

01162



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

"ESTUDIO DE LOS EFECTOS TURBULENTOS EN EL FONDO  
DE UN CANAL MEDIANTE UN MODELO NUMÉRICO DE  
TURBULENCIA  $\kappa$ - $\epsilon$ , EN TRES DIMENSIONES"

TESIS

QUE PARA OBTNER EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA  
(HIDRÁULICA)

P R E S E N T A :  
CECÍLIA MILLÁN BARRERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. HERMILO RAMÍREZ LEÓN

CAMPUS MORELOS, MÉXICO



2000

28/8/00



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Este pobre clamó, y le  
oyó Jehová, y lo libró de  
todas sus angustias.

Salmos 34:6

## AGRADECIMIENTOS

A la **Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)**, pilar de la Educación Superior en México, y máxima forjadora del pensamiento y pluralidad, por haberme alojado en sus aulas durante mis estudios de maestría.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)**, por el valioso apoyo económico proporcionado durante la maestría.

Al **Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA)**, en particular a la Subcoordinación de Hidráulica Ambiental de la Coordinación de Tecnología Hidráulica, por haberme permitido el uso de equipo e instalaciones.

Al director de esta tesis, **Dr. Hermilo Ramírez León** por su amplio apoyo y colaboración en la misma, y mejor aún por su amistad y confianza.

Es el espacio ideal para dar un reconocimiento a mis sinodales: **Dr. Ramón Peralta Fabi**, **Dr. Rubén Ávila Rodríguez**, **Dr. Eduardo Ramos Mora**, y al **Dr. Polioptro Martínez Austria**, por su paciencia y agudas reflexiones en relación al tema.

Finalmente, no menos importante por ello, a mis profesores de la **Maestría en Hidráulica** de la **DEPFI-UNAM Campus Morelos**, quienes de manera casi altruista dejan un poco de sí en cada uno de los alumnos.



## RESUMEN

Es indudable el interés que el estudio de la turbulencia tiene dentro de la mecánica de fluidos, baste recordar que la mayor parte de los escurrimientos que se presentan en la naturaleza y en las aplicaciones de la ingeniería se encuentran en régimen turbulento.

La turbulencia en canales abiertos consiste en movimientos con una amplia gama de escalas, y los movimientos de éstas son gobernados por las ecuaciones exactas dependientes del tiempo de Navier-Stokes y de continuidad. Sin embargo debido a que dichos movimientos no se pueden resolver con un método exacto, éstos deben ser aproximados por modelos de turbulencia, los cuales con ayuda de información empírica, permiten cuantificar y relacionar dichos procesos al campo de flujo principal.

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos de simulaciones numéricas del flujo con superficie libre dentro de un canal con un obstáculo en el fondo. El sistema de ecuaciones resuelve la hidrodinámica en 3D, al cual se le acopló un modelo de turbulencia  $\kappa$ - $\epsilon$  y posteriormente la ecuación de vorticidad, estas ecuaciones a su vez se integraron al programa **QUETZAL/3D**. La solución se obtiene numéricamente utilizando un esquema explícito en diferencias finitas para la evaluación temporal de las variables y la celda MAC (Staggered Cell) para la evaluación espacial de las mismas. El objetivo de desarrollar este modelo es estudiar los patrones de flujo y las estructuras turbulentas que se generan debido a la presencia del obstáculo. En cuanto a la vorticidad, las correlaciones  $u_j \omega_i$  fueron modeladas en función de las correlaciones de velocidad  $u_i u_j$ , obtenidas mediante las propiedades de flujo turbulento.

Los resultados obtenidos son satisfactorios, ya que se comportan de manera muy semejante a otros encontrados en la literatura y además son mutuamente afirmativos, es decir, las estructuras turbulentas inferidas con el modelo hidrodinámico se comprueban posteriormente en el estudio de la vorticidad.

## ABSTRACT

There is no doubt that turbulence is of the greatest importance in the universe of Fluid Mechanics, we just have to recall that most of the flows present in nature and in Engineering Applications are in a turbulent regime.

Turbulence in open-channel flows consists of motions with a wide spectrum of scales. The motions of all scales are governed by the exact time-dependent Navier-Stokes and continuity equations.

However, such scale motions can not be resolved by any analytical method; approximated solutions for this kind of motions must be obtain by means of turbulence models. To quantify and relate such processes to the main field flow, turbulence models take into account empirical information.

In the present work are show some results obtained by numerical simulations for a flow deformed by an obstacle placed at the bottom of the channel plate. Three-dimensional hydrodynamics equations has been resolved using Navier-Stokes and continuity equations coupled with a  $\kappa$ - $\epsilon$  turbulence model and after the vorticity equation. Finally all equations are used in a Fortran Program called *QUETZAL/3D*. The numerical analysis was constructed using an explicit finite difference formulation for time evaluation purposes and staggered or MAC cells for space evaluation. The main objective of the present model was to study flows patterns behaviors caused by the obstacle at the bottom of the channel.

For the vorticity, correlations  $u_j \omega_i$  were modeled as a function of  $u_i u_j$  velocity correlations using the properties of turbulent flows.

The results are according to those found in the (related) literature, and are mutually afirmative. Turbulent structures obtained by the hydrodynamical model are in a close correspondence with the vorticity study.

# Índice general

Resumen	i
Abstract	ii
Índice	iii
Lista de tablas	vi
Lista de figuras	vii
Notación	xviii

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>Conceptos generales</b>	<b>1</b>
1.1	Deformación y rotación de un flujo	3
1.2	Reseña histórica de la turbulencia	5
1.3	El flujo alrededor de un obstáculo, según la bibliografía	10
1.4	Contribución del presente estudio	11
1.5	Organización del trabajo	11
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>Las estructuras turbulentas en el fondo de un Canal</b>	<b>13</b>
2.1	Introducción	13
2.2	Naturaleza de la turbulencia	14
2.2.1	Fuentes de turbulencia	16
2.3	Cinemática del campo de flujo	19
2.4	Estructuras turbulentas en canales	26
2.4.1	Flujo medio	26
2.4.2	Flujo secundario	31
2.4.3	Flujo secundario en canales angostos	35
2.5	Análisis de las diferentes estructuras turbulentas en canales	42
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>Ecuaciones del movimiento de los fluidos</b>	<b>55</b>
3.1	Las ecuaciones de Navier-Stokes	55
3.1.1	Ecuaciones de movimiento	56
3.1.2	Ecuación de continuidad	57
3.1.3	Ecuación de cantidad de movimiento	58
3.2	Las Ecuaciones medias de Reynolds	61

3.2.1	Teoremas de Reynolds	62
3.2.2	Ecuación de continuidad	62
3.2.3	Ecuación para la velocidad	63
3.2.4	Ecuación de concentración de la masa del contaminante	64
3.3	La modelación de los términos de turbulencia	65
3.3.1	Modelos de orden cero	66
3.3.1.1	<i>Modelo de viscosidad turbulenta <math>\nu_T</math></i>	66
3.3.1.2	<i>Modelo de difusión turbulenta <math>K_c</math></i>	67
3.3.2	Modelos de primer orden	68
3.3.2.1	<i>Modelo <math>k-\epsilon</math></i>	68
3.4	La ecuación de vorticidad	71
3.4.1	Tratamiento estadístico de la ecuación de vorticidad	76
3.4.2	Ecuaciones estadísticas de la vorticidad media	79
CAPÍTULO 4	Método de Solución numérica	82
4.1	Introducción	82
4.2	Discretización espacial	83
4.3	Discretización de las ecuaciones	83
4.3.1	El método de diferencia finitas	84
4.3.2	Ecuación media de la velocidad horizontal	87
4.3.3	Ecuación media de la velocidad transversal	88
4.3.4	Ecuación media de la velocidad vertical	88
4.3.5	Ecuación de la energía cinética de la turbulencia	89
4.3.6	Ecuación de la disipación de la energía cinética de la turbulencia	90
4.3.7	Ecuación media de la concentración de especies	90
4.3.8	Ecuación media de la ecuación de vorticidad	91
4.4	El esquema de convección	92
4.5	El método de compresibilidad artificial	94
4.6	Análisis de esquemas numéricos	98
4.6.1	Consistencia	98
4.6.2	Estabilidad	98
4.6.3	Convergencia	99
4.7	El programa <i>Quetzal/3D</i>	99

<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>Estudio de la deformación del flujo alrededor de un obstáculo</b>	<b>104</b>
5.1	Deformación del flujo medio	104
5.1.1	Ecuaciones del flujo medio	104
5.2	Condiciones iniciales y de frontera	105
5.2.1	Dominio de estudio	105
5.2.2	Condiciones iniciales	107
5.2.3	Condiciones de frontera	109
5.3	Curva de convergencia	114
5.4	Estudio del flujo considerando un modelo de turbulencia de orden cero	115
5.5	Estudio del flujo considerando un modelo de turbulencia de Primer orden	119
5.5.1	Análisis de las estructuras turbulentas	125
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>Análisis de la vorticidad de un flujo alrededor de un obstáculo</b>	<b>150</b>
6.1	Introducción	150
6.2	Relación entre deformación, rotación y transferencia de energía cinética	151
6.3	Formación de estructuras de vorticidad	155
6.4	Estructuras de vorticidad obtenidas con aproximación estadística	162
6.5	Discusión de resultados	163
6.5.1	Gráficas de vorticidad al centro del dominio, en volumen	163
6.5.2	Gráficas de líneas de volumen de vorticidad en todo el dominio transversal	180
6.5.3	Gráficas del campo de vorticidad y velocidad en planos bidimensionales	190
6.5.4	Otras comparaciones cualitativas con trabajos semejantes	199
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>201</b>
	<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>207</b>

## LISTA DE TABLAS

**Página**

**CAPÍTULO 1**

**Tabla 1.1** Constantes del modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$

71

**CAPÍTULO 5**

**Tabla 5.1** Coeficientes óptimos del modelo de orden cero

115

# LISTA DE FIGURAS

	<b>Página</b>
<b><u>CAPÍTULO 1</u></b>	
<b>Figura 1.1</b> Leonardo Da Vinci (autoretrato) y su concepción de los vórtices.	5
<b><u>CAPÍTULO 2</u></b>	
<b>Figura 2.1</b> Gráfica de alguna cantidad media y sus fluctuaciones.	15
<b>Figura 2.2</b> Formación de vórtices en superficies con discontinuidad en la velocidad: (a) obstáculo anguloso; (b) cuerpo grueso; (c) borde de zaga; (d) Separación de capa límite.	17
<b>Figura 2.3</b> Formación de vórtices a partir de ondas en una superficie de discontinuidad.	17
<b>Figura 2.4</b> Perturbaciones (a) amplificación de una onda bidimensional de acuerdo a Tollmien-Schlichting; (b) difusión y amplificación perturbación puntual en una mancha de turbulencia.	18
<b>Figura 2.5</b> Relaciones deformación-desplazamiento.	20
<b>Figura 2.6</b> Deformación normal y tangencial de un ángulo recto.	21
<b>Figura 2.7</b> Descomposición del desplazamiento relativo $\Delta s$ , ligado al desplazamiento virtual $\Delta r$ .	22
<b>Figura 2.8</b> Significado del vector $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{n}$	24
<b>Figura 2.9</b> Comparación teórica y experimental de la distribución de velocidad media en canales abiertos (Nezu y Nakgawa, 1993).	29
<b>Figura 2.10</b> Mecanismo de generación de corrientes secundarias en canales angostos. (Nezu y Nakgawa, 1993).	34
<b>Figura 2.11</b> Descripción de las corrientes secundarias ( $V, W$ ) en (a): un canal subcrítico y (b) supercrítico respectivamente. (Nezu y Nakgawa, 1993)	36
<b>Figura 2.12</b> Patrón de flujo esquemático de corrientes secundarias en canales abiertos angostos (Gibson, 1909).	37
<b>Figura 2.13</b> Simulación numérica de corrientes secundarias con un modelo de esfuerzos Algebraicos, en un canal abierto. (Nezu y Nakgawa, 1993)	37
<b>Figura 2.14</b> Líneas de corriente de vorticidad en un flujo secundario en canales abiertos. (Nezu y Nakgawa, 1993).	38
<b>Figura 2.15</b> Líneas de contorno de las intensidades turbulentas $u'$ y $v'$ en canales abiertos. (Nezu y Nakgawa, 1993).	39
<b>Figura 2.16</b> Líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds - $uv$ para canales abiertos. (Nezu y Nakgawa, 1993).	40
<b>Figura 2.17</b> Efectos de la rugosidad de pared sobre las corrientes secundarias en canales abiertos. (a) Fondo y paredes lisas. (b) Fondo liso, paredes rugosas. (c) Fondo rugoso paredes lisas. (Nezu y Nakagawa, 1993).	41

<b>Figura 2.18</b>	Tasa de fricción de pared contra la relación de aspecto $B/h$ como una función De la rugosidad de fondo relativa $k_p/k_s$ . (Nezu y Nakagawa, 1993).	42
<b>Figura 2.19</b>	(a) Vista esquemática en planta de estrías de baja velocidad en una capa límite turbulenta. b) Fotografía real de burbujas de hidrógeno. (C.R. Smith, 1996).	42
<b>Figura 2.20</b>	Esquema del campo de velocidad instantáneo en un plano transversal de flujo. (C.R. Smith, 1996).	43
<b>Figura 2.21</b>	Perfil de una capa límite. a) Esquema idealizado de la gama de escalas de los Vórtices. b) Visualización real. (C.R. Smith, 1996).	44
<b>Figura 2.22</b>	Esquema de un proceso de rompimiento turbulento (bursting), vista en Perfil. (C.R. Smith, 1996).	45
<b>Figura 2.22</b>	Esquema de un proceso de rompimiento turbulento (bursting), vista en Perfil. (C.R. Smith, 1996).	45
<b>Figura 2.23</b>	Diagrama esquemático de un vórtice de horquilla típico. (C.R. Smith, 1996).	48
<b>Figura 2.24</b>	Esquema de la topología de un vórtice y regeneración vorticial en una capa límite a bajos números de Reynolds. (C.R. Smith, 1996).	49
<b>Figura 2.25</b>	Esquema de las estructuras vorticiales más comunes en diferentes regiones de una capa límite turbulenta a bajos números de Reynolds. (C.R. Smith, 1996).	50
<b>Figura 2.26</b>	Líneas vorticosas ilustrando la formación de un vórtice de horquilla en la región de la pared. (C.R. Smith, 1996).	50
<b>Figura 2.27</b>	Evolución de un vórtice de horquilla simétrico en un flujo cortante: a) Distribución inicial; b) Desarrollo de la cabeza y ramas del vórtice; c) Evolución de un vórtice subsidiario y penetración de las ramas hacia el fondo. (C.R. Smith, 1996).	52
<b>Figura 2.28</b>	Evolución de un vórtice de horquilla asimétrico en un flujo cortante: a) Distribución inicial; b) Desarrollo de la cabeza y ramas del vórtice; c) Evolución de un vórtice subsidiario y penetración de las ramas hacia el fondo. (C.R. Smith, 1996).	52

### CAPÍTULO 3

<b>Figura 3.1</b>	Conservación de masa.	57
<b>Figura 3.2</b>	Conservación de cantidad de movimiento.	58
<b>Figura 3.3</b>	Alargamiento de vórtices en una contracción de un túnel de viento.	76
<b>Figura 3.4</b>	Productos transversales vorticidad-velocidad generados por las fuerzas de cuerpo.	78

### CAPÍTULO 4

<b>Figura 4.1</b>	Malla de discretización MAC. $\phi$ representa los escalares.	83
<b>Figura 4.2</b>	Malla no-homogénea.	85
<b>Figura 4.3</b>	Aspecto indicativo de la convergencia del método de compresibilidad artificial.	96
<b>Figura 4.4</b>	Relación entre consistencia, estabilidad y convergencia.	98
<b>Figura 4.5</b>	Relación entre las ecuaciones y estructura del programa <b>QUETZAL/3D</b> .	100
<b>Figura 4.6</b>	Algoritmo preprocesador del programa <b>QUETZAL/3D</b> .	101
<b>Figura 4.7</b>	Diagrama de flujo general del programa <b>QUETZAL/3D</b> .	102
<b>Figura 4.8</b>	Algoritmo del método de compresibilidad artificial.	103



## CAPÍTULO 5

<b>Figura 5.1</b>	Dibujo esquemático del dominio de estudio.	105
<b>Figura 5.2</b>	Subdivisiones de la malla no-homogénea.	106
<b>Figura 5.3</b>	Vista en planta del dominio computacional.	107
<b>Figura 5.4</b>	Perfil z-x del dominio computacional.	107
<b>Figura 5.5</b>	Perfil z-y del dominio computacional.	107
<b>Figura 5.6</b>	Distribución inicial de presiones en el canal.	107
<b>Figura 5.7</b>	Distribución de velocidades de flujo a la entrada del canal.	108
<b>Figura 5.8</b>	Dominio computacional R.	109
<b>Figura 5.9</b>	Tratamiento de las condiciones de frontera de Neumann.	110
<b>Figura 5.10</b>	Convergencia temporal de las velocidades medias, ( $t=n\Delta t$ ).	114
<b>Figura 5.11</b>	Líneas de corriente de la velocidad U en todo el dominio.	116
<b>Figura 5.12</b>	Vista en planta de las líneas de corriente U, en todo el dominio.	116
<b>Figura 5.13</b>	Líneas de corriente en la dirección x.	116
<b>Figura 5.14</b>	Perfil de las líneas de corriente en x.	116
<b>Figura 5.15</b>	Diferentes vistas de la velocidad W.	117
<b>Figura 5.16</b>	Corte x-z de la velocidad W, en m/s.	117
<b>Figura 5.17</b>	Corte z-y de la velocidad W, en m/s.	117
<b>Figura 5.18</b>	Diferentes vistas de la velocidad transversal V, en m/s.	118
<b>Figura 5.19</b>	Corte x-y de la velocidad V, en m/s.	118
<b>Figura 5.20</b>	Corte z-y de la velocidad V, en m/s.	118
<b>Figura 5.21</b>	(a) Velocidad media a lo largo del canal obtenida en este estudio; (b) Recopilación de la velocidad media a lo largo de un canal (Franke y Rodi, 1992).	119
<b>Figura 5.22</b>	Vista general de la velocidad U, en m/s.	121
<b>Figura 5.23</b>	Corte x-y de la velocidad U, en m/s.	121
<b>Figura 5.24</b>	Corte x-z de la velocidad U, en m/s.	122
<b>Figura 5.25</b>	Corte y-z de la velocidad U, en m/s.	122
<b>Figura 5.26</b>	Perspectiva general de la velocidad V, m/s.	122
<b>Figura 5.27</b>	Corte x-y de la velocidad V, en m/s.	123
<b>Figura 5.28</b>	Corte x-z de la velocidad V, en m/s.	123
<b>Figura 5.29</b>	Corte y-z de la velocidad V, en m/s.	123
<b>Figura 5.30</b>	Perspectiva general de la velocidad W, m/s.	124
<b>Figura 5.31</b>	Corte x-y de la velocidad W, en m/s.	124
<b>Figura 5.32</b>	Corte x-z de la velocidad W, en m/s.	124
<b>Figura 5.33</b>	Corte y-z de la velocidad W, en m/s.	124
<b>Figura 5.34</b>	Líneas de contorno de la intensidad turbulenta $u'$ .	128
<b>Figura 5.35</b>	Líneas de contorno de la intensidad turbulenta $v'$ .	128
<b>Figura 5.36</b>	Líneas de contorno de la intensidad turbulenta $w'$ .	128
<b>Figura 5.37</b>	Líneas de contorno del esfuerzo de Reynolds $-uv$ .	129
<b>Figura 5.38</b>	Líneas de contorno del esfuerzo de Reynolds $-uw$ .	129
<b>Figura 5.39</b>	Líneas de contorno del esfuerzo de Reynolds $-vw$ .	129

<b>Figura 5.40</b>	Vista general de los contornos de la velocidad fluctuante $u\bar{u}$ .	130
<b>Figura 5.41</b>	Corte x-y de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante $u\bar{u}$ .	130
<b>Figura 5.42</b>	Corte x-z de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante $u\bar{u}$ .	131
<b>Figura 5.43</b>	Corte y-z de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante $u\bar{u}$ .	131
<b>Figura 5.44</b>	Vista general de los contornos de la velocidad fluctuante $v\bar{v}$ .	132
<b>Figura 5.45</b>	Corte x-y de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante $v\bar{v}$ .	132
<b>Figura 5.46</b>	Corte x-z de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante $v\bar{v}$ .	133
<b>Figura 5.47</b>	Corte y-z de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante $v\bar{v}$ .	133
<b>Figura 5.48</b>	Vista general de los contornos de la velocidad fluctuante $w\bar{w}$ .	134
<b>Figura 5.49</b>	Corte x-y de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante $w\bar{w}$ .	134
<b>Figura 5.50</b>	Corte x-z de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante $w\bar{w}$ .	135
<b>Figura 5.51</b>	Corte y-z de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante $w\bar{w}$ .	135
<b>Figura 5.52</b>	Perspectiva general de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $uv$ .	136
<b>Figura 5.53</b>	Corte x-y de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $uv$ .	136
<b>Figura 5.54</b>	Corte x-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $uv$ .	137
<b>Figura 5.55</b>	Corte y-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $uv$ .	137
<b>Figura 5.56</b>	Perspectiva general de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $uw$ .	138
<b>Figura 5.57</b>	Corte x-y de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $uw$ .	138
<b>Figura 5.58</b>	Corte x-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $uw$ .	139
<b>Figura 5.59</b>	Corte y-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $uw$ .	139
<b>Figura 5.60</b>	Perspectiva general de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $vw$ .	140
<b>Figura 5.61</b>	Corte x-y de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $vw$ .	140
<b>Figura 5.62</b>	Corte x-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $vw$ .	141
<b>Figura 5.63</b>	Corte y-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds $vw$ .	141
<b>Figura 5.64</b>	Perspectiva de los contornos del coeficiente de viscosidad turbulenta $\nu_T$ .	142
<b>Figura 5.65</b>	Corte x-y de las líneas de contorno del coeficiente de viscosidad turbulenta $\nu_T$ .	142
<b>Figura 5.66</b>	Corte x-z de las líneas de contorno del coeficiente de viscosidad turbulenta $\nu_T$ .	143
<b>Figura 5.67</b>	Corte y-z de las líneas de contorno del coeficiente de viscosidad turbulenta $\nu_T$ .	143
<b>Figura 5.68</b>	Perspectiva de los contornos del término de producción de energía cinética.	144
<b>Figura 5.69</b>	Corte x-y de los contornos del término de producción de energía cinética.	144
<b>Figura 5.70</b>	Corte x-z de los contornos del término de producción de energía cinética.	145
<b>Figura 5.71</b>	Corte y-z de los contornos del término de producción de energía cinética.	145
<b>Figura 5.72</b>	Perspectiva de los contornos de la disipación de la energía cinética.	146
<b>Figura 5.73</b>	Corte x-y de las líneas de contorno de la disipación de la energía cinética.	146
<b>Figura 5.74</b>	Corte x-z de las líneas de contorno de la disipación de la energía cinética.	147
<b>Figura 5.75</b>	Corte y-z de las líneas de contorno de la disipación de la energía cinética.	147
<b>Figura 5.76</b>	Gráfica de la energía cinética adimensional a lo largo del canal, obtenida con datos del presente estudio.	148
<b>Figura 5.77</b>	Recopilación de resultados numéricos y experimentales de la producción de	

	la energía cinética lo largo de un canal, (Franke y Rodi, 1992).	148
<b>Figura 5.76</b>	Distribución de $(w^2 - v^2)$ en canales abiertos lisos, (Nezu y Nakagawa, 1992).	148
<b>Figura 5.79</b>	Distribución de $(w^2 - v^2)$ . Anisotropía de la turbulencia a una distancia $x/L=2$ , justo al inicio del obstáculo, obtenida para este estudio.	149
<b>Figura 5.80</b>	Distribución de $(w^2 - v^2)$ . Anisotropía de la turbulencia a una distancia $x/L=3$ , jal final del obstáculo en la dirección $x$ , obtenida este estudio.	149

## CAPÍTULO 6

<b>Figura 6.1</b>	Ejemplo de un flujo sometido a un esfuerzo cortante puro.	151
<b>Figura 6.2</b>	Relaciones esfuerzo-deformación y distorsión de un elemento de fluido en movimiento.	152
<b>Figura 6.3</b>	Remolino elemental.	153
<b>Figura 6.4</b>	Remolino bajo la acción de una deformación media.	153
<b>Figura 6.5</b>	Remolinos bajo la acción de la conservación de la masa.	154
<b>Figura 6.6</b>	Esquema del alargamiento de los remolinos.	154
<b>Figura 6.7</b>	El árbol genealógico de Bradshaw.	155
<b>Figura 6.8</b>	Vista final de la formación de un vórtice. a) Con el hilo de burbujas localizado aguas arriba del obstáculo; b) Esquema de dicha formación.	156
<b>Figura 6.9</b>	Esquema del comportamiento del flujo externo y la formación de vórtices de horquilla.	156
<b>Figura 6.10</b>	Vista en planta de diferentes patrones de burbujas de hidrógeno tomadas a diferentes alturas $y/R$ del dominio de flujo, a $Re=750$ .	157
<b>Figura 6.11</b>	Vistas combinadas de planta y perfil a diferentes alturas del dominio, a $Re=750$ .	158
<b>Figura 6.12</b>	Vista de un vórtice de horquilla en el extremo de un obstáculo.	158
<b>Figura 6.13</b>	Patrones de flujo secundario en la estela de un hemisferio.	159
<b>Figura 6.14</b>	Patrones de la estela de las líneas de burbujas. a) Vista en el extremo de un fluido de bajo momentum ascendiendo entre las ramas del vórtice par a $x/R=10$ , y $y/R=0.1$ ; b) Vista en planta de a) a $x/R=15$ y $y/R=0.1$ ; c) Vista de planta a $x/R=20$ y $y/R=0.25$ ; d) Vista en planta a $x/R=45$ , y $y/R=0.25$ .	160
<b>Figura 6.15</b>	Comparación en planta de un vórtice de horquilla y la estructura de una capa límite turbulenta.	160
<b>Figura 6.16</b>	Resultados de la visualización de flujos hecha por Larousse, Martinuzzi y Tropea (1992).	161
<b>Figura 6.17</b>	Esquema de las estructuras de vorticidad alrededor de un cubo, sugerido por Larousse, Martinuzzi y Tropea (1992).	161
<b>Figura 6.18</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ , al centro y al fondo del canal, en la dirección $y$ .	167
<b>Figura 6.19</b>	Vista frontal de las líneas de volumen de vorticidad descrita en la gráfica 6.18.	167
<b>Figura 6.20</b>	Corte longitudinal de la gráfica 6.18.	167
<b>Figura 6.21</b>	Corte A-A' en el plano $x-y$ de la figura 6.18.	167
<b>Figura 6.22</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad en el fondo del canal.	167

<b>Figura 6.23</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.075 m. del fondo	168
<b>Figura 6.24</b>	Vista frontal de las líneas de vorticidad descrita en la figura 6.23.	168
<b>Figura 6.25</b>	Corte longitudinal de la gráfica 6.23.	168
<b>Figura 6.26</b>	Corte B-B' del plano $x-y$ de la gráfica 6.23.	168
<b>Figura 6.27</b>	Vista general de la vorticidad a 0.075 m. en la dirección $z$ , desde el fondo del canal.	168
<b>Figura 6.28</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.0125 m. sobre el fondo.	169
<b>Figura 6.29</b>	Vista frontal de las líneas de volumen de la vorticidad descrita en la figura 6.28.	169
<b>Figura 6.30</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.28.	169
<b>Figura 6.31</b>	Corte C-C' del plano $x-y$ de la figura 6.28.	169
<b>Figura 6.32</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0125 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	169
<b>Figura 6.33</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.0175 m. sobre el fondo.	170
<b>Figura 6.34</b>	Vista frontal de la vorticidad de la gráfica 6.33.	170
<b>Figura 6.35</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.33.	170
<b>Figura 6.36</b>	Corte D-D' del plano $x-y$ de la figura 6.33.	170
<b>Figura 6.37</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0175 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	170
<b>Figura 6.38</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.0225 m. sobre el fondo.	171
<b>Figura 6.39</b>	Vista frontal de la gráfica 6.38.	171
<b>Figura 6.40</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.38.	171
<b>Figura 6.41</b>	Corte E-E' del plano $x-y$ de la figura 6.38.	171
<b>Figura 6.42</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0225 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	171
<b>Figura 6.43</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.0275 m. del fondo.	172
<b>Figura 6.44</b>	Vista frontal de la vorticidad de la gráfica 6.43.	172
<b>Figura 6.45</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.43.	172
<b>Figura 6.46</b>	Corte F-F' del plano $x-y$ de la figura 6.43.	172
<b>Figura 6.47</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0275 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	172
<b>Figura 6.48</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.0325 m. sobre el fondo.	173
<b>Figura 6.49</b>	Vista frontal de la gráfica 6.48.	173
<b>Figura 6.50</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.48.	173
<b>Figura 6.51</b>	Corte E-E' del plano $x-y$ de la figura 6.48.	173
<b>Figura 6.52</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0325 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	173

<b>Figura 6.53</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.0375 m. sobre el fondo.	174
<b>Figura 6.54</b>	Vista frontal de la gráfica 6.53.	174
<b>Figura 6.55</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.53.	174
<b>Figura 6.56</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0375 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	174
<b>Figura 6.57</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.05275 m. sobre el fondo.	175
<b>Figura 6.58</b>	Vista frontal de la gráfica 6.57.	175
<b>Figura 6.59</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.57.	175
<b>Figura 6.60</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.05275 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	175
<b>Figura 6.61</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.08313 m. sobre el fondo.	176
<b>Figura 6.62</b>	Vista frontal de la gráfica 6.61.	176
<b>Figura 6.63</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.61.	176
<b>Figura 6.64</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.08313 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	176
<b>Figura 6.65</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.1287 m. sobre el fondo.	177
<b>Figura 6.66</b>	Vista frontal de la gráfica 6.65.	177
<b>Figura 6.67</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.65.	177
<b>Figura 6.68</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.1287 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	177
<b>Figura 6.69</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a 0.1378 m. sobre el fondo.	178
<b>Figura 6.70</b>	Vista frontal de la gráfica 6.69.	178
<b>Figura 6.71</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.69.	178
<b>Figura 6.72</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.1378 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	178
<b>Figura 6.73</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ al centro del dominio en $y$ , a lo largo de la dirección $z$ .	179
<b>Figura 6.74</b>	Vista frontal de la gráfica 6.73.	179
<b>Figura 6.75</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.73.	179
<b>Figura 6.76</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ tocando varios puntos en $y$ , en el fondo del canal.	181
<b>Figura 6.77</b>	Corte $y-z$ de la gráfica 6.76.	181
<b>Figura 6.78</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la gráfica 6.76.	181
<b>Figura 6.79</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad justo en el fondo del canal.	181
<b>Figura 6.80</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ tocando varios puntos en $y$ , a 0.0075 m. del fondo.	182
<b>Figura 6.81</b>	Corte $y-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.80.	182

<b>Figura 6.82</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.80.	182
<b>Figura 6.83</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0075 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	182
<b>Figura 6.84</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ tocando varios puntos en $y$ , a 0.0125 m. del fondo.	183
<b>Figura 6.85</b>	Corte $y-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.84.	183
<b>Figura 6.86</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.84.	183
<b>Figura 6.87</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0125 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	183
<b>Figura 6.88</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ tocando varios puntos en $y$ , a 0.0175 m. del fondo.	184
<b>Figura 6.89</b>	Corte $y-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.88.	184
<b>Figura 6.90</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.88.	184
<b>Figura 6.91</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0175 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	184
<b>Figura 6.92</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ tocando varios puntos en $y$ , a 0.0225 m. del fondo.	185
<b>Figura 6.93</b>	Corte $y-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.92.	185
<b>Figura 6.94</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.92.	185
<b>Figura 6.95</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0225 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	185
<b>Figura 6.97</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ tocando varios puntos en $y$ , a 0.0275 m. del fondo.	186
<b>Figura 6.98</b>	Corte $y-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.97.	186
<b>Figura 6.99</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.97.	186
<b>Figura 6.100</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0275 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	186
<b>Figura 6.101</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ tocando varios puntos en $y$ , a 0.0325 m. del fondo.	187
<b>Figura 6.102</b>	Corte $y-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.101.	187
<b>Figura 6.103</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.101.	187
<b>Figura 6.104</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0325 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	187
<b>Figura 6.105</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ tocando varios puntos en $y$ , a 0.1195 m. del fondo.	188
<b>Figura 6.106</b>	Corte $y-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.105.	188
<b>Figura 6.107</b>	Corte longitudinal $x-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.105.	188
<b>Figura 6.108</b>	Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.1195 m. en $z$ , desde el fondo del canal.	188
<b>Figura 6.109</b>	Líneas de volumen de vorticidad en el plano $x-y$ tocando varios puntos en $y$ , a 0.1469 m. del fondo.	189
<b>Figura 6.110</b>	Corte $y-z$ de la vorticidad descrita en la gráfica 6.109.	189

<b>Figura 6.111</b> Corte longitudinal x-z de la vorticidad descrita en la gráfica 6.109.	189
<b>Figura 6.112</b> Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.1469 m. en z, desde el fondo del canal.	189
<b>Figura 6.113</b> Campo vectorial de la velocidad instantánea de un patrón de humo.	191
<b>Figura 6.114</b> a) Campo de flujo bidimensional generado por un vórtice par relativo a un observador moviéndose con él. b) Sección en planta del patrón de líneas de corriente imaginadas para la figura anterior. c) Vista superior de las líneas de corriente hipotéticas cerca de la superficie del humo. d) Vista inferior de las líneas de corriente hipotéticas.	191
<b>Figura 6.115</b> Patrones de humo hipotéticos para estructuras de estelas y chorros de doble lado	192
<b>Figura 6.116</b> Una posible estructura vorticosa en un campo de flujo dado.	192
<b>Figura 6.117</b> Líneas de superficie de vorticidad en planta, justo en el fondo del obstáculo.	193
<b>Figura 6.118</b> Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.005 m. del fondo del canal.	193
<b>Figura 6.119</b> Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0075 m. del fondo del canal.	193
<b>Figura 6.120</b> Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0125 m. del fondo del canal.	193
<b>Figura 6.121</b> Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0175m. del fondo del canal.	193
<b>Figura 6.122</b> Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0225 m. del fondo del canal.	193
<b>Figura 6.123</b> Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0275 m. del fondo del canal.	194
<b>Figura 6.124</b> Líneas de superficie de vorticidad, en un plano y-z justo antes de que el flujo pase el obstáculo.	194
<b>Figura 6.125</b> Líneas de superficie de vorticidad, en un plano y-z justo a la salida del obstáculo.	194
<b>Figura 6.126</b> Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano x-z, a 0.12 m. y 0.18 m. en la dirección y.	194
<b>Figura 6.127</b> Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano x-z, a 0.125 m. y 0.175 m. en la dirección y.	194
<b>Figura 6.128</b> Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano x-z, a 0.13 m. y 0.17 m. en la dirección y.	194
<b>Figura 6.129</b> Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano x-z, a 0.135 m. y 0.165 m. en la dirección y.	195
<b>Figura 6.130</b> Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano x-z, a 0.14 m. y 0.16 m. en la dirección y.	195
<b>Figura 6.131</b> Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano x-z, a 0.145 m. y 0.155m. en la dirección y.	195
<b>Figura 6.132</b> Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano x-z, a 0.15 m. en la dirección y.	195
<b>Figura 6.133</b> Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, en el fondo del canal.	196
<b>Figura 6.134</b> Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.005 m del fondo del canal.	196
<b>Figura 6.135</b> Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.0075 m del fondo del canal.	196
<b>Figura 6.136</b> Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.01 m del fondo del canal.	196

<b>Figura 6.137</b>	Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.015 m del fondo del canal.	196
<b>Figura 6.138</b>	Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.0175 m del fondo del canal.	196
<b>Figura 6.139</b>	Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.02 m del fondo del canal.	197
<b>Figura 6.140</b>	Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.0225 m del fondo del canal.	197
<b>Figura 6.141</b>	Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.0375 m del fondo del canal.	197
<b>Figura 6.142</b>	Corte transversal de las líneas de superficie de la velocidad, a la entrada del Flujo hacia el obstáculo.	197
<b>Figura 6.143</b>	Corte transversal de las líneas de superficie de la velocidad, a la mitad del obstáculo.	197
<b>Figura 6.144</b>	Corte transversal de las líneas de superficie de la velocidad, a la salida del obstáculo.	197
<b>Figura 6.145</b>	Corte longitudinal de las líneas de superficie de la velocidad, al centro del dominio en la dirección y.	198
<b>Figura 6.146</b>	Corte longitudinal de las líneas de superficie de la velocidad, a los lados del obstáculo en la dirección y.	198
<b>Figura 6.147</b>	Perfil de velocidades a lo largo del canal obtenido por Werner y Wengle (1992), en un estudio de canales abiertos en tres dimensiones.	199
<b>Figura 6.148</b>	Perfil de velocidades a lo largo del canal, en el presente estudio en tres dimensiones.	199
<b>Figura 6.149</b>	Campo de velocidades a lo largo de un canal obtenido por Mason y Morton, (1986).	200
<b>Figura 6.150</b>	Campo de velocidades en el plano x-z a lo largo del canal, obtenido en este estudio.	200
<b>Figura 6.151</b>	Corte x-y del campo de velocidades a lo largo del canal, obtenido en este estudio.	200
<b>Figura 6.152</b>	Corte x-y del campo de velocidades a lo largo de un canal, obtenido en el estudio de Mason y Morton, (1986).	200

## **CAPÍTULO 7**

<b>Figura 7.1</b>	Vórtice de herradura obtenido con la ecuación de transporte escalar acoplada a las ecuaciones hidrodinámicas.	203
<b>Figura 7.2</b>	Vórtice de tubo y sus diferentes cortes obtenido con la ecuación de transporte escalar acoplada a las ecuaciones hidrodinámicas.	204
<b>Figura 7.3</b>	Vórtice de fondo y vórtices opuestos obtenidos con la ecuación de transporte escalar acoplada a las ecuaciones hidrodinámicas.	204



## NOTACIÓN

## LETRAS LATINAS

$C_A$	Parámetro del esquema de convección
$C_\alpha$	Concentración de especies, mg/m <sup>3</sup> .
$\bar{C}_\alpha$	Concentración de especies media, mg/m <sup>3</sup> .
$c_\alpha$	Fluctuación turbulenta de la concentración de especies, mg/m <sup>3</sup> .
$g_i$	Vector de aceleración de la gravedad, m/s <sup>2</sup> .
$h$	Profundidad del tirante de agua, m.
$H$	Altura del canal, m.
$K_c$	Coefficiente de Difusividad de especies turbulenta equivalente, adimensional.
$K_{c1}, K_{c2}, K_{c3}$	Coefficientes de 'difusividad' de especies turbulenta (modelo de orden cero).
$P$	Presión hidrostática, Kg/m <sup>2</sup> .
$p$	Fluctuación turbulenta de la presión, Kg/m <sup>2</sup> .
$Pr$	Número de Prandtl
$Pr_T$	Número de Prandtl turbulento
$Re$	Número de Reynolds
$Ri$	Número de Richardson
$Sc$	Número de Schmidt
$Sc_T$	Número de Schmidt turbulento
$t$	Tiempo, s.
$u_i c_\alpha$	Flujo turbulento de especies, mg/m <sup>2</sup> s.
$u_i u_j$	Esfuerzos de Reynolds, m/s-m/s.
$u_j \omega_i$	Interacción de fluctuaciones de velocidad-vorticidad, m/s
$\bar{V}$	Vector de velocidad en el método de compresibilidad artificial, m/s.
$U_j$	Vector de velocidad instantánea, m/s.
$U_j$	Velocidad media, m/s.
$u_j$	Fluctuación turbulenta de la velocidad, m/s.
$U$	Velocidad horizontal, m/s.
$V$	Velocidad transversal, m/s.
$W$	Velocidad vertical, m/s.
$U$	Velocidad media horizontal, m/s.

$\bar{V}$	Velocidad media transversal, m/s.
$\bar{W}$	Velocidad media vertical, m/s.
$x_i$	Coordenadas cartesianas, m.

## LETRAS GRIEGAS

$\alpha$	Especie de contaminante
$\alpha_A$	Parámetro de decentramiento en el esquema de convección
$\beta$	Coefficiente de expansión volumétrica
$\beta_c$	Parámetro del método de compresibilidad artificial
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\varepsilon_{ij}$	Tensor unitario alternante
$\varepsilon$	Disipación de la energía cinética turbulenta, (m/s) <sup>2</sup> .
$\Delta t$	Incremento de tiempo, s.
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Incrementos espaciales, m.
$\Gamma_{ij}$	Tensor de esfuerzos
$\varphi$	Escalar (temperatura, concentración o cantidades turbulentas)
$\kappa$	Energía cinética de la turbulencia, (m/s) <sup>2</sup> .
$\mu$	Viscosidad dinámica, kg.s/m <sup>2</sup> .
$\nu$	Viscosidad cinemática, m <sup>2</sup> /s.
$\nu_\tau$	Viscosidad turbulenta equivalente, adimensional.
$\nu_{\tau 1}, \nu_{\tau 2}, \nu_{\tau 3}$	Coefficientes de viscosidad turbulenta equivalente (modelo de orden cero)
$\rho_N$	Densidad kg.s <sup>2</sup> /m <sup>4</sup> .
$\bar{\omega}$	Vector de vorticidad instantánea, rad/s.
$\Omega_i$	Vorticidad media, rad/s.
$\omega_i$	Fluctuación turbulenta de vorticidad, rad/s.

**SUBÍNDICES**

0	Estado de referencia
1,2,3	Dirección espacial
$i, j, k, l, m, n$	Indices espaciales
$\alpha$	Especie contaminante
$\varphi$	Relacionado a un escalar
$c$	Eje de simetría

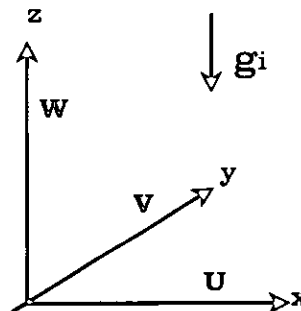
**SUPERÍNDICES**

$n$	Índice temporal
-----	-----------------

**CONVENCIONES**

$\partial$	Operador diferencial
$\partial t$	
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_j}$	Operador nabla
$O( )$	Orden de magnitud
$\varphi$	Variable física instantánea
$\bar{\varphi}$	Variable física media
$i, j, k^n$	Variable en el punto $i, j, k$ en un tiempo $n$

**EJES**



---

# CAPÍTULO UNO

---

## CONCEPTOS GENERALES

Los fluidos, como genéricamente se llama a los líquidos y gases, nos envuelven formando parte esencial de nuestro medio ambiente y la experiencia humana con ellos se remonta más allá de los tiempos históricos. El manejo de los fluidos ha estado ligado íntimamente al desarrollo de las sociedades. No es de sorprender, entonces, que desde los inicios de la civilización la imagen del Universo incluyera a los fluidos como elementos primarios de su constitución: aire, agua, fuego y tierra son la versión clásica y medieval de gas, líquido, plasma y sólido o sucintamente, fluidos y sólidos (Peralta, 1994).

Es indudable el interés que el estudio de la turbulencia tiene dentro de la mecánica de fluidos, baste recordar que la mayor parte de los escurrimientos que se presentan en la naturaleza y en las aplicaciones de la ingeniería se encuentran en régimen turbulento.

El movimiento turbulento contribuye significativamente al transporte de momento, calor y masa en la mayoría de los flujos de interés práctico y por ello tiene una influencia determinante sobre las distribuciones de velocidad, temperatura y concentración de especies sobre el campo de flujo. La tarea fundamental del trabajo ingenieril dentro del campo de la mecánica de fluidos es el determinar esas distribuciones para un problema específico, ya que si el problema en cuestión se trata de resolver con un método exacto, no se pueden hacer suposiciones respecto a los procesos de transporte turbulento. Básicamente esta es la razón de la modelación de la turbulencia: debido a que los procesos de transporte turbulento no pueden ser calculados con métodos exactos, y por ende éstos deben ser aproximados por modelos de turbulencia los cuales, con ayuda de información empírica, permiten cuantificar y relacionar dichos procesos al campo de flujo principal.

La turbulencia en canales abiertos consiste en movimientos con una amplia gama de escalas que se extienden desde milímetros hasta abarcar la profundidad del flujo. Los movimientos en todas las escalas son gobernados por las ecuaciones dependientes del tiempo de Navier - Stokes y continuidad; además existen métodos numéricos disponibles para resolver algunas aplicaciones de estas ecuaciones, pero la capacidad y velocidad de las computadoras no es suficiente todavía para

permitir la solución de algún flujo de relevancia práctica. Esto se debe a que el movimiento turbulento contiene elementos que son muchos más pequeños que la extensión del dominio del flujo, típicamente del orden de  $10^{-3}$  veces más pequeño. Para calcular el movimiento de dichos elementos en un procedimiento numérico, el tamaño de la malla numérica deberá ser aún más fina; por consiguiente se necesitan al menos  $10^9$  puntos-malla para cubrir el dominio de cálculo en tres dimensiones.

A pesar de que en los últimos años se han producido grandes avances en tecnología computacional, tales simulaciones, que se conocen con el nombre de simulaciones directas (DNS, por sus siglas en inglés), que resuelven los movimientos en muchas escalas, son posibles solamente para situaciones y a bajos números de Reynolds, en las cuales el espectro de escalas no es tan amplio. Sin embargo, a altos números de Reynolds, situación común en la práctica, el tamaño de los vórtices más pequeños de la turbulencia es de sólo  $10^{-4}$  a  $10^{-3}$  de la profundidad del flujo. Con la disponibilidad actual de las supercomputadoras, se han llevado a cabo simulaciones directas en canales cerrados, para un número de Reynolds de 3300; éstas requirieron 4 millones de puntos-malla y 250 horas de tiempo de supercomputadora (Kim *et al.*, 1987), ¡Demasiado carol. Los resultados que se obtuvieron son de importancia significativa debido a que revelaron el comportamiento estructural de la turbulencia que ya se había observado experimentalmente.

Debido a que las simulaciones directas arrojaron resultados aceptables, propiciaron el desarrollo de los métodos de simulación de grandes remolinos (LES, por sus siglas en inglés), los cuales simulan en forma directa el movimiento turbulento de las escalas grandes de la turbulencia, mismo que puede ser resuelto por una malla numérica dada, mientras el movimiento de las escalas finas se aproxima por un modelo de escalas de sub-malla. Las estructuras de las escalas grandes de la turbulencia se pueden calcular en forma más o menos sencilla, pero dichos cálculos necesitan ser dependientes del tiempo y tridimensionales, y de ahí que requieran tiempos largos de cálculo.

En la actualidad, ambas simulaciones ya sean directas (DNS) o de grandes remolinos (LES) son cada vez más utilizadas en cálculos ingenieriles y su aplicación en éstos es cada vez más frecuente; ya que ambas técnicas también proporcionan información útil en la investigación de estructuras coherentes de escalas grandes.

Resumiendo, aunque ya se conocen las ecuaciones que describen al flujo, debido a las dificultades de cálculo, límites en equipo de cómputo, así como en la velocidad de proceso disponible, actualmente no es posible resolver dichas ecuaciones en problemas reales, por lo que generalmente se recurre a dos caminos: el experimental y el heurístico. El primero se basa en la hipótesis de que el flujo en la naturaleza es reproducible y escalable. El segundo camino es el de modificar las ecuaciones fundamentales, para poder resolverlas. El enfoque más empleado introduce dos hipótesis básicas, la primera es que las variables que definen un flujo turbulento siguen un comportamiento

tal, que es posible separar mediante una cierta técnica de promedios o filtrado, el comportamiento macroscópico o medio de las variables y sus fluctuaciones turbulentas. Al introducir dichas hipótesis en las ecuaciones fundamentales, éstas quedan expresadas en función de variables medias o macroscópicas, pero aparecen las llamadas correlaciones turbulentas (términos que incluyen productos del promedio de las fluctuaciones). Por ello se introduce la segunda hipótesis básica, que afirma que existe una manera de relacionar las correlaciones turbulentas con las variables medias.

En este sentido, son importantes los conceptos de viscosidad y difusividad de remolino, ya que a partir de estos conceptos se presenta lo que se conoce como modelos de turbulencia, que son formulaciones o metodologías (presentadas en forma de ecuaciones) para obtener la viscosidad o difusividad de remolino, para así completar el sistema de las ecuaciones fundamentales expresadas en función de variables medias. Ya sea que para resolver un problema se escoja el camino experimental, el numérico o una combinación de ambos, un numérico-experimental, se debe verificar con mediciones, tanto en la realidad (prototipo) como en situaciones controladas en laboratorio o en modelos a escala reducida. Las mediciones reportadas en la literatura especializada, permiten concluir que tanto el camino experimental como el heurístico funcionan y que en muchos casos ambos son necesarios.

Los anteriores no son los únicos enfoques. Hay otro que supone que al menos una parte de la turbulencia es un fenómeno determinista y en ese sentido busca leyes que rigen su comportamiento. En esta línea pueden mencionarse dos trabajos: el del Dr. Enzo Levi que planteó la existencia de una ley general de Strouhal que permite predecir frecuencias de vórtices en algunos flujos, y así como la teoría del caos. Esta última permite encontrar un comportamiento (es decir, una ley determinista) donde aparentemente sólo existe ruido. Estos métodos tienen un largo camino por recorrer y solamente el futuro dirá hasta donde es posible llegar con ellos, en tanto la perspectiva de los métodos heurístico y experimental es amplia, ya que la evidencia física así lo indica (Berezowsky, 1994).

Debido a las dificultades ya mencionadas y a que las mediciones de laboratorio o en campo, son costosas y difíciles de hacer, en este estudio se optó por el camino heurístico. De esta forma, se obtuvieron ecuaciones promediadas para la velocidad y vorticidad, las cuales, auxiliándose con un modelo de turbulencia de primer orden  $\kappa$ - $\epsilon$ , permitieron el estudio de las estructuras turbulentas en el fondo de un canal.

## 1.1 DEFORMACIÓN Y ROTACIÓN DE UN FLUJO

El flujo turbulento en canales abiertos tiene dos aspectos: fascinación y gran importancia práctica. Los chorros forzados y barridos, revelados recientemente por modernas técnicas computacionales de medición, los borbotones emergiendo de la superficie de los ríos y las células de corrientes secundarias en los mismos, son ejemplos de fenómenos asociados con la turbulencia (Nezu

y Nakagawa, 1993). Por el lado práctico, los procesos de transporte turbulento en canales influyen fuertemente la distribución de velocidad, los esfuerzos cortantes del fondo y la pérdida de energía, el transporte de sedimentos, la propagación de contaminantes, el arrastre de aire, etc. De la descripción de los procesos anteriormente referidos, se puede inferir que el entendimiento y predicción del fenómeno de la turbulencia en canales abiertos está ampliamente investigado, y sin embargo no está completamente entendido y mucho menos concluido. Ya que entre más se indaga, más se conoce y también más sorprende lo que falta por aprender.

La determinación de cantidades de flujo tales como: velocidad, presión o temperatura puede ser el producto final deseado de un procedimiento; estas cantidades pueden ser encontradas a partir de un conjunto de mediciones separadas o por procedimientos numéricos en puntos particulares dentro de un campo de flujo; pero también se pueden usar esos valores para encontrar otras cantidades igualmente útiles como son: la aceleración, tasas de difusión, tasas de deformación o tasas de rotación del flujo.

Se puede tratar el movimiento total del flujo, en analogía al tensor de esfuerzos de segundo orden, referida en la literatura especializada como  $\tau_{ij}$ . Los esfuerzos  $\tau_{ij}$  causan deformaciones en los elementos del fluido. Y dado que esas deformaciones son determinadas por variaciones espaciales  $\partial U_i / \partial x_j$  de las velocidades  $U_i$ , es posible relacionar los esfuerzos  $\tau_{ij}$  a esas variaciones espaciales.

Las variaciones espaciales  $\partial U_i / \partial x_j$  forman un tensor de segundo orden, el cual puede ser dividido en una parte simétrica y una parte antisimétrica:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1 a)$$

que a su vez puede reescribirse como:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = D_{ij} + R_{ij} \quad (1.1 b)$$

La parte simétrica  $D_{ij}$  determina la deformación del fluido y es llamado tensor de tasas de deformación. La parte antisimétrica  $R_{ij}$  determina la rotación de una partícula; ésta define la vorticidad del movimiento:

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k$$

$\omega_k$  se conoce como el vector del tensor antisimétrico, está identificado plenamente con la vorticidad.

Estas dos componentes permiten estudiar la formación de diversas estructuras turbulentas que se producen en el fondo de un canal, ya sea por un efecto de fricción en el fondo o por un obstáculo que altera el curso del flujo en el mismo.

## 1.2 RESEÑA HISTÓRICA DE LA TURBULENCIA

Muchas obras hidráulicas enormes y maravillosas como presas, diques, redes de irrigación y sistemas de suministro de agua, se habían ya construido antes del Renacimiento, la edad que abrió con Leonardo Da Vinci (1452-1519) y terminó con Galileo (1564-1642) y Castelli (1577-1644). Muchos sistemas de suministro de agua fueron construidos en la vieja Roma y en el sureste de Francia, ejemplo de esto es el puente *Pont du Gard*, famoso monumento aún en la actualidad. En China el control de avenidas del río Amarillo fue el proyecto civil más importante, en su tiempo.

Sin embargo, esos trabajos hidráulicos en países orientales y occidentales antes del Renacimiento fueron diseñados y construidos sobre bases hidráulicas puramente empíricas. Según Fasso (1987), el nacimiento de la hidráulica tuvo lugar en la época del Renacimiento, ejemplo de ello es la hidrostática que quedó bien establecida en ese período. Al contrario de la hidrodinámica, descrita alguna vez por Leonardo Da Vinci, que sólo fue tratada cualitativamente. Leonardo justificó la necesidad de observaciones y experimentos, no sólo en la ciencia sino también en las artes del dibujo, la pintura y la escultura. Es de particular significado el que Leonardo fuese el primero en describir los vórtices, es decir, la turbulencia en canales. En la figura 1.1, en lo que se cree un autorretrato, se muestra un ejemplo típico de los dibujos de Leonardo; en la nota de su dibujo escribe:



**Figura 1.1 Leonardo Da Vinci (autorretrato) y su concepción de los vórtices**

*"Observando los movimientos de agua superficial, éstos son similares a rizados de cabello. El flujo de agua consiste de dos tipos de vórtices; un movimiento vorticoso es promovido por las líneas de corriente del flujo principal, mientras el otro es generado intermitentemente por flujo separado contrario a las líneas de corriente principal"*

Sorprendentemente, la sentencia y dibujo de Leonardo se pueden ver casi como correctos, aún sobre las bases del conocimiento moderno de la turbulencia; el dibujo indica claramente la existencia



de vórtices de herradura alrededor de un obstáculo en un canal abierto, es justamente este tipo de vórtice una característica de flujos alrededor de obstáculos y el que nos ocupará posteriormente. En este sentido Leonardo Da Vinci puede ser el primer investigador en el mundo, en turbulencia de canales abiertos. Su investigación no se basó en ecuaciones cuantitativas de movimiento o mediciones de velocidad, sino más bien en cuidadosas observaciones y agudas deducciones.

La investigación de la turbulencia después de Leonardo en los años 1500, no progresó mucho hasta la distinción entre flujo laminar y turbulento, la cual fue llevada a cabo en forma experimental por Osborne Reynolds (1883) unos cientos de años después, que al igual que Lord Rayleigh hizo los primeros estudios serios sobre inestabilidad de flujos. Las famosas investigaciones de Reynolds en conductos cerrados establecieron de manera muy clara, que existen fundamentalmente dos tipos diferentes de flujo: el laminar y el turbulento (el cual llamó "sinuoso"). Demostró que mediante un parámetro adimensional se puede determinar el régimen del flujo. Este parámetro llegó a conocerse años más tarde como número de Reynolds ( $Re$ ). Asimismo encontró que los flujos turbulentos en ductos sólo podrían ocurrir para  $Re$  mayores a 2300 aproximadamente, valor conocido como número crítico de Reynolds. Otro de sus descubrimientos más importantes fue que la turbulencia tiende a agruparse intermitentemente, como destellos, una propiedad que según se descubrió más tarde, es bastante común en la turbulencia de pared. Reynolds también hizo una contribución importante a la teoría de la turbulencia con la deducción de las ecuaciones medias de movimiento para flujo turbulento, la cual en particular, conduciría años más tarde a la introducción de los llamados esfuerzos ficticios o de Reynolds para representar el flujo de momentum medio debido a la turbulencia. Casi al mismo tiempo en que Reynolds llevaba a cabo sus experimentos con flujo en tuberías, Lord Rayleigh comenzó sus investigaciones teóricas de estabilidad de flujos paralelos en fluidos no viscosos. Su aproximación básica ha sido tomada en cuenta en la mayoría de las últimas investigaciones, para determinar si una pequeña perturbación en forma de un tren infinito de ondas, de amplitud uniforme, crece o decae a través del tiempo. La primera publicación de este tema data de 1878. Un resultado muy importante fue su prueba (Rayleigh, 1880) de que una condición necesaria para que un flujo paralelo sea inestable, es que su perfil de velocidad tenga un punto de inflexión.

La idea de que un flujo turbulento puede ser tratado como un flujo laminar con diferentes propiedades del fluido, que es la idea básica que subyace en la introducción de los esfuerzos turbulentos de Reynolds (1894), fue puesta en marcha por Boussinesq (1877), quien supuso que el esfuerzo turbulento cortante es proporcional al gradiente de velocidad, al igual que los esfuerzos cortantes viscosos en un flujo laminar, pero con un factor de proporcionalidad diferente (generalmente mucho más alto) que en el caso correspondiente a flujo laminar. El uso de una viscosidad turbulenta ("viscosidad de remolino") es común en teorías aproximadas para el flujo medio. Se ha encontrado que un valor constante de la viscosidad turbulenta ha conducido a una

representación bastante buena de la distribución de la velocidad media en flujos turbulentos libres (estelas, chorros, etc.), mientras que para flujos de pared (flujo en tuberías, flujo en canales, capa límite) es necesario emplear hipótesis más refinadas con respecto a cómo varía la distribución de la viscosidad turbulenta con la distancia a partir de la pared. No fue sino hasta después de la publicación de los trabajos de Prandtl y Von Kármán en el periodo de 1920-1930, que se desarrollaron métodos de cálculo con los cuales se obtenían buenas aproximaciones, basados en parámetros empíricos con valores muy pequeños para el campo medio de velocidad, y que mostraban una concordancia razonable con los datos experimentales.

En el tiempo intermedio entre Da Vinci y Reynolds, Johann Bernoulli (1667-1748), su hijo Daniel Bernoulli (1700-1782) y Leonhard Euler (1707-1783), contribuyeron substancialmente al desarrollo de la teoría del flujo potencial.

El vacío entre la mecánica de fluidos ideal y real aumentó a finales del siglo XIX. La razón para tal vacío fueron las fuerzas de fricción, las cuales tuvieron que ser evaluadas exactamente en el diseño de varias estructuras hidráulicas e inclusive de aeroplanos, pero que no podían ser calculadas sobre las bases de la teoría de flujo potencial. El siguiente paso más importante fue dado por Prandtl en 1904; con la presentación de la teoría de la capa límite. Por esta contribución, Prandtl (1875-1953) generalmente se considera como el fundador de la mecánica de fluidos moderna. Prandtl y sus colegas en la Universidad de Göttingen contribuyeron a la investigación de la turbulencia en el periodo anterior a la Primera Guerra Mundial, sin embargo, el nuevo conocimiento de la capa límite y de la turbulencia rara vez se aplicó a la ingeniería hidráulica en ese tiempo. Entre las razones para ello pueden estar las siguientes: que el diseño aerodinámico de aeroplanos es más estricto y exigente con el diseñador, que la hidráulica usada para el diseño de canales fluviales; y que las mediciones en flujos tales como el aire eran hasta cierto punto mucho más fáciles de hacer que aquéllas sobre agua.

La teoría de la capa límite ha contribuido mucho al desarrollo de la aerodinámica, debido a que el conocimiento de ésta es crucial en el diseño de aviones o alas de avión. El advenimiento del anemómetro de hilo caliente permitió medir la turbulencia en el aire hacia los años 30. De particular éxito fue la introducción del concepto de longitud de mezcla llevada a cabo por Prandtl (1925), quien conjuntó una expresión aproximada para la transferencia de momentum medio, por mezcla turbulenta, en términos de la longitud de mezcla. Suponiendo que la longitud de mezcla es proporcional a la distancia desde la pared, se puede determinar la distribución de velocidad cerca de la pared con la ayuda de una constante empírica. Después de Prandtl, hipótesis diferentes y más complicadas respecto a la transferencia de momentum por fluctuaciones turbulentas, se pusieron en marcha, pero todavía no hay algún método válido para el cálculo práctico del campo medio turbulento basado directamente en las ecuaciones de Navier-Stokes sin el uso de datos empíricos o semiempíricos. La dificultad fundamental es que el campo fluctuante depende de manera no lineal de

la distribución de velocidad media, la cual es gobernada por las ecuaciones de Reynolds que contienen la transferencia de momentum medio por las velocidades fluctuantes. La última aproximación de la turbulencia tratando flujos homogéneos e isotrópicos, se construyó sobre ideas de la teoría cinética de gases. En dichos campos turbulentos, las fluctuaciones de velocidad y presión son estadísticamente independientes de la posición y muestran una dependencia no direccional. Esto simplifica significativamente su descripción estadística. Como resultado de esto, Taylor (1935) propuso una teoría estadística de la turbulencia isotrópica, la cual es una "turbulencia ideal" pero de importancia fundamental en la investigación sobre turbulencia, e introdujo el concepto de correlaciones de velocidad. Estas pueden ser tratadas como generalizaciones de los esfuerzos de Reynolds. Taylor en 1938, también introdujo la representación espectral de la turbulencia. La teoría estadística de la turbulencia fue el tema de desarrollos activos en el periodo de 1940 a 1950, primeramente a través de trabajos en grupo en la antigua URSS (Kolmogorov 1941, Millionschikov 1939, 1941; Obukhov 1941) y el grupo de Taylor en Cambridge (Heisenberg 1948, Batchelor 1953). Aunque esta área de investigación de la turbulencia ha permanecido muy activa hasta nuestros días, una teoría deducida no completamente para la turbulencia isotrópica aún sigue adelante. De particular significado fue la teoría estadística de la turbulencia localmente isotrópica propuesta por Kolmogorov (1941). Esta teoría conduce a la ya bien conocida ley de potencia  $-5/3$  para el espectro de turbulencia. Consecuentemente, la teoría de la turbulencia localmente isotrópica se puede aplicar a flujos turbulentos reales como por ejemplo, los de capa límite, tuberías, chorros y aún en flujos geofísicos, tales como turbulencia atmosférica y turbulencia oceánica, y por supuesto, también a la turbulencia en canales abiertos.

Inmediatamente después de la Segunda Guerra Mundial, la turbulencia libre, tal como la turbulencia de malla en chorros y estelas, se investigó en forma intensa teórica y experimentalmente, por un grupo de la Universidad de Cambridge encabezado por Taylor, Batchelor y Townsend. En los años 50 se llevaron a cabo investigaciones experimentales sobre capa límite en ductos y tuberías por Klebanov (1954) y Laufer (1951, 1954), sus datos aún son citados frecuentemente.

Los años 60 pueden ser llamados la "edad de oro" de las mediciones puntuales de la turbulencia con base en hilos calientes y transductores de presión, como señaló Nezu (1977a) y Sadeh (1988). El anemómetro de hilo caliente original, en el cual se aplicó el método de la corriente constante, fue reemplazado en los años 60 por el actual anemómetro de hilo caliente en el cual se utiliza el método de la temperatura constante junto con otros desarrollos de la electrónica moderna. La confianza excesiva en esos años condujo a la expectativa de que todas las estructuras turbulentas serían explicadas teórica y experimentalmente por medio de herramientas estadísticas convencionales tales como correlaciones espacio-temporales y el análisis espectral. La turbulencia fue entonces considerada completamente aleatoria y caótica.

Una característica particular de la turbulencia que ha recibido gran atención durante las dos últimas décadas es la fuerte intermitencia observada cerca de la región de pared de capas límites turbulentas y flujo en canales. En experimentos de visualización de una capa límite turbulenta a baja velocidad Kline *et al.* (1967), observaron que la turbulencia manifestó por sí misma, principalmente en periodos cortos de fuerte actividad, "burst", separados por largos periodos de flujo casi laminar no permanente; el término "burst" puede traducirse como un rompimiento en capas límite. Tales observaciones visuales pueden considerarse como una forma de muestreo condicional, en la cual el experimentador observa y registra cuando algo "interesante" sucede. Se han aplicado varios criterios en numerosos métodos de muestreo condicional, usados en mediciones cuantitativas de eventos intermitentes en flujos cortantes y se han logrado considerables progresos en el mapeo de la estructura intermitente de la turbulencia. Sin embargo, se deben hacer muchas interpretaciones y establecer relaciones causa-efecto de las complicadas secuencias observadas antes de que un modelo teórico válido pueda ser formulado.

Brown y Rosco (1974) y Vinant y Browand (1974) descubrieron el fenómeno de vórtices pares en capas de mezclado turbulento. Esa época de descubrimientos transcurrió hasta tomar en cuenta la teoría establecida de aleatoriedad y caos. Algo un tanto irónico fue el hecho de que esos descubrimientos esenciales en la investigación de la turbulencia fueron descubiertos no por las mediciones exactas usando anemómetros de hilo caliente, sino por observaciones cualitativas usando técnicas de visualización de flujo. Así se regresa al punto de inicio, al nacimiento de la investigación de la turbulencia debido a Leonardo da Vinci en los años 1500, y al fundador moderno de la misma, Osborne Reynolds. Esos dos pioneros investigaron los fenómenos turbulentos visualizando flujos.

Un desarrollo significativo comenzó en la década de los 70, y fue el progreso de la mecánica de fluidos computacional con la cual se puede calcular flujos turbulentos por medio de computadoras muy rápidas. También en esos años se desarrollaron modelos de turbulencia de ecuaciones múltiples: los modelos de esfuerzos totales, modelos  $\kappa$ - $\epsilon$  y modelos algebraicos de esfuerzos; basados en la teoría estadística de la turbulencia. Sin embargo, en principio, esos modelos no pueden simular estructuras coherentes tales como el fenómeno bursting. Utilizando otra aproximación, Moin y Kim (1982), simularon con éxito los movimientos bursting cerca de la pared, usando técnicas LES; no obstante, sus resultados no coincidían cuantitativamente con los datos experimentales. Esta discrepancia motivó a Kim *et al.* (1987) a resolver las ecuaciones de N-S numéricamente sin algún modelo de turbulencia, mediante una técnica DNS. Los resultados de estas simulaciones dieron una explicación del fenómeno bursting en ambas formas: cualitativa y cuantitativamente.

En cuanto a la investigación de la turbulencia en canales abiertos ésta no existió sino hasta años más tarde, mucho después que aquella en capas límite, ductos, chorros y estelas en aire. Fue hasta en 1957 que la turbulencia en canales abiertos se midió, utilizando un tubo de carga total con



un transductor de presión por Ippen y Raichlen (1957). Sin embargo, el método del tubo de carga total no podía medir fluctuaciones de velocidad de manera exacta, ya que éstas no fueron separadas correctamente de las fluctuaciones de presión en ese método. A finales de los años 60, los anemómetros de película caliente fueron los primeros en realizar mediciones de fluctuaciones de velocidad en canales abiertos. Después, a principios de los años 80, con el advenimiento del anemómetro láser - Doppler, se han podido obtener mediciones más exactas de las estructuras turbulentas en canales abiertos bi y tridimensionales. Resultado de ello, es que en la actualidad están disponibles en la literatura bastantes datos de turbulencia en canales; no obstante, para flujos tridimensionales en canales abiertos, aún impera un gran vacío.

### **1.3 EL FLUJO ALREDEDOR DE UN OBSTÁCULO, SEGÚN LA BIBLIOGRAFÍA.**

Generalmente en los estudios de estructuras turbulentas éstas se deducen considerando geometrías bidimensionales, debido a que éstas son más fáciles de manejar tanto experimental como numéricamente, sin embargo, la analogía para flujos en tres dimensiones no es directa, ya que se ignoran muchas propiedades del flujo turbulento en los estudios bidimensionales.

Existen pocos trabajos publicados sobre flujos alrededor de obstáculos tridimensionales. De la bibliografía consultada, sea experimental o numérica, el obstáculo tridimensional se estudia generalmente como una perturbación a una capa límite, y pocos estudios se enfocan a la descripción de los patrones de flujo alrededor de éste. Existe un gran vacío de datos experimentales en este campo, por lo que los resultados obtenidos, en su mayoría, sólo se pueden comparar de manera cualitativa.

A este respecto, cabe mencionar el trabajo de Frank (1988) en el cual se presentan visualizaciones experimentales obtenidas de la simulación de cierto tipo de fluido (mezcla de petróleo y hollín) alrededor de obstáculos a altos números de Reynolds, el de Larousse *et al* (1992) que trata también de flujo sobre obstáculos tridimensionales pero en canales cerrados, el de Werner y Wengle (1992), el cual versa sobre flujo medio alrededor de un obstáculo cúbico en el fondo de un canal plano y el de Franke y Rodi (1992), que es un estudio bidimensional de flujo sobre un cilindro con aristas afiladas. Solamente con este último fue posible hacer comparaciones cuantitativas ya que las condiciones eran muy semejantes, aunque se trate de un estudio en 2-D; con los otros trabajos únicamente se comparó cualitativamente, ya sea porque no todos presentan los patrones de flujo obtenidos o porque en otros, las condiciones del experimento son muy diferentes al caso en particular que nos ocupa. Sin embargo, en el capítulo 5 (que versa sobre la deformación del flujo) y en el capítulo 6 (vorticidad) se incluye una descripción más detallada de los trabajos mencionados anteriormente y otros más que se consultaron, con el fin de poder analizar y manifestar la contribución obtenida en este estudio.

## 1.4 CONTRIBUCIÓN DEL PRESENTE ESTUDIO

El objetivo de este trabajo está encaminado a contribuir a una comprensión más amplia de las estructuras turbulentas teniendo como medio fluido al agua, las cuales juegan un papel esencial en la transferencia de momentum, energía, y masa; cuyas distribuciones muestran variaciones en las tres direcciones, y que por tanto tienen una influencia directa en los procesos que sufre un flujo. Las estructuras de flujo en este estudio son producidas por un obstáculo cúbico tridimensional localizado en el fondo de un canal sobre el cual incide el flujo. Para tal efecto, se modelan las ecuaciones gobernantes del flujo en canales, utilizando para ello, un modelo estadístico de turbulencia de primer orden en tres dimensiones, esto permite estudiar tanto la deformación total del flujo, como entender los mecanismos que les dan origen. No menos importante es la aplicación de los conceptos ligados a la dinámica de la vorticidad, que fundamentan la utilización de la ecuación de vorticidad, su tratamiento estadístico, así como la justificación teórica de una importante simplificación de ésta, la cual permite que los esfuerzos de Reynolds representen los términos de interacción entre las fluctuaciones de vorticidad-velocidad.

Como ya se señaló, el presente es un estudio numérico, para lo cual se adaptó el programa QUETZAL/3D, escrito originalmente para estudiar flujos turbulentos atmosféricos (Ramírez, 1996), a flujos con superficie libre en canales; a este programa se le incorporaron además de un modelo de turbulencia  $\kappa$ - $\epsilon$ , las ecuaciones para el estudio de la vorticidad, todo en 3D y algunas subrutinas para la visualización del flujo.

## 1.5 ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

Este trabajo consta de 6 capítulos, organizados básicamente en tres partes. La primera corresponde al aspecto teórico, la segunda trata el aspecto numérico y la tercera al de la aplicación. A la vez, la primer parte incluye los capítulos del 1 al 3, en los cuales se tratan aspectos teóricos del flujo incompresible, la segunda parte la constituye el capítulo 4, en el que presenta el tratamiento numérico y computacional de las ecuaciones gobernantes del fenómeno, la tercera y última parte la forman los capítulos 5 y 6, en ésta se hace hincapié en la deformación total del flujo (capítulo 5) y la importancia de la vorticidad en el desarrollo de las estructuras turbulentas en el flujo (capítulo 6). La organización del trabajo en la forma descrita, se debe a que este tema además de ser bastante amplio y complejo, es sujeto de múltiples investigaciones tanto teóricas como experimentales, por lo que se hace necesario un tratamiento más puntual del mismo.

En el capítulo 2 se hace una breve referencia a la naturaleza de la turbulencia y las fuentes de la misma, para dar paso al estudio de estructuras tridimensionales inducidas por la turbulencia, mejor conocido como flujo secundario. Dicho estudio incluye a tales estructuras desarrollándose en un canal abierto con fondo plano, y aunque no son estrictamente iguales a las obtenidas en este estudio,

ya que las condiciones de flujo no son las mismas, si dan idea de la forma o distribución de las variables de interés. En la parte final del capítulo, se incluye una ligera exposición sobre el origen y procesos de formación de las estructuras turbulentas más típicas, en flujos alrededor de obstáculos.

En el capítulo 3 se presenta la derivación de las leyes de la dinámica de fluidos, que se utilizan en la modelación del problema particular del cual trata este trabajo, así como el tratamiento estadístico de las misma, mediante la introducción de los postulados de Reynolds en cada una de las leyes. Asimismo, se incluye la descripción de los modelos de turbulencia de orden cero (modelo de viscosidad y de difusión turbulenta) y de primer orden (modelo  $\kappa$ - $\epsilon$ ) con los cuales se han obtenido buenos resultados en la modelación de flujos con superficie libre. En la última sección se presenta la deducción de la ecuación de vorticidad, el tratamiento estadístico de ésta y su justificación teórica.

En el capítulo 4 se describe el método de solución numérica del sistema de las ecuaciones básicas desde su discretización espacial y temporal hasta el método de compresibilidad artificial y su convergencia. También se describe el algoritmo del programa QUETZAL/3D y la combinación de los parámetros de control que regulan la solución de los modelos.

El capítulo 5 hace especial referencia a la deformación de una partícula fluida, además de su relación y significado en las ecuaciones medias de velocidad. Este capítulo incluye la descripción del problema a través de las condiciones iniciales y de frontera del mismo, el dominio físico y computacional, y la formación de estructuras tanto del movimiento medio, como del fluctuante, obtenidas utilizando un modelo de orden cero y de primer orden. Se presentan detalles de estudios con los cuales es posible hacer comparaciones cuantitativas y cualitativas de algunas variables.

En el capítulo 6 se presenta el análisis de movimiento para una partícula fluida, haciendo énfasis en la rotación de la misma, para ligarlo conceptualmente a las de estructuras de vorticidad encontradas en este estudio. Se muestran diferentes estructuras turbulentas encontradas en estudios experimentales y las encontradas en este estudio numérico.

Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones de este trabajo, así como las perspectivas de continuación del estudio de estructuras turbulentas en el fondo de un canal.



---

# CAPÍTULO DOS

---

## LAS ESTRUCTURAS TURBULENTAS EN EL FONDO DE UN CANAL

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Si se considera un fluido viscoso, de tal manera que su campo de movimiento corresponda a fronteras rígidas previamente especificadas y sujeto a una fuerza de cuerpo particular, dependiendo de las magnitudes relativas de las fuerzas viscosas e inerciales, se encontrará que el carácter del flujo y las distribuciones de la velocidad y la presión muestran, en detalle, grandes diferencias. Este hecho conduce a dos conceptos fundamentales importantes en la clasificación de flujos, y en el tratamiento analítico de los mismos. Uno es la distinción entre flujo laminar y flujo turbulento, como dos posibles modalidades del movimiento. El otro hace la distinción entre los flujos de cedencia y los flujos de capa límite, como dos extremos de los efectos de la viscosidad.

La existencia de dos formas de movimiento fue observada desde un principio por investigadores experimentales. Hagen en 1839, llamó la atención sobre el hecho de que la forma del flujo en tubo cilíndrico cambia cuando la velocidad excede cierto límite. Observó que para velocidades inferiores a dicho límite, la superficie del chorro era lisa como la de una barra de vidrio sólida; por encima de ese límite, la superficie del chorro oscilaba y el flujo salía a borbotones. Estas fueron las primeras evidencias respecto a los flujos laminar y turbulento, familiares respecto a fluidos en movimiento.

En 1883 Osborne Reynolds demostró las dos modalidades muy claramente e introdujo el parámetro adimensional que ahora lleva su nombre, como un criterio para determinar el régimen bajo el cual ocurre el movimiento de un fluido. Sin embargo, es necesario hacer un análisis más detallado para entender los procesos de formación de las estructuras turbulentas y de vorticidad.

En general, el flujo laminar se presenta cuando las capas adyacentes de un fluido se mueven unas respecto a otras, formando líneas de corriente lisas, no necesariamente rectas, sin mezclarse macroscópicamente. Esta es la forma en que se encuentra el flujo cuando los esfuerzos tangenciales viscosos causados por el intercambio molecular de cantidad de movimiento entre las capas de fluido,

es la influencia predominante al establecerse el campo de flujo.

El flujo turbulento se caracteriza porque las partículas del fluido tienen movimientos irregulares, casi al azar, y siguen trayectorias fluctuantes y erráticas. La mezcla macroscópica que así resulta, es tanto lateral como en la dirección del flujo principal; este fenómeno se presenta cuando las fuerzas viscosas tangenciales son secundarias, respecto a las inerciales, al establecerse el campo del flujo.

Podemos formarnos un criterio para la existencia de movimiento laminar remarcando las consecuencias que tienen las pequeñas aceleraciones y la alta viscosidad del fluido, con base en la expresión inmediata. Primero, los esfuerzos tangenciales tienden a ser muy grandes, aún para pequeños gradientes de velocidad. Segundo, la fuerza inercial por unidad de masa del fluido es de importancia secundaria, en relación con la fuerza viscosa tangencial por unidad de masa de fluido. Se puede caracterizar esta condición, haciendo notar mediante la relación:

$$\frac{\text{fuerza de inercia} / \text{masa}}{\text{fuerza de fricción} / \text{masa}} \propto \text{número de Reynolds (Re)},$$

que se está hablando de números de Reynolds pequeños. Por lo que el movimiento laminar existirá cuando el Re esté por debajo de un cierto valor crítico. Por encima de este valor, el movimiento laminar se hace inestable y puede haber turbulencia.

Consecuentemente, la turbulencia dá por resultado una fuerza tangencial efectiva debida a un intercambio de cantidad de movimiento entre las partículas que fluctúan lateralmente, esta fuerza turbulenta tangencial es evidencia de los efectos de viscosidad.

## 2.2 NATURALEZA DE LA TURBULENCIA

Como ya se señaló anteriormente, cuando el movimiento de un fluido es irregular y complicado se dice que el flujo es turbulento. Esta definición, como tantas otras en la turbulencia, no parece muy precisa: se puede intentar ser pragmático y caracterizar a la turbulencia como el estado no-laminar de un flujo. Sin embargo, ¿Cuándo es un flujo lo suficientemente complicado como para ser llamado turbulento?

Una característica del estado turbulento es la completa irreproducibilidad de los detalles de un flujo; hay un elemento aparentemente caótico inherente a ese estado de movimiento. Por ejemplo, si se lleva a cabo la medición de un determinado experimento en el cual se mida con mucha precisión algún parámetro del flujo, se encontrará que conforme transcurre el tiempo, tal parámetro va cambiando de valor y da lugar a un patrón como el de la figura 2.1. Si se siguen realizando mediciones del experimento, sujeto a las mismas condiciones iniciales, el resultado será muy parecido al patrón encontrado en las mediciones anteriores, pero nunca será igual; a veces medirá un poco

más, otras un poco menos, pero no el mismo valor, es decir el valor fluctúa alrededor de un valor promedio. Siempre es así cuando el valor promedio de alguna cantidad excede de cierto valor crítico.

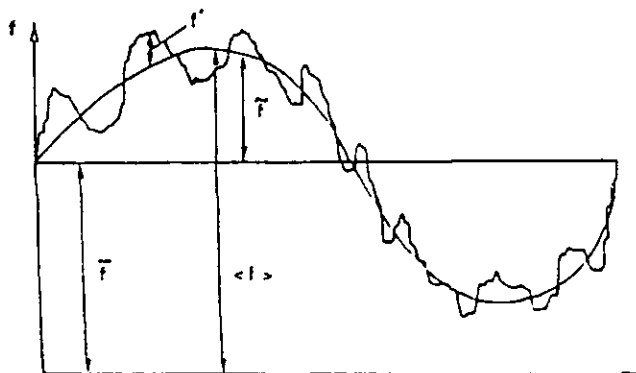


Figura 2.1 Gráfica de alguna cantidad media y sus fluctuaciones.

Para ciertos casos muy simples se ha logrado predecir razonablemente el valor crítico que debe alcanzar algún parámetro dado, (usualmente el número de Reynolds) para que el flujo pase de un movimiento laminar a uno turbulento. Por otra parte, el describir estas fluctuaciones, que se pueden observar y cuantificar, es uno de los aspectos más difíciles de abordar que tiene el problema, ya que se trata de poderlos predecir, no sólo de medirlos. Una vez dados estos antecedentes, se puede tratar de dar una definición más amplia de la turbulencia, como un movimiento perturbado el cual, a altos números de Reynolds usualmente prevaecientes en la naturaleza, tiene un amplio espectro de tamaños de vórtices y un espectro correspondiente de frecuencias de fluctuación; su movimiento es siempre rotacional y que puede ser visualizado como una composición de remolinos o vórtices tridimensionales, aleatorios en el tiempo y en el espacio, cambiando continuamente de tamaño, intensidad y orientación, e interactuando dinámicamente entre ellos.

Los vórtices más grandes interactúan con la velocidad media (porque las escalas de ambos son similares) y están asociados con las fluctuaciones de baja frecuencia, son determinados por las condiciones de frontera del flujo y su tamaño es del mismo orden de magnitud que el dominio del flujo, extrayendo energía cinética del movimiento medio permanecen dentro de las escalas grandes de la turbulencia. Los vórtices más pequeños, asociados con las fluctuaciones de alta frecuencia, son determinados por las fuerzas viscosas. La amplitud del espectro y por tanto, la diferencia entre los vórtices más grandes y más pequeños se incrementa con el número de Reynolds. Es el movimiento turbulento de las escalas grandes el que transporta principalmente momentum y calor, además de contribuir al movimiento turbulento; la velocidad y longitud de escalas introducidas en los modelos de turbulencia son parámetros que caracterizan dicho movimiento.

Los vórtices más pequeños pueden considerarse como elementos vorticiales, que se alargan y comprimen unos a otros, debido a este estiramiento, el cual es una característica esencial del

movimiento turbulento, la energía es transmitida a vórtices más y más pequeños hasta que las fuerzas viscosas se vuelven significativas y disipan la energía. Este proceso es llamado *cascada de energía*. La tasa a la cual la energía del flujo medio es consumida dentro del movimiento turbulento es determinada por las escalas grandes del movimiento; solamente esta cantidad de energía puede ser transmitida a las escalas más pequeñas y finalmente ser disipada. De esta forma, la tasa de energía disipada es determinada también por las escalas grandes del movimiento aunque la disipación es un proceso viscoso y toma lugar dentro de los vórtices más pequeños.

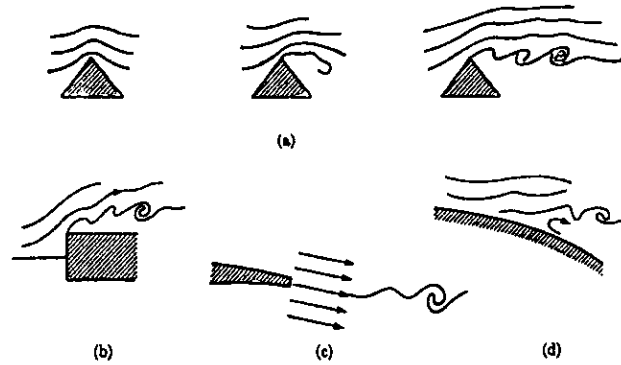
Debido a la interacción con el flujo medio, el movimiento turbulento de escalas grandes depende fuertemente de las condiciones de frontera del problema específico. El flujo medio frecuentemente tiene direcciones preferenciales las cuales son impuestas también sobre las escalas grandes del movimiento medio. Este movimiento puede, por lo tanto ser fuertemente anisotrópico así que ambas, la intensidad de las fluctuaciones y su longitud de escala, son dependientes de la dirección. Durante el proceso de una cascada de energía, ésta es transmitida a los vórtices más pequeños por el estiramiento de los mismos, la sensibilidad a la dirección preferente es disminuida cuando el número de Reynolds es demasiado alto, tal que el movimiento de escalas grandes y el de escalas pequeñas estén lo suficientemente separados en el espectro, la sensibilidad a la dirección preferente es enteramente perdida y el movimiento disipativo de las escalas pequeñas es isotrópico. Este fenómeno, es decir, el movimiento isotrópico de las escalas pequeñas, mientras que el movimiento de las escalas grandes no lo es, es llamado *isotropía local* y es un concepto importante dentro de la modelación de la turbulencia.

### 2.2.1 FUENTES DE TURBULENCIA

Un estado de turbulencia es el resultado de una perturbación en un flujo previamente uniforme, en cuyo caso se forman "intermitencias", las cuales se propagan hasta "contaminar" una región de flujo produciendo movimientos irregulares. Si las condiciones son propicias, la turbulencia persiste como un estado de movimiento.

