

01149

8

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA



**"INTERACCIÓN SUELO-CIMENTACIÓN CON EL
MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA"**

Tesis

que para obtener el grado de Maestro en Ingeniería presenta:

Ing. Martín Mejía Ramos
Director de tesis :
Dr. Eduardo Reinoso Angulo

285680

México, D.F. septiembre del 2000



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos:

A mis padres:

**Filemón Mejía Piñón y
Alicia Ramos Ruiz**

Con mi más sincero agradecimiento porque han significado todo para mí; especialmente en esos momentos que uno considera difíciles y que gracias a ustedes pueden ser superados de la manera más objetiva. Gracias por brindarme su apoyo en todos los sentidos posibles de manera incondicional, gracias por ser como son, gracias por dejarme ser parte de ustedes,...los amo.

A mis hermanos:

Antonio y Berenice

Porque han sabido ser mis amigos, por ser tan inteligentes y porque los admiro mucho; por aguantarme en todos estos años de vida y porque nos sigamos aguantando todavía muchos más... Que siempre sigamos estando unidos, aún estando lejos...

A mi director de tesis:

Con profundo agradecimiento al Dr. Eduardo Reinoso Angulo, por sus comentarios, paciencia y tiempo en la realización de este trabajo...Gracias.

A Maricela Torres, por existir.

Contenido

Introducción	1
Capítulo 1 Tipos de Ondas Sísmicas	
1 Generalidades	1
1.1 Tipos de ondas	1
1.1.1 ondas internas	2
1.1.2 ondas de superficie	4
Capítulo 2 Interacción Suelo-Estructura	
2 Definición	6
2.1 Análisis de la Interacción Suelo-Estructura	8
2.1.1 Métodos de Interacción Dinámica Suelo-Estructura	9
2.1.1.a Métodos completos	9
a Método de elementos finitos	9
2.1.1.b Métodos de subestructuración	11
a Walter	12
b Método de la frontera rígida	13
c Método de la frontera flexible	14
d Método de volumen flexible	14
2.1.2 Algunos resultados de la Interacción Suelo-Estructura	14
2.1.2.a Efectos de la Interacción Suelo-Estructura	14
2.1.2.b Influencia de la profundidad de desplante	15
2.2 Análisis y verificación sísmica de cimentaciones	15
2.2.1 Determinación de la velocidad media del sitio	17
2.3 Conclusiones	18
Capítulo 3 Método de elementos de frontera	
3 Introducción	19
3.1 Modelado numérico de cimentaciones en el valle de México	20
3.2 Antecedentes del Método de Elementos de Frontera	21
3.3 Características del Método de Elementos de Frontera	21
3.4 Modelado de cimentaciones con el Método de Elementos de Frontera	23
3.4.1 Ecuaciones de regulación de ondas SH	23
3.4.2.1 Formulación de la integral de frontera	24
3.4.2.2 El Método de Elementos de Frontera	27
3.4.2 Ecuaciones de regulación de ondas P, SV y Rayleigh	29
3.4.2.1 Formulación de la integral de frontera	30
3.4.2.2 Solución fundamental	31
3.4.2.3 Condiciones de frontera sobre la superficie en tracción libre	31
3.4.2.4 El Método de Elementos de Frontera	33

Capítulo 4 Aplicaciones a cimentaciones en suelos blandos

4.1 Modelado de la respuesta sísmica de la zona del Valle de México	37
4.2 Obtención de resultados	38
4.3 Análisis de resultados	39
4.4 Observaciones de la Interacción Cinemática de un edificio en la Ciudad de México	60

Capítulo 5 Conclusiones

62

Bibliografía

64

Capítulo 1

Tipos de Ondas Sísmicas

1 Generalidades

Para poder predecir o determinar la forma en que va a vibrar el terreno durante un sismo, así como la intensidad que tendrá el movimiento y su duración, es necesario conocer las características de las ondas sísmicas y la forma en que la energía es irradiada a través del medio sólido de la tierra.

Cualquier medio elástico responde a un impacto o a un disturbio externo vibrando; las ondas elásticas se propagan a través del cuerpo o medio en todas direcciones a partir de la fuente o el origen del impulso.

La roca de la corteza terrestre tiene propiedades físicas que hacen que ésta se deforme y vibre elásticamente cuando fuerzas externas actúan sobre ella. Cuando la roca se fractura debido a la deformación de la corteza, se libera la energía acumulada en el material que es disipada principalmente en forma de calor. Una parte de esta energía es irradiada en forma de ondas sísmicas que se propagan a través del medio sólido de la tierra en forma similar a las vibraciones producidas por el sonido o las ondas en la superficie del agua. Las ondas sísmicas se propagan a partir de la zona donde se inició la ruptura, llamada foco o hipocentro, en todas direcciones, haciendo vibrar la superficie de la tierra y son percibidas por las personas como temblores, a veces llamados terremotos cuando causan destrucción (E. Rosenblueth, 1978).

1.1 TIPOS DE ONDAS

Existen diversas causas que originan la ocurrencia de un temblor, entre ellas se pueden mencionar: el desplazamiento relativo de las placas tectónicas y la actividad volcánica. Estas provocan la emanación de ondas sísmicas en todas direcciones,

desde un punto llamado foco. Las principales ondas sísmicas que se generan son de dos tipos: ondas internas (P y S) y ondas superficiales (Love y Rayleigh) (F. Sauter, 1980).

1.1.1 Ondas internas

Este tipo de ondas se propaga en el interior de las capas terrestres y son conocidas como ondas primarias (ondas P) y ondas secundarias (ondas S).

En las *ondas primarias P*, las partículas se desplazan en la dirección de propagación de la onda, comprimiendo y dilatando alternativamente el medio de propagación a través del cual viajan. Además son capaces de transmitirse en medios sólidos, así como en medios líquidos, tales como el magma en el interior de la tierra o el agua en los océanos. Estas ondas son conocidas como ondas longitudinales o de compresión (Figura 1.1). Las ondas P son capaces de transmitirse a través de la atmósfera, por lo que a veces son percibidas por personas y animales como un sonido grave y profundo.

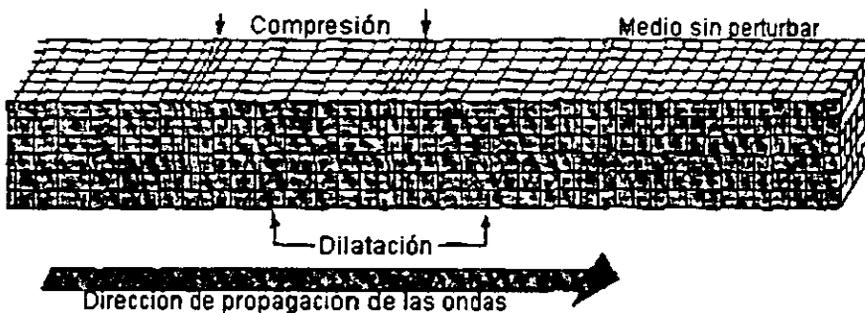


Figura 1.1 Ondas de cuerpo P

Si se considera un medio homogéneo, linealmente elástico, isótropo, con densidad de masa ρ , se ha determinado que las ondas P viajan con una velocidad equivalente a la siguiente ecuación:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1-\mu)E}{(1-\nu-2\nu^2)\rho}} \quad 1.1$$

Las constantes de Lamé frecuentemente se reemplazan con otros parámetros relacionados con ellas como sigue:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad 1.2$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad 1.3$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\nu)}{\lambda + \mu} \quad 1.4$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad 1.5$$

en donde λ y μ (esta última representada frecuentemente por G), son las constantes de Lamé, características del medio en cuestión, ν es la relación de poisson, $\mu = G$ módulo de rigidez.

Las *ondas secundarias S*, son conocidas como ondas de cortante, transversales o de cizalla son ondas internas con velocidad de propagación menor que las ondas P. Estas hacen vibrar una partícula en sentido perpendicular a la trayectoria de las ondas, produciendo esfuerzos de cizalla en el medio sólido en que se propagan. Este tipo de ondas solo pueden transmitirse en medios sólidos (Figura 1. 2). Su velocidad se representa por:

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad 1.6$$

Cuando ocurre un terremoto la onda P se siente primero, con un efecto de retumbo que hace vibrar paredes y ventanas de las viviendas. Algunos segundos después llega la onda S con su movimiento de arriba hacia abajo y de lado a lado, que sacude la superficie del suelo vertical y horizontalmente. Este es el movimiento responsable del daño en las construcciones.

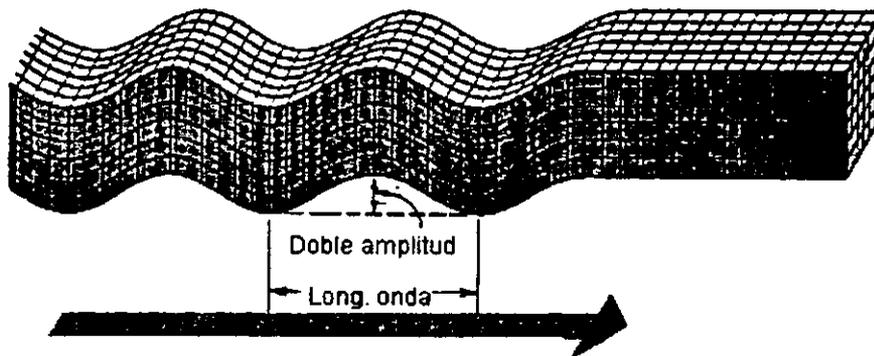


Figura 1. 2 Ondas de cuerpo S

Las ondas secundarias pueden sufrir una polarización plana. En sismología cuando una onda S está polarizada de manera que todo el movimiento de las partículas tiene lugar en dirección horizontal se llama onda SH; cuando todos los movimientos tienen lugar en planos verticales que contienen la dirección del recorrido de la onda, se llama SV.

1.1.2 Ondas de superficie

La propagación de este tipo de ondas está limitada a la superficie del suelo, por lo que su movimiento se ubica en la superficie libre del medio y conforme la profundidad es mayor los movimientos producidos por estas ondas son menores, (hasta unos 30 km).

Las ondas de superficie generadas por un terremoto se pueden clasificar en dos grupos. El primero es el de las *ondas Love*, llamadas así en honor a quien las descubrió, el Físico A. E. H. Love, las cuales deforman las rocas de la misma manera que las ondas S. El segundo es el de las *ondas Rayleigh*, en honor a Lord Rayleigh, que tienen un movimiento vertical similar al de las olas del mar. Las ondas superficiales viajan más despacio que las ondas internas y, de éstas las ondas Love son las más rápidas.

En las *ondas Love*, el movimiento de las partículas del medio es perpendicular a su dirección de propagación sobre un plano horizontal paralelo a la superficie del medio, además carecen de desplazamiento vertical (Figura 1.3).

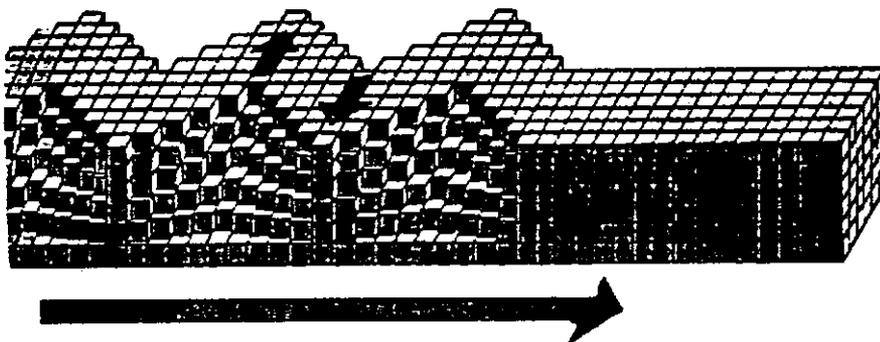


Figura 1. 3 Ondas de superficie Love

En general, la velocidad de propagación de las ondas Love es menor que el de las ondas Rayleigh, pero menor que el de las ondas internas.

Bajo las *ondas Rayleigh*, las partículas del medio se mueven en forma elíptica retrógrada sobre un plano vertical orientado en la dirección de propagación de las ondas. En este tipo de ondas existen desplazamientos de las partículas, tanto en la

dirección vertical como horizontal, teniéndose esfuerzos de compresión y de cortante (Figura 1.4).

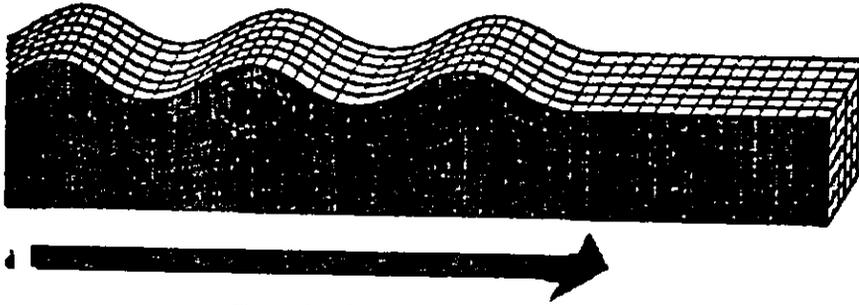


Figura 1.4 Ondas de superficie Rayleigh

Las ondas Rayleigh, debido a la componente vertical de su movimiento, pueden afectar cuerpos de agua, por ejemplo lagos, mientras que las Love (que no se propagan a través del agua) pueden afectar la superficie del agua debido al movimiento lateral de la roca que circunda lagos y bahías.

En una formación rocosa sobre la cual se encuentran depósitos de material más blandos, al arribar las ondas sísmicas al primero y propagarse sobre el segundo, sufren un efecto de filtrado local provocando la intensificación de ondas de determinada frecuencia y la reducción de ondas con otro tipo de frecuencias, estos fenómenos también se conocen como amplificación o de amplificación local, respectivamente. Tales fenómenos dependen principalmente de factores tales como el perfil estratigráfico, las propiedades dinámicas de los estratos y la intensidad del movimiento.

Considerando los aspectos mencionados anteriormente, en ésta tesis se pretende realizar un estudio del comportamiento de cimentaciones sujetas a los diversos tipos de ondas sísmicas, tales como P, SV, SH y Rayleigh; los resultados que aquí se presentan corresponden a cimentaciones enterradas en semiespacios.

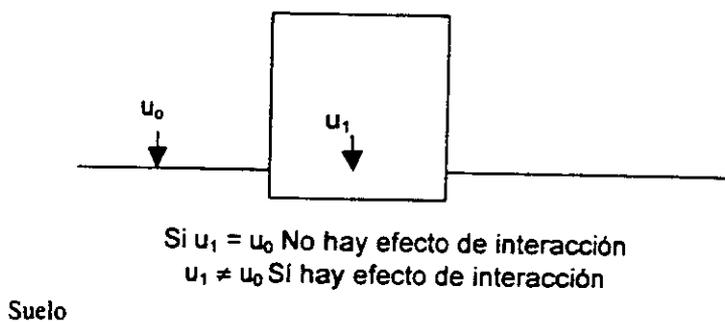
Capítulo 2

Interacción Suelo-Estructura

2. Generalidades

Se conoce como interacción suelo-estructura a la modificación del movimiento del terreno provocado por la presencia de la estructura y su cimentación (en la base la estructura). Existe una mayor interacción en la medida en la que el movimiento en la base de la estructura se ve modificado por la presencia de la misma.

El fenómeno de interacción se desarrolla por el acoplamiento de los movimientos del suelo y de la cimentación del edificio. En la Figura 2.1 se muestra esquemáticamente el concepto de interacción dinámica suelo-estructura. Al arribar las ondas sísmicas a la superficie del suelo se generan movimientos en las estructuras desplantadas sobre él. Si los desplazamientos en el terreno libre (u_0) son diferentes que los de la cimentación (u_1), se dice que la estructura y el terreno están acoplados y por lo tanto existe interacción suelo-estructura. Por otra parte, si u_0 es igual que u_1 , el fenómeno de interacción no se desarrolla.



↔
 Excitación

Figura 2.1 Interacción dinámica suelo-estructura.

Para analizar la respuesta sísmica de edificios, es usual utilizar como excitación a los movimientos de campo libre (espectros de aceleraciones consignados en Reglamentos de Construcción), despreciando los efectos que puede tener la presencia de la estructura en estos movimientos.

En general la influencia de la interacción dinámica en los movimientos de campo libre son:

1. La variación espacial de los movimientos en terreno libre tiende a ser eliminada por la presencia de una cimentación rígida; la magnitud de este efecto depende del área y rigidez de la cimentación y del grado de heterogeneidad de los movimientos de campo libre. En general la amplitud máxima del movimiento de la cimentación será menor que las que ocurren en el terreno libre. Así por ejemplo, losas de cimentación con rigidez superior a la del suelo de apoyo y con dimensiones en planta mayores que un cuarto de la longitud de las ondas tienen un efecto uniformador de las variaciones espaciales y temporales de los movimientos de campo libre. Esto conduce a que las amplitudes de los movimientos en la losa sean en general menores que los que ocurrirían en el suelo si la cimentación no estuviera presente.
2. Otro componente que puede afectar los movimientos de campo libre se debe a la resistencia inercial que ofrece la superestructura contra los movimientos dinámicos, la cual persiste durante toda la excitación. Este efecto, denominado *interacción inercial*, resulta en cambios en la presión de contacto entre la cimentación y el suelo, lo cual causa deformación en éste. Debido a la deformabilidad del suelo, el periodo efectivo de la estructura se incrementa con respecto al calculado para la condición de apoyo rígido.
3. Si la cimentación de un edificio está desplantada a una profundidad significativa, los movimientos sísmicos que actúan en su base son menores que los que ocurren en sus paredes, debido a que la intensidad de los movimientos del terreno decrecen con la profundidad. Cuando la base y las paredes exteriores de la cimentación interactúan con el suelo, se desarrolla el fenómeno denominado *interacción cinemática*. El efecto de la interacción cinemática (del empotramiento) en la respuesta de las estructuras y en los movimientos de campo libre puede ser significativo para cimentaciones profundas de alta rigidez.

El problema básico de la interacción dinámica suelo-estructura involucra la evaluación de la respuesta de una o más estructuras en un sitio particular para un sismo determinado (sismo de diseño) especificado en el campo libre a una elevación específica (punto de control). El estudio completo del fenómeno de interacción incluye necesariamente dos etapas: el análisis del terreno libre y el de interacción. El primero consiste en determinar las variaciones espaciales y temporales de los movimientos de campo libre y el segundo permite evaluar la respuesta de la

estructura colocada en el medio ambiente sísmico definido para el campo libre (Romo, 1990).

La estructuración de la cimentación y el esqueleto estructural del edificio constituyen un continuo que juega un papel importante en la interacción suelo-estructura de la cimentación. Es decir, la flexibilidad del conjunto: estructura de cimentación y superestructura del edificio es de gran importancia cuando esta se compara con la flexibilidad dinámica de la masa del suelo donde se apoya la cimentación del edificio.

Algunos de los factores de los que depende el grado de interacción que puede existir en la respuesta sísmica de una estructura son:

- a) Peso total de la estructura
- b) Rigidez lateral de la estructura
- c) Altura de la estructura
- d) Relación de esbeltez de la estructura
- e) Tipo de cimentación (superficial, empotrada, piloteada, etc.)
- f) Tamaño de la cimentación
- g) Forma de la cimentación
- h) Rigidez de la cimentación
- i) Propiedades dinámicas del suelo
- j) Profundidad y estratigrafía del suelo
- k) Intensidad del movimiento sísmico
- l) Contenido de frecuencias del movimiento sísmico

2.1 Análisis de la interacción suelo-estructura

La presencia de una estructura modifica el movimiento sísmico del suelo, sin embargo, la importancia de esta interacción depende de la naturaleza del suelo, de las características de la construcción y del tipo de cimentación. Para ciertas edificaciones, cimentadas superficialmente, la interacción puede ser prácticamente despreciable. En otros casos, es imprescindible tomar en cuenta que la construcción es parte de un sistema constituido por la estructura misma, el suelo y las estructuras vecinas.

Existe una creencia generalizada en el sentido de que la interacción suelo-estructura provoca un aumento en la respuesta estructural, esto es, que perjudica a la estructura, sin embargo esto no siempre es cierto. La interacción suelo-estructura puede ser benéfica para la estructura. Por ejemplo en el caso de plantas nucleares, si se compara un análisis sísmico considerando interacción suelo-estructura con otro análisis que desprece esta interacción, normalmente la interacción resulta en una disminución de la respuesta. De modo que la respuesta sísmica de una estructura puede aumentar o disminuir como resultado de la interacción suelo-estructura. En

otros casos aunque el desplazamiento total del sistema suelo-cimentación-superestructura se ve incrementado, la distorsión (deformación) estructural se ve disminuida, al concentrarse parte de esa deformación en la cimentación (Miranda, 1995).

2.1.1 Métodos de análisis de interacción dinámica suelo-estructura

Las ecuaciones que gobiernan la interacción suelo-estructura pueden resolverse en el dominio de la frecuencia, usando la técnica de la transformada de Fourier, o directamente en el dominio del tiempo. Sin embargo, los análisis en el tiempo pueden ser muy elaborados para aplicaciones prácticas, por lo que generalmente para fines de diseño se prefieren los análisis en la frecuencia, sin que esto implique que el problema sea sencillo, ya que la solución de las ecuaciones de movimiento puede contener elementos en el campo de los números complejos (Avilés, 1999).

El fenómeno de interacción dinámica suelo-estructura analíticamente se puede estudiar mediante los métodos completos y los métodos de subestructura.

2.1.1.a Métodos completos

En estos métodos a diferencia de los de subestructuración, se determinan las respuestas de la masa de suelo y de la estructura simultáneamente. El sistema suelo-estructura completo se analiza ante excitación armónica en un punto de control localizado en la superficie del terreno o bien en la roca basal subyacente. Así se obtiene la función de transferencia del sistema acoplado, que en combinación con la síntesis de Fourier permite determinar la respuesta estructural ante excitación sísmica.

a) Método de elementos finitos

La interacción dinámica entre la estructura y el suelo circundante puede evaluarse por simulación numérica directa, recurriendo al método del elemento finito. Se determinan simultáneamente los movimientos del suelo y de la estructura.

