

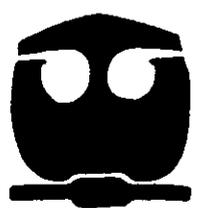


**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE QUÍMICA**

**“DESARROLLO DE UN NUEVO DISPOSITIVO PARA CARACTERIZAR LA EXTRACCIÓN DE CALOR EN BAÑOS DE TEMPLE”**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**INGENIERO QUÍMICO METALÚRGICO**  
P R E S E N T A :  
**JORGE SERGIO TÉLLEZ MARTÍNEZ**



MÉXICO, D. F.



**ESTUDIOS PROFESIONALES  
FACULTAD DE QUÍMICA**

2000



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado:

Presidente Prof. JOSÉ BERNARDO HERNÁNDEZ MORALES

Vocal Prof. VÍCTOR JORGE CORTÉS SUÁREZ

Secretario Prof. ALBERTO INGALLS CRUZ

1er Suplente Prof. SERGIO GARCÍA GALÁN

2º Suplente Prof. JUAN JOSÉ RUÍZ LÓPEZ

Sitio donde se desarrolló el tema:

EDIFICIO "D", FACULTAD DE QUÍMICA, U. N. A. M.

Y

ESPECIALIDADES TÉRMICAS, S.A. de C.V.

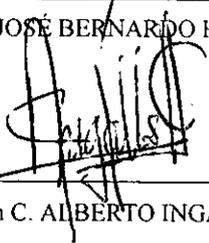
Asesor del tema:



---

DR. JOSÉ BERNARDO HERNÁNDEZ MORALES

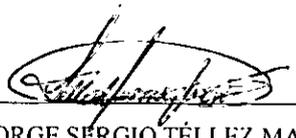
Supervisor técnico:



---

M. en C. ALBERTO INGALLS CRUZ

Sustentante:



---

JORGE SERGIO TÉLLEZ MARTÍNEZ

Dedico este trabajo de tesis a:

Una mujer que con su forma peculiarmente sabia de observar la vida me enseñó a sobrevivir.

*Alicia Martínez Rocha, mi madre.*

Un hombre que con espíritu de lucha, esfuerzo y sacrificio, me legó el carácter para enfrentar mis problemas.

*Sergio Téllez García, mi padre.*

Una linda mujer que compartió conmigo las experiencias de crecer juntos.

*C.P. Claudia Téllez Martínez, mi hermana.*

Una mujer excepcional y entusiasta.

*Lic. Elvira Mayén Lugo*

La *M. en C. Natalia E. De la Torre Aceves* por compartir conmigo su labor docente. Gracias por su apoyo, consejos e invaluable estima.

El *Dr. J. Bernardo Hernández Morales* por los conocimientos brindados, su valiosa ayuda profesional y, el dinamismo y accesibilidad en la realización de otros proyectos.

Mis *profesores y amigos*, con quienes conviví en la etapa de mi educación superior en esta honorable institución.

## Resumen

Las relaciones temperatura-tiempo en un proceso de enfriamiento (curvas de enfriamiento), son un método de análisis muy útil en la descripción de mecanismos de temple, constituyendo una herramienta importante en la caracterización de baños de temple debido a la sensibilidad a factores que afectan la habilidad de los medios de enfriamiento para extraer calor (tipo y propiedades físicas del medio de enfriamiento, temperatura y agitación en el baño). El control de la rapidez de transferencia de calor en un proceso de temple ayudará a producir las propiedades mecánicas deseadas en partes de acero tratadas térmicamente, como consecuencia de seleccionar el medio de enfriamiento más apropiado.

En la presente investigación probetas de aceros: 1) libre de intersticiales (IF), 2) inoxidable AISI 304 y 3) bajo carbono AISI 1018, se enfriaron en baños de temple comunes (aire forzado, aire quieto, aceite quieto y agua caliente quieta). Se construyeron probetas cilíndricas (12.7 mm de diámetro y 50.8 mm de longitud) instrumentadas con dos termopares (uno localizado en el centro geométrico de las probetas, y el otro a 1.5 mm de su superficie a media altura) para obtener curvas de enfriamiento. El flujo de calor por unidad de longitud como una función de la temperatura de superficie fue estimado resolviendo el problema inverso de conducción de calor (IHCP), utilizando la respuesta térmica cerca de la superficie de la probeta determinada experimentalmente. El programa de cómputo desarrollado para resolver el IHCP se incorporó dentro de una interfaz amigable al usuario para conducir el análisis de datos.

Basado en la respuesta térmica medida se concluye que el acero IF puede ser utilizado para aplicaciones de análisis de curva de enfriamiento. La ventaja principal de utilizar acero IF es que la conductividad térmica es similar a la de los aceros tratados térmicamente y permite mejores predicciones de la evolución del campo térmico durante las operaciones de temple. Para la rapidez de enfriamiento observada, el calor liberado por la transformación austenita - perlita en la probeta de acero IF no modifica significativamente la curva de enfriamiento y por lo tanto, no interfiere con el procedimiento de análisis de datos.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Antecedentes y Objetivos</b>	<b>5</b>
2.1	Objetivos . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Conta-C y WinProbe</b>	<b>12</b>
3.1	WinProbe . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Desarrollo Experimental</b>	<b>49</b>
4.1	Probetas . . . . .	49
4.2	Condiciones de temple . . . . .	50
4.3	Adquisición de datos . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>67</b>
	Bibliografía	69
	Apéndice A	72

Apéndice B

78

Apéndice C

95

# Lista de Figuras

3.1	Modelo experimental. . . . .	13
3.2	Modelo matemático. . . . .	14
3.3	Representación esquemática del problema inverso de conducción de calor (IHCP). . . . .	16
3.4	Flujo de calor por unidad de longitud en la frontera activa como una función del tiempo, obtenido resolviendo (a) DHCP (línea sólida) y (b) el IHCP (símbolos). El valor de $r$ es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos. . . . .	20
3.5	Temperatura de superficie como una función del tiempo, obtenida resolviendo (a) el DHCP (línea sólida) y (b) el IHCP (símbolos). El valor de $r$ es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos. . . . .	21
3.6	Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo (a) el DHCP (línea sólida), y el IHCP con (b) C.F.1: simetría en $r/R = 0$ (cuadros abiertos) y (c) C.F.1: respuesta de temperatura conocida en $r/R = 0$ (triángulos abiertos). El valor de $r$ es el número de pasos de tiempo futuros utilizados para los cálculos. . . . .	22

- 3.7 Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo el DHCP (línea sólida), y el IHCP (símbolos) con un único termopar en el centro  $r/R = 0$ . El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos;  $r = 2$  (círculos abiertos unidos por línea punteada),  $r = 4$  (triángulos abiertos) y  $r = 6$  (cuadrados abiertos). . . . . 23
- 3.8 Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo (a) el DHCP (línea sólida), y el IHCP (símbolos) con un único termopar en (b)  $r/R = 0.93$  (cuadrados abiertos), (c)  $r/R = 0$  (círculos abiertos unidos por línea punteada). El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos. . . . . 24
- 3.9 Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo (a) el DHCP (línea sólida), y el IHCP (símbolos) con un único termopar en (b)  $r/R = 0.75$  (cuadrados abiertos), (c)  $r/R = 0.5$  (triángulos abiertos) y (d)  $r/R = 0.25$  (círculos abiertos unidos por línea punteada), para una distribución nodal equidistante. El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos. . . . . 25
- 3.10 Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo (a) el DHCP (línea sólida), y (b) el IHCP (símbolos) con un único termopar en  $r/R = 0.93$  para la distribución de nodos (a)  $N_1 = 5$ ,  $N_2 = 15$  (círculos abiertos), (b)  $N_1 = 10$ ,  $N_2 = 10$  (cuadrados abiertos) y (c)  $N_1 = 15$ ,  $N_2 = 5$  (triángulos abiertos). El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos. . . . . 26

- 3.11 Perfil triangular de coeficientes de transferencia de calor, obtenido de Majorek et al. . . . . . 27
- 3.12 Coeficiente de transferencia de calor como una función de la temperatura de superficie, obtenida resolviendo el IHCP, con el termopar en  $r/R = 0.8$  y una distribución nodal  $N_1=5$  y  $N_2=20$  en las regiones superficie-termopar y termopar-centro respectivamente. El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo utilizados en los cálculos. . . . . 29
- 3.13 Coeficiente de transferencia de calor como una función de la temperatura de superficie, obtenida resolviendo el IHCP, con el termopar en  $r/R = 0.8$  y una distribución nodal uniforme  $N_1$  y  $N_2$  en las regiones superficie-termopar y termopar-centro respectivamente. El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo utilizados en los cálculos. . . . . 30
- 3.14 Coeficiente de transferencia de calor como una función de la temperatura de superficie, obtenida resolviendo el IHCP, con el termopar cerca del centro de la probeta. . . . . 31
- 3.15 Coeficiente de transferencia de calor como una función de la temperatura de superficie, representado por el perfil triangular (línea sólida) y obtenido resolviendo el IHCP (símbolos), con el termopar en  $r/R = 0.926$  y una distribución nodal  $N_1$  y  $N_2$  no uniforme en superficie-termopar y termopar-centro respectivamente. El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo utilizados en los cálculos. . . . . 32
- 3.16 Temperatura de superficie como una función del tiempo, obtenida resolviendo (a) el DHCP (línea sólida) y (b) el IHCP (círculos abiertos). 33

3.17 Navegación en WinProbe para el cálculo de la historia de temperatura y flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, en el modelo que resuelve el problema inverso de conducción de calor (IHCP). . . .	37
3.18 Opciones del IHCP: Selección de material y especificación de las dimensiones y posición del termopar en la probeta desde WinProbe. . .	38
3.19 Navegación en WinProbe para el cálculo de la historia de coeficientes de transferencia de calor, en el modelo que resuelve el problema inverso de conducción de calor (IHCP). . . . .	39
3.20 Especificación de las dimensiones y temperatura del baño de temple desde WinProbe para el cálculo de coeficientes de transferencia de calor. 40	
3.21 Pantalla que muestra los datos de tiempo de cálculo (primer columna) y temperatura cerca de la superficie (segunda columna) tabulados en un documento de WinProbe, al abrir un archivo. . . . .	41
3.22 Pantalla que muestra un cuadro de diálogo en WinProbe, para informar al usuario de las características y una breve introducción al modelo IHCP. 42	
3.23 Pantalla que muestra el panel de datos para especificar, el material y diámetro de la probeta, así como la magnitud con respecto a su radio de la posición del termopar, para el modelo IHCP. . . . .	43
3.24 Pantalla que muestra las opciones avanzadas del IHCP en WinProbe, para especificar el número de pasos de tiempo futuro, $\tau$ , y la distribución de nodos en cada región, $N_1$ y $N_2$ , determinada por la posición del termopar. . . . .	44

3.25	Pantalla que muestra las opciones del IHCP en WinProbe mientras se ejecuta Conta-C para un caso de estimación de flujo de calor por unidad de longitud y temperatura de superficie. . . . .	45
3.26	Pantalla que muestra la solución al IHCP tabulada en el documento en WinProbe, después de ejecutar un caso de estimación de flujo de calor por unidad de longitud (tercera columna) y temperatura de superficie (cuarta columna). . . . .	46
3.27	Pantalla que muestra el panel de datos para establecer la temperatura del baño de temple y la altura de la probeta para el cálculo de coeficientes de transferencia de calor para el modelo IHCP en WinProbe.	47
3.28	Pantalla que muestra la flujo de calor por unidad de longitud contra el paso de tiempo de cálculo en forma gráfica, en el trazo de una curva en WinProbe. . . . .	48
4.1	Representación esquemática del dispositivo experimental. . . . .	50
4.2	Representación esquemática del dispositivo sumergido en el baño de sales y el sistema de adquisición de datos. . . . .	52
5.1	Respuesta térmica medida en (a) el centro (círculos abiertos) y (b) subsuperficie (línea sólida), durante un ciclo experimental completo. . . . .	56
5.2	Reproducibilidad de las corridas experimentales: tres curvas de enfriamiento medidas con la probeta de acero IF enfriada con aire forzado.	57

- 5.3 Respuesta térmica medida en el centro de la probeta de acero IF en (a) aire forzado (línea segmentada), (b) aire quieto (línea segmentada-punteada), (c) aceite quieto (línea punteada), y (d) agua quieta (línea sólida). . . . . 58
- 5.4 Respuesta térmica medida en el centro de la probeta de acero inoxidable en (a) aire forzado (línea segmentada), (b) aire quieto (línea segmentada-punteada), (c) aceite quieto (línea punteada), y (d) agua quieta (línea sólida). . . . . 59
- 5.5 Respuesta térmica medida en el centro de (a) la probeta de acero inoxidable (línea segmentada) y (b) la probeta de acero AISI 1018 (línea sólida), enfriadas en aire forzado. . . . . 60
- 5.6 Respuesta térmica medida (curva de enfriamiento) en el centro de (a) la probeta de acero IF (línea segmentada) y (b) la probeta de acero AISI 1018 (línea sólida), enfriadas en aire forzado. . . . . 61
- 5.7 Respuesta térmica medida (curva de enfriamiento) en el centro de (a) la probeta de acero inoxidable (línea sólida), (b) la probeta de acero 1018 (círculos abiertos), y (c) la probeta de acero IF (triángulos abiertos), templadas en aceite quieto. . . . . 62
- 5.8 Rapidez de enfriamiento medida en el centro de (a) la probeta de acero inoxidable (línea sólida), (b) la probeta de acero 1018 (círculos abiertos), y (c) la probeta de acero IF (triángulos abiertos), templados en aceite quieto. . . . . 63

- 5.9 Flujo de calor por unidad de longitud estimado, como una función de la temperatura de superficie, para la probeta de acero IF enfriada con aire forzado. Un valor de  $r = 2$  fue utilizado para el cálculo. . . . . 64
- 5.10 Flujo de calor por unidad de longitud estimado, como una función de la temperatura de superficie, para la probeta de acero IF templada en aceite quieto. Un valor de  $r = 2$  fue utilizado para el cálculo. . . . . 65
- 5.11 Flujo de calor por unidad de longitud estimado, como una función de la temperatura de superficie, para la probeta de acero IF templada en agua quieta. Un valor de  $r = 2$  fue utilizado para el cálculo. . . . . 66
- 6.1 Discretización de un segmento de la probeta cilíndrica. El valor de  $R$  es el radio de la probeta,  $R'$  se considera una intercara por la posición del termopar y  $\Delta r$  y  $\Delta r'$  corresponden al espaciamiento nodal en cada región. . . . . 79

# Capítulo 1

## Introducción

La alotropía o transformación de fase debida a cambios de temperatura es una propiedad intrínseca de un sistema de aleación; los tratamientos térmicos de materiales metálicos se basan en la modificación de estructuras cristalinas definidas para producir propiedades mecánicas específicas. Los tratamientos térmicos en materiales metálicos empleados desde la antigüedad, han sido objeto de transformaciones de proceso, debido a que las piezas metálicas que se procesan tienen un alto valor agregado y, a las exigencias de calidad en el producto. Uno de los tratamientos térmicos utilizados comúnmente es el proceso de temple. El temple consiste en enfriar rápidamente una pieza metálica en un medio de enfriamiento. Una selección cuidadosa de las variables de proceso producirá un material con la microestructura óptima y, por lo tanto, con las propiedades mecánicas deseadas; además, el material estará libre de grietas y distorsión, con la distribución óptima de esfuerzos residuales.

En las últimas décadas del siglo XX se ha desarrollado investigación para definir la relación entre las condiciones de un proceso de temple y las propiedades mecáni-

cas finales de un componente. En este rubro, la ingeniería microestructural ha tenido mayor aceptación que cualquier otra técnica debido a la gran cantidad de información detallada del proceso que se puede obtener. El método de análisis comprende conceptos de fenómenos de transporte, mecánica de sólidos y metalurgia física para calcular la distribución de esfuerzos y la distorsión de piezas templadas, como resultado de las complejas interacciones entre los fenómenos térmicos, mecánicos y microestructurales que se presentan durante el enfriamiento rápido.

Típicamente, los modelos matemáticos de temple incluyen tres módulos: 1) térmico, 2) microestructural, y 3) mecánico. El módulo térmico se utiliza para calcular la evolución microestructural y la generación de esfuerzos, por lo que es evidente que el campo térmico durante el enfriamiento debe calcularse con la mayor exactitud posible. Debido a esto una etapa crítica en el modelado de operaciones de temple es la caracterización de la condición de frontera en la superficie del componente: típicamente, enfriamiento por convección acompañada de ebullición. Sin embargo, resulta difícil obtener mediciones confiables de la temperatura de superficie o del coeficiente de transferencia de calor durante un proceso de temple, debido a las altas temperaturas involucradas, la incertidumbre experimental asociada con la medición de temperaturas superficiales usando termopares, y la presencia de transferencia de calor por ebullición. Por otro lado, la respuesta térmica en el interior de un componente es relativamente fácil de medir. El problema se transforma entonces en uno de estimación del flujo de calor en la superficie, responsable de la respuesta térmica medida; este es el problema inverso de conducción de calor (IHCP, de sus iniciales en inglés).

Desde un punto de vista matemático, el problema inverso no satisface los requeri-

mientos de existencia, unicidad y estabilidad de la solución. Como resultado de esto, las soluciones son altamente sensibles a pequeñas fluctuaciones en las temperaturas medidas. En términos generales, el método de solución puede ser analítico o numérico, y puede aplicarse secuencialmente, es decir, estimando un solo componente de la función que describe a la densidad de flujo de calor en cada intervalo de tiempo, o al dominio completo, en cuyo caso todos los componentes son estimados simultáneamente. Debido a las restricciones inherentes a los métodos analíticos, principalmente su incapacidad para manejar problemas no lineales, prácticamente todos los problemas de este tipo deben resolverse numéricamente.

Los problemas inversos tienen una importante aplicación en ciencia e ingeniería. El avance tecnológico en sistemas de cómputo, ha favorecido la aplicación de modelos matemáticos sofisticados para dar solución a problemas que antiguamente requerían de recursos de hardware y software no disponibles; consecuentemente el tiempo de cálculo se ha reducido significativamente para llevar a cabo estas tareas.

La presente investigación contempla la fabricación de un dispositivo para la caracterización de la extracción de calor en baños de temple utilizando acero libre de intersticiales (IF). Las ventajas de usar este material son: 1) el valor de la conductividad térmica del acero libre de intersticiales es más cercano al correspondiente a aceros típicos, por lo que los resultados serían más representativos, 2) tiene una buena resistencia mecánica, 3) tiene mejor maquinabilidad que el acero inoxidable o incoel (materiales que se utilizan comúnmente en este tipo de investigación) por lo que su fabricación es más simple. Las desventajas son: 1) susceptibilidad a la oxidación a altas temperaturas, y 2) este acero presenta una transformación de fase que, a baja

rapidez de enfriamiento, potencialmente interferiría con los resultados.

## Capítulo 2

### Antecedentes y Objetivos

Se han desarrollado diversos métodos de aproximación para hacer cada vez mejores predicciones de procesos de temple. Estos métodos se pueden clasificar en: i) prueba y error, ii) caracterización de la calidad de los baños de temple, y iii) modelado de proceso. La complejidad de análisis se incrementa desde las aproximaciones con el método de prueba y error hasta la metodología de modelado.

