a problemas como el de la propagación de avenidas sobre lechos inicialmente secos, frentes de onda y problemas sobre infiltración (Choi y García, 1996).

Los trabajos publicados hasta la fecha y que abordan los problemas con fronteras móviles relacionados de alguna manera con la hidráulica, se basan en la técnica del elemento finito y con menor frecuencia en diferencias finitas. En la mayor parte de los casos suponen a la superficie libre como la frontera móvil mientras que el espacio físico de solución permanece inalterado. Entre estos trabajos se destacan los de Katopodes (Akanabi y Kotopodes, 1988) en donde se plantea el problema de determinar el frente de onda de una avenida sobre un lecho inicialmente seco; el trabajo de Toro (1998), para la simulación de la inundación por falla de presas; el de Choi y García (1996), que calcula bidimensionalmente corrientes que arrastran sedimentos; el de Hu y Kot (1997), de simulación numérica de mareas en el estuario Pearl River en la parte sur de China; el trabajo de Grilli y Subramanya (1996), donde se presenta un modelo de simulación de la rotura de olas y el de de Chippada *et al* (1994), para la simulación numérica del salto hidráulico en canales rectos horizontales.

## 2.3 Diversos enfoques a los problemas con fronteras móviles

### 2.3.1 Enfoque Euleriano y Lagrangiano

Las metodologías para plantear los PFM pueden dividirse en dos grandes grupos (Chippada *et al*, 1994): la Euleriana y la Lagrangiana.

En los PFM, el método Euleriano usa un sistema coordenado que se encuentra fijo en el espacio (o se mueve con velocidad constante). La principal ventaja de este enfoque es su capacidad de describir grandes deformaciones del espacio fluido sin perder precisión. Este método se subdivide a su vez en los siguientes tipos (Choi y García, 1996):

- Malla fija. Se usa una misma malla regular a lo largo de todo el dominio.
- Transformación del dominio. Se transforma el dominio irregular del problema en un dominio regular de cálculo. Su dificultad principal radica en que durante la transformación las ecuaciones resultantes tienen términos desconocidos que necesitan ser determinadas como parte del problema.
- Adición de nodos. El dominio de cálculo se deforma junto con el espacio físico. Para representar la variación de las fronteras en el tiempo, el tamaño de la malla de cálculo podría cambiar de acuerdo con la evolución de las fronteras.

Por otra parte, en el enfoque Lagrangiano, la malla se mueve junto con las partículas fluidas razón por la cual no necesita un tratamiento especial para describir la variación temporal de las fronteras en el tiempo. Su principal desventaja puede ser cuando se suceden deformaciones importantes de la malla; por esta razón, este enfoque suele usarse con mayor frecuencia en problemas de la mecánica de sólidos en los que las deformaciones de la malla son relativamente pequeñas. Las siguientes líneas describen los subtipos de este método (Choi y García, 1996).

- Método Lagrangiano estricto. Se usa una malla computacional invariable que se mueve junto con el fluido. Su empleo está limitado a problemas en donde las deformaciones que se presentan son tan pequeñas que no generan cruces entre las líneas de la malla.
- Regeneración de la malla. En este método, se genera una nueva malla después de que han transcurrido cierto número de intervalos de tiempo con el fin de representar la deformación del cuerpo de agua. Lo anterior previene los cruces entre líneas de la malla o distorsiones severas de la misma. Sin embargo la interpolación de los nuevos valores de la malla a partir de los anteriores introduce errores numéricos.

### 2.3.2 Método mixto lagrangiano-euleriano

Los métodos mixtos, Lagrangianos-Eulerianos (MLE), han mostrado mantener las cualidades de cada enfoque por separado y reducir sus deficiencias. Es precisamente este método el que se ha preferido aquí para desarrollar el modelo adaptable propuesto. En este enfoque, la malla se ajusta dinámicamente. Los nodos de la frontera se mueven de manera Lagrangiana, mientras que la malla en el interior del dominio puede regenerarse para incrementar la precisión de la solución con la inevitable inversión en tiempo de cómputo el cual crece proporcionalmente con la densidad de la malla que se trate (Choi y García, 1996). La principal virtud de los MLE es la precisión de la solución en puntos cercanos a las fronteras o singularidades.

Los MLE han sido planteados con el enfoque del elemento finito (EF) y con el de las diferencias finitas (DF). Sin embargo existe una marcada preferencia por los primeros tal vez ligada a que el EF proveía mayores ventajas que las DF en problemas con fronteras irregulares previo a la aparición de las MAF.

### *2.3.3 MLE en términos de diferencias finitas para el cálculo hidrodinámico bidimensional a superficie libre*

Puesto que el método desarrollado en este trabajo es del tipo Lagrangiano-Euleriano conviene abundar al respecto. El método euleriano de malla fija, se usa extensamente en aplicaciones en donde el dominio físico del problema se discretiza con una malla rectangular uniforme. Las aplicaciones en PFM en DF son escasas; sin embargo y por su importancia pueden destacarse aquellas enfocadas a la modelación numérica de zonas inundables (e.g. planicies de inundación) y el problema de la falla en presas. Este último, es un problema unidimensional extensamente estudiado y para el cual se han planteado soluciones adecuadas como la presentada por Toro (1998) a partir de una generalización del problema de Riemann.

En la modelación de flujos a superficie libre, la variación de los contornos o fronteras del cuerpo de agua agregan dificultades adicionales a la solución numérica de la hidrodinámica. Para resolver este problema es necesario establecer, en cada paso de tiempo de cómputo, las condiciones de contorno que definen el dominio (CI y CF); para ello, las ecuaciones hidrodinámicas deben de considerar la existencia de zonas someras que se inundan o se secan.

En la literatura existen dos tendencias distintas para abordar numéricamente la movilidad de los contornos (llamados modelos Inundación-Secado). Una de ellas, basada en la técnica de las direcciones alternadas, toma en cuenta la variabilidad del dominio de cálculo haciendo un barrido en las direcciones coordenadas en cada intervalo de tiempo con la finalidad de determinar qué celdas se encuentran inundadas y cuáles secas. Lo anterior permite definir en cada momento el dominio y, por tanto, cumplir conservación de masa y cantidad de movimiento. Otro enfoque alternativo, Tao y Wang (Shaoling y Kot, 1997), es el de asignar valores muy pequeños a las variables dependientes en las áreas secas para evitar singularidades; sin embargo, no se cumple estrictamente conservación de masa.

---

En los dos métodos descritos arriba y debido a la naturaleza de la discretización, la interfase agua-tierra no coincide necesariamente con alguna línea de la malla de manera que deben realizarse interpolaciones para localizar la frontera con mayor precisión. De aquí que a lo largo de los años, diversos autores han propuesto variantes a la forma en la que se enfrenta la modelación numérica de la inundación-secado y como se concibe la movilidad de las fronteras; en Balzano (1998), se describen las cualidades y los inconvenientes de algunas de estas variantes y se menciona a la modelación adaptable como alternativa.

El modelo matemático desarrollado a lo largo de estas páginas es un modelo de malla adaptable que conjuntamente con el cálculo de las variables hidrodinámicas, componentes de velocidad y cota de la superficie libre, considera la movilidad de las fronteras del volumen de control. Los detalles de este desarrollo se presentan a continuación.

Capítulo 3

DESARROLLO DEL MODELO

3.1 Ecuaciones hidrodinámicas fundamentales

Las EDP en 2D para aguas poco profundas referidas a un sistema cartesiano de coordenadas que a continuación se presentan, se derivan de las hipótesis de Saint-Venant e incluyen términos que representan la difusión horizontal de cantidad de movimiento. Estas ecuaciones son la base fundamental sobre la que se desarrolla el modelo curvilíneo con malla adaptable aquí propuesto. La derivación detallada de estas ecuaciones queda fuera de los objetivos del presente trabajo, pero la deducción se puede observar, por ejemplo, en Abbott (1979) o en Chaudhry (1993) :

$U_t$	+	$div(U\bar{U})$	+	$g_c h H_x$	-	$FV + \frac{\tau_{sx}}{\rho}$	+	$\frac{\tau_{bx}}{\rho}$	-	$\nu_t lap(hu)$	= 0	(1)
$V_t$	+	$div(V\bar{U})$	+	$g_c h H_y$	+	$FU + \frac{\tau_{sy}}{\rho}$	+	$\frac{\tau_{by}}{\rho}$	-	$\nu_t lap(hv)$	= 0	(2)
				$H_t + div(h\bar{U})$							= 0	(3)
I		II		III		IV		V		VI		

donde:

- $g_c$             aceleración de la gravedad
- $h$              tirante
- $H$              elevación de la superficie libre
- $\tau_{bx}, \tau_{by}$     esfuerzos cortantes en el fondo en las direcciones x y y
- $\tau_{sx}, \tau_{sy}$     esfuerzos cortantes en la superficie en las direcciones x y y
- $u$              componente de velocidad en la dirección x
- $v$              componente de velocidad en la dirección y
- $x, y$           coordenadas cartesianas
- $\rho$              densidad del agua
- $U, V$          flujos (por unidad de ancho) en las direcciones x y y



$F$	parámetro de aceleración de Coriolis
$t$	tiempo
$\bar{U}$	vector velocidad
$\nu_t$	viscosidad turbulenta
$div$	divergencia
$lap$	laplaciano

El parámetro de aceleración de Coriolis se expresa como:

$$F = 2\omega \sin \lambda \quad (4)$$

donde  $\omega$  representa la frecuencia angular de la rotación de la Tierra y  $\lambda$  la latitud. Debido a la escala de problemas aquí tratados, los componentes de aceleración de Coriolis no se incluyen en lo que sigue dentro del desarrollo del modelo; de igual manera, se desprecian los esfuerzos cortantes en la superficie libre del agua. Los esfuerzos cortantes en el fondo en función del coeficiente de fricción de Chezy,  $C$ , se escriben como:

$$\tau_{bx} = \rho \frac{g_c U \sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 h^2} \quad (5)$$

$$\tau_{by} = \rho \frac{g_c V \sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 h^2} \quad (6)$$

Las variables dependientes en las ecuaciones anteriores son  $U=uh$ ,  $V=vh$  y  $h=H-z_f$  donde  $z_f$  representa la cota de fondo.

Las ecs 1-3 representan la superposición de tres procesos físicos elementales llamados: *advección*, *difusión* y *propagación* (ver Benqué *et al*, 1982). La propia naturaleza de las ecuaciones hace pensar en la conveniencia de utilizar una metodología específica de solución en cada proceso. El método de pasos fraccionados desarrollado por Yanenko y colaboradores alrededor de 1967 (Yanenko, 1971) es especialmente aplicable a este tipo de problemas pues aunque los esquemas ordinarios ofrecen una gran simplicidad en su planteamiento, son menos flexibles al tener que responder a

los requisitos de estabilidad y consistencia que les son impuestos. Por otra parte, en los esquemas en pasos fraccionados, la transición entre un paso de cálculo y el siguiente se divide en una serie de etapas intermedias las cuales no requieren satisfacer las condiciones de estabilidad y consistencia de las ecuaciones originales (Yanenko, 1971) lo que permite la construcción de esquemas numéricos computacionalmente económicos y exactos, más ricos en sentido físico, más eficientes y además capaces de modelar la naturaleza de manera más cercana a la realidad.

### 3.1.1 Identificación de los procesos físicos involucrados

Bajo esta perspectiva y con la intención de proponer un esquema de solución de acuerdo con los preceptos de la metodología desarrollada por Yanenko y colaboradores, a continuación se identifican los términos de las ecs 1-3 involucrados en cada uno de los procesos físicos ya mencionados y cuya solución sucesiva, según el mismo autor, resulta en la solución del sistema original:

Advección, grupos I y II de las ecs 1-3.

$$U_t + \text{div}(U\bar{U}) = 0 \quad (7)$$

$$V_t + \text{div}(V\bar{U}) = 0 \quad (8)$$

Difusión, grupos I y VI de las ecs 1-3.

$$U_t = \nu_t \text{lap } U \quad (9)$$

$$V_t = \nu_t \text{lap } V \quad (10)$$

Propagación, grupos I, III y V de las ecs 1-3.

$$H_t + \text{div}(h\bar{U}) = 0 \quad (11)$$

$$\bar{U}_t + g_c h \text{grad } H + \tau_b = 0 \quad (12)$$

donde *grad* representa al operador gradiente y  $\bar{U}$  al vector velocidad.

### 3.1.2 *Transformación curvilínea de las ecuaciones y variación en el tiempo del espacio físico*

Usando la regla de la cadena, las ecs 7-12 pueden referirse a un sistema curvilíneo de coordenadas  $(\xi, \eta)$  el cual permite representar con precisión al espacio físico del problema. La conveniencia de esta transformación ya fue comentada con detalle a lo largo del apartado 2.1 de este documento; sin embargo, es conveniente agregar que dentro de la bibliografía que aborda los aspectos básicos de la transformación de coordenadas (el lector puede revisar los trabajos de Anderson 1995, Johnson y Thompson 1978, entre otros) existe una amplia variedad de posibilidades, o versiones, para escribir las ecuaciones hidrodinámicas transformadas dependiendo del tipo de representación vectorial que se seleccione (Jiménez y Berezowsky 1996, Jiménez 2000, Haeuser *et al* 1985). Con la finalidad de simplificar el proceso de transformación, en este trabajo se optó por usar una versión curvilínea de ecuaciones hidrodinámicas referidas a una base cartesiana  $\{\hat{i}, \hat{j}\}$  de manera que el vector velocidad permanece inalterado tras la transformación. Lo anterior implica que la versión curvilínea de las ecuaciones hidrodinámicas, equivalentes a las ecs 1 y 2, se siguen llamando ecuaciones de cantidad de movimiento en la dirección  $x$  y  $y$ , respectivamente. Los principios básicos de la transformación curvilínea se presentan en el apéndice A, al final de este trabajo.

Por otra parte, vale la pena ahondar en la forma en la que las ecuaciones transformadas consideran el cambio en el tiempo del dominio de integración o espacio físico. El elemento adicional que permite lo anterior, consiste en el hecho de que aún cuando las coordenadas físicas  $(x, y)$  se vean alteradas en el tiempo debido al cambio en la superficie libre, no implican un cambio en la configuración del espacio transformado  $(\xi, \eta)$  (Johnson y Thompson 1978). Es decir, la topología del espacio de cálculo permanece inalterada y solamente las coordenadas físicas y sus propiedades (velocidad, nivel de superficie libre, etc) son variables dependientes del tiempo

En términos matemáticos y para ilustrar lo anterior, piénsese en la transformación del espacio físico  $(x,y)$  al espacio curvilíneo  $(\xi,\eta)$  y el *operador derivada parcial* respecto al tiempo aplicado sobre cualquier propiedad  $f = f(x,y,t)$ :

$$(f_t)_{(x,y)} = (f_t)_{(\xi,\eta)} + \frac{1}{J} \left[ (f_\xi x_\eta - f_\eta x_\xi)(y_t)_{(\xi,\eta)} - (f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi)(x_t)_{(\xi,\eta)} \right] \quad (13)$$

De esta forma, la variación en el tiempo de las variables dependientes del sistema  $(\bar{U}_i$  y  $H_i)$  formado por las ecs 7-12 referidas al espacio cartesiano se calculan usando esta última ecuación. En esta expresión se observa que todas las derivadas espaciales se calculan con respecto a las variables curvilíneas de manera que no hay necesidad de interpolar entre puntos del espacio físico. El movimiento de los puntos de la malla en el espacio físico está representado por el cambio en el tiempo de las coordenadas espaciales  $x$  y  $y$ , esto es:  $x_t$  y  $y_t$ .

En general, las razones de variación anteriores no pueden determinarse analíticamente, de manera que éstas deberán estimarse numéricamente como parte del problema. Con este fin y con referencia a los puntos de la malla que definen las fronteras del volumen de control se propone que las velocidades antes mencionadas sean una función del cambio en la cota de la superficie libre, esto es:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = f \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) \quad (14)$$

donde  $\bar{r} = (x, y)$  representa al vector de posición de los puntos de la malla por lo que su derivada respecto al tiempo define al vector que tiene como componentes las velocidades  $x_t$  y  $y_t$ . Es de hacer notar que la relación funcional expresada por la ec 14 no es fácil de determinar pues requiere conocer en cada instante y con precisión la traza de la superficie libre y la forma en que cambian las condiciones de frontera. Lo anterior, tal como esta planteado, resulta inviable pues el determinar el cambio en la forma de la superficie libre del agua es precisamente uno de los

objetivos del modelo numérico propuesto. En pocas palabras existe una dependencia recíproca entre la forma del espacio físico y el valor de las variables hidrodinámicas.

Para visualizar el concepto descrito por la ec 14, en la fig 3.1 se representan los niveles de superficie libre para los instantes  $n\Delta t$  y  $(n+1)\Delta t$ . El cambio en la cota de la superficie libre entre ambos instantes, denotado por  $\Delta H$  obliga a que los puntos que definen la frontera de la zona inundada se reubiquen desplazándose una distancia  $\Delta \bar{r}$  hasta intersectar con la malla que define la topografía.

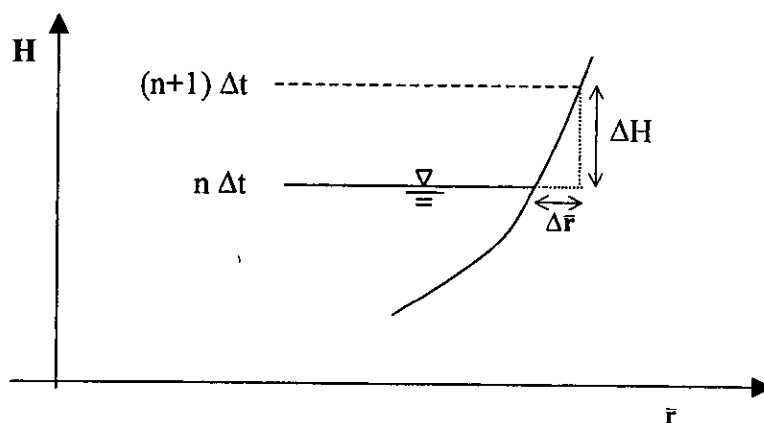


Figura 3.1 Cambio de la cota del agua durante el proceso de cálculo

En resumen, como alternativa de solución al problema planteado aquí, se propone abordar la adaptación de malla de la siguiente manera:

1. Se calcula la hidrodinámica considerando que la malla que define el espacio físico no cambia en el tiempo ( $x_i = y_i = 0$ ).
2. Se desplazan los puntos en las fronteras de la malla a sus nuevas posiciones las cuales se ubican en la intersección entre las mallas que describen la superficie libre y la topografía del cauce. Como se puede comprobar (Alarcón *et al*, 1998), la adecuada descripción de la nueva configuración del espacio físico depende tanto del algoritmo de interpolación como del grado de refinamiento, tanto de la malla topográfica como de la malla que representa a la superficie libre del agua. En lo que respecta a este trabajo, la determinación de la nueva traza de la superficie libre no se realiza, necesariamente, cada intervalo de

tiempo  $\Delta t$  pues en los casos analizados, se consideró que el desplazamiento de las fronteras ocurre lentamente.

3. Se redistribuyen los puntos interiores de la malla, es decir, se regenera la malla a partir de la nueva forma del dominio físico.
4. Se calculan numéricamente las velocidades  $x_t$  y  $y_t$  a partir del cambio de la posición de cada punto de la malla respecto al tiempo; esto es,  $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}^n - \bar{r}^{n-1}}{\Delta t} = (x_t, y_t)$ .
5. Se calcula nuevamente la hidrodinámica.

Como puede verse de lo anterior, el procedimiento propuesto para la adaptación corresponde al enfoque mixto Lagrangiano-Euleriano (apartado 2.3) el cual, como se comentó, mantiene las cualidades de cada enfoque por separado y reduce sus deficiencias.