Las ecuaciones del movimiento de un modelo global representando el suelo y la estructura pueden escribirse en forma matricial (Clough y Penzien, 1975):

$$[M]\{u\} + [C]\{u\} + [K]\{u\} = -\{M\}\{r\}y \quad 2.1$$

donde $[M]$, $[C]$, y $[K]$ son las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento; $\{u\}$ es el vector de desplazamientos respecto a la base del modelo y $\{r\}$ un vector unitario.

El método consiste en resolver globalmente este sistema de ecuaciones (2.1). La discretización en elementos finitos permite tomar en cuenta las heterogeneidades del suelo.

En la práctica, para reducir el tiempo y el costo de resolución del problema, es usual recurrir a modelos bidimensionales. Un modelo de este tipo ha sido desarrollado por Lysmer (1975) y generalizado por Romo (1977) para tomar en cuenta la incertidumbre sobre la sollicitación sísmica. Este modelo incluye fronteras viscosas sobre las caras laterales de la rebanada bidimensional estudiada para simular la propagación de energía de onda en la dirección perpendicular al eje de la rebanada. Las fronteras laterales permiten transmitir energía para simular los efectos dinámicos del sistema semi-infinito compuesto por suelo viscoelástico estratificado horizontalmente, más allá de la región representada con elementos finitos. La ecuación de equilibrio dinámico del sistema es (Lysmer *et al*, 1975).

$$[M]\{u\} + [K]\{u\} = -\{m\}y + \{V\} + \{F\} - \{T\} \tag{2.2}$$

donde

$[M]$ es la matriz de masa para estado plano de deformación correspondiente a una rebanada de espesor unitario

$[K]$ Matriz de rigidez compleja de estado plano de deformación para una rebanada de espesor unitario

$\{u\}$ Desplazamientos de los puntos nodales respecto a una base rígida

$\{m\}$ Vector relacionado con $[M]$ y la dirección de la aceleración de la base rígida Y

$\{V\}$ Fuerzas debidas a las fronteras viscosas

$\{F\}$ Fuerzas actuantes en un plano vertical en el campo libre

$\{T\}$ Fuerzas relacionadas con la transmisión de energía en las fronteras laterales

La ecuación de movimiento se resuelve en el dominio de la frecuencia utilizando el método de la respuesta compleja. Obteniendo la solución del sistema de ecuaciones resultante para un movimiento de entrada unitario de la base, se determina la función de transferencia compleja, $[H]_r$, de los desplazamientos relativos de los nodos:

$$[K]_r \{u\}_r = \{P\}_r, y_r \tag{2.3}$$

$$[H]_r = [K]_r^{-1} \{P\}_r, \tag{2.4}$$

donde $[K]_r$ es una matriz de rigideces dependiente de la frecuencia y $\{P\}_r$, también función de la frecuencia, es el vector de cargas correspondiente al movimiento de la base de amplitud unitaria. La respuesta de un sistema como el que se menciona a una excitación estocástica puede ser obtenida utilizando la siguiente ecuación (Romo *et al*, 1977):

$$P_u^j(\omega_r) = |H^j(\omega_r)|^2 P_r(\omega_r) \quad 2.5$$

donde

$H^j(\omega_r)$ es un vector que contiene la función de transferencia compleja del sistema suelo-estructura de la aceleración de la base rígida al desplazamiento del punto nodal j ; $P_r(\omega_r)$ es un vector que contiene las amplitudes del espectro de potencia del movimiento de entrada de la roca basal; y $P_u^j(\omega_r)$ es un vector que contiene las amplitudes del espectro de potencia de las amplitudes de los desplazamientos de respuesta del punto nodal j .

La respuesta máxima esperada puede ser evaluada utilizando las soluciones existentes para el problema del primer cruce que se presentan generalmente en la forma:

$$S_{T,P} = \gamma_{T,P} \sigma \quad 2.6$$

donde $S_{T,P}$ es el valor extremo que tiene probabilidad p de no ser excedido en un lapso de duración T .

La función $\gamma_{T,P}$ se llama "factor pico" y es el parámetro a determinar en el problema del primer cruce. En la ecuación 2.6 $S_{T,P}$, puede representar el valor de pico de cualquier variable aleatoria (aceleración, esfuerzo, etc.) y σ es la raíz cuadrada del valor medio cuadrático del espectro de potencia correspondiente.

Utilizando los conceptos de la teoría del valor extremo y la respuesta de sistemas de un solo grado de libertad, se establece un procedimiento para evaluar el espectro de respuesta a partir del espectro de potencia y viceversa (Romo *et al*, 1977).

2.1.1.b Métodos de subestructuración

En estos métodos, el sistema suelo-estructura se descompone en dos subsistemas independientes. (Figura 2.2):

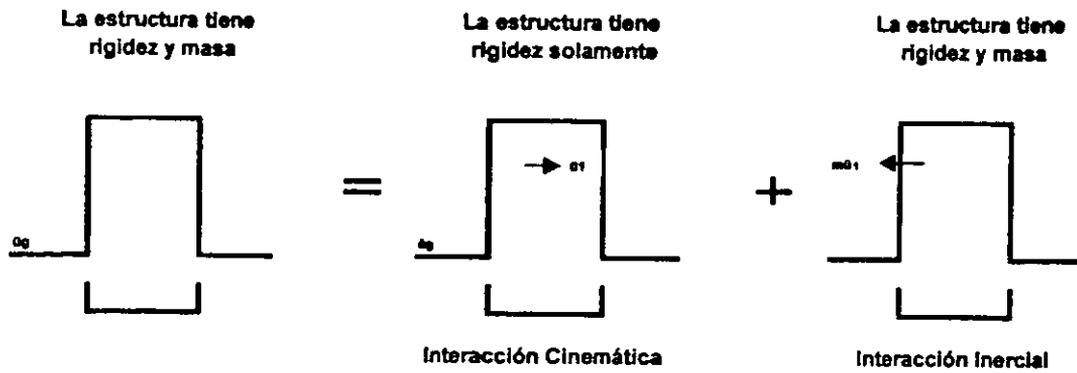


Figura 2.2 Solución en dos pasos para el problema de interacción dinámica suelo-estructura.

Interacción cinemática, definida por el mismo sistema, pero con la estructura carente de masa y sometida a la excitación sísmica, lo cual implica que no se generen fuerzas de inercia en la estructura.

Interacción Inercial, definida por el sistema original sometido a las fuerzas de inercia que se obtienen con la masa de la estructura y la aceleración cinemática.

a) Walter (1985)

Es posible aprovechar la linealidad del sistema de ecuaciones 2.1 para descomponer el movimiento $\{u\}$ y la matriz de masa $[M]$ como sigue:

$$\{u\} = \{u_1\} + \{u_2\} \tag{2.7}$$

$$[M] = [M_s] + [M_E] \tag{2.8}$$

donde $[M_s]$ es la matriz de masa del suelo y $[M_E]$ la matriz de masa de la estructura; $\{u_1\}$ y $\{u_2\}$ satisfacen las ecuaciones:

$$[M_s]\{u_1\} + [C]\{u_1\} + [K]\{u_1\} = -\{M_s\}\{r\}y \tag{2.9}$$

$$[M]\{u_2\} + [C]\{u_2\} + [K]\{u_2\} = -\{M_E\}(\{u_1\} + \{r\}y) \tag{2.10}$$

$\{u_1\}$ es el vector de movimientos respecto a la base del modelo considerando nula la masa de la estructura; estos movimientos son generalmente diferentes de los de campo libre. Esta diferencia se conoce como interacción cinemática

$\{u_2\}$ es el vector de movimientos adicionales debidos a las fuerzas de inercia generadas por el movimiento sísmico de la estructura. Es la interacción inercial

La respuesta total es la suma del movimiento de la base del modelo $\{y\}$, del movimiento de interacción cinemática $\{u_1\}$ y del movimiento de interacción inercial $\{u_2\}$.

La descomposición anterior ilustra el principio de los llamados métodos de subestructuración (Aubry, 1986), que consisten en analizar el problema de interacción en varias etapas, cada una de ellas con solución más cómoda que el problema global. La mayor parte de estos métodos recurren al concepto de impedancia (Avilés, 1999).

Las funciones de impedancia son comúnmente expresadas como la suma de un componente real y uno imaginario. Debido a esta representación matemática, la cual se asemeja a la obtenida para un sistema lineal viscoelástico, los componentes de las funciones de impedancia han sido asociados a un resorte equivalente y a un amortiguador viscoso, respectivamente. Desde el punto de vista físico al resorte se pueden asociar las propiedades de rigidez del suelo y al amortiguador la energía disipada por las ondas que se reflejan en la cimentación y se propagan en el medio. Este último es conocido como el amortiguamiento por radiación del suelo. Tanto el resorte como el amortiguamiento son función de:

- las propiedades del suelo
- las características geométricas de la cimentación y
- la frecuencia

Las funciones de impedancia comúnmente se expresan como:

$$K_j = K_j^0 (K_j + ia_0 C_j) \quad 2.12$$

En esta ecuación el subíndice j se refiere al modo de vibrar considerado (horizontal, rotacional, vertical, etc.); K_j^0 es la rigidez estática, K_j y C_j son coeficientes adimensionales de rigidez y amortiguamiento, respectivamente; a_0 es la frecuencia adimensional definida como:

$$a_0 = \frac{wB}{V} \quad 2.13$$

Donde B es la dimensión de la cimentación (radio si es circular o la mitad del ancho si se trata de una cimentación cuadrada o rectangular), w es la frecuencia circular en rad/s; V es la velocidad de propagación de ondas de cortante del suelo.

b) Método de la frontera rígida

Para la interfaz suelo-estructura, suponiendo una cimentación rígida, no se requiere el sistema, sólo la interfaz rígida sin masa (Kausel y Roesset, 1974).

No se toman en cuenta los grados de libertad impuestos por el suelo y se pueden expresar los efectos de la subrasante en términos de funciones de impedancia (rigidez dinámica). La solución se da en el dominio de la frecuencia.

c) Método de la frontera flexible

Se consideran más grados de libertad para el problema de impedancias de la subrasante, por lo que la matriz de impedancias resulta de mayor orden (Gutiérrez, 1976).

d) Método de volumen flexible

Método de Volumen Flexible, consiste en seleccionar el suelo y la estructura, tomando a la estructura como la superestructura más la cimentación menos el suelo excavado, sin tomar en cuenta el suelo excavado. La interacción entre el suelo y la cimentación ocurre en todos los nudos de la estructura en contacto con el subsuelo (Lysmer, 1978, Figura 2.3).

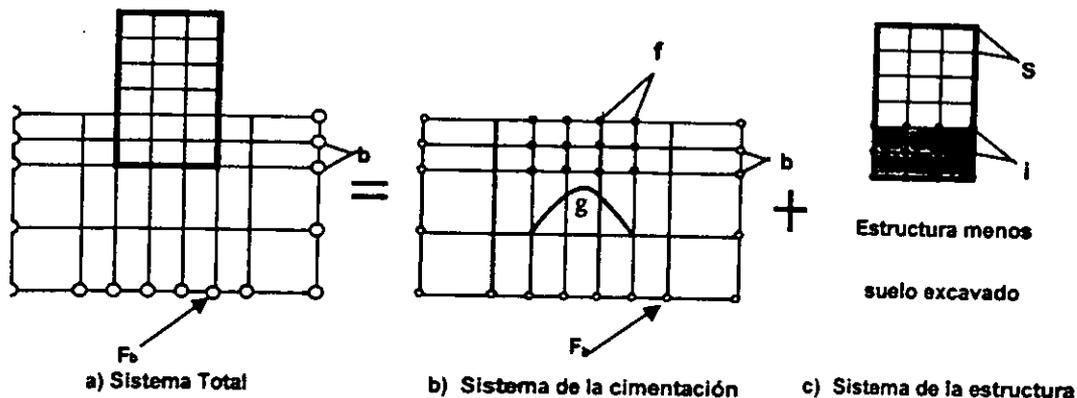


Figura 2.3 Método de volumen flexible.

2.1.2 Algunos resultados de la interacción suelo-estructura

2.1.2 a Efectos de la interacción suelo-estructura

Los principales efectos de la Interacción cinemática Suelo-Estructura para cimentaciones superficiales sometidas a ondas incidentes con inclinación arbitraria son un efecto de promedio de los movimientos de traslación (y un decremento de su amplitud) y la aparición de movimientos de rotación. Los movimientos de traslación disminuyen para frecuencias altas (filtrado), pero los componentes de torsión son significativos en un intervalo amplio de frecuencias.

El efecto principal de la interacción inercial es alargar el periodo natural del sistema. Un segundo efecto es la alteración del amortiguamiento (en general un incremento).

2.1.2.b Influencia de la profundidad de desplante

Los efectos de la interacción asociados a la profundidad de desplante de cimentaciones sobre cajón han sido evaluados por Romo y Hernández (1989 y 1990). Se supuso que el espectro de respuesta de los movimientos de la superficie del suelo corresponde al especificado por el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. Recurriendo al método de análisis por el elemento finito, se calcularon los movimientos sísmicos a diferentes profundidades y se concluyó que basta con desplantar la cimentación a cierta profundidad para disminuir la intensidad de la excitación dinámica actuante sobre la estructura, siempre que se use una cimentación lo suficientemente rígida para que no se amplifiquen los movimientos entre el desplante y la superficie (Auvinet, 1990).

2.2 Análisis y verificación sísmica de cimentaciones

Existen algunas correlaciones que permiten relacionar propiedades índices y propiedades dinámicas del suelo. Sin embargo, es deseable que se generalice la práctica de verificar los resultados obtenidos a través de éstas correlaciones mediante un número limitado de pruebas dinámicas sobre especímenes inalterados.

Las determinaciones de campo de la velocidad de transmisión de onda pueden complementar en forma muy útil los estudios de laboratorio y de campo tradicionales.

Para fines de análisis de la estabilidad de un sistema suelo-estructura, es necesario considerar la distribución de cargas verticales colocadas en las losas de la superestructura, a fin de obtener su resultante por nivel, situada a una altura determinada. Al generar una perturbación de la superestructura, provocada por un giro que excite los resortes representativos de la rigidez en la base del edificio, es posible establecer una ecuación de equilibrio dinámico de rotación que conduce a definir la rigidez angular crítica mediante una ecuación trascendente, donde aparece EI , representativa de la rigidez a la flexión de la superestructura. Como en edificios comunes el valor de EI resulta muy grande, se puede definir la rigidez angular crítica como:

$$(KR)_{\text{crit}} = \sum_{i=1}^n P_i h_i \quad 2.14$$

donde

$(KR)_{\text{crit}}$ = Valor crítico de la rigidez angular en la base del edificio.

P_i = Magnitud de la resultante de todas las cargas verticales aplicadas en el mismo nivel de la estructura.

h_i = Altura sobre el nivel de banquetta del piso en el que actúa la carga P_i .

La expresión anterior permite estimar la rigidez angular crítica alrededor de un eje horizontal en la base de un edificio, que produce inestabilidad en la superestructura.

Es necesario establecer las características de rigidez angular y lineal en la base de un edificio, para estimar adecuadamente las propiedades dinámicas de la superestructura y como consecuencia, la respuesta dinámica de un edificio al actuar un sismo en su base.

Los parámetros dinámicos más relevantes del suelo son el periodo dominante de vibrar del sitio y la velocidad media de propagación del sitio.

Si se tiene un estrato con las características del esquema mostrado en la Figura 2.5:

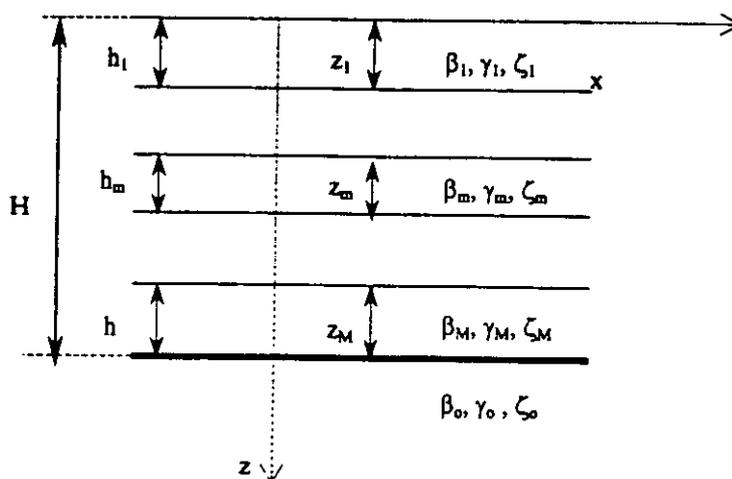


Figura 2.5 Propiedades del suelo estratificado.

La profundidad H se establece como aquella en donde la velocidad de propagación de ondas de cortante β_0 (Velocidad de propagación de ondas de cortante en el suelo duro) vale al menos 700 m/s, es decir:

$$\beta_0 \geq 700 \text{ m/s} \tag{2.15}$$

El módulo de rigidez al corte G_0 se relaciona con β_0 de la siguiente manera:

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0}} \tag{2.16}$$

En donde:

ρ_0 es la densidad = γ_0/g

γ_0 el peso volumétrico

g la aceleración de la gravedad

Sin embargo, para simplificar los modelos se puede simplificar la estratigrafía de un suelo a un suelo con un solo estrato, como el mostrado en el esquema de la Figura 2.6.

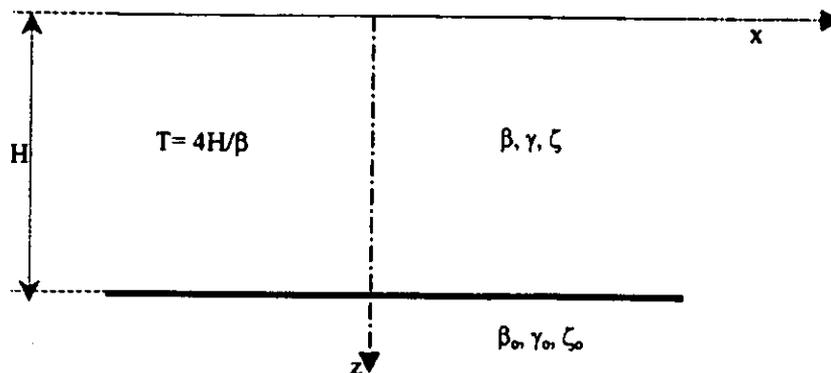


Figura 2.6 Propiedades equivalentes de un solo estrato.

2.2.1 DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD MEDIA DEL SITIO

El tiempo que tarda una onda de cortante en recorrer un estrato (t_e) uniforme de espesor H , con una velocidad β es el mismo que necesita para atravesar el depósito estratificado (t_d).

$$t_e = H/\beta \tag{2.17}$$

$$t_d = \sum_m h_m/\beta_m \tag{2.18}$$

igualando los tiempos, obtenemos la ecuación siguiente en términos del promedio de lentitudes:

$$\beta = \frac{H}{\sum_{m=1}^M \frac{h_m}{\beta_m}} \tag{2.19}$$

Cuando las variaciones en velocidad no son muy pronunciadas, la velocidad media de propagación se puede calcular por medio de la siguiente fórmula en términos de las velocidades del depósito estratificado:

$$\beta = \frac{\sum_{m=1}^M \beta_m h_m}{H} \tag{2.20}$$

El periodo fundamental de vibrar es:

$$T = \frac{4H}{\beta} \tag{2.21}$$

2.3 Conclusiones

Una conclusión relevante es que la excitación dinámica a la que se somete una estructura (Q) depende de las diferencias entre las propiedades de la estructura y del suelo excavado. Al disminuir estas diferencias (por ejemplo, incrementando la profundidad de desplante, aumentando la rigidez de la cimentación, etc.) la intensidad del movimiento sísmico $\{Q_i\}$ decrece, lo cual indica que para una estructura dada es posible diseñar una cimentación con características tales que minimice la magnitud de la excitación dinámica.

Como puede observarse, para resolver un problema real, se requiere plantear modelos matemáticos, es decir una representación analítica del fenómeno a partir de su modelo físico. La solución analítica de tal modelo, desde el punto de vista matemático a veces no es tan sencilla. La principal dificultad radica en la forma tan irregular que presenta el dominio de definición del problema y, por lo tanto, lo complicado de incluir las condiciones de frontera. Así, las técnicas numéricas son en muchos casos la única posibilidad de conseguir la solución.

Capítulo 3

EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

3 Introducción

El Método de Elementos de Frontera es una técnica numérica basada en formulaciones de ecuaciones de integral para problemas de mecánica del medio continuo. Existen dos tipos de formulaciones de ecuaciones integrales. Una de ellas contiene cantidades desconocidas con algún significado físico, en términos del cual son dadas las condiciones de frontera. Este tipo de formulación se conoce como formulación directa (Domínguez, 1993). El segundo tipo es conocido como formulación indirecta y sus cantidades básicas desconocidas no tienen un significado físico. Las variables físicas son obtenidas de esas fuentes. En este capítulo, el término "Método de Elementos de Frontera" es usado exclusivamente para aproximaciones numéricas basadas en la formulación directa.

El Método de Elementos de Frontera tiene características generales que resultan de gran ventaja para el análisis de problemas de Mecánica del Medio Continuo, tanto estáticos como dinámicos. En primer lugar, el problema se formula en la frontera, por lo tanto solo la frontera se debe discretizar. Todo lo contrario sucede con el Método de Elementos Finitos en donde se requiere la discretización de todo el dominio, lo que conduce a que resulte un sistema de ecuaciones más grande en este método. Otra ventaja del Método de Elementos de Frontera es que en el proceso de generación de mallas (discretización), se involucra solamente la superficie. Esta ventaja es importante cuando el diseño requiere de modificaciones de la geometría y en consecuencia de la discretización o cuando a lo largo del proceso de solución la geometría cambia. Sin embargo hay un precio que se tiene que pagar por las ventajas mencionadas: el sistema final de ecuaciones algebraicas es no simétrico, lo que ocasiona que en su solución se requieran grandes tiempos de cómputo.