Reconociendo que las propiedades mecánicas resultantes después de un tratamiento térmico están vinculadas a la microestructura en el material, que a su vez está regida por la extracción de calor característica de los baños de temple, se han diseñado diversas de pruebas para medir la calidad del baño de temple. Estas pruebas pueden basarse en la susceptibilidad de endurecimiento del material (templabilidad, ensayo de temple en un extremo o ensayo Jominy), o bien en la habilidad de enfriamiento del proceso (quencho-meter QM o ensayo de la bola de níquel, ensayo del alambre caliente, prueba del intervalo de 5 segundos y curva de enfriamiento) [1]. Mientras que los métodos basados en la susceptibilidad de endurecimiento del material están

asociados con la habilidad de los baños de temple para producir una cierta distribución de dureza, los métodos que miden la habilidad de enfriamiento en el proceso están directamente orientados a la evaluación de la cantidad de calor que puede ser extraída por un baño de temple.

La metodología del análisis de la curva de enfriamiento se considera una de las mejores herramientas para describir los mecanismos de temple, puesto que las curvas de enfriamiento presentan sensibilidad a factores (tipo y propiedades físicas del baño, temperatura del baño y agitación del baño) que afectan la habilidad de los baños de temple para extraer calor.

Se han utilizado diferentes diseños de probetas para medir curvas de enfriamiento durante el temple. Bates y Totten [2] obtuvieron curvas de enfriamiento y curvas de rapidez de enfriamiento para una probeta de acero inoxidable AISI 304 con un diámetro de 25 mm, templada en aceites de baja, media y alta velocidad. La máxima rapidez de de enfriamiento obtenida en el aceite de baja velocidad (tan alta como la del aceite agitado a media velocidad) no pudo detectarse por un ensayo con Quencho-meter. Tamura [3] condujo un estudio involucrando dos probetas: una fabricada con Inconel 600 e instrumentada con un termopar en su centro geométrico, y otra fabricada de plata e instrumentada en la subsuperficie a media altura. Tamura comparó la respuesta de las probetas templadas en aceite variando la cantidad de aditivos y mostró que la probeta de plata es más sensible a los cambios en cuanto a las características de transferencia de calor en el baño de temple producido por los aditivos. Otro diseño de probetas se han descrito en la literatura [4]. En [5] se demuestra nuevamente la sensibilidad de las probetas de plata al modificar la instrumentación a las probetas

fabricadas bajo la norma JIS, a los cambios en la transferencia de calor en procesos de temple para diversos medios, y se establece que las curvas de enfriamiento muestran una fuerte dependencia a las propiedades termofísicas del material con el cual fueron construídas, al comparar las curvas obtenidas por probetas cilíndricas idénticas de plata e Inconel 600. Por otra parte la forma y el tamaño de las probetas tiene efectos menos significativos en las curvas de enfriamiento, como se ha demostrado utilizando probetas cilíndricas del mismo material bajo las normas JIS, ISO y la norma Francesa; bajo un mismo proceso de temple se obtuvieron curvas de enfriamiento y se trazaron curvas de temperatura contra tiempo dividido por la relación volumen - área ( $V/S$ ), al considerar las diferencias dimensionales para cada probeta.

Una vez que se obtienen la curva de enfriamiento y la correspondiente curva de rapidez de enfriamiento, se pueden analizar de diversas formas. La más simple es una comparación visual, es decir, trazando diversas curvas de enfriamiento y sobreponiéndolas para comparar los baños de temple, y así de esa forma, poder correlacionar los datos de la curva de enfriamiento con las propiedades mecánicas [1,6]. El análisis del factor de temple (QFA de sus iniciales en inglés) se ha aplicado satisfactoriamente al temple de aceros [7] y aleaciones de aluminio [8]. El factor de temple es esencialmente el compendio de fracciones de tiempo sobre un intervalo de temperaturas para una curva de enfriamiento y es una medida indirecta de los efectos metalúrgicos de un proceso de temple. Reti et al. [9] tomaron este concepto y desarrollaron el análisis llamado análisis de transformación en el enfriamiento (CTA de sus iniciales en inglés). El CTA es una técnica que utiliza equipo de cómputo, desarrollada para caracterizar cuantitativamente el mejoramiento del proceso de temple en baño. Como el QFA,

este método provee de un sólo número (el poder de endurecimiento) que relaciona la condición de enfriamiento a la microestructura resultante. El punto de partida para esta técnica es una historia de densidad de flujo de calor medida en la superficie en una serie de probetas bajo norma estándar templadas en diversos medios de temple. Liscic y Feletin [10] desarrollaron un software para predecir la distribución de dureza en barras templadas a partir de curvas de enfriamiento medidas; la técnica se basa en medir la temperatura en dos puntos: uno en la superficie y otro en un punto interno cerca de la superficie, en una probeta cilíndrica especialmente diseñada e instrumentada. La probeta fue fabricada con acero inoxidable AISI 304 (50 mm de diámetro por 200 mm de longitud) para asegurar que no hubiera generación de calor debido a un cambio de fase. Las respuestas de temperatura medidas se utilizan para calcular la densidad de flujo de calor aplicando directamente la Ley de Fourier, con las propiedades termofísicas del acero constantes. Una pieza de prueba fabricada del acero de interés se somete a un proceso de temple y se determina su distribución de dureza; estos datos son transformados en una equivalencia a la curva Jominy. Con esta base de datos, puede calcularse la distribución de dureza en una barra de diámetro de interés, utilizando ecuaciones de regresión de una serie de diagramas de Craft-Lamont. Liscic et al. [11] sugirieron una descripción cualitativa de la profundidad de endurecimiento y probabilidad de agrietamiento basado en el método descrito arriba.

Puesto que resulta difícil medir en forma directa la densidad de flujo de calor, los coeficientes de transferencia de calor o la temperatura de superficie en una pieza metálica durante un proceso de temple, se ha recurrido a un método indirecto. Es posible obtener historias térmicas en el interior de una pieza metálica durante el proceso; en

esta instancia los algoritmos que resuelven el problema inverso de conducción de calor (IHCP) para la estimación de densidad de flujo de calor y temperatura de superficie tienen una aplicación importante. La estimación de estos componentes constituye un problema de estimación de la función, es decir, se estima la función desconocida sin un previo conocimiento de la forma funcional de la variación de la densidad de flujo de calor con el tiempo. La dinámica sensorial inherente de los termopares puede ser un factor importante, sin embargo, se ha podido controlar disminuyendo la resistencia por contacto entre el termopar y el material, además de controlar el volumen en la junta de los termopares [12]. Prácticamente todos los problemas inversos no lineales deben resolverse numéricamente, la aplicación de métodos de solución a partir de algoritmos de diferencias finitas, elemento finito y técnicas de elemento de frontera dadas en [13 16], respectivamente, son técnicas comúnmente utilizadas. Desde un punto de vista matemático las soluciones al problema inverso son altamente sensibles a pequeñas fluctuaciones en las temperaturas medidas; las técnicas para introducir baja sensibilidad a errores de medición también varían. En [13] y [14] se utiliza el concepto de temperaturas futuras. Se introduce un método de mínimos cuadrados y un método de ajuste incorporado al algoritmo de solución respectivamente. La técnica utilizada consiste en estimar secuencialmente un sólo componente que describe la densidad de flujo de calor en cada intervalo de tiempo, por lo que se conoce como especificación secuencial de la función o al dominio completo en cuyo caso todos los componentes son estimados simultáneamente. Archambault y Azim utilizaron el método de movilización espacial con diferencias finitas dado en [14] para caracterizar la frontera en cilindros sólidos de aleaciones de aluminio y acero, aplicando un pro-

ceso de temple común para aleaciones de aluminio y un proceso de calentamiento y enfriamiento súbito en acero en un tratamiento superficial [17]. Hernández-Morales et al. [18] utilizaron la técnica SFS y diferencias finitas dada en [13] para la estimación de densidades de flujo de calor y coeficientes de transferencia de calor en barras de acero libre de intersticiales sujetas a temple por convección forzada.

## 2.1 Objetivos

El interés de utilizar acero libre de intersticiales (IF de sus iniciales en inglés) para obtener curvas de enfriamiento, se basa en el factor de que comparado con acero inoxidable y aleaciones base níquel, las propiedades termofísicas son muy similares a la de los aceros térmicamente tratables.

### **Objetivo General:**

Evaluar la efectividad del acero libre de intersticiales (IF) para fabricar un dispositivo que permita obtener curvas de enfriamiento, para caracterizar la frontera de un sistema en un proceso de temple.

### **Objetivos Específicos:**

1. Diseñar y fabricar una probeta de acero IF para caracterizar la extracción de calor durante el proceso de temple.
2. Desarrollar y verificar un programa de cómputo para estimar el flujo de calor en la superficie de la probeta, basado en la respuesta de temperatura medida en un punto específico en su interior.
3. Ejecutar el programa desde una interfaz de cómputo fácil de utilizar, para

realizar el análisis de datos.

4. Obtener curvas de enfriamiento en baños de temple.

Los parámetros a considerar en el diseño de la probeta son:

- Geometría
- Instrumentación
- Sistema automático de adquisición de datos

## Capítulo 3

### Conta-C y WinProbe

Dos modelos son necesarios en esta investigación: 1) un modelo experimental, que determina mediante la estimulación de un dispositivo físico una respuesta esperada (temperatura medida en el interior de la probeta de acero IF) y 2) un modelo matemático para estimar la densidad de flujo de calor en la superficie de la probeta durante el temple. Las Figs. 3.1 y 3.2 ilustran el flujo de información.

La solución del problema inverso de conducción de calor (IHCP) se utiliza para la estimación del flujo de calor por unidad de longitud y de la temperatura en la superficie de una probeta sólida de geometría cilíndrica, en un problema inverso típico. A diferencia del método directo de conducción de calor (DHCP), que consiste en determinar la distribución de temperatura en el interior de un cuerpo cuando se especifican las condiciones iniciales y de frontera, así como la rapidez de generación de energía (si existe) y las propiedades termofísicas propias del material, el IHCP utiliza historias de temperatura medidas en el interior del sólido y los valores de propiedades termofísicas del material utilizado en la fabricación de la probeta además de la rapidez

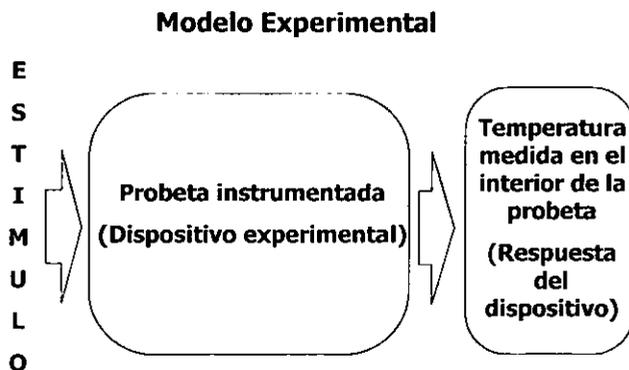


Figura 3.1: Modelo experimental.

de generación de energía (si existe). Las propiedades termofísicas de los materiales utilizados aquí muestran dependencia con la temperatura, de esta característica se desprende la no linealidad de la ecuación de calor en el IHCP y la complejidad en la solución del problema. El método de solución numérica por diferencias finitas a problemas inversos más ampliamente utilizado es el desarrollado por Beck et al. [13].

El sistema bajo estudio es un cilindro largo de 12.7 mm (0.5 pulgadas) de diámetro por 50.8 mm (2 pulgadas) de altura. Estas dimensiones dan una relación longitud-diámetro 1:4, por lo que el flujo de calor es predominantemente unidimensional. Al tiempo inicial,  $t = 0$ , el cilindro se encuentra a una temperatura inicial  $T(0)$ . Conforme avanza el tiempo,  $t > 0$ , se aplica una variación de flujo de calor por unidad de longitud en función del tiempo,  $\frac{Q}{L}(t)$ , en la superficie de la probeta,  $r = R$ , mien-

### Modelo Matemático

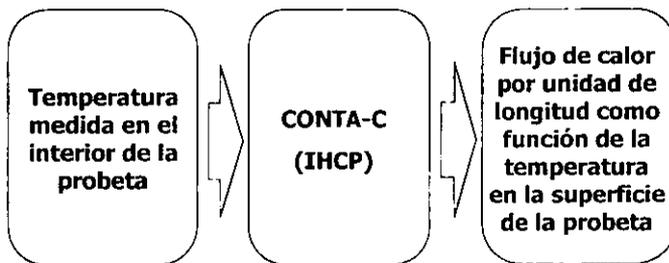


Figura 3.2: Modelo matemático.

tras en la línea central de la probeta se puede establecer una condición de simetría. Se asume que  $\frac{Q}{L}(t)$  es una función suave, continua, del tiempo que podría mostrar oscilaciones arbitrariamente, en realidad no es posible determinarlo puesto que no hay información previa disponible. Para estimar  $\frac{Q}{L}(t)$  se utilizan las temperaturas medidas,  $Y_j$ , por un sensor en un punto en el interior de la probeta entre  $r = 0$  y  $r = R$  a diferentes tiempos sucesivos,  $t = t_i$ , sobre un intervalo de tiempo específico ( $0 < t < t_f$ ).

El flujo de calor por unidad de longitud en la superficie de la probeta se estimará resolviendo el problema inverso de conducción de calor (IHCP) basado en la respuesta de temperatura medida por medio de un sensor colocado en una posición cerca de la superficie  $r = 4.85$  mm (0.1909 pulgadas) a media altura  $h = 25.4$  mm (1 pulgada).

El IHCP se ilustra en la Fig 3.3. Una de las condiciones de frontera es conocida al establecer aislamiento por simetría en la línea central de la probeta, mientras que la otra  $\frac{Q}{L}(t)$  será estimada. Puesto que no hay información previa disponible necesitamos calcular  $\left(\frac{Q}{L}\right)_i = \frac{Q}{L}(t_i)$  para un número suficientemente grande de tiempos  $t_i$  para hacer una estimación razonablemente precisa de la función, por lo que el problema es tratado como uno de estimación o especificación secuencial de la función (SFS). Para reducir la sensibilidad en las soluciones numéricas del IHCP con respecto a fluctuaciones en las temperaturas medidas, la técnica de especificación secuencial de la función se ha aplicado satisfactoriamente [13]. El problema de sensibilidad se reduce al estimarse el flujo de calor por unidad de longitud desconocido utilizando las temperaturas medidas a diversos pasos de tiempo inmediatos, minimizando mediante una expresión de mínimos cuadrados la diferencia entre el valor de la temperatura medida y estimada en el punto de medición en la probeta.

La formulación matemática del problema de conducción de calor esta dada por:

$$-\nabla q + Q' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

donde T es la variable temperatura,  $\rho$  es la densidad,  $C_p$  es el calor específico,  $q$  es la densidad de flujo de calor y  $Q'$  es el calor generado por unidad de volumen. En coordenadas cilíndricas la ecuación anterior se expresa como:

$$-\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{r} q_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial z} (-q_z)\right) + Q' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2)$$

o bien

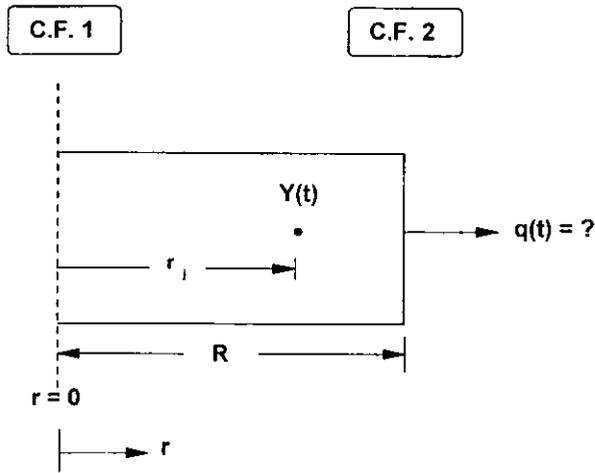


Figura 3.3: Representación esquemática del problema inverso de conducción de calor (IHCP).

$$-\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-kr \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z}\right)\right) + Q' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.3)$$

Para flujo sólo en la dirección radial y sin generación de energía:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.4)$$

donde  $k$ ,  $\rho$ , y  $C_p$  son funciones de la temperatura. Las condiciones inicial y de frontera para el problema de conducción de calor son:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = q(t) \text{ --?}, \quad \text{en} \quad r = R \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \text{en} \quad r = 0 \quad (3.6)$$

$$T(r, t) = f(r), \quad \text{para} \quad t = 0; \quad \text{en} \quad 0 < r \leq R \quad (3.7)$$

La densidad de flujo de calor  $q(t)$  es desconocida, en su lugar, las mediciones de temperatura:

$$T(r_j, t_i) \equiv Y_{ji}, \quad j = 1; i = 1, 2, \dots, M \quad (3.8)$$

se toman a través del sensor colocado en  $r_j$  para los tiempos  $t_i$  sobre un periodo de tiempo  $0 < t \leq t_f$ .

Los subíndices  $j$  e  $i$  representan el número de termopares y el índice de tiempo respectivamente;  $f(r)$  es la distribución inicial de temperatura conocida.

La solución al problema inverso de conducción de calor se describe en detalle en el Apéndice A.

El programa de cómputo donde está implícito el algoritmo original de Beck [19], resuelve el IHCP para una geometría plana (coordenadas rectangulares) con conducción de calor en una dirección. La obtención de resultados a partir de la solución del IHCP para el caso considerado aquí requirió la modificación de subrutinas en el programa de cómputo. En particular, resulta necesario modificar las ecuaciones de diferencias finitas de una geometría plana a una geometría cilíndrica (coordenadas polares) para conducción de calor en dirección radial, introduciendo las variables por el cambio de área perpendicular a la dirección de flujo de calor. Cada una de las pro-

betas cilíndricas fabricadas de un único material se divide sistemáticamente en dos regiones en la discretización, la intercara imaginaria que divide estas regiones queda establecida por la posición del termopar entre el centro de la probeta y su superficie. Los valores del espaciado internodal ( $\Delta r$ ) en la discretización de la probeta, pueden ajustarse para lograr que en cada región sean diferentes o iguales en magnitud, considerando que en cada región puede existir un número específico de volúmenes de control y la consecuente distribución nodal. Las ecuaciones de diferencias finitas utilizadas en la solución del IHCP se desarrollan bajo el método de Crank-Nicolson modificado. El desarrollo y manejo algebraico de las ecuaciones de diferencias finitas en el programa de cómputo se describe en el Apéndice B.

El programa de cómputo desarrollado para resolver el IHCP fue verificado comparando resultados con los valores obtenidos al resolver el problema directo de conducción de calor (DHCP). En un primer ejercicio de verificación, se calculó el flujo de calor por unidad de longitud en la superficie y la distribución de temperatura como una función del tiempo utilizando la solución analítica para un cilindro de longitud infinita enfriado por convección (programa de cómputo TRZ), con un paso de tiempo de cálculo de 0.05 unidades y propiedades termofísicas constantes, es decir, resolviendo el DHCP, simulando así la respuesta (sin errores experimentales) de un termopar ficticio. La temperatura calculada cerca de la superficie se utilizó para estimar el flujo de calor por unidad de longitud y la temperatura en la superficie con el programa de cómputo que resuelve el IHCP para el cilindro largo, tomando las mismas propiedades y pasos de tiempo de cálculo que para el DHCP. Estos valores de "regreso" fueron comparados con los previamente calculados. Los parámetros utilizados están dados

en la Tabla 1 del Apéndice C.

El flujo de calor por unidad de longitud en la superficie como función del tiempo calculados por la solución del DHCP y el IHCP se muestran en la Fig. 3.4. La solución fue calculada para tres valores del parámetro  $r$  : 2, 4, 6. Este parámetro indica el número de pasos de tiempo futuros inmediatos utilizados en los cálculos. Para pequeños valores de  $r$ , el flujo de calor por unidad de longitud muestra un buen ajuste con los valores calculados analíticamente. A medida que el valor del parámetro  $r$  se incrementa, los valores estimados para el flujo de calor por unidad de longitud disminuyen rápidamente y se desvían más distintivamente del flujo de calor por unidad de longitud calculado resolviendo el DHCP. Los resultados correspondientes para la temperatura en la superficie se muestran en la Fig. 3.5. Aquí se observa la misma tendencia sobre el efecto del parámetro  $r$ , pero la diferencia entre los valores calculados y los estimados es mucho más pequeña.

