UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INVOLUCIONES Y CLASIFICACION DE ALGEBRAS DE LIE SIMPLES REALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ALEJANDRO MARTINEZ IRENEO

DIRECTOR DE TESIS: DR. EUGENIO GARNICA VIGIL

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis. "INVOLUCIONES Y CLASIFICACIÓN DE ÁLGEBRAS DE LIE SIMPLES REALES."

realizado por ALEJANDRO MARTÍNEZ IRENEO.

con número de cuenta 09355329-2 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. EUGENIO GARNICA VIGIL.	
Propietario	DR. FEDERICO SÁNCHEZ BRINGAS.	
Propietario	DR. HÉCTOR SÁNCHEZ MORGADO.	F. Sánchez M
Suplente	DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ.	
Suplente	DR. MARCELO AGUILAR GONZÁLEZ DE LA VEGA.	

Consejo Departamental de MATEMATICAS.

Héctor Méndez L.
DR. HÉCTOR MÉNDEZ LANGO.

MATEMATICAS

A mis Padres:

Hipólito y Alejandra.

A mis Hermanos:

María, Sergio, Blanca, Fernando, Hilda y Oscar.

A mis amigos:

Laura Silva, Gamaliel Bautista, José Sánchez. Fabiola Zúñiga,
Ana Lilia Cruz, Moisés Luna, Carlos Martínez, Omar Suárez.

A mi Director de tesis:

Dr. Eugenio Garnica Vigil.

A Héctor Hugo Luis y Juana Martínez

Si Dios existe, tendría que ser Matemático

Índice

1 Preliminares. 5

1.1 Introducción. 5

1.2 Álgebras de Lie. 5

1.3 Ideales y Homomorfismos. 6

1.4 Representaciones de álgebras de Lie. 6

1.5 La Representación adjunta. 7

1.6 Forma de Killing. 7

1.7 Álgebras de Lie Simples y Semisimples. 7

1.8 Módulos. 8

1.9 Representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 9

1.9.1 Pesos y Vectores Maximales 10

1.9.2 Clasificación de Módulos Irreducibles. 10

1.10 subálgebras de Cartán 10

1.11 Álgebras de Lie Nilpotentes y Solubles 11

2 Sistemas de Raíces. 12

2.1 Introducción. 12

2.2 Definiciones 12

2.3 Clasificación 14

2.3.1 La Matriz de Cartán. 15

2.3.2 Diagramas de Dynkin 15

3 Formas Reales. **19**

3.1 Estructuras Complejas. 19

3.2 Estructuras Complejas sobre Álgebras de Lie Reales 20

3.3 Complejificación de un Álgebra de Lie Real. 20

3.4 Formas Reales. 21

3.5 Conjugaciones. 22

4 Automorfismos de Orden Finito de Álgebras de Lie Semisimples. **29**

4.1 Definiciones : 29

4.2 El Álgebra Cubriente. 38

4.3 Diagramas de Dynkin Generalizados. 51

5 Aplicación: Automofismos de Orden Dos y Formas Reales. **59**

Bibliografia **62**

Introducción

En su artículo de los años 1926 y 1927 E. Cartán logró una clasificación completa de los espacios Riemannianos simétricos globalmente irreducibles. Localmente, el resultado se determina usando la clasificación de todas las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{R}$, un problema que Cartán ya había resuelto en 1914. El método que usó requiere un número exagerado de calculos sobre la signatura de la forma de Killing; esta clasificación es un refinamiento significativo de la clasificación dada por Killing-Cartán de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$.

El trabajo que presentamos ofrece una forma de clasificar las álgebras de Lie simples reales de una manera alternativa a la que dió a conocer E. Cartán. El método que usamos en este trabajo es el que presento Victor Kăc en 1969 [7]. El método de Kăc se recopilo en el libro de Helgason [3] y consiste en el estudio de automorfismos finitos de un álgebra de Lie simple compleja. Como veremos en los capítulos 3, 4, 5, dar *la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre* $\mathbb{R}$ es equivalente a dar la clasificación de las formas reales de álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$, que a su vez es equivalente a dar la clasificación de los automorfismos de orden dos (involuciones) de un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$.

En el primer capítulo se definen y axiomatizan los conceptos básicos necesarios que se usarán durante todo el escrito.

En el segundo capítulo trataremos la clasificación clásica de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$, resultado de Killing, Cartán, Dynkin y Coxeter. La manera en como se da la clasificación es usando *sistemas de raíces*. El método que consiste en usar los *sistemas de raíces* (sección 2.1), aparece en muchos contextos del Álgebra. Teoría de Carcajes, Grupos Finitos (Coxeter), Álgebras de dimensión infinita, Álgebras Hereditarias, etc. (ver. [1], [2], [6], [9]). De hecho una aplicación importante de los sistemas de raices la obtendremos para establecer la clasificación de álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{R}$. La forma como se obtiene la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ es estableciendo una *biyección* entre clases de *isomorfísmo* de álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ y las clases de *isomorfismo* de *sistemas de raíces indescomponibles*. Esta correspondencia se puede extender a clases de *isomorfismo* de álgebras de Lie *semisimples* sobre $\mathbb{C}$ y clases de *isomorfismo* de *sistemas de raíces*; ya que un álgebra de Lie *semisimple* es suma directa de *simples* y un *sistema de raíces* se puede descomponer en una unión de *sistemas de raíces indescomponibles* (teorema 5 y 6).

La tercera parte del trabajo consiste en definir parte de nuestro objeto de estudio, las formas reales de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$. El resultado principal de este capítulo es que hay una biyección entre clases de isomorfismo de las *formas reales* $\mathfrak{g}$ y las clases de conjugación de *involuciones de* $\mathfrak{g}$ (*teorema* 13).

En el capítulo 4 se generalizan los conceptos del capítulo 2; es decir, definimos lo que es un *sistemas de raíces generalizado*, *La matríz de Cartán generalizada* y el *Diagrama de Dynkin generalizado* (sección 4.1, 4.2, 4.3): Analogamente se demuestran teoremas generalizados semejantes a los del capítulo dos. Es importante hacer notar que el capítulo 4 contiene lo teoremas principales (14), (15), (16) por medio de los cuales podemos clasificar los automorfismos de orden 2; la forma como se hace se muestra en nuestra aplicación presentada en el capítulo 5.

En síntesis este trabajo reorganiza y completa el artículo presentado por Victor Kăc en 1969 [7], en lo referente a los automorfismos de orden dos. De tal modo que toda la teoría que necesitamos está totalmente contenida en la presente tesis.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1 Introducción.

En este capítulo, se define y axiomatiza los conceptos básicos que utilizamos en todo este trabajo. Las afirmaciones que se presentan en este capítulo no serán demostradas, pero en todas se dará una referencia.

1.2 Álgebras de Lie.

Definición 1.2.1: Un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre un campo $\mathbb{K}$ (que en nuestro trabajo será en general $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) con una operación $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ denotada por $(x, y) \longmapsto [x, y]$, a la cual llamaremos corchete de Lie o conmutador de x, y, es llamada un *álgebra de Lie* sobre $\mathbb{K}$ si los siguientes axiomas se cumplen

i) El corchete es una operación bilineal

ii) $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ $(x, y, z \in \mathfrak{g})$. (Identidad de Jacobi.)

Observaciones:

1) Notemos que el axioma ii) puede ser reemplazado por $[x, y] = -[y, x]$; es decir, que el corchete es una operación anticonmutativa.

2) Un ejemplo muy natural de álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ se obtiene con un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Formando el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de las transformaciones lineales de V en sí

mismo, que denotaremos por $gl(V)$, definimos una estructura de Lie mediante la composición de cualquier par de transformaciones l_1, l_2 como sigue, $[l_1, l_2] = l_1 \circ l_2 - l_2 \circ l_1$.

1.3 Ideales y Homomorfismos.

Definición 1.3.1: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$.

i) Un subespacio $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra si $[x, y] \in \mathfrak{u}$, donde $x, y \in \mathfrak{u}$.

ii) Un subespacio vectorial $\mathfrak{a}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un *ideal* de $\mathfrak{g}$ si $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{a}$ implica que $[x, y] \in \mathfrak{a}$.

iii) El conjunto $Z(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} \mid [x, z] = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}$ es un ideal, llamado el *centro* de $\mathfrak{g}$.

iv) Un álgebra es *abeliana* cuando $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

v) Sea $H \subset \mathfrak{g}$. El *centralizador de H* es el conjunto $Z_{\mathfrak{g}}(H) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0, \forall h \in H\}$.

Observaciones: Un ideal es en particular subálgebra.

El centralizador es una subálgebra, aunque no siempre es un ideal

Definición 1.3.2: Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ álgebras de Lie sobre un campo $\mathbb{K}$. Una transformación lineal

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$$

es llamada un *homomorfismo de álgebras de Lie* si para toda $x, y \in \mathfrak{g}$ tenemos,

$$[\phi(x), \phi(y)] = \phi[x, y]$$

A ϕ se le llama un *monomorfismo* si $ker\phi = 0$, un *epimorfismo* si $im\phi = \mathfrak{g}'$, y un *isomorfismo* sí es epimorfismo y monomorfismo a la vez. Un *automorfismo* de $\mathfrak{g}$ es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ en si mismo.

1.4 Representaciones de álgebras de Lie.

Definición 1.4.1: Una *representación de un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ en un espacio vectorial V sobre el campo $\mathbb{K}$, es un homomorfismo de Lie ϕ de $\mathfrak{g}$ en el álgebra de Lie $gl(V)$

$$\phi \quad \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$$

En la sección 1.8 se verá el concepto de módulo que no es más que otra forma equivalente de definir una representación

1.5 La Representación adjunta.

Uno de los ejemplos más importantes de una representación es la llamada *representación adjunta* definida por,

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(\mathfrak{g})$$
$$x \longmapsto [x, \_] = ad_x$$

donde $ad_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, está definida de la siguiente forma, $ad_x(y) = [x, y]$. Usando la identidad de Jacobi es fácil obtener que: $[ad_x, ad_y](z) = ad([x, y])(z)$, lo que implica que ad es un homomorfismo de Lie

Observación: Notemos que $ker(ad)$ esta dado por todos los $x \in \mathfrak{g}$ tales que $ad_x = 0$; es decir, que $[x, y] = 0$ para toda $y \in \mathfrak{g}$. Esto nos muestra que $ker(ad) = Z(\mathfrak{g})$.

1.6 Forma de Killing.

Con ayuda de la representación adjunta podemos definir una forma bilineal y simétrica sobre $\mathfrak{g}$ denotada por $k : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$, llamada *la forma de Killing.* Aplicamos la traza de una transformacion lineal, y definimos:

$$k(x, y) = Tr(ad_x \circ ad_y)$$

Usando la forma de Killing podemos definir los siguientes conceptos de semisimplicidad.

1.7 Álgebras de Lie Simples y Semisimples.

Definición 1.7.1: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ es *semisimple*, sí la forma de Killing k es no degenerada. Un álgebra $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ es *simple* sí ésta es semisimple y no tiene ideales más que $\{0\}$ y $\mathfrak{g}$

Definición 1.7.2: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$.

a) Denotamos $Gl(\mathfrak{g})$ el grupo de Lie asociado a $gl(\mathfrak{g})$. Donde $Gl(\mathfrak{g})$ es el grupo de isomorfísmos del espacio vectorial $\mathfrak{g}$.

b) Denotamos $Int(\mathfrak{g}) \subset Gl(\mathfrak{g})$ al grupo de Lie asociado a la subálgebra $ad(\mathfrak{g}) \subset gl(\mathfrak{g})$ A $Int(\mathfrak{g})$ se le llama el *grupo adjunto.* Denotamos por $Aut(\mathfrak{g})$ al subgrupo de Lie que consiste de los elementos en $Gl(\mathfrak{g})$ que son homomorfismos de Lie.

Observación: Un resultado importante es que dada un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$, el grupo adjunto $Int(\mathfrak{g})$ es la componente conexa de la identidad de $Aut(\mathfrak{g})$ ver ([3], capítulo II, cor. 6.5) .

Definición 1.7.3: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ es *compacta* sí y sólo sí $Int(\mathfrak{g})$ es un grupo de Lie compacto.

Teorema 1 *i) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple. entonces $\mathfrak{g}$ es compacta si y sólo si la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es negativa definida.*

ii) Toda álgebra de Lie compacta $\mathfrak{g}$ es la suma directa $\mathfrak{g} = Z + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, donde Z es el centro de $\mathfrak{g}$ y el ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es semisimple y compacto.

Para una demostración ver ([3], capítulo II, prop 6.6) . Mencionaremos otras relaciones que hay entre las álgebras de Lie en general y la forma de Killing en la siguiente proposición.

Proposición 1.1: Sea σ un autormorfismo de Lie de $\mathfrak{g}$ entonces :

$$i)\ k(\sigma(x), \sigma(y)) = k(x, y) \qquad ii)\ k([x, y], z) + k(y, [x, z]) = 0.$$

1.8 Módulos.

Definimos en esta sección un concepto importante.

Definición 1.8.1: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un campo $\mathbb{K}$ y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ A V se le llama un $\mathfrak{g}$-*módulo* si hay una operación $\mu : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ (denotada por $(x, v) \mapsto x.v$)que satisfa las siguientes condiciones:

i) $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v)$,

ii) $x.(av + bw) = a(x.v) + b(x.w)$,

iii) $[x, y] .v = x.y.v - y.x.v$ (para $x, y \in \mathfrak{g}$; $v, w \in V$; $a, b \in \mathbb{K}$).

Observación: Si $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$ es una representación de $\mathfrak{g}$, entonces V es $\mathfrak{g}$-*módulo* vía la acción $x.v = \phi_x(v)$ para $x \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$. Por otro lado, dado un $\mathfrak{g}$-*módulo* V con operación μ, definimos una representación $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$ mediante $\psi(x,v) = \mu(x,v) = \psi_x(v)$ para $x \in \mathfrak{g}$ fija y $v \in V$.

Definición 1.8.2: Sean V y W dos $\mathfrak{g}$-*módulos* un *homomorfismo* $\varphi : V \longrightarrow W$ entre ellos es un homomorfismo lineal tal que $\forall\, x \in \mathfrak{g}$, $\forall\, v \in V$

$$\varphi(x.v) = x.\varphi(v)$$

φ es un *isomorfismo* cuando φ^{-1} es un homomofismo de módulos.

Definición 1.8.3: Sea V un $\mathfrak{g}$-*módulo,* entoces :

i) $W \subseteq V$ es un $\mathfrak{g}$-*submódulo* si W es un subespacio vectorial y $\mathfrak{g}.W \subseteq W$.

ii) V es un $\mathfrak{g}$-*módulo irreducible* si $V \neq 0$ y no tiene submódulos propios.

Lema de Schur: Sea $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$ un módulo irreducible. Entonces los únicos homomorfismos de V que conmutan con todo $\phi(x)$ ($x \in \mathfrak{g}$) son los escalares.

Para una demostración ver ([5], Pagina. 26, Lema de Schur).

1.9 Representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Definición 1.9.1: Denotamos como $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, al conjunto de matrices 2×2 con entradas en $\mathbb{C}$ y base

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

es decir las matrices de 2×2 con traza cero. Se tiene que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es un álgebra de Lie simple donde el producto corchete esta definido por $[A,B] = AB - BA$.

Podemos entonces calcular los corchetes entre los elementos de la base y obtenemos lo siguiente:

$$[H,X] = 2X,\ [H,Y] = -2Y,\ [X,Y] = H.$$

Resulta que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie simple de dimensión tres sobre $\mathbb{C}$ (salvo isomorfísmos). de acuerdo al teorema de clasificación de álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$.

La importancia de conocer las representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ será clara más adelante en el estudio de sistemas de raíces. Se tiene que en la descomposición de toda álgebra de Lie simple en espacios de raíces, por cada raíz podemos formar un álgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

1.9.1 Pesos y Vectores Maximales.

Sea (V,ϕ) un $\mathfrak{g}$-*módulo* arbitrario, donde $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Sean X, Y, H, como en (1.1) . observemos que como $H=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es diagonal, entonces cualquier representación $\phi(H)$ es diagonalizable. Esto nos lleva a una descomposición de V en suma directa de espacios propios $V_\lambda=\{v\in V \mid H.v=\lambda v\}$, $\lambda\in\mathbb{K}\}$. Cuando $V_\lambda\neq 0$, nosotros llamaremos a λ un *peso* de H y *espacio de peso* λ a V_λ.

Observación: Notemos que si $v\in V_\lambda$, entonces $X.v\in V_{\lambda+2}$ y $Y.v\in V_{\lambda-2}$ Además, en caso de que la dimensión de V es finita, como la suma $V=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda$ es directa, entonces existe $V_\mu\neq 0$ tal que $V_{\mu+2}=0$. En general un vector distinto de cero en V_μ es un *vector maximal de peso* μ (a tal μ se le llama *peso maximal*).

1.9.2 Clasificación de Módulos Irreducibles.

Teorema: Para cada $m\in N\cup\{0\}$, existe un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–módulo irreducible *de dimesión finita* $V(m)$ *sobre* $\mathbb{C}$, *que* relativo a H satisface,

a) V(m) es la suma directa de espacios Vκ, con $\kappa=m,\ m-2,\ .\ -(m-2),\ -m$, donde m+1=dimV(m) y dimVκ = 1 para cada κ.

b) $V(m)$ tiene un único peso maximal m.

Además, si V es un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$–módulo irreducible *de dimesión n* sobre $\mathbb{C}$ $entonces\ V\ es\ isomorfo\ a\ V(n-1)$

Para una demostración ver ([5], Teorema 7.2, pagina 33).

1.10 subálgebras de Cartán.

Definición 1.10.1: Una subálgebra de *Cartán* de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que satisface la siguientes condiciones

i) $\mathfrak{h}$ es una subálgebra maximal abeliana de $\mathfrak{g}$

ii) Para cada $H \in \mathfrak{h}$, el endomorfismo adH de $\mathfrak{g}$ es semisimple o diagonalizable.

Teorema 2 *Toda álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ tiene una subálgebra de Cartán, única salvo conjugación por $Aut(\mathfrak{g})$.*

Para una demostración ver ([3], capítulo III, teorema 4.1).

1.11 Álgebras de Lie Nilpotentes y Solubles.

Definimos una secuencia de ideales de un álgebra $\mathfrak{g}$ de la siguiente forma:

$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \mathfrak{g}^{(n)} = \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$.

$\mathfrak{g}$ es *soluble* si $\mathfrak{g}^{(i)} = 0$ para alguna $i \in \mathbb{Z}^{+}$.

Definimos una secuencia de ideales de $\mathfrak{g}$ de la siguiente forma:

$\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{g}^{2} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{1}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$, $\mathfrak{g}^{i} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-2}]]$.

$\mathfrak{g}$ *nilpotente* si $\mathfrak{g}^{n} = 0$ para alguna n.

Definición 1.11.1: Dada un álgebra $\mathfrak{g}$ denotamos $Rad(\mathfrak{g})$ al álgebra maximal soluble de $\mathfrak{g}$, un álgebra $\mathfrak{g}$ es *reductiva* si $Rad(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$.

Capítulo 2

Sistemas de Raíces.

2.1 Introducción.

El estudio de *sistemas de raíces* aparece en muchos contextos en Álgebra; en Teoría de Carcajes, en Grupos Finitos (Coxeter), en Álgebras de dimensión infinita, Álgebras Hereditarias, etc. (ver, [1], [2], [6], [9]). Una aplicación importante de los sistemas de raices se encontró para establecer la clasificación de álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$. Este resultado es interesante para nosotros, por lo que se explica en que consiste. Se construye una *biyección* entre clases de *isomorfismo* de álgebras de Lie *simples* sobre $\mathbb{C}$ y las clases de *isomorfismo* de *sistemas de raíces indescomponibles*. Esta correspondencia se puede extender a clases de *isomorfismo* de álgebras de Lie *semisimples* sobre $\mathbb{C}$ y clases de *isomorfismo* de *sistema de raíces*, ya que un álgebra de Lie *semisimple* es suma directa de *simples* y un *sistema de raíces* se puede descomponer en una unión de *sistemas de raíces indescomponibles.* Este trabajo se basa en la aplicación de sistemas de raíces para obtener todas las involuciones de un álgebra de Lie. Expliquemos ahora que son los sistemas de raíces y cómo se clasifican.

2.2 Definiciones.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n y $\alpha \in V$, con $\alpha \neq 0$. Una reflexión a lo largo de α es una transformación lineal s de V que satisface dos condiciones:

i) $s(\alpha) = -\alpha$

ii) El conjunto de puntos fijos es un hiperplano de V.

Definición 2.1.1: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n con producto interno $(\ ,\ )$ y $R \subset V - \{0\}$ un subconjunto finito. (V, R) es un *sistema de raíces* si

i) R genera a V.

ii) Si $\alpha \in R$, entonces $\mathbb{R}\alpha \cap R = \{-\alpha, \alpha\}$.

iii) Para cada $\alpha \in R$, hay una reflexión S_α que manda α a $-\alpha$ y R a R

iv) Para toda $\alpha, \beta \in R$, $\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$.

Un ejemplo de un sistema de raíces lo obtenemos como sigue. Formamos con un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ y una subálgebra de Cartán $\mathfrak{h}$ al conjunto $R = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, que consiste de las subrepresentaciones irreducibles de $\mathfrak{h}$ no triviales (pensadas como elementos del dual $\mathfrak{h}^*$) que aparecen en la descomposición de $\mathfrak{g}$ en la representación adjunta restringida,

$$ad\,|: \mathfrak{h} \longrightarrow gl(\mathfrak{g}).$$

Este sistema $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ genera un espacio vectorial real $V = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ en $\mathfrak{h}^*$ cuyo producto punto es la forma de Killing restringida.

Definición 2.1.2: Sea (V, R) un sistema de raíces.

a) Llamamos $l = \dim V$ el rango del sistema de raíces (V, R).

b) Dados α y $\beta \in R$, una $\alpha-$*cuerda* por β es un subconjunto de R de la forma

$\{\beta + n\alpha \mid p \leq n \leq q\}$, determinado por algunos enteros p y q.

c) Un subconjunto $\Pi \subset R$ es una *base de raíces* sí

i) Π es base de V

ii) Cada raíz β ó $-\beta$ se puede escribir como una suma $\sum k_\alpha \alpha$ ($\alpha \in \Pi$) con cada coeficiente k_α un entero

positivo ó cero. Una raíz en Π es llamada simple.

d) Sea Π una base de (V, R). Si $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ y toda $k_\alpha \geq 0$ (respectivamente $k_\alpha \leq 0$) diremos que β es

una **raíz positiva** (respectivamente **raíz negativa**) con respecto a Π. A las colecciones de raíces positivas

y negativas se les denota usualmente con R^+, R^- respectivamente

e) El *grado* de una raíz positiva $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ es $gr\beta = \sum k_\alpha$.

Teorema 3 *Todo sistema de raices (V, R) tiene una base.*

Para una demostración ver ([5], teo.10.1 pag 48).

Con el resultado anterior, dado un sistema de raíces (V, R) consideramos alguna base $\Pi \subseteq R$. Tal conjunto es un *conjunto de raíces simples.* Éste satisface la propiedad siguiente ($\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$):

$$(\mathbb{Z}_+\Pi \cap R) = R^+, \text{ y } (-\mathbb{Z}_+\Pi \cap R) = R^-,$$
$$(\mathbb{Z}_+\Pi \cap R) \cup (-\mathbb{Z}_+\Pi \cap R) = R.$$

Definición 2.1.3:

a) Un *sistema de raíces* (V, R), es *descomponible* si existen *sistemas de raíces* (V_1, R_1) y (V_2, R_2) tales que $V = V_1 + V_2$ (suma ortogonal) y $R = R_1 \cup R_2$.

b) Dos *sistemas de raíces* (V_1, R_1) y (V_2, R_2) son *isomorfos* sí existe un *isomorfismo lineal*

$$\phi : V_1 \longrightarrow V_2$$

tal que $\phi(R_1) = R_2$ y $\forall\ \alpha, \beta \in R_1$ $\langle\phi(\alpha), \phi(\beta)\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle$.

c) Un *sistema de raíces* es llamado *indescomponible o irreducible* si no es *descomponible.*

Como un ejemplo se puede demostrar que un sistema de raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a una subálgebra de Cartán $\mathfrak{h}$, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, es indescomponible si y sólo si $\mathfrak{g}$ es simple.