Una segunda característica del Método de elementos de Frontera es que produce soluciones de alta aproximación en la frontera y en particular en cualquier punto interno seleccionado.

Una de las desventajas del Método de Elementos de Frontera es su dificultad en el tratamiento de materiales con propiedades no lineales. Esto hace resaltar la importancia de que ambos métodos deberían utilizarse como alternativa o complemento, ya que habrá problemas para los cuales un método será más adecuado que otro y viceversa.

Una vez puesto en claro que el Método de Elementos de Frontera es una poderosa y fácil de usar herramienta numérica en la solución de problemas dinámicos continuos, resulta obvio que los ingenieros e investigadores se deberían familiarizar con él y utilizarlo en sus análisis y diseños.

3.1 MODELADO NUMÉRICO DE CIMENTACIONES EN EL VALLE DE MÉXICO

Para calcular en forma preliminar y cualitativa la respuesta sísmica de cimentaciones ante la incidencia de ondas P, S, y de Rayleigh en arcillas de la ciudad de México se ha empleado el método directo de elementos de frontera. El método se formula con elementos cuadráticos isoparamétricos y ha mostrado ser confiable y eficiente.

El valle de México representa el mejor ejemplo de los efectos de amplificación dinámica en depósitos lacustres. Desde el punto de vista de Ingeniería Sísmica, los primeros 150 m son los más relevantes ya que determinan los efectos más importantes de amplificación. Esta amplificación se debe al entrampamiento de ondas por el contraste entre las características dinámicas de las arcillas y de los depósitos más duros sobre las que éstas se encuentran. En el dominio de la frecuencia, la forma y la amplitud de esta amplificación están controladas por el contraste de impedancias elásticas (velocidad de propagación de ondas de corte y densidad de los materiales), el amortiguamiento del suelo, las características del campo incidente y la geometría de la cimentación. En el dominio del tiempo la respuesta se refleja en movimientos más armónicos, en el incremento de la duración y en la mayor amplitud de los registros.

A partir de 1985, la red acelerométrica de la ciudad de México ha crecido considerablemente proporcionando datos importantes para estudiar los parámetros de amplificación dinámica del valle. Desde entonces se han empleado algunos métodos numéricos con el objeto de reproducir estas observaciones y eventualmente predecir el movimiento en sitios no instrumentados y ante futuros terremotos. La mayor parte de estos trabajos compara resultados numéricos con datos observados.

Aunque el modelo más sencillo, el unidimensional, puede explicar gran parte de los efectos de amplificación en el valle, se requieren modelos en dos y tres dimensiones para explicar los patrones de amplificación en algunos bordes de la zona del lago y en algunas partes de la misma donde los depósitos aluviales son más profundos.

3.2 ANTECEDENTES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA.

El método empleado en este trabajo para obtener resultados preliminares sobre amplificación bidimensional en sitios como el valle de México y la tridimensional en topografías es el **método directo de elementos de frontera** basado en formulaciones de ecuaciones integrales de mecánica del medio continuo. Las variables y condiciones de frontera son desplazamientos y tracciones que son aproximadas sobre los elementos desde los valores en los nodos usando funciones de interpolación. El método es atractivo porque la discretización se hace solo en la frontera, lo que produce matrices y sistemas de ecuaciones más pequeños que los métodos de elementos finitos y diferencias finitas, pero el sistema es asimétrico y totalmente poblado y los tiempos de cómputo son iguales al no poder emplearse técnicas numéricas de tratamiento óptimo de matrices porosas. Este método representa eficientemente las ondas reflejadas hacia el infinito, lo que es una gran ventaja en el tipo de aplicaciones que aquí se presenta.

El origen del método de Elementos de Frontera (MEF), se encuentra en la teoría de ecuaciones integrales apenas formulada rigurosamente a principios de este siglo, en contraste con las ecuaciones diferenciales cuyas propiedades fueron bien establecidas en el siglo XIX. Es probable que una de las razones por la cual se rezagó, sea que los modelos matemáticos de la mayoría de los fenómenos físicos hasta el momento son planteados directamente en términos de ecuaciones diferenciales, y salvo por los métodos energéticos usados en menor escala, son hasta el día de hoy el medio más utilizado para estudiar la realidad física debido a que no se dispone de otro medio analítico para hacerlo (J. M. Cervantes y G. Ayala M, 1996).

El estudio de las ecuaciones integrales se ha realizado ampliamente para resolver problemas de potencial, los cuales abarcan una gran variedad de problemas físicos. Sin embargo, a pesar de los grandes avances en la investigación de este tipo de ecuaciones, en lo relativo a su clasificación y propiedades, a la mayoría de los investigadores no se les ocurrió que de ahí surgiera un método general de solución numérica de una amplia variedad de ecuaciones diferenciales.

3.3 CARACTERÍSTICAS DEL MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

La esencia de la técnica de ecuaciones integrales de frontera, como primer paso, es la transformación de las ecuaciones diferenciales en un conjunto equivalente de ecuaciones integrales que sólo involucren los valores extremos del intervalo de integración, es decir, de las fronteras de la región. De aquí sobresalen dos aspectos:

La continuidad se considera dentro de todo el cuerpo y solamente se restablece en la frontera, específicamente en los nodos de los elementos en que se ha dividido el continuo.

Una desventaja, (no del todo cierta) es la complejidad matemática que requiere su formulación, en realidad lo que sucede es que los conceptos matemáticos involucrados en las ecuaciones integrales son poco familiares para los ingenieros. Sin embargo, es posible establecer un método general de solución factible de programarse en computadoras digitales (J. M. Cervantes y G. Ayala M, 1996).

El método de elementos en la frontera es una fuerte alternativa al uso de los elementos finitos en los problemas en que la precisión es determinante debido a la naturaleza del problema, como son la concentración de esfuerzos y donde el dominio se extiende hasta el infinito.

Puesto que una de las características más importantes del Método de Elementos de Frontera es que solamente se requiere la discretización de la frontera del dominio. Y debido a que en la mayoría de los análisis es necesario hacer cambios en la malla, con el Método de Elementos de Frontera es más fácil rehacerla, comparándolo con el Método de Elementos Finitos. La razón es que en el Método de Elementos de Frontera sólo se requiere modelar la frontera, por ejemplo para el caso de tres dimensiones la malla será de una superficie, y para el caso de dos dimensiones la malla será el perímetro que delimita el dominio.

El Método de Elementos de Frontera, puede usar elementos discontinuos a diferencia del Método de Elementos Finitos. Esto quiere decir que no es necesario que todos los nodos de los elementos estén conectados entre sí. Esto facilita hacer la malla, ofreciendo grandes ventajas cuando existe la necesidad de rehacer la malla y en general permite una gran versatilidad.

La principal ventaja es que los fundamentos matemáticos son más complejos, lo cual permite tener soluciones más precisas. Pero si no se es cuidadoso en las técnicas numéricas de solución, por desconocer el método, pueden tenerse resultados incorrectos. La razón de lo anterior radica en que el Método de Elementos de Frontera es más susceptible de errores cuando la técnica numérica no es la apropiada. La comparación entre los métodos muestra la tendencia de que el Método de Elementos de Frontera requiere menos elementos para obtener una mejor precisión que el Método de Elementos Finitos. Esto sucede principalmente en problemas relacionados con concentraciones de esfuerzo y aplicaciones de la mecánica de la fractura.

Para conocer en forma teórica la amplificación dinámica en suelos blandos es necesario recurrir a modelos de propagación de ondas. El método más sencillo para cuantificar la amplificación dinámica en suelos es el modelo en una dimensión o unidimensional. Este modelo considera que los estratos tienen una extensión horizontal infinita, lo que implica que para modelar un valle no tomen en cuenta bordes, ni cambios en la distribución horizontal de los sedimentos. Desafortunadamente, todos los valles presentan distribución irregular de estratos y dimensiones finitas, por lo que para conocer mejor su comportamiento sísmico se requiere de modelos en dos y tres dimensiones y así poder explicar los patrones de

amplificación. Estos modelos son en general más sofisticados que el de una dimensión y requieren de mayores recursos matemáticos, numéricos y de cómputo.

Por otro lado, un fenómeno similar ocurre con el comportamiento sísmico de cañones y montañas que aunque menos notorio que la amplificación en valles, puede generar efectos de sitio que provoquen deslaves y desprendimientos. Por ello el estudio de topografías con métodos numéricos nos puede arrojar resultados importantes sobre fenómenos locales de amplificación.

3.4 MODELADO DE CIMENTACIONES CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

El modelado numérico de cimentaciones con el Método de Elementos de Frontera se hace discretizando la superficie libre y las fronteras entre los medios a modelar con segmentos, llamados elementos en la frontera, que al igual que los elementos finitos, se pueden plantear con diferentes grados de aproximación. En problemas relacionados con propagación de ondas en medios estratificados, existirán tantos medios diferentes y tantas fronteras como cambios significativos en la velocidad, densidad y amortiguamiento de los materiales existentes. Sin embargo, por razones de simplicidad, en este trabajo se considera un solo medio con propiedades uniformes cuando se trata de topografías, mientras que para cimentaciones se han considerado dos medios: el semiespacio y la cimentación misma.

El estudio de la propagación debido a incidencias de ondas SH es muy acertado en modelos bidimensionales debido a que producen alteraciones sólo fuera del plano. Por esta razón, el problema puede ser tratado de manera escalar, en donde todas las variables y condiciones de frontera dependen solo de la componente perpendicular al plano de propagación. Por otra parte, la propagación debida a la incidencia de ondas P, SV y Rayleigh implican la solución de las ecuaciones de Navier, lo que conduce a un problema vectorial, con dos incógnitas por nodo.

3.4.1 ECUACIONES DE REGULACIÓN DE ONDAS SH

Suponiendo la geometría que se muestra en la Figura 3.1:

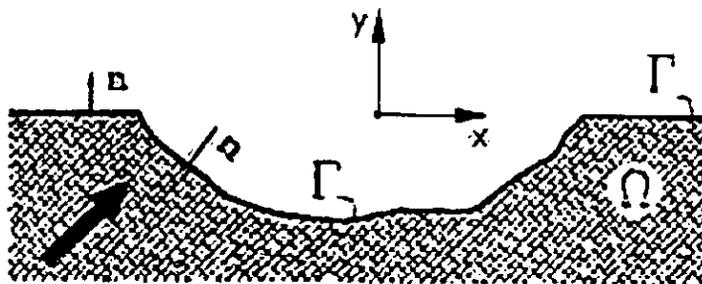


Figura 3.1 Características geométricas.

El dominio Ω es el semiespacio bajo la superficie libre Γ . Se considera un medio homogéneo, linealmente elástico e isótropo.

La propagación de las ondas SH en el dominio se considera como un problema elástico dinámico, en el cual la geometría y las condiciones de frontera son dependientes en la dirección del eje z. Este movimiento es descrito por la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \omega + k_\beta^2 \omega = 0 \tag{3.1}$$

donde:

ω es desplazamiento fuera del plano en la dirección z.

k_β número de onda transversal.

∇^2 Operador de Laplace.

La solución de la ecuación anterior, tiene que satisfacer la condición de frontera Γ , por ejemplo:

$$q = \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \tag{3.2}$$

donde n es el vector normal a Γ .

Aplicando el principio de superposición, el desplazamiento ω en el dominio Ω y la tracción q en Γ , se puede escribir como:

$$\omega = \omega_0 + \omega_s \tag{3.3}$$

$$q = q_0 + q_s = \frac{\partial \omega_0}{\partial n} + \frac{\partial \omega_s}{\partial n} \tag{3.4}$$

donde ω_0 es el conocido desplazamiento de campo libre. Es la solución analítica de la propagación de ondas SH en un semiespacio, y ω_s es la contribución de la dispersión de onda debido a la presencia de irregularidades, como la cimentación.

3.4.2.1 FORMULACIÓN DE LA INTEGRAL DE FRONTERA

El desplazamiento ω_s se define por la siguiente fórmula de integración:

$$c(\zeta)\omega_s(\zeta) = - \int \omega_s(x)q^*(\zeta, x)d\Gamma(x) + \int q_s(x)\omega^*(\zeta, x)d\Gamma(x) \tag{3.5}$$

con:

$$c(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta \notin \Omega \\ \bar{c}, & \zeta \in \Gamma \\ 1, & \zeta \in \Omega \end{cases} \quad 3.6$$

\bar{c} es una constante que depende de la geometría de frontera y es usualmente calculada suponiendo el desplazamiento de un cuerpo rígido. Cuando la frontera es suave, en el punto ζ (Figura 3.2), $c = 1/2$. $\omega^*(\zeta, \chi)$ es la solución bidimensional de la ecuación de Helmholtz y $q^*(\zeta, k)$ es su derivada normal. $\omega^*(\zeta, \chi)$ representa el campo generado por unidad de carga concentrada en el punto ζ . La solución fundamental satisface la ecuación:

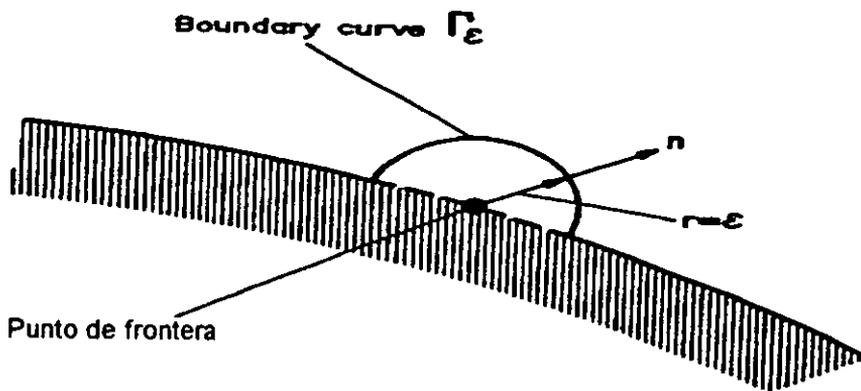


Figura 3.2 Frontera de un punto

$$\nabla^2 \omega^* + k_\beta^2 \omega^* = -\Delta^\zeta \quad 3.7$$

Donde Δ^ζ es la función Delta de Dirac. El uso de Δ^ζ es un poderoso camino para representar fuentes de unidad concentradas cuando se trata con ecuaciones diferenciales.

Resolviendo:

$$\omega^*(\zeta, \chi) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_\beta r_1) \quad 3.8$$

y

$$q^*(\zeta, \chi) = \frac{\partial \omega^*(\zeta, \chi)}{\partial n(\chi)} = -\frac{ik_\beta}{4} H_1^{(1)}(k_\beta r_1) \frac{\partial r_1}{\partial n} \quad 3.9$$

Donde:

$r_1 = \sqrt{[x(\zeta) - x(\chi)]^2 + [y(\zeta) - y(\chi)]^2}$ es la distancia del punto fuente ζ al campo del punto χ , $H_0^{(1)}$ y $H_1^{(1)}$ están dadas por:

$$H_0^{(1)}(k_\rho r_1) = J_0(k_\rho r_1) + iY_0(k_\rho r_1) \tag{3.10}$$

$$H_1^{(1)}(k_\rho r_1) = J_1(k_\rho r_1) + iY_1(k_\rho r_1) \tag{3.11}$$

Donde J y Y son las funciones de Bessel. De las ecuaciones 3.2 y 3.4, se obtiene:

$$q_s = -q_0 \tag{3.12}$$

Sustituyendo la ecuación 3.12 en 3.5 se obtiene:

$$c(\zeta)\omega_s(\zeta) + \int_{\Gamma} \omega_s(\chi)q^*(\zeta, \chi)d\Gamma(\chi) = -\int_{\Gamma} q_0(\chi)\omega^*(\zeta, \chi)d\Gamma(\chi) \tag{3.13}$$

Pero obtener ω_s en esta ecuación tiene la desventaja de estar integrada en un intervalo infinito ($\Gamma_{-\infty}, \Gamma_{\infty}$), sin embargo, aplicando el método de imágenes y la función de Green con las condiciones de frontera, se tiene:

$$c(\zeta)\omega_s(\zeta) = -\int_{\Gamma} \omega_s(\chi)q^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) + \int_{\Gamma} q_s(\chi)\omega^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) \tag{3.14}$$

Donde:

$$c(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta \in \Omega \\ \bar{c}, & \zeta \in \Gamma_s \\ 1, & \zeta \in \Omega \end{cases} \tag{3.15}$$

Para el punto $\zeta \in (\Gamma_{-\infty} \cup \Gamma_{\infty})$, $c(\zeta)$ es cancelada por $c(\zeta)$ de su correspondiente imagen.

Por otra parte, el desplazamiento ω_0 no satisface la condición de radiación Sommerfeld, pero si la integral de Helmholtz (Reinoso, 1994):

$$c_0(\zeta)\omega_0(\zeta) = -\int_{\Gamma} \omega_0(\chi)q^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) + \int_{\Gamma} q_0(\chi)\omega^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) \tag{3.16}$$

Donde:

$$c_0(\zeta) = \begin{cases} -1, & \zeta \in \bar{\Omega} \\ -\bar{c}, & \zeta \in \Gamma_s \\ 0, & \zeta \in \Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

Utilizando la función de Green para el semiespacio en tracción libre, y que $q_0=0$ para cualquier punto $\chi \in \Gamma_0$.

Sumando 3.14 y 3.16, se obtiene la siguiente ecuación:

$$c(\zeta)\omega(\zeta) + c_0(\zeta)\omega_0(\zeta) = - \int_{\Gamma_s} (\omega_s(\chi) + \omega_0(\chi))q^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) + \int_{\Gamma_s} (q_s(\chi) + q_0(\chi))\omega^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) \quad 3.18$$

Luego, sustituyendo la ecuación 3.3 y 3.4 en la 3.18, se obtiene:

$$c(\zeta)(\omega(\zeta) - \omega_0(\zeta)) + c_0(\zeta)\omega_0(\zeta) = c(\zeta)(\omega(\zeta) + (c_0(\zeta) - c(\zeta))\omega_0(\zeta) - \int_{\Gamma_s} \omega(\chi)q^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) + \int_{\Gamma_s} q(\chi)\omega^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) \quad 3.19$$

Finalmente la ecuación 3.19, se convierte en:

$$c(\zeta)\omega(\zeta) + \int_{\Gamma_s} \omega(\chi)q^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) - \int_{\Gamma_s} q(\chi)\omega^*(\zeta, \chi)d\Gamma_s(\chi) = \omega_0(\zeta) \quad 3.20$$

En donde $c(\zeta)$ está dada por la ecuación 3.15.

3.4.2.2 EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA PARA ONDAS SH

La ecuación 3.20, puede ser resuelta analíticamente sólo para geometrías sencillas. Para aplicaciones de ingeniería se debe utilizar un procedimiento numérico.

La frontera Γ_s es discretizada con N elementos de frontera, cada uno con n nudos. El número total de nudos es N. Aplicando este procedimiento a la ecuación 3.20, se obtiene para cada i-ésimo:

$$c^i \omega^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \omega q^* d\Gamma \right\} - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} q \omega^* d\Gamma \right\} = \omega_0^i \quad 3.21$$

Donde Γ_j está en la superficie del j-ésimo elemento.

Los valores de ω y q en cualquier punto del elemento pueden ser definidos en términos de los valores nodales del elemento, ω y q y las funciones de interpolación ϕ_k dados en términos de coordenadas homogéneas ζ ($-1 \leq \zeta \leq 1$).

$$\omega = \Phi w_k \quad 3.22$$

$$q = \Phi q_k \quad 3.23$$

Φ es el vector de funciones de interpolación Φ_k y k indica el k -ésimo nodo del elemento.

Así, para elementos cuadráticos, definidos por tres nodos, ($k=1,2,3$), dos en los extremos del elemento y uno a la mitad, las funciones de interpolación son:

$$\Phi = \{\phi_1 \phi_2 \phi_3\} = \left\{ \frac{\xi(\xi-1)}{2}, (1+\xi)(1-\xi), \frac{\xi(\xi+1)}{2} \right\} \quad 3.24$$

Los desplazamientos y tracciones son obtenidos como:

$$\omega = \phi_1(\xi)\omega_1 + \phi_2(\xi)\omega_2 + \phi_3(\xi)\omega_3 \quad 3.24$$

$$q = \phi_1(\xi)q_1 + \phi_2(\xi)q_2 + \phi_3(\xi)q_3 \quad 3.25$$

Para elementos cuadráticos, si se quiere tomar en cuenta la forma del contorno Γ_j , las integrales de las ecuaciones 3.21 en el elemento j , se convierten en:

$$\int_{\Gamma_j} \omega q^* d\Gamma = \left\{ \int_{\Gamma_j} \Phi q^* d\Gamma \right\} w^j = \hat{H}^j w^j \quad 3.26$$

$$\int_{\Gamma_j} q \omega^* d\Gamma = \left\{ \int_{\Gamma_j} \Phi \omega^* d\Gamma \right\} q^j = \hat{G}^j q^j \quad 3.27$$

La ecuación 3.21, en función de \hat{H}^j y \hat{G}^j , que algunas veces son llamados coeficientes de influencia y relacionan al nodo i en donde la solución fundamental está actuando con cualquier elemento j queda como sigue:

$$c^i \omega^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^j w^j - \sum_{j=1}^N \hat{G}^j q^j = \omega_0^i \quad 3.28$$

Llamando

$$\begin{aligned} H^j &= \hat{H}^j & \text{si } i \neq j \\ H^j &= \hat{H}^j + c^i & \text{si } i = j \end{aligned} \quad 3.29$$

y sustituyendo la ecuación 3.29 en la ecuación 3.28, se obtiene:

$$\sum_{j=1}^N H^j w^j - \sum_{j=1}^N \hat{G}^j q^j = \omega_0^i \quad 3.30$$

Aplicando esta ecuación a todos los nodos y arreglándolos en forma de matriz se obtiene un sistema global de ecuaciones lineales de la forma:

$$Hw - Gq = w_0 \quad 3.31$$

Donde H y G son matrices cuadradas no simétricas y w , q y w_0 son vectores de orden N . Para el caso de cimentaciones (Figura 3.1), como la condición de tracción es libre en la frontera, el término Gq es cero y la ecuación se convierte en:

$$Hw = w_0 \quad 3.32$$

Esta ventaja viene de resolver el problema usando la ecuación integral 3.20 para el desplazamiento total ω en lugar de la ecuación 3.5, la cual está sólo en términos de ω_s .