Así, aplicando las ideas y los conceptos descritos a lo largo de este apartado, las ecuaciones fundamentales transformadas al espacio curvilíneo y que consideran la variabilidad de las fronteras del volumen de control como una función del tiempo se escriben :

Advección (ecs 7 y 8, detalles sobre la transformación en el apéndice B) :

$$(u_t)_{\xi\eta} + Au_{\xi} + Bu_{\eta} = 0 \quad (15)$$

$$(v_t)_{\xi\eta} + Av_{\xi} + Bv_{\eta} = 0 \quad (16)$$

donde :

$$A = -\frac{1}{J} [x_{\eta}(v - y_t) + y_{\eta}(x_t - u)] \quad (17)$$

$$B = -\frac{1}{J} [x_{\xi}(y_t - v) + y_{\xi}(u - x_t)] \quad (18)$$

Como se puede observar, en estas dos últimas ecuaciones, se consideró la variación de las velocidades respecto al tiempo de acuerdo a la ecuación 13.

Difusión (ecs 9 y 10, detalles sobre la transformación en el apéndice C) :

$$(u_i)_{\xi\eta} = \theta u_\xi + \beta u_\eta + E \quad (19)$$

$$(v_i)_{\xi\eta} = \theta v_\xi + \beta v_\eta + F \quad (20)$$

donde :

$$\theta = Cx_\eta - Dy_\eta \quad (21)$$

$$\beta = Dy_\xi - Cx_\xi \quad (22)$$

$$C = \frac{v_t}{j^3} (g_{22}y_{\xi\xi} - 2g_{12}y_{\xi\eta} + g_{11}y_{\eta\eta}) \quad (23)$$

$$D = \frac{v_t}{j^3} (g_{22}x_{\xi\xi} - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{11}x_{\eta\eta}) \quad (24)$$

$$E = \frac{v_t}{j^2} (g_{22}u_{\xi\xi} - 2g_{12}u_{\xi\eta} + g_{11}u_{\eta\eta}) \quad (25)$$

$$F = \frac{v_t}{j^2} (g_{22}v_{\xi\xi} - 2g_{12}v_{\xi\eta} + g_{11}v_{\eta\eta}) \quad (26)$$

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (27)$$

$$g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (28)$$

$$g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad (29)$$

donde  $g_{11}$ ,  $g_{12}$  y  $g_{22}$  representan los componentes de la matriz métrica de transformación.

### Propagación

Por lo que se refiere a esta etapa, las ecs 11 y 12 se refieren al espacio curvilíneo  $(\xi, \eta)$  después de incluir lo expresado en el apartado 3.3.3 con la intención de integrar ambas ecuaciones en una sola.

### 3.2 Algoritmo adaptable de solución

Suponiendo que el valor de las variables hidrodinámicas se conoce al tiempo  $n\Delta t$ , el nuevo estado al instante  $(n+1)\Delta t$  se calcula tras la aplicación sucesiva de las etapas convectiva, difusiva y de

propagación. El algoritmo de solución considera, como se verá en el siguiente apartado, cada uno de los procesos físicos involucrados de manera independiente.

El esquema aquí desarrollado es llamado adaptable. El término adaptable es usado ampliamente y sin embargo no es sencillo definirlo; de hecho, se confunde usualmente con las MAF. La adaptabilidad no tiene que ver necesariamente con una transformación de coordenadas.

La adaptación se hace generalmente a través de una función de realimentación que, en este caso, está representada por el cambio en la cota de la superficie libre del agua,  $\Delta H$ .

Para entender el concepto del modelo con malla adaptable, se parte de reconocer que el dominio de solución de un problema hidrodinámico está compuesto por el espacio físico y por el tiempo. Si se olvida por un momento la dimensión tiempo, entonces, para el caso bidimensional se tiene un dominio formado por puntos en el plano. En cada uno de los puntos del dominio se pueden tener, sin embargo, una o más variables dependientes y que en conjunto se nombran *representación del sistema físico* (RSF). Los valores de las variables pueden llamarse estados de las variables y el conjunto de todos ellos se considera el estado de la representación del sistema físico o *estado del sistema*, ES (Ashby, 1973).

Considérese ahora al tiempo. A partir del esquema numérico, la representación del sistema físico toma otro estado. Este cambio de estado es una transformación en la cual el esquema numérico actúa como un operador (operador numérico, ON) mientras que la representación del sistema físico corresponde al operando. En conjunto, el ON y RSF definen al sistema dinámico que se modela; son, en una palabra, la representación de la solución numérica del problema hidrodinámico. Los cambios en el estado del sistema activan la adaptación (figura 3.2). El criterio de adaptación se divide en dos grupos principales: aquellos basados en la valoración del error en la solución de las ecuaciones hidrodinámicas y los basados en criterios físicos (como en el caso



discutido en este trabajo) que tienen en cuenta características específicas del campo de flujo (Kutija, 1996).

Hablando en los términos arriba descritos, la variabilidad del volumen de integración se considera en este trabajo como una función de la cota de la superficie libre. Esta es pues, la variable de realimentación que permite adaptar la malla que describe el dominio físico a su nuevo estado transcurrido cierto intervalo de tiempo.

Si  $u$ ,  $v$  representan los componentes  $x$  y  $y$  del vector velocidad respectivamente mientras que  $\Delta H$  representa el cambio en la cota de la superficie libre del agua, el esquema de bloques del modelo numérico de solución propuesto al PFM para el cálculo hidrodinámico tiene la forma siguiente:

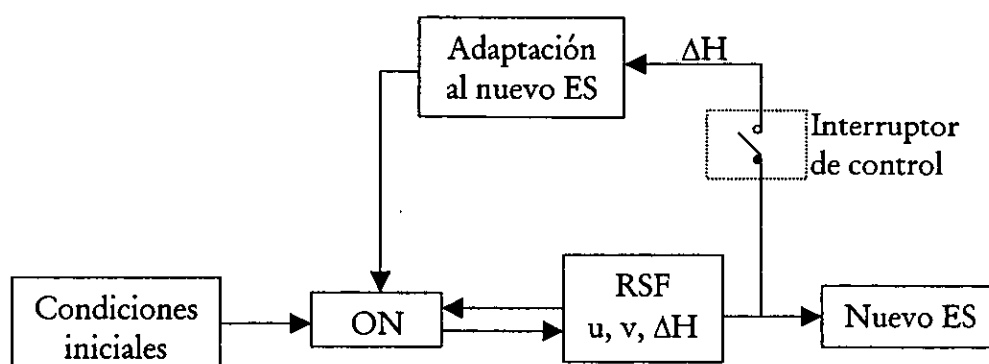


Figura 3.2 Modelo numérico de solución

De la figura se aprecia como la *adaptación al nuevo estado del sistema* se controla a partir del cambio en la cota de la superficie libre; como puede verse, dicha adaptación puede incluso omitirse en caso de no ser necesaria. Piénsese, por ejemplo, en el caso de flujos en ríos encañonados en donde la variación de la cota de la superficie libre no repercute significativamente en la forma de la zona inundada.

### 3.3 Esquema numérico en cada etapa

#### 3.3.1 Proceso de advección

El proceso advectivo se trata a su vez separadamente en cada dirección curvilínea. A partir de las ecs 15 y 16 en la dirección  $\xi$ , se obtiene :

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} + A^n u_\xi^n = 0 \quad (30)$$

$$\frac{v^* - v^n}{\Delta t} + A^n v_\xi^n = 0 \quad (31)$$

Las cuales se resuelven de manera explícita para obtener la primera aproximación de los componentes de velocidad denotadas por  $u^*$  y  $v^*$ , y que a su vez se usan para resolver 15 y 16 en la dirección  $\eta$  :

$$\frac{u^{n+1/3} - u^*}{\Delta t} + B^* u_\eta^* = 0 \quad (32)$$

$$\frac{v^{n+1/3} - v^*}{\Delta t} + B^* v_\eta^* = 0 \quad (33)$$

En las ecs 30-33, los coeficientes  $A$  y  $B$  se calculan a partir de las expresiones 17 y 18, respectivamente; los superíndices  $n+1/3$  son indicativos y denotan los valores de los componentes de velocidad tras el cálculo del proceso advectivo. Los valores  $u^{n+1/3}$  y  $v^{n+1/3}$  se usan como condiciones iniciales para resolver la etapa difusiva en la que se calculan  $u^{n+2/3}$  y  $v^{n+2/3}$ .

#### 3.3.2 Proceso de difusión

En una primera aproximación, las ecs 19 y 20 se simplifican considerando, en este trabajo, exclusivamente los siguientes términos :

$$(u_t)_{\xi\eta} = \frac{v_t}{j^2} (g_{22}u_{\xi\xi} + g_{11}u_{\eta\eta}) \quad (34)$$

$$(v_t)_{\xi\eta} = \frac{v_t}{j^2} (g_{22}v_{\xi\xi} + g_{11}v_{\eta\eta}) \quad (35)$$

La estructura de las ecs 34 y 35 es similar a la del caso cartesiano. Existen, básicamente, 2 razones que permiten tal simplificación :

- No es propósito del trabajo reproducir la turbulencia. Por tanto, la etapa dispersiva es poco significativa durante el proceso de cálculo, pero puede ayudar a corregir problemas de estabilidad en el modelo numérico.
- Se considera que la malla de cálculo es aproximadamente ortogonal lo que implica que el elemento  $g_{12}$  de la matriz métrica de transformación que interviene en las ecs 19 a 29, toma valores cercanos a cero.

Las ecs 34 y 35 son independientes entre si y se resuelven usando un método en dos etapas en direcciones alternadas como el propuesto por Peaceman y Rachford (1955). Para la ecuación 34 :

$$u^* - u^{n+1/3} = \frac{1}{2} v_t \Delta t \left[ g_{22}^n u_{\xi\xi}^* + g_{11}^n u_{\eta\eta}^{n+1/3} \right] \quad (36)$$

$$u^{n+2/3} - u^* = \frac{1}{2} v_t \Delta t \left[ g_{22}^n u_{\xi\xi}^* + g_{11}^n u_{\eta\eta}^{n+2/3} \right] \quad (36')$$

Mientras que para la ecuación 35 :

$$v^* - v^{n+1/3} = \frac{1}{2} v_t \Delta t \left[ g_{22}^n v_{\xi\xi}^* + g_{11}^n v_{\eta\eta}^{n+1/3} \right] \quad (37)$$

$$v^{n+2/3} - v^* = \frac{1}{2} v_t \Delta t \left[ g_{22}^n v_{\xi\xi}^* + g_{11}^n v_{\eta\eta}^{n+2/3} \right] \quad (37')$$

La solución de las ecs 36 a 37', se reduce a sistemas matriciales tridiagonales los cuales se resuelven usando una eficiente y económica rutina basada en el método de doble barrido (William *et al*, 1986).

### 3.3.3 Proceso de propagación

Si se introduce el coeficiente de peso  $\alpha \in [0,1]$  para afectar las derivadas espaciales, y los esfuerzos en el fondo se describen con la ec 5, las ecs 11 y 12 se escriben como:

$$\left(\frac{\Delta H}{\Delta t}\right)_{(x,y)} + \alpha \operatorname{div} \bar{U}^{n+1} + (1-\alpha) \operatorname{div} \bar{U}^n = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^{n+2/3}}{\Delta t} + g \left[ \alpha h^{n+1} \operatorname{grad} H^{n+1} + (1-\alpha) h^n \operatorname{grad} H^n \right] + g \frac{\bar{U}^{n+1} |\bar{U}|^{n+2/3}}{C^2 h^2} = 0 \quad (39)$$

De la ecuación 38 si se considera

$$(H_t)_{(x,y)} = (H_t)_{(\xi,\eta)} + \frac{1}{J} \left[ (H_\xi x_\eta - H_\eta x_\xi) (y_t)_{(\xi,\eta)} - (H_\xi y_\eta - H_\eta y_\xi) (x_t)_{(\xi,\eta)} \right] \quad (40)$$

Y se desarrollan los operadores divergencia de  $\bar{U}$  es posible obtener (apéndice D):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta H}{\Delta t}\right)_{(\xi,\eta)} + \frac{\alpha}{J} (y_\eta U_\xi^{n+1} - x_\eta V_\xi^{n+1}) + \frac{1}{J} (x_\eta y_t - y_\eta x_t) H_\xi + \frac{(1-\alpha)}{J} (y_\eta U_\xi^n - x_\eta V_\xi^n) + \\ \frac{\alpha}{J} (x_\xi V_\eta^{n+1} - y_\xi U_\eta^{n+1}) + \frac{1}{J} (y_\xi x_t - x_\xi y_t) H_\eta + \frac{(1-\alpha)}{J} (x_\xi V_\eta^n - y_\xi U_\eta^n) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

En la cual los flujos  $U$  y  $V$  se pueden encontrar a partir de la ecuación 39 escrita en la forma :

$$\bar{U}^{n+1} = \frac{\bar{U}^{n+2/3}}{C_1} - \frac{g \Delta t}{C_1} \left[ \alpha h^{n+1} \operatorname{grad} H^{n+1} + (1-\alpha) h^n \operatorname{grad} H^n \right] \quad (42)$$

donde

$$C_1 = 1 + \frac{g \Delta t |\bar{U}|^{n+2/3}}{C^2 h^2} \quad (43)$$

A partir de la ec 42, las derivadas de los flujos unitarios  $U$  y  $V$  se pueden expresar en términos lineales en función del cambio en la cota de la superficie libre del agua  $\Delta H$  (apéndice D).

La ecuación 41 se discretiza en cada uno de los centros de la malla de cálculo para finalmente tomar la forma siguiente<sup>1</sup>:

$$a_{1ij}\Delta H_{i-1} + b_{1ij}\Delta H_{ij} + c_{1ij}\Delta H_{i+1j} + d_{1ij} = a_{2ij}\Delta H_{ij-1} + b_{2ij}\Delta H_{ij} + c_{2ij}\Delta H_{ij+1} + d_{2ij} \quad (44)$$

en donde los coeficientes se definen en el apéndice E.

El procedimiento de solución de esta ecuación consiste en aplicar un método iterativo con retroalimentación en el que se alternan las direcciones de barrido. Por ejemplo, resolviendo la ec 44 en la dirección  $\xi$

$$a_{1ij}\Delta H_{i-1j} + b_{1ij}\Delta H_{ij} + c_{1ij}\Delta H_{i+1j} = -d_{1ij} + d_{2ij} + a_{2ij}\Delta H^*_{ij-1} + b_{2ij}\Delta H^*_{ij} + c_{2ij}\Delta H^*_{ij+1} \quad (45)$$

donde el superíndice “ \* ” indica que los valores  $\Delta H$  se suponen conocidos de la iteración previa (cero para la primera iteración). Alternando direcciones, se resuelve la ec 44 en la dirección  $\eta$ :

$$a_{2ij}\Delta H_{ij-1} + b_{2ij}\Delta H_{ij} + c_{2ij}\Delta H_{ij+1} = d_{1ij} - d_{2ij} + a_{1ij}\Delta H^*_{i-1j} + b_{1ij}\Delta H^*_{ij} + c_{1ij}\Delta H^*_{i+1j} \quad (46)$$

El procedimiento iterativo continua hasta cumplirse la condición :

$$|\Delta H_{ij} - \Delta H^*_{ij}| \leq \varepsilon ; \forall ij \quad (47)$$

con el valor de tolerancia,  $\varepsilon$ , expresado en metros. En ambas direcciones de barrido, los sistemas de ecuaciones resultantes por resolver son del tipo tridiagonal.

<sup>1</sup> Ver apéndice E después de revisar la sección 3.3.4

Vale la pena comentar que la necesidad de iterar en esta etapa no perjudica, en general, la eficiencia y la economía computacional del procedimiento propuesto (Benqué et al 1982).

Como se observa, las cotas de la superficie libre no intervienen durante los pasos de advección y dispersión. Estos pasos se realizan completamente en las caras de las celdas del volumen de control y modifican únicamente al valor de los flujos unitarios al final de la etapa dispersiva.

$$U^{n+2/3} = u^{n+2/3} h^n \tag{48}$$

$$V^{n+2/3} = v^{n+2/3} h^n \tag{49}$$

Por su parte, los valores de  $\Delta H$  encontrados al resolver la ec 44, se usan en la forma linealizada de la ecuación 40 (apéndice D) para calcular los valores de los flujos unitarios en el instante  $(n+1)\Delta t$ . Los cambios en el nivel de la superficie libre ( $\Delta H$ ), junto con el conocimiento detallado de la topografía del terreno, hacen factible la determinación de la nueva conformación de las fronteras del volumen de control y con ello la reestructuración de la malla antes de iniciar la etapa de cálculo correspondiente al instante  $(n+2)\Delta t$ . Este procedimiento ya fue comentado en la sección 3.1.2.

### 3.3.4 Malla de cálculo

Debido a la discretización propuesta para cada proceso, las variables dependientes  $H$ ,  $U$  y  $V$  se definen en mallas diferentes llamadas aquí *malla  $\bar{U}$*  y *malla  $H$*  tal como se ilustra en la figura 3.3.

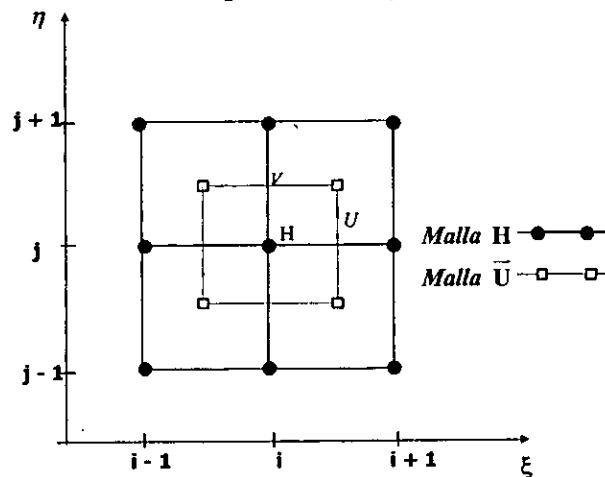


Figura 3.3 Malla de cálculo

Mientras que los flujos se definen en las caras de la *malla*  $\bar{U}$ , los niveles de superficie libre se definen en los vértices de la *malla*  $H$ . Así, en la figura 3.3 se puede apreciar que una celda que tiene en su centro definida la cota de superficie libre  $H_i$ , tiene en sus caras derecha e izquierda definido el flujo  $U$  (caras  $u$ ) mientras que en las caras superior e inferior se define el flujo  $V$  (caras  $v$ ).

### 3.4 Condiciones iniciales y de frontera

#### 3.4.1 Condiciones iniciales

Se consideran conocidas las variables dependientes; ya bien, estableciendo un nivel de superficie libre y un campo de velocidades arbitrario, o partiendo de un estado del sistema (ES) previamente calculado.

#### 3.4.2 Condiciones de frontera

Aguas arriba y aguas abajo se consideran conocidos, respectivamente, el gasto que ingresa y la cota de superficie libre para todo instante. Por su parte en las márgenes, se establece que el flujo perpendicular es nulo con la hipótesis de libre deslizamiento en la dirección tangente. En la figura 3.4 se muestra una celda representativa en el espacio físico cuya frontera superior representa la margen izquierda.