2.3 Clasificación.

En esta sección explicaremos cómo se clasifican las clases de isomorfísmos de *sistemas de raices irreducibles.* Sea $Aut(R)$ el grupo de *automorfismos* de (V, R) y $W(R)$ el *grupo de Weyl* que se define como el *subgrupo generado* por las reflexiones S_α con $\alpha \in R$. Se puede demostrar que $W(R)$ es *normal* en $Aut(R)$. El siguiente teorema es muy importante para lo que sigue y contiene lo antes mencionado.

Teorema 4 : *Sea (V, R) un sistema de raíces y Π una base.*

a) Si Π' es otra base de R, entonces $\sigma(\Pi') = \Pi$ para alguna $\sigma \in W(R)$.

b) Si α es una raíz entonces existe $\sigma \in W(R)$ tal que $\sigma(\alpha) \in R$.

c) $W(R)$ es generado por las S_α $(\alpha \in \Pi)$.

d) Si $\sigma(\Pi) = \Pi$, con $\sigma \in W(R)$, entonces $\sigma = I$. (Esto es que $W(R)$ actúa simple y transitivamente sobre el conjunto de todas las bases).

Para una demostración ver ([5], teorema.10.3 pag. 51).

2.3.1 La Matriz de Cartán.

Con una base $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n\}$ de un sistema de raíces (V, R) formamos la matríz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, definida por $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$, llamada la *matríz de Cartán*. Los a_{ij} son llamados los *enteros de Cartán*. Es importante hacer notar que una matríz de Cartán asociada a R sólo depende de la elección del orden de la base y no de la base misma. Además, la matríz es no singular.

Proposición 2.1: Sea (V, R) un sistema de raíces y $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ una base de R. Si $R' \subset V'$ es otro sistema de raíces con base $\Pi' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, .., \alpha'_n\}$ y si $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \left\langle \alpha'_i, \alpha'_j \right\rangle$ para $1 \leq i, j \leq l$, entonces la biyección

$$\alpha_i \overset{\phi}{\longmapsto} \alpha'_i$$

se extiende (de manera única) a un isomorfismo

$$\Phi : V \longrightarrow V'$$

que manda R sobre R' y satisface $\langle \Phi(\alpha), \Phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in R$.

Para una demostración ver ([5], proposición 11.1, pag 55).

Esta proposición es muy importante pues nos dice que la matríz de Cartán de R determina R bajo isomorfísmos.

2.3.2 Diagramas de Dynkin.

Finalmente, asignamos a la matríz de Cartán A el diagrama de *Dynkin*, $D(A)$, que es una gráfica de n vértices definida como sigue: dados dos vértices distintos i y j los unimos con un número entero $a_{ij}a_{ji}$ de aristas y una flecha sobre las aristas apuntando del vértice i al vértice j

cuando $|a_{ij}| < |a_{ji}|$. Notemos, que un sistema es *indescomponible* si y sólo si el correspondiente diagrama de *Dynkin* es conexo. Es fácil darse cuenta que esta construcción no depende de la matríz de Cartán asociada a sistemas de raices que están en la misma clase de isomorfismo. Asi asignamos diagramas de Dynkin a clases de isomorfismo de sistemas de raíces.

La clasificación de los diagramas de Dynkin conexos $D(A)$ es exactamente la clasificación de sistemas de raíces *indescomponibles*. Esto es consecuencia en parte de lo que ya hemos dicho. Lo que se tiene es una biyección entre los diagramas de Dynkin y las clases de isomorfismo de sistemas de raíces. En primer lugar, la inyectividad se tiene por la proposición 2.1. Veamos la *suprayectividad*. De un diagrama recuperamos a la matríz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, una base Π de algún espacio vectorial V, con producto punto que cumple que $a_{ij} = \langle \beta_i, \beta_j \rangle$. Luego, obtenemos a R en proceso inductivo mediante cuerdas. El siguiente resultado es el que permite recuperar a R a partir de una base Π.

Proposición 2.2:

i) Toda raíz β en R^+ puede ser escrita como $\beta = \beta_1 + ... + \beta_k$ con todas las β_j en Π y toda suma parcial $\beta_1 + ... + \beta_j \in R$, para $j = 1, 2, ..., k$.

ii) Dados $\alpha, \beta \in R$ existen únicos $p, q \in \mathbb{Z}$, tales que $\{\beta + n\alpha \mid p \leq n \leq q\}$ es un subconjunto de R. A este conjunto se le llama una $\alpha -$*cuerda máxima* por β, con la propiedad $\langle \alpha, \beta \rangle = p + q$.

Para una demostración ver ([5], corolario.10.2, pag 50).

A continuación formularemos los resultados que establecen la clasificación de sistemas de raíces. Primero se muestra, que *si* $(V; R)$ *es un sistema indescomponible de raíces de rango* l*, entonces su correspondiente diagrama de Dynkin es uno de la tabla* (2-1) *y los sistemas de raices producidos por los diagramas de Dynkin de la tabla agotan todos los sistemas irreducibles de raices.*

Como el resultado es muy importante lo formularemos como un teorema.

Teorema 5 : *Clasificación de sistemas de raíces.*

a) Si (V, R) *es un sistema de raíces indescomponible de rango* l *entonces su correspondiente diagrama de Dynkin es uno de los que aparece en la tabla* $(2-1)$.

b) Cada diagrama de la tabla es un diagrama de Dynkin para algún sistema de raíces.

c) A dos sistemas de raíces isomorfos corresponde el mismo diagrama de Dynkin.
(ver Tabla 2-1).

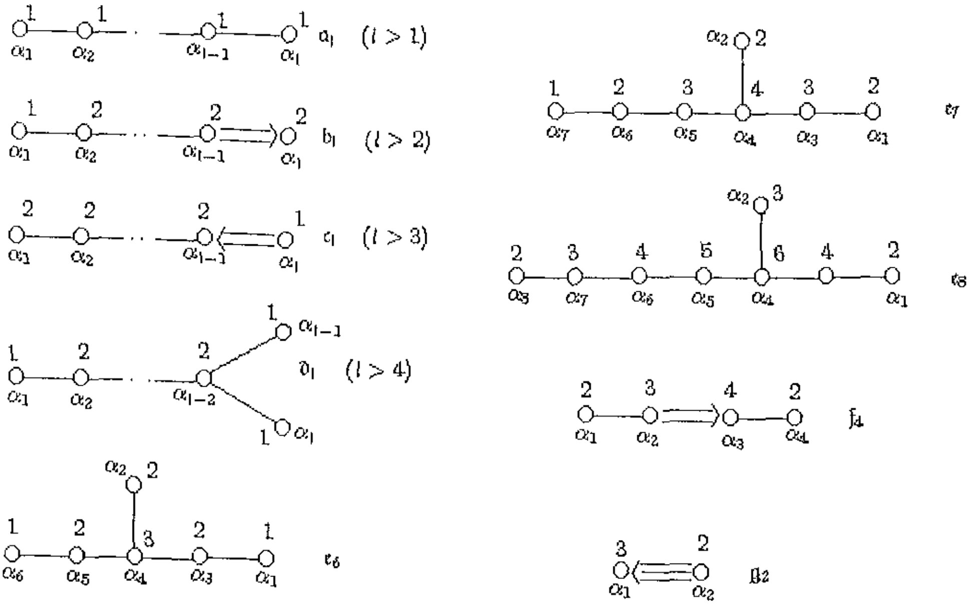


Tabla 2-1: Diagramas de Dynkin

Para la clasificación de las álgebras de Lie semisimples sobre $\mathbb{C}$ necesitamos dos resultados. Primero, que en cada clase de isomorfismo de sistemas de raíces existe un representante de la forma $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. El segundo es que $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ es isomorfo a $\Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ sí y sólo sí $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son álgebras de Lie isomorfas.

Teorema 6 . *Hay una biyección entre las clases de isomorfismo de álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ y los diagramas de Dynkin conexos (ver tabla 2-1).*

Para una demostración ver ([5], Teorema 12.1, pag 57).

Observemos que en la tabla $(2-1)$ aparecen unos números en la parte de arriba de los vértices, expliquemos por medio de una proposición lo que representan dichos números

Proposición 2.3: Sea (V,R), un sistema de raíces *irreducible*, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ una base de (V,R). Entonces existe una única raíz $\delta = \sum_1^l d_i\alpha_i$ en (V,R) tal que para una raíz $\alpha = \sum_1^l a_i\alpha_i$ tenemos que $a_1 \leq d_1 ... a_l \leq d_l$. La raíz δ es llamada la *raíz altura*.

Para una demostración ver ([3], proposición 3.26, pag.475).

Con la propsición **2.3** podemos formular el siguiente teorema.

Teorema (de la raíz altura) El sistema de raíces irreducible (V,R), tiene la siguiente raiz altura δ para cada caso.

$\mathfrak{a}_l$. $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 +, ..., +\alpha_{l-1} + \alpha_l$.

$\mathfrak{b}_l$. $\delta = \alpha_1 + 2\alpha_2 +, ..., +2\alpha_{l-1} + 2\alpha_l$

$\mathfrak{c}_l$. $\delta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 +, ..., +2\alpha_{l-1} + \alpha_l$

$\mathfrak{d}_l$. $\delta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 +, ..., +2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$

$\mathfrak{e}_6$, $\delta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$

$\mathfrak{e}_7$, $\delta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$

$\mathfrak{e}_8$, $\delta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$

$\mathfrak{f}_4$, $\delta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$

$\mathfrak{g}_2$, $\delta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

Obsevemos que en la tabla $(2-1)$ los números que aparecen en la parte de arriba de los vértices son los coeficientes de la combinación lineal correspondiente al álgebra y a la altura δ.

Para un sistema de raíces (V,R), el grupo de Weyl $W(R)$ es normal en $Aut(\mathfrak{g})$ y $W(R)$ actúa simple y transitivamente sobre las bases de R. Entonces el grupo $Aut(\mathfrak{g})/W(R)$ es fácil de determinar en cada caso analizando cada uno de los diagramas de Dynkin de la tabla (2-1). Las posibles simetrías dan el resultado siguiente :

Teorema 7 : *El grupo $Aut(\mathfrak{g})/W(R)$ es isomorfo al grupo de automorfismos de los diagramas de Dynkin. Tenemos lo siguiente:*

i) Para $\mathfrak{a}_l, \mathfrak{b}_l, \mathfrak{c}_l, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2$: $\qquad \mathbb{Z}_1$

ii) Para $\mathfrak{a}_l$ $(l \geq 2)$, $\mathfrak{b}_l$ $(l > 4)$, $\mathfrak{e}_6$ $\qquad \mathbb{Z}_2$,

iii) Para $\mathfrak{d}_4$. $\qquad \mathcal{G}_3$,

donde $\mathbb{Z}_m$ es el grupo cíclico de orden m y $\mathcal{G}_3$ es el grupo de permutaciones de tres letras.

Para una demostración ver ([3], Teorema 4.15, capítulo X).

Capítulo 3

Formas Reales.

3.1 Estructuras Complejas.

En esta sección definimos como nuestro objeto de estudio las formas reales de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$. El resultado principal de este capítulo es que hay una biyección entre clases de isomorfismo de las *formas reales* $\mathfrak{g}$ y las clases de conjugación de *involuciones de* $\mathfrak{g}$, las cuales se trataran en el siguiente capítulo.

Definición 3.1.1: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Una *estructura compleja* sobre V es un *endomorfismo* J de V que es $\mathbb{R}$*−lineal*, tal que $J^2 = -I$; donde I es la identidad en V.

Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ con estructura compleja J puede ser pensado como un espacio vectorial $\tilde{V}$ sobre $\mathbb{C}$ de la siguiente forma. Por un lado, $\tilde{V}$ se obtiene de la multiplicación de un complejo por un elemento de V definida por $(a + ib)X = ax + bJ(X)$, para toda $X \in V$ y con $a, b \in \mathbb{R}$. Notemos que si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y usando que $J^2 = -I$ obtenemos que $\alpha\,(\beta\,(X)) = (\alpha\beta)\,(X)$ para toda $X \in V$. Llamaremos a $\tilde{V}$ el *espacio complejo asociado a* (V, J). Por otro lado, si ahora E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ podemos considerar a E como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ al cual llamaremos $E^{\mathbb{R}}$. Observemos que la multiplicación por i sobre E es una estructura compleja J sobre $E^{\mathbb{R}}$ y entonces es claro que $E = \widetilde{(E^{\mathbb{R}})}$

3.2 Estructuras Complejas sobre Álgebras de Lie Reales.

Definición 3.2.1: Se dice que un álgebra de Lie $\mathfrak{v}$ sobre $\mathbb{R}$ tiene una estructura compleja J sí J es una estructura compleja sobre el espacio vectorial real definido por $\mathfrak{v}$ y además se cumple, que para toda x, $y \in \mathfrak{v}$

$$[x, J(y)] = J[x, y] \tag{3.1}$$

Veamos que la condición anterior se puede traducir a la siguiente propiedad $(adx) \circ J = J \circ (adx) \quad \forall\, x \subset \mathfrak{v}$ también de 3 1 obtenemos que $[J(x), J(y)] = -[x, y]$

además notemos que $\tilde{\mathfrak{v}}$ es ahora un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$, donde el conmutador de dos elementos del álgebra está dado de manera natural por:

$$[(a+ib)\,x, (c+id)\,y] = [ax + J(bx), cx + J(dy)] = ac\,[x,y] + bcJ\,[x,y] + adJ\,[x,y] - bd\,[x,y] =$$
$$= (ac-bd)\,[x,y] + (bc+ad)J\,[x,y] = (ac-bd)\,[x,y] + (bc+ad)i\,[x,y] = (a+ib)(c+id)\,[x,y]\,.$$

Análogamente dada un álgebra de Lie $\mathfrak{e}$ sobre $\mathbb{C}$, podemos pensar a $\mathfrak{e}$ como el espacio vectorial $\mathfrak{e}^{\mathbb{R}}$ (que con el producto heredado por $\mathfrak{e}$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$) con estructura compleja J, dada por la multiplicación por i.

3.3 Complejificación de un Álgebra de Lie Real.

Supongamos ahora que W es un espacio vectorial real de dimensión finita. Consideremos, el producto $W \times W$ (el cual forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$) y el endomorfismo J dado por:

$$J : W \times W \longrightarrow W \times W$$
$$(x,y) \longmapsto (-y,x)$$

Notemos que $J \circ J = -\,I$, es decir, J es una estructura compleja sobre $W \times W$. Consideremos entonces el espacio vectorial complejo inducido sobre $W \times W$, el cual será denotado por $W^{\mathbb{C}}$ llamado la *complejificación* de W.

Obsevacion : Los elementos de $W^{\mathbb{C}}$ son pares (x,y) donde $x, y \in W$. Por este hecho podemos denotar $(x,y) = (x,0) + i\,(0,y)$ o sí se prefiere $(x,y) = x + iy$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $(x,y) \in W \times W$; tenemos que .

$$(a + bJ)\,(x,y) = a\,(x,y) + bJ\,(x,y) = a\,(x,y) + b\,(-y,x) = (ax - by, ay + bx)$$

o también tenemos que :

$$(a+ib)(x+iy) = (ax-by)+i(ay+bx)$$

Lo que muestra que nuestra notación es muy natural

Observación : $W^{\mathbb{C}}$ se define también usando el producto tensorial

Así que definimos $W^{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} W$ y $W = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$.

Concluimos que todo espacio vectorial E sobre $\mathbb{C}$ es isomorfo a $W^{\mathbb{C}}$ para algun espacio vectorial W sobre $\mathbb{R}$. Ésto es fácil de verificar. Para cualquier base $\{e_1, e_2, ..e_n\}$ de E definimos a W como el espacio generado por todas las combinaciones $\mathbb{R}-$*lineales* de los e_i, es decir que $W = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mid a_i \in \mathbb{R}\right\}$

Sea $\mathfrak{t}_0$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ con las características antes mencionadas. Definimos el espacio vectorial complejo $\mathfrak{t} = (\mathfrak{t}_0)^{\mathbb{C}}$ de todos los simbolos $x+iy$, donde $x, y \in \mathfrak{t}_0$, mediante el producto corchete dado por

$$[x+iy, z+iw] = [x,z]-[y,w]+i([y,z]+[x,w])$$

Es claro entonces que $\mathfrak{t} = (\mathfrak{t}_0)^{\mathbb{C}}$ es la *complejificación* del álgebra de Lie $\mathfrak{t}_0$. El álgebra de Lie $\mathfrak{t}^{\mathbb{R}}$ es el álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ con estructura compleja J derivada por la multiplicación por i sobre $\mathfrak{t}$

3.4 Formas Reales.

Definición 3.4.1: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Una forma real de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra $\mathfrak{g}_0$ del álgebra de Lie real $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ tal que

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus J\mathfrak{g}_0 \text{ (suma directa de espacios vectoriales)}$$

Notemos que en este caso cada $Z \in \mathfrak{g}$ puede descomponerse de manera única como

$$Z = X + iY \qquad X, Y \in \mathfrak{g}_0$$

Tenemos entonces que $\mathfrak{g} \approx (\mathfrak{g}_0)^{\mathbb{C}}$.

Supongamos ahora que sólo tenemos un álgebra de Lie sobre los reales $\mathfrak{g}_0$. Podemos construir un álgebra $\mathfrak{g}$ de Lie sobre $\mathbb{C}$ que tiene a $\mathfrak{g}_0$ como forma real. Esto es mediante la complejificación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Se tiene que el álgebra real $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ y al álgebra $\mathfrak{g}_0$ identificada con la subálgebra $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$

3.5 Conjugaciones.

Veremos en esta sección una manera alterna de trabajar con las formas reales de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$. Para esto daremos unas cuantas definiciones.

Sea $\mathfrak{g}_0$ una forma real de $\mathfrak{g}$ y J la estructura compleja de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. El mapeo σ de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$ dado por:

$$X + JY \longmapsto X - JY \qquad X, Y \in \mathfrak{g}_0$$

es llamado *la conjugación de* $\mathfrak{g}$ *con respecto a* $\mathfrak{g}_0$. El mapeo σ tiene las siguientes propiedades,

i) $\sigma(\sigma(x)) = x$

ii) $\sigma(\alpha x) = \overline{\alpha}\sigma(x)$

iii) $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$

iv) $\sigma[x, y] = [\sigma(x), \sigma(y)]$ para $x, y \in \mathfrak{g}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

Observación: El mapeo σ es un automorfismo del álgebra de Lie real $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, pero no es un automorfismo del álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}$.

Por otro lado, sea σ un endomorfismo de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$ con las mismas propiedades anteriores *i)*, *ii)*, *iii)*, *iv)*. Entonces el conjunto de puntos fijos de σ es una forma real $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ y σ es la conjugación de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{g}_0$

Definición 3.5.1: Sea $\mathfrak{u}$ una forma real de un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}$. Definimos los siguientes conjuntos:

i) $End(\mathfrak{g})$,es el conjunto de endomorfismos complejos del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $Aut(\mathfrak{g})$, es el conjunto de automorfismos complejos del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$

ii) $End_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u})$, es el conjunto de endomorfismos reales del álgebra de Lie $\mathfrak{u}$ y $Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u})$, es el conjunto de automorfismos reales del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Observemos que $Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}) \subset End_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u})$ así como también $Aut(\mathfrak{u}) \subset End(\mathfrak{u})$ Con las definiciones dadas construimos los siguientes conjuntos.

iii) $Inv(\mathfrak{g}) = \left\{\sigma \in Aut(\mathfrak{g}) \mid \sigma^2 = I\right\}$ llamado el conjunto de la involuciones de $\mathfrak{g}$.

iv) $Inv_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}) = \left\{\sigma \in Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}) \mid \sigma^2 = I\right\}$ llamado el conjunto de la involuciones de $\mathfrak{u}$.

v) $Conj(\mathfrak{g}) = \left\{\sigma \in Inv_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}) \mid \sigma(Zv) = \overline{Z}v,\ \textit{para cualquier}\ Z \in \mathbb{C}\right\}$ llamado el conjunto de las conjugaciones de $\mathfrak{g}$.

Llamamos $\Im$ al conjunto de las formas reales de $\mathfrak{g}$. Podemos definir una relación de equivalencia $\sim_1$en $\Im$ dada por :

$$\forall\, \mathfrak{l}\,,\, \mathfrak{h} \in \Im,\ \mathfrak{l} \sim_1 \mathfrak{h} \iff \exists\, \beta : \mathfrak{l} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

para algún β isomorfismo de álgebras de Lie reales.

Podemos definir una relación de equivalencia $\sim_2$en $Conj(\mathfrak{g})$ dada por:

$$\forall\, \phi\,,\, \varphi \in Conj(\mathfrak{g}) \quad \phi \sim_2 \varphi \iff \exists\, \gamma \in Aut(\mathfrak{g}) \text{ tal que } \phi = \gamma\varphi\gamma^{-1}.$$

Con estas definiciones tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1:

a) Tenemos una biyección:

$$Conj\,(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\lambda} \Im \tag{3.2}$$

dada por $\mu \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mu}$; donde $\mathfrak{g}^{\mu} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mu(x) = x\}$ es el conjunto de puntos fijos de μ.

b) Inducimos de λ una biyección $\overline{\lambda}$ a nivel de clases de equivalencias

$$Conj\,(\mathfrak{g})\,/Aut\,(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\overline{\lambda}} \Im/\sim$$

Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Conj(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \Im \arrow[d, "\pi_2"] \\
Conj(\mathfrak{g})/Aut(\mathfrak{g}) \arrow[r, dashed, "\overline{\lambda}"'] & \Im/\sim
\end{tikzcd}$$

Demostración:

a) Primeramente hay que demostrar que λ es una función bien definida. En realidad, podemos demostrar que

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Leftrightarrow \mathfrak{g}^{\sigma_1} = \mathfrak{g}^{\sigma_2}$$

$\Rightarrow$) Si $\sigma_1 = \sigma_2$, es claro que el conjunto de puntos fijos es el mismo $\mathfrak{g}^{\sigma_1} = \mathfrak{g}^{\sigma_2}$.

$\Leftarrow$) Como podemos descomponer $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\sigma_1} + i\mathfrak{g}^{\sigma_1} = \mathfrak{g}^{\sigma_2} + i\mathfrak{g}^{\sigma_2}$, la conjugacion σ_1 aplicada a $x + iy$, con x y y en $\mathfrak{g}^{\sigma_2} = \mathfrak{g}^{\sigma_1}$, resulta ser $\sigma_1(x + iy) = x - iy$. Por esta razón $\sigma_1 = \sigma_2$. Así λ es inyectiva.

Para demostrar que λ es sobre, se $\mathfrak{g}_0 \in \Im$. Sabemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + J\mathfrak{g}_0$. Definimos entonces $\sigma_0 \in Conj(\mathfrak{g})$ como $\sigma_0(x + Jy) = x - Jy$.

b) Tomamos ahora $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}_1$ formas reales y sus asociados σ_0 y σ_1 en $Conj(\mathfrak{g})$ respectivamente. La primera afirmación que tenemos es que :

$$\mathfrak{g}_0 \sim_1 \mathfrak{g}_1 \Leftrightarrow \sigma_0 \sim_2 \sigma_1$$

Observemos que al demostrar esta afirmación λ induce una biyección entre $\Im/\sim$ y $Conj\,(\mathfrak{g})\,/Aut\,(\mathfrak{g})$.