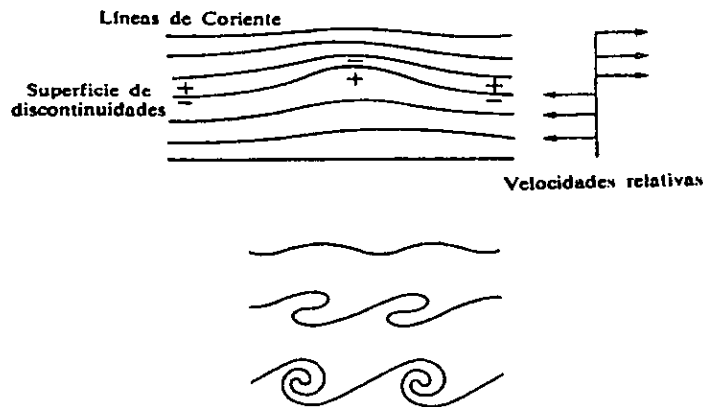
Una fuente de turbulencia generadora de remolinos, se presenta en la superficie de alguna perturbación al flujo, cuando hay discontinuidad en éste último, lo cual ocurre siempre que en dos corrientes de fluido que corren juntas, exista una marcada diferencia de velocidades entre sus capas adyacentes.

Ejemplos de esto son las turbulencias que se presentan en la vecindad de las aristas o bordes angulosos que sobresalen en cuerpos burdos, en los bordes de salida de perfiles aerodinámicos, álabes guía en turbinas y en las zonas de separación de capa límite. Estos ejemplos se muestran en la figura 2.2.



**Figura 2.2 Formación de vórtices en superficies con discontinuidad en la velocidad: (a) obstáculo angular; (b) cuerpo grueso; (c) borde de zaga; (d) separación de la capa límite.**

En las superficies con discontinuidades de velocidad, existe una tendencia a que se formen ondulaciones, ya sea por acción de agentes externos o por perturbaciones transportadas por el propio fluido. Y son estas ondulaciones, a su vez, las que tienden a ser inestables y a crecer en amplitud. Las líneas de corriente relativas a las ondas (las cuales avanzan con una velocidad igual a la velocidad media del fluido) son como se muestran en la figura siguiente:



**Figura 2.3 Formación de vórtices a partir de ondas en una superficie de discontinuidad.**

A fin de aclarar un poco más el desequilibrio creado por las discontinuidades en un campo de flujo, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli (caso especial de las ecs. de N-S, para flujo incompresible e irrotacional) a lo largo de cada tubo de corriente, se concluye que existe una presión alta sobre el lado cóncavo de cada cresta o valle de la onda y una presión baja sobre el lado convexo. Consecuentemente, una superficie ondulada es inestable y tiende a amplificarse, para luego rizarse y romper en remolinos separados. Bajo un intervalo limitado de condiciones de velocidad, estos remolinos vorticosos pueden conservar sus identidades; sin embargo, es más frecuente que degeneren en fluctuaciones aleatorias.

La turbulencia también se produce en los flujos cortantes, en los cuales se presenta un gradiente de velocidad sin discontinuidad abrupta. Existe una tendencia, semejante al caso de discontinuidades discretas, a desarrollarse perturbaciones en flujos cortantes ordinarios. Una vez que

se presentan, el modelador se enfrenta al problema de si persistirán o desaparecerán. Se han postulado varios mecanismos de estabilidad; uno de éstos, para el cual los experimentos y la teoría están completamente de acuerdo, está basado en perturbaciones compuestas de oscilaciones de un intervalo de frecuencias que puede ser amplificado selectivamente por el campo de flujo hidrodinámico. Una de las teorías de perturbaciones infinitesimales (Teoría de Tollmien-Schlichting) lleva a la conclusión de que todos los disturbios por debajo de un número de Reynolds crítico, serán amortiguados. Por encima de este número crítico, ciertas frecuencias serán amplificadas y otras amortiguadas (Daily y Harleman, 1981).

Las teorías de estabilidad lineales suponen que la inestabilidad se presenta simultáneamente en la totalidad de la región del fluido, en donde se presentan las condiciones críticas. Así que, para una capa límite bidimensional sobre una superficie plana, la inestabilidad deberá evidenciarse a lo largo de la longitud total de una línea perpendicular al flujo. Esto se muestra en la figura 2.4(a), sin embargo, en la naturaleza no parece presentarse este caso, pues los disturbios aparecen en zonas restringidas o "manchas" en el interior del fluido. Estas manchas crecen al extenderse aguas abajo, invadiendo el flujo laminar hasta que una combinación de manchas separadas desarrolla una turbulencia generalizada. La propagación y amplificación de una mancha de perturbación, hasta desarrollar un "parche de turbulencia", se ilustra también en la parte (b) de la figura 2.4. Está claro que el impulso inicial de la turbulencia tiene un carácter tridimensional. Un comportamiento semejante se presenta en tuberías circulares, donde se ha observado que la transición de Reynolds se inicia con "manchas" a lo largo de la pared del tubo. El mecanismo de la iniciación de las manchas parece estar relacionado con lo que pasa cuando las perturbaciones menores, cuya amplificación predice la teoría de Tollmien-Schlichting, se agrandan. Una opinión es que las perturbaciones inicialmente bidimensionales, se distorsionan en sistemas de remolinos tridimensionales y de aquí a "manchas de turbulencia". Otra es en el sentido de que la perturbación básica es tridimensional y que se generan "horquillas" de remolinos, los cuales se transforman en inestables y aparecen como manchas de turbulencia.

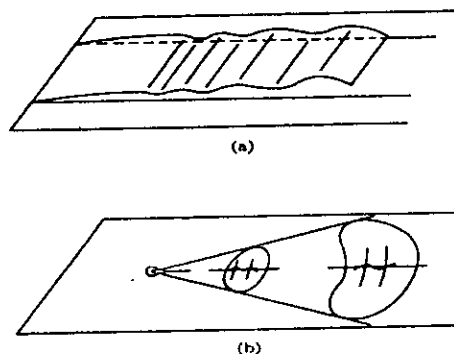


Figura 2.4 Perturbaciones (a) amplificación de una onda bidimensional de acuerdo a Tollmien-Schlichting; (b) difusión y amplificación de una perturbación puntual en una mancha de turbulencia.

## 2.3 CINEMÁTICA DEL CAMPO DE FLUJO

La hipótesis del continuo posibilita el uso del concepto de velocidad local del fluido. La manera de cómo se debe especificar el campo total de flujo, como un agregado de tales velocidades locales puede ser de dos formas. La primera usualmente se conoce como Euleriana, en ésta, las cantidades de flujo son definidas como funciones de posición en el espacio ( $\underline{x}$ ) y del tiempo ( $t$ ). La cantidad de flujo primaria (vector) es la velocidad del fluido, la cual se puede escribir así:  $\mathbf{q}(\underline{x}, t)$ . Esta representación se puede concebir como la imagen proveniente de la distribución espacial del fluido (y de otras cantidades, tales como densidad y presión) en cada instante durante el movimiento.

El otro enfoque, de tipo Lagrangiano, hace uso del hecho de que, al igual que en mecánica de partículas, algunas de las cantidades dinámicas o físicas se refieren no sólo a ciertas posiciones en el espacio sino también (y fundamentalmente) a piezas identificables de materia. Las cantidades de flujo se definen entonces, como funciones del tiempo y de la elección de un elemento material del fluido; describe por tanto, la historia dinámica del elemento de fluido seleccionado. Ya que los elementos materiales de fluido cambian su contorno y su ruta, se necesita identificar al elemento seleccionado de tal manera que no esté involucrada su extensión lineal; un método conveniente es especificar el elemento por la posición ( $\underline{x}_0$ ) de su centro de masa en algún instante inicial ( $t_0$ ), en el entendido de que las dimensiones lineales del elemento son tan pequeñas como para garantizar la pequeñez de todos los instantes relevantes subsecuentes, a pesar de las distorsiones y extensiones del elemento. De esta forma, la cantidad del flujo primaria de acuerdo a la especificación Lagrangiana es la velocidad  $\mathbf{q}(\underline{x}, t)$

Sea  $A=A(\underline{x}, t)$  una propiedad del movimiento fluido (por ejemplo, densidad  $\rho(\underline{x}, t)$ , presión  $p(\underline{x}, t)$ , o alguna componente del vector velocidad, etc). Usando un enfoque Lagrangiano, la tasa de cambio en el tiempo de  $A$ , siguiendo el movimiento de una partícula de fluido está dada por:

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\underline{x}_0} = \left. \frac{\partial A[\underline{x}(\underline{x}_0, t), t]}{\partial t} \right|_{\underline{x}_0},$$

con:  $A(\underline{x}, t)=A(x, y, z, t)$ ,  $\underline{x}_0=\underline{x}(x_0, t_0)$ ,  $\underline{x}=\underline{x}(x_0, t)$ . Aplicando la regla de la cadena que establece que:

$$\frac{df}{dx} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \frac{dx}{dx} + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \frac{dy}{dx} \text{ en la expresión anterior, resulta:}$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\underline{x}_0} = \left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\underline{x}_0} + \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_t \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{\underline{x}_0} + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)_t \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{\underline{x}_0} + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)_t \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{\underline{x}_0}, \text{ esto se puede escribir así:}$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\underline{x}_0} = \left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\underline{x}} + \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} \right)_t \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{\underline{x}_0}, \text{ o aún más como en la forma siguiente:}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{x_0} = \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_x + \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0} \cdot (\nabla \cdot A)_t, \text{ sin embargo se sabe que } \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0} = q = (u, v, w)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{x_0} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t} \Big|_x}_{\text{cambio local}} + \underbrace{q \cdot (\nabla A)}_{\text{cambio advectivo o convectivo}}$$

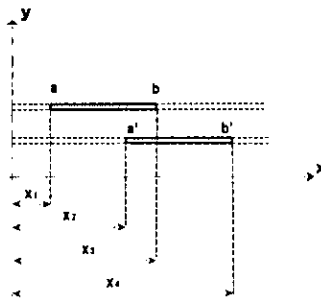
El cambio local se refiere al cambio de la propiedad en un punto a través del tiempo. El cambio advectivo se refiere al cambio que sufre la propiedad a través del espacio. La ecuación anterior también se puede expresar como:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + q \cdot \nabla A$$

a la cual se le denomina *derivada material o sustancial*.

### RELACIONES ESFUERZO-DESPLAZAMIENTO

Los esfuerzos y desplazamientos están relacionados estrechamente, y los primeros no pueden ocurrir sin desplazamientos aunque son posibles los desplazamientos sin los esfuerzos.



Desplazamiento de los puntos a, b y deformación de la porción ab.

Figura 2.5 Relaciones deformación - desplazamiento.

Por ejemplo, sean a y b dos puntos unidos uno al otro por un hilo. Inicialmente estaban a una distancia  $x_1$  y  $x_3$  del origen, después de la deformación éstos se desplazaron a las distancias  $x_2$  y  $x_4$ .

Ahora, si el trayecto del punto a, ó  $(x_2 - x_1)$  es el mismo que el trayecto del punto b, ó  $(x_4 - x_3)$ , es obvio que el elemento b, ha viajado simplemente una distancia  $(x_2 - x_1)$  ó  $(x_4 - x_3)$ , sin deformación alguna. Sin embargo, si las dos cantidades son diferentes, es decir, si el punto b se mueve más o menos que el punto a, la longitud del elemento ab cambiará. Este cambio de longitud por unidad de largo se conoce como **deformación**. De esta manera, la deformación se puede definir como:

$$\epsilon = \lim_{ab \rightarrow 0} \frac{a'b' - ab}{ab}$$

Esta expresión, se puede escribir de manera más clara si se introduce una nueva cantidad  $S_x$ , como la componente del desplazamiento en la dirección x y asumir que  $ab = \delta x$ . Así, las coordenadas de x de los puntos a y b serán x y  $x + \delta x$  respectivamente, y para los de a' y b' serán  $x + S_x$  y  $x + S_x + \delta x$ .

Sustituyendo:

$$\frac{\partial S}{\partial x}$$



$$\varepsilon = \frac{\delta x + \frac{\partial \delta x}{\partial x} \delta x - \delta x}{\delta x} \quad \therefore \varepsilon_x = \frac{\partial \delta x}{\partial x} \quad (2.1)$$

Esta es la definición formal de la *deformación normal* en la dirección  $x$ . De igual manera para las otras direcciones se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \delta x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \delta z}{\partial z} \quad (2.2)$$

de la expresión anterior, se deduce la siguiente:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_x = \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (2.3)$$

Respecto a la deformación cortante o tangencial, la cual se define como el cambio en el ángulo que hay entre dos elementos originalmente perpendiculares, obsérvese la figura siguiente:

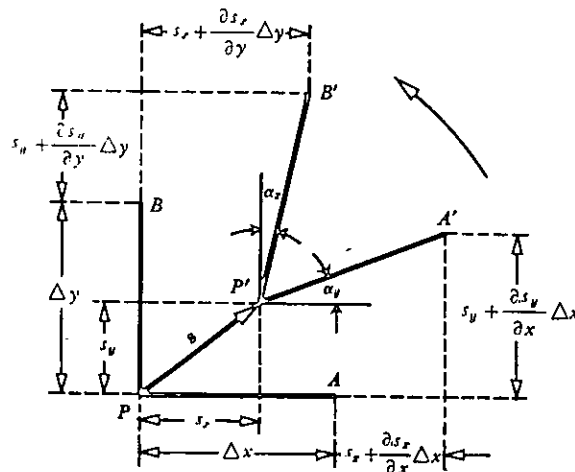


Figura 2.6. Deformación normal y tangencial de un ángulo recto.

Se sabe que la deformación angular unitaria es igual a  $\frac{1}{2} \tan \Delta \alpha$ . Teniendo en cuenta la definición de deformación angular anterior, se obtiene, por otro lado que:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \tan(\alpha_x + \alpha_y).$$

Considerando que  $\alpha_x, \alpha_y \rightarrow 0$ , y despreciando términos de orden superior al primero, basándonos en la figura 2.6, se puede escribir:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \tan(\alpha_x + \alpha_y) \cong \frac{1}{2} (\tan \alpha_x + \tan \alpha_y) \cong \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} S_x + \frac{\partial S_x}{\partial y} \Delta y - S_x \\ \Delta y + S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} \Delta y - S_y \end{array} + \begin{array}{c} S_y + \frac{\partial S_y}{\partial x} \Delta x - S_y \\ \Delta x + S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} \Delta x - S_x \end{array} \right)$$

de la denominada teoría de las deformaciones infinitesimales que tiene como condición básica el requisito de que los gradientes de desplazamiento sean pequeños comparados con la unidad (Mase, G. 1977), la expresión anterior se transforma en:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial S_y}{\partial x} \Delta x \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right)$$

De forma similar, se obtienen fórmulas análogas para las otras direcciones:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{zy} = \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_y}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial y} \right), \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_z}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial z} \right). \quad (2.4)$$

La matriz del tensor de deformaciones se define entonces como:

$$[\mathbf{E}_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_y}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_z}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_z}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_x}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_y}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial S_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

La aplicación del tensor  $\mathbf{E}_{ij}$  al vector unitario  $\mathbf{n} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ , da como resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{n}) &= \mathbf{P}(\mathbf{i}) + \mathbf{Q}(\mathbf{j}) + \mathbf{R}(\mathbf{k}) \\ \mathbf{P} &= l \epsilon_x + m \epsilon_{yx} + n \epsilon_{zx} \\ \mathbf{Q} &= l \epsilon_{xy} + m \epsilon_y + n \epsilon_{zy} \\ \mathbf{R} &= l \epsilon_{xz} + m \epsilon_{yz} + n \epsilon_z. \end{aligned} \quad (2.6)$$

### ANÁLISIS DE UN MEDIO DEFORMABLE

Para analizar el comportamiento de un punto P y de una pequeña parte alrededor de él, en un medio deformable, es útil auxiliarse la figura 2.7. ¿Cómo será el movimiento de las partículas próximas respecto a P? Ahora pues, supóngase que el punto P, inicialmente fijo, sufre un desplazamiento  $\mathbf{s}(P)$  que lo traslade a la posición P', considérese además un punto próximo a P, el punto Q, tal que  $\mathbf{PQ} = \Delta\mathbf{r}$ , (es decir,  $Q = P + \Delta\mathbf{r}$ ). El movimiento del medio que traslada a P hasta P', trasladará a Q hasta Q', resultando para Q un desplazamiento  $\mathbf{s}(P + \Delta\mathbf{r})$ . El desplazamiento real relativo entre Q' y P' será:

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}(Q) - \mathbf{s}(P) = \mathbf{s}(P + \Delta\mathbf{r}) - \mathbf{s}(P).$$

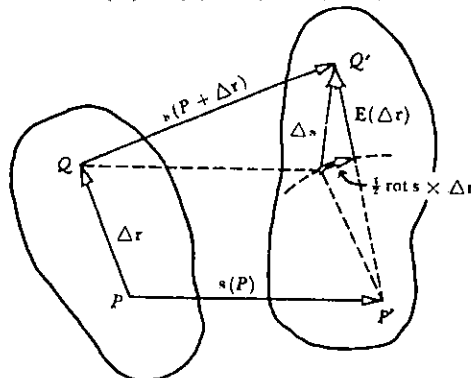


Figura 2.7 Descomposición del desplazamiento relativo  $\Delta\mathbf{s}$  ligado al desplazamiento virtual  $\Delta\mathbf{r}$ .

La hipótesis de la mecánica del medio continuo se basa en que las propiedades del medio continuo son funciones continuas y derivables en el tiempo y en el espacio, por tanto, se puede utilizar para su estudio el cálculo diferencial y operar por medio de ellos sobre los campos escalares y

vectoriales (de desplazamientos, velocidades, fuerzas, etc.) ligados al medio. En particular, si A y B están muy próximas entre sí, es decir, si siendo las coordenadas de A(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>), las de B son x<sub>0</sub> + Δx, y<sub>0</sub> + Δy, z<sub>0</sub> + Δz, con Δx, Δy, Δz muy pequeñas, se considera lícito escribir:

$$f(A) = s(P), \quad f(B) = s(P + \Delta r) = s(Q)$$

$$\Delta s = f(B) - f(A) = s(Q) - s(P) = \left( \frac{\partial s}{\partial \mathbf{r}} \right)_P \Delta \mathbf{r} = \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_P \Delta x + \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right)_P \Delta y + \left( \frac{\partial s}{\partial z} \right)_P \Delta z.$$

Calculándose las derivadas en el punto A, esto resulta de considerar un desarrollo de Taylor, en el que se desprecia por su pequeñez las potencias de Δx, Δy, Δz, de grado superior al primero. Si Δr = l entonces el desplazamiento relativo correspondería a la primera parte de la expresión anterior.

Recordando el concepto de homografías vectoriales, como los operadores que transforman vectores en vectores y operan linealmente entre ellos. Una importante homografía vectorial es aquélla que, operando dentro del campo de los vectores **u**(P), da la diferencial del vector **u**, en cuanto se conozca la diferencial de punto correspondiente **dr**, lo cual se expresa como (grad **u**) **dr** = **du**. Tomando en cuenta el concepto anterior, se puede llegar a la conclusión de que el desplazamiento relativo se obtiene operando sobre el desplazamiento virtual Δr, por medio de la homografía vectorial (grad **s**) **dr** = **ds**, cuyo desarrollo matricial se muestra en la ec. 2.7. Si se compara la matriz resultante 2.7 con la matriz del tensor de desplazamientos E<sub>ij</sub> (ec. 2.5), se nota que sólo los desplazamientos en la diagonal son iguales; por tanto existe otro movimiento además de la deformación que contribuye a los cambios de posición relativa de las partículas del medio. Para descubrir la naturaleza de este movimiento, basta con determinar que hay que añadir a los términos de la matriz de la ec. 2.5, para hallar los correspondientes de esta última.

$$[\text{grad } \mathbf{s}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Por ejemplo, el miembro (1,2) de la matriz de la ec. 2.5 es igual a ½ (∂Sy/∂x + ∂Sx/∂y) y el mismo miembro de la ec. 2.7 es igual a tan sólo ∂Sy/∂x, entonces:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial x} \right), \text{ haciendo lo mismo para el otro elemento de esa línea:}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial x} \right), \text{ sustituyendo éstos elementos en la componente } \mathbf{i} \text{ del } [\text{grad } \mathbf{s}]:$$

$$[\text{grad } \mathbf{s}] \mathbf{i} = \frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{k} = \left[ \frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) \mathbf{k} \right] + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y} \right) \mathbf{j} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial z} \right) \mathbf{k} \right]$$

Ahora bien, la expresión que aparece en el primer corchete es  $\mathbf{E}(\mathbf{i})$  y la que aparece en el segundo corchete se puede escribir así:

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{j} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_z}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial z} \right) \mathbf{k} \right] \times \mathbf{i} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{i}.$$

Siendo así, el  $[\text{grad } \mathbf{s}]$  para  $\Delta \mathbf{r} = i, j, k$ , es:

$$\begin{aligned} [\text{grad } \mathbf{s}] \mathbf{i} &= \mathbf{E}(\mathbf{i}) + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{i} \\ [\text{grad } \mathbf{s}] \mathbf{j} &= \mathbf{E}(\mathbf{j}) + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{j} \\ [\text{grad } \mathbf{s}] \mathbf{k} &= \mathbf{E}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Los tres operadores vectoriales  $\text{grad } \mathbf{s}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times$ , son lineales, por lo cual para un vector  $\mathbf{n}$  cualquiera, será también:

$$\Delta \mathbf{s} = [\text{grad } \mathbf{s}] \mathbf{n} = \mathbf{E}(\mathbf{n}) + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{n}. \quad (2.8)$$

Esta última fórmula expresa el desplazamiento relativo  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}(Q) - \mathbf{s}(P)$  del punto  $Q$ , situado en el extremo de un vector unitario  $\mathbf{n}$  que sale de  $P$ . Escribiendo:

$$\mathbf{s}(Q) = \mathbf{s}(P) + \mathbf{E}(\mathbf{n}) + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{n}, \quad (2.9)$$

se puede interpretar en el sentido de que el desplazamiento de  $Q$  se descompone en la suma de tres vectores, el desplazamiento  $\mathbf{s}$  de  $P$ , la deformación del vector  $\mathbf{n}$  y el vector  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{n}$ , cuyo significado se analizará a continuación. Considérese otra vez la figura 2.6 y al elemento encerrado por el ángulo  $APB$  que se transforma en el que encierra el ángulo  $A'P'B'$ . El vector  $\mathbf{PP}'$  representa el desplazamiento  $\mathbf{s}(P)$  y la variación que sufre el tamaño del ángulo y de sus lados representa la deformación  $\mathbf{E}(\mathbf{n})$ . Queda por considerar la rotación del elemento. Tómese como positivo, el sentido de giro antihorario, indicado por la flecha en la siguiente figura:

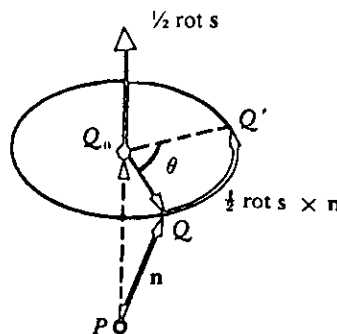


Figura 2.8 Significado del vector  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{n}$ .

El lado  $PA$  recorre en ese sentido un ángulo  $\alpha_y$  y el lado  $PB$  un ángulo  $-\alpha_x$ . La rotación media  $\theta$  será el promedio:

$$\theta = \frac{1}{2} (\alpha_y - \alpha_x) \cong \frac{1}{2} (\tan \alpha_y - \tan \alpha_x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y} \right). \quad (2.10)$$

Esta rotación tiene lugar en el plano  $xy$ . Este hecho se suele expresar multiplicando  $\theta$  por el vector unitario perpendicular al plano de rotación, que en el caso actual es el vector  $\mathbf{k}$ . Se reconoce que el vector  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s}$ , representa con su magnitud el ángulo de giro de un elemento del medio y, con su dirección, la dirección del eje instantáneo de rotación del elemento mismo.

Ahora, tomando en cuenta a los vectores  $\mathbf{PQ} = \mathbf{n}$  y  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s}$ , de la figura 2.8. El punto  $Q$ , que gira un ángulo  $\theta$  alrededor del eje que pasa por  $P$  y está orientado como  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s}$ , se desplaza hacia la posición  $Q'$ . Este desplazamiento debido a la rotación  $\mathbf{QQ}'$  está dado, en magnitud y dirección, por:

$$\mathbf{QQ}' = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{Q}_0 Q,$$

siendo  $Q_0$  la proyección de  $Q$  sobre el eje. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 Q' &= \mathbf{PQ} - \mathbf{PQ}_0 = \mathbf{n} - \mathbf{PQ}_0, \text{ por tanto} \\ \mathbf{QQ}' &= \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{n} - \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{PQ}_0 = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

ya que el  $\text{rot } \mathbf{s}$  y  $\mathbf{PQ}_0$  son paralelos entre sí. Se puede concluir que, el vector  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{s} \times \mathbf{n}$  representa el desplazamiento giratorio de  $Q$  alrededor del eje instantáneo de rotación. La ec. 2.9, expresa pues, la descomposición del desplazamiento de  $Q$  en la suma de una traslación (la del punto  $P$ ), una rotación (la de  $Q$  alrededor de un eje que pasa por  $P$ ) y una deformación.

Sin embargo, en el estudio de los medios viscosos, no interesan las deformaciones, sino las rapidezces de deformación, ya que éstas están relacionadas con las velocidades de las partículas de la misma manera que las deformaciones están ligadas con los desplazamientos. Esto se debe a que una deformación sólo tiene interés en lo que respecta al instante en que se mide y al tiempo que ha durado el proceso, hasta tal instante. Por el contrario, la rapidez de deformación es un dato independiente de todo eso. Siendo las rapidezces de deformación las derivadas de las deformaciones con respecto al tiempo, se definen siguiendo los mismos pasos que se dieron con respecto a los desplazamientos  $s$ , pero no con respecto a los desplazamientos, sino con respecto a sus derivadas temporales, que son las velocidades  $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{s}}$ . Por ejemplo:

$$\varepsilon_x = \frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial s_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{ds_x}{dt} = \frac{\partial q_x}{\partial x},$$

el vector de velocidades, aquí se escribe  $\mathbf{v} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}$ , por lo tanto, se puede definir el tensor de las rapidezces de deformación  $\dot{\mathbf{E}}$  por medio de las relaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{i}) &= \varepsilon_x \mathbf{i} + \varepsilon_{yx} \mathbf{j} + \varepsilon_{zx} \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{j}) &= \varepsilon_{xy} \mathbf{i} + \varepsilon_y \mathbf{j} + \varepsilon_{zy} \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) &= \varepsilon_{xz} \mathbf{i} + \varepsilon_{yz} \mathbf{j} + \varepsilon_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right). \quad (2.14)$$

Finalmente, el tensor de las rapidezces de deformación se define como:

$$[\mathbf{E}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

De la misma manera para la rotación media, ya obtenida (ec. 2.10), se tiene:

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad (2.16)$$

por tanto, el tensor de tasas de rotación promedio se puede escribir como:

$$[\mathbf{R}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

De manera análoga, se obtiene una relación que expresa la velocidad absoluta de  $\mathbf{v}$  de un punto Q, situado a una distancia unitaria de un punto P que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_o$ .

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{E}(\mathbf{n}) + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}_o \times \mathbf{n}. \quad (2.18)$$

De la ec. (2.18), se deduce que la velocidad de Q resulta ser la suma de tres componentes: la *velocidad de traslación*  $\mathbf{v}_o$  de P, la *rapidez de deformación*  $\mathbf{E}(\mathbf{n})$  del medio en proximidad de P, y una *velocidad de rotación* alrededor de un eje que pasa por P y esta dirigido como  $\text{rot } \mathbf{v}$ . En la fórmula anterior se nota la importancia del vector  $\text{rot } \mathbf{v}$ , que algunos autores denominan vorticidad del flujo y del vector :

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}, \quad (2.19)$$

que se conoce bajo el nombre de vector de rotación.

## 2.4 ESTRUCTURAS TURBULENTAS EN CANALES

### 2.4.1 FLUJO MEDIO

Los aspectos teóricos de las estructuras turbulentas en canales abiertos han sido explorados, usando la teoría estadística de la turbulencia en flujos uniformes y completamente desarrollados. Esos

modelos son los más simples pero también los más fundamentales, con los cuales ha sido posible observar estructuras turbulentas en canales. El conocimiento básico obtenido de esos estudios es importante y muy útil. No sólo desde el punto de vista del entendimiento del concepto de turbulencia en canales abiertos, sino también para el desarrollo numérico de modelos de turbulencia.

### CARACTERÍSTICAS DEL FLUJO MEDIO

Es útil tener relaciones que describan las características del flujo medio, que permitan predecir las magnitudes de la velocidad a través de la capa límite, así como su relación con las fuerzas tangenciales en las paredes y las debidas al gradiente de presión, en situaciones distintas. Asimismo, es deseable que estas relaciones no requieran del conocimiento del estado de turbulencia del flujo. A continuación se remarcan algunas características del flujo medio.

#### Velocidad de fricción. (Nezu y Nakagawa, 1993)

Este parámetro ( $U_*$ ) es una escala de velocidad básica, con la cual se normaliza la velocidad media y la turbulencia. La velocidad de fricción se puede definir de varias maneras, como son las siguientes:

- Se puede evaluar con la fórmula  $U_* = \sqrt{gRS}$ , en la cual  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $R$  es el radio hidráulico, y  $S$  es la pendiente del canal.
- Se puede determinar de la medición de la distribución de la velocidad media  $U(y)$  con ayuda de una ley logarítmica.
- $U_*$  puede ser determinada de la medición de la distribución los esfuerzos de Reynolds  $U(y)$  con ayuda de alguna ecuación que relacione los esfuerzos cortantes del fondo y la velocidad de fricción.

Desafortunadamente, no existe alguna ecuación simple que pueda describir el perfil de velocidad, a lo largo del espesor  $\delta$ , de la capa límite turbulenta. Sin embargo, hay ecuaciones cuyos resultados tienden a ser universales para las diferentes zonas de la capa límite, a partir de dos leyes diferentes, la ley de pared, que se aplica cerca de las fronteras lisas, y la ley del defecto de velocidad que se aplica en la capa exterior de las capas límite, tanto para paredes lisas como rugosas.

#### La ley de pared. (Nezu y Nakagawa, 1993)

Esta ley gobierna la región de pared, es decir, la región en la cual las escalas características de longitud y velocidad son  $\nu/U_*$  y  $U_*$ , respectivamente,  $\nu$  es la viscosidad cinemática. Estas variables se usan para definir las variables interiores. Para la distribución de velocidad sobre un plano suave, la formulación de Prandtl (1925), para la longitud de mezcla es:

$$l^2 \equiv -\nu y / \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (2.20)$$

en la cual  $\bar{u}v$  es el esfuerzo tangencial en la dirección principal, la cual puede ser usada para reacomodar la siguiente expresión:

$$\frac{\tau}{\rho} \equiv -uv + v \frac{\partial U}{\partial y} = U_*^2 \left( 1 - \frac{Y}{h} \right),$$

y conducir a la expresión para el gradiente de velocidad adimensional:

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{2(1-\xi)}{1 + \sqrt{1 + 4\ell^{+2}(1-\xi)}} \quad (2.21)$$

En estas ecuaciones  $\xi \equiv y/h$ ,  $U^+ \equiv U/U_*$ , y  $y^+ \equiv yU_*/\nu$  es la coordenada adimensional en la dirección  $y$ , normalizada para la longitud viscosa  $\nu/U_*$ . También,  $R_* \equiv U_*h/\nu$  es el número de Reynolds basado en la velocidad de fricción  $U_*$  y la profundidad  $h$ , y  $\ell^+ \equiv \ell U_*/\nu$  es la longitud de mezcla adimensional. Si la distribución de la longitud de mezcla es definida para un problema en particular, se determina el gradiente de velocidad adimensional sobre el canal, con la ec. (2.21), y esta misma se puede integrar para conocer la distribución de velocidad. En la región de pared la relación tirante-altura del canal ( $y/h < 0.2$ ), se puede suponer que la distribución de la longitud de mezcla es lineal. La función de amortiguamiento de Van Driest, modifica el flujo muy cerca de la pared donde los efectos viscosos juegan un importante papel. En el caso de capas límite y flujo en canales cerrados, esta distribución es estándar (Huffman y Bradshaw, 1972; Reynolds, 1974) y se puede escribir de esta forma:

$$\begin{aligned} \ell^+ &= \kappa y^+ \cdot \Gamma(y^+), \\ \Gamma(y^+) &\equiv 1 - \exp(-y^+/B), \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $\kappa$ , es la constante de Von Kármán,  $\Gamma(y^+)$  es la función de amortiguamiento de Van Driest, y  $B$  es el factor de amortiguamiento. El valor  $B=26$  se obtuvo empíricamente para capas límite por Van Driest (1956), y confirmado para flujo en canales abiertos por Nezu y Rodi (1986). Debido a que  $\xi \equiv y/h \ll 1$  en la región de pared, el espesor de la cual depende del número de Reynolds  $R_*$ , se puede obtener la bien conocida distribución de velocidad integrando la ec. (2.21) y usando las relaciones de la ec. (2.22) se obtiene:

$$U^+ = y^+ \quad \text{para } y^+ \ll B, \quad (2.23)$$

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + A \quad \text{para } B < y^+ \leq 0.2R_*, \quad (2.24)$$

donde  $A$  es una constante de integración, la primera expresión de las anteriores, es la fórmula de la subcapa viscosa, y la segunda es la fórmula de la ley logarítmica; ambas pertenecen a la ley de pared, la cual es gobernada por las variables interiores  $U$ , y  $\nu$ . Para la región intermedia entre (2.23) y (2.24), denominada "capa amortiguadora" se puede integrar también la ec. (2.21), no existe una fórmula simple disponible para esta capa, que se encuentra entre  $5 < y^+ < 30$ . Una consideración importante es



que la constante  $\kappa$  y la constante de integración A, en la ley logaritmo debe ser determinada de datos experimentales que pertenezcan solamente al flujo de la región de pared.

Muchos estudios sobre la distribución de ley logaritmo en canales abiertos se han validado aplicando los valores de Nikuradse para tuberías  $\kappa=0.41$  y  $A=5.5$ , en canales abiertos lisos:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + A \quad (2.23)$$

En canales abiertos a diferencia de las capas límite, la ley logaritmo se aplica en toda la profundidad del flujo, desde del fondo hasta la superficie. Para una correspondencia adecuada se requiere el ajuste de la constante de Von Kármán  $\kappa$ , y la constante de integración A.

Sin embargo, como ya se mencionó, la teoría moderna de la turbulencia indica que la ley logaritmo sólo es aplicable a la región de pared, para  $y/h = 0.2$ . Nezu y Rodi (1986), analizaron la distribución de la ley logaritmo en la región de pared en canales abiertos.

En la figura 2.9 se muestran los valores experimentales de la velocidad media  $U^+ = U/U_\tau$ , en la región  $30 < y^+ < 0.2R_\tau$ , donde este último es el número de Reynolds normalizado con la velocidad de fricción, la cual coincide con la ley logaritmo, ec. (2.23).

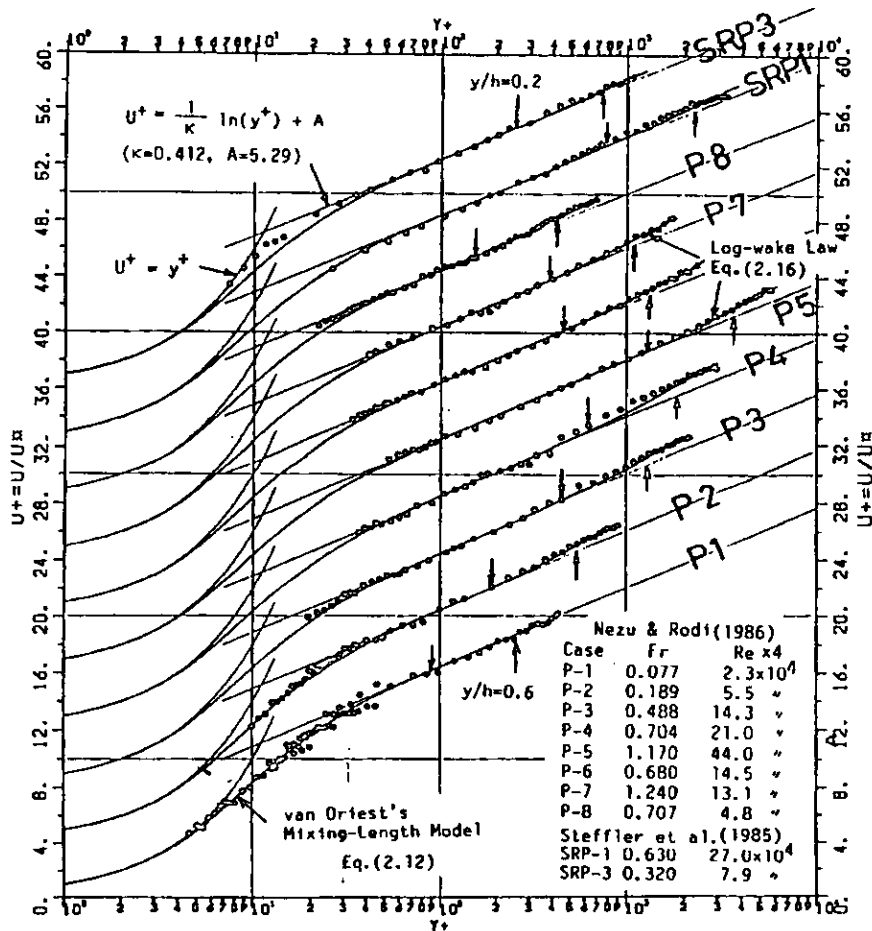


Figura 2.9 Comparación teórica y experimental de la distribución de velocidad media en canales abiertos (Nezu y Nakagawa, 1993).

Además los valores experimentales en la zona de amortiguamiento  $5 < y^+ < 30$  coinciden con la curva de Van Driest con  $B=26$ , a su vez dicha curva coincide con la relación  $U^+ = y^+$  en donde, además  $y^+ \ll B$ , en la subcapa viscosa  $y^+ < 5$ .

Para las capas de pared en canales abiertos, la constante de Von Kàrmàn  $\kappa$  y la constante de integración  $A$ , tienen un valor universal de 0.41 y 5.29 respectivamente, a pesar de los números de Reynolds y de Froude. También las estructuras turbulentas en la región de pared probablemente sean similares para capas límite, flujo en canales cerrados, y flujo en canales abiertos.

#### La ley del defecto de velocidad.

Hasta hace poco la información de la longitud de mezcla en la región fuera de  $y/h < 0.2$ , en canales abiertos, era bastante limitada. Ya que la ley logaritmo, se ha usado en canales abiertos y para propósitos prácticos, para describir la distribución de velocidad sobre toda la profundidad del flujo. Para aplicar la ley logaritmo a situaciones individuales, la constante de Von Kàrmàn  $\kappa$  y la constante de integración  $A$  se deben ajustar, pero en muchos casos los valores de Nikuradse se adaptan sin mayor problema.

Como se muestra en la figura 2.9, en la región externa, los datos de velocidad media  $U^+$  se desvían sistemáticamente de la distribución logarítmica, a altos números de Reynolds, esta desviación no se puede despreciar en la superficie libre,  $y/h > 0.6$ . Por lo tanto, se le debe sumar una función de onda a la ley logaritmo, para representar tal desviación.

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + A + w(y/h). \quad (2.24)$$

una función de onda apropiada,  $w(y/h)$  proporcionada empíricamente por Coles (1956), se muestra a continuación:

$$w(y/h) = \frac{2\Pi}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\pi y}{2h}\right). \quad (2.25)$$

donde  $\Pi$  es un parámetro de alargamiento de onda, también dado por Coles. En lo que toca a la región de pared, ésta es independiente de las condiciones de flujo en muchas capas cortantes de pared, y el concepto de similaridad del comportamiento cerca de la pared se conserva; y por tanto las constantes  $\kappa$  y  $A$  en la ley logaritmo permanecen fijas. Aunque se han propuesto varias fórmulas empíricas para la región externa, la función de Coles parece ser la extensión más aceptable de la ley logaritmo. La ley defecto de la velocidad de las ecs. (2.24) y (2.25) conducen a:

$$U_{\max}^+ - U^+ = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{h}\right) + \frac{2\Pi}{\kappa} \cos^2\left(\frac{\pi y}{2h}\right). \quad (2.26)$$

en la cual  $U_{\max}^+ = U_{\max}/U$ . Si  $\Pi=0$ , la ec. (2.25) se reduce a la ley defecto usual. Por tanto, el parámetro de Coles describe la desviación de la ley logaritmo fuera de la región de pared.

## 2.4.2 FLUJO SECUNDARIO

Los flujos reales en canales abiertos y ríos son demasiado complejos para ser representados como flujos en dos dimensiones. Por eso los modelos de turbulencia desarrollados para estos últimos, a veces no dan buenos resultados cuando se modelan flujos tridimensionales, ni siquiera para condiciones de frontera muy simples. Esto implica que incluso considerando que el flujo medio varía poco en las tres dimensiones, esto produce cambios significativos en los parámetros de la estructura de la turbulencia, ya que las constantes empíricas en los métodos de cálculo pueden o deben ser interpretados como parámetros de estructura. También, en los últimos años se ha incrementado el interés en la predicción de flujos con vórtices fijos, que casi siempre están presentes en las fronteras laterales de capas cortantes delgadas en 3D. En flujos turbulentos, en conductos rectos no circulares, las líneas de vorticidad media pueden ser generadas realmente por los esfuerzos de Reynolds, referidos aquí como esfuerzos inducidos por flujo secundario. Este sorprendente fenómeno no tiene equivalente en flujo laminar, y en realidad no pueden ser reproducido por algún modelo de turbulencia que usa una viscosidad turbulenta isotrópica. No obstante, los esfuerzos inducidos por la vorticidad en dirección del flujo son más débiles que la vorticidad inducida por la deflexión de las líneas vorticosas, inicialmente transversales. El análisis de las corrientes secundarias es esencial para el entendimiento de las estructuras de flujo, por lo que los modelos de turbulencia tridimensionales, se deben desarrollar en base al conocimiento de las corrientes secundarias en flujos cortantes turbulentos.

Si el flujo no es uniforme en la dirección de la corriente, la vorticidad de las líneas de corriente se genera por el alargamiento/compresión de los vórtices. Las corrientes secundarias generadas por este mecanismo se conocen como "corrientes secundarias de Prandtl de primer tipo", éstas han recibido atención considerable en curvas y ríos meandreados. En este caso, la fuerza inductora de las corrientes secundarias es centrífuga, por eso se producen tanto en flujos laminares como en flujos turbulentos. Por lo que una simulación exacta de ese movimiento no requiere una modelación de la turbulencia tan precisa como la que es necesaria para la modelación de las corrientes secundarias de segundo tipo, Rodi (1986). En canales rectos, el tipo de movimiento que se presenta se genera por la no-homogeneidad y la anisotropía de la turbulencia. A éstas corrientes se les conoce como "corrientes secundarias de Prandtl de segundo tipo", o "corrientes inducidas por turbulencia".

Hace más de cien años Stearns (1883), infirió la existencia de corrientes secundarias, basándose en el hecho de que la velocidad máxima se presenta debajo de la superficie libre en canales abiertos, que no son extremadamente anchos. Gibson (1909), estimó que la velocidad de las corrientes secundarias debería ser alrededor del 5% de la velocidad media principal. Por su parte Vanoni (1946), sugirió que podían existir corrientes celulares secundarias en canales anchos,

observando que la concentración de sedimentos suspendidos variaba cíclicamente en la dirección del flujo medio; Karz (1966) y Kinoshita (1967), se imaginaron el patrón de flujo de las corrientes celulares secundarias para explicar la formación de listones de arena en canales fluviales anchos.

Los campos de flujo medio tridimensionales se pueden, dividir en tres clases:

**Clase (i).** Capas delgadas cortantes y Capas cortantes medianas delgadas, en donde  $\partial/\partial z \gg \partial/\partial x \sim \partial/\partial y$ . Esta clase incluye capas límite sobre una placa tridimensionales y no separadas, o sobre una superficie ligeramente curvada ( $\delta/R \leq 0.1$ ).

**Clase (ii).** Flujos cortantes delgados donde  $\partial/\partial z \sim \partial/\partial y \gg \partial/\partial x$ . Ejemplo de éste es el flujo en las esquinas de un ducto cuadrado.

**Clase (iii).** Flujos completamente tridimensional donde  $\partial/\partial x \sim \partial/\partial y \sim \partial/\partial z$ . Requiere la solución de las ecuaciones completas de Navier-Stokes. En algún caso especial se puede emplear la teoría de flujo secundario no viscoso.

"**Flujo secundario**" es un término genérico usado para denotar el campo de flujo medio transversal caracterizado por las componentes de velocidad  $V$  y  $W$  que caen dentro del plano normal a  $x$ , la dirección del flujo principal. Comúnmente se define la dirección de la velocidad local  $U$ , como dirección principal. En ductos, tuberías curvas y en canales, generalmente se escoge la dirección del flujo principal como el eje del canal, así que el plano  $y-z$ , es el plano del flujo secundario a lo largo del canal. El valor de la velocidad del flujo secundario  $(V^2 + W^2)^{1/2}$  relativo a  $U$  depende básicamente del mecanismo físico que lo induce. Los cuatro principales mecanismos son:

a). Convergencia lateral (o divergencia). Adelgaza (o engruesa) un flujo cortante casi siempre por efectos puramente geométricos. Sin embargo, el efecto de la tasa extra de deformación debida al alargamiento (o contracción) de la capa puede tener importantes efectos sobre los esfuerzos de Reynolds.

b). Curvatura lateral del flujo principal (por ejemplo, en el plano  $x-y$ ), sujeta el campo de flujo al gradiente de presión en el plano del flujo secundario ( $z-y$ ), igual a  $\nabla P$ , donde  $\nabla() \equiv \mathbf{j} [\partial()/\partial y] + \mathbf{k} [\partial()/\partial z]$ . El vector  $\nabla P$  apunta hacia fuera desde el centro de la curvatura. Si el radio de curvatura del eje de flujo medio es  $r$ , el gradiente de presión secundario es balanceado por la aceleración centrípeta en dirección del radio  $\mathbf{r}$ , solamente para elementos de fluido moviéndose a una cierta velocidad  $U$ , proporcionada en una primera aproximación por  $\nabla P = \rho \bar{U}^2 / r$ . Los elementos de fluido moviéndose a una velocidad  $U < U$  se desplazan hacia el centro de la curva y viceversa. El campo real  $V-W$  que resulta es restringido por la ecuación de continuidad, por los contornos de las fronteras y por los campos de esfuerzos laminar y de Reynolds.

c). Movimiento lateral de pared de una frontera o de una superficie, relacionada al fluido puede causar flujo secundario por puro arrastre viscoso. Flujos típicos de ésta clase se observan en tubos que giran alrededor de su eje central, o tubos estacionarios dentro de los cuales se induce un flujo rotacional.

d) Gradientes de los esfuerzos de Reynolds,  $\partial(-\rho \overline{u_i u_j}) / \partial x_i$ , puede producir fuerzas en el plano del flujo secundario que induce  $V$  y  $W$ . Este efecto es el único mecanismo que puede transmitir el flujo secundario en la región de un ángulo recto donde dos planos de capa límite interactúan. El mecanismo que lo induce, a diferencia de los mecanismos b y c, los cuales inducen el flujo secundario de primer tipo, no está presente en flujo laminar.

Se sabe que la ecuación de vorticidad gobierna el movimiento secundario. Para identificar los diferentes mecanismos de producción de vorticidad, a continuación se hará un breve análisis de la misma. Considérese la ecuación de transporte de vorticidad media de Reynolds, en el sentido  $x$  (esta ecuación será discutida en el capítulo 3):

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + U \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + V \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + W \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} = \underbrace{\Omega_x \frac{\partial U}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial U}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial U}{\partial z} + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (-vw)}_1 + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (v^2 - w^2) + v \nabla^2 \Omega_x}_2$$

Mecanismo (1). Generación del "deflectamiento" producido por la deflexión quasi-no viscosa de la vorticidad media existente, se encuentra tanto en flujo laminar como turbulento.

Mecanismo (2). Generación de los "esfuerzos" inducidos por los esfuerzos turbulentos (Reynolds), la magnitud relativa de las contribuciones de los esfuerzos normales y de los esfuerzos cortantes dependen de la orientación de los ejes  $z$  e  $y$ .

También se pueden distinguir dos tipos de patrones de flujo secundario en el plano  $yz$ :

Tipo (a). "flujo transversal", como en una capa límite en 3D u otras capas cortantes delgadas, en las cuales la vorticidad axial  $\partial W / \partial y - \partial V / \partial z$  radica casi enteramente en  $\partial W / \partial y$ .

Tipo (b). vórtices identificables en la dirección del flujo, con  $\partial W / \partial y$  aproximadamente igual a  $\partial V / \partial z$ .

El mecanismo (1) puede conducir a flujos del tipo (a) o (b) al igual que el mecanismo (2), sólo que este último es normalmente identificado únicamente cuando produce vórtices visibles.

Una diferencia importante entre los tipos (a) y (b) es que mientras la aceleración positiva en dirección del flujo alarga y amplifica la vorticidad en dirección del flujo, por acción del término (1) de la ecuación anterior, una capa cortante con flujo transversal es adelgazada - permaneciendo  $V$  pequeña- al tiempo que un cierto vórtice "emerge". Después de un alargamiento infinito, o a números de Reynolds muy grandes, una capa cortante tridimensional se convierte en una capa de vórtices y un vórtice se convierte en una hilera de vórtices.

Un efecto obvio de la vorticidad media en dirección de la corriente sobre los remolinos turbulentos es que éstos giran alrededor de un eje en dirección del flujo. En el caso de flujo secundario del tipo (a), el cortante en la dirección transversal  $\partial W/\partial y$ , puede solamente hacer girar los vórtices a  $90^\circ$  como máximo, mientras que el tipo (b) –vórtices en dirección del flujo– pueden girar indefinidamente.

Como ya se mencionó el origen de las corrientes secundarias del flujo en canales rectos son los gradientes de los esfuerzos de Reynolds y éste puede ser descrito de acuerdo a la figura 2.10:

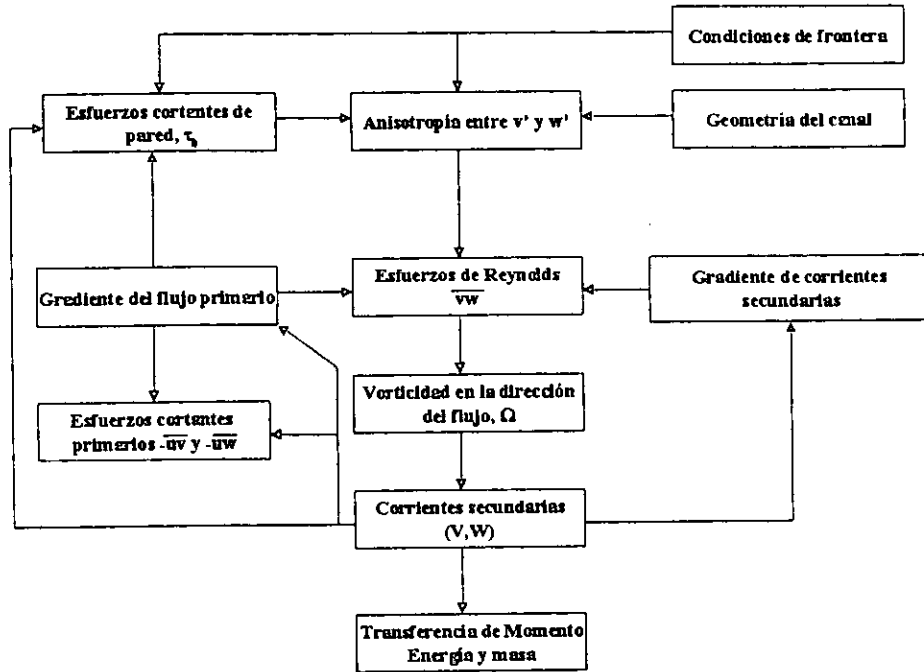


Figura 2.10 Mecanismos de generación de corrientes secundarias en canales angostos. (Nezu y Nakagawa, 1993).

La anisotropía entre  $v'$  y  $w'$ , que son las intensidades turbulentas de las corrientes secundarias  $V$  y  $W$ , respectivamente, y para las cuales el gradiente es del mismo orden que para los esfuerzos de Reynolds  $vw$ , genera las corrientes secundarias. A su vez, el gradiente de las corrientes secundarias tiene un efecto importante en los esfuerzos de Reynolds  $vw$ . Las corrientes secundarias también afectan al flujo primario  $U$ , y su velocidad de distorsión afecta a los esfuerzos cortantes de pared  $\tau_b$ . Cualquier variación ondulada de los esfuerzos cortantes de pared a lo largo del perímetro afectarán la redistribución de las intensidades turbulentas  $u'$ ,  $v'$  y  $w'$ , como se ha revelado en estudios experimentales. El gradiente de la velocidad primaria también influencia los esfuerzos primarios de Reynolds  $-uv$  y  $-uw$ , como se puede inferir a partir de la formulación de un modelo de viscosidad turbulenta. Las corrientes secundarias juegan un papel esencial en la transferencia lateral de momento, energía, calor y masa en un canal, y por lo tanto sus distribuciones muestran variaciones en las tres dimensiones.

Aunque los mecanismos de las corrientes secundarias en la figura anterior son demasiado complicados para ser analizados teóricamente, la anisotropía entre  $v'$  y  $w'$  es la causa principal de su ocurrencia. Semejante anisotropía de la turbulencia es causada en forma compleja por las condiciones de frontera en las fronteras sólidas y la superficie libre.

Ya que la ecuación de vorticidad no se puede resolver analíticamente, es necesario recurrir a un modelo adecuado para hacerlo. El primer cálculo de corrientes secundarias en un conducto recto no circular fue llevado a cabo por Launder y Ying (1973). Más tarde se propusieron varios modelos refinados de turbulencia basados en el suyo, por ejemplo, el modelo de longitud de mezcla, el modelo anisotrópico  $\kappa$ - $\epsilon$  y varios modelos de esfuerzos algebraicos, por mencionar sólo algunos.

### 2.4.3 CORRIENTES SECUNDARIOS EN CANALES ANGOSTOS

#### EL FENÓMENO DE LA VELOCIDAD MÁXIMA SUMERGIDA

Desde los tiempos de Prandtl, se conoce que las corrientes secundarias de segundo tipo ocurren en ductos rectos si el efecto de la frontera sólida es fuerte. Esas corrientes secundarias son llamadas frecuentemente "flujos de esquina" debido a que fluyen del centro hacia las esquinas del conducto, y han recibido mucha atención en el campo de la ingeniería mecánica debido a que generalmente los conductos hechos por el hombre, no son circulares. En los años 60, algunos de los estudios experimentales de flujos de esquina en ductos angulosos y rectangulares fueron llevados a cabo por medio de mediciones con anemómetro de hilo caliente, sin embargo, las mediciones exactas de flujos de esquina se realizaron en la década de los años 70, gracias al uso del anemómetro láser Doppler. En los años 80 se llevaron a cabo simulaciones numéricas de tales flujos, de tal manera que en la actualidad hay bastante información detallada de flujos de esquina.

Al contrario de las anteriores, las corrientes secundarias en canales abiertos en comparación permanecieron ignoradas hasta hace poco tiempo, aunque las corrientes secundarias correspondientes a los flujos de esquina en canales cerrados, se han inferido en canales abiertos a partir de las observaciones del abombamiento de las líneas de igual velocidad hacia las esquinas. La característica más importante es que la máxima velocidad no aparece en la superficie libre, sino más bien justo abajo de ella. Este fenómeno se llama "velocidad máxima sumergida", y es peculiar del flujo en canales abiertos.

Varios investigadores han inferido que las corrientes secundarias causan el fenómeno de la velocidad sumergida. Los fluidos con poca cantidad de movimiento son transportados por el flujo secundario desde la orilla hacia el centro y los fluidos con mucha cantidad de movimiento son trasladados por este movimiento desde la superficie libre hacia el fondo. Karthe y Leutheusser(1970), Knight *et al.* (1984.1985) y Nezu *et al.* (1985), han sugerido además que las variaciones ondulatorias de las distribuciones del esfuerzo cortante de fondo en la dirección transversal son causadas por

corrientes secundarias. El efecto de la relación de aspecto  $\alpha \cong B/h$  es pronunciado si ésta es mucho más pequeña que el valor crítico  $\alpha_c$ . Nezu y Rodi (1985), llevaron a cabo mediciones exactas de corrientes secundarias en canales abiertos haciendo uso de un sistema de anemometría láser de alta potencia (LDA); ellos encontraron que el fenómeno de la velocidad sumergida ocurre si el valor de  $\alpha_c$  es igual o ligeramente mayor a 5; puede existir una transición entre esos efectos. Por lo tanto, el flujo en canales abiertos puede ser clasificado dentro de dos categorías:

1. Canales abiertos angostos,  $B/h \leq \alpha_c$ . Los flujos de esquina son generados debido a la anisotropía de la turbulencia que producen las paredes del canal, de la misma manera que para flujos en canales cerrados. La velocidad sumergida es también causada por el efecto de la superficie libre, mientras que la anisotropía de la turbulencia difiere de aquella para flujos en canales cerrados.

2. Canales abiertos anchos,  $B/h \geq \alpha_c$ . En la zona central  $|z/h| < (B/h - \alpha_c)/2$ , el efecto de pared desaparece, consecuentemente las propiedades de flujo en 2-D son logrados en el término promediado de las estructuras turbulentas.

#### PATRONES DE CORRIENTES SECUNDARIAS

En la figura 2.11 se muestran los vectores de velocidad  $V-W$  para flujo subcrítico (a) y supercrítico (b), en canales abiertos. La dirección del flujo, se puede suponer que es perpendicular a la hoja de papel. La velocidad del flujo secundario  $U_s = \sqrt{V^2 + W^2}$  es casi igual para canales cerrados y abiertos, aunque cerca de la superficie es más alta para los últimos.

A partir de la observación de las líneas de isovelocidad y la distribución de esfuerzos cortantes de fondo, en dicha figura, se ha deducido que el patrón de corrientes secundarias es diferente entre un canal abierto y un canal cerrado. La razón principal de ello es la presencia de una superficie libre, en lugar de un plano de simetría. La superficie libre amortigua fluctuaciones normales a ella, y de esta manera causa las distribuciones de  $(\overline{w^2} - \overline{v^2})$  que difieren de las de un canal cerrado.

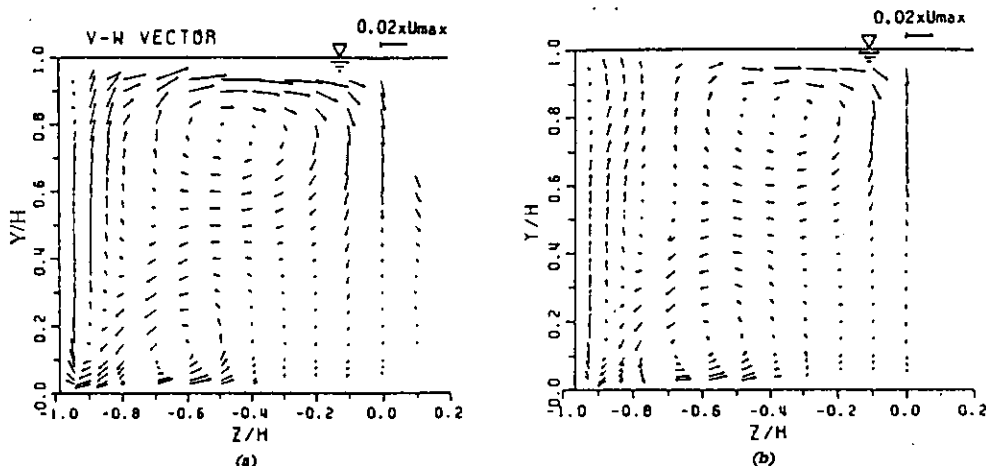


Figura 2.11 Descripción de las corrientes secundarias ( $V, W$ ) en: (a) un canal subcrítico y (b) supercrítico, respectivamente. (Nezu y Nakagawa, 1993).



En canales abiertos se presenta un gran vórtice cerca de la superficie libre tanto para flujos subcríticos como para supercríticos. Este vórtice se llama "vórtice de superficie libre" y su vórtice por cerca del fondo se conoce como "vórtice de fondo". El vórtice de superficie libre es mucho más grande que el vórtice de fondo y transporta cantidad de movimiento y energía de los lados de las paredes hacia el centro del canal cerca de la superficie libre. El fuerte flujo hacia abajo que se presenta en el centro del canal causa el fenómeno de la velocidad máxima sumergida ya que el momentum es transportado desde la superficie libre hacia el centro de la profundidad del canal.

Es notable que en el dibujo esquemático que se muestra en la figura 2.12, Gibson (1909) imaginara un vórtice similar a uno de los llamados vórtices de superficie libre, aunque no pudo prever que esta corriente secundaria se genera por la anisotropía de la turbulencia, su concepto sirvió para explicar el fenómeno de la velocidad sumergida que está formado por semejante vórtice.

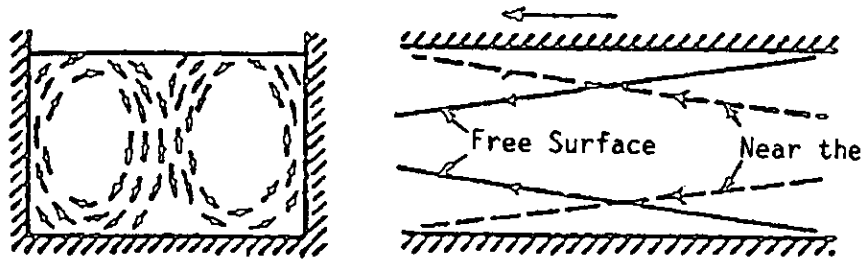


Figura 2.12 Patrón de flujo esquemático de corrientes secundarias en canales abiertos angostos (Gibson, 1909).

En un artículo notable Naot y Rodi (1982), describen una simulación numérica hecha con base en una versión de esfuerzos algebraicos del modelo  $\kappa$ - $\epsilon$ . Dichos autores simularon exitosamente el término de generación de vorticidad  $(\overline{w^2} - \overline{v^2})$ , mediante la introducción de una función empírica de amortiguamiento de la turbulencia debido a la superficie libre (figura 2.13).

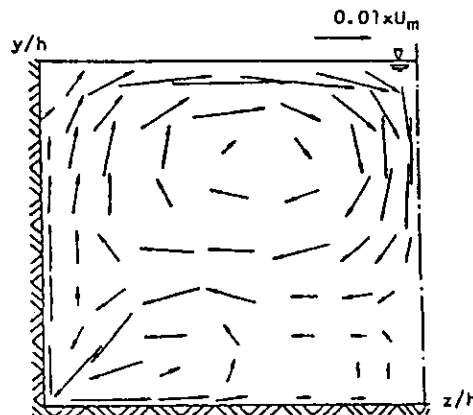


Figura 2.13 Simulación numérica de corrientes secundarias con un modelo de esfuerzos algebraicos, en un canal abierto (Nezu y Nakagawa, 1993).

La figura 2.13 muestra los resultados numéricos para corrientes secundarias para el flujo en un canal abierto, con una relación de aspecto  $B/h=2$ . El flujo se considera perpendicular al papel, y se

muestra sólo la mitad del canal. El patrón calculado de corrientes secundarias para flujo en canales abiertos coincide bastante bien con el observado por Nezu y Rodi (1985), mostrado en la figura 2.11. De particular importancia es el hecho de que las mediciones de las corrientes secundarias que se muestran en la figura mencionada, se llevaron a cabo después de que los cálculos ya se habían terminado, de esta manera, los cálculos se convirtieron en predicciones reales.

#### LÍNEAS DE CORRIENTE Y VORTICIDAD

En cuanto a la distribución de las líneas de corriente, en la figura 2.14 en la que se muestra la vorticidad adimensionalizada con la velocidad máxima, y las longitudes con la altura del canal, se observa que el vórtice de superficie libre es mucho más intenso y grande que el vórtice de fondo. Ahora, con relación a la distribución de vorticidad, la característica más notable se presenta en la región de esquina debajo de la posición de la velocidad máxima definida por  $y/h \leq 0.6$  y  $|z|/h \geq 0.4$ ; dentro de ella la distribución de vorticidad es similar a la que se presenta en una canal cerrado. En otras palabras, el efecto de pared está confinado a la región de esquina definida por  $y \leq y_{\text{máx}}$  y  $|z| \geq (B/2 - y_{\text{máx}})$ . Fuera de esta región, se genera un vórtice de superficie libre por la fuerte anisotropía de la turbulencia debida al amortiguamiento en la superficie libre.

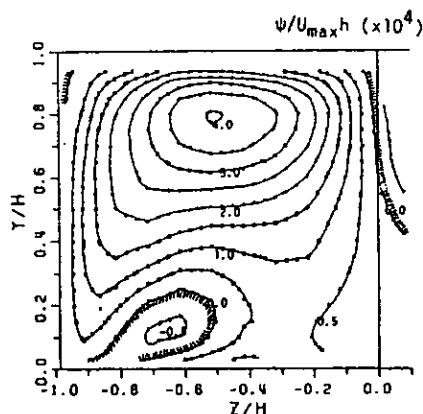


Figura 2.14 Líneas de corriente de vorticidad en un flujo secundario en canales abiertos (Nezu y Nakagawa, 1993).

#### ANISOTROPÍA DE LA TURBULENCIA

En la figura 2.15 se observan las líneas de contorno de las intensidades turbulentas  $u'/U$  y  $v'/U$ . La cota 0.0 indica el centro del canal y se muestra el corte transversal  $y-z$  del canal, siendo así, el flujo es perpendicular a dicho corte. Al igual que con la velocidad y la vorticidad, sus distribuciones en la región de esquina debajo de la posición de la velocidad máxima son similares a las de un canal cerrado. En esta región, los contornos de  $u'$  son simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo entre paredes, y los contornos de  $v'$  corresponden con los de  $w'$ , también con respecto a la bisectriz de esquina. Por tanto,  $(w'^2 - v'^2)$ , deben ser antisimétricos también respecto a la bisectriz de esquina. Evidentemente, esta es la fuerza que genera las corrientes secundarias hacia la esquina. Un

vórtice de fondo generado por semejante anisotropía de la turbulencia es en consecuencia un efecto de las paredes laterales.

Fuera de éstas regiones, el efecto de la superficie libre es bastante fuerte. El contorno mínimo de  $u'$  se sitúa debajo de la superficie libre, ello corresponde al fenómeno de la velocidad máxima sumergida. Al contrario, la intensidad vertical de la turbulencia  $v'$  decrece monotónicamente hacia la superficie libre. Este decremento es en particular fuerte cerca de la superficie libre. El amortiguamiento de  $v'$  es una característica esencial de flujos en canales abiertos en 2D, aunque también ocurre para flujos en 3D.

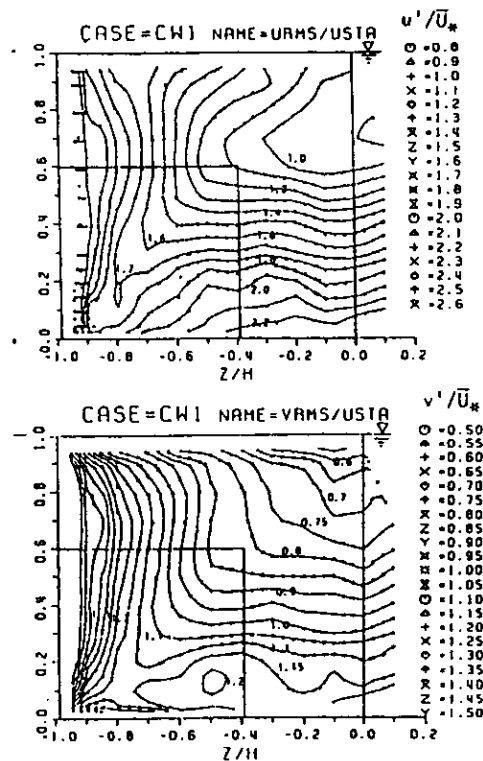


Figura 2.15 Líneas de contorno de las intensidades turbulentas  $u'$  y  $v'$  para canales abiertos, (Nezu y Nakagawa, 1993).

Aún así, el amortiguamiento de  $v'$  puede ser diferente en los dos casos. No hay datos exactos para la intensidad de la turbulencia transversal  $w'$  que estén disponibles, debido a que las dificultades en las mediciones con LDA no han sido superadas. Sin embargo, la anisotropía de la turbulencia cerca de la superficie libre es muy fuerte, y en consecuencia se genera un vórtice de superficie libre, como ya se ha mencionado en repetidas ocasiones.

#### CONTRIBUCIÓN DE LAS CORRIENTES SECUNDARIAS A LOS ESFUERZOS DE REYNOLDS

La figura 2.16 muestra los contornos de los esfuerzos de Reynolds  $-uv$  para canales abiertos. Al igual que en las figuras anteriores, dicho esfuerzo y las longitudes del canal están adimensionalizadas con la velocidad máxima al cuadrado y la altura del canal. Se muestra solamente la mitad del canal y

el flujo se supone saliendo en dirección perpendicular al papel. El valor de  $-uv$  mantiene una distribución lineal desde el fondo hasta la bisectriz de la esquina.

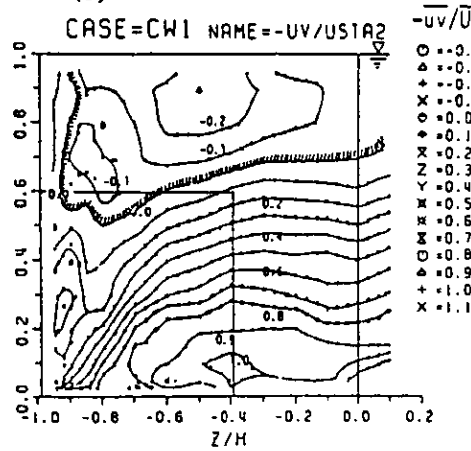


Figura 2.16 Líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-uv$  para canales abiertos, (Nezu y Nakagawa, 1993).

Estos resultados sugieren que los esfuerzos primarios de Reynolds  $-uv$ , al igual que  $(w^2 - v^2)$  pueden ser descritos por una función universal. En la región de la superficie libre, el valor de  $-uv$  es negativo. Esta característica es consistente con el hecho de que  $dU/dy$  es también negativo en esta región; por lo tanto, el modelo de viscosidad turbulenta puede ser aplicado aún para flujos en 3D.

De todas las características mencionadas, se puede concluir que las corrientes secundarias están estrechamente interrelacionadas con las distribuciones de los esfuerzos de Reynolds y más aún con los esfuerzos primarios.

#### EFEECTO DE LA RUGOSIDAD DE LAS PAREDES UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

Puede sorprender el hecho de que Gibson (1909), hubiera señalado hace casi 90 años, el efecto de la rugosidad de las paredes sobre el fenómeno de la velocidad máxima sumergida. El se imaginó que si la rugosidad de las paredes aumentaba, la velocidad horizontal  $U$  hacia el centro del canal cerca de la superficie libre, se haría más intensa debido a un incremento en la elevación de la superficie, atribuyó esta conclusión al decremento de la velocidad principal a los lados de las paredes. Por tanto, esta corriente secundaria tendería a frenar o deprimir más adelante el filamento de la velocidad máxima. También supuso que la rugosidad del fondo, retardaría el flujo horizontal y se elevaría el filamento de la velocidad máxima. Aunque su descripción no está bien fundada debido a que no consideró la teoría de la turbulencia, el interés por los efectos de la rugosidad de las paredes fue notable. Nezu y Nakagawa (1993) afirman que hasta nuestros días se han llevado a cabo pocas investigaciones relacionadas al efecto de la rugosidad uniformemente distribuida de las paredes, aunque las corrientes secundarias sobre fondos lisos y rugosos han sido investigadas intensivamente por varios investigadores.

En la figura 2.17 se muestran los resultados que obtuvo Naot (1984), con un modelo de esfuerzos algebraicos en 3D sobre flujos en canales abiertos, con  $B/h=4$ .

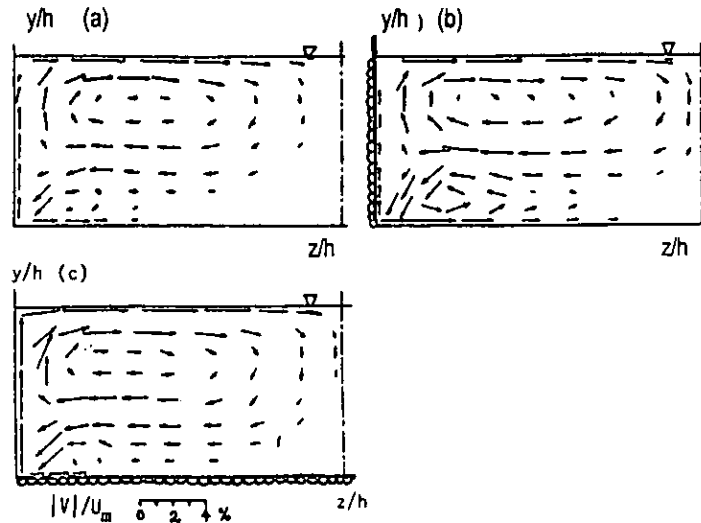


Figura 2.17 Efectos de la rugosidad de pared sobre las corrientes secundarias en canales abiertos. a) Fondo y paredes lisas. b) Fondo liso, paredes rugosas. c) Fondo rugoso, paredes lisas (Nezu y Nakagawa, 1993).

La figura anterior también muestra los resultados para diversas condiciones de rugosidad en las paredes. En el caso (a), se trata de un canal con fondo y paredes lisas, en el caso (b) se trata de un canal con fondo liso y paredes rugosas. Se observa que si las paredes son rugosas, ambos vórtices, el de superficie y el de fondo, se intensifican de alguna manera, y por tanto, la velocidad máxima debajo de la superficie libre es ligeramente mayor, justo como Gibson sugirió. En el caso (c), en el que el fondo es rugoso y las paredes lisas, se observa que el vórtice de la superficie libre también se intensifica, mientras que el vórtice de fondo se debilita.

Tominaga y Nezu (1986), examinaron el efecto de las paredes y el fondo rugosos en flujos primarios y secundarios, basándose en mediciones detalladas con películas calientes, encontraron que los fondos y paredes rugosos producen corrientes secundarias ligeramente más fuertes. Idénticos resultados observaron Hayashi *et al.* (1985). Los datos experimentales anteriores son consistentes con los resultados numéricos de Naot (1984). Las características encontradas son provocadas por un incremento en la anisotropía de la turbulencia debida a la diferencia de rugosidad entre las paredes y el fondo.

Sin embargo, el efecto de rugosidad uniforme en fondo y paredes sobre flujos primarios y secundarios puede ser muy pequeño para determinarlo claramente. Lo anterior se funda en el hecho de que el efecto de la relación entre las rugosidades de fondo y de pared  $k_b/k_s$ , tiene un efecto muy débil en la fricción de las paredes, como se puede ver en la figura 2.18.

Se requieren pues, de experimentos más detallados sobre los efectos de la rugosidad de pared y la geometría del canal, además de mediciones para revelar las características de flujo en tres dimensiones en canales abiertos sobre fronteras con gran rugosidad.

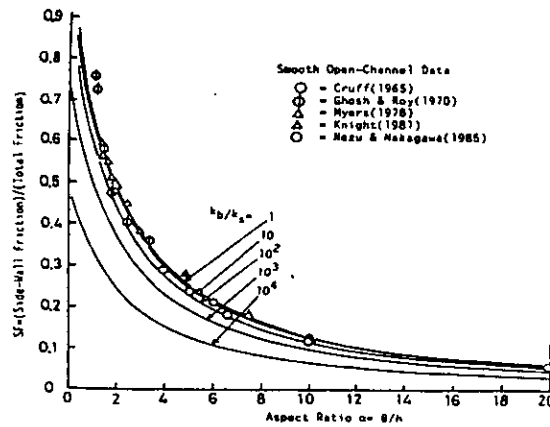


Figura 2.18 Tasa de fricción de pared contra la relación de aspecto  $B/h$  como una función de la rugosidad de fondo relativa  $k_b/k_s$ . (Nezu y Nakagawa, 1993).

## 2.5 ANÁLISIS DE LAS DIFERENTES ESTRUCTURAS TURBULENTAS EN CANALES

En la siguiente discusión se usan para mayor facilidad, los términos de *capa externa* para referirse la región donde la dinámica no viscosa domina y *capa de pared* para la región donde los efectos viscosos dominan. A diferencia del flujo medio en donde un límite entre esas dos regiones es muy clara, la interfase espacio-temporal entre esas dos regiones puede variar continuamente, con la región externa penetrando a la región de pared en algunos lugares, pero en otros no; y la capa de pared eyectando fluido hacia la capa externa.

Al comienzo de 1956 y a través de los años 60 se llevaron a cabo una serie de experimentos en la universidad de Stanford, que demostraron definitivamente que la estructura u orden en flujos de capa límite turbulenta era mucho más grande de lo que se pensaba hasta entonces. A través de técnicas de visualización, observaron la formación de estrias largas y separadas las cuales estaban alineadas en la dirección del flujo principalmente. También observaron que el medio de visualización (llámese tinta, burbujas de hidrógeno u otros) migraba lateralmente desde las regiones de flujo de alta velocidad hasta los lados de las regiones de baja velocidad. De esta manera, las concentraciones de lo que parecen ser estrias de baja velocidad se muestran en la figura 2.19

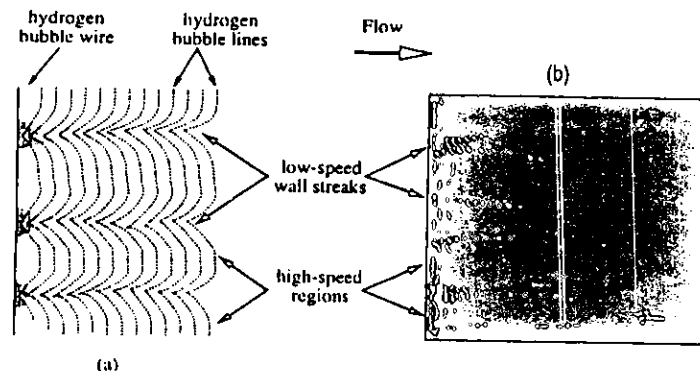


Figura 2.19 a) Vista esquemática en planta de estrias de baja velocidad en una capa límite turbulenta. a) Fotografía real de burbujas de hidrógeno. (C. R. Smith, 1996. Pág.2)

Mediciones posteriores de los campos de velocidad instantánea y la observación de estrias en dirección de la corriente, sugirieron que éstas se proyectan bien en plumas, concentradas en la parte superior del fondo, véase la figura siguiente.

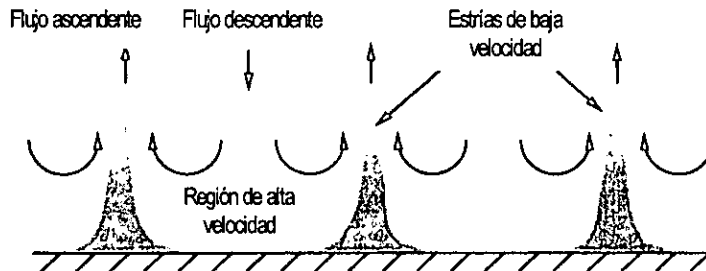


Figura 2.20 Esquema del campo de velocidad instantáneo en el plano transversal de flujo.

Estos patrones sugirieron también, que las distribuciones del flujo a baja velocidad son causadas por la convergencia del flujo en el plano transversal de éste, acompañadas por una emisión de flujo desde la pared. En cambio, el centro de las regiones de alta velocidad está caracterizado por un flujo hacia la pared y hacia fuera lateralmente. La velocidad instantánea de las líneas de corriente dentro de una región de estrias es retrasada (respecto a la media) y, de aquí que el término "estrias de baja velocidad" sea frecuentemente aplicado. Al contrario, en las zonas entre estrias, la velocidad de las líneas de corriente es más alta que la velocidad media por lo que se les conoce como "regiones de alta velocidad" o simplemente estrias.

Las estrias de pared pueden ser observadas fácilmente en algún flujo turbulento adyacente a una pared utilizando varios medios de visualización, tales como tinta en el agua o humo en el aire, y se sabe que son una característica persistente y dominante de los flujos cerca de paredes, se traten de fronteras lisas o rugosas (Grass, 1991) y aún dentro de grandes capas límite atmosféricas (Klewicki et al., 1995). Aunque las estrias son un fenómeno inestable y no uniformemente distribuido, es posible definir un espaciamiento promedio de la estria ( $\lambda$ ), en la dirección transversal. Si se adimensionaliza con la escala de la capa turbulenta, definida por  $\nu/u_*$ ,  $\lambda^+ = u_* \lambda / \nu$  donde  $(u_* = (\tau_w / \rho)^{0.5})$ ,  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $\tau_w$  es el esfuerzo cortante de pared; por tanto  $u_*$  representa una velocidad cortante equivalente) se ha encontrado un valor medio de 100 para flujos en paredes lisas en un amplio rango de números de Reynolds (Kline et al., 1967, Smith y Metzker, 1983; Klewicki et al., 1995) con valores individuales distribuidos entre 50 y 300. Por lo tanto, el espaciamiento medio de estrias es comparable a la extensión vertical de la capa de pared. Sin embargo, lejos de la pared, las regiones de estrias de baja velocidad parecen caóticas y menos organizadas que las estrias cerca de la pared, la extensión transversal  $\lambda^+$  de estas estrias usualmente es de 600 a 1000.

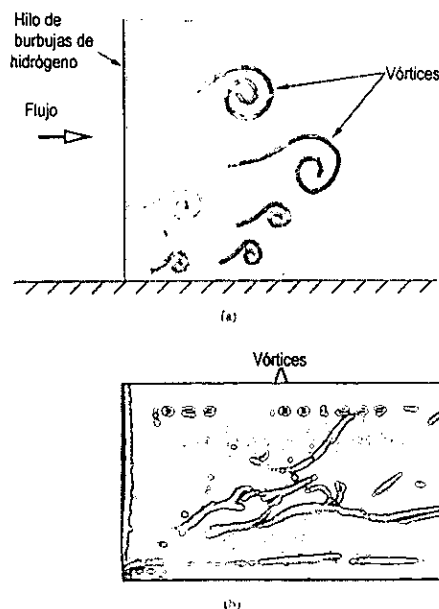
La causa de la presencia de las estrias de pared fueron y aún en la actualidad son tema de algunos debates, pero las observaciones descritas anteriormente condujeron a algunos autores (e.g. Blackwelder Y Eckelmann, 1979; Blackwelder, 1983) a sugerir que las estrias se deben a la presencia de

grandes vórtices par girando de manera opuesta entre ellos, mismos que están alineados en la dirección del flujo. Posteriormente (Robinson, 1991a) demostró que aunque los vórtices en la dirección del flujo son completamente predominantes y asociados con el desarrollo de estrias de baja velocidad, éstas son demasiado cortas en la dirección aguas abajo y sin un origen claro.

El descubrimiento de la estructura de estas estrias como rasgo dominante de las capas de pared, provocó considerable interés ya que esto sugiere que existen estructuras determinísticas repetibles, en los flujos de pared. Consecuentemente se acuñó el término "estructura coherente" e implica que la región de pared contiene ciertos módulos de flujo o estructuras básicas que dan lugar al desarrollo aparentemente ordenado observado en las capas de pared, las cuales se creía eran esencialmente aleatorias. Sin embargo, la estructura de las estrias de baja velocidad no persiste a través de la capa límite, si se visualiza más allá de ésta última, la estructura se transformará gradualmente, será más espaciada y menos organizada; eventualmente los patrones locales parecerán reflejar una compleja maraña de vórtices, incrementándose las escalas de los vórtices conforme aumenta la distancia de la pared.

En la figura 2.21 (a) se muestra una representación esquemática de los tipos de amalgamas observadas de estructuras vorticiales advectivas; por otro lado en la figura 2.21 (b) se muestra una visualización vertical típica que refleja la presencia de dos tipos de vórtices: un vórtice transversal y otro vórtice en la dirección del flujo en capas límites a bajos números de Reynolds.

La marcada transición desde las estrias de baja velocidad hasta los vórtices de varias escalas sugiere que el flujo de capa límite dependiente del tiempo, comprende aproximadamente de: (i) una



**Figura 2.21 Perfil de una capa límite. a) Esquema idealizado de la gama de las escalas de los vórtices b) Visualización real.**

región externa dominada por movimientos vorticiales de varias intensidades, orientaciones y tamaños



y (ii) una capa de pared interna que exhibe una estructura estriada persistente. La mayor parte del tiempo, la capa límite mantiene esta doble estructura, con el flujo de pared manejado principalmente por las estructuras vorticosas, las cuales son transportadas hacia la región externa justo por encima de la capa de pared. Kline *et al.* (1967) se refieren a esos intervalos de tiempo como "periodos inactivos" lo cual implica que la capa de pared esta localmente intacta con estrias observables presentes. Sin embargo, existen breves intervalos en los que las dos regiones de la capa límite interactúan fuertemente. Semejantes interacciones constituyen una característica dominante y particularmente importante del comportamiento de las capas turbulentas de pared. Durante esas interacciones, los periodos inactivos terminan en accidentes altamente localizados del bien ordenado flujo de pared. Tales eventos fueron nombrados como "burstings" por Kline *et al.* (1967), y se caracterizan por una erupción abrupta de una estria de baja velocidad, culminando con una eyección de fluido lejos de la pared, frecuentemente en la región externa de la capa límite, como se muestra en la figura 2.22, que se muestra más adelante.