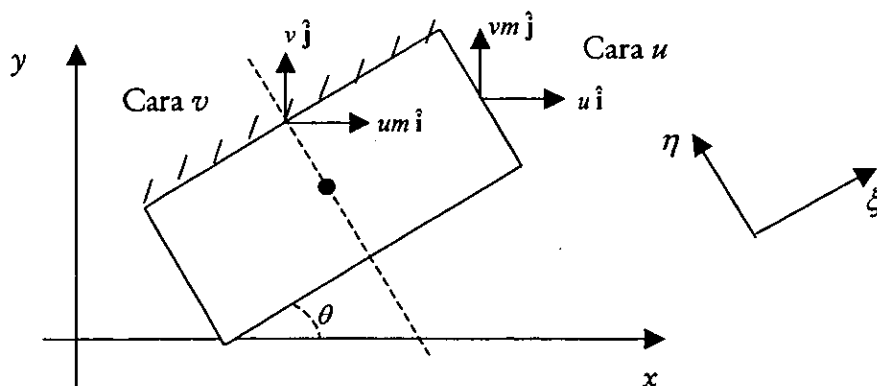


Figura 3.4 Celda representativa en el espacio físico

Las caras de la celda se alinean con las direcciones curvilíneas  $(\xi, \eta)$ . A las caras perpendiculares a la dirección  $\xi$ , se les llama caras  $u$  pues en ellas se ha definido dicha componente cartesiana de velocidad (fig 3.3) mientras que las caras perpendiculares a la dirección  $\eta$  se les llama caras  $v$  por la misma razón. Por su parte,  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  representan las direcciones unitarias en las direcciones cartesianas  $x$  y  $y$ , respectivamente, mientras que  $\theta$  es el ángulo formado por la cara  $v$  respecto al eje  $x$ . En general para la forma en la que se han discretizado las ecuaciones hidrodinámicas, es necesario conocer en las caras  $u$  y  $v$  los valores promedio  $vm$  y  $um$ , respectivamente, los cuales se interpolan de los puntos interiores. Sin embargo, en el caso de una celda como la de la figura 3.4, es necesario tomar en cuenta algunas consideraciones para garantizar que se cumplan las condiciones de flujo normal nulo y libre deslizamiento en las márgenes :

Si  $\theta = 0^\circ$  o  $\theta = 180^\circ$  entonces  $v=0$  ( $u$  se asigna de valores interiores)

Si  $\theta \neq 0^\circ$  o  $\theta \neq 180^\circ$  entonces, la suma de componentes vectoriales en la dirección perpendicular de la cara  $v$  debe valer cero (figura 3.5) lo que equivale a:

$$v \cos \theta + um \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (50)$$

mientras que en la dirección tangente se debe satisfacer:

$$um \cos \theta + v \operatorname{sen} \theta = q_t \quad (51)$$

donde el flujo tangente a la cara,  $q_t$ , es diferente de cero para la condición de libre deslizamiento y se asigna de valores interiores.

Las ecuaciones 50 y 51 consideran los casos particulares en los que  $\theta = 90^\circ$  y  $\theta = 270^\circ$  lo que implica que  $u = 0$  ( $v$  asignada de valores interiores).



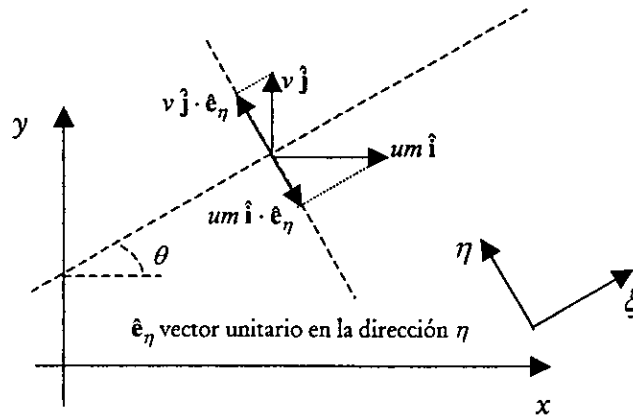


Figura 3.5 Condiciones de frontera en los márgenes

El impacto de la aplicación de las condiciones aquí descritas, es mayor en el caso de la etapa propagativa. Por esta razón, en el apéndice F se detallan las condiciones de frontera para este proceso.

### 3.5 Generalidades sobre el algoritmo de solución propuesto

Las figuras 3.6 y 3.7 muestran esquemáticamente el algoritmo general de solución al problema propuesto y algunos detalles del módulo hidrodinámico, respectivamente.

El algoritmo consta de cuatro módulos básicos:

1. *Generador de malla*: a partir de la traza de la superficie libre del agua se genera una malla curvilínea que define el espacio físico de solución. El módulo de generación es totalmente independiente y se accesa automáticamente desde el cuerpo principal del programa (para el trabajo expuesto a lo largo de estas páginas se dispuso de un generador elíptico<sup>2</sup>). Este

<sup>2</sup> Se agradece al Dr. Moisés Berezowsky el haber permitido usar y alterar su código para la generación elíptica de mallas.

módulo tiene la capacidad de interactuar con una interfase gráfica lo que facilita la visualización y corrección interactiva de la malla.

2. *Cálculo de coeficientes métricos*: se realiza el cálculo numérico de los coeficientes necesarios para la transformación curvilínea de coordenadas así como las derivadas de las coordenadas cartesianas respecto a las direcciones curvilíneas. La independencia de este módulo permite optimizar el manejo de memoria y la administración de archivos durante el proceso de cálculo. Al igual que el módulo de generación, este módulo se accesa de manera automática desde el programa principal.
3. *Cálculo hidrodinámico*: El cálculo hidrodinámico se compone de tres bloques principales que a lo largo de estas páginas se han llamado advección, dispersión y propagación (figura 3.7). Durante la etapa dispersiva se calculan los componentes cartesianos de velocidad  $u^{n+1/3}$  y  $v^{n+1/3}$ , las cuales representan la primera aproximación al campo de velocidades de la zona en estudio. Usando esta información como condición inicial se procede a estimar los componentes  $u^{n+2/3}$  y  $v^{n+2/3}$  durante la etapa dispersiva. Finalmente y como se describe con mayor detalle en la sección 3.3.3, durante la etapa propagativa se estiman los cambios en las cotas de la superficie libre del agua los cuales podrían significar cambios importantes en la forma de la zona inundada y por tanto de las condiciones de flujo.
4. *Cálculo de la nueva traza de la superficie libre*: Este módulo de cálculo se accesa siempre y cuando el cambio en la cota de la superficie libre del agua sea lo suficientemente importante como para representar a su vez una variación significativa de la zona inundada. En caso contrario, como puede verse en la figura 3.6, se reinicia el cálculo hidrodinámico para el nuevo instante conservando la configuración de fronteras original. Como se comentó en el apartado 2.3.1, la regeneración previene el cruce de líneas de la malla o severas distorsiones de la misma.

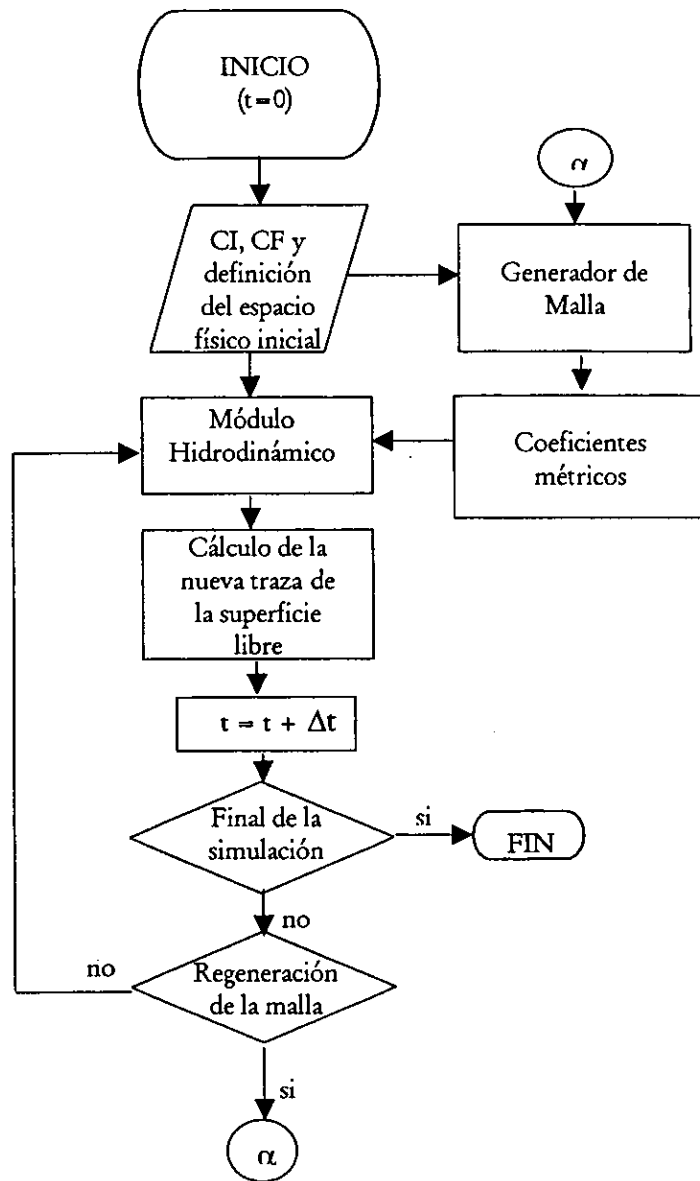


Figura 3.6 Algoritmo general de solución

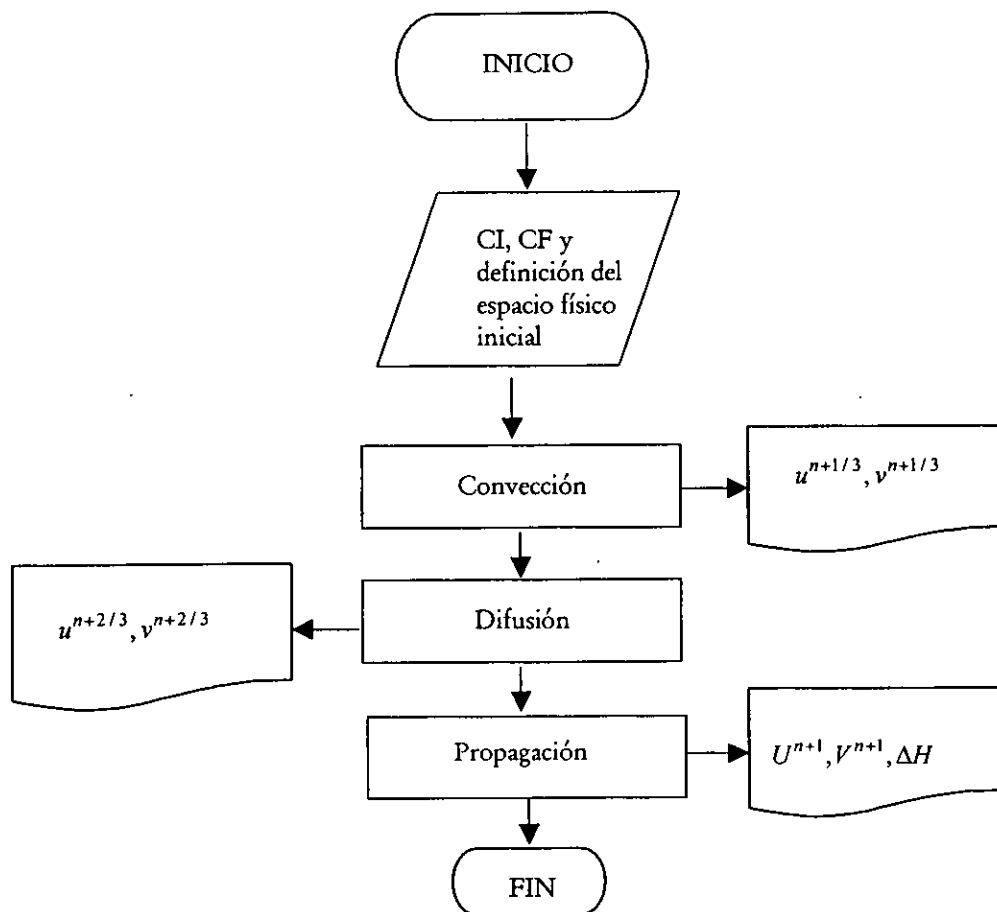


Figura 3.7 Módulo hidrodinámico

En lo que resta de este trabajo, se presenta la verificación numérica y experimental a la que se sometió el modelo numérico propuesto.

*No hay duda: el error es la regla;  
la verdad es el accidente del  
error.*

*Georges Duhamel*

## *Capítulo 4*

### VERIFICACIÓN DEL MODELO PARA MALLA FIJA

#### **4.1 Introducción**

El modelo hidrodinámico adaptable desarrollado en este trabajo fue verificado numérica y experimentalmente para diferentes casos algunos de los cuales se describen a lo largo del capítulo 4 y 5 de este trabajo. En este capítulo en particular, se presenta la verificación del modelo para malla fija.

En primer lugar se calcula la hidrodinámica de un flujo gradualmente variado en un canal rectangular recto y se comparan los resultados contra aquellos valores obtenidos con el método unidimensional del paso estándar. Posteriormente, se analiza el flujo en un canal curvo y los resultados numéricos se confrontan con valores experimentales reportados en la literatura.

#### **4.2 Flujo gradualmente variado en un canal rectangular recto**

A continuación, se presenta un ejercicio numérico muy simple que permite verificar el comportamiento y la estabilidad numérica del modelo para el caso en el que no hay dependencia en el tiempo de la forma del volumen de control. El problema consiste en calcular un perfil en un canal rectangular recto que descarga libremente. Los resultados obtenidos con el modelo adaptable se comparan con los generados por el método unidimensional del paso estándar (Chow, 1959).

Es de esperarse que si se desprecian los esfuerzos efectivos, el modelo adaptable y el modelo unidimensional deben producir perfiles de superficie libre idénticos.

#### 4.2.1 Características del canal

El canal usado para la simulación y que describe Molls (1992), tiene un ancho de plantilla de 3 m y una pendiente de 0.0001. Se usó un coeficiente de fricción de Chezy igual a 60.5 y se consideró que el gasto por el canal era igual a  $10 \text{ m}^3/\text{s}$ . El tirante crítico y el tirante normal valen 1.04 m y 5.91 m respectivamente.

#### 4.2.2 Condiciones de frontera

En las paredes, el componente  $v$  de velocidad se consideró nulo (no hay flujo perpendicular a la pared) mientras que el componente  $u$  y los tirantes fueron extrapolados de valores internos (libre deslizamiento en la pared). Entre la frontera aguas arriba y la frontera aguas abajo se consideró una distancia de 40 m. Aguas abajo, el tirante de agua se fijó en 1.175 m. Para el cálculo se usó una malla de  $41 \times 7$  elementos.

#### 4.2.3 Resultados

La figura 4.1 muestra una representación tridimensional de la superficie libre obtenida a partir del modelo adaptable. Como puede observarse el perfil representado es del tipo M2. En la figura 4.2 se comparan los tirantes obtenidos con el modelo propuesto y aquellos obtenidos con el método del paso estándar (1D). Las discrepancias entre ambos casos son mínimas y mejoran notablemente respecto a los valores reportados por Molls (1992)

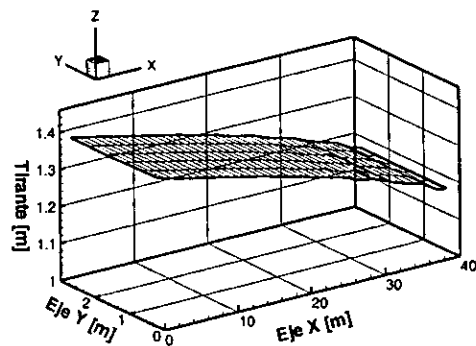


Figura 4.1 Representación tridimensional de la superficie libre

A lo largo del canal se integraron los perfiles de velocidad transversales en diferentes secciones. El gasto permaneció constante en todas ellas. Por tanto, el modelo cumple con la conservación de

masa de manera satisfactoria y representa con precisión el perfil de un flujo gradualmente variado.

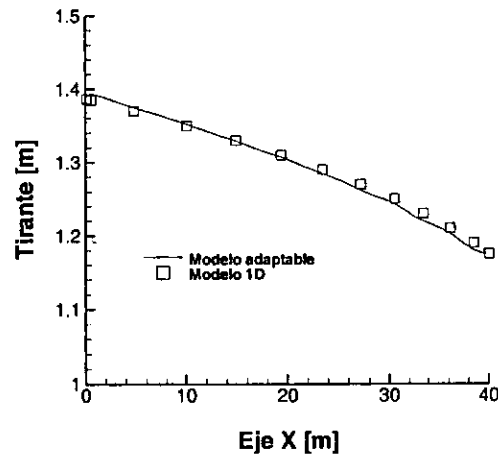


Figura 4.2 Tirantes calculados con el modelo  
2D vs 1D

### 4.3 Flujo en un canal curvo

Se presenta una comparación entre las mediciones experimentales realizadas por Rozovskii (1957) para un flujo en un canal horizontal con una curva a  $180^\circ$ , y valores obtenidos a partir del modelo matemático propuesto. El trabajo experimental de Rozovskii ha sido ampliamente comentado por diversos investigadores (Leschziner y Rodi, 1979; Molls, 1992; Jiménez, 2000; Meshele y Sotiropoulos, 2000; entre otros). Dichos experimentos se realizaron en un canal horizontal rectangular con ancho  $B = 0.80$  m que forma una curva en planta de  $180^\circ$ . Debido a la naturaleza eminentemente tridimensional del campo de velocidades generado en este caso (Meshele y Sotiropoulos, 2000), esta prueba resulta especialmente importante para verificar el modelo hidrodinámico desarrollado a lo largo de este trabajo.

#### 4.3.1 Valores de las variables usadas en el modelo numérico

De acuerdo con los datos reportados por Rozovskii, los valores de las variables usadas en el modelo fueron las siguientes: Coeficiente de fricción de Chezy igual a  $60 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ , velocidad de entrada al canal  $U = 0.265 \text{ m/s}$  y tirante de  $0.058 \text{ m}$  (experimento 1 de Rozovskii).

Se consideró condición de libre deslizamiento en las paredes del canal. Se usó una malla de cálculo como la que se muestra en la figura 4.3, la cual consta de  $140 \times 20$  elementos. En esta figura se pueden apreciar las secciones a  $37^\circ$  y  $102^\circ$ , las cuales sirven como referencia para comparar los valores experimentales reportados en la literatura y aquellos obtenidos a partir del modelo adaptable. Aguas abajo se consideró un nivel constante con valor  $0.058 \text{ m}$ .

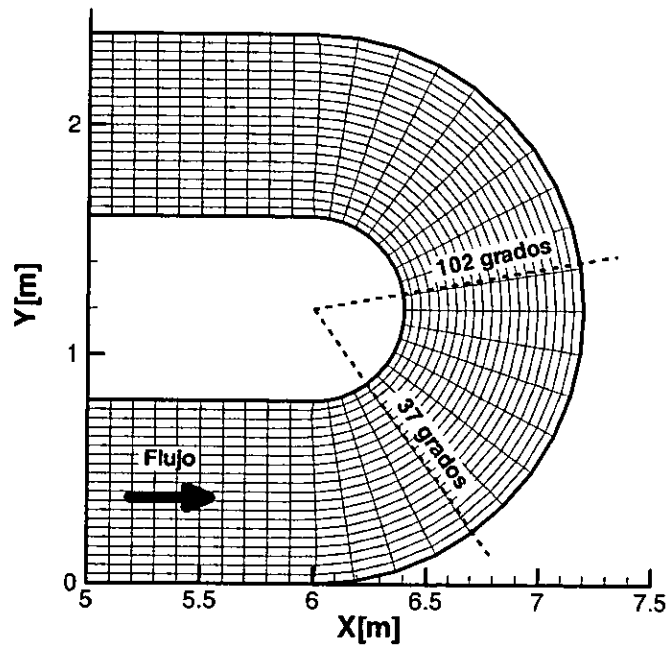


Figura 4.3 Malla de cálculo y secciones de estudio



### 4.3.2 Resultados

La figura 4.4 muestra el campo de velocidades para el flujo establecido.