$\Longrightarrow$) Tenemos entonces que $\mathfrak{g}_0 \sim_1 \mathfrak{g}_1 \Leftrightarrow$ existe $\varphi : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{g}_1$ isomorfismo de Lie real. Afirmamos que si existe tal φ, implica que existe $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ automorfismo de $\mathfrak{g}$ tal que $\psi(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}_1$ Esta afirmación es facil de ver, pues dado φ y sabiendo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + i\mathfrak{g}_0$ definimos $\psi = \varphi + i\varphi$, como $\psi(x + iy) = \varphi(x) + i\varphi(y)$. Tal automorfismo cumple la propiedad $\psi(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}_1$. Además ψ cumple con $\psi \circ \sigma_0 = \sigma_1 \circ \psi$. Esto pasa por la siguiente razón:

$\psi \circ \sigma_0(x + iy) = \psi(x - iy) = \varphi(x) - i\varphi(y) = \sigma_1(\varphi(x) + i\varphi(y)) = \sigma_1 \circ \psi(x + iy)$; es decir, que $\sigma_0 = \psi^{-1} \circ \sigma_1 \circ \psi$. Por lo tanto $\sigma_0 \sim_2 \sigma_1$.

$\Longleftarrow$) $\sigma_0 \sim_2 \sigma_1$implica que existe $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ automorfismo de $\mathfrak{g}$ tal que $\psi \circ \sigma_0 = \sigma_1 \circ \psi$. Afirmamos que $\psi(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}_1$. Esto se obtiene por que si $x \in \mathfrak{g}_0$ entonces $\sigma_1 \circ \psi(x) = \psi \circ \sigma_0(x) = \psi(x)$ es decir, $\psi(x) \in \mathfrak{g}_1$. Por lo tanto $\psi(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}_1$. Analogamente, $\psi^{-1}(\mathfrak{g}_1) \subseteq \mathfrak{g}_0$. Definimos $\varphi : \psi \mid : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{g}_1$ como la restricción de ψ. Notemos que φ es un isomorfismo ya que ψ lo es. Con esto hemos demostrado que λ es una biyección entre $\Im/\sim$ y $Conj\,(\mathfrak{g})\,/Aut\,(\mathfrak{g})$ ■

El siguiente teorema es de fundamental importancia en la teoría de las álgebras de Lie semisimples

Teorema 8 *Toda álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ tiene una forma real compacta que es única salvo conjugación por $Aut(\mathfrak{g})$.*

Para una demostración ver ([3], Capítulo III. teorema 6.3.).

El teorema anterior se puede reformular por medio de conjugaciones en lugar de formas reales el cual nos diría:

Teorema 9 : *Para toda álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ existe $\sigma \in Conj(\mathfrak{g})$ tal que $\mathfrak{g}^\sigma$ es compacta .*

Demostración.

La demostración se obtiene aplicando al teorema 8 la biyección de la proposición 3.1

■

Teorema 10 : Sea $\mathfrak{g}_0$ una álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g}$ su complejificación y $\mathfrak{u}$ una forma real compacta de $\mathfrak{g}$. Sea τ y σ las conjugaciones de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{u}$, respectivamente. Entonces tenemos que existe un automorfismo φ de $\mathfrak{g}$ tal que la forma real compacta $\varphi\mathfrak{u}$ es invariante bajo τ.

Para una demostración ver ([3], Teorema 7.1, capítulo III).

Con lo que se mostro en el teorema 9 y la proposición 3.1 podemos reformular el teorema 10 usamos la biyeccion λ de la proposición 3.1. para trabajar más bien con conjugaciones que con formas reales directamente

Teorema 11 Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_0$ una forma real de $\mathfrak{g}$ con su corresponiente $\tau \in Conj(\mathfrak{g})$ (i.e.. tal que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^\tau$) y $\mathfrak{u}$ una forma real compacta de $\mathfrak{g}$ con $\sigma \in Conj(\mathfrak{g})$ tal que $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^\sigma$ Entonces tenemos que existe un automorfismo φ de $\mathfrak{g}$ tal que la conjugación $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$ es compacta e invariante bajo τ :

Proposición 3.2 : Sea $\mathfrak{u}$ una álgebra de Lie compacta sobre $\mathbb{R}$. Sean s_1 y s_2 dos automorfismos involutivos de $\mathfrak{u}$ y sean $\mathfrak{t}_1^*, \mathfrak{t}_2^*$ las correspondientes formas reales de $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$. Entonces s_1 y s_2 son conjugados con el grupo de $Aut(\mathfrak{u})$ sí y sólo sí $\mathfrak{t}_1^*$ y $\mathfrak{t}_2^*$ son conjugados bajo $Aut(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}})$.

Para una demostración ver ([3], proposición 2 2, capítulo V).

Gracias a la biyección dada en la proposición 3 1 a) y usando el teorema 11 podemos cambiar $\mathfrak{t}_1^*$ $\mathfrak{t}_2^*$ por las conjugaciones *correspondiente* $\sigma_{\mathfrak{t}_1^*}, \sigma_{\mathfrak{t}_2^*}$ *sobre* $u^{\mathbb{C}}$ conjugaciones de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ y entonces la proposicion nos afirma $\sigma_{\mathfrak{t}_1^*} \sim_1 \sigma_{\mathfrak{t}_2^*} \Leftrightarrow s_1 \sim s_2$ es decir:

Proposición 3.3 Sea $\mathfrak{u}$ una álgebra de Lie compacta semisimple sobre $\mathbb{R}$ Sean s_1 y s_2 dos automorfismos involutivos de $\mathfrak{u}$ y sean σ_1, σ_2 las correspondientes conjugaciones en $Conj\,(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}})$ definidas como $\sigma_j = s_j - is_j$. Entonces s_1 y s_2 son conjugados con el grupo de $Aut(\mathfrak{u})$ si y sólo si σ_1 y σ_2 son conjugados bajo $Aut(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}})$.

Definición 3.5.2: Llamamos $Conj\,(\mathfrak{g})^\sigma$ a el subconjunto de conjugaciones que conmutan con σ es decir

$$Conj\,(\mathfrak{g})^{\sigma} = \{\tau \in Conj\,(\mathfrak{g}) \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$$

En base a nuestra reformulación de las proposiciones anteriores tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.4: Sea $\mathfrak{u}$ una forma real de $\mathfrak{g}$ y σ su conjugación correspondiente.

$a)$ Hay un epimorfismo β entre $Conj\,(\mathfrak{g})^{\sigma}$ y $Conj\,(\mathfrak{g})\,/Aut(\mathfrak{g})$, el cual induce una biyección $\overline{\beta}$ entre los conjuntos $Conj\,(\mathfrak{g})^{\sigma}\,/Aut(\mathfrak{g})$ y $Conj\,(\mathfrak{g})\,/Aut(\mathfrak{g})$

$b)$ Hay un biyección α entre $Conj\,(\mathfrak{g})^{\sigma}$ y $Inv(\mathfrak{u})$.

$c)$ α induce una biyección $\overline{\alpha}$ entre los conjuntos $Conj\,(\mathfrak{g})^{\sigma}\,/Aut(\mathfrak{g})$ y $Inv\,(\mathfrak{u})\,/Aut(\mathfrak{u})$.

Demostración :

Para la demostración de esta proposición nos valdremos de los teoremas y proposiciones anteriores.

$a)$ Sabemos por el teorema 11 que existe φ tal que $\varphi(\mathfrak{u})$ es invariante bajo τ. Si $\varphi(\mathfrak{u})$ es invariante bajo τ quiere decir que

$\tau(\varphi(\mathfrak{u})) \subseteq \varphi(\mathfrak{u})$ esto implica que $\varphi^{-1}(\tau(\varphi(\mathfrak{u}))) \subseteq \mathfrak{u}$. Ahora si llamamos $\sigma = \varphi^{-1}\tau\varphi$ veamos que se cumple $\sigma\sigma_1 = \sigma_1\sigma$. Para demostrarlo tenemos $x \in \mathfrak{u}$. Entonces :

$\sigma\sigma_1(x) = \sigma(x)$. Como $\sigma(x) \in \mathfrak{u}$ y σ_1 deja fijo a los elementos de $\mathfrak{u}$ entonces $\sigma_1(\sigma(x)) = \sigma(x)$. Por lo tanto $\sigma\sigma_1 = \sigma_1\sigma$ conmutan. Lo que demostramos es que dada una clase de equivalencia

$[\tau] \in Conj\,(\mathfrak{g})\,/Aut\,(\mathfrak{g})$ encontramos un representante σ_1 de la clase $[\tau]$ que conmuta con σ. Por lo tanto, esto demuestra que existe el epimorfismo β. Es claro entonces que este epimorfismo β nos induce de manera natural una biyección $\overline{\beta}$ entre

$Conj\,(\mathfrak{g})^{\sigma}\,/Aut\,(\mathfrak{g})$ y $Conj\,(\mathfrak{g})\,/Aut\,(\mathfrak{g})$.

$b)$ Sea $\tau \in Conj\,(\mathfrak{g})^{\sigma}$. Como τ conmuta con σ tenemos la restricción de $\tau\,|_{\mathfrak{u}}$pües $\tau(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{\sigma}$ esto es cierto pües al tomar $x \in \tau(\mathfrak{u})$ tenemos que $x = \tau(y)$ para alguna $y \in \mathfrak{u}$, lo cüal implica que al evaluar σ en x obtenemos lo siguiente:

$$\sigma(x) = \sigma(\tau(y)) = \tau(\sigma(y)) = \tau(y) = x$$

Por esta razón $x = \tau(y) \in \mathfrak{u}$. Por lo tanto $\tau\,|_{\mathfrak{u}}$ es una **involución** de $\mathfrak{u}$. Ahora dada una involución $s : \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u}$ podemos formar una conjugacion τ que conmute con σ, dada por :

$$\tau : \mathfrak{u} + i\mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$$

$$x + iy \longmapsto s(x) - is(x)$$

Para ver que τ conmuta con σ, tomemos $x \in \mathfrak{u}$. Entonces lo siguiente es cierto $\tau(\sigma(x)) =$ $\tau(x) = s(x)$. Por otro lado $\sigma(\tau(x)) = \sigma(s(x)) = s(x)$. Finalmente $\tau(\sigma(x)) = \sigma(\tau(x))$

Lo cual demuestra que la biyección se da.

(c) Por la proposición 3.3 α respeta clases de equivalencia. Así que $\overline{\alpha}$ es la proyección natural

■

De manera natural podemos inducir la biyección θ para hacer el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Conj(\mathfrak{g})^{\sigma}/Aut(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\overline{\beta}"] \arrow[d, "\overline{\alpha}"'] & Conj(\mathfrak{g})/Aut(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\overline{\lambda}"] \\
Inv(\mathfrak{u})/Aut(\mathfrak{u}) \arrow[r, dashed, "\theta"'] & \Im/\sim
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Por último enunciemos el siguiente teorema que es el que permitirá aplicar los resultados del capítulo 4 al problema de clasificar las formas reales

Teorema 12 *Sea γ la función de $Inv(\mathfrak{u})$ a $Inv(\mathfrak{g})$ que asigna a cada $s \in Inv(\mathfrak{u})$ la involución natural $s \to s$ sobre $\mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$. Entonces γ induce una biyección $\overline{\gamma}$ como sigue.*

$$\overline{\gamma} \quad Inv(\mathfrak{u})/Aut(\mathfrak{u}) \longrightarrow Inv(\mathfrak{g})/Aut(\mathfrak{g})$$

Para una demostración ver ([3], proposición 1.4, capítulo X).

Este teorema nos dara la última biyección que faltaba. Definimos ω como la función que hace el siguiente diagrama conmutativo.

Teorema 13 : *Existe una función ω que hace el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
Conj(\mathfrak{g})^{\sigma}/Aut(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\overline{\beta}"] \arrow[d, "\overline{\gamma} \circ \overline{\alpha}"'] & Conj(\mathfrak{g})/Aut(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\overline{\lambda}"] \\
Inv(\mathfrak{g})/Aut(\mathfrak{g}) \arrow[r, dashed, "\omega"'] & \Im/\sim
\end{tikzcd}$$

Además ω es una biyección

Demostración : El teorema 12 implica que $\vec{\gamma} \circ \overline{\pi}$ es una biyección. Usando el diagrama (3.3) implica la existencia de ϖ. Es ω una biyección por definición. Se tiene que ω establese una biyección entre las clases de isomorfísmos de formas reales de $\mathfrak{g}$ y las clases de conjugación de las involuciones de $\mathfrak{g}$ por el grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$. Por esta razón estudiar las formas reales de un álgebra $\mathfrak{g}$ salvo isomorfísmos es lo mismo que estudiar las involuciones de $\mathfrak{g}$ salvo conjugación de autorfismos de $\mathfrak{g}$. Lo qe hacemos en adelante es trabajar con las involuciones para entender mejor a las formas reales

Capítulo 4

Automorfismos de Orden Finito de Álgebras de Lie Semisimples.

4.1 Definiciones :

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Si A es un grupo abeliano, una $A-$ *graduación* de $\mathfrak{g}$ es por definición, una descomposición en suma directa de la siguiente forma

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in A} \mathfrak{g}_i \qquad \textit{tal que} \qquad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \tag{4.1}$$

Es claro que por (4.1) que $\mathfrak{g}_0$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Además, es evidente que para $X \in \mathfrak{g}_0$, $Y_i \in \mathfrak{g}_i$. $ad_X(Y_i) = [X, Y_i]$ es elemento de $\mathfrak{g}_i$. Tenemos entonces una representación de $\mathfrak{g}_0$ en $\mathfrak{g}_i$.

Definición 4.1.1: Un ideal $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ es llamado un $A-$ *ideal graduado* si cumple con lo siguiente

$$\mathfrak{s} = \bigoplus_{i \in A} \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}_i$$

Ahora supongamos que $\mathfrak{g}$ tiene dimensión finita y sea σ un automorfismo de $\mathfrak{g}$ de orden m (i. e., que $\sigma^m = I$ y $\sigma^t \neq I$ para $0 < t < m$). Este automorfismo genera la siguiente descomposición

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\bar{i} \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{g}_{\bar{i}} \tag{4.2}$$

en la cual $\mathfrak{g}_{\bar{i}}$ es el espacio propio generado por el valor propio ϵ^i; con ϵ una raíz primitiva de la unidad

Notación: Definimos $H_m = \{(\mathfrak{g}, \sigma) \mid \mathfrak{g}$ semisimple, $\sigma \in Aut(\mathfrak{g})$ de orden $m\}$.
Escribiremos $\sigma \in H_m$, cuando el álgebra se sobreentiende.

Proposición 4.1: Consideremos $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y k la forma de Killing Sea $\sigma \in H_m$ y $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\bar{i} \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{g}_{\bar{i}}$ la descomposición inducida.
Entonces

i) $k(\mathfrak{g}_{\bar{i}}, \mathfrak{g}_{\bar{j}}) = 0$ para $\bar{i},\ \bar{j} \in \mathbb{Z}_m$, con $\bar{i} + \bar{j} \neq 0$.

ii) Para cada $x \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}$, existe $y \in \mathfrak{g}_{-\bar{i}}$ tal que $k(x, y) \neq 0$. En particular la restricción de k a $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \times \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ es no degenerada

Demostración.

i) Como σ es un automorfismo de orden m, tenemos que es *semisimple* es decir diagonalizable y cada uno de sus valores propios es una $m - raíz$ de la unidad. Sean ϵ una raíz primitiva de la unidad, $x \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}$ y $y \in \mathfrak{g}_{\bar{j}}$ con $\bar{i} + \bar{j} \neq \bar{0}$, por la invariancia de k (**Proposición 1.1**) bajo σ tenemos lo siguiente: $k(x, y) = k(\sigma(x), \sigma(y)) = k(\epsilon^i x, \epsilon^j y) = \epsilon^{i+j} k(x, y)$.
Como $\bar{i} + \bar{j} \neq 0$ tenemos que $\epsilon^{i+j} \neq 1$. Por lo tanto $k(x, y) = 0$.

ii) Como k es no degenerada, puesto que $\mathfrak{g}$ es semisimple tenemos que para $X_{\bar{i}} \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}$, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $k(X_i, Y) \neq 0$. Pero como $Y = \sum_{i=1}^{m} y_{\bar{i}}$, lo siguiente se cumple
$k(X_{\bar{i}}, Y) = k(X_{\bar{i}}, \sum_{i=1}^{m} y_j) = \sum_{j=1}^{m} k(X_{\bar{i}}, y_j) \neq 0$. Ahora el inciso *i)* implica que $k(X_{\bar{i}}, y_{-\bar{i}}) \neq 0$. En particular, la forma de Killing es no degenerada en $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \times \mathfrak{g}_{\bar{0}}$

Proposición 4.2: Sea $\sigma \in H_m$. Entonces existe una forma real compacta $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ invariante bajo σ.

Demostración :

La demostración de esta proposición esta basada en la demostración del teorema **10**; y se usa la proposición (4.1) ([3], capítulo X, lema 5.2 pagina 491). ■

Para $\sigma \in H_m$, es fácil ver que tenemos una $\mathbb{Z}_m - graduación$ sobre $\mathfrak{g}$, ver (4.1). Para una forma real compacta $\mathfrak{u}$ como en la proposición 4 2 (i. e., invariante bajo σ), se tiene $\mathfrak{u} = \bigoplus_{\bar{i} \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{u}_{\bar{i}}$, donde $\mathfrak{u}_{\bar{i}}$, cumple que $\mathfrak{u}_{\bar{i}} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_{\bar{i}}$ y $\mathfrak{g}_{\bar{i}} = (\mathfrak{u}_i)^{\mathbb{C}}$ Usando **el teorema 1** tenemos las siguientes descomposiciones directas en ideales. El primer sumando es semisimple y el segundo abeliano es decir

$$\mathfrak{u}_{\bar 0} = [\mathfrak{u}_{\bar 0}, \mathfrak{u}_{\bar 0}] \oplus Z_{\mathfrak{u}_{\bar 0}} \qquad\qquad \mathfrak{g}_{\bar 0} = [\mathfrak{g}_{\bar 0}, \mathfrak{g}_{\bar 0}] \oplus Z_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$$

(las letras $Z_{\mathfrak{u}_{\bar 0}}, Z_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$ denotan los centro de $\mathfrak{u}_{\bar 0}$ y $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ respectivamente).

Tomando una subálgebra maximal abeliana $\mathfrak{t}'_{\bar 0}$ de $[\mathfrak{u}_{\bar 0}, \mathfrak{u}_{\bar 0}]$, el álgebra $\mathfrak{t}_{\bar 0} = \mathfrak{t}'_{\bar 0} + Z_{\mathfrak{u}_{\bar 0}}$ es maximal abeliana en $\mathfrak{u}_{\bar 0}$ y su complejificación $\mathfrak{h}_{\bar 0} = (\mathfrak{t}_{\bar 0})^{\mathbb{C}}$ es una subálgebra de Cartán de $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ Con esto obtenemos la siguiente proposición :

Proposición 4.3: Sea $\mathfrak{h}$ el *centralizador de* $\mathfrak{h}_{\bar 0}$ es decir,

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\bar 0}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0, \forall h \in \mathfrak{h}_{\bar 0}\} = \mathfrak{h}$$

entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de *Cartán* de $\mathfrak{g}$. Además tenemos la descomposiciòn $\mathfrak{h} = \bigoplus_{\bar i \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{h}_{\bar i}$ con $\mathfrak{h}_{\bar i} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\bar i}$.

Demostración :

Para la primera parte ver ([3], lema 5.3 pg 492). Para la segunda, notemos que $\mathfrak{h}$ es invariante bajo σ. ■

Definición 4.1.2: Fijemos $\sigma \in H_m$. Luego consideramos $\mathfrak{h}_0$ y $\mathfrak{h}$ subálgebras de Cartán de $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}$. construida en la proposición 4.3. Entonces $\forall \alpha \in \mathfrak{h}_0^*$ y $\bar i \in \mathbb{Z}_m$, asociamos a la pareja $\overline{\alpha} = (\alpha, \bar i)$ el siguiente espacio vectorial:

$$\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}} = \mathfrak{g}_{\bar i}^{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g}_{\bar i} \mid [H, x] = \alpha(H)x, \ \forall\ H \in \mathfrak{h}_0\}.$$

Diremos que $\overline{\alpha}$ es una *raíz generalizada* si $\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}} \neq \{0\}$.

Denotaremos $\overline{R} = \{(\alpha, \bar i) \in \mathfrak{h}_0^* \times \mathbb{Z}_m \mid \mathfrak{g}_{\bar i}^{\alpha} \neq \{0\}\}$ al conjunto de *raices generalizadas* y denotaremos por $\overline{\Delta}$ al conjunto de raices distintas de la raíz $(0,0)$; es decir que $\overline{\Delta} = \overline{R} - \{(0,0)\}$. Definimos además el conjunto

$$\widehat{\Delta} = \{(\alpha, \bar i) \in \overline{R} \mid \alpha \neq 0\}$$

y denotaremos por $\overline{\Delta}^0$ al conjunto de raíces generalizadas cuya primera entrada sea igual a cero. es decir que:

$$\overline{\Delta}^0 = \{(\alpha, \bar i) \in \overline{R} \mid \alpha = 0\}$$

Gracias a estas definiciones podemos descomponer a $\mathfrak{g}$ de la siguiente forma

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\overline{\alpha} \in \overline{R}} \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}} = \mathfrak{h}_{\bar 0} + \bigoplus_{\overline{\alpha} \in \overline{\Delta}} \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}} = \mathfrak{h} + \bigoplus_{\overline{\alpha} \in \widehat{\Delta}} \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}. \tag{4.3}$$

donde resulta que $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}^{(0,0)}$.

Por medio de la identidad de Jacobi nosotros obtenemos facilmente la relación

$$\left[\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\overline{\beta}}\right] \subset \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}} \tag{4.4}$$

para un par de raíces generalizadas $\overline{\alpha} = (\alpha, \overline{i})$, $\overline{\beta} = (\beta, \overline{j})$. Esta relación es clara, puesto que por (4.1) tenemos $\left[\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\overline{\beta}}\right] \subset \mathfrak{g}_{\overline{i}+\overline{j}}$ y la identidad de Jacobi aplicada a h, x, y en $\mathfrak{h}_{\overline{0}}, \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\overline{\beta}}$ respectivamente, implica lo siguiente

$$\begin{aligned}[h,[x,y]] &= [[h,x],y] + [x,[h,y]] = \alpha(h)[x,y] + \beta(h)[x,y] \\ &= (\alpha+\beta)(h)[x,y].\end{aligned}$$

lo cual prueba la condición (4.4).

Por otro lado, notemos que una consecuencia de (4.3) es la siguiente. Sí $\mathfrak{g}$ es semisimple y $X_0 \in \mathfrak{h}_0$ entonces se cumple:

$$si\ \alpha(X_0) = 0\ para\ cada\ \overline{\alpha} \in \overline{\Delta},\ entonces\ X_0 = 0 \tag{4.5}$$

Proposición 4.4: Sean $\overline{\alpha} = (\alpha, \overline{i})$, $\overline{\beta} = (\beta, \overline{j})$ raices generalizadas en $\widehat{\Delta}$, entonces.

1) $dim\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}} = 1$,

2) La restricción de k a $\mathfrak{h}_{\overline{0}} \times \mathfrak{h}_{\overline{0}}$ es no degenerada. Así para cada $\beta \in \mathfrak{h}_{\overline{0}}^*$ tenemos que existe un único elemento $t_\alpha \in \mathfrak{h}_{\overline{0}}$ tal que $k(x, t_\alpha) = \alpha(x)$, para toda $x \in \mathfrak{h}_{\overline{0}}$.