Para un cilindro sólido, la condición de frontera en la línea central podría ser expresada fácilmente como una condición de simetría o como una respuesta de temperatura conocida. El flujo de calor por unidad de longitud estimado utilizando estas condiciones se muestra en la Fig. 3.6. Este es un descubrimiento importante debido a que esto permite utilizar un solo termopar (uno cerca de la superficie); de esta manera se simplifica el diseño de la probeta.

Al colocar el termopar en el centro y considerar aislamiento por simetría en la línea central de la probeta como condición de frontera, el método de solución pierde estabilidad para un número de pasos de tiempo pequeño como se muestra en la Fig. 3.7. Al aumentar el valor de  $r$ , la solución se estabiliza. La Fig. 3.8 muestra que

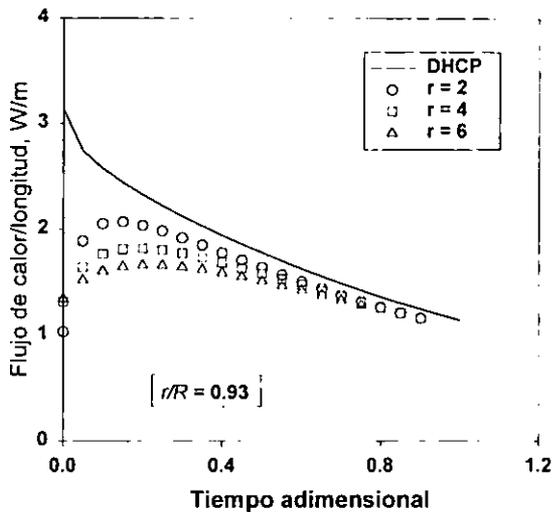


Figura 3.4: Flujo de calor por unidad de longitud en la frontera activa como una función del tiempo, obtenido resolviendo (a) DHCP (línea sólida) y (b) el IHCP (símbolos). El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos.

la posición del termopar en el cuerpo de la probeta tiene un efecto importante para el método de solución. Para el mismo número de pasos de tiempo futuros,  $r = 2$ , y para la misma cantidad de nodos que definen los volúmenes de control en el cuerpo de la probeta, se muestra la respuesta de flujo de calor por unidad de longitud para termopares colocados en el centro y cerca de la superficie: el método pierde estabilidad al colocar el termopar en el centro de la probeta, mientras que cerca de la superficie se obtiene un buen ajuste. Para demostrar este hecho se discretiza a la probeta cilíndrica de tal forma que se obtenga una distribución nodal uniforme, y se

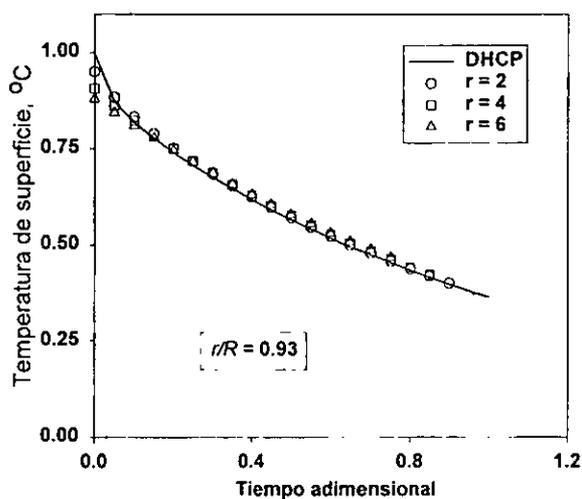


Figura 3.5: Temperatura de superficie como una función del tiempo, obtenida resolviendo (a) el DHCP (línea sólida) y (b) el IHCP (símbolos). El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos.

obtiene la historia térmica en diversas posiciones resolviendo el DHCP en este sistema, entonces se mueve virtualmente al termopar a las diferentes posiciones de la superficie al centro de la probeta y se analiza la solución del IHCP. La posición del termopar es considerada una interfaz que divide al sólido en dos regiones (región 1: centro-posición del termopar; región 2: posición del termopar-superficie); y se consideran 20 nodos en la discretización. Entonces el termopar se mueve en cada prueba a una posición mas cercana al centro de la probeta conservándose la distribución equidistante en la discretización; la Fig. 3.9 muestra los resultados obtenidos. Puede observarse que conforme el termopar se acerca al centro, la solución del IHCP se acerca más

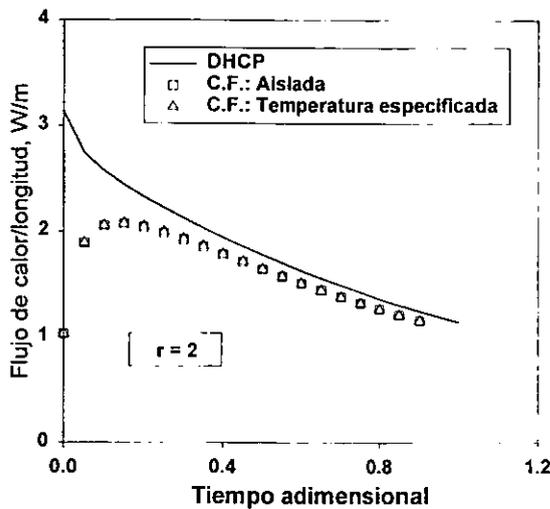


Figura 3.6: Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo (a) el DHCP (línea sólida), y el IHCP con (b) C.F.1: simetría en  $r/R = 0$  (cuadros abiertos) y (c) C.F.1: respuesta de temperatura conocida en  $r/R = 0$  (triángulos abiertos). El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados para los cálculos.

a los valores calculados por el DHCP. Conforme el termopar este más alejado de la superficie, el método de solución fuerza valores mayores de flujo de calor por unidad de longitud debido al gradiente de temperatura entre la posición del termopar y la superficie para un paso de tiempo específico ( $r = 2, 4, 6$ ) mostrando una respuesta más efectiva. Sin embargo, también se puede ver la susceptibilidad del método a las pequeñas fluctuaciones de temperatura, sobre todo si se consideran números de pasos de tiempo pequeños ( $r = 2$ ), lo que implica considerar las condiciones de enfriamiento

o condiciones externas bajo las cuales se promueve el enfriamiento.

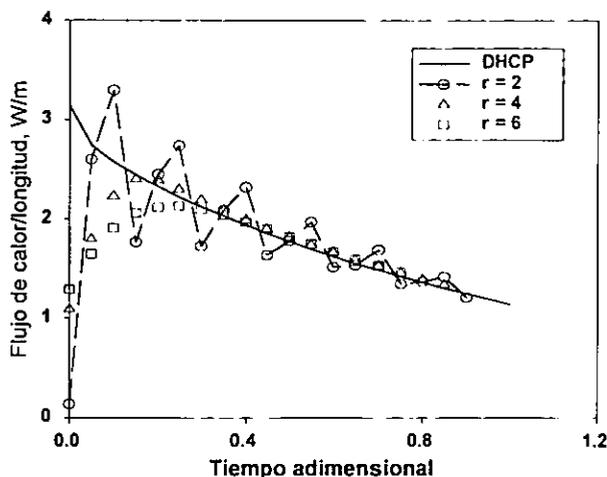


Figura 3.7: Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo el DHCP (línea sólida), y el IHCP (símbolos) con un único termopar en el centro  $r/R = 0$ . El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos;  $r = 2$  (círculos abiertos unidos por línea punteada),  $r = 4$  (triángulos abiertos) y  $r = 6$  (cuadrados abiertos).

Las Figs. 3.4 y 3.5 muestran cómo un número de pasos de tiempo futuros pequeño pueden dar la mejor información de flujo de calor por unidad de longitud y temperatura de superficie respectivamente. También es posible obtener un mejor ajuste modificando la distribución nodal en la discretización de la probeta. La Fig. 3.10 muestra que con un número de pasos de tiempo pequeño ( $r = 2$ ) y un termopar situado cerca de la superficie se obtiene un buen ajuste al modificar la distribución nodal (región 1: 5 nodos; región 2: 15 nodos).

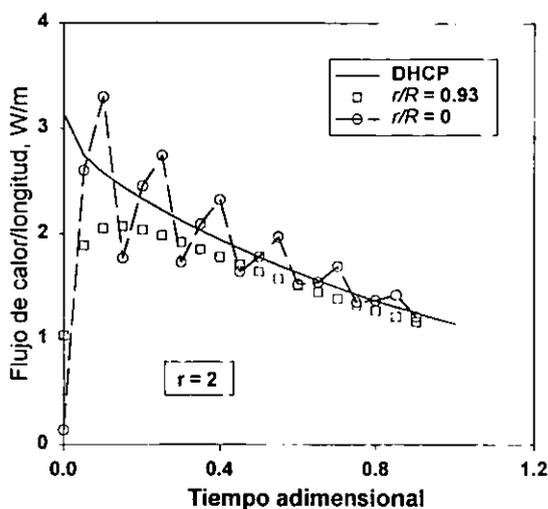


Figura 3.8: Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo (a) el DHCP (línea sólida), y el IHCP (símbolos) con un único termopar en (b)  $r/R = 0.93$  (cuadrados abiertos), (c)  $r/R = 0$  (círculos abiertos unidos por línea punteada). El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos.

En resumen, con una discretización adecuada de la probeta en combinación con un paso de tiempo de cálculo óptimo es posible obtener resultados confiables.

En un segundo ejercicio de verificación se somete al método de solución del IHCP a condiciones de problemas de aplicación más complejas. Los datos tomados de Majorek et al. [20] corresponden al enfriamiento de una probeta cilíndrica de 30 mm de diámetro, fabricada de níquel. La probeta es templada en aceite desde una temperatura de 830 °C.

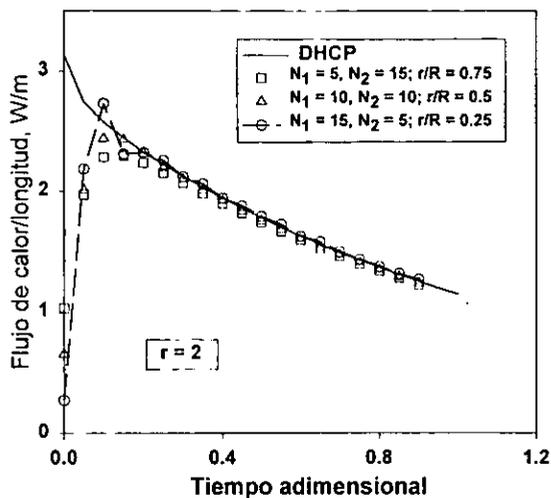


Figura 3.9: Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo (a) el DHCP (línea sólida), y el IHCP (símbolos) con un único termopar en (b)  $r/R = 0.75$  (cuadrados abiertos), (c)  $r/R = 0.5$  (triángulos abiertos) y (d)  $r/R = 0.25$  (círculos abiertos unidos por línea punteada), para una distribución nodal equidistante. El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos.

El análisis de proceso deberá determinar si la respuesta térmica obtenida al resolver el DHCP bajo estas condiciones y alimentando historias térmicas al programa que resuelve el IHCP, se genera la solución que represente nuevamente el perfil triangular de coeficientes de transferencia de calor por unidad de longitud mostrado en la Fig. 3.11.

La simulación se realiza tomando las propiedades termofísicas de un acero inoxidable.

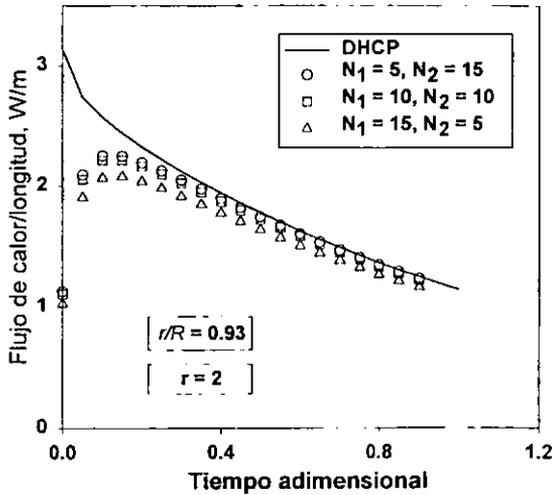


Figura 3.10: Flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, obtenido resolviendo (a) el DHCP (línea sólida), y (b) el IHCP (símbolos) con un único termopar en  $r/R = 0.93$  para la distribución de nodos (a)  $N_1 = 5, N_2 = 15$  (círculos abiertos), (b)  $N_1 = 10, N_2 = 10$  (cuadrados abiertos) y (c)  $N_1 = 15, N_2 = 5$  (triángulos abiertos). El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo futuros utilizados en los cálculos.

ble 304 (los parámetros utilizados se muestra en la Tabla 2 del Apéndice C). Se resuelve el DHCP tomando como condición de frontera en la superficie la función  $h(T)$ , una condición de frontera aislada en la línea central, y una distribución nodal equidistante para obtener las historias de temperatura en posiciones específicas dentro del cuerpo de la probeta (estas historias de temperatura representarán virtualmente la respuesta térmica medida por un termopar). El paso de tiempo de cálculo se establece a 0.1 segundo y los cálculos se realizan con el programa de cómputo CONDUCT.

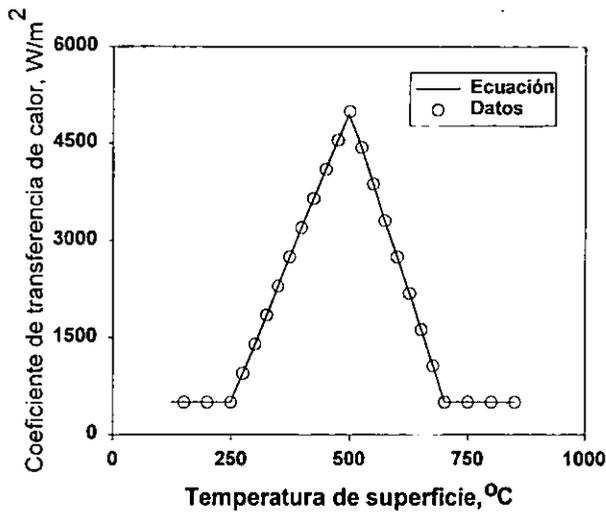


Figura 3.11: Perfil triangular de coeficientes de transferencia de calor, obtenido de Majorek et al.

El programa de cómputo CONDUCT (CONducción y flujo en DUCTos), de uso libre, es un algoritmo de propósito general codificado en lenguaje FORTRAN, para la solución numérica de ecuaciones diferenciales para análisis en una o dos dimensiones de problemas típicos en ingeniería que involucren el cálculo de distribuciones de cantidades escalares (como temperatura, concentración, etc) en fenómenos de transporte por conducción. CONDUCT está diseñado para emplear tres sistemas de coordenadas (cartesianas, axisimétricas y polares), convenientemente se manejan cuerpos cuya geometría se ajusten a estos sistemas, puesto que se realiza un análisis por discretización y volúmenes de control [21], lo que para un cuerpo irregular no es apropiado.

En una primera etapa de análisis para el IHCP, la posición del termopar se ubica

cerca de la superficie y se establecen las magnitudes de las regiones en el cuerpo considerando 25 nodos en total, región 1 = 3 mm (5 nodos), región 2 = 12 mm (20 nodos). La respuesta obtenida al resolver el IHCP para diferentes números de pasos de tiempo ( $r = 2, 4, 6$ ) se muestra en la Fig. 3.12. Para un número de pasos de tiempo pequeño ( $r = 2$ ) el método pierde estabilidad, para pasos de tiempo mayores la curva se "suaviza" pero el vértice superior del triángulo en las soluciones del IHCP desciende. La Fig. 3.13 muestra como cambiando la distribución nodal (región 1 = 5, 4, 3, 2 región 2 = 20, 16, 12 y 8; respectivamente) con el termopar en la misma posición (cerca de la superficie, región 1 = 3 mm, región 2 = 12 mm) y un número de pasos de tiempo  $r = 4$ , se pierde información en la respuesta de flujo de calor por unidad de longitud.

En la segunda etapa del análisis se muestra como aún para un número de pasos de tiempo grande  $r = 6$  y pocos nodos en la discretización de la probeta (región 1 = 9 mm (9 nodos), región 2 = 6 mm (6 nodos)), el método muestra gran inestabilidad cuando se mueve el termopar virtualmente hasta cerca del centro de la probeta como se muestra en la Fig. 3.14, lo que afirma que debe considerarse una combinación adecuada de discretización, pasos de tiempo de cálculo y número de pasos de tiempo bajo condiciones de enfriamiento específicos en un proceso. La Fig. 3.15 muestra como modificando la distribución nodal en la discretización de la probeta para una posición fija del termopar cerca de la superficie (región 1 = 1.1 mm (15 nodos), región 2 = 13.9 mm (10 nodos)) y un número de pasos de tiempo pequeño ( $r = 2$ ), se puede lograr un buen ajuste para el perfil triangular. La mejor respuesta de coeficientes de transferencia de calor por unidad de longitud y temperatura de superficie se muestra

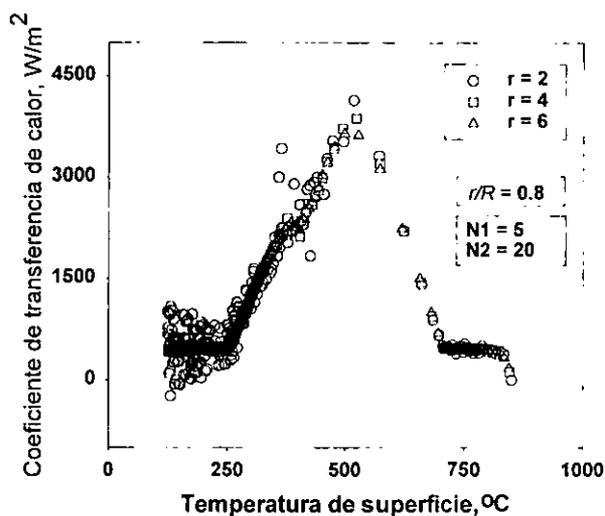


Figura 3.12: Coeficiente de transferencia de calor como una función de la temperatura de superficie, obtenida resolviendo el IHCP, con el termopar en  $r/R = 0.8$  y una distribución nodal  $N_1=5$  y  $N_2=20$  en las regiones superficie-termopar y termopar-centro respectivamente. El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo utilizados en los cálculos.

en las Figs. 3.15 y 3.16 respectivamente.

El programa de cómputo que resuelve el IHCP para cuerpos cilíndricos largos se ha nombrado **Conta-C**.

Como en cualquier programa de diferencias finitas para la ecuación de conducción de calor, se requiere que ciertos parámetros de entrada sean seleccionados intuitivamente en forma razonable a través de la experiencia. En los problemas directos se identifica la distribución nodal y los pasos de tiempo de cálculo, los problemas inver-

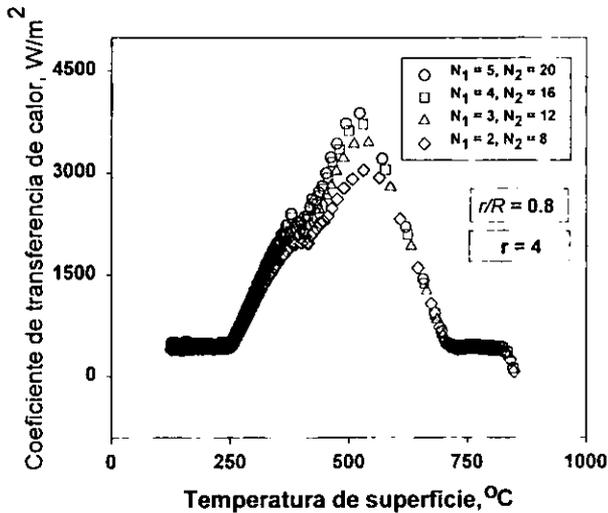


Figura 3.13: Coeficiente de transferencia de calor como una función de la temperatura de superficie, obtenida resolviendo el IHCP, con el termopar en  $r/R = 0.8$  y una distribución nodal uniforme  $N_1$  y  $N_2$  en las regiones superficie-termopar y termopar-centro respectivamente. El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo utilizados en los cálculos.

