14

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ACATLAN

"PROGRAMACION POR METAS"

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

OSCAR HERNANDEZ GONZALEZ

ASESOR:
FIS. MAT. JORGE LUIS SUAREZ MADARIAGA

285900

UNAM
CAMPUS ACATLÁN

NOVIEMBRE 2000

14

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

En la Programación Lineal tradicional, todos los problemas planteados tienen un solo objetivo general, como maximizar ganancias o minimizar costos, por mencionar algunos. Sin embargo en muchas situaciones podemos encontrar objetivos múltiples, es decir dos o más metas por lograr.

Así, por ejemplo, en un problema de inversiones, podríamos desear, de manera simultánea, maximizar la recuperación total esperada y minimizar la cantidad de riesgo implicado.

Las metas múltiples, a menudo entran en conflicto entre sí, sólo se puede optimizar un objetivo a expensas de los otros. Por ejemplo, para lograr la mayor recuperación esperada, en general, tendrá como resultado una cartera con alto riesgo. De manera similar, una cartera que minimice los riesgos puede lograrse a expensas de la recuperación esperada. Por consiguiente, con metas múltiples, no podemos esperar lograr los mejores valores para todos los objetivos de manera simultánea, al menos no con la Programación Lineal (PL) que conocemos.

En respuesta a este tipo de problemas surge la Programación por Metas Múltiples, esto representa el principal interés al desarrollar esta Tesina, además de que se conozca y difunda esta rama de la Programación Lineal Multiobjetivo, pues tiene un enfoque y planteamiento más realista y por lo tanto más aplicable.

Además, puede ser una herramienta importante para el tomador de decisiones si se toma en cuenta que se pueden establecer niveles de prioridad y preferencias respecto a las diferentes metas que se plantean.

En el capítulo 1 se hace una pequeña reseña del desarrollo de la Investigación de Operaciones a través de la historia, así como nociones de la formulación de problemas y Modelos de Decisión

El capítulo 2, corresponde a la PL, brinda nociones y conceptos básicos de PL, así como formulaciones de problemas y solución a los mismos, ya sea por el método gráfico (en el caso de dos variables), o por el método simplex, que será de suma importancia en los capítulos posteriores, pues constituye la base para resolver los Problemas de Programación por Metas (PPM).

En el capítulo 3 se presentan los tópicos de PM, el planteamiento y resolución de modelos PPM; además se hace énfasis en las variables de desviación, pues constituyen, junto con la minimización de la suma de las desviaciones relevantes como función objetivo, la base de estos modelos.

En el capítulo 4 se ven algunas aplicaciones, en las cuales se trata de mostrar el amplio campo de aplicación de esta disciplina.

Por último, se presenta un Anexo con una serie de ejercicios propuestos, para que se realicen los planteamientos y la resolución de los mismos con los métodos que se explican en el desarrollo del trabajo.

Finalmente, espero que esta Tesina sirva para brindar una idea de qué hacer cuando se presenta más de un objetivo a optimizar.

CAPÍTULO 1

1.1 DESARROLLO HISTÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

El término Investigación de Operaciones (I.O), se usó por primera vez en el año 1939, pero como con otras disciplinas científicas, cuando se terminó de definir y delimitar, se encontró un origen anterior a ésta fecha.

La I.O tuvo en la Primera Revolución Industrial un importante avance, debido a que en este movimiento se empezaron a desarrollar los problemas que iba a resolver la I.O.

Pero la I.O tardó en desarrollarse en el campo de la administración industrial por diversos motivos. La falta de crecimiento de la I.O pudo haber continuado indefinidamente, de no haber sido por los progresos logrados en las organizaciones militares al principio de la Segunda Guerra Mundial.

La principal diferencia entre el desarrollo evolutivo de los ejecutivos militares y los industriales iba a manifestarse en el intervalo de veinte años entre el fin de la Primera Guerra Mundial y el principio de la Segunda.

En este período, la tecnología militar se desarrolló más rápido de lo que se podían aprovechar la técnica y estrategia militares. Debido a esto los ejecutivos y administradores militares británicos recurrieron a la ayuda de científicos en diversas funciones. Así científicos de diversas disciplinas colaboraron exitosamente en los años 1939 y 1940.

Su éxito se difundió y el uso de equipos científicos se extendió a los aliados occidentales. Estos grupos de científicos se asignaban al ejecutivo a cargo de las operaciones (a la "línea"); de aquí que en la Gran Bretaña su trabajo recibiera el nombre de investigación operacional y en los Estados Unidos una amplia variedad de nombres.

Al finalizar la Guerra, la Investigación de Operaciones sufrió varios cambios tanto en Inglaterra como en Estados Unidos. En Gran Bretaña se redujeron los gastos de investigación en la defensa; por esto muchos analistas en Investigación de Operaciones que trabajaban en el área militar pudieron aportar sus conocimientos en la reconstrucción de instalaciones manufactureras británicas que la guerra había dañado. Así los ejecutivos de las industrias solicitaron ayuda a los analistas y diversas industrias comenzaron a crear la <u>Investigación de Operaciones Industrial.</u>

A diferencia de la Gran Bretaña, los Estados Unidos no tenían la necesidad de reconstrucción de plantas así que el sector industrial no solicitó la ayuda de los analistas en I.O, lo cual permitió que aumentará la investigación militar y la I.O se expandió al final de la guerra.

Con el advenimiento de la Segunda Revolución Industrial los Estados Unidos por fin incluyeron la I.O. en los problemas industriales de tipo ejecutivo. La Segunda Guerra Mundial había propiciado los avances científicos que a su ver produjeron la automatización, además al final de los 40´s comenzó la nueva revolución con la aparición de las computadoras electrónicas.

Esto trajo como consecuencia que al principio de la década de 1950 los analistas en I.O. gradualmente abandonaran el ejército para enfocarse más al sector industrial; así, la I.O. se diversificó y extendió en los Estados Unidos. En 1953 se fundó la Operations Research Society of America (Sociedad Americana de Investigación de Operaciones). En 1957 se estableció la International Federation of Operational Research Societies (Federación Internacional de Sociedades de Investigación de Operaciones). En otras palabras, después de una década de desarrollo en las organizaciones militares, la Investigación de Operaciones continuó creciendo y se extendió con rapidez a organizaciones industriales académicas y gubernamentales.

1.2 DEFINICIÓN

La I.O. es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización.

Una organización se puede interpretar como un sistema, pues así se facilita su entendimiento. Todo sistema tiene componentes e interacciones entre los mismos. Algunas interacciones son controlables, mientras que otras no lo son.

En un sistema, el comportamiento de cualquiera de sus partes o componentes tiene efectos directos e indirectos con el resto. Quizás no todos estos efectos sean importantes, o más aún, posibles de detectar, por lo tanto, es necesario que exista un procedimiento sistemático que logre, por un lado, identificar aquéllas interacciones de un sistema que tengan efectos de importancia y , por el otro, lado, logre identificar los componentes controlables asociados. Uno de esos procedimientos sistemáticos es la Investigación de Operaciones, mientras que otros pueden ser , por ejemplo, las técnicas clásicas de la Estadística, el Análisis de Sistemas, el Análisis de Decisiones, etc.

Todo sistema es una estructura que funciona. La información es el elemento que convierte a una estructura en un sistema. En toda estructura existen componentes y canales que comunican a éstos; a través de los canales fluye la información; al fluir la información los componentes interaccionan de una forma determinada.

Se ha convenido entonces en la ventaja de representar a una organización por un sistema, el cual tiene : componentes, canales e información que fluye por estos. Dentro de la estructura de los sistemas se encuentran los siguientes elementos: recursos humanos, materiales y financieros.

Los objetivos de la organización se refieren a la eficiencia y efectividad con que las diferentes componentes del mismo pueden controlarse o modificarse. Se refiere también a la manera como esas componentes reaccionan ante un estímulo que se presenta al sistema.

La Investigación de Operaciones es un método que permite encontrar las relaciones óptimas que mejor operen un sistema, dado un objetivo específico.

La información que fluye a través de los canales, comunica a los componentes. Por comunicación, se entiende al conjunto de información, transmisor, receptor y canal. La comunicación es la relación que se establece entre las diferentes componentes del sistema.

Actualmente, los problemas que se presentan en las organizaciones no encajan fácilmente en una especialidad. Por el contrario son problemas multidisciplinarios. Por lo tanto el análisis y solución de estos problemas requiere de grupos compuestos de diferentes especialistas. Estos grupos interdisciplinarios requieren necesariamente de una cierta coordinación y comunicación.

La Investigación de Operaciones es la aplicación de la metodología científica a través de modelos, primero para representar al problema real que se quiere resolver en un sistema, y segundo para resolverlo.

1.3 MODELOS DE DECISIÓN

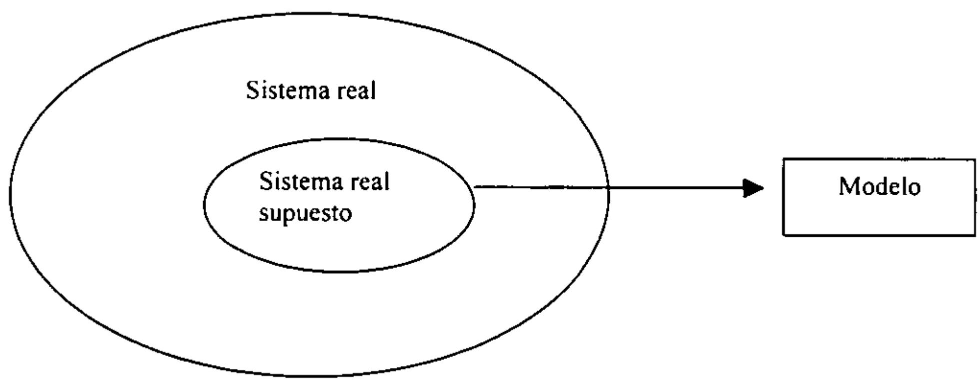
Un modelo de decisión, es solo un medio para resumir un problema de decisión en una forma que permita la identificación y evaluación sistemática de todas las opciones de decisión del problema.

Así, se llega a una decisión escogiendo la opción que se considera como la "mejor" entre todas las disponibles.

Los componentes básicos del proceso de toma de decisiones son tres: Opciones de decisión, restricciones del problema y criterio objetivo.

El proceso de toma de decisiones en I.O consiste en la construcción de un modelo de decisión y, después, en encontrar su solución con el fin de determinar la decisión óptima. El modelo se define como una función objetivo y restricciones que se expresan en término de las variables de decisión del problema.

Aunque una situación real puede implicar un número sustancial de variables y restricciones, generalmente solo una pequeña fracción de estas variables y restricciones domina verdaderamente el comportamiento del sistema real. Por lo tanto, la simplificación del sistema, con el fin de construir un modelo debe concentrarse, fundamentalmente, en la identificación de las variables y restricciones dominantes y también en otros datos de las variables y restricciones dominantes y también en otros datos que se juzguen pertinentes para la toma de decisión.



En la figura anterior podemos apreciar los niveles de abstracción de una situación de la vida real que nos llevan a la construcción de un modelo. El sistema real supuesto es una abstracción de la situación real que se obtiene al concentrarnos en la identificación de los factores dominantes que controlen el comportamiento del sistema real supuesto, identifica las relaciones pertinentes del sistema en la forma de una función objetivo y un conjunto de restricciones.

En general no existen reglas fijas para efectuar los niveles de abstracción citados. La reducción de los factores que controlen al sistema a un número relativamente pequeño de factores dominantes y la abstracción de un modelo del sistema real supuesto.

1.4 FORMULACIÓN DE LOS PROBLEMAS

En todo estudio de Investigación de Operaciones se deben buscar el mayor número de síntomas antes de empezar el proyecto que generará soluciones.

Las condiciones para que exista el más simple de los problemas son:

a) Debe existir por lo menos un individuo que se encuentra dentro de un marco de referencia, al cual se le puede atribuir el problema del sistema.
b) El individuo debe tener, por lo menos, un par de alternativas para resolver su problema. En caso contrario no existe el problema.
c) Deben existir, por lo menos, un par de soluciones, una de las cuales debe tener mayor aceptación que la otra en el individuo. En caso contrario , no existe el problema. Esta preferencia está asociada a un cierto objetivo dentro del marco de referencia en donde se encuentra el individuo del sistema.
d) La selección de cualquiera de las soluciones debe repercutir de manera diferente en los objetivos del sistema, es decir, existe una eficiencia y/o efectividad asociados con cada solución. Estas eficiencias y/o efectividades deben ser diferentes, puesto que de lo contrario no existe un problema.
e) Por último, el individuo que toma las decisiones ignora las soluciones y/o eficiencias y/o efectividades asociadas con las soluciones del problema.

Si estas cinco situaciones existen, entonces se tiene un problema.
Esta situación puede complicarse en los siguientes casos.

a) El problema recae en un grupo, no en un individuo
b) El marco de referencia donde se encuentra el grupo, cambia en forma dinámica.
c) El número de alternativas que el grupo puede escoger es muy grande, pero finito.

d) El grupo dentro del sistema puede tener objetivos múltiples. Peor aún, no necesariamente estos objetivos son consistentes entre sí.
e) Las alternativas que selecciona el grupo son ejecutadas por otro grupo ajeno, el cual no se le puede considerar como elemento independiente del problema.
f) Los efectos de la decisión del grupo pueden sentirse por elementos que aún siendo ajenos al sistema considerado, influyen directa o indirectamente, favorable o desfavorable hacia él.

Formular un problema requiere.

a) Identificar los componentes controlables y no controlables de un sistema
b) Identificar posibles rutas de acción, dadas por los componentes controlables.
c) Definir el marco de referencia, dado por los componentes no controlables.
d) Definir los objetivos que se persiguen y clasificarlos por su orden de importancia.
e) Identificar las interrelaciones importantes entre los diferentes componentes del sistema. Este paso equivale a encontrar las restricciones que existen, a la vez que permite más adelante representar estas interrelaciones en forma matemática.

1.5 FASES DE UN ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Un estudio de Investigación de Operaciones no puede ser realizado y controlado sólo por el analista de I.O. Aunque puede ser un experto en modelos y técnicas de solución, quizá no lo será en todas las áreas donde surgen los problemas de Investigación de Operaciones. Así, un equipo de I.O deberá incluir a los miembros de la organización directamente responsables de las funciones donde existe el problema, así como para la ejecución e implantación de la solución recomendada. Es decir, un analista de Investigación de Operaciones comete un grave error al suponer que puede resolver problemas sin la cooperación de aquellos que implantarán sus recomendaciones.

Las principales fases a través de las cuales pasaría el equipo a fin de efectuar un estudio de Investigación de Operaciones son:

1. Definición del problema
2. Construcción del modelo
3. Solución del modelo
4. Validación del modelo
5. Implantación de los resultados finales

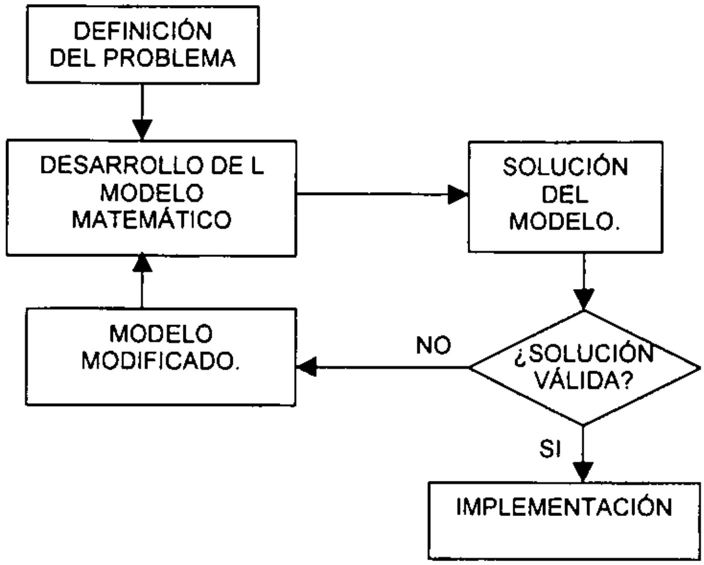


Figura 1

Aunque la sucesión anterior de ninguna manera es estándar, en general parece aceptable. Excepto para la fase "solución del modelo", la cual está basada por lo común en técnicas bien desarrolladas, las fases restantes no parecen seguir reglas fijas. Esto surge del hecho de que los procedimientos para estas fases dependen del tipo de problema en investigación y el ámbito de operación en el cual existen.

En este aspecto, un equipo de Investigación de Operaciones se guiará en el estudio, principalmente por las diferentes experiencias profesionales de sus miembros, en lugar de reglas fijas.