3) Sean $\overline{\alpha} = (\alpha, \overline{i}) \in \widehat{\Delta}$ y $\overline{\beta} = (\beta, \overline{j}) \in \overline{R}$, entonces:

$i)$ $-\overline{\alpha} = (-\alpha, -\overline{i}) \in \widehat{\Delta}$ y $\left[\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}, \mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}}\right] = \mathbb{C}t_\alpha$, con $\alpha(t_\alpha) \neq 0$.

$ii)$ $\mathbb{R}\overline{\alpha} \cap \overline{R} = \{\overline{\alpha}, 0, -\overline{\alpha}\}$.

Luego podemos definir el siguiente producto:

$$\forall\ \alpha, \beta \in \mathfrak{h}_{\overline{0}}^*,\ \langle \beta, \alpha \rangle := \tfrac{2k(\beta,\alpha)}{k(\alpha,\alpha)}$$

$iii)$ Existe un único par p, $q \in \mathbb{Z}$ con la propiedad $-\langle \beta, \alpha \rangle = p + q$, tales que

$$\overline{\beta} + n\overline{\alpha} \in \overline{R} \Longleftrightarrow p \leq n \leq q$$

iv) Si $\overline{\beta}$ y $\overline{\beta}+\overline{\alpha}\in\overline{\Delta}$ entonces existe $x\in\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}$, $y\in\mathfrak{g}^{\overline{\beta}}$ tales que $[x,y]\neq 0$.

En particular, $[\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}},\mathfrak{g}^{\overline{\beta}}]=\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}$ si $\overline{\beta}+\overline{\alpha}\in\widehat{\Delta}$.

4) Si $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}=\sum_{\overline{\alpha}\in\widehat{\Delta}}\mathbf{R}t_{\alpha}$, implica $\mathfrak{h}_{\overline{0}}=\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}+i\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$. Además $k\mid_{\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}\times\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}}$ es real positiva y no degenerada.

Demostración :

Mostremos primero, que si $\overline{\alpha}=(\alpha,\overline{i}),\overline{\beta}=(\beta,\overline{j})\in\widehat{\Delta}$ tales que $\overline{\alpha}+\overline{\beta}\neq(0,0)$, entonces $\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}$ y $\mathfrak{g}^{\overline{\beta}}$ son ortogonales. Tenemos dos casos, $\overline{i}+\overline{j}\neq 0$ ó $\overline{i}+\overline{j}=0$, con $\alpha+\beta\neq 0$ en ambos casos. La afirmación es claramente verdadera en el primer caso puesto que $\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}$ y $\mathfrak{g}^{\overline{\beta}}$ están contenidos en $\mathfrak{g}_{\overline{i}}$ y $\mathfrak{g}_{\overline{j}}$ respectivamente, podemos utilizar proposición **4.1** para concluir que la afirmación es verdadera. En el caso dos tomemos cualquier $x\in\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}$ y $y\in\mathfrak{g}^{\overline{\beta}}$. Entonces, por proposición **1.1** para h,x,y en $\mathfrak{h}_{\overline{0}},\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}},\mathfrak{g}^{\overline{\beta}}$ respectivamente, se tiene la siguiente igualdad :

$$k\left([h,x],y\right)+k\left(x,[h,y]\right)=0$$

Luego

$$0=\alpha(h)k\left(x,y\right)+\beta\left(h\right)k\left(x,y\right)=\left(\alpha+\beta\right)(h)k\left(x,y\right),$$

que con la hipótesis $\alpha+\beta\neq 0$, implica que

$$k\left(x,y\right)=0. \tag{4.6}$$

Sabemos del resultado clásico (ver [5]) que $k\mid_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$es no degenerada.

Usando lo antes mostrado podemos dar la prueba del inciso (2). Veamos que la forma de Killing es no degenerada en $\mathfrak{h}_{\overline{0}}\times\mathfrak{h}_{\overline{0}}$. Tomamos $0\neq x\in\mathfrak{h}_{\overline{0}}\subset\mathfrak{g}_{\overline{0}}$. Entonces existe $Y\in\mathfrak{h}$ con $k\left(x,Y\right)\neq 0$, puesto que k es no degenerada en $\mathfrak{h}$. Por la proposición 4.3 tenemos la siguiente dscomposición $Y=\sum_{i\in Z_m}y_i$ y por la proposición 4 1 obtenemos $k\left(x,y_0\right)=k\left(x,Y\right)\neq 0$. Por lo tanto k es no degenerada en $\mathfrak{h}_{\overline{0}}$, como k es no degenerada. Podemos inducir un isomorfismo del dual $\mathfrak{h}_{\overline{0}}^*$ a $\mathfrak{h}_{\overline{0}}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\xi:\mathfrak{h}_{\overline{0}}^*&\longrightarrow\mathfrak{h}_{\overline{0}}\\ \alpha&\longmapsto t_\alpha\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde t_α esta determinado por la condición $k(x,t_\alpha)=\alpha\left(x\right)$ para toda $x\in\mathfrak{h}_{\overline{0}}$; (ver [4], Pag. 288. Teo 6). Además esto define un producto punto en $\mathfrak{h}_{\overline{0}}^*$, que denotamos también por k, dado por $k(\alpha,\beta):=k(t_\alpha,t_\beta)$.

Para probar (3) (i) tomemos $\overline{\alpha} = (\alpha, \bar{i}) \in \widehat{\Delta}$. Sí $\mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}}$ fuera $\{0\}$ entonces cada $X \in \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}$ tendría que satisfacer que $k(X,Y) = 0$ para toda $Y \in \mathfrak{g}$; esto por (4.6). Pero esto resulta una contradicción puesto que $\mathfrak{g}$ es semisimple. Por lo tanto $\mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}} \neq 0$ y $-\overline{\alpha} = (-\alpha, -\bar{i})$ es una raíz generalizada.

Para probar que $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}}] = \mathbb{C}t_{\alpha}$, consideremos lo siguiente. Sean H, $X_{\overline{\alpha}}$, $X_{-\overline{\alpha}}$ elementos arbitrarios en $\mathfrak{h}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}, \mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}}$ respectivamente. Entonces $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}}] \subset \mathfrak{h}_{\bar{0}}$ y lo siguiente se cumple :

$k([X_{\overline{\alpha}}, X_{-\overline{\alpha}}], H) = k(X_{\overline{\alpha}}, [X_{-\overline{\alpha}}, H,]) = k(X_{\overline{\alpha}}, \alpha(H) X_{-\overline{\alpha}}) = \alpha(H) k(X_{\overline{\alpha}}, X_{-\overline{\alpha}})$.

Ahora escogemos $X_{\overline{\alpha}}, X_{-\alpha}$ tal que $k(X_{\overline{\alpha}}, X_{-\overline{\alpha}}) \neq 0$. Entonces usando (4.7) concluimos

$$k\left(\frac{[X_{\overline{\alpha}}, X_{-\alpha}]}{k(X_{\overline{\alpha}}, X_{-\overline{\alpha}})}, H\right) = \alpha(H) = k(H, t_{\overline{\alpha}}) .$$

Otra vez por (4.7)

$$[X_{\overline{\alpha}}, X_{-\overline{\alpha}}] = k(X_{\overline{\alpha}}, X_{-\overline{\alpha}})\, t_{\overline{\alpha}} \tag{4.8}$$

para $t_{\alpha} \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$, en el isomorfismo ξ. Con lo cúal se prueba parte de 3(i). Observemos que $k\mid_{\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}} \times \mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}}}$ es una forma bilineal no degenerada. Luego entonces podemos encontrar elementos $E_{\overline{\alpha}}, F_{\overline{\alpha}}$ en $\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}}$ respectivamente, tales que $k(E_{\overline{\alpha}}, F_{\overline{\alpha}}) = 1$. Por (4.8) obtenemos

$$[E_{\overline{\alpha}}, F_{\overline{\alpha}}] = t_{\overline{\alpha}} \tag{4.9}$$

Dado $\overline{\beta} = (\beta, \bar{j})$ otra raíz generalizada, construimos el espacio vectorial $\mathfrak{g}^{\dagger} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\overline{\beta}+n\overline{\alpha}}$. Éste es no cero de dimensión finita. Por (4.4) $\mathfrak{g}^{\dagger}$ es invariante bajo $adt_{\alpha}, adE_{\overline{\alpha}}, adF_{\overline{\alpha}}$. Tenemos que

$$0 = Tr_{\mathfrak{g}^{\dagger}} adt_{\overline{\alpha}} = Tr_{\mathfrak{g}^{\dagger}}(adE_{\overline{\alpha}} adF_{\overline{\alpha}} - adF_{\overline{\alpha}} adE_{\overline{\alpha}}) = 0$$

Calculamos,

$$0 = Tr_{\mathfrak{g}^{\dagger}} adt_{\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\beta(t_{\alpha}) + n\alpha(t_{\alpha})) \dim(\mathfrak{g}^{\beta + n\overline{\alpha}}). \tag{4.10}$$

Si $\alpha(t_{\alpha}) = 0$ entonces $\beta(t_{\alpha})(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dim(\mathfrak{g}^{\beta+n\overline{\alpha}})) = 0$. Lo que implica que para toda raíz generalizada $\overline{\beta}$, $\beta(t_{\alpha}) = 0$. Pero por un lado (4.5) implica que $t_{\alpha} = 0$ y por otro tenemos el hecho que $\alpha \neq 0$. Esto es una a una contradicción con el isomorfismo ξ. Con lo que concluimos la demostración de 3(i).

Usando 3(i) y el isomorfismo (4.7) tenemos la siguiente definición:

$$\forall\ \alpha,\beta \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^{*},\ \langle \beta,\alpha\rangle := \frac{2k(\beta,\alpha)}{k(\alpha,\alpha)}.$$

Ahora consideremos elementos $X_{\overline{\alpha}} \neq 0$ en $\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}$ y $Y_{\overline{\alpha}} \in \mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}}$ tales que

$$k(X_{\overline{\alpha}}, Y_{\overline{\alpha}}) = \frac{2}{k(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

y se define $H_{\overline{\alpha}} = \frac{2}{k(t_\alpha,t_\alpha)}.t_\alpha$. Luego podemos formar $S_{\overline{\alpha}} = \mathbb{C}X_{\overline{\alpha}} + \mathbb{C}Y_{\overline{\alpha}} + \mathbb{C}H_{\overline{\alpha}}$, que por construcción es un álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Esto se sigue de las siguientes relaciones (ver, capítulo 2, sección 1.9):

$$[H_{\overline{\alpha}}, X_{\overline{\alpha}}] = 2X_{\overline{\alpha}},\ [H_{\overline{\alpha}}, X_{\overline{\alpha}}] = -2Y_{\overline{\alpha}},\ [X_{\overline{\alpha}}, Y_{\overline{\alpha}}] = H_{\overline{\alpha}}$$

Demostremos 1 y 3 (ii). Definimos $M = \mathfrak{h}_{\bar{0}} + \bigoplus_{c\in\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{c(\alpha,\bar{i})}$, que como sabemos es un espacio vectorial de dimensión finita. Observemos que M es un $S_{\overline{\alpha}}-$*submódulo* de $\mathfrak{g}$ y $S_{\overline{\alpha}}$ es un *submódulo* irreducible de M. Por otro lado descomponemos a $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ de la siguiente forma:

$$\mathfrak{h}_{\bar{0}} = \ker\alpha + \mathbb{C}H_{\overline{\alpha}}.$$

Además por el **Teorema de Clasificación** del capítulo **1** sección **1,9.2** tenemos que M se descompone en una suma de irreducibles con valores propios enteros. Para $Y \in \mathfrak{g}^{c(\alpha,\bar{i})}$ tenemos que $[H_{\overline{\alpha}}, Y] = c\alpha(H_{\overline{\alpha}})Y = c(\frac{2}{k(t_\alpha,t_\alpha)}.\alpha(t_\alpha))Y = 2cY$. Por esta razón tenemos que $\mathfrak{g}^{c(\alpha,\bar{i})} = 0$, a menos que $2c \in \mathbb{Z}$. También podemos deducir, que si Y está en algún submódulo irreducible de M, con respecto a $S_{\overline{\alpha}}$, tal que:

$$[H_{\overline{\alpha}}, Y] = 0.$$

entonces podemos ver que $Y \in \ker\alpha + S_{\overline{\alpha}}$, submódulo de valores propios $\{-2,\ 0,\ 2\}$ con respecto a $H_{\overline{\alpha}}$. Entonces, $2\overline{\alpha} \in \overline{R}$ implica que existen $Y \neq 0$ tal que $[H_\alpha, Y] = 4Y$ y un submodulo irreducible de M que contiene a Y y cumple con:

$$0 \neq V = ... + V_4 + V_2 + V_0 + V_{-2} + V_{-4} + ...$$

Como $V_4 \neq 0$ y V irreducible, V no puede intersectar a $\ker\alpha + S_{\overline{\alpha}}$. Pero $0 \neq V_0 \subset \ker\alpha + S_{\overline{\alpha}}$ es una contradicción. Por esta razón $2\overline{\alpha}$ no es una raíz. Similarmente $\frac{1}{2}\overline{\alpha}$ no es raíz. (si lo fuera entonces $2(\frac{1}{2}\overline{\alpha})$ sería raíz). Esto implica que tampoco existe $0 \neq Y \in M$ tal que $[H_\alpha, Y] = Y$.

Por lo tanto $M = \mathfrak{h}_0 + S_{\overline{\alpha}}$ como consecuencia del **Teorema de Clasificación** del capítulo **1.** Concluimos que $dim\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}} = dim\mathfrak{g}^{-\overline{\alpha}} = 1$, con lo cuál queda demostrado 1) y 3(ii).

Demostremos 3 iii). Para $\overline{\alpha} \in \widehat{\Delta}$ hemos visto como existen elementos H_α, X_α y Y_α tales que $S_{\overline{\alpha}} = \mathbb{C}X_{\overline{\alpha}} + \mathbb{C}Y_{\overline{\alpha}} + \mathbb{C}H_{\overline{\alpha}}$ es un álgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Sean $\overline{\alpha} \in \widehat{\Delta}$ y $\overline{\beta} \in R$. Consideremos P el conjunto de parejas (r,s) de enteros tales que para todo entero n que cumple $r \leq n \leq s$, $\overline{\beta} + n\overline{\alpha}$ es una raíz generalizada. La pareja $(0,0)$ está en P. Dado $(r,s) \in P$ definimos una $\overline{\alpha} - cuerda$ por $\overline{\beta}$ como $\{\overline{\beta} + n\overline{\alpha} \mid r \leq n \leq s\}$. Llamamos una $\overline{\alpha} - cuerda\ maximal$ por $\overline{\beta}$ con $(r,s) \in P$, cuando $\overline{\beta} + n\overline{\alpha}$ no es raíz para $n = r - 1$ ni para $n = s + 1$.

Sea $(r,s) \in P$, tal que la $\overline{\alpha} - cuerda$ por $\overline{\beta}$ es *maximal*. Sea $\mathfrak{g}^\dagger = \sum_{n=r}^{s} \mathfrak{g}^{\overline{\beta}+n\overline{\alpha}}$. Entonces $\mathfrak{g}^\dagger$ es una representación de $S_{\overline{\alpha}}$; es decir, $\mathfrak{g}^\dagger$ es invariante bajo $adH_{\bar{\alpha}}, adX_{\bar{\alpha}}, adY_{\bar{\alpha}}$. Como en ( ) es fácil ver que $tr_{\mathfrak{g}^\dagger} adH_\alpha = 0$; Por lo que obtenemos las siguientes igualdades:

$$0 = tr_{\mathfrak{g}^\dagger} adH_{\bar{\alpha}} = \sum_{n=r}^{s} (\beta + n\alpha)H_{\bar{\alpha}} = \sum_{n=r}^{s} \beta(H_{\bar{\alpha}}) + 2\sum_{n=r}^{s} n$$
$$= (s+1-r)\beta(H_{\bar{\alpha}}) + (s+1-r)(s+r)$$

Ya que $r \neq s+1$, al suponer que tenemos una cuerda maximal, concluimos que $\langle\beta,\alpha\rangle = \beta(H_{\bar{\alpha}}) = -(s+r)$. Ahora afirmamos que hay sólo una pareja (r,s) en P que nos da una $\overline{\alpha} - cuerda\ maximal$ por $\overline{\beta}$. Para demostrar esto definimos la siguiente pareja (r_0,s_0) en P

$$r_0 = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid \forall\, n \in \mathbb{Z},\ z \leq n \leq 0,\ \overline{\beta} + n\overline{\alpha} \in \overline{R}\}$$
$$s_0 = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid \forall\, n \in \mathbb{Z},\ 0 \leq n \leq z,\ \overline{\beta} + n\overline{\alpha} \in \overline{R}\}$$

Como el conjunto de raíces $\overline{R}$ es finito y la pareja $(0,0)$ está en P, la pareja (r_0,s_0) está en P, nos da una cuerda maximal y además $\langle\beta,\alpha\rangle = -(s_0 + r_0)$. Si (r_1,s_1) es una pareja en P que nos da una cuerda maximal, entonces $r_1 + s_1 = s_0 + r_0 = -\langle\beta,\alpha\rangle$ y $r_1 \leq n \leq s_1$ implica que $\overline{\beta} + n\overline{\alpha} \in \overline{R}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $s_1 \leq s_0$. Entonces $r_0 \leq s_1 \leq s_0$, en caso contrario $s_1 < r_0$, que a su vez implicaría $r_1 < s_0$ y se tendría $r_1 + s_1 < s_0 + r_0$. Como no tenemos raíz para $r_0 - 1$ ni para $s_1 + 1$, se sigue que $r_1 = r_0$ y $s_1 = s_0$. Esto demuestra 3 iii).

Para demostrar 3) (iv) usamos que $\left[\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\overline{\beta}}\right] \subset \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}$ por (4.4) Si suponemos que $\left[\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\overline{\beta}}\right] = 0$, entonces para $(r,s) \in P$ tenemos una cuerda maximal (satisface $-\beta(H_{\bar{\alpha}}) = s+r$) y además $\mathfrak{g}_1^\dagger = \sum_{n=p}^{0} \mathfrak{g}^{\overline{\beta}+n\overline{\alpha}}$ es un subespacio $S_{\overline{\alpha}}$ invariante

del espacio análizado en $3iii$), $\mathfrak{g}^\dagger = \sum_{n=r}^{s} \mathfrak{g}^{\overline{\beta}+n\overline{\alpha}}$. De nuevo como en (4.10)

$$0 = Tr_{\mathfrak{l}}adH_{\overline{\alpha}} = (1-r)\beta(H_{\overline{\alpha}}) + r(1-r)$$

es decir, que: $r = \beta(H_{\bar{\alpha}}) = \langle\beta, \alpha\rangle$. Como $\overline{\beta}$ y $\overline{\beta} + \overline{\alpha}$ son raices, $s \geq 1 > 0 \geq r$. Luego $s + r = -\beta(H_\alpha) = r$ es una contradicción. Así que $o \neq \left[\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\overline{\beta}}\right] \subset \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}$. Cuando $\overline{\beta} + \overline{\alpha} \in \widehat{\Delta}$, $\dim \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}} = 1$ y entonces $\left[\mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}, \mathfrak{g}^{\overline{\beta}}\right] = \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}$.

Por último, demostraremos 4). Por definición,

$$k(H, H') = Tr(adH \circ adH') = \sum_{\overline{\beta} \in \overline{R}} \beta(H)\beta(H') \tag{4.11}$$

por 3)(iv) nosotros sabemos que para $\overline{\alpha} = (\alpha, i)$ y $\overline{\beta} = (\beta, j)$ raices generalizadas, con $\alpha \neq 0$, existen enteros $p_{\alpha,\beta}, q_{\alpha,\beta}$ tales que

$$2\beta(t_\alpha) = -\alpha(t_\alpha)\left(p_{\alpha,\beta} + q_{\alpha,\beta}\right)$$

y usando (4.7) y (4.11) tenemos, que:

$$\alpha(t_\alpha) = k(t_\alpha, t_\alpha) = \sum_{\overline{\beta} \in \overline{R}} \alpha(t_\alpha)^2 \left(p_{\alpha,\beta} + q_{\alpha,\beta}\right)^2 \tag{4.12}$$

Esto muestra que $\alpha(t_\alpha)$ es un número real positivo, ya que $\alpha(t_\alpha) \neq 0$. Consecuentemente, para $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ raíces $\beta(t_\alpha)$ es un número real . Usando (4.5) y (4.12) demostramos que $k\mid_{\mathfrak{h}_\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_\mathbb{R}}$ es una forma real y estrictamente positiva. Además, lo anterior demuestra que $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \cap i\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \{0\}$. Probemos entonces que los espacios $\mathfrak{h}_{\overline{0}}$ y $\sum_{\overline{\alpha} \in \widehat{\Delta}} \mathbb{C}t_\alpha$ son iguales. Si este hecho no se cumpliera, entonces existe una funcional lineal λ sobre $\mathfrak{h}_{\overline{0}}$ que no es identicamente cero pero se anula en $\sum_{\overline{\alpha} \in \widehat{\Delta}} Ct_\alpha$. Tenemos además, que por (4.7) existe un único elemento $t_\lambda \in \mathfrak{h}$ tal que $K(H, t_\lambda) = \lambda(H)$ para toda $H \in \mathfrak{h}_{\overline{0}}$. En particular, $\lambda(t_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in \widehat{\widehat{\Delta}}$, por (4.5) y (4.11) tenemos $t_\alpha = 0$ y $\lambda \equiv 0$. Entonces esta contradicción prueba 4). Con esto queda demostrada la proposición. ∎

4.2 El Álgebra Cubriente.

Denotamos como $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ al conjunto de todos los polinomios de Laurent en x (es decir, todas las sumas $\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} c_j x^j, c_j \in \mathbb{C}$, con sólo un número finito de coeficientes distintos de cero). Consideremos a $\mathfrak{g}$ y a $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ como espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$. Podemos formar el producto tensorial de

$$E = \mathbb{C}[x, x^{-1}] \otimes \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} x^j \mathfrak{g}$$

Este producto tensorial se puede pensar como los polinomios de Laurent con coeficientes en el álgebra $\mathfrak{g}$. Notemos que definiendo el *corchete* como $[x^i Y, x^j Z] = x^{i+j}[X, Z]$, obtenemos un álgebra de Lie.

Definición 4.2.1: Sea $L = L(\mathfrak{g}; \sigma)$ la subálgebra $\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} x^j \mathfrak{g}_{\bar{j}}$ de E. $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ es el *álgebra cubriente* de $\mathfrak{g}$ con respecto de σ. Tenemos un homomorfismo natural definido de la siguiente forma :

$\varphi : L \longrightarrow \mathfrak{g}$

$$x^k Y \longmapsto Y \tag{4.13}$$

Si pensamos a los elementos del álgebra cubriente como polinomios con coeficientes en $\mathfrak{g}$, el mapeo φ estaría dado por : $\varphi(P(x)) = P(1)$, donde $P(x) = \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} x^k Y_k$ con $Y_k \in \mathfrak{g}$. El mapeo φ es llamado el *homomorfismo cubriente.*

Lo que sigue es definir el conjunto de raíces cubriente de $\overline{R}$ que denotaremos $\widetilde{R}$, así como el subespacio asociado a cada una de las raíces de $\widetilde{R}$. Para esto daremos las siguientes definiciones:

Definición 4.2.2: Sea $L(\mathfrak{g}; \sigma) = \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} L_j$ donde $L_j = x^j \mathfrak{g}_{\bar{j}}$. Identificaremos a L_0 con $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ y definiremos para cada $\alpha \in \mathfrak{h}_0^*$ y $j \in \mathbb{Z}$, el par $\tilde{\alpha} = (\alpha, j)$, la cual será una *raíz cubriente* sí el subespacio $L^{\tilde{\alpha}} = \{x \in L_j \mid [H, x] = \alpha(H)x$ para toda $H \in \mathfrak{h}\}$ es distinto de cero. Denotaremos por $\widetilde{R} = \{(\alpha, i) \in \mathfrak{h}_0^* \times \mathbb{Z} \mid L^{\tilde{\alpha}} \neq \{0\}\}$ al conjunto de raíces cubrientes. Análogamente al caso de las raices generalizadas, denotamos $\widetilde{\Delta} := \widetilde{R} - \{(0,0)\}$, $\widehat{\widetilde{\Delta}} := \{(\alpha, i) \in \widetilde{R} \mid \alpha \neq 0\}$ y $\widetilde{\Delta}^0 := \{(\alpha, i) \in \widetilde{R} \mid \alpha = 0\}$. Tenemos entonces, que $[L^{\tilde{\alpha}}, L^{\tilde{\beta}}] \subset L^{\tilde{\beta}+\tilde{\alpha}}$ y la descomposición en suma directa $L(\mathfrak{g}, \sigma) = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\tilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}} L^{\tilde{\alpha}}$.

