

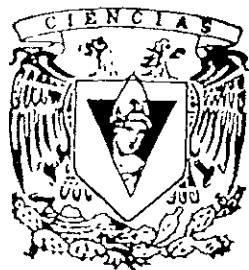


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTINUOS ENCADENABLES Y
APOSINDESIS MUTUA.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C A
P R E S E N T A :
EMILY SANCHEZ GARCIA



DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGIO MACIAS ALVAREZ

MEXICO, D. F.

DICIEMBRE DE 1999

235442



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

CONTINUOS ENCADENABLES Y APOSINDESIS MUTUA.

realizado por EMILY SÁNCHEZ GARCÍA

Con número de cuenta 9455915-6 , pasante de la carrera de MATEMÁTICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis

Propietario

Dr. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ.

Propietario

Dr. JAVIER PÁEZ CÁRDENAS.

Propietario

Dr. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA.

Suplente

Dr. HÉCTOR MÉNDEZ LANGO.

Suplente

Dr. RAÚL ESCOBEDO CONDE.

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. JULIO CÉSAR GUEVARA BRAVO.

Con todo mi cariño dedico esta tesis a:

Josefina y Alfredo por creer en mí y apoyarme para seguir adelante.

Román por darme su confianza, su amor y estar siempre a mi lado.

Sandra por ser la hermana mas linda y comprensible.

Ana, Tochiro, Javier, Norma, Martín, Memo y Gerardo por los momentos buenos y malos que hemos pasado juntos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer especialmente al Dr. Sergio Macías por haberme dirigido este trabajo, por ayudarme en momentos difíciles y por ser durante todo este tiempo un amigo.

También deseo agradecer a los doctores Javier Pácz, Alejandro Illanes, Héctor Méndez y Raúl Escobedo por su colaboración al revisar y corregir este trabajo.

Agradezco, finalmente, al Instituto de Matemáticas por permitirme el uso de sus instalaciones durante la elaboración de esta tesis.

Contenido

Introducción	iii
1 Preliminares	1
2 Continuos Encadenables	15
3 Aposindesis	29
4 Descomposiciones	47
5 Aposindesis Mutua	63
6 Productos simétricos de continuos	77
Bibliografía	89

Introducción

En el presente trabajo se hace el estudio de una parte de la topología llamada *Teoría de Continuos*, este tipo de espacios además de ser atractivos son muy manejables; es por ello que me dedique este tiempo de mi vida académica a estudiarlos.

En el primer capítulo se da la definición de continuo, y algunos de los ejemplos más conocidos. También presentamos la herramienta necesaria para un mejor entendimiento del resto del trabajo. En el segundo capítulo se introducen un tipo de continuos llamados encadenables, todos estos tienen la particularidad de vivir en el plano euclideo y ser muy “flaquitos”.

El tercer capítulo se dedica al estudio de los conceptos de *Aposindesis* y *aposindesis mutua*, el primero fue introducido por Jones en 1941, el cual resulta ser una generalización de la conexidad local y se parece al axioma de separación T_1 . En 1969, Hagopian desarrolló la noción de aposindesis mutua, que es una versión “Hausdorff” de la aposindesis de Jones. Cabe observar que la aposindesis mutua es más fuerte que la aposindesis pero en general es más débil que la conexidad local.

En el cuarto capítulo se estudian las propiedades nece-

sarias sobre descomposiciones y espacios cocientes de continuos, el objetivo es dar lo necesario para el entendimiento de los teoremas principales en este trabajo, los cuales se encuentran en el quinto capítulo. Finalmente, en el sexto capítulo, se presenta la versión en productos simétricos de los últimos resultados del capítulo anterior.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen los conceptos y resultados básicos de continuos, los cuales ayudarán a obtener una mejor comprensión de los siguientes capítulos de la presente tesis. Para un entendimiento más amplio en la Teoría de los Continuos se recomienda revisar el libro de Nadler, [N2].

Definición 1.1. *Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Los subcontinuos de un continuo son aquellos subconjuntos del continuo que a su vez son continuos.*

Existen continuos que podemos visualizar fácilmente, algunos de los más conocidos se muestran en los siguientes ejemplos.

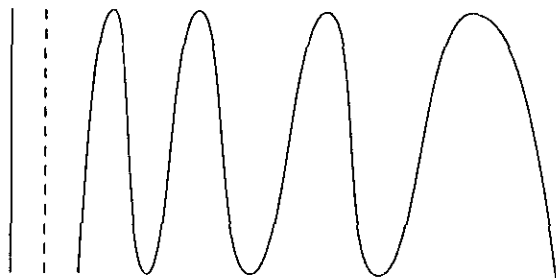
Ejemplo 1.1. En la literatura a la curva formada por la unión de los conjuntos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{sen}(1/x) \text{ y } x \in (0, 1]\}$$

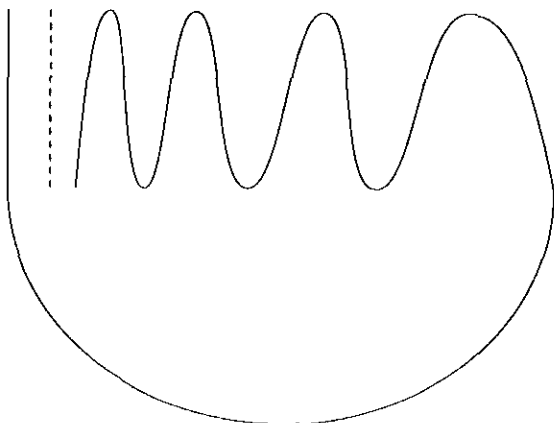
y

$$\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1, 1]\}$$

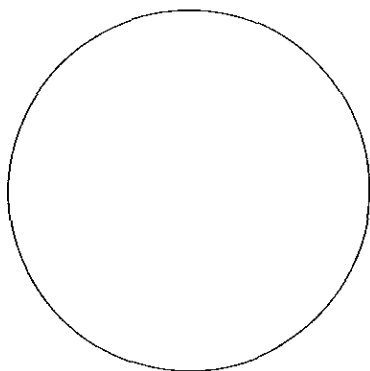
es nombrada como *la curva del topólogo*. Ver la siguiente figura.



Ejemplo 1.2. El conjunto formado al identificar los puntos $(1, \text{sen } 1)$ con $(0, -1)$ de la curva anterior es un continuo y es llamado *el círculo de Varsovia*. Ver la siguiente figura.



Ejemplo 1.3. El conjunto descrito por $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es conocido como *el círculo unitario* S^1 , donde $\mathbb{C}$ denota al conjunto de los números complejos. Ver la siguiente figura.

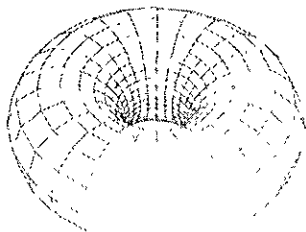


En este trabajo, por convención, tendremos que todo continuo que sea mencionado será un continuo no degenerado, es decir, es distinto de un punto.

Una manera de obtener nuevos continuos la sugiere el siguiente teorema, el cual no será demostrado, una demostración es dada en [N2, 2.1]

Teorema 1.2. *El producto cartesiano de una cantidad finita o numerable de continuos, con la topología producto, es un continuo.*

Ejemplo 1.4. Si tomamos el producto cartesiano de S^1 con él mismo obtenemos un continuo el cual es conocido como el *toro*. Ver la siguiente figura.



Lema 1.3. *Si X es un continuo y $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia anidada de subcontinuos entonces $\bigcap_{\alpha \in A} Z_\alpha$ es un continuo.*

Demostración. Como $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ está anidada, se tiene que es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita, de donde $\bigcap_{\alpha \in A} Z_\alpha$ es un subconjunto cerrado y no vacío de X . Supongamos que $\bigcap_{\alpha \in A} Z_\alpha$ no es conexo. Entonces existen dos cerrados ajenos y no vacíos, K y L de X tales que $\bigcap_{\alpha \in A} Z_\alpha$ es igual a $K \cup L$. Como X es un espacio normal, existen dos abiertos ajenos, U y V , de X tales que $K \subset U$ y $L \subset V$. Ahora bien, observemos que $X \setminus (U \cup V)$ es un cerrado de X y, por tanto, compacto tal que está cubierto por la familia de abiertos $\{X \setminus Z_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Así que, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en A tales que $X \setminus (U \cup V) \subset \bigcup_{j=1}^n (X \setminus Z_{\alpha_j})$. De lo anterior se tiene que $\bigcap_{j=1}^n Z_{\alpha_j}$ está contenida en $U \cup V$. Como $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ está anidada, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$Z_{\alpha_n} = \bigcap_{j=1}^n Z_{\alpha_j}$. Como Z_{α_n} está contenida en $U \cup V$ y U y V son abiertos ajenos, resulta que $\bigcap_{\alpha \in A} Z_{\alpha} \subset Z_{\alpha_n} \subset U$ o que $\bigcap_{\alpha \in A} Z_{\alpha} \subset Z_{\alpha_n} \subset V$. En el primer caso tenemos que $(\bigcap_{\alpha \in A} Z_{\alpha}) \cap K = \emptyset$ y en el segundo $(\bigcap_{\alpha \in A} Z_{\alpha}) \cap L = \emptyset$. En cualquier caso obtenemos una contradicción. Por lo tanto $\bigcap_{\alpha \in A} Z_{\alpha}$ es conexa. $\diamond$

Definición 1.4. *Un continuo X es unicoherente si cada vez que $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X , se tiene que $A \cap B$ es conexa. Un continuo es hereditariamente unicoherente si cada subcontinuo es unicoherente.*

Es fácil observar que el intervalo $[0, 1]$ es un continuo hereditariamente unicoherente. Así como también no es difícil ver que el círculo unitario no es unicoherente.

El concepto que enseguida se definirá fue estudiado en 1925 por R. L. Moore en términos de descomposiciones semicontinuas superiormente. El significado de este último concepto será estudiado en el capítulo de descomposiciones.

Definición 1.5. *Sean X y Y espacios compactos y métricos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entonces se dice que f es una función **monótona** si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.*

El siguiente lema nos muestra una propiedad de las funciones monótonas entre continuos.

Lema 1.6. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua monótona y suprayectiva entre continuos y K un subcontinuo de Y entonces $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X .*

Demostración. Lo único que basta ver es que $f^{-1}(K)$ es conexo, pues, como f es continua y K es un cerrado en Y se tiene que $f^{-1}(K)$ es cerrado en X . Supongamos que $f^{-1}(K)$ no es conexo entonces $f^{-1}(K)$ es la unión de dos conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos H y L de X . Dado que $f(f^{-1}(K)) = K$, tenemos que K es la unión de $f(H)$ y $f(L)$. Ahora, mostraremos que H es igual a $f^{-1}(f(H))$. La contención $H \subset f^{-1}(f(H))$ es inmediata. Sea h un punto de H , como f es monótona, se tiene que $f^{-1}(f(h))$ es un conexo contenido en $f^{-1}(K)$ y que intersecta a H , por tanto, $f^{-1}(f(h))$ está contenido en H . Lo mismo se tiene con L , es decir, $f^{-1}(f(L)) = L$. Todo esto sirve para ver que, si y es un punto de la intersección de $f(H)$ y $f(L)$ entonces $f^{-1}(y)$ está contenido en la intersección de H y L , pero esto no puede ser ya que H y L son ajenos, por lo tanto, $f(H)$ y $f(L)$ no se intersectan lo cual nos da una separación de K , lo que es una contradicción. $\diamond$

El teorema que en seguida se menciona, se utilizará en el siguiente capítulo, para ver una demostración de éste, se recomienda revisar [Mo, 30. p. 158].

Teorema 1.7. *Si la pareja de puntos a y b en $\mathbb{R}^2$ separa a la pareja de puntos c y d en una curva cerrada simple J , I es la componente acotada del complemento de J y M es un continuo en $J \cup I$ el cual contiene tanto a c como a d y no contiene a los puntos a y b entonces M separa al punto a*

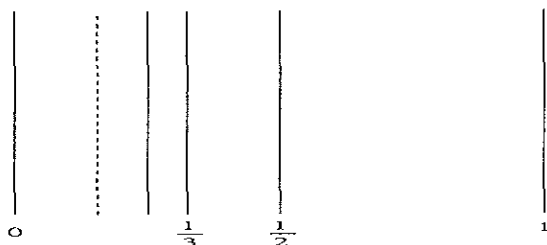
del punto b en $J \cup I$. Esto es, $(J \cup I) \setminus M = U \cup V$, donde U y V son abiertos ajenos en $J \cup I$, $a \in U$ y $b \in V$.

Ahora, mencionaremos lo que significa que una sucesión de continuos converja.

Definición 1.8. Sean X un continuo y $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X . Se define el **límite superior** de la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, denotado $\limsup(F_n)$, como el conjunto de todos los puntos x en X tales que toda vecindad de x intersecta a una infinidad de F_n y el **límite inferior**, denotado $\liminf(F_n)$, se define como el conjunto de los puntos x en X tales que toda vecindad de x intersecta a todos excepto un número finito de los F_n . Si el límite inferior coincide con el límite superior, es decir, $\liminf = L = \limsup$ entonces la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L y L es **límite** de $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ lo cual es denotado como $L = \lim(F_n)$.

Ejemplo 1.5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$F_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{n} \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}.$$

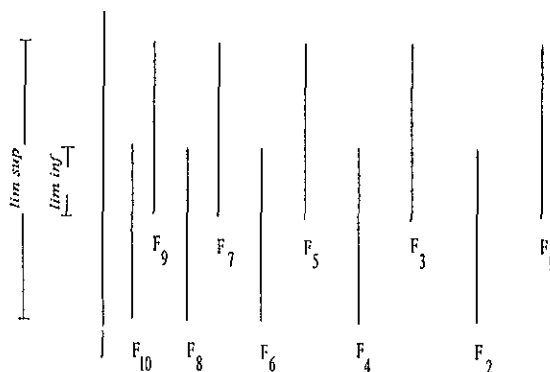


Entonces $\limsup (F_n) = \liminf (F_n)$ es el conjunto

$$\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\},$$

es decir, es la línea límite de la sucesión F_n .

En la siguiente figura podemos observar que el límite inferior y el límite superior no necesariamente son iguales.



Lema 1.9. Sea X un continuo. Si $F_1, F_2, \dots$, es una sucesión de subconjuntos no vacíos de X entonces el $\liminf(F_n)$ y el $\limsup(F_n)$ son subconjuntos cerrados de X .

Demostración. Sean $A = \limsup(F_n)$ y x un punto de acumulación de A . Lo que veremos es que x pertenece a A y con esto tendremos que A es cerrado. Sea U_x un abierto de X que contiene a x , como x es un punto de acumulación tenemos que U_x intersecta a A en al menos un punto distinto de x , sea p un punto en la intersección de U_x y $A \setminus \{x\}$, esto implica que p está en A , por tanto, se tiene que cada

vecindad de p intersecta a una infinidad de F_n , en particular, U_x es vecindad de p , lo cual implica que U_x intersecta una infinidad de F_n con esto se tiene que x pertenece a A . Por lo tanto, A es cerrado. Análogamente se demuestra que $\liminf(F_n)$ es cerrado. $\diamond$

Lema 1.10. *Sea X un continuo. Si F es un subconjunto fijo y cerrado de X y $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos cerrados de X tales que para toda n en $\mathbb{N}$, F_n intersecta a F . Entonces el límite superior de $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también intersecta a F .*

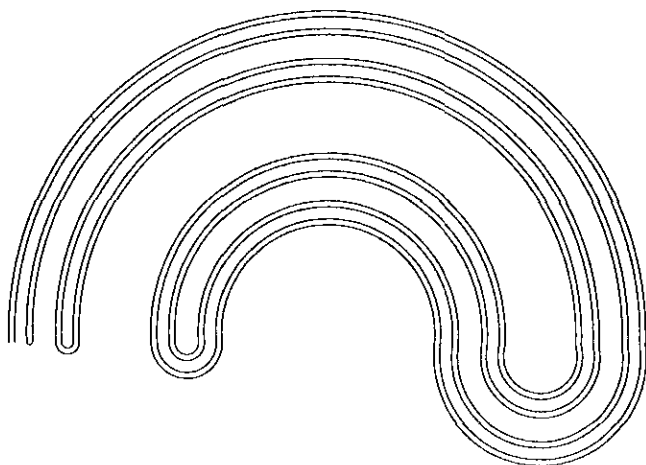
Demostración. Sean F y $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como en la hipótesis. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n intersecta a F . Sea p_n un punto en la intersección de F_n con F . Como F es cerrado se tiene que la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{p_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a un punto p en F y como cada p_{n_k} está en F_{n_k} se tiene que p también es un punto del $\limsup(F_n)$. Con esto se tiene la prueba. $\diamond$

Definición 1.11. *Un continuo X es descomponible si existen dos subcontinuos propios K y L de X tales que $X = K \cup L$. X es indescomponible si no es descomponible.*

Casi todos los continuos que podemos imaginar son descomponibles, es muy difícil imaginar continuos indescomponibles, es por esta razón que, a continuación mostraremos un continuo indescomponible. En 1910 Brouwer definió un continuo indescomponible, más tarde en 1911 Janiszewski dio en su tesis una modificación del continuo descrito por

Brouwer y, por último, en 1922 B. Knaster simplificó la descripción dada por Janiszewski. Hoy en día, a este continuo se le llama el *continuo de Knaster* y su construcción es dada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6. Sea C el conjunto de Cantor ternario en el intervalo $[0, 1] \times \{0\}$. Considere en $\mathbb{R}^2$ a C_0 como la unión de los semicírculos situados en el semiplano cerrado superior con centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y extremos en C . Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea C_n la unión de los semicírculos situados en el semiplano cerrado inferior con centros $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$ y puntos extremos en C . Entonces $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ es un continuo indescomponible. Una demostración de lo anterior está dada en la observación al teorema 8 del libro [Ku, p. 213]. Ver la siguiente figura.



Definición 1.12. Sean X un continuo y x un punto de X . A la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen al punto x se le llama la **composante del punto x en X** .

En los siguientes ejemplos se muestran las composantes en algunos continuos.

Ejemplo 1.7. 1. Las composantes del intervalo $[0,1]$ son $(0,1)$, $\{1,0\}$ y $[0,1]$;

2. S^1 tiene una sola composante que es S^1 ;

3. Si X es un continuo descomponible entonces X es una composante de X . En efecto, ya que, como X es un continuo descomponible, existen subcontinuos propios H y L de X tales que $X = H \cup L$. Por ser X conexo, se tiene que $H \cap L$ es diferente del vacío. Sea x un punto de la intersección de H y L . Luego, la composante del punto x es X .