En vista de las evidentes dificultades para establecer reglas fijas en la ejecución de estas fases, parece conveniente presentar alguna discusión de estas fases que pueda ser utilizada como guía general en estas áreas.

1.- Definición del Problema

Desde el punto de vista de Investigación de Operaciones esto indica tres aspectos principales.

(a) Una descripción de la meta o el objetivo del estudio
(b) Una identificación de las alternativas de decisión del sistema
(c) Un reconocimiento de las limitaciones, restricciones y requisitos del sistema.

La primera actividad que se debe realizar es un resumen bien definido del problema que se va a analizar. Esto incluye determinar los objetivos apropiados, las restricciones sobre lo que se puede hacer, las interrelaciones del área bajo estudio y otras áreas de la organización, los diferentes cursos de acción posibles, etc. Este proceso de formular el problema es crucial ya que afectará en forma significativa la relevancia de las conclusiones del estudio.

2.- Construcción del modelo

Dependiendo de la definición del problema, el equipo de Investigación de Operaciones deberá decidir sobre el modelo más adecuado para representar el sistema. Tal modelo deberá especificar expresiones cuantitativas para el objetivo. Y las restricciones del problema en función de sus variables de decisión. Si el modelo resultante se ajusta a uno de los modelos matemáticos comunes, puede obtener una solución conveniente mediante técnicas matemáticas.

Si las relaciones matemáticas del modelo son demasiado complejas para permitir soluciones analíticas, puede ser más apropiado un modelo de simulación. Algunos casos pueden exigir el uso de una combinación de modelos matemáticos, heurísticos y de simulación. Esto, por supuesto, depende mucho de la naturaleza y complejidad del sistema que se esté investigando.

3.- Solución del modelo

En modelos matemáticos esto se logra usando técnicas de optimización bien definidas y se dice que el modelo proporciona una solución "óptima". Si se usan los modelos de simulación o heurísticos el concepto de optimalidad no está tan bien definido y la solución en estos casos se emplea para obtener evaluaciones aproximadas de las medidas del sistema.

Además de la solución (óptima) del modelo uno también debe asegurar, siempre que sea posible, información adicional sobre el comportamiento de la solución debida a cambios en los parámetros del sistema.

Usualmente esto se conoce como análisis de sensibilidad. Tal análisis es muy necesario cuando los parámetros del sistema no pueden estimarse con exactitud. En este caso es importante estudiar el comportamiento de la solución óptima en los entornos de estas estimaciones.

4.- Validación del modelo

Un modelo es válido, si, independientemente de sus inexactitudes al representar el sistema, puede dar una predicción confiable del funcionamiento del sistema. Un método común para probar la validez de un modelo es comparar su funcionamiento con algunos datos pasados disponibles del sistema actual.

El modelo será válido si bajo condiciones similares de entradas puede reproducir el funcionamiento pasado del sistema. El problema es que no existe seguridad de que el funcionamiento futuro del sistema continuará duplicando su historia. También, ya que el modelo está basado en el examen cuidadoso de datos anteriores, esta comparación siempre deberá revelar resultados favorables.

5.- Implantación de resultados

La tarea de aplicar estos resultados recae principalmente en los investigadores de operaciones. Esto básicamente implicaría la traducción de estos resultados en instrucciones de operación detallada, emitidas en una forma comprensible a los individuos que administrarán y operarán el sistema después.

La interacción del equipo de Investigación de Operaciones y el personal de operación al desarrollar el plan de implantación es muy importante. Esta participación deberá hacerse a través de todas las fases del estudio. De esta forma ninguna consideración práctica, que de otra manera puede llevar al fracaso del sistema, se dejará de analizar.

Mientras tanto, pueden verificarse las modificaciones o ajustes posibles en el sistema por el personal de operación para la factibilidad práctica. En otras palabras es imperativo que la fase de implantación se ejecute mediante la cooperación del equipo de investigación de operaciones y de aquellos que serán responsables de la administración y operación del sistema.

Finalmente al hablar de las etapas de un estudio de Investigación de Operaciones, debe ponerse de relieve que existen muchas excepciones a las "reglas" prescritas. Por su naturaleza, la Investigación de Operaciones requiere de una gran dosis de ingenio e innovación, por lo que es imposible escribir un procedimiento estándar que deba seguirse siempre.

CAPÍTULO 2

PROGRAMACIÓN LINEAL

2.1 ¿QUÉ ES LA PROGRAMACIÓN LINEAL?

Desde su aparición a finales de la década de 1940, la Programación Lineal (P.L) ha demostrado que es una de las herramientas más efectivas de la Investigación de Operaciones. Su éxito se debe a su flexibilidad para describir un gran número de situaciones reales en las siguientes áreas: militar, industrial, agrícola, de transporte, de la economía, de sistemas de salud, e incluso de las ciencias sociales y de la conducta.
Un factor importante en el amplio uso de esta técnica es la disponibilidad de programas extensos de P.L.

La utilidad de la P.L va más allá de sus aplicaciones inmediatas. De hecho, la P.L. debería considerase como una base importante del desarrollo de otras técnicas de la I.O, incluidas la programación entera, la estadística, la de flujo de redes y la cuadrática. Desde este punto de vista, el conocimiento de la P.L. es fundamental para implementar estas técnicas.

La P.L es una herramienta determinística, es decir, todos los parámetros del modelo se suponen conocidos con certeza. Sin embargo, en la vida real, es raro encontrar un problema donde prevalezca una verdadera certeza respecto a los datos.

La técnica de la P.L compensa esta "deficiencia", proporcionando análisis sistemáticos postóptimos y paramétricos, que permiten al tomador de decisiones probar la sensibilidad de la solución óptima "estática", respecto a cambios discretos o continuos de los parámetros del modelo.

Básicamente, estas técnicas adicionales agregan una dimensión dinámica a la propiedad de solución óptima de la P.L.

El desarrollo de la Programación Lineal es considerado para muchos entre los avances científicos más importantes del siglo XX. Actualmente es una herramienta común que ha ahorrado miles o millones de dólares a muchas compañías y negocios.

La P.L. es una técnica de modelado matemático destinada a la asignación eficiente de los recursos limitados en actividades competitivas, con el objeto de satisfacer las metas deseadas (tales como maximizar beneficios o minimizar costos), es decir optimizar. Este problema de asignación puede surgir cuando debe elegirse el nivel de ciertas actividades que compitan por recursos escasos necesarios para realizarlos.

La característica distintiva de los modelos de P.L. es que las funciones que representan el objetivo y las restricciones, son lineales. La palabra "programación" no se refiere, en este caso, a programación en computadoras, en esencia es un sinónimo de planeación.

Así, la P.L. trata la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, es decir, el resultado que mejor alcance la meta especificada entre todas las alternativas de solución.

2.1.1. DEFINICIÓN GENERAL DE UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

Los modelos de Programación Lineal incluyen tres elementos básicos:

1. Variables de decisión.-Una cantidad cuyo valor se puede controlar y es necesario determinar para solucionar un problema de decisión.
2. Función Objetivo (meta).- El objetivo global de un problema de decisión expresado en forma matemática en términos de los datos y de las variables de decisión.
3. Restricciones.- Una limitación sobre los valores de variables en un modelo matemático típicamente impuestos por condiciones externas.

Entonces, el modelo general de un Problema de Programación Lineal se expresa de la siguiente forma:

Función Objetivo: Maximizar $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$

o minimizar

Restricciones funcionales, sujeto a: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \gtreqless b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \gtreqless b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \gtreqless b_m \end{cases}$

Restricción de no negatividad: $(x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0)$

Donde
m # de recursos limitados
n # de actividades competitivas
z medida de efectividad global
b_i es la cantidad disponible del recurso (i=1,2,...,n)
x_j variables de decisión
c_j el valor por unidad de la actividad
a_{ij} Cantidad del recurso i que debe asignarse a la actividad j

La restricción de no negatividad $(x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0)$ es esencial para el desarrollo del método de solución para la Programación Lineal. Después de formular un P.P.L, el siguiente paso es resolver el modelo. Debido a que los modelos de P.L. se presentan en una variedad de formas es necesario modificar estos para que se ajusten al modelo de solución (Método Simplex). Las formas utilizadas para este propósito son: canónica y estándar.

2.2 FORMULACIONES DE P.P.L.

Planeación de la producción

I.- La empresa de muebles Lima fabrica mesas y sillas de comedor. Cada silla necesita 20 ft. de tabla y 4 horas de trabajo. Cada mesa 50 ft de tabla y sólo 3 horas de trabajo. El fabricante tiene 3300 ft de tabla de madera disponible y un equipo humano capaz de proporcionar 380 horas de trabajo. El fabricante ha determinado que hay una utilidad de 3 pesos por cada silla vendida y 6 por cada mesa. Para simplificar supongamos que los materiales necesarios como clavos o barniz se tienen en cantidades suficientes. ¿Cuántas mesas y sillas se deben producir para maximizar las utilidades, suponiendo que se vende todo objeto producido?

	Mesas	Sillas	Total
Material utilizado	50ft	20ft	3300ft
Hrs requeridas	3hrs	4hrs.	380hrs
Utilidades	6	3	

Variables de decisión

x_1 : Número de mesas a producir.

x_2 : Número de sillas a producir.

$$\begin{array}{lrcl} & Max \quad Z & = & 6x_1 + 3x_2 \\ s.a & 50x_1 + 20x_2 & \leq & 3300 \\ & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 380 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

II.- Una compañía automotriz produce automóviles y camiones, cada vehículo tiene que pasar, por un taller de pintura y por un taller de montaje de la carrocería. Si el taller de pintura pintara solamente camiones, se podrían pintar 40 camiones al día. Si pintara solo automóviles, se podrían pintar 60 automóviles diarios. Si el taller de carrocería produjera sólo autos podría fabricar 30 al día. Cada camión aporta 300 dólares a la unidad y cada auto 200.

x_1 : Número de autos producidos al día.

x_2 : Número de camiones producidos al día.

$$Max \quad Z = 300x_2 + 200x_1$$

Restricción 1: La fracción del día que el taller de pintura está trabajando es ≤ 1

Restricción 2: La fracción del día que el taller de carrocería está trabajando es ≤ 1

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{160}x_2 \leq 1$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

III Manu Mania Company usa una base y dos productos de goma, todos en cantidades iguales, para producir su Gooey Gum. La compañía puede producir un total combinado de hasta 800 libras de la base y los dos productos de goma. De manera alternativa, puede comprar estos ingredientes en el mercado abierto en las siguientes cantidades de dólares por libra:

PRODUCTO	COSTO DE PRODUCCIÓN	COSTO DE COMPRA
Base	1.75	3.00
GP-1	2.00	3.25
GP-2	2.25	3.75

Formule el modelo para determinar el plan de producción/compra de costo mínimo para satisfacer una demanda de 1200 libras de Gooey Gum.

Solución:

Variables de decisión:

BP = Número de libras de la base que se deben producir.

BC = Número de libras de la base que se deben comprar.

GP1 = Número de libras del producto de goma 1 que se deben producir.

GP1' = Número de libras del producto de goma 1 que se deben comprar.

GP2 = Número de libras del producto de goma 2 que se deben producir.

GP2' = Número de libras del producto de goma 2 que se deben comprar.

Min Z = 1.75 BP + 3 BC + 2 GP1 + 3.25 GP1' + 2.25 GP2 + 3.75 GP2'

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
BP + BC &= 400 \\
GP1 + GP1' &= 400 \\
GP2 + GP2' &= 400 \\
BP + GP1 + GP2 &\leq 800 \\
BP, BC, GP1, GP1', GP2, GP2' &\geq 0
\end{aligned}
$$

IV El problema de mezclas de la Hexxon Oil Company.

El señor James Arden, vicepresidente de producción, le ha pedido al señor Sam Barton, gerente de producción de Hexxon Oil Company, que formule un nuevo plan de producción diaria para las tres marcas de gasolina que la compañía vende: Regular (90 octanos), Sin plomo (96 octanos) y Suprema (100 octanos). En su reunión, el señor Arden Llevó los datos de la tabla 1:

TABLA 1 Precios de venta y demanda de gasolina

MARCA DE GASOLINA	PROPORCION MINIMA DE OCTANAJE	PRECIO DE VENTA ($/bbl)	DEMANADA (bbl/día)
Regular	90	16.50	2,000
Sin plomo	96	18.00	4,000
Suprema	100	22.50	3,000

Los datos consisten en las demandas diarias proyectadas para estas tres gasolinas en barriles (bbl) y sus respectivos precios de venta, preparados por la señora Jean Ferraro del departamento de contabilidad. Cuando el señor Arden expresó su deseo de lograr la mayor ganancia diaria posible, el señor Barton dijo que tendría que reunirse con el señor Allen, el supervisor de producción, para discutir la disponibilidad y costos de los compuestos usados en la fabricación de las tres marcas de gasolina. Entonces regresaría con el señor Arden con un plan de producción.

Cuando el señor Barton discutió el problema telefónicamente con el supervisor de producción, el señor Allen dijo que obtendría la información necesaria relativa a los cuatro componentes utilizados en las tres marcas de gasolina. En su reunión del días siguiente, trajo los datos de la tabla 2, que incluyen, para cada compuesto: (a) la proporción de octanos, (b) el costo ($/bbl) y (c) el suministro máximo disponible (bbl/día). El señor Allen le recordó al señor Barton que cada una de las tres marcas de gasolina debe satisfacer una norma mínima de proporción de octanos (véase la tabla 1)

TABLA 2 Datos sobre los componentes para la mezcla de gasolina

COMPONENTE DE MEZCLA	CLASIFICACION DE OCTANAJE	COSTO ($/bbl)	SUMINISTRO (bbl/día)
1	102	15.00	2,500
2	96	12.00	3,000
3	93	9.00	3,500
4	110	24.00	2,000

Formule un modelo de producción para el señor Barton que maximice las ganancias diarias y satisfaga todas las restricciones.

1) Variables de decisión:

R1 = Cantidad de la mezcla 1 para producir gasolina Regular.

R2 = Cantidad de la mezcla 2 para producir gasolina Regular.

R3 = Cantidad de la mezcla 3 para producir gasolina Regular.

R4 = Cantidad de la mezcla 4 para producir gasolina Regular.

SP1 = Cantidad de mezcla 1 para producir gasolina Sin Plomo.

SP2 = Cantidad de la mezcla 2 para producir gasolina Sin Plomo.

SP3 = Cantidad de la mezcla 3 para producir gasolina Sin Plomo.

SP4 = Cantidad de la mezcla 4 para producir gasolina Sin Plomo.

S1 = Cantidad de la mezcla 1 para producir gasolina Suprema.

S2 = Cantidad de la mezcla 2 para producir gasolina Suprema.

S3 = Cantidad de la mezcla 3 para producir gasolina Suprema.

S4 = Cantidad de la mezcla 4 para producir gasolina Suprema.

2) Función Objetivo

1.5 R1 + 4.5 R2 + 7.5 R3 - 7.5 R4 + 3 SP1 + 6 SP2 + 9 SP3 – 6 SP4 + 7.5 S1 + 10.5 S2 + 13.5 S3 - 1.5 S4

3) Restricciones:

De octanaje:

12 R1 + 6 R2 + 3 R3 + 20 R4 >= 0

6 SP1 – 3 SP3 + 14 SP4 >= 0

2 S1 – 4 S2 – 7 S3 + 10 S4 >= 0

De demanda:

R1 + R2 + R3 + R4 = 2,000

SP1 + SP2 + SP3 + SP4 = 4,000

S1 + S2 + S3 + S4 = 3,000

De suministro:

R1 + SP1 + S1 <= 2,500

R2 + SP2 + S2 <= 3,000

R3 + SP3 + S3 <= 3,500

R4 + SP4 + S4 <= 2,000

De no neagtividad:

R1; R2; R3; R4; SP1; SP2; SP3; SP4; S1; S2; S3, S4 >= 0

2.3 FORMA CANÓNICA

El P.P.L. general puede ser expresado de la forma canónica que es:

$$Maximizar \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.a \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Las características de la forma canónica son.

1.-Todas las variables de decisión son no negativas.

Una variable que es irrestricta en signo (positiva, negativa o cero) es equivalente a la diferencia entre 2 variables no negativas.

Por ejemplo:

Si x_1 es irrestricta en signo puede reemplazarse por:

$$(x_1^+ - x_1^-) \quad donde \qquad x_1^+ \geq 0 \quad y \quad x_1^- \geq 0$$

2:- Todas las restricciones son del tipo $\leq$

Una desigualdad en una dirección ($\leq$ o $\geq$) puede cambiarse a una desigualdad en la dirección o puesta ($\geq$ o $\leq$) multiplicando ambos lados de la desigualdad por (-1)

Por ejemplo, las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 30$$
$$-3x_1 - 2x_2 \leq -30$$

Una ecuación puede ser reemplazada por dos desigualdades en direcciones opuestas. Por ejemplo:

$$10x_1 + 7x_2 = 35$$

es equivalente a las dos restricciones simultáneas:

$$10x_1 + 7x_2 \leq 35 \qquad \qquad 10x_1 + 7x_2 \geq 35$$
o
$$10x_1 + 7x_2 \geq 35 \qquad \qquad -10x_1 - 7x_2 \leq -35$$

Una restricción de desigualdad con el lado izquierdo en la forma de valor absoluto puede cambiarse a 2 desigualdades regulares.