Notemos que si $\tilde{\alpha} = (\alpha, j)$ es una raíz cubriente y $j \equiv j' \,(mod\ m)$, entonces $\alpha' = (\alpha, j')$ es también una raíz cubriente. La transformación

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha, j) \longmapsto (\alpha, \bar{j}) = \overline{\alpha}$$

mapea el conjunto de raíces de $L(\mathfrak{g};\sigma)$ con respecto a $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ en el conjunto de raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$. Tenemos además que $L^{\widetilde{\alpha}} = x^j \mathfrak{g}^{\overline{\alpha}}$. Obtenemos entonces una proposición análoga a la proposición 4.4, para $L^{\widetilde{\alpha}}$ y $\widetilde{\Delta}$.

Proposición 4.5 :

1) Recuerde el isomorfismo lineal $\xi : \underset{\alpha \longmapsto t_\alpha}{\mathfrak{h}_{\bar{0}}^* \longrightarrow \mathfrak{h}_{\bar{0}}}$.

Si $\widetilde{\alpha} = (\alpha, i) \in \widetilde{\Delta}$ entonces

$-\widetilde{\alpha} = (-\alpha, -i) \in \widetilde{\Delta}, \dim L^{\widetilde{\alpha}} = 1, \left[L^{\widetilde{\alpha}}, L^{-\widetilde{\alpha}}\right] = \mathbb{C}t_\alpha$.

2) Sean $\widetilde{\alpha} = (\alpha, i) \in \widetilde{\Delta}$ y $\widetilde{\beta} = (\beta, j) \in \widetilde{R}$,entonces:

i) Existe un único par p,$q \in \mathbb{Z}$ con $-\langle \beta, \alpha \rangle = p + q$ tales que

$$\widetilde{\beta} + n\widetilde{\alpha} \in \widetilde{R} \Longleftrightarrow p \leq n \leq q$$

ii) $\mathbb{R}\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{R} = \{\widetilde{\alpha}, 0, -\widetilde{\alpha}\}$

3) Si $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\beta} + \widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}$ entonces existe $\epsilon_{\widetilde{\alpha}} \in L^{\widetilde{\alpha}}$, $\epsilon_{\widetilde{\beta}} \in L^{\widetilde{\beta}}$ tales que $[\epsilon_{\widetilde{\alpha}}, \epsilon_{\widetilde{\beta}}] \neq 0$. Por otro lado, si además $\widetilde{\beta} + \widetilde{\alpha} \in \widehat{\widetilde{\Delta}}$, se tiene $[L^{\widetilde{\alpha}}, L^{\widetilde{\beta}}] = L^{\widetilde{\beta}+\widetilde{\alpha}}$.

Demostración:

Análoga a la proposición 4.4. ■

Consideremos el siguiente sistema de raíces Δ_0 de $[L_0, L_0]$ con respecto a $\mathfrak{h}_{\bar{0}} \cap [L_0, L_0]$ y Δ_0^+ denota un conjunto de raíces positivas. Si definimos cada $\alpha \in \Delta_0$ idénticamente cero sobre el centro de L_0, podemos considerarla como una función lineal de $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$. Identificaremos α con la raíz $(\alpha, 0)$. El conjunto $\widetilde{\Delta}^+ = \Delta_0^+ \cup \{(\alpha, j) \in \widetilde{\Delta} \mid j > 0\}$ lo llamaremos el conjunto de la raíces positivas en $\widetilde{\Delta}$, determinado por Δ_0^+.Una raíz $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}$ es llamada *simple* sí ésta no es la suma de dos elementos de $\widetilde{\Delta}^+$. Sea $\widetilde{\Pi} = \{\widetilde{\alpha}_0 = (\alpha_0, s_0), \widetilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, s_1), \widetilde{\alpha}_2 = (\alpha_2, s_2), ...\}$ el conjunto de las raíces simples y $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\}$, el conjunto de las primeras componentes de las raíces $\widetilde{\alpha}_i$. En las siguientes proposiciones demostraremos que $\widetilde{\Pi}$ es conjunto finito, llamemos N a la cardinalidad de $\widetilde{\Pi}$.

Lema 4.2.1: Sea $\widetilde{\Delta}^+$ un conjunto de raíces cubrientes positivas. Se tiene:

a) $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}^+ \cup \left(-\widetilde{\Delta}^+\right)$ y $\forall\, \widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}^+$, $\widetilde{\alpha} = \sum_{\widetilde{\alpha}_i \in \widetilde{\pi}} k_i\, \widetilde{\alpha}_i$ con $k_i \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$b)$ Para toda raíz $\widetilde{\alpha} = (\alpha, i) \in \widehat{\widetilde{\Delta}}^{+} = \widetilde{\Delta}^{+} \frown \widehat{\widetilde{\Delta}}$ existen raíces simples $\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, ..\widetilde{\beta}_k \in \widetilde{\Pi} - \widetilde{\Delta}^0$ y $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Delta}^0$ tales que $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}_1 + \widetilde{\beta}_2 + ... + \widetilde{\beta}_k + \widetilde{\gamma}$ y $\forall\ 1 \leq j \leq k\ \widetilde{\beta}_j + \widetilde{\beta}_{j+1} + ... + \widetilde{\beta}_k + \widetilde{\gamma} \in \widehat{\widetilde{\Delta}}^{+}$.

Demostración:

Notamos que el número de $\alpha \in \mathfrak{h}_0^*$ que son la primera coordenada de una raíz es menor o igual que la dimensión de $\mathfrak{g}$. Es claro que una raíz simple en Δ_0^+ es simple en $\widetilde{\Delta}^+$. Si $\{\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, ...\widetilde{\gamma}_s\}$ es el conjunto de raíces simples de Δ_0^+ entonces para cualquier raíz $(\alpha, 0)$ vemos que $a)$ y $b)$ se cumplen. Afirmamos que para $\widetilde{\alpha} = (\alpha, i) \in \widetilde{\Delta}^+$, $i \geqslant 1$ existe una suma $\widetilde{\alpha} = \sum\limits_{\widetilde{\alpha}_i \in \widetilde{\pi}} k_j\ \widetilde{\gamma}_j$ con las $k_j \in \mathbb{Z}_+$. Esto es, $\widetilde{\alpha}$ una raíz simple ó una suma de raices $(\beta, k) + (\rho, l)$ con k, l naturales menores que i. Para ver esto consideremos algunas k_j máximales tales que $\widetilde{\alpha} - \sum k_j \widetilde{\gamma}_j$ es una raíz. Si $\widetilde{\alpha} - \sum k_j \widetilde{\gamma}_j$ es simple, ya está. Si no es simple es es suma de raices positivas $(\beta, k) + (\rho, l)$. Si $k \neq 0$ entonces (ρ, l) es una raíz que es suma con k_j más grandes, lo que es absurdo. Luego, $\widetilde{\alpha} - \sum k_j \widetilde{\gamma}_j$ está en Δ_0^+, y aplicando inducción sobre la segunda coordenada, obtenemos $a)$.

Para demostrar $b)$, demostraremos primero que si $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}^+ - \widetilde{\Delta}^0$ no es simple entonces $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}$ para alguna $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Pi} - \widetilde{\Delta}^0$. Esto es claro, pues si no existiera tal $\widetilde{\beta}$ tendriamos, por la proposición 4 $ii)$, que existen p y q enteros para una cuerda maximal, con $0 = p \leq q$ y $\langle \alpha, \beta \rangle = -(p + q)$; es decir, $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ para toda $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Pi} - \widetilde{\Delta}^0$ Lo cúal implicaria usando $a)$, como siempre se tiene $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ para toda $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}^0$, que $(\alpha, \alpha) \leq 0$; que contradice el hecho que la forma de Killling k es extrictamente positiva en $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Además como $\widetilde{\beta} = (\widetilde{\beta} - \widetilde{\alpha}) + \widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}$ es raíz positiva. Sea $\widetilde{\alpha} = (\alpha, i) \in \widehat{\widetilde{\Delta}}^{+}$. Aplicando lo dicho de manera recurrente existe un número finito de raices simples $\left\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, ..\widetilde{\beta}_h\right\} \subseteq \widetilde{\Pi} - \widetilde{\Delta}^0$ tales que $\left(\left(\left(\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}_1\right) - \widetilde{\beta}_2\right)\ .\ - \widetilde{\beta}_j\right)$ es una raíz positiva para todo $j \leq h - 1$ y una raíz en $\widetilde{\Delta}^0$ para $j = h$. Lo que demuestra $b)$ ■

Veamos más propiedades sobre los conjuntos $\widetilde{\Pi}$ y $\widetilde{\Delta}^0$.

Proposición 4.6:

1) $\widetilde{\Pi} \subseteq \widehat{\widetilde{\Delta}}$

2) Π es linealmente dependiente y genera a $\mathfrak{h}_0^*$

3) $\forall\ i \neq j$, $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \in -\mathbb{Z}_+$.

Demostración:

Usando el Lema anterior y la Proposición 4.5 obtenemos que $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ está generado por $L^{-\widetilde{\beta}}, L^{\widetilde{\beta}}, L^{\widetilde{\gamma}}$ con $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Pi} - \widetilde{\Delta}^0$ $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Delta}^0$. Este hecho lo podemos aplicar en lo que sigue. Afirmamos que si $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}^0$ entonces existe $\tilde{\beta} \in \tilde{\Pi} - \tilde{\Delta}^0$ tal que $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}$. En caso contrario, para toda raíz $\tilde{\beta} \in \tilde{\Pi} - \tilde{\Delta}^0$, $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$ no es raíz en $\tilde{\Delta}$ y $\langle \alpha, \beta \rangle = -(p+q) = 0$ para el par de enteros p y q de la Proposición 4.4 para $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$. Esto implicaría que para toda $\tilde{\beta} \in \tilde{\Pi} - \tilde{\Delta}^0$ $\tilde{\alpha} \pm \tilde{\beta} \notin \tilde{\Delta}$ y por lo tanto para toda $\tilde{\beta} \in \tilde{\Pi} - \tilde{\Delta}^0$ $\left[L^{\tilde{\alpha}}, L^{\pm\tilde{\beta}}\right] = 0$. Ya que siempre se tiene $\left[L^{\tilde{\alpha}}, L^{\tilde{\gamma}}\right] = 0$ para $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Delta}^0$. se tendría $\left[L^{\tilde{\alpha}}, L(\mathfrak{g}, \sigma)\right] = 0$. Esto último no puede suceder, pues mediante la proyección del *homomorfismo cubriente*, $\left[\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}, \mathfrak{g}\right] = 0$ contradice que $\mathfrak{g}$ es simple.

Vamos a demostrar 1). Si $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Pi} \cap \tilde{\Delta}^0$entonces $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \notin \tilde{\Delta} \cup \{\tilde{0}\}$ para toda $\tilde{\beta} \in \tilde{\Pi} - \tilde{\Delta}^0$, ya que $\tilde{\alpha}$ es simple (si $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$ es una raíz positiva, $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) + \tilde{\beta}$ y si $\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}$ es una raíz positiva, $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) + \tilde{\alpha}$). Como $0 = \langle \alpha, \beta \rangle = -(p+q)$; para unicos p, q (según proposición 4.5), entonces $p = q = 0$. . Se tiene que para toda $\tilde{\beta} \in \tilde{\Pi} - \tilde{\Delta}^0$, $\tilde{\alpha} \pm \tilde{\beta} \notin \tilde{\Delta}$. Como antes, ésto nos llevaría a que $\mathfrak{g}$ no es simple lo cual seria una contradicción. Por lo tanto, $\tilde{\Pi} \cap \tilde{\Delta}^0$ es vacío

Ahora demostraremos (2). Como $(0, m) \in \tilde{\Delta}^+$, tenemos por el inciso (a) del lema anterior que $(0, m) = \sum\limits_{\tilde{\alpha}_i \in \tilde{\pi}} k_i \, \tilde{\alpha}_i = \sum\limits_{\tilde{\alpha}_i \in \tilde{\pi}} k_i \, (\alpha_i, s_i)$. Es decir, que $0 = \sum\limits_{\alpha_i \in \pi} k_i \, \alpha_i$ y $m = \sum\limits_{k_i \in \mathbf{Z}} k_i s_i$ con algunas $k_i \neq 0$. Asi que los vectores $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...$ son linealmente dependientes. Ademas por la descomposición $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 ...\}$ generan a $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$. Concideremos $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j \in \tilde{\Pi}$ con $i \neq j$. Como $\tilde{\alpha}_i = (\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_j) + \tilde{\alpha}_j$, $(\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_j)$ no puede ser raíz positiva. Intercambiando los indices vemos que $\tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_i$ no puede ser tanpoco raíz positiva. Asi que $\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_j$ no puede ser raíz. $\langle \alpha, \beta \rangle = -(p+q)$ con $0 \leq q$.o que se afirma en (3) ■

De el inciso (3) de la proposición anterior tenemos que algulo entre dos elementos en Π es mayor o igual que $90°$ y menor que $180°$. Es claro que Π tiene que ser un conjunto finito, digamos de cardinalidad N; ya que Π genera el espacio de dimensión finita $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$.

Observemos que para $0 \leq i \leq N-1$ podemos encontrar, mediante el isomorfismo lineal $\xi : \underset{\alpha \longmapsto t_\alpha}{\mathfrak{h}_{\bar{0}}^* \longrightarrow \mathfrak{h}_{\bar{0}}}$, $h_i = 2\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle^{-1} t_{\alpha_i}$,y por la proposicion 4.5 inciso (2) tenemos los vectores $e_i \in L^{\tilde{\alpha}_i}$, $f_i \in L^{-\tilde{\alpha}_i}$ tal que $[e_i, f_i] = h_i$ y tenemos las siguientes relaciones:

$$[h_i, h_j] = 0, [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, [h_i, e_j] = a_{ji} e_j, [h_i, f_j] = -a_{ji} f_j \tag{4 14}$$

La matríz $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N-1}$ es llamada la *matríz de Cartán generalizada* del álgebra de Lie (también llamada *matríz de Cartán generalizada de* $L(\mathfrak{g}; \sigma)$) .Si M denota el grupo abeliano generado por $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{N-1}\}$, la descomposición $L(\mathfrak{g};\sigma) = \bigoplus_{\widetilde{\alpha}\in M} L^{\widetilde{\alpha}}$ es una $M-$*graduación* de $L(\mathfrak{g},\sigma)$ donde $L^{\widetilde{0}} = \mathfrak{h}_{\bar{0}}$, y $L^{\widetilde{\alpha}} = 0$ si $\widetilde{\alpha} \in M - \widetilde{\Delta}$.

Proposición 4.7 :

1) Los elementos e_i, f_i, h_i $(0 \leq i \leq N-1)$ forma un sistema de generadores de $L(\mathfrak{g},\sigma)$

2) El álgebra de Lie $M-$*graduada* $L(\mathfrak{g};\sigma)$ no tiene un ideal I que es $M-$*graduadado* distinto de cero (i.e. $I = \bigoplus_{\widetilde{\alpha}\in M} (I \cap L^{\widetilde{\alpha}})$), para el cual $I \cap \sum_i \mathbb{C}\, e_i = 0$.

3) Si σ es un automorfismo indescomponible (ésto es, $\mathfrak{g}$ no puede descomponerse en la suma directa de *ideales* $\sigma -$ *invariantes*), entonces Π es indescomponible (es decir, Π no puede ser la unión de dos subconjuntos ortogonales distintos del vacío)

Demostración :

1) *Sea* L' la subálgebra de $L = L(\mathfrak{g};\sigma)$ generada por e_i, f_i, h_i $(i = 0...N-1)$. Probemos que $L^{\widetilde{\alpha}} \subset L'$ para $\widetilde{\alpha} \in \widehat{\widetilde{\Delta}}$. Consideremos solamente $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}^{+} - \widetilde{\Delta}^{0}$. Si $\widetilde{\alpha}$ es no simple, tenemos lo siguiente $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\alpha}_i \in \widetilde{\Delta}^{+}$ para alguna $\widetilde{\alpha}_i$ simple Si $\alpha - \alpha_i \neq 0$, podemos expresar por la proposición anterior a $L^{\widetilde{\alpha}}$ como $L^{\widetilde{\alpha}} = [\, e_i, L^{\widetilde{\alpha}-\widetilde{\alpha}_i}]$, si $\alpha - \alpha_i = 0$, se cumple para los enteros que nos dan la $\widetilde{\alpha}_i-$cuerda maximal por $\widetilde{\alpha}$, $p + q = -2$, es decir, pasa que $(\widetilde{\alpha} - \widetilde{\alpha}_i) - \widetilde{\alpha}_i \in \widehat{\widetilde{\Delta}}$. Así obtenemos que $L^{\widetilde{\alpha}} = [\, e_i, [e_i, L^{\widetilde{\alpha}-2\widetilde{\alpha}_i}]]$. Este procedimiento lo hacemos *iteradamente y vemos que* $L^{\widetilde{\alpha}}$ esta generado por e_i. Análogamente si $\widetilde{\alpha} \in \left(-\widetilde{\Delta}^{+}\right) - \widetilde{\Delta}^{0}$, tenemos que $L^{\widetilde{\alpha}}$ esta generado por f_i. Esto prueba que $L^{\widetilde{\alpha}} \subset L'$ para $\widetilde{\alpha} \in \widehat{\Delta} - \widetilde{\Delta}^{0}$. En particular obtenemos $\left[L^{\widetilde{\alpha}}, L'\right] \subset L'$, si $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta} - \widetilde{\Delta}^{0}$. Por otro lado, $\sum_{\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Delta}^{0}} L^{\widetilde{\gamma}}$

es el cubriente de la subálgebra de Cartán $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, por lo tanto es una subálgebra abeliana de L. Si $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}^{0}$, lo *siguiente se cumple*

$$\left[L^{\widetilde{\alpha}}, L'\right] \subseteq \left[L^{\widetilde{\alpha}}, L\right] = 0 + \left[L^{\widetilde{\alpha}}, \mathfrak{h}_{\bar{0}} + \sum_{\widetilde{\beta}\in\widetilde{\Delta}-\widetilde{\Delta}^{0}} L^{\widetilde{\beta}}\right] = 0 + \left[L^{\widetilde{\alpha}}, \sum_{\widetilde{\beta}\in\widetilde{\Delta}-\widetilde{\Delta}^{0}} L^{\widetilde{\beta}}\right],$$

pues

$$\left[L^{\widetilde{\alpha}}, \sum_{\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Delta}^{0}} L^{\widetilde{\gamma}}\right] = 0.$$

Tenemos entonces que

$$\left[L^{\widetilde{\alpha}}, L'\right] \subseteq \left[L^{\widetilde{\alpha}}, \sum_{\widetilde{\beta}\in\widetilde{\Delta}-\widetilde{\Delta}^{0}} L^{\widetilde{\beta}}\right] \subseteq \sum_{\widetilde{\beta}\in\widetilde{\Delta}-\widetilde{\Delta}^{0}} L^{\widetilde{\beta}} \subseteq L',$$

es decir, que L' es un ideal de $L(\mathfrak{g};\sigma)$; y de hecho cada uno de los elementos en L' son combinaciones lineales de los variados corchetes de los e_i, h_j, f_k. Por esta razón, $L' = \bigoplus_{\tilde{\alpha}\in M} \left(L^{\tilde{\alpha}} \cap L'\right)$, es decir que L' es un ideal M-graduado.

Definimos ahora la forma bilineal invariante $\tilde{k}$ sobre $L(\mathfrak{g};\sigma) \times L(\mathfrak{g};\sigma)$ de la siguiente forma

$$\tilde{k}(x^i Z, x^j Y) = k(Z,Y) \text{ con } Y, Z \in \mathfrak{g}$$

Sea L'' denota el complemento ortogonal a L' en $L(\mathfrak{g};\sigma)$ con respecto a $\tilde{k}$. Entonces $L'' \subset \sum_{\tilde{\gamma}\in\tilde{\Delta}^0} L^{\tilde{\gamma}}$. Por esta razón si $Z \in L(\mathfrak{g};\sigma)$ se puede expresar como la siguiente suma

$$Z = Z^0 + Z', \text{ donde } Z^0 \in \sum_{\tilde{\alpha}\in\tilde{\Delta}^0} L^{\tilde{\gamma}} \text{ y } Z' \in \sum_{\tilde{\beta}\in\tilde{\Delta}-\tilde{\Delta}^0} L^{\tilde{\beta}}$$

Por otro lado tenemos que si $Z \in L(\mathfrak{g};\sigma)$ entonces

$$[L'', Z] = [L'', Z^0 + Z'] = [L'', Z'] \subset \sum_{\tilde{\beta}\in\tilde{\Delta}-\tilde{\Delta}^0} L^{\tilde{\beta}}$$

Pero además como L'' es un ideal $[L'', Z] = 0$. Esto implica que $L'' \subset Z\left(L(\mathfrak{g};\sigma)\right)$. Lo cual no es posible puesto que $Z\left(L(\mathfrak{g};\sigma)\right) = 0$. Así que el álgebra generada por e_i, h_j, f_k es todo $L(\mathfrak{g};\sigma)$.

2) Supongamos I un ideal $M-graduado$ distinto de cero del álgebra $L(\mathfrak{g};\sigma)$ tal que $I \cap \sum \mathbb{C}e_i = 0$. Como I es un ideal $M-graduado$ existe $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}$ para la cual $L^{\tilde{\alpha}} \cap I \neq 0$. Es decir que I contiene un vector $e_{\tilde{\alpha}}$ no nulo. Si $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}^0$ *entonces para alguna* $i \in \{0, 1, 2...N-1\}$ el corchete $[e_{\tilde{\alpha}}, e_i] \neq 0$ ó $[e_{\tilde{\alpha}}, f_i] \neq 0$ (sí esto no fuera verdadero $e_{\tilde{\alpha}}$ estaría en el centro (por 1): lo cual no puede ser); dando un elemento nocero en $L^{\tilde{\beta}} \cap I$ con $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^0$. Es suficiente considerar el caso en donde $e_{\tilde{\alpha}} \in I$ con $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^0$ y $e_{\tilde{\alpha}} \neq 0$. Sabemos que por la proposición 4.5, $\mathbb{C}t_\alpha \subset \left[L^{\tilde{\alpha}}, L^{-\tilde{\alpha}}\right] \subset I$. Tenemos además que existe $\tilde{\alpha}_i$ raíz simple que cumple $\tilde{\alpha}_i(t_\alpha) \neq 0$. Gracias a esto obtenemos que $L^{\tilde{\alpha}_i} = \left[L^{\tilde{\alpha}_i}, t_\alpha\right] \subset I$, lo cual es una contradicción.