Los resultados no son la excepción. No es la finalidad de este trabajo establecer una metodología para resolver este problema, sin embargo, se muestran resultados de los cuales es posible establecer criterios. La discretización de los cuerpos, el paso de tiempo de cálculo y el número de pasos de tiempo son parámetros críticos en el IHCP. En la guía y procedimientos de selección de Beck [19] se establece un número de 20 nodos para un cuerpo en donde exista transferencia de calor en una sola dirección. No obstante, este número puede aumentar o disminuir en función de las condiciones de

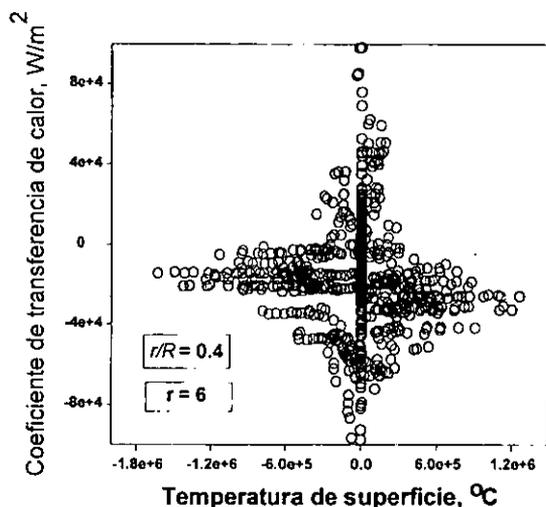


Figura 3.14: Coeficiente de transferencia de calor como una función de la temperatura de superficie, obtenida resolviendo el IHCP, con el termopar cerca del centro de la probeta.

calentamiento o enfriamiento. Para rápidas variaciones en el flujo de calor en la superficie de un cuerpo es preferible tener nodos con espaciados pequeños cerca de la superficie que tener nodos espaciados uniformemente a través del cuerpo. Existen dos pasos de tiempo en Conta-C: 1) el paso de tiempo de cálculo y 2) el paso de tiempo entre las temperaturas medidas. El paso de tiempo de cálculo puede ser una fracción del paso de tiempo entre las temperaturas medidas y puede ser tan pequeño como se desee, se sugiere que el paso de tiempo de cálculo sea una tercera parte o igual al paso de tiempo entre las temperaturas medidas. No siempre se puede obtener una buena precisión al disminuir en magnitud al paso de tiempo de cálculo, ya que

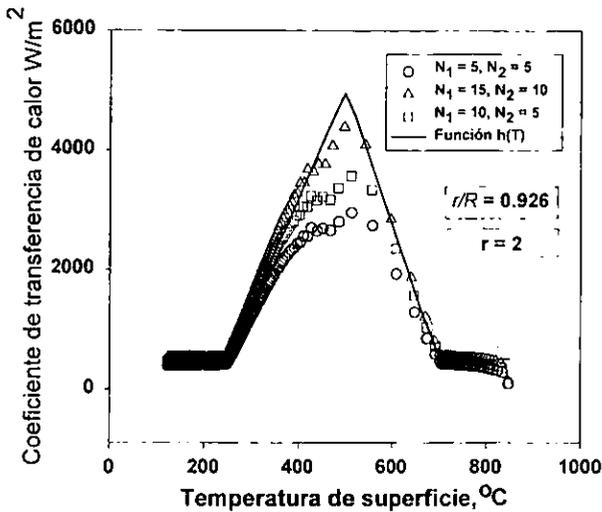


Figura 3.15: Coeficiente de transferencia de calor como una función de la temperatura de superficie, representado por el perfil triangular (línea sólida) y obtenido resolviendo el IHCP (símbolos), con el termopar en  $r/R = 0.926$  y una distribución nodal  $N_1$  y  $N_2$  no uniforme en superficie-termopar y termopar-centro respectivamente. El valor de  $r$  es el número de pasos de tiempo utilizados en los cálculos.

para una buena aproximación podría ser necesario perder resolución. El número de pasos de tiempo futuros  $r$  puede ser igual a 1,2,3,4,5 ó 6. El valor 1 corresponde a no tener valores de temperaturas medidas adicionales en el cálculo. A medida que  $r$  se incrementa en valor se tiende a un menor ajuste entre las temperaturas calculada y medida. Este es el resultado de "suavizar" al introducir el uso de las ecuaciones de mínimos cuadrados. Esto tiene efectos benéficos al reducir la sensibilidad de Conta-C en la medición de errores. Un efecto no deseable de incrementar  $r$  es que el flujo de

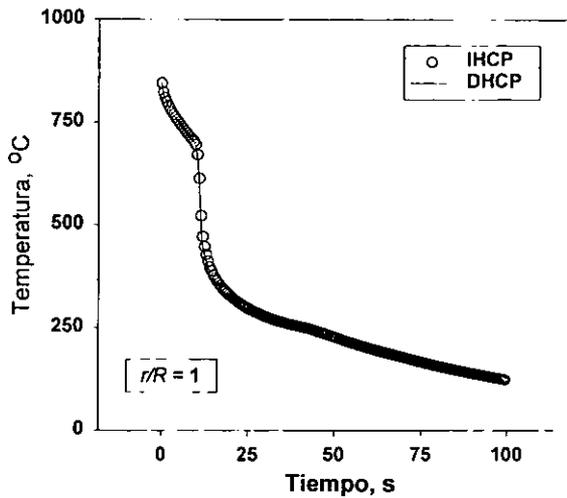


Figura 3.16: Temperatura de superficie como una función del tiempo, obtenida resolviendo (a) el DHCP (línea sólida) y (b) el IHCP (círculos abiertos).

calor por unidad de longitud en la superficie también se “suaviza”. En general para pequeños pasos de tiempo entre temperaturas medidas se requiere que  $r$  sea un valor grande. A medida que los errores en la medición sean mayores el valor de  $r$  debe incrementarse nuevamente.

### 3.1 WinProbe

El programa de cómputo Conta-C es una aplicación desarrollada en el lenguaje estructurado FORTRAN. Con la finalidad de contar con una interfaz gráfica y amigable para el manejo de datos, la aplicación se ejecuta indirectamente desde el software WinProbe. La aplicación Conta-C queda entonces embebida en WinProbe ya que el

usuario establece desde esta segunda aplicación los parámetros de entrada que necesita Conta-C para resolver el IHCP; los resultados son tabulados en un documento sin que el usuario intervenga directamente.

El software WinProbe es una interfaz gráfica de usuario. La interfaz es amigable e interactiva y posee gran semejanza a una hoja electrónica de cálculo. WinProbe está diseñado en el lenguaje de programación orientado a objetos Visual Basic 5.0, por lo que posee todas las características de ejecución de las aplicaciones desarrolladas para el sistema operativo Microsoft Windows. WinProbe es un paquete construido en colaboración con los profesores X. Chen y L. Meekisho del Oregon Graduate Institute (Oregon, EEUU). Inicialmente solo era posible caracterizar la frontera de probetas cilíndricas bajo norma mediante el modelo Newtoniano [23]; el trabajo realizado en esta investigación se utilizó para anexar en WinProbe el código para resolver el problema inverso de conducción de calor (IHCP) y, presentar los datos de la solución para su análisis utilizando su interfaz gráfica, permitiendo mejorar la funcionalidad de Conta-C y la capacidad de WinProbe.

WinProbe permite al usuario el manejo de datos para cálculo y análisis en la caracterización de frontera de un sistema constituido por probetas de geometría cilíndrica bajo norma. En WinProbe es posible realizar la caracterización de la frontera térmica por dos modelos matemáticos: 1) El Modelo Newtoniano (Lumped Model) y 2) El Modelo del Problema Inverso de Conducción de Calor (IHCP Model). El primero de estos modelos supone que 1) no existen gradientes térmicos en el interior de la probeta y 2) las propiedades termofísicas son constantes.

En Winprobe es posible manejar más de un documento, *i.e.* la interfaz de Win-

Probe cuenta con una ventana principal capaz de soportar o contener ventanas secundarias o documentos. Entre las herramientas básicas encontradas en el menú se cuenta con las operaciones de: Abrir documentos (Open), Cerrar documentos (Close), Guardar el contenido del documento (Save, Save As..., Save All), y Salir o cerrar la aplicación (Exit). En el menú Edición (Edit) se encuentran las operaciones Cortar (Cut), Copiar (Copy), y Pegar (Paste). En el menú Ventana (Window) se encuentran herramientas para el manejo y distribución de documentos o ventanas secundarias.

Con respecto a la función principal de WinProbe, en el menú Proceso (Process) están disponibles las herramientas útiles para la caracterización de frontera; Densidad de Flujo de Calor y Coeficientes de Transferencia de Calor para el Modelo Newtoniano (Lumped Model) y Flujo de Calor por unidad de Longitud y Coeficientes de Transferencia de Calor para el Modelo IHCP (IHCP Model), además de herramientas adicionales adicionales para calcular la Rapidez de Enfriamiento (Cooling Rate), Cambiar el Signo en los valores en una columna (Change Sign) y Filtrar los Datos (Smooth) mediante tres modelos: 1) Polinomial de grado 3 (Cubic), 2) Mínimos Cuadrados (Least square) y 3) Interpolación con Mínimos Cuadrados (Piecewise LS). Una herramienta de graficación (Plot) permite trazar curvas de los datos tabulados en un documento.

Para ejemplificar el uso de WinProbe se tratarán datos correspondientes a una corrida experimental realizada en planta.

- Características del sistema bajo estudio:
- Probeta de geometría cilíndrica

- Material: Acero Libre de Intersticiales
- Estado inestable
- Coordenadas polares (Cilindro)
- Flujo de calor un una dimensión espacial (Dirección radial)
- Propiedades termofísicas dependientes de la temperatura
- Temple en agua a 80 °C

Las Figs. 3.17, 3.18, 3.19, 3.20 indican los procedimientos de navegación para la caracterización de frontera por el IHCP. Al ejecutar WinProbe se muestra la ventana principal de la interfaz, al seleccionar la opción abrir (Open) del menú Archivo (File) se despliega una ventana de diálogo que permite buscar un archivo dentro del sistema (Browser), una vez que se encuentra y se indica abrir el archivo, los datos que contiene el archivo se tabulan en un documento. Para propósitos de cálculo los datos que se despliegan en el documento corresponden a los pasos de tiempo de temperatura medidas dentro de la probeta durante un proceso (primera columna), y a las temperaturas medidas cerca de la superficie de la probeta por el termopar (segunda columna), Fig. 3.21.

Al seleccionar el menú Proceso (Process) se muestra un submenú en cascada del cual se selecciona la opción Densidad de Flujo de Calor (Heat Flux), ésta opción muestra dos opciones más. En esta etapa la opción corresponde al Modelo del Problema Inverso de Conducción de Calor (IHCP Model). Esta opción despliega una ventana al centro de la pantalla en cuyo contenido se especifica la función del modelo

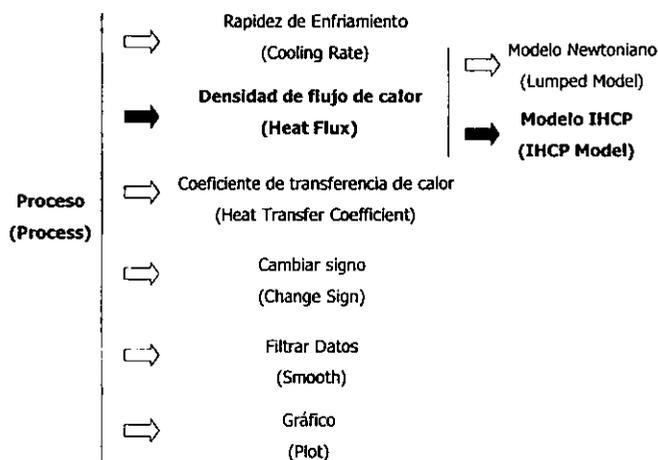


Figura 3.17: Navegación en WinProbe para el cálculo de la historia de temperatura y flujo de calor por unidad de longitud en la superficie, en el modelo que resuelve el problema inverso de conducción de calor (IHCP).

IHCP, así como sus características y los parámetros que intervienen en el cálculo. Fig. 3.22.

Al generar el evento click en el botón Aceptar (Ok), se despliega la ventana Opciones del IHCP (IHCP Options...), aquí, el usuario debe especificar los parámetros y características necesarias para resolver el IHCP.

En el marco Seleccionar Material (Select Material) es posible elegir uno de los tres materiales listados: Acero Inoxidable (Stainless Steel AISI 304), Acero Libre de Intersticiales (Interstitial Free Steel) y Acero de bajo Carbono (Carbon Steel AISI 1040). En el marco Probeta (Probe) es necesario establecer en la casilla cuya etiqueta

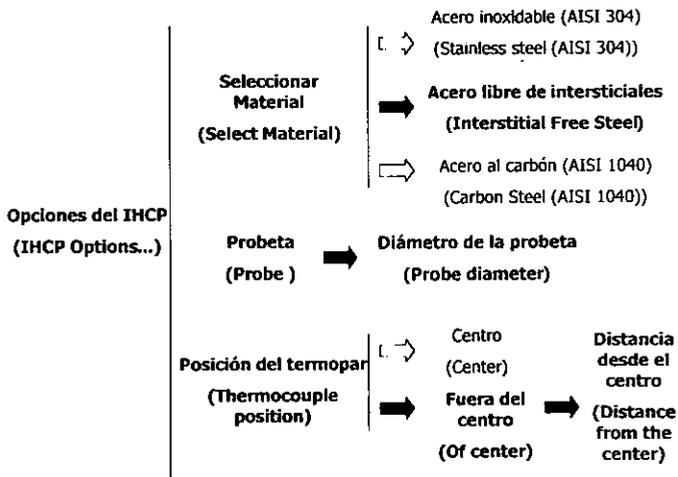


Figura 3.18: Opciones del IHCP: Selección de material y especificación de las dimensiones y posición del termopar en la probeta desde WinProbe.

lleva la leyenda Probe Diameter, el valor del diámetro de la probeta en pulgadas, a través del teclado. En el marco Posición del termopar (Thermocouple position) es posible seleccionar la posición del termopar en el centro (Center) o fuera del centro (Of center) de la probeta. Si la primera opción es seleccionada, Winprobe realiza los cálculos necesarios; de otra manera es necesario que el usuario digite a través del teclado la magnitud, en pulgadas, de la distancia entre el centro de la probeta y la posición del termopar, Fig. 3.23.

El botón Avanzadas (Advanced) desplegará, si el usuario así lo requiere, una ventana de Opciones Avanzadas (Options Advanced IHCP...). Aquí es posible modificar el número de nodos para la discretización de la probeta en la región 1 (distancia entre

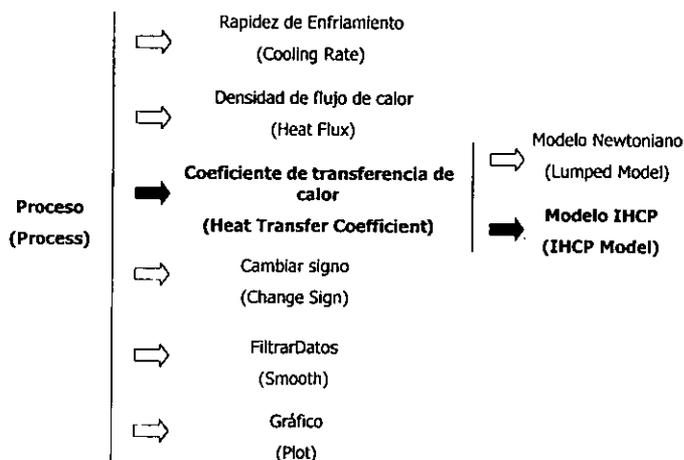


Figura 3.19: Navegación en WinProbe para el cálculo de la historia de coeficientes de transferencia de calor, en el modelo que resuelve el problema inverso de conducción de calor (IHCP).

el termopar y la superficie) y el parámetro  $r$  que establece el número de pasos de tiempo de cálculo para resolver el IHCP. Se dispone de 20 nodos para la discretización en toda la probeta, por lo que la diferencia con la elección del usuario será el número de nodos en la región 2 (distancia del centro de la probeta a la posición del termopar).

Si estas opciones han sido modificadas se fijan temporalmente para el cálculo al generar el evento click en el botón Aceptar (Ok) y se cerrará la ventana. De otra forma los valores quedarán establecidos a 5 y 15 nodos en las regiones 1 y 2 respectivamente, y el valor del parámetro  $r$  será igual a 2, Fig. 3.24 .

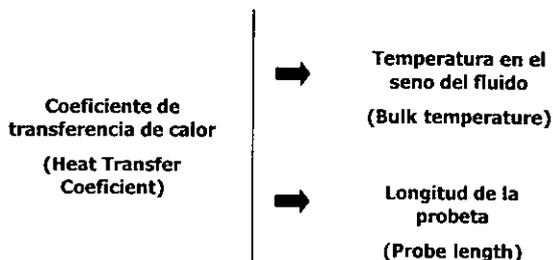


Figura 3.20: Especificación de las dimensiones y temperatura del baño de temple desde WinProbe para el cálculo de coeficientes de transferencia de calor.

Al generar el evento click en el botón Aceptar (Ok) de la ventana Opciones del IHCP (IHCP Options...) se ejecutará el programa Conta-C embebido en WinProbe.

Una barra de progreso en la base de la ventana aparecerá mostrando el avance en la ejecución de Conta-C, al finalizar, la ventana se cerrará y aparecerán en el documento fuente dos columnas adicionales cuyas leyendas especificarán el origen de los datos tabulados, a decir: Flujo de calor por unidad de longitud calculado (Calc. Flow/length) y Temperatura de superficie calculada (Calc. T sup), solución del IHCP, Figs. 3.25 y 3.26.

Otra operación de interés es el cálculo de coeficientes de transferencia de calor. Esta operación se puede realizar seleccionando la opción Modelo IHCP (IHCP Model)

The screenshot shows a window titled 'WinProbe' with a menu bar and a toolbar. The main area displays a table with two columns. The first column contains numerical values representing calculation time, and the second column contains numerical values representing surface temperature. The data is as follows:

Time	Temperature
771.24	
769.9735	
767.8285	
766.6129	
765.1572	
763.6307	
753.4225	
749.4363	
743.418	
736.9162	
728.0777	
722.4252	
713.8303	
705.0020	
698.1806	
691.1326	
683.9624	
676.9292	

Figura 3.21: Pantalla que muestra los datos de tiempo de cálculo (primer columna) y temperatura cerca de la superficie (segunda columna) tabulados en un documento de WinProbe, al abrir un archivo.

del submenú Coeficiente de Transferencia de Calor (Heat Transfer Coefficient) del menú Proceso (Process).

Esta acción despliega una ventana en la cual el usuario debe digitar los datos que se le piden en cada una de las casillas. Estos datos corresponden a la temperatura en el seno del baño de temple y la longitud de la probeta.

El cálculo de coeficientes de transferencia de calor se realiza a partir de la aplicación de la Ley de Enfriamiento de Newton, con los datos de flujo de calor por unidad de longitud y temperatura de superficie calculados por el IHCP, por lo que es necesario haberlos calculado antes de esta operación, Fig. 3.27.