Los "bursts" siempre ocurren en las estrias adyacentes a la capa de pared, primero se observa en la estria un abultamiento desde la pared, después se rompe rápidamente y eyecta flujo en la región externa. En algunas observaciones se reportan oscilaciones desarrolladas tanto en la dirección del flujo como en la dirección transversal, incrementándose en amplitud y escala hasta que ocurre el rompimiento en forma de erupción de la capa de pared. Después de que ocurre la eyección, se presenta de forma inmediata un evento conocido como "sweep" (Corino & Brodkey, 1969) en el cual un fluido de alta velocidad de la capa externa parece moverse y penetrar hacia la capa de pared, extendiéndose lejos del movimiento caótico asociado con los remanentes del burst. Para completar el burst, las estrias de pared se restablecen en el flujo de pared gracias al desarrollo de nuevas estrias y el redesarrollo de algunas de la capa límite. Sin embargo, al transcurrir un gran número de ciclos, se ha observado que la distribución espacial de las estrias y burstings se comporta aleatoriamente (Offen y Kline, 1975; Blackwelder y Haritonidis, 1983; Robinson, 1991a y b).

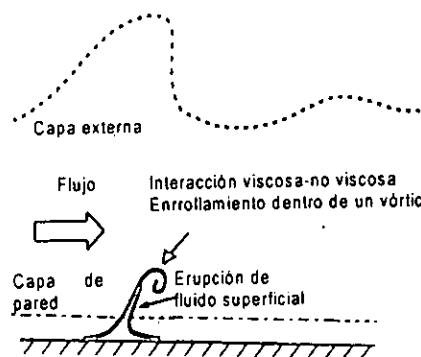


Figura 2.22 Esquema de un proceso de rompimiento turbulento (bursting), vista en perfil.

Las causas de las estrías y *burstings* no fueron claras durante muchos años. Sin embargo, en la actualidad se acepta generalmente que ambas características del flujo de pared están asociadas con la interacción del vórtice de superficie. Nótese que los *burstings* ocurren durante un breve periodo cuando la capa de pared y la región externa de la capa límite interactúan en lo que puede ser clasificado como una interacción viscosa/no viscosa fuerte e inestable (Smith *et al.*, 1991). La duración de un *burst* relacionado al periodo inactivo es bastante corta, sin embargo, la mayor producción de los esfuerzos de Reynolds ocurren durante esos eventos (Kim *et al.*, 1971; Willmarth, 1975; Cantwell, 1981). Los procesos de *bursting* también constituyen los procesos fundamentales para la producción de nueva vorticidad. Esta generación de vorticidad ocurre en la pared debido a gradientes de presión impuestos por vórtices pasajeros; durante el *bursting*, la nueva vorticidad está fuertemente concentrada en la pared seguida por una abrupta eyección en la región externa de la capa límite turbulenta. Este proceso regenerativo, en el cual la región externa es alimentada intermitentemente con nueva vorticidad, es crucial para el entendimiento de los procesos de producción de los esfuerzos de Reynolds cerca de una pared.

Townsend (1976), señaló que las estructuras de flujo en una capa límite turbulenta pueden ser divididas a *grosso modo* en movimientos "activos" e "inactivos", los primeros son aquéllos que son activos en la extracción de la energía del flujo medio a través del alargamiento de los vórtices por los gradientes de velocidad (es decir, producción turbulenta), y los movimientos inactivos son aquéllos en donde los procesos disipativos dominan. En general, los movimientos activos predominan cerca de la pared, con los movimientos inactivos dominando en tanto que el final de la capa límite se aproxime. Además las estructuras de la región externa aparecen extendidas en la mayoría de las capas límite turbulentas y parecen dominar el flujo cuando se ven sobre una base de tiempo promedio (Kovaszny *et al.*, 1990). Sin embargo, mientras que la energía significativa está contenida en esos grandes movimiento medios, ellos son básicamente inactivos, disipativos y extraen poca energía del flujo medio. Parece que esas estructuras de gran escala son creadas por unión y aglomeración de numerosas escalas más pequeñas, las estructuras vorticiales activas (Head & Bandyopadhyay, 1981; Smith *et al.*, 1991; Naguib *et al.*, 1993); este crecimiento sistemático de las escalas ha sido conceptualmente idealizado por Perry & Chong (1982), como una jerarquía de vórtices de horquilla. De esta manera, las estructuras más importantes, coherentes y activas parecen ser las estructuras de escala más pequeña, las cuales se desarrollan cerca de la pared.

Es de hacer notar que la dinámica de fluidos y la estructura de flujo en la región cerca de la pared están asociadas principalmente con la interacción entre los vórtices y la pared; esos vórtices son tridimensionales en contorno y generalmente se conocen como vórtices de horquilla o vórtices de herradura, dependiendo de la escala y forma del vórtice. La mayoría de los fenómenos observados en los flujos de pared puede ser interpretado en términos del movimiento de tales vórtices, sus

interacciones mutuas y su influencia sobre el flujo viscoso cercano a la pared. En años recientes, investigaciones detalladas han elucidado mucho de la física fundamental asociada con los vórtices tipo horquilla y su relación con otros patrones de flujo observados, como las estrias de baja velocidad.

En experimentos con obstáculos en el fondo de un canal, se han identificado principalmente, dos tipos de vórtices en la literatura: vórtices de herradura detrás de obstáculos simétricos y una estela de vórtices solitarios detrás de obstáculos no simétricos, en dirección de flujo. Ambos son razonablemente bien conocidos aunque a veces hay confusión en su nomenclatura. La estela de vórtices en varios sentidos ha probado ser un rasgo común de las estelas detrás de la mayoría de los obstáculos. Los vórtices de herradura son vórtices con contorno en forma de U que se forman donde quiera que la capa límite de vorticidad sea transportada por advección alrededor de un obstáculo. Se cree que dicha vorticidad se acumula delante del obstáculo, y que se alarga/comprime aguas abajo en dos brazos, los cuales forman la estela de los vórtices par. El sentido de la circulación es descendente frente al obstáculo, con la estela de vórtices combinándose para producir una recirculación en el centro de la estela detrás del obstáculo.

Se han hecho varios estudios aguas arriba del flujo alrededor de obstáculos en el fondo (e.g. Gregory y Walter, 1951; Morkovin, 1972; Baker, 1979,1980) a partir de éstos se reportó su dependencia del número de Reynolds. A bajos números de Reynolds el flujo de capa límite se encuentra libre de vórtices aguas arriba del obstáculo. En cambio, cuando se tienen números de Reynolds moderados el flujo se separa del fondo y se forma un vórtice simple en forma de herradura, su circulación crece conforme se incrementa el número de Reynolds. Se desarrolla entonces una estructura de vórtices cada vez más compleja, en la cual aparecen muchos más vórtices par girando en sentido opuesto y así progresivamente hasta altos números de Reynolds, en los que la capa límite se vuelve turbulenta. Aún en capas límites turbulentas completamente desarrolladas, sobrevive una estructura vorticiosa (Becker, 1980). Debe notarse que el modelo conceptual de vórtices en forma de herradura únicamente toma en cuenta un signo de la vorticidad y no puede abarcar directamente tales vórtices de rotación opuesta. Para explicar los vórtices de rotación opuesta se debe considerar la generación de vorticidad en la capa límite inferior y sobre la superficie del cuerpo.

Observaciones minuciosas de las estelas producidas por obstáculos, que a su vez generan los vórtices de herradura, muestran la existencia de más de un vórtice par (Gregory y Walker, 1956). En la mayoría de los casos las estelas contienen vórtices par anidados que alternan su sentido de rotación. Aunque se sugiere que el vórtice par dominante representa los brazos del vórtice de herradura, una observación cuidadosa sugiere que solamente los vórtices más externos se relacionan a aquellos presentes aguas arriba. Los vórtices internos (y quizá los más intensos) parecen ser producto de la estela interior y se observan solamente aguas abajo del obstáculo. A números de

Reynolds moderados, al menos los vórtices interiores son dominantes y pueden exhibir ya sea una recirculación central ascendente o descendente, de acuerdo a la naturaleza del obstáculo. A altos números de Reynolds cuando cualquiera de las dos, la estela o la capa límite y la estela sean turbulentas, es más difícil determinar la estructura de los vórtices, pero hay evidencia de la presencia de una estela de vórtices la cual sobrevive aguas abajo en el flujo medio, los relativamente pocos casos documentados parecen mostrar una recirculación central descendente (Hansen, 1975).

Los efectos de una vorticidad organizada en el sentido de la corriente en estelas pueden ser de considerable importancia: por ejemplo, modifica la estructura de la estela de manera que se incrementa significativamente el transporte lateral de momentum longitudinal entre la corriente exterior y la frontera, y puede ser el responsable de un gran incremento en el arrastre detrás de los obstáculos en capas límites.

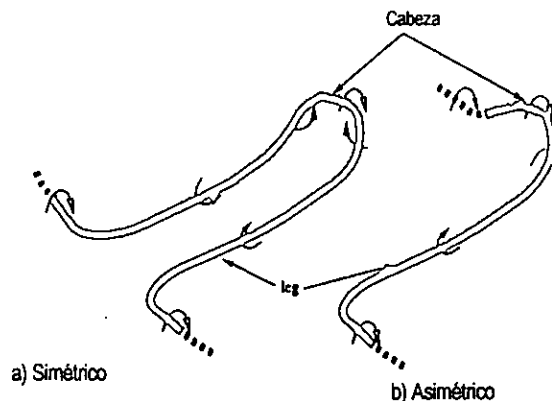


Figura 2.23 Diagrama esquemático de un vórtice de horquilla típico.

Debido a las complejidades y a la tridimensionalidad del flujo de pared, el progreso en el entendimiento de los procesos dinámicos básicos se ha postergado significativamente. Siguiendo a una primera etapa en la cual la turbulencia fue considerada como un proceso aleatorio, o de fluctuaciones estocásticas, se comprendió que los vórtices juegan un papel clave en el desarrollo y sustentación de la turbulencia (e.g. Hama, 1962, Black, 1968). Theodorsen (1952) en un tiempo muy posterior de la primera publicación sobre observaciones de las estructuras coherentes, propuso que los vórtices de horquilla (Figura 2.23 a), son una estructura de flujo importante en la turbulencia de pared, ésta estructura simétrica es el modelo conceptual más simple en el cual se puede explicar las características sobresalientes del comportamiento del flujo cerca de la pared. Sin embargo, el flujo turbulento es un entorno complejo e inestable de vórtices y perturbaciones que concurren dentro de un flujo altamente cortante en el fondo; como consecuencia, se espera que la mayoría de los vórtices en un flujo turbulento exhiban varios grados de asimetría (Figura 2.23 b).

Aún más, siguiendo las configuraciones de la figura 2.23, la porción del vórtice más lejana desde la pared forma un arco al cual se le conoce como *vórtice delantero* o *cabeza del vórtice*. Las porciones abajo del vórtice delantero usualmente están inclinadas a un ángulo pequeño ( $15^\circ$  a  $30^\circ$ )

respecto a la pared y se indican como *ala* o *rama del vórtice*. La trayectoria de una rama normalmente constituye la parte más aproximada a la pared. Comparando el arco y las estructuras que están casi en la dirección de la corriente (Figura 2.24), es evidente que ambas pueden ser consideradas como reflejo de al menos parte de una horquilla no simétrica (Figura 2.23 b), dependiendo de la extensión del vórtice delantero y/o el vórtice de rama asociado con la estructura total del vórtice.

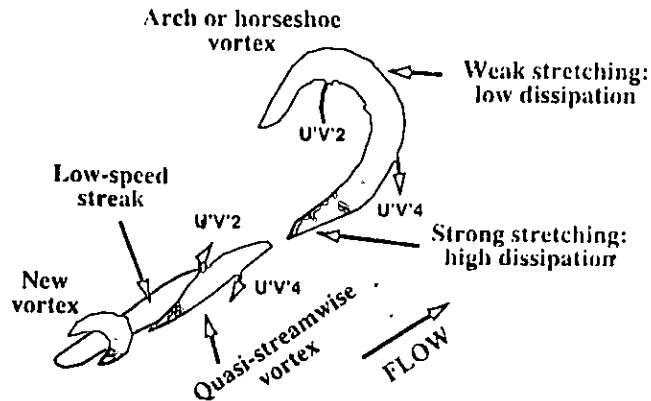


Figura 2.24 Esquema de la topología de un vórtice y regeneración vorticial en una capa límite a bajos números de Reynolds, (C. R. Smith, 1996. Pag.9).

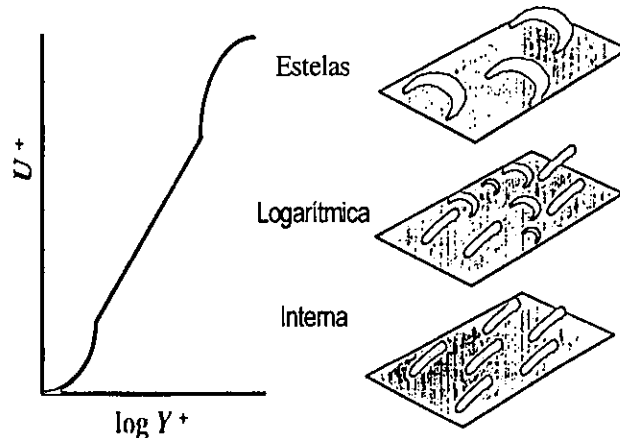
Si se compara la figura 2.23 b y 2.24 es claro que el vórtice de horquilla asimétrico de la figura 2.23 b es esencialmente una composición de dos tipos de estructuras vorticiales como se muestra en la figura 2.24.

Históricamente, un vórtice es considerado como una región en el flujo donde muchas líneas vorticosas elementales se concentran para formar un vórtice de tubo. La síntesis de este vórtice de tubo es un núcleo de vórtice rotacional, el cual proporciona un aumento a las trayectorias instantáneas de las partículas, las cuales son aproximadamente circulares alrededor del núcleo del vórtice. Trazando líneas de vorticidad instantáneas dentro de simulaciones DNS y en mediciones experimentales recientes (Moin y Kim, 1985; Grass et al., 1991), se observan numerosos vórtices tridimensionales, desplegando líneas de vorticidad asociadas y similares a los patrones que se muestran en la figura 2.23.

Recientes evaluaciones de los resultados de simulaciones numéricas directas para una capa límite a bajos números de Reynolds y flujo en un canal, ilustran lo dominante de estos vórtices de horquilla asimétricos. Robinson (1991 a, 1991 b) identificó a partir de la evaluación de resultados de DNS, arcos o vórtices de herradura y vórtices "quasi-streamwise" o sea vórtices casi en la dirección del flujo (esto implica que gran parte de la vorticidad asociada con los vórtices está alineada en la dirección del flujo), como se muestra en la figura 2.27. Estos vórtices son las dos estructuras de flujo más comúnmente detectadas.

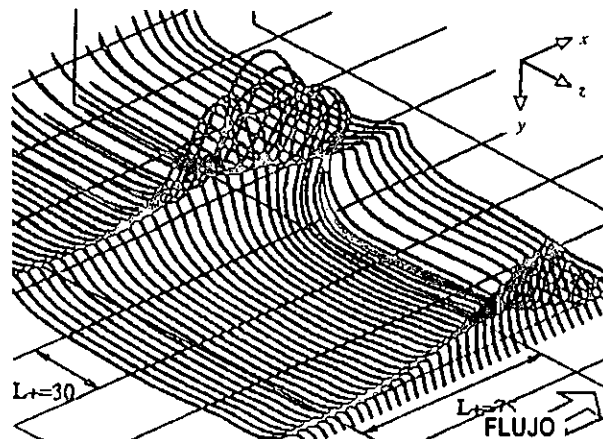
En la figura 2.25 se indica la distribución relativa de esas estructuras dentro de la capa límite, acompañadas del perfil de velocidad media que está dibujado en escala logarítmica, con las regiones

etiquetadas de acuerdo a la caracterización típica de la escala de velocidades que corresponde a las regiones respectivas. Debe enfatizarse que la escala logarítmica es potencialmente engañosa ya que la región externa realmente comprende la inmensa mayoría de la capa límite.



**Figura 2.25** Esquema de las estructuras vorticiales más comunes en diferentes regiones de una capa límite turbulenta a bajos números de Reynolds.

La figura 2.26 es un ejemplo del tipo del patrón de línea vorticosa que se desarrolla para formar un presunto vórtice de horquilla simétrico; el vórtice es formado por el trazado de una líneas de vorticidad originadas en la región cerca de la pared en un canal de paredes lisas. En general, las extremidades de las líneas vorticosas tienden a divergir de una a otra o a desarrollarse dentro de la vorticidad del flujo de fondo, por lo que es difícil definir precisamente el comienzo o el final del vórtice.



**Figura 2.26** Líneas vorticosas ilustrando la formación de un vórtice de horquilla en la región de pared.

Una capa límite turbulenta sustenta su naturaleza "turbulenta" debido a: (i) la generación de vórtices subsecuentes; y (ii) la interacción de la mezcla colectiva de vórtices en el flujo con cualquiera de los dos, el flujo cortante circundante y con la frontera sólida adyacente. La generación y/o regeneración de vórtices de horquilla se origina debido a la interacción de un vórtice existente, con el fluido de la pared, precipitando una interacción viscosa/no viscosa: un proceso en el cual el

fluido/vorticidad en la pared es concentrado y abruptamente eyectado fuera de la capa de pared. Sin embargo, las interacciones de los vórtices con el flujo cortante de fondo pueden conducir a la evolución de nuevas estructuras vorticiales. Este segundo proceso se puede concebir como una reorganización esencialmente de tipo no viscosa y como una concentración local del campo de vorticidad existente. En una capa límite, la regeneración de la nueva vorticidad y la redistribución de la existente es importante en grado crítico. Cualquier vórtice que inicialmente tiene la vorticidad concentrada en un pequeño núcleo se debilitará en tanto que la vorticidad en el núcleo se difunda radialmente hacia fuera. En ausencia de interacciones, la vorticidad se redistribuirá eventualmente hasta que el vórtice ya no sea identificable.

Las interacciones de los vórtices tridimensionales semejantes a aquéllas características de la turbulencia, dependen de los procesos del alargamiento/compresión de vorticidad. Lightill (1963), señaló que un fluido viscoso y rotacional consiste de muchos vórtices elementales de tubo, los cuales forman un bucle o rizo cerrado en todos los fluidos reales. El teorema de Kelvin indica que para un vórtice de tubo en un flujo incompresible, el producto del área transversal por la magnitud de la vorticidad local debe permanecer constante. De esta manera, cuando un vórtice de tubo se comprime a todo su largo, el área transversal se expande y la vorticidad local disminuye. A la inversa, la vorticidad se intensifica cuando el tubo se alarga. También Lighthill (1963), sugirió la importancia de esos procesos para el desarrollo de la turbulencia por primera vez, él argumentó que un proceso de alargamiento de la vorticidad cerca de la pared y una relajación del vórtice en la parte externa de la capa límite es el único modo razonable para el mantenimiento del gradiente alto de la vorticidad promedio en la región de pared de una capa límite turbulenta.

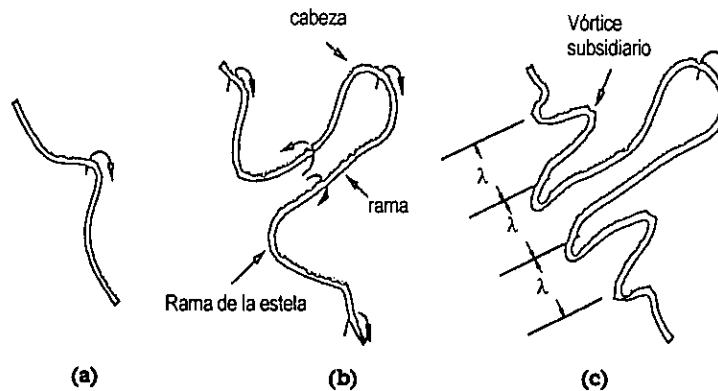
En un análisis tridimensional de la compresión/alargamiento de un flujo cortante turbulento llevado a cabo por Hon y Walker (1991), consideraron la evolución de una distorsión tridimensional otrora bidimensional, a la vorticidad transversal localizada sobre el plano de la pared. Sus resultados indican que si el fluido encima de la pared está estancado o se mueve con una velocidad uniforme, cualquier distorsión en una línea vorticiosa se propagará en forma gradual longitudinalmente a través del vórtice, pero no se amplificará. Sin embargo, si la línea vorticiosa se localiza en un flujo cortante, cualquier distorsión en ésta (por pequeña que sea) se propagará tan rápido como el vórtice que viaje por advección en el flujo cortante (Smith *et al.*, 1991).

La figura 2.27 a, muestra una simulación de la rápida deformación y expansión experimentada por una línea vorticiosa no viscosa bidimensional con una pequeña distorsión tridimensional inicial cuando se localiza en una región de flujo cortante uniforme. El vórtice se mueve de izquierda a derecha, el sentido de la vorticidad se indica por las flechas.

En la figura 2.27 b, se ve claramente la formación rápida de la cabeza del vórtice que se levanta desde la pared, subsecuentemente se flexiona hacia atrás en el flujo cortante; al mismo tiempo, las

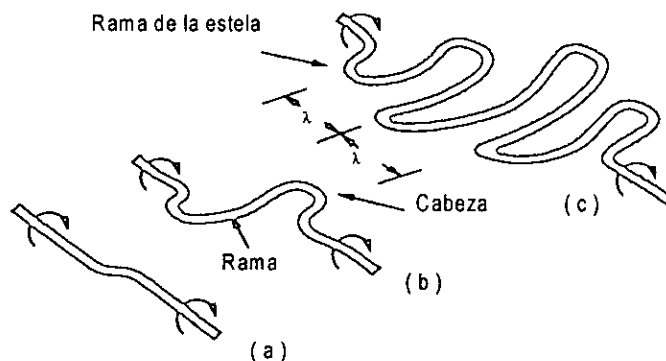
ramas del vórtice se desarrollan y se mueven en forma descendente hacia la pared.

A medida que el proceso continúa, la cabeza del vórtice se mueve más lejos de la pared, en tanto que las ramas siguen aproximándose a la pared acentuando continuamente la extensión de la distorsión en dirección del flujo. El proceso de distorsión de este vórtice es esencialmente independiente de la amplitud inicial de la distorsión (Figura 2.27 a). La perturbación original también se propaga en la dirección transversal (Figura 2.27 c), produciendo estructuras similares a los vórtices tipo horquilla, a los cuales Smith *et al.*, (1991) llamaron vórtices subsidiarios.



**Figura 2.27** Evolución de un vórtice de horquilla simétrico en un flujo cortante: (a) distribución inicial; (b) desarrollo de la cabeza y ramas del vórtice; (c) Evolución de un vórtice subsidiario y penetración de las ramas hacia el fondo..

El espaciamiento característico de las ramas en la dirección transversal indicada por  $\lambda$  en la figura 2.27 c, depende principalmente del esfuerzo cortante en cualquiera de estos casos: un cortante de fondo grande o una fuerza vorticial pequeña (en relación al cortante) produciendo espaciamientos  $\lambda$  más pequeños.



**Figura 2.28** Evolución de un vórtice de horquilla asimétrico en un flujo cortante: (a) Distribución inicial asimétrica; (b) Desarrollo de la cabeza y ramas del vórtice; (c) Evolución de un vórtice subsidiario y penetración de las ramas hacia el fondo.

Debido a que se espera que la mayoría de las distorsiones del campo de vorticidad de una capa límite sean asimétricas, Smith *et al.*, (1991) analizaron el efecto de un cortante de fondo uniforme sobre una perturbación asimétrica. En la figura 2.28 se muestra un diagrama esquemático que resume el desarrollo de este tipo de vórtices. La configuración inicial del vórtice está compuesta



por un par de líneas vorticosas bidimensionales no alineadas, las cuales se unen por medio de una sección curva. Una rama dominante o vórtice de horquilla asimétrico evoluciona de la distorsión inicial, con la rama dominante desarrollándose y moviéndose hacia la pared (Figura 2.28 b). Como el proceso avanza, los vórtices de horquilla subsidiarios se forman otra vez (Figura 2.28 c) con el desarrollo de estos vórtices subsidiarios evolucionando de un modo más simétrico; otra vez el espaciamiento transversal  $\lambda$  de las horquillas subsidiarias depende en mucho del nivel del cortante de fondo.

Para una capa límite turbulenta el perfil del cortante no es uniforme, pero es alto en la pared y disminuye gradualmente hacia la límite externo de la capa de pared. Smith *et al.* (1991), mostraron que los vórtices de horquilla que se desarrollan dentro del perfil de este tipo de capas límite desarrollan sus ramas que juntas se tuercen bruscamente y penetran a través de las regiones de mayor cortante, mientras la cabeza del vórtice se amplía y se mueve lejos de la pared. Esta expansión de la cabeza es similar a las observaciones de Robinson (1991), el observó que los arcos de vórtices (llamados cabezas) en la simulación de la turbulencia enviaban ramas hacia la pared y que los arcos desarrollaban una gran extensión transversal incrementándose a medida que la distancia de la pared aumentaba.

El comportamiento simulado de un vórtice no viscoso, inicialmente no perturbado en un flujo cortante, se puede resumir de la siguiente forma. Los vórtices que se mueven por advección en un flujo cortante desarrollan características de los vórtices de horquilla, desde las porciones del vórtice, donde la curvatura de éste es relativamente alta, con la mayoría de los contornos de esos vórtices desarrollados como horquillas asimétricas o de una sola rama. Las ramas de ese tipo de vórtices siempre se mueven hacia la pared, lo cual es una consecuencia importante de las interacciones vórtice/fondo. Como las interacciones son tridimensionales, las grandes porciones de vórtices se transforman de una vorticidad transversal o una vorticidad en dirección del flujo, con la deformación de una línea vorticiosa expandiéndose progresivamente a ambos lados: (i) sobre una gran extensión transversal, y (ii) en la dirección transversal por medio de la evolución de vórtices subsidiarios. El espaciamiento relativo entre vórtices subsidiarios decrece con el incremento del cortante de fondo y la disminución de la intensidad vorticiosa.

Con el entendimiento del comportamiento de un vórtice de horquilla individual, se pueden formar hipótesis en un modelo físico de algunos de los procesos que ocurren en una capa límite turbulenta. Los procesos no viscosos de interacción entre vórtices principalmente de más importancia son: (i) compresión de los vórtices en la dirección transversal y el alargamiento de los mismos en las zonas de mayor cortante; (ii) La expansión transversal de los vórtices y relajación de los mismos en regiones de menor cortante. (iii) La unión de vórtices produciendo el desarrollo de vórtices más grandes; y (iv) la reconexión entre vórtices formando a su vez vórtices de bucle o rizo

cerrados. Es importante apreciar que la mayoría de los procesos más importantes en la capa límite ocurren en dos o más modos paralelos. Esto se aplica a procesos efectivamente no viscosos, como a procesos viscosos. Este paralelismo es inusual en la física y hace más difícil dar una descripción balanceada de la dinámica de las capas límite turbulentas, ya que la mayoría de los eventos se puede desarrollar coincidentemente.

---

# CAPÍTULO tres

---

## ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS

### 3.1 LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Un fluido está definido como una sustancia la cual no puede contrarrestar algún esfuerzo para cambiar su forma o contorno cuando está en reposo, por tanto en este estado, un fluido no puede sostener una fuerza cortante, como lo hace un sólido. Sin embargo, un fluido si puede sostener y transmitir una fuerza cortante cuando está en movimiento. La proporcionalidad entre la fuerza cortante por unidad de área (o esfuerzo) y un gradiente de velocidad apropiado define la viscosidad de un fluido. En los fluidos se incluye a los líquidos y a los gases. Los dos fluidos más frecuentes en la naturaleza, en estado natural o incluso en las aplicaciones de la industria y la tecnología, como son los flujos en maquinarias industriales, dispositivos, o aparatos, son el agua (frecuentemente en su fase líquida) y el aire.

Los fluidos sean líquidos o gases, consisten de pequeñísimas partes llamadas moléculas, mismas que están individualmente en un estado de movimiento aleatorio. Por ejemplo, un milímetro cúbico de aire a temperatura ambiente de  $15^{\circ}\text{C}$  y a una presión de  $10302 \text{ Kg/m}^2$ , contiene aproximadamente  $3 \times 10^{16}$  moléculas y una sola gota de agua contiene  $1 \times 10^{17}$  moléculas, ¡Tantas como segundos en la edad estimada del universo!. El movimiento de las escalas grandes de un fluido le impone una variación uniforme o lenta al vector de velocidad del movimiento de cada molécula y el movimiento molecular individual no es detectable, por lo que solamente el primer movimiento (macroscópico) se puede percibir. Suponiendo que las diferentes propiedades de un fluido en movimiento como son presión, velocidad, temperatura, etc. varían continuamente con la posición y el tiempo (hipótesis de continuidad) es posible derivar las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido sin considerar el comportamiento de las moléculas individuales.

Como ya se mencionó, generalmente se acepta para el estudio de la turbulencia que un fluido se caracteriza por ser un medio continuo, es decir, carente de una estructura molecular. Se trata pues de suponer que las propiedades del fluido tal como velocidad, presión, temperatura, etc. se puedan definir como promedios a lo largo de intervalos de tiempo y regiones del espacio los cuales resultan,

por un lado, grandes comparados con las escalas correspondientes al movimiento de las moléculas, pero que por el otro lado son menores que las escalas típicas del movimiento del fluido mismo. En flujos con densidades muy bajas, la hipótesis de continuidad no es apropiada y se debe tomar en cuenta la naturaleza molecular del flujo.

Para fluidos en movimiento, se le debe dar una interpretación local al concepto de equilibrio termodinámico, de esta manera aún las ecuaciones como la ec. (3.1) siguen siendo válidas, con la diferencia de que las propiedades son funciones de la posición y el tiempo, es decir:

$$P=P(x,y,z,t), \quad \rho=\rho(x,y,z,t) \quad \text{y} \quad T=T(x,y,z,t);$$

además, sólo es necesario describir el movimiento, generalmente utilizando una descripción euleriana. Esto significa que los valores de las velocidades y propiedades termodinámicas están dados en posiciones fijas  $(x,y,z,t)$  en el dominio tiempo-espacio. La otra descripción alternativa, la lagrangiana sigue a las partículas individuales del fluido tratando su posición y propiedades termodinámicas como variables dependientes.

Para todos los gases que pueden ser tratados como un medio continuo, y para la mayoría de los líquidos, se ha observado que el esfuerzo en un punto es linealmente dependiente de la velocidad de deformación del fluido (Bird et al, 1987). Un fluido que se comporta de esa manera se define como un **fluido newtoniano**.

Ahora, si consideramos el movimiento de una superficie plana con velocidad  $U$  paralela a una segunda superficie plana estacionaria, empíricamente se encuentra que el esfuerzo cortante es directamente proporcional al gradiente de velocidad,  $\partial U/\partial x$ , es decir:

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.1)$$

Para fluidos en movimiento, la capacidad de transmitir una fuerza cortante introduce la propiedad conocida como **viscosidad dinámica** ( $\mu$ ), que es la propiedad que presenta un fluido de resistir la rapidez con que tiene lugar la deformación cuando las fuerzas cortantes actúan sobre el fluido.

La viscosidad de líquidos como el agua es una función débil de la presión pero tiene una fuerte dependencia de la temperatura. Al contrario de los gases la viscosidad de los líquidos comúnmente decrece muy rápido con el incremento de la temperatura.

### 3.1.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Cuando se estudia el comportamiento dinámico de los fluidos, uno de los aspectos más interesantes de éste, es el de los llamados fenómenos de transferencia, esto es, en la capacidad de los fluidos en movimiento, de llevar materiales y propiedades de un lugar a otro, y del mecanismo por medio del cual estos materiales y propiedades se difunden y se transmiten a través de un medio fluido.

Los procesos fundamentales de transferencia que están asociados con el movimiento de un fluido, son las transferencias de masa, calor y de cantidad de movimiento. Cada uno de estos procesos está asociado a su vez, con una ley física básica la cual ha sido formulada como un resultado de la observación y la experiencia. Los procesos y leyes pueden sintetizarse como sigue:

PROCESO	LEY QUE LO RIGE
TRANSFERENCIA DE MASA	CONSERVACIÓN DE LA MATERIA
TRANSFERENCIA DE CALOR	CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA (PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA)
TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO	SEGUNDA LEY DE NEWTON (ECUACIÓN DE MOVIMIENTO)

La segunda ley de la termodinámica y las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell son otras leyes comparables a las que se acaba de enumerar, pero de aplicación más restringida en la dinámica de fluidos. Se puede agregar que existen numerosas leyes complementarias de las anteriores, respecto a las propiedades de un medio continuo, que permiten describir los fenómenos moleculares en términos de cantidades macroscópicas. Como ejemplos de éstas se pueden mencionar: las leyes que rigen a los procesos que relacionan esfuerzos y deformaciones (la ecuación clásica de Hooke para sólidos y la ecuación para fluidos viscosos, de Newton), y las ecuaciones de estado para un gas perfecto.

El alcance y complejidad de los problemas tecnológicos que se presentan en todas las ramas de la ingeniería han dado como resultado que en ninguna de ellas pueda dejar a un lado el estudio de los procesos de transferencia. Sin embargo, para los objetivos que se persiguen en este trabajo, se utilizan básicamente la ley de la conservación de masa y la segunda ley de Newton.

### 3.1.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Para un volumen de control arbitrario  $V$  fijo en el espacio y tiempo, la conservación de masa requiere que la tasa de cambio de masa dentro del volumen de control sea igual al flujo de masa cruzando la superficie  $S$  del volumen  $V$ , es decir:

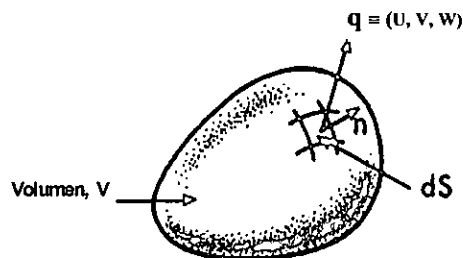


Figura 3.1 Conservación de masa.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho q \cdot n dS, \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{n}$ , es el vector unitario. Usando el teorema de la divergencia de Gauss, la integral de superficie puede ser reemplazada por una integral de volumen:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) \right] dV = 0; \quad (3.5)$$

en la cual  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) \equiv \text{div } \rho \mathbf{q}$ , ya que la ec. (3.5) es válida para cualquier tamaño de  $V$ , esto implica que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0, \quad (3.6)$$

la cual, es la ecuación de conservación de masa o **ecuación de continuidad**, misma que en coordenadas cartesianas se convierte en:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W) = 0; \quad (3.7)$$

es conveniente agrupar todos los términos que contengan a la densidad y escribir la ec. (3.7) como:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + V \frac{\partial \rho}{\partial y} + W \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.8)$$

ó

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{D\rho}{Dt} \right) + \mathcal{D} = 0, \quad (3.9)$$

donde  $D/Dt$  es la llamada la derivada sustancial o material siguiendo el movimiento y  $\mathcal{D}$  es llamada la dilatación. Para flujos con densidad constante (flujo incompresible), la ec. (3.6) se reduce a:

$$\mathcal{D} \equiv \nabla \cdot \mathbf{q} \equiv \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (3.10)$$

para cualquiera de estos flujos: permanente y no permanente.

### 3.1.3 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La transferencia de Momentum en un fluido incluye el estudio del movimiento de los fluidos así como de las fuerzas que producen dicho movimiento. A partir de la segunda ley de Newton del movimiento se sabe que la fuerza se relaciona directamente con la rapidez de cambio del momentum de un sistema.

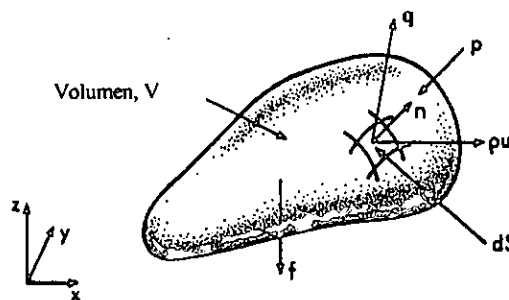


Figura 3.2 Conservación de cantidad de movimiento.

La segunda ley de movimiento de Newton establece que la tasa de cambio temporal del momento lineal es igual a la suma de las fuerzas actuantes. Para pequeños elementos de fluido

tratados como un sistema cerrado (es decir, que no hay flujo a través de sus fronteras), la segunda ley de Newton es igual a:

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{q} dV = \Sigma F.$$

Tasa o rapidez de cambio de momentum      Suma de fuerzas externas

El principio del momentum establece que, la tasa de cambio temporal del momento lineal de una región material es igual a la suma de fuerzas en la región. Se pueden considerar dos tipos de fuerzas: las fuerzas de cuerpo, las cuales actúan sobre el volumen de la región material y las fuerzas de superficie, la fuerza neta sobre la región consta de dos integrales, escribiéndolas en notación indicial:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho q_i dV = \int_{v(t)} \rho f_i dV + \int_{s(t)} \Sigma_i ds, \quad (3.11)$$

en la expresión anterior,  $\rho q_i$  representa la cantidad de movimiento (masa por velocidad),  $f_i$  representa las fuerzas másicas, es decir, fuerzas por unidad de masa y  $\Sigma_i$  representa las fuerzas de superficie por unidad de área, los cuales se pueden expresar como  $\Sigma_i = \tau_{ij} n_j$ . Utilizando el teorema de Gauss que permite convertir una integral de superficie en una integral de volumen y viceversa, se obtiene:

$$\int_{s(t)} \tau_{ij} n_j dS = \int_{v(t)} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV.$$

Así el balance de cantidad de movimiento para la porción de fluido seleccionado está expresado por:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho q_i dV = \int_{v(t)} \rho f_i dV + \int_{v(t)} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV, \quad (3.12)$$

la relación integral ec. (3.12), es válida para cualquier volumen material arbitrario  $V(t)$ , lo cual es posible si:

$$\rho \frac{Dq_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (3.13)$$

en todos los puntos del fluido. Esta ecuación diferencial proporciona la aceleración del fluido en términos de la fuerza de volumen local y el tensor de esfuerzos. Las fuerzas de superficie contribuyen a la aceleración del fluido, solamente si el tensor de esfuerzos varía con la posición en el fluido, o más precisamente, si la divergencia de  $\tau_{ij}$  es diferente de cero, respecto al segundo índice que determina la dirección del elemento de superficie; cuando  $\partial \tau_{ij} / \partial x_j = 0$ , el efecto de las fuerzas de superficie sobre un elemento material es que tienden a deformarlo sin cambio de su momentum.

Considerando como única fuerza de cuerpo, la fuerza de gravedad, la ec. (3.13), es igual a:

$$\rho \frac{Dq_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3.14)$$

Por otro lado, de la relación constitutiva de los fluidos Newtonianos, se acepta que para que un fluido se considere como tal, la relación esfuerzos-tasas de deformación deber ser lineal. Así para fluidos incompresibles, la relación constitutiva es la siguiente:

$$\tau_{ij} = -P \delta_{ij} + 2 \mu e_{ij}, \quad (3.15)$$

en donde  $P$  es la presión,  $e_{ij}$ , es un elemento de la matriz del tensor de tasas de deformación  $E_{ij}$ , la cual está definida por medio de la ec. (2.5). Sustituyendo esta última en la ec.(3.15) y el resultado en la ec. (3.14):

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -P \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right), \\ \rho \frac{Dq_i}{Dt} &= \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -P \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) \right), \text{ dividiendo entre } \rho: \\ \frac{Dq_i}{Dt} &= g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{\rho} P \delta_{ij} + \nu \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

La ec. (3.16) representa las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible en su forma indicial.

Las condiciones de frontera convenientes para la ecuación anterior dependen del problema a resolver. Si una superficie sólida forma la frontera del dominio computacional, es necesario fijar todos los componentes de la velocidad igual a las componentes de la velocidad de la superficie sólida, es decir, no puede haber deslizamiento en la interfase fluido/sólido y no hay movimiento relativo normal a la superficie. Para una interfase líquido/líquido, ambos, las velocidades y los esfuerzos deben ser continuos.

Para el flujo alrededor de un cuerpo sumergido, se requieren también condiciones de frontera en todo el dominio. Para las fronteras de entrada y salida del flujo es apropiado especificar todas las variables dependientes. Sin embargo, debido a que los términos viscosos en la ecuación gobernante en general son despreciables, lejos del cuerpo sumergido se permite tratar el flujo como localmente no viscoso, de esta manera solamente se requiere una condición de frontera en la salida del flujo.

Se deben resolver las ecuaciones completas cuando se presentan regiones de flujo separado. La solución de las ecs. (3.10) y (3.16) para pequeños valores del número de Reynolds  $Re$  ( $\leq 200$ ), describen un flujo laminar. Sin embargo, para altos números de Reynolds cuando el flujo es turbulento, las ecs. (3.10) y (3.21) en tres dimensiones proporcionan la solución en forma estricta, pero para soluciones numéricas se requiere una malla muy fina para representar adecuadamente las escalas más pequeñas de la turbulencia.

Si el movimiento medio de las escalas grandes es uniforme o de baja frecuencia (es decir, computacionalmente más eficiente) es preferible para propósitos ingenieriles, considerar ecuaciones promediadas en el tiempo en lugar de las ecuaciones señaladas directamente.



Para usos posteriores, la ec. (3.16) se escribe en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] \\
 \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

### 3.2 LAS ECUACIONES MEDIAS DE REYNOLDS

El sistema de ecuaciones de la ecs. (3.10) y (3.16) es aplicable a flujos turbulentos, sin embargo como ya se señaló, no puede resolverse numéricamente en forma directa, ya que las variables que aparecen en dichas ecuaciones son cantidades instantáneas cuyas escalas de tiempo y espacio del movimiento son muy pequeñas; cualquier aproximación que se considere sobre estas variables involucra una complejidad numérica que rebasa las computadoras más modernas en la actualidad. Como ejemplo pueden considerarse las simulaciones directas (DNS) o las simulaciones de grandes remolinos (LES), que consumen gran cantidad de memoria y tiempos excesivos de CPU, en computadoras CRAY, sólo para resolver casos simples o fenómenos locales, como son las estelas producidas por un obstáculo, la formación de vórtices, etc. (Lesieur, 1993). Se considera que en un flujo típico se pueden requerir hasta  $10^5$  puntos de malla para resolver sólo un  $\text{cm}^3$  del dominio del flujo. Es por lo anterior que en el desarrollo de este trabajo se optó por una descomposición estadística de las variables en analogía con el comportamiento espectral de ellas en el espacio y en el tiempo.

Las variables  $F(x,t)$  se descomponen entonces en la suma de sus valores medios  $\bar{F}(x,t)$  y un residuo  $f(x,t)$  llamado fluctuación turbulenta, (ver figura 2.5), tal que:

$$F = \bar{F} + f, \tag{3.18}$$

donde  $\bar{F}$  es un valor promediado en el tiempo definido como:

$$\bar{F} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} F dt. \tag{3.19}$$

El promedio de  $F$  se lleva a cabo en un intervalo de tiempo  $t_0$  que es grande con respecto al tiempo de oscilación turbulenta, pero pequeño en relación con el tiempo de variación de las propiedades de flujo debido a otros factores no turbulentos. La predicción de flujos turbulentos se basa únicamente en promedios en el tiempo de propiedades turbulentas, dado que estas varían mucho más gradualmente en el espacio y no se requiere una malla demasiado fina para la solución numérica. Con esta descomposición, el sistema de ecuaciones se transforma en un sistema de ecuaciones estadísticas, sobre el cual, se hacen nuevas aproximaciones.

### 3.2.1 TEOREMAS DE REYNOLDS

Los postulados introducidos por Reynolds (1894), permiten obtener las ecuaciones estadísticas. Estos conceptos se aplican sobre las variables físicas:

1. **Linealidad:**

$$\begin{aligned}\overline{F+G} &= \overline{F} + \overline{G}, \\ \overline{aF} &= a\overline{F}, \\ a &= a,\end{aligned}\tag{3.20}$$

donde  $F$  y  $G$  son funciones del espacio y del tiempo,  $a$  es una constante cualquiera y la barra sobre las funciones ( $\overline{\quad}$ ) es un operador que indica promedio.

2. **Conmutatividad** con las operaciones de derivación y de integración:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{F}}{\partial s} &= \overline{\frac{\partial F}{\partial s}}, \\ \int \overline{F} ds &= \overline{\int F ds},\end{aligned}\tag{3.21}$$

donde  $s$  representa a  $x_j$ .

3. **Invarianza:**

$$\overline{F \cdot G} = \overline{F} \cdot \overline{G};\tag{3.22}$$

este último axioma es esencial para desarrollar la teoría, implica: en particular las siguientes propiedades importantes:

$$\begin{aligned}\overline{F} &= F, \\ \overline{f} &= (\overline{F - F}) = 0, \\ \overline{F \cdot G} &= \overline{F} \cdot \overline{G}, \\ \overline{F \cdot g} &= 0,\end{aligned}\tag{3.23}$$

donde  $f$  y  $g$  son las fluctuaciones turbulentas de las funciones  $F$  y  $G$  respectivamente. Debe notarse que el promedio de un producto no lineal entre fluctuaciones turbulentas ( $\overline{fg, f^2}$ ) no necesariamente es cero.

Tomando las ecuaciones de continuidad y de Navier - Stokes, y siguiendo la técnica utilizada por Reynolds (1894), se desarrollan las ecuaciones para las propiedades medias de un flujo turbulento. Para hacer esto, se expresan las variables físicas como la suma de un valor medio de la variable y una fluctuación instantánea sobre la media, de acuerdo a la ecuación (3.23), obteniéndose el siguiente esquema:

$$\left. \begin{aligned}U_i &= \overline{U_i} + u_i \\ C_\alpha &= \overline{C_\alpha} + c_\alpha\end{aligned}\right\}.\tag{3.24}$$

### 3.2.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Aplicando la descomposición de la ec. (3.24), en la ecuación de continuidad (3.10) se obtiene:

$$\frac{\partial(U_j + u_j)}{\partial x_j} = 0; \quad (3.25)$$

una vez que esta ecuación es promediada y se le aplican los axiomas de Reynolds se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.26)$$

de donde se deduce que:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (3.27)$$

La última ecuación implica que:

$$\frac{\partial(u_j \varphi)}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi \frac{\partial u_j}{\partial x_j}; \quad (3.28)$$

promediando y aplicando los teoremas de Reynolds (1894):

$$\frac{\partial(\overline{u_j \varphi})}{\partial x_j} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j}, \quad (3.29)$$

donde  $\varphi$  es cualquier fluctuación turbulenta. Esta última ecuación es utilizada en simplificaciones posteriores.

### 3.2.3 ECUACIÓN PARA LA VELOCIDAD

Aplicando la descomposición de Reynolds a la ecuaciones de Navier-Stokes se tiene:

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial t} + (\bar{U}_j + u_j) \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j^2}, \quad (3.30)$$

desarrollando la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \left( \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \\ & -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + g_i + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

A continuación se analizan cada uno de los términos considerando los axiomas de Reynolds:

☑ *término de razón de cambio:*

$$\left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t}. \quad (3.32)$$

☑ *término de advección:*

$$\begin{aligned} & \left( \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \left( \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ & = \left( \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \left( \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

☑ término de presión:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x_i} \right). \quad (3.34)$$

☑ término de difusión viscosa:

$$v \left( \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \right) = v \left( \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) = v \left( \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) = v \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j^2}. \quad (3.35)$$

Sustituyendo estos desarrollos en la ecuación original se tiene:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \left( U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i + v \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}, \quad (3.36)$$

reacomodando y sustituyendo la ec. (3.34), con  $\phi = u_i$ , en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i + v \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}. \quad (3.37)$$

Esta es la ecuación utilizada para la **modelación del movimiento medio** de un flujo. Se observa que a partir del término de advección aparece un esfuerzo efectivo turbulento, llamado esfuerzo de Reynolds, el cual es de magnitud  $\bar{u}_i \bar{u}_j$ . Cabe destacar una vez más que es justamente la no linealidad del término advectivo una de las dificultades más importantes en la Mecánica de Fluidos, e implica, en principio, que las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes impliquen desarrollos teóricos y numéricos complicados.

### 3.2.4 ECUACIÓN DE CONCENTRACIÓN DE LA MASA DEL CONTAMINANTE

Se introduce esta ecuación debido a que más adelante se utilizará para determinar las trayectorias de las partículas fluidas. Aplicando la descomposición de Reynolds ec. (3.24) a la ecuación de conservación de especies se tiene:

$$\frac{\partial (\bar{C}_\alpha + c_\alpha)}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial (\bar{C}_\alpha + c_\alpha)}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 (\bar{C}_\alpha + c_\alpha)}{\partial x_j^2}, \quad (3.38)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} \right) + \left( U_j \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j} \right) = D \left( \frac{\partial^2 \bar{C}_\alpha}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 c_\alpha}{\partial x_j^2} \right), \quad (3.39)$$

donde D es el coeficiente de difusión molecular, promediando cada uno de los términos y aplicando los teoremas de Reynolds:

☑ término de la razón de cambio:

$$\left( \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} \right) = \frac{\partial C_\alpha}{\partial t}. \quad (3.40)$$

☑ término de advección:

$$\begin{aligned} \left( \bar{U}_j \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{C}_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j} \right) &= \left( U_j \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j} \right) \\ &= \left( U_j \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j} \right) = \left( U_j \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

☑ término de difusión molecular:

$$D \left( \frac{\partial^2 \bar{C}_\alpha}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 c_\alpha}{\partial x_j^2} \right) = D \left( \frac{\partial^2 \bar{C}_\alpha}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 c_\alpha}{\partial x_j^2} \right) = D \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x_j^2} \quad (3.42)$$

sustituyendo los términos en la ecuación de conservación de especies se tiene:

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + \left( U_i \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_i} \right) = D \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x_j^2} \quad (3.43)$$

sustituyendo la ec. (3.29) con  $\varphi = c_\alpha$ , en la ec. (3.43) se obtiene la ecuación media de la concentración de especies:

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + U_i \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_i} = D \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x_j^2} - \frac{\partial u_i c_\alpha}{\partial x_j} \quad (3.44)$$

en las ecs. (3.38), (3.39), (3.42), (3.43) y (3.44),  $D$  es el coeficiente de difusión molecular. Al igual que en las ecuaciones medias de velocidad, aparece un término turbulento, que resulta del término de advección.

### 3.3 LA MODELACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE TURBULENCIA

Anteriormente se derivaron las ecuaciones estadísticas que permiten el estudio de la dispersión de contaminantes en la atmósfera, la consideración de este procedimiento introduce nuevas incógnitas que es necesario representar de alguna forma. Estas incógnitas son las que generan el desarrollo de la modelación matemática de la turbulencia en Mecánica de Fluidos, con variables aleatorias centradas en un punto.

Particularmente son los términos  $u_i u_j$ ,  $u_i c_\alpha$  que aparecen en las ecuaciones medias de velocidad y concentración de especies, respectivamente, las que introducen el problema de la cerradura en las ecuaciones que resuelven nuestro problema en particular; las leyes suplementarias llamadas comúnmente "leyes de cerradura" conducen a un sistema de ecuaciones que permite ser resuelto mediante algún procedimiento numérico. En la bibliografía suelen encontrarse comúnmente tres tipos de modelos: los modelos algebraicos o modelos de orden cero, los modelos de primer orden y modelos de orden superior.

Los modelos de orden cero y de orden uno consisten en representar los momentos de segundo orden por medio de coeficientes turbulentos  $\nu_T$  y  $K_C$ , para las tensiones de Reynolds y el

flujo de masa, respectivamente. Si estos coeficientes son representados mediante ecuaciones empíricas o ajustados mediante optimizaciones numéricas o experimentales, se dice que existe una modelación de orden cero. Si los coeficientes son representados mediante una ecuación de evolución, que generalmente es la energía cinética de la turbulencia, el modelo se dice que es de primer orden a una ecuación; en otros desarrollos se consideran dos ecuaciones de evolución, una para la energía cinética de la turbulencia y otra para su disipación, en ese caso se dice que se trata de un modelo de turbulencia de primer orden a dos ecuaciones.

Existen otros métodos conocidos como de 'orden superior' desarrollados recientemente, los cuales consisten en establecer una ecuación de evolución para los momentos de segundo orden, donde los coeficientes equivalentes no intervienen más (Berezowsky, 1994). Estos métodos son los más prometedores ya que permiten representar el comportamiento de un fenómeno físico que evoluciona en el tiempo y en el espacio con mayor claridad. Sin embargo, la solución numérica de estas ecuaciones requiere de computadoras de gran capacidad, además de un tiempo elevado de CPU y en consecuencia un alto costo.

En este trabajo se incluyen en las ecuaciones los coeficientes  $(\nu_T, K_C)$ , los cuales son evaluados con modelos de turbulencia. Para el coeficiente de viscosidad turbulenta se utiliza en primera instancia un modelo de orden cero y posteriormente un modelo de primer orden a dos ecuaciones, para el coeficiente de difusión turbulenta se emplea un modelo de 'orden cero', es decir, como constantes optimizadas dependiendo del flujo a tratar. Para esto se desarrollan dos ecuaciones de evolución, una relacionada con los mecanismos que contribuyen a la 'creación de la turbulencia' y otra, relacionada con los mecanismos que 'destruyen la turbulencia'.

### 3.3.1 MODELOS DE ORDEN CERO

Estos modelos consisten en evaluar coeficientes de viscosidad, y difusión turbulentos equivalentes  $(\nu_T, K_C)$ , los cuales no son una propiedad física del fluido, contrariamente a la viscosidad molecular  $\nu$ , y a la difusión molecular  $D$ , sino más bien son parámetros que caracterizan los efectos de la turbulencia de un flujo. Evidentemente estos coeficientes no son definidos para flujos laminares o en ausencia de movimiento. En toda generalidad estos coeficientes deberían ser un tensor de cuarto orden; sin embargo, dada la complejidad de cálculo que este tensor implicaría, se considera una hipótesis de isotropía que permite representar este tensor mediante un escalar en un determinado flujo, (Sini, 1986).

#### 3.3.1.1 MODELO DE VISCOSIDAD TURBULENTA $\nu_T$

Este coeficiente relaciona las tensiones de Reynolds  $u_i u_j$  con los gradientes medios de velocidad; en otras palabras, el tensor de cantidad de movimiento por analogía con la ley de

viscosidad de Newton, puede ligarse al tensor de deformación de velocidades medias introduciendo el coeficiente de viscosidad turbulenta equivalente (Boussinesq, 1877). Para un modelo de orden cero, esto es:

$$-\overline{u_i u_j} + \frac{\overline{u_i u_j}}{3} \delta_{ij} = \nu_T \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.45)$$

Muchas soluciones se han propuesto para evaluar el coeficiente de viscosidad turbulenta  $\nu_T$  (Launder y Spalding, 1972). En general, el análisis dimensional muestra que puede considerarse proporcional a una escala de longitud (que puede ser el diámetro de la chimenea de emisión o una relación que tome en cuenta la longitud de mezcla) y una escala de velocidad (que puede ser la velocidad de emisión máxima o una relación que involucre la energía cinética de la turbulencia). Se puede considerar, además, un modelo que tome en cuenta la anisotropía del flujo, lo cual implica que deben de definirse tres coeficientes de viscosidad, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\overline{u_i u_j} + \frac{\overline{u_i u_j}}{3} \right) = (\nu_{T1} \delta_{i1} \delta_{1m} + \nu_{T2} \delta_{i2} \delta_{2m} + \nu_{T3} \delta_{i3} \delta_{3m}) \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_l \partial x_m} \quad (3.46)$$

Expandiendo la ecuación anterior para cada una de las relaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\overline{u_1 u_1} + \frac{\overline{u_1 u_1}}{3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\overline{u_1 u_2} + \frac{\overline{u_2 u_2}}{3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\overline{u_1 u_3} + \frac{\overline{u_3 u_3}}{3} \right) &= \nu_{T1} \frac{\partial^2 \overline{U}_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \nu_{T2} \frac{\partial^2 \overline{U}_1}{\partial x_2 \partial x_2} + \nu_{T3} \frac{\partial^2 \overline{U}_1}{\partial x_3 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\overline{u_2 u_1} + \frac{\overline{u_1 u_1}}{3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\overline{u_2 u_2} + \frac{\overline{u_2 u_2}}{3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\overline{u_2 u_3} + \frac{\overline{u_3 u_3}}{3} \right) &= \nu_{T1} \frac{\partial^2 \overline{U}_2}{\partial x_1 \partial x_1} + \nu_{T2} \frac{\partial^2 \overline{U}_2}{\partial x_2 \partial x_2} + \nu_{T3} \frac{\partial^2 \overline{U}_2}{\partial x_3 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\overline{u_3 u_1} + \frac{\overline{u_1 u_1}}{3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\overline{u_3 u_2} + \frac{\overline{u_2 u_2}}{3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\overline{u_3 u_3} + \frac{\overline{u_3 u_3}}{3} \right) &= \nu_{T1} \frac{\partial^2 \overline{U}_3}{\partial x_1 \partial x_1} + \nu_{T2} \frac{\partial^2 \overline{U}_3}{\partial x_2 \partial x_2} + \nu_{T3} \frac{\partial^2 \overline{U}_3}{\partial x_3 \partial x_3} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Si se considera la hipótesis de que existe isotropía en los planos horizontales, se puede suponer que  $\nu_{T1} = \nu_{T2}$ ; en cuanto al coeficiente  $\nu_{T3}$  este dependerá de la estructura del flujo vertical, teniendo en cuenta además la producción o la destrucción de la energía cinética turbulenta por las fuerzas de gravedad. El valor de estos coeficientes se ha deducido ya, de mediciones experimentales para casos simples (Gaillard, 1980).

### 3.3.1.2 MODELO DE DIFUSIÓN TURBULENTO $K_c$

En este modelo el coeficiente de difusión turbulenta  $K_c$ , puede ligarse al coeficiente de viscosidad turbulenta  $\nu_T$  por medio del número de Schmidt turbulento definido por:

$$Sc_\tau = \frac{\nu_T}{K_c} \quad (3.48)$$

En forma análoga a (3.47) se puede escribir la ecuación para el flujo de especies:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i C_\alpha}) = (K_{c1} \delta_{i1} \delta_{1m} + K_{c2} \delta_{i2} \delta_{2m} + K_{c3} \delta_{i3} \delta_{3m}) \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x_l \partial x_m} \quad (3.49)$$

para un flujo tridimensional:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{u}_1 c_\alpha) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{u}_2 c_\alpha) - \frac{\partial}{\partial x_3} (\bar{u}_3 c_\alpha) = K_{c1} \frac{\partial^2 \bar{C}_\alpha}{\partial x_1 \partial x_1} + K_{c2} \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x_2 \partial x_2} + K_{c3} \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x_3 \partial x_3}; \quad (3.50)$$

en el caso de considerar isotropía en todos los planos, se tiene:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_j c_\alpha) = K_c \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (3.51)$$

### 3.3.2 MODELOS DE PRIMER ORDEN

Son los modelos de turbulencia más utilizados para la simulación de flujos turbulentos debido a que se adaptan con relativa facilidad a un gran número de flujos. Sin embargo, estos modelos no reproducen adecuadamente todos los mecanismos que intervienen en el proceso de creación/destrucción de la turbulencia; por ejemplo, no reproducen adecuadamente flujos fuertemente disipativos o flujos con una dirección principal, ya que estos modelos consideran una isotropía local de la turbulencia (Rodi, W., 1980). No obstante, pueden representar satisfactoriamente los flujos que en este trabajo se consideran.

#### 3.3.2.1 MODELO $\kappa$ - $\epsilon$

De manera clásica las tensiones de Reynolds se esquematizan en analogía a la expresión de esfuerzos moleculares en un flujo laminar (Boussinesq, 1877) como:

$$-u_i u_j = \nu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \kappa, \quad (3.52)$$

que es una expresión análoga a la ec. (3.46),  $\nu_T$  es el coeficiente de viscosidad turbulenta que, a diferencia de los modelos de orden cero, ya no es una constante, sino que evoluciona en el espacio y en el tiempo. El modelo de dos ecuaciones  $\kappa$ - $\epsilon$  que se presenta se basa en la representación de la viscosidad turbulenta equivalente  $\nu_T$  mediante la siguiente expresión:

$$\nu_T = C_\mu \frac{\kappa^2}{\epsilon}, \quad (3.53)$$

en la que se considera una ecuación de evolución de la energía cinética de la turbulencia  $\kappa$  y otra de su disipación  $\epsilon$ . El coeficiente  $C_\mu$  se determina experimentalmente a partir de la hipótesis de equilibrio (producción=disipación), o puede ser calculado a partir de relaciones empíricas destinadas a adaptar el valor de esta constante a cada problema en particular. El valor de este coeficiente en el modelo estándar es  $C_\mu = 0.09$ , sin embargo este valor no es universal y se sugiere calibrarlo de acuerdo al tipo de aplicación.

#### ECUACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA

A partir de la ecuación media de la velocidad se puede obtener una ecuación exacta para los esfuerzos de Reynolds, de la misma manera a partir de ésta también se puede obtener una expresión exacta, ¡aunque abierta! de la ecuación de evolución de la energía cinética de la turbulencia



$\kappa = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ , con  $i = j$ , en la siguiente forma:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + U_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta g_i u_i \theta - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} - \frac{u_m u_m}{2} u_j - \frac{u_j p}{\rho_N} \delta_{ij} \right). \quad (3.54)$$

RAZÓN DE CAMBIO DE $\kappa$	TÉRMINO DE ADVECCIÓN	P TÉRMINO DE PRODUCCIÓN	B PRODUCCIÓN/DESTRUCCIÓN POR FUERZAS DE ARQUIMEDES	$\epsilon$ DISIPACIÓN	TRANSPORTE DIFUSIVO: VISCOSO	CONVECTIVO	FLUCTUACIONES DE PRESIÓN
-----------------------------	----------------------	----------------------------	---	--------------------------	------------------------------	------------	--------------------------

Esta ecuación implica que la velocidad de cambio de la energía cinética de la turbulencia ( $\kappa$ ) se equilibra por diferentes procesos físicos. La energía cinética turbulenta es producida principalmente por la interacción de los esfuerzos de Reynolds y los gradientes de velocidad media, esto es, por el término ( $P$ ) en la ecuación anterior (Rodi, 1982). Este término de producción ( $P$ ), se modela utilizando la ecuación que define el tensor de Reynolds, obteniéndose:

$$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \nu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \quad (3.55)$$

En situaciones de flujos con flotación, la energía cinética turbulenta puede ser producida o destruida por un intercambio con la energía potencial del sistema, este proceso está representado por el término ( $B$ ) en la ec. (3.54), y se puede modelar empleando la ecuación de flujo de calor turbulento, y la definición del número de Prandtl turbulento, que se incluirá posteriormente:

$$\beta g_i u_i \theta = \beta g_i \frac{\nu_T}{Pr_T} \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.56)$$

En la ecuación anterior  $u_i \theta$ , representa el producto de las fluctuaciones de velocidad y temperatura, respectivamente. Un análisis de orden de magnitud demuestra que el término de transporte viscoso es despreciable a altos números de Reynolds (Mompean, 1989). El término de difusión convectiva y el término de difusión por fluctuaciones de presión se pueden modelar conjuntamente con ayuda de la ley del primer gradiente de la manera siguiente:

$$\frac{\overline{u_m u_m}}{2} u_j + \frac{p}{\rho} u_i \delta_{ij} = -\frac{\nu_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}, \quad (3.57)$$

en donde  $\sigma_\kappa$  es una constante de modelación, conocida también como el número de Prandtl de la energía cinética. El término de disipación ( $\epsilon$ ), transforma directamente la energía cinética de la turbulencia en energía interna del fluido por acción viscosa y siempre es un término disipativo. Este término se calcula por medio de una ecuación de evolución.

Sustituyendo todos los términos considerados en la ec. (3.54), se obtiene la ecuación para la modelación de la energía cinética de la turbulencia:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + U_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = P + B + \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right), \quad (3.58)$$

donde los términos  $P$  y  $B$  se definen de la siguiente manera:

$$P = v_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (3.59)$$

$$B = \beta g_m \frac{v_T}{Pr_T} \frac{\partial T}{\partial x_m} \quad (3.60)$$

y  $\sigma_K$  es una constante de modelación, conocida también como el número de Prandtl de la energía cinética.

**ECUACIÓN DE LA DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE LA TURBULENCIA**

La ecuación exacta para la disipación de la energía cinética turbulenta  $\epsilon$ , se puede obtener a partir de la ecuación media de la velocidad (Sini, 1986):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - 2\nu^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_m} - 2\nu \beta g_i \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial \theta}{\partial x_m} \\ \text{CAMBIO} & \quad \text{TÉRMINO} & \text{PRODUCCIÓN POR} & \quad \text{DISIPACIÓN DE } \epsilon & \quad \text{FUERZAS DE ARQUIMEDES} \\ \text{DE } \epsilon & \quad \text{CONVECTIVO} & \text{AGITACIÓN} & & \\ -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) & - 2\nu u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_m \partial x_j} & \text{PRODUCCIÓN-DESTRUCCIÓN POR MOVIMIENTO MEDIO} & & \\ + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) & - \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial p}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) & \text{DIFUSIÓN VISCOSA} & \quad \text{DIFUSIÓN POR AGITACIÓN} & \quad \text{DIFUSIÓN POR FLUCTUACIONES DE PRESIÓN} \end{aligned} \quad (3.61)$$

los términos de producción por agitación y disipación de  $\epsilon$ , se modelan en conjunto. La modelación toma en cuenta la influencia de fuerzas de flotación como función de B (Rodi, 1978), por lo tanto:

$$-2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - 2\nu^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_m} = C_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{K} (P + C_{\epsilon_3} B) - C_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{K} \quad (3.62)$$

donde (P) y (B) representan la producción total de la energía cinética de la turbulencia, y se definieron en las ecs. (3.59) y (3.60).

Al igual que para la ecuación de la energía cinética, a través de un análisis de orden de magnitud (Mompean, 1989) se puede demostrar que a altos números de Reynolds los términos de difusión viscosa y de producción-destrucción por movimiento medio, son despreciables en comparación con los demás términos.

Asociando los términos de difusión por agitación y difusión por fluctuaciones de presión, estos términos también se pueden modelar utilizando la ley del primer gradiente (Mompean, 1989):

$$u_j \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} + 2\nu \left( \frac{\partial p}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) = - \frac{\nu}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \quad (3.63)$$

la ecuación para la modelación de la disipación de la energía cinética es:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{K} (P + C_{3\epsilon} B) - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \quad (3.64)$$

en la cual se introducen cuatro constantes de modelación:  $C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$ ,  $C_{3\epsilon}$ , y  $\sigma_\epsilon$ .

**CONSTANTES DEL MODELO  $\kappa - \epsilon$** 

Las constantes empíricas involucradas en las ecs. (3.58 y 3.64) se determinan experimentalmente. Por ejemplo, en un flujo permanente aguas abajo los términos  $P + B$  son nulos, y la única constante que aparece es  $C_{2\epsilon}$ ; a partir de mediciones experimentales se ha encontrado que dicha constante varía entre 1.8 y 2.0. En flujos cortantes sin flotación  $P = \epsilon$ , combinando las ecs. (3.53 y 3.54) se ha obtenido que  $C_{\mu} = (uv / \kappa)^2$ , para la cual, a partir de mediciones se ha establecido su valor igual a 0.09. Rodi (1980), demostró que para que el modelo reproduzca el perfil logarítmico de velocidades cerca de la pared, las constantes  $C_{1\epsilon}$  y  $C_{2\epsilon}$  se deben relacionar de manera única. El valor de las otras constantes se determinó resolviendo una gran cantidad de problemas de flujo cortantes para los cuales se tenían mediciones de laboratorio, el proceso de optimización de las constantes se ajustó de manera que se obtuvieran las mejores comparaciones globales entre cálculos y mediciones, Launder y Spalding (1974).

CONSTANTES DEL MODELO $\kappa - \epsilon$	
$C_{\mu} = 0.09$	Recomendado por Chen y Rodi (1980)
$\sigma_{\kappa} = 1.0$	Recomendado por Launder y Spalding (1972)
$\sigma_{\epsilon} = 1.3$	Recomendado por Launder y Spalding (1974)
$C_{1\epsilon} = 1.44$	Recomendado por Chen y Rodi (1980)
$C_{2\epsilon} = 1.92$	Recomendado por Shiestel (1982)
$C_{3\epsilon} = 0 - 0.2$	cuando $B < 0$
$C_{3\epsilon} = 1.0$	Cuando $B > 0$
$Pr_T = 0.5$	Recomendado por Chen y Rodi (1980)

Tabla 3.1. Constantes del modelo estándar  $\kappa - \epsilon$

En la tabla 3.1 se reportan los valores comúnmente más aceptados de dichas constantes. Se debe remarcar el hecho de que la constante  $C_{13\epsilon}$ , no tiene un valor único. De hecho, se acepta que el término de flotación, en donde aparece dicha constante, no es del todo satisfactorio pues se ha encontrado que no siempre produce resultados correctos, Rodi (1980). El modelo  $\kappa - \epsilon$  con los coeficientes fijos que se proporcionan en dicha tabla, se ha aplicado a muchos problemas de mecánica de fluidos (capas límite, flujo en ductos, flujos cortantes libres, flujos de recirculación, chorros, etc.) y de ingeniería aeroespacial (flujo en perfiles de alas, diseño de cohetes, etc.); y en general, ha reproducido de manera satisfactoria los fenómenos al compararlos con mediciones experimentales. No obstante, las aplicaciones a problemas de flujos a superficie libre, no son tan comunes aún.

### 3.4 LA ECUACIÓN DE VORTICIDAD

Todos los flujos turbulentos se caracterizan por altos niveles de fluctuación de vorticidad. Esta es una característica que distingue a la turbulencia de otros movimientos aleatorios de fluidos, como

$$\frac{\partial \varepsilon_{pqi}}{\partial t} \frac{\partial U_i}{\partial X_q} = - \underbrace{\varepsilon_{pqi} \frac{\partial}{\partial X_q} \frac{\partial}{\partial X_i} \left( \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} U_j U_j \right)}_1 + \underbrace{\varepsilon_{pqi} \frac{\partial}{\partial X_q} \varepsilon_{ijk} U_j \omega_k}_2 - \underbrace{\varepsilon_{pqi} \frac{\partial}{\partial X_q} v \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial X_j}}_3 \quad (3.78)$$

Por las propiedades del producto triple escalar  $u \cdot v \times w = u \times v \cdot w$ , las expresiones 2 y 3 de la ec. (3.78) se pueden expresar como:

$$\varepsilon_{pqi} \varepsilon_{jki} \frac{\partial}{\partial X_q} U_j \omega_k - v \varepsilon_{pqi} \varepsilon_{jki} \frac{\partial}{\partial X_q} \frac{\partial}{\partial X_j} \omega_k.$$

aplicando la identidad  $\varepsilon-\delta$ , el producto de los índices de permutación se puede expresar como:

$$\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj} \left( \frac{\partial U_j \omega_k}{\partial X_q} - v \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial X_q \partial X_j} \right).$$

haciendo operaciones y sustituyendo esta expresión en la ec. (3.78):

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} = - \varepsilon_{pqi} \frac{\partial^2}{\partial X_q \partial X_i} \left( \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} U_j U_j \right) + (\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) \left( \frac{\partial U_j \omega_k}{\partial X_q} - v \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial X_q \partial X_j} \right). \quad (3.79)$$

Por otro lado, el término de presión también se puede escribir de la siguiente manera:

$$- \varepsilon_{pqi} \frac{\partial}{\partial X_q} \left( \rho^{-1} \frac{\partial P}{\partial X_i} \right) = \underbrace{\frac{\varepsilon_{pqi} \frac{\partial \rho}{\partial X_q} \frac{\partial P}{\partial X_i}}{\rho^2}}_{\frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2}} - \underbrace{\frac{\varepsilon_{pqi} \frac{\partial}{\partial X_q} \frac{\partial P}{\partial X_i}}{\rho}}_{\frac{\nabla \times \nabla P}{\rho}}$$

el primer término del lado derecho desaparece debido a que se supone flujo incompresible, es decir los cambios en la densidad son despreciables, el segundo también desaparece por la propiedad matemática  $\text{rot-grad} \equiv 0$ . Esta es la razón por la cual todo el término de presión desaparece.

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} = - \underbrace{\varepsilon_{pqi} \left( \frac{1}{2} U_j U_j \right)}_A + (\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) \left( \frac{\partial U_j \omega_k}{\partial X_q} - v \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial X_q \partial X_j} \right).$$

por otro lado, el término A también desaparece ya que este término es igual a  $\nabla \times q \nabla \cdot q \equiv 0$ , por la propiedad matemática  $\text{rot-div} \equiv 0$ , por lo cual la nueva expresión es:

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} = \delta_{pj} \delta_{qk} \frac{\partial U_j \omega_k}{\partial X_q} - \delta_{pj} \delta_{qk} \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial X_q \partial X_j} - \delta_{pk} \delta_{qj} \frac{\partial U_j \omega_k}{\partial X_q} + \delta_{pk} \delta_{qj} \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial X_q \partial X_j}$$

aplicando las propiedades de sustitución de la delta de Kronecker, se obtiene:

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} = \frac{\partial U_p \omega_k}{\partial X_k} - v \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial X_k \partial X_p} - \frac{\partial U_j \omega_p}{\partial X_j} + v \frac{\partial^2 \omega_p}{\partial X_j \partial X_j}$$

debido a que en el tercer y cuarto miembro de la parte derecha de la ecuación anterior los índices  $j$  son mudos, se pueden intercambiar por el índice  $k$ , teniéndose:

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} = \omega_k \frac{\partial U_p}{\partial X_k} - U_k \frac{\partial \omega_p}{\partial X_j} - v \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_p} \frac{\partial \omega_k}{\partial X_k}}_{\text{div-rot}=0} + v \frac{\partial^2 \omega_p}{\partial X_k \partial X_k}$$

La forma final de la ec. de vorticidad (cambiando por conveniencia el índice  $p$  por  $i$  y el  $k$  por el  $j$ ), es:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.80)$$

La cual guarda una forma similar a las ecuaciones de N-S para flujo incompresible. Antes de interpretar término a término la ec. (3.80), se demostrará que la parte antisimétrica  $R_{ij}$  de la tasa de deformación media del primer miembro a la derecha, no contribuye con ésta. Escribiendo la tasa de deformación total con sus componentes:

$$\omega_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \omega_j S_{ij} + \omega_j R_{ij} \quad (3.81)$$

como ya se demostró  $R_{ij} = -1/2 \epsilon_{ijk} \omega_k$ , entonces  $\omega_j R_{ij} = -1/2 \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k$ ; ya que  $j$  y  $k$  son índices mudos se pueden intercambiar, obteniéndose así:

$$-\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \omega_j \omega_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ikj} \omega_j \omega_k$$

$$-\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ikj} \omega_j \omega_k$$

intercambiando una vez más los índices  $j$  y  $k$  en el tensor  $\epsilon_{ikj}$  se obtiene un cambio de signo, ya que el tensor unitario alternante es antisimétrico:

$$-\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega_j \Omega_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega_j \Omega_k \quad (3.82)$$

lo cual es cierto si este término es igual a cero. Por otro lado, también se sabe que  $\epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k = 0$  porque es la forma indicial del vector  $\omega$  multiplicado vectorialmente por sí mismo, es decir,  $\omega \times \omega = 0$ . Consecuentemente, solamente el término en  $S_{ij}$ , sobrevive. Es así que la ecuación de vorticidad se puede escribir como:

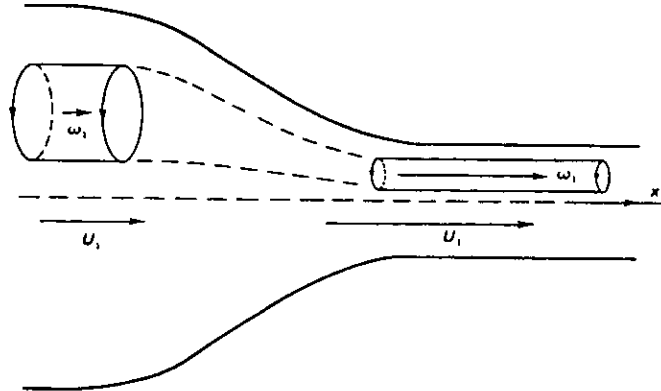
$$\underbrace{\frac{\partial \omega_i}{\partial t}}_{\text{TÉRMINO TEMPORAL}} + \underbrace{U_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}}_{\text{TÉRMINO CONVECTIVO}} = \underbrace{\omega_j S_{ij}}_{\substack{\text{TÉRMINO DE PRODUCCIÓN DEBIDO} \\ \text{A LA TASA DE DEFORMACIÓN MEDIA}}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\substack{\text{TÉRMINO DE DISPACIÓN} \\ \text{VISCOSA}}} \quad (3.83)$$

El término  $\omega_j S_{ij}$  representa la amplificación y la rotación del vector vorticidad por la tasa de deformación. Aparentemente la vorticidad se puede amplificar por el alargamiento de la vorticidad presente por la tasa de deformación  $S_{ij}$ . Al contrario, la vorticidad no se incrementa en un ambiente donde ocurre compresión ( $S_{ij} < 0$ ).

Esta "fuente" o "sumidero" de vorticidad es el término más interesante de la ecuación de vorticidad y es importante mencionar que este término no se presenta en flujo bidimensional. Una forma de demostrarlo es suponer un flujo que esté completamente en el plano  $x$ - $y$ , lo que tendría como consecuencia que  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  sean cero, por lo que solamente la componente de vorticidad  $\Omega_3$  sería diferente de cero. El término de alargamiento vorticial se transforma en  $\Omega_3 S_{33}$ . Sin embargo, en un

flujo bidimensional solamente  $S_{12}$  (igual a  $S_{21}$ ),  $S_{11}$  y  $S_{22}$  pueden ser diferentes de cero. Por tanto un flujo bidimensional no puede hacer girar o alargar el vector vorticidad.

Una ilustración simple del alargamiento de un vórtice es el flujo acelerado en una contracción de un túnel de viento. Se puede notar en la figura 3.3, que  $S_{11}$  es positivo, así que  $S_{22}$  y  $S_{33}$  deben ser negativos para satisfacer la ecuación de continuidad ( $S_{ii} = 0$ ). En este tipo de flujo,  $\Omega_1$  es alargado mientras que  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  son amortiguados.



**Figura 3.3. Alargamiento de vórtices en una contracción de un túnel de viento. Debido a que el flujo va de izquierda a derecha, la componente de vorticidad  $\omega_1$  es alargada ya que el momento angular se debe conservar.**

El cambio de vorticidad por el alargamiento de los vórtices es una consecuencia de la conservación del momento angular. El momento angular de un elemento de volumen material permanecerá constante si no se presentan efectos viscosos. Si el elemento de fluido es alargado de tal forma que su área transversal y el momento de inercia se vuelvan menores, la componente de la velocidad angular en la dirección del alargamiento debe incrementarse de manera que siga conservando el momento angular. El alargamiento de vórtices siempre involucra cambios en la longitud de escala (Figura 3.3).

### 3.4.1 TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DE LA ECUACIÓN DE VORTICIDAD

Para resolver la ec (3.83), ecuación no lineal, se recurre a un tratamiento estadístico análogo al que se utilizó con las ecuaciones de N-S (sección 3.2.3). La vorticidad instantánea se descompone en una vorticidad media y una fluctuación de vorticidad:

$$\omega_i = \bar{\Omega}_i + \omega_i; \quad \bar{\omega}_i = 0. \quad (3.84)$$

Al introducir esta descomposición en la ec. (3.83), resulta:

$$\frac{\partial(\bar{\Omega}_i + \omega_i)}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial(\bar{\Omega}_i + \omega_i)}{\partial x_j} = (\bar{\Omega}_j + \omega_j)(S_{ij} + s_{ij}) + \nu \frac{\partial^2(\bar{\Omega}_i + \omega_i)}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.85)$$

al aplicar los axiomas de Reynolds se obtiene la siguiente ecuación estadística para la vorticidad

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\Omega}_i}{\partial x_j} = \bar{\Omega}_j \bar{S}_{ij} + \bar{\omega}_j \bar{s}_{ij} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_i}{\partial x_j \partial x_j} - u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}. \quad (3.86)$$

La ecuación anterior guarda una forma similar con la ecuación promediada de N-S. En particular, el segundo y cuarto miembro de la parte derecha que involucran una correlación entre las fluctuaciones de vorticidad y de velocidad, requieren de un tratamiento particular. Se sabe que la divergencia del rotacional de un vector es igual a cero, por lo cual también se concluye que en ambas, la vorticidad media y la vorticidad fluctuante la divergencia es cero, esto es:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} = 0. \quad (3.87)$$

Usando la segunda expresión de la ec. (3.94) y la ecuación de continuidad  $\partial U_j / \partial x_j = 0$ , los términos turbulentos en la ec. (3.86), se pueden reacomodar de la siguiente forma:

$$\overline{u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j \omega_i}), \quad (3.88)$$

$$\overline{\omega_j s_{ij}} = \overline{\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\omega_j u_i}). \quad (3.89)$$

La ec. (3.88) muestra una analogía con el término de los esfuerzos de Reynolds, en la ecuación para  $U_i$ ; este se debe al transporte medio de  $\omega_i$  a través de su interacción con las velocidades fluctuantes  $u_j$  en la dirección de los gradientes  $\partial/\partial x_j$ . Este término por supuesto, cambia la vorticidad media solamente si  $\overline{u_j \omega_i}$  cambia en la dirección  $x_j$ . Propiamente hablando es un transporte de la "divergencia".

La ec. (3.89) indica la ganancia (o pérdida) de la vorticidad media causada por el alargamiento o rotación de las componentes fluctuantes de la vorticidad por la fluctuación de las tasas de deformación. Con estas últimas simplificaciones la ec. (3.86) puede escribirse como:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\Omega}_i}{\partial x_j} = \bar{\Omega}_i S_{ij} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \underbrace{\frac{\partial u_j \omega_i}{\partial x_j}}_A, \quad (3.90)$$

en la cual, y en analogía con los ecuaciones de movimiento, el término A que involucra fluctuaciones de velocidad-fluctuaciones de vorticidad, debe modelarse con alguna formulación para efectos de cerrar el sistema de ecuaciones particulares a resolver. Algunos estudios desarrollan ecuaciones de transporte para esta cantidad (Favre et al, 1985, Cousteix, 1985, Tennekes & Lumley, 1972) en la forma siguiente:

$$\frac{\partial u_j \omega_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_j \omega_i}{\partial x_j} = \dots\dots\dots$$

que implica el desarrollo de ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial \overline{\omega_i \omega_i}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{\omega_i \omega_i}}{\partial x_j} = \dots\dots\dots$$

a su vez propicia el desarrollo ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial \overline{u_j \omega_i \omega_j}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{u_j \omega_i \omega_j}}{\partial x_j} = \text{etc...}$$

Este proceso involucra un número considerable de ecuaciones, las que evidentemente implicarán nuevas formulaciones las que a su vez producirán nuevas incógnitas y nuevas formulaciones de modelación, lo cual incrementa considerablemente el tiempo de cómputo. En este trabajo se deduce una relación equivalente para el tensor  $\overline{u_j \omega_i}$  en función de las correlaciones de las fluctuaciones de velocidad, es decir, los esfuerzos de Reynolds aprovechando las características y propiedades del flujo turbulento.

Del análisis hecho anteriormente y retomando la ec. (3.77). El término  $\varepsilon_{ijk} U_j \omega_k$ , es crucial para la teoría de la turbulencia. Es análogo a las fuerzas de Coriolis  $2\varepsilon_{ijk} U_j \Omega_k$ , que aparecería en la ecuación de movimiento, si el sistema coordenado estuviera girando con una velocidad angular  $\Omega_k$  (el factor 2 no está presente en el término de vorticidad debido a que  $\omega_k$  es dos veces la velocidad angular de un pequeño elemento fluido). El término vorticial está también relacionado con la fuerza de sustentación (efecto magnus) experimentada por una línea vorticosa sometida a una velocidad  $U_j$ . De la ec. (3.77) para  $U_1$ , el término  $\varepsilon_{ijk} U_j \omega_k$  se convierte en  $U_2 \omega_3 - U_3 \omega_2$ . Una interpretación gráfica de la fuerza vorticosa se muestra en la figura 3.4.

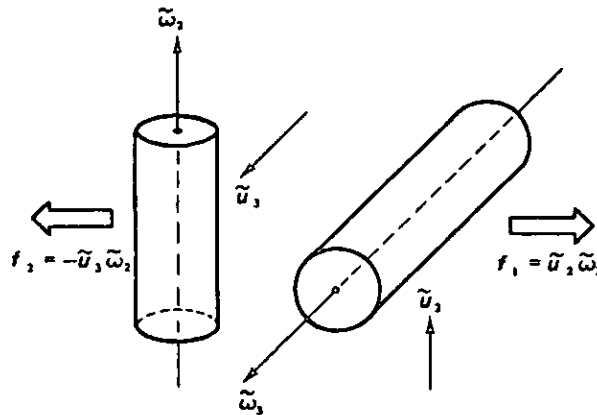


Figura 3.4 Productos transversales vorticidad-velocidad generados por las fuerzas de cuerpo.

En flujo turbulento las fuerzas producto-transversal se generan tanto de los términos  $U_j \partial U_i / \partial x_j$  y  $\partial(\overline{u_i u_j}) / \partial x_j$ . Sustituyendo la ec. (3.84) dentro de la ec. (3.77), se obtiene la ecuación para la velocidad media  $U_i$ , la cual se puede escribir como:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{2} U_j U_j + \frac{1}{2} \overline{u_j u_j} \right) + \varepsilon_{ijk} (U_j \Omega_k + \overline{u_j \omega_k}) + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.91)$$

En la expresión obtenida se puede observar que los gradientes de los esfuerzos de Reynolds contienen tanto al gradiente de presión dinámica como al término de interacción entre las fluctuaciones de vorticidad y las fluctuaciones de velocidad. El significado dinámico entre los esfuerzos de Reynolds se asocia principalmente con la interacción de la vorticidad y velocidad. Para



típicamente son cuatro; razón por la cual las formulaciones relacionadas con la vorticidad en tres dimensiones, no tienen un uso tan frecuente.