3) Demostraremos inciso por contraposición. Sea $\overline{e}_i, \overline{f}_i, \overline{h}_i$ las imagenes de los elementos e_i, f_i, h_i $(0 \leq i \leq N-1)$ bajo el mapeo cubriente del álgebra $L(\mathfrak{g},\sigma)$ *sobre* $\mathfrak{g}$. *Supongamos* Π es descomponible es decir $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$. Obtenemos la correspondiente descomposición $\mathfrak{h}_{\bar{0}} = \mathfrak{h}_{\bar{0}_1} \oplus \mathfrak{h}_{\bar{0}_2}$ donde si $k = 1$ ó 2:

$$\mathfrak{h}_{\bar{0}_k} = \sum_{\alpha_i\in\Pi_k} \mathbb{C}h_i$$

Si $\alpha_i \in \Pi_1$ y $\alpha_j \in \Pi_2$, entonces $\alpha_i\left(\overline{h}_j\right) = 0$. Además, $[\overline{e}_i, \overline{e}_j] = \left[\overline{f}_i, \overline{f}_j\right] = 0$. Si $\mathfrak{g}^k$ $(k = 1, 2)$ denota la subálgebra de $\mathfrak{g}$ generada por $\overline{e}_i, \overline{f}_i, \overline{h}_i$ cuando $\alpha_i \in \Pi_k$, entonces por (1) obtenemos una descomposición de $\mathfrak{g}$ en la suma directa de ideales $\sigma - invariantes$, $\mathfrak{g}^1$ y $\mathfrak{g}^2$. Con esto queda demostrada la proposición. ■

En lo que sigue σ representa un automorfismo indescomponible de $\mathfrak{g}$ de orden $m \geq 1$. Sea $E = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{R}\alpha_i$, con $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{N-1}\}$ y se $n = \dim E$. Tenemos además que el producto interior $k(\ \ ,\ \ )$ sobre $\mathfrak{h}_0^*$ es positivo definido sobre E, y tenemos las siguientes propiedades :

Π_1) $a_{ij} = \frac{2k(\alpha_i,\alpha_j)}{k(\alpha_j,\alpha_j)} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \in -\mathbb{Z}^+$ para $i \neq j$.

Π_2) Π es un sistema de vectores indescomponible

Π_3) Π es un sistema de vectores linealmente dependiente que genera E.

En particular, $det\,(a_{ij}) = 0$

Proposición 4.8: Sea σ un automorfismo indescomponible de $\mathfrak{g}$ de orden $m \geq 1$.

1) Todo subconjunto propio de Π es linealmente independiente,y $N = n + 1$.

2) El sistema $\widetilde{\Pi}$ es independiente sobre $\mathbb{Z}$: ésto es, sí $\sum_{i=0}^{N-1} c_i\widetilde{\alpha}_i = 0$ $(c_i \in \mathbb{Z})$, entonces toda c_i es 0.

Demostración :

1) Sí la primera afirmación fuera falsa, tendríamos, que la siguiente relación sería cierta

$$\sum_{\alpha\in\pi'} a_\alpha \alpha - \sum_{\beta\subset\pi''} a_\beta \beta = 0$$

donde $\Pi' \cup \Pi'' \subsetneq \Pi$ (contención propia) y $a_\alpha > 0, a_\beta > 0$. Entonces por (Π_1) tenemos quel producto

$$\left\langle \sum_{\alpha\in\pi'} a_\alpha \alpha, \sum_{\alpha\in\pi'} a_\alpha \alpha \right\rangle = \left\langle \sum_{\alpha\in\pi'} a_\alpha \alpha, \sum_{\beta\in\pi''} a_\beta \beta \right\rangle \leq 0$$

Es decir que $\sum_{\alpha\subset\pi'} a_\alpha \alpha = 0$. Pero si $\beta \in \Pi$- Π', tenemos que $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$ para toda $\alpha \in \Pi'$ (por que de otro modo $0 = \langle \sum a_\alpha \alpha, \beta \rangle = \sum a_\alpha \langle \alpha, \beta \rangle < 0$) Entonces la descomposición $\Pi = (\Pi\ \text{-}\Pi') \cup \Pi'$ contradice (Π_2) . Ahora usando (Π_3) tenemos que $N = n + 1$.

Para la parte 2), observamos que sí m es el orden de σ, entonces $(0, m) \in \hat{\Delta}^0 \cap \hat{\Delta}^+$ y además $(0, m) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i\widetilde{\alpha}_i$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$. De donde, $m = \sum_{i=0}^{N-1} a_i s_i$ y $0 = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \alpha_i$. Asi que no todas las a_i son cero. Por la parte 1) la relación $0 = \sum_{0}^{N-1} a_i\alpha_i$ implica que todas las a_i

son diferente de cero. Supongamos ahora que tenemos $\sum_{i=0}^{N-1} c_i\tilde{\alpha}_i = (0,0)$ con $c_i \in \mathbb{Z}$ y alguna $c_{i_0} \neq 0$. Esto nos lleva a $\sum_{i=0}^{N-1} (c_{i_0} \cdot a_i - c_i a_{i_0})\alpha_i = 0$. Ya que el coeficiente i_0−ésimo es cero, por (II_2), para toda i, $c_{i_0} \cdot a_i - c_i a_{i_0} = 0$; es decir, para toda i, $a_i = cc_i$ con $(c \in \mathbb{R})$. Pero entonces $m = \sum_{i=0}^{N-1} a_i s_i = c \sum_{i=0}^{N-1} c_i s_i = 0$, que es una contradicción. ■

Teorema 14 *(Principal): Sean $L = L(\mathfrak{g},\sigma)$ y $L' = L(\mathfrak{g}',\sigma')$ las álgebras cubrientes de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$, con $\mathfrak{h}_{\bar{0}} \subset \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ y $\mathfrak{h}'_{\bar{0}} \subset \mathfrak{g}'_{\bar{0}}$ las álgebras abelianas maximales constuidas en la proposición 4.3, y $\tilde{\Pi} = \{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_n\}$ y $\tilde{\Pi}' = \{\tilde{\alpha}'_0, \tilde{\alpha}'_1, ..., \tilde{\alpha}'_{n'}\}$ correspondientes conjuntos de raices simples, dados. Asumimos que $n = n'$, que la correspondencia*

$$\tilde{\alpha}_i \longrightarrow \tilde{\alpha}'_i \; i = 0, 1, 2, ...n$$

induce una biyección

$$\tau : M = \mathbb{Z}\tilde{\Pi} \longrightarrow M' = \mathbb{Z}\tilde{\Pi}'$$

y que las matrices generalizadas de Cartán *son iguales $(A = A')$. Entonces*

i) Existe un isomorfismo

$$\tilde{\psi} : L(\mathfrak{g}',\sigma') \longrightarrow L(\mathfrak{g},\sigma)$$

que hace corresponder la M-graduación con la M'-graduación: $\tilde{\psi} : \left((L')^{\tau(\tilde{\alpha})}\right) = L^{\tilde{\alpha}}$.

ii) Sea $\tilde{\psi}$ un isomorfismo que satisface(i). Sí $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son simples. Entonces existe un isomorfismo ψ: $\mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}$ y una constante $c \in \mathbb{C}-(0)$ para el cual el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} L(\mathfrak{g}',\sigma') \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[d, "\phi'"'] & L(\mathfrak{g},\sigma) \arrow[r, "\mu_c"] & L(\mathfrak{g},\sigma) \arrow[dl, "\phi"] \\ \mathfrak{g}' \arrow[r, "\psi"'] & \mathfrak{g} & \end{tikzcd}$$

donde ϕ, ϕ'son los homomorfismos cubrientes y $\mu_c(P(x))=(P(cx))$.

Antes de la demostración del teorema enunciemos y demostremos un lema

Lema 4.2.2: Sea A un matríz de Cartán generalizada. Existe un álgebra $L(A)$, *álgebra cubriente asociada* a A, y un isomorfismo de álgebras M-graduadas $\varsigma : L(A) \longrightarrow L(\mathfrak{g},\sigma)$, para cualquier $(\mathfrak{g},\sigma)$ cuya matríz de Cartán $A(\mathfrak{g},\sigma) = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ es A.

Demostración del lema

El fin del teorema es mostrar que con la información que guarda la *matríz de Cartán* $A(\mathfrak{g},\sigma) = A = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ se puede recupera el álgebra cubriente $L(\mathfrak{g},\sigma)$. Para poder hacer esto definiremos en varios pasos a $L(A)$. Sea $\breve{\Pi} = \{(\alpha_0, s_0), (\alpha_1, s_1), ..., (\alpha_n, s_n)\}$ el conjunto de raíces simples con el que obtenemos A para $(\mathfrak{g},\sigma)$. Recordemos que $L(\mathfrak{g},\sigma)$ tiene generadores $\{e_i, f_i, h_i\}_{i=0...n}$ que satisfacen las relaciones (4.1). Consideremos luego un espacio vectorial V de dimensión $3(n+1)$ con base $\{\overline{e}_i, \overline{f}_i, \overline{h}_i\}_{i=0...n}$ donde $\overline{e}_i, \overline{f}_i, \overline{h}_i$ son las imagenes de los elementos e_i, f_i, h_i $(0 \leq i \leq n)$ bajo el mapeo cubriente del álgebra $L(\mathfrak{g};\sigma)$ sobre $\mathfrak{g}$. Formamos $T(V)$ el *álgebra tensorial* de V. Como $T(V)$ es un álgebra asociativa, entonces $T(V)$ es un álgebra de Lie (El producto corchete es definido por $[A,B] = A\otimes B - B\otimes A$). Ahora definimos $\overline{L}(V)$ como el subespacio vectorial de $T(V)$ generado por todos los productos corchete de $\{\overline{e}_i, \overline{f}_i, \overline{h}_i\}_{i=0...n}$ por lo tanto $\overline{L}(V)$ es un subálgebra de Lie de $T(V)$ generada por $\{\overline{e}_i, \overline{f}_i, \overline{h}_i\}_{i=0...n}$. Sea $\overline{I}(V)$ el *ideal* de $\overline{L}(V)$ generado por las relaciones

$$\left[\overline{h}_i, \overline{h}_j\right], \ \left[\overline{e}_i, \overline{f}_j\right] - \delta_{ij}\overline{h}_i, \ \left[\overline{h}_i, \overline{e}_j\right] - a_{ji}\overline{e}_j, \ \left[\overline{h}_i, \overline{f}_j\right] - a_{ji}\overline{f}_j.$$

Luego definimos $\widetilde{L}(A) = \overline{L}(V)/\overline{I}(V)$ y tomamos $\widehat{e}_i, \widehat{f}_i, \widehat{h}_i$ las correspondientes proyecciones de $\overline{e}_i, \overline{f}_i, \overline{h}_i$. Asi que $\{\widehat{e}_i, \widehat{f}_i, \widehat{h}_i\}_{i=0...n}$ generan a $\widetilde{L}(A)$ y satisfacen las relaciones (4.1). Sea $M = \mathbb{Z}\breve{\Pi}$. Definimos para $\widetilde{\alpha} \in M$, $\widetilde{\alpha} > 0$ (respect. $\widetilde{\alpha} < 0$) si $\widetilde{\alpha} \neq 0$ y $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{Z}_+\widetilde{\Pi}$ (respect. si $\widetilde{\alpha} \neq 0$ y $\widetilde{\alpha} \in -\mathbb{Z}_+\widetilde{\Pi}$) Para $\widetilde{\alpha} > 0$ ($\widetilde{\alpha} < 0$) definimos $L_A^{\widetilde{\alpha}}$ el espacio vectorial generado por $[\widehat{e}_{i_1}, \widehat{e}_{i_2}, ..., \widehat{e}_{i_r}] = [\widehat{e}_{i_1}, [\widehat{e}_{i_2}, [..., [\widehat{e}_{i_{r-1}}, \widehat{e}_{i_r}]...]]]$ (respectivamente $\left[\widehat{f}_{i_1}, \widehat{f}_{i_2}, ..., \widehat{f}_{i_r}\right] = \left[\widehat{f}_{i_1}, \left[\widehat{f}_{i_2}, \left[..., \left[\widehat{f}_{i_{r-1}}, \widehat{f}_{i_r}\right]...\right]\right]\right]$) *siempre que* $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_{i_1} + \widetilde{\alpha}_{i_2} + ... + \widetilde{\alpha}_{i_r}$ (*respectivamente* $-\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_{i_1} + \widetilde{\alpha}_{i_2} + ... + \widetilde{\alpha}_{i_r}$) En otro caso $0 \neq \widetilde{\alpha} \in M$, tomamos $L_A^{\widetilde{\alpha}} = 0$ y $L_A^{\widehat{0}} = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{C}\widehat{h}_i$.

Denotamos $L_A^+ = \sum_{\widetilde{\alpha}>0} L_A^{\widetilde{\alpha}}$ y $L_A^- = \sum_{\widetilde{\alpha}<0} L_A^{\widetilde{\alpha}}$. Afirmamos que $\dim(L_A^{\widehat{0}}) = n$. Además $\widetilde{L}(A) = L_A^+ + L_A^- + L_A^0$. Para ver esto, usamos el método clásico de ver a $\widetilde{L}(A)$ representado como transformaciones lineales. Sea W un espacio vectorial de base $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ y $\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n\}$ un subconjuto arbitrario pero fijo de números complejos. Definimos una acción $\overline{L}(V)$ sobre el álgebra tensorial $T(W)$ de la siguiente forma:

$$\overline{f_j}(1) = t_j, \quad \overline{f_j}(t_{i_1} \otimes ... \otimes t_{i_r}) = t_j \otimes t_{i_1} \otimes ... \otimes t_{i_r}$$

$$\overline{h_j}(1) = \lambda_j, \quad \overline{h_j}(t_{i_1} \otimes ... \otimes t_{i_r}) = (\lambda_j - a_{i_1 j} - ... - a_{i_r j})\, t_{i_1} \otimes ... \otimes t_{i_r}$$

$$\overline{e_j}(1) = 0, \quad \overline{e_j}(t_{i_1} \otimes ... \otimes t_{i_r}) = t_{i_1} \otimes (\overline{e_j}(t_{i_2} \otimes ... \otimes t_{i_r}) + \delta_{i_1 j}\overline{h_j}(t_{i_2} \otimes ... \otimes t_{i_r})$$

Esto se extiende a un homomorfismo de Lie

$$\overline{\phi} : \overline{L}(V) \longrightarrow End(T(W))$$

Notemos que se cumple $\overline{\phi}(\overline{I}(V)) = 0$. Luego entonces podemos inducir un homomorfismo·

$$\widehat{\phi} \cdot \widetilde{L}(A) \longrightarrow End(T(W))$$

Se tiene que si $\sum c_i\overline{h}_i \in \overline{I}(V)$, entonces $\sum c_i\overline{\phi}\left(\overline{h}_i\right) = 0$. Restringiendo a W, ésto implica que $A\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$, ya que para toda j se cumple que $\sum c_i\overline{\phi}\left(\overline{h}_i\right) t_j = \sum c_i\left(-a_{ji}\right) = 0$. Pero como los vectores columna de la matríz A forma un conjunto mínimo linealmente dependiente, $\{\hat{h}_j\}_{j=1,2..,n}$ es un conjunto mínimo linealmente dependiente; en particular $\dim L_A^0 = n$. Definimos funcionales para toda $j = 0, 1..., n$.

$$\alpha_j' : L_A^0 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{tal que} \qquad \alpha_j'(\hat{h}_i) = a_{ji}.$$

Notemos, que las siguiente relaciones se cumplen :

$$\left[\hat{h}, [\widehat{e}_{i_1}, \widehat{e}_{i_2}, ..., \widehat{e}_{i_r}]\right] = \left(\alpha_{i_1}'(\hat{h}) + ... + \alpha_{i_r}'(\hat{h})\right)[\widehat{e}_{i_1}, \widehat{e}_{i_2}, ..., \widehat{e}_{i_r}]$$
$$\left[\hat{h}, \left[\widehat{f}_{i_1}, \widehat{f}_{i_2}, ..., \widehat{f}_{i_r}\right]\right] = -\left(\alpha_{i_1}'(\hat{h}) + ... + \alpha_{i_r}'(\hat{h})\right)\left[\widehat{f}_{i_1}, \widehat{f}_{i_2}, ..., \widehat{f}_{i_r}\right]$$

$$\left[\widehat{f}, [\widehat{e}_{i_1}, \widehat{e}_{i_2}, ..., \widehat{e}_{i_r}]\right] \in L_A^+ \text{ y } \left[\widehat{e}_j, \left[\widehat{f}_{i_1}, \widehat{f}_{i_2}, ..., \widehat{f}_{i_r}\right]\right] \in L_A^-.$$

Hemos obtenido que $L_A^+ + L_A^- + L_A^0$ es una subálgebra de Lie de $\widetilde{L}(A)$ que contiene a $\left\{\widehat{e}_i, \widehat{f}_i, \widehat{h}_i\right\}$. Por lo que $\widetilde{L}(A) = L_A^+ + L_A^- + L_A^0$. Podemos provar que esta suma es directa, inductivamente. Por primer paso tenemos, que si $\sum c_i\overline{e_i} + c\overline{h} + \sum n_i\overline{f}_i \in \overline{I}(V)$ aplicando $\overline{\phi}$ y evaluando en 1 obtenemos

$$\sum n_i t_i + c\overline{\phi}(h)(1) = 0 \tag{4.15}$$

Se sigue de la condición (4 15), que $\forall\ i,\ n_i = 0$ y como podemos escoger las λ_i tales que $\overline{\phi}(h)(1) \neq 0$: también $c = 0$. Así que $\sum c_i\overline{e_i} = 0$, y si evaluamos en a cada t_j resulta toda c_i cero. En general , sean $\zeta' = \sum a_{i_1 i_2 ..i_r}[\widehat{e}_{i_1}, \widehat{e}_{i_2}, ..., \widehat{e}_{i_r}]$, $\varsigma' \in L_A^0$ y $\eta' = \sum b_{i_1 i_2 .. i_r}\left[\widehat{f}_{i_1}, \widehat{f}_{i_2}, ..., \widehat{f}_{i_r}\right]$ tales que $\zeta' + \varsigma' + \eta' = 0$. Luego aplicamos $\overline{\phi}$ y evaluamos en 1 obteniendo:

$$0=\widetilde{\phi}(\zeta')(1)+\overline{\phi}(\varsigma')(1)+\overline{\phi}(\eta')(1)=\overline{\phi}(\zeta')1+\sum b_{i_1 i_2 \ldots i_s}[t_{i_1},t_{i_2},\ldots,t_{i_s}]$$

Ya que la $\overline{\phi}$ es arbitraria, se sigue que $\zeta'=0$. Entonces $\sum b_{i_1 i_2 \ldots i_s}[t_{i_1},t_{i_2},\ldots,t_{i_s}]=0$, que implica $\eta'=0$. Finalmente sigue que $\varsigma'=0$ por lo cual $\widetilde{L}(A)=L_A^+\oplus L_A^-\oplus L_A^0$. Aplicando esta misma técnica de homomorfismos (que no haremos) podemos además demostrar que se tienen sumas directas $L_A^+=\bigoplus_{\widetilde{\alpha}>0}L_A^{\widetilde{\alpha}}$ y $L_A^-=\bigoplus_{\widetilde{\alpha}<0}L_A^{\widetilde{\alpha}}$. Una consecuencia es que podemos escribir $\widetilde{L}(A)=\bigoplus_{\widetilde{\alpha}\in M}L_A^{\widetilde{\alpha}}$. Con estas condiciones $\widetilde{L}(A)$ resulta ser un álgebra de Lie *M-graduada* ya que $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in M=\mathbb{Z}\widetilde{\not\succ}$ el producto corchete de $L_A^{\widetilde{\alpha}}$ con $L_A^{\widetilde{\beta}}$ está contenido en $L^{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}$, es decir $\left[L^{\widetilde{\alpha}},L^{\widetilde{\beta}}\right]\subseteq L^{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}$; lo cual se deduce de $\left[L^{\widetilde{\alpha}},e_i\right]\subseteq L^{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\alpha_i}}$ y $\left[L^{\widetilde{\alpha}},f_j\right]\subseteq L^{\widetilde{\alpha}-\widetilde{\alpha_j}}$. Notemos también que $\left[\widetilde{L}(A),\widetilde{L}(A)\right]=\widetilde{L}(A)$. Por las propiedades del producto tensorial y el cociente, existe un epimorfismo natural de Lie $\widehat{\phi}:\widetilde{L}(A)\longrightarrow L(\mathfrak{g},\sigma)$ que además respeta las *M-graduaciones* dado por :

$$\widehat{h}_i\longmapsto h_i\ ,\ \widehat{f}_i\longmapsto f_i\ ,\ \widehat{e}_i\longmapsto e_i.$$

Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\overline{T}(V) \arrow[r] & \overline{L}(V) \arrow[r, "\pi"] & \widetilde{L}(A) \arrow[dl, "\widehat{\phi}"] \\
 & L(\mathfrak{g},\sigma) \arrow[u, phantom, "\downarrow"] &
\end{tikzcd}$$

Ahora definimos $J(A)$ como el ideal maximal *M-graduado* de $\widetilde{L}(A)$, con la siguiente propiedad :

$$J(A)\cap\sum_{i=0}^{n}\mathbb{C}\widehat{e}_i=0 \tag{4.16}$$

El ideal $J(A)$ también puede ser definido como la union de todos los ideales *M-graduados* con la propiedad (4.16). Afirmamos que $J(A)$ es el núcleo de $\widehat{\phi}$. Pues sabemos que $\widehat{\phi}(J(A))$ es un ideal propio *M-graduado* tal que

$$\widehat{\phi}(J(A))\cap\sum_{i=0}^{n}\mathbb{C}e_i=0.$$

y por la proposición 4.7, $\widetilde{\phi}(J(A)) = 0$. Por otro lado el núcleo de $\widetilde{\phi}$ es un ideal *M-graduado* que no puede intersectar a la suma $\sum_{i=0}^{n} \mathbb{C}\widehat{e}_i$. Así que $\ker \widetilde{\phi} \subset J(A)$. Podemos entonces inducir un isomorfismo

$$\varkappa : \widetilde{L}(A)/J(A) \longrightarrow L(\mathfrak{g}, \sigma).$$

Definimos entonces a $L(A)$ como: $L(A) := \widetilde{L}(A)/J(A)$. ■

Con este lema podemos dar la demostración del teorema.

Demostración del Teorema:

$i)$ Hemos demostrado que existen isomorfismo $\varkappa : L(A) \longrightarrow L$ y $\varkappa' : L(A') \longrightarrow L'$ $M-$*graduado* y $M'-$*graduado* respectivamente en base a que $A = A'$,definimos el siguiente mapeo $\widetilde{\psi} = \varkappa \circ \left((\varkappa')^{-1}\right)$ y satisface (i).