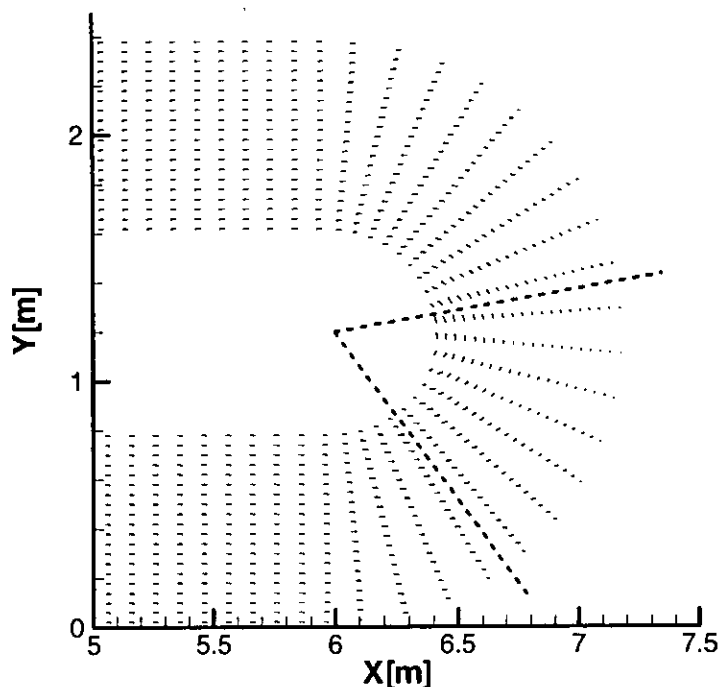


Figura 4.4 Campo de velocidades

De la figura anterior resulta evidente la aceleración del flujo en la margen interior de la curva (margen izquierda) respecto a la margen externa (margen derecha). Esta variación de velocidad es típica en el flujo en curvas tal como confirmó Rozovskii (1957).

En la figura 4.5 se muestran los perfiles medidos y calculados de la distribución transversal de velocidad para las secciones estudiadas. En este caso "u" representa el componente  $\xi$  de velocidad mientras que "b" representa la distancia perpendicular a la pared del canal medida desde la margen derecha hacia la margen izquierda.

La comparación es muy buena para la sección a  $102^\circ$ . Sin embargo, para la sección a  $37^\circ$ , hay cierto error en la predicción, del mismo orden al obtenido por Molls (1992) o por Jiménez (2000) al modelar numéricamente el experimento de Rozovskii. De acuerdo a las evidencias con las que se cuenta previo a la finalización de este trabajo, se considera que el error al que se hace mención bien pudiera deberse a la forma en la que se ha considerado el efecto de las fronteras sobre el flujo; tema que será abordado en futuras discusiones.

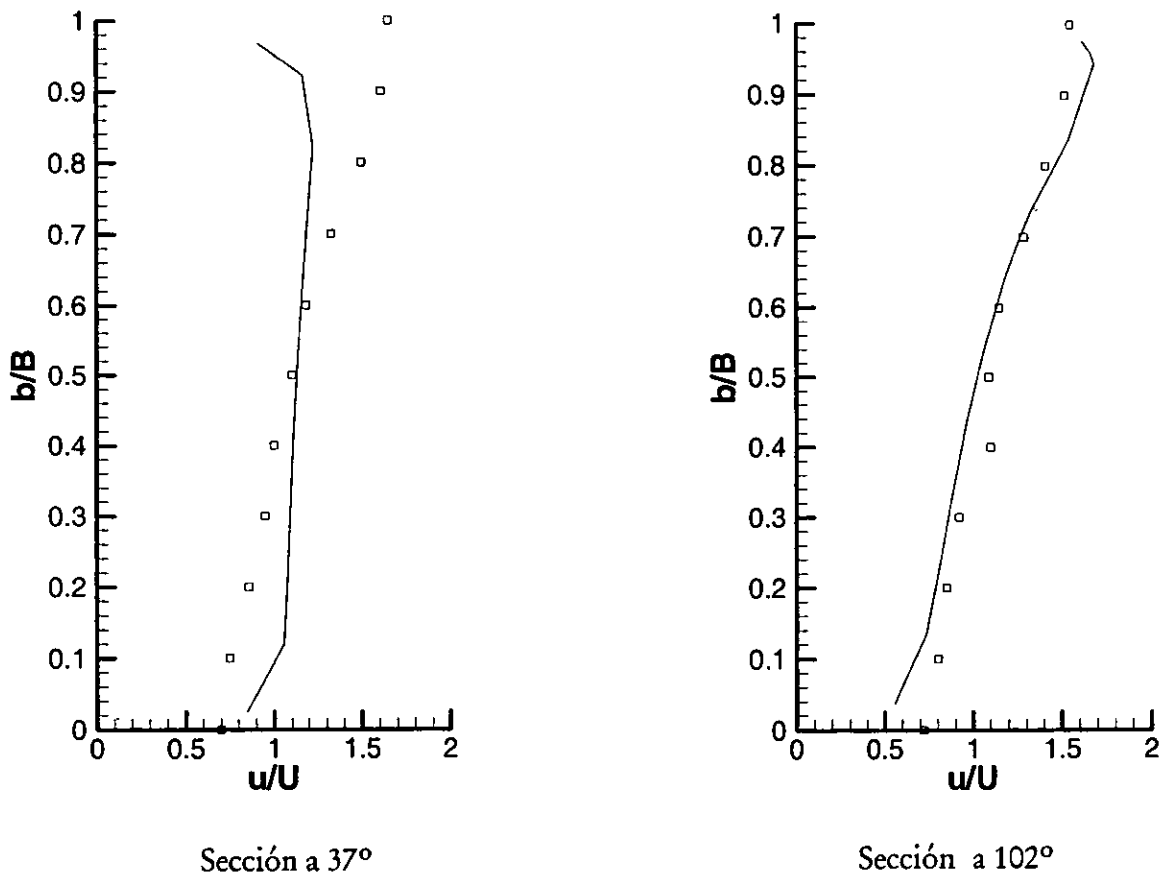


Figura 4.5 Perfiles de velocidad calculados y medidos

En la figura 4.6 se puede observar una comparación entre los perfiles de superficie libre del agua medidos y calculados en las paredes de la curva. Es de destacarse el buen ajuste de los resultados

numéricos con los experimentales especialmente en la margen izquierda. Los resultados obtenidos en este caso son comparables con los reportados en los trabajos de Jiménez (1999) y Molls (1992).

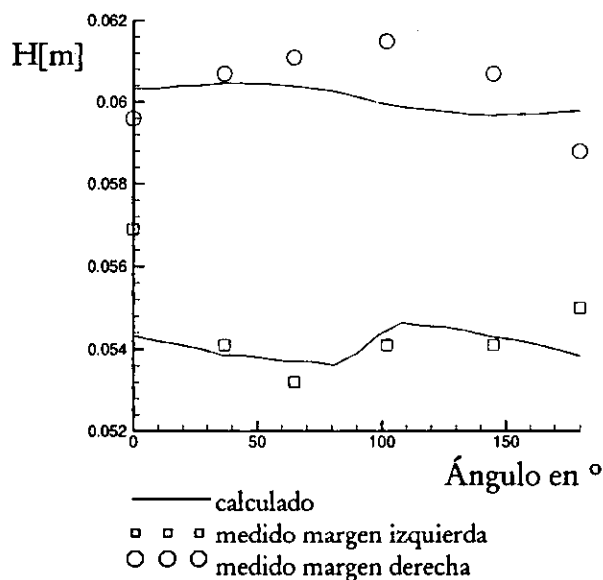


Figura 4.6 Nivel de superficie libre a lo largo de las márgenes en la curva

### 4.3.3 Comentarios finales

Es claro que debido al grado de curvatura de la sección en estudio, el flujo desarrollado es claramente tridimensional tal como demuestran Meshele y Sotiropoulos (2000). Por lo anterior, resulta admirable la capacidad del modelo bidimensional propuesto para predecir los datos experimentales obtenidos por Rozovskii (1957). Con esta experiencia, y tal como menciona Molls (1992), la modelación 2D predice aceptablemente flujos en curvas con un ahorro nada despreciable en esfuerzo de cómputo comparados con los modelos 3D.

## *Capítulo 5*

### VERIFICACIÓN DEL MODELO PARA MALLA ADAPTABLE

#### **5.1 Introducción**

Continuando con la verificación del modelo que se inició en el capítulo 4 para problemas con malla fija, ahora se presenta un resumen de la verificación para malla adaptable, que es una parte fundamental de este trabajo.

A lo largo de este capítulo se describen un par de problemas hidrodinámicos cuya solución requiere considerar la dependencia de la zona inundada respecto al tiempo:

- Flujo en un canal con sección transversal trapecial (apartado 5.2)
- Flujo en cauces (apartado 5.3)

En ambos casos se describen los pormenores de la instalación y del protocolo experimental para finalmente comentar acerca de los resultados obtenidos comparados con los valores calculados con el modelo adaptable propuesto.

#### **5.2 Flujo en un canal con sección transversal trapecial**

##### *5.2.1 Descripción de la instalación experimental*

Una verificación experimental del modelo se realizó, en una primera etapa, en un tramo de un canal rectangular recto de pendiente variable de 26 m de longitud, 0.9 m de profundidad y 0.78 m de ancho (figura 5.1). Tres gatos hidráulicos soportan al canal a una altura de 3 m sobre el piso y permiten el cambio de pendiente. El canal cuenta con dos articulaciones en los extremos del tercio medio del canal lo que posibilita dar diferentes pendientes, de ser necesario, en distintos tramos. El canal está construido con estructura metálica, placa en el fondo y paredes de vidrio que facilitan la visualización del flujo.

La instalación experimental usada permite regular el valor del flujo de descarga gracias a un sistema de recirculación y un conjunto de dos bombas centrífugas en paralelo. Estas bombas alimentan un tanque de almacenamiento que garantiza carga constante el cual, a su vez, descarga a un tanque aguas arriba del canal de 4.2 m de largo, 1.48 m de ancho y 2.7 m



Figura 5.1 Canal de pendiente variable del Instituto de Ingeniería de la UNAM

de profundidad al final del cual se encuentra un vertedor rectangular de pared delgada sin contracciones ( $B = 1.48$  m) con el cual se afora el flujo. Posteriormente, el agua vierte en un tanque dissipador de energía de 1.6 m x 1m x 2.7 m a la salida del cual se cuenta con rejillas dissipadoras. Aguas abajo hay una compuerta metálica con manivela circular gracias a la cual se puede controlar el tirante de la superficie libre.

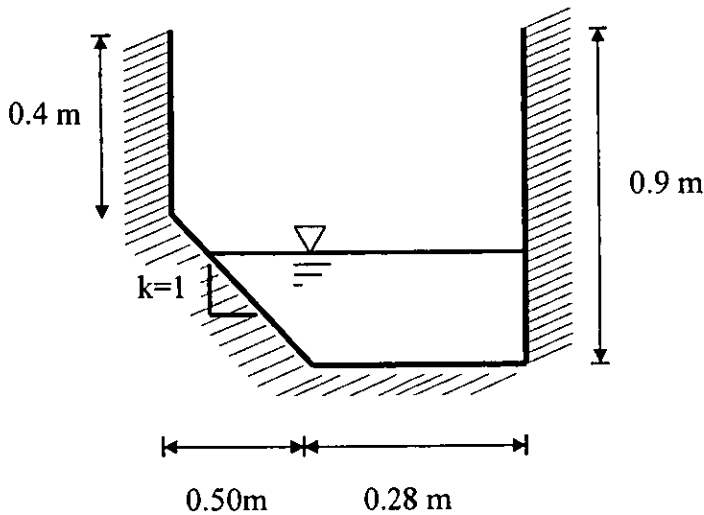


Figura 5.2 Sección transversal del canal

disipadoras. Aguas abajo hay una compuerta metálica con manivela circular gracias a la cual se puede controlar el tirante de la superficie libre.

### 5.2.2 La zona en estudio

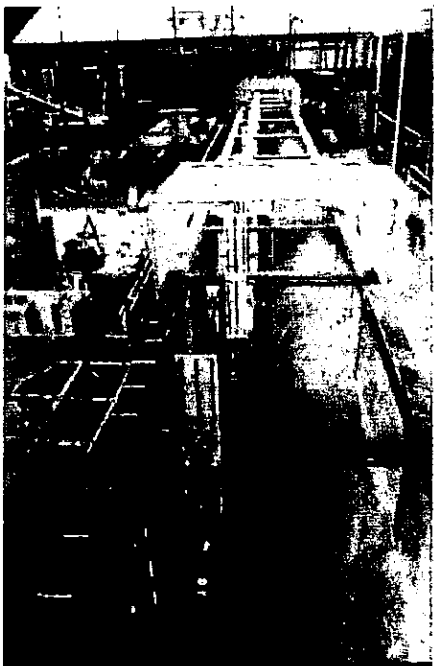
Se ubicó en los últimos 12 metros del canal; la sección transversal se modificó como se muestra en la figura 5.2.

Con esta sección, pequeñas variaciones en la elevación de la superficie libre del

agua se traducen en un cambio significativo del ancho del flujo, esto es, en la forma del dominio físico definido como la proyección en planta de la zona inundada.

### 5.2.3 Equipo de medición de niveles

Para la medición de niveles se contó con un equipo (HR Wallingford Wave Probe Monitor, UK) el cual permite detectar pequeñas y rápidas variaciones en el nivel de la superficie libre gracias a su alta respuesta dinámica y a su resolución, la cual depende del sistema de adquisición usado. El principio de operación del aparato consiste en registrar la corriente eléctrica que circula por un sensor el cual está formado por un par de agujas de acero de 30 cm de largo. La corriente que circula por las agujas es proporcional a la porción del sensor que se encuentra sumergida (figura 5.3). La corriente eléctrica se transforma en una señal de voltaje proporcional al tirante. Este sistema permite la medición simultánea de niveles hasta en ocho puntos distintos y de manera independiente generando una señal que puede registrarse con ayuda de sistema de adquisición de datos.



a) Soporte y sensor de nivel.



b) Vista de la sección transversal del canal y de los sensores de nivel.

**Figura 5.3** Vistas de la sección transversal y de los sensores de nivel (desde aguas abajo).

#### 5.2.4 Sistema de adquisición y procesamiento de datos

Para la adquisición de datos, se usó una tarjeta (National Instruments·PCI6024E, US) con capacidad de muestreo de 200kS/s y 12 bits de resolución en 16 canales. La capacidad de la tarjeta permite un muestreo, prácticamente simultáneo y a tiempo real, en los 8 puntos de medición (frecuencia de muestreo tan pequeña como cada 32 $\mu$ s).

El sistema de adquisición se complementa con un software de adquisición desarrollado en ambiente LabView el cual controla la tarjeta de adquisición y permite, simultáneamente, el procesamiento de la información (figura 5.4).

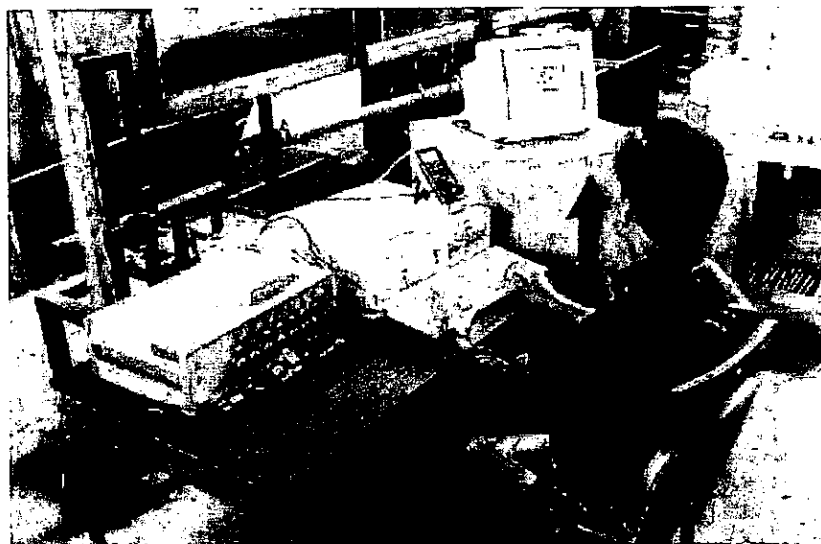


Figura 5.4 Equipo de medición y adquisición de datos

#### 5.2.5 Procedimiento experimental

Una vez establecido el flujo en el canal para cierto gasto conocido y constante, a partir de maniobras sucesivas de apertura y cierre de la compuerta aguas abajo se pueden producir cambios cíclicos en la cota de la superficie libre del agua, los cuales, debido a la sección transversal del canal, provocan modificaciones importantes en la forma de la zona inundada. La relación entre cotas de superficie libre y la forma del dominio físico se establecen a partir del conocimiento de

la topografía del fondo. La información experimental que se recopila durante el experimento, sirve para comparar con respecto a la información generada con el modelo numérico propuesto cuando se simulan las condiciones iniciales y de frontera aquí descritas.

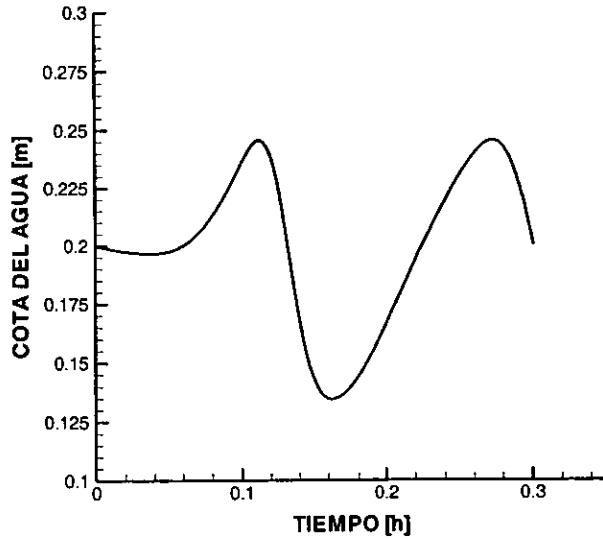
### 5.2.6 Casos analizados

En general, para los casos analizados en este apartado, se consideran las siguientes condiciones de frontera y valores de las variables necesarias para la modelación numérica:

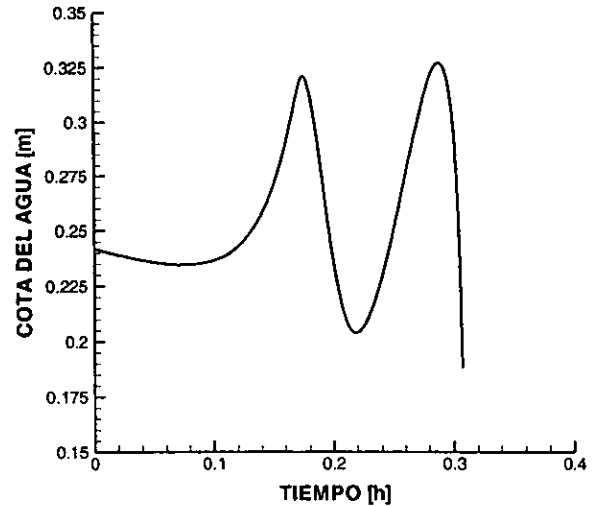
- *Aguas arriba.* Gasto conocido y constante
- *Aguas abajo.* Nivel conocido de acuerdo con la información experimental obtenida con ayuda del sensor más cercano a la compuerta
- *Fronteras laterales.* Condición de libre deslizamiento y flujo normal nulo
- *Malla de cálculo.* 5 x 5 elementos
- *Coefficiente de fricción de Chezy.*  $C = 40 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$
- *No se consideran efectos viscosos*

En una primera serie de experimentos se trabajó en un canal con pendiente cero y se fijó un gasto de entrada al canal de 7.05 l/s. En una segunda serie, la pendiente del canal se fijó en el valor 0.0094; la descarga aguas arriba fue de 7.9 l/s. En ambos casos, el tirante aguas abajo se consideró conocido de acuerdo con la información experimental obtenida con ayuda del sensor más cercano a la compuerta. Esta condición de frontera se muestra en las figuras 5.5 y 5.6 para el canal horizontal y el canal con pendiente, respectivamente.





**Figura 5.5** Cota de la superficie libre medida aguas abajo, canal horizontal.



**Figura 5.6** Cota de la superficie libre medida aguas abajo, canal con pendiente.

### 5.2.7 Resultados

En las figuras 5.7 (canal horizontal) y 5.8 (canal con pendiente) se muestra una representación tridimensional de la forma de la superficie libre calculada para diferentes instantes. Es de destacarse como dicha superficie se adapta a la topografía del canal. Puede apreciarse que en el caso del canal con pendiente nula, la adaptación se realiza en la dirección transversal al flujo mientras que la superficie libre permanece prácticamente de forma rectangular.