A continuación se mencionan tres teoremas importantes sobre las composantes de un continuo; dos de estos teoremas nos proporcionan condiciones necesarias y suficientes para que un continuo sea indescomponible, para ver una demostración de ellos consultar sus respectivas referencias.

Teorema 1.13. Sea X un continuo. Entonces cada composante de X es un subconjunto denso de X . [H-Y, 3-44]

Teorema 1.14. *Si X es un continuo indescomponible entonces X tiene una cantidad no numerable de componentes. [H-Y, 3-46]*

Teorema 1.15. *Si X es un continuo indescomponible entonces las componentes de X son mutuamente ajenas. [H-Y, 3-47]*

Definición 1.16. *Sean X un continuo y x un punto de X . Entonces la **casicomponente** del punto x , consiste de x junto con la unión de todos los subcontinuos, K , de X tales que $x \in K \subset X \setminus L$ para algún subcontinuo L de X con $\text{Int}(L) \neq \emptyset$.*

Teorema 1.17. *Sean X y Y dos continuos. Entonces cada casicomponente de $X \times Y$ es densa en $X \times Y$.*

Demostración. Sean V un abierto básico no vacío de $X \times Y$ y (x, y) un punto de $X \times Y$. Como la componente del punto x es densa en X , esto se tiene por el teorema (1.13), existen un subcontinuo K y un abierto no vacío U en X tales que K intersecta a la proyección $\Pi_X(V)$, de V en X , el punto x pertenece al subcontinuo K y K está contenido en $X \setminus \text{Cl}(U)$, análogamente se tiene un subcontinuo propio L en Y tal que el punto y pertenece a L y la proyección en Y del abierto V , $\Pi_Y(V)$, intersecta a L . Sean t un punto en la intersección de K y $\Pi_X(V)$ y z un punto en Y tal que z no pertenece al subcontinuo L , considere los siguientes conjuntos $A = \{t\} \times L$, $B = K \times \{y\}$, $C = X \times \{z\}$ y $D = \text{Cl}(U) \times Y$. Observe que $A \cup B$ es un continuo, en $X \times Y$, que tiene al punto (x, y) e intersecta al abierto V ; por otra parte, tenemos que la unión de C y D es un

continuo con interior no vacío, por construcción se tiene que la unión de A y B está contenida en el complemento de $C \cup D$, por lo tanto, cada casicomponente es densa en $X \times Y$. $\diamond$

Capítulo 2

Continuos Encadenables

En esta tesis los continuos con los que trabajamos son encadenables y es por esta razón que dedicaremos este capítulo a la introducción de propiedades y ejemplos de continuos de este tipo. Más adelante utilizaremos lo obtenido aquí para justificar otros resultados.

Definición 2.1. *Sea X un continuo. Una **cadena** es una colección finita de abiertos, $U_1, U_2, \dots, U_n$, de X tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. A cada elemento de la cadena se le llama **eslabón**.*

Definición 2.2. *Sean X es un espacio métrico y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de X se define la **mall** de $\mathcal{U}$ como:*

$$\text{mall}(\mathcal{U}) = \sup\{\text{diám}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

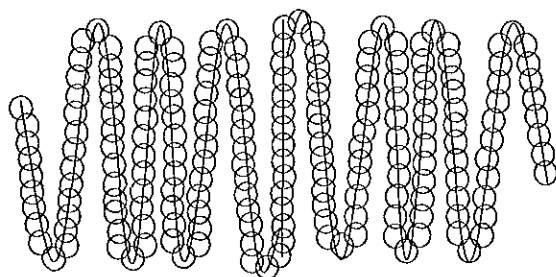
Definición 2.3. *Dada $\varepsilon > 0$, se define una ε -cadena como una cadena cuya mall es menor que ε .*

Definición 2.4. *Un continuo X se dice que es **encadenable** si para cada $\varepsilon > 0$, X se puede cubrir por una*

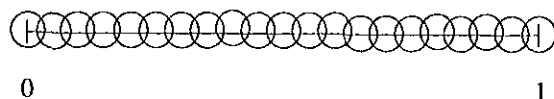
ε -cadena. Si x y y son puntos de X entonces X es encadenable de x a y si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε -cadena, $\{U_1, \dots, U_n\}$, que cubre a X tal que $x \in U_1$ y $y \in U_n$.

Para ilustrar la definición anterior daremos algunos ejemplos de continuos encadenables.

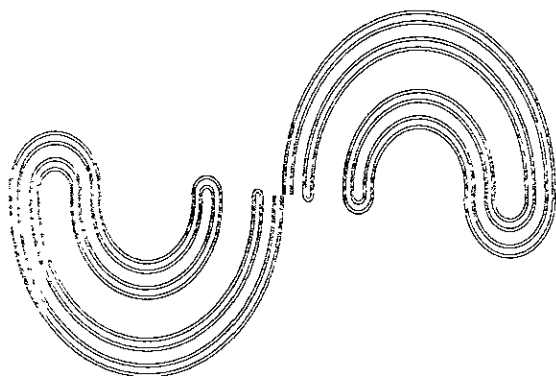
Ejemplo 2.1. El conjunto formado de reflejar la curva del ejemplo 1.1 con respecto a su barra límite, unión ella misma, es un ejemplo de un continuo encadenable. Ver la siguiente figura.



Ejemplo 2.2. El intervalo unitario $[0, 1]$ es encadenable de 0 a 1. Ver la siguiente figura.



Ejemplo 2.3. El continuo que se forma al unirse el Knaster, ver (1.6), y la reflexión con respecto al origen de él mismo es un ejemplo de un continuo encadenable. Este continuo no es encadenable entre ningún par de sus puntos.



Teorema 2.5. *Todo subcontinuo de un continuo encadenable es encadenable.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y K un subcontinuo de X . Como X es encadenable, existe una ε -cadena, $\mathcal{C}$, que cubre a X , con eslabones $U_1, U_2, \dots, U_n$. Sean i el índice del primer eslabón de $\mathcal{C}$ que intersecciona a K y j el índice del último eslabón de $\mathcal{C}$ que intersecciona a K . Lo que veremos es que el conjunto de $\{U_i \cap K, U_{i+1} \cap K, \dots, U_j \cap K\}$ es una ε -cadena que cubre a K . El diámetro de cada $U_i \cap K$ es menor que ε ya que éstos están contenidos en eslabones de $\mathcal{C}$ y cubren a K por como se tomaron. Ahora veremos que $U_i \cap K, U_{i+1} \cap K, \dots, U_j \cap K$ forman una cadena de K . Supongamos que no es cierto, esto implica que existe un índice l en $\{i, i+1, \dots, j\}$ tal que el eslabón con índice l intersección K no intersecciona al eslabón con índice $l+1$ intersección K , por tanto, K está contenido en la unión de $A = \bigcup_{m=i}^l (U_m \cap K)$ y $B = \bigcup_{m=l+1}^j (U_m \cap K)$ donde A y B son abiertos y ajenos de K ; lo que contradice la conexidad de K . $\diamond$

Lema 2.6. *Sea X un espacio métrico y compacto. Si $\mathcal{U}$*

es una cubierta de X entonces existe $\lambda > 0$ tal que para todo subconjunto $A \neq \emptyset$ de X cuyo diámetro es menor que λ , existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$. El número λ es llamado un **número de Lebesgue** para la cubierta $\mathcal{U}$. Ver [H-Y, 1-32].

Teorema 2.7. *Sea X un continuo encadenable con métrica d . Entonces X es unicoherente.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo encadenable que no es unicoherente, entonces $X = K \cup L$ donde K y L son subcontinuos de X tales que su intersección no es conexa, es decir, $K \cap L = A \cup B$, con A y B cerrados, ajenos y no vacíos. Como A y B son compactos y ajenos se tiene que la distancia entre A y B es positiva, sea $r = d(A, B)$. Como X es encadenable existe una cadena $\mathcal{C}_1$ que cubre a X tal que su *mall*($\mathcal{C}_1$) es menor que $\frac{r}{4}$. Por el teorema de encogimiento¹, ver [Wi, 15.10], sin pérdida de generalidad podemos suponer que si C_i y C_j no son eslabones consecutivos en $\mathcal{C}_1$ entonces, $\text{Cl}(C_i)$ no interseca a $\text{Cl}(C_j)$. Como K es un subcontinuo propio de X , por el teorema (2.5), tenemos que K es encadenable y, por como se probó ese teorema, vimos que los eslabones de $\mathcal{C}_1$ que intersecan a K forman una subcadena, $\mathcal{C}^1$, de $\mathcal{C}_1$ que cubre a K . Sea j el índice del primer eslabón de $\mathcal{C}^1$ que interseca a A o a B . Sin pérdida de ganeralidad podemos suponer que $\mathcal{C}^1_j$ interseca a A . Sea m el índice del último eslabón de $\mathcal{C}^1$ que interseca a B . Sean j_1 el índice del último eslabón de $\mathcal{C}^1$ que inter-

¹Teorema. Si W es un espacio normal y $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ es una cubierta abierta finita de W entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$ de W tal que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $\text{Cl}(V_j) \subset U_j$.

sectó a A y m_1 el índice del primer eslabón de $\mathcal{C}^1$ que intersectó a B , nótese que los eslabones $C^1_{j_1}$ y $C^1_{m_1}$ son ajenos, como $\mathcal{C}^1$ es una cadena que cubre a K se tiene que existe un índice k_1 entre j_1 y m_1 , es decir $j_1 < k_1 < m_1$, tal que el eslabón $\text{Cl}(C^1_{k_1})$ de $\mathcal{C}^1$ no intersecta a $A \cup B$, si el eslabón $C^1_{k_1}$ no existiera se tendría que K estaría contenido en la unión de $C^1_1, \dots, C^1_{j_1}$ y $C^1_{m_1}, \dots, C^1_m$ contradiciendo su conexidad. Sea λ un número de Lebesgue para $\mathcal{C}_1$. Entonces existe una cadena $\mathcal{C}_2$ de $\text{mall}(\mathcal{C}_2)$ menor que el mín $\{\lambda, \frac{1}{2^2}\}$, que refina a $\mathcal{C}_1$, cubre a K y tiene eslabones $C^2_{j_2}, C^2_{k_2}$ y $C^2_{m_2}$ ($j_2 < k_2 < m_2$) que cumplen con que $C^2_{j_2} \cap A \neq \emptyset$, $C^2_{m_2} \cap B \neq \emptyset$ y que $C^2_{k_2} \subset C^1_{k_1}$. Repitiendo este proceso inductivamente, obtenemos una sucesión decreciente de eslabones $C^1_{k_1}, C^2_{k_2}, \dots$ que no intersectan a $A \cup B$. Consideremos la $\bigcap_{i=1}^{\infty} C^i_{k_i}$ como diám $\lim_{i \rightarrow \infty} \{C^i_{k_i}\} = 0$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Cl}(C^i_{k_i})$ consta de un solo punto, al que llamaremos p . Notemos que para cada i , por construcción, $\text{Cl}(C^i_{k_i}) \cap (A \cup B) = \emptyset$. Como cada $C^i_{k_i}$ pertenece a una cubierta de K , resulta que $p \in K \setminus L$. Sea $s = d(p, L)$. Si n es un número natural tal que $\frac{1}{n} < s$ entonces el eslabón $C^n_{k_n}$ no intersecta a L , pero esto no puede pasar ya que hay eslabones en $\mathcal{C}_n$ antes y después de $C^n_{k_n}$ que intersectan a $A \cap L$ y a $B \cap L$, respectivamente. Por lo tanto se tiene que $K \cap L$ es conexa y, como consecuencia que, X es un continuo unicoherente. $\diamond$

Corolario 2.8. *Todo continuo encadenable es hereditariamente unicoherente.*

Definición 2.9. Una función suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ es una ε -función si para cada $y \in Y$, $\text{diám}(f^{-1}(y)) \leq \varepsilon$.

Lema 2.10. Si $f : X \rightarrow Y$ es una ε -función entre espacios métricos y compactos entonces, existe $\delta > 0$ tal que si $U \subset Y$ y $\text{diám}(U) < \delta$ se tiene que $\text{diám}f^{-1}(U) < \varepsilon$.

Demostración. Como $\text{diám}(U) = \text{diám}(\text{Cl}(U))$, no se pierde generalidad al probar el resultado sólo para los subconjuntos cerrados de Y . Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$, existe un subconjunto, B_n , cerrado en Y tal que $\text{diám}(B_n) < \frac{1}{n}$ y $\text{diám}f^{-1}(B_n) \geq \varepsilon$. Como X es compacto, por [N1, 0.8], podemos encontrar un subsucesión $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{f^{-1}(B_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un subconjunto cerrado, A , de X . Notemos que $\varepsilon \leq \text{diám}(A)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un cerrado B de Y . Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(B_n) = 0$, se tiene que $\text{diám}(B) = 0$. Esto es, existe $y \in Y$ tal que $B = \{y\}$. Por la continuidad de f , se tiene que $f(A) = \{y\}$, de donde $\varepsilon \leq \text{diám}(A) \leq \text{diám}f^{-1}(y)$ que es una contradicción, pues f es una ε -función. $\diamond$

Teorema 2.11. Sea X un continuo. Entonces X es encadenable si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε -función de X en $[0, 1]$.

Demostración. Sean X un continuo encadenable y $\varepsilon > 0$. Como X es encadenable, podemos encontrar una $\frac{\varepsilon}{2}$ -cadena $\mathcal{C} = \{U_1, \dots, U_n\}$ que cubre a X tal que, por el teorema de encogimiento (pag. 18), $\text{Cl}(U_i) \cap \text{Cl}(U_j) = \emptyset$ siempre que $|i - j| \geq 2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer

que $n \geq 3$. Sea $m = \max\{j \mid 2j+1 \leq n\}$ y observemos que $m \geq 1$, pues $n \geq 3$. Para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ sean

$$M_k = \text{Cl}(U_{2k-1}) \cup \text{Cl}(U_{2k}) \cup \text{Cl}(U_{2k+1})$$

c

$$I_k = [s_k, t_k],$$

donde $s_k = \frac{k-1}{m}$ y $t_k = \frac{k}{m}$. Notemos que por la elección de $\mathcal{C}$, $\text{Cl}(U_{2k-1}) \cap \text{Cl}(U_{2k+1}) = \emptyset$ para cada $k \in \{1, \dots, m\}$. Como todo espacio métrico es perfectamente normal se tiene que para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ existe una función $f_k : M_k \rightarrow I_k$ tal que $f_k^{-1}(s_k) = \text{Cl}(U_{2k-1})$ y $f_k^{-1}(t_k) = \text{Cl}(U_{2k+1})$, ver [Du, 4.3 p.148]. Sea

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

definida como

$$f(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{si } x \in M_k \text{ para alguna } k \in \{1, \dots, m\} \\ 1 & \text{si } x \in \text{Cl}(U_n) \end{cases}$$

Como los eslabones disjuntos de $\mathcal{C}$ tienen cerraduras disjuntas, se tiene que f está bien definida. Además, f está definida en todo X ya que $\bigcup_{j=1}^n U_j = X$ y, por las definiciones de m y de los conjuntos M_k , se tiene que $X \setminus \bigcup_{k=1}^m M_k$ está contenido en U_n . Como cada f_k es continua, se tiene que f es continua en X . Como X es conexo y 0 y 1 pertenecen a $f(X)$, se tiene que f es suprayectiva. Por otra parte, si $r \in [0, 1)$, entonces $f^{-1}(r) \subset \text{Cl}(U_j)$ para alguna j , de donde se tiene que si $r \in [0, 1)$ entonces $\text{diám} f^{-1}(r) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $2m+1 = n$ entonces $f^{-1}(1) = \text{Cl}(U_n)$; si $2m+1 \neq n$

entonces $2m+1 = n-1$ y, así, $f^{-1}(1) = \text{Cl}(U_n) \cup \text{Cl}(U_n - 1)$. En cualquier caso, resulta que $\text{diám} f^{-1}(1) < \varepsilon$. Por tanto f es una ε -función de X en $[0, 1]$. Ahora, veamos que X es encadenable teniendo como hipótesis que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $f_\varepsilon : X \rightarrow [0, 1]$ tal que f_ε es suprayectiva y ε -función. Sean $\varepsilon > 0$ y $f_\varepsilon : X \rightarrow [0, 1]$ una ε -función. Por el lema 2.10, existe $\delta > 0$ tal que si $U \subset [0, 1]$ y $\text{diám}(U) > \delta$ entonces $\text{diám} f_\varepsilon^{-1}(U) < \varepsilon$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$. Dado que las funciones inversas preservan intersecciones se tiene que el conjunto formado por $\{f_\varepsilon^{-1}([0, \frac{2}{n})), f_\varepsilon^{-1}((\frac{1}{n}, \frac{3}{n})), f_\varepsilon^{-1}((\frac{2}{n}, \frac{4}{n})), \dots, f_\varepsilon^{-1}((\frac{n-3}{n}, \frac{n-1}{n})), f_\varepsilon^{-1}((\frac{n-2}{n}, 1])\}$ es una ε -cadena que cubre a X . Con esto tenemos que X es encadenable. $\diamond$

Lema 2.12. *Sean X y Y dos continuos encadenables. Si K y H son dos subcontinuos de $X \times Y$ tales que $\Pi_Y(K) = Y$ y $\Pi_X(H) = X$ entonces se tiene que $K \cap H \neq \emptyset$, donde $X \times Y$ tiene la métrica del máximo.*

Demostración. Supongamos que K y H no se intersectan, por tanto, la distancia, $d(K, H)$, entre H y K es positiva. Sea $\varepsilon < \min\{\frac{1}{2}, d(H, K)\}$, como X y Y son encadenables, se tiene que existen ε -funciones $f_\varepsilon : X \rightarrow [0, 1]$ y $g_\varepsilon : Y \rightarrow [0, 1]$. Consideremos la función h de $X \times Y$ a $[0, 1]^2$ dada por:

$$h(x, y) = (f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(y)).$$

Es fácil ver que h es una ε -función. Por hipótesis, tenemos que $\Pi_X(H) = X$ y, como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 X \times Y & \xrightarrow{h} & [0, 1]^2 \\
 \Pi_X \downarrow & & \downarrow \Pi_1 \\
 X & \xrightarrow{f_\varepsilon} & [0, 1]
 \end{array}$$

se tiene que $f_\varepsilon \circ \Pi_X(H)$ es lo mismo que $\Pi_X \circ h(H)$, es decir, $h(H)$ intersecta a $\{0\} \times [0, 1]$ y a $\{1\} \times [0, 1]$. Por hipótesis, $\Pi_Y(K) = Y$ y, como el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X \times Y & \xrightarrow{h} & [0, 1]^2 \\
 \Pi_Y \downarrow & & \downarrow \Pi_2 \\
 Y & \xrightarrow{g_\varepsilon} & [0, 1]
 \end{array}$$

conmuta, se tiene que $\Pi_2 \circ h(K)$ es el intervalo $[0, 1]$, por tanto $h(K)$ intersecta a $[0, 1] \times \{0\}$ y a $[0, 1] \times \{1\}$, por el teorema 1.7, se tiene que $h(H)$ y $h(K)$ se intersectan. Sea p un punto de la intersección de $h(H)$ con $h(K)$, como h es suprayectiva existen r_H en H y r_K en K tales que $h(r_H) = h(r_K) = p$ lo cual es una contradicción, pues, H y K están a distancia mayor que ε y h es una ε -función. Por lo tanto, H y K se intersectan. $\diamond$

Teorema 2.13. *Sea X el producto de dos continuos encadenables e indescomponibles Y y Z . Para cada par de puntos $y \in Y$ y $z \in Z$, se define $C_{yz} = C_{yY} \times C_{zZ}$ donde C_{yY} y C_{zZ} son las composantes de y y z en Y y Z respectivamente. Entonces para cada $(y, z) \in X$ la casicomposante del punto (y, z) en X es C_{yz} .*

Demostración. Sea (p, q) un punto de C_{yz} , esto implica que p está en la composante de Y que contiene a y , por lo que existen un subcontinuo, K , en Y tal que p y y pertenecen a K y un abierto no vacío, U , en Y tal que K no intersecta a la cerradura, $\text{Cl}(U)$, de U . También, como el punto q pertenece a la composante de Z que tiene a z , se tiene que existen un subcontinuo L en Z tal que q y z están en L y un abierto no vacío, V , en Z tal que la cerradura, $\text{Cl}(V)$, de V no intersecta a L . Con lo anterior podemos construir los siguientes continuos: M que sea el producto de K y L , nótese que los puntos (y, z) y (p, q) pertenecen a M y, definamos a N como la unión de $\text{Cl}(U) \times Z$ y $Y \times \text{Cl}(V)$. Obsérvese que el interior, $\text{Int}(N)$, de N es diferente del vacío. De esto se deduce que (p, q) pertenece a la casicomposante de (y, z) por lo tanto, C_{yz} está contenida en la casicomposante de (y, z) .