(ii) Consideremos el *centroide* de L, $Cent(L) = \{A \in End(L) \mid A \circ adx = adx \circ A, \forall x \in L\}$. Sean $A_1, A_2 \in Cent(L)$. Afirmamos que $[A_1, A_2] = 0$, es suficiente mostra que para todo $[X_1, X_2] \in L$, $[A_1, A_2]([X_1, X_2]) = 0$, ya que $[L, L] = L$. Esto se obtiene de las siguientes igualdades

$$A_1A_2([X_1, X_2]) = A_1([X_1, A_2X_2]) = -[A_2X_2, A_1X_1]$$

y

$$A_2A_1([X_1, X_2]) = A_2A_1([X_1, X_2]) = -[A_1X_1, A_2X_2].$$

Sean m y m' los ordenes de σ y σ' respectivamente. Definimos transformaciones $A : L \longrightarrow L$ y $A' : L' \longrightarrow L'$ dadas por $AY = x^m Y$ y $A'Z = x^{m'}Z$ respectivamente, que estarán en los correspondientes centroides. Por definición el núcleo de $\phi' : L' \longrightarrow \mathfrak{g}'$ es el ideal $K' = \{z - A'z \mid z \in L'\}$; igualmente $K' = \{z - A'z \mid z \in L'\}$ es núcleo de ϕ. Podemos definir el siguiente ideal $I' = \widetilde{\psi}(K')$ entonces $I' = \{z - \overline{A}z \mid z \in L\}$, donde $\overline{A} = \widetilde{\psi} \circ A' \circ \widetilde{\psi}^{-1}$ es otro elemento del centroide de L. Ya que A y A' pertenecen al centroide de L , se tiene que $A'\left((L')^{\widetilde{\alpha}'}\right) \subset (L')^{\widetilde{\alpha}'+\widetilde{\gamma}'}$ con $\widetilde{\gamma}' = (0, m)$ raíz positiva. Se sigue que para toda $\widetilde{\alpha}$, $\bar{A}\left(L^{\widetilde{\alpha}}\right) \subset L^{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\gamma}}$ con $\widetilde{\gamma} = (\gamma, t) \in \Delta^+$ que satisface $\tau(\widetilde{\gamma}) = \widetilde{\gamma}'$. Por otro lado como $\mathfrak{g}$ es simple y Π es indescomponible y tenemos que $L = [L; L]$, de lo cual se sigue que $\overline{A}$ y A conmutan. Entonces $\overline{A}(K) \subseteq K$ y podemos inducir un automorfismo

$$\bar{a} : L/K \longrightarrow L/K$$

Como $L/K = \mathfrak{g}$ es simple, el lema de Schur implica que $\overline{a} \in \mathbb{C}$. Afirmamos que $\tilde{\gamma} = (0, dm)$ para algún $d \in \mathbb{Z}_+$. Primero escogemos para toda $\tilde{\beta} \in \hat{\tilde{\Delta}}$, $e_{\tilde{\beta}} \neq 0$ en $L^{\tilde{\beta}}$. Tomamos $\tilde{\alpha} = (\alpha, j) \in \hat{\tilde{\Delta}}$ y apliquemos

$$\tilde{A}(e_{\tilde{\alpha}}) = \overline{a}e_{\tilde{\alpha}} + (1 - x^m)(P_{\tilde{\alpha}} + \sum_{\tilde{\alpha} \subset \hat{\tilde{\Delta}}} c_{\tilde{\beta},\tilde{\alpha}} e_{\tilde{\beta}}) \tag{4.17}$$

con $P_{\tilde{\alpha}}$ en el centro de $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ de L. Además $\overline{A}(L^{\tilde{\alpha}}) \subseteq L^{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}}$, por lo cual si $\alpha + \gamma = 0$ entonces

$$0 = \overline{a}e_{\tilde{\alpha}} + (1 - x^m)(\sum_{\tilde{\alpha} \subset \hat{\tilde{\Delta}}} c_{\tilde{\beta},\tilde{\alpha}} e_{\tilde{\beta}})$$

Pero esto es imposible pues la suma es finita y toda $x^m e_{\tilde{\beta}} \neq 0$. Por lo tanto $\alpha + \beta \neq 0$ y $\tilde{A}(e_{\tilde{\alpha}}) = c e_{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}}$, con $c \neq 0$. Observemos que en la ecuación (4.17), $P_{\tilde{\alpha}} = 0$. Por esta razón obtenemos la siguiente igualdad

$$c e_{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}} = \overline{a}e_{\tilde{\alpha}} + (1 - x^m)(\sum_{\tilde{\alpha} \subset \hat{\tilde{\Delta}}} c_{\tilde{\beta},\tilde{\alpha}} e_{\tilde{\beta}})$$

De esta última igualdad obtenemos que $\tilde{\gamma} = (0, dm)$, pues $c e_{\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}} = \lambda x^{md} e_{\tilde{\alpha}}$. Por lo tanto, $\overline{A} = a_{\tilde{\alpha}} A^d$ sobre $L^{\tilde{\alpha}}$ con $a_{\tilde{\alpha}} \in \mathbb{C}$. Ya que $\mathfrak{g}$ es simple podemos ordenar la base $\widehat{\Pi}$ tal que $[\widehat{e}_{\tilde{\alpha}_i}, \widehat{e}_{\tilde{\alpha}_{i+1}}] \neq 0$ y $[\widehat{e}_{\tilde{\alpha}_i}, \widehat{e}_{-\tilde{\alpha}_i}] \neq 0$. Usamos que $\overline{A}$ y A^d están en el $cent(L)$ entonces

$$\forall i, \ a_{\tilde{\alpha}_{i+1}} = a_{\tilde{\alpha}_i} = a_{-\tilde{\alpha}_i} = \tilde{a} \tag{4.18}$$

Para mostrar (4.18) notemos que $[Ax, y] = [x, Ay]$ y como $\overline{A} \in cent(L)$ implica que $[\overline{A}x, y] = [x, \overline{A}y]$ y también las siguientes igualdades se cumplen

$$[\overline{A}\widehat{e}_{\tilde{\alpha}_i}, \widehat{e}_{\tilde{\alpha}_{i+1}}] = [a_{\tilde{\alpha}_i} x^{md} \widehat{e}_{\tilde{\alpha}_i}, \widehat{e}_{\tilde{\alpha}_{i+1}}] = a_{\tilde{\alpha}_i} x^{md} [\widehat{e}_{\tilde{\alpha}_i}, \widehat{e}_{\tilde{\alpha}_{i+1}}]$$

y

$$[\widehat{e}_{\tilde{\alpha}_i}, \overline{A}\widehat{e}_{\tilde{\alpha}_{i+1}}] = [\widehat{e}_{\tilde{\alpha}_i}, a_{\alpha_{i+1}} x^{md} \widehat{e}_{\tilde{\alpha}_{i+1}}] = a_{\tilde{\alpha}_{i+1}} x^{md} [\widehat{e}_{\tilde{\alpha}_i}, \widehat{e}_{\tilde{\alpha}_{i+1}}]$$

entonces $a_{\tilde{\alpha}_i} = a_{\tilde{\alpha}_{i+1}}$ con esto podemos concluir que $\overline{A} = \tilde{\psi} \circ A' \circ \tilde{\psi}^{-1} = aA^d$ sobre L con $a \in \mathbb{C}$. De la misma forma obtenemos que $\overline{A'} = a' A'^{d'}$ de aquí obtenemos que .

$$a' a A^{dd'} = a'(\tilde{\psi} \circ (A') \circ \tilde{\psi}^{-1})^{d'} = \tilde{\psi} \circ (a' A'^{d'}) \circ \tilde{\psi}^{-1} = \tilde{\psi} \circ (\overline{A'}) \circ \tilde{\psi}^{-1} = A$$

Por lo tanto $d = d' = 1$, obteniendo asi $\overline{A}z = ax^m z$ y $I' = (1 - ax^m)L$ entonces ii)se obtiene al tomar $c = a^{-\frac{1}{m}}$

$$\begin{array}{ccccc} L(\mathfrak{g}',\sigma') & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & L(\mathfrak{g},\sigma) & \xrightarrow{\mu_c} & L(\mathfrak{g},\sigma) \\ \phi' \downarrow & & & \swarrow \phi & \\ \mathfrak{g}' & \xrightarrow[\psi]{} & \mathfrak{g} & & \end{array}$$

consideremos $\mu_c(\tilde{\psi}(P(x) - A'P(x))) = \mu_c(\tilde{\psi}(P(x)) - \tilde{\psi}A'\tilde{\psi}^{-1}(\tilde{\psi}P(x))) = (\tilde{\psi}(P(cx)) - ac^m x^m(\tilde{\psi}P(cx))) \in K$

pues $ac^m x^m = x^m$. Con esto se induce ψ, quedando demostrado el teorema. ■

4.3 Diagramas de Dynkin Generalizados.

Comenzemos por dar un resumen de lo que hemos hecho. Partimos de una pareja $(\mathfrak{g},\sigma)$ con la cual se construyo el álgebra cubriente $L(\mathfrak{g},\sigma)$. Obtenemos para alguna elección positiva del sistema de raices $\Delta(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h})$ el conjunto de raices simple de $\tilde{\Delta}^+$. Llamamos Π al conjunto $\{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n\}$ y formamos la matríz $A = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ mediante $a_{ij} = \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$. Como en el caso clásico, con $\tilde{\Pi}$ y A podemos recuperar a $\tilde{\Delta}$ luego la pareja $(\mathfrak{g},\sigma)$. Esto es consecuencia de las proposiciones (4.4 *y* 4.5). Por otro lado al restringirnos a Π perdemos la información de la segunda cooerdenada. Sin embargo estamos en la posición de utilizar los diagramas de Dynkin.

En el caso clásico, las parejas (V,Π) que consideramos son de la forma, V un espacio vectorial con producto punto $(\ ,\ )$ y $\Pi = \{\beta_1,\beta_2,...\beta_n\}$ base de Π tal que $\langle\beta_i,\beta_j\rangle \in -\mathbb{Z}^+$ para $i \neq j$. En nuestro caso definimos

Definición 4.3.1:

a)Una pareja $(V;\Pi)$ es un conjunto *básico "generalizado"* si V es un espacio vectorial con producto punto $(\ ,\ )$ y $\Pi = \{\alpha_0,\alpha_1,...\alpha_n\}$ es conjunto mínimo linealmente dependiente de V con $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle \in -\mathbb{Z}^+$ para $i \neq j$. (cualquier subconjunto propio de Π es linealmente independiente).

b) (V,Π) se llama descomponible si existen subconjuntos propios Π_1y Π_2 de Π mutuamente ortogonales tales que $\Pi = \Pi_1\cup\Pi_2$.

A un conjunto básico generalzado (V,Π) con matríz le asignamos un diagrama de *Dynkin Generalizado* $D(A)$. Al elemento $\alpha_i \in \Pi$ le asignamos el vértice i y unimos el vértice i y j con $a_{ij}a_{ji}$ aristas con dirección de j a i si $|a_{ij}| < |a_{ji}|$ $\left(a_{ij} = \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\right)$.

Tenemos la siguiente proposición :

Proposición 4.8 : Sea $B = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_l\}$ un subconjunto de Π. Entonces

$$\sum_{i<j} \left(\langle\gamma_i, \gamma_j\rangle \cdot \langle\gamma_j, \gamma_i\rangle\right)^{1/2} \leq l$$

Demostración :Sea $\varepsilon_i = \frac{\gamma_i}{|\gamma_i|}$. Formamos $\gamma = \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i$. Como γ puede ser cero, se sigue, que :

$$0 \leq (\gamma\gamma) = \sum_{i<j} \frac{2(\gamma_i, \gamma_j)}{|\gamma_i||\gamma_j|} + l$$

Por lo tanto

$$\sum_{i<j} \left(\langle\gamma_i, \gamma_j\rangle \cdot \langle\gamma_j, \gamma_i\rangle\right)^{1/2} = \sum_{i<j} -\frac{2(\gamma_i, \gamma_j)}{|\gamma_i||\gamma_j|} \leq l.$$

Usaremos esta proposición para la siguiente clasificación.

Teorema 15 : *Cualquier conjunto básico generalizado (V, Π) indescomponible con matríz A tiene como diagrama $D(A)$ uno que pertenece a la tabla $(4-1)$. Los números que aparecen sobre los vértices son los coeficientes de la combinacion linealmente dependiente minima de los renglones de A o dicho de otra forma son los coeficientos enteros a_i en $(0, m) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{\alpha}_i$. Mas aun, $D(A)$ determina la matríz de Cartán A.*

Demostración :

Directamente deducimos que $D(A)$ es un diagrama conexo. Si quitamos a $D(A)$ un vértice y las aristas que van a el obtenemos una unión disconexa de diagramas de Dynkin además como $det(A) = 0$ entonces $D(A)$ no es un diagrama de Dynkin. Ahora usaremos la proposición anterior para obtener los siguientes resultados

1) $D(A)$ contiene un ciclo sii $D(A) = \mathfrak{a}_n^{(1)}$:$D(A)$ no contiene un ciclo propio, ya que todo diagrama propio es unión de diagramas de Dynkin. El número de aristas en $D(A)$ que es un ciclo es $n+1$, por la proposición.

2) Si $D(A)$ tiene dos vértices unidos por tres aristas las otras uniones de dos vértices son por una arista:

$D(A)$ no contiene ciclos. $D(A)$ puede ser descrito por un camino de vértices $i_0, i_1, \ldots, i_n$, con $m_j > 1$ aristas que unen a i_j con i_{j+1}. Por la proposicion anterior tenemos, que $\sum_{j=0}^{n-1} m_j^{\frac{1}{2}} \leq n+1$, por lo tanto si hay un $m_j = 3$ y otra $m_k \geq 2$, obtenemos $\sum\limits_{j=0}^{n-1} m_j^{\frac{1}{2}} \geq 3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + (n-2) > n+1$, lo cual es una contradicción.

3)$D(A)$ no puede tener mas de dos uniones de aristas

Si esto fuera cierto $\sum\limits_{j=0}^{n-1} m_j^{\frac{1}{2}} \geq 3(2)^{\frac{1}{2}} + (n-3) > 4 + (n-3)$ que es una contradicción.

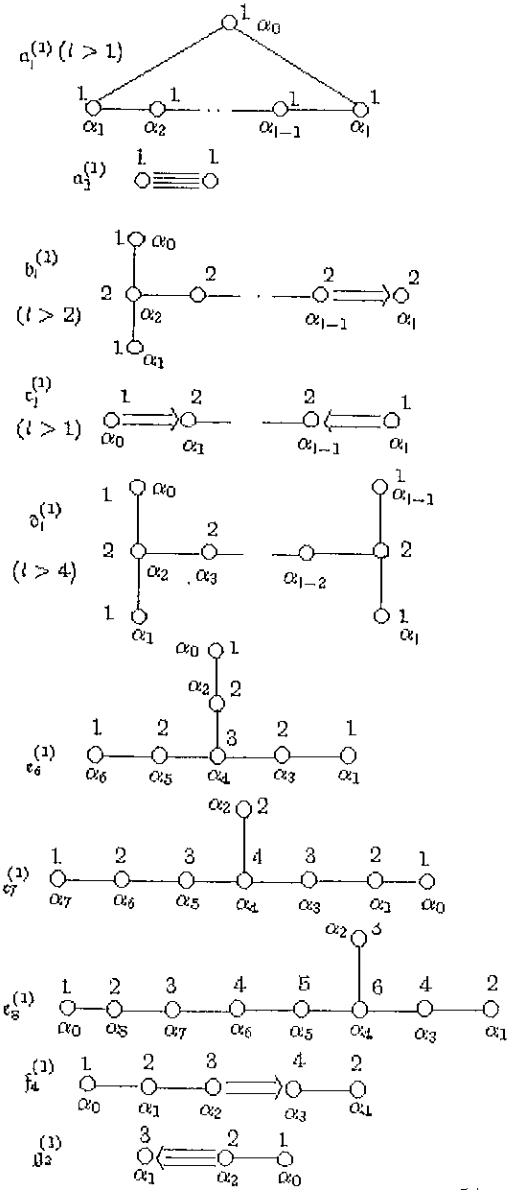
4) Si $dimV = 1$, entonces $D(A) = \mathfrak{a}_1^{(1)}$ ó $\mathfrak{a}_2^{(2)}$ en la tabla. El número m de aristas que unen a los dos vértices satisface $m^{\frac{1}{2}} \leq 2$. Ademas como $D(A)$ es conexo y no es de Dynkin $m \neq 0, 1, 2, 3$ entonces $m = 4$. Por lo tanto tenemos dos posibilidades $4 = (-1)(-4) = (-2)(-2)$ de la primera obtenemos por definición un diagrama dirigido $\mathfrak{a}_2^{(2)}$ y el otro no dirigido $\mathfrak{a}_1^{(1)}$

Supongamos ahora que $D(A)$ no tiene ciclos. Fijamos un vértice i_0 en $D(A)$ caminamos sobre aristas de $D(A)$ para pasar a otro i_1. Luego inductivamente, despúes de estar en el vértice i_{k-1} nos movemos al vértice i_k sólo cuando $i_k \notin \{i_0, i_1, ... i_{k-1}\}$ y hay una árista que une i_{k-1} con i_k. Con esto llegamos, despúes de un número finito de pasos, a un vértice i_r que sólo se une con el i_{r-1} en $D(A)$ esto es cierto puesto que en $D(A)$ no hay ciclos. Entonces, si $D(A)$ es conexo, $D(A) - \{i_r\}$ es conexo. Lo que obtenemos es que $D(A)$ es el diagrama de Dynkin $D(A) - \{i_r\}$ uniendole un vértice extra a uno sólo de sus vértices.

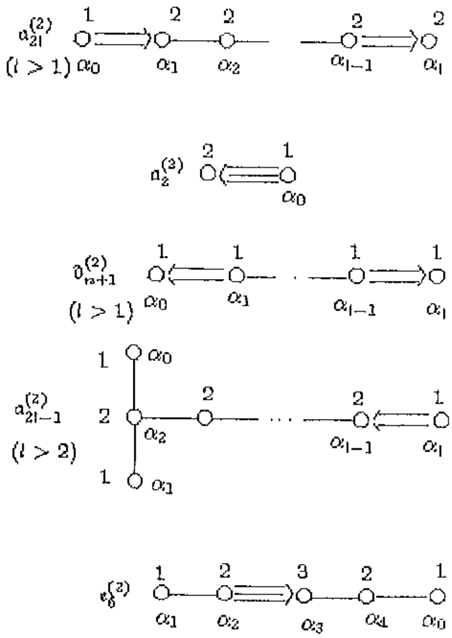
El siguiente paso de la clasificación es mostrar que para todo diagrama de Dynkin generalizado se puede realizar. Tal objetivo se obtiene mediante la clasificación de álgebras de Lie simples sobre los complejos, descrita en el capítulo dos. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ simple se hace corresponder con un sistema de raices (V, R) *indescomponible*. Ahi mismo se determinan los cocientes $Aut(R)/W(R)$ que son los automorfismos de Dynkin. Si (V, R) es el sistema de raices asociado a $\mathfrak{g}$ y v un automorfismo de Dynkin. v puede extenderse a un automorfismo de Lie de $\mathfrak{g}$. No se demostrara este resultado, sin embargo se diremos como se usan las perejas $(\mathfrak{g}, v)$ para cubrir la tabla $(4-1)$. Haciendo variar $\mathfrak{g}$ sobre todas las posibilidades $\mathfrak{a}_l, \mathfrak{b}_l, \mathfrak{c}_l, \mathfrak{d}_l, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4$ y $\mathfrak{g}_2$.y tomando en cado caso v el corespondiente automorfismo identidad, los digramas de Dynkin generalizados asociados a las álgebras cubrientes $L(\mathfrak{g}, v)$ se obtiene la tabla $(4-1,$ Dynkin $I)$. Del teorema (13), sólo cuando $\mathfrak{g}$ es del tipo $\mathfrak{a}_l$ $(l \geq 2)$, $\mathfrak{d}_l$ $(l \geq 4)$ y $\mathfrak{e}_6$ se consigue un automorfismo de Dynkin v de orden 2. Con las álgebras cubrientes $L(\mathfrak{g}, v)$ se obtienen los diagramas de la tabla $(4-1-$ Dynkin $II)$. Finalmente la única álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que tiene un automorfismo de Dynkin v de orden 3, es la del tipo $\mathfrak{d}_4$. Con cualquier pareja $(\mathfrak{g}, v)$ y v de orden 3 se obtiene

Tabla 4-1: Diagramas de Dynkin Generalizados, Diagramas $D(A)$

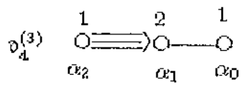
Dynkin I



Dynkin II



Dynkin III



Para $\mathfrak{a}_n^{(1)}$ $\mathfrak{a}_{2l}^{(2)}$ $\mathfrak{a}_{2l-1}^{(2)}$ $\mathfrak{b}_n^{(1)}$ $\mathfrak{c}_n^{(1)}$ $\mathfrak{d}_n^{(1)}$ $\mathfrak{d}_{n+1}^{(2)}$ son $l+1$ vertices el diagrama de la tabla (4-1, Dynkin III).

Proposición 4.9: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$, y v un automorfismo de $\mathfrak{g}$ de orden $k = 1, 2$ ó 3 inducido por un automorfismo del diagrama de Dynkin. Entonces los diagramas $D(A)$ de las varias $L(\mathfrak{g}, v)$ realizan todos los diagramas de Dynkin de la tabla $(4-1)$. Además, en la $\mathbb{Z}_k - \textit{graduación}$ inducida por v, $\mathfrak{g} \bigoplus_i \mathfrak{g}_i^v$, $\mathfrak{g}_0^v$ es un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$. ■

Las álgebras $L(\mathfrak{g}, v)$ de la proposición tienen además la propiedad de ser base para determinar todas las álgebras $L(\mathfrak{g}, \sigma)$, con σ automorfismo finito. En todos los casos cuando v es un automorfismosde Dynkin obtenemos que cualquier conjunto de, raices simples es de la forma $\{\tilde{\alpha}_0 = (\alpha_0, 1), \tilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, 0), ..., \tilde{\alpha}_n = (\alpha_n, 0)\}$ a partir de $L(\mathfrak{g}, v)$.

Recordemos que en general un conjunto de raíces simples es de la forma $\left\{\tilde{\beta}_0 = (\beta_0, s_0), \tilde{\beta}_1 = (\beta_1, s_1), ..., \tilde{\beta}_n = (\beta_n, s_n)\right\}$ con $(s_0, s_1, ..., s_n) \in (\mathbb{Z}^+)^{(n+1)}$ distinto de cero y arbitrario.

Definimos para $L(\mathfrak{g}, \sigma)$, con un conjunto de raices simples $\tilde{\Pi} = \left\{\tilde{\beta}_0 = (\beta_0, s_0), \tilde{\beta}_1 = (\beta_1, s_1), ..., \tilde{\beta}_n = (\beta_n, s_n)\right\}$ una $M - \textit{graduación}$; $M = \mathbb{Z}\tilde{\Pi}$, lo que induce la descomposición de.$L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{\tilde{\beta} \in M} L^{\tilde{\beta}}$. Existe otra para graduación para $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ natural mediante el grado. Para cada raíz $\tilde{\beta} = \sum_{i=0}^{n} k_i \tilde{\beta}_i$ se define el grado como $gr\tilde{\beta} = \sum_{i=0}^{n} k_i s_i$. Escribimos para todo $j \in \mathbb{Z}$, $L(\mathfrak{g}, \sigma)_j = \bigoplus_{gr\tilde{\beta}=j} L(\mathfrak{g}, \sigma)^{\tilde{\beta}}$ y entonces $L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} L(\mathfrak{g}, \sigma)_j$. Por la $M - \textit{graduación}$ obtenemos $\left[L(\mathfrak{g}, \sigma)_j, L(\mathfrak{g}, \sigma)_k\right] \subseteq L(\mathfrak{g}, \sigma)_{j+k}$. Esto es $M - \textit{graduación}$.

En el caso de que v es un automorfismo de Dynkin, $L(\mathfrak{g}. v)$ tiene varias $\mathbb{Z}-\textit{graduaciones}$ artificiales. Si $\{\tilde{\alpha}_0 = (\alpha_0, 1), \tilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, 0), ..., \tilde{\alpha}_n = (\alpha_n, 0)\}$ es un conjunto de raices simples de $L(\mathfrak{g}, v)$ entonces para cada $(s_0, s_1, ..., s_n) \in (\mathbb{Z}^+)^{(n+1)}$, distinto de cero, obtenemos una $\mathbb{Z}-\textit{graduación}$. Definimos $L(\mathfrak{g}, v)_j$ como la suma directa de los $L(\mathfrak{g}, v)^{\tilde{\alpha}}$ para los cuales $\tilde{\alpha} = \sum_{i=0}^{n} k_i \tilde{\alpha}_i$ y $\sum_{i=0}^{n} k_i s_i = j$. Esta $\mathbb{Z}-\textit{graduación}$ sellama de tipo $(s_0, s_1, ..., s_n)$.