Obsérvese que en el segundo caso la adaptación de los puntos de la malla aguas arriba y aguas abajo resulta radicalmente diferente debido a la nueva forma geométrica de la superficie libre. Aguas arriba los puntos se mueven menos que aquellos ubicados aguas abajo.

En las figuras 5.9 y 5.10 se compara la variación de la cota de la superficie libre calculada contra la medida experimentalmente en una sección a 5 metros aguas arriba de la compuerta.

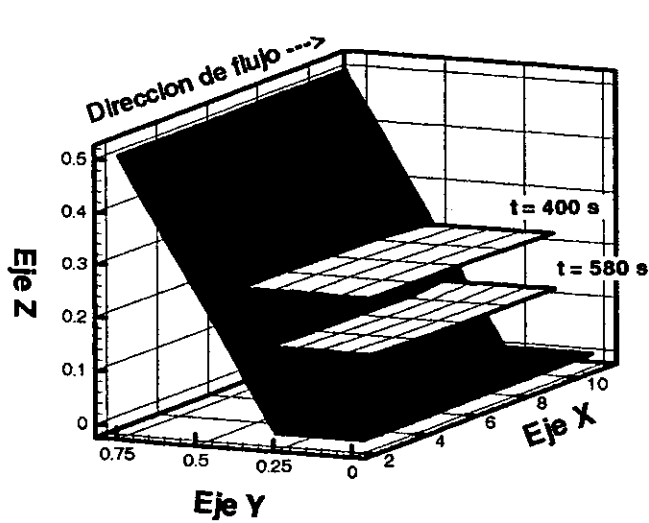


Figura 5.7 Representación tridimensional de la topografía (malla oscura) y de la superficie libre del agua (malla blanca) en dos instantes diferentes. canal horizontal.

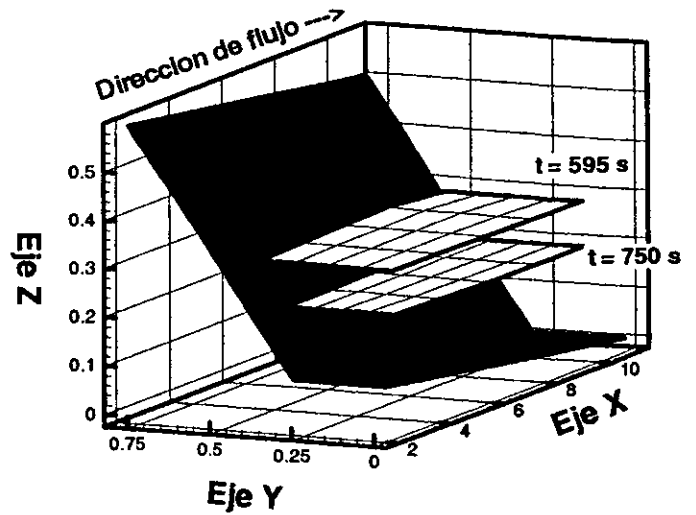


Figura 5.8 Representación tridimensional de la topografía (malla oscura) y de la superficie libre del agua (malla blanca) en dos instantes diferentes. canal con pendiente.

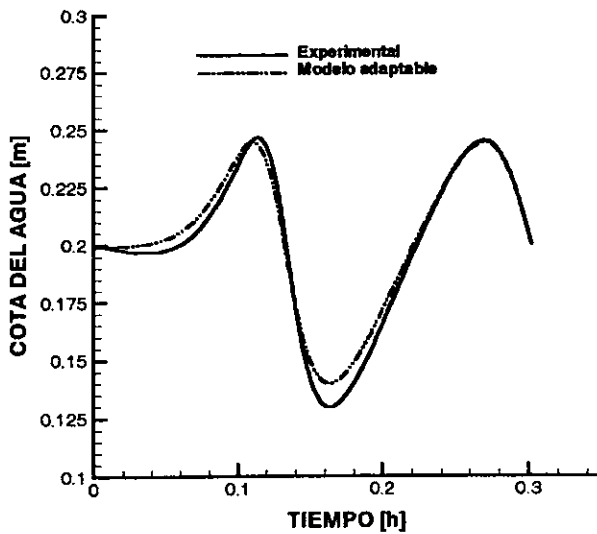


Figura 5.9 Cotas de agua experimentales y calculadas a cinco metros aguas arriba de la compuerta, canal horizontal.

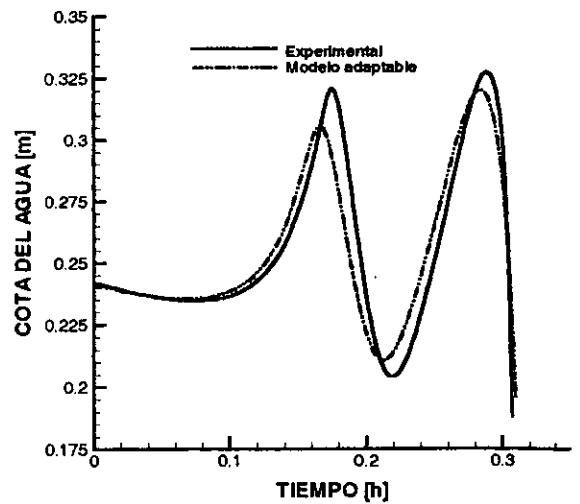


Figura 5.10 Cotas de agua experimentales y calculadas a cinco metros aguas arriba de la compuerta, canal con pendiente.

Como puede verse, en ambos casos, los resultados del modelo adaptable concuerdan satisfactoriamente con los obtenidos experimentalmente. De igual manera, si se integran perfiles de velocidad transversales en diferentes secciones, puede verificarse que la pérdida de masa es insignificante en ambos casos.

### 5.3 Flujo en cauces

Otra verificación del modelo adaptable, se realizó en un modelo físico que representa un tramo de un río que fluye sobre una planicie inundable. Como se comentó en el capítulo 1 de este trabajo, la consideración de la variabilidad en el tiempo del volumen de control sobre el que se integran las EDP fundamentales resulta especialmente importante en este tipo de problemas.

#### 5.3.1 Descripción de la instalación experimental

Se dispuso de una mesa de arena de 50 m de largo por 15 m de ancho y de un equipo de bombeo de 30 HP, con capacidad de hasta 150 l/s. La arena usada en la mesa es de granulometría casi uniforme, con diámetro  $D_{50} = 0.80$  mm y una desviación estándar geométrica de 1.3. El gasto que ingresa al modelo se afora con un vertedor rectangular de cresta delgada. El vertedor descarga sobre un primer tanque de 1.34 m de profundidad, 2.3 m de ancho y 3 m de largo seguido por otro de 1.34 m de ancho por 10.15 m de largo. Estos tanques tienen la intención de garantizar un flujo de entrada al modelo sin agitación apreciable. Aguas abajo, se dispone de otro tanque de 1.5 m de ancho por 9.3 m de lago y 1.5 m de profundidad, en el cual se tiene una compuerta plana vertical que permite regular el nivel de la superficie libre del agua. La figura 5.11 muestra una vista del modelo físico que fue considerado como prototipo visto desde aguas abajo.

#### 5.3.2 La zona en estudio

Para este estudio, se seleccionó el tramo aguas abajo delimitado por la cuadrícula de referencia que puede observarse en la figura 5.11 y que equivale, a una zona extremadamente plana (figura 5.12).

5.3.3 Equipo de medición de niveles y adquisición de datos

A lo largo de la zona en estudio se colocaron seis sensores de nivel de acuerdo a lo mostrado en la figura 5.12. Un sensor más se colocó midiendo la carga sobre el vertedor y otro se empleó para medir el nivel del agua en el tanque aguas abajo.

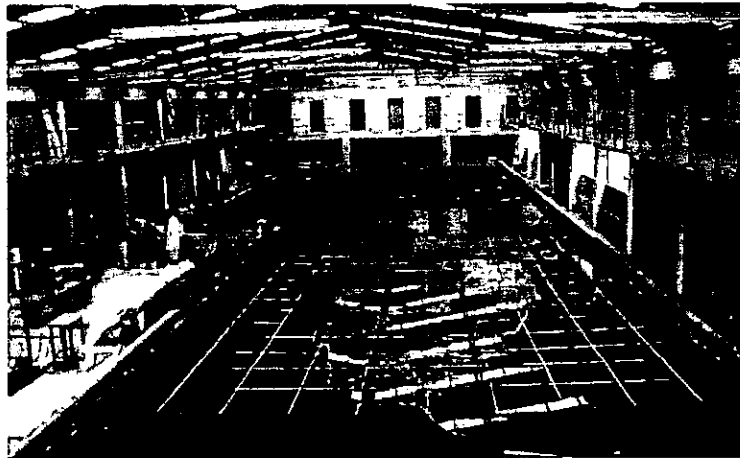


Figura 5.11 Aspecto general del modelo visto desde aguas abajo hacia aguas arriba. La cuadrícula delimita la zona en estudio.

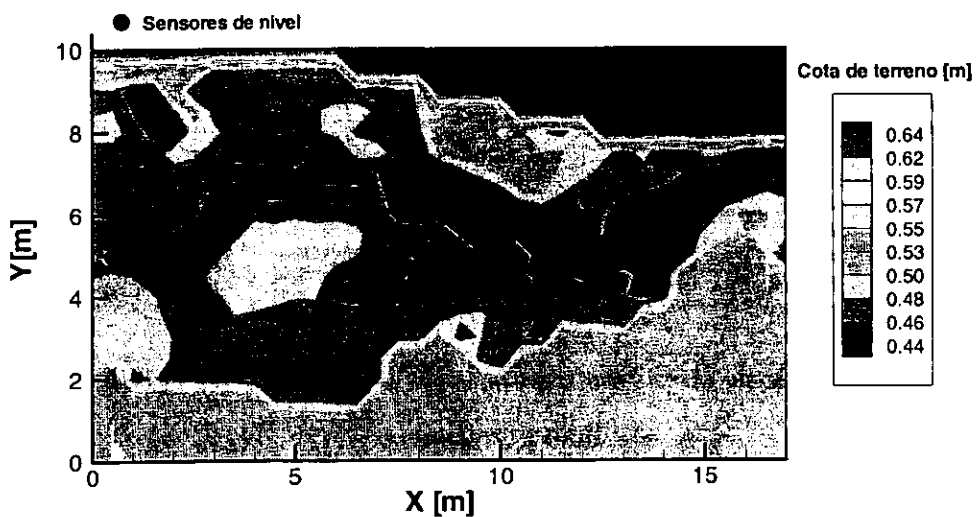


Figura 5.12 Topografía de la zona en estudio y ubicación de los sensores de nivel

Tanto el equipo de medición como el de adquisición de datos ya fueron descritos en los apartados 5.2.3 y 5.2.4. Adicionalmente, se usó un equipo de video-grabación para registrar la forma en la que las márgenes de la zona inundada cambiaban en el tiempo.

#### 5.3.4 Verificación del modelo para el estado permanente (malla fija)

En esta etapa se verificó el funcionamiento del modelo para flujo permanente con fronteras irregulares fijas y se comparó con resultados experimentales. Lo anterior tiene la finalidad de asegurar que el algoritmo de solución usado no tiene dificultad para trabajar con la irregularidad de las fronteras presentes en un cauce natural.

##### 5.3.4.1 Condiciones iniciales y de frontera

La figura 5.13 muestra la malla de cálculo usada para el cálculo hidrodinámico de este caso.

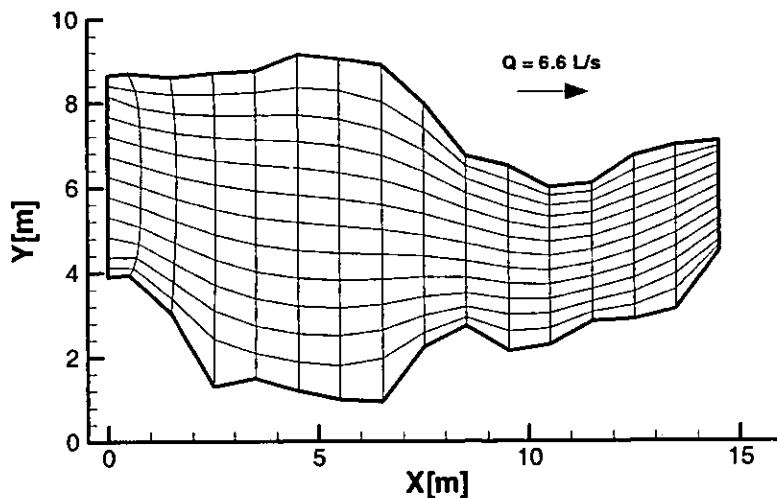


Figura 5.13 Malla de cálculo (16x13 elementos) usada durante la verificación del modelo para flujo permanente

Se hace notar que no se ha tomado ninguna precaución particular respecto a la ortogonalidad de la malla. El modelo se hizo trabajar considerando un coeficiente de fricción de Chezy igual a 37

mientras que la viscosidad turbulenta se consideró prácticamente cero. Aguas arriba se fijó un gasto de  $0.066 \text{ m}^3/\text{s}$  mientras que aguas abajo el nivel fue de  $0.52 \text{ m}$  (medido). En las fronteras físicas se aplica condición de libre deslizamiento y flujo perpendicular nulo.

#### *5.3.4.2 Resultados*

En la figura 5.14 (a) y 5.14 (b), se muestra una perspectiva de la forma de la superficie libre del agua adaptada a la configuración topográfica del terreno para la zona en estudio. Existe una muy buena concordancia entre los perfiles hidráulicos medidos y calculados (véase la figura 5.15).

#### *5.3.5 Verificación del modelo para estado no permanente (malla adaptable)*

##### *5.3.5.1 Procedimiento experimental*

De manera similar a lo hecho en el canal de pendiente variable (apartado 5.2.5), en este caso, se fijó un gasto de entrada constante de  $6.6 \text{ l/s}$  y un nivel aguas debajo de  $0.48 \text{ m}$ . Una vez establecido dicho flujo, con ayuda de la compuerta aguas abajo, se provocaron cambios en la cota de la superficie libre del agua que a su vez se tradujeran en modificaciones importantes de la zona inundada.

Durante el desarrollo de los experimentos se realizaron mediciones sucesivas de la forma de la zona inundada conforme se modificaba el nivel aguas abajo auxiliándose tanto con los sensores de nivel como del video.

##### *5.3.5.2 Modelación numérica y resultados*

Partiendo del flujo establecido descrito en el apartado anterior, se procedió a examinar el funcionamiento del modelo en el caso en el que la malla que describe la superficie libre del agua se adapta automáticamente a la topografía del cauce. Para la serie de resultados presentados aquí, se optó por realizar la adaptación cada 100 intervalos de tiempo del cálculo hidrodinámico ( $\Delta t = 0.02 \text{ s}$ ).

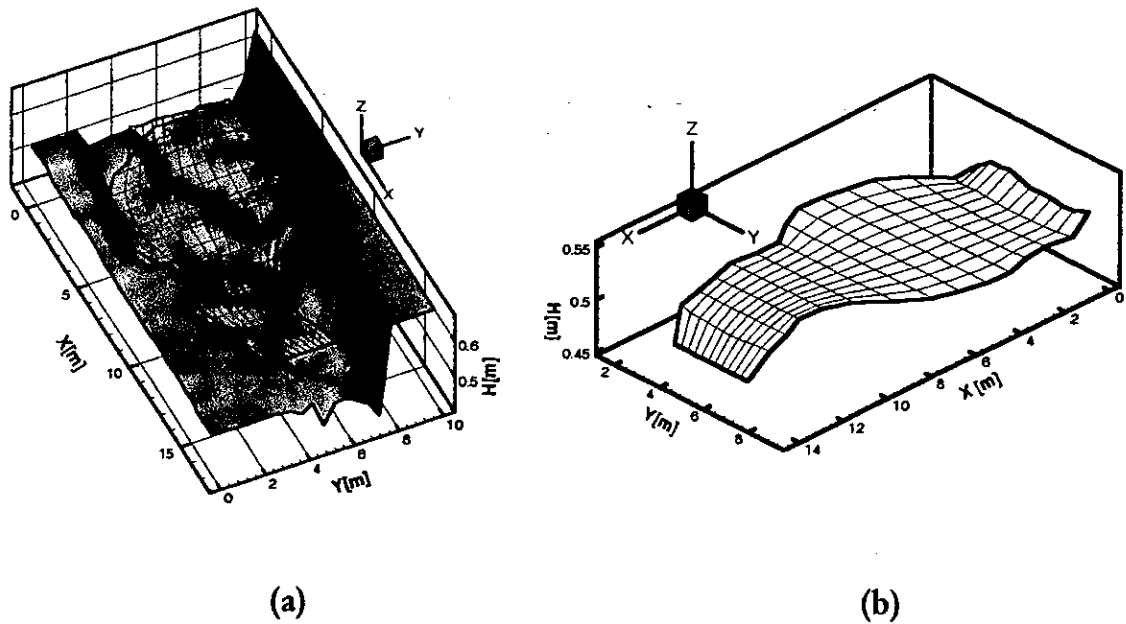


Figura 5.14 (A) Perspectiva de la superficie libre del agua adaptada a la topografía de la zona en estudio (B) Aspecto de la superficie libre del agua para la verificación en flujo permanente.

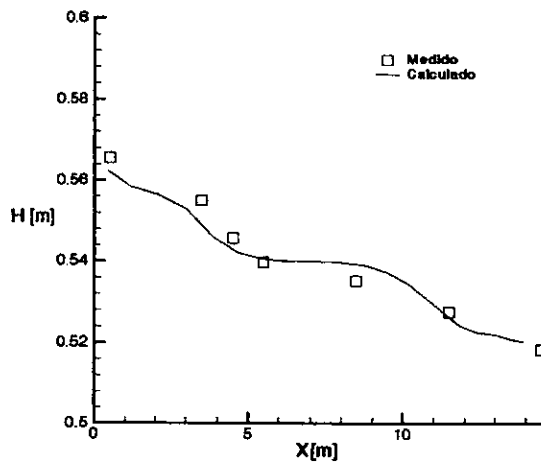


Figura 5.15 Perfiles hidráulicos medidos y calculados a lo largo de la zona de estudio para la verificación del modelo adaptable en flujo permanente.

Entre el inicio de la prueba experimental (una vez establecido el flujo) y su final transcurrieron 13.5 minutos los cuales se modelaron numéricamente en 3 etapas de poco más de 4 minutos con la intención de revisar entre etapa y etapa la nueva conformación del espacio físico. La figura 5.16 muestra la variación de la cota de la superficie libre con respecto al tiempo medida en el sensor aguas abajo más cercano al tanque; dicha variación, sirve como condición de frontera para la modelación numérica. La información proporcionada por el sensor en el tanque aguas abajo tuvo que desecharse debido a la turbulencia que se genera en dicha zona.

La figura 5.16 compara las cotas de superficie libre medidas y calculados para el primer sensor (de aguas arriba hacia aguas abajo) ubicado en la zona de estudio.

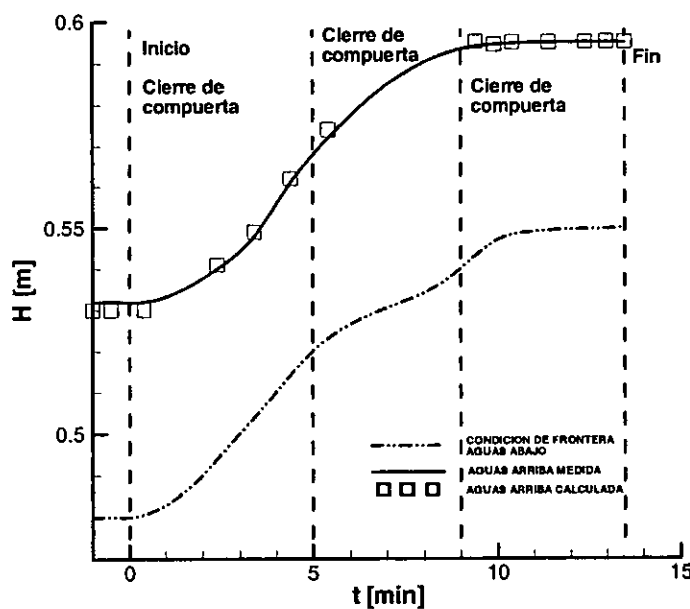


Figura 5.16 Condición de frontera aguas abajo y cotas de superficie libre medidas y calculadas aguas arriba



La figura 5.17 muestra una secuencia de imágenes en las que se comparan las márgenes medidas y calculadas en este caso. Las imágenes corresponden a los tiempos 0 min, 5 min, 9 min y 13.5 min respectivamente.