Ahora veremos la otra contención. Sea (p, q) un punto de la casicomposante de (y, z) . Supongamos que (p, q) no está en C_{yz} . Como (p, q) está en la casicomposante de (y, z) existen dos subcontinuos ajenos K y L en X tales que el interior de L no es vacío y los puntos (p, q) y (y, z) pertenecen a K . Como (p, q) no está en C_{yz} se tiene que p no pertenece a C_{yY} o q no está en C_{zZ} . Supongamos, sin pérdida de gene-

ralidad, que p no está en C_{yY} . Como p y y están en $\Pi_Y(K)$, p no está en C_{yY} y Y es indescomponible, $\Pi_Y(K) = Y$. Como Z es indescomponible la proyección, $\Pi_Z(L)$, de L en Z es todo Z ya que si no fuera así Z tendría un subcontinuo propio con interior distinto del vacío. Por el lema (2.12) tenemos que K y L se intersectan esto contradice la elección de K y L . Por lo tanto (p, q) pertenece a C_{yz} . $\diamond$

Como resultado de este teorema se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.14. *Si X es el producto de dos continuos encadenables e indescomponibles, entonces X tiene una cantidad no numerable de casicomponentes ajenas.*

La última parte del capítulo se la dedicaremos a continuos irreducibles. Este concepto fue introducido en 1909 por Ludovic Zoratti. El primer artículo dedicado al estudio de continuos irreducibles fue la tesis de Janiszewski publicada en 1911.

Definición 2.15. *Un continuo X es irreducible entre dos de sus puntos x y y , si para todo subcontinuo, Y , de X tal que x y $y \in Y$ se tiene que Y es igual a X .*

Ejemplo 2.4. El intervalo $[0,1]$ es irreducible entre el 0 y el 1;

Ejemplo 2.5. La curva del topólogo (1.1) es ejemplo de un continuo irreducible entre el punto p y cualquier punto de la línea límite.

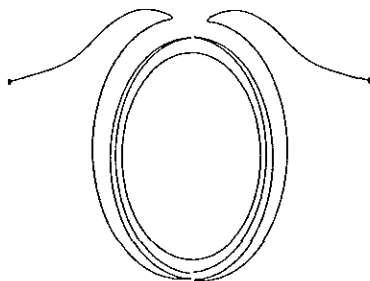
Teorema 2.16. *Sean X un continuo y x y y dos puntos de X . Si X es encadenable de x a y entonces X es irreducible entre x y y .*

Demostración. Supongamos que X no es irreducible entre los puntos x y y es decir existe un subcontinuo propio K de X que contiene a los puntos x y y . Sean z un punto en $X \setminus K$, r la distancia entre z y K , la cual es positiva ya que z no pertenece a K , y ε un número positivo menor que r ; por hipótesis X es encadenable de x a y entonces X se puede cubrir por una ε -cadena $\mathcal{C}$, con eslabones $C_1, \dots, C_n$ donde x pertenece al eslabón C_1 y y al eslabón C_n . Como z es un punto de X existe un eslabón C_j de $\mathcal{C}$ que contiene a z y no intersecta a K , esto es por como se escogió ε , luego, K está contenido en la unión de $A = \bigcup_{m=1}^{j-1} (C_m \cap K)$ y $B = \bigcup_{m=j+1}^n (C_m \cap K)$. Nótese que A y B son ajenos, abiertos y no vacíos por construcción; esto nos dice que K está desconectado, pero esto no es posible ya que K es conexo; por lo tanto, X es irreducible entre x y y . $\diamond$

Como ya mencionamos en el ejemplo 2.3, existen continuos que no son encadenables entre ningún par de puntos, por lo que el teorema anterior no se les aplica. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado, una demostración del cual, se encuentra en [N2, 12.11].

Teorema 2.17. *Todo continuo encadenable es irreducible.*

Ejemplo 2.6. El continuo que se muestra es un ejemplo de un continuo que no es encadenable pero si es irreducible. Obsérvese que tampoco es unicoherente. Ver la siguiente figura.



Teorema 2.18. *Sea X un continuo irreducible entre x y y . Si M es un subcontinuo, de X , que separa a X entonces $X \setminus M = K \cup L$ donde K y L son dos conexos que tienen a x y a y respectivamente y M no contiene a x ni a y .*

Demostración. Supongamos que $X \setminus M = A \cup B$. Por [N2, 6.3] se tiene que $M \cup A$ y $M \cup B$ son subcontinuos propios de X , en particular, $M \cup A$ y $M \cup B$ son conexos. Por hipótesis tenemos que X es irreducible entre x y y , esto nos dice que ningún subcontinuo propio de X contiene a x y a y , esto implica que x y y no pertenecen ambos a $M \cup A$ ni a $M \cup B$ y, como $X = (M \cup A) \cup (M \cup B)$ tenemos que x no pertenece a M y también que y no pertenece a M . Ahora sean $K = A$ y $L = B$ y supongamos que $x \in K$ y que $y \in L$. Ahora veremos que K es conexo. Sea C la componente de K que contiene a x . Por el teorema de los golpes en la frontera [N2, 5.4], se tiene que C tiene un punto límite en M , de esta forma se tiene que $C \cup M \cup L$ es un subcontinuo de X que contiene tanto a x como a y , de donde $C \cup M \cup L = X$. Lo cual implica que $C = K$, esto es, K es conexo. Análogamente se muestra que L es conexo. $\diamond$

Capítulo 3

Aposindesis

El objetivo de este capítulo es familiarizarnos con los conceptos de *aposindesis*, *semiaposindesis* y *aposindesis mutua*. También mostraremos resultados y ejemplos relacionados con estos términos.

El concepto de aposindesis, abajo mencionado, fue introducido por F. Burton Jones en 1941 como una generalización de la conexidad local.

Definición 3.1. Sean X un continuo y x y y puntos distintos de X . Se dice que X es **aposindético en x con respecto a y** si existe un subcontinuo K de X tal que $x \in \text{Int}(K) \subset K \subset X \setminus \{y\}$. X es **aposindético**, si es aposindético en todos sus puntos.

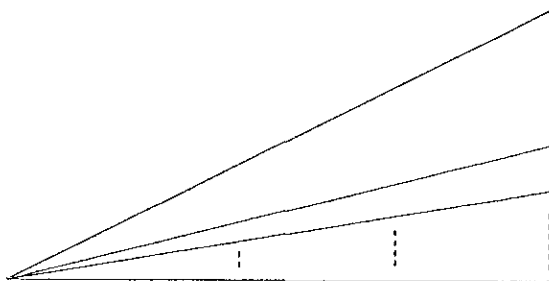
Posteriormente, en 1971, L. E. Rogers introdujo la siguiente noción, como una generalización de la aposindesis.

Definición 3.2. *Un continuo X es semiaposindético en $\{x, y\}$, con $x \neq y$, si existe un subcontinuo C de X tal que uno de los puntos está en el interior de C y C no contiene al otro punto. X es semiaposindético si es semiaposindético para cualesquiera par de puntos distintos.*

Ejemplo 3.1. x En la literatura el conjunto descrito por:

$$\text{Cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x\left(1, \frac{1}{n}\right) \mid 0 \leq x \leq 1\right\}\right)$$

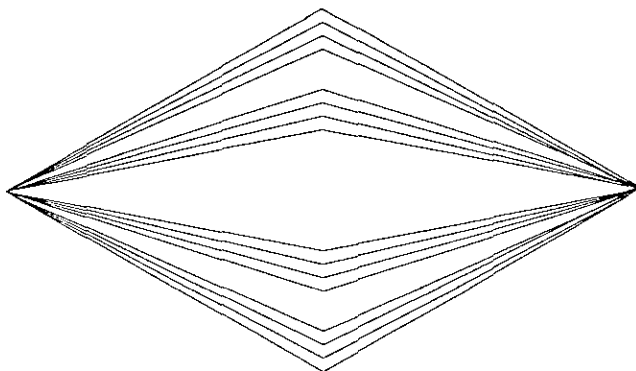
es nombrado como el *abanico armónico*, el cual es un ejemplo de un continuo semiaposindético que no es aposindético. Ver la siguiente figura.



En 1969 C. L. Hagopian desarrolló los conceptos que a continuación se mencionan.

Definición 3.3. Sean X un continuo y x y y puntos distintos de X . Se dice que X es **mutuamente aposindético** en x y y si existen dos subcontinuos K y L de X tales que $x \in \text{Int}(K)$, $y \in \text{Int}(L)$ y $L \cap K = \emptyset$. X es **mutuamente aposindético** si es mutuamente aposindético en todos sus puntos.

Ejemplo 3.2. El conjunto, que se ilustra, es llamado *La suspensión del conjunto de Cantor*, éste es un ejemplo de un continuo mutuamente aposindético, el cual no es localmente conexo. Ver la siguiente figura.



Definición 3.4. Sea X un continuo. X es **estrictamente no mutuamente aposindético** si para cualesquiera dos subcontinuos K y L de X con interior diferente del vacío se tiene que $L \cap K \neq \emptyset$.

Es importante observar que los conceptos de aposindesis, semiaposindesis y aposindesis mutua se parecen a los axiomas de separación T_1 , T_0 y T_2 respectivamente.

Uno de los resultados sobre aposindesis obtenido en 1948 por F. B. Jones es el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *Si X y Y son continuos entonces $X \times Y$ es aposindético.*

Demostración. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos distintos en $X \times Y$. Veremos que existe un subcontinuo K de $X \times Y$ tal que (x_1, y_1) pertenece al interior de K y $(X \times Y) \setminus \{(x_2, y_2)\}$ contiene a K . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que x_1 es distinto de x_2 . Como X es un continuo, existe un abierto U de X tal que x_1 pertenece a U y $\text{Cl}(U)$ está contenida en $X \setminus \{x_2\}$. Definimos $H = \text{Cl}(U) \times Y$ y observemos que, por construcción, (x_1, y_1) pertenece al interior de H y, también, se tiene que (x_2, y_2) no pertenece a H .

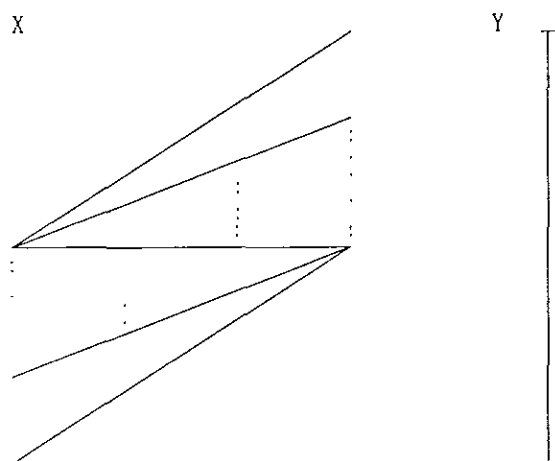
Sea z un punto de Y distinto de y_2 . Considere $L = X \times \{z\}$, por como se tomó al punto z , se tiene que, (x_2, y_2) no pertenece a L . Sea K la unión de H y L , por lo anterior, se tiene que el punto (x_1, y_1) pertenece al interior de K y K está contenido en $(X \times Y) \setminus \{(x_2, y_2)\}$, y, además por construcción, K es un subcontinuo de $X \times Y$. Por lo tanto, $X \times Y$ es aposindético.

◇

Observación. El producto de dos continuos no necesariamente es mutuamente aposindético.

Para ver esto, considere los siguientes continuos:

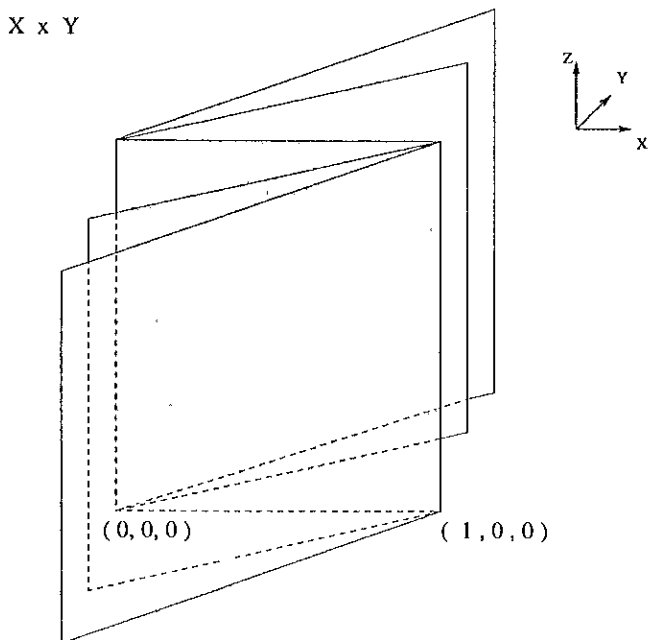
Al continuo X del plano como la unión del conjunto A dado por la cerradura de la unión de los segmentos que unen al punto $(0,0)$ con los puntos de la forma $(1, 1/i)$ con $i = 1, 2, \dots$ y del conjunto B definido como la cerradura de la unión de los segmentos que tienen como puntos extremos al punto $(1,0)$ y a los puntos $(0, -1/i)$ con $i = 1, 2, \dots$. Y al continuo Y en el eje Z como el intervalo unitario $[0, 1]$. Ver la siguiente figura.



Daremos un bosquejo del por qué el producto de estos continuos no es mutuamente aposindético.

Para mostrar que $X \times Y$ no es mutuamente aposindético se tiene que ver que existen dos puntos distintos, x y y , que no se pueden separar por dos subcontinuos ajenos que los contengan en sus respectivos interiores relativos a $X \times Y$. Sean $x = (0, 0, 0)$ y $y = (1, 0, 0)$. Nótese que una base de abiertos de $X \times Y$ está dada por la colección de las bolas abiertas de $\mathbb{R}^3$ intersectadas con el continuo $X \times Y$. Sean

U un abierto de $X \times Y$ tal que x está en U y z un punto distinto de x de tal forma que z esté en la intersección de U y $(B \times Y) \setminus ([0, 1] \times \{0\} \times [0, 1])$; obsérvese que, la única manera de unir a x con z por un continuo K en $X \times Y$, es que este continuo intersecte al segmento $\{(1, 0)\} \times Y$. De la misma forma, si V es un abierto de $X \times Y$ tal que tiene al punto y , el único camino para unir los puntos de la intersección de V y $(A \times Y) \setminus ([0, 1] \times \{0\} \times [0, 1])$ con y es por un continuo H que intersecta al conjunto $\{(0, 0)\} \times Y$. Por el teorema (1.7), se tiene que H y K se intersectan, luego entonces, no existen continuos ajenos que tengan a los puntos x y y en su interior; de esto se sigue que $X \times Y$ no es mutuamente aposindético. Ver la siguiente figura.



El ejemplo anterior muestra que el producto de dos continuos no necesariamente es mutuamente aposindético, haciendo una modificación en la hipótesis, se puede afirmar que sí lo es. En seguida se demostrará un lema que, posteriormente, se utilizará para la prueba de la afirmación anterior.

Lema 3.6. *Si X es un continuo semiaposindético y x es un punto de X entonces existe un subcontinuo propio, K , de X tal que x pertenece al interior de K .*

Demostración. Sea y un punto distinto de x , como X es semiaposindético existe un subcontinuo W de X tal que W contiene en su interior a uno de los dos puntos y no contiene al otro. Si x pertenece al interior de W ya acabamos, pues tomamos $K = W$. Si $y \in \text{Int}(W) \subset W \subset X \setminus \{x\}$ entonces consideraremos los siguientes casos:

1. $X \setminus W$ es conexo. Como W tiene interior no vacío, se tiene que $\text{Cl}(X \setminus W)$ es un subcontinuo propio de X que tiene al punto x en su interior, por tanto el subcontinuo buscado es $K = \text{Cl}(X \setminus W)$.
2. $X \setminus W$ no es conexo, es decir, $X \setminus W = A \cup B$ con A y B conjuntos ajenos, abiertos y no vacíos; como x pertenece a $X \setminus W$ se tiene que x está en A o en B . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que x pertenece a A ; como B es no vacío, $W \cup B$ es un subcontinuo propio [N2, 6.3] de X que contiene a x en su interior, por tanto el subcontinuo buscado es $K = W \cup B$.