Para b≥ 0

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

es equivalente a

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq -b$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

Para b≥ 0

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

es equivalente a

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq -b$$

3. La función objetivo es del tipo de maximización

La minimización de una función f(x) es matemáticamente equivalente a la maximización de la expresión negativa de esta función, es decir, -f(x)

Por ejemplo la función objetivo:

$$Minimizar\, Z = 3x_1 + 4x_2 - 7x_3$$

es equivalente a

$$Maximizar\, G = -Z = -3x_1 - 4x_2 + 7x_3$$

En cualquier P.P.L. la función objetivo puede ponerse en la forma de maximización.

Ejemplo

Reducir a la forma canónica

$$
\begin{aligned}
& Minimizar\ Z = 6x_1 - 4x_2 + 9x_3 \\
s.a \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 60 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 50 \\
\\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_3\ irrestricta\ en\ signo
\end{aligned}
$$

Su forma canónica es:

$$
\begin{aligned}
& Maximizar\ G = -6x_1 + 4x_2 - 9x_3^+ + 9_3^- \\
s.a \quad & -x_1 - x_2 - x_3^+ + x_3^- \leq -60 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3^+ - x_3^- \leq 50 \\
& -2x_1 + x_2 - x_3^+ + x_3^- \leq -50 \\
\\
& x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0
\end{aligned}
$$

2.4 LA FORMA ESTÁNDAR

Las características de la forma estándar son:

1) Todas las restricciones son ecuaciones (igualdades) excepto para las restricciones de no negatividad que permanecen como desigualdades (≥ 0).

Las restricciones de desigualdad pueden cambiarse a ecuaciones introduciendo (sumando o restando) en el lado izquierdo de cada una de las restricciones una variable no negativa. Estas variables se conocen como variables de holgura (o de exceso) y se suman si la restricción es del tipo ($\leq$), o se restan si la restricción es del tipo ($\geq$)

Ejemplo:

$$2x_1 + x_2 \leq 7 \longrightarrow 2x_1 + x_2 + S_1 = 7$$

$$x_1 + x_2 \geq 9 \longrightarrow x_1 + x_2 - S_1 = 9$$

$$8x_1 + 5x_2 \leq -3 \longrightarrow 8x_1 + 5x_2 + S_1 = -3$$

$$7x_1 + 4x_2 \geq -6 \longrightarrow 7x_1 + 4x_2 - S_1 = -6$$

2.- Los valores del lado derecho de cada ecuación son no negativos.

$$8x_1 + 3x_2 = -5$$

$$-8x_1 - 3x_2 = 5$$

3. - Todas las variables son no negativas

4. - La función objetivo es del tipo de maximización o minimización.

Ejemplo : Sea el P.P.L.

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar } Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ s.a \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & -2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq -10 \\ & x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 6 \\ \\ & x_1, x_3 \geq 0 \\ & x_2 \textit{ irrestricta en signo} \end{aligned}$$

Reducirlo a su forma estándar

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar } Z = 2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- - 5x_3 \\ s.a \quad & 2x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 = 4 \\ & 2x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- + x_3 - S_1 = 10 \\ & x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- - 2x_3 - S_2 = 6 \\ \\ & x_1, x_3, S_1, S_2, x_2^+, x_2^- \geq 0 \end{aligned}$$

2.5 SOLUCIÓN GRÁFICA

Un modelo se puede resolver en forma gráfica cuando sólo tiene dos variables. Para modelos con tres o más variables, el método gráfico es poco práctico o imposible de realizar. No obstante, podemos deducir conclusiones generales del método gráfico.

Supóngase el siguiente P.P.L.

$$\begin{aligned} & \textit{Maximizar } Z = 3x_1 + 2x_2 \\ s.a \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El primer paso del método gráfico consiste en graficar las soluciones factibles, o el espacio de soluciones (factible), que satisfaga todas las restricciones en forma simultánea, esto se conoce como la región factible. La parte sombreada de la figura 2 representa el espacio de soluciones que se requiere.

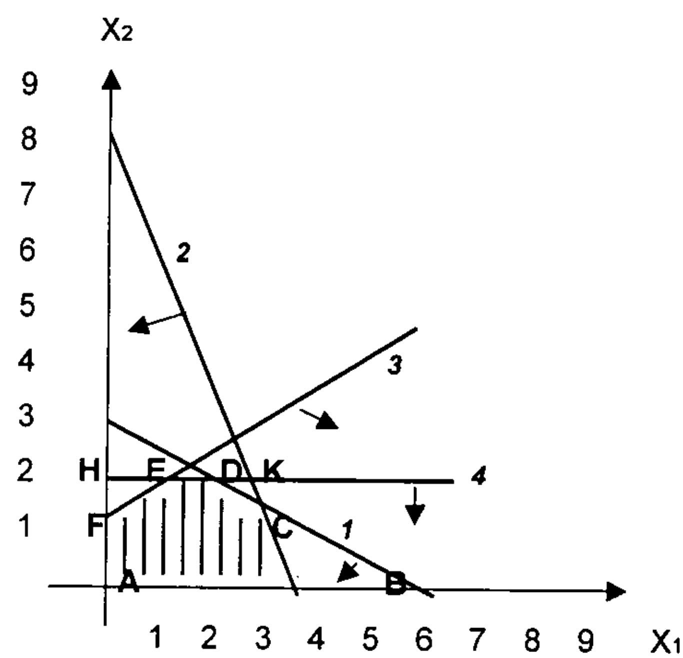


Figura 2

Las restricciones de no negatividad $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ confinan todos los valores factibles al primer cuadrante. El espacio encerrado por las restricciones restantes se determina sustituyendo en primer término ($\leq$) por (=) para cada restricción, con lo cual se produce la ecuación de una línea recta.

$$x_1 + 2x_2 = 6$$
$$2x_1 + x_2 = 8$$

Después se traza cada línea recta en el plano (x_1, x_2) y, la región en la cuál se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad lo indicada la dirección de la flecha situada sobre la línea recta asociada. Una manera fácil de determinar la dirección de la flecha es usar el origen (0,0) como punto de referencia. Si (0,0) satisface la desigualdad, la dirección factible debe incluir al origen ; sino es así , debe estar en el lado opuesto. Aplicando este procedimiento a nuestro ejemplo, especificamos el espacio de soluciones (la parte sombreada).

Para obtener la solución óptima (máxima), desplazamos la recta del ingreso (función objetivo), “cuesta arriba” hasta el punto donde cualquier incremento adicional en el ingreso produciría una solución no factible.

Cada punto situado en la frontera del espacio de soluciones (parte sombreada) satisface todas las restricciones y por consiguiente, representa un punto factible. Aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo.

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

La figura 3 ilustra que la solución óptima ocurre en el punto C. Como C es la intersección de las rectas 1 y 2 , los valores de x_1 *y* x_2 se determinan al resolver las dos ecuaciones en forma simultánea.

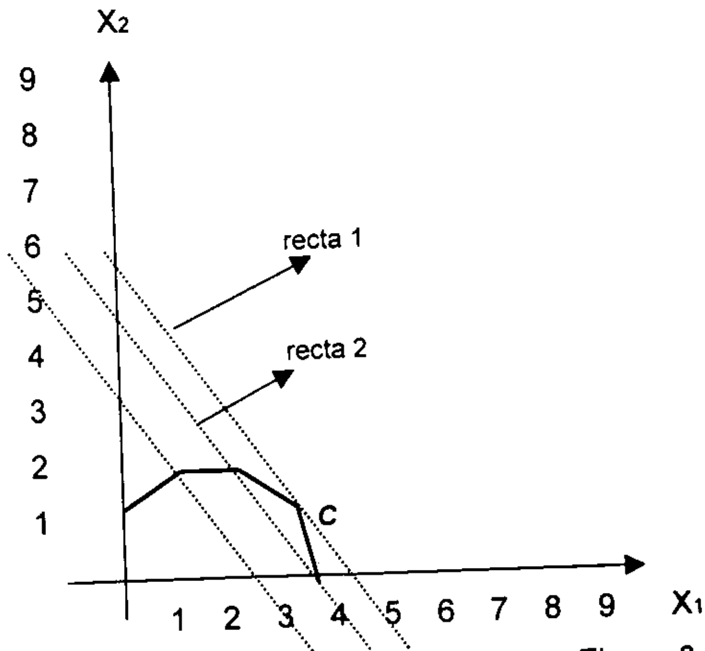


Figura 3

Las líneas paralelas, que representan la función objetivo, se trazan mediante la asignación de valores crecientes a $Z = 3x_1 + 2x_2$ con el fin de determinar la pendiente y la dirección en la cual crece el ingreso total (función objetivo). En la figura anterior se utilizó Z=6 y Z=9 y las dos ecuaciones producen $x_1 = \frac{10}{3}$ y $x_2 = \frac{4}{3}$

Así, el ingreso asociado es:

$$Z = 3\left(\tfrac{10}{3}\right) + 2\left(\tfrac{4}{3}\right) = 12\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

2.6. MÉTODO SIMPLEX

El método simplex es un algoritmo de la Investigación de Operaciones el cual se basa en el uso de la forma estándar (igualdades).

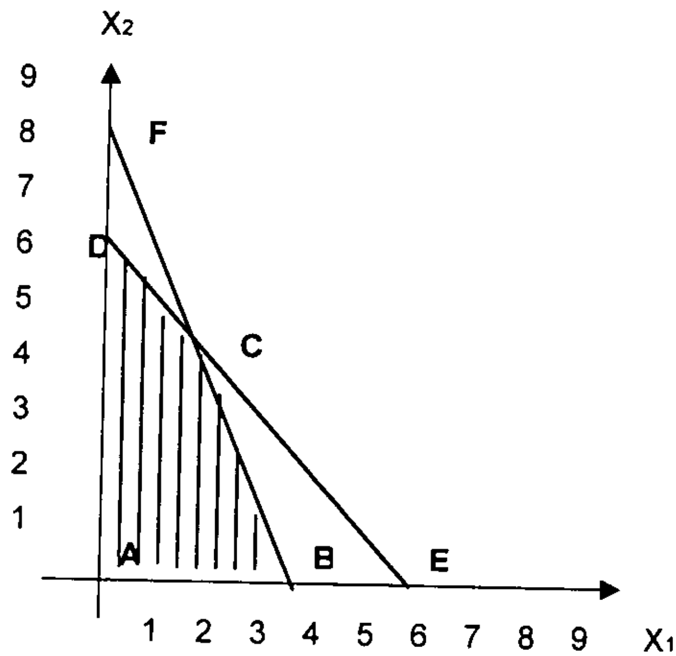
Ejemplo:

$$Maximizar\ Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} s.a \quad & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} & \textit{Maximizar} \quad Z = 4x_1 + 3x_2 \\ s.a \quad & 2x_1 + x_2 + S_1 \qquad = 8 \\ & x_1 + x_2 \qquad + S_2 = 6 \\ \\ & x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Para determinar algebraicamente los puntos extremos del espacio de soluciones consideremos que cada uno tiene 2 variables iguales a cero.

Punto extremo	Variables cero
A	$x_1 = 0$, $x_2 = 0$
B	$x_2 = 0$, $S_1 = 0$
C	$S_1 = 0$, $S_2 = 0$
D	$x_1 = 0$, $S_2 = 0$

Por otro lado el punto <u>no</u> extremo en el espacio de soluciones tiene a lo más una variable cero asociada a él. Entonces, los puntos extremos se determinan directamente de la forma estándar estableciendo 2 variables iguales a cero al mismo tiempo. De esta manera podemos obtener las soluciones básicas de las ecuaciones simultáneas definidas por la forma estándar.

En general una solución básica para un conjunto de m-ecuaciones con n incógnitas se determina estableciendo (n-m) variables iguales a cero y luego resolviendo las m ecuaciones con n incognitas, siempre que la solución sea única. En este caso las n-m variables iguales a cero se denominan variables no básicas y las restantes variables se llaman <u>básicas</u>.

Si retomamos el ejemplo anterior: n-m=2

Soluciones básicas:

E $S_2 = x_2 = 0$

F $S_1 = x_1 = 0$

Para E $S_2 = x_2 = 0$

$$2x_1 + S_1 = 0$$
$$x_1 = 6$$

$x_1 = 6$ $S_2 = 0$

$S_1 = 4$ $x_2 = 0$

Para F $x_1 = S_1 = 0$

$$x_2 = 8$$
$$x_2 + S_2 = 6$$

$x_2 = 8$ $x_1 = 0$

$S_2 = -2$ $S_1 = 0$

Si la solución proporciona todas las variables básicas no negativas se conoce como solución básica factible de otra manera es no factible.

Soluciones básicas factibles:

A	B	C	D
$x_1 = 0$	$x_1 = 4$	$x_1 = 2$	$x_1 = 0$
$x_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x_2 = 4$	$x_2 = 6$
$S_1 = 8$	$S_1 = 0$	$S_1 = 0$	$S_1 = 2$
$S_2 = 6$	$S_2 = 2$	$S_2 = 0$	$S_2 = 0$

Un punto extremo factible es una solución básica factible. La definición geométrica de un punto extremo del espacio de soluciones se traduce algebraicamente como las soluciones básicas de las ecuaciones que representan el problema.

La solución óptima para un problema de P.L general con m ecuaciones y n incógnitas puede obtenerse resolviendo:

$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ conjuntos de ecuaciones simultáneas

Esto es, puntos extremos posibles, pero sólo algunos de ellos son factibles.

En resúmen, si las m ecuaciones producen una solución única, entonces las m variables asociadas se llaman **variables básicas** y las n-m restantes se conocen como **variables no básicas**. En este caso, la solución única resultante incluye una **solución básica.** Si todas las variables asumen valores no negativos, entonces la **solución básica es factible**, de lo contrario es una **solución básica no factible.**

El método simplex esta diseñado para partir de una solución básica factible (generalmente el origen) y luego pasar sucesivamente a través de una serie de soluciones básicas factibles (no redundantes) de tal manera que cada nueva solución tenga la facultad de mejorar el valor de la función objetivo.

La base del método simplex que garantiza generar tal sucesión de soluciones básicas esta formada por 2 condiciones fundamentales:

1) La condición de optimalidad: Que asegura que nunca se encontrará una solución peor (relativa al punto de solución actual)

2) La condición de factibilidad. Que garantiza que partiendo de una solución básica factible, únicamente se encontrarán, durante el cálculo, soluciones básicas factibles.

Para ayudar a desarrollar las 2 condiciones el P.P.L, en su forma estándar, se presenta en una forma tabular conveniente.

$$Maximizar\ Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} s.a \quad 2x_1 + x_2 + S_1 \quad &= 8 \\ x_1 + x_2 \quad + S_2 &= 6 \\ \\ x_1, x_2, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución básica factible con que inicia el método simplex para este ejemplo es la solución básica factible inicial obvia $x_1 = x_2 = 0$ que da inmediatamente los valores para las variables de holgura:

$$S_2 = 6$$

$$S_1 = 8$$

$x_1 = x_2 = 0$ (Solución básica factible inicial)

Registramos la información sobre la solución de inicio en forma de tabla:

BASE	x_1	x_2	S_1	S_2	**SOL.**
S_1	2	1	1	0	8
S_2	1	1	0	1	6
Z-Cj	-4	-3	0	0	0

Tabla1

La función objetivo se expresa en forma de ecuación como:

$$Z - 4x_1 - 3x_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

La columna titulada base contiene las variables básicas actuales S_1 y S_2. La columna solución da los valores actuales de las variables básicas así que: S_1=8 & S_2=6.

Las variables no básicas actuales son aquéllas que no aparecen en la columna base y sus valores son cero, entonces, $x_1 = x_2 = 0$. Los valores asignados actualmente proporcionan *Z=0* como se ve en la columna de solución.

La anterior solución de inicio corresponde al punto A en el espacio de soluciones. El paso siguiente es determinar una nueva solución básica factible (punto extremo) con un valor mejorado de la función objetivo. El método simplex hace esto eligiendo una variable actual no básica que va a aumentar arriba de cero siempre que su coeficiente en la función objetivo (f..o.), tenga la virtud de mejorar (aumentar), el valor de Z. Como un punto extremo (en este ejemplo específico), debe tener 2 variables no básicas (iguales a cero), una de las variables básicas actuales debe hacerse no básica siempre que la solución sea factible.