En lo referente a este estudio, el uso de una ecuación de transporte de vorticidad para conocer la vorticidad del campo de flujo, en lugar de utilizar la formulación directa de la misma (ec. 3.65), obedece a que con esta última expresión no es posible conocer la evolución del campo de torbellinos o vórtices en el tiempo, sino solamente para el cuando el tiempo de cálculo fuere igual al tiempo final de simulación.

La opción elegida también permite conocer la aportación de cada mecanismo al campo vectorial de vorticidad, así como obtener los balances de cada uno de estos, esto último hace posible un estudio más detallado del flujo en cuestión.

Aunque en este estudio no se muestran los balances de dichos mecanismos, se espera que en futuras aplicaciones dichos balances aporten información útil al problema.

---

# CAPÍTULO CUARTO

---

## MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICA

### 4.1 INTRODUCCIÓN

La introducción de las computadoras dentro de la ingeniería ha dado por resultado el crecimiento de un campo completamente nuevo llamado dinámica de fluidos computacional. Este campo ha conducido al desarrollo de nuevos métodos matemáticos para resolver las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Los métodos adelantados han permitido simulaciones numéricas avanzadas de los diversos fenómenos de flujo, para amplias y variadas aplicaciones. Las áreas van desde la aviación y diseño de misiles hasta las simulaciones de gran escala en la atmósfera y océanos.

Además de los avances en sistemas de simulación se han dado grandes pasos en la investigación de la predicción de transición y de turbulencia. El progreso en la simulación computacional, ha generado competencia entre los modeladores experimentales y numéricos. Sin embargo, se observa una tendencia hacia la simulación numérica por diversas causas, una de las más importantes es la económica, sobre todo en países que no cuentan con una infraestructura montada para la investigación. A pesar de ello, no hay que perder de vista que ambos tipos de simulación son además de importantes, complementarias. Lo anterior ha significado un mejoramiento tanto en las computadoras como en los métodos. Esta tendencia en eficiencia está continuando y conduciendo al uso de las simulaciones numéricas en diseños preliminares a fin evitar grandes costos experimentales.

Un sistema de ecuaciones como el que se ha obtenido en el capítulo anterior, tiene que ser resuelto evidentemente, por vía numérica. Para esto, debe elegirse un método de discretización de las ecuaciones gobernantes del flujo en estudio, el cual involucra dos componentes: la discretización espacial y la discretización temporal de las ecuaciones. En este trabajo se ha optado por resolver espacialmente las ecuaciones mediante un esquema de diferencias finitas apoyados en una distribución staggered grid (celda centrada); lo que implica que las variables dependientes sean evaluados en diferentes puntos de la malla. Las cantidades escalares se calculan en el centro de la malla mientras que las cantidades vectoriales se evalúan al centro de cada cara de la celda. Además se

utiliza el método de compresibilidad artificial para la solución de la ecuación de continuidad, la solución es dada en forma parabólica en el tiempo y elíptica en el espacio, mediante el programa de cómputo **QUETZAL/3D**, desarrollado originalmente para flujos atmosféricos y que en este trabajo se adapta para flujos con superficie libre.

#### 4.2 DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

La discretización espacial consiste en construir una malla por medio de la cual, el dominio físico continuo sea reemplazado por un número finito de puntos, en los cuales serán determinados los valores numéricos de las variables. La exactitud de la aproximación numérica depende también del tamaño de la malla, ya que el error de la simulación numérica tiende a disminuirse cuando el tamaño de la malla se reduce, y la rapidez de esta variación esta caracterizada por el orden de la discretización numérica de las ecuaciones. La solución numérica depende también del tipo y forma de la malla.

En este estudio se ha considerado la celda MAC (Harlow & Welch, 1965), en la cual los escalares son evaluados en el centro de las mallas y las cantidades vectoriales en las caras correspondientes, como se indica en la fig. 4.1.

La figura 4.1 esquematiza la malla MAC para un dominio tridimensional, que además es irregular, es decir, el tamaño de cada celda de la malla puede ser diferente. Para obtener los valores numéricos en todos los puntos de la malla es necesario considerar una doble malla en un dominio de estudio; es decir, una malla de cálculo y una de interpolación. En la malla de cálculo es en donde se resuelven las ecuaciones discretizadas de la variable de interés, y en la malla de interpolación se calculan dichas variables por medio de una interpolación lineal.

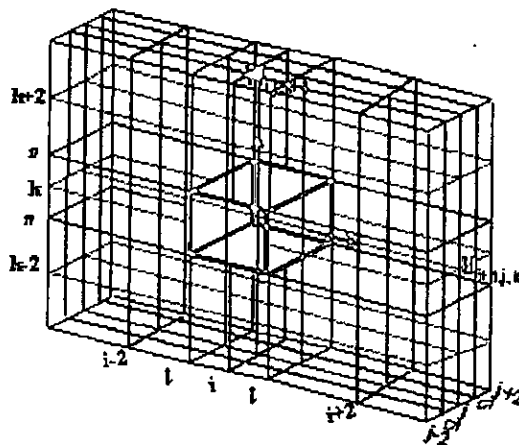


Figura 4.1. Malla de discretización MAC,  $\phi$  representa los escalares.

#### 4.3 DISCRETIZACIÓN DE ECUACIONES

El proceso de discretización de ecuaciones consiste en pasar de una función continua a una función discreta en intervalos finitos de tiempo y espacio que permite la transformación de las

ecuaciones diferenciales a operaciones algebraicas que involucran los valores de las variables en los puntos de la malla.

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) dependiente del tiempo, como es el caso, requiere de un esquema de integración en el tiempo. Así, la derivada temporal se discretizará de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t}, \quad (4.1)$$

donde  $\varphi$  representa cualquier variable dependiente del tiempo. Con lo cual se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas a un nivel de tiempo, dado como una función de las variables en un paso de tiempo previo.

El sistema de ecuaciones es un sistema parabólico en el tiempo y elíptico en el espacio; para resolverlo se ha elegido un método de diferencias finitas. El esquema general de la solución de las ecuaciones que se ha elegido es el siguiente:

$$[\varphi_{i,j,k}]^{n+1} = [\varphi_{i,j,k}]^n + \Delta t [\text{Convección} + \text{Difusión} + \dots]^n, \quad (4.2)$$

en la que  $(i,j,k)$  representan los índices en el espacio y  $(n)$  el índice temporal; de esta manera las ecuaciones son resueltas de acuerdo a las condiciones establecidas en una etapa de tiempo anterior, relacionándose en un proceso de cálculo por el incremento de tiempo dado por  $\Delta t$ . La estructura dada por la ecuación (4.2) es la misma que se considera dentro del programa de cómputo y tiene la ventaja de conocer la evolución, en el espacio y en el tiempo, de los diversos mecanismos que intervienen en las ecuaciones.

### 4.3.1 EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El método de diferencias finitas se basa en las propiedades de la serie de Taylor cuya expresión general es:

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j + \Delta x_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\Delta x_j)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} + \dots + \frac{1}{n!} (\Delta x_j)^n \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_j^n} + O(\Delta x_j^m), \quad (4.3)$$

es decir, que el valor de la función  $\varphi_{j+1}$  evaluado en  $x_{j+1}$  puede obtenerse a partir de una expansión en el punto  $x_j$ . La distancia espacial entre  $x_j$  y  $x_{j+1}$  es  $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ . El término  $O(\Delta x_j^m)$  es el error de truncamiento, y  $m$  representa la potencia de  $\Delta x_j$  en el que el error de truncamiento tiende a cero. Ahora por ejemplo, si consideramos un error de truncamiento de primer orden,  $O(\Delta x_j)$ , y despejamos la primera derivada de  $\varphi$ , se obtiene una aproximación de la primera derivada de primer orden de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x|_j} = \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{\Delta x_j} + O(\Delta x_j). \quad (4.4)$$

Considerando una malla cualquiera, las fórmulas de diferencias para las derivadas en un punto pueden construirse incluyendo cualquier número de puntos adyacentes, y en general el orden de aproximación se incrementa con el número y el arreglo de los nodos que se incluyen. En cualquier esquema numérico debe considerarse un balance entre el orden de aproximación y el número de puntos.

En este estudio se calculan las derivadas a partir de un esquema de cinco puntos centrales, considerando una malla no homogénea como la que se indica en la figura 4.2, la cual es bidimensional y sólo da una idea de la discretización de las derivadas.

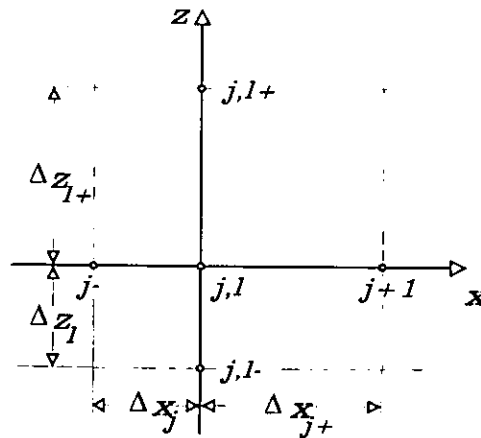


Figura 4.2 Malla no homogénea.

La primera derivada de una función  $\varphi$  con respecto de  $x$  en el punto  $i, j, k$  y en un esquema de cinco puntos de una malla no homogénea, puede ser obtenida con una expresión de la forma (Hirsch, 1988):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x|_{i,j,k}} = a\varphi_{i+1,j,k} + b\varphi_{i-1,j,k} + c\varphi_{i,j,k}. \quad (4.5)$$

Los coeficientes (a,b,c) se encuentran a partir de la expansión de la serie de Taylor de los puntos  $\varphi_{i+1,j,k}$  desarrollo a la derecha, y  $\varphi_{i-1,j,k}$  desarrollo a la izquierda, alrededor del punto  $\varphi_{i,j,k}$ :

$$\varphi_{i-1,j,k} = \varphi_{i,j,k} - \Delta x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x|_{i,j,k}} + \left( \frac{\Delta x_i^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2|_{i,j,k}} + O(\Delta x_i^3), \quad (4.6)$$

$$\varphi_{i+1,j,k} = \varphi_{i,j,k} + (\alpha_x \Delta x_i) \frac{\partial \varphi}{\partial x|_{i,j,k}} + \frac{(\alpha_x \Delta x_i)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2|_{i,j,k}} + O(\Delta x_i^3), \quad (4.7)$$

en donde se ha considerado el siguiente parámetro geométrico:

$$\alpha_x = \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i}, \quad (4.8)$$

multiplicando la ec. (4.7) por  $a$ , la ec. (4.6) por  $b$  y sumando  $c\varphi_{i,j,k}$  se obtiene:

$$a\varphi_{i+1,j,k} + b\varphi_{i-1,j,k} + c\varphi_{i,j,k} = (a + b + c)\varphi_{i,j,k} - \Delta x_i (a\alpha_x - b) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j,k} + \left( \frac{\Delta x_i^2}{2} \right) (a\alpha_x^2 + b) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} + O(\Delta x_i^3), \quad (4.9)$$

comparando la ecuación anterior con la ec. (4.5) se obtienen las condiciones:

$$a + b + c = 0 \quad \Delta x_i (a\alpha_x - b) = -1 \quad a\alpha_x^2 + b = 0, \quad (4.10)$$

resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentran los coeficientes a, b y c:

$$a = -\frac{1}{\alpha_x(\alpha_x + 1)\Delta x_i}, \quad b = -\frac{\alpha_x^2}{\alpha_x(\alpha_x + 1)\Delta x_i}, \quad c = \frac{\alpha_x^2 - 1}{\alpha_x(\alpha_x + 1)\Delta x_i}, \quad (4.11)$$

que al sustituirse en la ecuación (4.5) se obtiene la ecuación de la *primera derivada en la dirección x*:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i+1,j,k} + (\alpha_x^2 - 1)\varphi_{i,j,k} - \alpha_x^2 \varphi_{i-1,j,k}}{\alpha_x(\alpha_x + 1)\Delta x_i} + O(\Delta x_i^2). \quad (4.12)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, se pueden obtener las siguientes derivadas en esquemas de diferencias finitas de cinco puntos:

☑ *primera derivada de  $\varphi$  con respecto a y:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i,j+1,k} + (\alpha_y^2 - 1)\varphi_{i,j,k} - \alpha_y^2 \varphi_{i,j-1,k}}{\alpha_y(\alpha_y + 1)\Delta y_j}, \quad (4.13)$$

donde:

$$\alpha_y = \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j}, \quad (4.14)$$

☑ *primera derivada de  $\varphi$  con respecto a z:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i,j,k+1} + (\alpha_z^2 - 1)\varphi_{i,j,k} - \alpha_z^2 \varphi_{i,j,k-1}}{\alpha_z(\alpha_z + 1)\Delta z_k}, \quad (4.15)$$

donde:

$$\alpha_z = \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k}. \quad (4.16)$$

☑ *segunda derivada de  $\varphi$  con respecto a x:*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} = 2 \left( \frac{\varphi_{i+1,j,k} - (\alpha_x + 1)\varphi_{i,j,k} + \alpha_x \varphi_{i-1,j,k}}{\alpha_x(\alpha_x + 1)\Delta x_i^2} \right). \quad (4.17)$$

☑ *segunda derivada de  $\varphi$  con respecto a y:*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{i,j,k} = 2 \left( \frac{\varphi_{i,j+1,k} - (\alpha_y + 1)\varphi_{i,j,k} + \alpha_y \varphi_{i,j-1,k}}{\alpha_y(\alpha_y + 1)\Delta y_j^2} \right). \quad (4.18)$$

☑ *segunda derivada de  $\varphi$  con respecto a z:*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Big|_{i,j,k} = 2 \left( \frac{\varphi_{i,j,k+1} - (\alpha_z + 1)\varphi_{i,j,k} + \alpha_z \varphi_{i,j,k-1}}{\alpha_z(\alpha_z + 1)\Delta z_k^2} \right). \quad (4.19)$$

☑ *derivada cruzada:*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x_{i,j,k}} = \frac{1}{\alpha_z (\alpha_z + 1) \Delta z} \frac{1}{\alpha_x (\alpha_x + 1) \Delta x_i} \left\{ \varphi_{i+1,j,k+1} + (\alpha_z^2 - 1) \varphi_{i+1,j,k} - \alpha_z^2 \varphi_{i+1,j,k-1} + (\alpha_x^2 - 1) \right. \\ \left. \left[ \varphi_{i,j,k+1} + (\alpha_z^2 - 1) \varphi_{i,j,k} - \alpha_z^2 \varphi_{i,j,k-1} \right] - \alpha_x^2 \left[ \varphi_{i-1,j,k+1} + (\alpha_z^2 - 1) \varphi_{i-1,j,k} - \alpha_z^2 \varphi_{i-1,j,k-1} \right] \right\} \quad (4.20)$$

Los esquemas antes mencionados han sido optimizados utilizando funciones geométricas representando flujos como los que aquí se estudian (Ramírez, 1991).

#### 4.3.2 ECUACIÓN MEDIA DE LA VELOCIDAD HORIZONTAL

La discretización de la ecuación de velocidad media, en su componente horizontal, de acuerdo a la ec. (3.44), es:

$$U_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j,k}^n + \Delta t \left[ \text{CONVECU}_{l,m,n} - \text{VOM}_{i,j,k} \left( \frac{\partial P'}{\partial x_{i,j,k}} - \text{DIFFU1}_{l,m,n} \right) - \text{DIFFU2}_{l,m,n} \right]^n \quad (4.21)$$

donde

$$\text{VOM}_{i,j,k} = \frac{1}{\rho} \quad (4.21a)$$

los índices  $(i,j,k)$  se aplican en todos los puntos de la malla, mientras que los índices  $(l,m,n)$  sólo en la malla de cálculo, como se indica en la figura 4.1

☑ *advección:*

$$\text{CONVECU}_{l,m,n} = -U \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial U}{\partial y} - W \frac{\partial U}{\partial z} \quad (4.21b)$$

La ec. 4.21(b) es la definición de la convección; sin embargo al utilizarla directamente introduce problemas de estabilidad numérica, por ello se ha recurrido a la utilización de un esquema que permite estabilizar dicho mecanismo; este esquema se presenta a detalle en la sección 4.4.

☑ *gradiente de presión:*

$$\frac{\partial P^n}{\partial x_{i,j,k}} = \frac{P_{i+1,j,k}^n - P_{i-1,j,k}^n}{\Delta x_i} \quad (4.21c)$$

☑ *difusión molecular:*

$$\text{DIFFU1}_{l,m,n} = \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial z} \right) \quad (4.21d)$$

☑ *difusión turbulenta:*

La difusión turbulenta se evalúa de diferente forma según el modelo de turbulencia utilizado.

a) *modelo algebraico (MDL=0):*

$$\text{DIFFU2}_{l,m,n} = \nu_{\tau 1} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial x} + \nu_{\tau 2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial y} + \nu_{\tau 3} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial z} \quad (4.21e)$$

Los coeficientes turbulentos deben ser calibrados numéricamente para los tipos de flujos que aquí se estudian.

b) modelo de primero orden (MDL=1):

$$\text{DIFFU2}_{1,m,n} = \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \quad (4.21f)$$

Las correlaciones dobles se obtienen mediante el modelo  $\kappa$ - $\epsilon$ . MDL es un parámetro que permite identificar el orden del modelo de turbulencia en el programa de cómputo.

### 4.3.3 ECUACIÓN MEDIA DE LA VELOCIDAD TRANSVERSAL

La discretización de la ecuación de velocidad media, en su componente transversal, de acuerdo a la ec. (3.44), es:

$$\bar{V}_{i,j,k}^{n+1} = \bar{V}_{i,j,k}^n + \Delta t \left[ \text{CONVECV}_{1,m,n} - \text{VOM}_{i,j,k} \left( \frac{\partial P_i}{\partial x_{i,j,k}} - \text{DIFFV1}_{1,m,n} \right) - \text{DIFFV2}_{1,m,n} \right]^n \quad (4.22)$$

donde el término VOM fue definido en la ec. 4.21(a), y los macrotérminos se definen como:

☑ *advección:*

$$\text{CONVECV}_{1,m,n} = -U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y} - W \frac{\partial V}{\partial z} \quad (4.22a)$$

☑ *gradiente de presión:*

$$\frac{\partial P^n}{\partial Y_{j,1}} = \frac{P_{i,j+1,k}^n - P_{i,j-1,k}^n}{\Delta Y_j} \quad (4.22b)$$

☑ *difusión molecular:*

$$\text{DIFFV1}_{1,m,n} = \mu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \quad (4.22c)$$

☑ *difusión turbulenta:*

a) modelo algebraico (MDL=0):

$$\text{DIFFV2}_{1,m,n} = v_{t1} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x} + v_{t2} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y} + v_{t3} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial z} \quad (4.22d)$$

b) modelo de primero orden (MDL=1):

$$\text{DIFFV2}_{1,m,n} = \frac{\partial vv}{\partial y} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial z} \quad (4.22e)$$

### 4.3.4 ECUACIÓN MEDIA DE LA VELOCIDAD VERTICAL

La discretización de la ecuación de velocidad media, en su componente vertical, de acuerdo a la ec. (3.44), es:



$$W_{i,j,k}^{n+1} = W_{i,j,k}^n + \Delta t \left[ \text{CONVECW}_{l,m,n} - \text{VOM}_{i,j,k} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{i,j,k} - \text{DIFFW1}_{l,m,n} - \text{DIFFW2}_{l,m,n} \right]^n \quad (4.23)$$

los macrotérminos se definen como:

☑ *advección:*

$$\text{CONVECW}_{l,m,n} = -\bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} - \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \quad (4.23a)$$

☑ *gradiente de presión:*

$$\frac{\partial P^n}{\partial z}_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k-1}^n}{\Delta z_k} \quad (4.23b)$$

☑ *difusión molecular:*

$$\text{DIFFW1}_{l,m,n} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial y} \right) \quad (4.23c)$$

☑ *difusión turbulenta:*

a) *modelo algebraico (MDL=0):*

$$\text{DIFFW2}_{l,m,n} = v_{\tau 1} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial x} + v_{\tau 2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y \partial y} + v_{\tau 3} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z \partial z} \quad (4.23d)$$

b) *modelo de primero orden (MDL=1):*

$$\text{DIFFW2}_{l,m,n} = \frac{\partial \bar{w} \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial u \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial v \bar{w}}{\partial y} \quad (4.23e)$$

### 4.3.5 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE LA TURBULENCIA

La ecuación de la energía cinética de la turbulencia, ec. (3.60), se discretiza de acuerdo al esquema (4.2):

$$\kappa_{i,j,k}^{n+1} = \kappa_{i,j,k}^n + \Delta t \left[ \text{CONVEK}_{l,m,n} + P_{i,j,k} + B_{i,j,k} + \text{DISSK}_{l,m,n} + \text{DIFFK}_{l,m,n} \right]^n \quad (4.24)$$

donde los macrotérminos se definen como:

☑ *convección:*

$$\text{CONVEK}_{l,m,n} = -\bar{U} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} - \bar{W} \frac{\partial \bar{k}}{\partial z} \quad (4.24a)$$

☑ *producción:*

a) *término de producción:*

$$P_{i,j,k}^n = v_{i,j,k} \left[ 2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4.24b)$$

b) término de producción o destrucción por fuerzas de flotación:

$$B_{i,j,k}^n = -v_{\tau,j,k} g \beta \frac{1}{Pr_T} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) \quad (4.24c)$$

☑ *disipación:*

$$DISSK_{l,m,n} = -\varepsilon_{i,j,k} \quad (4.24d)$$

☑ *difusión:*

$$DIFFK_{l,m,n} = \frac{v_{\tau,j,k}}{\sigma_k} \left( \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\sigma_k} \left( \frac{\partial v_{\tau}}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial v_{\tau}}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial v_{\tau}}{\partial z} \frac{\partial k}{\partial z} \right) \quad (4.24e)$$

### 4.3.6 ECUACIÓN DE LA DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE LA TURBULENCIA

La ecuación de la disipación de la energía cinética de la turbulencia, ec.(3.71), se discretiza también de acuerdo al esquema (4.2):

$$\varepsilon_{i,j,k}^{n+1} = \varepsilon_{i,j,k}^n + \Delta t [\text{CONVE}_{l,m,n} + \text{PRODE}_{l,m,n} + \text{DISSE}_{l,m,n} + \text{DIFFE}_{l,m,n}]^n \quad (4.25)$$

donde los macrotérminos se definen como:

☑ *convección:*

$$\text{CONVE}_{l,m,n} = -U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - W \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad (4.25a)$$

☑ *producción:*

$$\text{PRODE}_{l,m,n} = C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_{i,j,k}^n}{\kappa_{i,j,k}^n} (P_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^n) \quad (4.25b)$$

☑ *disipación:*

$$\text{DISSE}_{l,m,n} = -C_{\varepsilon_2} \frac{(\varepsilon_{i,j,k}^n)^2}{\kappa_{i,j,k}^n} \quad (4.25c)$$

☑ *difusión:*

$$\text{DIFFE}_{l,m,n} = \frac{v_{\tau,j,k}}{\sigma_{\varepsilon}} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}} \left( \frac{\partial v_{\tau}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v_{\tau}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial v_{\tau}}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \quad (4.25d)$$

### 4.3.7 ECUACIÓN MEDIA DE LA CONCENTRACIÓN DE ESPECIES

La ecuación media de la concentración de especies, ec. (3.51), puede discretizarse de acuerdo al esquema (4.2), obteniéndose:

$$C_{\alpha i,j,k}^{n+1} = C_{\alpha i,j,k}^n + \Delta t [\text{CONVECC}_{l,m,n} + \text{DIFFC1}_{l,m,n} - \text{DIFFC2}_{l,m,n}]^n \quad (4.26)$$

donde los macrotérminos se definen como:

*advección:*

$$\text{CONVECC}_{l,m,n} = -U \frac{\partial C_\alpha}{\partial x} - V \frac{\partial C_\alpha}{\partial y} - W \frac{\partial C_\alpha}{\partial z} \quad (4.26a)$$

*difusión molecular:*

$$\text{DIFFQ}_{i,j,k} = D \left[ \frac{\partial^2 \bar{C}_\alpha}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{C}_\alpha}{\partial z \partial z} \right] \quad (4.26b)$$

*difusión turbulenta:*

a) *modelo algebraico (MTC = 0):*

$$\text{DIFFC2}_{l,m,n} = v_{r1} \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x \partial x} + v_{r2} \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial y \partial y} + v_{r3} \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial z \partial z} \quad (4.26c)$$

b) *modelo de primero orden (MTC = 1):*

$$\text{DIFFC2}_{l,m,n} = \frac{\partial u c_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u c_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial u c_\alpha}{\partial z} \quad (4.26d)$$

La variable MTC permite definir el orden del modelo de turbulencia en el programa de cómputo, para la ecuación de concentraciones.

#### 4.3.8 ECUACIÓN MEDIA DE LA ECUACIÓN DE VORTICIDAD

De manera análoga a las ecuaciones de velocidad se obtuvo la ecuación media de vorticidad ec. (3.101). La discretización de dicha ecuación, de acuerdo al esquema 4.2 se puede escribir de la siguiente forma:

$$\Omega_{i,j,k}^{n+1} = \Omega_{i,j,k}^n + \Delta t [\text{CONVE}\Omega_{l,m,n} + \text{PROD}\Omega_{l,m,n} + \text{DISS}\Omega_{l,m,n} - \text{DIFF}\Omega_{l,m,n}]^n \quad (4.27)$$

donde los macrotérminos se definen en las tres direcciones de la manera siguiente:

##### ° DIRECCIÓN X

*convección:*

$$\text{CONVE}\Omega_{l,m,n} = -\bar{U} \frac{\partial \bar{\Omega}_x}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial \bar{\Omega}_x}{\partial y} - \bar{W} \frac{\partial \bar{\Omega}_x}{\partial z} \quad (4.27a)$$

*producción:*

$$\text{PROD}\Omega_{l,m,n} = \bar{\Omega}_x \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{1}{2} \bar{\Omega}_y \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \bar{\Omega}_z \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right) \quad (4.27b)$$

*disipación viscosa:*

$$\text{DISS}\Omega_{l,m,n} = \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_x}{\partial z^2} \right] \quad (4.27c)$$

*difusión turbulenta:*

$$\text{DIFF}\Omega_{l,m,n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 wu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 vu}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{w}v}{\partial y \partial y} - \frac{\partial^2 vv}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 ww}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 vw}{\partial z \partial z} \right) \quad (4.27d)$$

° **DIRECCIÓN Y**

☑ convección:

$$\text{CONVE}\Omega_{1,m,n} = -\bar{U} \frac{\partial \bar{\Omega}_y}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial \bar{\Omega}_y}{\partial y} - \bar{W} \frac{\partial \bar{\Omega}_y}{\partial z} \quad (4.28)$$

☑ producción:

$$\text{PROD}\Omega_{1,m,n} = \bar{\Omega}_y \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{1}{2} \bar{\Omega}_x \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \bar{\Omega}_z \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right) \quad (4.28a)$$

☑ disipación viscosa:

$$\text{DISS}\Omega_{1,m,n} = \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_y}{\partial z^2} \right) \quad (4.28b)$$

☑ difusión turbulenta:

$$\text{DIFF}\Omega_{1,m,n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}\bar{u}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \bar{w}\bar{u}}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}\bar{v}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \bar{w}\bar{v}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}\bar{w}}{\partial z \partial z} - \frac{\partial^2 \bar{w}\bar{w}}{\partial z \partial x} \right) \quad (4.28c)$$

° **DIRECCIÓN Z :**

☑ convección:

$$\text{CONVE}\Omega_{1,m,n} = -\bar{U} \frac{\partial \bar{\Omega}_z}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial \bar{\Omega}_z}{\partial y} - \bar{W} \frac{\partial \bar{\Omega}_z}{\partial z} \quad (4.29)$$

☑ producción:

$$\text{PROD}\Omega_{1,m,n} = \bar{\Omega}_z \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} + \frac{1}{2} \bar{\Omega}_x \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \bar{\Omega}_y \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right) \quad (4.29a)$$

☑ disipación viscosa:

$$\text{DISS}\Omega_{1,m,n} = \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_z}{\partial z^2} \right) \quad (4.29b)$$

☑ difusión turbulenta:

$$\text{DIFF}\Omega_{1,m,n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}\bar{u}}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 \bar{u}\bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}\bar{v}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \bar{u}\bar{v}}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}\bar{w}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \bar{u}\bar{w}}{\partial z \partial y} \right) \quad (4.29c)$$

#### 4.4 EL ESQUEMA DE CONVECCIÓN

Se ha mencionado con anterioridad que debido a la no linealidad del término convectivo en las ecuaciones de Navier-Stokes, se recurría al tratamiento estadístico de las ecuaciones; este mismo término representa un problema complejo de resolver numéricamente; para ello se ha recurrido a un esquema *upwind* (ponderado hacia adelante) desarrollado por Ramírez (1991), el cual ha mostrado ser estable con turbulencia libre. La metodología adoptada es la siguiente: sea  $A$  una variable cualquiera ( $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{C}_\alpha, \bar{\Omega}, \kappa, \varepsilon$ , etc) a ser transportada; el esquema convectivo, en la etapa de tiempo  $n+1$ , tiene la forma siguiente:

$$\text{ADVEC}(A_{i,j,k}) = \text{ADVECX}(A_{i,j,k}) + \text{ADVECY}(A_{i,j,k}) + \text{ADVE CZ}(A_{i,j,k}) . \quad (4.30)$$

En donde se tiene, para la **dirección horizontal**:

$$\text{ADVECX}(A_{i,j,k}) = \frac{\text{ADVECX}_{i,j,k}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} , \quad (4.31)$$

donde:

$$\text{ADVECX}_{i,j,k} = (\text{COX}_{i+1,j,k} - U_{i+1,j,k}^n + \text{COX}_{i-1,j,k})A_{i,j,k} - (\text{COX}_{i+1,j,k})A_{i+2,j,k} - (\text{COX}_{i-1,j,k} - U_{i-1,j,k}^n)A_{i-2,j,k} , \quad (4.32)$$

en la que:

$$\text{COX}_{i,j,k} = U_{i,j,k}^n \left[ -\frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} (1 - \alpha_A) + \frac{\alpha_A}{2} \right] - \frac{\alpha_A}{2} |U_{i,j,k}^n| . \quad (4.33)$$

Para la **dirección transversal**:

$$\text{ADVECY}(A_{i,j,k}) = \frac{\text{ADVECY}_{i,j,k}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} , \quad (4.34)$$

donde:

$$\text{ADVECY}_{i,j,k} = (\text{COY}_{i,j+1,k} - V_{i,j+1,k}^n + \text{COY}_{i,j-1,k})A_{i,j,k} - (\text{COY}_{i,j+1,k})A_{i,j+2,k} - (\text{COY}_{i,j-1,k} - V_{i,j-1,k}^n)A_{i,j-2,k} , \quad (4.35)$$

$$\text{COY}_{i,j,k} = V_{i,j,k}^n \left[ -\frac{\delta y_j}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} (1 - \alpha_A) + \frac{\alpha_A}{2} \right] - \frac{\alpha_A}{2} |V_{i,j,k}^n| . \quad (4.36)$$

De la misma forma, para la **dirección vertical** se tiene:

$$\text{ADVE CZ}(A_{i,j,k}) = \frac{\text{ADVE CZ}_{i,j,k}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} , \quad (4.37)$$

$$\text{ADVE CZ}_{i,j,k} = (\text{COZ}_{i,j,k+1} - W_{i,j,k+1}^n + \text{COZ}_{i,j,k-1})A_{i,j,k} - (\text{COZ}_{i,j,k+1})A_{i,j,k+2} - (\text{COZ}_{i,j,k-1} - W_{i,j,k-1}^n)A_{i,j,k-2} , \quad (4.38)$$

$$\text{COZ}_{i,j,k} = W_{i,j,k}^n \left[ \frac{\Delta z_k}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} (1 - \alpha_A) + \frac{\alpha_A}{2} \right] - \frac{\alpha_A}{2} |W_{i,j,k}^n| . \quad (4.39)$$

En estos desarrollos  $\alpha_A$  ( $0 \leq \alpha_A \leq 1$ ) es un parámetro de decentramiento cuyo valor inicial es 0.7; este valor se optimiza periódicamente en el curso de la evolución de la solución mediante el siguiente procedimiento:

1. Determinación de la velocidad máxima en todo el dominio:

$$\text{VMAX} = \max(|U_{i,j,k}|, |V_{i,j,k}|, |W_{i,j,k}|) . \quad (4.40)$$

2. Cálculo del coeficiente  $\alpha_A$ :

$$\alpha_A = C_A \cdot \text{VMAX} \cdot \Delta t / \Delta M_{\min} . \quad (4.41)$$

en la que  $C_A$  es un parámetro igual a 0.93,  $\Delta t$  el paso de tiempo y  $\Delta M_{\min}$  el valor de la malla más pequeña.

3. Selección del coeficiente alfa:

$$\alpha_A^{n+1} = \min(\alpha_A^n, 1.0). \quad (4.42)$$

#### 4.5 MÉTODO DE COMPRESIBILIDAD ARTIFICIAL

La mayoría de los flujos de interés práctico son turbulentos, sin embargo, el estudio de los flujos laminares permite conocer y entender algunas veces el comportamiento del flujo. Los efectos de la turbulencia sobre flujos viscosos e incompresibles, comúnmente se toman en cuenta por cualquiera de estas representaciones, la de viscosidad turbulenta, por modelos de turbulencia  $\kappa$ - $\epsilon$  o bien por modelos de esfuerzos de Reynolds. Desde una perspectiva computacional el uso de un modelo algebraico de la viscosidad turbulenta causa pequeños cambios al algoritmo correspondiente usado para flujo laminar. Las ecuaciones diferenciales para  $\kappa$  y  $\epsilon$  son estructuralmente similares a las ecuaciones de momento y generalmente son discretizadas de la misma manera. De esta forma, los algoritmos computacionales que son efectivos para flujos incompresibles, viscosos y laminares son también efectivos, con los ajustes apropiados para flujos incompresibles turbulentos (Peyret y Taylor, 1967).

La restricción para el flujo incompresible introduce la dificultad computacional de que la ecuación de continuidad ec. (3.10), contiene solamente componentes de velocidad y no existe un vínculo obvio con la presión, como en los flujos compresibles a través de la densidad. Dos grandes aproximaciones son válidas para el cálculo del flujo incompresible. La primera consiste en tomar las variables primitivas ( $U, V, W, P$ ) y por un procedimiento especial manipularlas para después introducirlas en la ecuación de continuidad. La segunda consiste en evitar el tratamiento de la ecuación de continuidad introduciendo la función corriente. En este estudio se opta por la primera aproximación.

El principio del método es considerar la solución de las ecuaciones permanentes de N-S como el límite conforme  $t \rightarrow \infty$  de la solución de las ecuaciones no permanentes, obtenidas asociando la ecuación de momentum no permanente, con una ecuación de la divergencia perturbada para obtener un sistema de ecuaciones de evolución, las cuales pueden ser fácilmente resueltas por métodos estándar (explícitos o no).

En este estudio se considera el método de compresibilidad artificial de Chorin(1967), el cual establece en primer término una ecuación perturbada de continuidad:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot V = 0, \quad (4.42)$$

donde  $c^2$  es una constante arbitraria. Esta ecuación no tiene un significado físico antes de que el estado permanente  $\partial/\partial t = 0$  sea alcanzado. Así que la restricción  $\nabla \cdot V = 0$  se satisface solamente cuando se logra la convergencia. Este método puede ser llamado método pseudo-transitorio, debido a que el tiempo  $t$  involucrado no tiene significado físico.

El parámetro  $c^2$  se debe escoger para asegurar la convergencia, es decir, para asegurar la existencia de una solución numérica estable del sistema de ecuaciones de N-S, sujeto a las condiciones iniciales y de frontera que satisfagan al problema en cuestión y a la ec. (4.42).

El término de "método de compresibilidad artificial" fue acuñado por Chorin debido a que el sistema de ecuaciones está conformado por las ecuaciones de N-S para flujo compresible, cuya ecuación de estado debería ser:

$$P = c^2 \rho \quad \text{y} \quad c^2 = \text{constante.}$$

De hecho, la ec. (4.42) se transforma en  $\nabla \cdot V = 0$  si  $c^2 \rightarrow 0$ , y es posible considerar la solución del sistema de ecuaciones de N-S y de la ec. (4.42) con  $c^2 \ll 1$  como una aproximación de la solución no permanente. Sin embargo, se pueden asociar posibles dificultades numéricas al uso de un valor muy grande de  $c^2$ , y por lo tanto el método de compresibilidad artificial probablemente tendrá el mayor valor en los cálculos de soluciones permanentes. De esta forma se puede considerar un procedimiento para construir un método especial iterativo para la solución del problema permanente.

Suponiendo que todos los campos son conocidos en el instante  $t = n\Delta t$ , la resolución de las ecuaciones medias de la velocidad, ecs. (4.21), (4.22) y (4.23), permite obtener en cada nodo del dominio, una primera aproximación de la velocidad a la etapa  $(n+1)$ . La primera aproximación de la velocidad  $(n+1)$  se representa por las condiciones impuestas en las condiciones iniciales. De esta manera cuando el campo de velocidades se calcula en todo el dominio, estas velocidades no satisfacen, evidentemente, la ecuación de continuidad, para ello es necesario que en cada paso de tiempo, se esté verificando dicha ecuación y con este propósito se introduce el método iterativo de compresibilidad artificial desarrollado por Chorin en 1967, (Peyret y Taylor, 1982).

Como ya se mencionó, conforme evoluciona en el tiempo, la solución de las ecuaciones debe satisfacer la ecuación de continuidad en el dominio; esto implica que para un dominio discretizado esta ecuación deberá satisfacerse en cada una de las celdas de cálculo (fig. 4.1). Así, la ecuación de la divergencia escrita en una etapa  $(n+1)$  debe satisfacer matemáticamente la siguiente relación:

$$\text{div} \mathbf{V}^{n+1} = 0. \quad (4.43)$$

Esta condición generalmente no se cumple y es más fuerte al inicio de los cálculos (fig. 4.3); por ello, para ajustar la ecuación de continuidad se introduce el método de compresibilidad artificial, el cual funciona de la siguiente manera. Considérese la ecuación de movimiento en la siguiente forma:

$\nabla^{n+1}$  se debe corregir con alguna de cantidad  $\text{div}\nabla^{n+1}$ .

Así, introduciendo la relación de iteración (4.46) en la ecuación (4.44); pueden obtenerse las correcciones de la velocidad:

$$\begin{aligned} \delta U_{l,m,n}^{n+1} &= [U_{l,m,n}^{n+1}]^{\ell+1} - [U_{l,m,n}^{n+1}]^{\ell} = \frac{\Delta t \delta P_{l,m,n}^{\ell+1}}{\rho \Delta x}, \\ \delta U_{l-1,m,n}^{n+1} &= [U_{l-1,m,n}^{n+1}]^{\ell+1} - [U_{l-1,m,n}^{n+1}]^{\ell} = \frac{\Delta t \delta P_{l,m,n}^{\ell+1}}{\rho \Delta x}, \\ \delta V_{l,m,n}^{n+1} &= [V_{l,m,n}^{n+1}]^{\ell+1} - [V_{l,m,n}^{n+1}]^{\ell} = \frac{\Delta t \delta P_{l,m,n}^{\ell+1}}{\rho \Delta y}, \\ \delta V_{l,m-1,n}^{n+1} &= [V_{l,m-1,n}^{n+1}]^{\ell+1} - [V_{l,m-1,n}^{n+1}]^{\ell} = \frac{\Delta t \delta P_{l,m,n}^{\ell+1}}{\rho \Delta y}, \\ \delta W_{l,m,n}^{n+1} &= [W_{l,m,n}^{n+1}]^{\ell+1} - [W_{l,m,n}^{n+1}]^{\ell} = \frac{\Delta t \delta P_{l,m,n}^{\ell+1}}{\rho \Delta z}, \\ \delta W_{l,m,n-1}^{n+1} &= [W_{l,m,n-1}^{n+1}]^{\ell+1} - [W_{l,m,n-1}^{n+1}]^{\ell} = \frac{\Delta t \delta P_{l,m,n}^{\ell+1}}{\rho \Delta z}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

El parámetro  $\beta_c$  que aparece en la relación de iteración (4.46), se obtiene después de haber corregido el campo de velocidad a la  $(\ell+1)$ -ésima iteración, con lo cual  $\text{div}\nabla^{n+1} = 0$ ; de donde se obtiene que:

$$\delta P^{\ell+1} = - \frac{\rho [\text{div}\nabla_{l,m,n}^{n+1}]}{2\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)}. \tag{4.48}$$

Comparando la ec. (4.48) con (4.46) se deduce que:

$$\beta_c = \frac{\rho}{2\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)}. \tag{4.49}$$

Las correcciones son hechas línea tras línea en la totalidad del dominio. La corrección impuesta en una célula afecta las células vecinas. El proceso debe ser reiterado hasta que a la etapa  $(n+1)$ , la ecuación de continuidad sea verificada, a un valor  $\varepsilon \rightarrow 0$ , en todas las celdas del dominio.

La convergencia del proceso iterativo puede ser acelerada introduciendo un coeficiente de relajación en la ec. (4.46). Este coeficiente, definido como  $\Omega$  debe, a fin de conservar la estabilidad del esquema, tomar valores en el intervalo:

$$0.1 \leq \Omega \leq 1. \tag{4.50}$$

conforme evoluciona el tiempo, se requerirán de menos iteraciones en el algoritmo del método, como se indica en forma esquemática en la figura 4.3.



Con el propósito de analizar las propiedades y la validez de un esquema numérico deben de verificarse los conceptos de consistencia, estabilidad y convergencia. En la figura 4.4 se observa la relación entre estos tres conceptos.

#### 4.6.1 CONSISTENCIA

Una representación en diferencias finitas de un sistema de ecuaciones diferenciales se dice consistente si se muestra que la diferencia entre el sistema de ecuaciones diferenciales y su representación en diferencias finitas se desvanece cuando la malla es refinada. Es decir que las ecuaciones discretizadas deberán tender a la ecuación diferencial cuando el incremento de solución en el tiempo y en el espacio tienden a cero. Por lo tanto, un esquema es consistente si el error de truncamiento tiende a cero cuando  $\Delta t$  y  $\Delta M$  tienden a cero, donde  $\Delta M$  se define como:

$$\Delta M = \min(\Delta x_1, \Delta y_j, \Delta z_k) \tag{4.51}$$

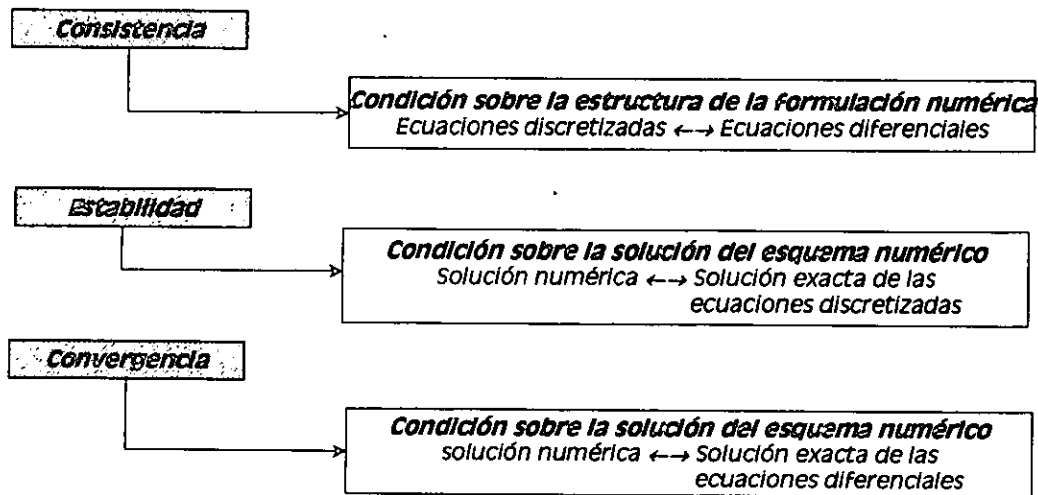


Figura 4.4 Relación entre consistencia, estabilidad y convergencia.

El esquema presentado en diferencias finitas tiene un error de truncamiento de primer orden en el tiempo y segundo orden en el espacio, y de acuerdo a los desarrollos en series de Taylor el error de truncamiento tiende a cero cuando  $\Delta t$  y  $\Delta M$  tienden a cero, por lo que el sistema de ecuaciones discretizadas presentado es consistente.

#### 4.6.2 ESTABILIDAD

Un esquema numérico estable es aquel para el cual los errores de redondeo de cualquier fuente (redondeo, truncamiento, etc.) no se les permite crecer en la secuencia de procedimientos numéricos como los procedimientos de cálculo de un paso de tiempo al siguiente. Por lo tanto un esquema de diferencias no deberá permitir que los errores crezcan indefinidamente de un paso a otro.

En este trabajo se obtuvo un sistema explícito en el tiempo, con la ventaja de ser un esquema sencillo en el que los valores de las variables de interés se obtienen a partir de los valores en una etapa de tiempo anterior a partir de ecuaciones algebraicas, pero con la desventaja con relación a los esquemas explícitos, que tienen mayores restricciones en cuanto a estabilidad, que conduce a una limitación en el paso de tiempo  $\Delta t$  y del paso espacial  $\Delta M$  es por ello que requieren una malla muy fina y de un  $\Delta t$  pequeño.

El requerimiento de estabilidad numérica para la mayoría de los métodos numéricos explícitos que resuelven sistemas de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicos es la llamada condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy, (Anderson et al. 1984), la cual se puede expresar para un flujo tridimensional como:

$$\text{Max} \left\{ \left| U \frac{\Delta t}{\Delta x} \right|, \left| V \frac{\Delta t}{\Delta y} \right|, \left| W \frac{\Delta t}{\Delta z} \right| \right\} < 1. \quad (4.52)$$

los mejores resultados para sistemas hiperbólicos utilizando los métodos explícitos más comunes se obtienen con números de Courant ( $v = U \cdot \Delta t / \Delta x$ ) cercanos a la unidad, (Anderson et al, 1984).

#### 4.6.3 CONVERGENCIA

La convergencia significa que la solución de las ecuaciones en diferencias finitas aproxima la solución verdadera de las ecuaciones diferenciales teniendo las mismas condiciones iniciales y de frontera referidas en la malla. Así, la solución numérica deberá aproximar la solución exacta de las ecuaciones diferenciales en cualquier punto y en cualquier tiempo cuando  $\Delta t$  y  $\Delta M$  tienden a cero, esto es, cuando la malla es refinada. Generalmente se encuentra que un esquema consistente y estable es convergente.

#### 4.7 EL PROGRAMA QUETZAL/3D

Entre las ventajas que se obtienen al hacer uso de software comercial para la simulación de flujos son: que resuelven ciertos tipos de problemas en un periodo de tiempo relativamente corto, que se cuenta con varias opciones en cuanto al modelo a utilizar, asimismo que se puede modelar en una, dos o tres dimensiones, la presentación de resultados, etc. Entre las desventajas se pueden mencionar: su costo inicial y de mantenimiento, grandes requerimientos de cómputo (ya que son desarrollados para una gran cantidad de problemas), algunos códigos son complicados en su uso, y otros están validados sólo para ciertas condiciones de flujo, dependencia del proveedor, etc.

El desarrollar programas propios, antes que emplear software comercial tiene varias ventajas, pero también tiene un límite. Entre las ventajas se pueden mencionar algunas tales como: permite desarrollar tecnología más enfocada al tipo de problemas que en particular se tienen que resolver; se adecua a la cantidad y calidad de datos disponibles; se aprende conforme se avanza y se genera

experiencia y conocimiento, esto último es de gran importancia para un país como el nuestro, sin tecnología propia y muy incipiente en este campo. Entre las desventajas están el tiempo que se tarda en desarrollar dichos programas, la presentación de los resultados en ocasiones no es muy adecuada, y que los modelos no están suficientemente verificados con una gran cantidad de datos y que por lo mismo se hagan cosas que anteriormente ya se han llevado a cabo (Berezowsky, 1994).

En este mismo contexto, para la solución del sistema de ecuaciones se procedió a la elaboración de un código de cálculo, este código llamado **QUETZAL/3D**, se apoya en la estructura del código **QUETZAL** (Ramírez, 1991), que sirve a su vez, para el estudio de flujos compresibles a altas temperaturas con modelos de turbulencia de segundo orden. A diferencia de este, **QUETZAL/3D** trata con las ecuaciones de movimiento para flujos incompresibles con modelos de turbulencia de orden cero y primer orden, y considera además la ecuación de conservación de especies y los modelos de turbulencia generados por esta. Ambos programas están escritos en FORTRAN estándar.

Las ecuaciones y los modelos de turbulencia descritas en las secciones anteriores fueron introducidas en **QUETZAL/3D**. La relación de las ecuaciones y la estructura del programa **QUETZAL/3D** puede verse en la figura 4.5, y el algoritmo general del programa se presenta en la figura 4.7.

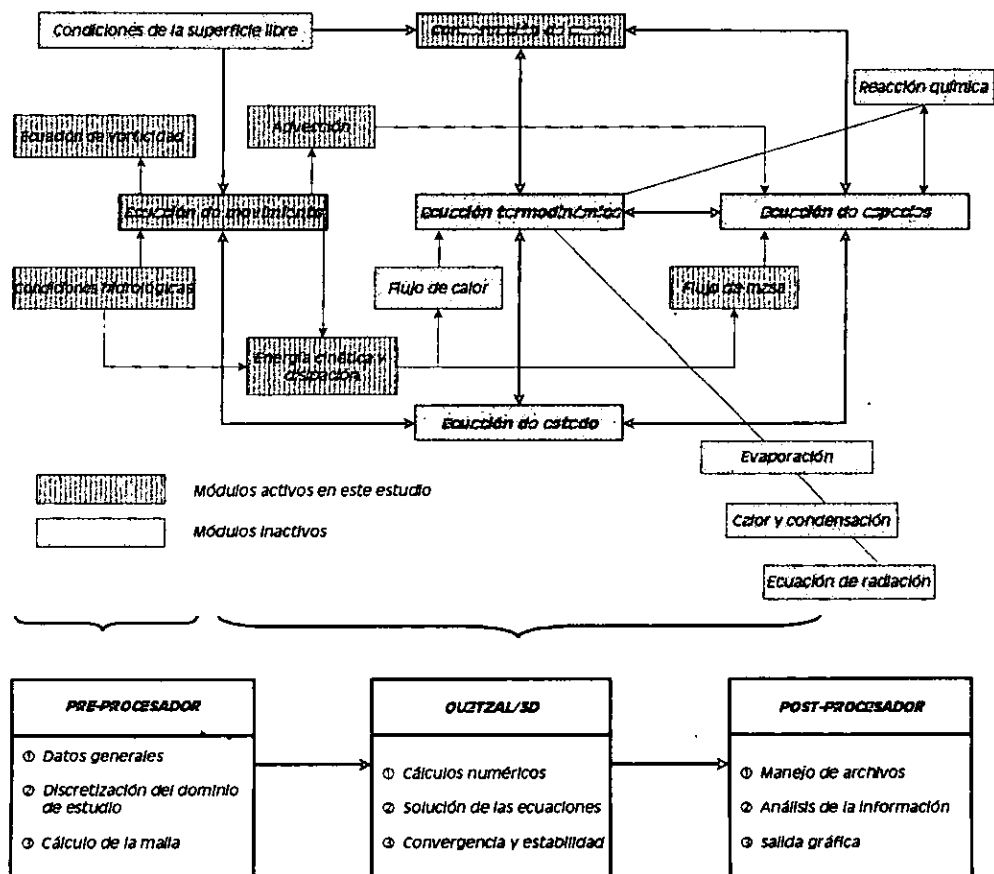
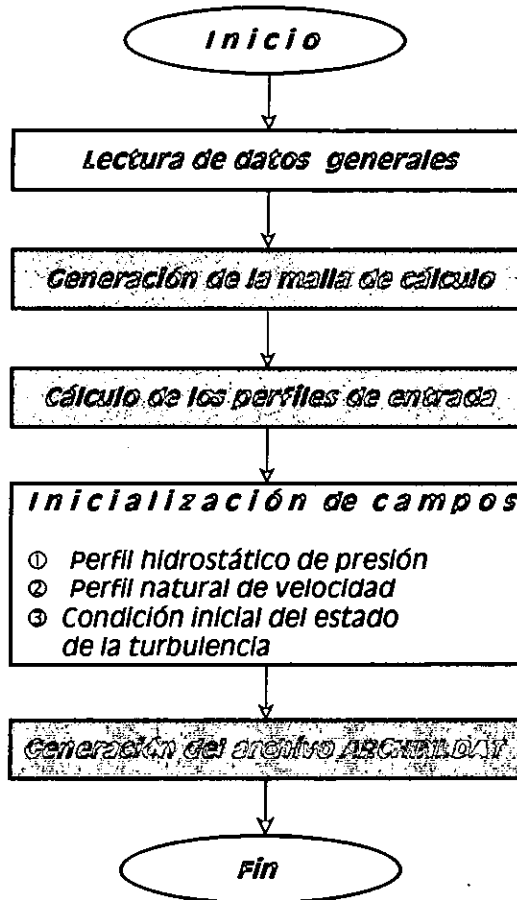
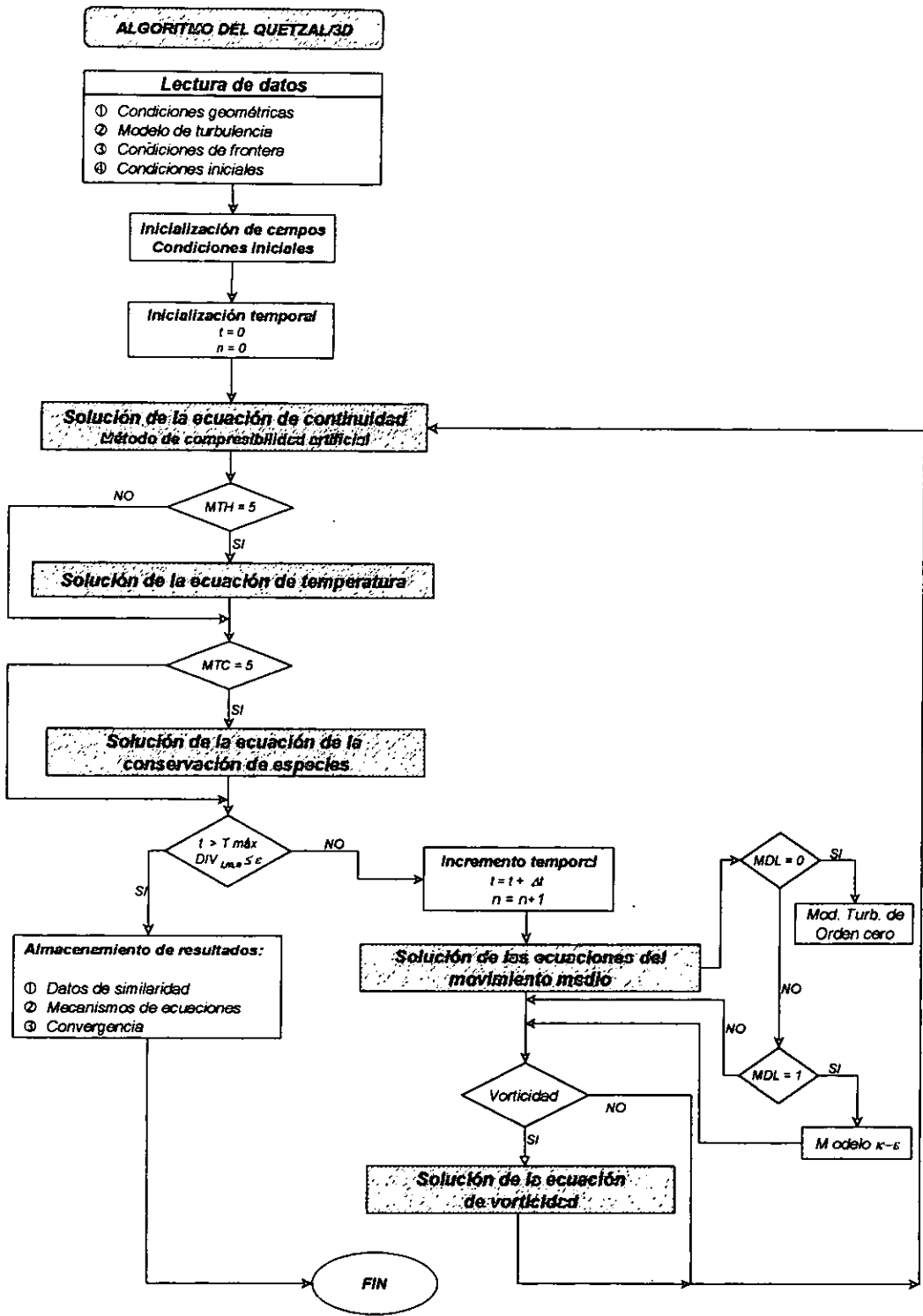


Figura 4.5 Relación entre las ecuaciones y estructura del programa QUETZAL/3D



4.6 Algoritmo preprocesador del programa QUETZAL/3D



4.7 Diagrama de flujo general del programa QUETZAL/3D



---

# CAPÍTULO CINCO

---

## ESTUDIO DE LA DEFORMACIÓN DEL FLUJO ALREDEDOR DE UN OBSTÁCULO

### 5.1 DEFORMACIÓN DEL FLUJO MEDIO

Como ya se mencionó en el capítulo 1, los procesos de transporte turbulento en canales tienen gran importancia práctica ya que influyen fuertemente la distribución de velocidad, los esfuerzos cortantes de fondo y la pérdida de energía, el transporte de sedimentos, la propagación de contaminantes, el arrastre de aire, etc. Por lo que la investigación de las estructuras turbulentas contribuye al entendimiento y predicción del fenómeno de la turbulencia en canales abiertos.

Como se ha mostrado hasta ahora, a través de las componentes de la tasa de deformación, las relaciones entre el esfuerzo y la rapidez de deformación en fluidos newtonianos y de la deducción de las ecuaciones de N-S (ver sección 3.1.3), la deformación del fluido es inducida solamente por el alargamiento de elemento de fluido, es decir, por la tasa de deformación  $S_{ij}$  o lo que es lo mismo, la parte simétrica del tensor de deformación total  $S_{ij}$ . Por lo que este capítulo se enfocará a la descripción de la deformación del flujo y a las estructuras turbulentas que se presenten, sin darle demasiado importancia a la parte rotacional del flujo, ya que en el capítulo siguiente se hará notar los efectos de ésta última.

#### 5.1.1 ECUACIONES DEL FLUJO MEDIO

Las ecuaciones que aquí se consideran fueron deducidas en el capítulo 3, y son las ecuaciones de continuidad ec. (3.34), que por conveniencia se escribe como:

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.1)$$

y la ecuación para el campo de velocidades, ec. (3.42):

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} \quad (5.2)$$

Este sistema de ecuaciones se aplicó en el estudio de los patrones de flujo en un canal, provocados por un obstáculo localizado en el fondo y en la parte central del mismo, permitió estudiar

la tasa de deformación del flujo y la consecuente generación de estructuras turbulentas que se describen más adelante.

## 5.2 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

### 5.2.1 DOMINIO DE ESTUDIO

El dominio de estudio es un canal rectangular de las siguientes dimensiones: tiene una longitud de 0.30 m por 0.30 m en la dirección transversal y 0.20 m de altura. Las dimensiones del obstáculo son: 0.06 m en la dirección longitudinal por 0.06 m en la dirección transversal y 0.04 m de altura. En la figura 5.2 se muestra un esquema del dominio de solución.

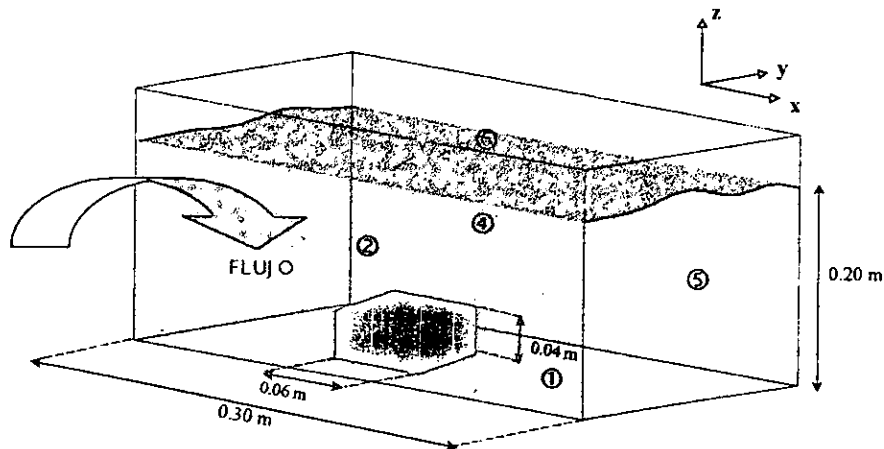


Figura 5.1 Dibujo esquemático del dominio de estudio

En la figura anterior se pueden apreciar las fronteras físicas, cuya descripción corresponde a:

- |                               |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|
| 1. Fondo del canal            | 4. Frontera lateral derecha |
| 2. Frontera lateral izquierda | 5. Salida del flujo         |
| 3. Entrada del flujo          | 6. Superficie libre         |

Debido al método de solución numérica adoptado en este trabajo, que es el de diferencias finitas, el dominio de estudio se discretizó con el apoyo de una celda tipo MAC. Se utilizó una malla no homogénea, es decir, tiene incrementos espaciales diferentes a lo largo, ancho y alto del dominio. Pudiéndose distinguir tres zonas en cada dirección: una zona de malla gruesa, una zona de transición y una zona de malla fina. El incremento así como la longitud de cada zona dependen de la longitud del obstáculo, y solamente en la zona de transición el tamaño de los incrementos se obtuvo a partir de una progresión logarítmica.

La zona de malla fina tiene una magnitud igual a la longitud del obstáculo más la mitad de dicha longitud, a cada lado del mismo. A partir de ahí, empieza la zona de transición a ambos lados del obstáculo, esto implica que para cada dirección haya dos zonas de transición: una decreciente que va desde la zona de malla gruesa hacia la zona fina y otra creciente que va de la zona de malla fina



hacia la zona de malla gruesa; el largo de la zona es igual a un medio de la longitud del obstáculo en la dirección respectiva. En cuanto a la malla gruesa tiene la misma longitud que la zona de transición, pero sus incrementos son uniformes, de magnitud igual a dos veces el incremento mínimo. La descripción anterior cambia un poco para la dirección z, ya que el eje coordenado respectivo se hace coincidir con el borde inferior del dominio lo que da por resultado que en dicha dirección sólo se tenga una zona de malla fina, de transición y de malla gruesa.

El usar una malla no homogénea permite tener celdas más finas en la zona de mayor interés, en este estudio, la zona de interés es cerca del obstáculo, ya que por ser éste una perturbación al flujo, es ahí donde se generan los gradientes más fuertes de las variables y por lo tanto permite obtener información más precisa de las estructuras turbulentas que se forman en esa zona, y que además son las más importantes en el dominio de estudio, ya que, entre mayor sea la distancia desde el límite superior de la perturbación (en este caso el obstáculo), hacia el límite del dominio del flujo, será menor la influencia del obstáculo sobre el campo de flujo. El usar una malla del tipo expuesto anteriormente, hace posible utilizar menor cantidad de memoria y tiempo de CPU.

De cualquier manera, es de recalcar que en el centro de las celdas de cálculo pasa una malla de interpolación, la cual permite aumentar la precisión de la solución numérica. A continuación, en las figuras siguientes se muestra el dominio de estudio desde diferentes perspectivas.

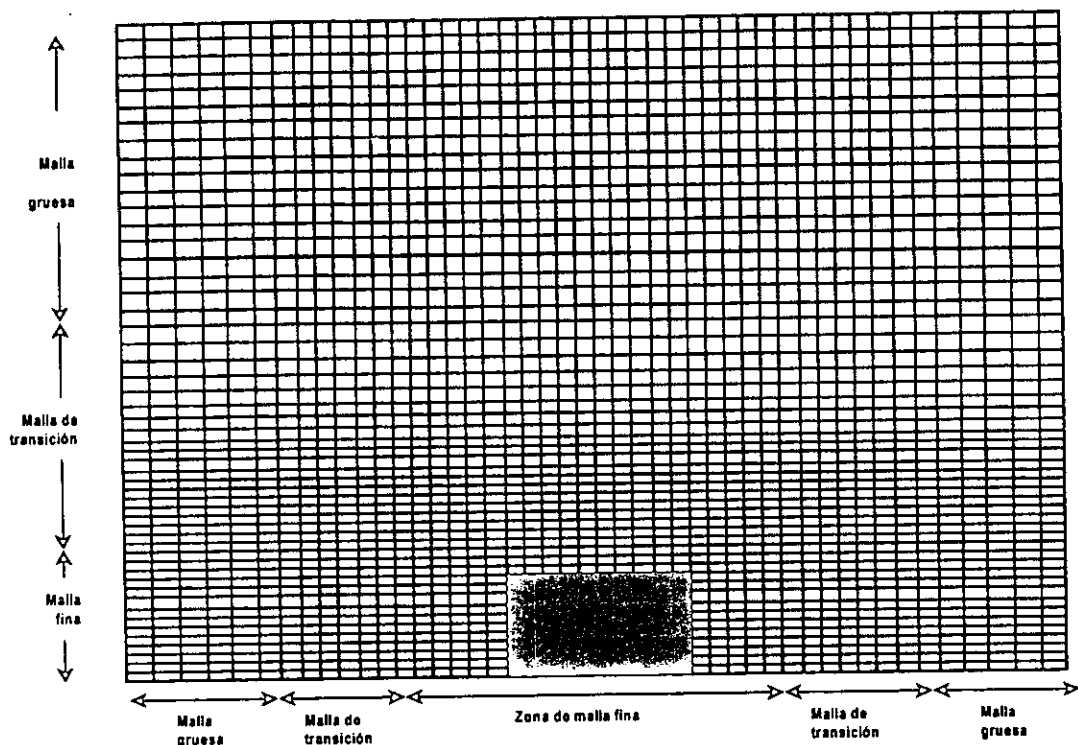


Figura 5.2 Subdivisiones de la malla no-homogénea

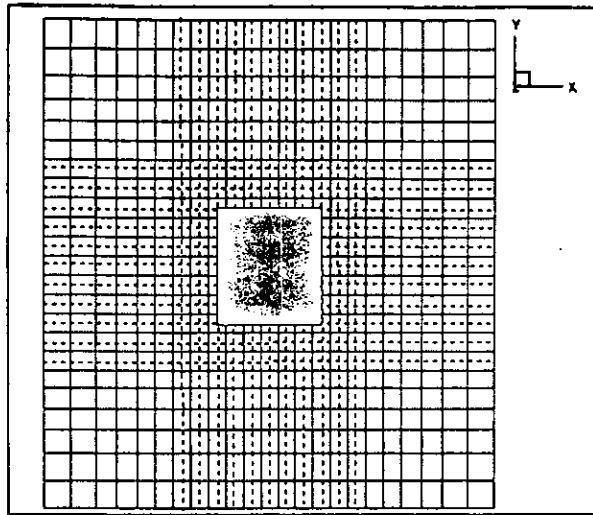


Figura 5.3 Vista en planta del dominio

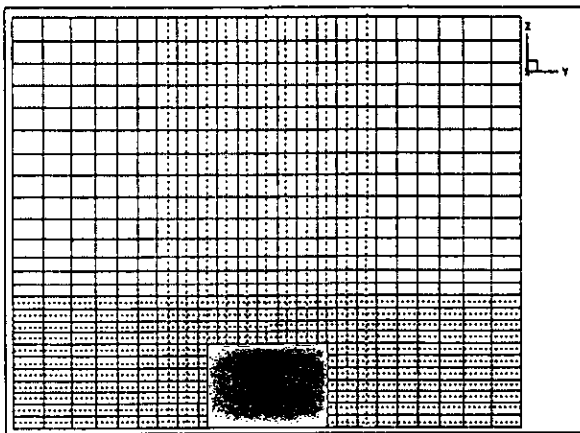


Figura 5.4 Perfil z-x del dominio

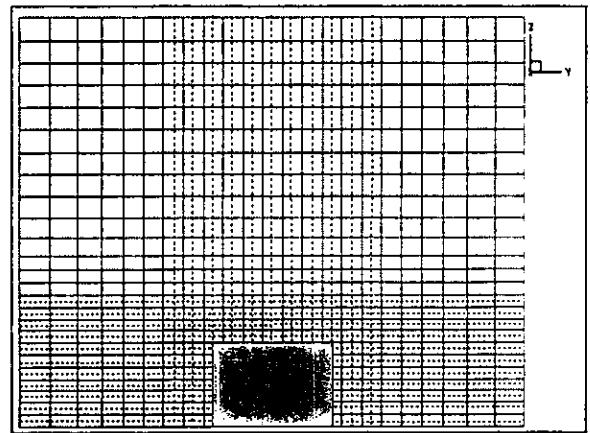


Figura 5.5 Perfil z-y del dominio

### 5.2.2 CONDICIONES INICIALES

Se supone que en todo el dominio de estudio, en  $t = 0$ , el flujo está en reposo, es decir,

$$\bar{V}_{i,j,k} = 0, \quad \bar{W}_{i,j,k} = 0. \quad (5.3)$$

La presión en el fondo del canal se consideró igual a la presión hidrostática y se define como:

$$P(z) = \gamma \cdot h. \quad (5.4)$$

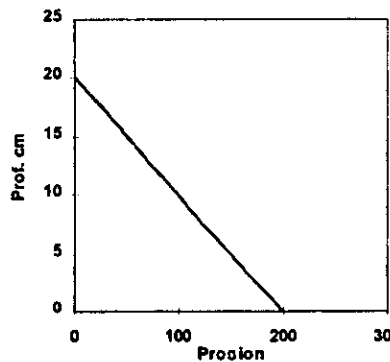


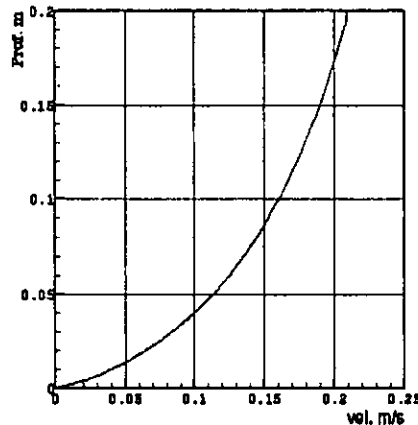
Figura 5.6 Distribución de presiones en el canal

En cuanto a la distribución de velocidades del flujo a la entrada del canal, se han llevado a cabo muchos estudios sobre la distribución de la ley logaritmo en flujos de canales abiertos. Su validez está basada en la aplicación en canales abiertos con paredes hidráulicamente lisas, para los valores de Nikuradse en tubos,  $\kappa=0.4$  y  $A=5.5$ , según la formulación descrita en la ec. (5.5). En muchos casos de flujos en canales abiertos, al contrario de las capas límite, la ley logaritmo es válida en toda la profundidad del flujo, desde el fondo hasta la superficie libre. La corrección de la constante de Von Kármán  $\kappa$ , y la constante de integración  $A$ , requiere un ajuste apropiado. Una explicación más amplia del tema se da en la sección 2.4.1.

En esta aplicación en particular el perfil de distribución de velocidades que se impuso a la entrada del canal se calculó con la ley logaritmo, es decir:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + A, \quad (5.5)$$

donde  $\kappa = 0.41$  y  $A = 5.29$ , hubo dos razones principales para hacerlo de tal modo. La primera y más importante es que como se expuso anteriormente, solamente a números de Reynolds muy altos se notan en la superficie libre, los efectos de la desviación que sufre el perfil de distribución de velocidades fuera de la región de pared; dado que el número de Reynolds en este estudio es de aproximadamente 14000, se puede afirmar que es un número relativamente bajo y que se encuentra dentro del régimen de transición, y la segunda razón (como consecuencia de la primera), es que la condición de frontera en la superficie libre supone que las componentes de velocidades ( $V, W$ ), son cero.



**Figura 5.7** Distribución de velocidades de flujo a la entrada del canal

Debido a que en un estado de reposo la turbulencia es prácticamente inexistente, lo que es inaceptable en la solución numérica, se supone que el flujo es ligeramente turbulento. Para esto, se impone como condición inicial, la distribución de velocidades  $U$  a lo largo del eje  $z$ , es decir, el perfil de entrada, en forma gradual en la dirección  $x$ . Además se considera también un estado inicial de la turbulencia, que corresponde a la siguiente suposición:  $U^2 = 0.7 K$ ,  $V^2 = 0.15 K$ ,  $W^2 = 0.15 K$ ,  $uv = 0.1 K$ ,  $uw = 0.1 K$  y  $vw = 0.1 K$ . En las suposiciones anteriores  $K$  se define como la energía cinética del

movimiento medio e igual a  $K = \frac{1}{2} (U^2 + V^2 + W^2)$ . El tomar como referencia la energía cinética del movimiento medio y no del turbulento, se debió básicamente, a que las cantidades medias ( $U, V, W$ ) ya se conocían, por los resultados obtenidos con el modelo de orden cero; no así los valores de las cantidades fluctuantes.

### 5.2.3 CONDICIONES DE FRONTERA

En lo que se refiere a las soluciones numéricas, los datos auxiliares son en cierto sentido, el punto de partida para la obtención de la solución en el dominio interior, particularmente para problemas de propagación. Si no se hace una distinción entre tiempo y espacio como variables independientes entonces el dato auxiliar especificado en la frontera  $\partial R$  (ver figura 5.8) es extrapolado por el algoritmo computacional (basado en ecuaciones diferenciales parciales), para proporcionar la solución en el interior  $R$ .

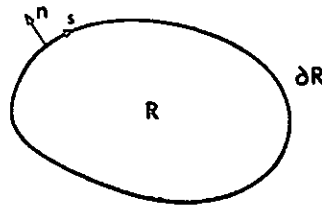


Figura 5.8 Dominio computacional  $R$

Las condiciones de frontera son especificadas de tres maneras:

- i) Condición de Dirichlet,  $u = f$  sobre  $\partial R$ .
- ii) Condición de Neumann (derivada),  $\partial u / \partial n = f$  ó  $\partial u / \partial s = g$  sobre  $\partial R$ .
- iii) Condición mixta o de Robin,  $\partial u / \partial n + ku = f$ ,  $k > 0$ , sobre  $\partial R$ .

en las condiciones auxiliares ii) y iii),  $\partial / \partial n$  denota la derivada normal hacia fuera,  $u$  es cualquier variable que se especifica sobre la frontera  $R$ .

Para la mayoría de los flujos que requieren la solución de las ecuaciones de N-S en variables primitivas ( $U, V, W, \rho$ , etc.), al menos una componente de la velocidad está dada sobre una frontera en la cual entra el flujo. Esto proporciona una condición de frontera de Dirichlet sobre la velocidad. Por ejemplo, para la ecuación potencial de la velocidad que gobierna el flujo compresible no viscoso, la condición  $\partial \phi / \partial n = 0$  en la superficie del cuerpo es una condición de frontera de Neumann. Las condiciones mixtas son raras en mecánica de fluidos pero se presentan en transferencia de calor convectivo. Computacionalmente, las condiciones auxiliares de Dirichlet pueden ser aplicadas exactamente mientras que  $f$  sea analítica. Sin embargo, se pueden introducir errores en la representación de las condiciones de Neumann o de Robin.

Las condiciones de frontera de Neumann poseen un gran problema. Un único extremo de la expresión en diferencias finitas, que usa información del interior del dominio, se puede introducir para  $\partial T / \partial x$ , por ejemplo, en forma discreta:

$$\frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{\Delta x} = c^{n+1}, \quad (5.6)$$

en la aplicación clásica de un esquema hacia delante en el tiempo y centrado en tres puntos en el espacio (FTCS):

$$T_j^{n+1} = s T_{j-1}^n + (1 - 2s) T_j^n + s T_{j+1}^n, \quad (5.7)$$

se usaría el esquema anterior para obtener el valor de  $T_j^{n+1}$  en todos los nodos interiores,  $j = 2, \dots, J_{n-1}$ . En la ec. (5.7),  $s$  es un parámetro igual a  $s = \alpha \Delta t / \Delta x^2$ . Por otro lado, en la frontera  $x = 0$ , el esquema de la ec. (5.6) se transforma en:

$$T_1^{n+1} = T_2^{n+1} - c^{n+1} \Delta x, \quad (5.8)$$

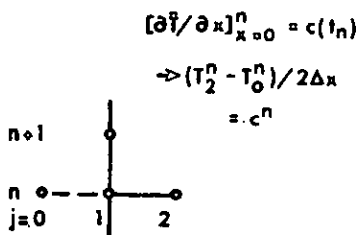
el problema en todo esto, es que la ec. (5.8) tiene un error de truncamiento de  $O(\Delta x)$ , mientras que el esquema (FTCS) o la ec. (5.7), tiene un error de truncamiento de  $O(\Delta x^2)$ . Ya que la ecuación de difusión es una ecuación parabólica, la precisión de orden más bajo, que existe dentro del esquema de solución en la frontera, afectará la precisión de la solución en el interior del dominio (que es de orden mayor), para todos los tiempos posteriores.

Por lo tanto, es deseable representar la condición de frontera de Neumann, con una expresión algebraica que tenga el mismo error de truncamiento, que la expresión utilizada para el cálculo de los nodos interiores. Esto se puede lograr representando la condición de Neumann como:

$$\frac{T_2^n - T_0^n}{2\Delta x} = c^n. \quad (5.9)$$

Para alcanzar un error de truncamiento de  $O(\Delta x^2)$ , la ec. (5.9) incluye nodos ficticios (0,n) los cuales caen fuera del dominio computacional como se puede observar en la figura 5.11 a :

a) Tratamiento explícito



b) Tratamiento implícito

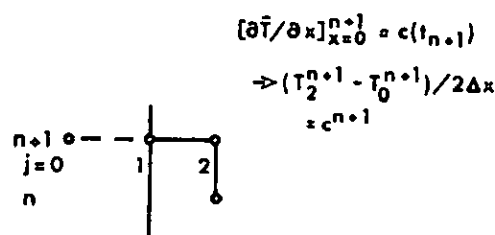


Figura 5.9 Tratamiento de las condiciones de frontera de Neumann

Sin embargo, si el dominio computacional se extiende conceptualmente para incluir este punto, entonces la ec. (5.9) se puede combinar con una ecuación interior, por ejemplo, el esquema dado por:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} - \alpha \frac{(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{\Delta x^2} = 0, \quad (5.10)$$

centrado en (1,n) para eliminar  $T_0^n$ . El resultado es:

$$T_1^{n+1} = -2s\Delta x c^n + (1 - 2s) T_1^n + 2s T_2^n, \quad (5.11)$$

y el error de truncamiento es de  $O(\Delta t, \Delta x^2)$ , en cualquier punto del dominio. Si se emplea un esquema implícito en el interior del dominio, por ejemplo:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} - \alpha \frac{(T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1})}{\Delta x^2} = 0, \quad (5.12)$$

la condición de frontera de Neumann (ec. 5.6) se evalúa en el tiempo  $n+1$ , la cual combinada con la siguiente ecuación:

$$-s T_{j-1}^{n+1} + (1 + 2s) T_j^{n+1} - s T_{j+1}^{n+1} = T_j^n, \quad (5.13)$$

proporciona (ver figura 5.9 b):

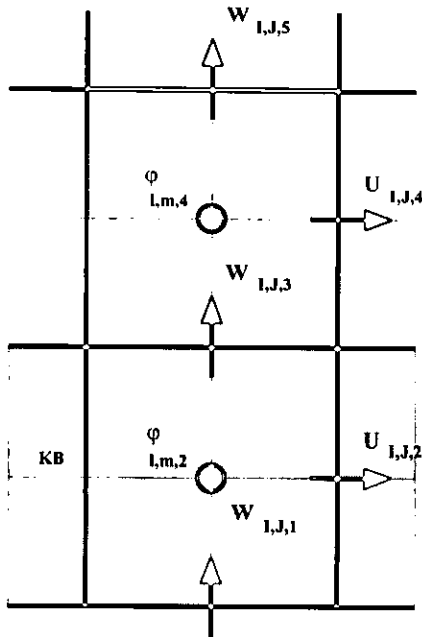
$$(1 + 2s) T_1^{n+1} - 2s T_2^{n+1} = T_1^n - 2s \Delta x C^{n+1} \quad (5.14)$$

lo que convierte la primera ecuación es un sistema tridiagonal. La construcción usada para crear las ecs.(5.11) y (5.14), se aplica también cuando las condiciones de frontera de Neumann se requieren en  $x = x$  máxima.

Por lo general, para las condiciones de frontera mixtas es necesaria una restricción adicional sobre los parámetros de la condición de frontera para asegurar la estabilidad. Sin embargo, no se profundizará en estas, ya que en este estudio no se utilizaron.

Las condiciones de frontera se introducen en celdas ficticias que se encuentran en los bordes del dominio de estudio. Para este caso en particular, las condiciones de frontera en la superficie, son de deslizamiento. Estas condiciones varían de las condiciones de Dirichlet para paredes físicas (Sini, 1986), correspondientes a las paredes del canal, en las que la velocidad horizontal no es cero en la frontera, lo cual simula una pared donde el flujo se desliza (pared completamente lisa). En cambio, para la frontera donde se supone entra el flujo, se impuso una condición de frontera tipo Dirichlet. En cuanto al fondo en éste se impusieron condiciones de frontera de Neumann. La condición de frontera de salida es una frontera especial, ya que se debe asegurar que el flujo salga, para esto se usó una condición de frontera de Neumann como la descrita en párrafos anteriores, es decir, una condición de frontera que tuviera el mismo orden de error que el dominio interior de cálculo, para esto se utilizó una condición de frontera de segundo orden con un error de truncamiento de  $O(\Delta x^2)$ . En las fronteras laterales se utilizaron condiciones de frontera de Dirichlet, al igual que en la frontera que corresponde a la entrada del flujo. En las siguientes páginas se explican las diferentes fronteras que limitan el dominio de cálculo en estudio.

☑ **CONDICIONES DE FRONTERA PARA EL FONDO (FRONTERA 1, SEGÚN LA FIGURA 5.2.)**



→ *Velocidad horizontal:*

$$U(I, J, KB) = -U(I, J, KB+2)$$

→ *Velocidad transversal:*

$$V(I, J, KB) = -V(I, J, KB+2)$$

→ *Velocidad vertical:*

$$W(I, J, KB+1) = 0.0$$

→ *Concentración media:*

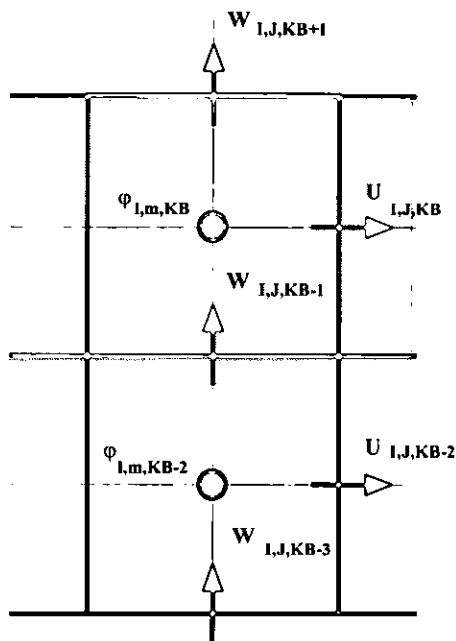
$$C_\varphi(I, J, KB) = -C_\varphi(I, J, KB+2)$$

→ *Cantidades turbulentas:*

$$\varphi(I, J, KB) = \varphi(I, J, KB+2)$$

donde KB, representa el subíndice espacial que define la posición mínima de cálculo de la variable en la dirección z.

☑ **CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA SUPERFICIE LIBRE (FRONTERA 6, SEGÚN LA FIGURA 5.2)**



→ *Velocidad horizontal:*

$$U(I, J, KB) = U(I, J, KB-2)$$

→ *Velocidad transversal:*

$$V(I, J, KB) = V(I, J, KB-2)$$

→ *Velocidad vertical:*

$$W(I, J, KB-1) = 0.0$$

→ *Concentración media:*

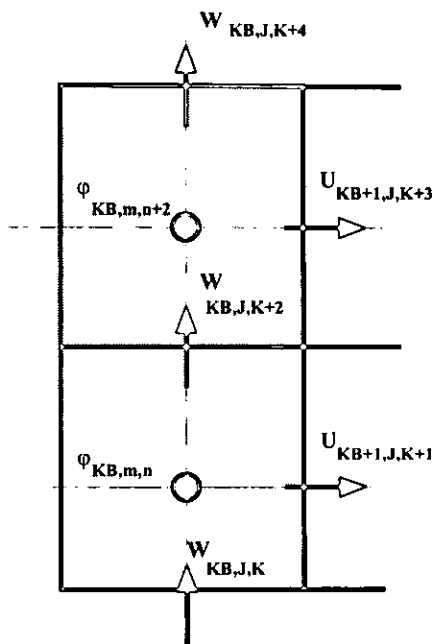
$$C_\varphi(I, J, KB) = -C_\varphi(I, J, KB-2)$$

→ *Cantidades turbulentas:*

$$\varphi(I, J, KB) = \varphi(I, J, KB-2)$$

donde KB, representa el subíndice espacial que define la posición máxima de cálculo de la variable en la dirección z.