Como se puede apreciar, para el caso presentado aquí, el modelo reproduce satisfactoriamente el proceso de inundación descrito experimentalmente. De hecho, las diferencias entre los valores medidos y calculados no son significativas excepto, posiblemente, en las que se muestran en la figura 5.17 (a) en la que los errores podrían ser importantes aunque no necesariamente atribuibles al algoritmo de solución propuesto (véase, apartado 5.3.5.3).

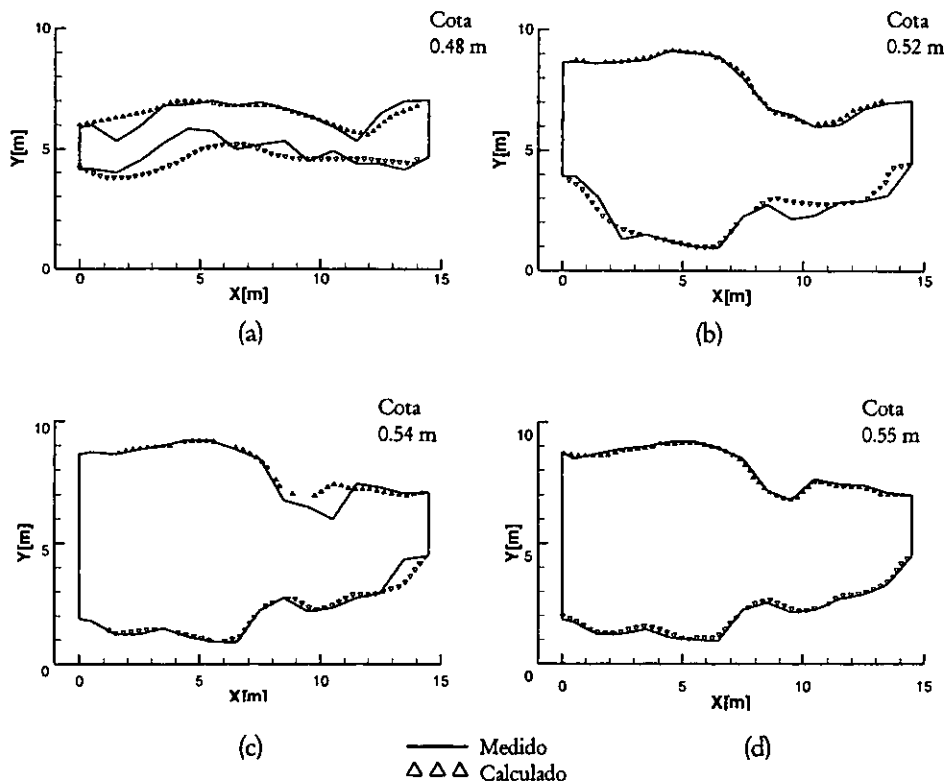


Figura 5.17 Forma de la zona inundada. Márgenes calculadas considerando malla adaptable vs. márgenes medidas experimentalmente. (6.6 l/s)

### 5.3.5.3 Rango de variación experimental

Con la finalidad de conocer las fuentes de error que podrían repercutir en las predicciones hechas con ayuda del modelo adaptable, se analizaron varias posibilidades llegando a la conclusión de que la más importante de estas fuentes, se encuentra en lo que aquí se ha llamado *rango de variación experimental*. El origen de este error se encuentra en la imposibilidad de obtener, exactamente, la misma zona inundada en diferentes sesiones experimentales aún cuando se considere que las condiciones de frontera aguas arriba y aguas abajo no se modifiquen en absoluto. Lo anterior obedece a la susceptibilidad del modelo de fondo móvil a cualquier alteración de su topografía por mínima que esta sea, máxime tratándose de una zona particularmente plana. Así, entre un experimento y otro, las márgenes del flujo se podían encontrar en diferentes posiciones pero acotadas en una región a la que se ha llamado en este trabajo *rango de variación experimental*.

Para determinar la amplitud de dicha región (para cierto gasto y nivel aguas abajo), fue invaluable la ayuda proporcionada por el equipo de video-filmación el cual, permitió identificar zonas en las cuales se presentaban tirantes muy pequeños dando la apariencia de no existir intercambio de agua con los alrededores. Se notó que dichas zonas cambian de experimento a experimento aun para las mismas condiciones iniciales y son precisamente las que permiten definir el rango de variación experimental. Adicionalmente, debe recalarse que este error comienza a cobrar importancia, sobre todo, en el caso de flujos con velocidades "bajas". Obsérvese por ejemplo la figura 5.18 donde se muestra la zona en estudio y se delimita el rango de variación experimental para este caso (zona limitada, para cada margen, entre la línea continua y la línea discontinua). Note que la superficie correspondiente a la zona de variación experimental es tan importante como la zona en la que se considera que siempre hay flujo.

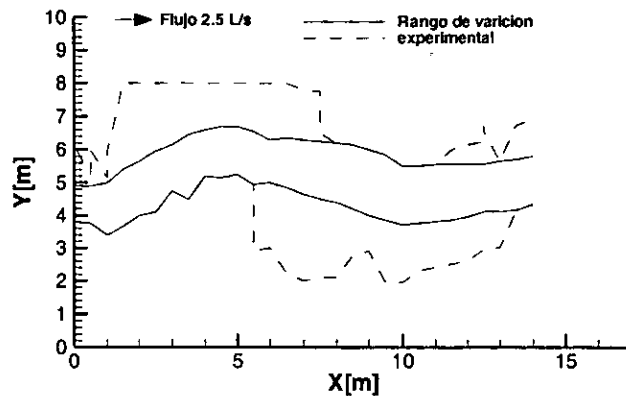


Figura 5.18 Rango de variación experimental de la forma de la zona inundada para flujo permanente

En consecuencia, durante la etapa experimental en la mesa de arena, se buscó no solamente delimitar el rango de variación experimental de la zona inundada, sino además los experimentos se desarrollaron bajo condiciones de flujo que minimizaran estos efectos.

#### 5.4 Comentarios finales

Con los resultados obtenidos en este capítulo, y en general a lo largo de este trabajo, se tiene plena confianza para asegurar que la modelación adaptable tiene un potencial de aplicación práctica muy importante en el cálculo hidrodinámico y muy particularmente en el caso de flujos no permanentes.

A partir de lo anterior, se considera que es momento de recapitular y reflexionar sobre los objetivos cumplidos hasta este momento de la investigación, así como plantear las metas por alcanzar en proyectos futuros con la finalidad de profundizar en aquellos aspectos que podrían enriquecer la discusión alrededor del uso de las *mallas adaptables para la solución de la hidrodinámica de cuerpos de agua*.

## CONCLUSIONES

Se desarrolló y verificó un modelo hidrodinámico 2D promediado en la profundidad referido a un sistema curvilíneo de coordenadas que es capaz de considerar la dependencia del volumen de control con respecto al tiempo.

Como se pudo demostrar, la concepción resulta especialmente importante en el caso de flujos en cauces en donde pequeñas variaciones de la superficie libre pueden significar un cambio importante en la forma de la zona inundada.

El modelo desarrollado se refirió a un sistema curvilíneo generalizado de coordenadas con la intención de ser capaces de atacar problemas con geometrías irregulares sin los inconvenientes de otras técnicas numéricas.

El algoritmo de solución propuesto tiene la intención de garantizar un costo computacional bajo, aún si se compara con algoritmos que no consideran la dependencia temporal del volumen de integración. Lo anterior es posible gracias a que la solución numérica propuesta disocia los componentes físicos involucrados en el fenómeno en estudio, llamados *advección*, *difusión* y *propagación*. De manera paralela se considera la dependencia con respecto al tiempo de las variables hidrodinámicas fundamentales. Con este enfoque, es factible escribir la solución al sistema que define al problema en términos de sistemas lineales tridiagonales.

El modelo numérico propuesto se verificó experimentalmente en varios casos. En cada uno de ellos se buscó analizar cuidadosamente las cualidades y los inconvenientes de la metodología propuesta con la intención de tener elementos suficientes para sugerir adecuaciones a la misma.

En términos generales, la modelación adaptable provee ventajas que no pueden dejarse de lado; entre ellas se destaca:

- En primer lugar, la posibilidad de considerar de manera adecuada el problema de la dependencia en el tiempo del volumen de control sobre el que se integran las ecuaciones diferenciales parciales que describen a cierto fenómeno de la naturaleza.
- La lógica de este tipo de modelación es aplicable a diversas áreas del conocimiento y a una abundante variedad de problemas en los que intervienen fronteras móviles.
- El concepto sobre el que se desarrolla esta metodología tiene un importante soporte físico-matemático el cual la hace confiable.
- Permite identificar el vínculo entre el espacio físico sobre el que se desarrolla el fenómeno en estudio y sus variables; lo anterior ayuda a profundizar en el conocimiento sobre el problema.

En el caso específico del modelo hidrodinámico propuesto, las ventajas relacionadas con el concepto de adaptabilidad pueden resumirse en las siguientes:

- El modelo permite considerar la dependencia del espacio físico con respecto al tiempo y la repercusión que ésta tiene en la hidrodinámica del problema.
- El modelo hace posible calcular la hidrodinámica del flujo de manera simultánea con la forma y tamaño del volumen de control.

Con relación al algoritmo de solución, se consideran como sus principales contribuciones:

- La disociación de los procesos físicos involucrados permite utilizar los esquemas numéricos de solución más convenientes para cada etapa o en su defecto abre la posibilidad de explorar dentro de una amplia variedad de métodos de solución con la intención de proponer mejoras a la idea expuesta en este trabajo.

- 
- La estructura modular del algoritmo de solución en general, reditúa en economía de cómputo.
  - El modelo propuesto se desarrolla en términos del concepto de adaptabilidad el cual no es frecuentemente utilizado en la literatura para abordar el tipo de problemas tratados a lo largo de estas líneas por lo que este estudio y sus resultados, invitan a profundizar en lo aquí expuesto.

Por supuesto que con lo hecho en este trabajo, no se pretende agotar todos los aspectos relacionados con la modelación adaptable. Se está consciente de la necesidad de proseguir con el trabajo de investigación iniciado para lo cual, se sugiere:

- Profundizar en aquellos aspectos que permitan abordar problemas con topologías más complejas; en particular, configuraciones geométricas de flujos en los que aparecen islas, brazos, etc. y que no son considerados dentro de la propuesta desarrollada en este trabajo.
- Investigar otros criterios para considerar el efecto de las fronteras sobre el flujo (condiciones de frontera).
- Estudiar la conveniencia de otros esquemas numéricos de solución.

## Apéndice A

### PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES

La intención de este apartado es describir las bases fundamentales de la transformación curvilínea de las ecuaciones diferenciales parciales. Para profundizar en el tema, el lector puede revisar los trabajos de Anderson 1995, Johnson y Thompson 1978, entre otros.

#### Transformación de derivadas de primer y segundo orden

Con la intención de hacer más sencillo este análisis, se considera un flujo bidimensional no uniforme cuyas variables independientes son  $x$ ,  $y$  &  $t$  ( $x$  &  $y$  variables de posición,  $t$  el tiempo). Lo que a continuación se hace es transformar estas variables, que corresponden al espacio físico  $(x, y, t)$  a un nuevo conjunto de variables en el espacio transformado  $(\xi, \eta, \tau)$ , en donde las ecuaciones de transformación respectivas son:

$$\xi = \xi(x, y, t) \quad (\text{a.1})$$

$$\eta = \eta(x, y, t) \quad (\text{a.2})$$

$$\tau = \tau(t) \quad (\text{a.3})$$

Ahora considérese una EDP escrita en términos del espacio  $(x, y, t)$  y sus derivadas. Para llevar esta ecuación al espacio transformado  $(\xi, \eta, \tau)$ , es necesario remplazar las derivadas con respecto a las variables  $x$ ,  $y$  &  $t$  con las correspondientes con respecto a  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\tau$ . Lo anterior es posible a partir de las ecuaciones de transformación (a.1), (a.2) y (a.3) y aplicando la regla de la cadena, así:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \xi_x + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \eta_x \quad (\text{a.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \xi_y + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \eta_y \quad (\text{a.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \xi_t + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \eta_t + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \tau_t \quad (\text{a.6})$$

En las ecuaciones (a.4) a (a.6), y en general en lo que sigue, las variables con subíndice denotan derivadas. Los coeficientes de las derivadas con respecto a  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\tau$  se llaman coeficientes métricos y se obtienen a partir de las ecuaciones de transformación (a.1) a (a.3). De manera similar, al derivar (a.4), y (a.5) con respecto a  $x$ ,  $\xi$  y  $y$  respectivamente se tiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \xi_{xx} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \eta_{xx} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \xi_x^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \eta_x^2 + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}\right) \eta_x \xi_x \quad (\text{a.7})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \xi_{yy} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \eta_{yy} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \xi_y^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \eta_y^2 + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}\right) \eta_y \xi_y \quad (\text{a.8})$$

Por otra parte, la derivada mixta con respecto a  $x$  &  $y$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \xi_{yx} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \eta_{yx} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \xi_x \xi_y + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \eta_x \eta_y + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\right) [\eta_x \xi_y + \xi_x \eta_y] \quad (\text{a.9})$$

Vale la pena enfatizar, que las ecuaciones (a.1) a (a.9) se usan para transformar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un fluido desde el espacio físico  $(x,y,t)$  al espacio computacional  $(\xi, \eta, \tau)$ . El propósito de la transformación es, en la mayoría de los casos, el de llevar la malla no uniforme del espacio físico a una malla uniforme en el espacio computacional (Anderson, 1995).

### Coeficientes métricos y Jacobiano de la transformación

En las ecuaciones (a.4) a (a.9) los términos representados por las derivadas de  $\xi$ , y  $\eta$  con respecto a  $x$  &  $y$ , se llaman coeficientes métricos. Como se puede observar, representan la forma en que los ejes curvilíneos cambian a lo largo de los ejes cartesianos. Así, los coeficientes métricos se encuentran íntimamente ligados a la geometría de la malla.

En el caso de que las ecuaciones de transformación (a.1) a (a.3) fueran dadas en forma analítica, entonces, los coeficientes métricos podrían determinarse por derivación directa. Sin embargo, en



la mayor parte de las aplicaciones las ecuaciones de transformación se presentan en forma numérica y por lo tanto los coeficientes métricos deben calcularse a partir de diferencias finitas.

Para la discusión que sigue las ecuaciones de transformación, ecuaciones (a.1) a (a.3), se presentan a continuación en su forma inversa:

$$x = x(\xi, \eta, \tau) \quad (\text{a.10})$$

$$y = y(\xi, \eta, \tau) \quad (\text{a.11})$$

$$t = t(\tau) \quad (\text{a.12})$$

Con la intención de obtener los coeficientes métricos a partir de las ecuaciones anteriores requerimos relacionar las derivadas de  $\xi$  y  $\eta$  con respecto a  $x$  &  $y$  con sus inversas (derivadas de  $x$  &  $y$  con respecto a  $\xi$  y  $\eta$ ).

Considérese la función  $f(x, y)$ , tal que las variables  $x$  &  $y$  son funciones de  $\xi$  y  $\eta$  ( $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ ). Así, la diferencial total de  $f$  es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (\text{a.13})$$

de donde se sigue que:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (\text{a.14})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (\text{a.15})$$

Las ecuaciones (a.14) y (a.15) representan un sistema en donde las parciales de  $f$  con respecto a  $x$  &  $y$  representan las incógnitas. Dicho sistema puede ser resuelto por la regla de Cramer. Así, resolviendo por ejemplo la parcial con respecto a  $x$ , se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{vmatrix}} \quad (\text{a.16})$$

donde el denominador de la ecuación (a.16) representa al *Jacobiano* o *Jacobiano de la transformación*:

$$J \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (\text{a.17})$$

Resolviendo la ecuación (a.16) y expresándola como operador:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] \quad (\text{a.18})$$

Resolviendo de manera similar para la parcial con respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right] \quad (\text{a.19})$$

Puede observarse que las ecuaciones (a.18) y (a.19) representan los operadores derivada de una función en el espacio físico en términos de derivadas con respecto a las variables en el espacio computacional. Es claro que (a.18) y (a.19) son equivalentes a (a.4) y (a.5) respectivamente, obtenidas a partir de la transformación directa, en el primer caso, y a partir de la transformación inversa en el segundo.

Finalmente, considérese la transformación inversa ( $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ ) y la transformación directa ( $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ ). A partir de ellas pueden escribirse los diferenciales:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad (\text{a.20})$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (\text{a.21})$$

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \quad (\text{a.22})$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \quad (\text{a.23})$$

Escribiendo en forma matricial el sistema dado por (a.20) y (a.21):

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (\text{a.24})$$

De igual manera, para (a.22) y (a.23):

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (\text{a.25})$$

Resolviendo la ecuación (a.24) para  $d\xi$  y  $d\eta$ :

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (\text{a.26})$$

Ahora, comparando (a.25) y (a.26):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{a.27})$$

A partir de esta última se obtienen las relaciones entre los coeficientes métricos inversos y directos:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (\text{a.28})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (\text{a.29})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (\text{a.30})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (\text{a.31})$$

## Apéndice B

### TRANSFORMACIÓN CURVILÍNEA DE LA ETAPA ADVECTIVA

Ecuaciones diferenciales parciales que representan el proceso advectivo referidas a un sistema cartesiano rectangular:

$$u_t + u u_x + v u_y = 0 \quad (\text{b.1})$$

$$v_t + u v_x + v v_y = 0 \quad (\text{b.2})$$

Transformando (b.1) usando la regla de la cadena (apéndice A):

$$(u_t)_{\xi\eta} - \frac{1}{J} [(x_\eta(v - y_t) + y_\eta(x_t - u)) u_\xi + (x_\xi(y_t - v) + y_\xi(u - x_t)) u_\eta] = 0 \quad (\text{b.3})$$

donde  $(v-y_t), (x_t-u), (y_t-v), (u-x_t)$  representan velocidades relativas al sistema inercial.

De manera similar la ec. 2 se escribe:

$$(v_t)_{\xi\eta} - \frac{1}{J} [(x_\eta(v - y_t) + y_\eta(x_t - u)) v_\xi + (x_\xi(y_t - v) + y_\xi(u - x_t)) v_\eta] = 0 \quad (\text{b.4})$$

Las ecuaciones (b.3) y (b.4) se pueden escribir como:

$$(u_t)_{\xi\eta} + A u_\xi + B u_\eta = 0 \quad (\text{b.5})$$

$$(v_t)_{\xi\eta} + A v_\xi + B v_\eta = 0 \quad (\text{b.6})$$

donde :

$$A = -\frac{1}{J} [x_\eta(v - y_t) + y_\eta(x_t - u)] \quad (\text{b.7})$$

$$B = -\frac{1}{J} [x_\xi(y_t - v) + y_\xi(u - x_t)] \quad (\text{b.8})$$

Las ecuaciones (b.5) a (b.8) corresponden a las ecuaciones 15 a 18 del capítulo 3, las cuales se resuelven tratando por separado cada dirección curvilínea; a partir de las ecs (b.5) y (b.6) en la dirección  $\xi$ , se obtiene :

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} + A^n u_\xi^n = 0 \quad (\text{b.9})$$

$$\frac{v^* - v^n}{\Delta t} + A^n v_\xi^n = 0 \quad (\text{b.10})$$

Las cuales se resuelven de manera explícita para obtener la primera aproximación de los componentes de velocidad denotadas por  $u^*$  y  $v^*$ , y que a su vez se usan para resolver (b.5) y (b.6) en la dirección  $\eta$  :

$$\frac{u^{n+1/3} - u^*}{\Delta t} + B^* u_\eta^* = 0 \quad (\text{b.11})$$

$$\frac{v^{n+1/3} - v^*}{\Delta t} + B^* v_\eta^* = 0 \quad (\text{b.12})$$

En las ecs (b.9) a (b.12) y que corresponden a las ecs 30-33 del capítulo 3, los coeficientes  $A$  y  $B$  se calculan a partir de las expresiones (b.7) y (b.8), respectivamente; los superíndices  $n+1/3$  son indicativos y denotan los valores de los componentes de velocidad tras el cálculo del proceso advectivo. Los valores  $u^{n+1/3}$  y  $v^{n+1/3}$  se usan como condiciones iniciales para resolver la etapa difusiva en la que se calculan  $u^{n+2/3}$  y  $v^{n+2/3}$ .