Figura 3.22: Pantalla que muestra un cuadro de diálogo en WinProbe, para informar al usuario de las características y una breve introducción al modelo IHCP.

La opción Gráfico (Plot...) del menú Proceso (Process) dirige al usuario a una ventana de graficación donde se cuenta con las herramientas necesarias para ajustar la escala de los ejes, y definir etiquetas en cada eje para la curva generada. También es posible trazar más de una curva de variable dependiente sobre una variable independiente, el software permite para este caso seleccionar un color para cada curva. Opcionalmente el área de trazo puede presentar una malla. Una vez definido el formato del gráfico este puede imprimirse y/o guardar los datos en un archivo para posteriormente incorporarlos a un reporte. Dado que el gráfico es un objeto también es posible copiarla a un documento, Fig. 3.28.

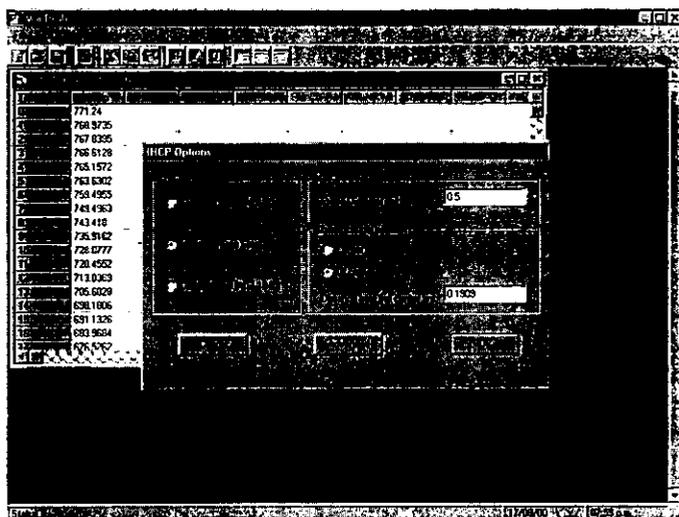


Figura 3.23: Pantalla que muestra el panel de datos para especificar, el material y diámetro de la probeta, así como la magnitud con respecto a su radio de la posición del termopar, para el modelo IHCP.

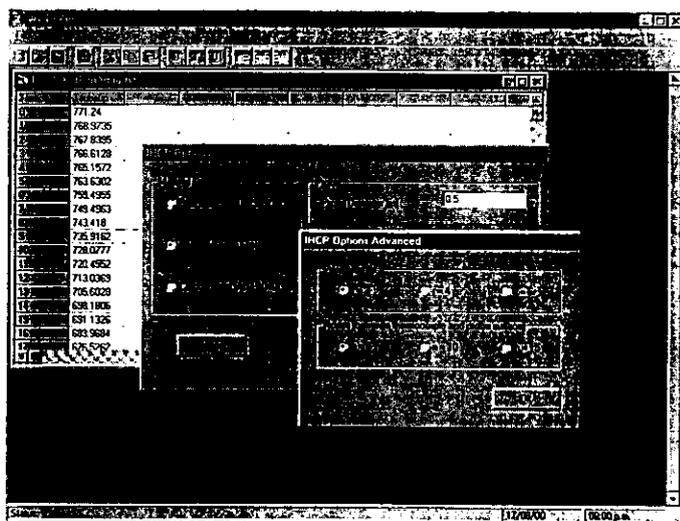


Figura 3.24: Pantalla que muestra las opciones avanzadas del IHCP en WinProbe. para especificar el número de pasos de tiempo futuro,  $r$ , y la distribución de nodos en cada región,  $N_1$  y  $N_2$ , determinada por la posición del termopar.

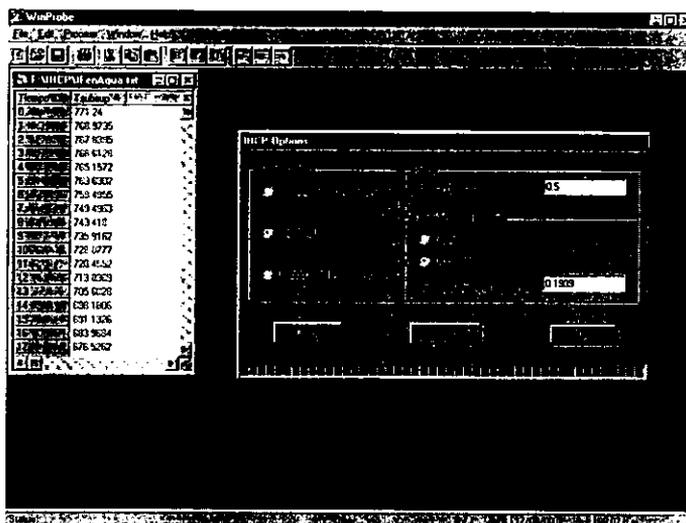


Figura 3.25: Pantalla que muestra las opciones del IHCP en WinProbe mientras se ejecuta Conta-C para un caso de estimación de flujo de calor por unidad de longitud y temperatura de superficie.

ID	Date	Flow	Temperature
1	771 24	541 22007940152	763 36720102
2	763 9735	427 48347220714	768 1594237947
3	767 8225	463 24389648241	766 824813538
4	766 6178	560 20192866300	765 522179650
5	765 1572	1053 4783663100	763 918251388
6	763 6202	1914 5246343250	760 374846290
7	759 4255	-4122 1525800940	751 550833100
8	743 4953	-4370 732207720	744 953882070
9	743 410	5274 636294380	737 285712300
10	736 9162	5847 379636340	725 812504500
11	729 0777	4229 3694025310	721 631307200
12	720 4552	6451 5826567000	714 325791100
13	713 0333	6645 6790305210	706 423641390
14	705 0020	4861 1379105220	693 133145900
15	698 1886	6347 8353344670	691 601637170
16	691 1325	6347 8317222790	684 640780000
17	683 9634	6340 6367918050	677 152700100
18	676 5262	7034 4512812120	669 639041800

Figura 3.26: Pantalla que muestra la solución al IHCP tabulada en el documento en WinProbe, después de ejecutar un caso de estimación de flujo de calor por unidad de longitud (tercera columna) y temperatura de superficie (cuarta columna).

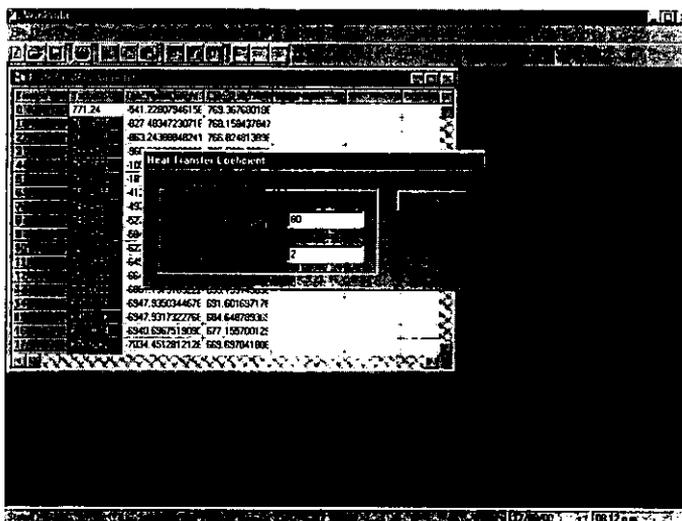


Figura 3.27: Pantalla que muestra el panel de datos para establecer la temperatura del baño de temple y la altura de la probeta para el cálculo de coeficientes de transferencia de calor para el modelo IHCP en WinProbe.

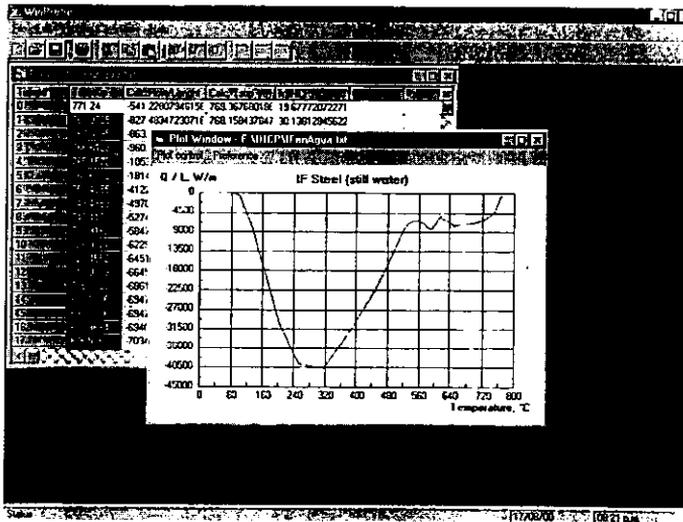


Figura 3.28: Pantalla que muestra la flujo de calor por unidad de longitud contra el paso de tiempo de cálculo en forma gráfica, en el trazo de una curva en WinProbe.

# Capítulo 4

## Desarrollo Experimental

En este capítulo se describen los procedimientos y las condiciones bajo las cuales se realiza el temple de las probetas instrumentadas.

### 4.1 Probetas

Se fabricaron probetas de aceros disponibles comercialmente: acero libre de intersticiales (IF), acero inoxidable AISI 304 y acero de bajo carbono AISI 1018. El acero inoxidable es un material utilizado comúnmente para medir curvas de enfriamiento debido a que tiene una buena resistencia a la oxidación, y el acero al carbono tiene las propiedades termofísicas representativas de los aceros térmicamente tratables. La Fig. 4.1 es la representación esquemática del dispositivo.

La relación diámetro longitud, asegura el flujo de calor en una dimensión a media altura [22]. El termopar cerca de la superficie está localizado a 1.5 mm de la misma, a media altura; la respuesta térmica medida en esta posición se utilizará para estimar

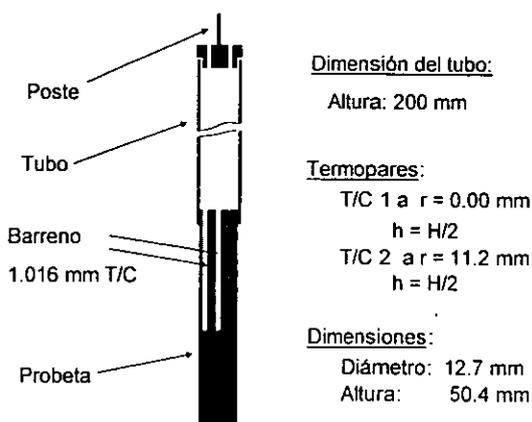


Figura 4.1: Representación esquemática del dispositivo experimental.

el flujo de calor en la superficie. Las características físicas de superficie de la probeta, después del maquinado, son: un acabado a lija malla 600, y una limpieza total que la liberen de grasa. Un tubo de acero de 200 mm de longitud con el mismo acabado superficial fue enroscado a la parte superior de la probeta para proteger los termopares. Los termopares fueron asegurados por una barra de acero para evitar que se movieran.

## 4.2 Condiciones de temple

El procedimiento aplicado consiste en incrementar la temperatura de las probetas sumergiéndolas en un baño industrial de sales fundidas para proteger la superficie de las probetas de la oxidación. Una vez que la probeta alcanza una temperatura predeterminada se extrae del baño de sales y se coloca dentro del medio de temple.

Se consideran cuatro condiciones de enfriamiento: aire forzado, aire y aceite quietos a temperatura ambiente, y agua quieta a 80 °C.

### **Calentamiento**

El procedimiento de calentamiento consiste en sumergir la probeta instrumentada en un baño de sales fundidas industrial, para elevar su temperatura desde la temperatura ambiente (32-34 °C medida en planta). hasta alrededor de 765 °C. Después de cada ensayo la probeta debe tener las mismas características superficiales que al inicio del primer ensayo. Por esto, las sales presentes en la probeta al final de cada proceso son removidas con agua. Esto asegura que las dimensiones de la probeta se mantienen para un gran número de ensayos. El poste de acero que sujeta los termopares se sujeta a una barra sostenida por las paredes del horno y perpendicular al poste, el poste a su vez permite regular la profundidad a la que se sumerge la probeta en el baño, esta profundidad se estableció a tres cuartas partes de la longitud del tubo que protege los termopares (150 mm), por lo que la probeta se sumergió a 200.8 mm de la superficie en el baño como se muestra en la Fig. 4.2. Una vez que se ha sumergido la probeta se inicia el monitoreo de temperatura, para ello se utilizó un software de adquisición de datos instalado en una computadora portátil, además de una tarjeta electrónica en cuyos puertos o canales se conectan los termopares; se establece que el sistema adquiera datos a intervalos de un segundo. En la interfaz del software es posible observar la evolución de temperatura cerca de la superficie a media altura y en el centro geométrico de la probeta hasta que alcanza la temperatura establecida, una vez logrado esto, la probeta se mantiene dentro del baño durante un corto periodo

de tiempo para asegurar que la temperatura sea homogénea en cualquier punto en su interior. Después de transcurrido este tiempo la probeta se extrae del baño y se traslada al medio de enfriamiento.

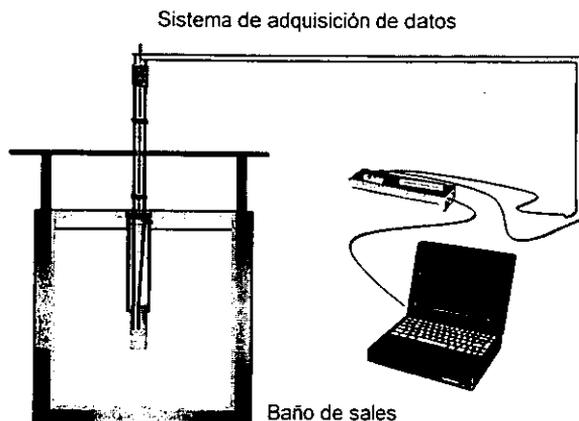


Figura 4.2: Representación esquemática del dispositivo sumergido en el baño de sales y el sistema de adquisición de datos.

## Enfriamiento

**Aire Forzado** Para lograr esta condición de enfriamiento la probeta fue colocada frente a un ventilador. La probeta se colocó en el centro del chorro de aire a una distancia de 70 cm de la boca del ventilador, para lo cual el dispositivo que sostiene la probeta se sujetó a un banco que permitió mantenerlo fijo durante el enfriamiento. La temperatura promedio en el flujo de aire sobre la probeta en el proceso de enfriamiento del temple para cada uno de las pruebas se mantuvo en  $34^{\circ}\text{C}$ . La interfaz del software

de adquisición permite observar la evolución de temperatura en las posiciones de los termopares hasta que alcanza la temperatura ambiente en el cuerpo de la probeta.

**Aire Quieto** En esta condición de enfriamiento se colocó al dispositivo que sostiene la probeta en un banco, en un lugar específico en la planta de tratamientos donde las corrientes de aire fueran mínimas. La temperatura promedio del aire sobre la probeta en el proceso de enfriamiento del temple para cada uno de los baños, se mantuvo en 34 °C.

**Aceite Quieto** En esta condición de enfriamiento se sumerge la probeta en un baño de temple de aceite industrial. La profundidad a la cual se sumergió la probeta fue regulada nuevamente por el tubo que protege los termopares, la cual se estableció a tres cuartas partes de su longitud. La tina rectangular que contiene el aceite mide 1.2 m de ancho por 2.5 m de largo y tiene una profundidad de 1 m desde la superficie del aceite, la temperatura del aceite en la tina en cada uno de los ensayos se mantuvo en 40 °C.

**Agua Quieta** La condición de enfriamiento para el agua quieta consistió en sumergir la probeta en una tina circular de 60 cm de diámetro interno y una profundidad de 1.5 m, la profundidad a la cual se sumergió la probeta fue regulada nuevamente por el tubo que protege los termopares, la cual se estableció a tres cuartas partes de su longitud. La temperatura en esta condición de enfriamiento se mantuvo en promedio a 80 °C para cada uno de los ensayos.

### 4.3 Adquisición de datos

Para medir la respuesta de temperatura, se utilizó un sistema de adquisición de datos controlado por una computadora. Los termopares tipo K en el extremo contrario a la junta fría fueron conectados a un módulo de adquisición de datos (Keithley's Smartlink, Model KNM-TC42) el cual a su vez se conectó a una computadora. El módulo de adquisición de datos tiene seis canales y podría tomar más de 15 lecturas por segundo (cuando se utiliza un solo termopar).

Los datos de temperatura en cada medio de enfriamiento se registran por el software de adquisición a intervalos de aproximadamente un segundo para generar las curvas de enfriamiento. Posteriormente los datos se interpolaron a cada segundo, para propósitos de cálculo con el programa Conta-C descrito anteriormente.

# Capítulo 5

## Resultados

Se obtuvieron curvas de enfriamiento para aceros IF, inoxidable AISI 304, y de bajo carbono AISI 1018, para cuatro condiciones de enfriamiento: aire forzado, aire y aceite quieto a temperatura ambiente, y agua quieta a 80 °C. Un ejemplo de un ciclo de calentamiento y enfriamiento se muestra en la Fig. 5.1. El calentamiento típico desde temperatura ambiente hasta la temperatura de ensayo es de 2 minutos; la probeta se mantuvo en el baño para asegurar una distribución de temperatura uniforme en la probeta antes de dar inicio a la etapa de enfriamiento. La buena reproducibilidad de los resultados se ilustra en la Fig. 5.2; este gráfico muestra tres curvas de enfriamiento obtenidas separadamente. Las curvas de enfriamiento medidas en el centro de las probetas de acero IF e inoxidable enfriadas en los cuatro medios de enfriamiento se muestran en las Figs. 5.3 y 5.4; las curvas muestran el comportamiento típico en estos medios de enfriamiento y similitud entre ambos materiales.

En el desarrollo de la técnica para resolver el IHCP se asume que no hay fuentes de calor localizadas dentro del material. Los aceros térmicamente tratables (como es

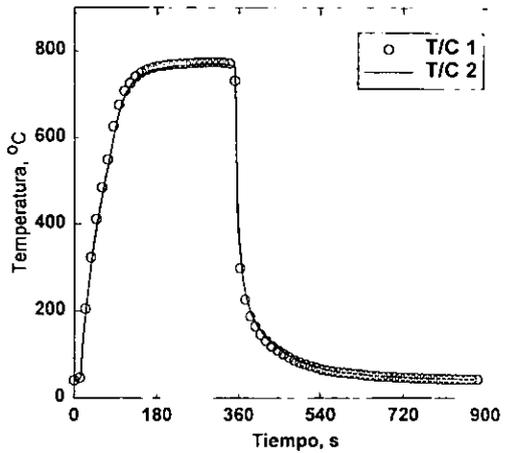


Figura 5.1: Respuesta térmica medida en (a) el centro (círculos abiertos) y (b) subsuperficie (línea sólida), durante un ciclo experimental completo.

el caso del acero de bajo carbono AISI 1018) que se someten a un proceso térmico están exentos de esta condición. Las curvas de enfriamiento obtenidas con el acero inoxidable AISI 304 y el acero de bajo carbono AISI 1018 enfriados en aire forzado se muestran en la Fig. 5.5. El calor liberado por la transformación eutécticoide del acero de bajo carbono modifica significativamente la curva de enfriamiento alrededor de los 700 °C, mientras que el acero inoxidable no presenta ninguna transformación.