☑ **CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA ENTRADA DEL FLUJO (FRONTERA 3, SEGÚN LA FIGURA 5.2)**



→ *Velocidad horizontal:*

$$U(KB+1, J, K) = U(K)$$

→ *Velocidad transversal:*

$$V(KB+1, J, K) = 0.0$$

→ *Velocidad vertical:*

$$W(KB, J, K) = 0.0$$

→ *Concentración media :*

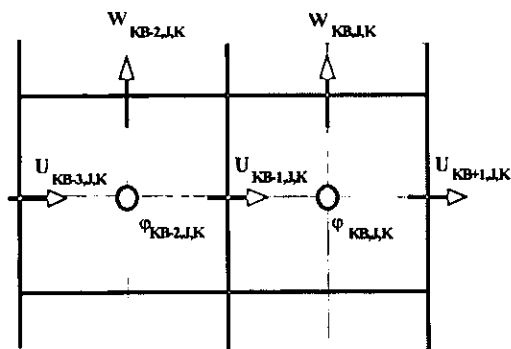
$$C_{\phi}(KB, J, K) = 0.0$$

→ *Cantidades turbulentas:*

$$\phi(KB, J, K) = \phi(KB+2, J, K)$$

donde KB, representa el subíndice espacial que define la posición máxima de cálculo de la variable en la dirección x.

☑ **CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA SALIDA DEL FLUJO (FRONTERA 5, SEGÚN LA FIGURA 5.2)**



→ *Velocidad horizontal:*

$$U(KB+1, J, K) = 2[U(KB-1, J, K) - U(KB-3, J, K)]$$

→ *Velocidad transversal:*

$$V(KB, J, K) = V(KB-2, J, K)$$

→ *Velocidad vertical:*

$$W(KB, J, K) = W(KB-2, J, K)$$

→ *Concentración media :*

$$C_{\phi}(KB, J, K) = C_{\phi}(KB-2, J, K)$$

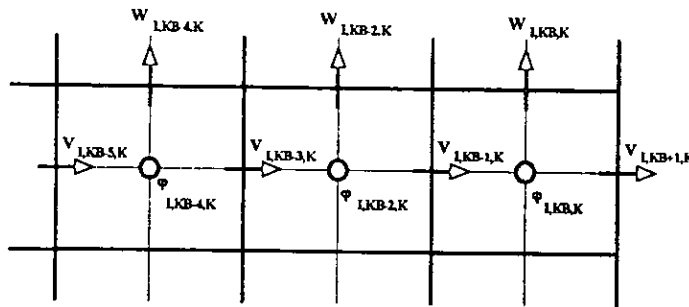
→ *Cantidades turbulentas:*

$$\phi(KB, J, K) = \phi(KB-2, J, K)$$

donde KB, representa el subíndice espacial que define la posición máxima de cálculo de la variable en la dirección x.



☑ **CONDICIONES DE FRONTERA LATERALES (FRONTERAS 2 Y 4, SEGÚN LA FIGURA 5.2)**



→ *Velocidad horizontal:*

$$U(I, KB, K) = U(K)$$

→ *Velocidad transversal:*

$$V(I, KB, K) = 0.0$$

→ *Velocidad vertical:*

$$W(I, KB, K) = 0.0$$

→ *Concentración media:*

$$C_\varphi(I, KB, K) = C_\varphi(I, KB-2, K)$$

→ *Cantidades turbulentas:*

$$\varphi(I, KB, K) = \varphi(I, KB-2, K)$$

donde KB, representa el subíndice espacial  $i$  define la posición máxima de cálculo de variable en la dirección  $y$ .

Las condiciones de frontera para la frontera lateral izquierda son similares, solamente que KB representa la posición mínima de la variable en la dirección  $y$ .

### 5.3 CURVA DE CONVERGENCIA

El término de convergencia temporal significa que la solución del sistema de ecuaciones (el cual involucra los diferentes esquemas de solución en diferencias finitas) se aproxime a una solución que satisfaga el proceso físico que se trata de representar, aunque no hay que perder de vista, que, en muchos casos la solución de un sistema de ecuaciones puede converger hacia una solución que carezca de sentido.

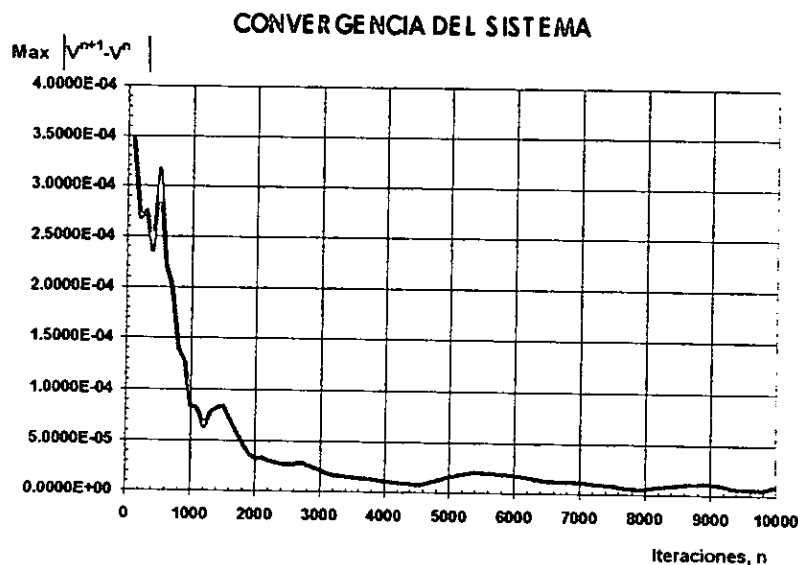


Figura 5.10 Convergencia temporal de las velocidades medias, ( $t = n\Delta t$ )

En lo que respecta a este estudio, los esquemas propuestos condujeron hacia una solución consistente, en la figura 5.10 se muestra la convergencia temporal de las cantidades medias, en este caso, las velocidades, para una simulación dada.

#### 5.4 ESTUDIO DEL FLUJO CONSIDERANDO UN MODELO DE TURBULENCIA DE ORDEN CERO

En primer término, y dado que el programa original QUETZAL/3D incluye nuevas modificaciones, se procedió a validar cada uno de los módulos por etapas. Así, el módulo de la turbulencia, fue calibrado considerando para ello un modelo de turbulencia de coeficientes constantes. Este modelo además de ofrecer "simplicidad" permitió validar el algoritmo con un ahorro considerable de tiempo computacional.

Los coeficientes de viscosidad equivalente requieren a su vez de un trabajo de ajuste o calibración; en los resultados que aquí se presentan se utilizaron los coeficientes que se muestran en la tabla 5.1. Estos coeficientes se consideran óptimos para las características del flujo que se describe en este capítulo.

VT1	VT2	VT3
0.005	0.001	0.0001

**Tabla 5.1** Coeficientes óptimos del modelo de orden cero

En lo que se refiere a los resultados obtenidos con el modelo de orden cero, el comportamiento del flujo se muestra en las figuras siguientes. Como se puede observar, tanto en las figuras de las líneas de corrientes (Figuras 5.11 - 5.14), y las de contorno de la tasa de deformación total para las componentes de velocidad V y W (Figuras 5.15 - 5.20), son simétricas. Esta característica se debe al hecho de que el obstáculo se localiza en el centro del dominio del plano x-y, por tanto, la simetría que presentan dichas estructuras es, en cierta forma, una manera de comprobar que el modelo hidrodinámico propuesto para la simulación de tal flujo, reproduce adecuadamente el movimiento de éste en el canal.

También es un hecho notable, que no existan distorsiones causadas por las condiciones de frontera, esto significa que dichas condiciones no introducen perturbaciones numéricas adicionales a la solución de las ecuaciones diferenciales en el dominio interior de cálculo.

En las figuras 5.11 - 5.14, en particular en las figuras 5.12 y 5.14, se aprecia la deflexión de las líneas de corriente en la dirección x, se ve claramente que dicha deformación es más pronunciada en las zonas cercanas al obstáculo, y que lejos de éste su influencia prácticamente no existe.

Por otro lado, en lo que se refiere al flujo secundario, las isolíneas correspondientes a la componente de velocidad W, son de las que aportan más información. Analizando la figura 5.16, se notan cuatro zonas de recirculación las cuales son simétricas, dos en la parte inferior a cada lado del

obstáculo y dos en las aristas superiores del obstáculo, cuya deformación es muy grande. En la figura 5.17, se dibuja la componente de la velocidad  $W$ , las cuales forman una envolvente alrededor de un núcleo. En cuanto a la velocidad transversal  $V$ , en la figura 5.19 se nota una clara simetría en las estructuras del flujo; en la figura 5.20 se muestra la formación de células de corrientes secundarias, cuya forma se debe a la presencia del obstáculo. Todo lo anterior se refiere al flujo medio simulado con un modelo de orden cero. Los resultados mostrados hasta aquí requirieron de un gran esfuerzo de pruebas de ajuste que incluyó un proceso de prueba y error, que sirvió para calibrar las diversas componentes del programa de cómputo. Este trabajo fue la pauta para considerar posteriormente simulaciones más sofisticadas que incluyeran un modelo de turbulencia  $\kappa-\epsilon$  (sección 5.5) y el estudio de la rotación del flujo que se incluye en el capítulo 6.

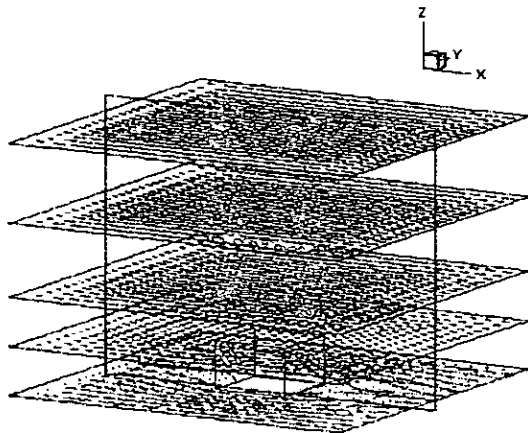


Figura 5.11 Líneas de corriente de la velocidad  $U$  en todo el dominio.

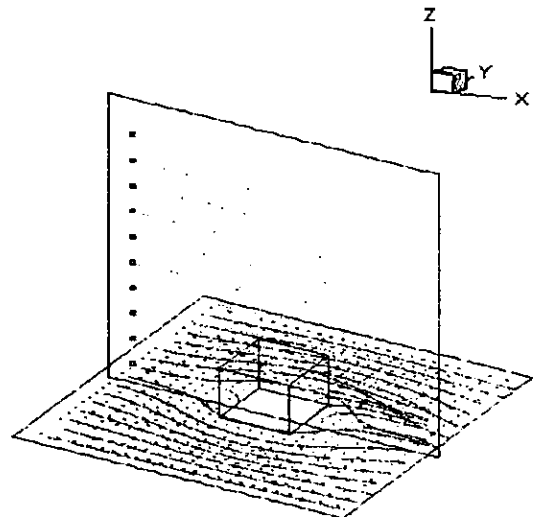


Figura 5.13 Líneas de corriente en la dirección  $x$

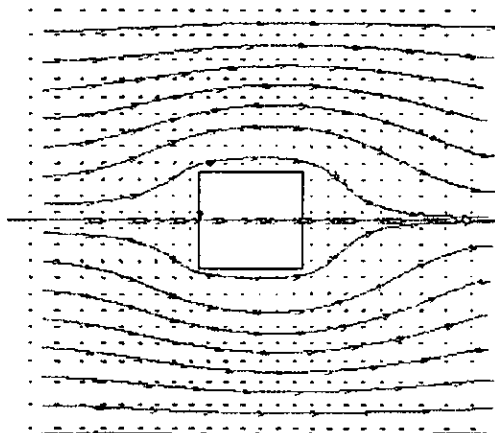


Figura 5.12 Vista en planta de las líneas de corriente  $U$ , en todo el dominio.

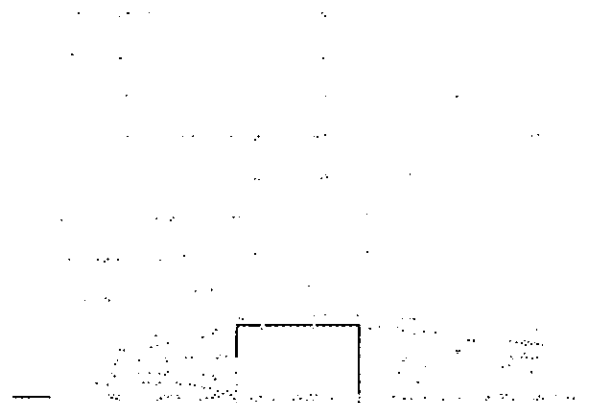


Figura 5.14 Perfil de las líneas de corriente en  $x$

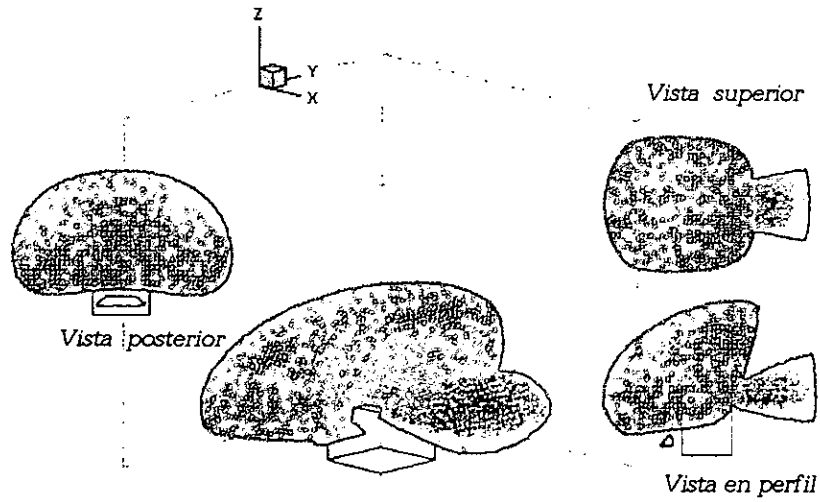


Figura 5.15 Diferentes vistas de la velocidad  $W$ .

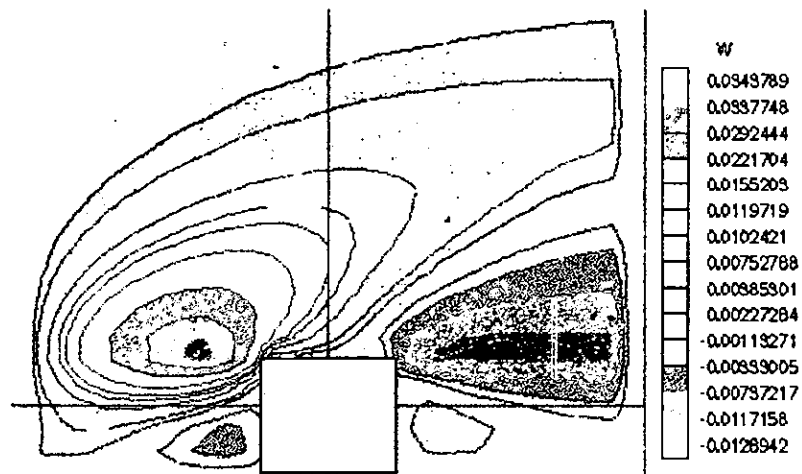


Figura 5.16 Corte x-z de la velocidad  $W$ , en m/s.

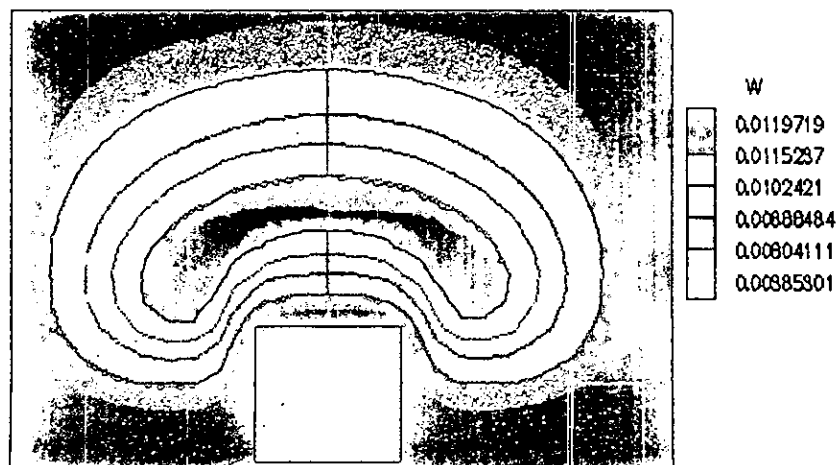


Figura 5.17 Corte z-y de la velocidad  $W$ , en m/s.

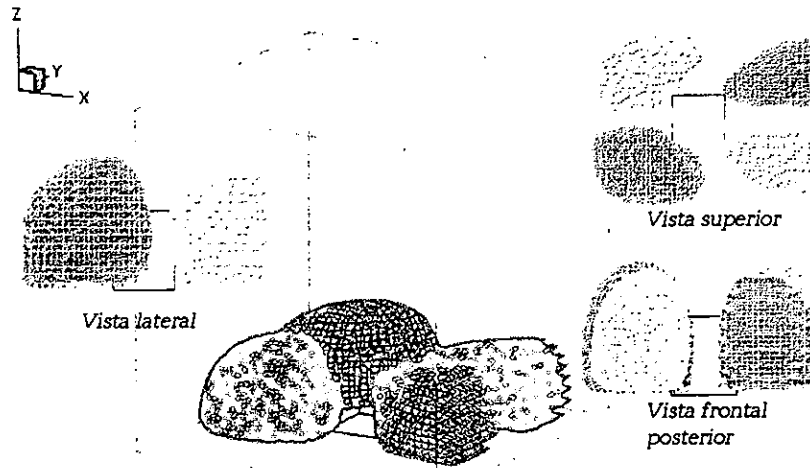


Figura 5.18 Diferentes vistas de velocidad transversal  $V$ , en m/s.

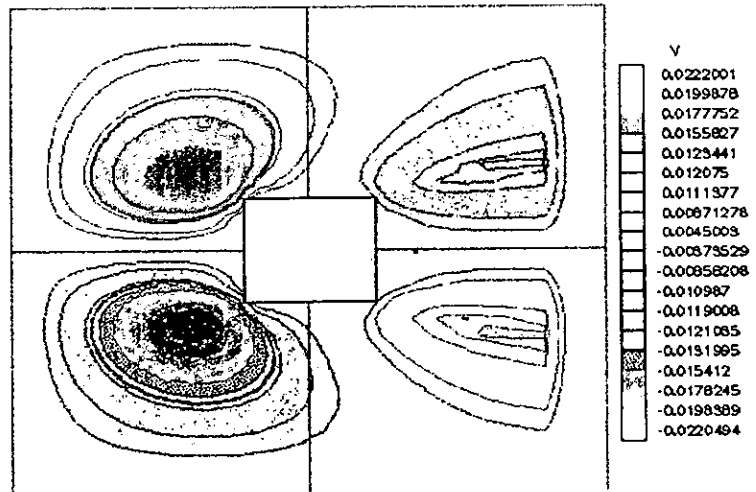


Figura 5.19 Corte x-y de la velocidad  $V$ , en m/s.

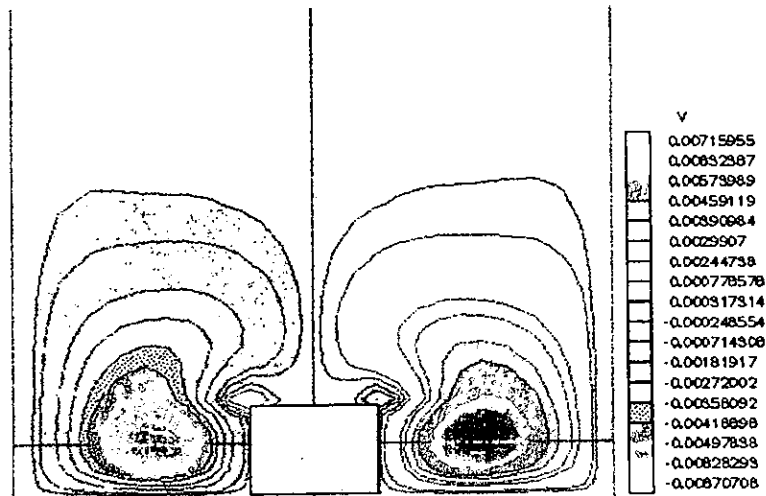


Figura 5.20 Corte z-y de la velocidad  $V$ , en m/s.

## 5.5 ESTUDIO DEL FLUJO CONSIDERANDO UN MODELO DE TURBULENCIA DE PRIMER ORDEN

Como se mencionó en el capítulo uno, existe un gran vacío de datos o información de éste tipo de problema a nivel mundial en 3D, la única evidencia de verificación cuantitativa con nuestro caso, es el estudio llevado a cabo por Frank y Rodi (1992), dicho trabajo numérico se refiere a un flujo bidimensional sobre las esquinas de un cilindro, con un  $Re=22000$ . En la realización del trabajo arriba mencionado, se aplicaron varios modelos de turbulencia, así como varios estudios experimentales; dichos resultados se muestran, en forma de perfiles adimensionales, en la figura 5.21 b.

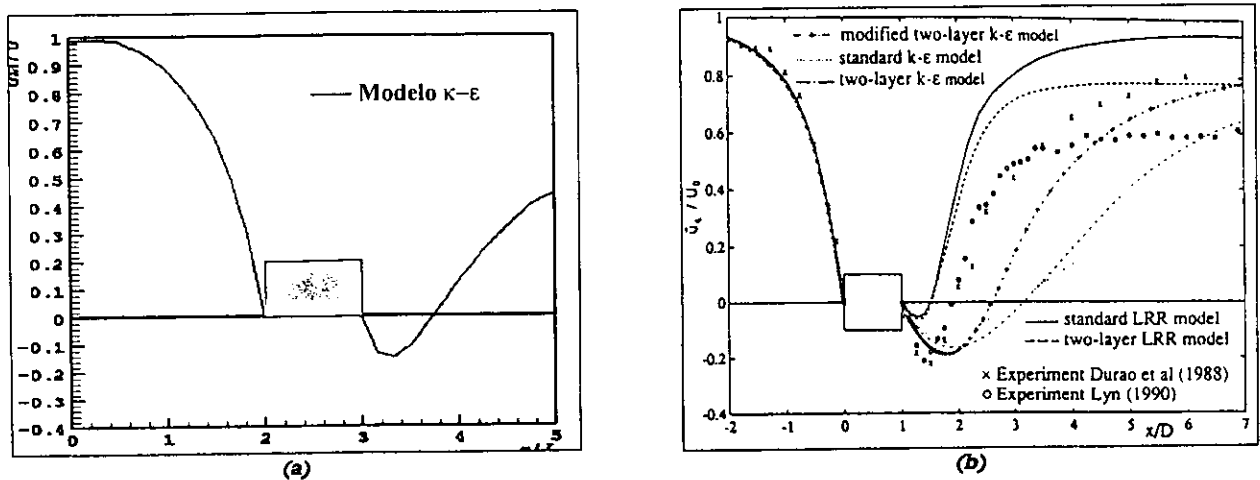


Figura 5.21 (a) Velocidad media a lo largo del canal obtenida en este estudio; (b) Recopilación de la velocidad media a lo largo de un canal (Frank y Rodi, 1992)

En la figura 5.21 a, se muestra el perfil adimensional de la velocidad media, a lo largo del canal, obtenida en este estudio.

Comparando las gráficas 5.21 a y b, se puede constatar que los valores de la velocidad media obtenidos en este estudio, caen dentro del intervalo de valores dados, tanto por otros modelos de turbulencia como por estudios experimentales (Duraó et al, 1988 y Lyn, 1990); por tanto, los resultados obtenidos en este estudio se consideran aceptables.

Los resultados de la simulación de las variables medias con el modelo de primer orden, se muestran en las páginas siguientes. Como ya se mencionó, la simetría es una característica muy importante de la simulación de estas variables, ya que es una forma de comprobar que el modelo propuesto es correcto. A propósito de la simetría, es difícil hablar de ésta en flujos turbulentos, sobre todo cuando el número de Reynolds tiende a aumentar. Las evidencias experimentales y numéricas muestran que existen inestabilidades internas del flujo cuyo origen no está aún claro. Son estas inestabilidades las que propician perturbaciones en el flujo y las que consecuentemente dan un toque de misterio a los flujos turbulentos. Los resultados obtenidos muestran gran similitud a los obtenidos

con el modelo de orden cero, aunque muestran mayor parecido a la deformación real que se presenta en los flujos alrededor de obstáculos, tal como se aprecia en los pocos trabajos experimentales en los que es posible ver la deformación del flujo (W. Frank, 1992; Larousse et al, 1992). En las gráficas 5.22 a 5.25, se observa que las isolíneas de velocidad  $U$ , al igual que la velocidad  $W$ , forman contornos, pero esta vez alrededor del obstáculo. Al comparar estas gráficas con las correspondientes al modelo de orden cero, se observan algunas diferencias, que se deben, precisamente al orden del modelo de turbulencia empleado. En forma más detallada en la zona A, de la figura 5.23, se nota un abombamiento de las líneas de velocidad  $U$ , esto coincide con la formación de un vórtice de pie o de fondo en la parte anterior del obstáculo, según se verá más adelante en el capítulo 6, concretamente en la figura 6.18; por otro lado en la zona A, de la figura 5.24, se nota la deformación de las líneas de velocidad  $U$  cuando chocan contra el obstáculo; lo mismo puede observarse en las zonas A, B y C, de la figura 5.25, en particular la zona B, en la cual se ve que la recirculación de la velocidad  $U$ , coincide con un vórtice de anillo sobre la parte superior del obstáculo, mismo que observa en la figura 6.74.

Por otro lado, en las gráficas 5.26 a 5.29 se muestra la velocidad  $V$ . Al igual que para la velocidad  $U$ , un análisis detallado arroja más información de las estructuras turbulentas; en la figura 5.27, se aprecian 4 zonas de recirculación que se forman en las aristas del obstáculo, esto es comprensible si se recuerda que son precisamente las aristas en donde las perturbaciones al flujo toman lugar. En esa misma figura, las zonas E y F coinciden con la formación de los vórtices opuestos en esa región, en el fondo del canal, los cuales se pueden ver claramente en la figura 6.117 y 6.118, en cambio, las regiones C y D se pueden relacionar con los vórtices adjuntos al vórtice par que aparecen en la figura 6.117.

Por último, en lo que respecta a la velocidad  $W$ , se presentan las figuras 5.30 - 5.33. En la figura 5.30, se muestra la componente de la velocidad  $W$ , es ésta la más ilustrativa de las que se presentan en este trabajo, en lo que se refiere deformación que sufre el flujo incluyendo la rotación de éste, por ejemplo, en la parte A de la figura mencionada, se ve una zona de recirculación que sale del obstáculo, esto es el reflejo del vórtice de tubo, que se puede ver no sólo en las figuras 6.80 y 6.84 (zona etiquetada con VT), sino también en la figura 5.31 (zona B), al igual que en la figura 5.17, se nota el desarrollo de varias envolventes alrededor del núcleo del vórtice mencionado.

En la figura 5.32, aparecen varias estructuras turbulentas que se pueden relacionar muy bien con las estructuras vorticosas encontradas en el capítulo 6. La zona de recirculación A, coincide con el vórtice de pie o de fondo encontrado en este estudio y reportado en la literatura relacionada con flujo alrededor de obstáculos, la zona de recirculación B, coincide con el vórtice de anillo que se monta sobre la parte anterior superior del obstáculo, y que se presenta en la figura 6.32 (con la etiqueta VA). Por otra parte, la zona etiquetada con C es muy importante en flujos alrededor de obstáculos, ya que proporciona la energía con la cual se mantienen estructuras tan importantes como

el vórtice par, mismo que se observa claramente en la figura 6.117; por último, la zona D, coincide con la zona A de la figura 5.30, y por tanto, merece la misma descripción. Los resultados descritos anteriormente coinciden cualitativamente con los obtenidos por Larousse, Martinuzzi y Tropea (1992), en su estudio experimental que versa también sobre flujo alrededor de obstáculos tridimensionales en canales cerrados, y con el de Mason y Morton (1986), que trata de flujo sobre obstáculos con diferentes geometrías.

Analizando la forma de estas estructuras se puede inferir su relación con estructuras vorticosas, que se muestran y describen en forma más detallada en el capítulo siguiente.

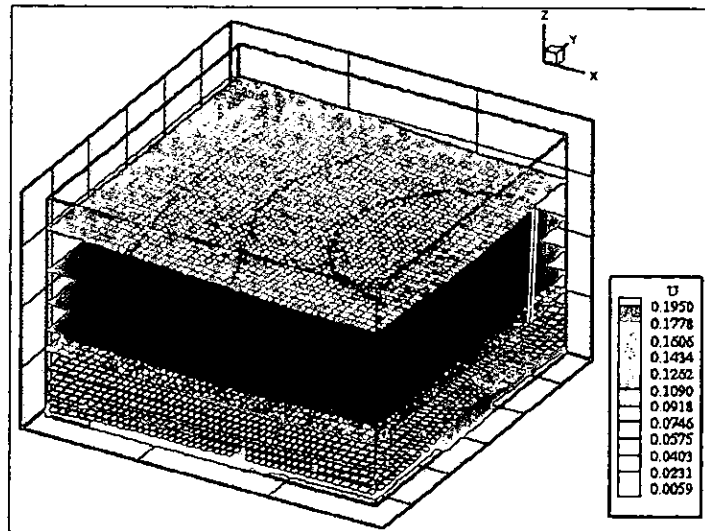


Figura 5.22 Vista general de la velocidad  $U$ , en m/s.

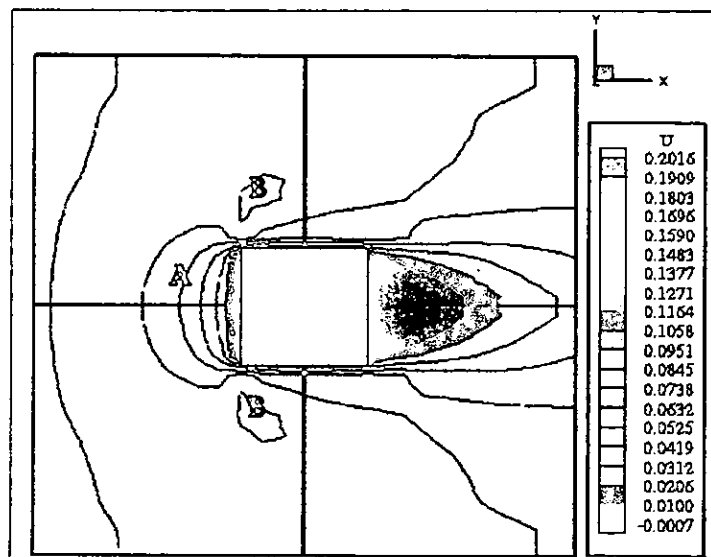


Figura 5.23 Corte  $x$ - $y$  de la velocidad  $U$ , m/s.



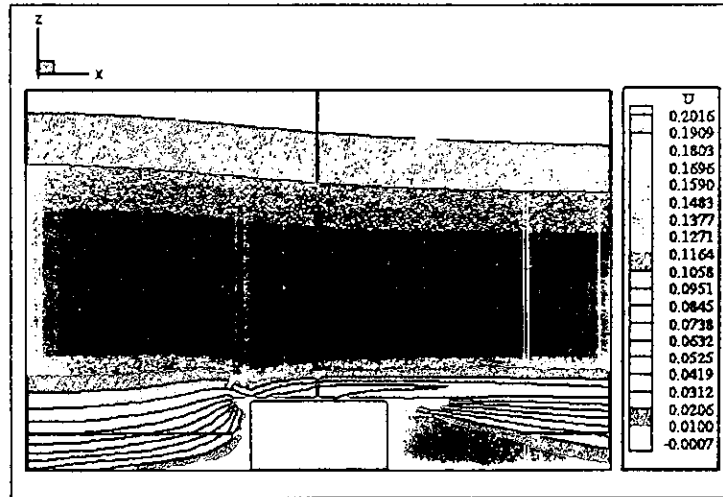


Figura 5.24 Corte x-z de la velocidad U, m/s.

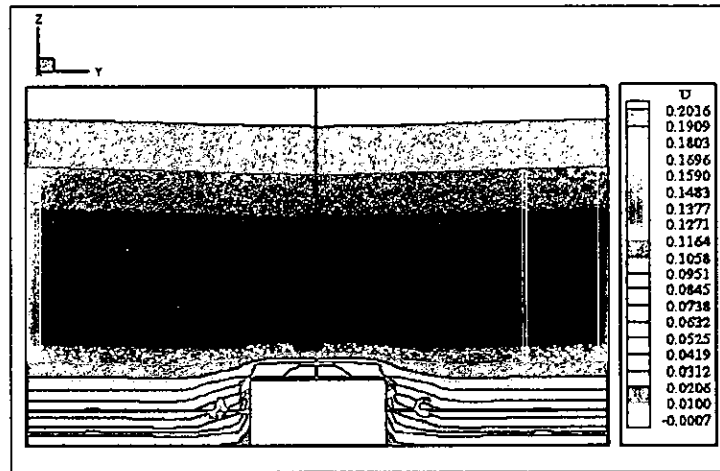


Figura 5.25 Corte y-z de la velocidad U, m/s.

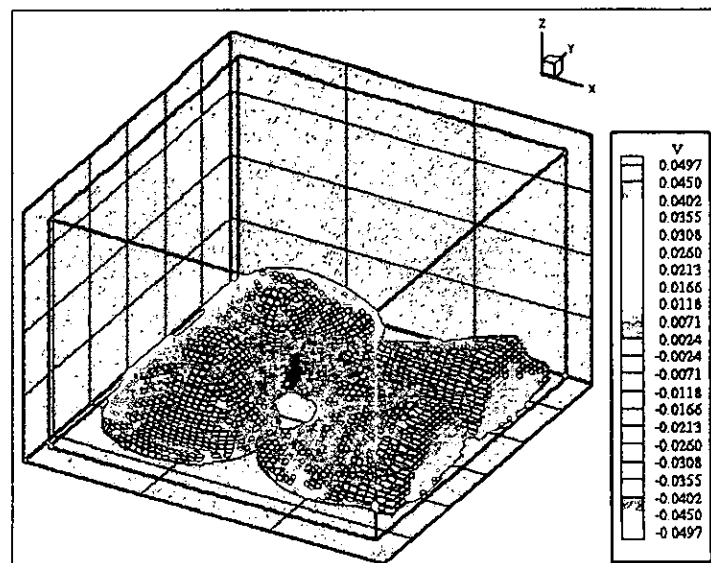


Figura 5.26 Perspectiva general de la velocidad V, m/s.

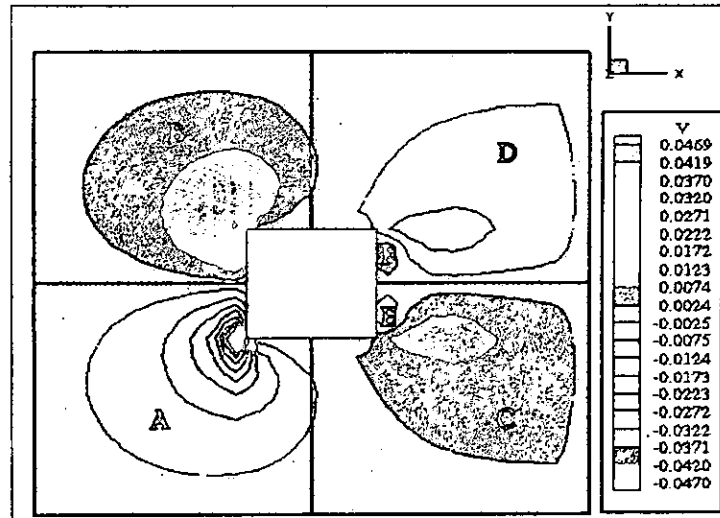


Figura 5.27 Corte  $x-y$  de la velocidad  $V$ , m/s.

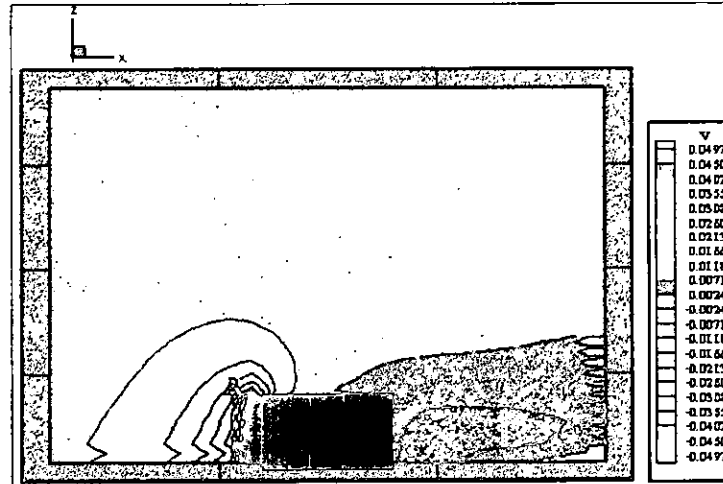


Figura 5.28 Corte  $x-z$  de la velocidad  $V$ , m/s.

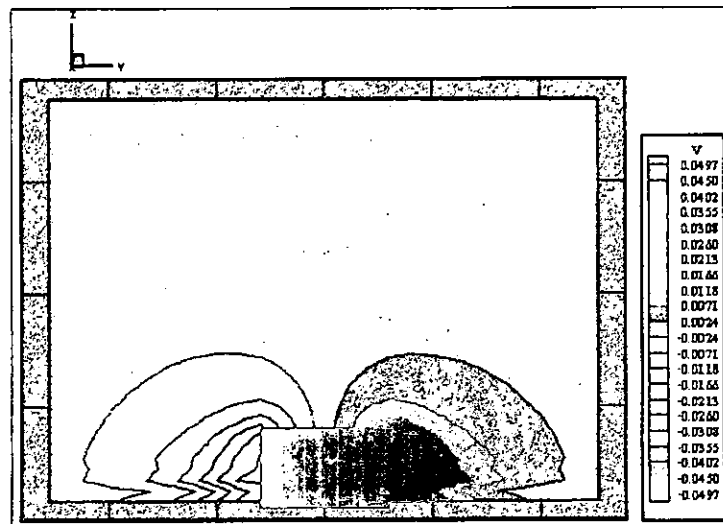


Figura 5.29 Corte  $y-z$  de la velocidad  $V$ , m/s.

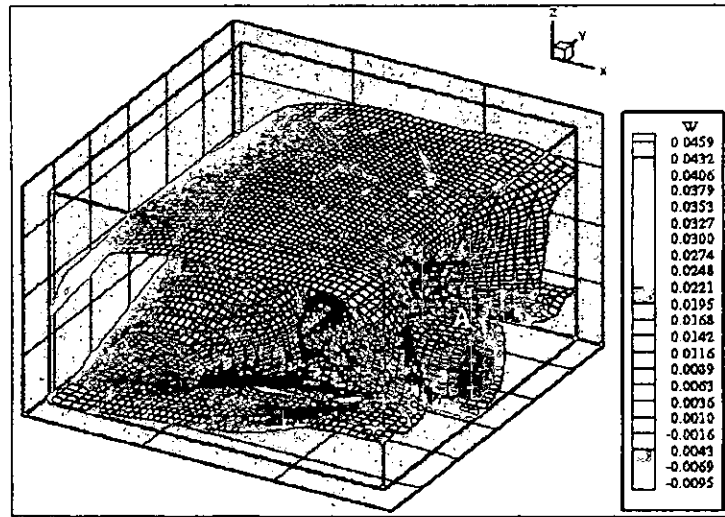


Figura 5.30 Vista general de los contornos de velocidad  $W$ , m/s.

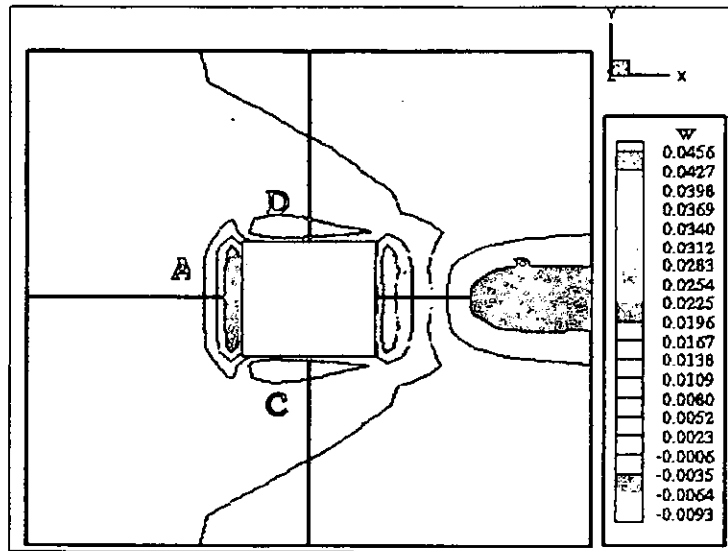


Figura 5.31 Corte x-y de la velocidad  $W$ , m/s.

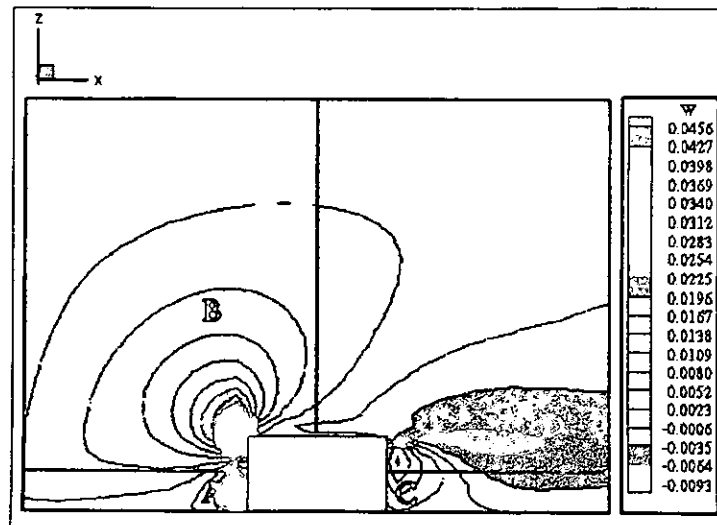


Figura 5.32 Corte x-z de la velocidad  $W$ , m/s.

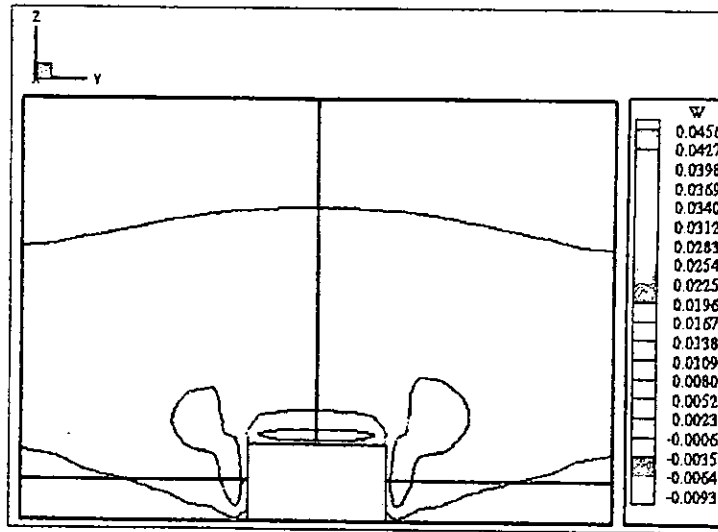


Figura 5.33 Corte y-z de la velocidad  $W$ , m/s.

### 5.5.1 ANÁLISIS DE LAS ESTRUCTURAS TURBULENTAS

#### PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

La obtención explícita de los esfuerzos de Reynolds, es decir, de las cantidades fluctuantes, es una contribución del modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  (que no puede ser observada con los modelos de orden cero), y que permite caracterizar las interacciones del flujo turbulento. Los resultados se presentarán de la siguiente manera: de las figuras 5.34 - 5.36 se presentan las intensidades turbulentas  $u'$ ,  $v'$  y  $w'$  en forma adimensional en el plano y-z, justo antes de que el flujo pase a través del obstáculo; de las figuras 5.37 - 5.39 se presentan las cantidades  $-uv'$ ,  $-vw'$ ,  $-uw'$ , también en forma adimensional. Ahora bien, de la figura 5.40 hasta la 5.63, se presentan en perspectiva y en diferentes planos los esfuerzos normales  $-\overline{uu}$ ,  $-\overline{vv}$ ,  $-\overline{ww}$  y los esfuerzos tangenciales  $-\overline{uv}$ ,  $-\overline{vw}$ ,  $-\overline{uw}$ . En las figuras 5.64 - 5.67, se muestran diferentes contornos de la viscosidad turbulenta  $\nu_t$ , y de la figura 5.68 - 5.71, también se presentan los diferentes contornos de la energía cinética en el canal, y finalmente en las figuras 5.72 - 5.75, la disipación de la energía cinética.

Por último, en las figuras 5.76 y 5.77 se presenta una comparación entre la energía cinética turbulenta lo largo del canal obtenida en éste estudio, y el estudio de un caso similar hecho por Franke y Rodi (1992), mismo que ya se explicó en párrafos anteriores. Para terminar en la figura 5.78 se muestra la anisotropía de la turbulencia en un canal cerrado para una relación de aspecto  $B/h=2$ , y para diferentes profundidades  $|z|/h$ , obtenida en un estudio llevado a cabo por Tominaga y Ezaki (1985), mientras que en las figuras 5.79 y 5.80 se presenta también la anisotropía de la turbulencia obtenida en este estudio, para una longitud  $x/L = 2$  y  $x/L = 3$  que corresponden justo al inicio y al final del obstáculo en la dirección  $x$ , respectivamente. Dicha longitud se eligió debido a que es justamente en esa región en donde se presenta la mayor producción de energía cinética turbulenta, como se puede constatar en las figuras 5.69 y 5.70. El motivo por el cual, no se hace una

comparación entre el estudio de Ezaki y Tominaga, y el presente estudio, es que los resultados del primero son para un canal cerrado y sin obstáculos en el fondo, sin embargo, el propósito de presentarlos se explica más adelante.

#### ANÁLISIS DE LAS ESTRUCTURAS TURBULENTAS

La presencia de la superficie libre en canales abiertos, hace que los patrones de flujo sean diferentes en éstos con respecto a los canales cerrados. Esta diferencia se acentúa en gran manera dependiendo si el flujo es considerado como bidimensional o tridimensional.

En canales abiertos sin obstáculos se presenta un fuerte vórtice de superficie acompañado de su vórtice par en el fondo del canal (Nezu y Nakagawa, 1992), sin embargo, los resultados obtenidos en este estudio en el que se incluye un obstáculo en el fondo, los resultados son un tanto diferentes. En las figuras 5.35, 5.35 y 5.36, se aprecian las intensidades turbulentas  $u'$ ,  $v'$  y  $w'$  respectivamente, éstas corresponden a una distancia  $x/L = 2$ , se nota la contribución de estas intensidades al vórtice de pie que se forma en la parte anterior del obstáculo. No obstante, en las figuras 5.37, 5.38 y 5.39 se muestran las contribuciones que hacen los esfuerzos tangenciales  $u'v'$ ,  $u'w'$ ,  $v'w'$  a formación de las estructuras turbulentas en canales abiertos, de éstos últimos, los esfuerzos que más contribuyen a la formación del vórtice de superficie libre son los  $u'v'$  y  $v'w'$  y que el esfuerzo  $u'w'$  coopera en forma determinante a la formación del vórtice de pie.

Retomando la discusión sobre las gráficas anteriores, específicamente las correspondientes a las intensidades turbulentas adimensionales  $u'$  y  $v'$  (figuras 5.34 y 5.35), comparándolas con la figura 2.15 del capítulo 2, se observa que no se parecen cualitativamente. La razón es obvia, ya que la figura 2.15 corresponde al flujo en un canal abierto sin obstáculos en el fondo, aún así, lo importante es que las intensidades turbulentas son del mismo orden y que en canales abiertos con o sin obstáculos, las máximas intensidades se tienen en el fondo del canal, mientras que las mínimas se localizan muy cerca de la superficie libre.

Por otro lado, observando las figuras (5.40 - 5.51) correspondientes a los esfuerzos normales de Reynolds  $-uu$ ,  $-vv$ ,  $-ww$ , se observa una cierta similitud entre ellas, y más aún al observar las gráficas correspondientes a la viscosidad turbulenta (figuras 5.64 - 5.67) se nota un gran parecido entre las figuras mencionadas en primer lugar y éstas últimas. Lo anterior confirma la ec. (3.52), en la que se muestra la relación entre el coeficiente de viscosidad turbulenta y los esfuerzos normales y a su vez la influencia de éstos en los esfuerzos tangenciales de Reynolds  $-uv$ ,  $-uw$ ,  $-vw$  (figuras 5.53 - 5.63). Puntualizando más sobre los esfuerzos de tangenciales Reynolds, en la gráfica 5.53 que corresponde al contorno de los esfuerzos transversales  $-uv$ , se nota la formación de dos vórtices a los lados de las paredes del obstáculo. En la figura 5.63 en la que se muestra los esfuerzos  $-vw$  se nota dicha formación en el plano  $y-z$ . Por otro lado, en la figura 5.57 en la que se muestra un corte, en el

plano  $x$ - $y$  del contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-\overline{uw}$ , se observa una tendencia muy débil a la formación de un vórtice de herradura alrededor del obstáculo, en la dirección del flujo. Finalmente, en la figura 5.60 se observa que los esfuerzos de Reynolds  $-\overline{vw}$ , se desarrollan principalmente en el fondo del canal y alrededor del obstáculo que produce la deformación del flujo.

En cuanto a la producción y disipación de la energía cinética los contornos de dichas variables también muestran similitud con los del coeficiente de viscosidad turbulenta, esto se puede explicar si se revisa la ec. (3.53), en la que se muestra claramente la relación entre estas variables. Se pueden inferir algunos hechos importantes sobre la producción de energía cinética y su disipación. Si se observa con detalle las figuras 5.69, 5.70 y 5.71 se cae en la cuenta que, la máxima producción de energía cinética se lleva a cabo en la parte anterior, esto es, desde la zona en donde inicia el flujo hasta donde éste entra en contacto con el obstáculo casi en el fondo del canal, mientras que si se observa las figuras 5.73, 5.74 y 5.75, la disipación de la energía cinética se produce de manera importante y casi totalmente en la parte superior del obstáculo y alrededor de éste.

Para terminar, en las figuras 5.76 y 5.77 se comparan las gráficas adimensionales de la energía cinética a lo largo del canal con las obtenidas en el trabajo numérico - experimental llevado a cabo por Franke y Rodi (1992), los cuales coinciden cuantitativamente ya que los valores son del mismo orden, especialmente con el modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  de dos capas. El trabajo mencionado se refiere al flujo bidimensional sobre las esquinas de un cilindro, con un número de Reynolds de 22000, en el que se aplicaron varios modelos de turbulencia y se hicieron varios estudios experimentales.

La superficie libre amortigua las fluctuaciones normales a ella, esto causa entre otras cosas que la distribución de la anisotropía de la turbulencia sea diferente en canales abiertos que en canales cerrados. La anisotropía de la turbulencia es igual al término  $(w'^2 - v'^2)$ , que es la fuerza inductora que genera las corrientes secundarias hacia las esquinas, el vórtice de fondo que se genera por ésta es un claro efecto de pared. Tominaga y Ezaki (1985), realizaron refinadas mediciones con películas calientes, de  $v'$  y  $w'$  en canales abiertos, obtuvieron en consecuencia el término  $(w'^2 - v'^2)$  y compararon su distribución para una relación de aspecto  $B/h=2$ , para diferentes relaciones  $|z|/h$ , ver figura 5.78. En las figuras 5.79 y 5.80 se muestra la distribución del término  $(w'^2 - v'^2)$ , obtenida con datos que arrojó este estudio. Si se compara la figura 5.78, con estas últimas para una relación  $|z|/h = 0.95$  se nota que no coinciden en la forma, esto es normal, ya que en un flujo sin obstáculos la anisotropía se distribuye en todo el dominio, aunque cerca de la superficie libre se incrementa tanto como esta se aproxima. En cambio, en flujos con obstáculo como el que aquí se estudia, la anisotropía es más fuerte en la zona donde se encuentra éste, es decir, en la zona  $0 < |z|/h < 0.3$  en este caso, para después desvanecerse y desaparecer en la superficie libre. Lo importante es señalar que aunque no coincidan en su distribución, ya que no se trata de las mismas condiciones de flujo, sí dan idea de las características del flujo que representan.

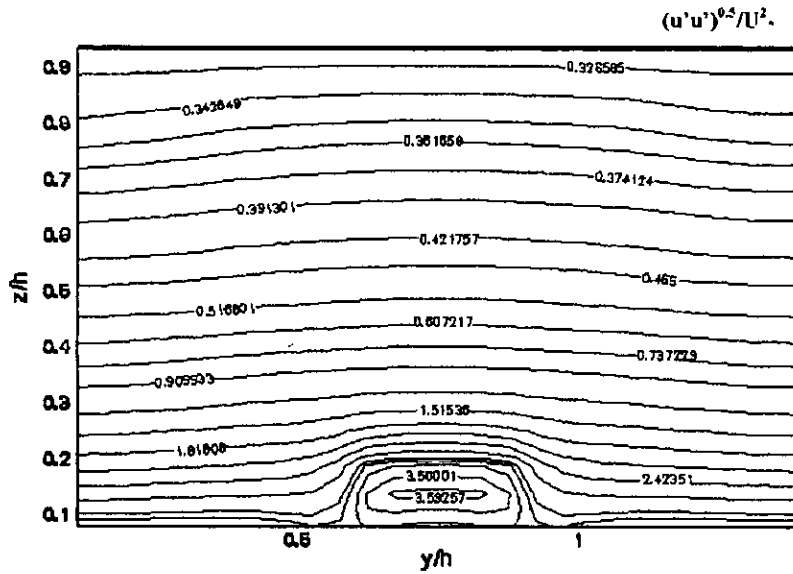


Figura 5.34 Líneas de contorno de la intensidad turbulenta  $u'$

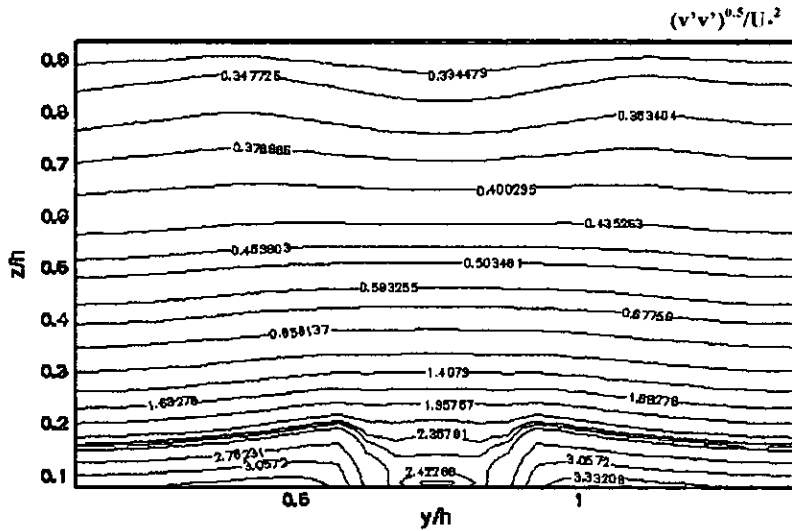


Figura 5.35 Líneas de contorno de la intensidad turbulenta  $v'$

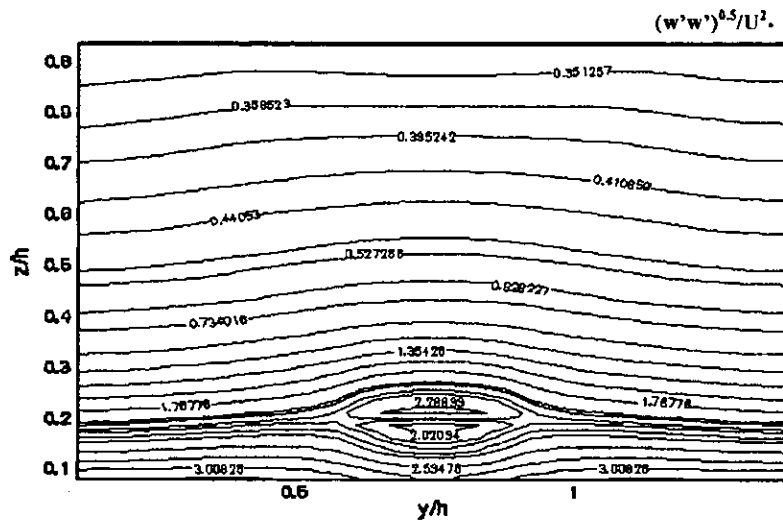


Figura 5.36 Líneas de contorno de la intensidad turbulenta  $w'$

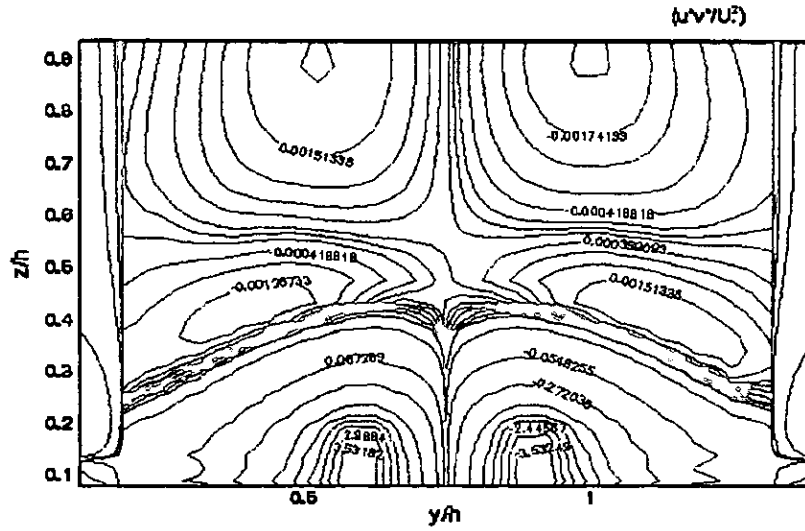


Figura 5.37 Líneas de contorno de la intensidad del esfuerzo de Reynolds  $-\overline{uv}$

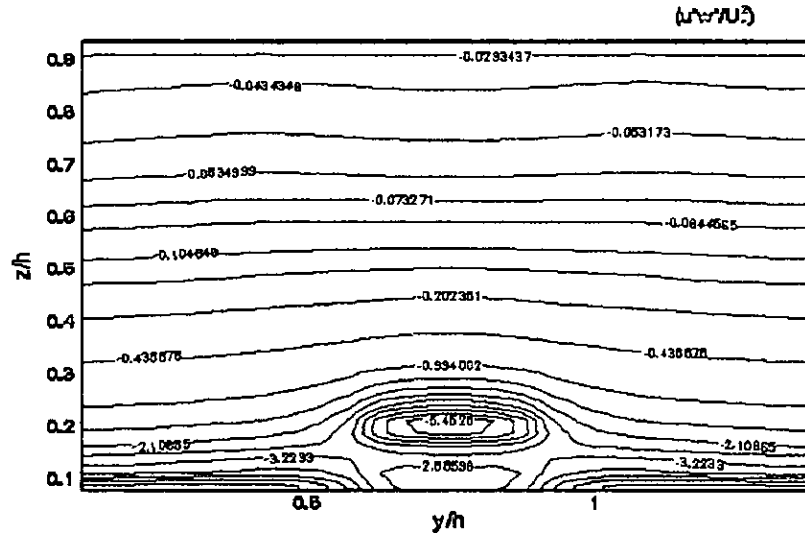


Figura 5.38 Líneas de contorno de la intensidad del esfuerzo de Reynolds  $-\overline{uw}$

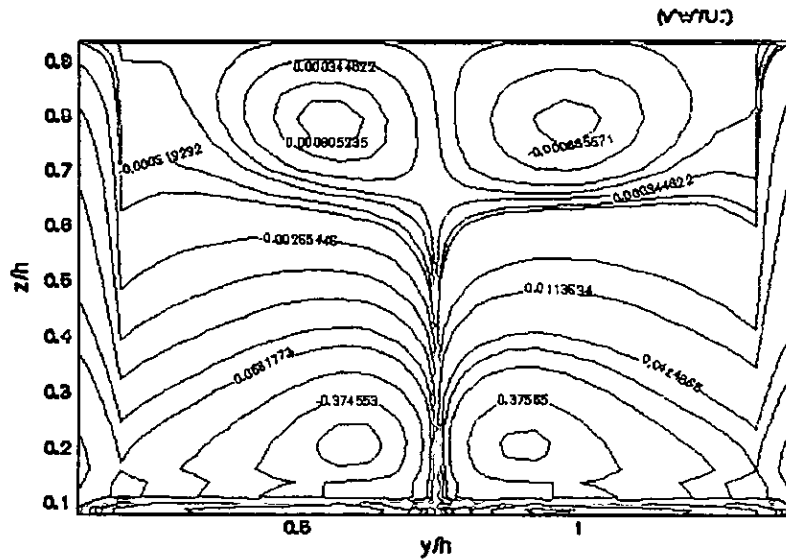


Figura 5.39 Líneas de contorno de la intensidad del esfuerzo de Reynolds  $-\overline{vw}$



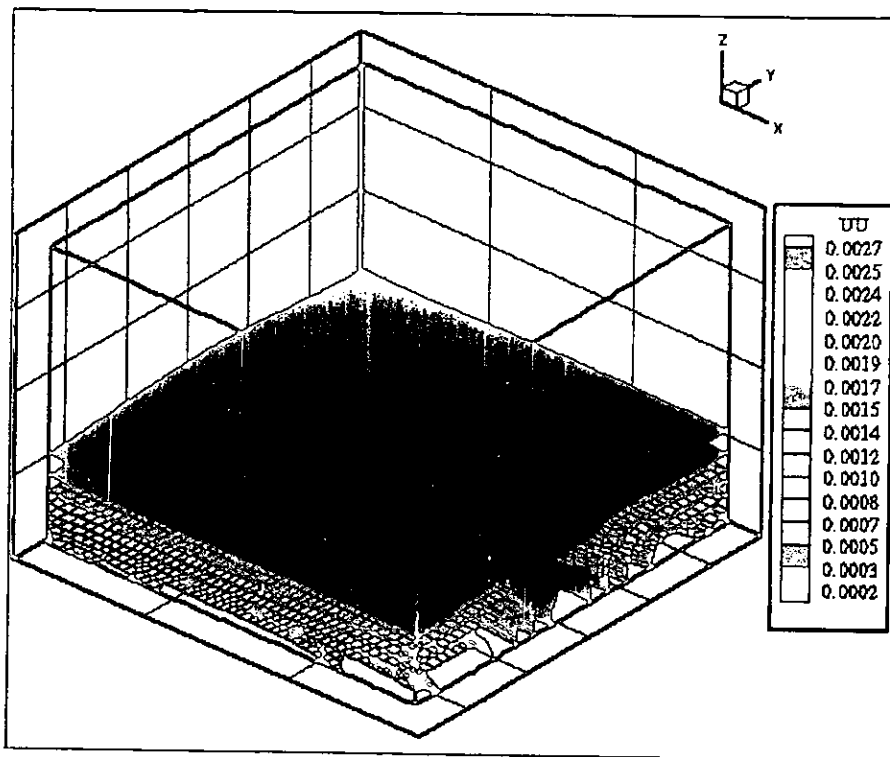


Figura 5.40 Vista general de los contornos de la velocidad fluctuante  $uu$

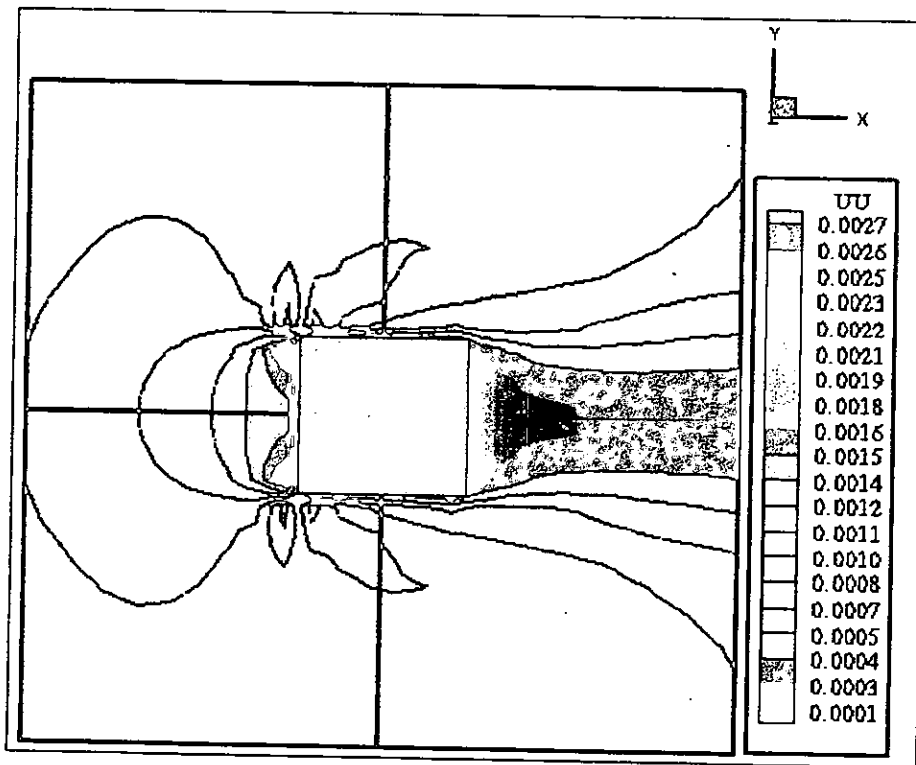


Figura 5.41 Corte x-y de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante  $uu$

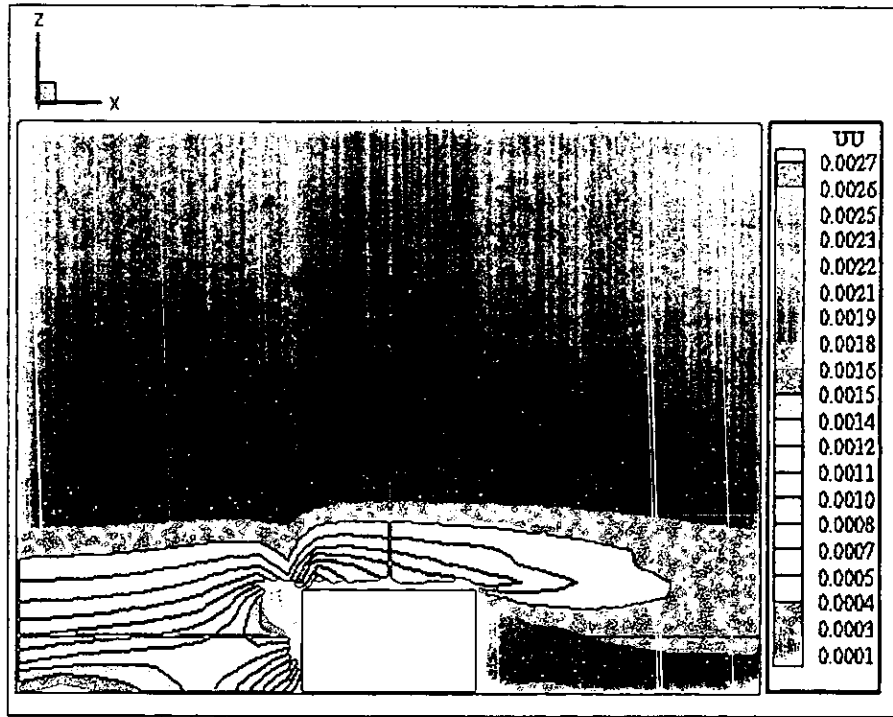


Figura 5.42 Corte  $x-z$  de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante  $uu$

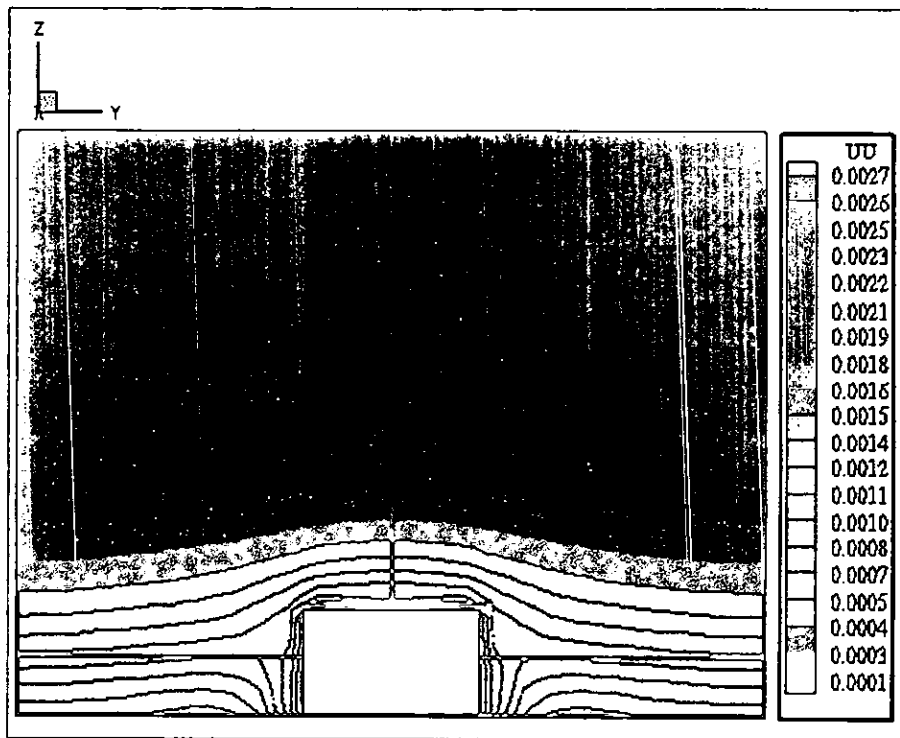


Figura 5.43 Corte  $z-y$  de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante  $uu$

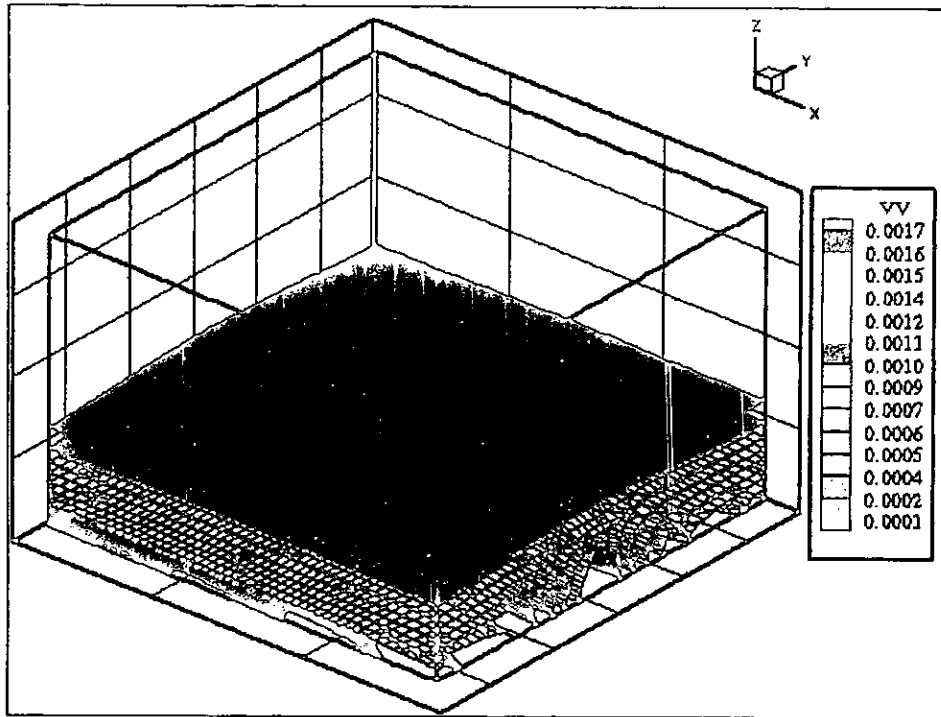


Figura 5.44 Vista general de los contornos de la velocidad fluctuante  $\bar{v}$

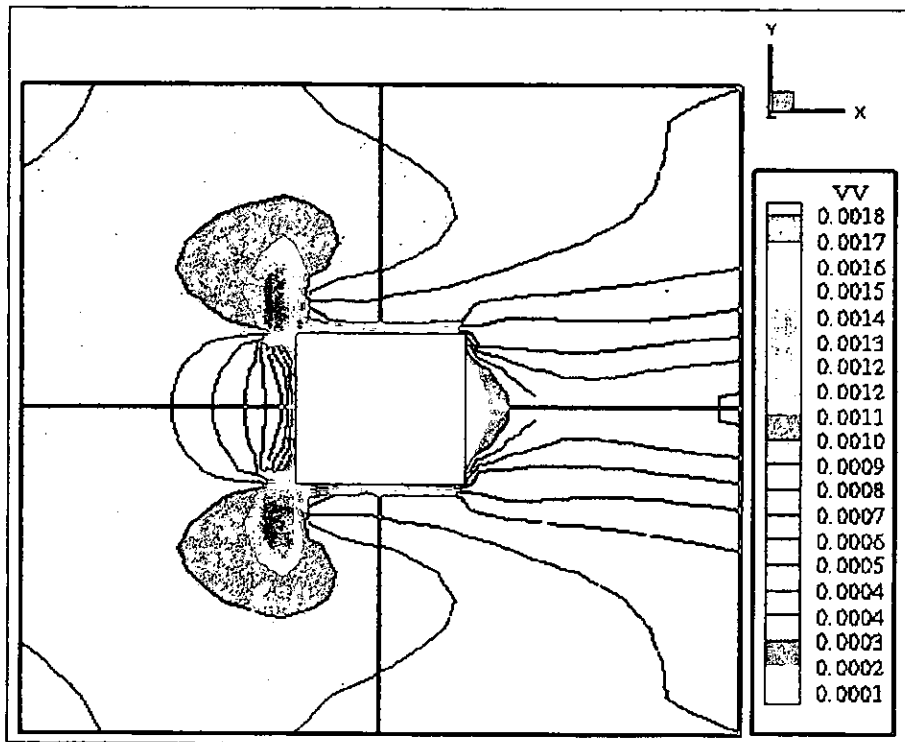


Figura 5.45 Corte x-y de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante  $\bar{v}$

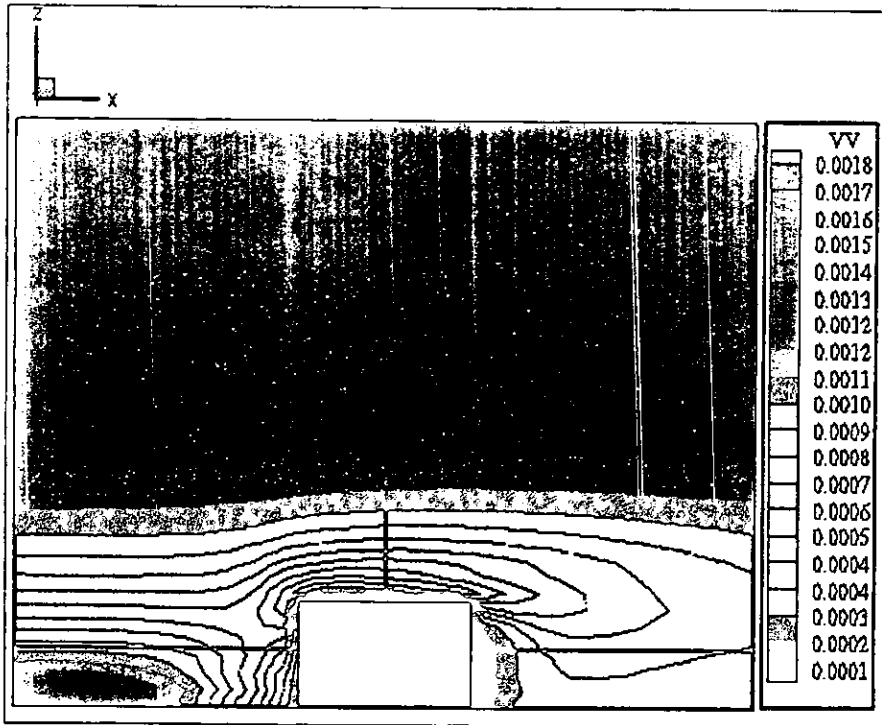


Figura 5.46 Corte x-z de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante  $\bar{v}$

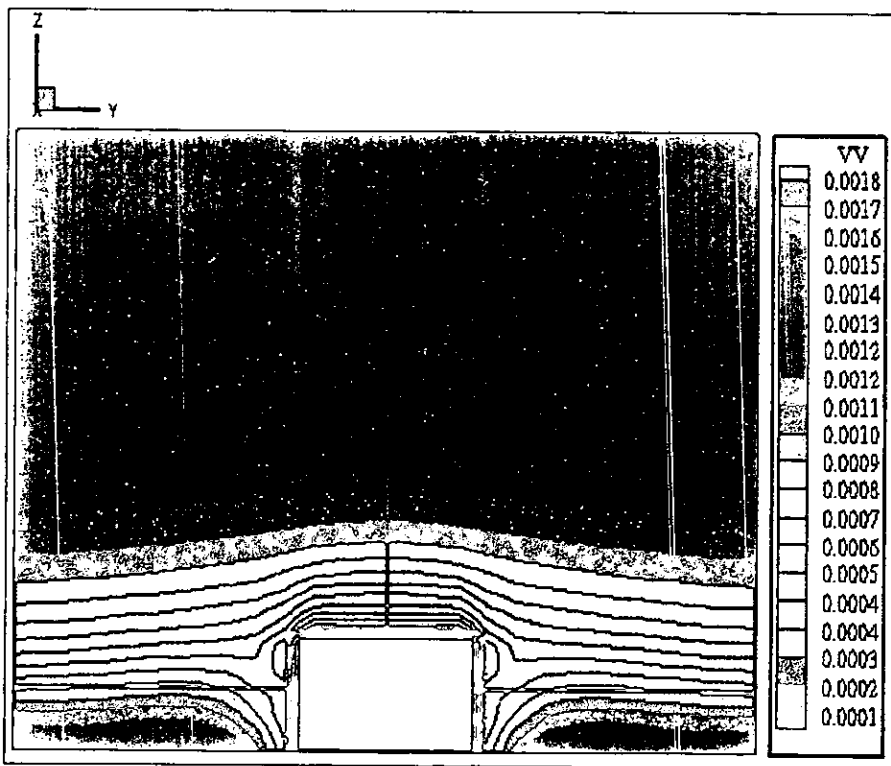


Figura 5.47 Corte z-y de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante  $\bar{v}$

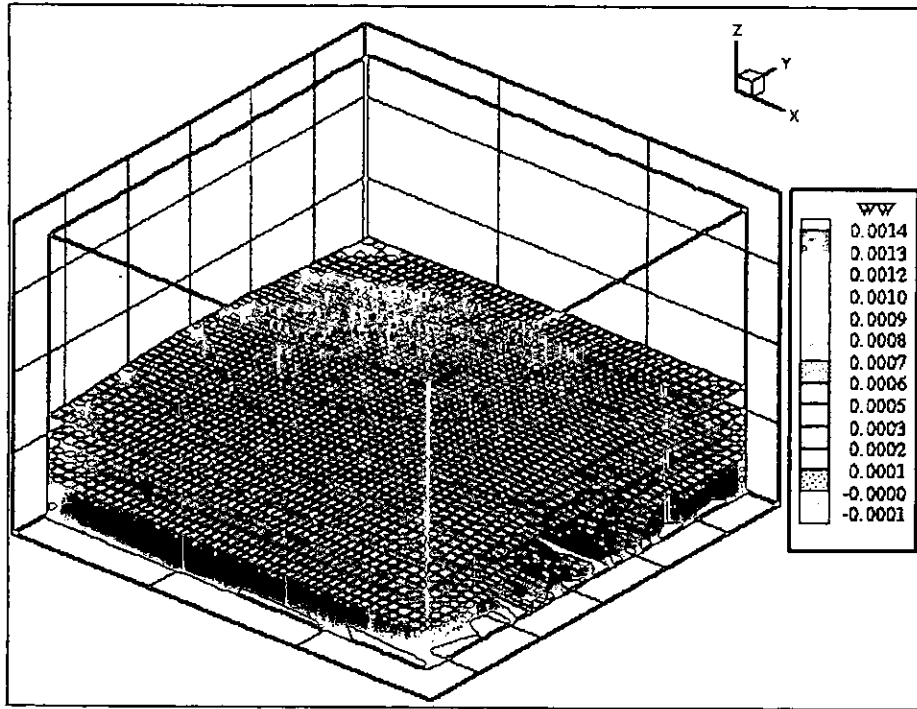


Figura 5.48 Vista general de los contornos de la velocidad fluctuante  $ww$

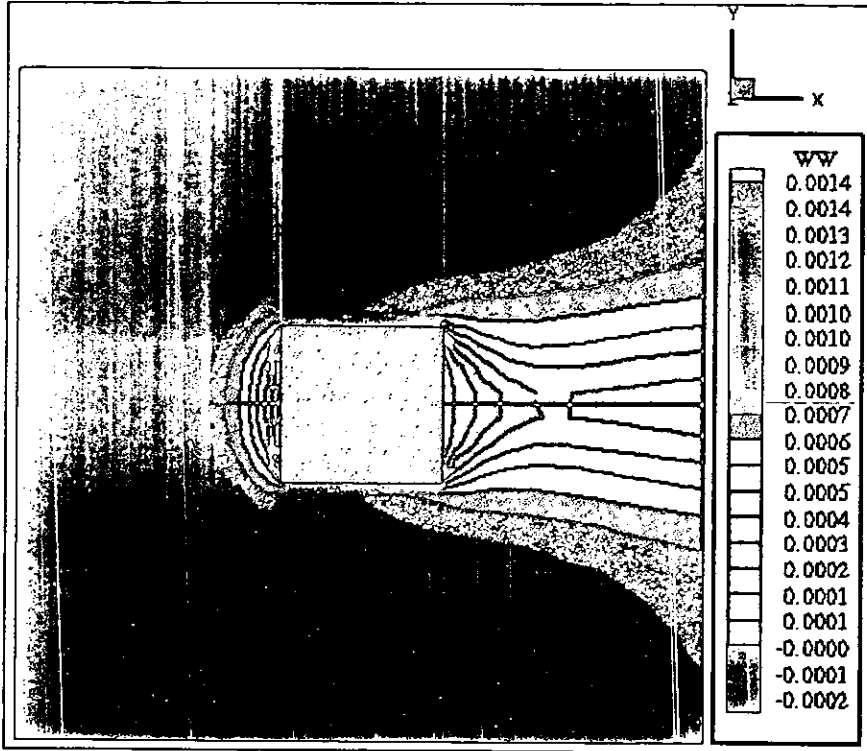


Figura 5.49 Corte x-y de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante  $ww$

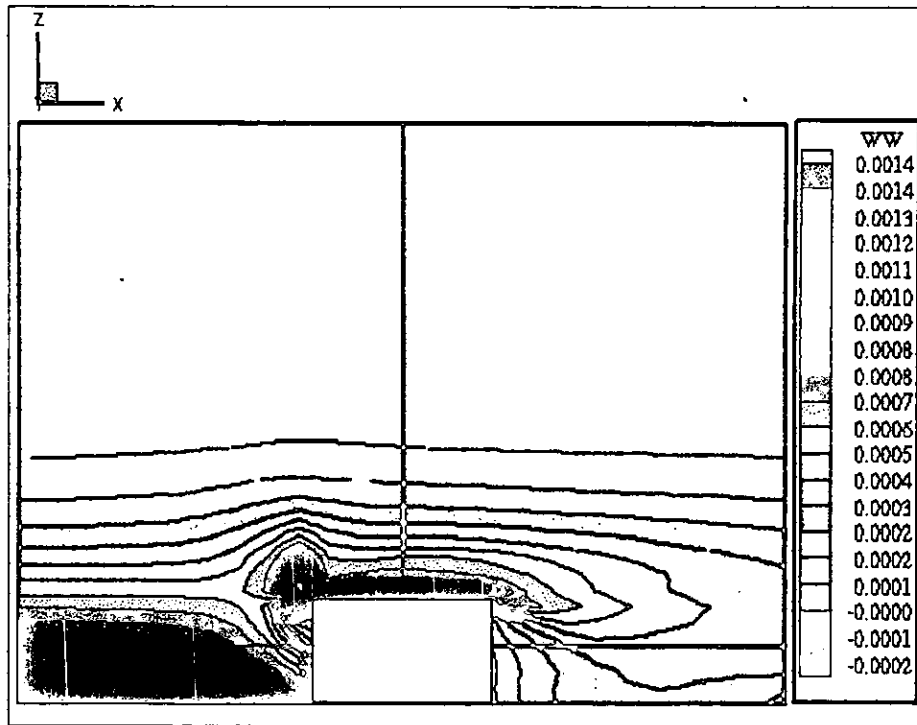


Figura 5.50 Corto  $x-z$  de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante  $\overline{w}$