## Apéndice C

### TRANSFORMACIÓN CURVILÍNEA DE LA ETAPA DIFUSIVA

Las ecuaciones diferenciales parciales que representan el proceso difusivo referidas a un sistema cartesiano rectangular:

$$u_t = \nu_t (u_{xx} + u_{yy}) \quad (\text{c.1})$$

$$v_t = \nu_t (v_{xx} + v_{yy}) \quad (\text{c.2})$$

Transformando la ec (c.1)

$$\begin{aligned} (u_t)_{\xi\eta} - \frac{1}{J} \left[ (u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi)(x_t)_{\xi\eta} + (u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta)(y_t)_{\xi\eta} \right] = & \left\{ \frac{1}{J^2} (u_{\xi\xi} y_\eta^2 - 2u_{\xi\eta} y_\xi y_\eta + u_{\eta\eta} y_\xi^2) + \right. \\ & + \frac{1}{J^3} \left[ (y_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta y_{\xi\eta} + y_\xi^2 y_{\eta\eta}) (u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi) + (y_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta x_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta}) (u_\eta y_\xi - u_\xi y_\eta) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} (u_{\xi\xi} x_\eta^2 - 2u_{\xi\eta} x_\xi x_\eta + u_{\eta\eta} x_\xi^2) + \frac{1}{J^3} \left[ (x_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta y_{\xi\eta} + x_\xi^2 y_{\eta\eta}) (u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi) + \right. \\ & \left. \left. (x_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta x_{\xi\eta} + x_\xi^2 x_{\eta\eta}) (u_\eta y_\xi - u_\xi y_\eta) \right] \right\} \nu_t \end{aligned} \quad (\text{c.3})$$

Agrupando:

$$\begin{aligned} (u_t)_{\xi\eta} - \frac{1}{J} \left[ (u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi)(x_t)_{\xi\eta} + (u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta)(y_t)_{\xi\eta} \right] = \\ = \nu_t \left[ \frac{1}{J^2} (g_{22} u_{\xi\xi} - 2g_{12} u_{\xi\eta} + g_{11} u_{\eta\eta}) + \frac{1}{J^3} (g_{22} y_{\xi\xi} - 2g_{12} y_{\xi\eta} + g_{11} y_{\eta\eta}) (u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{J^3} (g_{22} x_{\xi\xi} - 2g_{12} x_{\xi\eta} + g_{11} x_{\eta\eta}) (u_\eta y_\xi - u_\xi y_\eta) \right] \end{aligned} \quad (\text{c.4})$$

De manera similar la ec (c.2):

$$\begin{aligned}
 (v_t)_{\xi\eta} - \frac{1}{j} [(v_\xi y_\eta - v_\eta y_\xi)(x_t)_{\xi\eta} + (v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta)(y_t)_{\xi\eta}] = \\
 = v_t \left[ \frac{1}{j^2} (g_{22} v_{\xi\xi} - 2g_{12} v_{\xi\eta} + g_{11} v_{\eta\eta}) + \frac{1}{j^3} (g_{22} y_{\xi\xi} - 2g_{12} y_{\xi\eta} + g_{11} y_{\eta\eta}) (v_\xi x_\eta - v_\eta x_\xi) + \right. \\
 \left. + \frac{1}{j^3} (g_{22} x_{\xi\xi} - 2g_{12} x_{\xi\eta} + g_{11} x_{\eta\eta}) (v_\eta y_\xi - v_\xi y_\eta) \right] \quad (c.5)
 \end{aligned}$$

Si se considera que el movimiento de la malla ya fue considerado durante la etapa convectiva, en este caso  $x_t = y_t = 0$  y las ecuaciones (c.4) y (c.5) se pueden agrupar como (ecs 19-29 del cap 3):

$$(u_t)_{\xi\eta} = \theta u_\xi + \beta u_\eta + E \quad (c.6)$$

$$(v_t)_{\xi\eta} = \theta v_\xi + \beta v_\eta + F \quad (c.7)$$

donde :

$$\theta = Cx_\eta - Dy_\eta \quad (c.8)$$

$$\beta = Dy_\xi - Cx_\xi \quad (c.9)$$

$$C = \frac{v_t}{j^3} (g_{22} y_{\xi\xi} - 2g_{12} y_{\xi\eta} + g_{11} y_{\eta\eta}) \quad (c.10)$$

$$D = \frac{v_t}{j^3} (g_{22} x_{\xi\xi} - 2g_{12} x_{\xi\eta} + g_{11} x_{\eta\eta}) \quad (c.11)$$

$$E = \frac{v_t}{j^2} (g_{22} u_{\xi\xi} - 2g_{12} u_{\xi\eta} + g_{11} u_{\eta\eta}) \quad (c.12)$$

$$F = \frac{v_t}{j^2} (g_{22} v_{\xi\xi} - 2g_{12} v_{\xi\eta} + g_{11} v_{\eta\eta}) \quad (c.13)$$

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (c.14)$$

$$g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (c.15)$$

$$g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad (c.16)$$

donde  $g_{11}$ ,  $g_{12}$  y  $g_{22}$  representan los componentes de la matriz métrica de transformación.

Suponiendo que la malla de cálculo es aproximadamente ortogonal, las ecs (c.6) y (c.7) se simplifican, respectivamente (ecs 34 y 35 cap 3):



$$(u_t)_{\xi\eta} = \frac{v_t}{j^2} (g_{22} u_{\xi\xi} + g_{11} u_{\eta\eta}) \quad (\text{c.17})$$

$$(v_t)_{\xi\eta} = \frac{v_t}{j^2} (g_{22} v_{\xi\xi} + g_{11} v_{\eta\eta}) \quad (\text{c.18})$$

Las ecs (c.17) y (c.18) son independientes entre si y se resuelven usando un método en dos etapas en direcciones alternadas como el propuesto por Peaceman y Rachford (1955). Para la ecuación (c.17) :

$$u^* - u^{n+1/3} = \frac{1}{2} v_t \Delta t \left[ g_{22}^n u_{\xi\xi}^* + g_{11}^n u_{\eta\eta}^{n+1/3} \right] \quad (\text{c.19})$$

$$u^{n+2/3} - u^* = \frac{1}{2} v_t \Delta t \left[ g_{22}^n u_{\xi\xi}^* + g_{11}^n u_{\eta\eta}^{n+2/3} \right] \quad (\text{c.20})$$

que corresponden a las ecs 36 y 36' del capítulo 3.

Mientras que para la ecuación 35 :

$$v^* - v^{n+1/3} = \frac{1}{2} v_t \Delta t \left[ g_{22}^n v_{\xi\xi}^* + g_{11}^n v_{\eta\eta}^{n+1/3} \right] \quad (\text{c.21})$$

$$v^{n+2/3} - v^* = \frac{1}{2} v_t \Delta t \left[ g_{22}^n v_{\xi\xi}^* + g_{11}^n v_{\eta\eta}^{n+2/3} \right] \quad (\text{c.22})$$

que corresponden a las ecs 37 y 37' del capítulo 3.

La solución de las ecs (c.19) a (c.22), se reduce a sistemas matriciales tridiagonales los cuales se resuelven usando una eficiente y económica rutina basada en el método de doble barrido (William *et al*, 1986).

## Apéndice D

### LINEALIZACIÓN DE LA ETAPA DE PROPAGACIÓN

Desarrollando en coordenadas curvilíneas los operadores divergencia de  $\bar{U}$  que aparecen en la ecuación 38 del capítulo 3 se obtiene :

$$\alpha \operatorname{div} \mathbf{U}^{n+1} = \frac{\alpha}{J} [y_{\eta} U_{\xi}^{n+1} - y_{\xi} U_{\eta}^{n+1} + x_{\xi} V_{\eta}^{n+1} - x_{\eta} V_{\xi}^{n+1}] \quad (\text{d.1})$$

$$(1-\alpha) \operatorname{div} \mathbf{U}^n = \frac{(1-\alpha)}{J} [y_{\eta} U_{\xi}^n - y_{\xi} U_{\eta}^n + x_{\xi} V_{\eta}^n - x_{\eta} V_{\xi}^n] \quad (\text{d.2})$$

Adicionalmente, la variación en el tiempo de la cota de la superficie libre del agua, H, se escribe:

$$(H_t)_{(x,y)} = (H_t)_{(\xi,\eta)} + \frac{1}{J} [(H_{\xi} x_{\eta} - H_{\eta} x_{\xi})(y_t)_{(\xi,\eta)} - (H_{\xi} y_{\eta} - H_{\eta} y_{\xi})(x_t)_{(\xi,\eta)}] \quad (\text{d.3})$$

De manera que la ecuación 38 se escribe (ec 41 cap 3)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta H}{\Delta t} \right)_{(\xi,\eta)} + \frac{\alpha}{J} (y_{\eta} U_{\xi}^{n+1} - x_{\eta} V_{\xi}^{n+1}) + \frac{1}{J} (x_{\eta} y_t - y_{\eta} x_t) H_{\xi} + \frac{(1-\alpha)}{J} (y_{\eta} U_{\xi}^n - x_{\eta} V_{\xi}^n) + \\ \frac{\alpha}{J} (x_{\xi} V_{\eta}^{n+1} - y_{\xi} U_{\eta}^{n+1}) + \frac{1}{J} (y_{\xi} x_t - x_{\xi} y_t) H_{\eta} + \frac{(1-\alpha)}{J} (x_{\xi} V_{\eta}^n - y_{\xi} U_{\eta}^n) = 0 \end{aligned} \quad (\text{d.4})$$

Las derivadas de los flujos unitarios U y V se pueden obtener a partir de la ec 42 del cap 3 en la cual:

$$\operatorname{grad} H^{n+1} = \frac{1}{J} [(y_{\eta} H_{\xi}^{n+1} - y_{\xi} H_{\eta}^{n+1})\hat{i} + (x_{\xi} H_{\eta}^{n+1} - x_{\eta} H_{\xi}^{n+1})\hat{j}] \quad (\text{d.5})$$

$$\operatorname{grad} H^n = \frac{1}{J} [(y_{\eta} H_{\xi}^n - y_{\xi} H_{\eta}^n)\hat{i} + (x_{\xi} H_{\eta}^n - x_{\eta} H_{\xi}^n)\hat{j}] \quad (\text{d.6})$$

Considerando las ecs (d.5) y (d.6), separando el componente X de la ec 42 del cap 3:

$$U^{n+1} = \frac{U^{n+2/3}}{C_1} - \frac{g\Delta t}{C_1} \left[ \frac{\alpha h^{n+1}}{J} (y_\eta H_\xi^{n+1} - y_\xi H_\eta^{n+1}) + \frac{(1-\alpha)h^n}{J} (y_\eta H_\xi^n - y_\xi H_\eta^n) \right] \quad (d.7)$$

En esta última ecuación si se considera que  $H^{n+1} = H^n + \Delta H$  y  $h^{n+1} = h^n + \Delta H$

$$U^{n+1} = \frac{U^{n+2/3}}{C_1} - \frac{g\Delta t}{C_1} \frac{\alpha}{J} y_\eta (h^n \Delta H_\xi + H_\xi^n \Delta H_\xi) + \frac{g\Delta t}{C_1} \frac{\alpha}{J} y_\xi (h^n \Delta H_\eta + Z_\eta^n \Delta H) + \frac{g\Delta t}{C_1} \frac{h^n}{J} (y_\xi H_\eta^n + y_\eta H_\xi^n) \quad (d.8)$$

O de manera simplificada:

$$U^{n+1} = \alpha_1 \Delta H_\xi + \beta_1 \Delta H + \gamma_1 + \alpha_2 \Delta H_\eta + \beta_2 \Delta H + \gamma_2 \quad (d.9)$$

Similarmente en el componente Y:

$$V^{n+1} = \alpha_3 \Delta H_\eta + \beta_3 \Delta H + \gamma_3 + \alpha_4 \Delta H_\xi + \beta_4 \Delta H + \gamma_4 \quad (d.10)$$

con :

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha g \Delta t}{C_1 J} y_\eta h^n \quad (d.11)$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{h^n} H_\xi^n \quad (d.12)$$

$$\gamma_1 = \frac{U^{n+2/3}}{C_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha} H_\xi^n = \frac{U^{n+2/3}}{C_1} + \frac{\beta_1 h^n}{\alpha} \quad (d.13)$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha g \Delta t}{C_1 J} y_\xi h^n \quad (d.14)$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2}{h^n} H_\eta^n \quad (d.15)$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta_2 h^n}{\alpha} \quad (d.16)$$

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha g \Delta t}{C_1 J} x_\xi h^n \quad (d.17)$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha_3}{h^n} H_\eta^n \quad (d.18)$$

$$\gamma_3 = \frac{V^{n+2/3}}{C_1} + \frac{\beta_3 h^n}{\alpha} \quad (\text{d.19})$$

$$\alpha_4 = \frac{\alpha g \Delta t}{C_1 J} \gamma_\eta h^n \quad (\text{d.20})$$

$$\beta_4 = \frac{\alpha_4}{h^n} H_\xi^n \quad (\text{d.21})$$

$$\gamma_4 = \frac{\beta_4 h^n}{\alpha} \quad (\text{d.22})$$

La discretización de la ec 41 del cap 3, la cual puede desarrollarse linealmente en términos del cambio en la cota de la superficie libre del agua usando las expresiones (d.9) – (d.22). Tal como se indicó, esta ecuación se discretiza alrededor de los nodos de la malla H de la figura 3.3 con la intención de resolver la etapa propagativa. Los detalles se presenta en el apéndice E.

Apéndice E

DISCRETIZACIÓN DE LA ETAPA DE PROPAGACIÓN

El proceso de propagación descrito por la ecuación 41 del capítulo 3 representa la parte medular del modelo propuesto. La solución de dicha ecuación se realiza a partir de un proceso iterativo con realimentación alternando las direcciones de barrido (Benqué *et al*, 1982). La estructura simétrica de la ecuación 41 permite separarla con facilidad en las direcciones curvilíneas  $\xi$  y  $\eta$ . Auxiliándonos de las ecuaciones (d.9) y (d.10) del apéndice D y discretizando alrededor de los nodos de la malla  $H$  (figura 3.3) denotados por "xC" en la figura e.1,

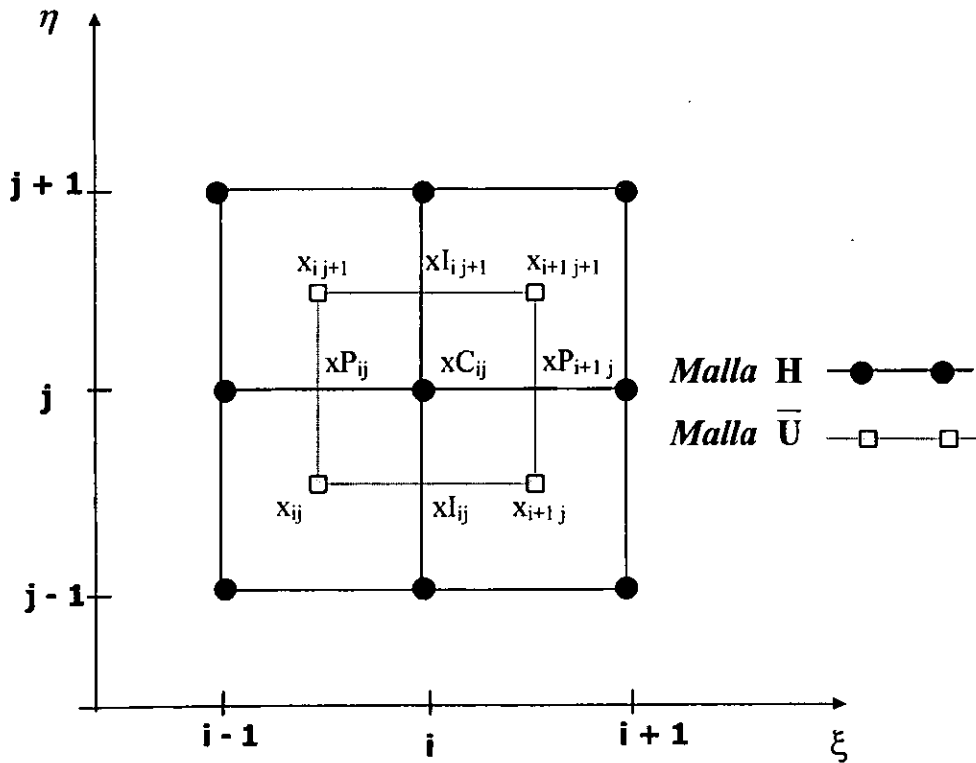


Figura e.1. Celda de cálculo

la ecuación 41 del capítulo 3 puede, entonces, escribirse de la siguiente manera (ec 44, cap 3) :

$$a_{1ij}\Delta H_{i-1} + b_{1ij}\Delta H_{ij} + c_{1ij}\Delta H_{i+1j} + d_{1ij} = a_{2ij}\Delta H_{ij-1} + b_{2ij}\Delta H_{ij} + c_{2ij}\Delta H_{ij+1} + d_{2ij} \quad (\text{e.1})$$

donde :

$$a_{1ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\eta} (\alpha_{1ij} - m_{i-1/2} (\beta_{1ij} + \beta_{2ij})) - x_{\eta} (\alpha_{4ij} - m_{i-1/2} (\beta_{3ij} + \beta_{4ij})) \right] \quad (\text{e.2})$$

$$b_{1ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\eta} (-\alpha_{1i+1j} + (1 - m_{i+1/2}) (\beta_{1i+1j} + \beta_{2i+1j})) - \alpha_{1ij} - (1 - m_{i-1/2}) (\beta_{1ij} + \beta_{2ij}) - \right. \\ \left. - x_{\eta} (-\alpha_{4i+1j} + (1 - m_{i+1/2}) (\beta_{3i+1j} + \beta_{4i+1j})) - \alpha_{4ij} - (1 - m_{i-1/2}) (\beta_{3ij} + \beta_{4ij}) \right] \quad (\text{e.3})$$

$$c_{1ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\eta} (\alpha_{1i+1j} + m_{i+1/2} (\beta_{1i+1j} + \beta_{2i+1j})) - x_{\eta} (\alpha_{4i+1j} + m_{i+1/2} (\beta_{3i+1j} + \beta_{4i+1j})) \right] \quad (\text{e.4})$$

$$d_{1ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\eta} (\gamma_{1i+1j} + \gamma_{2i+1j} - \gamma_{1ij} - \gamma_{2ij}) - x_{\eta} (\gamma_{3i+1j} + \gamma_{4i+1j} - \gamma_{3ij} - \gamma_{4ij}) \right] + \\ + \frac{(1-\alpha)}{J_{ij}} \left[ y_{\eta} (UM_{i+1j}^n - UM_{ij}^n) - x_{\eta} (VM_{i+1j}^n - VM_{ij}^n) \right] \quad (\text{e.5})$$

$$a_{2ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ (\alpha_{2ij} - m_{j-1/2} (\beta_{1ij} + \beta_{2ij})) y_{\xi} - x_{\xi} (\alpha_{3ij} - m_{j-1/2} (\beta_{3ij} + \beta_{4ij})) \right] \quad (\text{e.6})$$

$$b_{2ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\xi} (-\alpha_{2ij+1} + (1 - m_{j+1/2}) (\beta_{1ij+1} + \beta_{2ij+1})) - \alpha_{2ij} - (1 - m_{j-1/2}) (\beta_{1ij} + \beta_{2ij}) - \right. \\ \left. - x_{\xi} (-\alpha_{3ij+1} + (1 - m_{j+1/2}) (\beta_{3ij+1} + \beta_{4ij+1})) - \alpha_{3ij} - (1 - m_{j-1/2}) (\beta_{3ij} + \beta_{4ij}) \right] \quad (\text{e.7})$$

$$c_{2ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\xi} (\alpha_{2ij+1} + m_{j+1/2} (\beta_{1ij+1} + \beta_{2ij+1})) - x_{\xi} (\alpha_{3ij+1} + m_{j+1/2} (\beta_{3ij+1} + \beta_{4ij+1})) \right] \quad (\text{e.8})$$

$$d_{2ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\xi} (\gamma_{1i+1j} + \gamma_{2i+1j} - \gamma_{1ij} - \gamma_{2ij}) - x_{\xi} (\gamma_{3i+1j} + \gamma_{4i+1j} - \gamma_{3ij} - \gamma_{4ij}) \right] + \\ + \frac{(1-\alpha)}{J_{ij}} \left[ y_{\xi} (UM_{i+1j}^n - UM_{ij}^n) - x_{\xi} (VM_{i+1j}^n - VM_{ij}^n) \right] \quad (\text{e.9})$$

En las ecuaciones anteriores, *UM* y *VM* representan los flujos unitarios por unidad de ancho promediados en las caras *v* y en la cara *u* respectivamente y *J* representa al Jacobiano de la

transformación calculado en la celda que tiene como centro  $x_C$  (figura e.1). Por otra parte, los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$  tienen la forma general dada en las ecuaciones (d.11)-(d.22) del apéndice D.