La ecuación previa puede escribirse en forma general como:

$$Ax = b \tag{3.33}$$

En donde se puede observar que la matriz A es independiente del tipo de onda incidente. Esto significa que para una cierta cimentación dada, con cierta geometría y propiedades, la solución para varios ángulos de incidencia se puede obtener de un solo paso con el mínimo de tiempo. Por esta propiedad, en lugar de utilizar un vector b , se emplea una matriz B , en donde cada columna representa un diferente ángulo de incidencia de ondas SH.

El Método de Elementos de Frontera propuesto en este trabajo está en el dominio de la frecuencia, la respuesta en el dominio del tiempo, es posible considerarla usando la transformada de Fourier.

3.4.2 ECUACIONES DE REGULACIÓN DE ONDAS P, SV Y RAYLEIGH

Como se mencionó anteriormente, el estudio de la propagación debida a la incidencia de ondas P, SV y Rayleigh implican la solución de las ecuaciones de Navier, lo que conduce a un problema vectorial, con dos incógnitas por nodo. La geometría del problema en estudio, se muestra en la Figura 3.3.

El dominio Ω es el semiespacio bajo la superficie libre Γ . Se considera un medio homogéneo, linealmente elástico e isótropo.

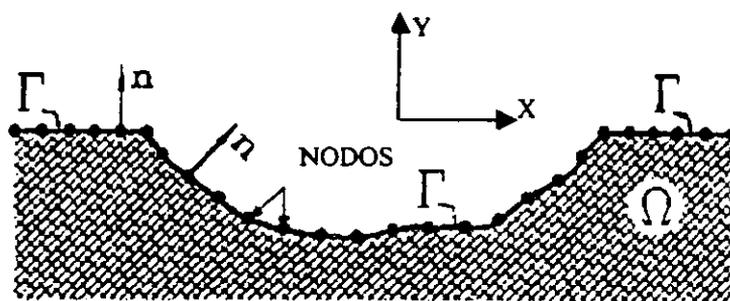


Figura 3.3 Disipación de ondas P, SV y Rayleigh en cimentaciones.

La propagación de las ondas P-, SV- o Rayleigh en el dominio se describe por las ecuaciones de Navier-Cauchy, cuya notación vectorial es:

$$\alpha^2 \nabla (\nabla \cdot u) - \beta^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge u) + \omega^2 u = 0 \tag{3.34}$$

Donde α y β son las velocidades longitudinales y transversales, ω es la frecuencia circular y u el vector de desplazamientos.

Aplicando el principio de superposición, el vector de desplazamientos u puede escribirse como:

$$u = u_s + u_o \tag{3.35}$$

donde,

u_s es la contribución de la dispersión de onda debido a la presencia de irregularidades en Γ_s y u_o es el conocido desplazamiento de campo libre.

3.4.2.1 FORMULACIÓN DE LA INTEGRAL DE FRONTERA

El desplazamiento u_s se define por la siguiente fórmula de integración: de Navier-Cauchy, también llamada identidad Somigliana (Domínguez, 1993):

$$c_{ik}(\zeta)u_{sk}(\zeta) = - \int u_{sk}(\chi) p_{ik}^*(\zeta, \chi) d\Gamma(\chi) + \int p_{sk}(\chi) u_{ik}^*(\zeta, \chi) d\Gamma(\chi) \tag{3.36}$$

Válida para toda $\zeta \in \Omega$. El subíndice l se refiere a la dirección de la carga produciendo desplazamientos o tracciones en la dirección k . La matriz c_{ik} contiene constantes no complejas, las cuales dependen de la geometría de frontera y de su orientación con respecto a las coordenadas globales del sistema. Esta matriz de 2x2 es usualmente calculada suponiendo desplazamiento de cuerpo rígido. Desafortunadamente, para un semiespacio, tales consideraciones no son aplicables y por lo tanto, c_{ik} tiene que ser calculado explícitamente como una función del ángulo interno de la frontera en ζ . La expresión es:

$$c_{ik} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)\vartheta_0 + \text{sen } 2\vartheta_1 - \text{sen } 2\vartheta_2 & \cos 2\vartheta_2 - \cos 2\vartheta_1 \\ \cos 2\vartheta_2 - \cos 2\vartheta_1 & 4(1-\nu)\vartheta_0 - \text{sen } 2\vartheta_1 + \text{sen } 2\vartheta_2 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

En donde ν es la relación de Poisson y ϑ_0 , ϑ_1 y ϑ_2 son los ángulos que se muestran en la Figura 3.4:

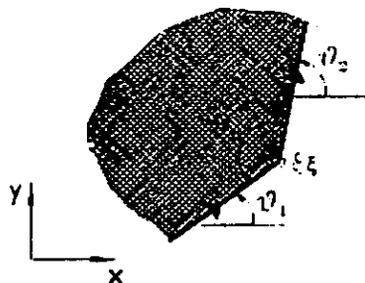


Figura 3.4 Geometría para el cálculo de c

Cuando la frontera es suave en el punto ζ , c_k está dado por:

$$c_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

3.4.2.2 SOLUCIÓN FUNDAMENTAL

Los valores $u_k^*(\zeta, \chi)$ y $p_k^*(\zeta, \chi)$ de la ecuación 3.36 son los desplazamientos y tracciones para una región sin frontera (Cruse y Rizzo, 1968). $u_k^*(\zeta, k)$ representa el campo generado en un medio elástico debido a una carga armónica concentrada actuando en el punto ζ . La solución fundamental satisface la siguiente ecuación:

$$\alpha^2 \nabla (\nabla \cdot u) - \beta^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge u) + \omega^2 u = -\Delta^\zeta(r) e \tag{3.39}$$

e es un vector unitario, y $r = \sqrt{[x(\zeta) - x(\chi)]^2 + [y(\zeta) - y(\chi)]^2}$ es la distancia del punto fuente ζ al campo del punto χ y Δ^ζ es la función Delta de Dirac.

Resolviendo la ecuación 3.39 cuando la carga es aplicada en la dirección l se obtienen los siguientes desplazamientos y tracciones en la dirección k (Domínguez, 1993).

$$u_k^* = \frac{1}{2\pi\rho\beta^2} [\Psi \delta_{kl} - \Theta r, l, k] \tag{3.40}$$

$$p_k^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{\Theta}{r} \right) \left(\delta_{kl} \frac{\partial r}{\partial n} + r, knl \right) - \frac{2}{r} \Theta \left(nkr, l-, lr, k \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\Theta}{dr} r, lr, k \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2 \right) \left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r} \right) r, \ln k \tag{3.41}$$

con:

$$\Psi = K_0(ik_\beta r) + \frac{1}{ik_\beta r} \left[K_1(ik_\beta r) - \frac{\beta}{\alpha} K_1(ik_\alpha r) \right] \tag{3.42}$$

$$\Theta = K_2(ik_\beta r) - \frac{\beta^2}{\alpha^2} K_2(ik_\alpha r) \tag{3.43}$$

δ_{ik} es la delta Kronecker, k_α y k_β son el número de ondas longitudinal y transversal, respectivamente, n es la normal externa y K las funciones de Bessel de segundo orden

3.4.2.3 CONDICIONES DE FRONTERA SOBRE LA SUPERFICIE EN TRACCIÓN LIBRE

El componente de esfuerzo σ de cualquier punto de la frontera Γ produce fuerzas de superficie o tracciones, denominadas por p , tales que

$$p = \sigma_{ij} n_j = \sigma n \text{ en } \Gamma \tag{3.44}$$

Donde n_j es la componente unitaria normal externa a la frontera en la dirección j .

La solución de la ecuación 3.34 tiene que satisfacer la condición de libre tracción para la tracción total p en la frontera Γ .

Esto es,

$$p=0 \tag{3.45}$$

Aplicando el principio de superposición, la tracción total p , puede ser escrita como:

$$p=p_s+p_0 \tag{3.46}$$

Donde las tracciones p_0 y p_s son provocadas por la incidencia y la dispersión de onda, respectivamente. Las ecuaciones 3.45 y 3.46, pueden ser escritas como:

$$p_s=-p_0 \tag{3.47}$$

Las expresiones para p_0 son obtenidas de las ecuaciones 3.44 con el tensor de esfuerzos σ_0 producido por el campo libre u_0 , por ejemplo:

$$p_0 = \sigma_0 n = \begin{Bmatrix} p_0(u) \\ p_0(v) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \right] n_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \\ \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] n_y + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x \end{Bmatrix} \tag{3.48}$$

Las derivadas de u y v para las ondas de incidencia P son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik_\alpha \text{ sen}^2 \vartheta (-\varphi_I - \varphi_R) - ik_\beta \text{ sen } \gamma \cos \gamma \psi_R$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial y} &= ik_\alpha \operatorname{sen} \varphi \cos \vartheta (-\varphi_I - \varphi_R) + ik_\beta \cos^2 \gamma \psi_R \\
 \frac{\partial v}{\partial y} &= ik_\alpha \cos^2 \vartheta (\varphi_I + \varphi_R) + ik_\beta \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma \psi_R \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= ik_\alpha \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi (\varphi_I - \varphi_R) - ik_\beta \operatorname{sen}^2 \gamma \psi_R
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

Las derivadas de u y v para las ondas de incidencia SV, son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= ik_\beta \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi (\varphi_I - \varphi_R) + ik_\alpha \operatorname{sen}^2 \gamma \varphi_R \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= ik_\beta \cos^2 \vartheta (\varphi_I + \varphi_R) - ik_\alpha \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma \varphi_R \\
 \frac{\partial v}{\partial y} &= ik_\beta \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi (-\varphi_I + \varphi_R) + ik_\alpha \cos^2 \gamma \varphi_R \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= ik_\beta \operatorname{sen}^2 \vartheta (-\varphi_I - \varphi_R) - ik_\alpha \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma \varphi_R
 \end{aligned}
 \tag{3.50}$$

Finalmente, las derivadas de u y v para las ondas de incidencia Rayleigh son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= -ik_r e^{-ik_r x} \left[e^{b_\alpha y} - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{c_r^2}{\beta^2} \right) e^{b_\beta y} \right] \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= e^{-ik_r x} \left[b_\alpha e^{b_\alpha y} - \frac{b_\beta}{2} \left(2 - \frac{c_r^2}{\beta^2} \right) e^{b_\beta y} \right] \\
 \frac{\partial v}{\partial y} &= -ik_r e^{-ik_r x} \left[\frac{b_\alpha^2}{k_r^2} e^{b_\alpha y} - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{c_r^2}{\beta^2} \right) e^{b_\beta y} \right] \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= e^{-ik_r x} \left[b_\alpha e^{b_\alpha y} - \frac{k_r^2}{2b_\beta} \left(2 - \frac{c_r^2}{\beta^2} \right) e^{b_\beta y} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

3.4.2.4 EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA PARA ONDAS P, SV Y RAYLEIGH

La frontera Γ_s es discretizada en N elementos de frontera, cada uno con n nudos. El número total de nudos es N . Aplicando este procedimiento a la ecuación 3.36, se obtiene para cada j -ésimo nodo:

$$c' u_s^j + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u_s \rho^* d\Gamma \right\} - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p_s u^* d\Gamma \right\} = 0
 \tag{3.52}$$

Donde Γ_j es la superficie del j -ésimo elemento. Las matrices de la solución fundamental y su tracción son:

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}; \quad p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{21}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad 3.53$$

Los vectores desplazamiento y tracción para cada nodo son:

$$u_s = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}; \quad p_s = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(u) \\ p(v) \end{Bmatrix} \quad 3.54$$

Para cada componente k de u_k y p_k , los valores en cualquier punto en cada elemento de la frontera, se puede definir en términos de los valores nodales u_k^j y p_k^j . De acuerdo a esta propiedad, usamos las funciones de interpolación Φ dadas en términos de las coordenadas homogéneas ζ ($-1 \leq \zeta \leq 1$). El vector de las funciones de interpolación Φ se definió anteriormente.

Considerando que:

$$u_s^j = u_k^j = \begin{Bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \end{Bmatrix}; \quad p_s^j = p_k^j = \begin{Bmatrix} p_1^j \\ p_2^j \end{Bmatrix} \quad 3.55$$

Las integrales de la ecuación 3.52 sobre el elemento j , serán:

$$\int_{\Gamma_j} u_s p^* d\Gamma = \left\{ \int_{\Gamma_j} \Phi p^* d\Gamma \right\} u_s^j = \hat{H}^y u_s^j \quad 3.56$$

$$\int_{\Gamma_j} p_s u^* d\Gamma = \left\{ \int_{\Gamma_j} \Phi u^* d\Gamma \right\} p_s^j = G^y p_s^j \quad 3.57$$

\hat{H}^y y G^y , algunas veces son llamados coeficientes de influencia y relacionan al nodo i (i -ésimo renglón) en donde la solución fundamental está actuando con cualquier elemento j . (j -ésima columna).

Sustituyendo las ecuaciones 3.56 y 3.57 en la ecuación 3.52, tenemos:

$$c^i u_s^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^y u_s^j - \sum_{j=1}^N G^y p_s^j = 0 \quad 3.58$$

Llamando

$$\begin{aligned} H^y &= \hat{H}^y & \text{si } i \neq j \\ H^y &= \hat{H}^y + c^i & \text{si } i = j \end{aligned} \quad 3.59$$

y sustituyendo 3.59 en 3.58 tenemos:

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} u_j^i - \sum_{j=1}^N G^{ij} p_j^i = 0 \quad 3.60$$

Aplicando esta ecuación a todos los i -ésimos nodos y arreglándolos en forma de matriz se obtiene un sistema global de ecuaciones lineales de la forma:

$$Hu_i - Gp_i = 0 \quad 3.61$$

Donde H y G son matrices cuadradas no simétricas y u_i , y p_i son vectores de orden $2 \times N$. Para el caso de cimentaciones (Figura 3.5), como la condición de tracción es libre en la frontera, el término Gp_i es cero y la ecuación se convierte en:

$$Hu_i = -Gp_0 \quad 3.62$$

Donde p_0 está dada por la ecuación 3.48. La ecuación 3.62, puede escribirse de la forma:

$$Ax = b \quad 3.63$$

En donde se puede observar que la matriz A es independiente del tipo de onda incidente o las condiciones de frontera. Esto significa que para un cierto valle dado, con cierta geometría y propiedades, la solución para varios ángulos de incidencia P-, SV- y Rayleigh se puede obtener de un solo paso con el mínimo de tiempo.

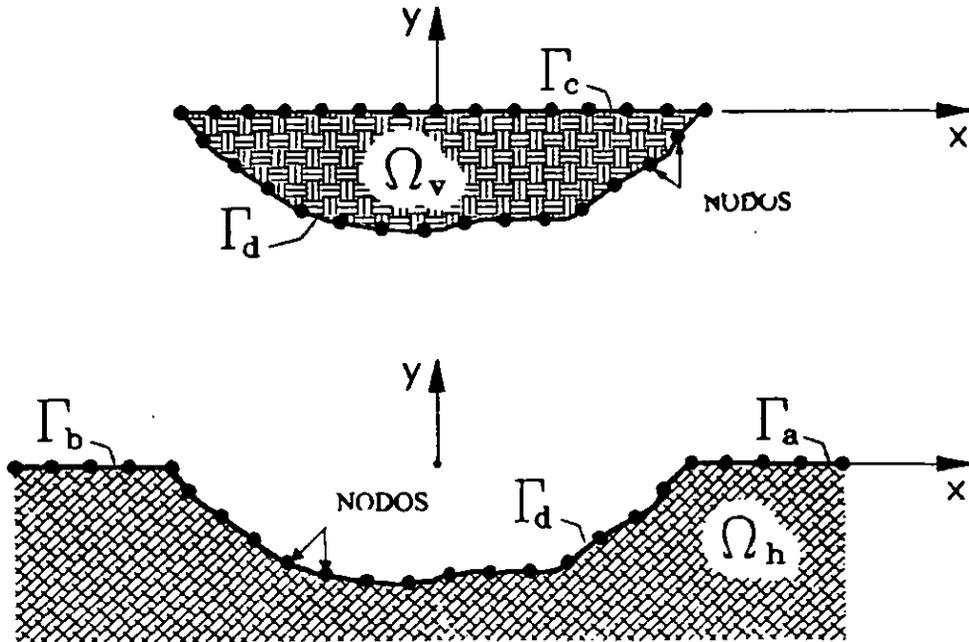


Figura 3.5. Disipación de ondas P-, SV- y Rayleigh en cimentaciones

Capítulo 4

APLICACIONES A CIMENTACIONES EN SUELOS BLANDOS

4.1 Modelado de la respuesta sísmica de la zona del valle de México

Con el enfoque unidimensional es posible explicar gran parte de los efectos de amplificación en el valle de México, ya que éste es relativamente plano y superficial: tiene menos de 150 m de profundidad y se extiende algunas decenas de kilómetros de ancho y largo. Además, el alto contraste entre las velocidades de propagación de las ondas S entre la capa dura y las arcillas, favorece el uso de modelos en una dimensión. De hecho, este modelo ha sido el único empleado para predecir la amplificación del movimiento sísmico en sitios de zona de lago. Tal es el caso de los espectros de diseño contenidos en el reglamento de 1987 que fueron obtenidos a partir de resultados unidimensionales (Rosenblueth, 1988) y ha sido empleado con éxito para reproducir en promedio las características de los espectros de respuesta en la zona de lago de la ciudad de México (Romo y Seed, 1986). Sin embargo, se ha observado que los modelos unidimensionales, no han sido muy eficientes para reproducir las funciones de transferencia y la amplificación observada durante sismos recientes (Kawase y Aki, 1989; Chávez-García, 1991; Reinoso, 1991).

Considerando las dimensiones y propiedades reales del valle de México, el modelado tridimensional del mismo está aún fuera del alcance de la capacidad de cómputo disponible. Algunas computadoras con procesadores en paralelo podrían ser capaces de resolver algunas partes del problema, pero son costosas y requieren de programación especializada. Se han obtenido algunos resultados cualitativos, pero son todavía de alcance limitado y no aportan información práctica relevante. Por ello, el modelado en dos dimensiones es una opción adecuada para estudiar la respuesta del valle de México (Kawase y Aki, 1989; Chávez-García y Bard, 1994; Reinoso *et al.*, 1993).

Para explicar el comportamiento de cimentaciones enterradas en un semiespacio, ante la incidencia de ondas sísmicas, se analizaron los siguientes casos:

mecánica del continuo (Reinoso, 1994). Las variables y condiciones de frontera son desplazamientos y tracciones que son aproximadas sobre elementos desde los valores en los nodos usando funciones de interpolación.

El programa requiere de una estación de trabajo y se dan instrucciones por medio de comandos en UNIX. El programa permite modificar las coordenadas de los nodos de la frontera, así como las características geométricas de la cimentación, y requiere de más de 12 horas para terminar de procesar la información. El programa ha sido utilizado para modelar valles aluviales y topografías.

4.3 Análisis de Resultados

CASO A: Cimentaciones enterradas en dos tipos de terreno

La geometría de la primera cimentación es: 5 m de profundidad por 10 m de ancho. Las propiedades del suelo son: 0.4 de módulo de Poisson, 300 m/s de velocidad de propagación de ondas de cortante, peso volumétrico de 1.4 t/m^3 y $Q=50$, que corresponden a una arcilla de dureza intermedia.

Las propiedades del segundo terreno son 0.15 de módulo de Poisson, 1500 m/s, 2.5 t/m^3 y $Q=100$. Para este caso se tiene una geometría de cimentación de 20 m de ancho y 10 m de profundidad.

En las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 se muestran los resultados para la primera cimentación, correspondientes a incidencias de ondas P, SV Y Rayleigh, respectivamente. Para ondas P se presentan incidencias a 0 (vertical), 30 y 60 grados, y para ondas SV para 0 y 30 grados. En cada una de las figuras se presentan dos grupos de resultados para diez estaciones en la superficie de la cimentación así como en la superficie del terreno: el grupo inferior corresponde al movimiento horizontal, mientras que el grupo superior corresponde al movimiento vertical.

Cabe aclarar que en las gráficas las amplitudes correspondientes al intervalo de frecuencias de 0 a 5 Hz no se muestran ya que presentan irregularidades numéricas. La figura 4.2, muestra la influencia de la cimentación ante el arribo de ondas P. Para el caso de incidencia vertical (línea continua) el valor correspondiente a campo libre (sin la presencia de cimentación), es 2, para el componente vertical, y 0, para el horizontal, para cualquier frecuencia.

Se aprecia que a medida que la frecuencia crece el valor del desplazamiento efectivo es menor que 2, llegando en alta frecuencia a valer hasta una cuarta parte del movimiento libre. Fuera de la cimentación se producen alteraciones que para algunas frecuencias implica amplificación de hasta 30 por ciento y para otras amplificaciones de hasta el 100 por ciento. Para incidencias oblicuas el fenómeno es similar a la incidencia vertical.