El calor liberado debido a la fracción de austenita transformada en la reacción eutécticoide se calcula con:

$$Q' = \rho \Delta H \frac{\Delta f}{\Delta t}, \quad 0 \leq f \leq 1$$

donde  $Q'$  es el calor liberado por la transformación,  $\rho$  es la densidad,  $\Delta H$  el calor latente de transformación y  $\frac{\Delta f}{\Delta t}$  la fracción de austenita transformada por unidad de

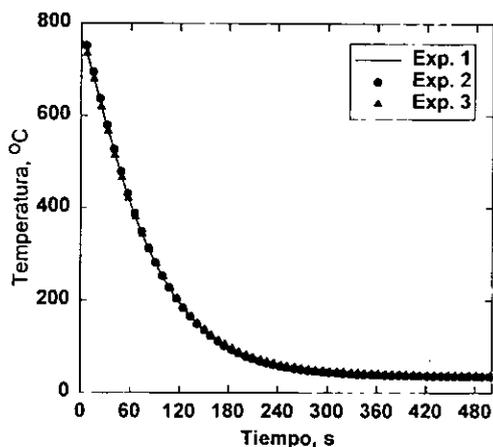


Figura 5.2: Reproducibilidad de las corridas experimentales: tres curvas de enfriamiento medidas con la probeta de acero IF enfriada con aire forzado.

tiempo; es prácticamente despreciable para el acero IF. De acuerdo a la cantidad de carbono en los aceros IF y AISI 1018 la cantidad de austenita presente a la temperatura de la reacción eutécticoide en el equilibrio (diagrama de equilibrio Fe-C) es:

$$\text{IF} : \frac{0.06 - 0.025}{0.8 - 0.025} \approx 0.045$$

$$\text{1018} : \frac{0.18 - 0.025}{0.8 - 0.025} = 0.2$$

Se observa que la cantidad de austenita por transformar en el acero IF es aproximadamente la quinta parte que para el acero AISI 1018. Debido a esto el calor liberado durante la transformación austenita - perlita (reacción eutécticoide) es mucho menor para el acero IF con respecto al acero 1018 y, por lo tanto, no afecta la subsecuente

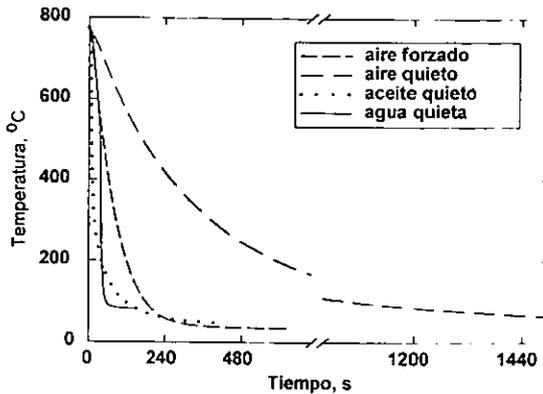


Figura 5.3: Respuesta térmica medida en el centro de la probeta de acero IF en (a) aire forzado (línea segmentada), (b) aire quieto (línea segmentada-punteada), (c) aceite quieto (línea punteada), y (d) agua quieta (línea sólida).

obtención de datos (curva de enfriamiento). Curvas de enfriamiento para los aceros IF y AISI 1018 enfriados en aire forzado se muestra en la Fig. 5.6.

Una consideración importante para utilizar acero IF para la fabricación de probetas es que sus propiedades térmicas son similares a las de los aceros térmicamente tratables, especialmente cuando se les compara con las propiedades de los aceros inoxidables y aleaciones base níquel o plata. Las curvas de enfriamiento obtenidas con las probetas de los tres materiales en aceite quieto y las correspondientes curvas de rapidez de enfriamiento calculadas se muestran en las Figs. 5.7 y 5.8 respectivamente. Las curvas de enfriamiento de los tres materiales son muy similares, pero la curva de rapidez de enfriamiento calculada para el acero inoxidable es ligeramente diferente de las curvas para los aceros IF y AISI 1018, lo que confirma que el enfriamiento de

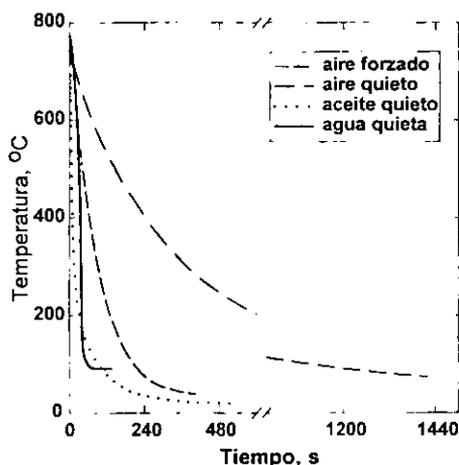


Figura 5.4: Respuesta térmica medida en el centro de la probeta de acero inoxidable en (a) aire forzado (línea segmentada), (b) aire quieto (línea segmentada-punteada), (c) aceite quieto (línea punteada), y (d) agua quieta (línea sólida).

aceros térmicamente tratables puede simularse de mejor manera cuando se utiliza una probeta de acero IF.

Para modelar la evolución del campo térmico durante el temple es necesario que las condiciones de frontera de transferencia de calor se conozcan con precisión. La respuesta térmica medida con la probeta de acero IF se utilizó en el programa de cómputo para resolver el IHCP (Conta-C) para estimar el flujo de calor por unidad de longitud como una función de la temperatura en la superficie de la probeta. Tal como se describió en un capítulo previo, se utilizó el programa de cómputo Conta-C embebido en una aplicación de interfaz gráfica, amigable para el usuario, para facilitar el manejo de datos y el trazo de curvas (WinProbe). Los resultados para el

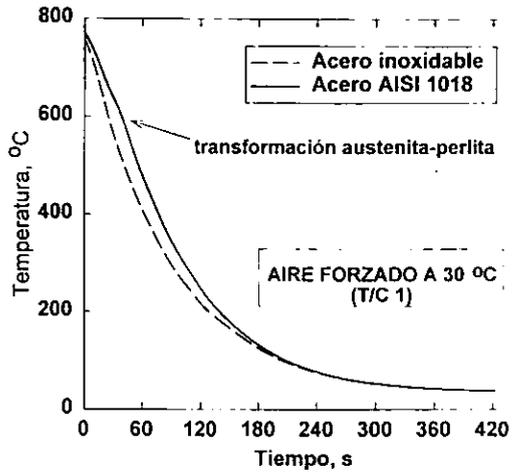


Figura 5.5: Respuesta térmica medida en el centro de (a) la probeta de acero inoxidable (línea segmentada) y (b) la probeta de acero AISI 1018 (línea sólida), enfriadas en aire forzado.

enfriamiento para 1) con aire forzado, 2) en aceite quieto, y 3) en agua quieta a 80 °C, se muestran en las Figs. 5.9, 5.10 y 5.11, respectivamente. La probeta enfriada en aire forzado (Fig. 5.9) se enfrió por dos mecanismos: radiación y convección forzada; el flujo de calor se incrementa conforme la temperatura disminuye. alcanza un máximo y entonces disminuye hasta cero. En los otros dos casos, parte del enfriamiento ocurre en presencia de ebullición. El único caso que muestra los tres estados de ebullición (película de vapor, transición y nucleación) fueron observados en enfriamiento con agua quieta a 80 °C (Fig. 5.11).

Estos resultados han sido publicados en la **19th ASM Heat Treating Conference** [24].

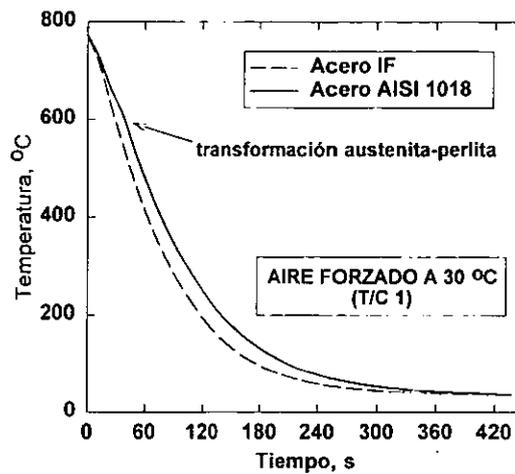


Figura 5.6: Respuesta térmica medida (curva de enfriamiento) en el centro de (a) la probeta de acero IF (línea segmentada) y (b) la probeta de acero AISI 1018 (línea sólida), enfriadas en aire forzado.

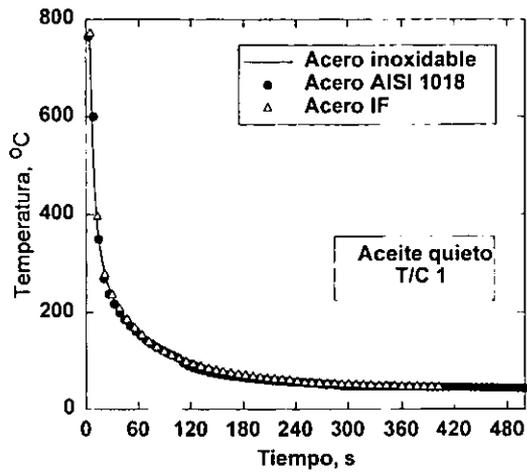


Figura 5.7: Respuesta térmica medida (curva de enfriamiento) en el centro de (a) la probeta de acero inoxidable (línea sólida), (b) la probeta de acero 1018 (círculos abiertos), y (c) la probeta de acero IF (triángulos abiertos). templadas en aceite quieto.

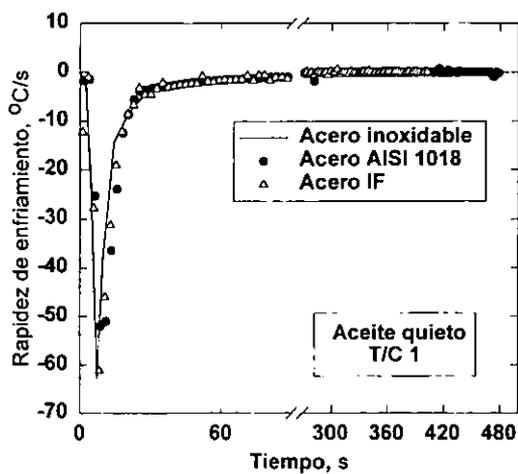


Figura 5.8: Rapidez de enfriamiento medida en el centro de (a) la probeta de acero inoxidable (línea sólida), (b) la probeta de acero 1018 (círculos abiertos), y (c) la probeta de acero IF (triángulos abiertos), templados en aceite quieto.

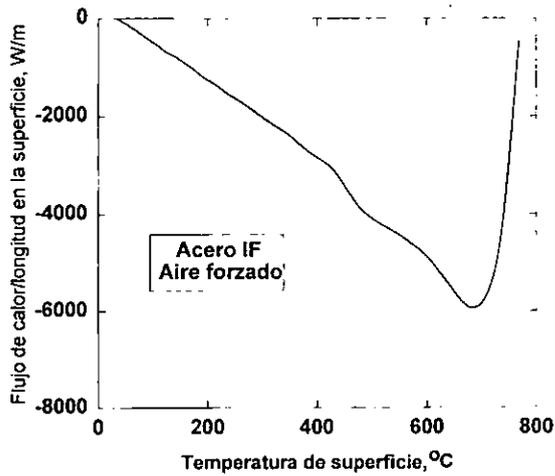


Figura 5.9: Flujo de calor por unidad de longitud estimado, como una función de la temperatura de superficie, para la probeta de acero IF enfriada con aire forzado.

Un valor de  $r = 2$  fue utilizado para el cálculo.

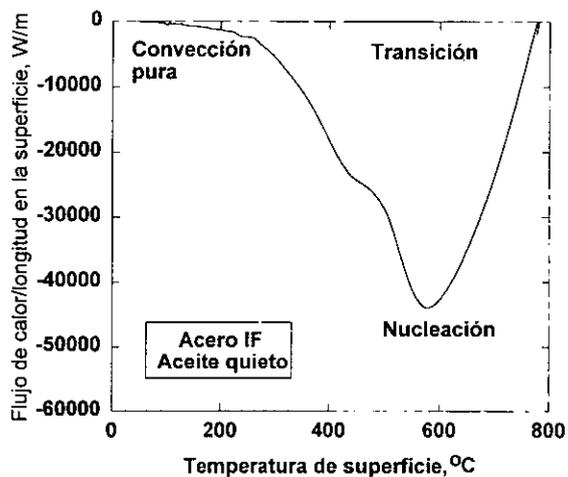


Figura 5.10: Flujo de calor por unidad de longitud estimado, como una función de la temperatura de superficie, para la probeta de acero IF templada en aceite quieto.

Un valor de  $r = 2$  fue utilizado para el cálculo.

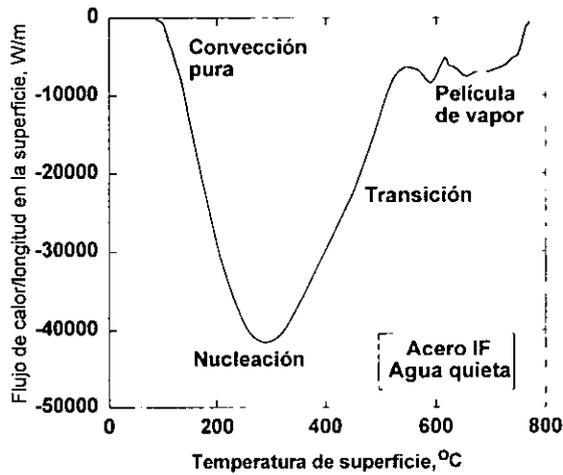


Figura 5.11: Flujo de calor por unidad de longitud estimado, como una función de la temperatura de superficie, para la probeta de acero IF templada en agua quieta. Un valor de  $r = 2$  fue utilizado para el cálculo.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Los casos de propiedades termofísicas no dependientes y dependientes de la temperatura, para un cilindro sólido largo, en la validación del programa de cómputo Conta-C, muestran que el método para resolver el IHCP produce valores precisos de flujo de calor por unidad de longitud y temperatura de superficie.

El manejo, presentación y análisis de los datos estimados por el problema inverso se facilita al utilizar el software WinProbe.

Los resultados indican que el acero IF podría utilizarse como material para fabricar probetas para el análisis de curvas de enfriamiento.

Para las curvas de enfriamiento observadas, el calor liberado por la transformación austenita-perlita en la probeta de acero IF, no modifica significativamente la curva de enfriamiento y, por lo tanto, no interfiere con el procedimiento de análisis de datos.

El dispositivo fabricado para medir la respuesta térmica es eficiente, reproducible y económico.

Debido a la similitud en las propiedades termofísicas del acero IF y los aceros

tratables térmicamente, la evaluación del acero IF indica que se pueden obtener mejores predicciones de la evolución del campo térmico durante las operaciones de temple de aceros típicos, cumpliendo así el objetivo propuesto.

Los resultados de esta investigación han sido publicados en una conferencia técnica de tratamientos térmicos.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 G.E. Totten, M.E. Dakins y R.W. Heins. "Cooling Curve Analysis of Synthetic Quenchants - A Historical Perspective". *J. Heat Treating*, 6 (2), 1988, pp. 87-95.
- 2 C.E. Bates y G.E. Totten. "Quantifying Quench-Oil Cooling Characteristics". *Advanced Materials and Processes*, 139 (3), 1991, pp. 25-28.
- 3 I. Tamura, K. Fukuhara y S. Asada. "Comparative Study of Cooling Curves with JIS Silver Specimens and Alloy 600 Specimens in Relation to Additive Effectiveness". *J. of Materials Engineering and Performance*, 3 (3), 1994, pp. 367-370.
- 4 J. Bodin y S. Segerberg. "Measurement and Evaluation of the Power of Quenching Media for Hardening". *Heat Treatment of Metals (UK)*, 20 (1), 1993, pp. 15-23.
- 5 Quenching and Distortion Control Technical Committee. "2<sup>nd</sup> Report On Evaluation of Testing Methods of Cooling Power of Quenching Media". The Japan Society for Heat Treatment, 1999.
- 6 J. Bodin y S. Segerberg. "Measurement and Evaluation of the Quenching Power of Quenching Media for Hardening". In **1st Int. Conf. on Quenching and Distortion Control**, G.E. Totten, Ed., ASM International, 1992, pp. 1-12.
- 7 C.E. Bates y G.E. Totten. "Application of Quench Factor Analysis to Predict Hardness Under Laboratory and Production Conditions". En **1st Int. Conf. on Quenching and Distortion Control**, G.E. Totten, Ed., ASM International, 1992, pp. 33-39.
- 8 J.T. Staley. "Quench Factor Analysis of Aluminum Alloys". *Materials Science and Technology*, 3, 1987, pp. 923-935.
- 9 T. Réti, I. Czinege, M. Réger y J. Takács. "An Indirect Method for Quantitative Characterization of the Quenching Power of Quenching Media". En **1st Int. Conf. on Quenching and Distortion Control**, G.E. Totten, Ed., ASM International. 1992, pp. 301-309.
- 10 B. Liščić y T. Filetin. "Computer-Aided Evaluation of Quenching Intensity and Prediction of Hardness Distribution". *J. Heat Treating*, 5(2), 1988, pp. 115-124.
- 11 B. Liščić, S. Švaic y T. Filetin. "Workshop Designed System for Quenching Intensity Evaluation and Calculation of Heat Transfer Data". En **1st Int. Conf. on Quenching and Distortion Control**, G.E. Totten, Ed., ASM International, 1992, pp.17-26.

- 12 K.A. Woodbury. "Effect of Thermocouple Sensor Dynamics on Surface Heat Flux Predictions Obtained Via Inverse Heat Transfer Analysis". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33 (12), 1990, pp.2641 - 2649.
- 13 J.V. Beck, B.Litkouhi y C.R. St. Clair Jr. "Efficient Solution of the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem". *Numerical Heat Transfer*, 5, 1982, pp. 275 - 286.
- 14 M. Raynaud y P. Bransier. "Experimental Validation of New Space Matching Finite Difference Algorithm for the Inverse Heat Conduction Problem". En **8th Int. Heat Transfer Conference**. Hemisphere Publishing Corporation, N.Y.,1986, pp. 17 - 22.
- 15 G.W. Krutz, R.J. Schoenhals y P.S. Hore. "Aplication of the Finite Element Method to the Inverse Heat Conduction Problem". *Numerical Heat Transfer*, 1, 1978, pp. 489 - 498.
- 16 D. Maillet, A. Degiovanni y R. Pasquetti. "Inverse Heat Conduction Applied to the Measurement of Heat Transfer Coefficient on a Cylinder: Comparison between an Analytical and a Boundary Element Technique". *Journal of Heat Transfer*, 113, 1991, pp. 549 - 557.
- 17 P. Archambault y A. Azim. "Inverse Resolution of the Heat Transfer Equation: Application to Steel and Aluminum Alloy Quenching". ASM International, 4. 1995, pp. 730 - 736.
- 18 B. Hernandez-Morales, J.K. Brimacombe y E.B. Hawbolt. "Characterization of the Boundary Condition in Heat Treatment Operations Using an Inverse Heat Conduction Algorithm". *Proceedings of the ASME Heat Transfer Division*, 317 (2), 1995, pp. 559 - 566.
- 19 J.V. Beck, "User's Manual for CONTA - Program for Calculating Surface Heat Fluxes from Transient Temperatures Inside Solids.", Sandia Nat. Lab. SAND 84 - 7134, 1983.
- 20 A. Majorck, B. Scholtes, H. Müller, y E. Moncherauch. "The Influence of Heat Transfer on the Development of Stresses, Residual Stresses and Distortions in Martensitically Hardened SAE 1045 and SAE 4140", En **Proceedings of the First International Conference on Quenching & Control of Distortion**. Chicago, Illinois. USA, 22 - 25 September, 1992, pp. 171 - 179.
- 21 S.V. Patankar y D.B. Spalding: *J. Heat Mass Transfer*, 1971, 15, 1787 - 1801.
- 22 G.E. Totten, C.E. Bates y N.A. Clinton. "Handbook of Quenchants and Quenching Technology", *Cooling Curve Analysis*, Capitulo 3, pp. 69 - 128. Ed. ASM International, 1993.