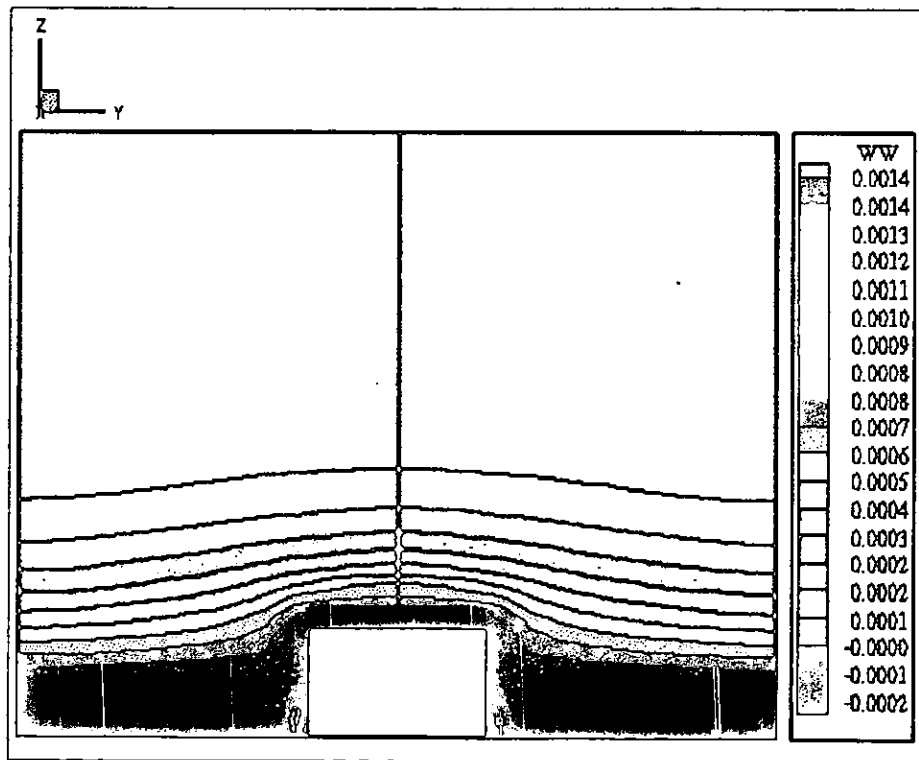


Figura 5.51 Corte  $z-y$  de las líneas de contorno de la velocidad fluctuante  $\overline{w}$

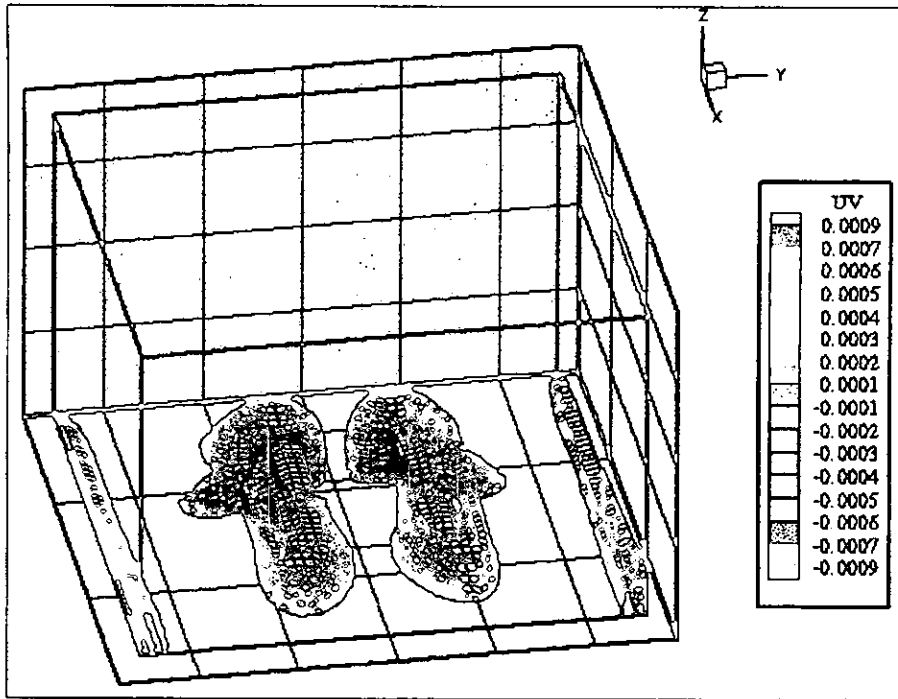


Figura 5.52 Perspectiva de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-\overline{uv}$

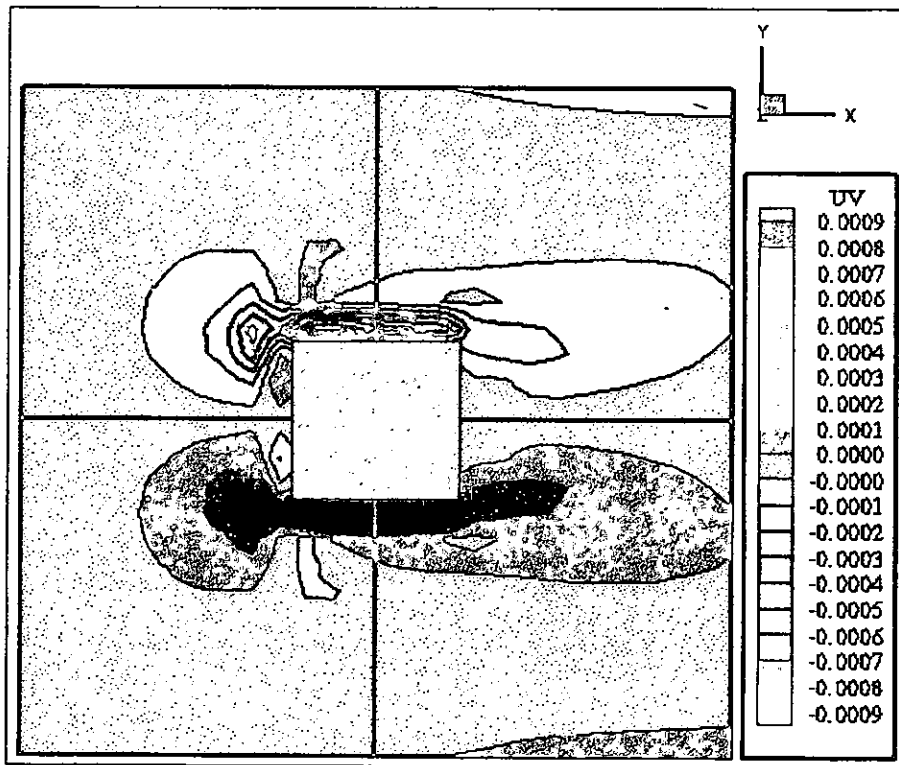


Figura 5.53 Corte x-y de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-\overline{uv}$

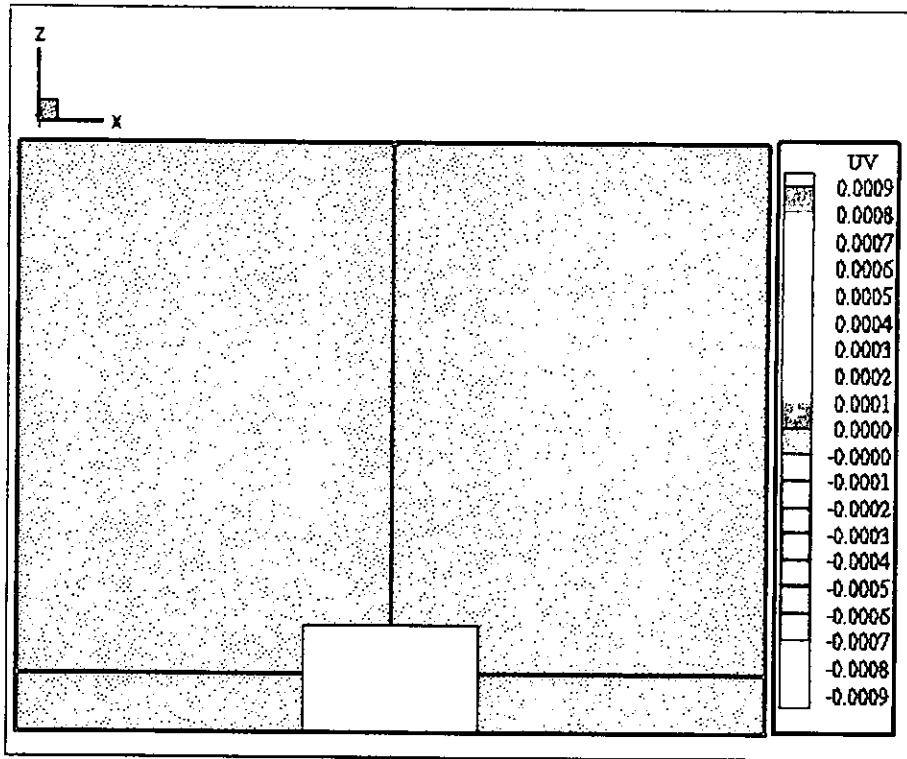


Figura 5.54 Corte x-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds -uv

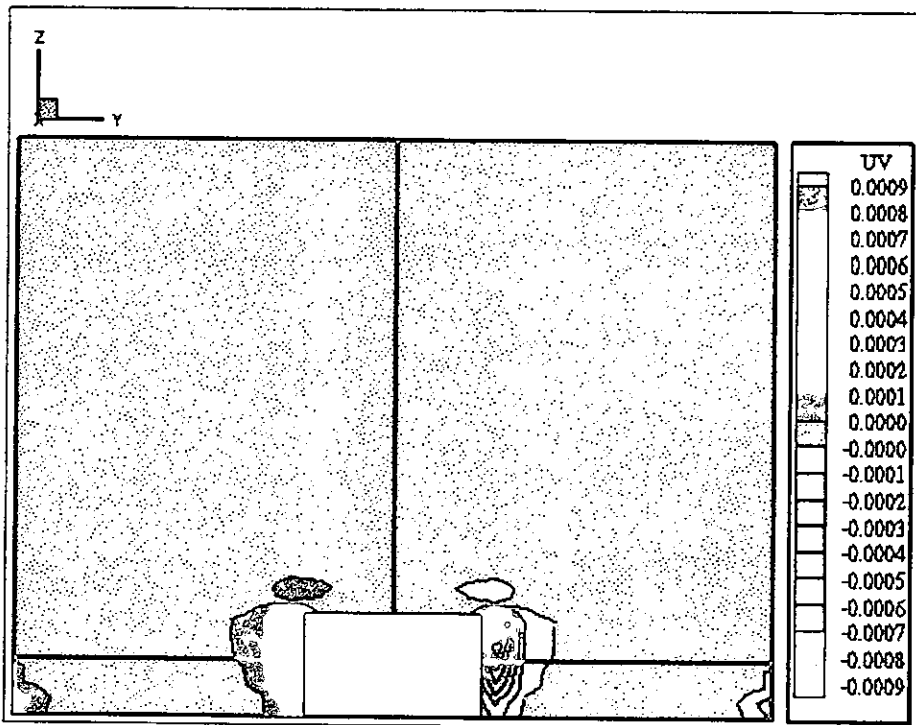


Figura 5.55 Corte z-y de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds -uv



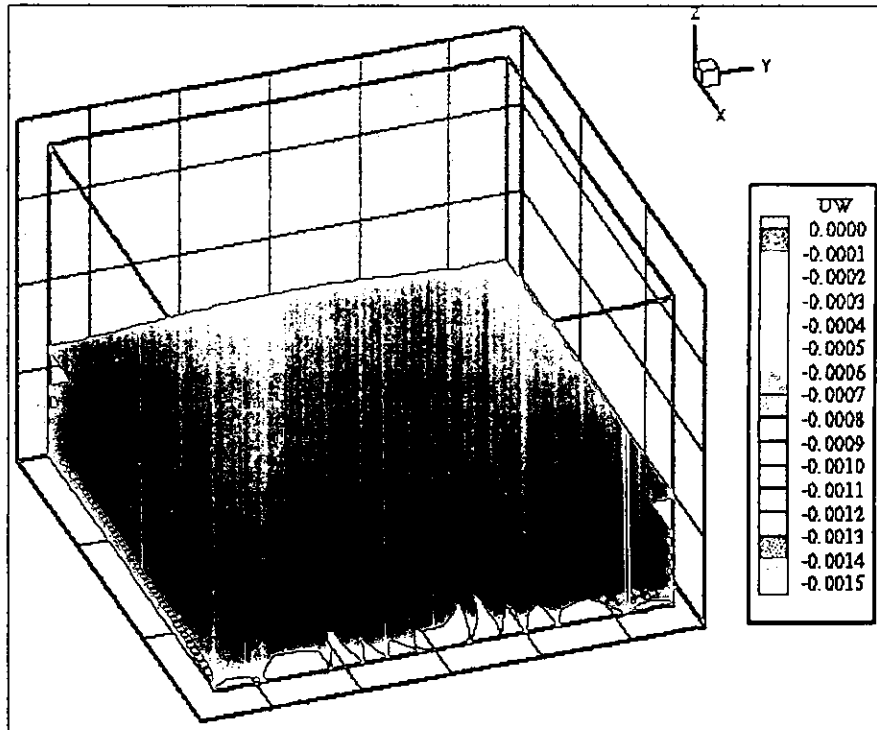


Figura 5.56 Perspectiva de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-uw$

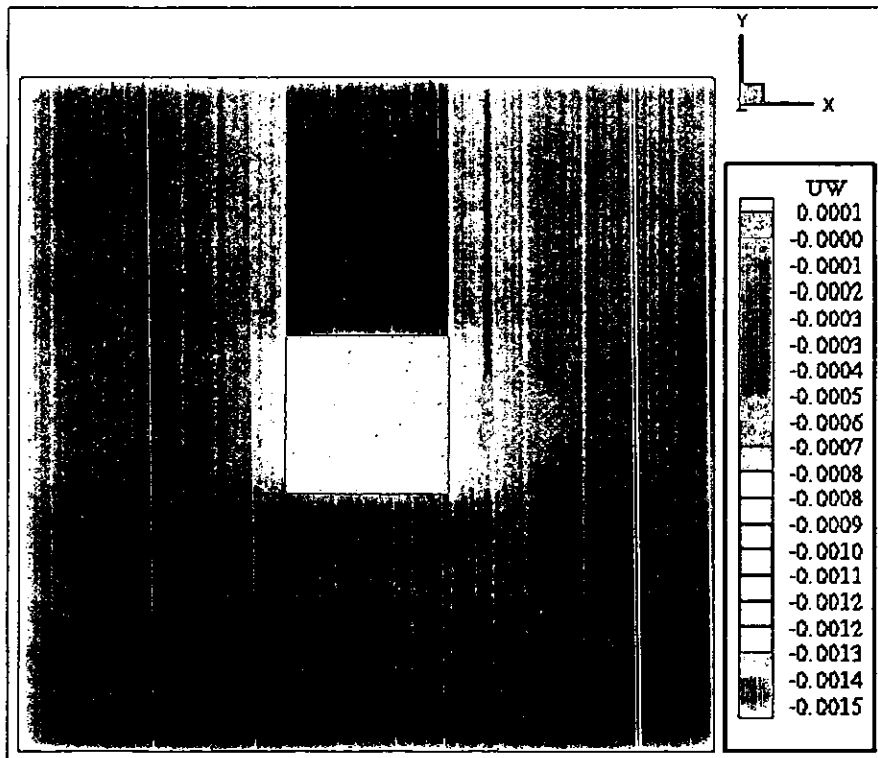


Figura 5.57 Corte x-y de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-uw$

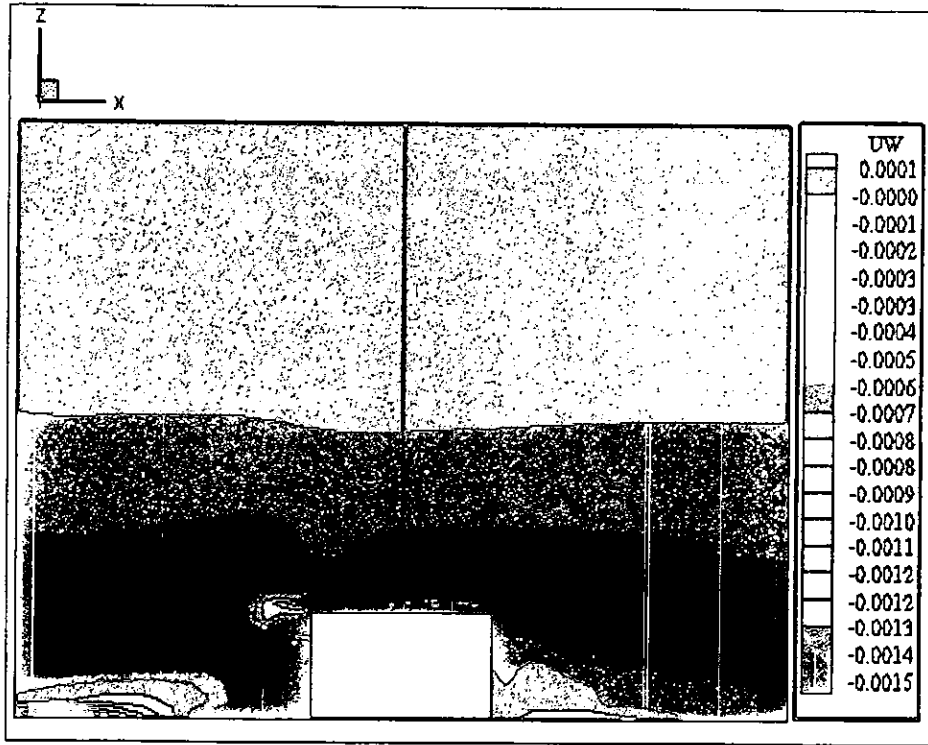


Figura 5.58 Corte x-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-\overline{uw}$

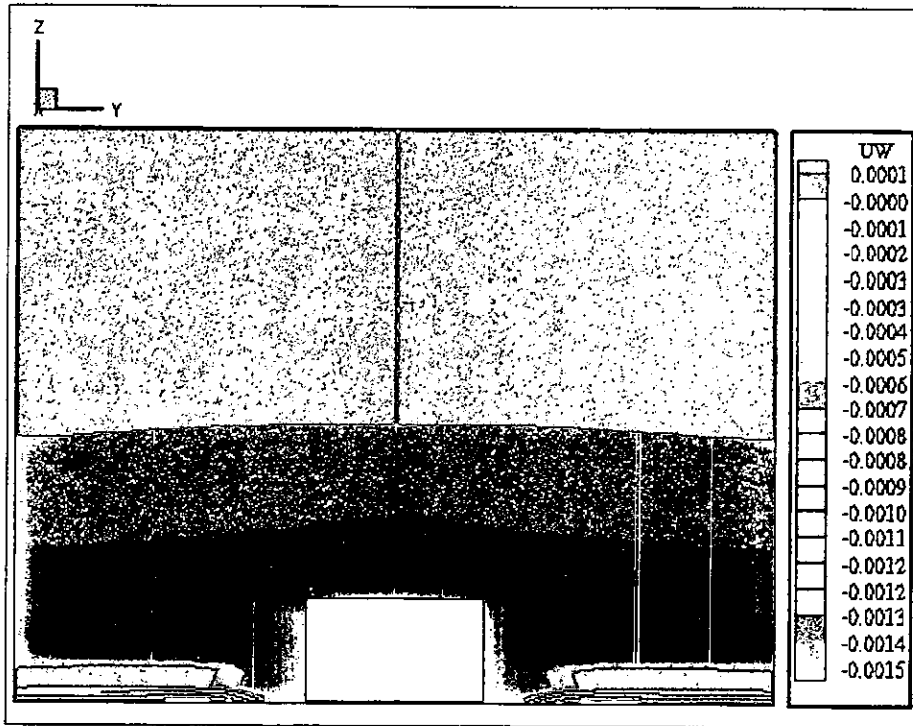


Figura 5.59 Corte y-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-\overline{uw}$

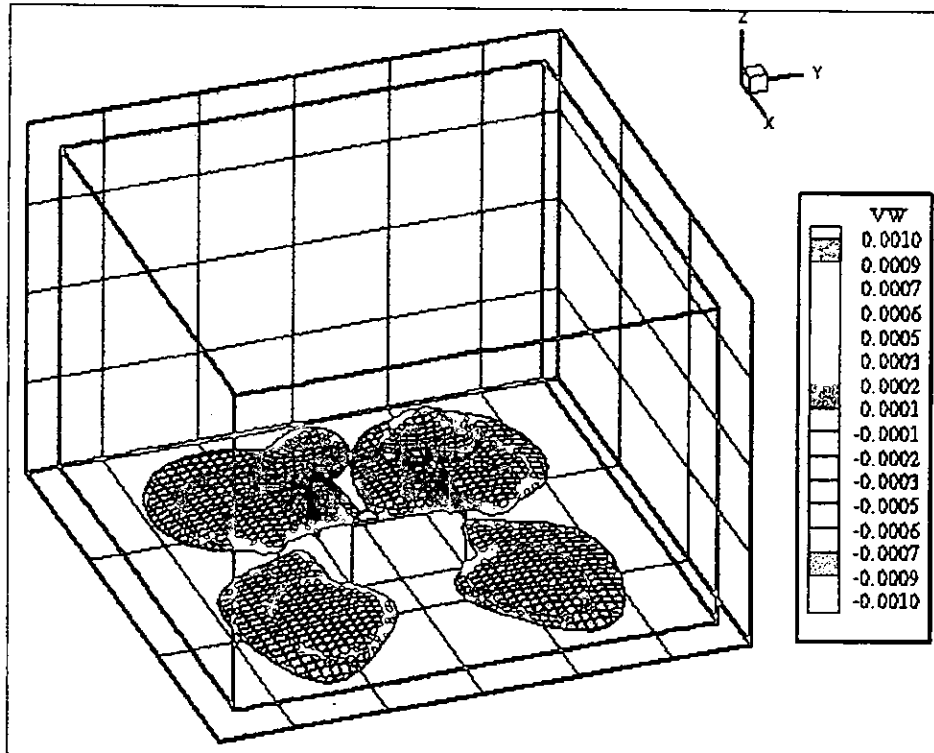


Figura 5.60 Perspectiva de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-\overline{vw}$

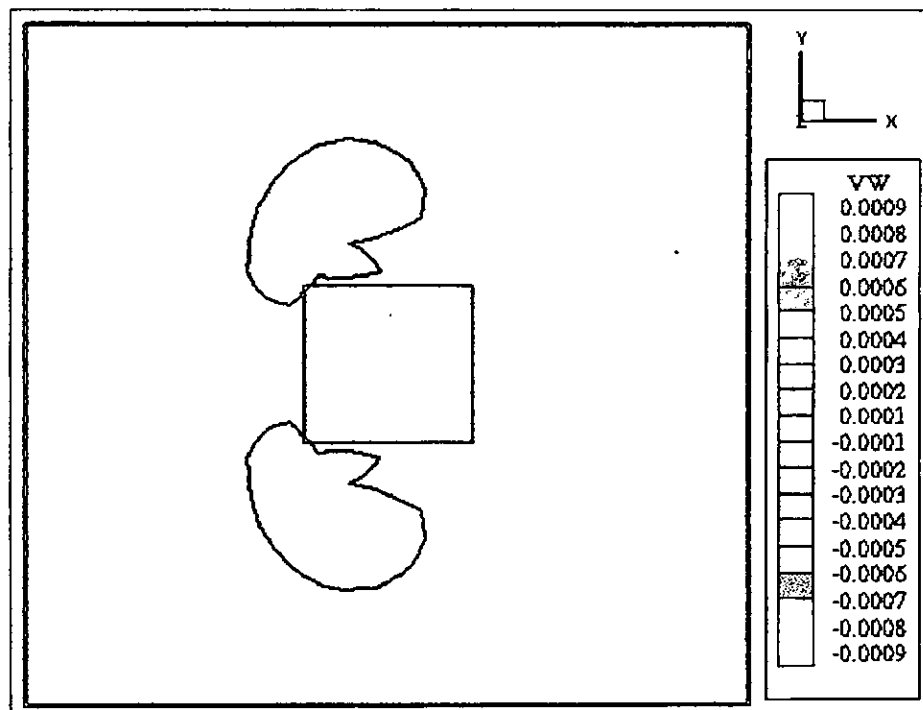


Figura 5.61 Corte x-y de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds  $-\overline{vw}$

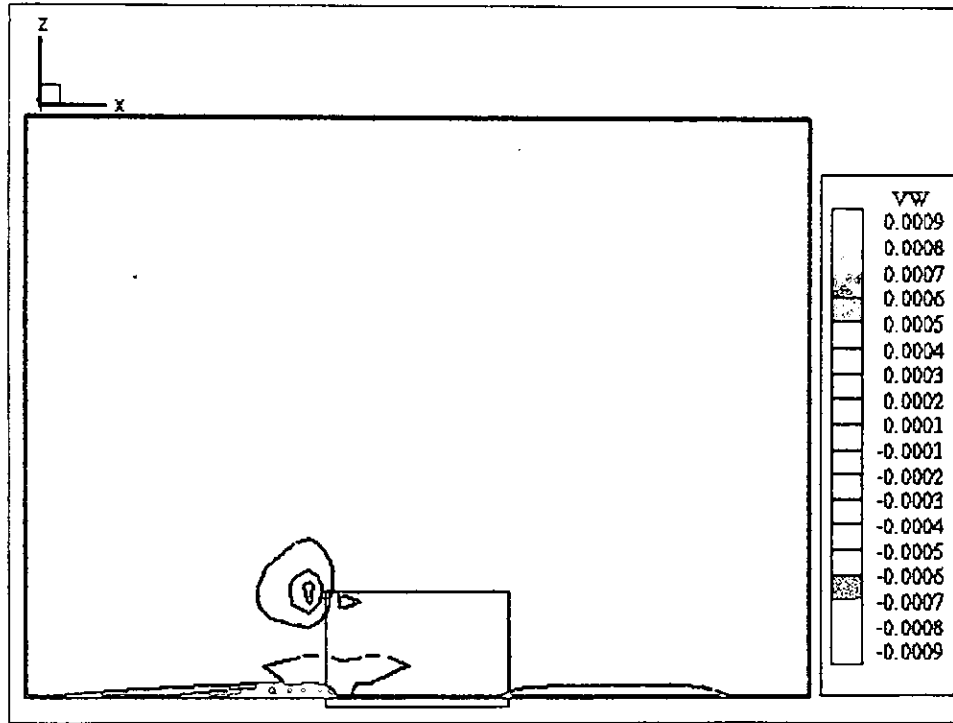


Figura 5.62 Corte x-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds -  $\overline{vw}$

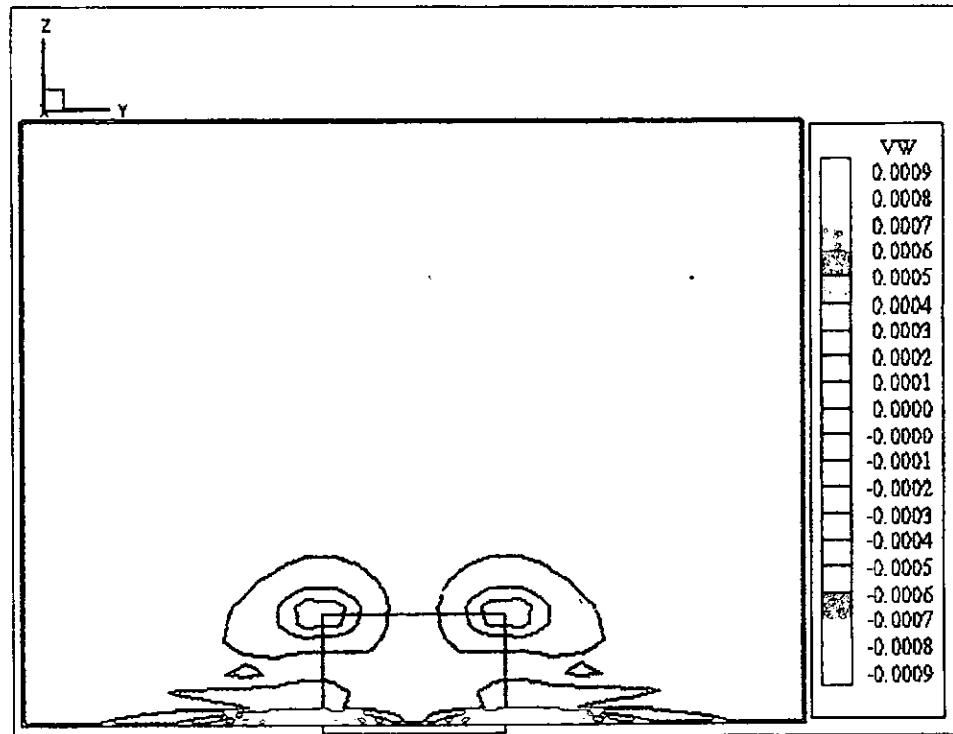


Figura 5.63 Corte y-z de las líneas de contorno de los esfuerzos de Reynolds -  $\overline{vw}$

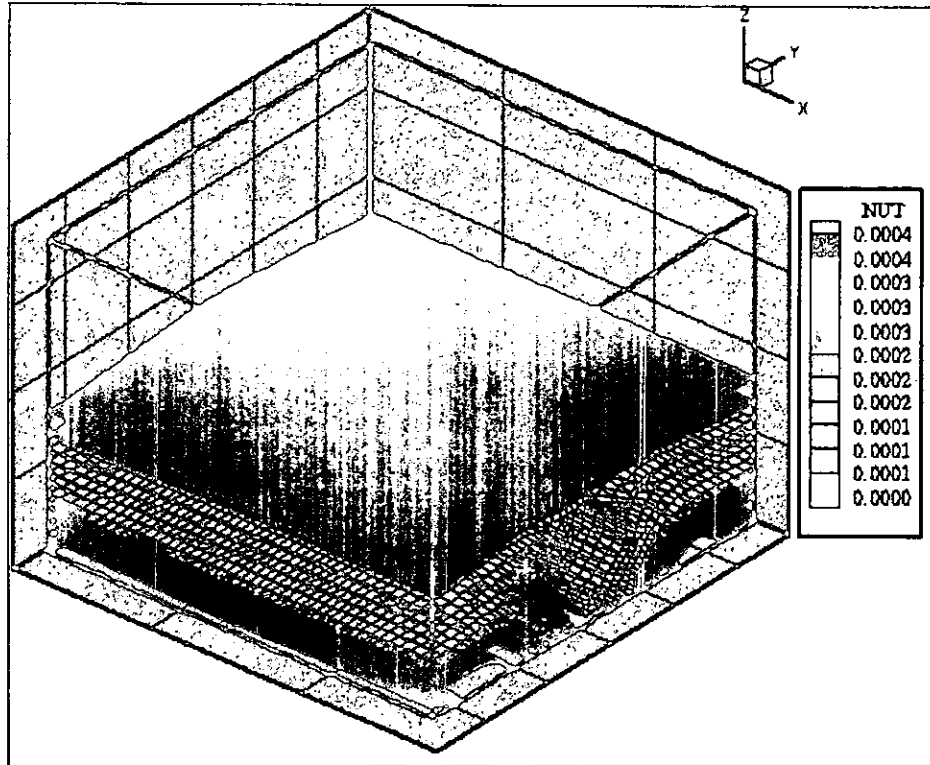


Figura 5.64 Perspectiva de los contornos del coeficiente de viscosidad turbulenta  $\nu_t$

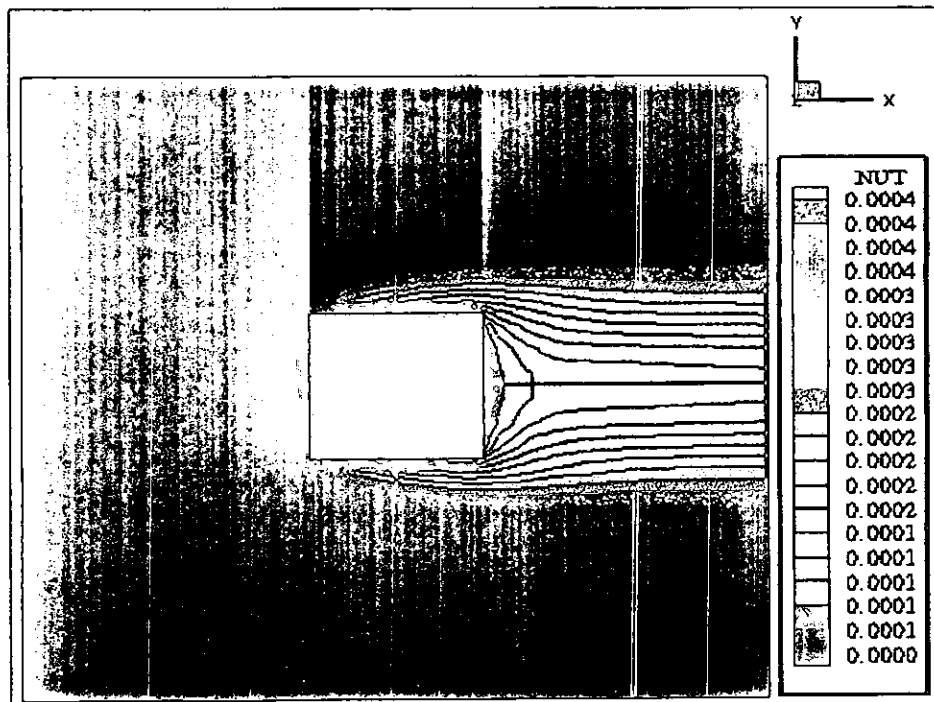


Figura 5.65 Corte x-y de las líneas de contorno del coeficiente de viscosidad turbulenta  $\nu_t$

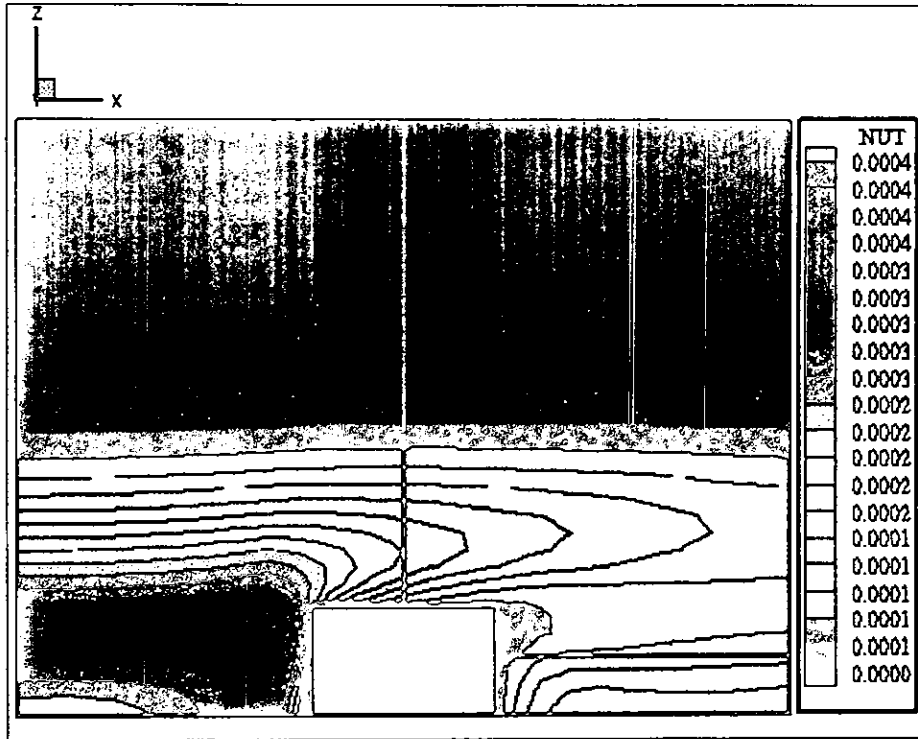


Figura 5.66 Corte x-z de las líneas de contorno del coeficiente de viscosidad turbulenta  $\nu_T$ .

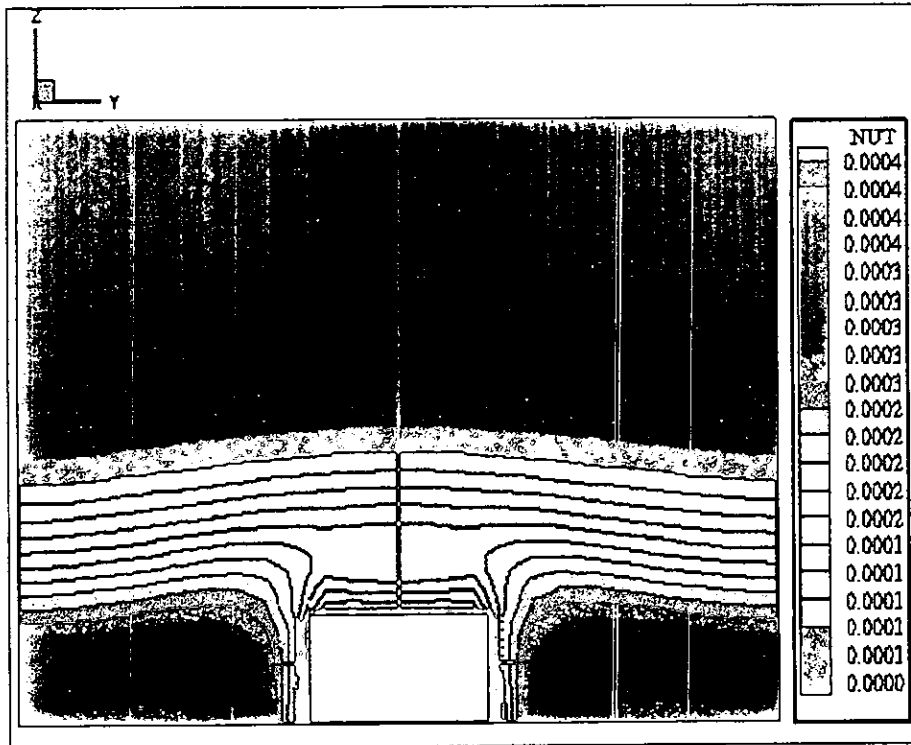


Figura 5.67 Corte z-y de las líneas de contorno del coeficiente de viscosidad turbulenta  $\nu_T$ .

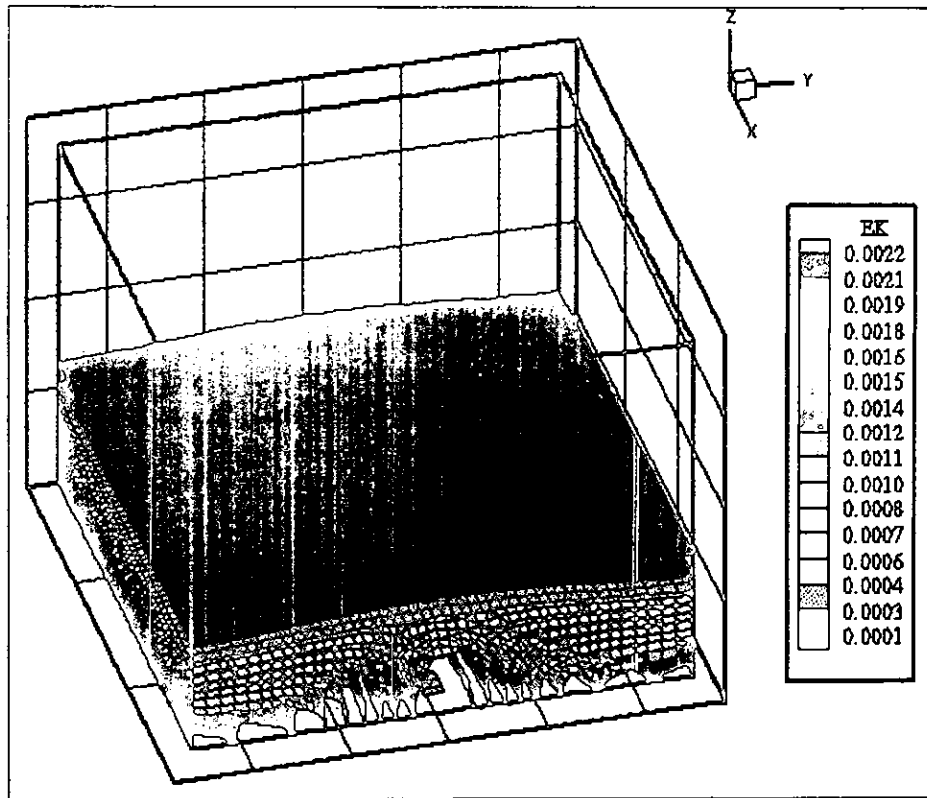


Figura 5.68 Perspectiva de los contornos del término de producción de energía cinética.

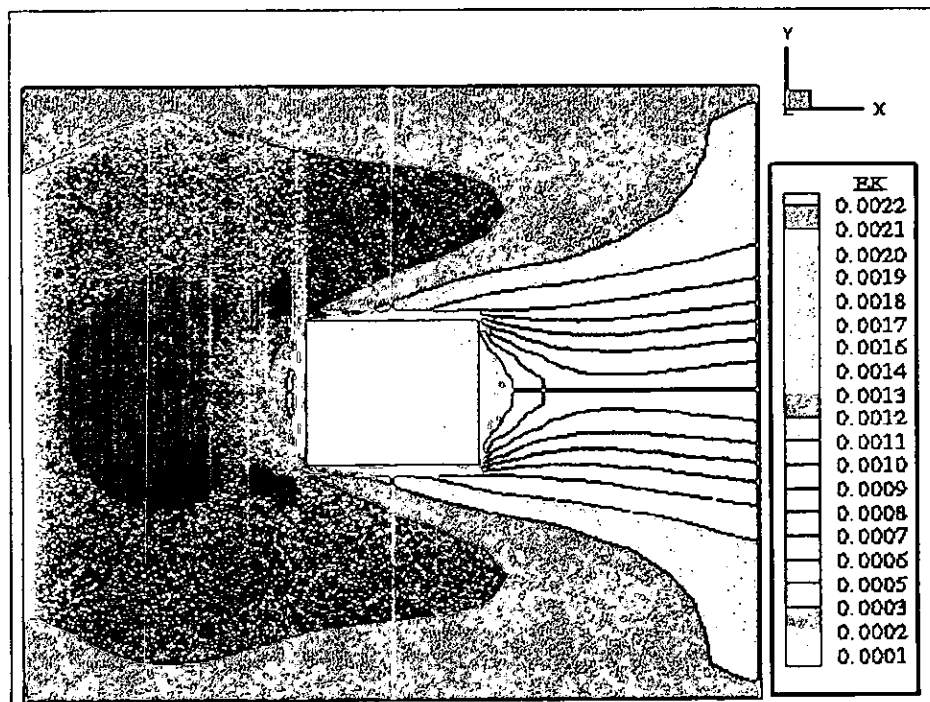


Figura 5.69 Corte x-y de las líneas de contorno del término de producción de energía cinética

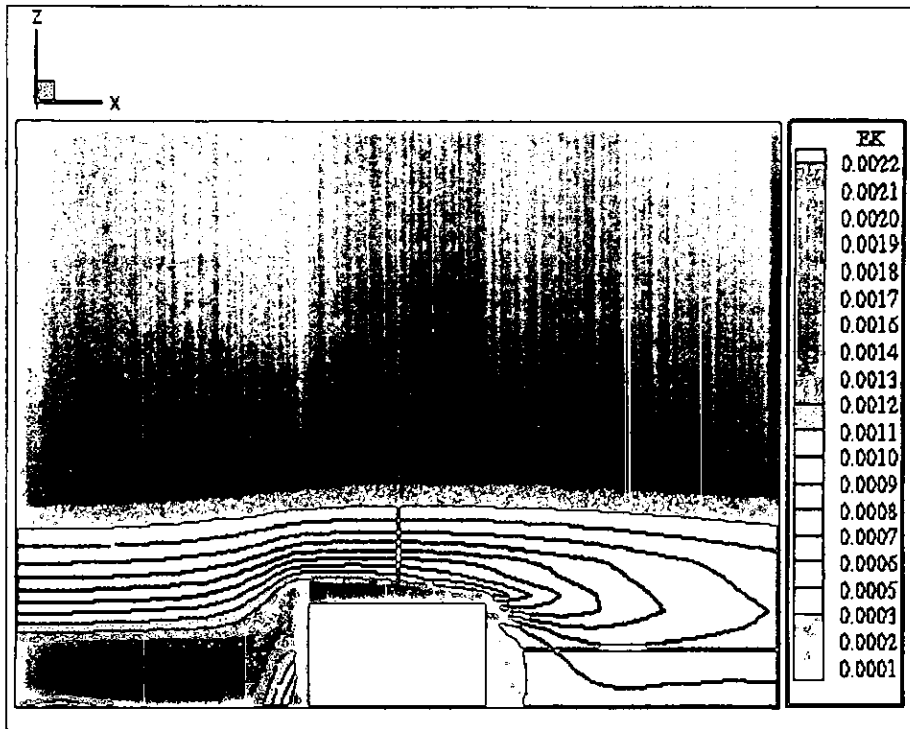


Figura 5.70 Corte x-z de las líneas de contorno de la producción de energía cinética

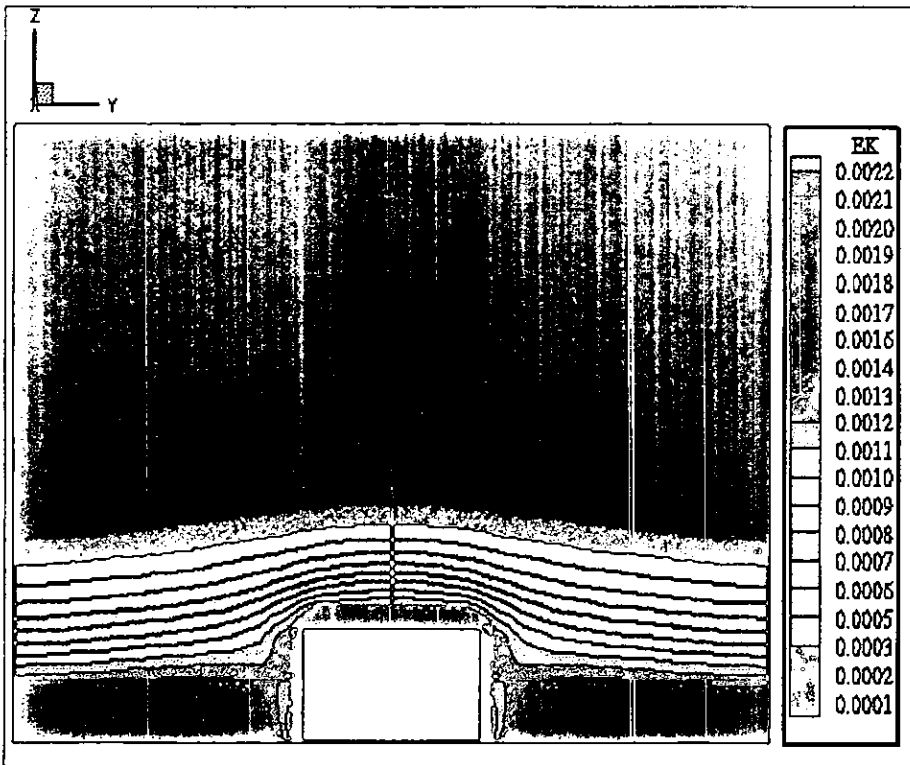


Figura 5.71 Corte y-z de las líneas de contorno de la producción de energía cinética



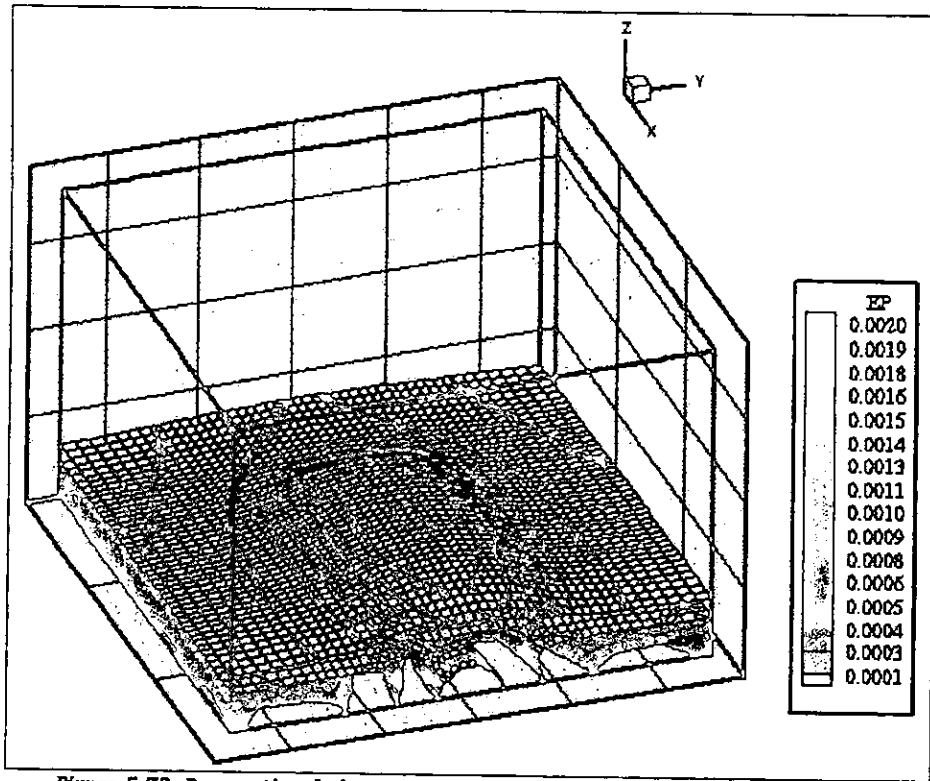


Figura 5.72 Perspectiva de los contornos de la disipación de la energía cinética.

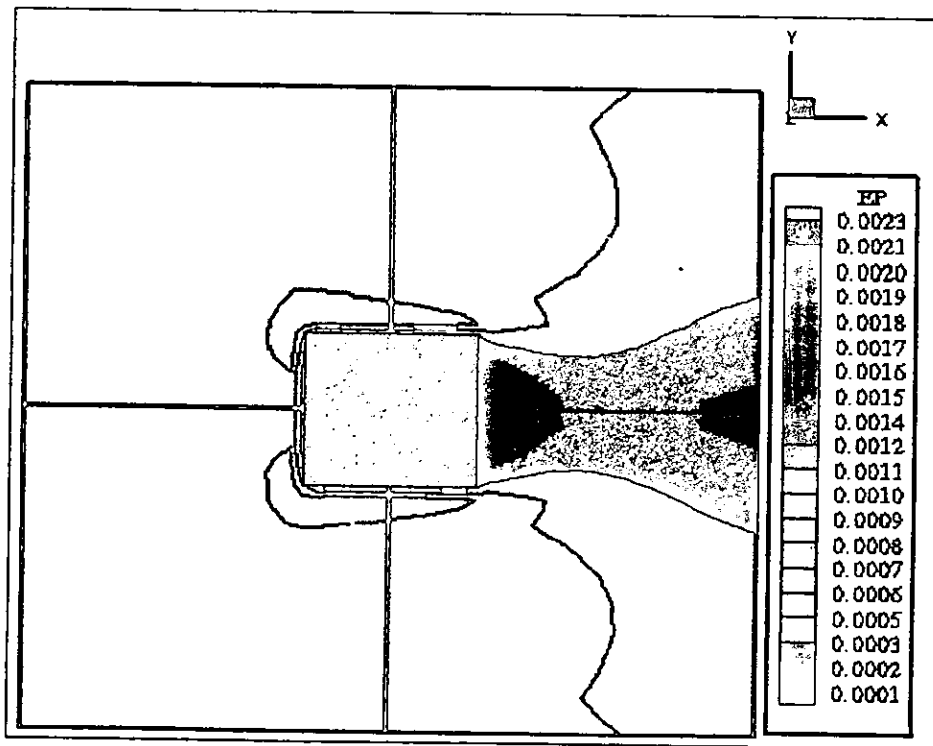


Figura 5.73 Corte x-y de las líneas de contorno de la disipación de la energía cinética.

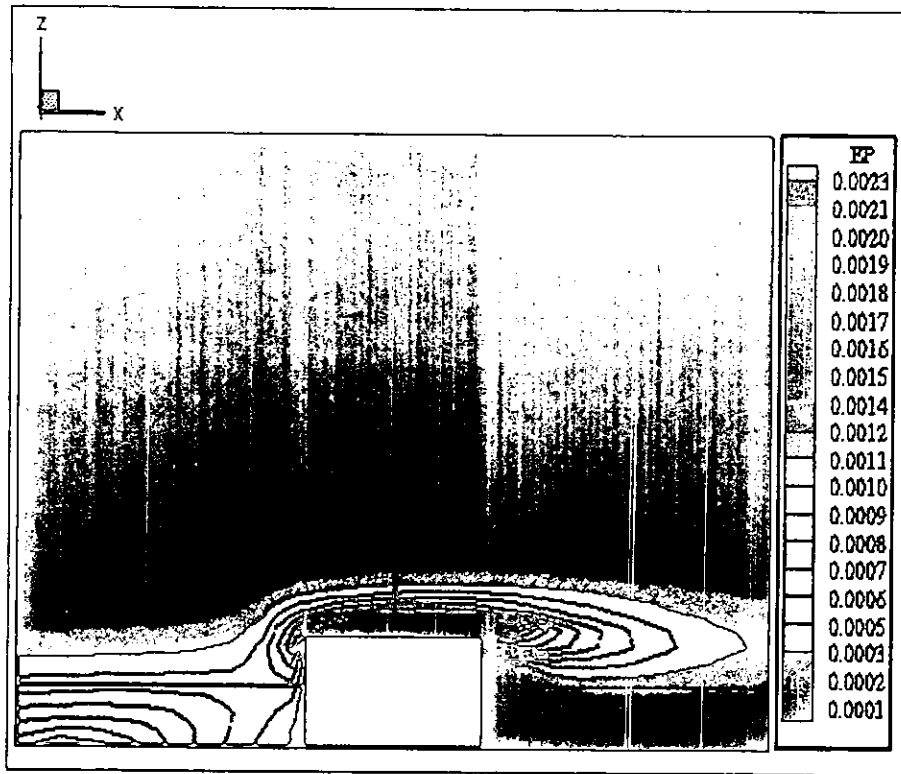


Figura 5.74 Coto x-z de las líneas de contorno de la disipación de la energía cinética.

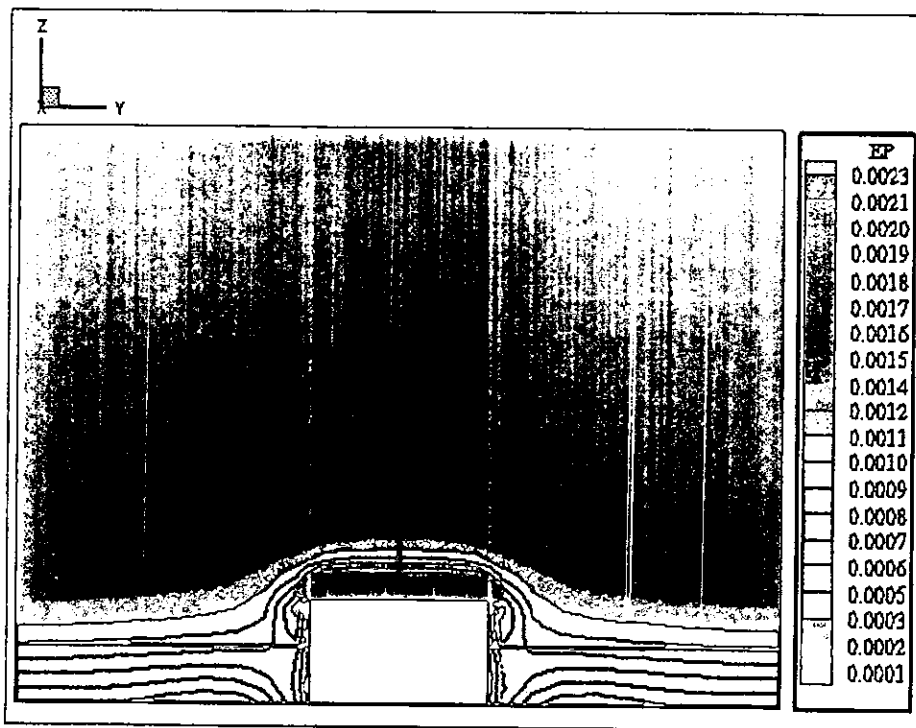


Figura 5.75 Coto z-y de las líneas de contorno de la disipación de la energía cinética.

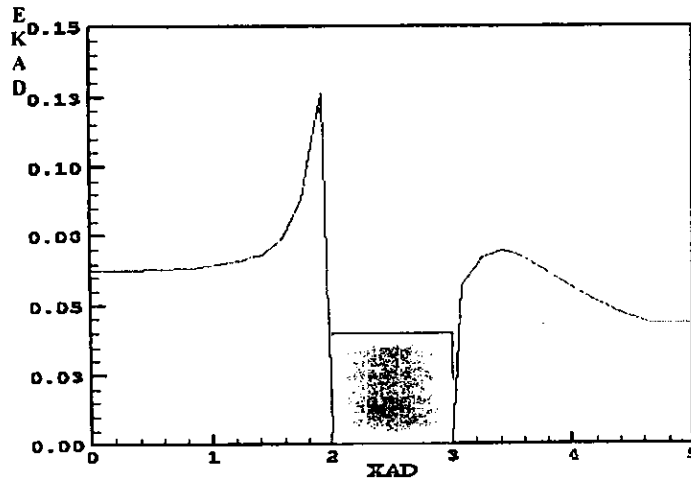


Figura 5.76 Gráfica de la energía cinética adimensional a lo largo del canal, obtenida con datos de este estudio.

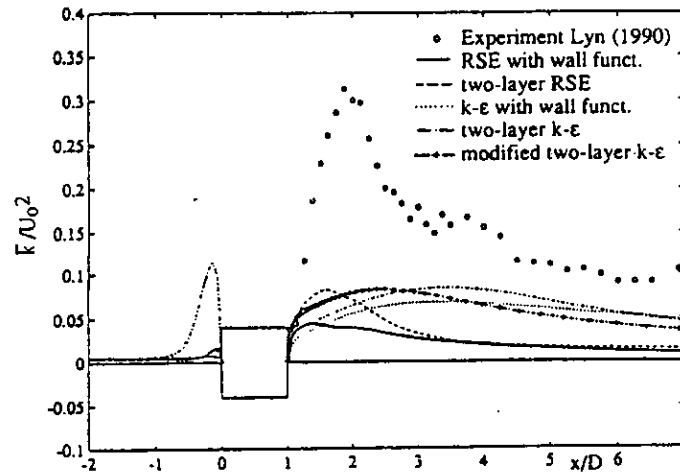


Figura 5.77 Recopilación de la energía cinética a lo largo de un canal utilizando varios modelos numéricos y experimentales por Franke y Rodi (1992).

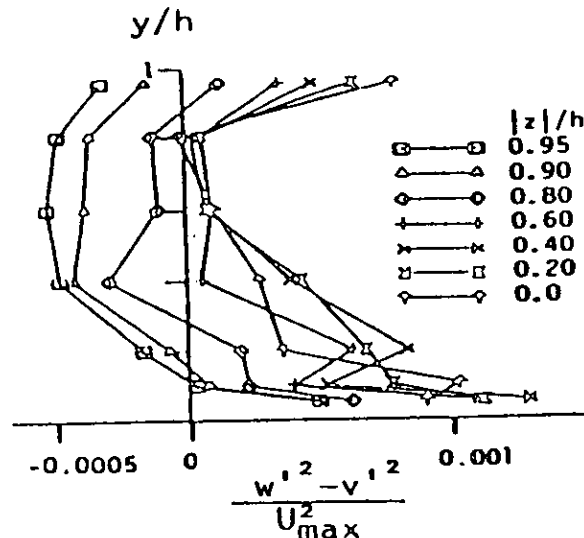


Figura 5.78 Distribución de  $(w^2 - v^2)$  en canales abiertos, Nezu y Nakagawa (1993)

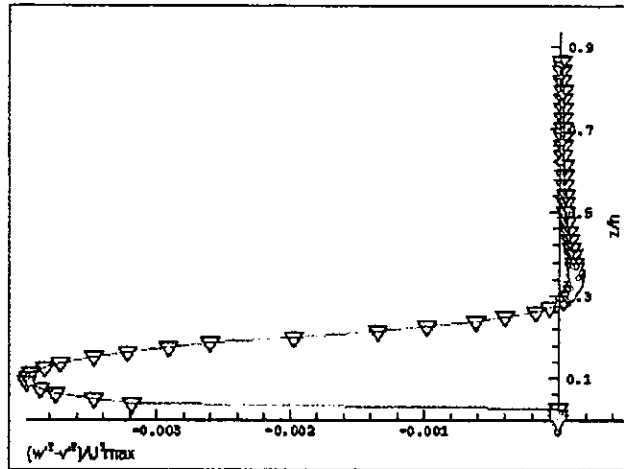


Figura 5.79 Distribución de  $(w^2 - v^2)$ . Anisotropía de la turbulencia a una distancia  $x/L = 2$ , justo al inicio del obstáculo, obtenida en este estudio.

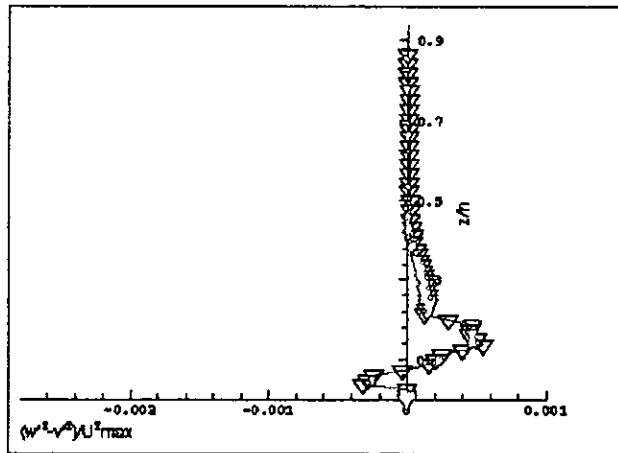


Figura 5.80 Distribución de  $(w^2 - v^2)$ . Anisotropía de la turbulencia a una distancia  $x/L = 3$ , al final del obstáculo en la dirección  $x$ , obtenida en el presente estudio.

---

# CAPÍTULO SEIS

---

## ANÁLISIS DE LA VORTICIDAD DE UN FLUJO ALREDEDOR DE UN OBSTÁCULO

### 6.1 INTRODUCCIÓN

Donde hay un fluido en movimiento hay vorticidad y casi siempre vórtices; sin embargo cuando hay vórtices, siempre hay vorticidad. Generalmente, al término vórtice se le relaciona con la idea de algo que da vueltas en torno a un punto y que el giro debe estar referido a un movimiento colectivo, que comprende a más de un objeto o partícula. Con esa misma idea en mente, se propone lo siguiente: *Un vórtice es el patrón que se genera por el movimiento de rotación de muchas partículas alrededor de un punto común* (no necesariamente fijo en el espacio); aunque esta definición no pretende ser universal, ya que se trata de un fenómeno muy complicado, tanto, que no hay un consenso claro y unívoco sobre este asunto. Se podría decir que la definición dada es la suma de lo que todos alguna vez han intuido.

Sin embargo, si se preguntase ¿Qué es la vorticidad? La respuesta es más sencilla, aunque es más abstracta y no tan evidente como los vórtices. El concepto fue introducido por Cauchy y Stokes. La vorticidad es un campo vectorial; es decir, su magnitud y dirección están definidas en cada punto del espacio ocupado por el fluido. En cierto sentido, es una medida de la velocidad con la que rota cada partícula de fluido.

Si alguien se imagina a una partícula de fluido con cierta forma, se puede demostrar que lo más que le puede pasar a esa partícula es una de estas tres posibilidades: cambia de posición trasladándose con la misma orientación y forma, cambia su orientación sin trasladarse o deformarse; se deforma sin rotar o trasladarse. Cualquier otra cosa puede explicarse como una combinación de estas tres simples acciones. La vorticidad es justamente lo que caracteriza a la segunda transformación.

Para un fluido girando alrededor de un punto, como lo haría una tornamesa, la vorticidad (que es constante) es igual al doble del número de revoluciones por segundo y su dirección es perpendicular al plano de giro, y paralela al eje de rotación (Peralta, 1994).

Aclarando un poco la idea de que aunque todos los vórtices tienen vorticidad, y no siempre que hay vorticidad existe un vórtice, se ejemplifica el siguiente caso. El flujo más sencillo que ilustra lo anterior, es el paralelo cortante. Se le llama así porque las partículas de fluido se mueven paralelas unas a otras y porque las fuerzas, por unidad de área, son cortantes. En este flujo también llamado de Couette plano, las partículas de fluido se mueven paralelas unas a otras; la velocidad que llevan depende de la distancia que hay en el fondo. Una partícula con una extensión, por pequeña que sea, sentirá que la arrastran más por arriba que por abajo (debido a la viscosidad) y tenderá a rotar. Si se calcula la vorticidad de este flujo se verá que no es cero; su magnitud es igual a la velocidad de arriba dividida por la profundidad y su dirección es perpendicular al plano de flujo. Nadie esperaría encontrar vórtices ahí dentro, (Peralta, 1994).

## 6.2 RELACIÓN ENTRE DEFORMACIÓN, ROTACIÓN Y TRANSFERENCIA DE ENERGÍA CINÉTICA

Para empezar recuérdese que la turbulencia es esencialmente tridimensional. Generalmente, el concepto de partícula fluida es a menudo, mal adaptado para describir los mecanismos de un flujo turbulento que suele representarse como una maraña de remolinos de tamaños y de orientaciones variables, y distribuidos de forma aleatoria en el espacio y en el tiempo. En particular suelen hacerse algunas preguntas de éste estilo, ¿Cómo se mantiene la turbulencia? ¿Cómo elige el movimiento medio los remolinos para transmitir la energía? ¿Cómo se divide la energía cinética de la turbulencia entre los remolinos de todos tamaños y diferentes direcciones? Para responder estas preguntas es necesario recurrir a la física de la turbulencia y remarcar que la velocidad instantánea en un punto del espacio debe de verse como la resultante de las "inducciones" del conjunto de remolinos en el medio circundante.

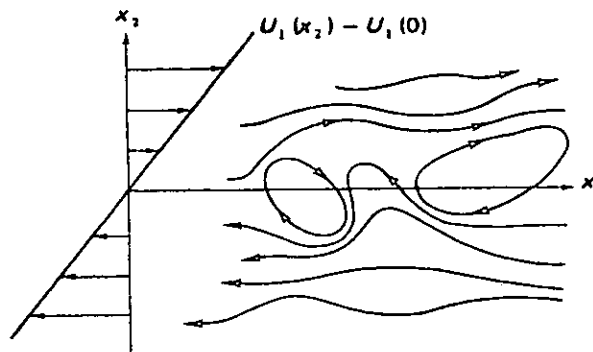


Figura 6.1 Ejemplo de un flujo con cortante puro

Para aclarar un poco la idea anterior, considérese un ejemplo muy simple constituido por un "cortante puro" como el que se muestra en la figura 6.1, en donde únicamente la componente de la deformación representada por el gradiente  $0.5(\partial U / \partial y)$  introduce un alargamiento en la dirección inclinada a  $45^\circ$  con respecto a los ejes  $x$ - $y$  y una compresión en una dirección perpendicular.

Como resultado de la acción del cortante sobre una partícula de fluido ésta se ve sometida a dos tipos de acciones al pasar de un tiempo  $t_1$  al tiempo  $t_2$  (tiempo en el cual ocurre una traslación): una deformación y una rotación, mismas que se denominan como ya se ha mencionado en capítulos anteriores, componente simétrica y componente asimétrica, respectivamente. Ambas componentes se ilustran en la figura 6.2. El tensor simétrico está asociado directamente a la deformación del elemento de fluido y el asimétrico a la rotación simple ligada al vector remolino.

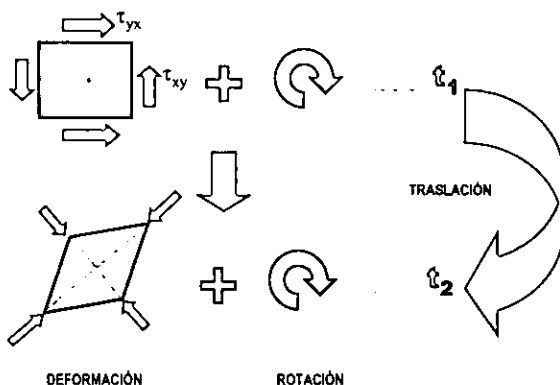


Figura 6.2 Relaciones esfuerzo-deformación y distorsión de un elemento de fluido en movimiento

En un flujo bidimensional en el plano  $x$ - $y$ , el esfuerzo turbulento principal  $-\rho uv$  muestra que las fluctuaciones  $U$  y  $V$  generalmente se correlacionan bien. Se puede demostrar igualmente que en el caso donde  $0.5(\partial \bar{U} / \partial y)$  sea positivo, las fluctuaciones positivas de  $U$  aparecen más frecuentemente en presencia de las fluctuaciones negativas de  $V$  y viceversa. La liga entre este gradiente de velocidad media y este esfuerzo cortante turbulento es mucho mas fuerte, como se verá a posteriormente.

Por otro lado, en la teoría cinética de los gases, se ha constatado que en los movimientos moleculares, los choques son elásticos. Por este hecho el movimiento macroscópico no tiene necesidad de aportar energía para mantener las agitaciones moleculares.

El problema es diferente para las agitaciones turbulentas. En las ecuaciones de N-S, el movimiento medio debe suministrar energía para mantener su estado turbulento; este proceso o mecanismo de producción o de transferencia de energía del movimiento medio hacia el movimiento fluctuante resulta interesante de investigar. Las fluctuaciones de velocidad se deben a la presencia de los remolinos, en cada instante, y estos remolinos "funcionan" gracias a su energía cinética la cual varía según si los remolinos son alargados o comprimidos. Para entender el mecanismo de alargamiento de los remolinos, consideremos un tubo vorticoso elemental de longitud  $L$ , de masa volumétrica  $\rho$ , de radio  $R$  y de velocidad angular  $\omega$ , figura (6.3).

La masa  $M$ , de este remolino es proporcional a  $\rho L R^2$  mientras que su energía cinética  $MV^2 / 2$  es, por tanto proporcional a  $E_c \approx (L R^2) R^2 \omega^2$  y su movimiento angular  $m$  igual a  $MVR \approx (L R^2) R^2 \omega$ . Si suponemos que este remolino que puede estar alargado o comprimido, tiene dimensiones lo

suficientemente grandes para que la difusión viscosa pueda ser despreciable: se obtendrá un proceso no viscoso equivalente a un fluido perfecto.

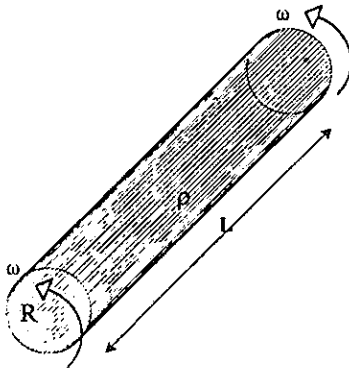


Figura 6.3 Remolino elemental

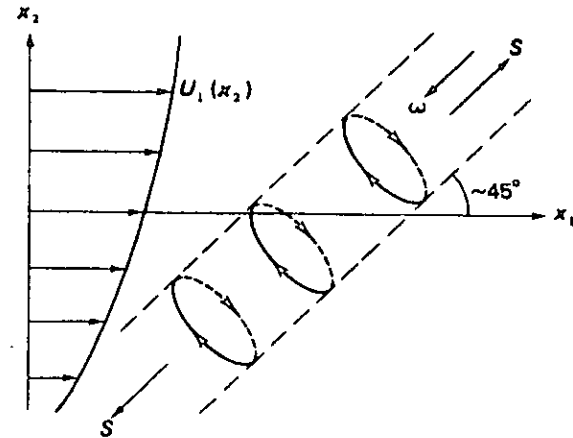


Figura 6.4 Remolino bajo la acción de una deformación media.

Esta hipótesis nos permite concluir que el momento angular de este remolino (masa  $\times$  circulación) se conserva. Por otra parte, ya que la masa del remolino es igualmente conservada, se obtienen los siguientes resultados:

$$M = \text{Constante} \rightarrow \rho L R^2 \approx \text{Constante}$$

Si el momento es constante, se infiere que  $(L R^2) R^2 \omega \approx \text{Constante} \Rightarrow R^2 \omega \approx \text{Constante}$ . La energía cinética de este remolino es proporcional a  $(\rho L R^2) R^2 \omega \omega$ , lo que implica que la energía cinética varía entonces conforme a  $\omega$ . Por lo tanto:

$$E_c \approx \omega \approx R^{-2} \approx L$$

De esta manera, cuando un remolino se alarga, al mismo tiempo que aumenta su longitud aumenta también su velocidad angular, y por consiguiente su energía cinética, pero su sección disminuye. Lo contrario sucede cuando un remolino se comprime, su energía cinética disminuye y su sección aumenta. La cuestión es saber cual de los remolinos es alargado. A partir del ejemplo elemental precedente, se puede inferir que la dirección del alargamiento está dada por la deformación del movimiento medio. Por lo que, los remolinos más eficaces (es decir, los más aptos para extraer la energía del movimiento medio) son aquellos cuyos ejes están más o menos alineados con aquellos de la deformación del movimiento medio (Fig. 6.4). Puede constatararse de igual manera que el alargamiento de un remolino aumenta las fluctuaciones en los planos perpendiculares a este vector remolino. Se puede verificar que las fluctuaciones positivas de  $U$  están bien correlacionadas con las fluctuaciones negativas de  $V$ , y viceversa. Esto sin embargo no es más que una esquematización, y que en la realidad, la configuración de remolinos podrá ser muy diferente de un flujo a otro. Baste recordar de nueva cuenta, que la interacción entre los remolinos y el movimiento medio es un mecanismo esencialmente tridimensional.



En un flujo bidimensional y en un plano (x-y por ejemplo), se puede ocasionalmente tener remolinos paralelos al eje z. Estos pueden generar esfuerzos importantes, positivos o negativos pero no pueden crear fluctuaciones de W. Estos remolinos pierden rápidamente la capacidad de extracción de la energía del movimiento medio bajo el efecto de la rotación y la deformación del movimiento medio.

Surge entonces otra pregunta, ¿porqué se habla siempre primero del alargamiento en lugar de la compresión de los remolinos? Para ello recuérdese que la ecuación de continuidad en evolución se traduce por una compresión en un plano, luego que se impone un alargamiento en una dirección que le es perpendicular (Fig. 6.5).

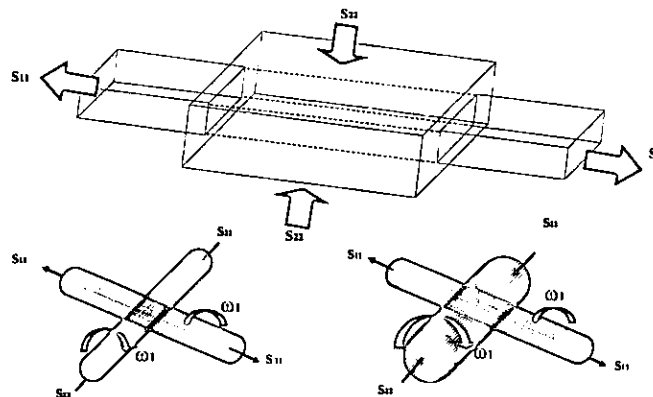


Figura 6.5 Remolinos bajo la acción de la conservación de la masa

Otro punto interesante de indagar es el siguiente: ¿Cómo puede influenciar a los otros el alargamiento de un remolino? Para responder esto consideremos una situación simple en la cual existe un alargamiento inicial sólo en la dirección z:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \rightarrow S_{33} \neq 0$$

$S_{33}$  no se alarga más que los remolinos cuyos ejes están alineados con z, (Fig. 6.6).

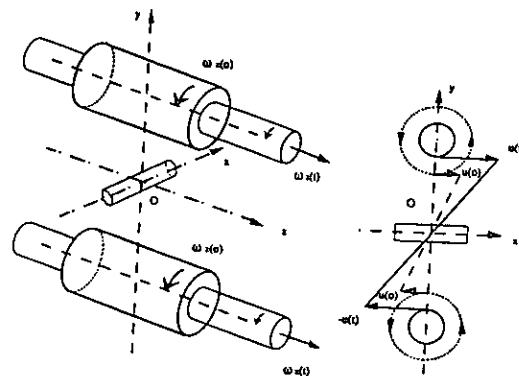


Figura 6.6 Esquema del alargamiento de los remolinos

Se puede ver sobre esta figura que el alargamiento de los remolinos en z, aumenta los gradientes  $\partial U / \partial y$  y  $\partial V / \partial x$  es decir, la deformación:  $\left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$ .

Por lo demás, los remolinos cuyos ejes están contenidos en el plano  $x$ - $y$  se alargarán al mismo tiempo, según lo que se acaba de demostrar en relación a la liga entre los esfuerzos turbulentos y la deformación. Así, en su oportunidad los remolinos cuyos ejes están en  $x$ - $y$  ven su energía cinética aumentar y su sección disminuir, y simultáneamente, los esfuerzos de cortante turbulentos  $-\rho u v$  aumentar en intensidad. El fenómeno se repite de la misma manera en cada etapa. De esta manera, sistemáticamente, se puede decir que el alargamiento de un remolino en  $z$  provocará el alargamiento de un remolino en la dirección  $x$  y otro remolino en la dirección  $y$ , estos dos últimos reciben energía cinética del movimiento medio, si bien inicialmente no estaban alineados con la deformación media. Recuérdese que se menciona el término de alargamiento porque estadísticamente es más frecuente que la compresión. El proceso de alargamiento precedente se repite siguiendo el célebre esquema del árbol genealógico de Bradshaw (1971), figura 6.7.

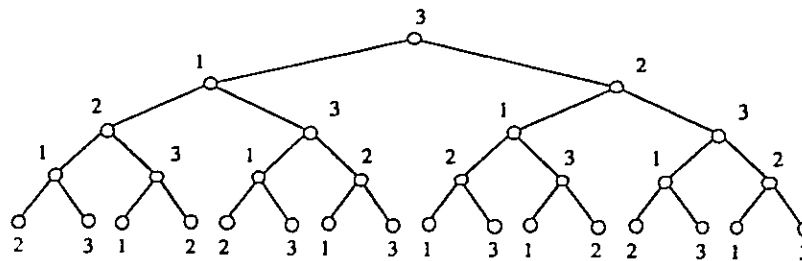


Figura 6.7 El árbol genealógico de Bradshaw

La consecuencia de todo esto es una transferencia progresiva de la energía cinética hacia los remolinos cada vez más pequeños. Es esto lo que se conoce como la cascada energética de Kolmogorov o el espectro de Kolmogorov. Existe también una consecuencia importante, por ejemplo, un alargamiento en  $z$  termina por alargar, al cabo de muchas generaciones la misma cantidad de remolinos en  $x$ , que en  $y$  y que en  $z$ . De este modo existe entonces una tendencia hacia la isotropía en los vorticillos. Es así como los remolinos más pequeños "olvidan" poco a poco las características de su "ancestro" iniciador y tienden progresivamente hacia un estado isotrópico más o menos **universal**. Pero esta universalidad no es completamente independiente de las condiciones iniciales del flujo en cuestión (por ejemplo, la escala temporal conocida como tiempo de regreso de la turbulencia y la energía cinética  $\kappa$ ), y esto no se debe olvidar en la modelación de flujos turbulentos.

La primer parte del trabajo se relacionó con la deformación del flujo, la tasa de deformación  $S_{ij}$ , se introdujo en las ecuaciones del flujo medio; sin embargo, esta segunda parte del trabajo, tiene que ver con la simulación numérica de la vorticidad y por consiguiente de la parte antisimétrica del tensor de tasas de deformación, denotado por  $R_{ij}$ .

### 6.3 FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS DE VORTICIDAD

En esta sección se mostrarán resultados obtenidos en la investigación bibliográfica de simulaciones tanto numéricas como experimentales, de flujos sobre obstáculos que ayudarán a

entender, los patrones de flujo y estructuras de vorticidad y al mismo tiempo explicar y concluir los resultados obtenidos con el modelo numérico propuesto en este estudio. Cabe aclarar que la mayoría de los artículos consultados difieren del estudio llevado a cabo y algunos inclusive son bidimensionales.

En un estudio presentado por Acarlar y Smith (1987), se estudia los vórtices de horquilla en capas límite laminares, y los vórtices mencionados generados por un obstáculo hemisférico. Los patrones de flujo creados por la presencia de vórtices de horquilla se documentaron utilizando técnicas de visualización de hilo de burbujas de hidrógeno y tinta, combinado con un sistema de video de alta velocidad (120 cuadros/s) para estudios de visualización. Se utilizó además un equipo digital con sistema de adquisición de datos para guardar los datos de las mediciones con película caliente. Las visualizaciones se llevaron a cabo en un canal a superficie libre de 5 m de largo por 0.90 m de ancho y 0.35 m de altura. El número de Reynolds osciló entre  $30 \leq Re \leq 3400$ . En las figuras 6.8 a 6.17 se presentan los resultados más relevantes, mismas que se discuten a continuación.

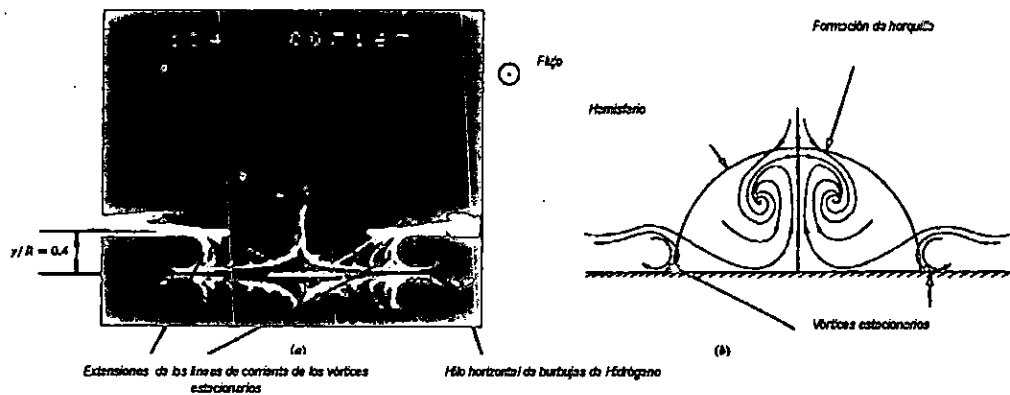


Figura 6.8 Vista final de la formación de un vórtice a) con el hilo de burbujas localizado aguas arriba del obstáculo

En la figura 6.8a, se muestra la formación de un vórtice de hongo en el extremo del obstáculo hemisférico y en la figura 6.8b, se muestra un esquema de tal formación. En la figura 6.9, se presenta la caracterización de la formación del vórtice de horquilla en forma esquemática, en diferentes perspectivas.

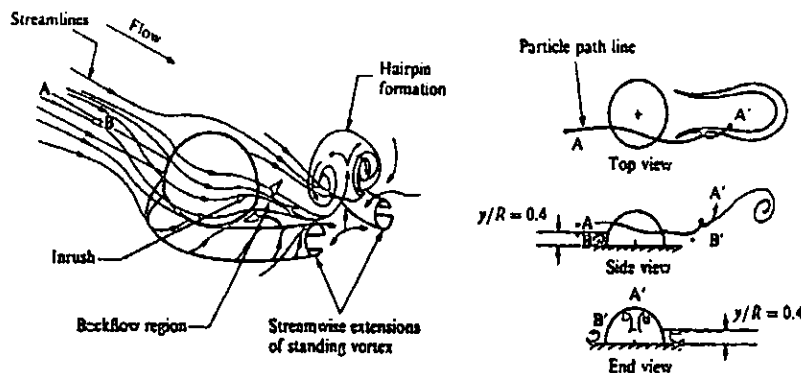
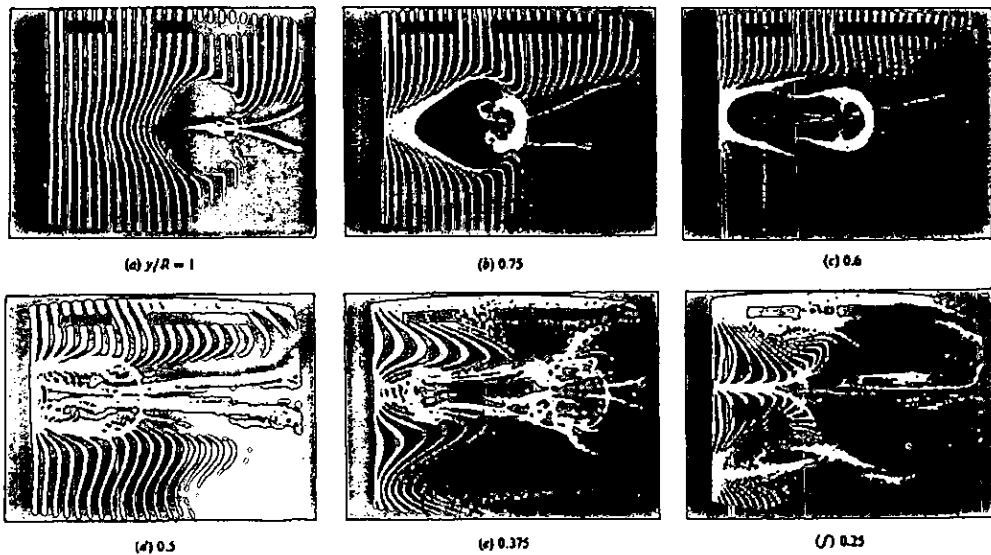


Figura 6.9 Esquema del comportamiento del flujo externo y la formación de vórtices de horquilla, (M.S. Acarlar y C.R. Smith, 1987).