La variable no básica actual que debe hacerse básica, usualmente se conoce como la variable que entra y esta determinada por la condición de optimalidad (a se ese renglón se le asocia con el renglón pivote).

La variable básica actual que va a ser no básica se conoce como la variable que sale y esta determinada por la condición de factibilidad (se le asocia con la columna pivote).

Condición de optimalidad:

Dada la ecuación Z expresada en función de las variables no básicas solamente, se elige la variable que entra en Max (Min) como la variable no básica que tiene el mayor coeficiente negativo (el más positivo) en la ecuación Z-Cj.

En la tabla anterior tanto x_1 como x_2 tienen coeficientes negativos y por consiguiente las 2 variables califican como variables de entrada, como x_1 tiene el mayor coeficiente se elige ya que es probable (no siempre sucede) que proporcione la mayor mejora en el valor de Z. Un empate entre 2 variable no básicas debe romperse arbitrariamente.

Cuando todos los coeficientes del renglón Z-Cj son no negativos (no positivos), sin incluir el valor Z, se ha llegado al óptimo.

Condición de factibilidad

Después, si x_1 (que es la variable que entra), se aumenta, la solución debe moverse del punto A al punto B. Esto se hace ya que B es el único punto extremo factible que puede ser alcanzado del punto A actual (es adyacente), aumentado x_1.

En otras palabras el punto B es ahora la nueva solución del punto extremo factible. Las variables no básicas en B son $S_1 = x_2 = 0$. En comparación con el punto A, donde x_1 y x_2 son las variables no básicas. Se puede ver que S_1 toma el lugar de x_1 entonces, S_1 es la variable que sale.

Tomando de la tabla el coeficiente de los valores en la columna x_1. La variable básica asociada a la relación mínima es la variable que sale o sea la intersección más pequeña.

Esto se resume como.

BASICA	SOL	x_1	RAZONES
S_1	8	2	$\frac{8}{2}=4$
S_2	6	1	$\frac{6}{1}=6$

Entonces la variable que sale es la variable básica correspondiente a la razón más pequeña de los valores actuales de las variables básicas entre los coeficientes positivos de las restricciones de la variable que entra. Un empate se rompe arbitrariamente.

Tabla2

BASE	x_1 →entra	x_2	S_1	S_2	SOL.
S_1 →sale	2→pivote	1	1	0	8
S_2	1	1	0	1	6
Z-Cj	-4	-3	0	0	0

Después de determinar la variable que entra y la que sale el paso siguiente es modificar la tabla de tal manera que la columna solución da directamente los valores nuevos para Z y para las que ahora son variables básicas.

Este resultado se logra haciendo el elemento pivóte igual a uno y los demás elementos de la columna pivóte iguales a cero, a través del método de Gauss – Jordan con operaciones de renglón.

ITERACIÓN 1

BASE	x_1	x_2	S_1	S_2	SOL.
x_1	1	½	½	0	4
S_2	0	½	-½	1	2
Z-Cj	0	-1	2	0	16

Tabla 3

Esto muestra que la solución factible es

x_1=4, x_2=0, S_1=0, S_2=2 }punto **B**

Como aún no todos los coeficientes del renglón Z-Cj son no negativos se debe realizar una nueva iteración.

Se aplica una segunda iteración y se obtiene la siguiente tabla:

ITERACIÓN 2

BASE	x_1	x_2	S_1	S_2	SOL.
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	-1	2	4
Z-Cj	0	0	1	2	20

Tabla 4

$x_1=2,\ x_2=4,\ Z=20$ } Solución óptima en **C**

El ejemplo muestra que únicamente 3 puntos extremos factibles se encuentran antes de determinar el óptimo. Por tanto no es necesario enumerar todos los 4 puntos factibles (A,B,C,D) ni los restantes 2 infactibles (E,F), Esto nos da una idea de la eficiencia del método simplex.

La única diferencia entre maximización y minimización ocurre con la condición de optimalidad:

- En minimización la variable que entra es aquella con el mayor coeficiente positivo en la función objetivo (renglón Z-Cj).
- La condición de factibilidad se aplica de igual manera, es decir tomando a la mínima razón.

Finalmente podemos presentar los pasos iterativos del Método Simplex:

Paso 1

Usando la forma estándar determinar una solución inicial básica factible.

Paso 2:

Seleccionar la variable que entra de entre las variables actuales no básicas, usando la condición de optimalidad.

Paso 3:

Seleccionar la variable que sale entre las variables actuales básicas, usando la condición de factibilidad.

Paso 4:

Determinar los valores de las nuevas variables básicas, haciendo a la variable entrante básica y a la variable saliente no básica. Regresar al paso 1.

2.7 DUALIDAD

Uno de los descubrimientos más importantes durante el desarrollo inicial de la P.L. fue el concepto de dualidad y sus aplicaciones. Cada problema de P.L. tiene un segundo problema asociado a él llamado DUAL. Las relaciones entre el problema dual y el original llamado primal son muy útiles en varias situaciones. De hecho la solución óptima a un problema proporciona información completa sobre la solución óptima para el otro.

La relación entre el primal y el dual puede reducir el esfuerzo de cómputo asociado al resolver problemas de P.L. Una de las aplicaciones más útiles de la teoría de dualidad es el llamado análisis de sensibilidad.

Problema dual cuando el primal esta en la forma canonica.

Sea el P.P.L. en forma canónica:

$$\text{Maximizar} \qquad X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.a \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Si este problema se denomina primal, entonces su dual asociado está dado como:

$$Minimizar \quad Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.a \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$$

$$y_i \geq 0$$

$$i = 1,2,..., m; \quad j = 1,2,..., n$$

El problema dual se obtiene a partir del primal (y viceversa) de la manera siguiente:

1.-Cada restricción en un problema, corresponde a una variable en el otro.

2.-Los elementos del lado derecho de las restricciones en un problema son iguales a los coeficientes de la función objetivo en el otro.

3.-Un problema maximiza y el otro minimiza

4.-Un problema de maximización tiene restricciones ($\leq$) y el de minimización tiene restricciones ($\geq$).

5.- Las variables en ambos problemas son no negativas.

Ejemplo:

$$Maximizar \quad X_0 = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} s.a \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 2x_2 &\leq 5 \\ 2x_2 + x_2 &\leq 4 \\ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$Minimizar \quad Y_0 = 6y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 4y_4$$

$$\begin{aligned} s.a \quad 2y_1 - 3y_2 + 2y_4 &\geq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 &\geq 3 \\ \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Note que el problema dual tiene menos restricciones (en este caso) como la solución óptima de un problema puede obtenerse de la solución óptima del otro es computacionalmente más eficiente resolver el dual en este caso. De hecho la dificultad de computo en P.L. depende principalmente del número de restricciones. Esta es una ventaja del problema dual.

Puede obtenerse directamente el problema dual asociado a partir del problema primal u original utilizando el mismo procedimiento que en la forma canónica la única diferencia es que la variable dual correspondiente a una restricción de igualdad en el primal debe ser irrestricta en signo. Inversamente, cuando una variable primal es irrestricta en signo su restricción dual debe ser en forma de ecuación.

Las variables duales correspondientes a un primal en la forma estándar deben ser todas irrestrictas en signo. Esta condición sin embargo sólo se cumple para restricciones primales que están originalmente en forma de ecuación ya que los problemas duales deberán ser equivalentes tanto para la forma estándar como para la forma canónica.

CAPÍTULO 3

PROGRAMACIÓN POR METAS

3.1 INTRODUCCIÓN

La Programación Lineal es por demás interesante y amplia, sin embargo tiene una aplicación limitada, debido a que los propósitos de la empresa difícilmente se engloban en un solo objetivo. Son más frecuentes y reales, situaciones en donde un solo objetivo no sirve para representar adecuadamente la problemática. Por ejemplo: Portafolios de inversión, ayuda a zonas marginadas, pues requiere prontitud y cantidad de ayuda, racionalizar recursos, inversiones en moneda extranjera, problemas de producción, calendarización de actividades, etc. Para todos los casos anteriores la PL tradicional no funciona ya que está orientada a optimizar un solo objetivo, de estos casos se ocupa la Programación por Metas (PM).

En este capítulo se trabajará con modelos en donde existen dos o más objetivos. En general, los objetivos entran en conflicto entre sí. Cuando un objetivo mejora su valor, otros empeoran. Las técnicas de Programación por Metas ayuda al responsable de las decisiones a llegar a una solución que logre un equilibrio aceptable entre los objetivos.

Se definen además dos grandes ramas de la PM:

- La Programación por Metas sin Prioridades, en donde tenemos metas múltiples pero sin preferencia de cuál se tiene que cumplir primero o sin establecer un orden para la optimización.
- La Programación por Metas con Prioridades, ya que es de suponer que algunas metas tengan diferente grado de importancia y compitan entre sí, consecuentemente, habrá algunas que estemos dispuestos a sacrificar para alcanzar aquellas de mayor prioridad.

Para resolver los planteamientos de estos dos tipos de PM se presenta un algoritmo basado en el método simplex y un método gráfico (el cual sirve para cuando contamos con dos variables), es importante mencionar que si bien no son las únicas técnicas que existen para este tipo de problemas, si son las más accesibles. Los planteamientos de Programación por Metas se pueden resolver además con software especializado como Win QSB (que resuelve la mayoría de problemaqs de PL), del cual se presenta una corrida en el capítulo 4, correspondiente a las aplicaciones.

Los primeros que trabajaron con PPM fueron A. Charnes y W.W. Cooper al inicio de los años 50's pero su campo comenzó a desarrollarse hasta 1961. Ellos propusieron resolver el problema de Regresión Lineal usando un modelo de PL. Posteriormente diversos investigadores han aplicado los modelos de PM para resolver problemas multi-objetivos.

3.2 CONCEPTOS BÁSICOS.

Un factor clave que diferencia la Programación por Metas de la Programación Lineal es la estructura y utilización de la función objetivo. En ésta sólo se incorpora una meta en la función objetivo, mientras que en la Programación por Metas se incorporan varias funciones objetivo. Esto se logra expresando la meta en forma de restricción, incluyendo una variable de desviación para reflejar la medida en que se llegue o no a lograr la meta, e incorporando esas variables de desviación en la función objetivo función en la función objetivo. En la Programación Lineal, el objetivo es maximizar o minimizar, en tanto que en la Programación por Metas el objetivo es minimizar la suma de las variables de desviación de las metas especificadas, es decir, todos los problemas de Programación por Metas son problemas de minimización.

Dado que se minimizan las desviaciones del conjunto de metas, un modelo de PM puede manejar metas múltiples con unidades de medición distintas. De la misma forma, pueden considerarse metas que están en conflicto. Si existen metas múltiples, puede especificarse una jerarquización ordinal o prioridades, y el proceso de solución de PM opera de tal manera que se satisface primeramente la meta con mayor prioridad y después las demás metas de acuerdo a las prioridades. En tanto que la Programación Lineal busca identificar la solución óptima de entre un conjunto de soluciones factibles, la Programación por Metas identifica el punto que satisface mejor el conjunto de metas de un problema, es decir, la PM minimiza las desviaciones de las metas, tomando en consideración la jerarquía de prioridades.

Una de las ventajas más importantes de la PM es que proporciona mayor información que la PL y, por ello, es más útil en el proceso de la toma de decisiones.

Por ejemplo, suponga que los administradores de una empresa han utilizado la PL para maximizar las utilidades en la fabricación de sus productos. Suponga también que la compañía tiene el compromiso de surtir un pedido de 100 unidades de un artículo específico y que su meta es cumplir con ese compromiso. En un planteamiento de PL se especificaría la meta como una restricción y si existiera suficiente capacidad de producción, el modelo de PL arrojaría una solución. Sin embargo, si la capacidad fuera insuficiente, se obtendría una solución no factible. El tratamiento de PM para el problema proporcionaría una solución en forma independiente de la capacidad. Si existiera suficiente capacidad, la solución de PM sería la misma que la de PL; pero si la capacidad fuera insuficiente, las soluciones de PL y PM serían claramente distintas.

La solución exacta de PM dependería del orden de prioridades, el costo del tiempo extra y las utilidades, pero se proporcionaría una solución. A partir de la solución de PM, los administradores estarían en posibilidad de determinar el tiempo extra requerido y las utilidades a las que se renunciaría para lograr la meta de satisfacer al cliente.

Antes de plantear cualquier modelo de Programación por Metas es importante hacer algunos comentarios:

En primer lugar, siempre habrá dos tipos de variables en cualquier planteamiento:

Las **variables de decisión,** representadas por x, son las variables que ya conocemos para cualquier planteamiento de Programación Lineal.
Las **variables de desviación**, representadas por d^{+} y d^{-}

En segundo lugar, en un modelo determinado de PM puede existir dos clases de restricciones.

Restricciones estructurales, que en términos generales se consideran como restricciones del medio ambiente que no tienen relación directa con las metas. Se pueden identificar por que sólo contienen variables de decisión, es decir, son las restricciones que se manejan en cualquier modelo de PL.
Este tipo de restricciones puede presentarse o no en los planteamientos de PM.

Restricciones de metas (o meta de restricción) que tiene una relación directa con las metas. Estas restricciones están formadas tanto por variables de decisión como por variables de desviación, y en algunos casos sólo por variables de desviación.
Este tipo de restricciones, como es lógico, siempre estarán presentes en los modelos de PM.

Variables de desviación.

En los problemas de metas múltiples es necesario introducir un nuevo tipo de variables de desviación d_i 's, las cuales miden el alcance logrado por cada uno de los objetivos respecto a sus metas.

Estas variables nos indican la desviación que existe entre el valor actual de la meta y su nivel de aspiración preestablecido, es decir, indican cuanto "nos faltó" (d_i^-) o cuanto "nos pasamos" (d_i^+) de cada una de las metas establecidas. Entonces, el propósito principal del modelo será minimizar la suma (total) de éstas desviaciones.

d_i^+ es la desviación positiva de la meta i, también conocida como el superávit o sobrelogro de la meta.

d_i^- representa la desviación negativa, también se conoce como el déficit o sublogro de la meta.

Así, d_i^+ representa el logro conseguido por encima de la meta. Cuando d_i^+ sea positivo significa que sobrepasamos el nivel aspirado por la meta. Por otro lado, d_i^- indica lo que nos faltó para alcanzar el nivel aspirado por la meta, es decir lo que no se consiguió. Cuando d_i^- sea positivo significa que estamos por debajo de la meta. A cada meta siempre le corresponderá dos variables de desviación (d_i^+, d_i^-), las cuales nunca podrán tomar valores negativos.

Ejemplo 3.2.1

La oficina de admisiones de la Universidad de Green Village está procesando solicitudes de tres categorias: del estado, de otros estados e internacionales. El puntaje del American College Test (ACT) (examen de admisión) es un factor importante para aceptar a los nuevos estudiantes. Las estadísticas recopiladas por la universidad indican que el promedio del puntaje de la ACT para estudiantes del estado, de otros estados e internacionales son 27, 26 y 23, respectivamente. El comité de admisión ha establecido las siguientes metas deseables para la nueva generación de alumnos:

1. La próxima generación es de por lo menos 1,200 estudiantes de primer ingreso.
2. La calificación promedio de la ACT para todos los estudiantes de primer ingreso es de por lo menos 25.
3. Los estudiantes internacionales constituyen por lo menos el 10% de la nueva generación.
4. Los estudiantes de otros estados constituyen por lo menos el 20% de la nueva generación.

Como el propósito de este ejemplo es ilustrar el uso de las variables de desviación, primeramente se definirán las dos variables de desviación, que como ya se dijo, corresponden a cada meta.

Meta1:

d_1^- = grado en que no se alcanzan 1,200 alumnos de nuevo ingreso.

d_1^+ =grado en que se rebasan 1,200 alumnos de nuevo ingreso.

Meta 2:

d_2^- =grado en que no se alcanza la calificación promedio de 25 puntos

d_2^+ =grado en que se rebasan los 25 puntos de calificación promedio.

Meta3:

d_3^- =grado en que los estudiantes internacionales no alcanzan el 10% de la generación.

d_3^+ =grado en que los estudiantes internacionales rebasan el 10% de la generación.

Meta 4:

d_4^- = grado en que los estudiantes de otros estados no alcanzan el 20% de la generación.

d_4^+ grado en que los estudiantes de otros estados rebasan el 20% de la generación.

Ahora se formulará el problema de PM completo.

Las variables de decisión son:

x_1 = Estudiantes de primer año del estado.

x_2 = Estudiantes de primer año de otros estados.

x_3 = Estudiantes de primer año internacionales.