- 23 X. Chen, L. Meekisho y G.E. Totten. "Computer-Aided Analysis of the Quenching Probe Test". En **18th ASM Heat Treating Conference**, ASM International, 1999, pp. 545 - 551.
- 24 B. Hernández-Morales, J.S. Téllez-Martínez, A. Ingalls-Cruz y J.A. Barrera Godínez. "Cooling Curve Analysis Using an Interstitial-Free Steel". En **19th ASM Heat Treating Conference**, ASM International, Cincinnati, Ohio, 1999.
- 25 M. Raynaud y J.V. Beck. "Methodology for Comparison of Inverse Heat Conduction Methods". Transaction of the ASME, Journal of Heat Transfer, 110, February 1988, pp. 30 - 37.
- 26 D. Kinkaid y W. Cheney. "Análisis Numérico", Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, Capítulo 9, pp. 591 - 658. Ed. Addison Wesley Iberoamericana, 1994.
- 27 M. Necati Özisik. "Heat Conduction", Inverse Heat Conduction Problems (IHCP), Capítulo 14, pp. 571 - 616, Ed. John Wiley and Sons 2nd Edition, New York 1993.

## Apéndice A

### Problema Inverso de Conducción de Calor (IHCP).

El objetivo al resolver el problema inverso es encontrar el mejor estimado de los elementos en las historias de densidad de flujo de calor  $q(t_i)$  y temperatura  $T(R, t_i)$  en la superficie de la probeta, utilizando las mediciones de temperatura  $Y_{ji}$  ( $j = 1; i = 1, 2, \dots, M$ ). El problema es no lineal puesto que las propiedades termofísicas dependen de la temperatura.

En la solución al problema inverso se asume que la densidad de flujo de calor es constante a través de un número específico de pasos de tiempo futuros, i.e. después de que los valores  $q_1, q_2, \dots, q_{M-1}$  se han estimado, la densidad de flujo de calor  $q_{M+1}, \dots, q_{M+r-1}$  se asume son temporalmente iguales a  $q_M$  (la densidad de flujo de calor promedio entre  $t_{M-1}$  y  $t_M$  que se estima al tiempo de cálculo actual  $M$ ).

$$q_{M+1} = q_{M+2} = \dots = q_{M+r-1} = q_M \quad (6.1)$$

donde  $r$  representa el número de pasos de tiempo futuros utilizados para el cálculo.

A diferencia del problema directo, los pasos de tiempo pequeños causan dificultad en el IHCP para el cálculo de los elementos de densidad de flujo de calor. la dificultad se reduce significativamente utilizando temperaturas futuras en conjunto con un criterio de mínimos cuadrados, i.e. debido a que el problema por resolver es matemáticamente "mal planteado", en el sentido de que la existencia, unicidad y/o estabilidad de la solución no están aseguradas, una posible solución es transformar al problema inverso en una solución aproximada "bien planteada".

La existencia de la solución a un problema inverso se garantiza si se minimiza la norma de mínimos cuadrados para dicha solución.

Sea la norma de mínimos cuadrados:

$$S = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1})^2 \quad (6.2)$$

y puesto que  $T_{j,M+i-1}$  es una función de  $q_M$ , derivando a  $S$  con respecto a  $q_M$  se tiene:

$$\frac{\partial S}{\partial q_M} = 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}) \left( -\frac{\partial T_{j,M+i-1}}{\partial q_M} \right) \quad (6.3)$$

igualando a cero:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}) \left( -\frac{\partial T_{j,M+i-1}}{\partial q_M} \right) = 0 \quad (6.4)$$

donde  $T_{j,M+i-1}$  y  $\frac{\partial T_{j,M+i-1}}{\partial q_M}$  son evaluadas en el mínimo de  $S$ . La temperatura es una función de  $q_M$  y para pequeños cambios en  $q_k$  de un tiempo al siguiente, la serie de Taylor sobre  $q_{M-1}$  se expresa como:

$$T_{j,M+i-1} = T_{j,M+i-1}^* + (q_M - q_{M-1}) T_{j,M+i-1,q}^* \quad (6.5)$$

la notación \* significa que  $T$  se evalúa utilizando las propiedades y la densidad de flujo de calor ( $q_{M-1}$ ) para el tiempo  $t_{M-1}$ . El término:

$$T_{j,M+i-1,q}^* \cdot \frac{\partial T_{j,M+i-1}}{\partial q_M} \quad (6.6)$$

es llamado el coeficiente de sensibilidad: la diferencia  $q_M - q_{M-1}$  representa una corrección en la densidad de flujo de calor.

La expansión por serie de Taylor es exactamente verdadera y no una aproximación si las ecuaciones que determinan el problema directo son lineales, por lo que no es necesario iterar para estimar  $q_M$ , i.e, para pequeños pasos de tiempo  $\Delta t$ , las propiedades  $k$  y  $pCp$  cambian poco de un paso de tiempo al siguiente en cada sección dentro del cuerpo de la probeta. En otras palabras aunque la distribución de temperatura del centro a la superficie de la probeta varie extremadamente y consecuentemente las propiedades termofísicas del material al depender de la temperatura, de un paso de tiempo  $t_i$ , al siguiente  $t_{i+1}$ , la distribución se considera permanece puntualmente constante mientras se calcula  $q_M$ .

Substituyendo 6.5 en 6.4 se tiene:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left( Y_{j,M+i-1} - \left( T_{j,M+i-1}^* + (q_M - q_{M-1}) T_{j,M+i-1,q}^* \right) \right) \left( T_{j,M+i-1,q}^* \right) = 0 \quad (6.7)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left( Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}^* - (q_M - q_{M-1}) T_{j,M+i-1,q}^* \right) \left( T_{j,M+i-1,q}^* \right) = 0 \quad (6.8)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left( Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}^* \right) \left( -T_{j,M+i-1,q}^* \right) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (q_M - q_{M-1}) \left( T_{j,M+i-1,q}^* \right)^2 = 0 \quad (6.9)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left( Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}^* \right) \left( -T_{j,M+i-1,q}^* \right) + (q_M - q_{M-1}) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left( T_{j,M+i-1,q}^* \right)^2 = 0 \quad (6.10)$$

$$(q_M - q_{M-1}) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (T_{j,M+i-1,q}^*)^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}^*) (T_{j,M+i-1,q}^*) \quad (6.11)$$

$$q_M - q_{M-1} = \frac{1}{\sum \sum (T_{j,M+i-1,q}^*)^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}^*) (T_{j,M+i-1,q}^*) \quad (6.12)$$

Si:

$$\Delta M = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (T_{j,M+i-1,q}^*)^2 \quad (6.13)$$

entonces:

$$q_M - q_{M-1} = \frac{1}{\Delta M} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}^*) (T_{j,M+i-1,q}^*) \quad (6.14)$$

Dado que coeficientes de sensibilidad cambian con el tiempo y la posición, para pequeños pasos de tiempo estos son calculados considerando también a las propiedades termofísicas invariantes durante el cálculo de la densidad de flujo de calor. Al hacer esta consideración las Ecs. 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7 se linealizan. Después de que la densidad de flujo de calor  $q_M$  fue calculada, se calcula la distribución de temperatura a través del cuerpo de la probeta mediante un algoritmo con un método numérico de diferencias finitas, utilizando el valor de la densidad de flujo de calor calculado como condición de frontera en la superficie de la probeta. Utilizando los nuevos valores de temperatura se actualizan nuevamente el valor de las propiedades termofísicas, se incrementa al índice M y continua el procedimiento.

El método utilizado para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad consiste en tomar la derivada de las ecuaciones 3.4 a 3.7 en su forma diferencial y resolver

el sistema de ecuaciones resultante. La forma de las ecuaciones de diferencias finitas para los coeficientes de sensibilidad son las mismas que las utilizadas para el problema original con la variable dependiente  $T$ .

Al tiempo  $t_m$  el valor de la función  $q(t)$  es uno solo e igual a  $q_m$ , el tiempo inicial es  $t_{M-1}$  y  $f(r)$  la distribución de temperatura conocida al inicio en la probeta al tiempo  $t_{M-1}$ . Los parámetros  $k$ ,  $\rho C_p$  son evaluados a la temperatura inicial  $T_{j,m-1}$ . Puesto que los coeficientes en las ecuaciones 3.4 a 3.6 constituidos por los parámetros  $k$  y  $\rho C_p$  no cambian mientras se calcula  $q_m$ , las ecuaciones se linealizan, por lo que la única variable que es una función de  $q_m$  es  $T$ , se tiene que:

$$Tq = \frac{\partial T_{j,M+i-1}}{\partial q_M} \quad (6.15)$$

donde  $Tq$  es la notación del coeficiente de sensibilidad.

Tomando la derivada de las ecuaciones 3.4 a 3.7 tenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial Tq}{\partial r} \right) = \rho C_p \frac{\partial Tq}{\partial t} \quad (6.16)$$

$$-k \frac{\partial Tq}{\partial r} = 1, \quad \text{en} \quad r = R \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial Tq}{\partial r} = 0, \quad \text{en} \quad r = 0 \quad (6.18)$$

$$Tq(r, t) = 0, \quad \text{para} \quad t = 0; \quad \text{en} \quad 0 < r \leq R \quad (6.19)$$

Las ecuaciones para la variable dependiente  $Tq$  tienen la misma forma que las ecuaciones para el problema original de la variable  $T$ , lo que significa que los mismos procedimientos de cálculo para la variable  $T$  se utilizan para determinar los coeficientes de sensibilidad, reduciéndose el tiempo significativamente.

## Apéndice B

### Ecuaciones de Diferencias Finitas (Método de Crank Nicolson).

#### Discretización del sistema y nodos representativos.

Una de las estrategias más importantes para resolver problemas numéricamente es usar el método de diferencias finitas.

Formular ecuaciones de diferencias finitas implica realizar balances de flujo de calor sobre un conjunto de volúmenes de control, los cual serán determinados al discretizar el sistema bajo estudio como primera etapa de análisis, cada volumen de control tiene asociado un punto de malla ó nodo y el análisis de cada uno de estos subsistemas resultará en una serie de ecuaciones que darán solución aproximada a un problema cuya solución analítica resulta compleja.

Los nodos representativos quedan determinados a su vez por el lugar geométrico en que se encuentren al discretizar el sistema, un nodo representativo es significado de que la ecuación de diferencias finitas que de él se genere representará a otros que se encuentren bajo las mismas condiciones o bien que será única.

El sistema a considerar y su discretización es el siguiente:

El sistema modela la distribución de temperatura en la dirección radial en una probeta cilíndrica larga.

En particular se ha elegido este sistema para los fines de este trabajo. Los nodos representativos serán por lo tanto los marcados con los números 1, 2, 4 y 7 en la Fig. 6.1. Los volúmenes de control están determinados por las líneas punteadas entorno a los nodos.

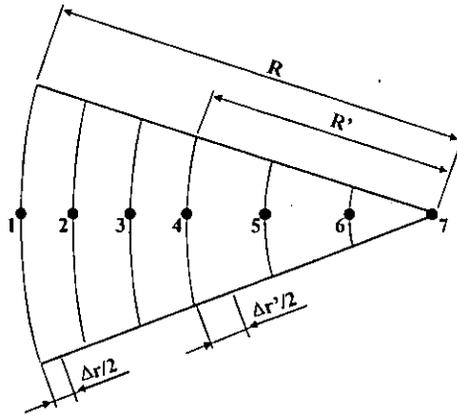


Figura 6.1: Discretización de un segmento de la probeta cilíndrica. El valor de  $R$  es el radio de la probeta,  $R'$  se considera una intercara por la posición del termopar y  $\Delta r$  y  $\Delta r'$  corresponden al espaciamiento nodal en cada región.

La formulación matemática del problema esta dado por las ecuaciones 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7.

De acuerdo a la ecuación de Fourier:

$$q = \frac{Q}{A} = -k \frac{dT}{dr} \quad (6.20)$$

$$Q = -Ak \frac{dT}{dr} \quad (6.21)$$

donde  $Q$  representa el flujo de calor,  $A$  es el área perpendicular al flujo,  $k$  es la conductividad térmica del material y  $\frac{dT}{dr}$  es el gradiente de temperatura con respecto a la posición en el sistema.

Aproximando las ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas al discretizar el sistema, esta ecuación puede escribirse como:

$$Q = -Ak \frac{\Delta T}{\Delta r} \quad (6.22)$$

El balance general de flujo sobre un volumen de control:

$$\text{Entrada} + \text{Generación} = \text{Salida} + \text{Acumulación} \quad (6.23)$$

El calor en el sistema se transfiere en una sola dirección, en particular, en dirección radial desde la superficie hacia el centro y por lo tanto en los balances ha de considerarse el flujo de entrada y salida de calor a los volúmenes de control solo en esta dirección, no existe generación de calor en ningún volumen de control y el sistema es inestable (depende del tiempo), es decir, hay acumulación.

Balance Nodo 1:

$$E = S + Ac \quad (6.24)$$

$$E = Q_{m-1} = ? \quad (6.25)$$

$$S = Q_{1,2} = -2\pi \left( R + \frac{\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_2 - T_1}{\Delta r} \right) \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} Ac = & \pi \left( R^2 - \left( R + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right) (\Delta z) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \\ & + \pi (\Delta z) (\Delta r) \left( R + \frac{\Delta r}{4} \right) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

luego entonces:

$$Q_{m-1} = -2\pi \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_2 - T_1}{\Delta r} \right) + \pi (\Delta z) (\Delta r) \left( R - \frac{\Delta r}{4} \right) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (6.28)$$

$$Q_{m-1} + 2\pi \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_2 - T_1}{\Delta r} \right) = \pi (\Delta z) (\Delta r) \left( R - \frac{\Delta r}{4} \right) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (6.29)$$

dividiendo entre  $\pi (\Delta z) (\Delta r)$  tenemos:

$$\frac{Q_{m-1}}{\pi (\Delta z) (\Delta r)} + 2 \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_2 - T_1}{\Delta r} \right) = \left( R - \frac{\Delta r}{4} \right) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (6.30)$$

Balance Nodo 2:

$$E = S + Ac \quad (6.31)$$

$$E = Q_{1,2} = -2\pi \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_2 - T_1}{\Delta r} \right) \quad (6.32)$$

$$S = Q_{2,3} = -2\pi \left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_3 - T_2}{\Delta r} \right) \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} Ac &= \pi \left( \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right)^2 \right) (\Delta z) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \\ &= 2\pi (\Delta z) (\Delta r) (R - \Delta r) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

luego entonces:

$$-2\pi \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_2 - T_1}{\Delta r} \right) = -2\pi \left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_3 - T_2}{\Delta r} \right) + 2\pi (\Delta z) (\Delta r) (R - \Delta r) \rho C p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} -2\pi \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_2 - T_1}{\Delta r} \right) + 2\pi \left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_3 - T_2}{\Delta r} \right) \\ = 2\pi (\Delta z) (\Delta r) (R - \Delta r) \rho C p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

dividiendo entre  $2\pi(\Delta z)(\Delta r)$  tenemos:

$$\left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_1 - T_2}{\Delta r} \right) + \left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_3 - T_2}{\Delta r} \right) = (R - \Delta r) \rho C p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (6.37)$$

Balance Nodo 3:

Debido a que el área perpendicular al flujo de calor cambia en cada subsistema haremos el balance del nodo 3 para después generalizar.

$$E = S + Ac \quad (6.38)$$

$$E = Q_{2,3} = -2\pi \left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_3 - T_2}{\Delta r} \right) \quad (6.39)$$

$$S = Q_{3,4} = -2\pi \left( R - \frac{5\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_4 - T_3}{\Delta r} \right) \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} Ac &= \pi \left( \left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right)^2 - \left( R - \frac{5\Delta r}{2} \right)^2 \right) (\Delta z) \rho C p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \\ &= 2\pi (\Delta z) (\Delta r) (R - 2\Delta r) \rho C p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.41)$$

luego entonces:

$$\begin{aligned}
 -2\pi \left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_3 - T_2}{\Delta r} \right) &= -2\pi \left( R - \frac{5\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_4 - T_3}{\Delta r} \right) \\
 &+ 2\pi (\Delta z) (\Delta r) (R - 2\Delta r) \rho C p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

$$\begin{aligned}
 -2\pi \left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_3 - T_2}{\Delta r} \right) + 2\pi \left( R - \frac{5\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_4 - T_3}{\Delta r} \right) \\
 = 2\pi (\Delta z) (\Delta r) (R - 2\Delta r) \rho C p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

dividiendo entre  $2\pi(\Delta z)(\Delta r)$  tenemos:

$$\left( R - \frac{3\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_2 - T_3}{\Delta r^2} \right) + \left( R - \frac{5\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_4 - T_3}{\Delta r^2} \right) = (R - 2\Delta r) \rho C p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \tag{6.44}$$

Balance Nodo 4:

$$E = S + Ac \tag{6.45}$$

$$E = Q_{3-4} = -2\pi \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_4 - T_3}{\Delta r} \right) \tag{6.46}$$

$$S = Q_{4-5} = -2\pi \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_5 - T_4}{\Delta r} \right) \tag{6.47}$$

$$Ac = \pi \left( \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 \right) (\Delta z) \rho C p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \tag{6.48}$$

luego entonces:

$$\begin{aligned}
 -2\pi \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_4 - T_3}{\Delta r} \right) &= -2\pi \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_5 - T_4}{\Delta r'} \right) \\
 &+ \pi \left( \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 \right) (\Delta z) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

$$\begin{aligned}
 -2\pi \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_4 - T_3}{\Delta r} \right) + 2\pi \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_5 - T_4}{\Delta r'} \right) \\
 + \pi \left( \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 \right) (\Delta z) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

dividiendo entre  $\pi(\Delta z)$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 2 \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_3 - T_4}{\Delta r} \right) + 2 \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) k \left( \frac{T_5 - T_4}{\Delta r'} \right) \\
 = \left( \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 \right) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

Balance Nodo 7:

$$E = Ac \tag{6.52}$$

$$E - Q_{6,7} = -2\pi \left( \frac{\Delta r'}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_7 - T_6}{\Delta r'} \right) \tag{6.53}$$

$$Ac = \pi \left( \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 (\Delta z) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \tag{6.54}$$

luego entonces:

$$-2\pi \left( \frac{\Delta r'}{2} \right) (\Delta z) k \left( \frac{T_7 - T_6}{\Delta r'} \right) = \pi \left( \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 (\Delta z) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \tag{6.55}$$

$$-\pi(\Delta z)k(T_7 - T_6) - \pi \left( \frac{(\Delta r')^2}{4} \right) (\Delta z) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (6.56)$$

dividiendo entre  $\pi(\Delta z)$  tenemos:

$$k(T_6 - T_7) = \left( \frac{(\Delta r')^2}{4} \right) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (6.57)$$

Generalizando, las ecuaciones representativas serán por lo tanto:

Nodo en la superficie:

$$\frac{Q_{m-1}}{\pi(\Delta z)(\Delta r)} + 2 \left( r - \frac{\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_{n+1} - T_1}{\Delta r^2} \right) = \left( r - \frac{\Delta r}{4} \right) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (6.58)$$

Nodo interior:

$$\begin{aligned} & \left( r - \frac{m\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_{n-1} - T_n}{\Delta r^2} \right) + \left( r - \frac{(m+2)\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta r^2} \right) \\ & = (r - w\Delta r) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.59)$$

donde m y w representan factores asociados a los cambios de área.

Nodo en interfase:

$$\begin{aligned} & 2 \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_{n-1} - T_n}{\Delta r} \right) + 2 \left( R - \frac{\Delta r'}{2} \right) k \left( \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta r'} \right) \\ & = \left( \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( R - \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 \right) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.60)$$

Nodo en el centro:

$$k(T_{n-1} - T_n) = \left( \frac{(\Delta r')^2}{4} \right) \rho C_p \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) \quad (6.61)$$

Ecuaciones de Diferencias Finitas (Método Crank Nicolson).