Ahora bien, en la figura 6.10 se presenta una secuencia de vistas en planta de la formación citada a diferentes alturas, dichas gráficas se hicieron utilizando un hilo horizontal de burbujas de hidrógeno. Aunque esos patrones de flujo no representan por sí mismos estructuras de flujo, muestran los efectos de las estructuras del vórtice de horquilla sobre las hojas de fluido. Se ve claro que los patrones de flujo observados en la región cerca de la pared varían ampliamente en apariencia. Aunque esto se debe en parte a la naturaleza compleja del flujo, estudios minuciosos han demostrado que pequeños cambios en la localización del hilo de burbujas, la fase de desarrollo, o aún en la frecuencia de la línea de generación de burbujas, pueden tener un efecto muy grande en los patrones de flujo visualizados. En las figuras anteriores  $y/R$ , es la altura adimensional a la cual se localiza la línea de burbujas de hidrógeno y  $R$ , es el radio del hemisferio.



**Figura 6.10** Vista en planta de diferentes patrones de burbujas de hidrógeno tomadas a diferentes alturas  $y/R$  del dominio del flujo, a  $Ro=750$ .

A diferencia de los colorantes o humo, los cuales transportan la historia del flujo, las líneas de burbujas revelan solamente el comportamiento local; de esta manera cuando se intenta visualizar la evolución de las estructuras de flujo tridimensionales cuando están siendo transportadas aguas abajo, lo que se observa es una serie de patrones de burbujas significativamente diferentes, representando el movimiento local y activo del fluido, inducidos en una región específica durante una fase particular del desarrollo de las estructuras.

En la figura 6.11 también se muestran una serie combinada de planos y perfiles. En general, en esa figura se ilustra la complejidad y la interacción substancial entre los de vórtices de horquilla secuenciales y la dependencia del tipo de patrón observado de la localización del hilo de burbujas y la fase del desarrollo.

Se encontró que la interpretación de los patrones y los movimientos complejos tridimensionales, son representados frecuentemente con gran dificultad debido a la incapacidad para

establecer exactamente el movimiento dentro y fuera del plano de visión. De manera que en ese trabajo se utilizó la capacidad de un sistema de video dual. Teniendo acceso a dos vistas de la estructura tridimensional, y por tanto, permitiendo establecer con mayor exactitud el comportamiento tridimensional del flujo.

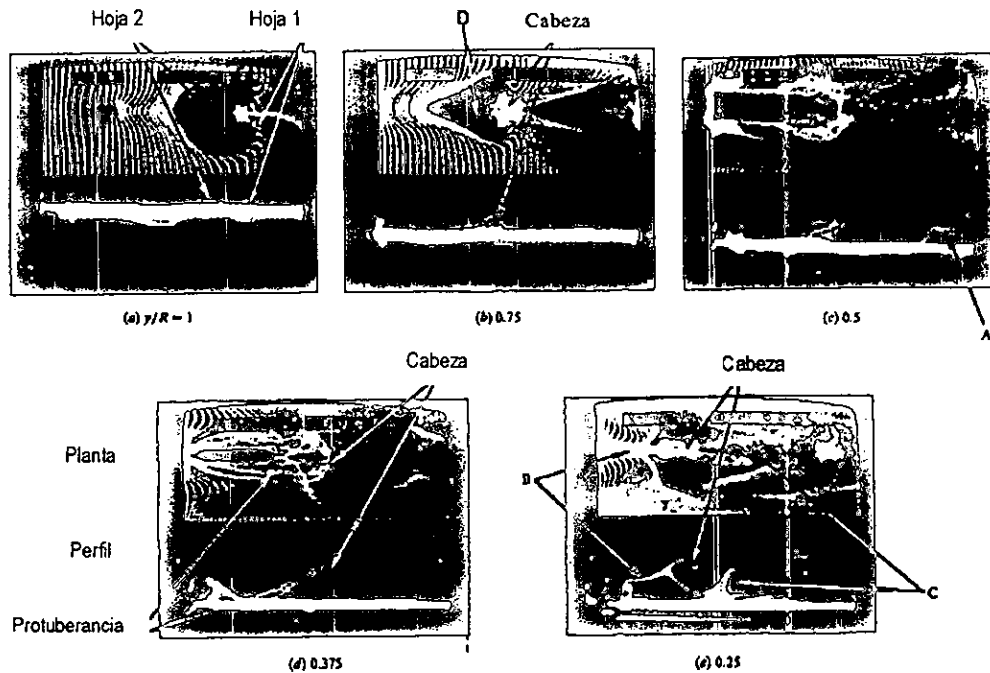


Figura 6.11 Vistas combinadas de planta y perfil a diferentes alturas del dominio, a  $Re=750$ .

Inmediatamente que se observa esta figura, se nota la ventaja de ese tipo de visualización. Es claro que sin acceso a ambos, es decir, perfiles y planos en esas gráficas, sería muy difícil entender la complejidad del movimiento del fluido. En este conjunto de figuras se colocó el hilo de burbujas de hidrógeno en dirección horizontal, y a diferentes alturas del dominio, de manera que se pudieran visualizar las diferentes características de las estructuras vorticosas y el comportamiento inducido por éstas en las distintas regiones del flujo.

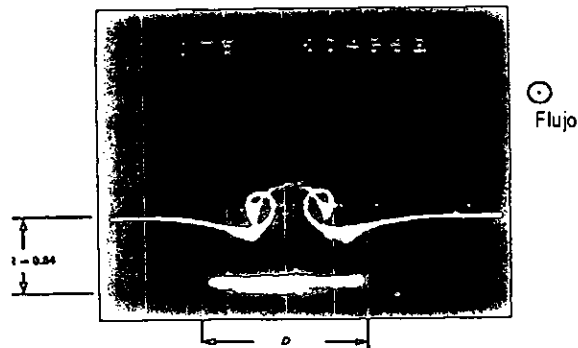


figura 6.12 Vista de un vórtice de horquilla en el extremo del obstáculo

La figura 6.12 ilustra el paso de la cabeza del vórtice a través del plano de generación de burbujas de hidrógeno. La frecuencia de la generación de burbujas se sincronizó con la frecuencia de

aparición de vórtices, tal que sólo un vórtice se marca por una sola línea de burbujas de hidrógeno. A medida que la cabeza del vórtice pasa a través de una línea de burbujas, las burbujas que están entre las ramas de los vórtices opuestos se mueven hacia arriba, mientras que las burbujas que están justo en el bordo de las ramas se mueven hacia la pared, en dicha figura se demuestra claramente la rotación de la línea de burbujas alrededor de la cabeza del vórtice y de las ramas del vórtice y el movimiento de ambos lejos de la superficie.

Por otro lado en la figura 6.13, se presenta una secuencia de vistas en planta de los patrones de flujo secundario en la estela del hemisferio vista en planta a diferentes alturas y con una representación esquemática del fenómeno al lado. El examen de los patrones de flujo de burbujas en la estela del hemisferio indican el desarrollo de estructuras de flujo secundarias en la capa límite, inicialmente laminar debido a la presencia de vórtices de horquilla. La figura 6.13a ilustra también la formación de dos regiones libres de burbujas marcadas con la letra A y B. La región A, es la que está los lados del vórtice de horquilla original. La región B refleja un bajo momentum en el fluido llevado hacia arriba entre las ramas de los vórtices pares del vórtice original.

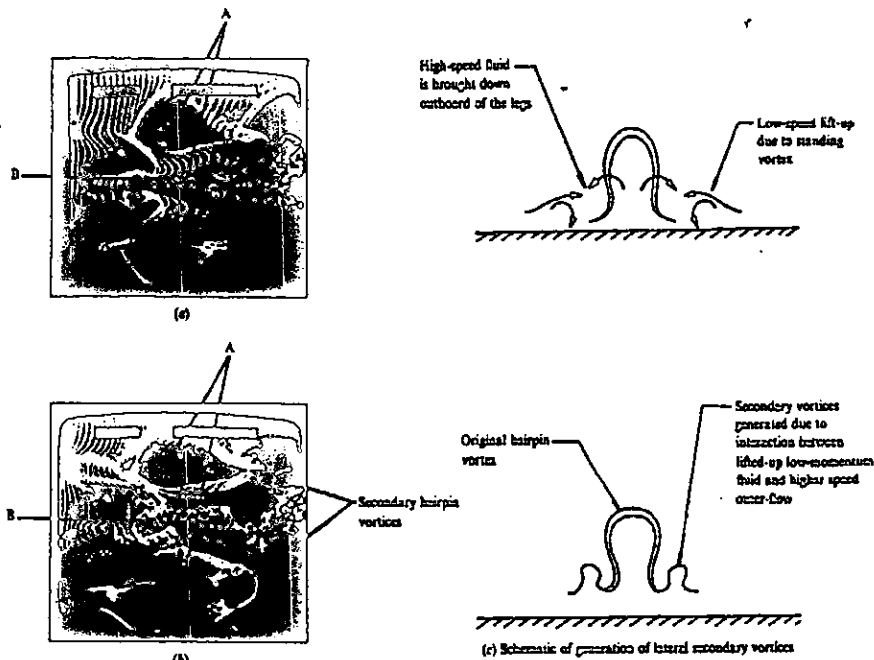


Figura 6.13 Patrones de flujo secundario on la estela de un hemisferio, (M.S. Acarlar y C.R. Smith, 1987).

En la figura 6.13b se revela la causa de las dos regiones oscuras libres de burbujas, al parecer esas regiones oscuras están relacionadas a la formación de estructuras tipo vórtices de horquilla. La formación de esas regiones es similar al desarrollo del comportamiento de un punto de estancamiento para la estructura de horquilla inicial.

La figura 6.14a, es una visualización en un extremo del hemisferio, localizada aguas abajo a  $x/R=10$  y a una altura del hilo de burbujas  $y/R=0.1$ . El patrón de las burbujas de hidrógeno ilustra claramente el levantamiento del fluido de bajo momentum desde el fondo (etiquetado con la letra A)

por las ramas opuestas del vórtice de horquilla. A los lados aparecen también regiones de bajo momentum (etiquetadas con la letra B), creadas por el alzamiento del fluido de la región de pared, debidas al vórtice de fondo o estacionario.

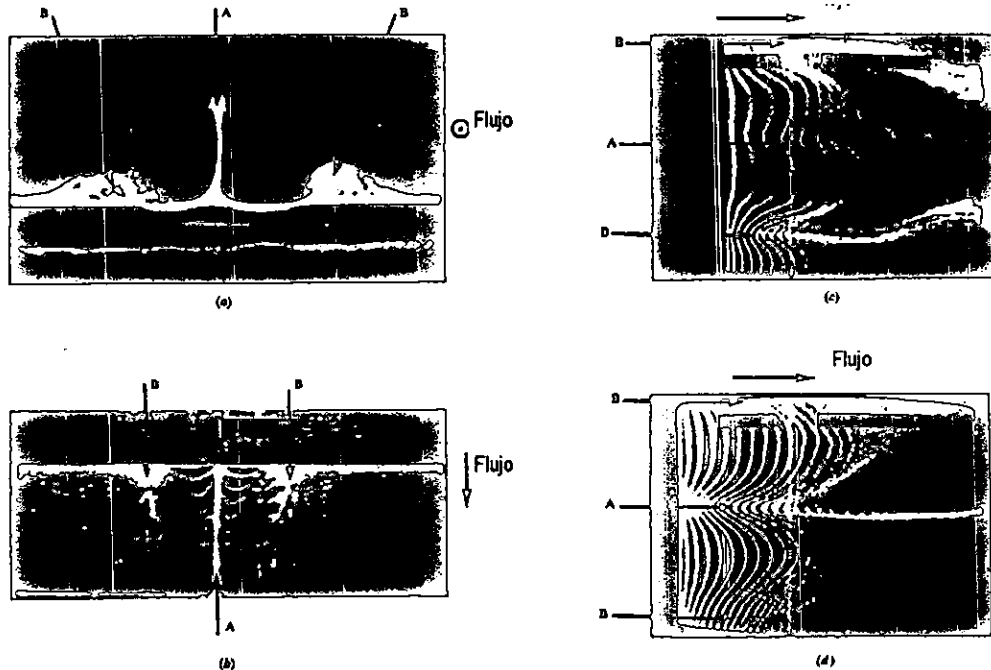


Figura 6.14 Patrones de la estela de las líneas de burbujas. a) Vista on el extremo del fluido de bajo momentum ascendiendo entre las ramas del vórtice por a  $x/R=10$ , y  $y/R=0.1$ . b) Vista de planta de a) a  $y/R=0.1$ . c) vista de planta a  $x/R=20$  y  $y/R=0.25$ . d) Vista de planta a  $x/R=65$ , y  $y/R=0.25$ .

La figura 6.14b, es una vista en planta correspondiente a las regiones de baja velocidad de fluido observadas. El levantamiento de las líneas de baja velocidad retrasa las líneas de burbujas formando horquillas claras como los observados en las figuras en planta. Debe notarse que las escalas de las figuras 6.14 a y b son diferentes. Las figuras 6.14 c y d, son vistas superiores de patrones observados cerca de la pared. Es claro que las regiones de baja velocidad mantienen su integridad aún lejos de la estela.

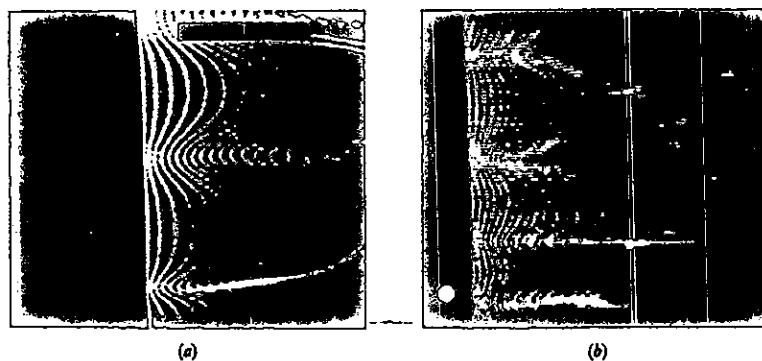


Figura 6.15 Comparación en planta de un vórtice de horquilla y la estructura de una capa límite turbulenta.

Por último, en la figura 6.15 se muestra una comparación de estelas entre un vórtice de horquilla y una capa límite turbulenta. Esta última a un número de Reynolds de 2200. Es necesario

aclarar, que la inclusión del trabajo de Smith y Acarlar (1987), extensivamente dentro de éste, se debe a que sus resultados son muy importantes y muestran la complejidad de las estructuras turbulentas alrededor de un obstáculo y la dificultad para interpretarlas y también a que puede ayudar a identificar estructuras turbulentas en éste trabajo, a partir de sus observaciones e inferencias.

Por otro lado, se menciona el trabajo presentado por Larousse, Martinuzzi & Tropea (1992), los cuales simularon de manera experimental el flujo alrededor de un obstáculo cúbico tridimensional en un conducto cerrado. Para ello utilizaron anemometría láser, específicamente el anemómetro láser Doppler (LDA, por sus siglas en inglés). El número de Reynolds utilizado en el experimento fue del orden de  $10^5$ . Entre los resultados más destacados obtenidos en ese trabajo y con los cuales es factible comparar, se presentan en las gráficas siguientes. En la figura 6.16 se presenta una visualización del flujo alrededor de un obstáculo que tiene una relación ancho/altura = 1, se puede apreciar en ésta los típicos vórtices opuestos que se forman en el fondo del canal, y la estela de vórtices que se forma detrás de los vórtices opuestos.

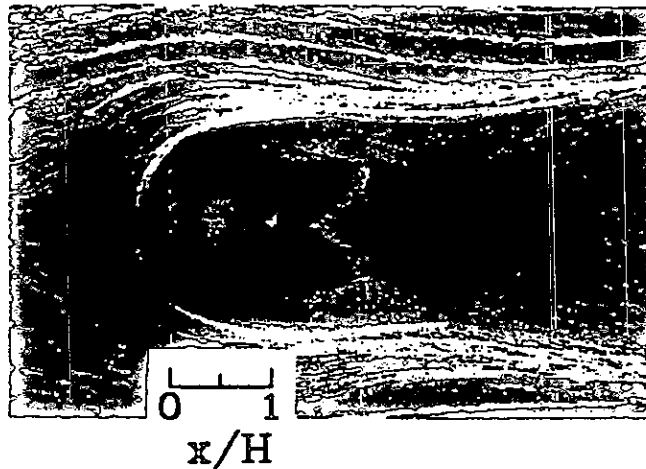


Figura 6.16 Resultados de la visualización de flujos de alta velocidad por Larousse, Martinuzzi y Tropea (1992).

Analizando sus resultados los autores infirieron que en dicho flujo se presentaban diferentes estructuras vorticosas, mismas que esquematizaron como se aprecia en la figura siguiente:

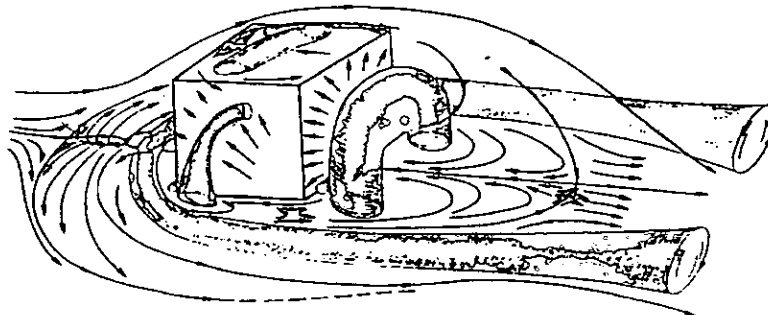


Figura 6.17 Esquema de las estructuras de vorticidad alrededor de un cubo, sugerido por Larousse, Martinuzzi y Tropea (1992).



cabe mencionar que esta caracterización es sólo producto de lo que otros autores "imaginan" que ocurre en el flujo en base a sus resultados; sin embargo, no presentan algún gráfico o alguna evidencia real de que estas estructuras se presenten. Ello da idea, por un lado de lo difícil que es el problema y por otro lado, la investigación y la caracterización del flujo sigue abierta e incompleta.

#### **6.4 ESTRUCTURAS DE VORTICIDAD OBTENIDAS CON APROXIMACIÓN ESTADÍSTICA**

El estudio de las estructuras de vorticidad, utilizando un método estadístico, puede facilitar el análisis del potencial de los vórtices de horquilla y otros vórtices que no han sido tan estudiados con suficiente detalle, como posibles fuentes de características de flujo en la región de pared de capas límite turbulentas. El presente estudio, que se relaciona con los vórtices y los patrones de flujo que estos inducen, es un intento por contribuir a la caracterización de estas estructuras.

En resumen, el conocimiento sobre las estructuras turbulentas generadas por el flujo sobre obstáculos o protuberancias es muy limitado, consistiendo principalmente de algunas observaciones cualitativas y alguna información relativa a las velocidades. Los detalles de la generación, evolución e interpretación de los diferentes vórtices en 3D son escasos en la literatura.

Para comprender el comportamiento de los vórtices, en este trabajo se han realizado algunas actividades con suficiente detalle, como son:

- Detallar las características de los vórtices generados no sólo en la estela del obstáculo cúbico, sino también los que se producen alrededor de éste y en todo el dominio de flujo.
- Examinar algunas de las estructuras secundarias que los vórtices de horquilla generan.
- Ilustrar las semejanzas entre los patrones de flujo observados en éste y de otros estudios semejantes, ya sean éstos experimentales o numéricos.

La presentación de resultados se hará de la siguiente manera, ya que las estructuras más importantes se desarrollan casi en el fondo del canal, al centro del mismo y aproximadamente hasta la altura del obstáculo, se describe cada patrón de flujo observado desde el fondo hasta poco más allá de la altura de este último, es decir, por niveles. Se empezará por mostrar las estructuras turbulentas que se desarrollan al centro del obstáculo, enseguida se presentarán integradas junto a las estructuras turbulentas que se forman a los lados del obstáculo correspondientes al mismo nivel, este conjunto de estructuras se presentan dibujadas como líneas de volumen, es decir, como líneas en 3D; después se muestran cortes bidimensionales del flujo en los lugares más importantes del dominio y al final, se hace una descripción de las estructuras turbulentas más importantes discutiendo su semejanza con estructuras turbulentas plenamente identificadas en la bibliografía.

## 6.5 DISCUSION DE RESULTADOS

### 6.5.1 GRAFICAS DE VORTICIDAD AL CENTRO DEL DOMINIO, EN VOLUMEN

#### ORDEN DE LA PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

En esta sección se presenta la interpretación de los resultados obtenidos, en función de la información recabada en capítulos anteriores. Las gráficas del vector vorticidad en líneas de volumen, se presentan desde la figura 6.18 hasta la figura 6.112. Ahora bien, estas figuras están divididas en dos partes, dado que las estructuras vorticosas más importantes en este estudio se encuentran en el fondo y al centro del canal en casi todo el dominio, la primer parte consta de figuras que muestran dichas estructuras donde el obstáculo tiene mucha influencia en la formación de éstas y en donde es posible ver con más claridad el origen y evolución de las mismas, es decir, en el centro del dominio (figuras 6.18 a 6.75), la segunda parte muestra las estructuras de vorticidad que se desarrollan no sólo en el centro del dominio si no también a los lados y en toda la profundidad (figuras 6.76 a 6.112). Las gráficas anteriores captan el fenómeno de rotación del flujo a un tiempo dado, y la evolución que presentan, se lleva a cabo en el espacio. En un estudio posterior se analizarán dichos resultados para diferentes tiempos.

Dado que el vórtice par y las estructuras turbulentas que hacen su aparición al mismo tiempo que éste se alimentan del flujo separado, se empezará por explicar brevemente dicho fenómeno para tener una visión más amplia del origen, mantenimiento y evolución de las estructuras turbulentas en el fondo de un canal.

Debido a que en este experimento numérico se consideró a la superficie libre sin variaciones, es decir, libre de perturbaciones y por ende horizontal en cualquier tiempo, implícitamente se supuso entonces, que deberían existir variaciones de presión en el flujo en todo el dominio. La consecuencia inmediata de las variaciones de presión, es que estas afectan enormemente el comportamiento del flujo, éste se explicará en las líneas siguientes.

En casi todos los casos en los que tiene lugar el flujo alrededor de un cuerpo sólido, la capa límite se separa de la superficie hacia la parte posterior del cuerpo (figuras 6.129 - 6.134), ello se debe a que la presión aumenta, y por tanto, la fuerza neta de presión sobre un elemento en la capa límite, se opone al flujo hacia delante. Aunque el gradiente de presiones ( $\partial P / \partial x_1$ ), tiene el mismo valor a través de la sección longitudinal de la capa límite su efecto se hace más notable en el fluido cercano al fondo o a la pared. Esto se debe a que esa región el fluido tiene un momentum más bajo que el fluido más alejado de la misma, y por lo tanto, cuando su momentum se reduce aún más por la fuerza neta de presión este tiende a llegar a un estado de reposo, por lo que el gradiente de velocidades se hace igual a cero y se denomina a su localización como punto de separación. Sin embargo, a poca distancia aguas abajo, el flujo cercano a la pared se invierte. En esa etapa, el fluido ya incapaz de seguir el contorno del fondo se separa de éste. Esta separación antes de que alcance el final del fondo

recibe el nombre de *separación* y empieza en el *punto de separación*. La separación tiene varias causas, entre las más importantes están la reducción de velocidad en la capa límite combinada con un gradiente de presión positivo (gradiente de presión adverso, ya que se opone al flujo). Como consecuencia de esto, la separación sólo puede ocurrir cuando existe un gradiente de presión adverso. Por ejemplo, bajo un gradiente de presión cero o negativo, el flujo en una placa plana no se separará antes de alcanzar el extremo de ésta, no importa cuan larga sea.

La línea de velocidad cero que divide a los flujos hacia delante e inverso, deja a la superficie en el punto de separación, y se le conoce como *línea de corriente de separación*. En lo que se refiere a la separación del flujo en el experimento numérico llevado a cabo, conviene ver las figuras 6.129 a 6.134 las cuales corresponden al campo de velocidades, en estas se puede localizar de manera clara la línea de corriente de separación (línea etiquetada con la letra S, en la figura 6.123) y las zonas de recirculación, aunque debido a la longitud del dominio en este estudio, no es posible conocer la longitud de recirculación o de religue del flujo, en la que el perfil de flujo casi restablece su forma original.

La separación ocurre tanto en capas límite laminares como en turbulentas, y por las mismas causas, sin embargo, las primeras son más propensas a separarse que las segundas. Una capa turbulenta puede subsistir bajo un gradiente de presión adverso por cierta distancia antes de separarse. No obstante, cuanto mayor sea la intensidad del gradiente de presión adverso, cuanto más rápido aparecerá la separación. Como resultado del flujo inverso, se forman grandes remolinos irregulares en los cuales se disipa una gran cantidad de energía, esto se puede constatar en las figuras 6.76 - 6.95, en las que es posible ver el desarrollo de remolinos en la parte posterior del obstáculo, alineados principalmente al centro de éste último como una consecuencia de la simetría propuesta en este estudio. Esta simetría resultante confirma de alguna manera que los resultados obtenidos son correctos.

La capa límite separada tiende a enrollarse en el flujo inverso, y la región de flujo perturbada por lo general, se extiende a cierta distancia. Ya que la energía de los remolinos se disipa como calor, la presión corriente abajo permanece aproximadamente igual a la existente en el punto de separación, esta región de movimientos de remolinos se conoce por lo general, como *estela de remolinos*.

El patrón de la estela depende del número de Reynolds del flujo. En el caso del cual se ocupa este estudio, el número de Reynolds es de aproximadamente 14000, por lo que se forman dos remolinos que giran en direcciones opuestas, manteniendo su energía por el flujo procedente de la capa límite separada. A este número de Reynolds los remolinos se alargan y se vuelven inestables, es decir, los remolinos se desprenden alternadamente de la región posterior del obstáculo. En las figuras 6.117 - 6.122, se muestra una secuencia gráfica de los vórtices opuestos obtenidos en la presente

simulación numérica. Cabe aclarar que estas gráficas corresponden a un tiempo dado, cuando se ha alcanzado la convergencia de las ecuaciones de movimiento, por lo que no es posible observar la alternancia de vórtices, sin embargo, se pretende llevar a cabo dicho estudio a posteriori. La anchura de la estela depende de las posiciones de separación; en una capa límite turbulenta la separación ocurre más hacia la parte posterior del obstáculo y por tanto, la estela de remolinos es más angosta.

En particular, la formación de una estela de fluido perturbado corriente abajo, en la cual la presión es casi constante, altera radicalmente el patrón de flujo. Entonces, el límite efectivo del flujo no es ya el fondo del canal, sino una forma desconocida que incluye la zona de separación. Esto se hace notable de manera significativa en la parte derecha de las figuras 6.76 - 6.95.

### ANÁLISIS Y RELACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS DE VORTICIDAD

Detallando un poco más, en las gráficas 6.18 a 6.22 se pueden apreciar las estructuras turbulentas que se desarrollan en el fondo del canal, a una profundidad de 0.0125 m. En la gráfica 6.18, se ve claramente la formación del vórtice de pie en la parte anterior del obstáculo, es decir, el vórtice B que parece ser un núcleo sobre el cual giran las líneas de corriente, este núcleo da origen a C, mismo que en la figura 6.20 se ve como la recirculación más baja en la parte anterior del obstáculo. Una de las estructuras más importantes halladas en este estudio, lo constituye el vórtice par (Figura 6.18, región O). Es sorprendente, porque este tipo de vórtices se reporta en resultados de simulaciones en las que se utilizan técnicas LES o DNS (Mason y Morton, 1986; Werner y Wengle, 1992; Ferziger y Perić, 1996). Más sorprendente aún, es el hecho de que esta figura revela como origen de lo que parece ser un vórtice de horquilla a los vórtices opuestos. A ese respecto ya fue apuntado en el capítulo 2, que observaciones minuciosas de las estelas producidas por obstáculos muestran la existencia de más de un vórtice par (Gregory y Walker, 1956) y que en la mayoría de los casos las estelas contienen más de un vórtice par anidado que alternan su sentido de rotación, en este caso en particular tales observaciones se confirman ya que como se puede observar en la figura 6.18 existe un vórtice par, pero lo mejor es que si se observa la figura 6.117, se podrá constatar que efectivamente existe otro vórtice par anidado en el fondo, pero eso no es todo, observando la figura 6.125, se notan anidados en el dominio del flujo, claramente un vórtice par en el fondo y un vórtice par muy cerca de la superficie libre, en lo que casi se podría denominar *equilibrio vorticial*.

C.R. Smith (1996) comenta que aunque se sugiere que el vórtice par dominante representa los brazos del vórtice de herradura, una observación cuidadosa sugiere que solamente los vórtices más externos se relacionan a aquéllos aguas arriba. En cuanto a la afirmación anterior, convendría ver la figura 6.43, en la que se nota como el vórtice más externo que se origina del vórtice par de fondo, se relaciona con el vórtice de anillo que se monta en la parte anterior superior del obstáculo, mismo que se hace más intenso a partir de esa relación. La afirmación no termina ahí: Los vórtices internos (y

quizá los más intensos) parecen ser producto de la estela interior y se observan solamente aguas abajo del obstáculo. Respecto a esa afirmación, hay mucho que mostrar e inferir observando las figuras 6.18 a 6.42, en las cuales no sólo se nota que lo que parece ser el vórtice de horquilla señalado como H en éstas, efectivamente tiene su origen en los vórtices opuestos que como ya se mencionó al principio de esta discusión se "alimentan" de la estela producida por el flujo separado. Es deseable remarcar el parecido de las figuras 6.21, 6.26, 6.31, 6.36 y 6.41 con la figura 2.27 y 2.28. Se etiqueta con la letra P la cabeza de dichos vórtices y a sus brazos o ramas con una letra R.

Sin embargo, la afirmación anterior también se confirma en las figuras 6.23, 6.28, 6.33 y 6.38 en el sentido de que los vórtices internos parecen ser producto de la estela interior, ya que como se puede observar, parecen ser las interacciones entre los vórtices opuestos los que dan lugar a otros vórtices anidados dentro del vórtice inicial, tal como se esquematiza en la figura 6.114. El trabajo de C.R. Smith (1996), concuerda con el trabajo de Acarlar y Smith (1987).

Prosiguiendo con el orden numérico de las gráficas, se observa algo muy importante en la parte A, de la gráfica 6.48. De acuerdo con el trabajo de Larousse, Martinuzi y Tropea (1992), y el esquema de un flujo alrededor de un obstáculo cúbico propuesto por ellos mostrado en la figura 6.17, tal observación correspondería a un vórtice plano desarrollado en la parte superior del obstáculo, etiquetado con la letra A en las figuras 6.48 y 6.50, no obstante, esas mismas figuras parecen indicar que tal vórtice se prolonga aguas abajo como se aprecia en las zonas B de las figuras mencionadas. Mas aún, lo anterior se ve mejor en las figuras 6.52, 6.54 y 6.56, en donde tal vórtice se denota como VP.

En las figuras 6.65 - 6.72 y 6.105 - 6.112, se observa el vórtice de superficie libre. Se puede apreciar su evolución de manera más clara y total en la figura 6.74, en la que se nota como los efectos de pared inducen su formación, ya que como se mencionó en el capítulo 2, la energía y momentum en canales abiertos se transporta desde las paredes hacia el centro del canal, cerca de la superficie libre y el momentum se transporta desde la superficie libre hacia el centro de la profundidad, por lo que se origina una zona de recirculación (Nezu y Nakagawa, 1993). Cabe remarcar el hecho de que las condiciones de frontera impuestas en las paredes del canal, las cuales no incluyen el efecto de fricción, propician que el vórtice de superficie sea de magnitud semejante al ancho del canal.

Abundando sobre la figura 6.74, en ésta no sólo se puede apreciar la influencia de las paredes sobre la formación del vórtice de superficie libre, sino también el fenómeno de la velocidad máxima sumergida. En la región marcada con A, parece ser el núcleo del vórtice libre. Según Nezu y Nakagawa (1993), el vórtice de superficie libre siempre desarrolla su par en el fondo, en canales de fondo plano. Debido a que en este trabajo se considera un obstáculo en el fondo del canal, dicho vórtice no se desarrolla en ese lugar, por lo que se puede deducir que es quizá el vórtice de anillo que se localiza en la parte superior del obstáculo (etiquetado con la letra B), su par.

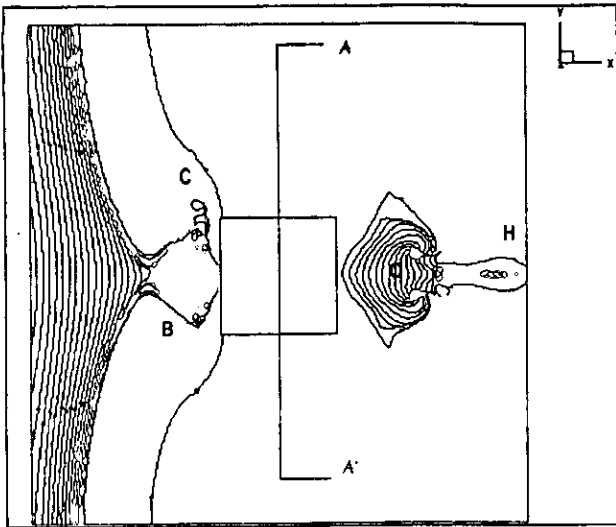
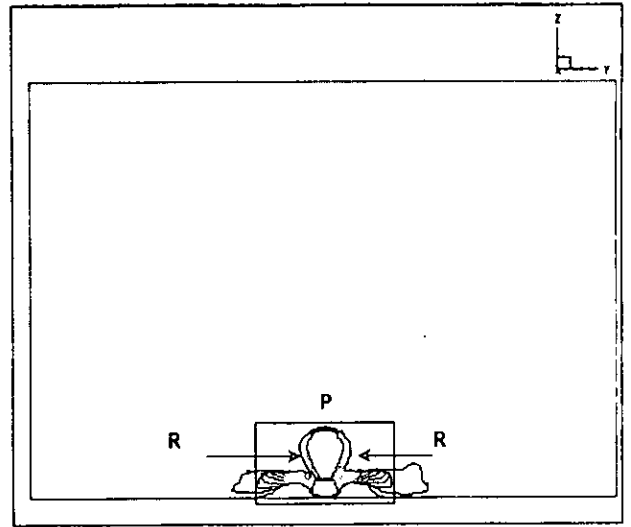


Figura 6.18 Líneas de volumen de Vorticidad en el plano x-y, al centro y fondo del canal, en la dirección y.



Gráfica 6.21 Corte A-A' en el plano x-y de la figura 6.18

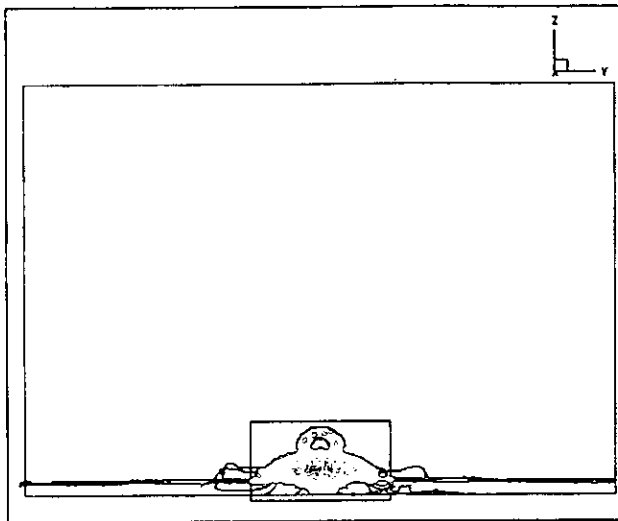
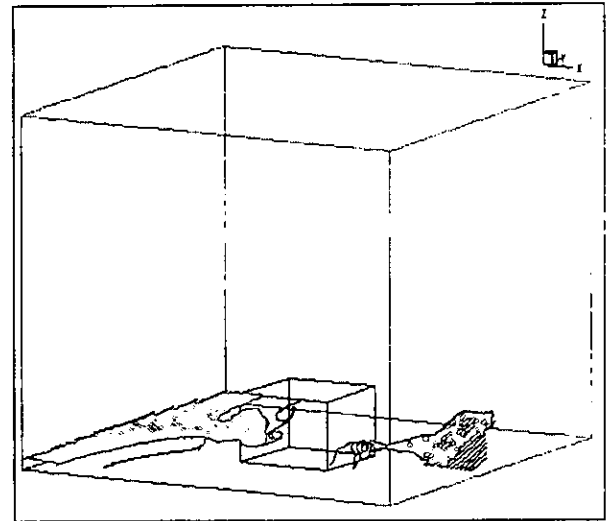


Figura 6.19 Vista frontal de las líneas de volumen de vorticidad descrita en la gráfica 6.18



Gráfica 6.22 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad en el fondo del canal.

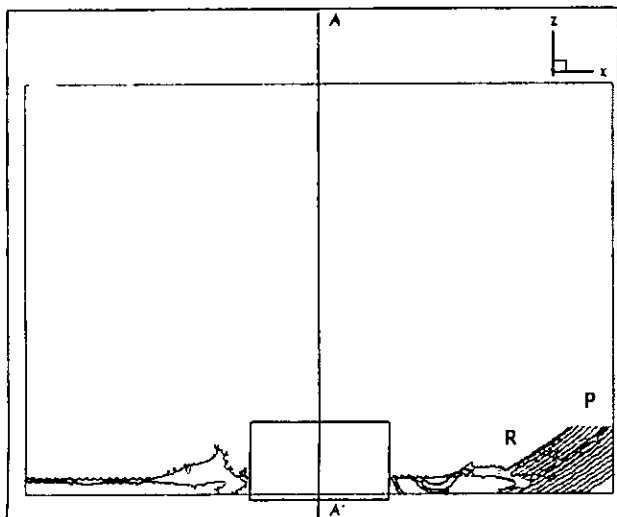
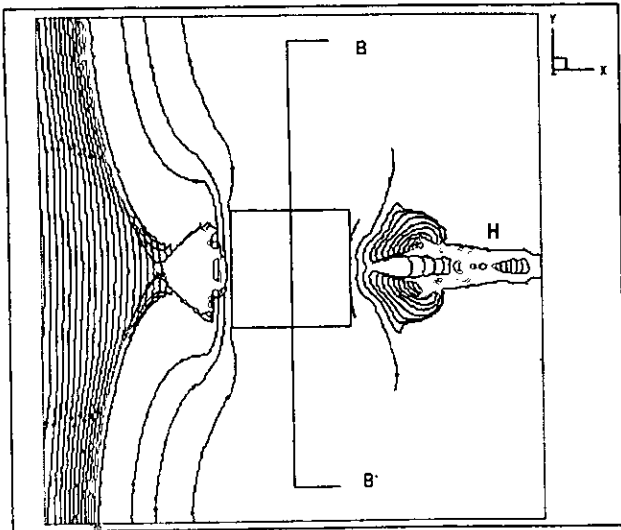


Figura 6.20 Corte longitudinal de la la gráfica 6.18.



Gráfica 6.23 Líneas de volumen de vorticidad en el plano x-y al centro del dominio en y, a 0.075 m. del fondo.

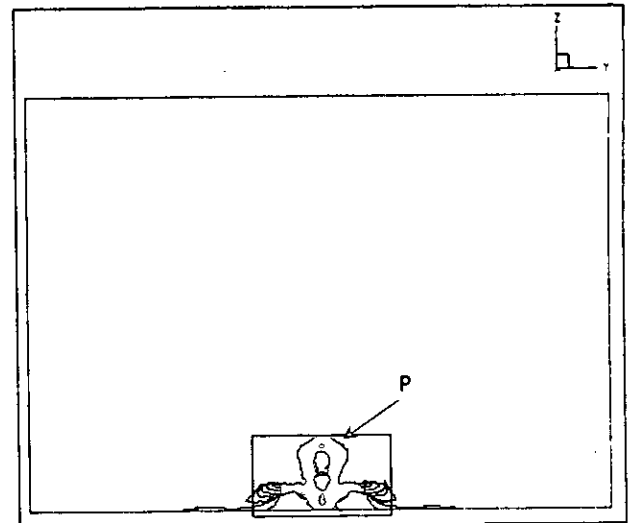


Figura 6.26 Corte B-B' del plano x-y de la gráfica 6.23

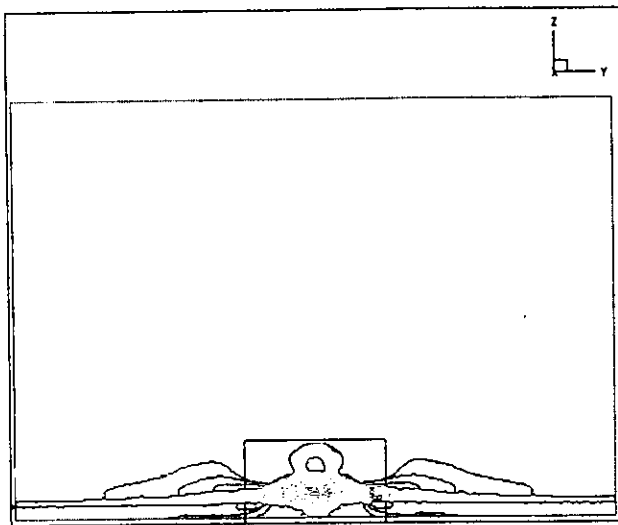


Figura 6.24 Vista frontal de las líneas de vorticidad descrita en la figura. 6.23

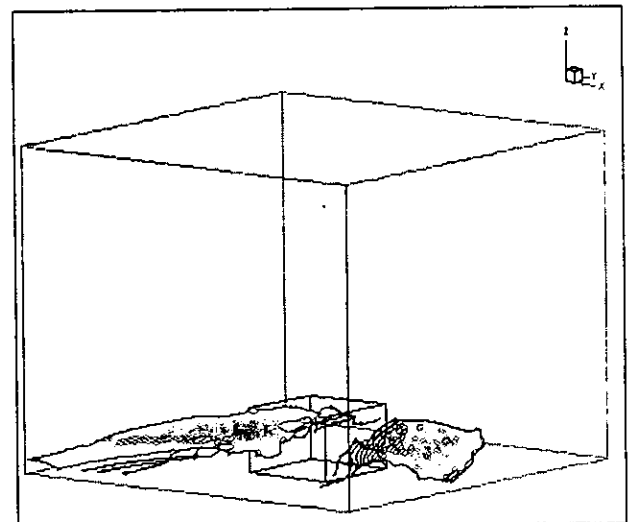


Figura 6.27 Vista general de la vorticidad a 0.075 m. en la dirección z desde el fondo del canal.

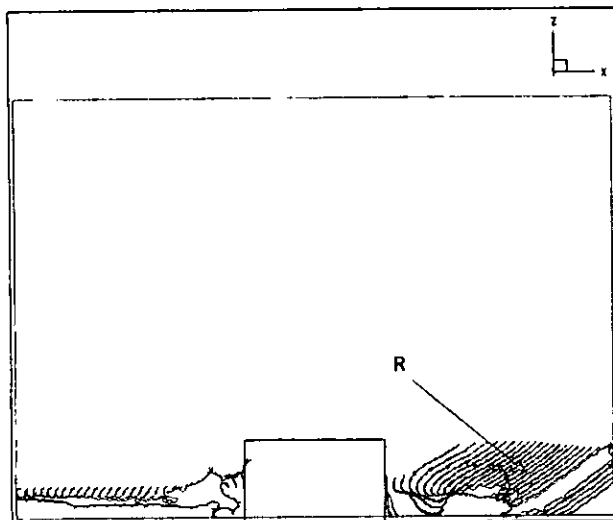


Figura 6.25 Corte longitudinal de la gráfica 6.23

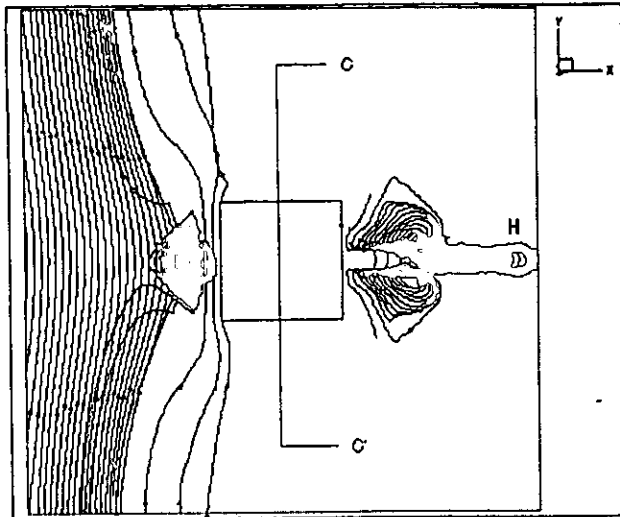


Figura 6.28 Líneas de volumen de la vorticidad en el plano  $x-y$  al centro del dominio en  $y$ , a  $0.0125$  m. sobre el fondo.

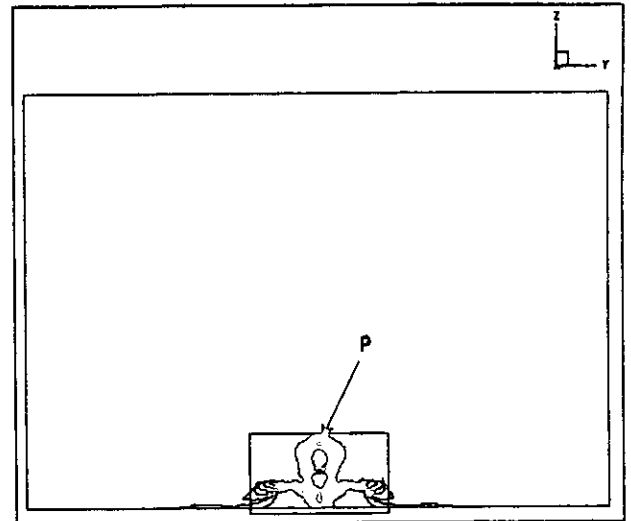


Figura 6.31 Corte C-C' del plano  $x-y$  de la figura 6.28.

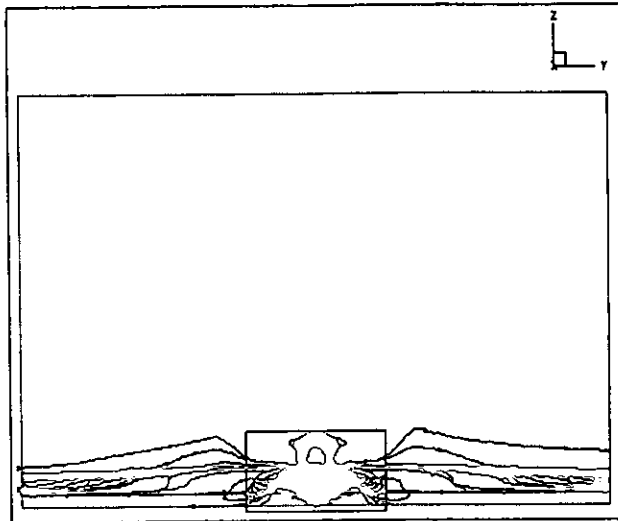
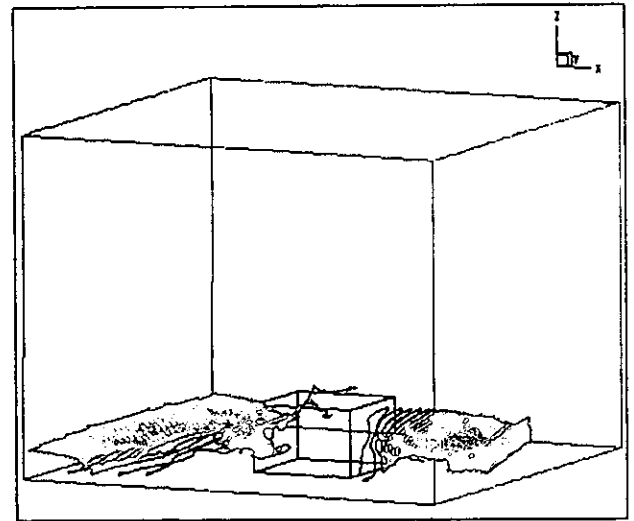


Figura 6.29 Vista frontal de las líneas de volumen de la vorticidad descrita en la gráfica 6.28.



Gráfica 6.32 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a  $0.0125$  m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

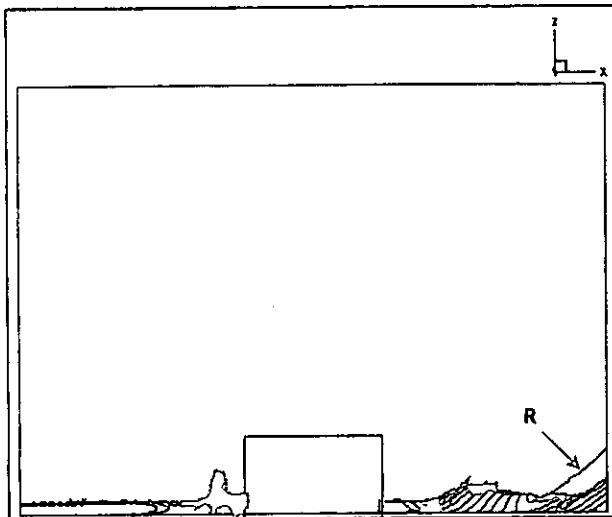


Figura 6.30 Corte longitudinal  $x-z$  de la gráfica 6.28.



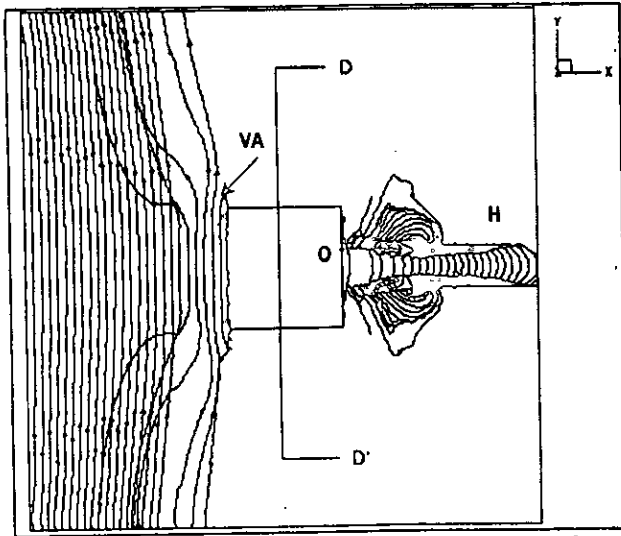


Figura 6.33 Líneas en volumen de vorticidad en el plano  $x-y$  al centro del dominio en  $y$ , a  $0.0175m$ . del fondo.

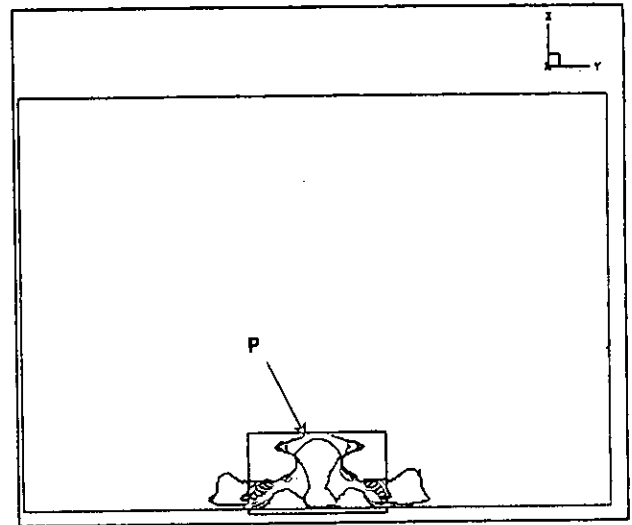


Figura 6.36 Corte  $D-D'$  del plano  $x-y$  de la gráfica 6.33.

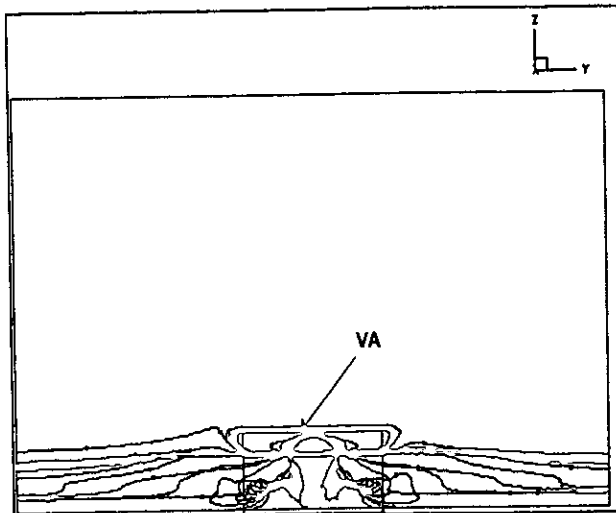


Figura 6.34 Vista frontal de las líneas de vorticidad de la gráfica 6.33.

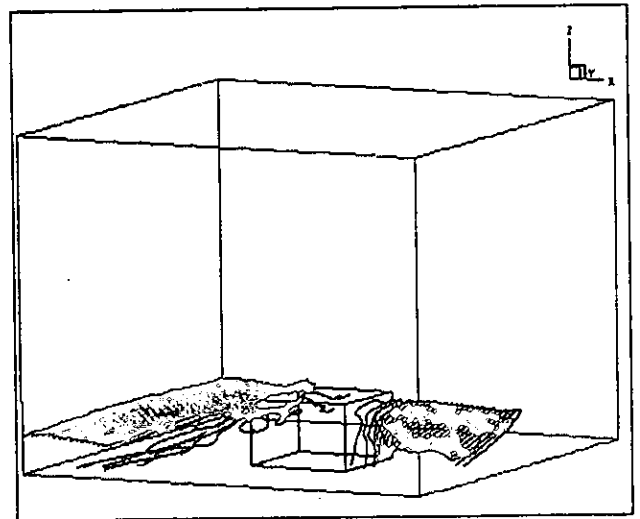


Figura 6.37 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad  $0.0175 m$ . en  $z$ , desde el fondo del canal.

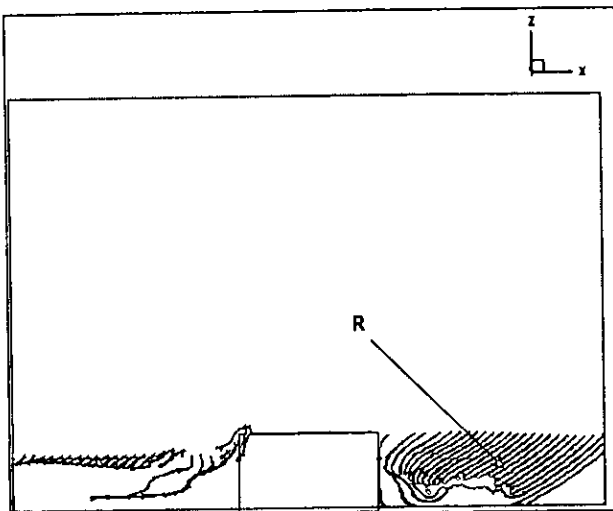


Figura 6.35 Corte longitudinal de la figura 6.34.

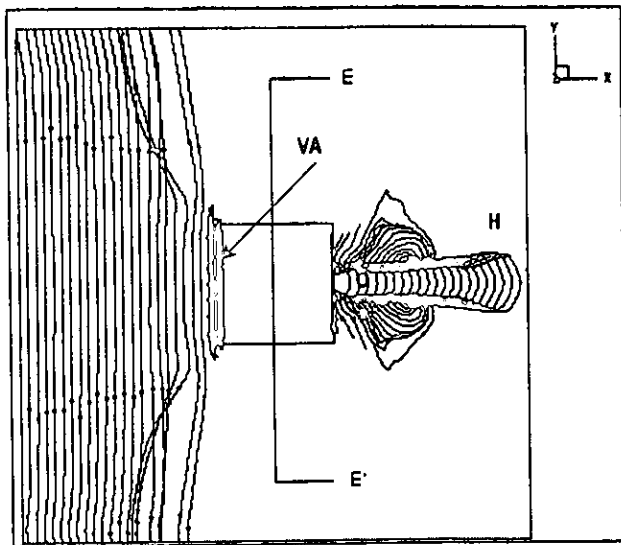


Figura 6.38 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  al centro del dominio en  $y$ , a 0.0225 m. del fondo.

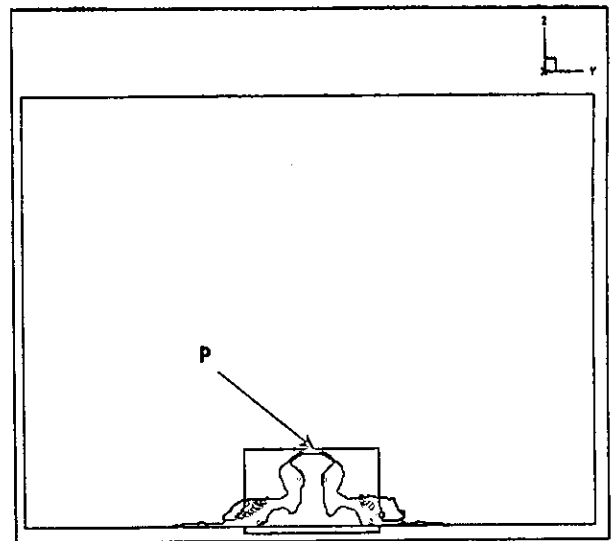


Figura 6.41 Corte  $E-E'$  del plano  $x$ - $y$  de la gráfica 6.38.

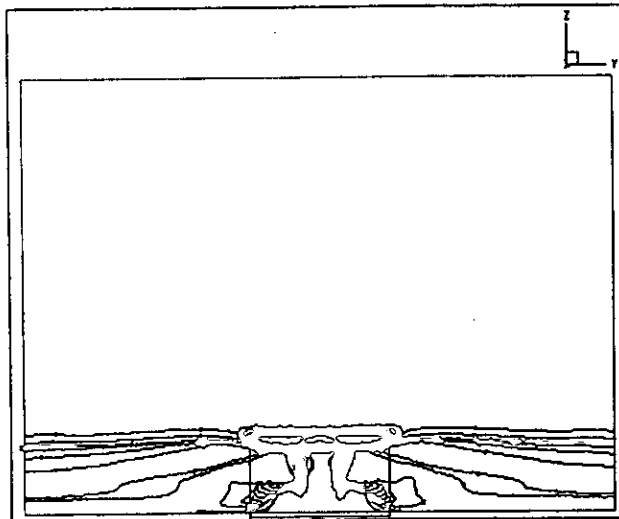


Figura 6.39 Vista frontal de la gráfica 6.38.

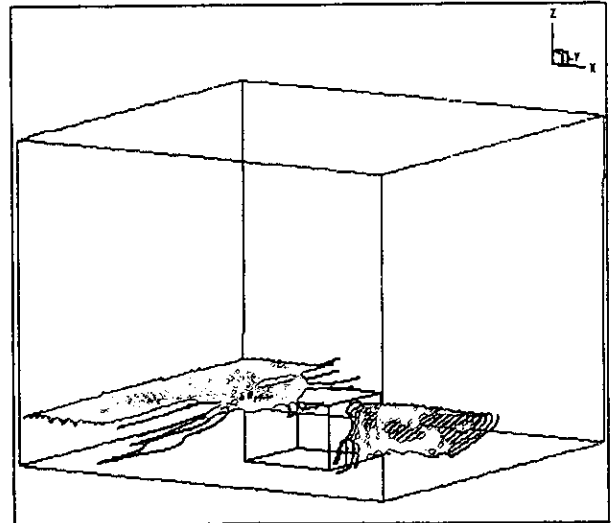


Figura 6.42 Vista general de las líneas de volumen de la vorticidad a 0.0225 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

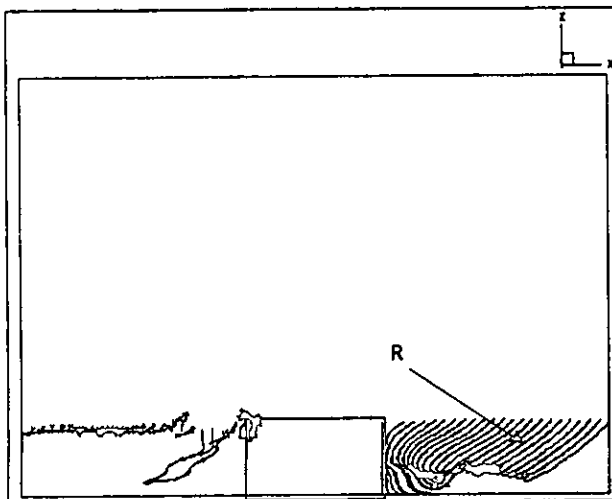


Figura 6.40 Corte longitudinal de la gráfica 6.39.

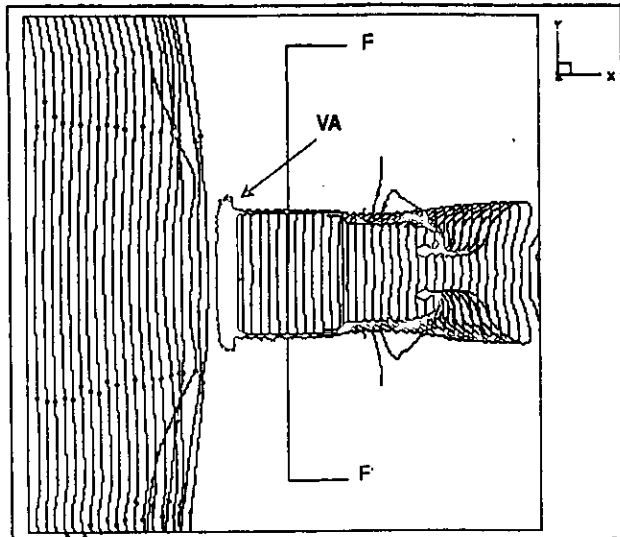


Figura 6.43 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  al centro del dominio en  $y$ , a 0.0275 m. del fondo.

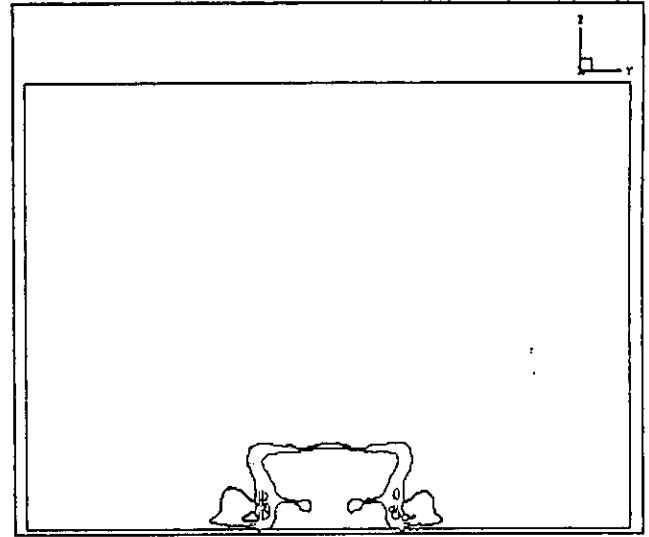


Figura 6.46 Corte F-F del plano  $x$ - $y$  de la gráfica 6.43.

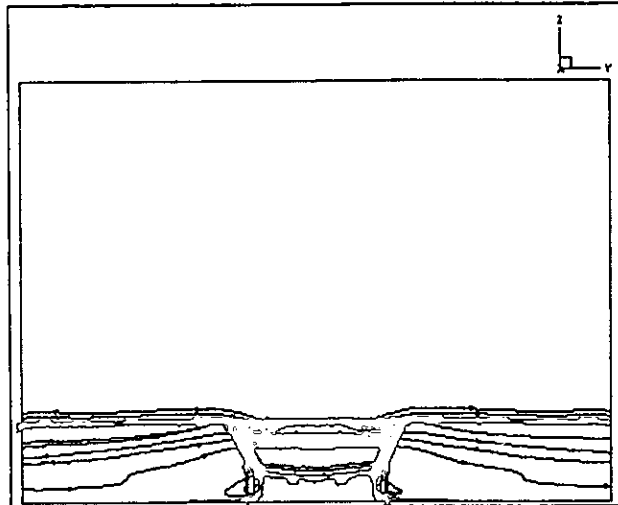


Figura 6.44 Vista frontal de la figura 6.43.

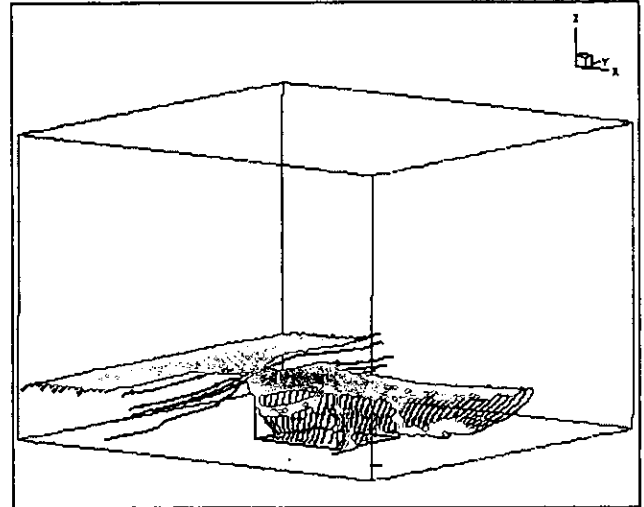


Figura 6.47 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad a 0.0275 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

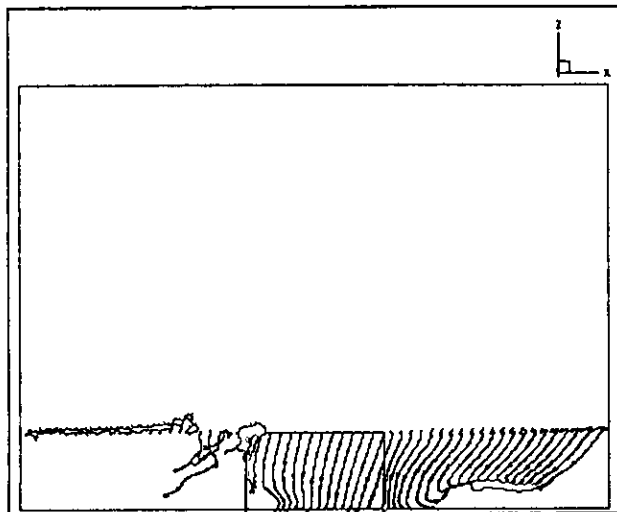


Figura 6.45 Corte longitudinal de la figura 6.43.

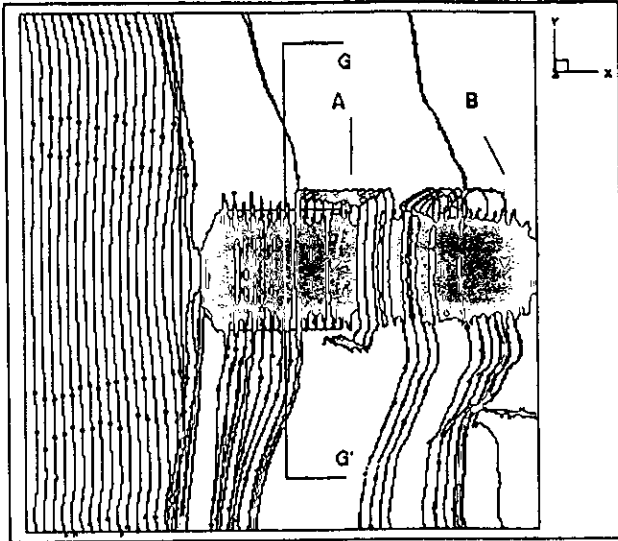


Figura 6.48 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x-y$  al centro del dominio en  $y$ , a 0.0325 m. del fondo.

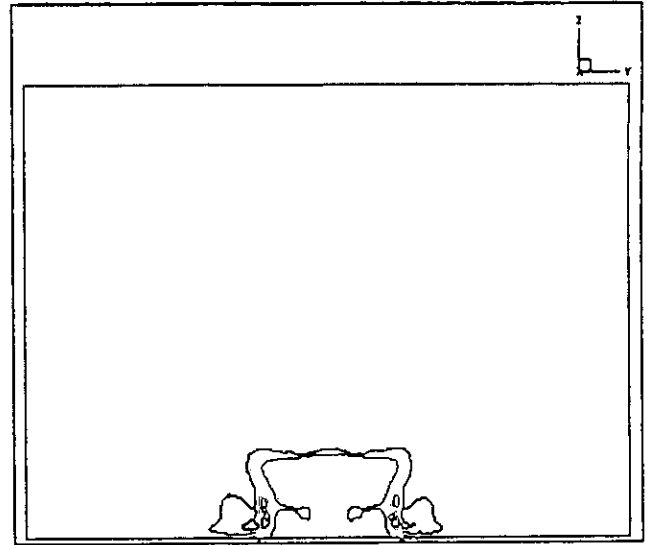


Figura 6.51 Corte  $G-G'$  del plano  $x-y$  de la gráfica 6.48.

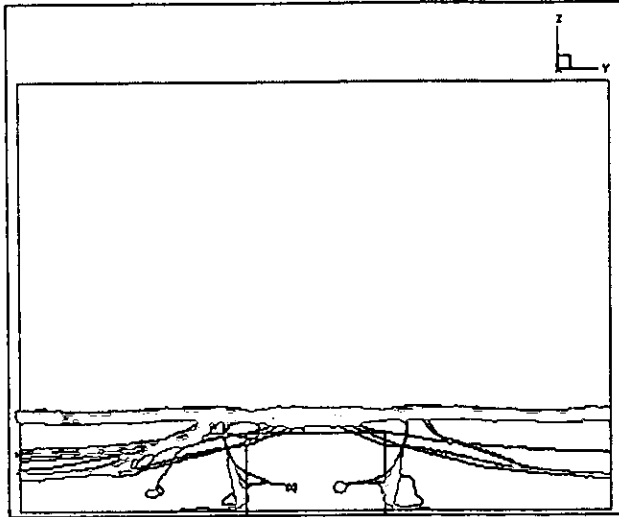


Figura 6.49 Vista frontal de la gráfica 6.48.

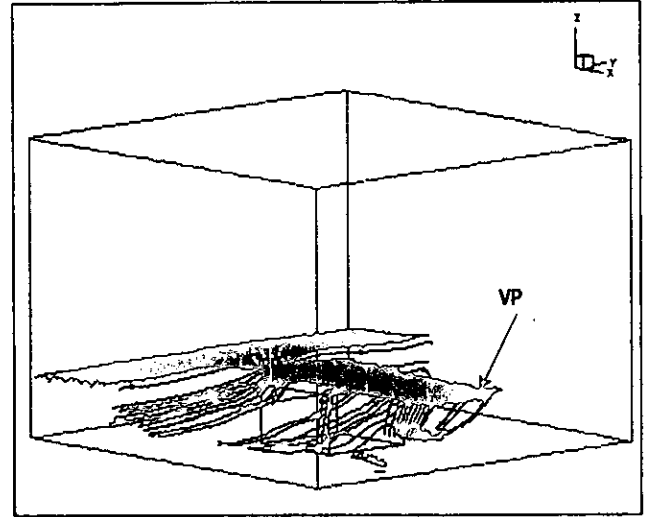


Figura 6.52 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad 0.0325 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

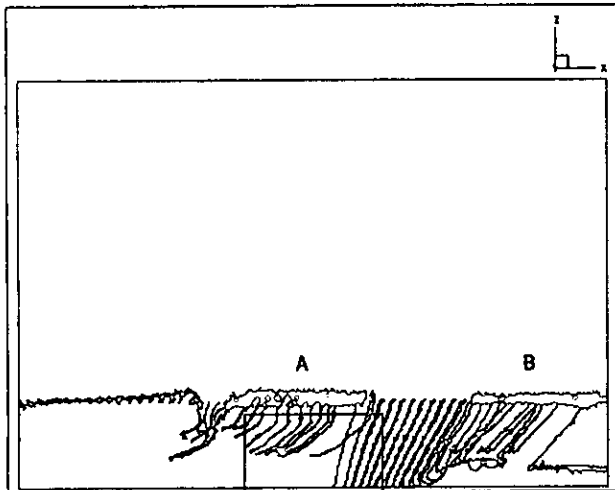


Figura 6.50 Corte longitudinal de la gráfica 6.40.

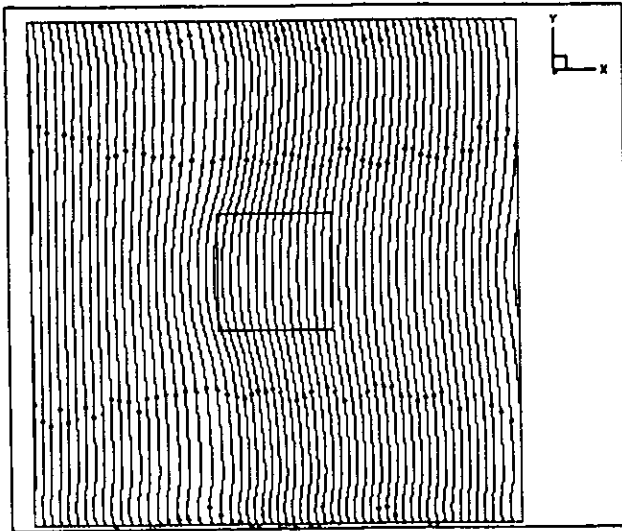


Figura 6.53 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  al centro del dominio en  $y$ , a 0.0375 m. del fondo.

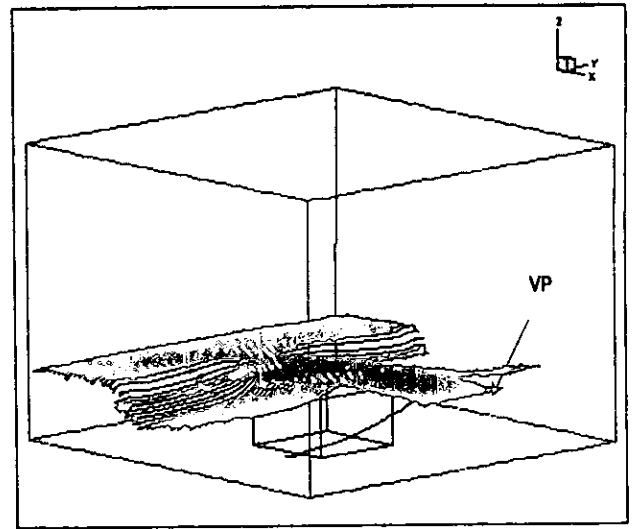


Figura 6.56 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad 0.0375 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

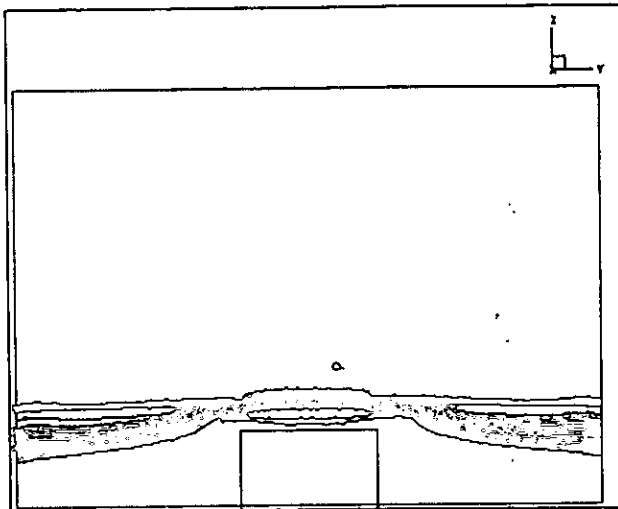


Figura 6.54 Vista frontal de la gráfica 6.53.

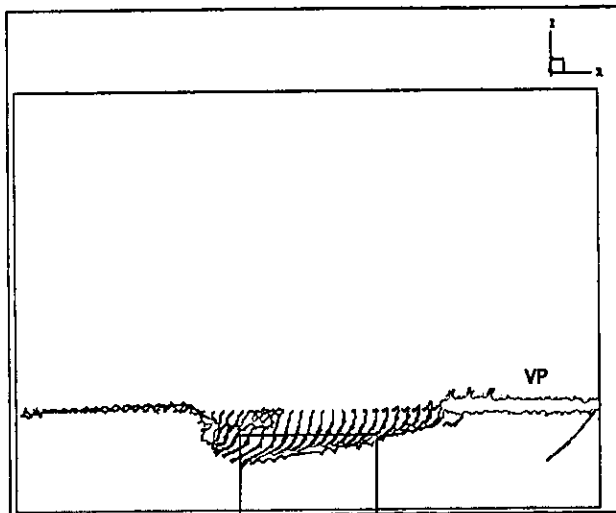


Figura 6.55 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.53.

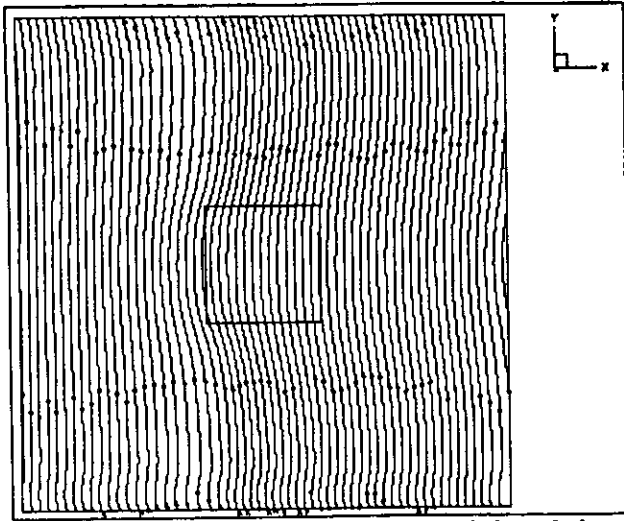
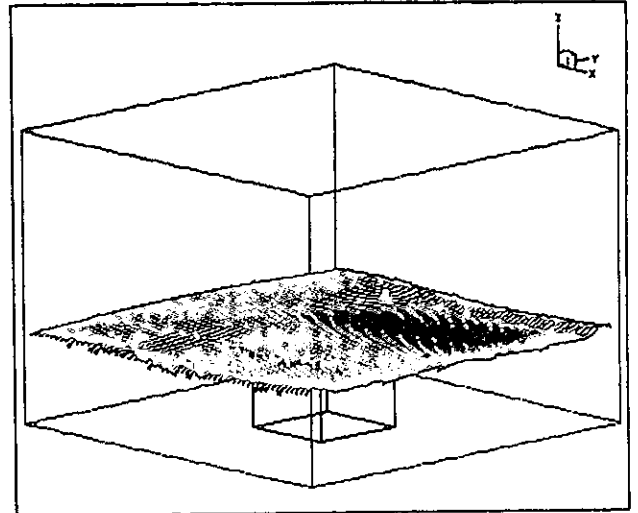


Figura 6.57 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  al centro del dominio en  $y$ , a 0.05275 m. del fondo.



Gráfica 6.60 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad 0.05275 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

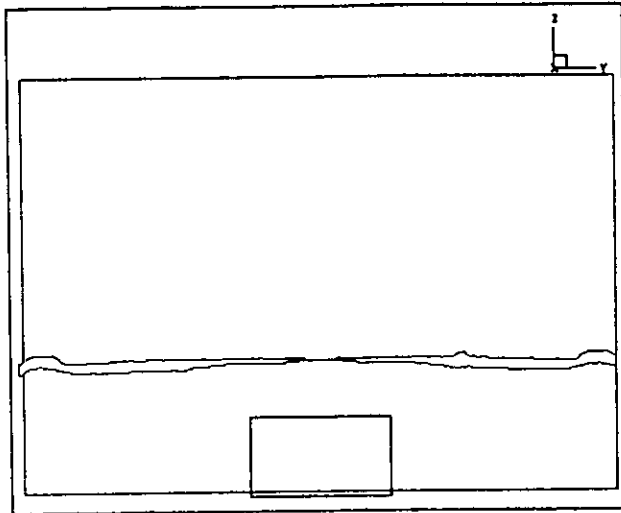


Figura 6.58 Vista frontal de la gráfica 6.57.

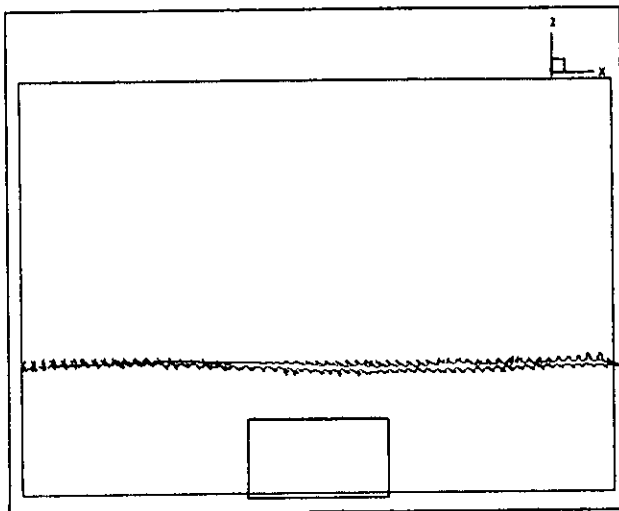


Figura 6.59 Corte longitudinal de la gráfica 6.57.

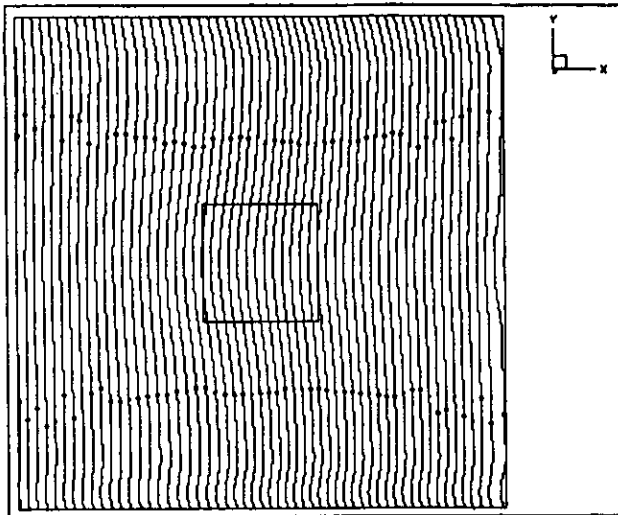


Figura 6.61 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  al centro del dominio en  $y$ , a  $0.08313$  m. del fondo.

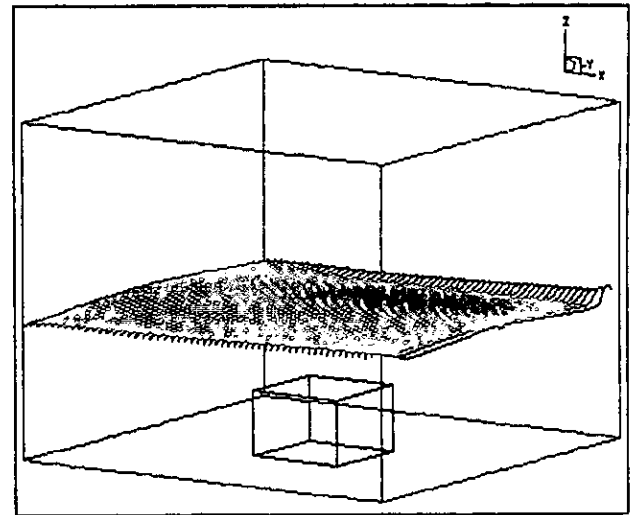


Figura 6.64 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad  $0.08313$  m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

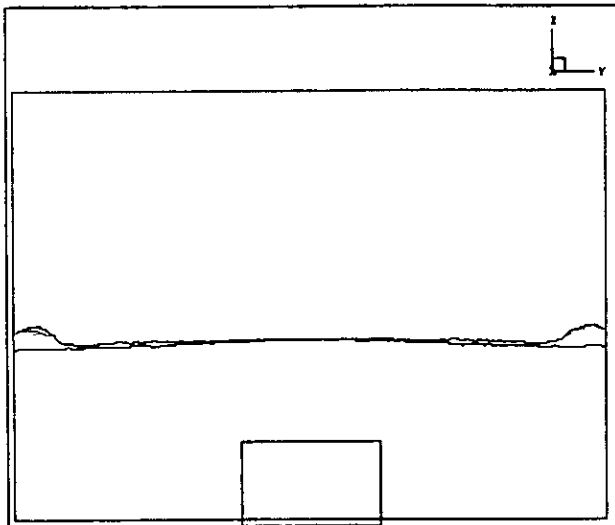


Figura 6.62 Vista frontal de la gráfica 6.61.

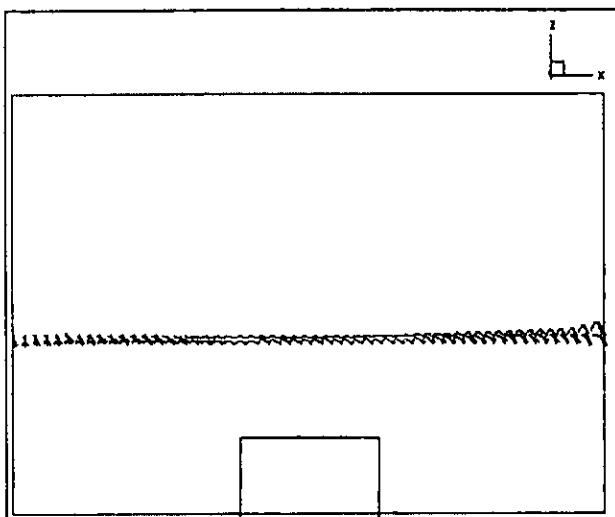


Figura 6.63 Corto longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.61.