Las metas del consejo de admisiones se pueden expresar de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1200 \\
27x_1 + 26x_2 + 23x_3 &\geq 25(x_1 + x_2 + x_3) \\
x_3 &\geq 0.10(x_1 + x_2 + x_3) \\
x_2 &\geq 0.20(x_1 + x_2 + x_3)
\end{aligned}
$$

Si se simplifican las restricciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1200 \\
2x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 0 \\
-0.1x_1 - 0.1x_2 + 0.9x_3 &\geq 0 \\
0.2x_1 - 0.8x_2 + 0.2x_3 &\leq 0
\end{aligned}
$$

Para cada desigualdad se agregan las variables de desviación (d_1^-, d_1^+)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + d_1^- - d_1^+ &= 1200 \\
2x_1 + x_2 - 2x_3 + d_2^+ - d_2^+ &= 0 \\
-0.1x_1 - 0.1x_2 + 0.9x_3 + d_3^- - d_3^+ &= 0 \\
0.2x_1 - 0.8x_2 + 0.2x_3 + d_4^- - d_4^+ &= 0
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0, \; i = 1,2,3,4$$

Por la naturaleza de las variables de desviación, si $d_i^- > 0$ entonces $d_i^+ = 0$ y viceversa. No obstanteambas podrían resultar cero simultáneamente, $d_i^- = d_i^+ = 0$. Lo anterior significa que d_i^- y d_i^+ no deben ser positivas al mismo tiempo y estará representado (implicitamente) con la ecuación:

$$d_i^- * d_i^+ = 0 \quad \forall \ i = 1,2,\ldots,m \quad \text{(m es el número de metas).}$$

Esta restricción no es lineal, pero no es necesario incluirla en el modelo ya que el simlex se encarga de excluirlas automáticamente (las columnas correspondientes a d_i^- y d_i^+ son linealmente dependientes y no es posible tenerlas en una misma base simultáneamente).

Para poder identificar (e incluir en la función objetivo) las desviaciones relevantes correspondientes a cada meta se presenta la siguiente tabla:

TIPO DE META-RESTRICCIÓN	**DESVIACIÓN A INCLUIR EN LA FUNCIÓN OBJETIVO (MINIMIZAR)**
$Z(x) \geq b$	d^-
$Z(x) \leq b$	d^+
$Z(x) = b$	d^-, d^+

Para el ejemplo anterior, las tres primeras restricciones son del tipo $\geq$,y la última es del tipo $\leq$ por lo tanto las variables de decisión que se deben minimizar son:

Min $Z_1 = d_1^+$

Min $Z_2 = d_2^+$

Min $Z_3 = d_3^+$

Min $Z_4 = d_4^-$

Estos son los cuatro objetivos que deseamos satisfacer, pero dado que la PM busca minimizar la suma de las desviaciones, a partir de aquí se manejará una sola función objetivo. Para el ejemplo anterior:

$$Min \ Z = d_1^+ + d_2^+ + d_3^+ + d_4^-$$

3.3 MODELOS DE UNA SOLA META

La relación entre Programación por .Metas (PM.) y Programación Lineal (PL.) es muy estrecha, para entender mejor esta relación se utilizan modelos de una sola meta.

Consideremos el siguiente problema:

Ejemplo 3.3.1

Una compañía automotriz produce automóviles y camionetas, cada vehículo tienen que pasar por el taller de montaje de la carrocería y por el taller de pintura.

Cada vehículo requiere tiempo en los dos talleres:

Las camionetas requieren 20 horas en el taller de montaje y 10 en el taller de pintura.

Los automóviles requieren 10 horas en el taller de montaje y 10 horas en el taller pintura.

El tiempo de producción está limitado a 60 horas en el taller de montaje y 40 en el de pintura. La contribución de los dos productos a las utilidades es de $40 mil y $80mil, respectivamente. El objetivo es maximizar las utilidades. El planteamiento de P.L. del problema es:

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar} \quad Z = 40\,x_1 + 80\,x_2 \\ s.a \quad & 20\,x_1 + 10\,x_2 \leq 60 \\ & 10\,x_1 + 10\,x_2 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En donde x_1 = Número de camionetas que deben fabricarse.

x_2 = Número de automóviles que deben fabricarse.

La solución óptima para el problema, que puede resolverse a través del método simplex es.

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

$$Z = \$320 \text{ mil}$$

Se tienen 20 horas de tiempo de holgura en el departamento de montaje (S_1=20) y no hay tiempo muerto en el departamento de pintura. (S_2= 0).

El planteamiento de P.M. para el problema es:

$$\begin{array}{lll} & \textit{Minimizar} & Z = d^- \\ s.a & 20x_1 + 10x_2 & \leq 60 \\ & 10x_1 + 10x_2 & \leq 40 \\ & 40x_1 + 80x_2 + d^- - d^+ & = 1000 \\ & & \\ & x_1, x_2, d^-, d^+ \geq 0 & \end{array}$$

En donde las *x* representan variables de decisión y las *d´s* representan variables de desviación.

La diferencia entre los 2 modelos es la función objetivo, ya que en el modelo de P.M. se han utilizado variables de desviación y se ha incluido la ecuación. Esta ecuación tienen una apariencia muy similar a una restricción pero en realidad es la ecuación de metas del modelo, en este caso, la meta de utilidades. Dado que estamos tratando de maximizar utilidades, fijamos una meta arbitrariamente alta, $1,000 en este ejemplo. Las variables de desviación (d^- y d^+) representan la cantidad que no se alcanza (d^-) o se supera (d^+) la meta de $1,000.

Si se logra la meta en forma exacta, ambas variables de desviación serán cero; si no se puede lograr la meta, entonces una u otra de las variables será cero.

Dado que el objetivo es maximizar utilidades, la función objetivo del modelo de PM, contienen una variable de desviación, la función de utilidad que aparece en el modelo de PL se incluye como una restricción de meta. En la función objetivo aparecen sólo las variables de decisión asociadas con la meta. Para este problema solo se incluyen la variable de desviación d^-. Esto es así porque el objetivo, en su forma de PM, es minimizar la cantidad en la que no se alcanza la meta de utilidades, y dado que no alcanzar esa meta es indeseable, pretendemos que d^- sea lo más cercana a cero como sea posible.

En el caso de superar la meta de utilidades es indeseable (aquí no lo es ya que se trata de utilidades), entonces sólo se incluiría d^+ en la función objetivo. Si lo que queremos es lograr en forma exacta la meta de utilidades, entonces se deben incluir ambas variable de desviación en la función objetivo.

Como las variables de desviación pueden ser tratadas como cualquier otra variable, el planteamiento de P.M. se puede resolver con el método simplex.

La solución que se obtienen al aplicar el método simplex es la siguiente :

$x_1 = 0$ $\quad S_1 = 20$ $\quad d^- = 680$

$x_2 = 4$ $\quad S_2 = 0$

Como podemos apreciar esta solución idéntica a la que se obtuvo en el planteamiento de P.L:, excepto por la diferencia en el valor de Z.

Para el planteamiento de PL Z = \$320 y en PM Z = \$680 (en realidad es -680 por tratarse de minimización).

Este valor de \$680 refleja la medida en la que no se ha logrado la meta de utilidades de \$1000 por lo que las utilidades máximas reales para el problema son de :

$$\$1000 - \$680 = \$320$$

que es la misma cantidad de la solución de PL.

3.4 MODELOS DE METAS MÚLTIPLES SIN PRIORIDADES (Modelo Arquimediano)

En el modelo Arquimediano todas las metas son de igual importancia, únicamente se asignan pesos o penalizaciones w_i a las variables de desviación, con el propósito de "castigar" si una meta no se cumple, estas penalizaciones (w's), pueden aparecer o no en los modelos, la decisión es del administrador. La función objetivo del problema de programación por metas consiste en minimizar la suma ponderada de las desviaciones.

$$\begin{aligned}
&Min \quad \sum_{i=i}^{m} (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \\
&C^1 x + d_i^- - d_i^+ = b_1 \\
&C^2 x + d_2^- - d_2^+ = b_2 \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&C^m x + d_m^- - d_m^+ = b_m \\
&x \in S
\end{aligned}$$

Donde:

w_i = Penalización asignada en las variables de decisión.

m = Número de metas.

n = Número de variables de decisión.

d_i^- = Desviación negativas de la meta i

d_i^+ = Desviación positiva de la meta i

$C^i x$ = i-ésima función objetivo transformada en la meta i.

C^i = vector renglón de coeficientes de costos.

b_i = Nivel aspirado por la meta i.

x_j = variable de decisión.

S = Espacio de soluciones factibles determinado por el conjunto de soluciones reales del problema.

Ejemplo 3.4.1

Una empresa de productos lácteos, produce crema y mantequilla. La mantequilla se elabora en 40 minutos mientras que la crema en 30 minutos. Se disponen de 8 horas de trabajo corrido en un turno diario. La utilidad es de \$40 y \$20 por mantequilla y crema, respectivamente.

Variables de decisión:

x_1 = Número de productos de crema a producir.

x_2 =Número de productos de mantequilla a producir.

El dueño de la empresa se ha fijado las siguientes metas:

Meta 1) Producir 15 productos al día (entre ambos)

Meta 2) Obtener una utilidad mínima de \$400.

La meta 1 se representa con la restricción

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

Y la meta de utilidad:

$$40x_1 + 20x_2 \geq 400$$

La primer restricción no se satisface cuando se producen menos de 15 productos, entonces quedar por debajo de la meta (no lograrla) es importante, por lo que la desviación negativa de esta meta (d_1^-) debe incluirse en la función objetivo del PPM.

La meta-restricción asociada a la meta 1 queda:

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15$$

Donde:

d_1^- = Número de productos que faltaron para alcanzar 15 como mínimo.

d_1^+ = Número de productos que sobrepasan los 15.

La meta utilidad también es del tipo ≥ y será beneficiada siempre que minimicemos el déficit de utilidad, d_2^-.

La meta restricción correspondiente es:

$$4x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$

Entonces, el modelo de P.M. queda de la siguiente manera:

$$Min \quad (w_1^- d_1^- + w_2^- d_2^-)$$
$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15$$
$$4x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$
$$\tfrac{2}{3} x_1 + \tfrac{1}{2} x_2 \leq 8 \qquad (horas)$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$$

Observemos que una ganancia por arriba de los \$400 $d_2^+ > 0$, no perjudica el nivel de utilidad deseado; sino que está a favor del logro de dicha meta, es por esto que d_2^+ no se incluyó en la f.o. (al igual que d_1^+).

Asignando $w_1^- = w_2^- = 1$ (penalización asignada por la administración) y aplicando al método simplex obtenemos la solución óptima.

$x_1 = 6 \quad d_1^- = 1 \quad d_2^- = 0$

$x_2 = 8 \quad d_1^+ = 0 \quad d_2^+ = 0$

$Z = 1$

$d_1^- = 1$ Indica que nos quedamos 1 unidad por debajo de la meta de 15.

$d_2^- = 0$ Nos dice que alcanzamos satisfactoriamente la utilidad mínima de \$440.

El valor mínimo de la f.o. del P.P.M. es $Z = d_1^- + d_2^- = 1$

El valor de la función objetivo no tiene significado práctico porque d_1^- representa productos lácteos y d_2^- representa unidades monetarias.

3.5 MODELOS DE METAS MÚLTIPLES CON PRIORIDADES.

El modelo general es:

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \sum_{i=1}^{p} P_i (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \\
& C^1 x + d_1^- - d_1^+ = b_1 \\
& C^2 x + d_2^- - d_2^+ = b_2 \\
& \vdots \\
& C^m x + d_m^- - d_m^+ = b_m \\
& x \in S \\
& x_j , d_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Donde:

d_i, b_i, x, C^i, S son como se definieron anteriormente.

p = Número de niveles de prioridades establecidas en el modelo (p≤m),

P_i = Coeficiente de prioridad *i*,

w_i = Coeficiente de penalización.

Sin embargo la meta *i* no necesariamente corresponde al nivel de prioridad *i*. Entonces, una forma más general del modelo resulta:

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \sum_{k=1}^{p} (u_k d^- + \lambda_k d^+) \\
& Cx + d^- - d^+ = b \\
& x \in S \\
& x, d^-, d^+ \geq 0
\end{aligned}
$$

Donde:

$$\begin{aligned} u_k &= (w_{1k}^-, w_{2k}^-, \dots, w_{mk}^-) \\ \lambda_k &= (w_{1k}^+, w_{2k}^+, \dots, w_{mk}^+) \\ d^- &= (d_1^-, d_2^-, \dots, d_m^-) \\ d^+ &= (d_1^+, d_2^+, \dots, d_m^+) \\ k &= 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

En los modelos de Programación Por Metas Con Prioridades, las metas correspondientes al coeficiente de prioridad P_1 son infinitamente más importantes que las metas de prioridad P_2, esto se denota escribiendo $P_1 > P_2$. Las metas de prioridad P_2 son más importantes que las metas de prioridad P_3, y así sucesivamente.

Si retomamos el ejemplo 3.3.1 y consideramos solamente que los administradores han decidido que además de la meta de utilidades, se incluyan cuando menos 2 unidades de cada tipo de vehículo, pero estas dos metas tienen un orden de prioridad:

P_1 (prioridad 1): Satisfacer las metas de producción de 2 unidades para cada vehículo.
P_2 (prioridad 2): Maximizar utilidades.

El planteamiento de P.M. C. P. Es el siguiente:

$$\begin{array}{lllll} Min & Z = P_1 d_2^- + P_1 d_3^- + P_2 d_1^- & & & \\ s.a & 20x_1 + 10x_2 & & & \leq 60 \\ & 10x_1 + 10x_2 & & & \leq 40 \\ & 40x_1 + 80x_2 + d_1^- - d_1^+ & & & = 1000 \\ & x_1 & + d_2^- - d_2^+ & & = 2 \\ & \quad x_2 & & + d_3^- - d_3^+ & = 2 \end{array}$$

No podemos utilizar el método simplex para resolver este problema, puesto que tenemos en el la f.o. índices de prioridad. Sin embargo se puede utilizar una "versión" de este método conocida como simplex de PM modificado.

La solución que se obtiene al utilizar el simplex modificado es:

$x_1 = 2 \quad S_1 = 0 \quad d_1^- = 760 \quad d_1^+ = 0 \quad d_3^+ = 0$

$x_2 = 2 \quad S_2 = 0 \quad d_2^- = 0 \quad d_3^- = 0$

$Z = 760\ P_2$

Como podemos ver la meta 1 (P_1) se logró; se fabricaron dos unidades de x_1, (camionetas) y dos de x_2 (automóviles).

La meta Z (P_2) no se logró: la contribución a las utilidades es $240 ($1000-760); no se logró la meta por $760, es decir existió desviación negativa d_1^- = 760 (un déficit de $760).

3.6 SOLUCIÓN GRÁFICA

Los problemas de P.M. de dos variables de decisión se pueden resolver por un método gráfico, el cual consiste en 5 pasos una vez que se ha hecho el planteamiento.

1.-Graficar todas las restricciones estructurales e identificar la región factible. Si no existen restricciones estructurales, la región factible es el área del primer cuadrante, $x_1, x_2 \geq \geq 0$.

2.- Graficar las líneas que corresponden a las restricciones de meta. Esto se logra igualando a cero las variable de desviación en la restricción de meta y trazando la ecuación resultante..

3.- Identifique la solución de mayor prioridad. Esto se logra determinando el punto o puntos de la región factible que satisfacen la meta de mayor prioridad.

4.- Pasar a la meta que tiene la siguiente prioridad más alta y determinar la o las "mejores" soluciones, de manera que éstas no degraden la solución o soluciones ya alcanzadas para las metas de mayor prioridad.

5.- Repetir al paso 4 hasta que se hayan investigado todos los niveles de prioridad.

Ejemplo 3.6.1

Una empresa que se dedica a la producción de cámaras fotográficas, fabrica dos clases de cámaras de 35 mm. El proceso de producción de las cámaras requiere dos horas de tiempo de producción en el departamento 1 y 3 en el departamento 2. Fabricar su modelo de lujo requiere 4 horas de tiempo en el departamento 1 y 3 en el departamento 2. En la actualidad, existen disponibles 80 horas de mano de obra es un factor un tanto restrictivo porque la compañía tiene una política general de evitar el tiempo extra, si es posible. Las utilidades de fabricante para cada cámara normal son de $30.00 mientras que la utilidad para el modelo de lujo es de $40.00. Los administradores se han fijado los siguientes metas:

P_1 (Prioridad 1) : Evitar las operaciones en tiempo extra en cada departamento.

P_2 (Prioridad 2) :Vender en promedio un mínimo de 10 cámaras normales y 10 de lujo por semana.

P_3 (Prioridad 3) : Maximizar las utilidades.