La figura 4.3 corresponde al arribo de ondas SV. El movimiento efectivo para incidencia vertical (línea continua) es 2, para el componente horizontal, y 0, para el vertical. También en esta figura se observa la gran eficiencia de la cimentación para absorber la energía en alta frecuencia: en todos los sitios dentro de la cimentación, en 25 Hz se tiene un movimiento efectivo de 10 veces menor al que se presenta en el terreno libre. Para sitios fuera de la cimentación el movimiento observado es muy similar al de campo libre. Los resultados para la incidencia oblicua también son similares a los de incidencia vertical.

La figura 4.4 muestra los resultados para la incidencia de ondas superficiales de Rayleigh. En este caso el valor del movimiento de campo libre es de 1.4 y 1.9 para las componentes horizontal y vertical, respectivamente. En la figura se aprecia que, para ambas componentes, la cimentación también absorbe la energía del movimiento de alta frecuencia. Sin embargo, fuera de la cimentación se pueden tener amplificaciones de casi el 100 por ciento para algunas frecuencias.

Las figuras 4.5 a 4.8 muestran los resultados para la segunda cimentación. Los resultados se presentan en el mismo formato que para las figuras correspondientes a la primer cimentación, salvo que aquí se añaden los resultados para ondas SH (figura 4.8). En general, para las figuras correspondientes a ondas P, SV y Rayleigh, se observa un comportamiento similar a la primera cimentación, solo que con una influencia de la interacción cinemática más marcada. Esto se aprecia en el rápido decaimiento del movimiento efectivo de la cimentación.

Los resultados para ondas SH, que provocan movimiento perpendicular al plano de la cimentación, muestran una vez más el efecto de la interacción cinemática: un decaimiento de la amplificación para todos los sitios dentro de la cimentación. En este caso el decaimiento se da hasta un 10 por ciento del movimiento para frecuencia cero (igual a 2) para frecuencias del orden de 25 Hz. Los sitios fuera de la cimentación prácticamente no se ven afectados por la presencia de la misma. Los resultados para incidencias oblicuas de las ondas SH muestran el mismo comportamiento que para la incidencia vertical.

Los resultados de incidencias de ondas a 0 grados (vertical) se presentan en línea continua, a 30 grados mediante puntos y a 60 grados con líneas discontinuas.

CASO B y C: Dos cimentaciones con ancho constante y profundidad de desplante variable (Una de 10 m de ancho y otra de 5 m de ancho)

Las propiedades del suelo son las mismas que las del terreno del caso I presentado arriba. La geometría de la cimentación estudiada (figura 4.1) es la siguiente: ancho de 10 m y profundidades que varían desde 2.5, 5, 10 y 20 m, como puede observarse en las figuras 4.9 a 4.12. Se determinaron 6 estaciones de medición en la superficie del terreno, algunas sobre la cimentación y otras fuera de ella, para comprobar si había influencia de la cimentación en el comportamiento de la superficie.

Si se observa la figura 4.9 y en particular a las ondas $P(y)$ (componente vertical de la onda P), se verifica que existen amplificaciones de hasta un 50 %, con respecto al movimiento de campo libre (cuyo valor es 2), especialmente en estaciones fuera y próximas a la cimentación. Cuanto más profunda es la cimentación, más grandes son los movimientos, en donde existe influencia por la presencia de la cimentación y para altas frecuencias. La incidencia de ondas oblicuas tiene un comportamiento similar.

Con relación a las ondas SV , se pueden hacer los siguientes comentarios: En el sentido horizontal, eje x , la amplitud disminuye más del 100 por ciento, de 2 a 0.2, conforme aumenta la frecuencia para estaciones sobre la cimentación y para mayores profundidades de desplante. Se observa también la eficiencia de la cimentación para absorber la energía disipada por el movimiento, ya que cuando aumenta la profundidad, la amplitud del movimiento decrece de manera importante. Esto se puede comprobar si se comparan las gráficas de las figuras 4.9 a 4.12.

Para las ondas SV , en la dirección vertical, se tiene que para incidencias verticales, en estaciones sobre la cimentación, se tienen amplitudes de movimiento casi nulos, mientras que en lugares fuera de la cimentación, se tienen amplificaciones del movimiento de hasta cien por ciento, con respecto a las estaciones que se ubican sobre la cimentación. Las incidencias oblicuas generan amplificaciones más grandes que la incidencia de cero grados, para altas frecuencias.

Para condiciones de campo libre, las ondas $SH(z)$ tienen un valor de 2, pero la influencia de la cimentación ocasiona que las amplitudes disminuyan notablemente para frecuencias altas. Esta misma tendencia se observa para las ondas R , SV y $P(y)$, sin embargo, para las ondas $P(x)$, se puede observar que la amplitud es irregular para puntos alejados de la cimentación y en el centro se atenúan para incidencias de 30 y 60 grados, desapareciendo para incidencias de cero grados.

Con relación a la profundidad de desplante de la cimentación, se aprecia que entre más profunda es la cimentación, las amplitudes del movimiento, cuando la frecuencia aumenta se disminuyen de manera apreciable; sin embargo, cuando la profundidad disminuye, las amplitudes del movimiento también lo hacen, pero de manera más suave y a frecuencias mayores que los de profundidades mayores.

Se puede observar que las ondas Rayleigh, inducen a movimientos asimétricos en la cimentación, lo que produce cabeceo y torsión en la misma. A mayor profundidad esta diferencia en los movimientos se atenúan hasta hacerse casi simétricos, lo que se traduce en pocos desplazamientos en la superficie de la cimentación.

Comentarios similares se desprenden de las gráficas 4.13 y 4.14 correspondientes a cimentaciones de 5 m de ancho y desplantadas a 1 y 3 m de profundidad, respectivamente.

A manera de resumen, en las gráficas 4.15 a 4.21 se muestran las amplitudes contra frecuencia y profundidad para incidencias verticales (cero grados) y para estaciones sobre la cimentación (cuando $X=0$).

En la gráfica 4.15 se observa que para frecuencias menores o iguales a 10 Hz, la amplitud del movimiento es 2, manteniéndose constante con relación a la profundidad de desplante de la cimentación. Conforme aumenta la frecuencia, a partir de aproximadamente 11 Hz, el movimiento comienza a disminuir (de 2 a 0.4), manteniéndose constante para frecuencias superiores a los 20 Hz.

Se puede apreciar para profundidades de entre cero y 5 m, aproximadamente, que el movimiento tiende a disminuir a altas frecuencias, pero de una manera más suave que a altas profundidades. En la superficie de la profundidad de desplante de la cimentación, la amplitud de movimiento (0.4), se obtiene aproximadamente a 45 Hz, mientras que a la profundidad de 20 m, se obtiene a partir de 20 Hz, aproximadamente. Lo que verifica que tiene gran influencia la profundidad en el movimiento de la superficie.

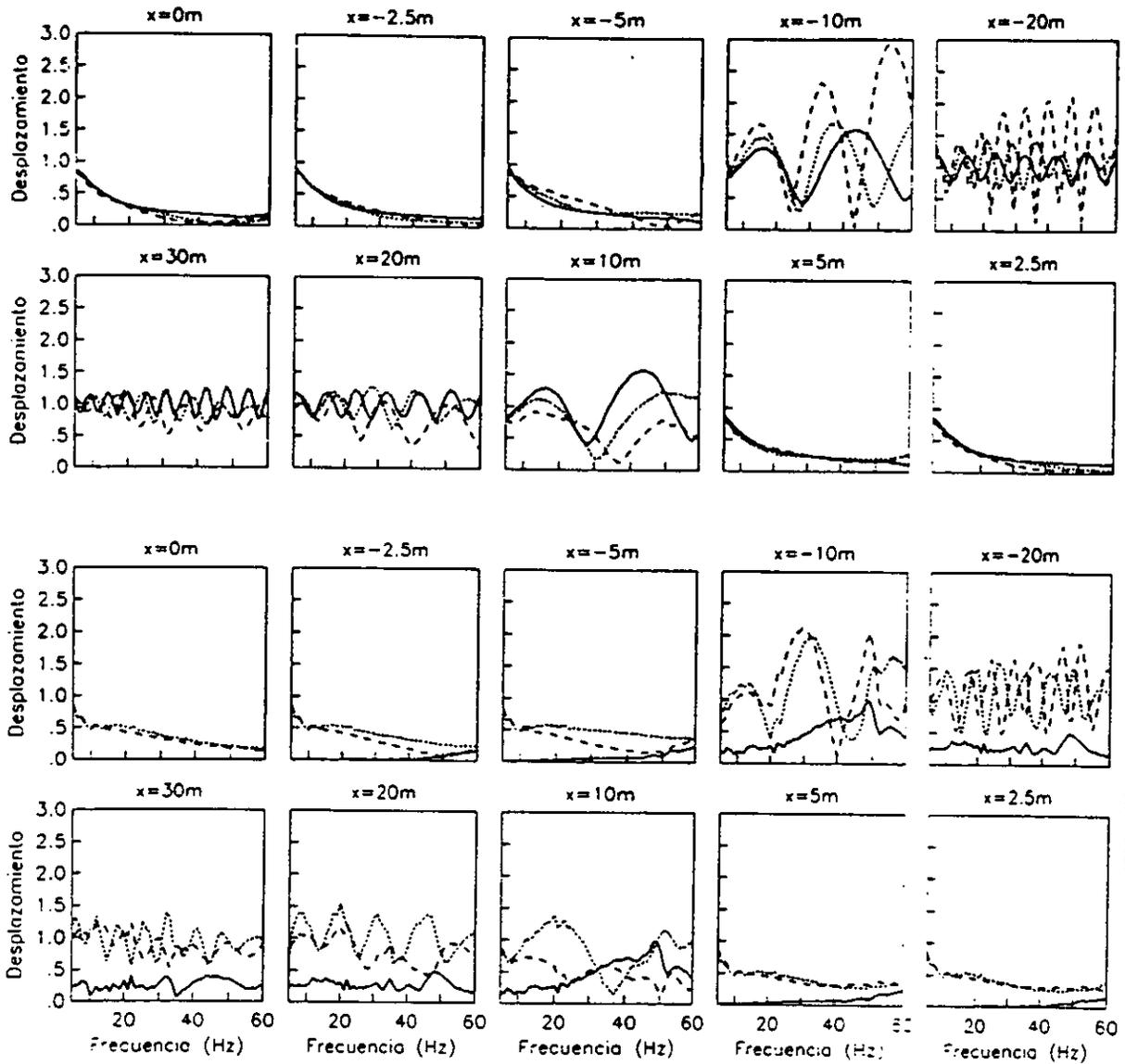
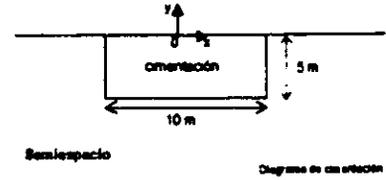


Figura 4.2 Incidencia de Ondas P con 0 (vertical y línea continua), 30 (línea de puntos) y 60 grados (línea discontinua)

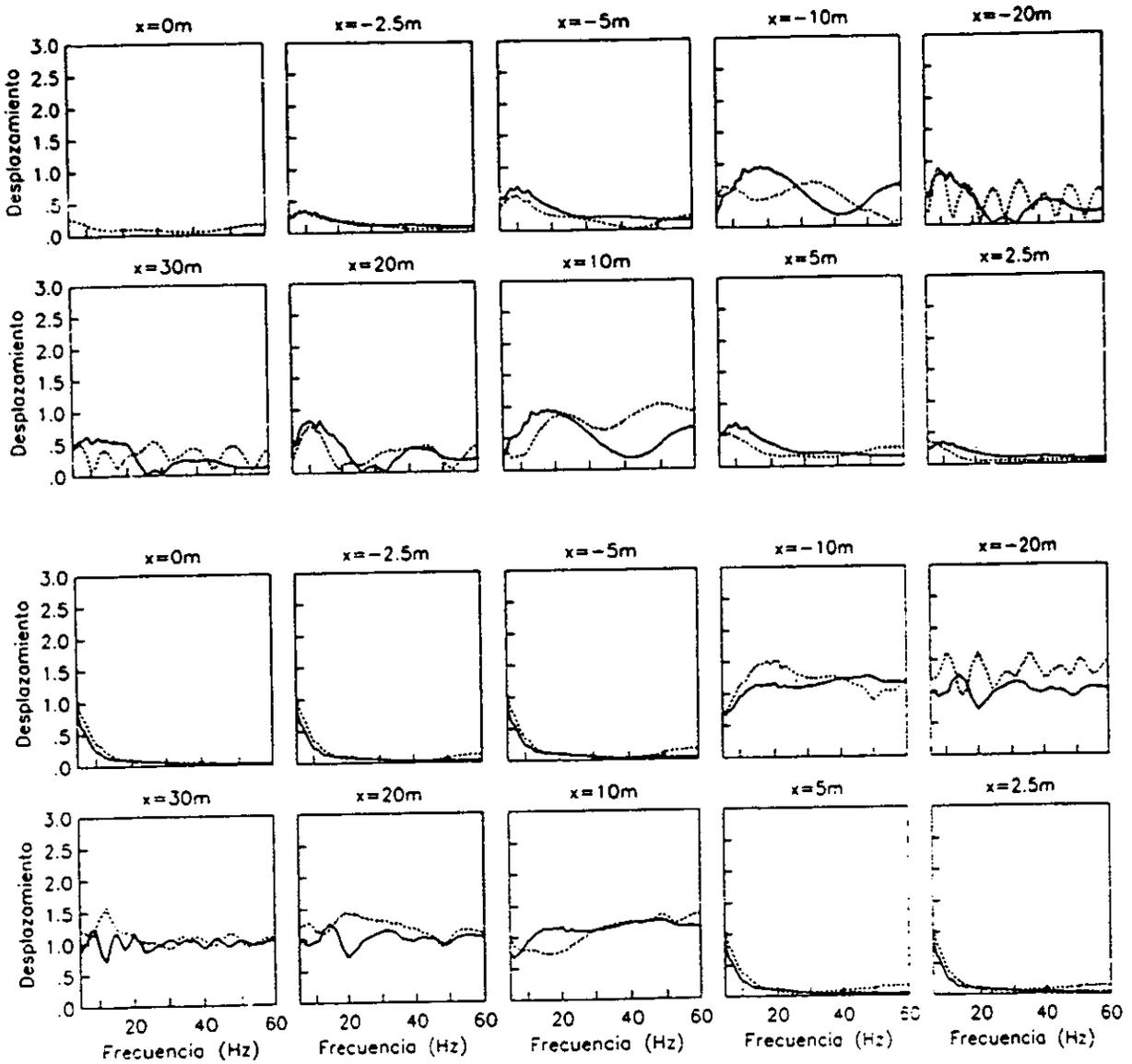
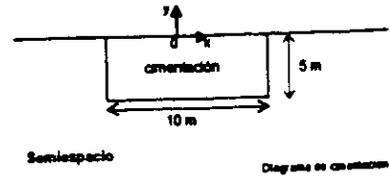
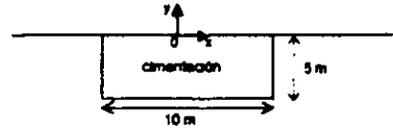