Teorema 3.7. *Si X y Y son continuos semiaposindéticos entonces $X \times Y$ es mutuamente aposindético.*

Demostración. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos distintos en $X \times Y$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que x_1 y x_2 son puntos distintos en X ; como X es semiaposindético se tiene que existe un subcontinuo C_0 de X tal que contiene a uno de los puntos en su interior y no contiene al otro. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_1 \in \text{Int}(C_0)$. Sea U un abierto de X tal que $x_2 \in U$ y $\text{Cl}(U) \cap C_0 = \emptyset$. Por el lema (3.6), tenemos un subcontinuo propio C_1 en Y tal que el punto y_1 está en su interior, tomemos un punto z en Y que no esté en C_1 , esto se puede ya que C_1 es propio.

Defina $C = C_0 \times C_1$, como C es el producto de dos subcontinuos, se tiene que C es un subcontinuo en $X \times Y$ tal que el punto $(x_1, y_1) \in \text{Int } C$; ahora, sean $L = \text{Cl}(U) \times Y$ y $K = X \times \{z\}$, por tanto, se tiene que L y K son conjuntos cerrados en $X \times Y$; el conjunto definido como $J = L \cup K$ es cerrado y conexo en $X \times Y$, por lo tanto, J es un subcontinuo de $X \times Y$ tal que $(x_2, y_2) \in \text{Int}(J)$ y, por la construcción de C y la de J , se tiene que $C \cap J = \emptyset$. De esto se sigue que $X \times Y$ es mutuamente aposindético. $\diamond$

Como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.8. *Si X y Y son continuos aposindéticos entonces $X \times Y$ es mutuamente aposindético.*

Anteriormente se observó que el producto de dos continuos no es necesariamente mutuamente aposindético, sin embargo, si tomamos el producto de tres continuos sí resulta ser mutuamente aposindético.

Teorema 3.9. *Si X , Y y Z son continuos entonces $X \times Y \times Z$ es mutuamente aposindético.*

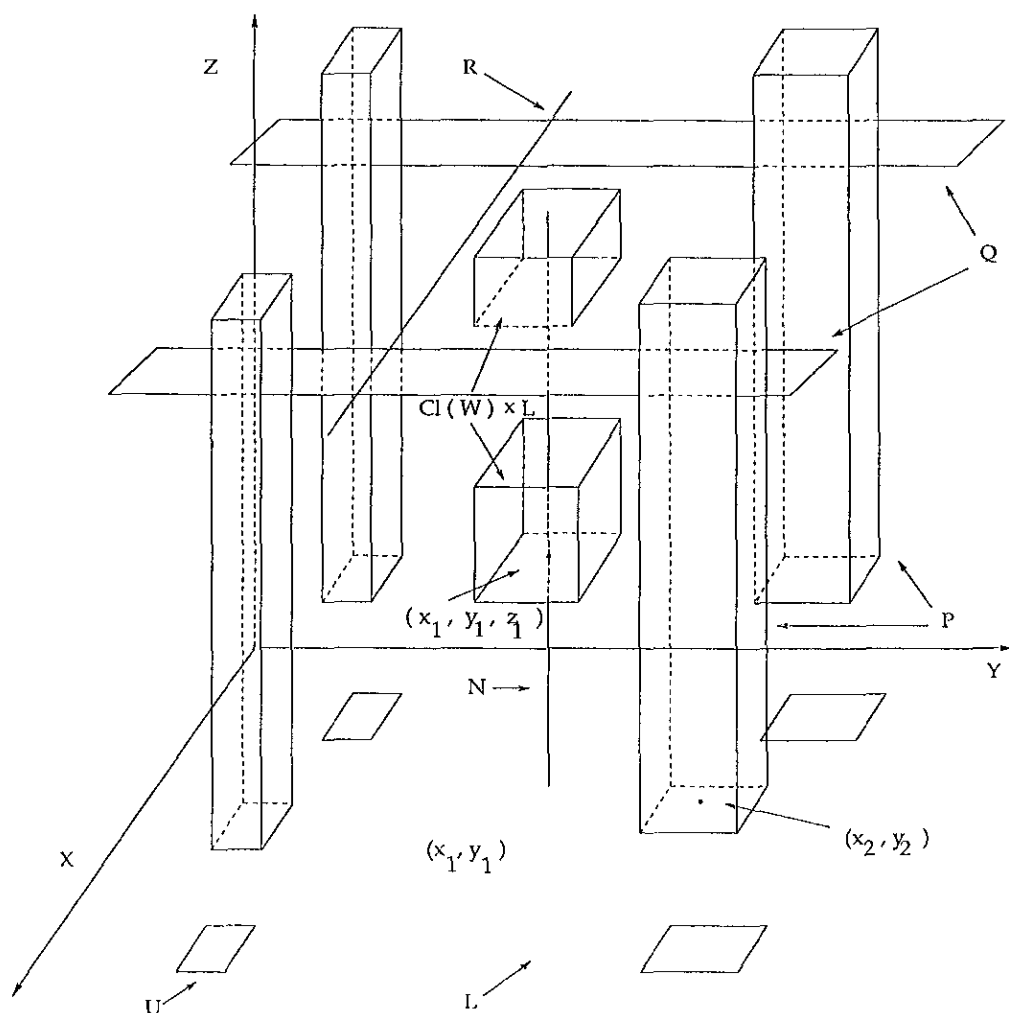
Demostración. Sean (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) puntos distintos de $X \times Y \times Z$, podemos suponer que x_1 es distinto de x_2 .

Vamos a ver que existen dos subcontinuos ajenos H y K de $X \times Y \times Z$ tales que el punto (x_1, y_1, z_1) pertenece al interior de H y el punto (x_2, y_2, z_2) está en el interior de K . Como X y Y son continuos se tiene, por (3.5), que $X \times Y$ es aposindético, esto implica que existen un subcontinuo L de $X \times Y$ tal que el punto (x_1, y_1) pertenece en el interior de L y L está contenido en $(X \times Y) \setminus \{(x_2, y_2)\}$ y un abierto U de $X \times Y$ tal que el punto (x_2, y_2) pertenece a U , $L \cap \text{Cl}(U)$ es vacía y el punto x_1 no esté en la proyección de U sobre X , la cual se denotará como $\Pi_X(U)$. Sea z un punto de Z distinto de z_1 y z_2 . Considere a W un abierto de Z que contenga al punto z_1 y el punto z no esté en $\text{Cl}(W)$.

Sean $M = L \times \text{Cl}(W)$ y $N = \{(x_1, y_1)\} \times Z$. Defina a H como la unión de M y N , de esto se sigue que, H es un continuo y, por contrucción, el punto (x_1, y_1, z_1) pertenece a su interior.

Ahora, considere $P = \text{Cl}(U) \times Z$ y $Q = \Pi_X(\text{Cl}(U)) \times Y \times \{z\}$. Sean y un punto de Y distinto de y_1 y, $R = X \times \{y\} \times \{z\}$. Luego entonces, defina al subcontinuo K

como la unión de P , Q y R , observe que K tiene al punto (x_2, y_2, z_2) en su interior y no interseca a H , esto se tiene por construcción. Por tanto $X \times Y \times Z$ es mutuamente aposindético. Ver la siguiente figura. $\diamond$



Teorema 3.10. *Sea X un continuo. Considere las sucesiones, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, en X tales que:*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, y_n es un punto de X distinto de x_n ;*
2. *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y donde x y y son puntos distintos de X ;*
3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, X no es mutuamente aposindético en x_n y y_n .*

Entonces X no es mutuamente aposindético en x y y .

Demostración. Supongamos que X es mutuamente aposindético en x y y , esto implica que existen subcontinuos ajenos K y L de X tales que el punto x pertenece al interior de K y el punto y al interior de L .

Por hipótesis, se tiene que la sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto x y la sucesión de puntos $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y , por tanto, existe un número natural N tal que el punto x_N pertenece al interior de K y el punto y_N pertenece al interior de L , de esto se sigue que X es mutuamente aposindético en x_N y y_N para alguna N , lo cual contradice la última condición del teorema. Por lo tanto, X no es mutuamente aposindético en x y y . $\diamond$

Teorema 3.11. *Sean X un continuo y $\mathcal{N}$ el conjunto de puntos de X en los cuales X no es mutuamente aposindético. Entonces $\mathcal{N}$ es la unión numerable de conjuntos cerrados.*

Demostración. Sea X un continuo con métrica d . Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina el siguiente conjunto:

$X_n = \{p \in X : \text{existe } q \in X \text{ tal que } X \text{ no es mutuamente aposindético en } p \text{ y } q \text{ y } d(p, q) \geq 1/n\}.$

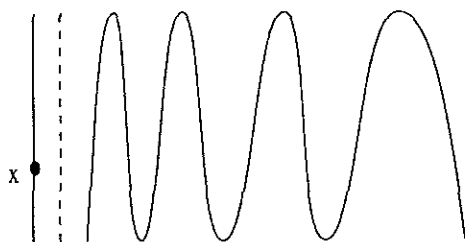
Observemos que el conjunto definido anteriormente es un conjunto cerrado, para ver esto, sea x un punto en la cerradura de X_n , esto implica que existe una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos en X_n que convergen al punto x , como esta sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ se encuentra en X_n , se tiene que para cada término x_k , existe un punto y_k en X , diferente de x_k , tal que X no es mutuamente aposindético en estos puntos y cumplen que $d(x_k, y_k) \geq 1/n$. Luego entonces, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un punto y de X . Por el teorema anterior se tiene que X no es mutuamente aposindético en x y y ; de esto se sigue que x pertenece a X_n , por lo tanto X_n es cerrado; como se quería ver.

Ahora, veamos que el conjunto $\mathcal{N}$ es la unión de los conjuntos X_n . Sea $y \in \mathcal{N}$, se verá que $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Como y está en el conjunto $\mathcal{N}$ esto implica que, existe un punto x en X tal que X no es mutuamente aposindético en x y y y, la $d(x, y) \geq 1/n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, de esto se sigue que y pertenece a X_n para algún número natural n , por tanto y está en $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, como se deseaba. La otra contención es trivial; con esto queda demostrado este teorema. $\diamond$

Definición 3.12. Sea X un continuo. Para cada punto x en X , denotaremos como I_x al conjunto de todos los puntos

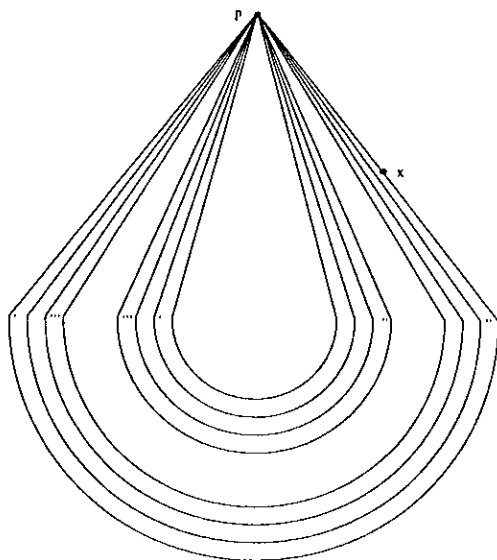
y de X tal que X no es aposindético en y con respecto a x ; y a K_x al conjunto de todos los puntos y de X donde X no es aposindético en x con respecto a y .

Ejemplo 3.3. Para el punto x dado en la curva del topólogo el conjunto L_x está formado por los puntos de la barra límite. Ver la siguiente figura.



Observación. Podemos ver que en general el conjunto K_x no siempre es conexo. Para ilustrar esto, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4. Considérese al continuo formado por el abanico de Cantor en el intervalo unitario y los semicírculos con centro en $(0, 1/2)$, como se muestra en el dibujo. Sea x un punto distinto de p en este continuo. Obsérvese que el conjunto K_x consta sólo de x y del vértice p , por tanto, K_x no es conexo. Ver la siguiente figura.



Teorema 3.13. *Sea X un continuo. Para cada z en X , el conjunto L_z es un continuo.*

Demostración. 1. L_z es cerrado.

Para esto basta demostrar que $X \setminus L_z$ es abierto. Sea x un punto de $X \setminus L_z$, esto implica que X es aposindético en x con respecto a z , es decir, existe un continuo C de X tal que x pertenece al interior, $\text{Int}(C)$, de C y C está contenido en $X \setminus \{z\}$. Obsérvese que para cada punto y en el interior de C , C es un continuo que contiene a y en su interior y está contenido en $X \setminus \{z\}$; de aquí se tiene que $X \setminus L_z$ es abierto y, por lo tanto, que L_z es cerrado.

2. L_z es conexo.

Supongamos que L_z no es conexo, es decir, $L_z = A \cup B$ donde A y B son cerrados, ajenos y no vacíos. Como

X es un continuo, se tiene que X es normal, esto implica que existe un abierto U de X tal que contiene a A y la cerradura, $\text{Cl}(U)$, de U no toca a B . Observemos que la intersección de L_z y la frontera, $\text{Fr}(U)$, de U es igual a la intersección de $A \cup B$ y $\text{Fr}(U)$, que es vacía. Esto nos dice que, para cada punto x en $\text{Fr}(U)$, x no pertenece a L_z , de esto se tiene que existe un continuo C_x de X tal que x está en el interior de C_x y $X \setminus \{z\}$ contiene a C_x . Como la $\text{Fr}(U)$ es cerrada, tenemos que la $\text{Fr}(U)$ es compacta, por tanto existen puntos $x_1, \dots, x_n$ de $\text{Fr}(U)$ tales que la $\bigcup_{j=1}^n \text{Int}(C_{x_j}) \subset \bigcup_{j=1}^n C_{x_j}$ cubre a la $\text{Fr}(U)$. Definamos V como la intersección de U y $X \setminus \bigcup_{j=1}^n C_{x_j}$. Ahora, consideremos el conjunto $X \setminus V$ que es igual a $(X \setminus U) \cup (\bigcup_{j=1}^n C_{x_j})$ de donde se observa que, por el teorema de los Golpes en la Frontera, $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes. Sea y un punto de B . Sean $D_1, \dots, D_r$ las componentes de $(X \setminus U) \cup (\bigcup_{j=1}^n C_{x_j})$. Tomemos $y \in B$. Como B está contenido en $X \setminus U$, supongamos que $y \in D_1$. Sea $\varepsilon < \min \{ \{d(D_i, D_j) \mid i \text{ y } j \in \{1, \dots, r\} \text{ y } i \neq j\} \cup \{d(y, \text{Fr}(U))\} \}$. Por la elección de ε , se tiene que la bola de radio ε con centro en y queda contenida en D_1 , pero esto nos dice que y no pertenece a L_z , lo cual es una contradicción ya que y lo tomamos en B y $L_z = A \cup B$. De esto se sigue que L_z es conexo y, por lo tanto, es un continuo.

◇

Corolario 3.14. *Si X es un continuo irreducible y x y y son dos puntos distintos de X entonces y no pertenece al*

conjunto L_x si y sólo si x no está en el conjunto L_y .

Demostración. Supongamos que el punto y no está en L_x esto implica que X es aposindético en y con respecto a x , es decir, existe un subcontinuo M en X tal que y pertenece al interior, $\text{Int}(M)$, de M y M está contenido en $X \setminus \{x\}$. Como M es cerrado, se tiene que $X \setminus M$ es abierto y contiene al punto x . A continuación analizaremos dos casos:

Si $X \setminus M$ es conexo entonces la cerradura de $X \setminus M$ es un continuo de X que tiene en su interior al punto x y está contenida en $X \setminus \{y\}$, esto nos dice que x no pertenece a L_y .

Si $X \setminus M$ no es conexo entonces $X \setminus M$ se puede escribir como la unión de dos abiertos, K y L , ajenos y no vacíos, por el teorema (2.18), K y L son conexos y x está en uno de ellos; sin pérdida de generalidad supongamos que el punto x pertenece a K , luego entonces, se tiene que $x \in K \subset \text{Cl}(K)$ la cual está contenida en $X \setminus \{y\}$, como consecuencia, tenemos que x no pertenece a L_y . $\diamond$

Corolario 3.15. *Si X es un continuo irreducible y x es un punto de X entonces $L_x = K_x$.*

Demostración. Sea y un punto de K_x veremos que y pertenece a L_x . Supongamos que no es cierto, es decir, y no está en L_x . Por (3.14) se tiene que x no está en L_y esto implica que X es aposindético en x con respecto a y , lo cual no puede pasar ya que, por hipótesis, y está en K_x . Por lo tanto y pertenece a L_x .

Ahora, sea y un punto de L_x , por (3.14), se tiene que $x \in L_y$,

de donde X no es aposindético en x con respecto de y , esto es, y pertenece a K_x . De esto se sigue que $L_x = K_x$. $\diamond$

Lema 3.16. *X es aposindético si y sólo si para todo punto x en X se tiene que $L_x = \{x\}$.*

Demostración. Supongamos que X es aposindético veremos que para cada x en X , $L_x = \{x\}$. Supongamos que existe un punto y , diferente de x , que pertenece a L_x esto implica que X no es aposindético en y con respecto a x lo cual es una contradicción ya que por hipótesis X es aposindético en todos sus puntos. Por lo tanto $L_x = \{x\}$.