Primero planteamos el modelo de PM.

$$
\begin{aligned}
Min \quad & Z = P_1d_1^+ + P_1d_2^+ + 30P_2d_3^- + 40P_2d_4^- + P_3d_5^- \\
s.a. \quad & 2x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\
& 3x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 80 \\
& x_1 + d_3^- - d_3^+ = 10 \\
& x_2 + d_4^- - d_4^+ = 10 \\
& 30x_1 + 40x_2 + d_5^- - d_5^+ = 1200
\end{aligned}
$$

Una vez planteada procedemos a graficarlo

PASO 1. Graficar todas las restricciones estructurales.
Como no tenemos restricciones estructurales, la región factible es el cuadrante no negativo

PASO 2. Graficar todas las restricciones de meta (RM).
Al fijar las variables de desviación en cero en cada una de las restricciones pueden trazarse las ecuaciones de meta.

Es decir:

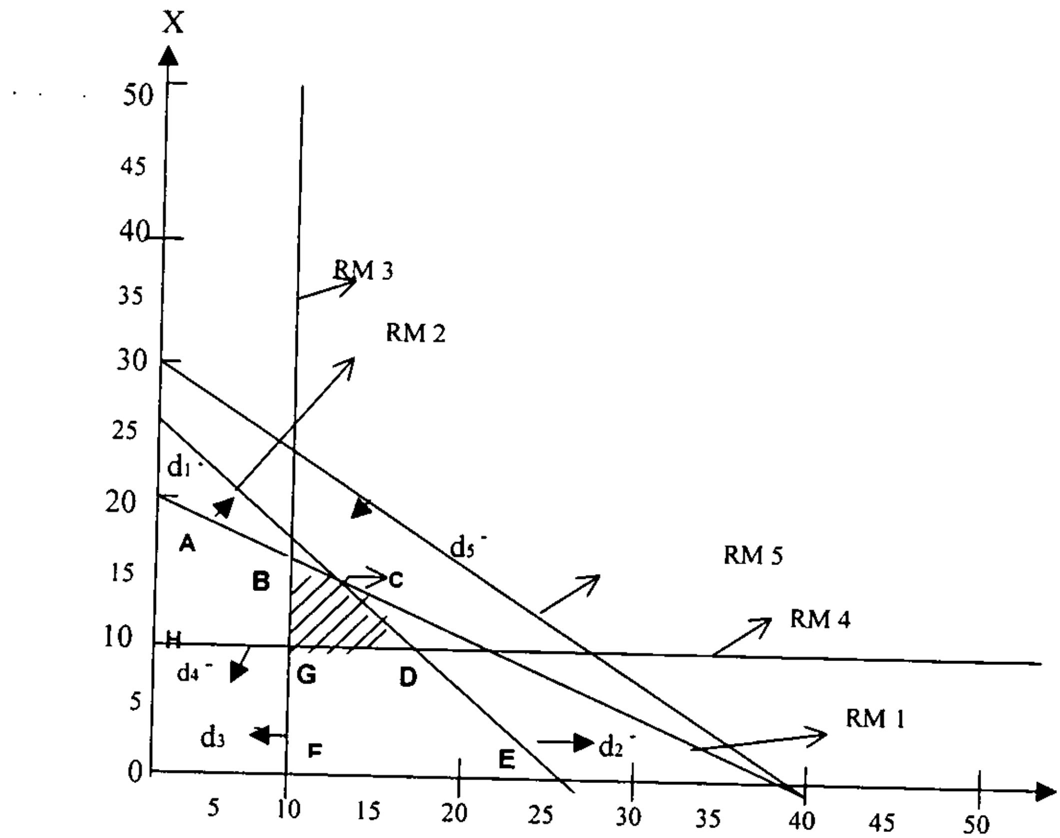
RM1 $2x_1 + 4x_2 = 80 \Rightarrow x_1 = 40 \quad x_2 = 20$

RM2 $3x_1 + 3x_2 = 80 \Rightarrow x_1 = 26.6 \quad x_2 = 26.6$

RM3 $x_1 = 10$

RM4 $x_2 = 10$

RM5 $30x_1 + 40x_2 = 1200 \Rightarrow x_1 = 40 \quad x_2 = 30$



El efecto que tiene una variable de desviación sobre una ecuación de meta es correr esa ecuación de manera que la nueva ecuación es paralela a la original. El valor de la variable de desviación refleja la magnitud del cambio. Aquí solo representamos las variable de desviación que deben minimizarse en la función objetivo, las flechas reflejan el impacto que tienen dichas variables sobre la ecuación.

PASO 3. Identificar la solución con mayor prioridad.

Las variables d_1^+ y d_2^+ tienen coeficiente de prioridad de P1 en las función objetivo; por tanto, deben considerarse en primer lugar las restricciones de meta 1 y 2. El objetivo es minimizar d_1^+ y d_2^+. Si se fija d_1^+ en cero, el área de factibilidad es el área que se encuentra por debajo de la ecuación RM1. Si se fija d_2^+ en cero, el área de factibilidad es la que se encuentra por debajo de la ecuación.RM2. El área factible común a ambas es la que se encuentra por debajo de los segmentos de línea AC y CE. Cualquier punto que se encuentre en esta área satisfará la condición de que $d_1^+ = 0$ y $d_2^+ = 0$.

Es importante aclarar que es incorrecto concluir ahora que el punto C es la solución óptima para la meta de mayor prioridad puesto que la totalidad de área factible satisface la condición de que $d_1^+ = 0$ y $d_2^+ = 0$.

PASO 4. Pasar a la siguiente prioridad más alta y determinar la "mejor" solución, sin violar metas anteriores.

Las variables de desviación d_3^- y d_4^- tienen un coeficiente de prioridad de P_2 en la función objetivo; por tanto, se examinan después estas restricciones de meta. Como $P_2\ d_4^-$ tiene una peso diferencial de 40, mientras que el factor $P_2\ d_3^-$ tiene un peso de 30, debemos convertir d_4^- en cero antes de considerar d_3^-. Al hacer ambas variables cero permanecen dentro de la región factible encontrada anteriormente, sin embargo dicha región se reducirá. La nueva región factible queda formada por los segmentos de línea BC, CD, DG y GB. Cualquier punto de esta región factible satisfará la condición: $d_1^+ = 0$, $d_2^+ = 0$, $d_3^- = 0$, $d_4^- = 0$.

PASO 5. Repetir el paso 4 hasta que se hayan investigado todas las prioridades.

El último nivel de prioridad es P_3 ; la variable de desviación asociada con esta prioridad es d_5^-. Ya convertimos las primeras 4 variables de desviación en cero, lo que significa que hemos alcanzado las metas con las que esas variable están asociadas. Si podemos convertir d_5^- en cero, habremos logrado todas las metas. Sin embargo, al observar la gráfica se observa que la ecuación de meta RM5 esta fuera de la región factible actual. Dado que RM5 no es factible, la meta de nivel P_3 puede alcanzar sólo a costa de metas con mayor prioridad.

Para tener una solución aceptable que no impida el logro de metas con mayor prioridad, d_5^- debe ser > 0. Evidentemente nos gustaría que d_5^- fuera lo más pequeña posible. Si trazamos líneas paralelas a RM5 hasta tocar la región factible (B C D G B), puede identificarse la solución que satisface mejor al objetivo de minimizar d_5^-. Este es el punto C de la región factible. Dado que las ecuaciones de meta 1 y 2 (RM1 y RM2) se intersectan en el punto C, pueden resolverse esas ecuaciones de manera simultánea, de esta manera obtenemos:

$$x_1 = 13.33$$

$$x_2 = 13.33$$

Ahora debemos determinar los valores de las variables de desviación.

De la gráfica tenemos:

$d_3^- = 0$, $d_4^- = 0$, $d_5^+ = 0$ y $x_1 = 13.33$, $x_2 = 13.33$

sustituyendo estos valores en las restricciones de meta obtenemos:

$d_3^+ = 3.33$

$d_4^+ = 3.33$

$d_5^- = 266.67$

De esta manera el procedimiento gráfico nos arroja la siguiente solución:

$d_1^- = 0$ $\quad$ $d_1^+ = 0$

$d_2^- = 0$ $\quad$ $d_2^+ = 0$

$d_3^- = 0$ $\quad$ $d_3^+ = 3.33$

$d_4^- = 0$ $\quad$ $d_4^+ = 3.33$

$d_5^- = 266.67$ $\quad$ $d_5^+ = 0$

Estos valores indican que fabricando 13.33 unidades por semana de cada cámara, la compañía puede alcanzar sus primeros dos objetivos y maximizar sus utilidades. Se utilizarían exactamente 80 horas de tiempo de operación en cada departamento y las utilidades serías de $933.33. La compañía no alcanzaría su objetivo de $1,200 por $266.67.

3.7 ALGORITMO DE PROGRAMACIÓN POR METAS.

Se puede utilizar el método simplex para resolver problemas de P.M., solamente es necesario hacer 3 modificaciones al algoritmo que ya conocemos y que se explicó en el capítulo anterior.

Existirá un renglón llamado C_j que contendrá los coeficientes de la función objetivo. Dicho renglón sólo será necesario en la primera tabla.

Se agregará una columna C_B que contiene los coeficientes que las variables de la base tienen en la función objetivo.

El renglón Z se cambiará por $Z_j - C_j$ (por simplicidad a partir de ahora le llamaremos R), este se forma a su vez de tanto renglones como prioridades tenga nuestro problema.

El algoritmo de PM consta de seis pasos que son:

PASO 1. Establezca la tabla simplex modificada e inicial. Esta tabla incluirá un renglón R para cada nivel de prioridad. Fijar $k = 1$, en donde k, identifica al renglón R asociado con el nivel de prioridad P_k. Continuar con el paso 2.

PASO 2. Verifique si ya tiene la solución óptima examinado el valor de la columna (solución) para la prioridad P_k. Si existe un cero, entonces se ha alcanzado la meta de prioridad P_k; por tanto, vaya el paso 6.

Si no existe un valor de cero, vaya al paso 3

PASO 3. Determine la nueva variable que entra examinando el renglón R para la prioridad P_k *.

Se utilizan los mismos criterios que el simplex normal, aunque es importante recalcar que solo se examina el renglón P_k. Si no existe ningún coeficiente que cumpla son las condiciones necesarias, entonces vaya al paso 6, si no es así, continuar con el paso 4.

PASO 4. Determine la variable que sale utilizando el procedimiento normal del método simplex.

PASO 5. Elabore una nueva tabla. Se emplea el procedimiento normal del método simplex para actualizar los coeficientes del cuerpo de la tabla. Vaya al paso 2

PASO 6. Evalúa el siguiente nivel de prioridad fijando $k = k + 1$.

Si k es mayor que $\boldsymbol{K}$, en donde $\boldsymbol{K}$ es el número total de niveles de prioridad, entonces deténgase, la solución es óptima . Si $k \leq \boldsymbol{K}$, entonces el renglón R para el nivel de prioridad P_k debe examinarse; por tanto, vaya al paso 2.

* NOTA: Es importante mencionar que cuando se elige la variable que entra, en su columna tenemos que verificar que los renglones correspondientes a la(s) prioridad(des) de mayor rango no tengan coeficiente negativo, pues esto violaría el logro existente en la otra meta.

Para ilustrar el algoritmo, usaremos nuevamente el problema con el que ejemplificamos la solución gráfica (ejemplo 3.6.1).

El modelo se planteó de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{llr}
Min & Z = P_1d_1^+ + P_1d_2^+ + 30P_2d_3^- + 40P_2d_4^- + P_3d_5^- & \\
s.a. & 2x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ & = 80 \\
 & 3x_1 + 3x_2 \qquad + d_2^- - d_2^+ & = 80 \\
 & x_1 \qquad + d_3^- - d_3^+ & = 10 \\
 & x_2 \qquad + d_4^- - d_4^+ & = 10 \\
 & 30x_1 + 40x_2 \qquad + d_5^- - d_5^+ & = 1200
\end{array}
$$

<u>PASO 1</u>. Establezca la tabla inicial.

El procedimiento para crear la tabla inicial son idénticas a los del método simplex, con las excepciones que se explicaron anteriormente. Para la columna denominada Base, si existe asociada una variable básica para esa restricción. Si existen restricciones estructurales, las variables de holgura se encontrarán en la base inicial. Para el problema que nos ocupa $d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_5^-$ forman la base de la primera tabla.

C_j, C_B R (o $Z_j - C_j$), se calculan de la siguiente manera:

El renglón C_j contiene los coeficientes de la función objetivo. La columna C_B contiene los coeficientes de la base, en nuestro ejemplo la columna C_B se forma con: $d_1^- = 0, \quad d_2^- = 0, \quad d_3^- = 30P_2, \quad d_4^- = 40P_2, \quad d_5^- = P_3$

Los diversos renglones R (ó $Z_j - C_j$) se calculan así:

Primero se calcula Z, multiplicando el valor de la j-ésima columna por los valores de la columna C_B y sumando las partes componentes.

Por ejemplo, para la columna x_1

$Z_1 = (2)(0) + (3)(0) + (1)(30P_2) + (0)(40P_2) + (30)(P_3)$

El valor de C_1 (del renglón de C_j) asociado con x_1 , es cero.

Por tanto el hacer la resta $Z_j - C_j$:

$$Z_1 - C_1 = \underbrace{0 + 0}_{P_1} + \underbrace{30\ P_2 + 0}_{P_2} + \underbrace{30\ P_3 - 0}_{P_3}$$

Se le puede dividir en partes que están asociados con los niveles de prioridad:

P_1 0

P_2 30

P_3 30

Al llevar a cabo este procedimiento para cada columna, producimos los diversos renglones R, por ejemplo para la columna Solución

:

Zj = 0 * 80 + 0 * 80 + 30P2 * 10 + 40P2 * 10 + P3 * 1200

Zj – Cj = 300P2 + 400 P2 + P3 * 1200

P2 = 700P2

P3 = 1200 P3

Tabla inicial.

	C_j	0	0	0	P_1	0	P1	$30\,P_2$	0	$40\,P_2$	0	P_3	0	
C_B	BASE	x_1	x_2	d_i^-	d_i^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	SOLUCION
0	d_i^-	2	4	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	80
0	d_2^-	3	3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	80
$30\,P_2$	d_3^-	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	10
$40\,P_2$	d_4^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	10
P_3	d_5^-	30	40	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1200
	P_1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
R	P_2	30	40	0	0	0	0	0	0	0	-40	0	0	700
	P_3	30	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1200

Al expresar los renglones de esta manera podremos, en los siguientes pasos del algoritmo, intentar satisfacer cada meta en su orden de prioridad.

Comenzamos con un examen de la tabla inicial revisando el renglón asociada con el nivel de prioridad P_1 (es decir k=1)

PASO 2. Prueba de optimalidad

Para el algoritmo de PM, pueden utilizarse dos pruebas para la optimalidad:

- Que exista un cero en la columna solución en el renglón P_k ó
- Que todos los valores del renglón P_k sean cero o negativos.

Un cero en la columna solución, indica que se ha logrado la meta respectiva a ese renglón. Para nuestro problema el valor del renglón P_1 en la columna solución es cero; por tanto, se ha alcanzado la meta P_1. En la columna solución, el 700 de P_2 y el 1200 de P_3 señalan la medida en la que no se han satisfecho las metas de estos niveles de prioridad.

En esta etapa la solución es :

$d_1^- = 80, \quad d_2^- = 80, \quad d_3^- = 10, \quad d_4^- = 10, \quad d_5^- = 1200$, todas las otras variables son cero dado que no son básicas. La meta con mayor prioridad (P_1) es evitar el tiempo extra en los dos departamentos; como d_1^+ y d_2^+ son cero, se ha alcanzado la meta. La meta con segunda prioridad (P_2) es producir 10 unidades de x_1 y 10 unidades de x_2. No se alcanzaron las metas por 10 unidades, puesto que d_3^- y d_4^- son iguales a 10. Setecientos es el valor ponderado de lo que no se ha alcanzado de la meta total de producción. La meta con tercera prioridad es lograr utilidades por $1200 si es posible.

Como no se fabrican unidades no se alcanza esta meta d_5^- = 1200. Puesto que se ha alcanzado la meta con mayor prioridad proseguimos al paso 6.

PASO 6. $k = 2$

Como $K = 3$ $k \le K$, por lo tanto tenemos que examinar el renglón P_k, es decir P_2.

Ir al paso 2.

PASO 2. Prueba de optimalidad.

No se cumple ninguna de las dos pruebas, por lo que procedemos con el paso 3.

PASO 3. Determinar la variable que entra.

El mayor coeficiente positivo de P_2 es 40, por tanto entra x_2.

PASO 4. Determinar la variable que sale.

El menor cociente es el asociado con d_4^-, que es la variable que sale.