Figura 4.3 Incidencia de Ondas SV con 0 y 30 grados



Semiespacio

Diagrama de cimentación

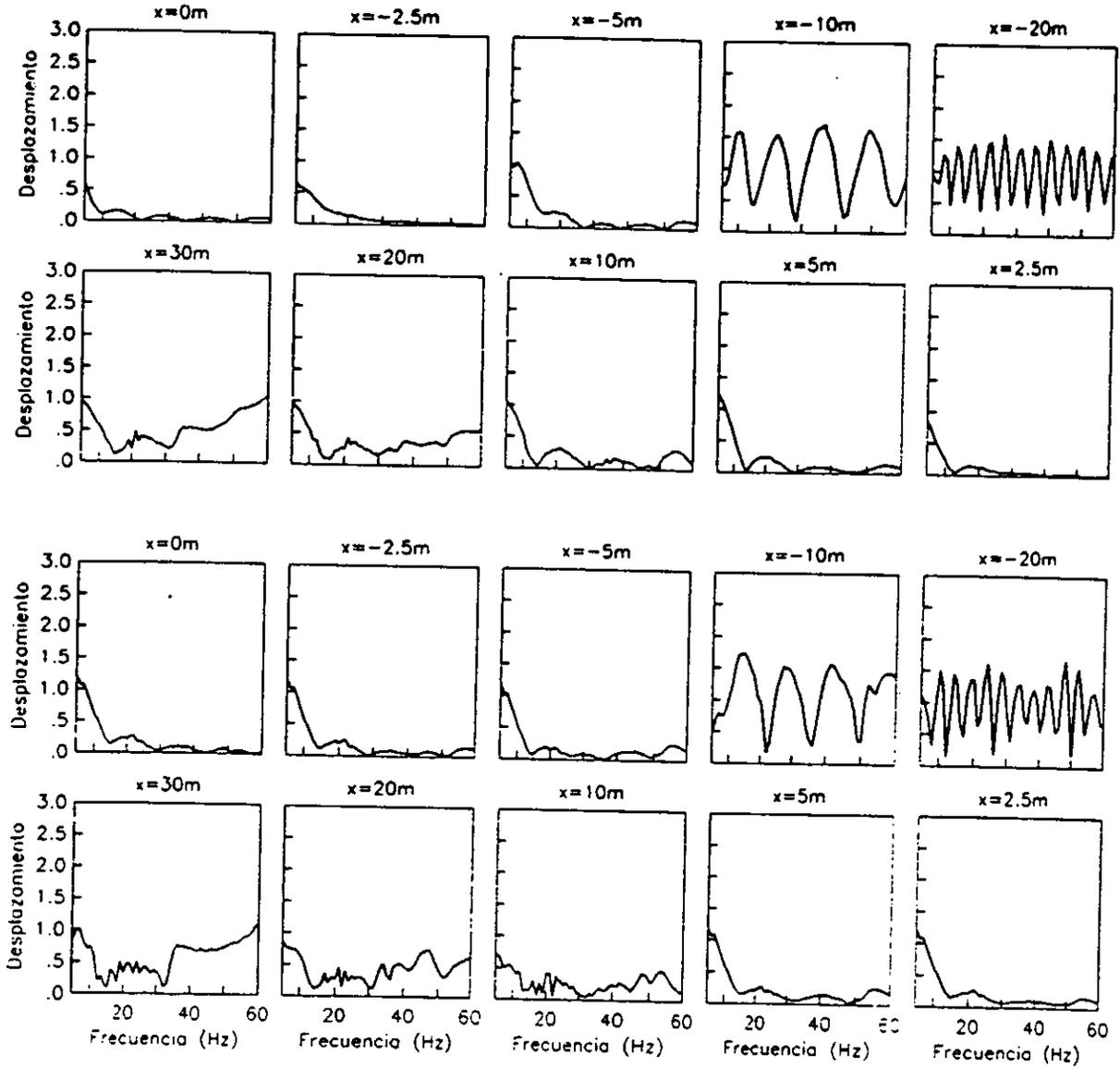


Figura 4.4 Incidencia de Ondas Rayleigh



Semiespacio

Diagrama de cimentación

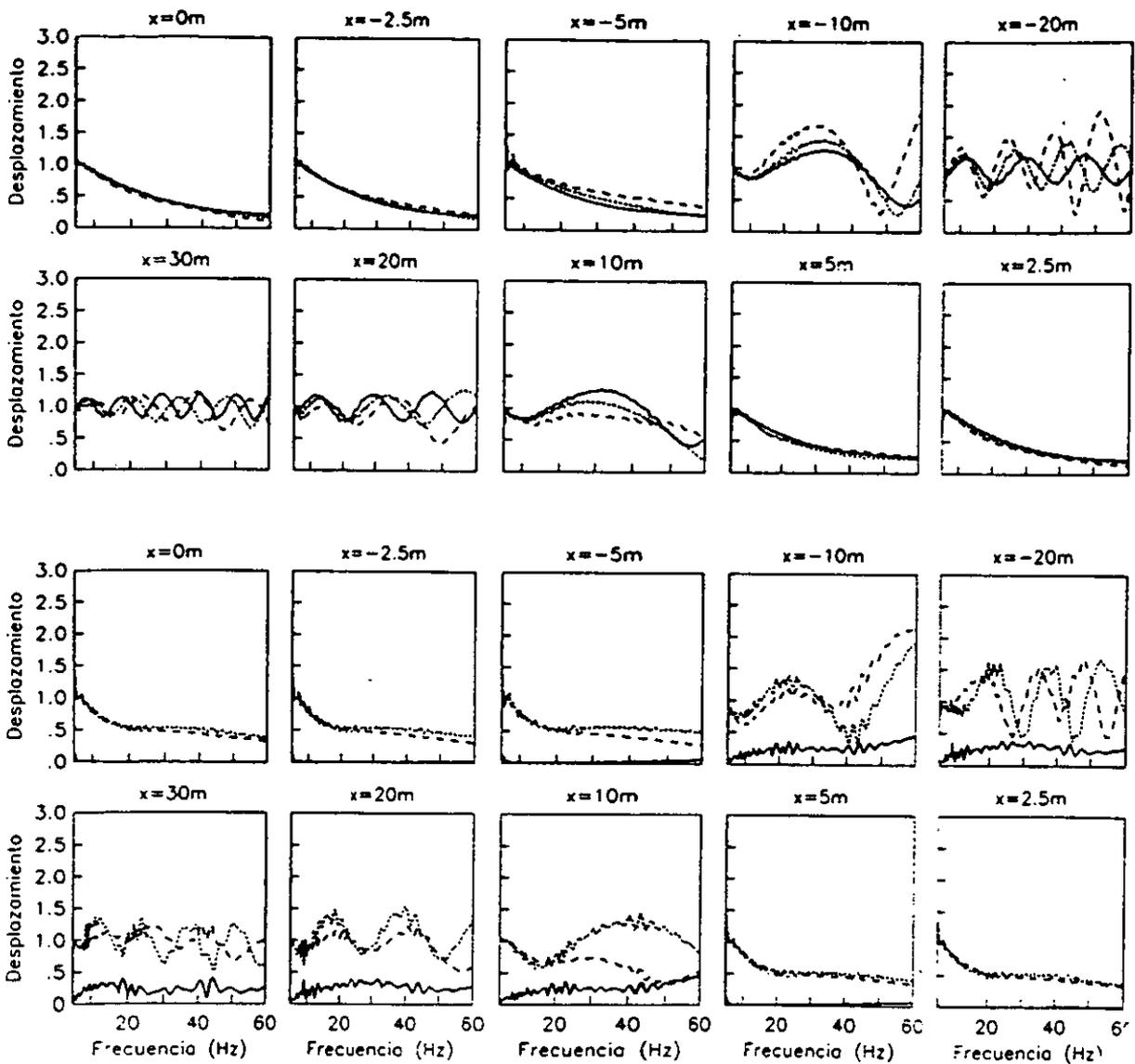


Figura 4.5 Incidencia de Ondas P con 0 (vertical), 30 y 60 grados

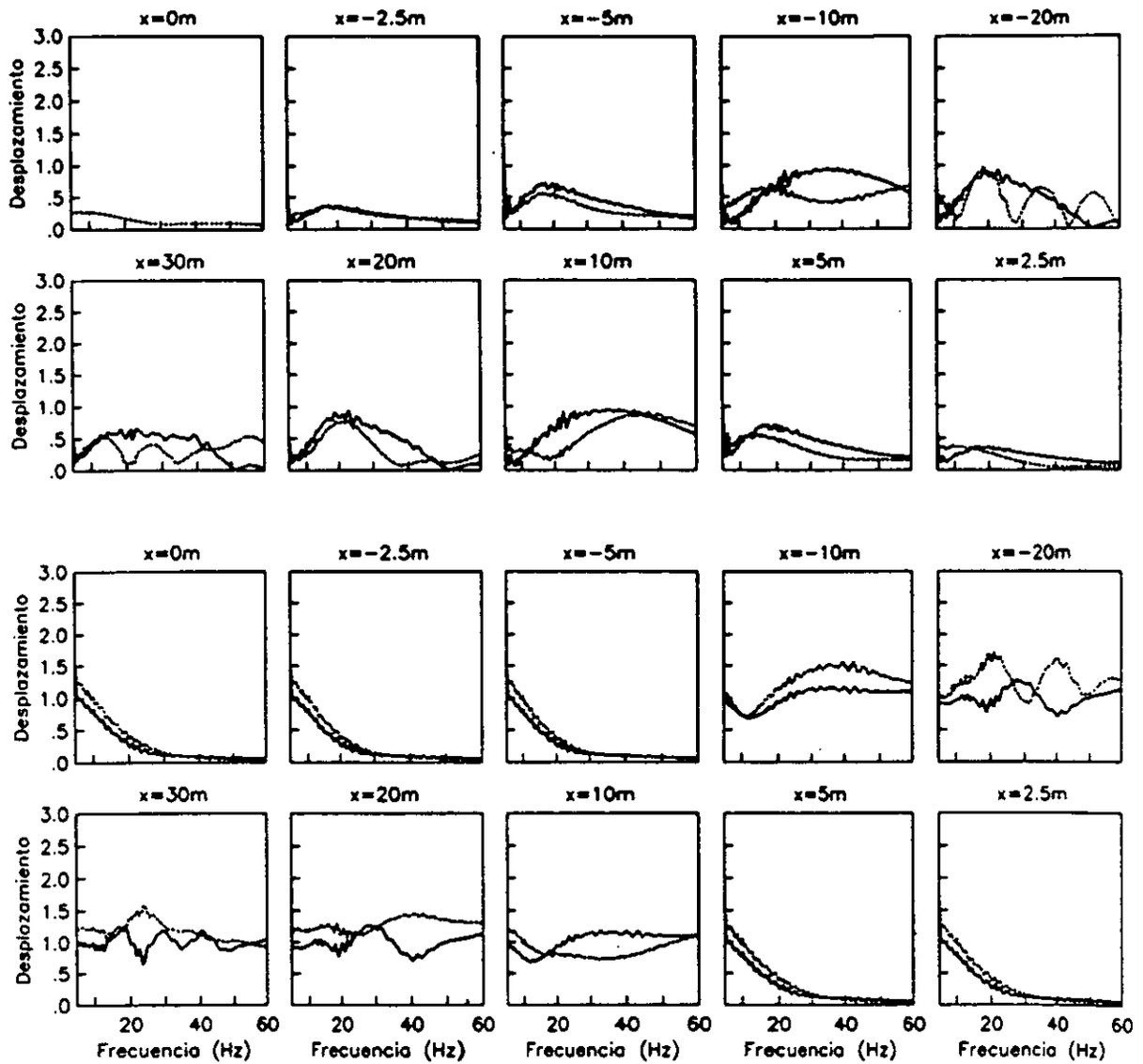
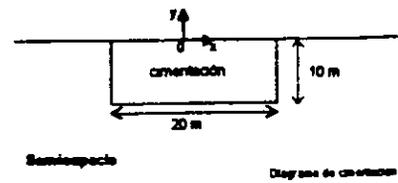


Figura 4.6 Incidencia de Ondas SV con 0 (vertical) y 30 grados

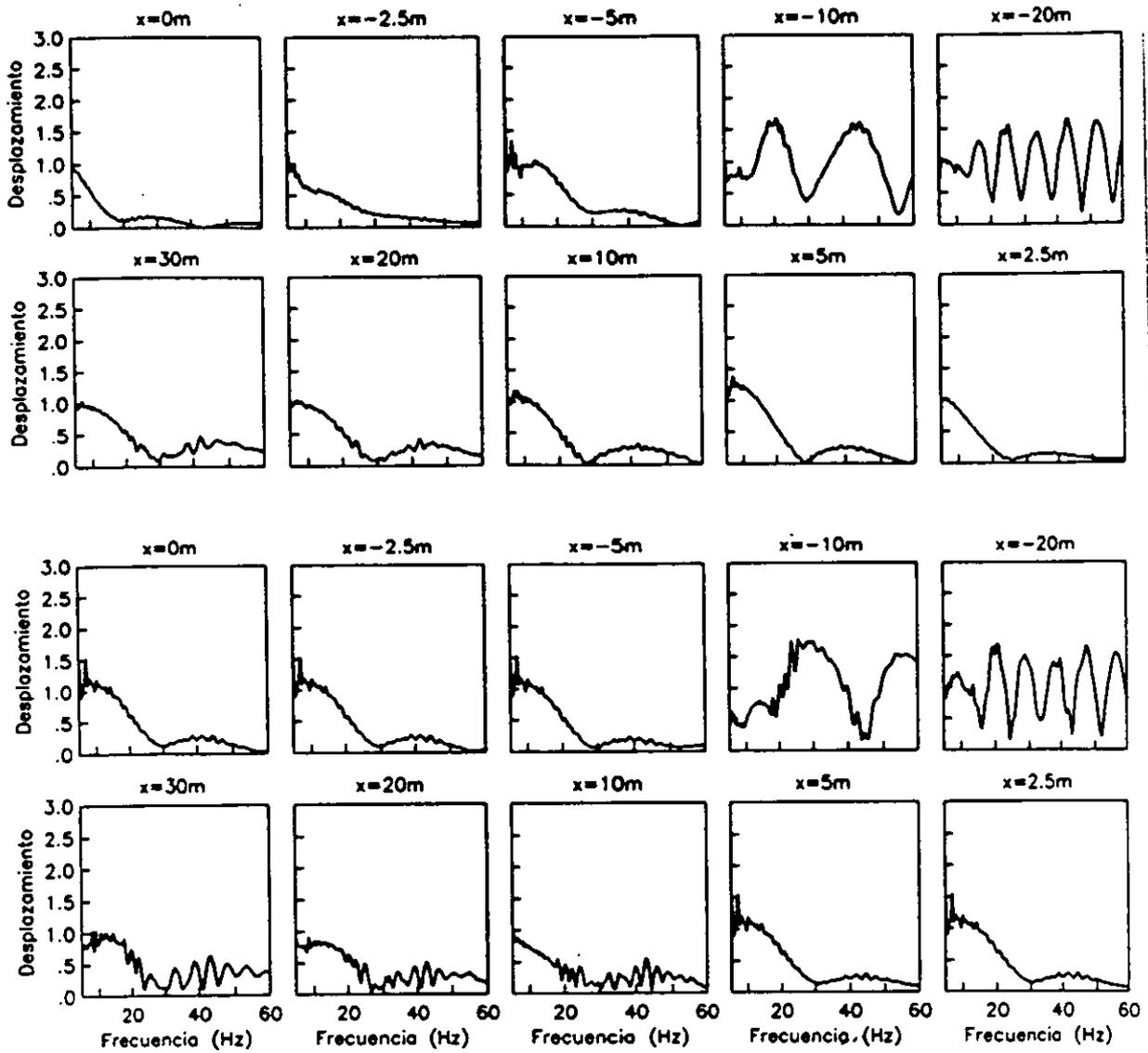
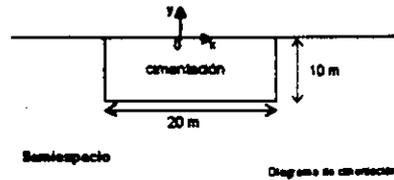


Figura 4.7 Incidencia de Ondas Rayleigh

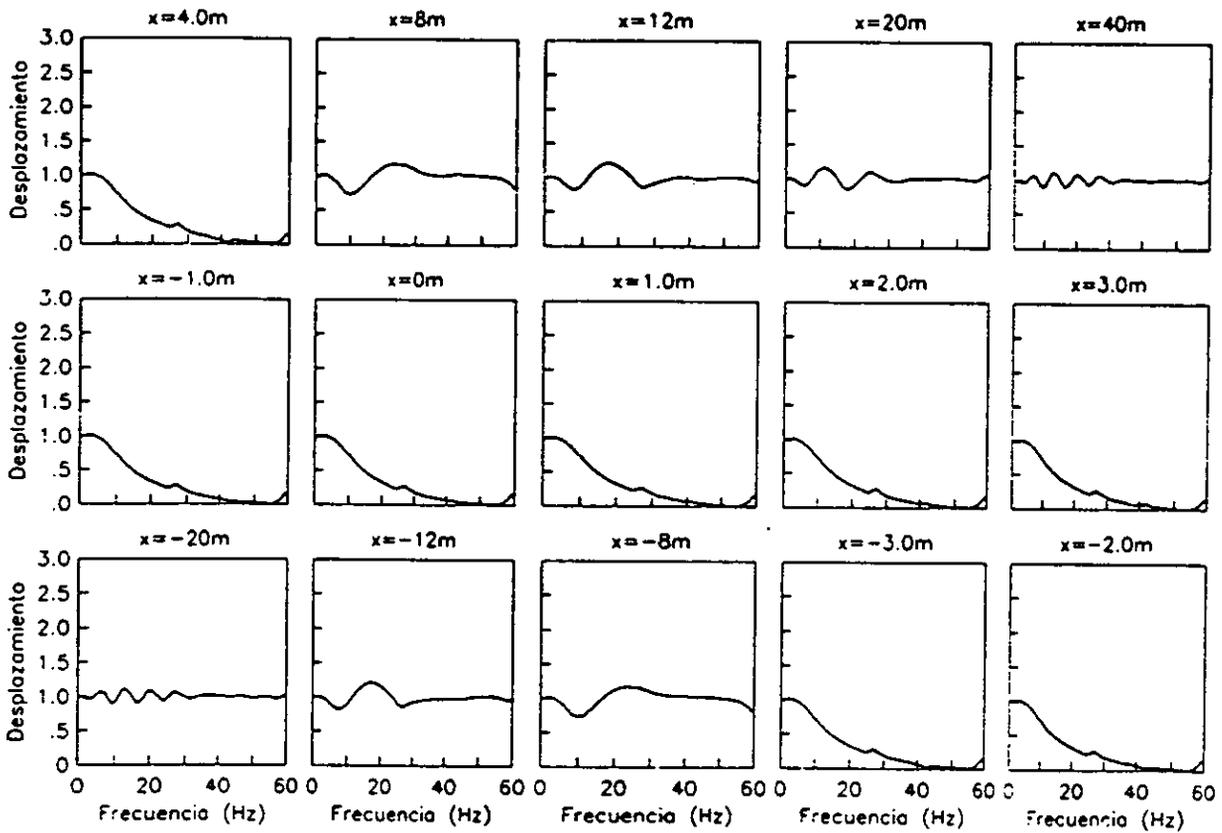
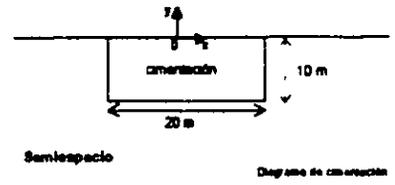


Figura 4.8 Incidencia de Ondas SH

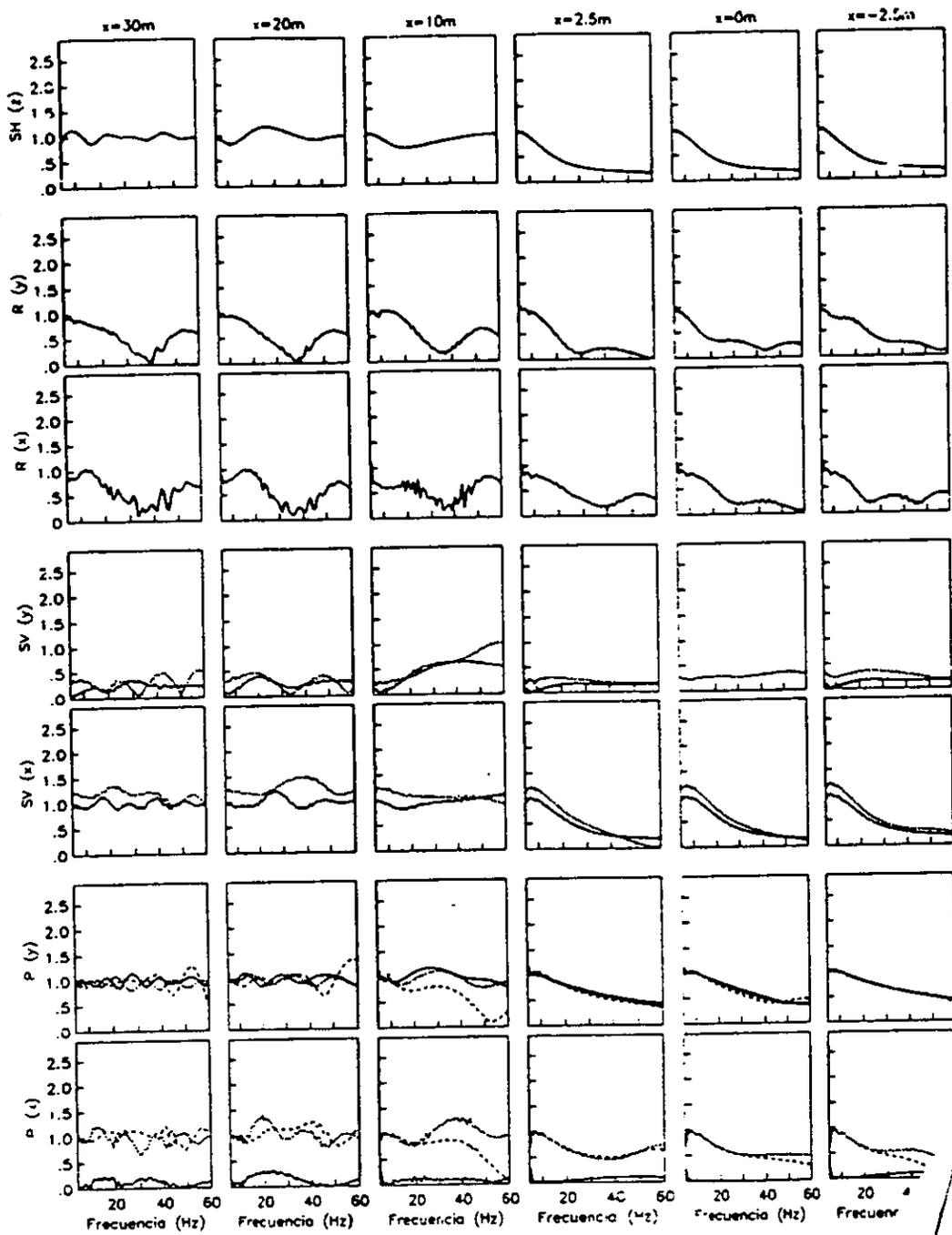


Figura 4.9 Incidencia de Ondas a 0, 30 y 90 grados, sobre una cimentación de 10 m de ancho enterrada a 2.5 m de profundidad

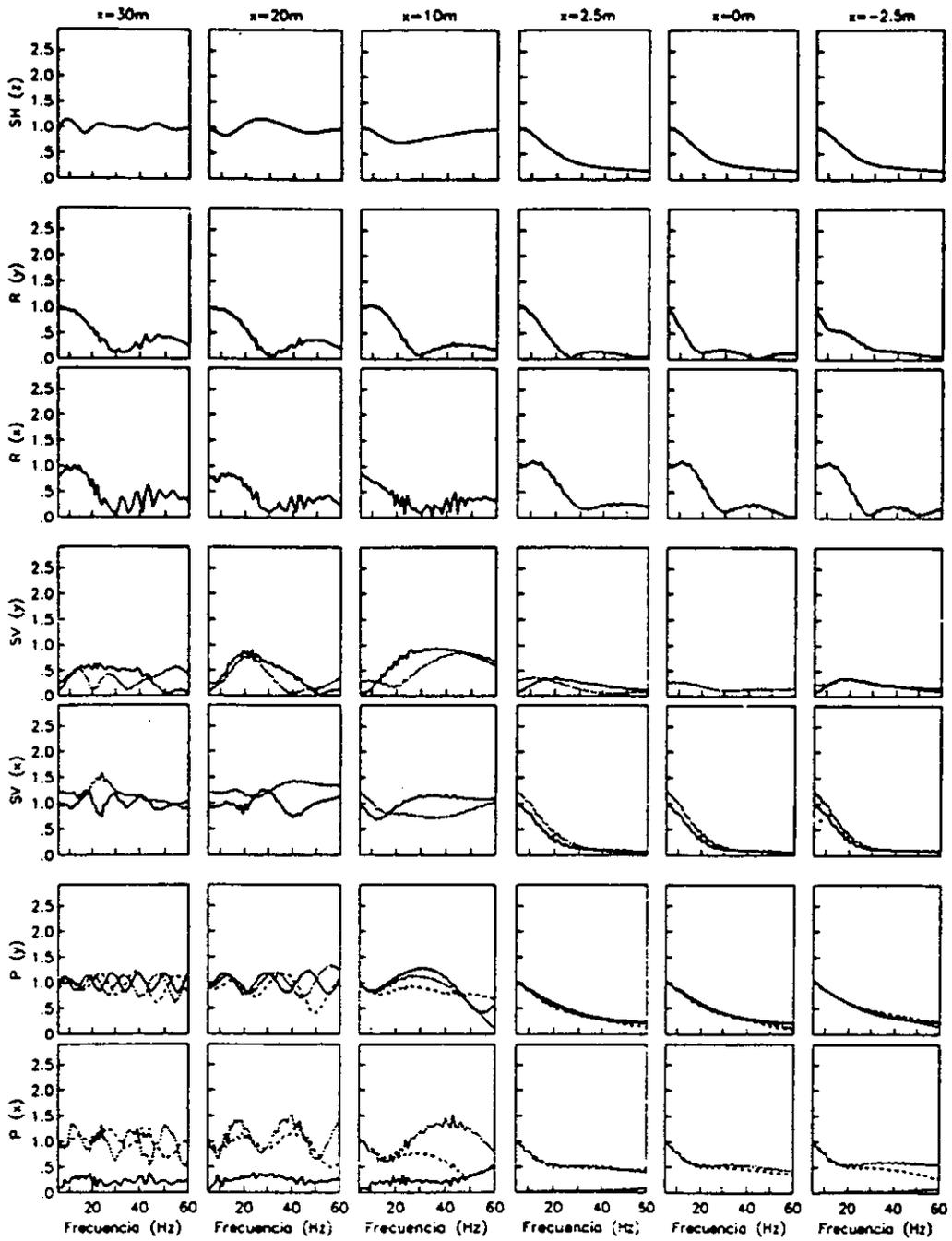


Figura 4.10 Incidencia de Ondas a 0, 30 y 90 grados, sobre una cimentación de 10 m de ancho enterrada a 5 m de profundidad