Ahora veremos que X es aposindético, teniendo de hipótesis que, para cada punto x de X , $L_x = \{x\}$. Sea x un punto de X , lo que se tiene que ver es que para cada y de X , con y distinto de x , existe un continuo C en X tal que $x \in \text{Int}(C) \subset C \subset X \setminus \{y\}$. Como y es distinto de x y, por hipótesis, para cada y en X , $L_y = \{y\}$, se tiene que x no está en L_y , esto implica que X es aposindético en x con respecto a y y con esto tenemos lo anterior. Como fue para cualquier x , se tiene que X es aposindético. $\diamond$

Lema 3.17. *Sea X un continuo. X es semiaposindético si y sólo si para cualesquiera dos puntos x y y de X , $x \notin L_y$ o $y \notin L_x$.*

Demostración. Sean x y y puntos distintos de X . Como X es semiaposindético, existe un subcontinuo K de X tal

que uno de los puntos está en el interior de K y el otro no pertenece a K . En realidad, esto significa que X es aposindético en x con respecto a y o que X es aposindético en y con respecto a x , por tanto, de la definición de L_y y L_x (3.12), se tiene, de lo anterior, que $x \notin L_y$ o $y \notin L_x$. La otra implicación también es obvia. $\diamond$

Corolario 3.18. *Si X es un continuo irreducible y semiaposindético entonces X es aposindético.*

Demostración. Sean x y y dos puntos distintos cualesquiera de X . Dado que X semiaposindético, por el corolario anterior, se tiene que x no pertenece a L_y o y no pertenece a L_x y, como X es irreducible, por el corolario (3.14), x no está en L_y si y sólo si y no pertenece a L_x , de manera que, x no está en L_y y y no está en L_x . Dado que y es cualquier punto de X se tiene que el conjunto L_x consta de un sólo punto, es decir, $L_x = \{x\}$ y, por (3.16), tenemos que X es aposindético. $\diamond$

Teorema 3.19. *Sea X un continuo semiaposindético. Si X es irreducible entre dos puntos entonces X es un arco.*

Una demostración de este resultado se encuentra en el teorema [M, 2.36].

Capítulo 4

Descomposiciones

La razón de este capítulo es definir a los continuos que se conocen como continuos del tipo A' y algunos teoremas sobre este tipo de continuos. Para ello, estudiaremos el concepto de descomposición admisible que nos será útil para obtener nuestro objetivo.

Definición 4.1. *Una descomposición de un conjunto S es una colección $\mathcal{D} = \{D_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos de S tal que:*

1. $D_\alpha \neq \emptyset$ para toda $\alpha \in I$;
2. Si $D_\alpha \neq D_\beta$ entonces $D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$;
3. $S = \bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha$.

*Si los elementos de la descomposición son conexos entonces se dirá que es una **descomposición monótona**.*

Ejemplo 4.1. 1. Si S es un conjunto no vacío entonces existen al menos dos descomposiciones que son:

- (a) La descomposición $\mathcal{D} = \{S\}$, que consta de un solo conjunto;
- (b) La descomposición $\mathcal{D} = \{\{s\}\}_{s \in S}$, que consta de todos los subconjuntos de S que tienen un solo elemento.

Definición 4.2. Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X . La función $\rho : X \rightarrow X/\mathcal{D}$, la cual asigna a un punto, x , de X el elemento, D , de $\mathcal{D}$ al que pertenece x , es llamada la **función cociente**.

La familia definida por $\tau_{\mathcal{D}} = \{U \subset X/\mathcal{D} \mid \rho^{-1}(U) \text{ es un abierto de } X\}$ es una topología para el espacio cociente $X/\mathcal{D}$, se le llama la **topología cociente**, esta topología, es la más grande con respecto a la cual la función cociente es continua [N2, 3.1]. El espacio $X/\mathcal{D}$ es llamado el **espacio cociente**. Este espacio cociente, se puede pensar, como el espacio obtenido al identificar cada elemento de $\mathcal{D}$ en un solo punto.

El lema, que enseguida se menciona, no será demostrado, una demostración es dada en [N2, 3.2].

Lema 4.3. Sea X un espacio Hausdorff. Si X es imagen continua de un espacio métrico y compacto entonces X es metrizable.

Teorema 4.4. Sean X un espacio métrico y compacto y $\mathcal{D}$ una descomposición de X . Entonces $X/\mathcal{D}$ es metrizable si y sólo si es Hausdorff.

Demostración. Supongamos que $X/\mathcal{D}$ es un espacio Hausdorff, lo que probaremos es que $X/\mathcal{D}$ es un espacio metrizable, para ver esto, recordemos que la función cociente, $\rho : X \rightarrow X/\mathcal{D}$, definida anteriormente, es una función continua y, por hipótesis, tenemos que X es un espacio métrico y compacto, de esto, se sigue que $X/\mathcal{D}$ es imagen continua de un espacio métrico y compacto y, por el lema (4.3), podemos concluir que $X/\mathcal{D}$ es un espacio metrizable. La otra implicación es clara. $\diamond$

Teorema 4.5. *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X , entonces el espacio cociente $X/\mathcal{D}$ es un continuo si y sólo si es Hausdorff.*

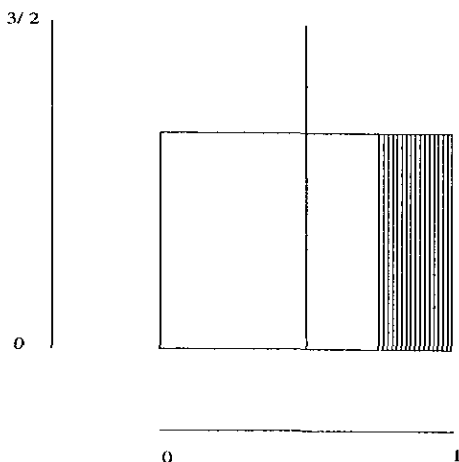
Demostración. Supongamos que $X/\mathcal{D}$ es un espacio Hausdorff, del teorema (4.4) se sigue de inmediato que, $X/\mathcal{D}$ es un espacio métrico; lo único que falta ver, para que $X/\mathcal{D}$ sea un continuo, es que $X/\mathcal{D}$ es un espacio compacto y conexo. Sabemos que la imagen de espacios compactos bajo funciones continuas son compactos, así como también la imagen continua de conexos es conexa; como X es un continuo y la función cociente es continua, se sigue que $X/\mathcal{D}$ es un continuo. La otra parte del teorema es inmediata. $\diamond$

El siguiente teorema no se demostrará en este trabajo, una demostración esta dada en [N2, 3.10].

Teorema 4.6. *Si X es un continuo y $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente entonces $X/\mathcal{D}$ es un continuo.*

Definición 4.7. Sea X un continuo. Una descomposición $\mathcal{D}$, de X , es **semicontinua superiormente** si para cada abierto U de X y cada $D \in \mathcal{D}$ con $D \subset U$, existe un abierto V de X con $D \subset V$ tal que si $D' \in \mathcal{D}$ y $D' \cap V \neq \emptyset$ entonces $D' \subset U$.

Ejemplo 4.2. Sea X el conjunto descrito por $([0, 1] \times [0, 1]) \cup (\{\frac{1}{2}\} \times [0, \frac{3}{2}])$. La descomposición cuyos elementos son los intervalos verticales de X es un ejemplo de una descomposición semicontinua superiormente. Ver la siguiente figura.



Teorema 4.8. Sean X y Y continuos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva entonces la descomposición de X definida como $\mathcal{D} = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ es semicontinua superiormente.

Demostración. Sean $D = f^{-1}(y)$ un elemento de $\mathcal{D}$ y U un abierto de X tal que D esté contenido en U . Lo que deseamos encontrar es un abierto V de X que contenga a

D tal que si D' es un elemento en $\mathcal{D}$ y D' interseca a V entonces se tiene que D' está contenida en U .

Como U es un abierto de X , se tiene que $X \setminus U$ es un cerrado de X , por tanto, $X \setminus U$ es un compacto. Por hipótesis tenemos que la función f es continua, de esto se sigue que $f(X \setminus U)$ es un compacto en Y . Por lo tanto $Y \setminus f(X \setminus U)$ es un abierto de Y y, además, el punto y pertenece al abierto $Y \setminus f(X \setminus U)$, luego entonces $f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U))$ es un abierto de X tal que $f^{-1}(y)$ está contenido en $f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U))$. Defina al abierto buscado como $V = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U))$, ya se observó que D está contenido en V ; ahora, veamos que V está contenido en U , pero esto es fácil de ver ya que $f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U))$ de donde se sigue que V está contenido en U . Por otro lado, obsérvese que V es unión de imágenes inversas de puntos y esto es lo que se quería, por lo tanto, $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente. $\diamond$

Observación. Si los espacios no son compactos entonces el teorema anterior no es cierto. Para ver esto, considérese la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = x$. Mostraremos que la descomposición $\mathcal{D} = \{f^{-1}(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ no es semicontinua superiormente. Observemos que, geoméricamente los elementos de $\mathcal{D}$ son rectas paralelas al eje Y ; consideremos el punto inverso $f^{-1}(0)$ el cual está representado por el eje Y y al abierto U como la región acotada por la gráfica $x^2 = \frac{1}{y^2}$. El comportamiento de esta gráfica es el siguiente: para y muy grandes la x es muy pequeña, es decir, el eje Y es una asíntota de esta gráfica, esto implica, que el único elemento de $\mathcal{D}$ que pertenece a U es $f^{-1}(0)$,

por tanto, no podemos encontrar ningún abierto V de $\mathbb{R}^2$ como lo requiere la definición de descomposición semicontinua superiormente; de esto se sigue que si los espacios no son compactos la descomposición inducida por las fibras de una función continua entre ellos no necesariamente es semicontinua superiormente.

Definición 4.9. Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X . Un conjunto S de X está **saturado** si es unión de elementos de $\mathcal{D}$

Proposición 4.10. Sean X un continuo, $\mathcal{D}$ una descomposición de X y $\rho : X \rightarrow X/\mathcal{D}$ la función cociente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente;
2. ρ es una función cerrada;
3. Si $D \in \mathcal{D}$ y U es un abierto de X tal que $D \subset U$, entonces existe un abierto saturado V de X tal que $D \subset V \subset U$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente, por el lema (4.5), se tiene que $X/\mathcal{D}$ es un continuo entonces ρ es una función entre continuos, por tanto, ρ es una función cerrada.

Supongamos que ρ es una función cerrada y veamos que se cumple la tercera condición. Sea D un elemento en $\mathcal{D}$ y U un abierto de X que contiene a D . Como U es abierto se tiene que $X \setminus U$ es cerrado en X , por hipótesis, ρ es cerrada entonces $\rho(X \setminus U)$ es un cerrado en $X/\mathcal{D}$, por tanto, $(X/\mathcal{D}) \setminus \rho(X \setminus U)$ es un abierto de $X/\mathcal{D}$. Sea

$V = \rho^{-1}(X/\mathcal{D} \setminus \rho(X \setminus U))$ nótese que, por definición de V , V está contenido en U y contiene a D y, además, es unión de imágenes inversas, es decir, V es saturado. La última implicación es inmediata. $\diamond$

Definición 4.11. Sea X un continuo irreducible entre dos de sus puntos x y y . Una descomposición $\mathcal{D}$ de X se dice que es **admisibles**, si $\mathcal{D}$ tiene más de un elemento, es semi-continua superiormente, es monótona y los elementos de $\mathcal{D}$, que no tienen a los puntos de irreducibilidad, separan a X .

Nótese que del teorema 2.18 tenemos que si X es irreducible entre x y y y K es un subcontinuo, de X , que separa a X entonces K no contiene a x ni a y . De esto se sigue que los elementos de $\mathcal{D}$ que contengan a x o a y no separan a X .

Teorema 4.12. Si $\mathcal{D}$ es una descomposición admisible de un continuo irreducible X entonces $X/\mathcal{D}$ es un arco.

Demostración. Por el teorema 4.6, tenemos que $X/\mathcal{D}$ es un continuo. Sea D un elemento de $\mathcal{D}$ tal que D separa a X , es decir, $X \setminus D$ es unión de dos conjuntos ajenos, A y B , de X tales que x está en A y y está en B . Entonces $(X/\mathcal{D}) \setminus \{D\}$ es la unión de $\rho(A)$ con $\rho(B)$ donde ρ es la función cociente asociada. Por otro lado, tenemos que $A \cup D$ es cerrado en X , como ρ es cerrada, $\rho(A \cup D)$ es un cerrado en $X/\mathcal{D}$ y, por tanto, $\rho(B) = (X/\mathcal{D}) \setminus \rho(A \cup D)$ es un abierto en $X/\mathcal{D}$, análogamente $\rho(A)$ es un abierto en $X/\mathcal{D}$. Como consecuencia, cada punto de $X/\mathcal{D}$ lo separa, con excepción

de a lo más dos elementos. Y, por [N2, 6.17], se tiene que X es un arco. $\diamond$

Definición 4.13. Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ descomposiciones de X . Se dice que $\mathcal{D}$ **refina** a $\mathcal{E}$ (se denotará como $\mathcal{D} \leq \mathcal{E}$) si para todo elemento $D \in \mathcal{D}$, se tiene que $D \subset E$ para algún $E \in \mathcal{E}$. Así $\leq$ define un orden parcial sobre la familia de descomposiciones monótonas, semicontinuas superiormente de X .

Teorema 4.14. Sea X un continuo irreducible entre x y y . Si X tiene una descomposición admisible entonces tiene una descomposición admisible mínima con respecto a $\leq$.

Demostración. Sea $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cadena conjuntista, con respecto al refinamiento, de descomposiciones admisibles en X y z un punto fijo de X . Para cada α y cada β en A , $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\mathcal{D}_\alpha \leq \mathcal{D}_\beta$. Dada α en A consideramos el elemento Z_α de $\mathcal{D}_\alpha$ que tiene a z . Como $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cadena, $\mathcal{D}_\alpha$ refina a $\mathcal{D}_\beta$ si y sólo si $\alpha \leq \beta$ y, como consecuencia, $Z_\alpha \subset Z_\beta$. Ya que los $\mathcal{D}_\alpha$ son descomposiciones admisibles tenemos que los Z_α forman una familia anidada de subcontinuos de X tal que z está en la $\bigcap_{\alpha \in A} Z_\alpha$ por el lema (1.5) tenemos que $Z(z) = \bigcap_{\alpha \in A} Z_\alpha$ es un continuo. Definamos $\mathcal{D} = \{Z(z) \mid z \in X\}$. A continuación veremos que $\mathcal{D}$ es una descomposición de X . Sean Z' y Z'' dos elementos de $\mathcal{D}$ tal que Z' intersecta a Z'' , probaremos que Z' es igual a Z'' . Como $Z' \cap Z''$ es no vacía, existe p en $Z' \cap Z''$, esto implica que p pertenece a Z' y p está en Z'' , de aquí se

tiene que p está en la intersección, $\bigcap_{\alpha \in A} Z'_\alpha$, de los Z'_α y también en la intersección, $\bigcap_{\alpha \in A} Z''_\alpha$, de donde p pertenece a Z'_α y p está en Z''_α para toda α , esto implica que p está en la intersección de Z'_α y Z''_α , es decir, Z'_α y Z''_α se intersectan, por tanto, Z'_α es igual a Z''_α y, como consecuencia, $Z' = Z''$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ es una descomposición.

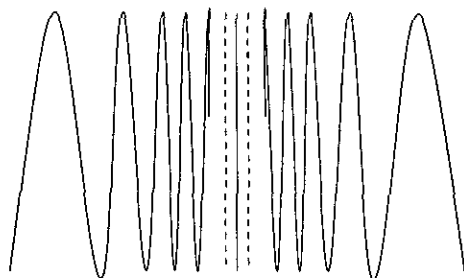
Sea $Z(z)$ un elemento de $\mathcal{D}$ que no contiene ni a x ni a y . Ahora veremos que $Z(z)$ separa a X . Por construcción $X \setminus Z = X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} Z_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus Z_\alpha)$. Como para toda $\alpha \in A$, $\{x, y\} \cap Z_\alpha = \emptyset$ se tiene que $X \setminus Z_\alpha = X_\alpha \cup Y_\alpha$, con x en X_α y y en Y_α . Por tanto $\bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus Z_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} (X_\alpha \cup Y_\alpha) = (\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha)$. Notemos que tanto $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ como $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ son abiertos de X . Afirmamos que son ajenos. Si w estuviera en $(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) \cap (\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha)$ entonces existirían α_1 y α_2 en A tales que $w \in X_{\alpha_1}$ y $w \in Y_{\alpha_2}$. Como $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cadena podemos suponer que $Z_{\alpha_1} \subset Z_{\alpha_2}$, de donde $(X_{\alpha_2} \cup Y_{\alpha_2}) = X \setminus Z_{\alpha_2} \subset X \setminus Z_{\alpha_1} = (X_{\alpha_1} \cup Y_{\alpha_1})$. Por otra parte, Y_{α_2} es un subconjunto conexo (ver 2.18) que tiene al punto y . Así que $Y_{\alpha_2} \subset Y_{\alpha_1}$. Por todo lo anterior, se obtiene que w está en la intersección de X_{α_1} con Y_{α_1} , lo cual es una contradicción. Por tanto $(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha)$ y $(\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha)$ son abiertos, ajenos y $X \setminus Z = (\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha)$. Esto es, $Z(z)$ separa a X .

Por último, veamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición semi-continua superiormente. Sea $Z(z)$ un elemento de $\mathcal{D}$. Supongamos que U es un abierto en X tal que $Z(z)$ está contenido en U . Como $Z(z)$ es la intersección de Z_α se tiene que para algún α en A , Z_α está contenido en U (esto se tiene por un argumento similar al dado en la prueba del lema 1.5) y como $\mathcal{D}_\alpha$ es semicontinua superiormente existe un abierto,

V , de X contenido en U tal que Z_α está contenido en V y V es unión de elementos de $\mathcal{D}_\alpha$. Por la definición de $Z(z)$ tenemos que $Z(z)$ está contenido en V y V es unión de elementos de $\mathcal{D}$ con esto se tiene que $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente y por tanto admisible. Como cada $\mathcal{D}_\alpha$ es refinada por $\mathcal{D}$ se tiene que la cadena $\{\mathcal{D}_\alpha\}_\alpha \in A$ tiene una cota inferior, a saber, $\mathcal{D}$ y, por el lema de Zorn, $\{\mathcal{D}_\alpha\}_\alpha \in A$ tiene una descomposición admisible minimal. $\diamond$

Definición 4.15. Sea X un continuo irreducible entre dos puntos. X es del tipo **A** si existe una descomposición monótona semicontinua superiormente, $\mathcal{D}$, de X , cuyo espacio cociente, $X/\mathcal{D}$, es un arco. Se dirá que X es del tipo **A'** si X es del tipo **A** y tiene una descomposición admisible tal que cada elemento tiene interior vacío. En la literatura estos continuos son nombrados del tipo λ .

Ejemplo 4.3. El conjunto obtenido de la unión de la curva del topólogo junto con su reflexión con respecto a la barra límite es un continuo del tipo A' . Ver siguiente figura.