Nodo en la superficie (1):

Método explícito:

$$\frac{Q_{m-1}}{\pi(\Delta z)(\Delta r)} + 2 \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_1 \left( \frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\Delta r^2} \right) = \left( R - \frac{\Delta r}{4} \right) \rho C p \left( \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right) \quad (6.62)$$

Método implícito:

$$\frac{Q_{m-1}}{\pi(\Delta z)(\Delta r)} + 2 \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_1 \left( \frac{T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r^2} \right) = \left( R - \frac{\Delta r}{4} \right) \rho C p \left( \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right) \quad (6.63)$$

donde superíndice  $i$  en la variable temperatura corresponde al tiempo, asimismo el subíndice  $n$  al número de nodo en cuestión.

El método completamente explícito para la solución de las ecuaciones proporciona los nuevos valores de temperatura en el tiempo  $(i + 1)$  en términos de los valores de temperatura previos, i.e. al tiempo  $(i)$ . A diferencia de este método, en el completamente implícito los nuevos valores de temperatura al tiempo  $(i + 1)$  se calculan solo a través de resolver un sistema de ecuaciones.

Es posible combinar el método completamente implícito con el explícito para la solución de las ecuaciones y obtener una fórmula más general. Esto conduce a un procedimiento numérico bautizado con el nombre de sus inventores, John Crank y Phyllis Nicolson. Adicionalmente se realizará el álgebra necesaria para adecuar las ecuaciones al algoritmo de solución propuesto por Beck.

Método Crank Nicolson (nodo en la superficie):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{Q^{i+1}}{\pi(\Delta z)(\Delta r)} + 2 \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_1 \left( \frac{T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r^2} \right) \right] \\ & + \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{Q^i}{\pi(\Delta z)(\Delta r)} + 2 \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_1 \left( \frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\Delta r^2} \right) \right] \\ & = \left( R - \frac{\Delta r}{4} \right) \rho C p \left( \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.64)$$

modificando convenientemente el término de acumulación, tenemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \frac{Q^{i+1}}{\pi(\Delta z)(\Delta r)} + 2 \left(R - \frac{\Delta r}{2}\right) k'_1 \left(\frac{T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r^2}\right) \right] \\ & + \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \frac{Q^i}{\pi(\Delta z)(\Delta r)} + 2 \left(R - \frac{\Delta r}{2}\right) k'_1 \left(\frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\Delta r^2}\right) \right] \\ & = (\rho C p)'_1 \lambda_1 (T_n^{i+1} - T_n^i) + (\rho C p)'_2 (1 - \lambda_1) (T_{n+1}^{i+1} - T_{n+1}^i) \end{aligned} \quad (6.65)$$

el álgebra necesaria corresponde a formular una ecuación del tipo:

$$B_{(n)} T_1^{i+1} + C_{(n)} T_2^{i+1} = D_{(1)} \quad (6.66)$$

por lo que:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Q^{i+1}}{2}\right) \left( \frac{\Delta t}{\pi(\Delta z)(\Delta r) \left(R - \frac{\Delta r}{4}\right)} \right) + \frac{2 \left(R - \frac{\Delta r}{2}\right)}{\left(R - \frac{\Delta r}{4}\right)} \left( \frac{k'_1 \Delta t}{2 \Delta r^2} \right) (T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}) \\ & + \left(\frac{Q^i}{2}\right) \left( \frac{\Delta t}{\pi(\Delta z)(\Delta r) \left(R - \frac{\Delta r}{4}\right)} \right) + \frac{2 \left(R - \frac{\Delta r}{2}\right)}{\left(R - \frac{\Delta r}{4}\right)} \left( \frac{k'_1 \Delta t}{2 \Delta r^2} \right) (T_{n+1}^i - T_n^i) \\ & = (\rho C p)'_1 \lambda_1 (T_n^{i+1} - T_n^i) + (\rho C p)'_2 (1 - \lambda_1) (T_{n+1}^{i+1} - T_{n+1}^i) \end{aligned} \quad (6.67)$$

factorizando:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Q^{i+1} + Q^i}{2}\right) \left( \frac{\Delta t}{\pi(\Delta z)(\Delta r) \left(R - \frac{\Delta r}{4}\right)} \right) + \frac{\left(R - \frac{\Delta r}{2}\right)}{\left(R - \frac{\Delta r}{4}\right)} \left( \frac{k'_1 \Delta t}{\Delta r^2} \right) (T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}) \\ & + \frac{\left(R - \frac{\Delta r}{2}\right)}{\left(R - \frac{\Delta r}{4}\right)} \left( \frac{k'_1 \Delta t}{\Delta r^2} \right) (T_{n+1}^i - T_n^i) = (\rho C p)'_1 \lambda_1 (T_n^{i+1} - T_n^i) + (\rho C p)'_2 (1 - \lambda_1) (T_{n+1}^{i+1} - T_{n+1}^i) \end{aligned} \quad (6.68)$$

Sea:

$$BK_1 = BK_2 = \left(\frac{1}{2}\right) \left( \frac{\left(R - \frac{\Delta r}{2}\right) k'_1 \Delta t}{\left(R - \frac{\Delta r}{4}\right) \Delta r^2} \right) \quad (6.69)$$

$$BC_1 = (\rho C p)'_1 \lambda_1 \quad (6.70)$$

$$BC_2 = (\rho C p)'_2 (1 - \lambda_1) \quad (6.71)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q^{n+1} + Q^n}{2}\right) \left( \frac{\Delta t}{\pi(\Delta z)(\Delta r) \left(r - \frac{\Delta r}{4}\right)} \right) + (BK_1 + BK_2) (T_{n+1}^{n+1} - T_n^{n+1}) \\ + (BK_1 + BK_2) (T_{n+1}^n - T_n^n) = BC_1 (T_n^{n+1} - T_n^n) + BC_2 (T_{n+1}^{n+1} - T_{n+1}^n) \end{aligned} \quad (6.72)$$

finalmente:

$$B_{(1)} = \left( \frac{BK_1 + BK_2 + BC_1}{BC_1} \right) \quad (6.73)$$

$$C_{(1)} = \left( \frac{BC_2}{BC_1} - \frac{BK_1 - BK_2}{BC_1} \right) \quad (6.74)$$

$$AD_1 = \left( \frac{BC_2 + BK_1 + BK_2}{BC_1} \right) \quad (6.75)$$

$$AD_2 = \left( \frac{BC_1}{BC_1} - \frac{BK_1 - BK_2}{BC_1} \right) \quad (6.76)$$

$$D_{(1)} = AD_1 T_2^i + AD_2 T_1^i + \left( \frac{Q^{i+1} + Q^i}{2} \right) \left( \frac{\Delta t}{\pi(\Delta z)(\Delta r) \left( R - \frac{\Delta r}{4} \right) BC_1} \right) \quad (6.77)$$

Nodo interior (2,3,5,6):

Método explícito:

$$\begin{aligned} & \left( R - \frac{m\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_{n-1}^i - T_n^i}{\Delta r^2} \right) + \left( R - \frac{(m+2)\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\Delta r^2} \right) \\ & = (R - w\Delta r)\rho C p \left( \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Método implícito:

$$\begin{aligned} & \left( R - \frac{m\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_{n-1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r^2} \right) + \left( R - \frac{(m+2)\Delta r}{2} \right) k \left( \frac{T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r^2} \right) \\ & = (R - w\Delta r)\rho C p \left( \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.79)$$

Método Crank Nicolson:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \left( R - \frac{m\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} \left( \frac{T_{n-1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r^2} \right) + \left( R - \frac{(m+2)\Delta r}{2} \right) k'_n \left( \frac{T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r^2} \right) \right] \\ & + \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \left( R - \frac{m\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} \left( \frac{T_{n-1}^i - T_n^i}{\Delta r^2} \right) + \left( R - \frac{(m+2)\Delta r}{2} \right) k'_n \left( \frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\Delta r^2} \right) \right] \\ & = (R - w\Delta r)(\rho C p)_n \left( \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.80)$$

el álgebra necesaria corresponde a formular una ecuación del tipo:

$$A_{(n)} T_{n+1}^{i+1} + B_{(n)} T_n^{i+1} + C_{(n)} T_{n+1}^i = D_{(n)} \quad (6.81)$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(R - \frac{m\Delta r}{2}\right)}{(R - w\Delta r)} \left(\frac{k'_{n-1}\Delta t}{2\Delta r^2}\right) (T_{n-1}^{i+1} - T_n^{i+1}) + \frac{\left(R - \frac{(m+2)\Delta r}{2}\right)}{(R - w\Delta r)} \left(\frac{k'_n\Delta t}{2\Delta r^2}\right) (T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}) \\
& + \frac{\left(R - \frac{m\Delta r}{2}\right)}{(R - w\Delta r)} \left(\frac{k'_{n-1}\Delta t}{2\Delta r^2}\right) (T_{n-1}^i - T_n^i) + \frac{\left(R - \frac{(m+2)\Delta r}{2}\right)}{(R - w\Delta r)} \left(\frac{k'_n\Delta t}{2\Delta r^2}\right) (T_{n+1}^i - T_n^i) \\
& = (\rho C p)_n (T_n^{i+1} - T_n^i)
\end{aligned} \tag{6.82}$$

Sea entonces:

$$BCN = (\rho C p)_n \tag{6.83}$$

$$A_{(n)} = -\frac{\left(R - \frac{m\Delta r}{2}\right)}{(R - w\Delta r)} \left(\frac{k'_{n-1}\Delta t}{2\Delta r^2 BCN}\right) \tag{6.84}$$

$$C_{(n)} = -\frac{\left(R - \frac{(m+2)\Delta r}{2}\right)}{(R - w\Delta r)} \left(\frac{k'_n\Delta t}{2\Delta r^2 BCN}\right) \tag{6.85}$$

$$B_{(n)} = 1 - A_{(n)} - C_{(n)} \tag{6.86}$$

$$D_{(n)} = -A_{(n)}T_{n-1}^i - (B_{(n)} - 2)T_n^i - C_{(n)}T_{n+1}^i \tag{6.87}$$

Nodo en interfase (4):

Método explícito:

$$\begin{aligned}
& 2\left(R' - \frac{\Delta r}{2}\right)k'_{n-1} \left(\frac{T_{n-1}^i - T_n^i}{\Delta r}\right) + 2\left(R' - \frac{\Delta r'}{2}\right)k'_n \left(\frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\Delta r'}\right) \\
& \left(\left(R' - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(R' - \frac{\Delta r'}{2}\right)^2\right) \rho C p \left(\frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t}\right)
\end{aligned} \tag{6.88}$$

Método implícito:

$$\begin{aligned}
 & 2 \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} \left( \frac{T_{n-1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r} \right) + 2 \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) k'_n \left( \frac{T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r'} \right) \\
 & = \left( \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 \right) \rho C p \left( \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{6.89}$$

Método Crank Nicolson:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{2} \right) \left[ 2 \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} \left( \frac{T_{n-1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r} \right) + 2 \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) k'_n \left( \frac{T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r'} \right) \right] \\
 & + \left( \frac{1}{2} \right) \left[ 2 \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} \left( \frac{T_{n-1}^i - T_n^i}{\Delta r} \right) + 2 \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) k'_n \left( \frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\Delta r'} \right) \right] \\
 & = \left( \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 \right) \rho C p \left( \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{6.90}$$

modificando convenientemente el término de acumulación, tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{2} \right) \left[ 2 \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} \left( \frac{T_{n-1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r} \right) + 2 \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) k'_n \left( \frac{T_{n+1}^{i+1} - T_n^{i+1}}{\Delta r'} \right) \right] \\
 & + \left( \frac{1}{2} \right) \left[ 2 \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} \left( \frac{T_{n-1}^i - T_n^i}{\Delta r} \right) + 2 \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) k'_n \left( \frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\Delta r'} \right) \right] \\
 & = \left( (\rho C p)'_{n-1} \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - (\rho C p)'_n \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 \right) \left( \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{6.91}$$

el álgebra necesaria corresponde a formular una ecuación del tipo:

$$A_{(n)} T_{n-1}^{i+1} + B_{(n)} T_n^{i+1} + C_{(n)} T_{n+1}^{i+1} = D_{(n)} \tag{6.92}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{2\Delta t}{P\Delta r} \right) \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} (T_{n-1}^{n+1} - T_n^{n+1}) + \left( \frac{2\Delta t}{P\Delta r'} \right) \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) k'_n (T_{n+1}^i - T_n^{i+1}) \\
& + \left( \frac{2\Delta t}{P\Delta r} \right) \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} (T_{n-1}^i - T_n^i) + \left( \frac{2\Delta t}{P\Delta r'} \right) \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) k'_n (T_{n+1}^i - T_n^i) \\
& = T_n^{i+1} - T_n^i
\end{aligned} \tag{6.93}$$

Sea entonces:

$$p = 2 \left( (\rho C p)'_{n-1} \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - (\rho C p)'_n \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right)^2 \right) \tag{6.94}$$

$$A_{(n)} = - \left( \frac{2\Delta t}{P\Delta r} \right) \left( R' - \frac{\Delta r}{2} \right) k'_{n-1} \tag{6.95}$$

$$C_{(n)} = - \left( \frac{2\Delta t}{P\Delta r'} \right) \left( R' - \frac{\Delta r'}{2} \right) k'_n \tag{6.96}$$

$$B_{(n)} = 1 - A_{(n)} - C_{(n)} \tag{6.97}$$

$$D_{(n)} = -A_{(n)}T_{n-1}^i - (B_{(n)} - 2)T_n^i - C_{(n)}T_{n+1}^i \tag{6.98}$$

Nodo en el centro:

Método explícito:

$$k'_{n-1} (T_{n-1}^i - T_n^i) = \left( \frac{(\Delta r')^2}{4} \right) \rho C p \left( \frac{T_{n-1}^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \right) \tag{6.99}$$

Método implícito:

$$k'_{nn-1} (T_{n-1}^{n+1} - T_n^{n+1}) = \left( \frac{(\Delta r')^2}{4} \right) \rho C p \left( \frac{T_n^{n+1} - T_n^n}{\Delta t} \right) \quad (6.100)$$

Método Crank Nicolson:

$$\left( \frac{1}{2} \right) k'_{nn-1} (T_{n-1}^{n+1} - T_n^{n+1}) + \left( \frac{1}{2} \right) k'_{nn-1} (T_{n-1}^n - T_n^n) = \left( \frac{(\Delta r')^2}{4} \right) \rho C p \left( \frac{T_n^{n+1} - T_n^n}{\Delta t} \right) \quad (6.101)$$

modificando convenientemente el término de acumulación, tenemos:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \right) k'_{nn-1} (T_{n-1}^{n+1} - T_n^{n+1}) + \left( \frac{1}{2} \right) k'_{nn-1} (T_{n-1}^n - T_n^n) \\ & = \left( \frac{(\Delta r')^2}{4} \right) \left[ (\rho C p)'_{nn-1} (1 - \lambda_1) \left( \frac{T_n^{n+1} - T_n^n}{\Delta t} \right) + (\rho C p)'_{nn} \lambda_1 \left( \frac{T_n^{n+1} - T_n^n}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.102)$$

el álgebra necesaria corresponde a formular una ecuación del tipo:

$$A_{(nn)} T_{n-1}^{n+1} + B_{(nn)} T_n^{n+1} = D_{(nn)} \quad (6.103)$$

por lo que:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{4}{(\Delta r')^2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) k'_{nn-1} (T_{n-1}^{n+1} - T_n^{n+1}) + \left( \frac{4}{(\Delta r')^2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) k'_{nn-1} (T_{n-1}^n - T_n^n) \\ & = (\rho C p)'_{nn-1} (1 - \lambda_1) \left( \frac{T_n^{n+1} - T_n^n}{\Delta t} \right) + (\rho C p)'_{nn} \lambda_1 \left( \frac{T_n^{n+1} - T_n^n}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6.104)$$

Sea:

$$BCNM \cdot \left( \frac{1}{\Delta t} \right) (\rho C p)'_{nn-1} (1 - \lambda_1) \quad (6.105)$$

$$BCNN = \left( \frac{1}{\Delta t} \right) (\rho C p)'_{nn} \lambda_1 \quad (6.106)$$

$$BKNN = \frac{k'_{nn-1}}{2(\Delta r')^2} \quad (6.107)$$

entonces:

$$\begin{aligned} & 4BKNN (T_n^{n+1} - T_n^{n+1}) + 4BKNN (T_{n-1}^n - T_n^n) \\ & = BCNM (T_n^{n+1} - T_n^n) + BCNN (T_n^{n+1} - T_n^n) \end{aligned} \quad (6.108)$$

finalmente:

$$A_{(nn)} = BCMN - 4BKNN \quad (6.109)$$

$$B_{(nn)} = BCNN + 4BKNN \quad (6.110)$$

$$D_{(nn)} = - (B_{(nn)} + 2BCNN) T_{nn}^n - (A_{(nn)} + 2BCNM) T_{nn-1}^n \quad (6.111)$$

## Apéndice C

Tabla 1. Especificación y propiedades térmicas utilizadas para la validación de Contac.

Parámetro	Valor
Diámetro del cilindro	2 m
Temperatura inicial	1 °C
Conductividad térmica	1 W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Densidad	1 Kg m <sup>-3</sup>
Capacidad calorífica	1 J Kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Temperatura del fluido	0 °C
Coefficiente de transferencia de calor	0.5 W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> .
Número de Biot	0.5

Tabla 2. Propiedades termofísicas de acero inoxidable (AISI 304):

Temperatura °C	k (W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )	ρC <sub>p</sub> (J m <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup> )
50	15.9	4.0E06
250	17.6	4.27E06
500	21.8	4.7E06
550	23.02	4.88E06
750	26.4	4.82E06
800	26.8	4.87E06
850	26.4	4.86E06
900	26.8	4.83E06

Tabla 3. Propiedades termofísicas de acero al carbono (AISI 1020):

Temperatura °C	$k$ ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ )	$\rho$ ( $\text{Kg m}^{-3}$ )	$C_p$ ( $\text{J Kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
50	51.4632	7849	485.344
100	51.0448	7834	506.264
150	49.7896	7819	518.816
200	48.5344	7803	531.368
250	46.4424	7787	556.472
300	44.3504	7770	573.208
350	43.5136	7753	598.312
400	42.6768	7736	623.416
450	41.0032	7718	661.072
500	39.3296	7699	702.912
550	37.656	7679	748.936
600	35.564	7659	786.592
650	33.8904	7635	845.168
700	31.7984	7617	1430.928
750	28.4512	7620	949.768
800	25.9408	7624	736.384
850	25.9408	7616	648.52
900	26.3592	7600	648.52
950	26.7776	7574	648.52

Tabla 4. Propiedades termofísicas de acero libre de intersticiales (IF):

Temperatura °C	$k$ ( $W m^{-1} K^{-1}$ )	$\rho$ ( $Kg m^{-3}$ )	$C_p$ ( $J Kg^{-1} K^{-1}$ )
50	62.76	7861	481.16
100	60.2496	7846	502.08
150	57.7392	7830	518.816
200	55.6472	7814	535.552
250	53.1368	7789	552.288
300	51.0448	7781	573.208
350	48.5344	7763	594.128
400	46.4424	7745	623.416
450	43.5136	7727	661.072
500	41.0032	7708	707.096
550	39.3296	7688	753.12
600	37.656	7668	799.144
650	35.9824	7648	866.088
700	33.8904	7628	1104.576
750	31.7984	7610	874.456
800	30.1248	7598	794.96
850	27.6144	7601	665.256
900	27.196	7602	661.072
950	27.196	7580	669.44