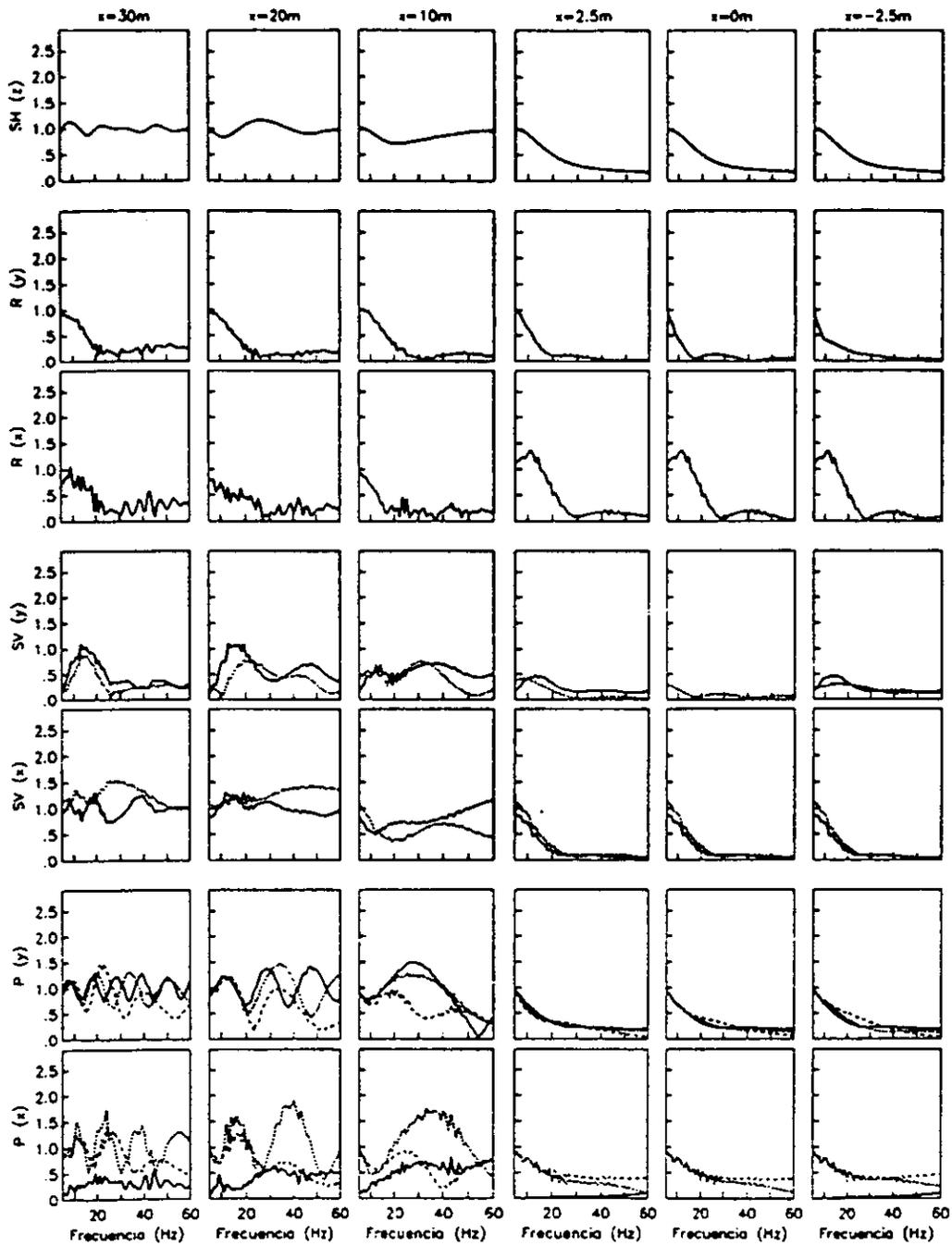


Figura 4.11 Incidencia de Ondas a 0, 30 y 90 grados, sobre una cimentación de 10 m de ancho enterrada a 10 m de profundidad

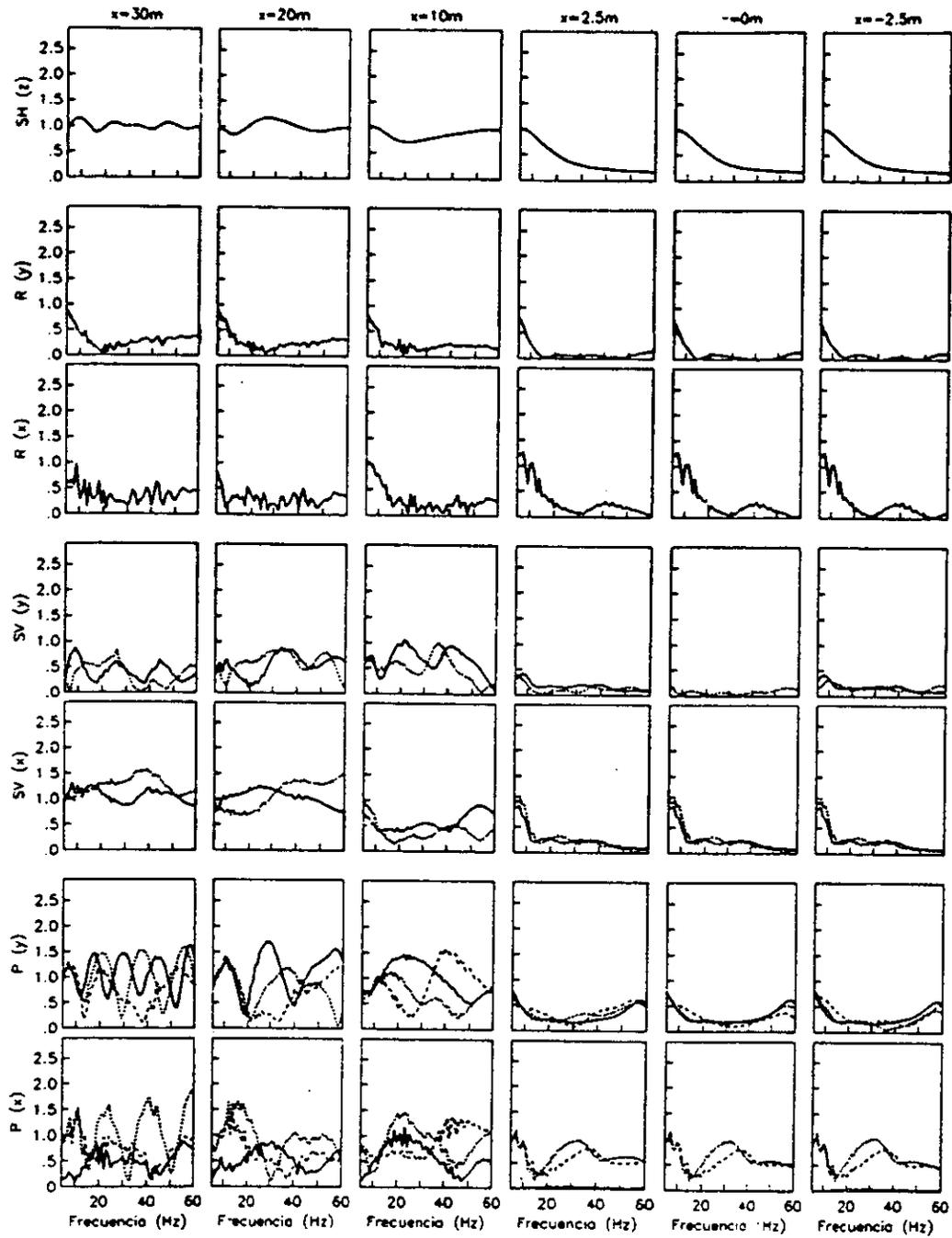


Figura 4.12 Incidencia de Ondas a 0, 30 y 90 grados, sobre una cimentación de 10 m de ancho enterrada a 20 m de profundidad

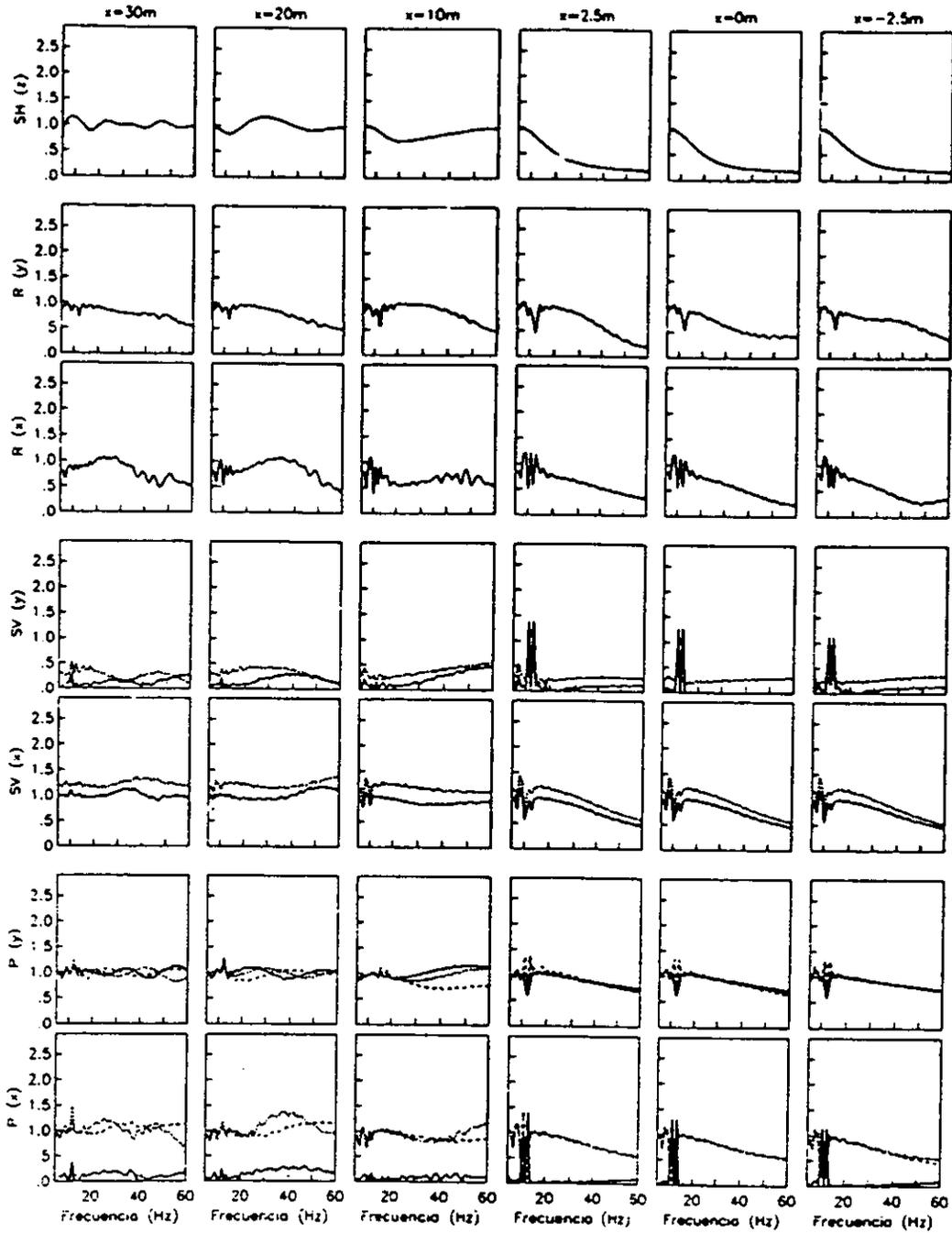


Figura 4.13 Incidencia de Ondas a 0, 30 y 90 grados, sobre una cimentación de 5 m de ancho enterrada a 1 m de profundidad

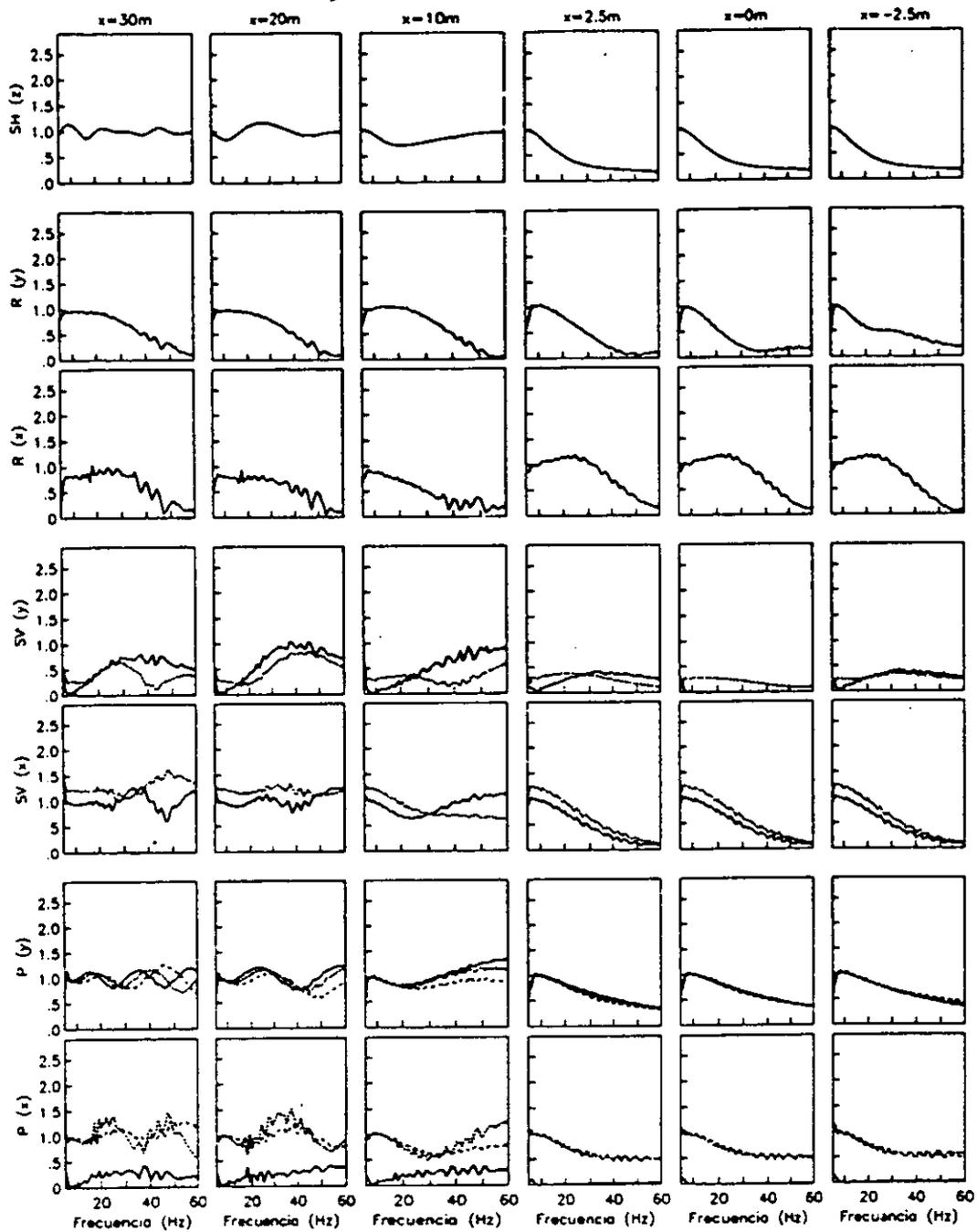


Figura 4.14 Incidencia de Ondas a 0, 30 y 90 grados, sobre una cimentación de 5 m de ancho enterrada a 3 m de profundidad

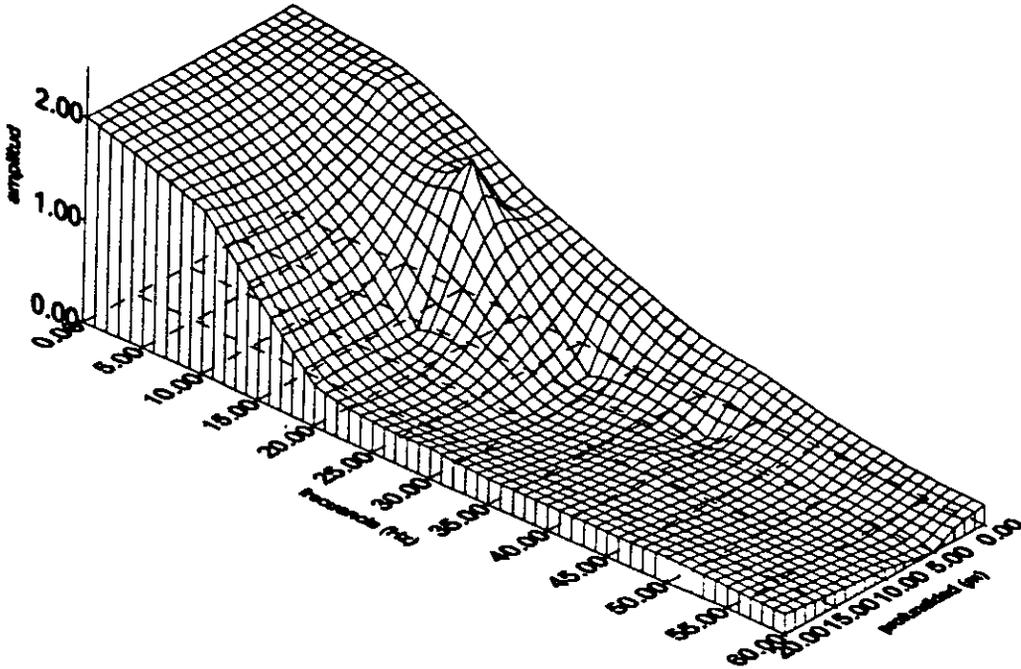


Figura 4.15 Cimentación sometida a ondas SV(x)

Con respecto a la gráfica SV(y), que aparece en la figura 4.16, se observa un comportamiento muy heterogéneo y complejo. A poca profundidad del desplante de la cimentación, prácticamente el movimiento se mantiene constante, para cualquier frecuencia. Sin embargo conforme aumenta la profundidad del desplante de la cimentación y la frecuencia, el movimiento disminuye, pero vuelve a incrementarse a partir de 20 Hz, aproximadamente y a partir de 10 m de profundidad.

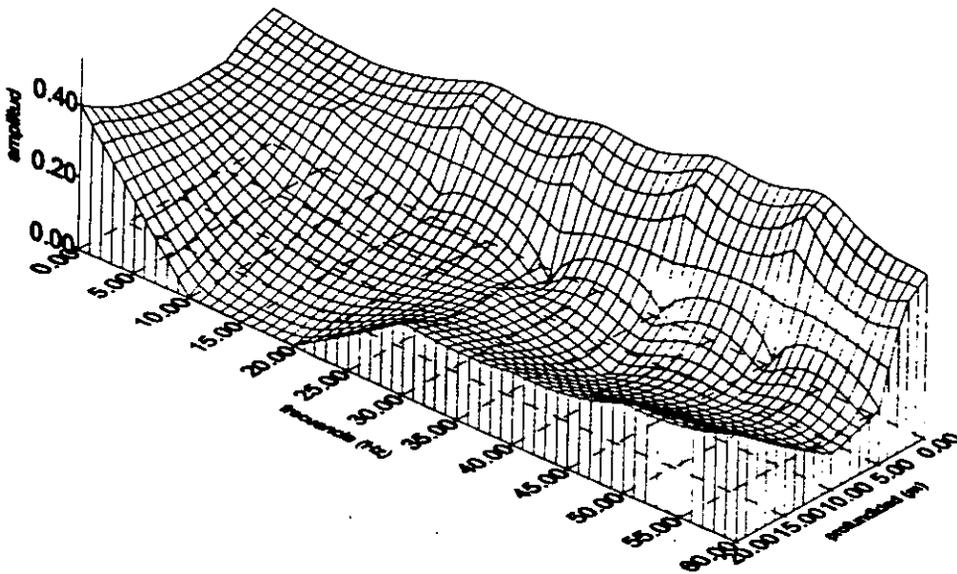


Figura 4.16 Resultado de una cimentación sometida a ondas SV(y)

En las figuras 4.17 a 4.20, se observa, en términos generales que conforme la profundidad de desplante de la cimentación va en aumento, la amplitud del movimiento va disminuyendo también, hasta hacerse casi nulo y para frecuencias más o menos de 10 Hz. En contraste, en la superficie de la cimentación, se observa que esta disminución es más suave conforme aumentan las frecuencias y la profundidad de desplante.

Con respecto a las ondas P, en la dirección x, de la figura 4.21, se puede observar que casi no se presenta movimiento para profundidades mayores a los 10 m y frecuencias arriba de los 10 Hz; sin embargo debajo de estos valores, se presenta una amplitud de movimiento, muy inferior que los valores para la onda P, en la dirección del eje y, del orden del 200 por ciento.