Observación. Es importante resaltar que si X es un continuo irreducible entre un par de sus puntos y f es una función continua, monótona y suprayectiva de X en el $[0, 1]$ entonces $\{f^{-1}(t) \mid t \in [0, 1]\}$ es una descomposición admisible de X . De lo anterior se tiene que X es de tipo A . Por otra parte, si X es de tipo A y f una función continua, monótona y suprayectiva de X en el $[0, 1]$ entonces $\mathcal{D}(f) = \{f^{-1}(t) \mid t \in [0, 1]\}$ es una descomposición admisible de X .

También, nótese que, si $\mathcal{D}$ es una descomposición admisible de X existe una función continua, monótona y suprayectiva f de X en el intervalo tal que $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}$.

El siguiente lema no se demostrará en este trabajo, una prueba de éste se encuentra en [To, p. 10]

Lema 4.16. *Sean X un continuo de tipo A , $\mathcal{D}$ una descomposición admisible de X y $f : X \rightarrow [0, 1]$ una función continua, monótona y suprayectiva tal que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(f)$ y supongamos que K es un subcontinuo de X tal que $f(K)$ es un intervalo $[r, s]$, donde $r < s$, es decir, K intersecta en al menos dos elementos a $\mathcal{D}$. Entonces $\{D \cap K \mid D \in \mathcal{D} \text{ y } D \cap K \neq \emptyset\}$ es una descomposición semicontinua superiormente, no trivial, de K y cada elemento es conexo. Para $r < t < s$, $f^{-1}(t)$ está contenido en K y lo separa, mientras que, $f^{-1}(r) \cap K$ y $f^{-1}(s) \cap K$ no lo separan. En particular, si K es irreducible entre un par de sus puntos, entonces K es del tipo A y $\{D \cap K \mid D \in \mathcal{D} \text{ y } D \cap K \neq \emptyset\}$ es una descomposición admisible.*

Teorema 4.17. *Sea X un continuo del tipo A . Entonces existe una única descomposición admisible minimal con respecto a $\leq$. Para ver una prueba de este teorema revisar [To, p. 10].*

Teorema 4.18. *Sean X un continuo de tipo A' y f una función continua, monótona y suprayectiva de X en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\mathcal{D}(f) = \{f^{-1}(t) \mid t \in [0, 1]\}$ es la descomposición admisible mínima de X . Entonces para $0 \leq t < s \leq 1$, $K = \text{Cl}(f^{-1}((t, s)))$ es un subcontinuo de X irreducible entre cualquier punto de $K_t = K \cap f^{-1}(t)$ y cualquier punto de $K_s = K \cap f^{-1}(s)$. Y además, K_t y K_s son subcontinuos de K con interior vacío en K .*

Demostración. Como X es del tipo A' se tiene que los elementos de la descomposición $\mathcal{D}(f)$ tienen interior vacío por tanto los conjuntos $K \cap f^{-1}(t)$ y $K \cap f^{-1}(s)$ tienen interior vacío relativo a K . (Ya que si $x \in K \cap f^{-1}(t)$ y U es un abierto de X que contiene a x , resulta que existe $y \in U \cap K$ tal que $f(y) \geq t$. Por tanto $K \cap f^{-1}(t)$ tiene interior vacío relativo a K . Análogamente, se tiene que $K \cap f^{-1}(s)$ tiene interior vacío relativo a K). Supongamos que K no es irreducible entre $K \cap f^{-1}(t)$ y $K \cap f^{-1}(s)$, es decir, existe un subcontinuo propio L de K que une a $K \cap f^{-1}(t)$ con $K \cap f^{-1}(s)$ esto implica que hay un punto x en $K \setminus L$ tal que $t < f(x) < s$ como f es continua y monótona se tiene que $f^{-1}([0, t])$ y $f^{-1}([s, 1])$ son continuos en X . Consideremos la unión de L , $f^{-1}([0, t])$ y $f^{-1}([s, 1])$, como L y $f^{-1}([0, t])$ se intersectan en $f^{-1}(t)$ y L intersecta a $f^{-1}([s, 1])$ en $f^{-1}(s)$ se tiene que la unión de L , $f^{-1}([0, t])$ y $f^{-1}([s, 1])$ es un subcontinuo propio de X , ya que no tiene a x , y une a $f^{-1}(0)$

con $f^{-1}(1)$. Pero esto no puede ser, pues, por hipótesis X es irreducible. $\diamond$

Definición 4.19. *Un conjunto A de un continuo X se dice que es fuertemente conexo en X si todo par de puntos en A se puede unir por un subcontinuo de X que esté contenido en A .*

Teorema 4.20. *Sean X un continuo del tipo A y f una función continua, monótona y suprayectiva de X en el intervalo unitario $[0, 1]$. Si t y s son puntos distintos en $[0, 1]$ entonces $f^{-1}(t)$ y $f^{-1}(s)$ están contenidos en conjuntos abiertos y fuertemente conexos con cerraduras ajenas.*

Demostración. Sean t y s dos puntos distintos en $[0, 1]$ y U y V intervalos abiertos en $[0, 1]$ tales que t y s están contenidos en U y V respectivamente y la cerradura, $\text{Cl}(U)$, de U no intersecta a la cerradura, $\text{Cl}(V)$, de V . Observemos que $f^{-1}(U)$ es fuertemente conexo en X . Sean x y y dos puntos distintos en $f^{-1}(U)$, como U es abierto y f es continua se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Consideremos el intervalo cerrado, I_{xy} , formado por $f(x)$ y $f(y)$ contenido en U . Como f es continua, tenemos que $f^{-1}(I_{xy})$ es cerrado en X y, además, como f es monótona, se tiene la conexidad de $f^{-1}(I_{xy})$ en X , por tanto, $f^{-1}(I_{xy})$ es un subcontinuo en X que contiene a x y a y y está contenido en $f^{-1}(U)$, de esto se sigue que $f^{-1}(U)$ es un abierto, fuertemente conexo que contiene a $f^{-1}(t)$. Análogamente, $f^{-1}(V)$ es un abierto fuertemente conexo en X y contiene a $f^{-1}(r)$. Dado que

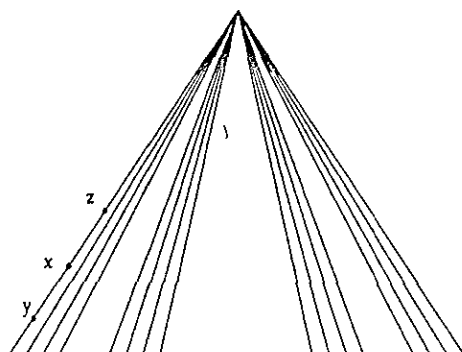
$\text{Cl}(U)$ y $\text{Cl}(V)$ son ajenas y f es continua se tiene que la $\text{Cl}(f^{-1}(U))$ y la $\text{Cl}(f^{-1}(V))$ no se intersectan en X . $\diamond$

Corolario 4.21. Sean X un continuo de tipo A y f una función continua, monótona y suprayectiva de X en el $[0, 1]$. Si t pertenece al intervalo $[0, 1]$ y z está en $f^{-1}(t)$ entonces K_z , como se definió en (3.12), está contenido en $f^{-1}(t)$.

Demostración. Sean t un punto en $[0, 1]$, z un elemento de $f^{-1}(t)$ y y un punto en X tal que y no pertenece a $f^{-1}(t)$, lo que veremos es que y no está en K_z . Como y no está en $f^{-1}(t)$ esto implica que y está en $f^{-1}(s)$ donde s es un punto de $[0, 1]$ distinto de t . Por el teorema (4.20), existen conjuntos abiertos, fuertemente conexos con cerraduras ajenas U y V que contienen a $f^{-1}(t)$ y $f^{-1}(s)$, respectivamente. De esto se sigue que la $\text{Cl}(U)$ es un subcontinuo de X que tiene en su interior a z y no toca a y , es decir, $\text{Cl}(U) \subset X \setminus \{y\}$ lo que implica que y no pertenece a K_z . $\diamond$

Definición 4.22. Sean X un continuo y x, y y z puntos de X . Se dice que x **corta débilmente** a y de z , si cada continuo de X que tiene a y y a z también tiene a x .

Ejemplo 4.4. En este continuo el punto x es un punto que corta débilmente a los puntos y y z .



Lema 4.23. Sean X un continuo del tipo A' , f una función continua monótona y suprayectiva de X en el $[0, 1]$ y $\mathcal{D}(f) = \{f^{-1}(t) \mid t \in [0, 1]\}$ la descomposición admisible mínima de X . Si x y y son puntos distintos de $f^{-1}(0)$ ($f^{-1}(1)$) entonces x corta débilmente a y de todo punto de $X \setminus f^{-1}(0)$ ($X \setminus f^{-1}(1)$). Si $0 < t < 1$ y x es un punto en la intersección de $\text{Cl}(f^{-1}([0, t]))$ y $\text{Cl}(f^{-1}((t, 1]))$ entonces x corta débilmente a todo punto de $f^{-1}(t)$ de todo punto de $X \setminus f^{-1}(t)$.

Demostración. Sean x y y puntos distintos en $f^{-1}(0)$ y sea z un punto en $X \setminus f^{-1}(0)$ lo que mostraremos es que cada continuo que contiene a y y a z , también tiene a x . Supongamos que K es un subcontinuo de X que contiene a y y a z pero no tiene a x ; como z pertenece a $X \setminus f^{-1}(0)$ hay un punto t en el $(0, 1]$ tal que $f(z) = t$, nótese que, como f es continua y monótona tenemos que $f^{-1}([t, 1])$ es un subcontinuo de X . Dado que z pertenece a K y a $f^{-1}([t, 1])$ se tiene que la intersección de K y $f^{-1}([t, 1])$ no es vacía, por tanto, la unión de K y $f^{-1}([t, 1])$ es un subcontinuo propio en X que une a y con un punto w de $f^{-1}(1)$ lo cual contradice la irreducibilidad de X entre y y w dada por el

teorema (4.18). Por lo tanto, x pertenece a K , de esto se tiene que x corta débilmente a y de z .

Ahora, supongamos que $0 < t < 1$. Sean x un punto de $\text{Cl}(f^{-1}([0, t))) \cap \text{Cl}(f^{-1}((t, 1]))$, y un punto de $f^{-1}(t)$ y z un punto de $X \setminus f^{-1}(t)$, de esto último, supongamos que s en $[0, t)$ tal que $f(z) = s$. Sea K un subcontinuo de X que une a y y a z esto implica que $f^{-1}((s, t))$ está contenido en K , ver teorema (4.18) y, por tanto, K contiene a $\text{Cl}(f^{-1}((s, t)))$ el cual contiene a x . Por lo tanto x corta débilmente a y de z . $\diamond$

Para terminar este capítulo enunciaremos un resultado que caracteriza a los continuos del tipo A' .

Teorema 4.24. *Sea X un continuo irreducible. Una condición necesaria y suficiente para que X sea del tipo A' es que cada subcontinuo de X con interior diferente del vacío sea descomponible.*

Para una demostración de este resultado ver [To, p. 10].

Capítulo 5

Aposindesis Mutua

Este capítulo se enfocará a la demostración del siguiente teorema *El producto de dos continuos encadenables es mutuamente aposindético si y sólo si cada uno de los factores es homeomorfo al arco*. Para ello primero comenzaremos introduciendo la herramienta necesaria.

Definición 5.1. *Sea X un continuo. Un subcontinuo T de X es terminal si para cada par de subcontinuos, A y B , de X que intersectan a T , se tiene que A está contenido en la unión de B y T o B está contenido en la unión de A y T .*

Definición 5.2. *Sean K un subcontinuo indescomponible de un continuo X y x un punto de K , se dice que x es un punto inaccesible de K si para cada subcontinuo L de X que contiene a x se tiene que L está contenido en K o K está contenido en L .*

Definición 5.3. *X es un triodo si existe un subcontinuo N de X tal que $X \setminus N$ tiene por lo menos tres componentes,*

es decir, $X \setminus N = H \cup K \cup L$.

Lema 5.4. *Sea X un continuo encadenable del tipo A' . Supongamos que:*

1. X no es semiaposindético en $\{x, y\}$,
2. p es un punto de un continuo Y ,
3. Z es un continuo en $X \times Y$ tal que el punto (x, p) está en su interior, y
4. D es la componente de la intersección de Z con $(K_x \cap K_y) \times Y$ que tiene al punto (x, p) .

Entonces $\Pi_X(D) = K_x \cap K_y$.

Demostración. Como X es del tipo A' , por el teorema (4.14), X tiene una descomposición admisible minimal $\mathcal{D}$ que es $\{f^{-1}(t) \mid t \in [0, 1]\}$ donde f es la función cociente asociada a $\mathcal{D}$ y para cada t en $[0, 1]$, $f^{-1}(t)$ tiene interior vacío.

Como X es irreducible, por (3.15), se tiene que para cada punto z de X , $K_z = L_z$, de esto se sigue que $K_x \cap K_y = L_x \cap L_y$ y que $K_x \cap K_y$ es un subcontinuo de X , por ser X hereditariamente unicoherente (ver 2.8). Observemos lo siguiente:

1. Para cada continuo M de X que contenga a x o a y en su interior, se tiene que $K_x \cap K_y$ está contenido en M .

Para ver esto, supongamos sin pérdida de generalidad que x está en el interior de M . Sea z un punto en

$K_x \cap K_y$, veremos que z pertenece a M . Como z está en $K_x \cap K_y$ esto implica que $z \in K_x$ y que $z \in K_y$ y, por la definición de K_x y K_y , se tiene que:

- (a) X no es aposindético en x con respecto a z y,
- (b) X no es aposindético en y con respecto a z .

De (a) se sigue que todo continuo que tenga a x en su interior también tiene a z , análogamente para y . Por lo tanto, z está en M y, como consecuencia, se cumple (1).

Supongamos que $\Pi_X(D)$ es distinto de $K_x \cap K_y$. Tenemos que, por la hipótesis 4, $\Pi_X(D) \subset K_x \cap K_y$. Sea s un punto de $K_x \cap K_y$ que no esté en $\Pi_X(D)$. Como X no es semiaposindético en $\{x, y\}$, existe t en el intervalo $[0, 1]$ tal que $\{x, y\}$ está contenido en $f^{-1}(t)$, por corolario 4.21. Por (5.2), tanto K_x como K_y están contenidos en $f^{-1}(t)$, en particular tenemos que $K_x \cap K_y$ está contenido en $f^{-1}(t)$.

Ahora, supongamos que $0 < t < 1$ y definamos los siguientes conjuntos $A = f^{-1}([0, t))$, $B = f^{-1}((t, 1])$ y $C = f^{-1}(t)$. Lo que probaremos es:

2. Si a pertenece a A y b, c están en $C \cap \text{Cl}(A)$, entonces c corta débilmente a a de b en $\text{Cl}(A)$.

Obsérvese que C es un elemento de la descomposición admisible $\mathcal{D}$ y, como por hipótesis X es del tipo A' , se tiene que C tiene interior vacío. Por tanto, X es la unión de

$\text{Cl}(A)$ y $\text{Cl}(B)$. Nótese que x , y y s están contenidos en $\text{Cl}(A)$ o en $\text{Cl}(B)$. Para mostrar esto, supongamos que s no pertenece a $\text{Cl}(B)$. Entonces s pertenece a $X \setminus \text{Cl}(B)$ que está contenido en $\text{Cl}(A)$, de donde la cerradura de A es un subcontinuo de X que contiene a s en su interior. Como s está en $K_x \cap K_y$, se tiene que $\{x, y\}$ está contenido en $\text{Cl}(A)$. Por tanto nuestra afirmación es cierta.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{x, y, s\}$ está contenido en $\text{Cl}(A)$. Observemos que, con lo anterior, $\text{Cl}(A)$ cumple con las hipótesis del lema (4.16) de donde tenemos que $\mathcal{D}' = \{D \cap \text{Cl}(A) \mid D \in \mathcal{D} \text{ y } D \cap \text{Cl}(A) \neq \emptyset\}$ es una descomposición mínima, monótona y semicontinua superiormente de $\text{Cl}(A)$ tal que $\text{Cl}(A)/\mathcal{D}'$ es un arco. Por lo tanto, del lema (4.23), se tiene lo que queríamos. Nótese que, para el caso en que t es un punto extremo del $[0, 1]$ también (2) es verdadero y, como consecuencia es válido para todo t en $[0, 1]$.

Si $C \cap \text{Cl}(A)$ es distinto de $K_x \cap K_y$ entonces existe un punto c en $C \cap \text{Cl}(A)$ que no está en $K_x \cap K_y$, esto último implica que X es aposindético en x con respecto a c , es decir, existe un subcontinuo, L , de X tal que x está en el interior, $\text{Int}(L)$, de L y L está contenido en $X \setminus \{c\}$. Como X es encadenable, por el corolario (2.8), se tiene que X es hereditariamente unicoherente y, por tanto, $L \cap \text{Cl}(A)$ es un continuo de $\text{Cl}(A)$ tal que contiene a x y a $\text{Int}(L) \cap A$ y no contiene al punto c , además, como X no es semia-posindético en $\{x, y\}$ tenemos que y pertenece a $L \cap \text{Cl}(A)$, esto contradice el hecho de que c corta débilmente a x de y . Por lo tanto, $C \cap \text{Cl}(A)$ es igual a $K_x \cap K_y$.