PASO 5. Esta nueva tabla se elabora utilizando el procedimiento de actualización que se emplea en le método simplex.

Es importante mencionar que ya no es necesario incluir la columna C_B ni el renglón C_j.

Tabla 2

BASE	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	SOLUCION
d_1^-	2	4	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	40
d_2^-	3	3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	50
d_3^-	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	10
x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	10
d_5^-	30	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0	800
P_1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
P_2	30	0	0	0	0	0	0	-30	-40	0	0	0	300
P_3	30	0	0	0	0	0	0	0	-40	40	0	0	800

PASO 2. No existe cero en la meta de prioridad P_2

PASO 3. La variable que entra es x_1 pues el coeficiente no negativo es 30.

PASO 4. La variable que sale es d_3^- pues le corresponde el cociente menor.

PASO 5. Elaborar una nueva tabla.

BASE	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	SOLUCION
d_1^-	0	0	1	-1	0	0	-2	2	-4	4	0	0	20
d_2^-	0	0	0	0	1	-1	-3	3	-3	3	0	0	20
x_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	10
x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	10
d_5^-	0	0	0	0	0	0	-30	30	-40	40	0	0	500
P_1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	0	-30	0	-40	0	0	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0	-30	30	-40	40	0	-1	500

PASO 2. Como podemos observar se cumple la condición de optimalidad para la prioridad P_2, ya que en solución hay un cero y sólo tenemos coeficientes negativos o cero, con lo que cubrimos el nivel de prioridad P_2.

PASO 6. $k = 3$

Se evalúa el nuevo renglón P_3.

PASO 3. La variable que entra es d_4^+, debido a su coeficiente de 40.

PASO 4. La variable que sale es d_1^-, correspondiente al menor de los cocientes.

PASO 5. Elaborar una nueva tabla

BASE	x_1	x_2	d_i^-	d_i^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	SOLUCION
d_4^+	0	0	¼	-½	0	0	-½	½	-1	1	0	0	5
d_2^-	0	0	-¾	¾	1	-1	-3/2	3/2	0	0	0	0	5
x_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	10
x_2	0	1	¼	-¼	0	0	-½	½	0	-1	0	0	15
d_5^-	0	0	-10	10	0	0	-10	10	0	0	0	0	300
P_1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	0	-30	0	-40	0	0	0	0
P_3	0	0	-10	10	0	0	-10	30	0	40	0	-1	300

Podemos ver que aún no cumplimos con la prioridad P_3 pues tenemos valores positivos en su renglón y su coeficiente es diferente de cero en la columna solución.

PASO 3. Tenemos un empate para la variable que entra así que elegimos de manera arbitraria que entre d_3^+.

PASO 4. La variable que sale es d_2^-.

PASO 5. Elaborar una nueva tabla

BASE	x_1	x_2	d_i^-	d_i^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	SOLUCION
d_4^+	0	0	½	-½	-1/3	1/3	0	1	-1	1	0	0	3.333
d_3^+	0	0	-½	½	2/3	-2/3	-1	0	0	0	0	0	3.333
x_1	1	0	-½	½	2/3	-2/3	0	0	-1	1	0	0	13.333
x_2	0	1	½	-½	-1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	13.333
d_5^-	0	0	-5	5	-20/3	20/3	0	0	0	0	1	-1	266.666
P_1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	-30	0	-40	0	0	0	0	0
P_3	0	-5	5	-20/3	20/3	0	0	0	0	40	0	-1	266.666

Si interpretamos esta tabla, vemos que faltan \$266.66 para alcanzar la meta de utilidades de \$1,200 y que no hemos cubierto la prioridad P_3.

Utilizamos toda la capacidad de producción disponible, ya que $d_1^-=0$, $d_2^-=0$

Por lo tanto es evidente que no puede mejorarse la meta de utilidades sin hacer uso de tiempo extra (lo cual violaría la meta P_1).

Una revisión del renglón P_3 confirma que esto es cierto; existe un valor positivo (20/3) en la columna d_2^+ del renglón de P_3, pero existe un valor negativo (-1) en la misma columna del correspondiente renglón de P_1; de la misma manera, existe un valor positivo (5) en la columna d_1^+ del renglón P_3 y un valor negativo (-1) en las misma columna del renglón correspondiente de P_1.

Por tanto concluimos que esta es la mejor solución para el problema que se definió.
La solución es:

$d_1^- = 0$	$d_1^+ = 0$
$d_2^- = 0$	$d_2^+ = 0$
$d_3^- = 0$	$d_3^+ = 3.33$
$d_4^- = 0$	$d_4^+ = 3.33$
$d_5^- = 266.67$	$d_5^+ = 0$

Como se puede apreciar esta solución coincide plenamente con la obtenida por el método gráfico.

CAPÍTULO 4

APLICACIONES

4.1 PLANEACIÓN DE LABORES.

La empresa S.I.S.A. produce forros alfombrados para asientos, que utiliza una planta Ford del interior de la República, en la fabricación de sus autos. Actualmente cuenta (en el área de producción) con 10 empleados de tiempo completo (TC) y 4 de tiempo parcial (TP). La jornada normal de trabajo es de 40 horas por semana para un empleado de TC, y de 20 horas para uno de TP. Un TC fabrica 5 forros por hora y se le pagan \$6 por hora laborada. A cada empleado de TP se le pagan \$3 y puede fabricar hasta 3 forros por hora. Las horas extras de labor para un TC se pagan a \$10, mientras que las de TP a \$8. Cada forro le cuesta a la empresa \$50 y se lo vende a Ford a \$60. La fábrica tiene costos fijos semanales de \$5000. Los TP no tienen restricciones en horas extras de labor. Los dueños de la compañía han establecido las siguientes metas en orden de importancia:

Primera. P_1. Desean fabricar al menos 2500 forros semanales.

Segunda P_2. Quieren alcanzar una utilidad semanal de \$17000 o más.

Tercera P_3. Establece que por condiciones contractuales los empleados de TC no deben exceder las 100 horas extras de producción.

Cuarta P_4. Con el fin de aumentar la seguridad en el trabajo, se debe minimizar el número de horas normales desocupadas por los TC como la meta de más baja prioridad.

Formule un modelo de PM que sirva para determinar cuántas horas-hombre debe trabajar cada empleado por semana.

Planteamiento:

Sean x_1 Número de horas-hombre semanales, laboradas por los TC

x_2 Número de horas-hombre semanales, laboradas por los TP

Para la meta de Prioridad P_1 calculamos la producción total con

$$5x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2500$$

donde d_1^- es el déficit de producción semanal y d_1^+ la sobreproducción, respecto a la meta perseguida de 2500 unidades. Intentamos alcanzar esta meta siempre que minimicemos la desviación d_1^-.

La utilidad en la segunda meta P_2, esta determinada por la ecuación:

U = Ingresos - Costos totales

Ingreso (neto) por forro = 60 - 50 = 10

Ingreso total $I = 50x_1 + 30x_2$

Costo total = Costo fijo + costo variable

$$C_T = 5000 + 6x_1 + 3x_2 + 4d_3^+ + 5d_4^+$$

Donde d_3^+ y d_4^+, representan las horas extras para los TC y TP, respectivamente.

Así $U = I - C_T = 50x_1 + 30x_2 - (5000 + 6x_1 + 3x_2 + 4d_3^+ + 5d_4^+)$

$U = 44x_1 + 27x_2 - 4d_3^+ - 5d_4^+ - 5000$

La segunda meta queda representada con la ecuación:

$44x_1 + 25x_2 - 4d_3^+ - 5d_4^+ + d_2^- - d_2^+ = 22{,}000$

Que será beneficiada al minimizar d_2^-.

Considerando la ecuación

(40hrs)(10TC)=400

(20hrs)(4)=80

Es decir hay 10 empleados de TC y cada uno puede laborar hasta 40 horas normales. Las metas de tercera y cuarta prioridad se escriben como

$$P_4)x_1 + d_3^- - d_3^+ = 400$$
$$x_2 + d_4^- - d_4^+ = 80$$

$$P_3)d_3^+ + d_5^- - d_5^+ = 100$$

Para evitar sobrepasar las 100 horas extras de TC minimizamos d_5^+, y para disminuir la ausencia de TC minimizamos d_3^-. Las variables auxiliares d_4^- - y d_4^+ son utilizadas para linealizar la expresión:

Costo de X2 horas laboradas por TP $\begin{cases} 3x_2 & si\ x_2 \le 80 \\ 240 + 8(x_2 - 80) & si\ x_2 > 80 \end{cases}$

El planteamiento completo será:

$$\begin{aligned}
&Min \quad Z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3 d_5^+ + P_4 d_3^- \\
&s.a. \qquad 5x_1 + 3x_2 + d_1^- d_1^+ = 2500 \\
&44x_1 + 27x_2 - 4d_3^+ - 5d_4^+ + d_2^- - d_2^+ = 22{,}000 \\
&x_1 + d_3^- - d_3^+ = 400 \\
&x_2 + d_4^- - d_4^+ = 80 \\
&d_3^+ + d_5^- - d_5^+ = 100
\end{aligned}$$

Donde:

d_1^- = Déficit de producción.

d_2^- = Déficit de utilidad.

d_5^+ = Horas extras de TC arriba de las 100 permitidas.

d_3^- = Ausencia de TC.

Tabla inicial:

		0	0	P_1	0	P_2	0	P_4	0	0	0	0	P_3	
	Base	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	Solución
$\underline{P_1}$	d_1^-	5	3	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	**2,500**
P_2	d_2^-	44	27	0	0	1	-1	0	-4	0	-5	0	0	**22,000**
P_4	d_3^-	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	**400**
0	d_4^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	**80**
0	d_5^-	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	**100**
	P_1	5	3	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	**2500**
	P_2	44	27	0	0	0	-1	0	-4	0	-5	0	0	**22,000**
	P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	**0**
	P_4	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	**400**

Tabla 2

Base	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	Solución
d_1^-	0	3	1	-1	0	0	-5	5	0	0	0	0	500
d_2^-	0	27	0	0	1	-1	-44	40	0	-5	0	0	4,400
X_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	400
d_3^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	80
d_4^-	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	100
P_1	0	3	0	0	0	0	-5	5	0	0	0	0	500
P_2	0	27	0	0	0	-1	-44	40	0	-5	0	0	4,400
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
P_4	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

Tabla3

Base	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	Solución
d_1^-	0	3	1	-1	0	0	-5	0	0	0	-5	5	0
d_2^-	0	27	0	0	1	-1	-44	0	0	-5	-40	40	400
X_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	500
d_4^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	80
d_3^+	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	100
P_1	0	3	0	-1	0	0	-5	0	0	0	-5	5	0
P_2	0	27	0	0	0	-1	-44	0	0	-5	-40	40	400
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
P_4	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

Tabla 4

Base	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	Solución
d_5^+	0	0.6	0.2	-0.2	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0
d_2^-	0	3	-8	8	1	-1	-4	0	0	-5	0	0	400
X_1	1	0.6	0.2	-0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	500
d_3^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	80
d_3^+	0	0.6	0.2	-0.2	0	0	-1	1	0	0	0	0	100
P_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	-4	8	-8	-1	1	4	0	-1	6	0	0	400
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_4	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

Tabla 5

Base	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	Solución
d_5^+	0	0.7	0	0	0	-0	-1.1	0	0	-0.1	-1	1	10
d_1^+	0	0.4	-1	1	0.1	-0.1	-0.5	0	0	-0.6	0	0	50
X_1	1	0.7	0	0	0	-0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	510
d_4^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	80
d_3^+	0	0.7	0	0	0	-0	-1.1	1	0	-0.1	0	0	110
P_1	0	0.375	0	-1	3/8	1/8	0.5	0	0	5/8	0	0	-50
P_2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-3500
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_4	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

Tabla final (6)

Base	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	d_5^+	Solución
X_2	0	1	0	0	0	-0	-1.6	0	0	-0.2	-1.5	1.5	14.81
d_1^+	0	0	-1	1	0.1	-0.1	0.1	0	0	-0.6	0.6	-0.6	44.44
X_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	500
d_4^-	0	0	0	0	-0	0	1.6	0	1	-0.8	1.5	-1.5	65.19
d_3^+	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	100
P_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	-0	-1.6	0	-1	0.8	-1.5	1.5	0
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_4	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

Como se puede apreciar la solución final es :

X_2= 14.81

d_1^+= 44.44

X_1= 500

d_4^- =65.19

d_3+= 100

De acuerdo a esta solución se puede hacer el siguiente análisis:

Todas las metas se alcanzan. Los TC trabajarán x_1=500 horas en total con d_3^+= 100 horas extras. Los TP laborarán X_2=14.81 horas. Se producen 2544 forros, que generan exactamente la utilidad deseada ($17,000), la producción excede en d_1^+=44 unidades el nivel establecido. La utilidad buscada, como ya se mencionó, se alcanza exactamente ($d_2^-= d_2^+=0$).

4.2.- PRODUCCIÓN

Una clase de pieza en especial se fabrica con dos tipos de calidad: normal y extrafina. Para la fabricación de la próxima corrida la empresa recurrirá a financiamiento externo. Actualmente la máquina disponible está calibrada para producir 9 moldes de refacción por corrida; pudiendo combinar los moldes extrafino y normal en una misma corrida. Las piezas extrafinas se venden a $300 por unidad y las normales a $100.

Debido a ciertas facilidades que tiene la empresa por el momento, el costo de producción por unidad es el mismo para cualquiera de los dos tipos e igual a $100 (la compañía no recibe ninguna utilidad en las piezas de calidad normal pero con tal de mantenerse en la competencia ha contemplado su fabricación).

Se pretende producir al menos 5 piezas de calidad extrafina y 3 de calidad normal. Las metas establecidas por el administrador de la compañía en orden de importancia son las siguientes:

1) Obtener ingresos superiores a los 1200 pesos por corrida de producción.
2) Evitar ajustes en la maquinaria (cualquier ajuste implicaría tiempo y costo).
3) Satisfacer la necesidad mínima de producción. La proporción de demanda en el mercado de las piezas extrafinas es 5 a 1 con relación a las normales. Se ha decidido usar estos valores como penalizaciones en la función objetivo para las desviaciones de ésta meta.

Las metas anteriores podrán realizarse siempre y cuando no excedan el financiamiento obtenido de \$600.

Planteamiento:

Sean:

x_1 = Número de piezas producidas con calidad extrafina.

x_2 = Número de piezas producidas con calidad normal.

$$
\begin{array}{llr}
Min & Z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_2 d_2^+ + 5P_3 d_3^- + P_3 d_4^- & \\
s.a. & 3x_1 + x_2 + d_1^- d_1^+ & = 12 \quad \textit{(cientos de pesos)} \\
 & x_1 + x_2 \qquad + d_2^- - d_2^+ & = 9 \quad \textit{(unidades)} \\
 & x_1 \qquad\qquad + d_3^- - d_3^+ & = 5 \\
 & x_2 \qquad\qquad\qquad + d_4^- - d_4^+ & = 3 \\
 & x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + S_1 & = 6 \quad \textit{(cientos de pesos)}
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_4^-, d_4^+, S_1 \geq 0$$

Tabla inicial:

		0	0	P_1	0	P_2	P_2	$5P_3$	0	P_3	0	0	
	Base	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	S_1	Solución
P_1	d_1^-	3	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	12
P_2	d_2^-	1	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	9
$5P_3$	d_3^-	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	5
P_3	d_4^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	3
0	S_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6
	P_1	3	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	12
	P_2	1	1	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	9
	P_3	5	1	0	0	0	0	0	-5	0	-1	0	28

Tabla 2:

Base	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	S_1	Solución
X_1	1	0.33	0.33	-0.33	0	0	0	0	0	0	0	4
d_2^-	0	0.67	-0.33	0.33	1	-1	0	0	0	0	0	5
d_3^-	0	-0.33	-0.33	0.33	0	0	1	-1	0	0	0	1
d_4^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	3
S_1	0	0.67	-0.33	0.33	0	0	0	0	0	0	1	2
P_1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	2*3	-0.333	0.33	0	-2	0	0	0	0	0	5
P_3	0	-0.667	-1.667	1.667	0	0	0	-5	0	-1	0	8

Tabla 3:

	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	S_1	Solución
X_1	1	0	0.5	-0.5	0	0	0	0	0	0	-0.5	3
d_2^-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	3
d_3^-	0	0	-0.5	0.5	0	0	1	-1	0	0	0.5	2
d_4^-	0	0	0.5	-0.5	0	0	0	0	1	-1	-1.5	0
X_2	0	1	-0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	1.5	3
P_1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-1	3
P_3	0	0	-2	2	0	0	0	-5	0	-1	1	10

Tabla 4:

	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	S_1	Solución
X_1	1	0	0.5	-0.5	0	0	0	0	0	0	-0.5	3
d_2^-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	3
d_1^+	0	0	-0.5	0.5	0	0	1	-1	0	0	0.5	2
d_4^-	0	0	0.5	-0.5	0	0	0	0	1	-1	-1.5	0
X_2	0	1	-0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	1.5	3
P_1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-1	3
P_3	0	0	0	0	0	0	-4	-1	0	-1	-1	2

Tabla 5 (final)

	X_1	X_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	S_1	Solución
X_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	5
d_2^-	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	3
d_1^+	0	0	-1	1	0	0	2	-2	0	0	1	4
d_4^-	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	-1	2
X_2	0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	1
P_1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_2	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-1	3
P_3	0	0	0	0	0	0	-4	-1	0	-1	-1	2

La solución óptima es:

$X_1=5$

$d_2^-=3$

$d_1^+=4$

$d_4^-=2$

$X_2=1$

La primer meta se cumple totalmente ($d_1^-=0$), incluso se encuentra por arriba del nivel esperado por \$ 400 ($d_1^+=4$). Las variables $d_2^-=3$ y $d_2^+=0$ de segunda prioridad, indican que la maquinaria deberá ajustarse a 6 unidades, $d_2^-=3$ unidades menos de su calibración actual de 9.