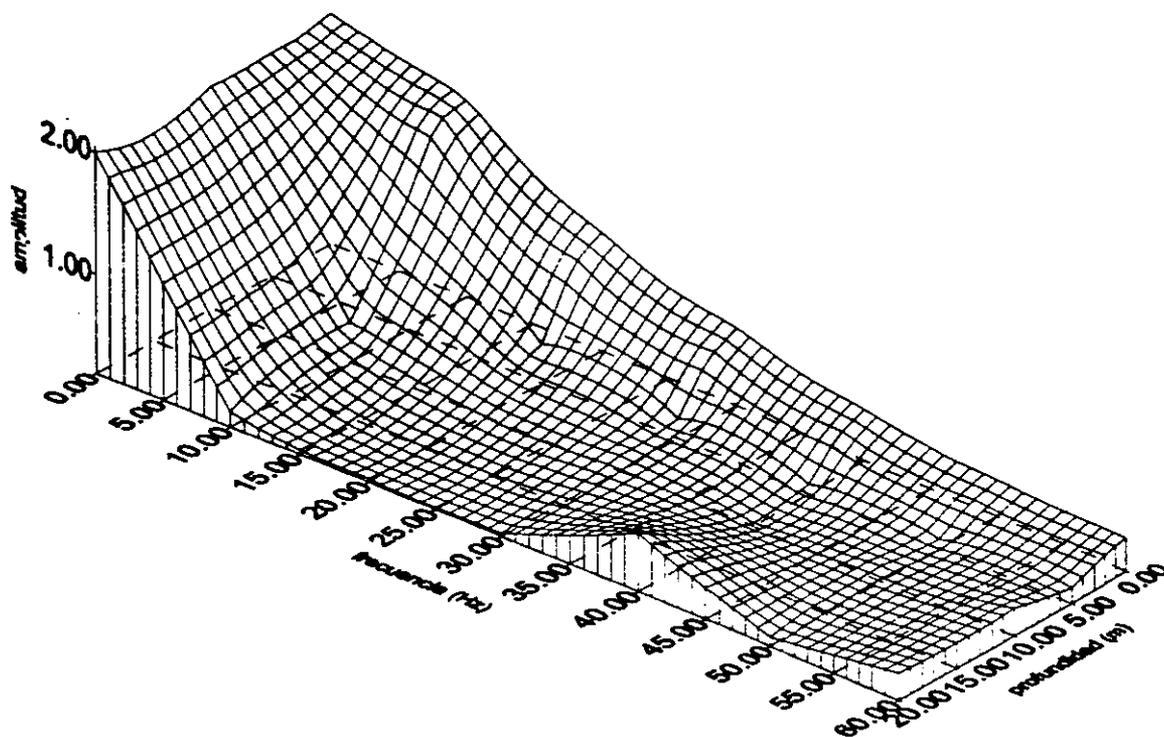


Figura 4.17 Cimentación sometida a ondas SH(z)

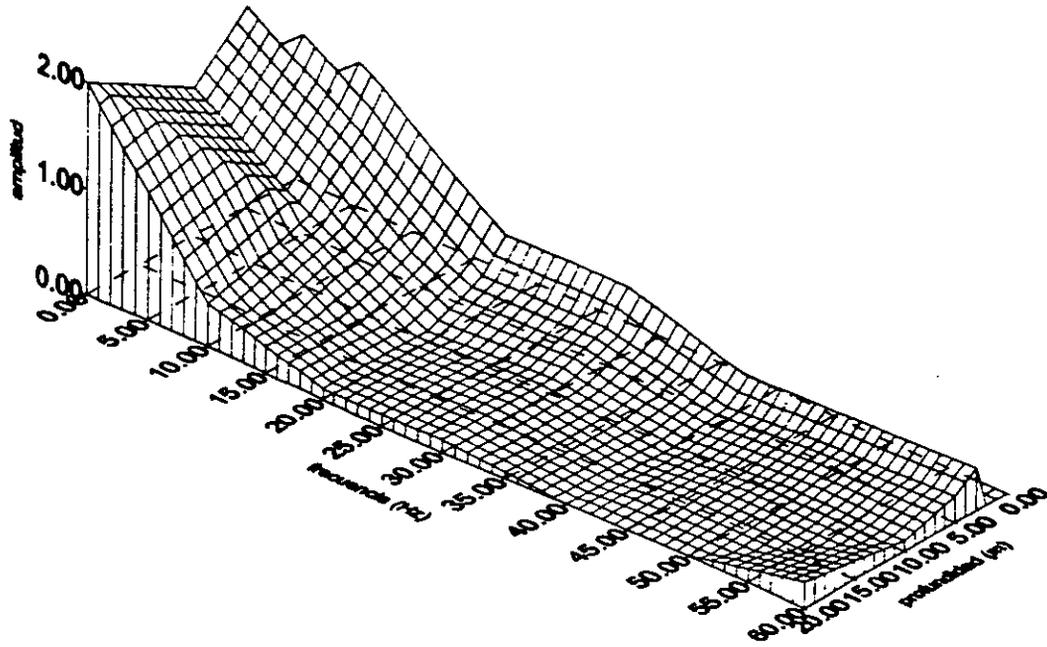


Figura 4.18 Cimentación sometida a ondas R(y)

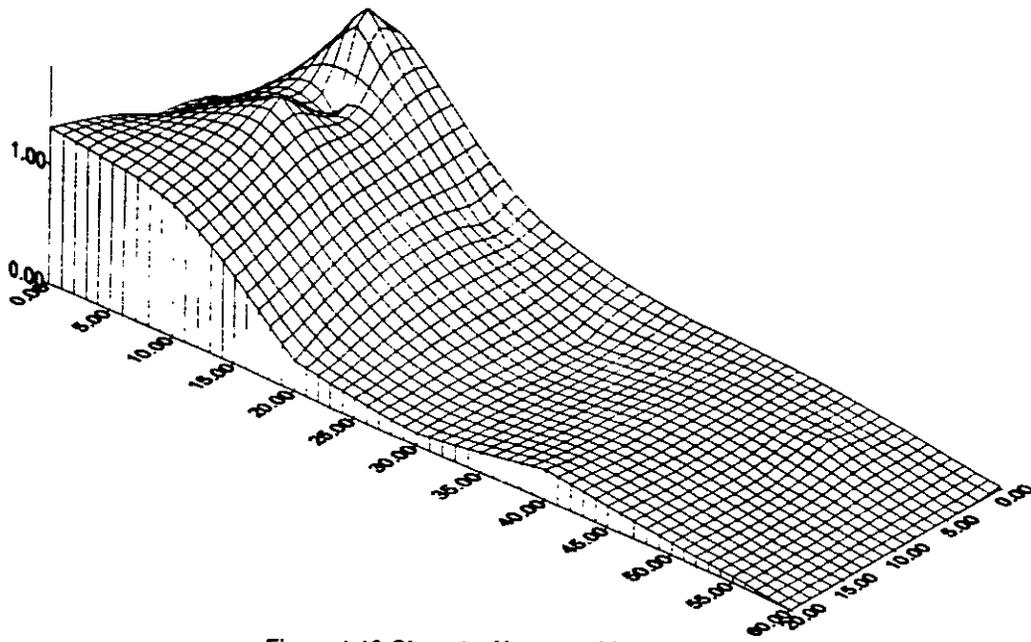


Figura 4.19 Cimentación sometida a ondas R(x)

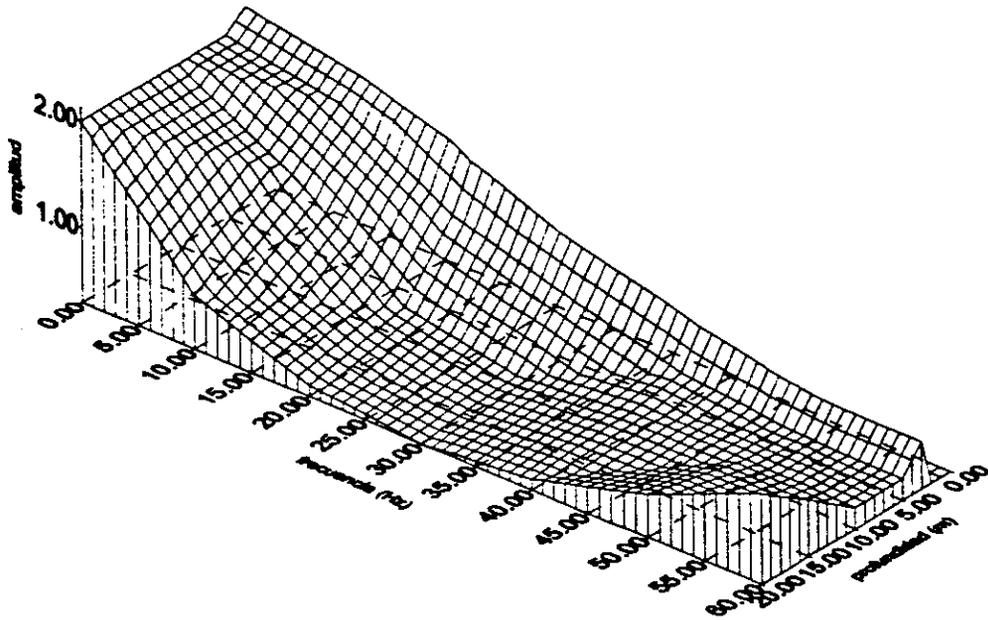


Figura 4.20 Cimentación sometida a ondas P(y)

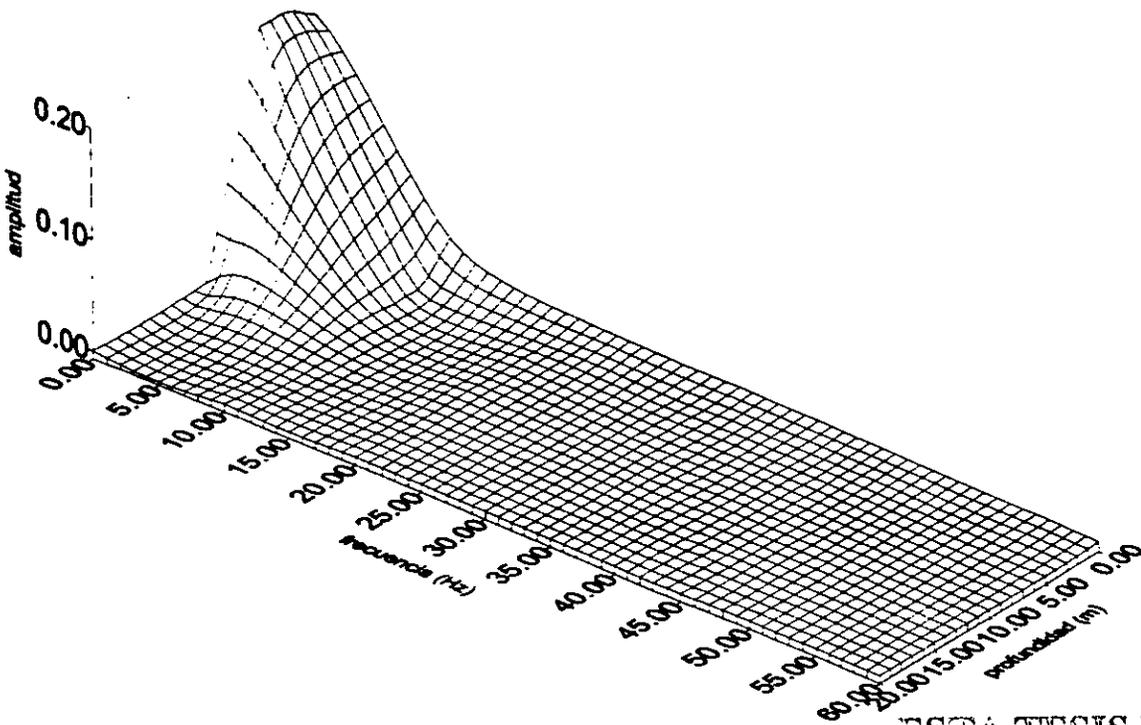


Figura 4.21 Cimentación sometida a ondas P(x)

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

4.4 Observaciones de la Interacción Cinemática de un edificio en la Ciudad de México

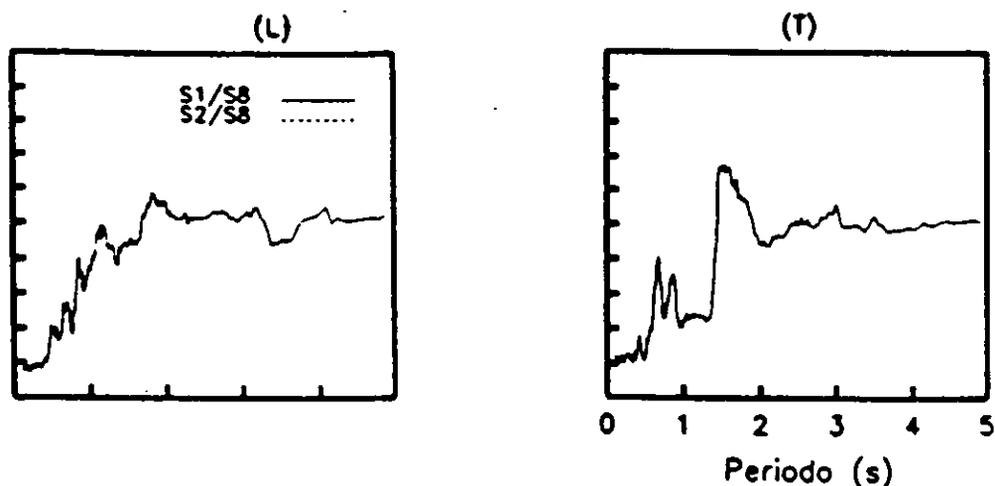


Figura 4.22 Cocientes espectrales entre sótanos y campo libre o funciones de transferencia de piso (FTP)

A continuación se presenta la respuesta cinemática de un edificio de concreto reforzado construido en la década de los años cuarentas, para poder observar la aplicación y similitud física de las gráficas obtenidas en un caso real de aplicación.

El edificio mencionado a pesar de no haber sufrido daños en los sismos de 1957, 1979 y 1985, tuvo que ser rehabilitado para cumplir con las especificaciones que marca el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal de 1987 para estructuras del tipo A. La rehabilitación propuesta incluye el encamisado de algunas columnas, el reforzamiento de algunos muros y la instalación de disipadores de energía.

Debido a la importancia del edificio y con el objetivo de monitorear su comportamiento sísmico antes, durante y después de los trabajos mencionados, el propietario decidió instalar, en 1994, una serie de acelerómetros y así conocer de manera confiable la respuesta estructural de las estructuras que forman el edificio.

La estructura estudiada se encuentra localizada en la zona III o de lago de la Ciudad de México. En esta se estudiaron los cocientes entre el movimiento del sótano (estación de control S1) y el de campo libre (estación de control S8), en las dos direcciones principales de la misma: longitudinal (L) y Transversal (T); a estos cocientes se les conoce como Funciones de transferencia de Piso (FTP) y permiten definir el movimiento efectivo en la base de la cimentación. En general, para FTP con

valores de amplitud mayores que uno, indican que la cimentación amplificó el movimiento, mientras que para valores menores que uno se debe interpretar como una reducción del mismo. En la figura 4.22 se presentan las FTP y se observa para las dos direcciones que existen considerables reducciones del movimiento en alta frecuencia o periodos cortos. Estas gráficas son muy similares a las obtenidas en las gráficas 4.9 a 4.14, donde existe la tendencia cinemática de tener poco movimiento para periodos bajos e incrementarlo para periodos altos.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Se ha utilizado el Método de Elementos de Frontera Directo bidimensional para conocer el comportamiento de cimentaciones rectangulares enterradas en suelos blandos cuando son sometidas a ondas sísmicas. El Método de Elementos de Frontera solo requiere modelar la frontera, por lo que para el caso de dos dimensiones esta es el perímetro que delimita el dominio, además de permitir trabajar con dominios infinitos. De entre las ventajas del uso de este método está la rapidez para modificar el modelo, ya que como es de suponerse, en la mayoría de los análisis se requiere hacer cambios frecuentes. Con este método se percibe que son mucho más fáciles de realizar que el Método de Elementos Finitos, ya que en el caso de tres dimensiones, la discretización de la frontera del dominio será una superficie, en lugar de querer modelar el interior del cuerpo.

Se analizaron dos casos: a) dos cimentaciones rectangulares de diferentes anchos y con diferentes profundidades cada una y para diferentes tipos de suelo, b) cimentaciones con ancho y tipo de suelo constante, pero profundidad variable.

Las gráficas obtenidas pueden utilizarse como funciones de transferencia (despreciando el efecto de la interacción inercial) para un determinado tipo de suelo y geometría de cimentación y poder definir el movimiento efectivo en la base de la cimentación.

De la observación del comportamiento de los resultados obtenidos se puede concluir, en términos generales, que tomar en cuenta la interacción cinemática es casi siempre benéfica para la cimentación; sin embargo el no hacerlo resulta conservador. La profundidad de desplante de la cimentación sí atenúa los movimientos en la superficie de la misma para ondas en altas frecuencias, lo que resulta benéfico para estructuras tales como naves industriales, bodegas, tiendas de autoservicio, etc., que tienen estanterías y contenidos con periodo bajo y alta frecuencia, así como en cimentaciones muy rígidas. Es aconsejable que este tipo de estructuras sean desplantadas en una cimentación a base de cajón, ya que de esta manera se garantizará la rigidez de la misma y se gozará de los beneficios de la interacción

cinemática. Además de que el cajón de cimentación puede, en un momento dado, utilizarse como estacionamiento o bodega.

Se recomienda que los diseños sísmicos tomen en cuenta la interacción suelo-estructura, ya que muchas veces se da por hecho que los registros sísmicos contienen movimientos de campo libre y no se toma en cuenta la presencia de la cimentación de la misma estación.

Como una de las principales aportaciones de este trabajo está el contar con una herramienta para poder realizar análisis del comportamiento de las cimentaciones, tomando en cuenta de manera más realista la estratigrafía del suelo, particularmente incluyendo la capa dura. Se sugiere que el método sea ampliado a tres dimensiones.

Bibliografía

- 1 Auvinet G. Análisis y diseño de cimentaciones en el valle de México, SMMS, 75 pp, México, 1994
- 2 Avilés. Interacción Suelo-Estructura: Conceptos de diseño. Conferencia plenaria, XII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, 1999.
- 3 Avilés J. Y Pérez Rocha E. Resortes y amortiguadores equivalentes del suelo. Boletín del Centro de Investigación Sísmica, Fundación Javier Barros Sierra, vol. 2, No. 1 (1992).
- 4 Barbat H, Miquel C. Juan. Estructuras sometidas a acciones sísmicas. Segunda edición, 1994, editorial CIMNE.
- 5 Cervantes y Ayala, Comparación entre el método de elementos finitos y el método de los elementos de frontera, Memorias del X Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Yucatán, México, 1996.
- 6 Chávez – García F.J y P.Y Bard (1994), Chávez García F.T (1991). Diffraction et amplification des ondes sismiques dans le bassin de México , Tesis Doctoral, University Joseph Fourier de Grenoble , Francia.
- 7 Cruse T. A. And Rizzo F. J., A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I. J. Math. Anual and Appl., 22, 244-259, 1968.
- 8 Clough R. W. Y Penzien j. Dynamics of Structures. McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1975.
- 9 Domínguez J. Boundary Elements in Dynamics. Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, 1993.
- 10 Gutiérrez J. A., A structure Method for Earthquake Analysis of Structure-Soil Interaction, Report EERC 79-9, Earthquake Engineering Research Centre, Univ. Of California, Berkeley, 1976.
- 11 Jennings p y Bielak J, Dynamics of building-soil interaction, Bolletin of the Seismological Society of America, Vol. 63, pp 9-48, 1973
- 12 Kausel, E. Y Rosset, J. M., Soil-Structure Interaction for Nuclear Containment Structures, Proc ASCE. Power Division Specialty Conference, Boulder, Colorado, 1974.

- 13 Kawase H. y K. Aki. A Study of the response of a soft basin for incident s, p and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico city. *Boll. Seism. S. Am.*, 79, 1361-1382., (1989).
- 14 Lysmer, J. *Analytical Procedures in Soil Dynamics*, Report No. EERC 78/29, University of California, Berkeley, 1978.
- 15 Miranda E. *Conceptos básicos sobre interacción dinámica suelo-Estructura*. CENAPRED, 1995.
- 16 Murià V. Y González A. *Efectos de la Interacción suelo-estructura en la respuesta sísmica de un edificio instrumentado.*, 1993.
- 17 Reinoso, E., *Boundary element modelling of scattering from topographical structures with applications to the Mexico city valley*. Ph.D. Thesis, Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth, Southampton, UK, 1994.
- 18 Reinoso, González y Romero. *Análisis de los registros sísmicos e identificación de sistemas de un edificio en el centro de la ciudad de México*, X Congreso Nacional de Ingeniería Estructural. Yucatán, noviembre de 1996.
- 19 Romo, M. P. And Seed, H. Bolton. *Analytical Modelling of Dynamic Soil Response in the Mexico Earthquake of september 19, 1985*, Procs., An Int. Conf. On the 1985 Mexico Earthquake, Factors Involved and Lessons Learned sept. 19-21, Mexico city, 1986.
- 20 Romo, *Comportamiento dinámico de la arcilla de la ciudad de México y su repercusión en la Ingeniería de Cimentaciones*, Memoria del Congreso El subsuelo en la Cuenca del Valle de México y su relación en la Ingeniería de Cimentaciones a cinco años del Sismo, pp 83-95, SMMS, 1990.
- 21 Romo y Barcenás, *Interacción Dinámica Suelo-Estructura en suelos blandos*. Memorias de la reunión del Comité Internacional sobre el comportamiento de cimentaciones bajo cargas sísmicas y su influencia en Reglamentos de Construcción, SMMS, 1992.
- 22 Romo y Barcenás, *Análisis de la Interacción Dinámica Suelo-Estructura en la Ciudad de México*. Series del Instituto de Ingeniería (565), 1994
- 23 Rosenblueth E. *Diseño de Estructuras Sometidas a Sismos*. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, A. C., 1992, Segunda reimpresión.
- 24 Rosenblueth, E. y Reséndiz, D., *Disposiciones reglamentarias de 1987 para tener en cuenta interacción dinámica suelo-estructura*, Publicación No. 509, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1988.

- 25 Rosenblueth, N.M. Newmark. Fundamentos de Ingeniería Sísmica. Editorial Diana, segunda impresión, julio de 1978.
- 26 Rosenblueth E., Ordaz M, Sánchez Sesma. The México earthquake of september 19, 1985, Vol. 5, No. 1, 1989.
- 27 Sánchez-Sesma F. Site effects on strong ground motion, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, vol. 6, No. 2, 1987.
- 28 Veletsos A. S. Dynamics of Structure-foundation systems. Structural and Geotechnical Mechanics. Editorial W. J. Hall, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, (1977).
- 29 Veletsos y Meek J., Dynamic behaviour of building-foundation systems, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 3, pp 121-138, 1974.
- 30 Reinoso E. Efectos sísmicos locales en el valle de México: amplificación en la zona lacustre. IX nat. Conf. Earth Eng. , Manzanillo, México, 2, 224-236., 1991.
- 31 Reinoso E. L. Wrobel y H. Power. Preliminary Results of the Modelling of the Mexico City Valley with a 2D Boundary Method for Scattering of SH waves. Soil Dyn. Earth. Eng., 12, 457-468 (1993).
- 32 Rosenblueth E. Y Gómez R. Comentarios a las normas Técnicas complementarias para diseño por sismo. Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No. ES-7, 1991.
- 33 Rosenblueth N. M. Newmark. Fundamentos de Ingeniería Sísmica. Editorial Diana, segunda impresión, julio de 1978.
- 34 Rosenblueth E. Diseño de Estructuras Sometidas a Sismos. Instituto Mexicano del cemento y del Concreto, A. C., 1992, segunda reimpresión.
- 35 Suárez. Martha Comunicación personal, 1999.
- 36 Wolf j. P. Dynamics soil-structure interaction, Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, (1985).