Dada $\varepsilon > 0$, definimos $Z_\varepsilon = Z \cap [\text{Cl}(f^{-1}(t - \varepsilon, t)) \times Y]$. Lo

que veremos es que existe ε tal que todo subcontinuo de Z_ε intersecta a $\{s\} \times Y$ o a D pero no a ambos. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe un subcontinuo, F_ε , en Z_ε tal que F_ε intersecta a $\{s\} \times Y$ y a D . El límite superior de los F_ε debería intersectar a $\{s\} \times Y$ y a D y estar contenido en $(K_x \cap K_y) \times Y$, además, como D es la componente de la intersección de Z y $(K_x \cap K_y) \times Y$ que tiene al punto (x, p) se tiene que el límite superior de los F_ε estaría contenido en D , esto implicaría que s está en $\Pi_X(D)$, lo cual no puede ser, ya que estamos suponiendo que s pertenece a $(K_x \cap K_y) \setminus \Pi_X(D)$. Por lo tanto, existe una $\varepsilon > 0$ tal que ningún subcontinuo de Z_ε intersecta tanto a $\{s\} \times Y$ como a D . Por el teorema del cable cortado [N2, 5.2], se tiene que existen conjuntos cerrados y ajenos E_s y E_D tales que Z_ε es la unión de ellos, la intersección de $\{s\} \times Y$ y Z_ε está contenida en E_s y D está contenido en E_D . Sea $z_1, z_2, \dots$ una sucesión de puntos en $E_D \cap \text{Int}(Z) \setminus [(K_x \cap K_y) \times Y]$ que converja a (x, p) . Para cada i definimos a G_i como la componente de la intersección de Z_ε y $f^{-1}((t-\varepsilon, t)) \times Y$ que contiene a z_i . Por el teorema de los golpes en la frontera [N2, 5.4], G_i tiene un punto límite en $(K_x \cap K_y) \times Y$ o en $f^{-1}((t-\varepsilon, t)) \times Y$. Si para alguna i , G_i tiene un punto límite en $(K_x \cap K_y) \times Y$ entonces $\text{Cl}(G_i)$ es un continuo en E_D de z_i a $(K_x \cap K_y) \times Y$ esto implica que $\Pi_X(\text{Cl}(G_i))$ intersecta a $(K_x \cap K_y)$ y a $f^{-1}(t-\varepsilon, t)$, anteriormente probamos que $K_x \cap K_y$ es igual a $C \cap \text{Cl}(A)$, por tanto, $\Pi_X(\text{Cl}(G_i))$ intersecta a $C \cap \text{Cl}(A)$ y a A . Sean x^* un punto de la intersección de $\Pi_X(\text{Cl}(G_i))$ y $C \cap \text{Cl}(A)$ y y^* un punto en la intersección de $\Pi_X(\text{Cl}(G_i))$ y A , como consecuencia, tenemos que x^* y y^* pertenecen a la intersección de C y $\text{Cl}(A)$ y, también, y

está en A , de esto, tenemos que $\Pi_X(\text{Cl}(G_i))$ es un continuo que tiene a x^* y a y^* y no tiene a s , contradiciendo el hecho de que s corta débilmente a x^* de y^* . Por lo tanto, cada G_i tiene un punto límite en $f^{-1}(t - \varepsilon, t) \times Y$. Luego, entonces el límite superior, F , de los G_i es un continuo en E_D de $f^{-1}(t - \varepsilon, t) \times Y$ a (x, p) y, como la función proyección es continua se tiene que $\Pi_X(F)$ es un continuo en $\text{Cl}(A)$ que contiene a x y a un punto de A y no contiene a s , contradiciendo (2). $\diamond$

Lema 5.5. *Sean X un continuo encadenable y T un subcontinuo indescomponible de X . Supongamos que:*

1. y es un punto de un continuo Y ,
2. x es un punto inaccesible de T ,
3. H es un continuo en $X \times Y$ que contiene al punto (x, y) en su interior, y
4. D es la componente de $H \cap (T \times Y)$ que tiene a (x, y) .

Entonces $\Pi_X(D) = T$.

Demostración. Mostraremos que si $T = X$ entonces $\Pi_X(D) = T$. Para ver esto, notemos que si $T = X$ entonces se tiene que $D = H$, esto implica que $\Pi_X(D) = \Pi_X(H)$ y, como T es indescomponible y el interior de H no es vacío, se tiene que $\Pi_X(H) = T$. Por lo tanto $\Pi_X(D) = T$. Por lo anterior supondremos ahora que T es distinto de X . Supongamos que T es distinto de $\Pi_X(D)$. Sea s un punto

de T que no pertenece a $\Pi_X(D)$. Para cada ε positiva, definimos a H_ε como la intersección de H y $\text{Cl}(\mathcal{N}(T, \varepsilon)) \times Y$, donde $\mathcal{N}(T, \varepsilon) = \bigcup_{y \in T} B_\varepsilon(y)$. Como en la prueba del lema (5.4) se tiene que existen $\varepsilon > 0$ y conjuntos cerrados E_s y E_D que no se intersectan tales que la unión de E_s y E_D es H_ε , la intersección de $\{s\} \times Y$ y de H_ε está contenida en E_s , y D está contenido en E_D . Sea L la componente de $H \cap (\mathcal{N}(T, \varepsilon) \times Y)$ que tiene al punto (x, y) , entonces $\text{Cl}(L)$ es un continuo en E_D que tiene al punto (x, y) e intersecta a la frontera de $\mathcal{N}(T, \varepsilon) \times Y$, por el teorema de los golpes en la frontera [N2, 5.4]. Ahora consideremos la proyección, $\Pi_X(\text{Cl}(L))$, de $\text{Cl}(L)$ en X , como $\text{Cl}(L)$ es un continuo y la proyección es continua, se tiene que $\Pi_X(\text{Cl}(L))$ es un continuo y, además, $\Pi_X(\text{Cl}(L))$ tiene puntos de $X \setminus T$ y a x y no tiene al punto s , pero esto no es posible ya que por hipótesis x es un punto inaccesible. Por lo tanto $\Pi_X(D) = T$. $\diamond$

Teorema 5.6. *Sean X y Y dos continuos encadenables. Entonces $X \times Y$ es mutuamente aposindético si y sólo si X y Y son homeomorfos al intervalo $[0, 1]$.*

En esta demostración, no usaremos la aposindesis mutua con toda su fuerza sino sólo usaremos que pares de puntos de la forma (x, y_1) y (x, y_2) (o (x_1, y) y (x_2, y)) se puedan separar por subcontinuos ajenos. Veremos que para estos puntos se satisface este teorema. En el siguiente capítulo, utilizaremos esta prueba para demostrar que un continuo encadenable con la propiedad de que su producto simétrico

es mutuamente aposindético es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Supongamos que $X \times Y$ es mutuamente aposindético. Probaremos que X y Y son homeomorfos al intervalo unitario $[0, 1]$. Para ver esto, consideremos dos casos:

1. *Al menos uno de los continuos, X y Y , tiene un punto extremo.*

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que q es un punto extremo de Y y que X no es semiaposindético.

Ahora, definiremos los conjuntos D_x y D_y , pero, para esto consideraremos primero el caso en que X es del tipo A' y segundo cuando no lo es.

- (a) *X es del tipo A'* Sean x y y puntos distintos de X tal que X no es semiaposindético en $\{x, y\}$. Por hipótesis, $X \times Y$ es mutuamente aposindético esto implica que existen dos subcontinuos ajenos, K y L , de $X \times Y$ tales que (x, q) está en el interior de K y L tiene en su interior a (y, q) . Definimos a D_x como la componente de la intersección de K con $(K_x \cap K_y) \times Y$ que tiene al punto (x, q) , análogamente, definimos a D_y como la componente de la intersección de L con $(K_x \cap K_y) \times Y$ que tiene a (y, q) , donde K_x es el conjunto definido en (3.12). Por el lema (5.4), tenemos que la proyección al primer factor, $\Pi_1(D_x)$, de D_x es $K_x \cap K_y$, así como, también $\Pi_1(D_y)$, es $K_x \cap K_y$.

(b) X no es del tipo A' .

Como X no es del tipo A' , se tiene que X contiene un subcontinuo indescomponible, H , con interior no vacío (ver 4.24). Observemos que si A , B y C son subcontinuos ajenos de X tales que cada uno intersecta a H y ninguno se queda contenido en H entonces tendríamos que la unión de A , B , C y H es un triodo en X , lo cual no puede pasar, ya que X es encadenable (ver [N2, 12.4]). Por lo tanto, hay a lo más dos composantes, D y E , de H tales que todas las composantes, excepto D y E , contienen puntos inaccesibles de H . Sean x y y puntos inaccesibles distintos de H . Como $X \times Y$ es mutuamente aposindético, se tiene que existen subcontinuos ajenos, H_x y H_y , de $X \times Y$ tales que H_x tiene en su interior a (x, q) y H_y tiene en su interior a (y, q) . En este caso, definiremos a D_x (y D_y) como la componente de la intersección de H_x (H_y) con $H \times Y$ que contiene a (x, q) ((y, q)). Por el lema (5.5), se tiene que D_x y D_y se proyectan sobre H .

Ahora vamos a mostrar que en cualquiera de estos dos casos, tanto X como Y son arcos. Para esto, sea K igual a $K_x \cap K_y$ en el caso (a) o igual a H en el caso (b).

Elijamos ε tal que la distancia entre D_x y D_y sea al menos 2ε . Sean $f : K \rightarrow [0, 1]$ y $g : Y \rightarrow [0, 1]$ ε -funciones con la propiedad de que $g(q) = 0$.

Consideremos la función h de $K \times Y$ a $[0, 1] \times [0, 1]$, a este último lo denotaremos como I^2 , dada como:

$$h(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Por como se definió h , tenemos que $h(x, q)$ y $h(y, q)$ están en $[0, 1] \times \{0\}$. Sabiendo que D_x y D_y se proyectan sobre K veamos que $\Pi_1(h(D_x))$ es igual al $[0, 1]$. Para ver esto, sea r un punto del $[0, 1]$ como f es suprayectiva existe un punto t en K tal que $f(t) = r$ y, como la proyección de D_x es K se tiene que existe un punto (t, t') en D_x tal que $\Pi_1((t, t')) = t$, por otro lado, aplicando h a (t, t') tenemos, por definición, que $h((t, t')) = (f(t), g(t'))$, por tanto, $\Pi_1(h(t, t'))$ es $f(t)$. Por lo tanto, r es un punto de $\Pi_1(h(D_x))$ y, como consecuencia, se tiene la igualdad. De esto, se sigue que $h(D_x)$ intersecta a $\{0\} \times [0, 1]$ y a $\{1\} \times [0, 1]$ con un procedimiento análogo podemos afirmar que $h(D_y)$ también los intersecta y, por el teorema (1.7), tenemos que $h(D_x)$ intersecta a $h(D_y)$, pero, esto es una contradicción a la elección de ε . Por lo tanto, X es semiaposindético y, por el teorema (3.19) tenemos que X es un arco. Con un argumento análogo, se puede ver que Y es un arco.

2. X y Y no tienen puntos extremos.

Por [Fu, p. 385], existen subcontinuos terminales indescomponibles, L_X y L_Y , de X y Y respectivamente. Sean q un punto inaccesible de L_Y y x y y puntos inaccesibles distintos de L_X . Consideremos los pun-

tos (x, q) y (y, q) , por hipótesis $X \times Y$ es mutuamente aposindético, por tanto, existen subcontinuos ajenos H_x y H_y de $X \times Y$ tales que H_x tiene en su interior a (x, q) y H_y tiene en su interior a (y, q) . Como son ajenos, sea $\varepsilon > 0$ tal que $d(H_x, H_y)$ es al menos 2ε . Sean $f : L_X \rightarrow [0, 1]$ y $g : Y \rightarrow [0, 1]$ ε -funciones tales que $g(L_Y)$ es el intervalo $[0, c]$ para alguna $c \leq 1$. Definamos la función $h : L_X \times L_Y \rightarrow [0, 1]^2$ como:

$$h(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Ahora, para este caso definiremos a D_x y a D_y de la siguiente forma:

Si z es un punto del conjunto $\{x, y\}$ entonces D_z es la componente de la intersección de H_z con $L_X \times Y$ que tiene a (z, q) y consideremos a D'_z como la componente de $H_z \cap (X \times L_Y)$ que tiene a (z, q) . Por el lema 5.5, $\Pi_1(D_x) = \Pi_1(D_y) = L_X$ y $\Pi_2(D'_x) = \Pi_2(D'_y) = L_Y$. Nótese que $h(D_x)$ no interseca a $h(D_y)$ debido a la elección de ε . Como q es un punto inaccesible de L_Y y para cada z en $\{x, y\}$, $\Pi_2(D_z)$ es un subcontinuo de Y que contiene a q , se tiene que $\Pi_2(D_z)$ está contenido en L_Y o $\Pi_2(D_z)$ contiene a L_Y .

Supongamos que L_Y está contenido en $\Pi_2(D_x)$. Nótese que $h(D_x)$ interseca a $[0, 1] \times \{0\}$ y a $[0, 1] \times \{c\}$. Para ver esto mostraremos que $g(L_Y)$ está contenido en $\Pi_2(h(D_x))$. Sea s un punto de $g(L_Y)$ entonces existe l en L_Y tal que $g(l) = s$, por hipótesis, L_Y está contenido en $\Pi_2(D_x)$, por tanto, existe un punto (l', l) en D_x tal que $\Pi_2((l', l)) = l$, por definición de h se tiene que $h((l', l)) = (f(l'), g(l))$, por tanto, $\Pi_2(h((l', l))) =$

$\Pi_2(f(l'), g(l)) = g(l)$ y teníamos que $g(l)$ es s . De esto se tiene que $\Pi_2(h((l', l)))$ es s , por tanto, $\Pi_2(h(D_x))$ contiene a $g(L_Y)$ y, como consecuencia tenemos que $h(D_x)$ intersecta a $[0, 1] \times \{0\}$ y a $[0, 1] \times \{c\}$.

Observemos qué pasa en los siguientes casos:

- (a) $\Pi_2(D_y)$ está contenido en L_Y . Como $\Pi_1(D_y)$ es igual a L_X se tiene que D_y está contenido en $L_X \times L_Y$. Sea B un subcontinuo de $h(D_x)$ irreducible entre $[0, 1] \times \{0\}$ y $[0, 1] \times \{c\}$. Dado que $\Pi_1(D_y) = L_X$, tenemos que $h(D_y)$ intersecta a $\{0\} \times [0, 1]$ y a $\{1\} \times [0, 1]$. Por el teorema (1.7), B y $h(D_y)$ se intersectan obteniendo una contradicción, pues, $h(D_x)$ y $h(D_y)$ son ajenos.
- (b) L_Y está contenido en $\Pi_2(D_y)$. Para un elemento z de $\{x, y\}$, definimos d_z como el máximo de los números b en el intervalo $[0, 1]$ tales que el punto $(0, b)$ esté en $h(D_z)$. Si d_x es mayor que d_y entonces $h(D_x)$ intersecta a $[0, 1] \times \{0\}$ y al punto $(0, d_x)$ y, $h(D_y)$ intersecta a $\{0\} \times [0, 1]$ y a $\{1\} \times [0, 1]$. Por tanto, por el teorema (1.7), se tiene que $h(D_x)$ y $h(D_y)$ se intersectan, siendo una contradicción. Para el caso en que d_y es mayor que d_x tenemos una contradicción similar a la anterior. El suponer que L_Y está contenido en $\Pi_2(D_x)$ nos conduce a una contradicción, por tanto, se tiene que L_Y contiene a $\Pi_2(D_x)$.

Podemos ver que $\Pi_1(D'_y)$ está contenido en L_X intercambiando los papeles de L_X y L_Y y, de D_x y D'_y y, haciendo un procedimiento análogo. Por tanto, D_x y D'_y están contenidas en $L_X \times L_Y$. Sea $g' : L_Y \rightarrow [0, 1]$ una ε -función y definamos la función $h' : L_X \times L_Y \rightarrow [0, 1]^2$ como:

$$h'(a, b) = (f(a), g'(b)).$$

Por como se elige a ε tenemos que $h'(D_x)$ no interseca a $h'(D'_y)$, pero, $h'(D_x)$ interseca a $\{0\} \times [0, 1]$ y a $\{1\} \times [0, 1]$ y $h'(D'_y)$ interseca a $[0, 1] \times \{0\}$ y a $[0, 1] \times \{1\}$. Por tanto, por el teorema (1.7), $h'(D_x)$ interseca a $h'(D'_y)$, lo que es una contradicción. Con esto concluimos el caso 2 y, por tanto, la demostración del teorema. $\diamond$

Teorema 5.7. *Sea X un continuo encadenable. Entonces X es indescomponible si y sólo si $X \times X$ es estrictamente no mutuamente aposindético.*

Demostración. Supongamos que X es indescomponible; lo que veremos es que $X \times X$ es estrictamente no mutuamente aposindético. Si $X \times X$ no fuera estrictamente no mutuamente aposindético existirían subcontinuos ajenos K y L de $X \times X$ tales que su interior es distinto del vacío. Sean x y y puntos en K y L respectivamente, obsérvese que la casicomposante, C_x , del punto x , en $X \times X$ contiene al interior de K . Por el corolario 2.14, se tiene que, $X \times X$ tiene una cantidad no numerable de casicomposantes ajenas y, además, anteriormente se vió en el teorema (1.17), que éstas son densas, es decir, $\text{Cl}(C_x)$ es igual a $X \times X$ y, por otro lado, la intersección de C_x con C_y es vacía, es to

implica que el interior de K no intersecta a C_y , lo cual nos dice que C_y no es densa en $X \times X$, lo cual es una contradicción. De esto se sigue que X es descomponible. Con esto queda demostrado la necesidad del teorema.

Ahora, supongamos que X no es indescomponible, esto implica que, existen un subcontinuo con interior no vacío K y un abierto no vacío U en X tales que el interior de K es no vacío y la cerradura de U no intersecta a K . Considérense los siguientes conjuntos $A = K \times K$ y $B = (\text{Cl}(U) \times X) \cup (X \times \text{Cl}(U))$ que por su construcción son continuos ajenos con interior no vacío en $X \times X$, de donde se deduce que $X \times X$ no es estrictamente no mutuamente aposindético. Por tanto, $X \times X$ es estrictamente no mutuamente aposindético, X es indescomponible. $\diamond$

Capítulo 6

Productos simétricos de continuos

La finalidad de este capítulo es obtener dos teoremas análogos a los teoremas (5.6) y (5.7) para productos simétricos de continuos. Para esto, primero veremos la prueba de algunos lemas que nos ayudarán a obtener nuestro objetivo.

Definición 6.1. *Dado un continuo X definimos 2^X como:*

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío} \}$$

En $[N1, 0.1]$ se puede revisar que 2^X es un espacio métrico con la métrica de Hausdorff, $\mathcal{H}$, definida como sigue:

$\mathcal{H}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset \mathcal{N}_X(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset \mathcal{N}_X(A, \varepsilon)\}$,
donde $\mathcal{N}_X(A, \varepsilon)$ es la bola abierta alrededor de A de radio ε en X .

En 1931 Borsuk y Ulam (ver [B-U]) definieron el concepto que a continuación se menciona.

Definición 6.2. Sean X un continuo y n un número natural. Entonces

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos} \}$$

es llamado el n -ésimo producto simétrico de X .

En ([B-U]) se demuestra que cada $\mathcal{F}_n$ es un continuo.