Finalmente, la corrida de producción $X_1=5$, $X_2=1$ no satisfacen del todo la producción mínima fijada ya que faltaron 2 piezas de calidad normal, reflejado en la variable $d_4^-=2$. El financiamiento se agota completamente como lo muestra $S_1=0$.

Si analizamos la Tabla Final, más específicamente los indicadores de optimalidad, es decir el coeficiente en la columna de Solución para P_1, P_2,P_3, vemos que $P_1=0$. Lo cual indica que la meta 1 se satisface totalmente. $P_2=3$ indica que está a tres unidades de la meta establecida de 9. Por último, las metas de prioridad P_3 tampoco se cubrieron totalmente pues $P_3= 2$, es decir hubo un déficit de dos unidades, como lo muestra la variable de desviación $d_4^- =2$.

4.3 UN PROBLEMA DE DIETAS.

El Departamento de Nutrición del Hospital General Mountain View prepara 30 menús de cena, uno para cada día del mes. El departamento ha determinado que esta comida deberá proporcionar entre 80 000 y 100 000 miligramos (mg) de proteína, 10 mg de hierro, 15 mg de niacina, 1 mg de tiemina y 50 mg de vitamina C. Para lograr este objetivo, la comida debe consistir en una cierta cantidad de espagueti, carne de pavo, papas gratinadas, espinacas y pastel de manzana. Cada 100 gramos de estos alimentos proporcionan la cantidad de cada nutriente que se indica en la siguiente tabla:

Nutrientes proporcionados por los diferentes alimentos (mg/100 gramos)							
	PROTEÍNAS	HIERRO	NIACINA	TIAMINA	VITA. C	GRASA	COSTO (dlls) ($/100 grms)
Espagueti	5000	1.1	1.4	0.18	0	5000	0.15
Pavo	29300	1.8	5.4	0.06	0	5000	0.8
Papas	5300	0.5	0.9	0.06	10	7900	0.12
Espinacas	3000	2.2	0.5	0.07	28	300	0.2
Manzana	4000	1.2	0.6	0.15	3	14300	0.51

El departamento sabe que debe presentar una comida bien balanceada que guste al paciente. Con este objetivo en mente, el departamento no servirá más de 300 gramos de espagueti, 300 gramos de pavo, 200 gramos de papas, 100 gramos de espinacas y 100 gramos de pastel de manzana. El director del departamento de nutrición desea determinar la composición de una comida que satisfaga los requerimientos nutricionales y proporcione la mínima cantidad de grasas, pero como el presupuesto es limitado también se ha puesto como meta hacerlo al menor costo posible.

Además, el director se ha propuesto cumplir con dos metas:

1) El costo de cada comida no debe exceder de $ 2 dlls..
2) Cada comida debe contener 55 000 mgs de grasa.

Planteamiento:

Variables de decisión:

SPAG = cientos de gramos de espagueti que se debe incluir en la dieta.

PAVO = cientos de gramos de pavo que se debe incluir.

PAPA = cientos de gramos de papa que se deben incluir.

MANZ = cientos de gramos de pastel de manzana que se debe incluir.

SPIN = cientos de gramos de espinaca que se deben incluir en la dieta

$$Min\ \ Z = P_1 d_1^- + P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_2 d_2^+$$

$$\begin{array}{lll}
s.a. & 5000\,SPAG + 5000\,PAVO + 7900\,PAPA + 300\,SPIN + 14300\,MANZ + d_1^- - d_1^+ & = 55000 \\
& 0.15SPAG + 0.80\,PAVO + 0.12\,PAPA + 0.20\,SPIN + 0.51\,MANZ \quad + d_2^- - d_2^+ & = 2 \\
& 5000SPAG + 29300PAVO + 5300PAPA + 3000SPIN + 4000\,MANZ & \leq 100000 \\
& 5000SPAG + 29300PAVO + 5300PAPA + 3000SPIN + 4000MANZ & \geq 80000 \\
& 1.1SPAG + 1.8PAVO + 0.5PAPA + 2.2SPIN + 1.2MANZ & \geq 10 \\
& 1.4SPAG + 5.4PAVO + 0.9PAPA + 0.5SPIN + 0.6MANZ & \geq 15 \\
& 0.18SPAG + 0.06PAVO + 0.06PAPA + 0.07SPIN + 0.15MANZ & \geq 1 \\
& 10PAPA + 28SPIN + 3MANZ & \geq 50 \\
& SPAG & \leq 3 \\
& PAVO & \leq 3 \\
& PAPA & \leq 2 \\
& SPIN & \leq 1 \\
& MANZ & \leq 1
\end{array}$$

$$SPAG, PAVO, PAPA, SPIN, MANZ, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$$

La solución a este problema obtenida con el paquete WinQSB se presenta a continuación:

Linear and Integer Goal Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for hosp

	22:02:41		Tuesday	February	22	2000		
	Goal Level	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	G1	SPAG	3.00	0	0	0	-M	11,242.50
2	G1	PAVO	2.33	0	0	0	-185,038.98	422.73
3	G1	PAPA	1.93	0	0	0	-2,276.17	3,100.00
4	G1	SPIN	1.00	0	0	0	-M	13,113.52
5	G1	MANZ	0.90	0	0	0	-930.00	6,567.71
6	G1	F+	14.08	1.00	14.08	0	0	M
7	G1	F-	0	1.00	0	2.00	-1.00	M
8	G1	C+	1.20	0	0	0	0	723.17
9	G1	C-	0	0	0	0	0	M

Results Combined Report for hosp

La solución indica que la comida óptima consiste en 300 gramos de espagueti, 232.69 gramos de pavo, 193 gramos de papa, 100 gramos de espinacas y 90 gramos de pastel de manzana. Esta comida minimiza el contenido de grasa y el costo, sin embargo se dejaron de cumplir las metas pues tenemos exceso de $ 1.20 por comida y 1400 de exceso para los niveles de grasa.

CONCLUSIONES.

La Programación por Metas tiene muchas ventajas frente a la PL tradicional, y casi ninguna desventaja, pues podemos resolver problemas cuando tenemos más de una meta por optimizar, o en problemas donde los objetivos entran en conflicto, o modelos lineales no factibles, donde la PL no funciona.

La PM proporciona al tomador de decisiones la oportunidad de incluir los objetivos o metas de la formulación del problema que no pueden reducirse a una sola dimensión. Es también más flexible que la PL, pues permite que las metas inconmensurables y conflictivas sean especificadas y conduzcan a una solución óptima en términos de las metas prioritaria de la administración. La PL bajo estas circunstancias conduciría, en muchos casos, a soluciones no factibles. Cuando se confronta con la Pl ene stas situaciones, la PM no tiene muchas de las limitaciones de la PL, mientras que retiene la característica de la facilidad de la solución usando el algoritmo simplex.

La diferencia principal entre un modelo de Programación por Metas y uno de Programación Lineal, está en la inclusión de variables de desviación y en la minimización de suma (ponderada o no) de desviaciones relevantes como función objetivo, además se hizo una clara diferenciación entre los PPM con prioridades y sin éstas.

Espero que el trabajo presentado sirva para resaltar la importancia de la PM; ya que el campo de aplicación es muy amplio y que se trata de un enfoque más realista que el de la PL tradicional, es además una herramienta útil para quien toma las decisiones, ya que como hemos visto además de incluir mas de una meta, se pueden establecer niveles de prioridad respecto a éstas, lo cual sin duda constituye una ventaja pues aunque tengamos metas múltiples podemos decir cuál pretendemos que se cumpla primero.

Es importante hacer notar que aunque se presenta un método gráfico (con sus respectivas limitaciones), como vía de solución a PPM, la base de los algoritmos de PPM se encuentra en el método simplex (con las variantes revisadas), esto sin duda facilita el estudio de la PM, pues con el algoritmo presentado en este trabajo se pueden resolver prácticamente todos los planteamientos de PPM, ya sea con o sin prioridades, con o sin ponderaciones, etc., se trata sin duda de otro aspecto relevante pues con un solo algoritmo podemos resolver todas las variantes ya mencionadas.

Por todo lo anterior, considero que es sumamente importante fomentar y difundir el estudio de la Programación por Metas, ya que se trata de una rama de la PL prácticamente desconocida y desaprovechada.

ANEXO

EJERCICIOS

1.- Philadelphia Paints tiene una ganancia neta de \$2 por galón de pintura Regular, \$3 por galón de Premium y \$4 por galón de Suprema. Cada galón de pintura Regular requiere un minuto en una mezcladora, cada galón de pintura Premium, 2 minutos, y cada galón de pintura Suprema, 3 minutos. El gerente del departamento de producción ha establecido una ganancia meta de \$100 y pretende usar 1 hora de tiempo de mezclado. Se considera que maximizar la ganancia es doblemente importante que minimizar la cantidad de tiempo de mezclado. Usando el número de galones de cada pintura por producir como variables de decisión, escriba a)restricciones de meta apropiadas y b) un solo objetivo que minimice la penalización total por no cumplir con las metas.

2.- La producción de cada galón de gasolina Suprema cuesta 20% más que la producción de la Regular, y cada galón de Extra cuesta 10% más que la Regular. El gerente del departamento de producción ha determinado que los costos mínimos de producción para satisfacer la demanda de los tres tipos de gasolina para este periodo son de \$50 000, con un costo de \$0.80 por galón de Regular. En un intento por maximizar la cantidad de gasolina Regular producida, se ha establecido una meta de 40000 galones. El gerente también piensa que por cada dólar con que los costos de producción excedan la meta establecida en 10% por encima del mínimo posible debe penalizarse tres veces, así como cada galón que falte a la producción de Regular para alcanzar la meta. Usando el número de galones de cada tipo de gasolina por producir como variables de decisión, escriba a) restricciones de meta apropiadas y b) un solo objetivo que minimice la penalización total por no cumplir con las metas.

3.- Case Chemicals produce un compuesto al mezclar dos de sus productos: CS-01 y CS-02. Cada litro de CS-01 cuesta $3 y proporciona 5 gramos de sodio y 2 gramos de azufre a la mezcla resultante. Cada litro de CS-02 cuesta $1 y produce 2 gramos de sodio y 1 gramo de azufre. El programa debe contener al menos de 9 gramos de sodio y 4 gramos de azufre. El programa de metas está diseñado para lograr un costo objetivo de $3.50 y producir una meta de 2 litros de mezcla, suponiendo que cada dólar de costo excedido tiene la misma penalidad que cad litro de exceso de la mezcla producida y dos veces como cada litro por debajo del objetivo de 2 litros. ¿Cuántos litros en total se encuentran en la mezcla final? ¿Cuánto cuesta la producción de la mezcla?.

4.- Pete's Pasta Shop hace dos tipos de tallarines: delgados y gruesos. Cada libra de tallarines delgados produce a la compañía un ganancia de $0.50 y requiere 2.5 minutos en su máquina cortadora. Cada libra de tallarines gruesos produce una ganacia nete de $0.40 y requiere 1.5 minutos de tiempo de máquina. La compañía tiene 40 horas de tiempo de máquina disponible esta semana y requiere producir al menos 400 libras de tallarines delgados y 500 libras de tallarines gruesos. Además maximizar ganancias, para lo que se ha establecido un meta de $800, se ha fijado un objetivo de producción de un total de 1000 libras de tallarines, aunque se puedan producir más o menos. ¿Está la compañía excediendo su meta de producción de 1000 libras o no? ¿Por cuánto? ¿Qué ganancia logrará la compañía con esta solución óptima?.

5.- Rich Oil Company tiene un tanque de almacenamieto en Trenton con una capacidad de 100 000 galones y uno en Filadelfia con una capacidad de 200 000 galones. La compañía desearía embarcar al menos 250 000 galones a distribuidores en Nueva York y 100 000 galones en aquellos en Washington, D.C. Además, la compañía desea que el costo total esté alrededor de $10 000, basándose en los siguientes costos de embarque ($/gal) entre tanques de almacenamiento y distribuidores:

	A	
De	**Nueva York**	**Washington D.C.**
Trenton	0.05	0.12
Filadelfia	0.07	0.10

El programa de metas debe estar diseñado para menejar las transacciones en tres objetivos usando el hecho de que cada dólar de costo excedido es penalizado 11 veces como cada galon de menos para un distribuidor. En el contexto de este modelo, ¿Qué significa el que los valores tanto de N^+ como de N^- sean 0 en esta solución óptima?

6.- Los gerentes de Fresh Food Farms desean decidir cuántos de sus 50 acres cultivar con maíz, cuántos con frijol de soya y cuántos con lechuga. La granja está limitada por la disponibilidad de 100 000 galones de agua. Cada acre dedicado a maíz requiere de 5600 galones de agua y produce una ganancia neta de $640; cada acre dedicada a frijol de soya necesita de 2500 galones de agua y produce una ganancia neta de $400; y cada acre de lechuga requiere 900 galones de agua y produce una ganancia neta de $240. Elaborar un programa de metas para lograr una ganancia objetivo $17 000, dedicando al menos 8 acres al cultivo de maíz. a) ¿Qué cantidad de los 50 acres se utilizan bajo el plan actual? b) ¿Qué metas se alcanzan? ¿Qué metas no se alcanzan y por cuánto?.

7.- La E-Z Paint Company se especializa en la fabricación de dos tipos de pinturas de exteriores; una soluble al agua y otra de tipo barniz. La fabricación de cada 100 galones de pintura soluble al agua requiere 10 horas de mano de obra mientras que cada 100 galones de barniz requieren 15 horas de mano de obra. Existen disponibles 40 horas de mno de obra por semana. No existe disponible ayuda adiciona y no se utiliza tiempo extra. Ambas pintura producen utilidades de $1.00 por galón.

El propietario de la E-Z Paint ha establecido las siguientes metas:

Meta 1: Evitar las operaciones en tiempo extra

Meta 2: Alcanzar utilidades semanales de $1,000

Meta 3: Fabricar cuando menos 700 galones de pintura de barniz por semana.

a) Plantear el problema de programación por metas

b) Resolverlo graficamente.

Bibliografía

Kalta G. Murty.
<u>Operations Research Deterministic Optimization Models.</u>
Department of Industrial and Operations Engineering.
University of Michigan
New Jersey, E.U.A.
Ed. Prentice Hall.
1990.

Rardin Ronald L.
<u>Optimization in Operations Research.</u>
Purdue University
Ed. Prentice Hall
E.U.A.
1988

Prawda Juan.
<u>Metodos y Modelos de Investigación de Operaciones.</u>
Vol 2 Modelos Estocásticos.
Ed. Limusa
México
1989

Lee S.M, y V. Jaaskelainen.
<u>Goal Programming for Decision Analysis.</u>
Auerbach Publishers.
E.U.A.
1972

Goicoechea, Ambrose, R. Hansen.
<u>Multiobjective Decisión Analysis whit Engineering and Business.</u>
Applications
Wilay , New York, E.U.A.
1992

Taha Handy
<u>Investigación de Operaciones</u>
Prentice Hall
México,1998

Davis K. Roscoe
Modelos cuantitativos para administración
Editorial Iberoamérica
México, 1994

Moskowitz Hebert
Operations Research Techniques for Management
Prentice Hall
México, 1992

Mathur Kamlesh
Investigación de Operaciones, el arte de la toma de decisiones.
Prentice Hall
México, 1996

Winston Wayn
Investigación de Operaciones, Aplicaciones y Algoritmos
Editorial Iberoamérica
México, 1994

Thierauf Robert
Introducción a la Investigación de Operaciones
Editorial Limusa
México, 1995