Proposición 4.10: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ y σ un automorfismo de orden finito. Sea $\tilde{\Pi} = \left\{\tilde{\beta}_0 = (\beta_0, s_0), \tilde{\beta}_1 = (\beta_1, s_1), ..., \tilde{\beta}_n = (\beta_n, s_n)\right\}$ un conjunto de raices simples para $L(\mathfrak{g}, \sigma)$. Entonces existe un *Automorfismo* de Dynkin v de $\mathfrak{g}$ y un isomorfismo de Lie de $L(\mathfrak{g}. \sigma)$ a $L(\mathfrak{g}, v)$.

Demostraciòn ·

Por la proposición 4.9 existe υ de Dynkin tal que bajo una biyección apropiada de un conjunto de raices simples $\{\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, ..., \widetilde{\alpha}_n\}$ de $L(\mathfrak{g}, \upsilon)$ con $\widetilde{\Pi}$ las matrices de Cartán son iguales. Por el teorema (13), existe un isomorfismo

$$\widetilde{\Psi} : L(\mathfrak{g}, \sigma) \longrightarrow L(\mathfrak{g}, \upsilon)$$

que manda $L(\mathfrak{g}, \sigma)^{\widetilde{\beta}}$ a $L(\mathfrak{g}, \upsilon)^{\widetilde{\alpha}}$ cuando $\widetilde{\beta} = \sum_{i=0}^{n} k_i \breve{\beta}_i$ y $\widetilde{\alpha} = \sum_{i=0}^{n} k_i \widetilde{\alpha}_i$.Asi $\widetilde{\Psi}$ hace corresponder las $\mathbb{Z}-$*graduacioones* ■

La teoría de los diagramas de Dynkin generalizados ha sido usada por Victor Kăc para resolver varios problemas. Un ejemplo es la clasificación de todos los automorfismo de orden finito de un álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$. Esto se describe en el teorema siguiente (15). Nosotros aplicaremos este resultado para determinar los automorfismos de orden 2; es decir, para determinar las formas reales. Antes una proposición.

Proposición 4.11 :Sea $\mathfrak{g}$ simple sobre los complejos y υ de Dynkin de orden k.Sea $(s_0, s_1, ..., s_n) \in (\mathbb{Z}^+)^{n+1}$. Sea $\{\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, ..., \widetilde{\alpha}_n\}$ un conjunto de raices simples para $L(\mathfrak{g}, \upsilon)$ y $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ los criterios que aparecen sobre los diagramas de Dynkin generalizados correspondiente a las raices simples. Considere la $\mathbb{Z}-$*graduación* de tipo $(s_0, s_1, .., s_n)$ de $L(\mathfrak{g}, \upsilon)$. Entonces $x^k L_j \subseteq L_{j+m}$,con $m := k \sum_{i=0}^{n} a_i s_i$.

Demostración:

Notemos que en todos los diagramas de $a_0 = 1$ por definición $\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha_i = 0$ Tenemos que $x^k L^{\widetilde{\alpha}} \subseteq L^{\widetilde{\alpha}+(0,k)}$ para cualquier raíz $\widetilde{\alpha}$. Ya que $(0, k) = k(0, 1) = k \sum_{i=0}^{n} a_i \widetilde{\alpha}_i$ y $gr(0, k) = k \sum_{i=0}^{n} a_i s_i. = m$. Luego $gr(\widetilde{\alpha} + (0, k)) = gr\widetilde{\alpha} + m$. ■

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ tenemos entonces el siguiente teorema

Teorema 16 : ***Clasificación de Automorfismos de orden finito***

i) Dado υ un automorfismo de Dynkin de $\mathfrak{g}$, k el orden de υ y una sucesión $(s_0, s_1, ..., s_n) \in (\mathbb{Z}^+)^{n+1}$, con máximo común divisor 1, se puede construir un automofismo $\sigma(\upsilon, s_0, s_1, .., s_n)$ de $\mathfrak{g}$ de orden $m := k \sum_{i=0}^{n} a_i s_i$, como en la proposicion anterior.

ii) En toda clase de conjugación de un automorfismo de orden finito σ hay un representate de la forma $\sigma(\upsilon, s_0, s_1, ..., s_n)$.

iii) $\sigma(v, s_0, s_1, ..., s_n)$ *es conjugado a* $\sigma(v', s'_0, s'_1, .., s'_n)$ *sí y sólo sí* $v = v'$ *y hay automorfismos del diagrama de Dynkin generalizado que manda la sucesión* $(s_0, s_1, ..., s_n)$ *a* $(v', s'_0, s'_1, ..., s'_n)$.

2) *En la* $\mathbb{Z}_m$ *− graduación con respecto* $\sigma(v, s_0, s_1, ..., s_n) = \sigma$, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_m} \mathfrak{g}^\sigma_j$. *Determinamos, que* $\mathfrak{g}^\sigma_0$.*es la suma directa del álgebra de Lie semisimple correspondiente al subdiagrama en el diagrama de Dynkin de* $\mathfrak{g}$ *que consiste de los vértices* $i_1, i_2, ..., i_t$ *definidos por los elementos cero de la sucesión* $s_{i_1} = s_{i_2} = \cdots = s_{i_t} = 0$ *y su centro que es de dimensión* $n - t$.

Daremos la demostración del teorema a escepción de $1, (iii)$. Explicaremos el contenido de $1, (iii)$ en nuestra aplicación $m = 2$, en el capítulo 5.

Demostración :

Considere los datos $(v, s_0, s_1, ..., s_n)$ y $m = k \sum a_i s_i$ que aparecen en el enunciado $1, (i)$. Para llegar a el diagrama de Dynkin se ha utilizado un subálgebra de Cartán $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ y un conjunto de raices simples $\{\tilde{\alpha}_0 = (\alpha_0, 1), \tilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, 0), ..., \tilde{\alpha}_n = (\alpha_n, 0)\}$ de $L(\mathfrak{g}, v)$.Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_k} \mathfrak{g}^v_j$. la $\mathbb{Z}_k$ *− graduación* inducida por v. Por la proposición anterior $\mathfrak{g}^v_0$ es un álgebra de Lie simple con subálgebra de Cartán $\mathfrak{h}^v_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^v_0$. Fijamos generadores canónicos X_i, Y_i, H_i con $(1 \leq i \leq n)$ para $\mathfrak{g}^v_0$ que corresponden a las raices simples α_i. Fijamos también un vector no nulo X_0 en $\mathfrak{g}^v_0$ tal que $xX_0 \in L(\mathfrak{g}, v)^{\tilde{\alpha}_0}$. Sea ε la raíz primitiva m *− ésima* de la unidad. Mostramos (i).

Sea $\phi : L(\mathfrak{g}, v) \longrightarrow \mathfrak{g}$ el homomorfismo proyección de Lie (4.13). Sí $P = \sum_{i=1}^{k} x^j \mathfrak{g}^v_j$ entonces $\phi(P) = \mathfrak{g}$. Como demostramos en el la proposición (7) los elementos $e_0 = xX_0, e_1 = xX_1, ..., e_n = xX_n$ generan la subálgebra $L(\mathfrak{g}, v)^+$ definida como $\bigoplus_{\tilde{\alpha}>0} L(\mathfrak{g}, v)^{\tilde{\alpha}}$. Ya que P esta contenido en $L(\mathfrak{g}, v)^+$ y $\phi(L(\mathfrak{g}, v))^+ = \mathfrak{g}$, los elementos $X_0, X_1, ..., X_n$ generan a $\mathfrak{g}$. Así se obtiene un único automorfismo $\tilde{\sigma}$ de $L(\mathfrak{g}, v)$ definido

$$\tilde{\sigma}(e_{\tilde{\alpha}}) = \varepsilon^{\sum k_i s_i} e_{\tilde{\alpha}} \text{ siempre que } \tilde{\alpha} = \sum k_i \tilde{\alpha}_i \text{ y } e_{\tilde{\alpha}} \in L(\mathfrak{g}, v)^{\tilde{\alpha}}.$$

Con la $\mathbb{Z}$*−graduación* de tipo $(s_0, s_1, ..., s_n)$ definida sobre $L(\mathfrak{g}, v)$ se tiene la descomposición $L(\mathfrak{g}, v) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} L_j$. Se tien que $x^k L_j$ pertenece al espacio propio de $\tilde{\sigma}$ de valor propio ε^j.

La proposición anterior nos afirma que $x^k L_j = L_{j+m}$, lo cual implica que x^k conserva los espacios propios de $\tilde{\sigma}$. Se sigue, que $ker(\phi) = (1 - x^k) L(\mathfrak{g}, v)$ esta en el *núcleo* de $\tilde{\sigma}$. Inducimos un automorfismo de $\sigma(v, s_0, s_1, ..., s_n)$ de $\mathfrak{g}$ determinado por $\sigma\phi = \phi\tilde{\sigma}$. Es $\tilde{\sigma}$ de orden m pués el máximo comun divisor de $s_0, s_1, ..., s_n$ es 1. Consecuentemente también es de orden m.

Para (ii) sea τ un automorfismo de $\mathfrak{g}$ de orden m.Con ε la m *− ésima* raíz primitiva de

1, τ produce una $\mathbb{Z}_m$ -- *graduación* $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}$.Sea $\phi' : L(\mathfrak{g},\tau) \longrightarrow \mathfrak{g}$ el homomorfismo cubriente, que sabemos satisface $\phi'(L(\mathfrak{g},\tau)_j) = \mathfrak{g}_j$. Consideremos ahora el álgebra cubriente $L(\mathfrak{g},\upsilon)$ y el isomorfismo $\widetilde{\psi} : L(\mathfrak{g},\tau) \longrightarrow L(\mathfrak{g},\upsilon)$ dado el teorema (13), con los enteros $(s_0, s_1, ..., s_n)$ que conservan las $\mathbb{Z}-$*graduaciones* de la proposición (9), tenemos un diagrama conmutativo con $\mu_r : L(\mathfrak{g},\upsilon) \longrightarrow \phi' : L(\mathfrak{g},\upsilon)$ que conserva cada $L(\mathfrak{g},\upsilon)^{\tilde{\alpha}}$ y un automorfismo $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, concretamente $\psi \circ \phi' = \phi \circ \mu_r \circ \widetilde{\psi}$. Por lo que se cumple

$$\psi \circ \phi' \left(L(\mathfrak{g},\tau)_j\right) = \phi \left(\bigoplus_{gr\tilde{\alpha}=j} L(\mathfrak{g},\upsilon)^{\tilde{\alpha}} \right).$$

Así ψ manda el espacio propio de τ con valor propio ε^j al espacio propio del automorfismo de $\sigma(\upsilon, s_0, s_1, ..., s_n)$, que se construyó en 1) (i) de valor propio ε^j. Por lo tanto $\psi \circ \tau \circ \psi^{-1} = \sigma$ y el orden de σ es m. Sí d es el máximo comun divisor de $s_0, s_1, ..., s_n$ y como sabemos $(0, m)$ es una raíz de $L(\mathfrak{g},\tau)$, entonces d divide a m, pero por la definición de σ y $\widetilde{\sigma}$, d tiene que ser 1; de otra manera m no seria el orden.

Finalmente para ver la segunda parte tomemos la $\mathbb{Z}_m$ -- *graduación* $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j$ definida por $\sigma = \sigma(\upsilon, s_0, s_1, ..., s_n)$. Con el álgebra cubriente $L(\mathfrak{g},\upsilon) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} L_j$ establecemos que para toda γ en $\mathbb{Z}$, $\phi(L_{j+\gamma m}) = \phi\left(x^{\gamma k} L_j\right) = \phi(L_j)$. Además $L_j \cap \left(1 - x^k\right) L(\mathfrak{g},\upsilon) = 0$. En consecuencia ϕ es un automorfismo entre L_j y $\mathfrak{g}_j^{\sigma}$.En particular $\mathfrak{g}_0^{\sigma}$ es isomorfa a $L_0 = \bigoplus_{gr\tilde{\alpha}=0} L(\mathfrak{g},\upsilon)^{\tilde{\alpha}}$,pero $\tilde{\alpha}$ es de grado cero sí y sólo sí $\tilde{\alpha} = \sum_{i01}^{t} k_{i_r} \widetilde{\alpha}_{i_r}$. Ahora, de la proposición 4.7, sabemos que $L(\mathfrak{g},\upsilon)^{\tilde{\alpha}}$ esta generado por los conmutadores $[e_{j_1}, e_{j2}, .., e_{j_s}]$ que cumplen $\widetilde{\alpha}_{j_1} + .. + \widetilde{\alpha}_{j_s} = \widetilde{\alpha}$ de aqui que L_0 es un álgebra de Lie generada por $H_{j_r}, f_{j_i}, e_{j_i}$ con $i = 1, 2, .. , n$ y $r = 1, 2, .., t$. Definimos $Y_j = \phi(f_j)$. Entonces X_{j_r}, Y_{j_r}, con, $r = 1, 2, .. , t$ generan la parte semisimple de $\mathfrak{g}_0^{\sigma}$. El centro Z de $\mathfrak{g}_0^{\sigma}$ es por tanto el conjunto ortogonal, con respecto a la forma de Killing, a todo H_{i_r} en $\mathfrak{h}$, por lo que $\dim Z = n - t$ ■

Capítulo 5

Aplicación: Automofismos de Orden Dos y Formas Reales.

En este capítulo nuestro objetivo es determinar *las involuciones de un álgebra de Lie sobre* $\mathbb{C}$, que con el teorema (13) determinemos al mismo tiempo sus formas reales. Por el teorema (16) es suficiente con determinar las involuciones de $\mathfrak{g}$ de la forma $\sigma(\nu, s_0, s_1, ...s_n)$. Es decir si k es el orden de v (automorfismo de Dynkin) y $\{a_0,\ a_1, ...,\ a_n\}$ es una colección de naturales como en el teorema 16, tenemos por la proposición 4.11 $2 = m = k\sum_0^n a_i s_i$ esto nos lleva a tres posibles situaciones.

(A) $k = 1$ y un índice i_0 con $a_{i_o} = 2$, y $s_{i_o} = 1$; para $i \neq i_0$ es $s_i = 0$

(B) $k = 2$ y un índice i_0 con $a_{i_o} = 1$, y $s_{i_o} = 1$; para $i \neq i_0$ es $s_i = 0$

(C) $k = 1$ y dos índice i_0, i_1 con $a_{i_o} = s_{i_o} = a_{i_1} = s_{i_1} = 1$; $s_i = 0$ si $i \neq i_0, i_1$

Por el teorema 16 parte 2, $\mathfrak{g}_0^\sigma$ es *un álgebra de Lie semisimple en el caso* (A) *y* (B) y en el caso (C) es la suma directa de su centro uno dimensional con el álgebra semisimple $[\mathfrak{g}_o^\sigma, \mathfrak{g}_0^\sigma]$.

Calculamos (A) por medio de Dynkin I de la tabla $(4-1)$

El caso $\mathfrak{a}_n^{(1)}$ ($n \geq 1$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_n$) no tiene posibilidades. Para $\mathfrak{b}_n^{(1)}$ ($n \geq 1$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_n$)

hay $(n-1)$ indices i_0 con $a_{i_o} = 2$ y no hay un automorfismo del diagrama que conmute dos de estos índices. El teorema (16) implica, por $1(iii)$, que hay exactamente $(n-1)$ clases de autorfismos de orden dos y, por el teorema (16), 2), que del diagrama se tiene $\mathfrak{g}_0^\sigma = \mathfrak{d}_l \oplus \mathfrak{d}_{n-l}$ para $2 \leq l \leq n$.

En el caso $\mathfrak{c}_n^{(1)}$ $(n \geq 2,\ \mathfrak{g} = \mathfrak{c}_n)$ como en el caso anterior hay $(n-1)$ índices sólo que hay un automorfismo de orden 2 de $\mathfrak{g}$. Esto nos deja con sólo $\left[\frac{n}{2}\right]$ posibilidades entonces tomando el indice de izquierda a derecha del diagrama obtenemos que $\mathfrak{g}_0^\sigma$ es $\mathfrak{c}_l \oplus \mathfrak{c}_{n-l}$ $\left(l = 1, 2, .. \left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

Para $\mathfrak{d}_n^{(1)}$ $(n > 3,\ \mathfrak{g} = \mathfrak{d}_n)$ el analisis es el mismo que para $\mathfrak{c}_n^{(1)}$, pero aquí con $(n-3)$ índices. Del diagrama obtenemos que $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ clases y $\mathfrak{g}_0^\sigma$ es $\mathfrak{d}_l \oplus \mathfrak{d}_{n-l}$ $\left(l = 2, 3, ..., \left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

En el caso $\mathfrak{e}_6^{(1)}$ hay tres indices i_0 con $a_{i_0} = 2$, sin embargo, por simetria, sólo obtenemos una clase por que hay un automorfismo en el diagrama que lleva una posibilidad en la otra. El álgebra $\mathfrak{g}_0^\sigma$ es $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{c}_3$

Para $\mathfrak{g}_2^{(1)}$ es automatico, sólo hay una clase y $\mathfrak{g}_0^\sigma$ es $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$. En los casos $\mathfrak{f}_4^{(1)}, \mathfrak{e}_7^{(1)}, \mathfrak{e}_8^{(1)}$ hay dos posibilidades de tomar el indice i_0 sin simetrias, por lo que hay dos clases de automorfismos de orden 2 en cada caso. El resultado es que las álgebra $\mathfrak{g}_0^\sigma$ son $\mathfrak{a}_7, \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_5$ para $\mathfrak{e}_7^{(1)}$; $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{e}_7, \mathfrak{d}_8$ para $\mathfrak{e}_8^{(1)}$ y $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{c}_3$ para $\mathfrak{f}_4^{(1)}$.

Calculemos (B) por medio de **Dynkin II** de la tabla $(4-1)$. De los cinco diagramas $\mathfrak{a}_2^{(2)}, \mathfrak{a}_{2n}^{(2)}$ $(n > 1)$ tienen una sólo situación donde $a_{i_0} = 1$ en los cuales $\mathfrak{g}_0^\sigma$ son $\mathfrak{a}_1$ y $\mathfrak{c}_n$ respectivamente. Con $\mathfrak{e}_6^{(2)}$ tenemos dos posibilidades sin simetrias, así que hay dos clases de automorfismos de orden 2 con $\mathfrak{g}_0^\sigma = \mathfrak{c}_4$ ó $\mathfrak{f}_4$

En los otros dos casos hay un automorfismo de orden 2 del diagrama que reducen las situaciones. Para $\mathfrak{a}_{2n-1}^{(2)}$ $(n > 2)$ hay dos clases de automorfismo σ en cuyos casos $\mathfrak{g}_0^\sigma$ es $\mathfrak{d}_n$ y $\mathfrak{c}_n$ respectivamente

$\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ $\mathfrak{b}_p$ $\mathfrak{b}_{n-p}$ $0 < p \leq \left[\frac{n}{2}\right]$

Finalmente calculamos (C) por medio de de la tabla $(4-1$ **Dynkin1**$)$. están descartados $\mathfrak{e}_8^{(1)}, \mathfrak{f}_4^{(1)}$ y $\mathfrak{g}_2^{(1)}$. En los casos $\mathfrak{a}_1^{(1)}, \mathfrak{b}_n^{(1)}$ $(n > 2)$, $\mathfrak{c}_n^{(1)}$ $(n > 1)$ y $\mathfrak{e}_7^{(1)}$ hay una única manera de escoger los indices, por lo que hay una sola clase de automorfismo de orden 2. Aqui $[\mathfrak{g}_0^\sigma, \mathfrak{g}_0^\sigma]$ es cero, para $\mathfrak{b}_{n-1}$, $\mathfrak{a}_{n-1}$ y $\mathfrak{e}_6$ respectivamente

Por simetria $\mathfrak{e}_6^{(1)}$ y $\mathfrak{d}_4^{(1)}$ tienen una sola clase; el álgebra $[\mathfrak{g}_0^\sigma, \mathfrak{g}_0^\sigma]$ que resulta es $\mathfrak{d}_5$ y $\mathfrak{d}_3$ respectivamente. También por simetria $\mathfrak{d}_n^{(1)}$ $(n > 4)$ tine exactamente dos clases con $[\mathfrak{g}_0^\sigma, \mathfrak{g}_0^\sigma]$ igual a $\mathfrak{d}_{n-1}$ ó $\mathfrak{a}_{n-1}$. El último caso es $\mathfrak{a}_n^{(1)}$ con $(n > 1)$. Ya que el diagrama tiene automorfismos que son simetrias rotacionales ó axiales, solamente hay $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ clases de automorfismos σ de orden dos para los cuales obtenemos en orden las varias $[\mathfrak{g}_0^\sigma, \mathfrak{g}_0^\sigma]$ como $\mathfrak{a}_l \oplus \mathfrak{a}_{n-l-1}$ $\left(l = 0, 1, .., \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$.

($\mathfrak{g}_0$ *Semisimple*)

$k=1$		$k=2$	
$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$
$\mathfrak{b}_n$ $(n>2)$	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}$ $(2\leq p\leq n)$	$\mathfrak{a}_{2n}$ $(n \geq 1)$	$\mathfrak{b}_n$
$\mathfrak{c}_n$ $(n>1)$	$\mathfrak{c}_p \oplus \mathfrak{c}_{n-p}$ $(0\leq p\leq [\frac{1}{2}n])$	$\mathfrak{a}_{2n-1}$ $(n > 2)$	$\mathfrak{d}_n$
$\mathfrak{d}_n$ $(n>3)$	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{d}_{n-p}$ $(1\leq p\leq [\frac{1}{2}n])$	$\mathfrak{a}_{2n-1}$ $(n > 2)$	$\mathfrak{c}_n$
$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{d}_{n+1}$ $(n>1)$	$\mathfrak{b}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}$ $(1\leq p\leq [\frac{1}{2}n])$
$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{b}_4$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{c}_4$
$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{f}_4$
$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_5$		
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{a}_7$		
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{d}_6$		
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{e}_7$		
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{d}_8$		

$(dim(centro(\mathfrak{g}_0)) = 1)$

$\mathfrak{g}$	$[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$	$\mathfrak{g}$	$[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$
$\mathfrak{a}_n$ $(n\geq 1)$	$\mathfrak{a}_p \oplus \mathfrak{a}_{n-p-1}$ $(1\leq p\leq [\frac{1}{2}(n-1)])$	$\mathfrak{d}_n$ $(n>3)$	$\mathfrak{d}_{n-1}$
$\mathfrak{b}_n$ $(n \geq 2)$	$\mathfrak{b}_{n-1}$	$\mathfrak{d}_n$ $(n>4)$	$\mathfrak{a}_{n-1}$
$\mathfrak{c}_n$ $(n>1)$	$\mathfrak{a}_{n-1}$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{d}_5$
		$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_6$

Tabla 5-1:

Bibliografia

[1] I.N. Bernstein - I.M. Gelfand - V.A. Ponomarev *Coxeter funtors and a theorem of Gabriel*, Uspechi Mat. Nauk 28 (1973), 19-33.

[2] Ringel, Claus Michael *Tame álgebras and integral quadratic forms*, Berlin; Springer, 1984.

[3] Helgason Sigurdur *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, New york; Academic press, 1978.

[4] *Hoffman*. Kenneth - Kunze Ray *Álgebra Lineal,* Prentice-Hall Hispanoamericana 1984.

[5] Humphreys James.E *Introduction to Lie álgebras and representation theory*, New york; Springer-verlag, 1972.

[6] Kăc Victor G. *Infinite dimensional Lie álgebras*, Cambridge University Press 1990

[7] Kăc Victor G. *Automorphisms of finite order of semisimple Lie algebras.* Funkcional. Anal i Prilozen. 3 (1969), 94-96

[8] Anthony W.Knapp *Lie Groups Beyond an Introduction* , Boston, Birkhauser 1996.

[9] Shi Jian-Yi *The Kazhdan-Lusztig cells in centair affine Weyl groups*, Berlin: Springer-verlag 1986.