Definición 6.3. Dados un continuo X y una colección, $U_1, \dots, U_k$, de conjuntos abiertos de X , definimos:

$$\begin{aligned} \langle U_1, \dots, U_k \rangle = \{A \in 2^X \mid A \subset \bigcup_{k=1}^n U_k \text{ y } A \cap U_k \neq \emptyset \\ \text{para cada } k \in \{1, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

En [N1, 0.11] se muestra que que la familia de todos los subconjuntos $\langle U_1, \dots, U_k \rangle$ de 2^X forma una base para una topología de 2^X , esta topología es llamada **Topología de Vietoris**. La Topología de Vietoris y la Topología inducida por la métrica de Hausdorff coinciden, ver [N1, 0.13]. Denotaremos como $\langle U_1, \dots, U_k \rangle_n$ a la intersección de $\langle U_1, \dots, U_k \rangle$ y $\mathcal{F}_n(X)$.

Denotaremos por Δ_{X^2} a la diagonal de X^2 , que es el conjunto de puntos (x, x) en X^2 tal que x pertenece a X . Al producto caretesiano de X n veces se denotará con X^n .

El siguiente lema no será demostrado una prueba de éste es mostrada en el lema 1 de ([Ma]).

Lema 6.4. Sean X un continuo con métrica d y n un número natural. Si D_n es la métrica de X^n dada por

$$D_n((x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_j, y_j) \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$$

entonces la función $f_n : X^n \rightarrow \mathcal{F}_n(X)$ definida como

$$f_n((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

es suprayectiva y cumple lo siguiente:

$$\mathcal{H}(f_n((x_1, \dots, x_n)), f_n((y_1, \dots, y_n)))$$

$$\leq D_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)),$$

para cada $(x_1, \dots, x_n)$ y $(y_1, \dots, y_n)$ en X^n . En particular, f_n es una función continua.

Lema 6.5. Sea X un continuo. Entonces la función $f_2 : X^2 \rightarrow \mathcal{F}_2$ definida como $f_2((x_1, x_2)) = \{x_1, x_2\}$ es abierta.

Demostración. Sean (x_1, x_2) un punto de X^2 y $\varepsilon > 0$. consideremos la bola abierta, $\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon)$, en X^2 . Mostraremos que $f_2(\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon))$ es un abierto en $\mathcal{F}_2(X)$. Sea $\{y_1, y_2\}$ un punto en $f_2(\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon))$. Consideraremos los siguientes casos:

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

1. Si y_1 es distinto de y_2 . Tomemos δ menor que el mínimo de $\{d(y_1, y_2), \varepsilon - d(x_1, y_1), \varepsilon - d(x_2, y_2), D_2((y_1, y_2), \Delta_{X^2})\}$. Ahora, veremos que $\mathcal{U} = \langle \mathcal{N}_X(y_1, \delta), \mathcal{N}_X(y_2, \delta) \rangle_2$ está contenido en $\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon)$. Sea $\{z_1, z_2\}$ un punto en $\mathcal{U}$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $z_1 \in \mathcal{N}_X(y_1, \delta)$ y $z_2 \in \mathcal{N}_X(y_2, \delta)$, de esto, tenemos que:

$$d(z_1, x_1) \leq d(z_1, y_1) + d(y_1, x_1) < \delta + d(y_1, x_1) < \varepsilon$$

y análogamente, $d(z_2, x_2)$ es menor que ε . Por lo tanto, (z_1, z_2) pertenece a $\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon)$ y, además $f_2((z_1, z_2))$ es igual a $\{z_1, z_2\}$, de esto se sigue que $\mathcal{U}$ está contenido en $f_2(\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon))$.

2. si y_1 es igual a y_2 . Sean $y = y_1 = y_2$ y $\delta = \min\{\varepsilon - d(x_1, y), \varepsilon - d(x_2, y)\}$, lo que veremos es que $\mathcal{V} = \langle \mathcal{N}_X(y, \delta) \rangle_2$ está contenida en $f_2(\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon))$. Sea $\{z_1, z_2\}$ un punto de $\mathcal{V}$, veremos los siguientes casos:

- (a) Si z_1 es distinto de z_2 entonces consideremos la siguiente desigualdad:

$$d(z_1, x_1) \leq d(z_1, y) + d(y, x_1) < \delta + d(y, x_1) < \varepsilon$$

y análogamente, $d(z_2, y_2)$ es menor que ε .

- (b) Si $z_1 = z_2 = z$ entonces en este caso, tenemos la desigualdad:

$$d(z, x_1) \leq d(z, y) + d(y, x_1) < \delta + d(y, x_1) < \varepsilon$$

y análogamente, $d(z, x_2)$ es menor que ε .

De lo anterior tenemos que (z_1, z_2) pertenece a la bola $\mathcal{N}_X^2((x_1, x_2), \varepsilon)$ y $f_2(z_1, z_2) = \{z\}$. Por tanto, $\mathcal{V}$ está contenida en $f_2(\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon))$. De esto se tiene que f_2 es abierta. $\diamond$

Lema 6.6. Sean X un continuo y $\varphi : X^2 \rightarrow X^2$ la función dada por $\varphi((x_1, x_2)) = (x_2, x_1)$. Entonces φ es un homeomorfismo y $f_2 \circ \varphi = f_2$ y $f_2 \circ \varphi^{-1} = f_2$.

Sea $A^* = \varphi(A)$ donde A es un subconjunto de X^2 y φ es la función definida en (6.6).

Lema 6.7. Sean X un continuo encadenable y x y y dos puntos distintos de X . Si K es un subcontinuo de X^2 que contiene a (x, y) y a (y, x) entonces K intersecta a la diagonal, Δ_{X^2} , de X^2 .

Demostración. Sea K un subcontinuo de X^2 que contiene a los puntos (x, y) y (y, x) . Anteriormente definimos K^* como $\varphi(K)$ y, por el lema (6.6), tenemos que φ es un homeomorfismo por tanto $\varphi(K)$ es un continuo, es decir, K^* es un continuo. Definamos a L como la unión de K y K^* , como el punto (x, y) pertenece a K^* , esto se tiene por definición de K^* y, por hipótesis, (x, y) también está en K , esto implica que K y K^* se intersectan, por lo tanto tenemos que L es un continuo. De la definición de L^* sabemos que L^* es $\varphi(L)$, ahora, por como definimos a L tenemos que $\varphi(L)$ es $\varphi(K \cup K^*)$ y, como φ es función se tiene que $\varphi(K \cup K^*)$ es la unión de $\varphi(K)$ y $\varphi(K^*)$. Dado que, por definición, $\varphi(K)$ es K^* y $\varphi(K^*)$ es K se tiene que la unión de $\varphi(K)$ y $\varphi(K^*)$ es K^* y K , que anteriormente definimos como L . De esto

hecho, se sigue que L es igual a L^* . Denotemos por Π_j , $j \in \{1, 2\}$, a la función proyección de X^2 al j -ésimo factor. Como $L = L^*$ se tiene que $\Pi_1(L) = \Pi_2(L)$. Por hipótesis, tenemos que X es un continuo encadenable y, como $\Pi_1(L)$ es un subcontinuo de X , entonces, por el lema (2.5), se tiene que $\Pi_1(L)$ es un continuo encadenable. Del corolario ([N2, 12.26]) se tiene que dos funciones de un continuo en un continuo encadenable coinciden en un punto, es decir, existe un punto (z_1, z_2) en L tal que $\Pi_1|_L((z_1, z_2)) = \Pi_2|_L((z_1, z_2))$, esto nos dice que z_1 es igual a z_2 . Como consecuencia, (z_1, z_2) es un punto de la diagonal Δ_{X^2} . Por lo tanto, la intersección de K y Δ_{X^2} es no vacía. $\diamond$

Lema 6.8. *Sean X un continuo y $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(X)$. Si A es una componente de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ entonces A^* es una componente de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ y la unión de A y A^* es igual a $f_2^{-1}(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(X)$ y A una componente de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$. Como A es conexa y cerrada, se tiene que A es un continuo en X^2 , esto implica que A^* , definida por $\varphi(A)$, es un subcontinuo en X^2 . Por el lema (6.5), sabemos que f_2 es una función abierta, esto implica que f_2 es confluyente (ver [W, teorema 7.5, p.148]), es decir, $\mathcal{A}$ es igual a $f_2(\mathcal{A})$. Dado que $f_2(A^*)$ es lo mismo que $f_2(\varphi(A))$ y, por el lema (6.6), $f_2 \circ \varphi$ es igual a f_2 se tiene que $f_2(A^*)$ es $f_2(A)$ y, como consecuencia de lo anterior, tenemos que $f_2(A^*)$ es igual a $\mathcal{A}$. Ahora veamos que A^* es componente de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$. Si C es la componente de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ que contiene a A^* entonces la imagen de C bajo φ es un

subcontinuo de X^2 que contiene a A y, además, $f_2 \circ \varphi(C)$ es igual a $f_2(C)$ y, como f_2 es confluente se tiene que $f_2(C)$ es $\mathcal{A}$ así $f_2(\varphi(C))$ es $\mathcal{A}$, es decir, $\varphi(C) \subset f_2^{-1}(\mathcal{A})$. Luego $\varphi(C)$ es conexo en $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ que contiene a la componente A de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ de esto se sigue que $\varphi(C)$ es A y, por consiguiente, C es A^* ya que $A^* = \varphi(A) = \varphi(\varphi(C)) = \varphi(C^*) = C$. Dado que, para cada elemento $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}_2(X)$, $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ tiene a lo más dos elementos se tiene que $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ es la unión de A y A^* . $\diamond$

Corolario 6.9. *Si X es un continuo encadenable y $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(X)$ entonces $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ es conexo si y sólo si $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ intersecta a Δ_{X^2} .*

Demostración. Supongamos que $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ intersecta a Δ_{X^2} . Sea A una componente de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$. Como f_2 es abierta y, por tanto confluente, ver teorema [W, 7.5], se tiene que $f_2(A)$ es igual a $\mathcal{A}$. Observemos que si $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ y Δ_{X^2} se intersectan entonces la intersección de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F}_1(X)$ es no vacía. En efecto, sea (x, y) un punto en la intersección de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ y Δ_{X^2} esto implica que (x, y) está en $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ y también está en Δ_{X^2} , como (x, y) es un punto de la diagonal de X^2 , se tiene que $x = y$, es decir, $(x, y) = (x, x)$, esto implica que, $f_2((x, x))$ es, por definición, $\{x\}$, por (6.2), $\mathcal{F}_1(X)$ es el conjunto de subconjuntos de X que tiene un sólo punto, por lo tanto $\{x\}$ está en $\mathcal{F}_1(X)$. Por otro lado, (x, x) es un punto de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$, de esto se sigue que $f_2((x, x))$ pertenece a $\mathcal{A}$, de aquí concluimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F}_1(X)$ se intersectan. Sea $\{x\}$ un punto en la intersección de $\mathcal{A}$ con $\mathcal{F}_1(X)$, como $f_2(A) = \mathcal{A}$ y f_2 es suprayectiva, existe un

punto a en A tal que $f_2(a) = \{x\}$, por lo tanto, A y Δ_{X^2} se intersectan de esto se sigue que $A \cup A^*$ es conexo y, como $f_2^{-1}(\mathcal{A}) = A \cup A^*$, por (6.8), se tiene que $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ es conexo.

Si $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ es conexo entonces, por el lema (6.7), $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ intersecta a Δ_{X^2} . $\diamond$

Lema 6.10. *Sean X un continuo y $\mathcal{A}$ un subcontinuo con interior en $\mathcal{F}_2(X)$ distinto del vacío. Si A es componente de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ entonces el interior, $\text{Int}_{X^2}(A)$, de A es no vacío.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $\mathcal{F}_2(X)$ con interior no vacío y A una componente de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$. En el caso que $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ es conexo se tiene que $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ es igual a la componente A de esto se sigue que el interior de A es no vacío. Supongamos que $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ no es conexo. Sean $\mathcal{B}$ un elemento del interior, $\text{Int}(\mathcal{A})$, de $\mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{N}_{\mathcal{F}_2(X)}(\mathcal{B}, \varepsilon)$ esté contenida en $\mathcal{A}$ y $D_2(A, A^*) > 2\varepsilon$. Por el lema (6.5), f_2 es abierta y, por teorema [?, 7.5], es confluente, por tanto podemos encontrar un punto (x_1, x_2) en A tal que $f_2((x_1, x_2)) = \mathcal{B}$. Veamos que $\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon)$ está contenida en A . Sea (y_1, y_2) un punto en $\mathcal{N}_{X^2}((x_1, x_2), \varepsilon)$, por el lema 6.4, tenemos que

$$\mathcal{H}(f_2((x_1, x_2)), f_2((y_1, y_2)))$$

$$\leq D_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) < \varepsilon,$$

de esto se tiene que $f_2((y_1, y_2))$ está en $\mathcal{A}$ y, por (6.8), (y_1, y_2) está en la unión de A con A^* . En efecto, (y_1, y_2) está en A^* y $D_2(A, A^*) \geq \varepsilon$, lo cual contradice la elección de ε . $\diamond$

Teorema 6.11. *Sea X un continuo encadenable tal que $\mathcal{F}_2(X)$ es mutuamente aposindético. Entonces X es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. En la prueba de este teorema veremos que X^2 es mutuamente aposindético en los pares de puntos que no son simétricos y, utilizando el teorema (5.6) concluiremos esta demostración.

Sean (x, y) y (x', y') puntos distintos en X^2 tales que $f_2(x, y)$ es diferente de $f_2(x', y')$. Por hipótesis, tenemos que $\mathcal{F}_2(X)$ es mutuamente aposindético esto, implica que existen subcontinuos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}_2(X)$ que cumplen lo siguiente:

1. $f_2(x, y)$ pertenece al interior, $\text{Int}_{\mathcal{F}_2(X)}(\mathcal{A})$, de $\mathcal{A}$,
2. $f_2(x', y')$ esta en el interior, $\text{Int}_{\mathcal{F}_2(X)}(\mathcal{B})$, de $\mathcal{B}$ y,
3. la intersección de $\mathcal{A}$ y de $\mathcal{B}$ es vacía.

Sean A la componente de $f_2^{-1}(\mathcal{A})$ que tiene a (x, y) y B la componente de $f_2^{-1}(\mathcal{B})$ tal que el punto (x', y') está en B . Observemos que la intersección de A y B es vacía esto se tiene del hecho de que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no se intersectan y, además, por el lema (6.10), A y B tienen interior distinto del vacío por lo tanto (x, y) y (x', y') están en el interior de A y B respectivamente. Lo que demuestra que X^2 es mutuamente aposindético en los puntos que no son simétricos. En la prueba del teorema 5.6 sólo se necesitó encontrar subcontinuos ajenos que separaran a los pares de puntos de la forma (x, y_1) y (x, y_2) (o (x_1, y) y (x_2, y)), para que el teorema se cumpliera. Dado que, anteriormente, se vió que podemos encontrar subcontinuos ajenos de X^2 que tienen

en su interior a este tipo de puntos se tiene que este teorema se sigue de la prueba del teorema 5.6. $\diamond$

Teorema 6.12. *Sea X un continuo encadenable. Entonces X es indescomponible si y sólo si $\mathcal{F}_2(X)$ es estrictamente no mutuamente aposindético.*

Demostración. En la demostración de este teorema supondremos que X no es indescomponible y mostraremos que $\mathcal{F}_2(X)$ no es estrictamente no mutuamente aposindético, con esto estaremos mostrando la suficiencia en el teorema. Supongamos que X no es indescomponible entonces X es un continuo descomponible, esto implica que existe un subcontinuo propio K de X con interior distinto del vacío. Sea U un conjunto abierto y no vacío de X tal que la cerradura, $\text{Cl}(U)$, de U no intersekte a K . Definimos como L al producto de K con él mismo, es decir, $L = K \times K$, y a H como la unión de $\text{Cl}(U) \times X$ y $X \times \text{Cl}(U)$. Dada la definición de L y de H , tenemos que son subcontinuos ajenos de X^2 con interior no vacío. Notése que $L = L^*$ y $H = H^*$ de donde se deduce que $f_2(L)$ y $f_2(H)$ no se intersectan. Por el lema (6.5) tenemos que la función f_2 es abierta por tanto $f_2(L)$ y $f_2(H)$ son subcontinuos ajenos con interior diferente del vacío de $\mathcal{F}_2(X)$. De lo anterior concluimos que $\mathcal{F}_2(X)$ no es mutuamente aposindético.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}_2(X)$ no es estrictamente no mutuamente aposindético, es decir, existen subcontinuos ajenos $\mathcal{K}$ y $\mathcal{H}$ de $\mathcal{F}_2(X)$ tales que el interior de $\mathcal{K}$ y $\mathcal{H}$ es diferente del vacío. Sean K y H componentes de $f_2^{-1}(\mathcal{K})$ y $f_2^{-1}(\mathcal{H})$ respectivamente. Por el lema (6.10) K y H tienen interior no

vacío de esto se sigue que K y H son subcontinuos ajenos de X^2 con interiores no vacíos. Por lo tanto, X^2 no es estrictamente no mutuamente aposindético y por el teorema (5.7), se tiene que X es descomponible. $\diamond$

Nótese que en la demostración anterior para probar que si $\mathcal{F}_2(X)$ es estrictamente no mutuamente aposindético entonces X es indescomponible, no se usó la hipótesis de encadenabilidad de X . Más aún, en la demostración del teorema (5.7) tampoco se usa el hecho de que X es encadenable. Dado lo anterior tenemos el siguiente teorema:

Teorema 6.13. *Sea X un continuo. Si $\mathcal{F}_2(X)$ o X^2 es estrictamente no mutuamente aposindético entonces X es indescomponible.*

Bibliografía

- [B-U] K. Borsuk and S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.
- [Du] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1966.
- [Fu] J. B. Fugate, *A characterization of chainable continua*, Canadian J. Math., 21 (1968), 383-393.
- [H-Y] J. Hocking and G. Young. *Topology*, New York, Dover Publications Inc., 1988.
- [Ku] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N.Y., 1968.
- [M] M. A. Molina Garza Galindo, *Algunos aspectos sobre la función T de Jones*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 1998.
- [Ma] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Top. Proc., 22 (1997), 281-296
- [Mo] R. L. Moore, *Foundations of point set theory*, Rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol.13, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1962.

- [N1] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [N2] S. B. Nadler Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [To] E. S. Thomas, Jr., *Monotone descompositions of irreducible continua*, Dissertationes Math., 50 (1966), 1-74.
- [W] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.
- [Wi] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publ. Com. Inc., 1970.