Por su parte los factores de peso  $m$ , ponderan las distancias relativas de los puntos de la malla en el espacio físico. Para este trabajo, por ejemplo,  $m_{i+1/2}$  tiene la forma siguiente para un punto de la malla que tiene como centro  $x_{Cij}$ :

$$m_{i+1/2} = \frac{\sqrt{(x_{Cij} - x_{P_{i+1j}})^2 + (y_{Cij} - y_{P_{i+1j}})^2}}{\sqrt{(x_{Cij} - x_{P_{i+1j}})^2 + (y_{Cij} - y_{P_{i+1j}})^2} + \sqrt{(x_{P_{i+1j}} - x_{C_{i+1j}})^2 + (y_{P_{i+1j}} - y_{C_{i+1j}})^2}} \quad (\text{e.10})$$

El procedimiento iterativo con realimentación con el que se resuelve la ecuación e.1 ya fue comentado en el capítulo 3 (apartado 3.3.3).

A p é n d i c e F

CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA ETAPA DE PROPAGACIÓN

*Aguas arriba (dirección  $\xi$ , gasto conocido)*

$U_{ij}^{n+1}$  &  $VM_{ij}^{n+1}$  se asignan directamente y las ecuaciones e.2 a e.5 del apéndice E se escriben:

$$a_{1ij} = 0 \quad (f.1)$$

$$b_{1ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\eta} (-\alpha_{1i+1j} + (1 - m_{i+1/2})(\beta_{1i+1j} + \beta_{2i+1j})) - x_{\eta} (-\alpha_{4i+1j} + (1 - m_{i+1/2})(\beta_{3i+1j} + \beta_{4i+1j})) \right] \quad (f.2)$$

$$c_{1ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\eta} (\alpha_{1i+1j} + m_{i+1/2}(\beta_{1i+1j} + \beta_{2i+1j})) - x_{\eta} (\alpha_{4i+1j} + m_{i+1/2}(\beta_{3i+1j} + \beta_{4i+1j})) \right] \quad (f.3)$$

$$d_{1ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ y_{\eta} (\gamma_{1i+1j} + \gamma_{2i+1j} - U_{ij}^{n+1}) - x_{\eta} (\gamma_{3i+1j} + \gamma_{4i+1j}) \right] + \frac{(1-\alpha)}{J_{ij}} \left[ y_{\eta} (U_{i+1j}^n - U_{ij}^n) - x_{\eta} (VM_{i+1j}^n) \right] \quad (f.4)$$

*Aguas abajo (dirección  $\xi$ , nivel conocido)*

Para este caso las ecuaciones e.2 a e.5 se calculan igual que en el apéndice E. Debe tenerse en cuenta que el término  $c_{1ij}\Delta H_{i+1j}$  de la ecuación e.1 es conocido para este caso.

*Margen derecha (dirección  $\eta$ , flujo nulo y libre deslizamiento)*

Si  $\theta = 0^\circ$  ó  $\theta = 180^\circ$  ( $\theta$  se definió en el apartado 3.4.2) entonces  $V_{ij}^{n+1} = 0$ ;  $UM_{ij}^{n+1} = UM_{ij+1}^{n+1}$  de manera que las ecuaciones e.6 a e.9 del apéndice E se escriben:

$$a_{2ij} = 0 \quad (f.5)$$

$$b_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ -x_{\xi} (-\alpha_{3ij+1} + (1 - m_{j+1/2})(\beta_{3ij+1} + \beta_{4ij+1})) - \alpha_{3ij} - (1 - m_{j-1/2})(\beta_{3ij} + \beta_{4ij}) \right] \quad (f.6)$$



$$c_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ -x_{\xi} (\alpha_{3ij+1} - m_{j+1/2} (\beta_{3ij+1} + \beta_{4ij+1})) \right] \quad (\text{f.7})$$

$$d_{2ij} = \frac{\alpha}{J_{ij}} \left[ -x_{\xi} (\gamma_{3ij+1} + \gamma_{4ij+1}) \right] + \frac{(1-\alpha)}{J_{ij}} \left[ -x_{\xi} (V_{ij+1}^n) \right] \quad (\text{f.8})$$

De otra forma, a partir de la ecuación 50 y 51 del capítulo 3 se propone:

$$UM_{ij}^{n+1} = \frac{q_t \cos \theta}{\cos 2\theta} \quad (\text{f.9})$$

$$V_{ij}^{n+1} = -\frac{q_t \sin \theta}{\cos 2\theta} \quad (\text{f.9}')$$

En las cuales  $q_t$  representa el flujo tangente asignado a la cara a partir de valores interiores. Con lo anterior, las ecuaciones e.6 a e.9 del apéndice E se escriben:

$$a_{2ij} = 0 \quad (\text{f.10})$$

$$b_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ y_{\xi} (-\alpha_{2ij+1} + (1 - m_{j+1/2}) (\beta_{1ij+1} + \beta_{2ij+1})) - x_{\xi} (-\alpha_{3j+1} + (1 - m_{j+1/2}) (\beta_{3j+1} + \beta_{4j+1})) \right] + \quad (\text{f.11})$$

$$\frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ y_{\xi} U_{j+1}^{n+1} - x_{\xi} V_{j+1}^{n+1} + x_{\xi} V_j^{n+1} - y_{\xi} U_j^{n+1} \right] \quad (\text{f.12})$$

$$c_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ y_{\xi} (\alpha_{2ij+1} + m_{j+1/2} (\beta_{1ij+1} + \beta_{2ij+1})) - x_{\xi} (\alpha_{3ij+1} + m_{j+1/2} (\beta_{3j+1} + \beta_{4ij+1})) \right] \quad (\text{f.12})$$

$$d_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ y_{\xi} (\gamma_{1ij+1} + \gamma_{2ij+1}) - x_{\xi} (\gamma_{3ij+1} + \gamma_{4ij+1}) \right] + \frac{(1-\alpha)}{JC_{ij}} \left[ y_{\xi} (UM_{ij+1}^n - UM_j^n) - x_{\xi} (V_{ij+1}^n - V_j^n) \right] \quad (\text{f.13})$$

*Margen izquierda (dirección  $\eta$ , flujo nulo y libre deslizamiento)*

Si  $\theta = 0^\circ$  ó  $\theta = 180^\circ$  entonces  $V_{ij+1}^{n+1} = 0$ ;  $UM_{ij+1}^{n+1} = UM_j^{n+1}$  de manera que las ecuaciones e.6 a e.9 del apéndice E se escriben:

$$a_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ -x_{\xi} (\alpha_{3ij} - m_{j-1/2} (\beta_{3ij} + \beta_{4ij})) \right] \quad (\text{f.14})$$

$$b_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ -x_{\xi} \left( -\alpha_{3ij} - (1 - m_{j-1/2}) (\beta_{3ij} + \beta_{4ij}) \right) \right] \quad (\text{f.15})$$

$$c_{2ij} = 0 \quad (\text{f.16})$$

$$d_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ -x_{\xi} (\gamma_{3ij} + \gamma_{4ij}) \right] + \frac{(1 - \alpha)}{JC_{ij}} \left[ x_{\xi} (V_{ij}^n) \right] \quad (\text{f.17})$$

De otra forma, a partir de la ecuación 50 y 51 del capítulo 3 se propone:

$$UM_{ij+1}^{n+1} = \frac{q_t \cos \theta}{\cos 2\theta} \quad (\text{f.18})$$

$$V_{ij+1}^{n+1} = -\frac{q_t \sin \theta}{\cos 2\theta} \quad (\text{f.18'})$$

En las cuales  $q_t$  representa el flujo tangente asignado a la cara a partir de valores interiores. Con lo anterior, las ecuaciones e.6 a e.9 del apéndice E se escriben:

$$a_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ y_{\xi} (\alpha_{2ij} - m_{ij-1/2} (\beta_{1ij} + \beta_{2ij})) - x_{\xi} (\alpha_{3ij} - m_{ij-1/2} (\beta_{3ij} + \beta_{4ij})) \right] \quad (\text{f.19})$$

$$b_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ y_{\xi} \left( -\alpha_{2ij} - (1 - m_{ij+1/2}) (\beta_{1ij} + \beta_{2ij}) \right) - x_{\xi} \left( -\alpha_{3ij} - (1 - m_{ij+1/2}) (\beta_{3ij} + \beta_{4ij}) \right) \right] \quad (\text{f.20})$$

$$c_{2ij} = 0 \quad (\text{f.21})$$

$$d_{2ij} = \frac{\alpha}{JC_{ij}} \left[ y_{\xi} (-\gamma_{1ij} - \gamma_{2ij}) - x_{\xi} (-\gamma_{3ij} - \gamma_{4ij}) \right] + \frac{(1 - \alpha)}{J} \left[ y_{\xi} (UM_{j+1}^n - UM_{ij}^n) - x_{\xi} (V_{j+1}^n - V_{ij}^n) \right] \quad (\text{f.22})$$

## TRABAJOS PUBLICADOS A PARTIR DE ESTE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

- Jiménez, A, M. Berezowsky, G. Soto, F. Rivera, (1997). *Cálculo del campo de velocidades en cuerpos de agua con modelo matemático bidimensional en coordenadas curvilíneas adaptables (Vol. 3)*. Reporte final del proyecto de investigación No. 0641P-A9506 patrocinado por el CONACYT. Instituto de Ingeniería UNAM.
- Alarcón, P, M. Berezowsky, F. Rivera, G. Soto, (1998). *Determinación de la forma de la zona inundada en flujos bidimensionales: análisis de sensibilidad*. Memorias del XVIII Congreso latinoamericano de hidráulica, p. 135-142. Oaxaca Oax., México.
- Berezowsky, M, G. Soto, (1999). *Towards an adaptive grid procedure for river flooding development*. Memorias del XXVIII IAHR Congress, disponibles en disco compacto. Graz, Austria.
- Soto, G, M. Berezowsky, (1999). *A 2D adaptive curvilinear grid method for shallow water flows*. Memorias del XIII International Conference on Computational Methods in Water Resources, p. 937-941 vol. 2, Calgary, Alberta, Canada.
- Rivera, F, M Berezowsky, G Soto, (2000). *Determinación del cambio granulométrico asociado al movimiento del fondo en ríos*. Memorias del XIX Congreso latinoamericano de hidráulica, Pp. 229-237, tomo I, Córdoba, Argentina.
- Soto, G, M Berezowsky, F Rivera, (2000). *Modelo hidrodinámico bidimensional adaptable para aguas poco profundas*. Memorias del XIX Congreso latinoamericano de hidráulica, Pp. 461-470, tomo III, Córdoba, Argentina.
- Soto,G, F Rivera, (2000). *Estudio experimental de planicies inundables*. Memorias del XVI Congreso nacional de hidráulica, Pp 833-838, Morelia, Mich, México.
- Rivera, F, G Soto, (2000). *Modelación experimental de fondo móvil*. Memorias del XVI Congreso nacional de hidráulica, Pp.839-844, Morelia, Mich, México.
- Rivera, F, G Soto, (2000). *Modelación del movimiento de fondo y determinación de la granulometría en ríos con lechos de sedimentos heterogéneos*. Estudio experimental de planicies inundables. Memorias del XVI Congreso nacional de hidráulica, Pp 701-706, Morelia, Mich, México.

## BIBLIOGRAFÍA

- Abbot, MB, 1979. *Computational hydraulics. Elements of the theory of free surface flows*. Pitman Publishing, London.
- Akanabi, AA, ND Katopodes, 1988. *Model for flood propagation on initially dry land*. J. HYDRAUL. ENG., vol. 114, no. 7, pp. 689-706.
- Alarcón, P, M Berezowsky, F Rivera, G Soto, 1998. *Determinación de la zona inundada en flujos bidimensionales: análisis de sensibilidad*. Procc of the XVIII Latin-american Hydraulic Congress, Vol. 1, 135-142, Oaxaca, México.
- Anderson, JD, 1995. *Computational fluid dynamics, the basics with applications*. Mc Graw-Hill.
- Ashby, WR, 1973. *An introduction to Cybernetics*. Chapman&Hall Ltd, London.
- Åström, KL, B Wittenmark, 1989. *Adaptive Control*. Addison Wesley Publishing Company, USA.
- Balzano, A, 1998. *Evaluation of methods for numerical simulation of wetting and drying in shallow water flow models*, Coastal Engineering, Vol. 34, 83-107.
- Benqué, JP, JA Cunge, J Feuillet, A Hauguel, FM Holly, 1982. *New method for tidal current computation*, J. of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., ASCE, Vol. 108, No. WW3, 396-417.
- Benqué, JP, JA Cunge, J Feuillet, A Hauguel, 1982 b. *Engineering applications of computational hydraulics Vol 2*. Pitman Advanced Publishing Program, London.
- Berezowsky, M, 1992. *Hyperbolic grid generation for surface and subsurface modeling*. Numerical Methods in Water Resources, vol. 9(1), pp. 651-658.
- Berezowsky, M, AA Jiménez, R Mendoza, 1998. *Computation of 2D free-surface flow and the shape of the control volume*. Procc of the XII Int. Conf. on Computational Methods in Water Resources, Vol. 2, 443-450, Crete, Greece
- Castañedo, S, 1997. *Estudio del modelado numérico de zonas inundables*. Tesina de Magister. Universidad de Cantabria, Departamento de Ciencias y Técnicas del Agua y del Medio

Ambiente, España.

Chaudry, MH, 1993. *Open channel flow*. Prentice-Hall, New Jersey.

Chippada, S, B Ramaswamy, MF Wheeler, 1994. *Numerical simulation of hydraulic jump*. Int. J. Numerical Methods Eng., vol. 37, pp. 1381-1397.

Choi, S, MH García, 1996. *Arbitrary lagrangian-Eulerian approach for finite element modeling of two-dimensional turbidity currents*. Water International, vol. 21, pp. 175-182.

Chow, VT, 1959. *Open channel hydraulics*. McGraw Hill, New York.

Davies, AM, JE Jones, J Xing, 1997 a. *Review of recent developments in tidal hydrodynamic modeling. 1: Spectral models*. J. HYDRAUL. ENG., vol. 123, no. 4, pp. 278-292.

Davies, AM, JE Jones, J Xing, 1997 b. *Review of recent developments in tidal hydrodynamic modeling. 2: Turbulence energy models*. J. HYDRAUL. ENG., vol. 123, no. 4, pp. 293-302.

Grilli, ST, R Subramanya, 1996. *Numerical model of wave breaking induced by fixed or moving boundaries*. Computational °Mechanics, vol. 17, pp. 374-391.

Haeuser, J, HG Paap, D Eppel, A Muller, 1985. *Solution of shallow water equations for complex flow domains via boundary-fitted coordinates*. Int. J. For numer. Methods in Fluids, 5, 727-744.

Hu, S, SC Kot, 1997. *Numerical model of tides in pearl river estuary with moving boundary*. J. HYDRAUL. ENG., vol. 123, no. 1, pp. 21-29.

Jiménez, A, M Berezowsky, 1996. *Discusión sobre métodos de transformación de las ecuaciones fundamentales a coordenadas curvilíneas*, Memorias del XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Vol. 6, 313-322, Guayaquil, Ecuador.

Jiménez, AA, 2000. *Cálculo del flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales*. Tesis de doctorado. DEPMI-UNAM.

Johnson, BH, JF Thompson, 1978. *A discussion of boundary-fitted coordinate systems and their aplicability to the numerical modeling of hydraulic problems*. Department of the Army, USA.

Kutija, V, HTM Hong, 1996. *A numerical model for assessing the additional resistance to flow introduced by flexible vegetation*, Journal of Hydraulic Research, Vol 34, No. 1 , pp. 99-114.

Leschziner, MA, W Rodi, 1979. *Calculation of strongly curved open channel flow*. J of the

- Hydraulics Division, ASCE, vol 105(10), pp 1297-1314.
- Mejía, MA, M Berezowsky, 1996. *Generación numérica de mallas en coordenadas curvilíneas para el cálculo de flujos a superficie libre*. Ingeniería Hidráulica en México, vol. 11(3), pp. 13-24.
- Meselhe, EA, F Sotiropoulos, 2000. *Tridimensional numerical model for open channels with free-surface variations*. J of Hydraulic Research, vol 38(2)
- Molls, TR, 1992. *A general two-dimensional free-surface flow model for solving the depth-averaged equations using an implicit ADI scheme*. UMI dissertation services. PhD tesis. Washington State University.
- Nielsen, P, O Skovgaard, 1990. *The effect of using non-orthogonal boundary fitted grids solving the shallow water equations*. Int. J. For numer. Methods in Fluids, 11, 177-188.
- Oey, LY, G Mellor, IR Hires, 1985. *A three-dimensional simulation of the Hudson-Raritan estuary, part II: comparasion with observation*. J. Phys. Oceanography, 15(12), 1693-1709.
- Peaceman, DW, HH Jr. Rachfor, 1955. *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*. J. Soc. Industrial Appl. Math., vol 3, p. 28
- Rheinboldt, WC, 1983. *Feedback Systems and adaptivity for Numerical Computations*, in Babuska, Y, Chandra, J. and Flaherty, J.E. (Editors), 1. *Workshop on adaptive computational methods for partial differential equations*, pp.3 - 19, SIAM, Philadelphia.
- Rosovskii, IL, 1957. *Flow of water in bends of open channels*. Israel program for scientific transltion, Jerusalem.
- Shaoling, H, SC Kot, 1997. *Numerical model of tides in pearl river estuary with moving boundary*. J. HYDRAUL. ENG., vol. 123, no. 1, pp. 21-29.
- Spaulding, ML, 1984. *A vertical averaged circulation model using boundary-fitted coordinates*. J. Phys. Oceanography, 14, 973-982.
- Thacker, WC, 1980. *A brief review of techniques for generating irregular computational grids*. Int. J. Numerical Methods Eng., vol. 15, pp. 1335-1341.
- Thompson, JF, ZUA Warsi, CW Mastin, 1985. *Numerical grid generation, foundations and applications*. Elsevier, New York.

Toro, EF, 1998. *Shock-capturing methods for shallow fluids. Lecture notes for the short course: Computational Methods for free surface hydrodynamics*. Manchester Metropolitan University, England.

William, HP, PF Brian, AT Saul, TV William, 1986. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, USA, pag. 40-41.

Yanenko, NN, 1971. *The method of fractional steps*. Springer-Verlag, New York.

Zerroukat, M, CR Chatwin, 1994. *Computational moving boundary problems*. Research Studies Press LTD. John Wiley & Sons Inc. Great Britain.