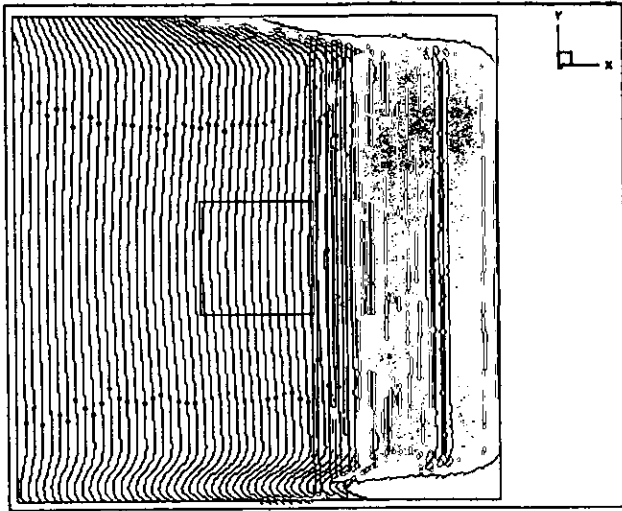


Figura 6.65 Líneas de volumen de la vorticidad en el plano  $x$ - $y$  al centro del dominio en  $y$ , a  $0.1287$  m. del fondo.

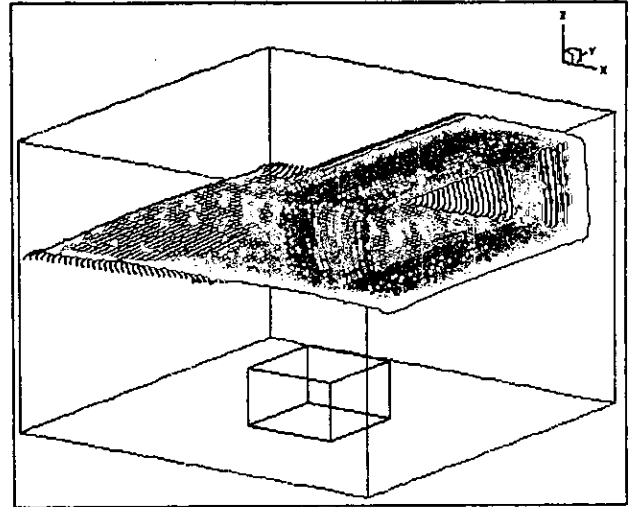


Figura 6.66 Vista general de las líneas de vorticidad  $0.1287$  m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

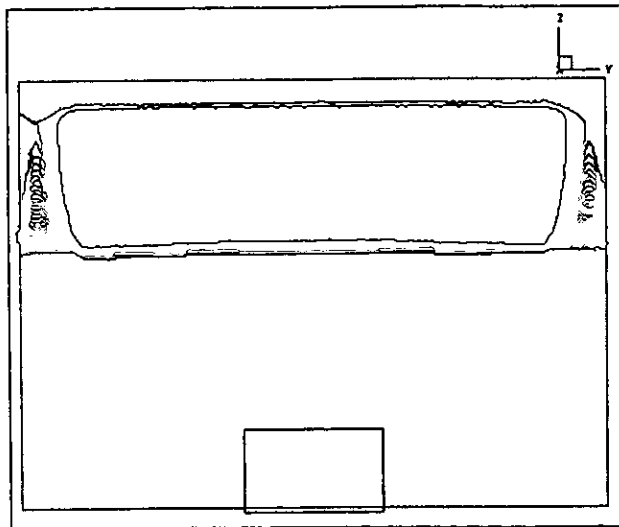


Figura 6.66 Vista frontal de la gráfica 6.65.

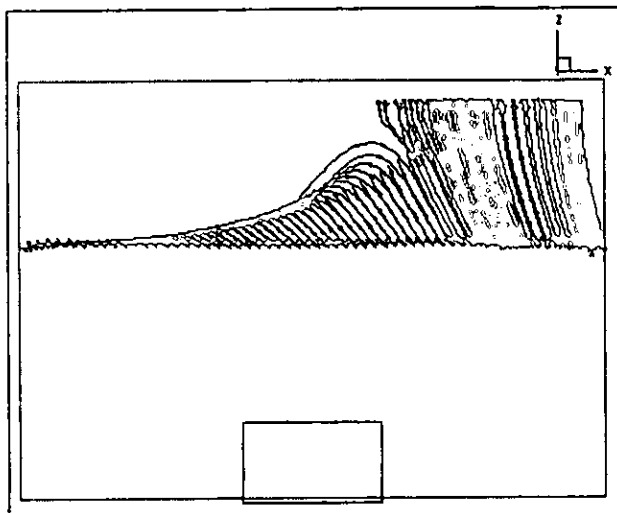


Figura 6.67 Corte longitudinal de la gráfica 6.65.



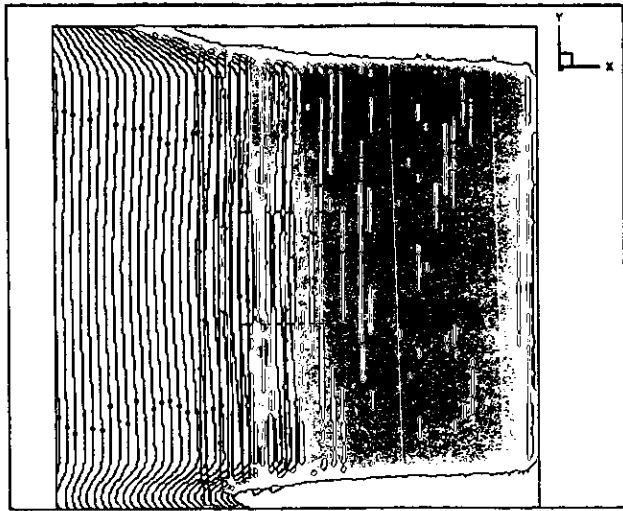


Figura 6.69 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  al centro del dominio en  $y$ , a 0.1378 m. del fondo.

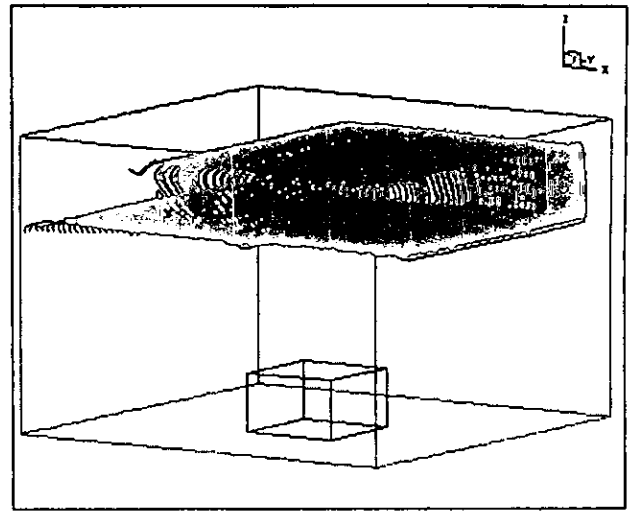


Figura 6.72 Vista general de las líneas en volumen de vorticidad 0.1378 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

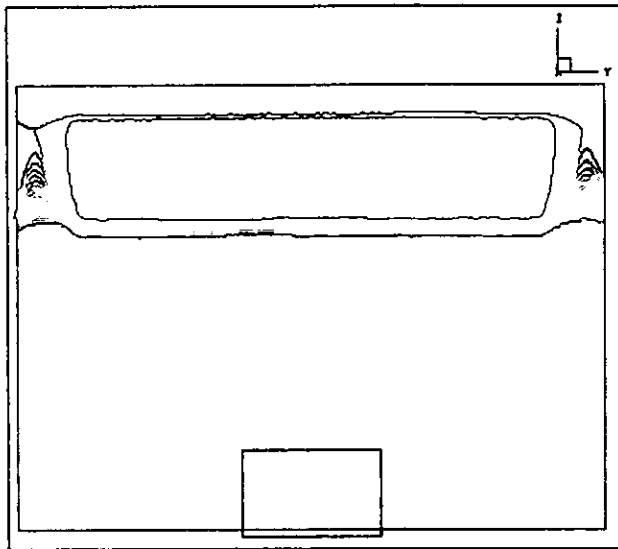


Figura 6.70 Vista frontal de la gráfica 6.69.

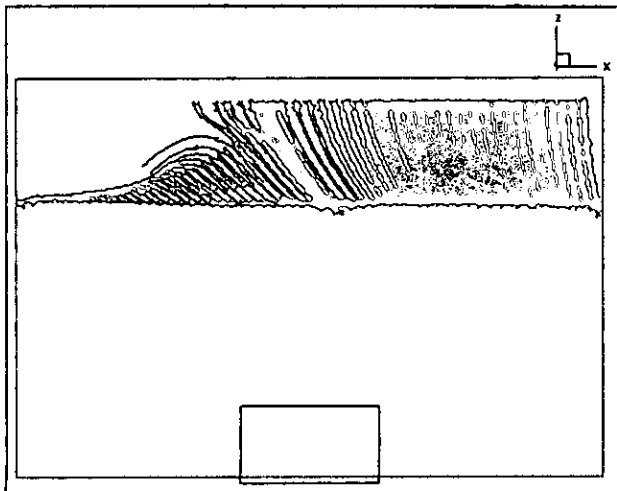


Figura 6.71 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.69.

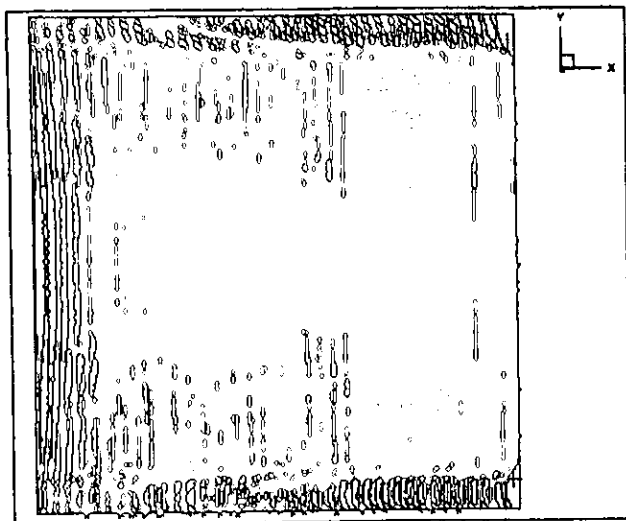


Figura 6.73 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  al centro del dominio en  $y$ , a lo largo de la dirección  $z$ .

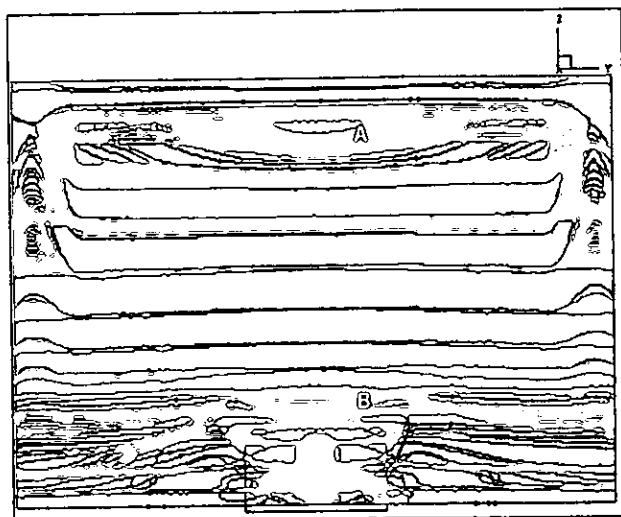


Figura 6.74 Vista frontal de la gráfica 6.73.

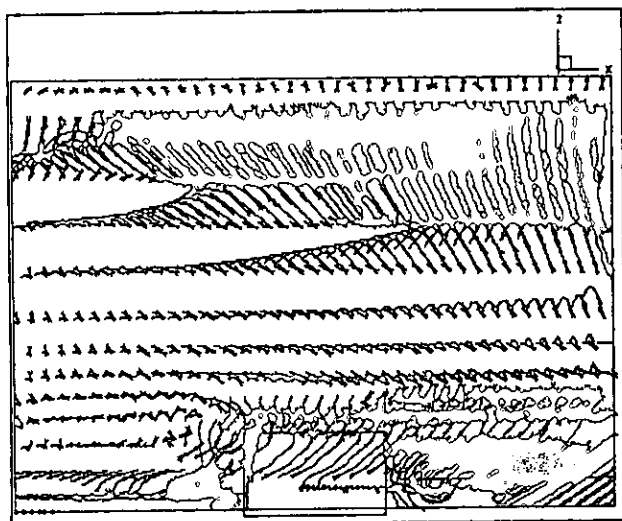


Figura 6.75 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.73.

### 6.5.2 GRÁFICAS DE LINEAS DE VOLUMEN DE VORTICIDAD EN TODO EL DOMINIO TRANSVERSAL.

A partir de la figura 6.76 y hasta la figura 6.112 se presentan gráficas con vorticidad en todo el dominio transversal, es interesante observar una semejanza notable en las figuras 6.76, 6.80, 6.84, 6.88 y 6.92, ya que dichas figuras nos dan idea de lo que se conoce como *hojas de vórtices*.

Es importante mencionar que en las figuras anteriores en los puntos etiquetados como LV se desarrolla lo que se conoce como vórtices de punto. Lo más relevante de estas figuras es que se nota claramente que si en una región los vórtices giran en un sentido, inmediatamente al lado se genera una rotación de signo contrario, es así que en las figuras 6.79, 6.83, 6.87, 6.91 y 6.95, se pueden ver regiones de vorticidad de signos opuestos, como equilibrándose entre ellas.

En la figura 6.76 en la región etiquetada con la letra E, es posible ver claramente el flujo separado que alimenta a los vórtices par y en medio de él, la región que se conoce como la estela de los vórtices par. En las regiones etiquetadas con la letra O se desarrollan dos vórtices de signos opuestos contiguos al vórtice par. Es notable tanto en la figura 6.76 como en la 6.113, la formación de un vórtice en la parte anterior del obstáculo, al parecer se trata del núcleo de un vórtice de anillo, acerca del cual se puede decir que su aparición resulta lógica, ya que al chocar el flujo contra el obstáculo en su parte media, es comprensible que se forme una zona de recirculación. Este vórtice aparece reportado en casi todos los flujos sobre obstáculos, sin embargo, la forma en que aparece en este estudio no se reporta en la bibliografía consultada.

Observando las gráficas 6.76, 6.80, 6.84, 6.88, y 6.92, se nota la evolución de lo que al inicio parecen ser los vórtices de horquilla en un vórtice de tubo, si se le puede llamar así.

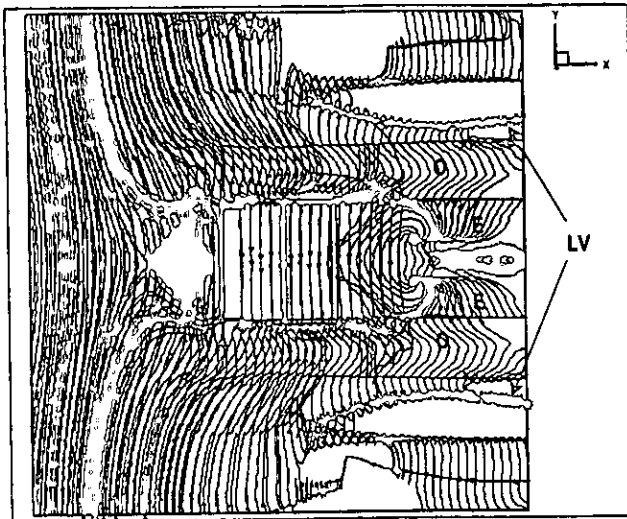


Figura 6.76 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$ , tocando varios puntos en  $y$ , en el fondo del canal.

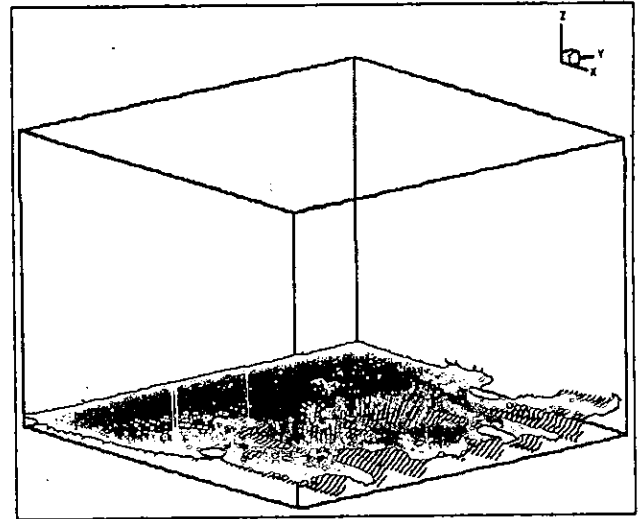


Figura 6.79 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad justo en el fondo del canal.

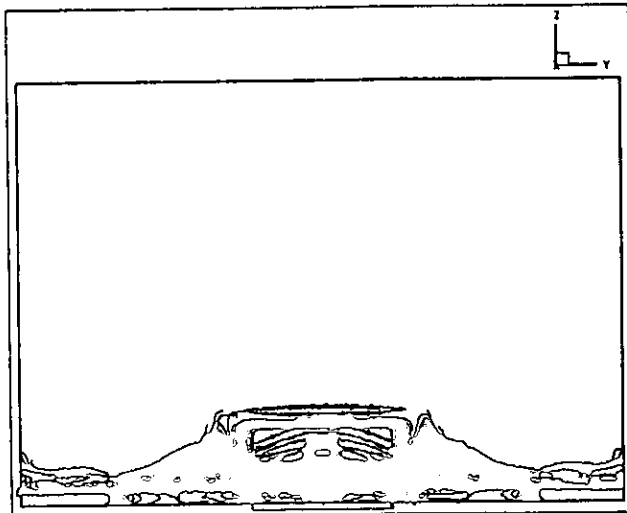


Figura 6.77 Corte  $y$ - $z$  de la gráfica 6.76.

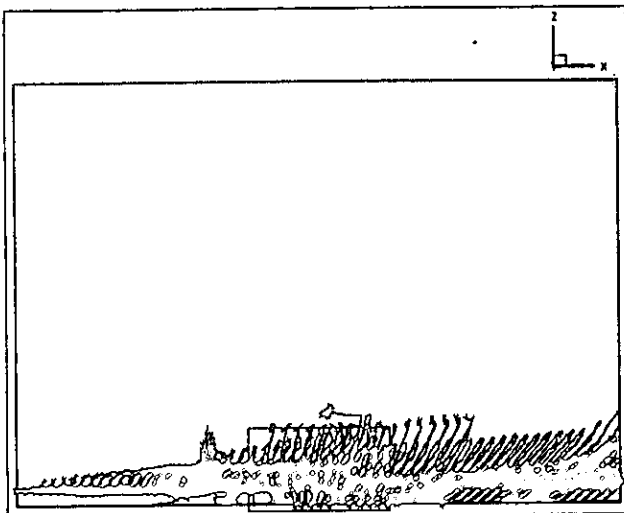


Figura 6.78 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.76.

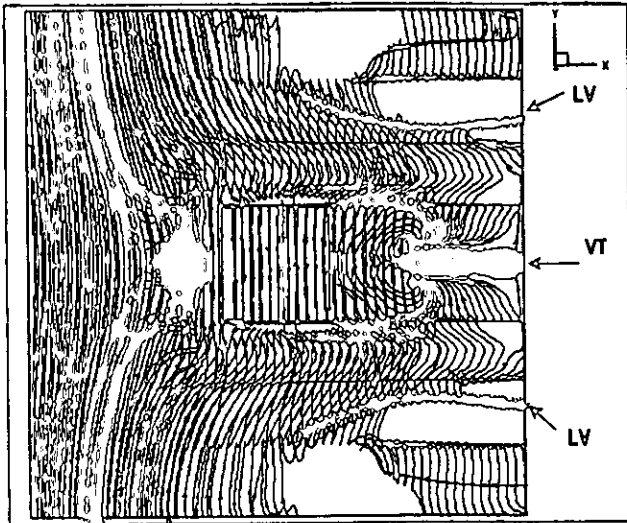


Figura 6.80 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x-y$ , tocando varios puntos en  $y$ , a 0.0075 m. del fondo.

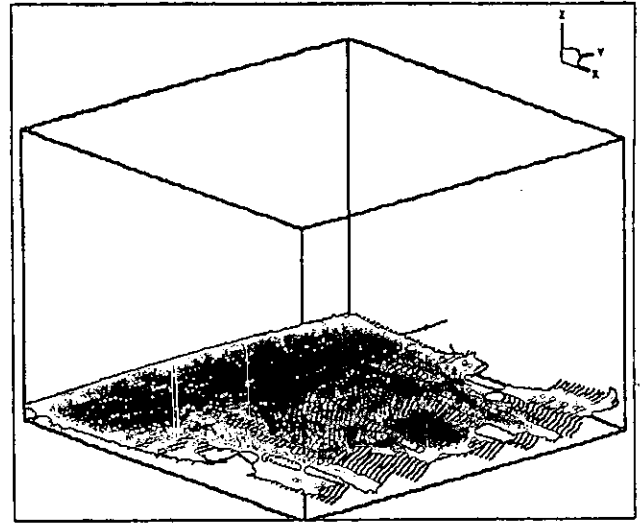


Figura 6.83 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad 0.0075 m. on  $z$ , desde el fondo del canal.

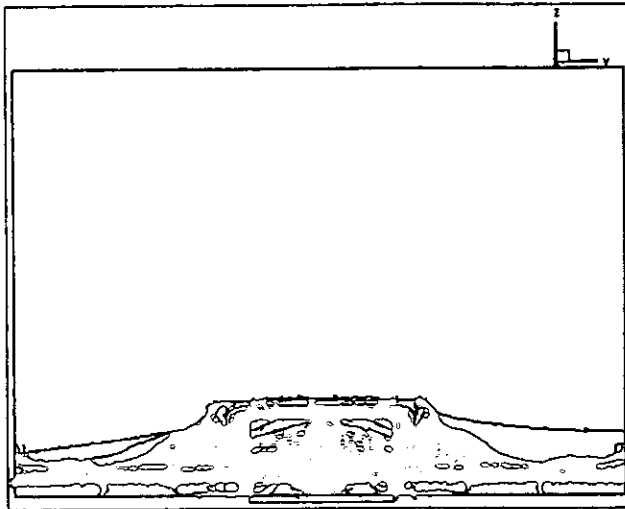


Figura 6.81 Corte  $y-z$  de la vorticidad descrita en la gráfica 6.80.

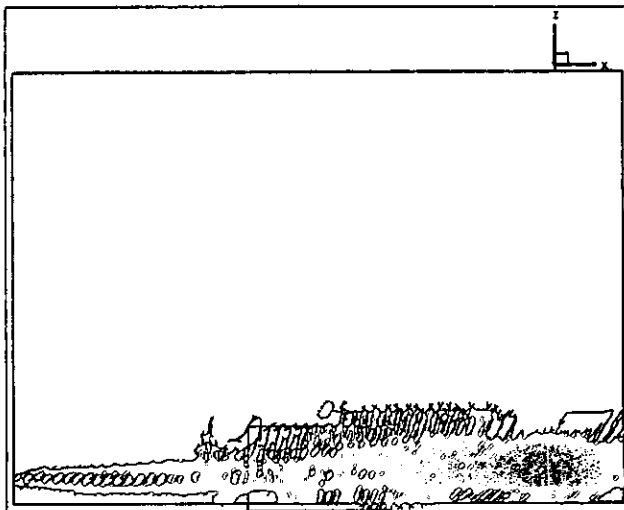


Figura 6.82 Corte longitudinal  $x-z$  de la vorticidad descrita en la gráfica 6.80.

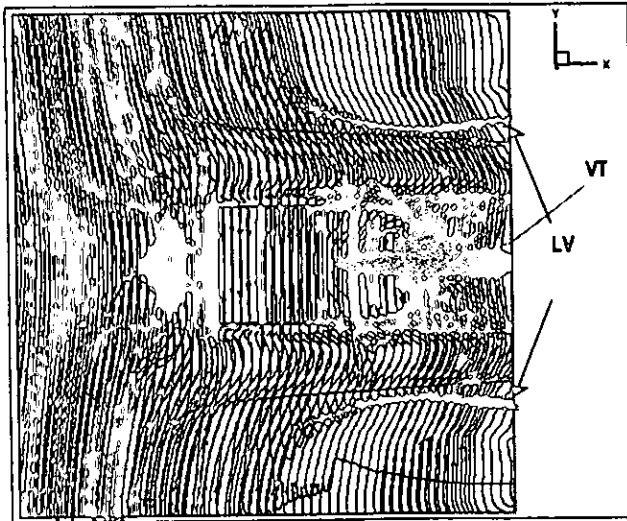


Figura 6.64 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$ , tocando varios puntos en  $y$ , a 0.0125 m. del fondo.

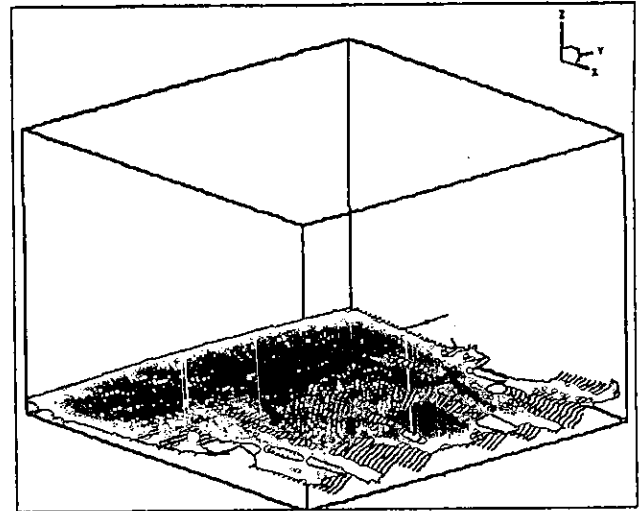


Figura 6.67 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad 0.0125 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

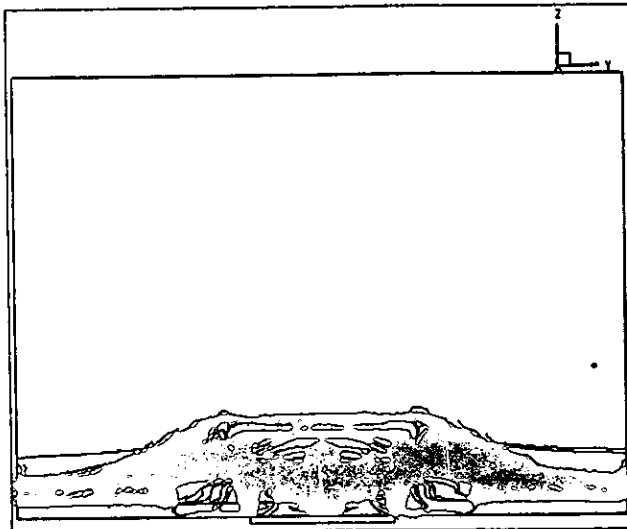


Figura 6.65 Corte  $y$ - $z$  de la gráfica 6.64.

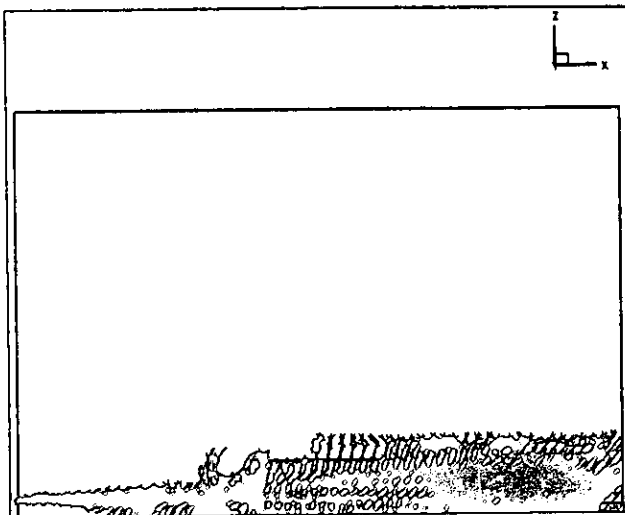


Figura 6.66 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.64.

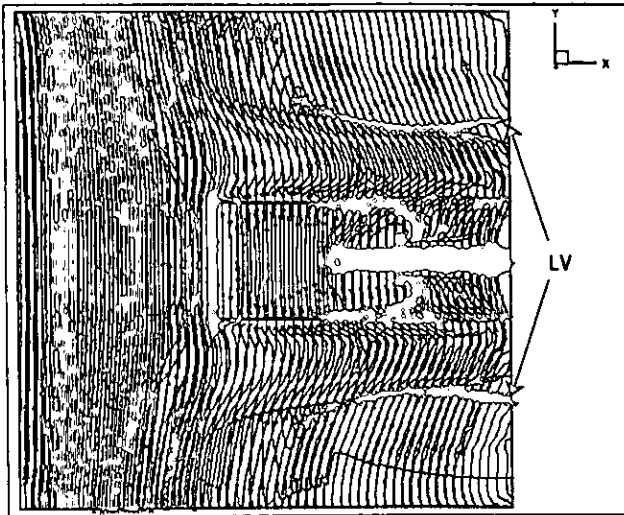


Figura 6.88 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x-y$ , tocando varios puntos en  $y$ , a  $0.0175$  m. del fondo.

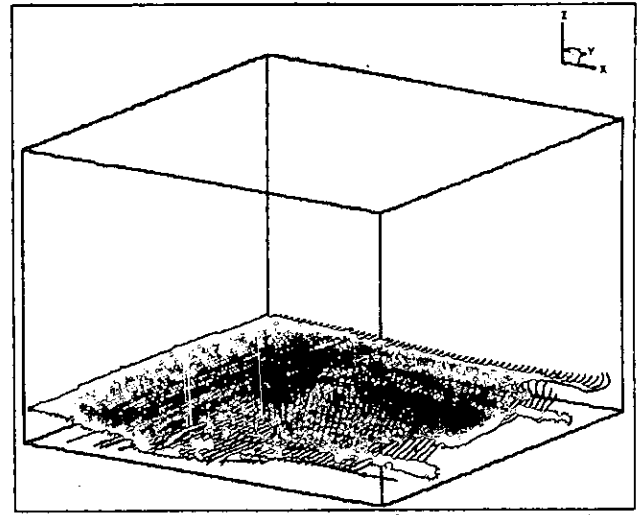


Figura 6.91 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad  $0.0175$  m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

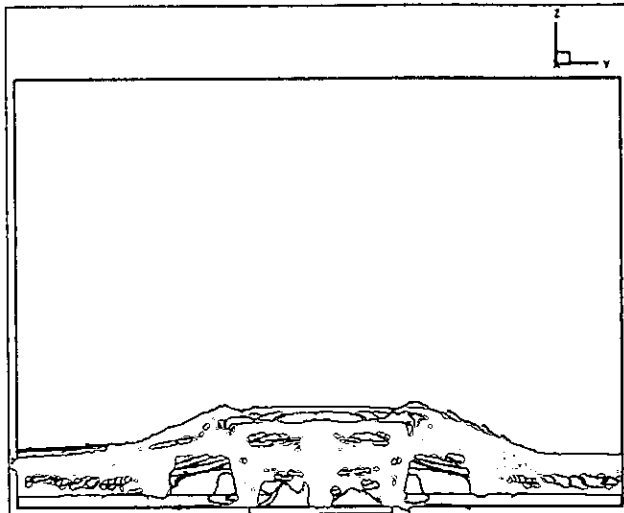


Figura 6.89 Corte  $y-z$  de la gráfica 6.88.

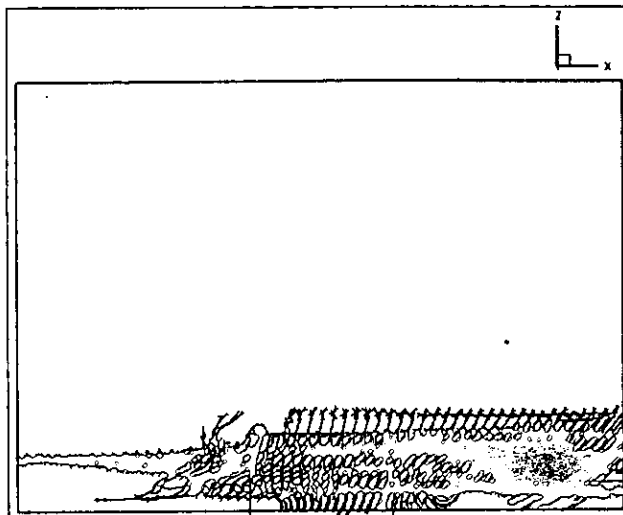


Figura 6.90 Corte longitudinal  $x-z$  de la gráfica 6.88.

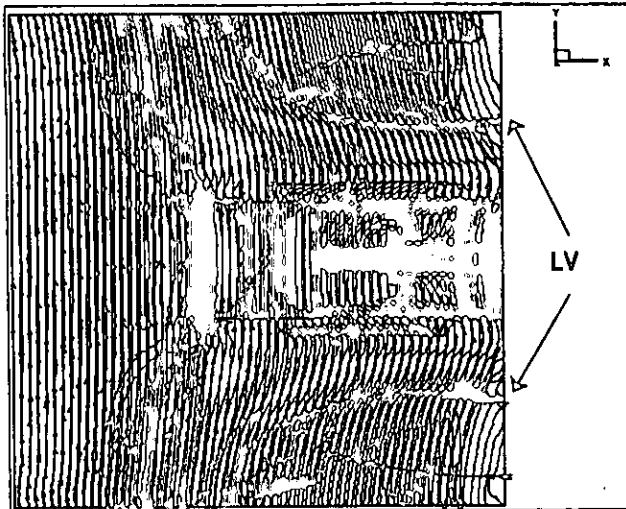


Figura 6.92 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  tocando varios puntos en  $y$ , a 0.0225 m. del fondo.

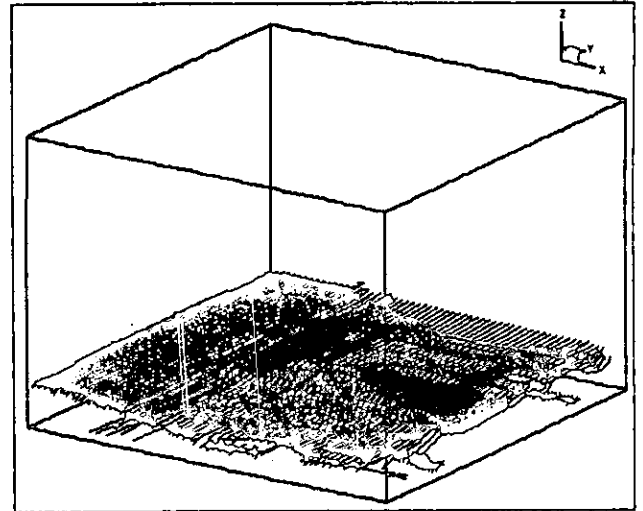


Figura 6.95 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad 0.0225 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

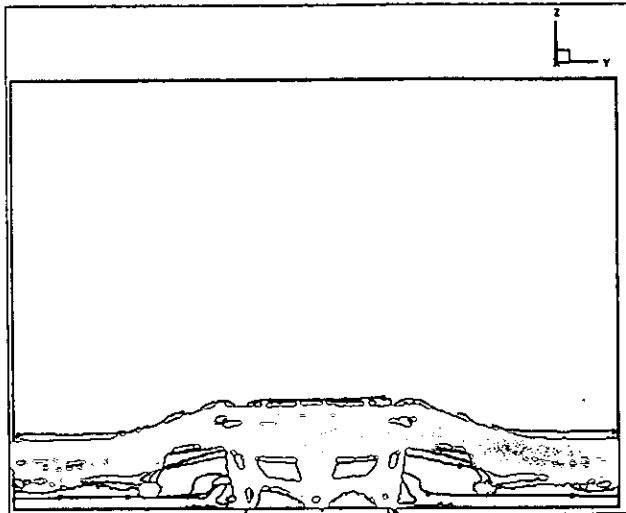


Figura 6.93 Corte  $y$ - $z$  de la gráfica 6.92.

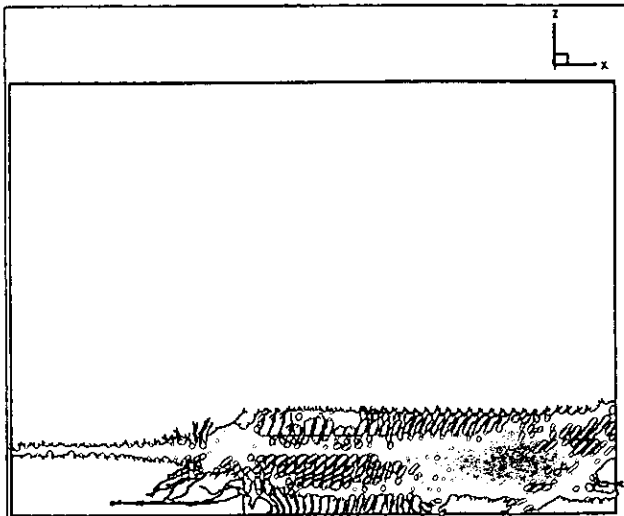


Figura 6.94 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.92.



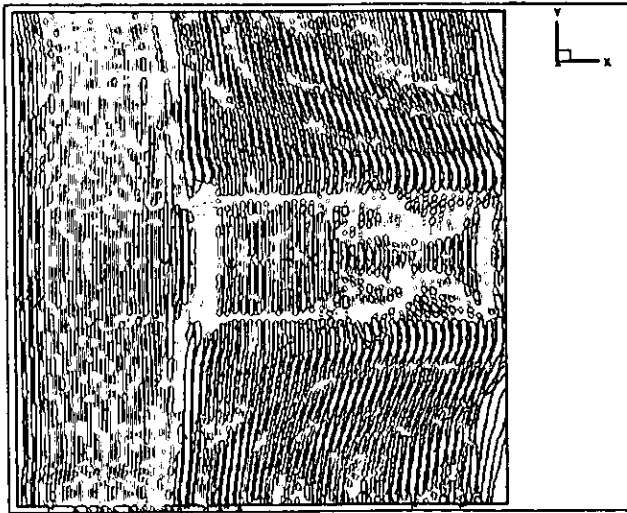


Figura 6.97 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  tocando varios puntos en  $y$ , a 0.0275 m. del fondo.

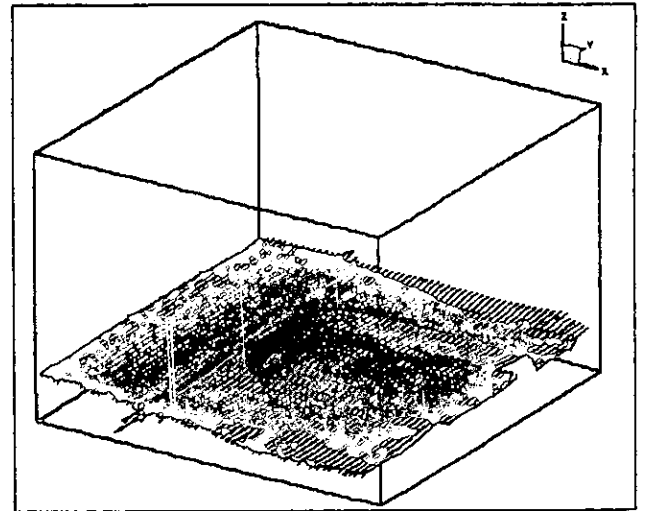


Figura 6.100 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad 0.0275 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

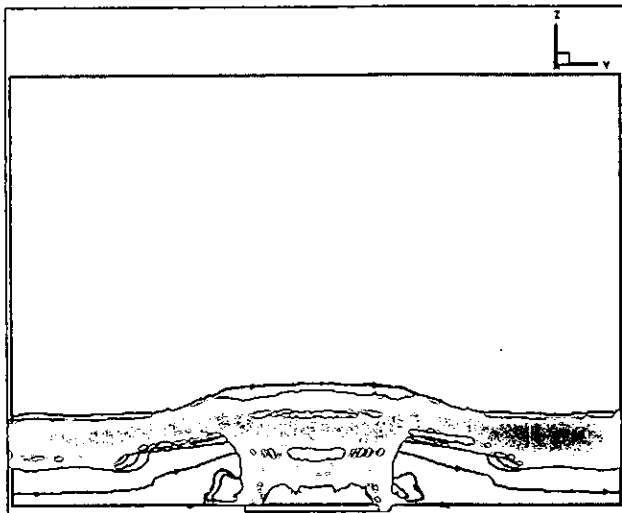


Figura 6.98 Corte  $y$ - $z$  de la gráfica 6.97.

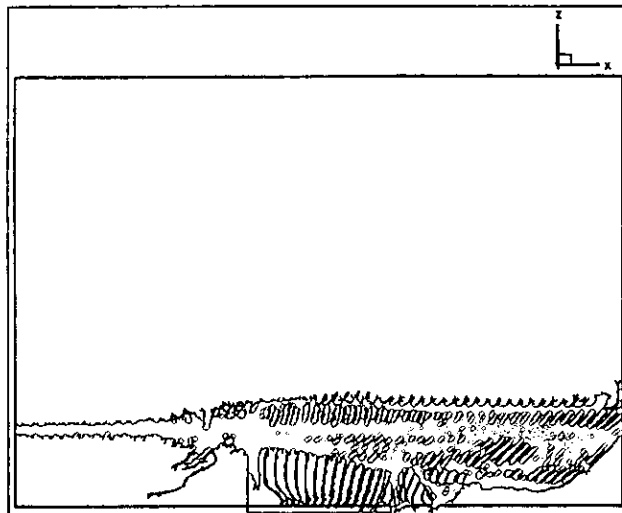


Figura 6.99 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.97.

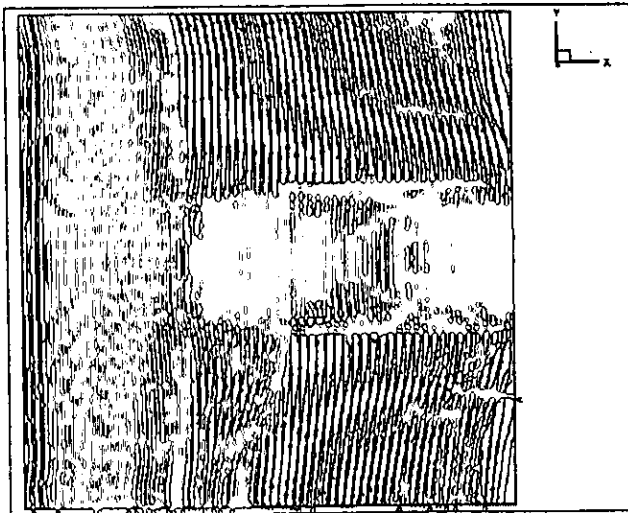


Figura 6.101 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  tocando varios puntos en  $y$ , a 0.0325 m. del fondo.

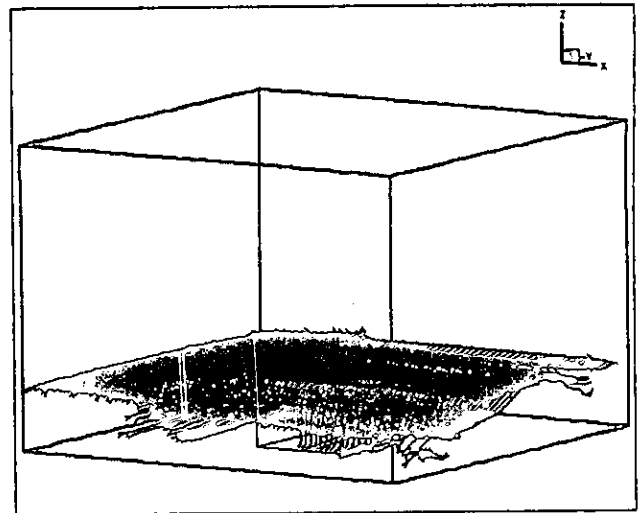


Figura 6.104 Vista general de las líneas de vorticidad 0.0325 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

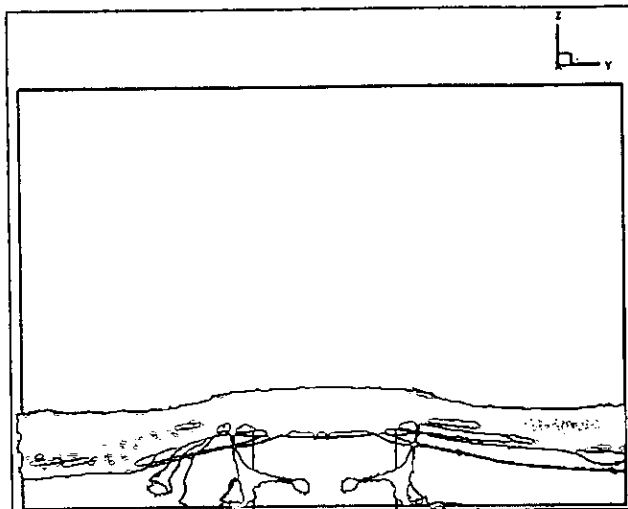


Figura 6.102 Corte  $y$ - $z$  de la gráfica 6.101.

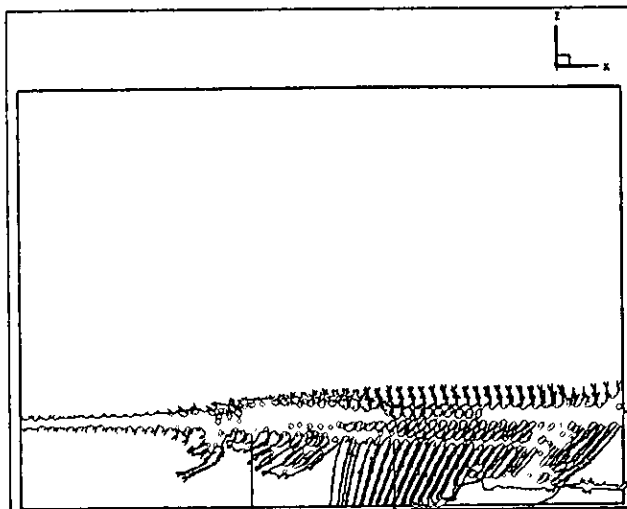


Figura 6.103 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.101.

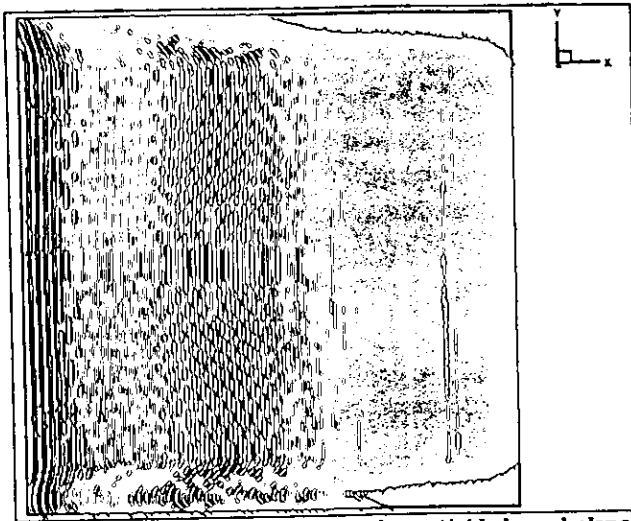


Figura 6.105 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  tocando varios puntos en  $y$ , a 0.1195 m. del fondo.

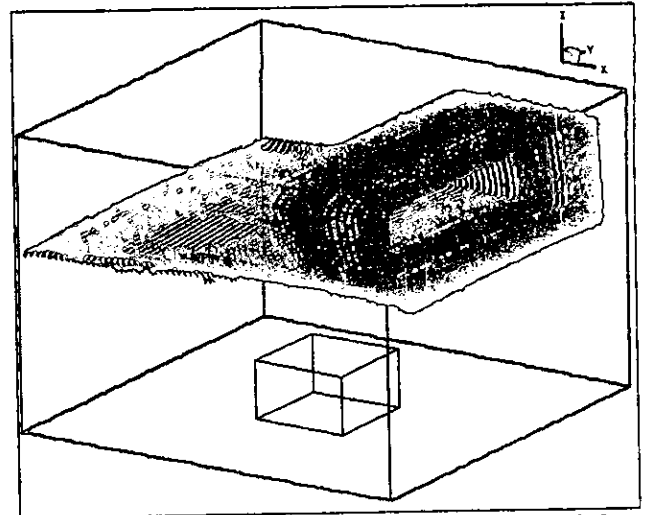


Figura 6.108 Vista general de las líneas de vorticidad 0.1195 m. en la  $z$ , desde el fondo del canal.

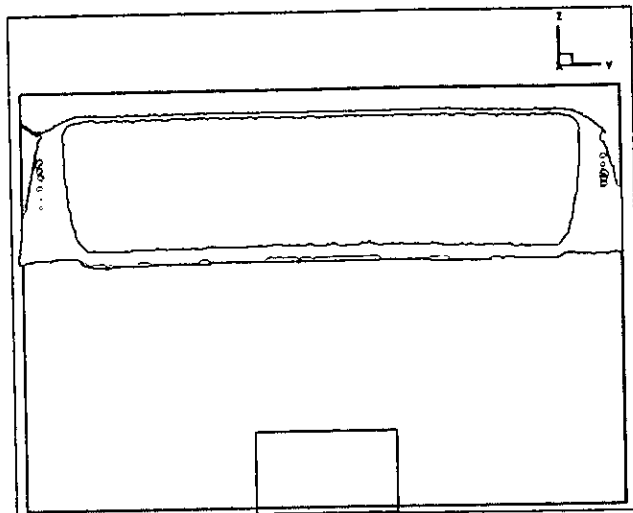


Figura 6.106 Corte  $y$ - $z$  de la gráfica 6.101.

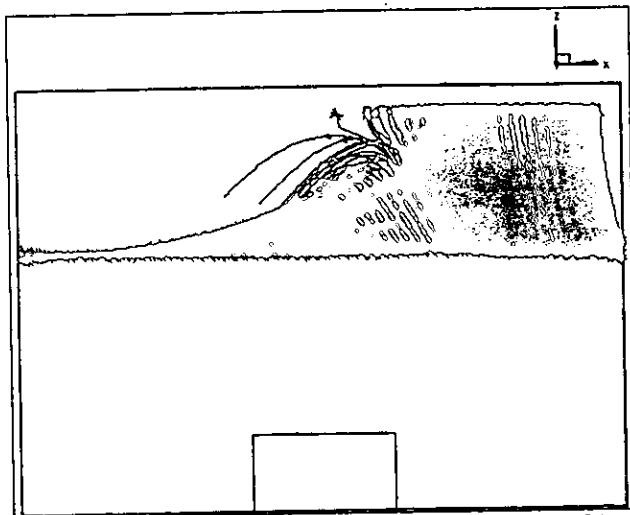


Figura 6.107 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la gráfica 6.101.

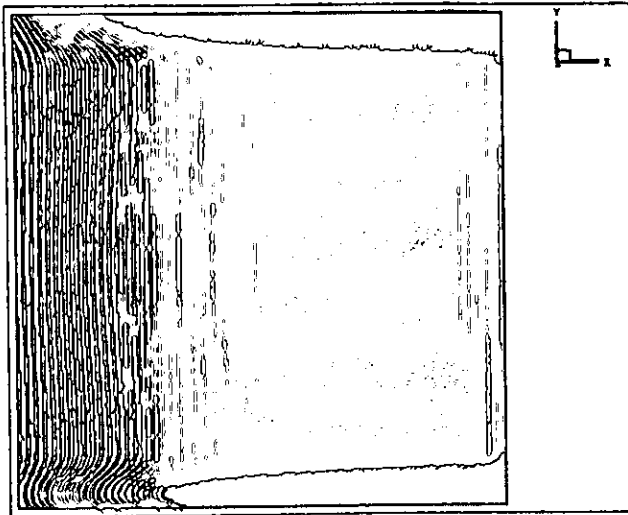


Figura 6.109 Líneas de volumen de vorticidad en el plano  $x$ - $y$  tocando varios puntos en  $y$ , a 0.1469 m. del fondo.

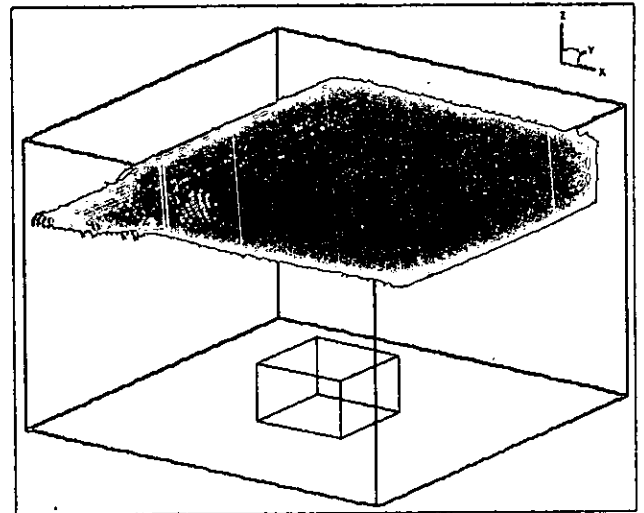


Figura 6.112 Vista general de las líneas de volumen de vorticidad 0.1469 m. en  $z$ , desde el fondo del canal.

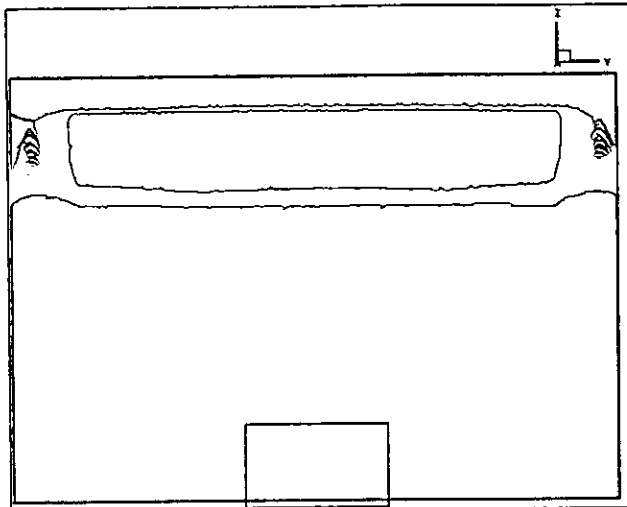


Figura 6.110 Corte  $y$ - $z$  de la vorticidad descrita en la gráfica 6.109.

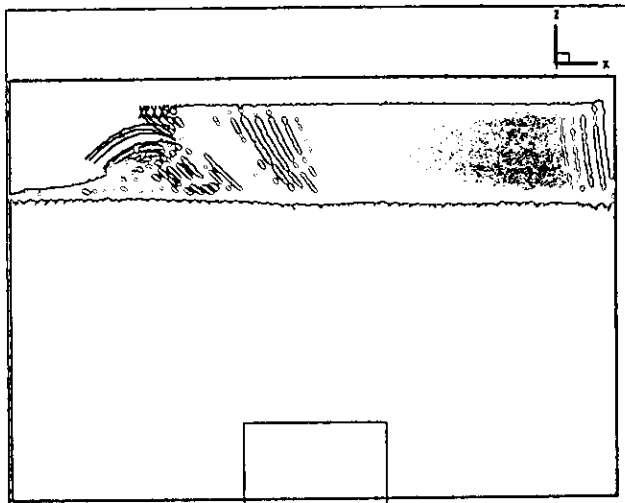


Figura 6.111 Corte longitudinal  $x$ - $z$  de la vorticidad descrita en la gráfica 6.109.

### 6.5.3 GRÁFICAS DEL CAMPO DE VORTICIDAD Y VELOCIDAD EN PLANOS BIDIMENSIONALES

Las figuras siguientes corresponden a planos en los que se grafican líneas de superficie del vector vorticidad en todo el dominio del canal, y las que se muestran a partir de la figura 6.133 corresponden también a planos pero del campo de velocidades, cabe resaltar que tanto en las gráficas siguientes de vorticidad como en las del campo de velocidades, se dibujan líneas de superficie no de volumen. Lo anterior tiene la ventaja de poder comparar con otros resultados de manera más amplia, ya que gran parte de los experimentos ya sean numéricos o experimentales se llevan a cabo en dos dimensiones.

En las figuras 6.117 a 6.122 se muestra una secuencia de vorticidad, desde el fondo del canal hasta la mitad de la altura del obstáculo. La razón para hacer una secuencia hasta esa altura salta a la vista, ya que como se ha mencionado, es en el fondo el lugar donde se encuentran las estructuras turbulentas más interesantes e importantes en canales abiertos. Ahora bien, los procesos a que contribuyen estas estructuras turbulentas, es motivo de un estudio más amplio. En la gráfica 6.117 se ve claramente no sólo el vórtice par, sino dos vórtices de rotación opuesta contiguos a los vórtices opuestos, en otro sentido, estos vórtices se podrían llamar algo así como "vórtices opuestos externos". Lo anterior constituye un hecho notable, ya que en la bibliografía consultada no se hace referencia a este tipo de vórtices. En la gráfica 6.118, se ven además de los vórtices opuestos dos puntos de recirculación señalados con la letra R, mientras que en la gráfica 6.119 en lugar de los vórtices opuestos aparece sólo un vórtice central, esta gráfica es importante, ya que por ejemplo, Larousse, Martinuzzi y Tropea (1992), se imaginaron que los vórtices opuestos se unían en una herradura vertical al frente del obstáculo (ver figura 6.17), este estudio parece revelar que el flujo lateral los absorbe región etiquetada con la letra L, esta región parece ser el flujo separado enrollado en la estela de los vórtices par. La figura 6.124 y 6.125, dan idea de un equilibrio vorticoso, en la primer figura, el vórtice A tiene su par con el vórtice de pie que se encuentra atrás del obstáculo, mientras que el vórtice B tiene su par con el vórtice de superficie y finalmente los vórtices D y E forman el último par. Los pares se hicieron tomando en cuenta el signo de rotación de cada uno.

En las gráficas 6.133 a 6.137 es posible ver una colección de gráficas del campo de velocidades, estas dan prueba de la presencia de los vórtices opuestos en el fondo del canal, cabe aclarar que se trata del campo de flujo medio, razón por la cual, no es posible ver todos los vórtices puestos de manifiesto en este estudio.

En cuanto a la interpretación de las figuras 6.126 a 6.132, se hizo auxiliándose con un artículo presentado por Perry y Chong (1987), en el cual los autores describen e infieren la formación y el desarrollo de los vórtices en un campo de flujo dado aplicando conceptos de la teoría de puntos críticos; esta es una teoría sumamente compleja y se dejará de lado ya que sale de los alcances y objetivos planteados en este trabajo; no obstante se comentan algunos puntos de interés para este

estudio. En esta teoría se define como punto crítico a las características más notables de los patrones de flujo, proporcionando tales puntos y su clasificación en base al espacio en que se desarrollan, es decir si tienen desplazamiento libre o una condición de no desplazamiento, es posible deducir su geometría y topología dentro del campo de flujo. Los patrones de las líneas de corriente dan una idea de las propiedades del transporte de un arreglo de vórtices en chorros o estelas o aún en complicados patrones tridimensionales de flujo separado. Aplicando dicha teoría, el conocimiento del campo de flujo en un plano, permite inferir los flujos posibles en otros planos, como se muestra en la figura siguiente:

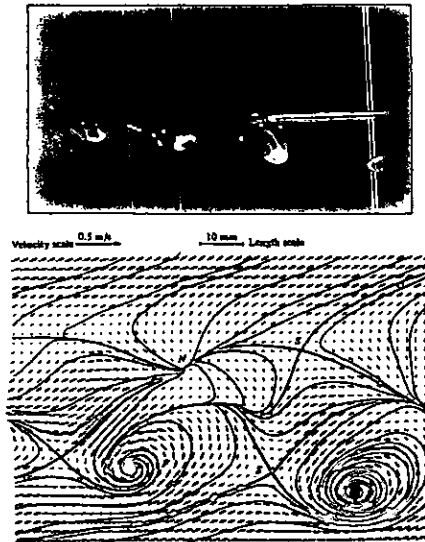


Figura 6.113 Campo vectorial de la velocidad instantánea de un patrón de humo.

En la figura anterior se muestra la visualización y simulación de los patrones de humo de un cigarro. Se puede apreciar como un patrón tan complicado como este último, no es tan obvio en la simulación numérica. De ahí la importancia de la teoría de puntos críticos, con la cual se pueden deducir patrones de líneas de corriente fuera del plano de simetría como los que se muestran en las figuras 6.114.

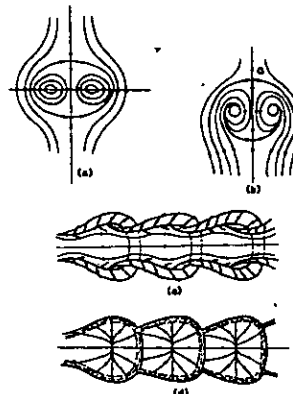
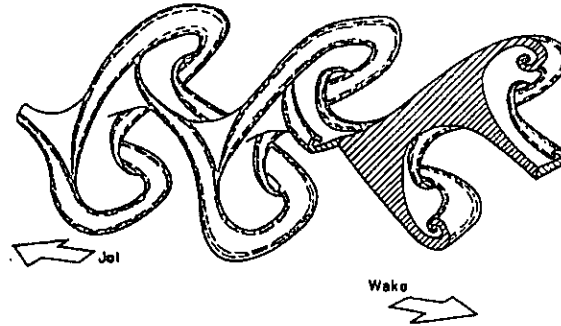
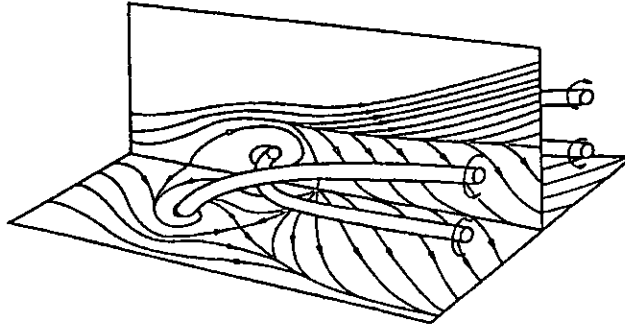


Figura 6.114 a) Campo de flujo bidimensional generado por un vórtice par relativo a un observador moviéndose con él. b) Sección en planta del patrón de líneas de corriente imaginadas para la figura anterior. c) Vista superior de las líneas de corriente hipotéticas cerca de la superficie del humo. d) Vista inferior de las líneas de corriente hipotéticas.

Lo más importante, es que a partir de los patrones hipotéticos presentados, se puede inferir estructuras turbulentas más complejas que se han puesto de manifiesto ya, en algunas visualizaciones muy refinadas, y una explicación lógica de ellas. Como ejemplo, se muestran a continuación dos patrones válidos en la conceptualización de la turbulencia.



**Figura 6.115** Patrones de humo hipotéticos para estructuras de estelas y chorros de doble lado.



**Figura 6.116** Una posible estructura vorticosa en un campo de flujo dado.

Retomando este estudio y sin profundizar en la teoría de puntos críticos, pero por analogía con los perfiles de líneas de vorticidad presentados en las figura 6.126-6.132, se puede establecer que existe un patrón de vórtices semejante a los presentados por Perry y Chong (1987), en este estudio.

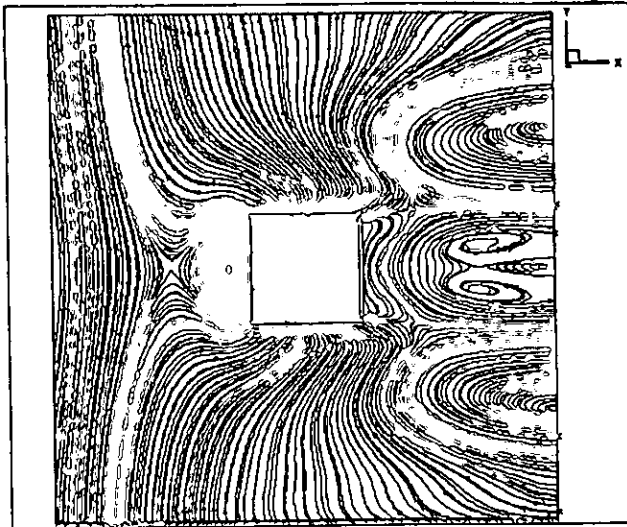


Figura 6.117 Líneas de superficie de vorticidad en planta, justo en el fondo del obstáculo.

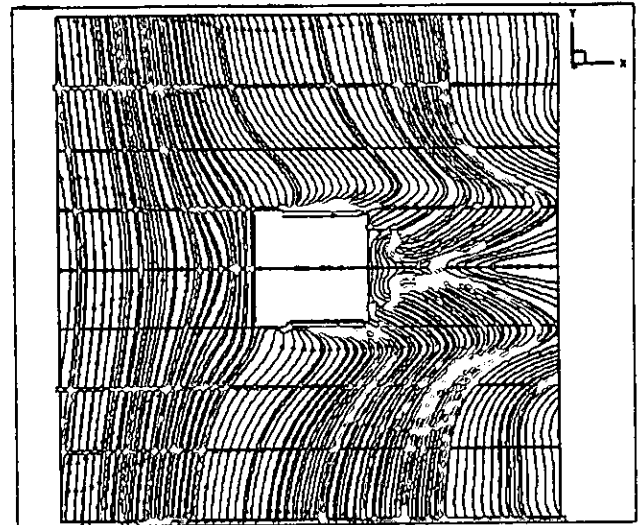


Figura 6.120 Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0125 m. del fondo del canal.

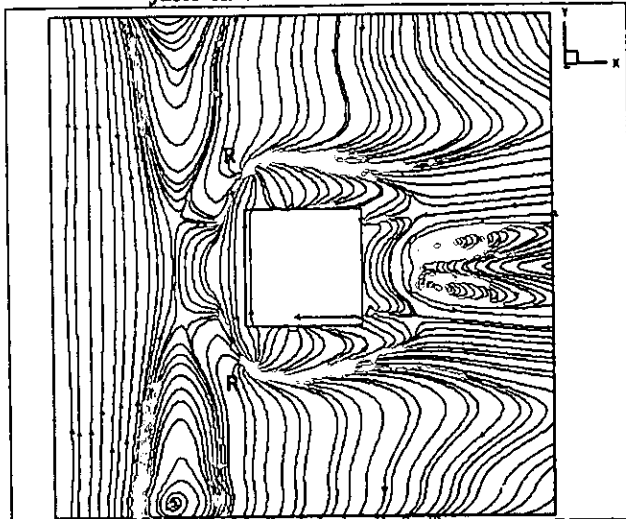


Figura 6.116 Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.005 m. del fondo del canal.

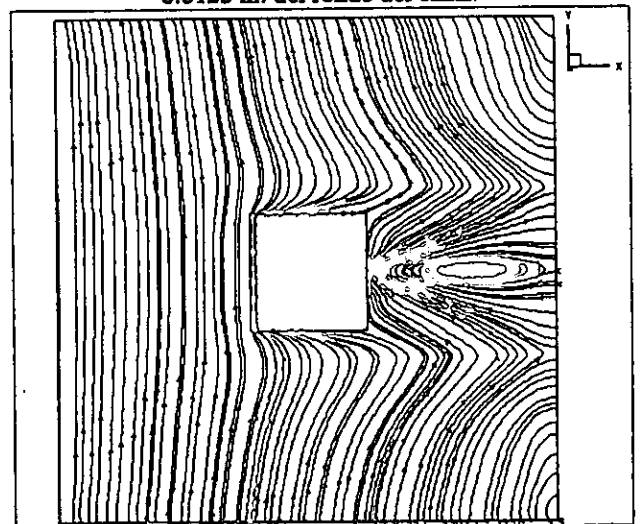


Figura 6.121 Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0175 m. del fondo del canal.

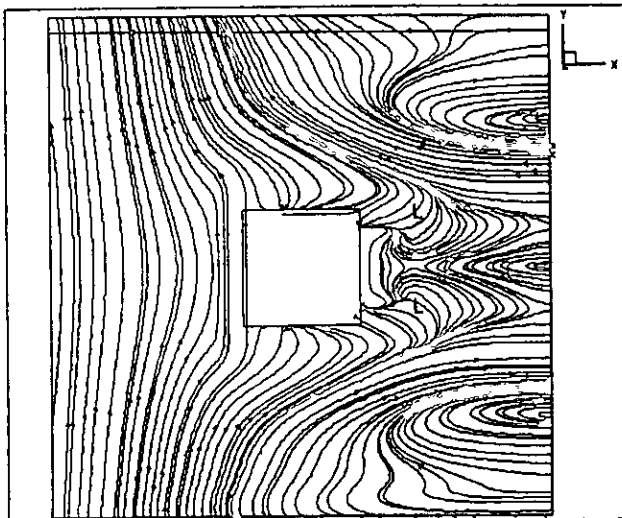


Figura 6.119 Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0075 m. del fondo del canal.

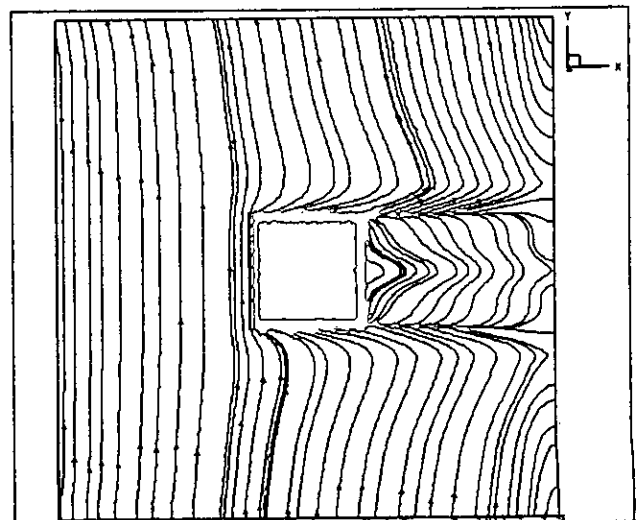


Figura 6.122 Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0225 m. del fondo del canal.



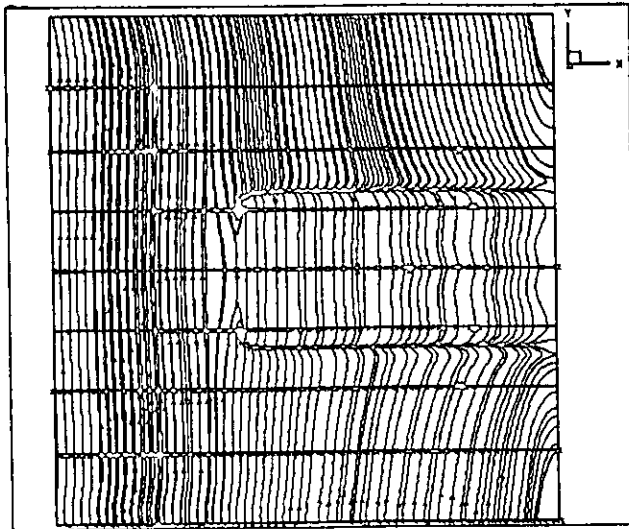


Figura 6.123 Líneas de superficie de vorticidad en planta, a 0.0275 m. del fondo del canal.

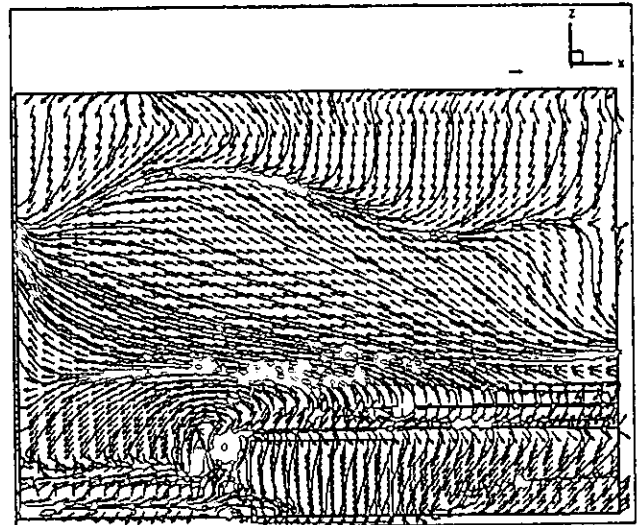


Figura 6.126 Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano  $x-z$ , 0.12 m. y 0.18 m. en la dirección  $y$ .

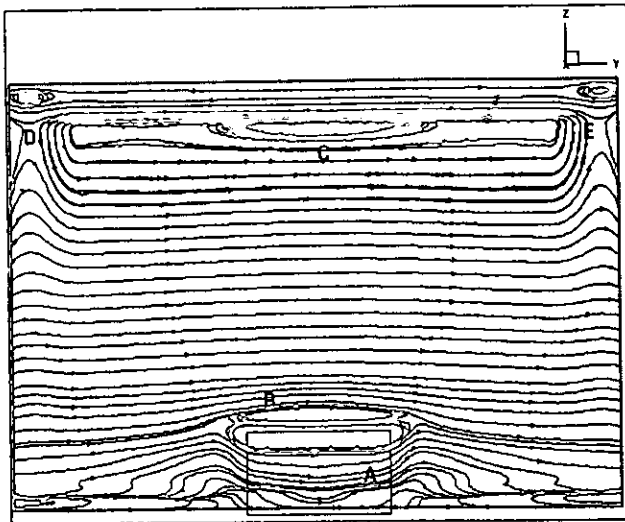


Figura 6.124 Líneas de superficie de vorticidad, en un plano  $y-z$  justo antes de que el flujo pase el obstáculo.

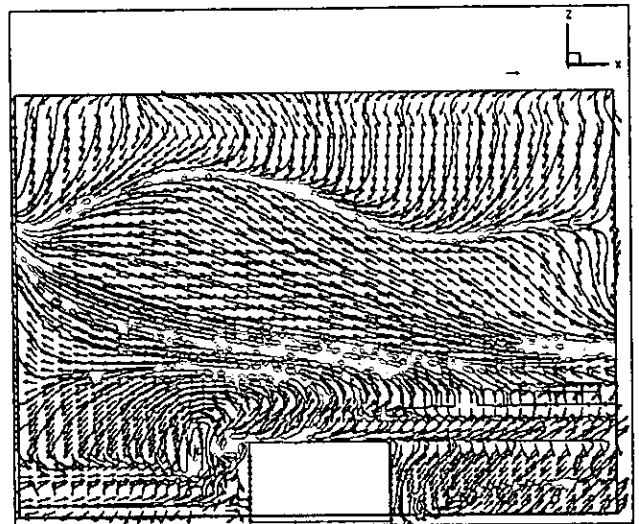


Figura 6.127 Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano  $x-z$ , 0.125 m. y 0.175 m. en la dirección  $y$ .

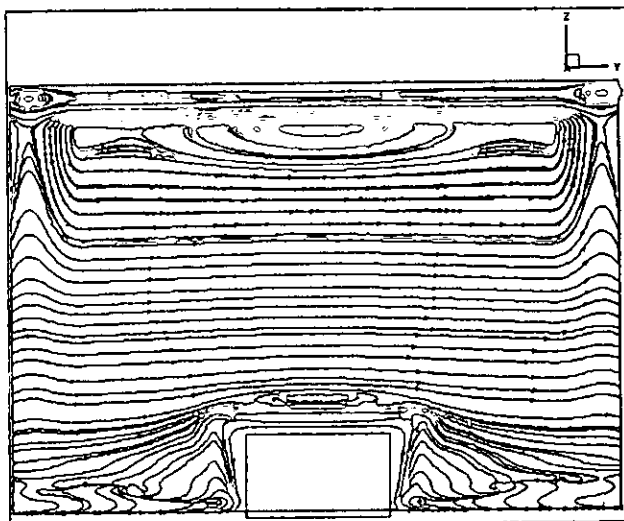


Figura 6.125 Líneas de superficie de vorticidad, en un plano  $y-z$ , justo a la salida del obstáculo.

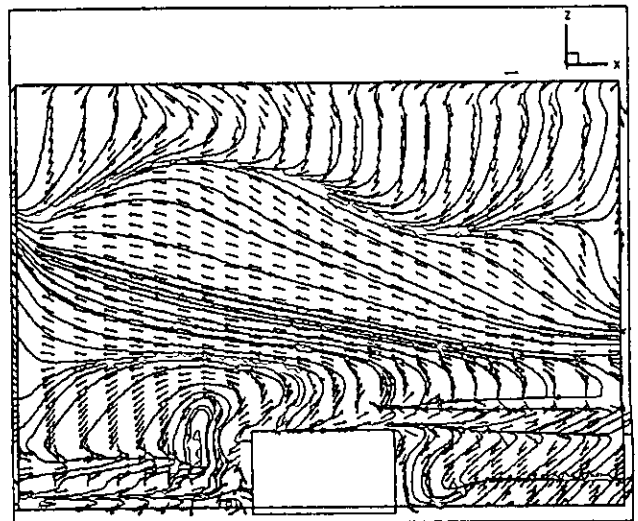


Figura 6.128 Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano  $x-z$ , 0.13 m. y 0.17 m. en la dirección  $y$ .

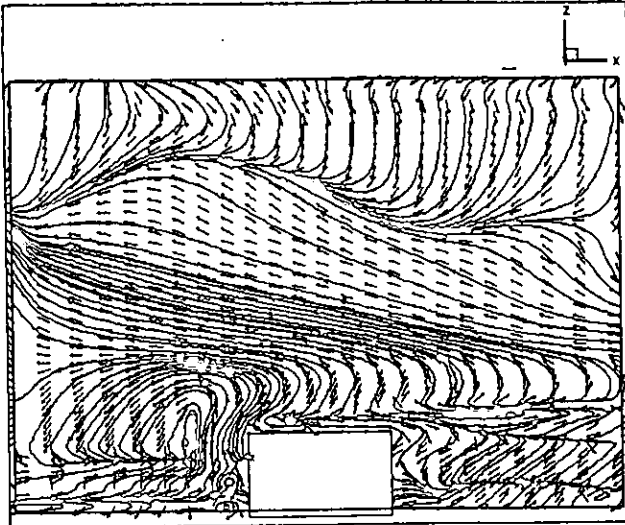


Figura 6.129 Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano  $x-z$ , 0.135 m. y 0.165 m. en la dirección  $y$ .

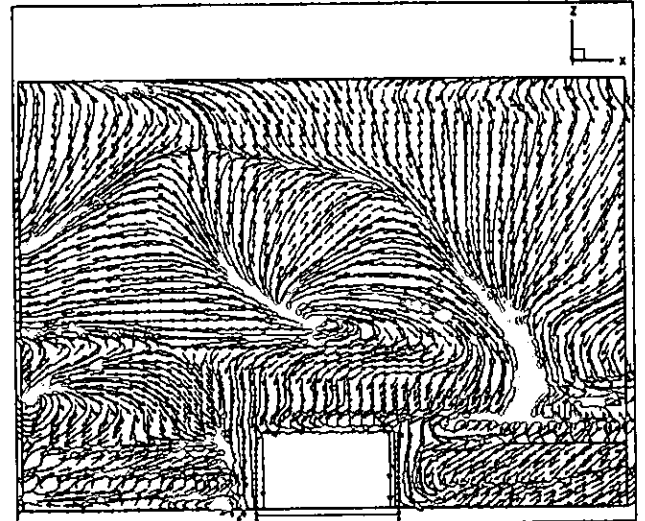


Figura 6.132 Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano  $x-z$ , 0.15 m. en la dirección  $y$ .

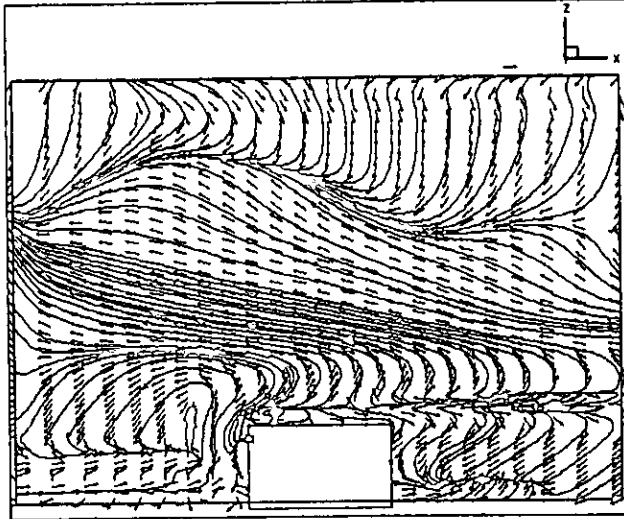


Figura 6.130 Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano  $x-z$ , 0.14 m. y 0.16 m. en la dirección  $y$ .

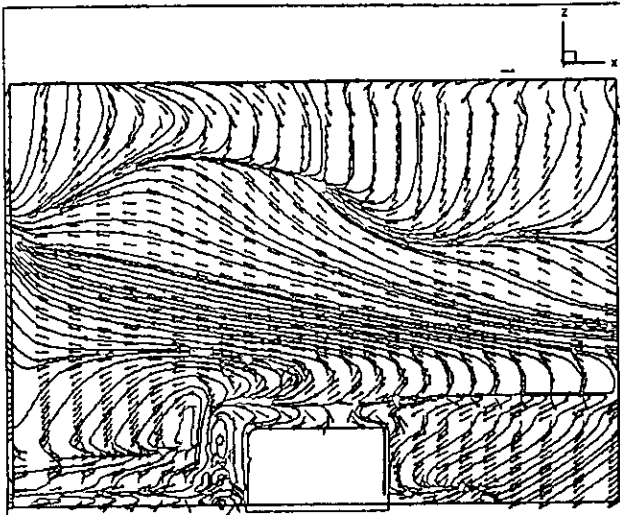


Figura 6.131 Vectores y líneas de superficie de vorticidad, en un plano  $x-z$ , 0.145 m. y 0.155 m. en la dirección  $y$ .

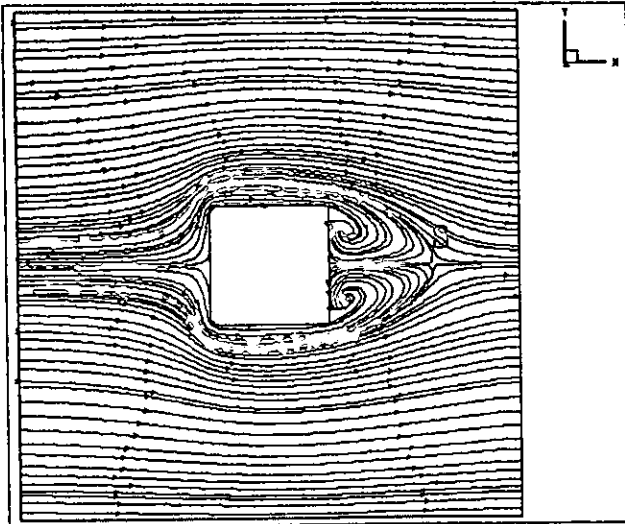


Figura 6.133 Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, en el fondo del canal.

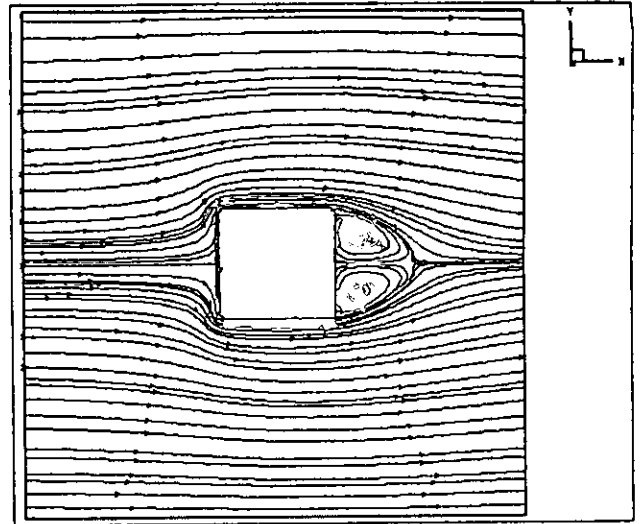


Figura 6.136 Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.01 m del fondo del canal.

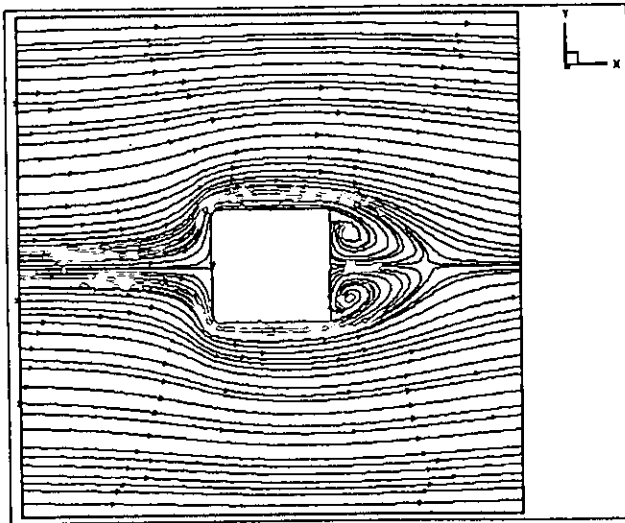


Figura 6.134 Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.005 m del fondo del canal.

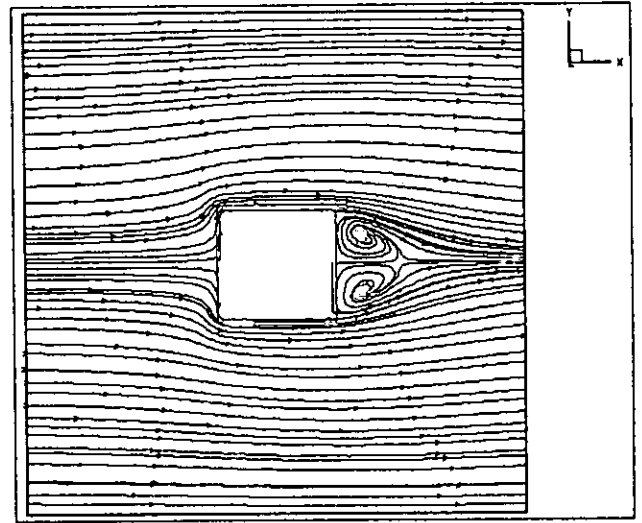


Figura 6.137 Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.015 m del fondo del canal.

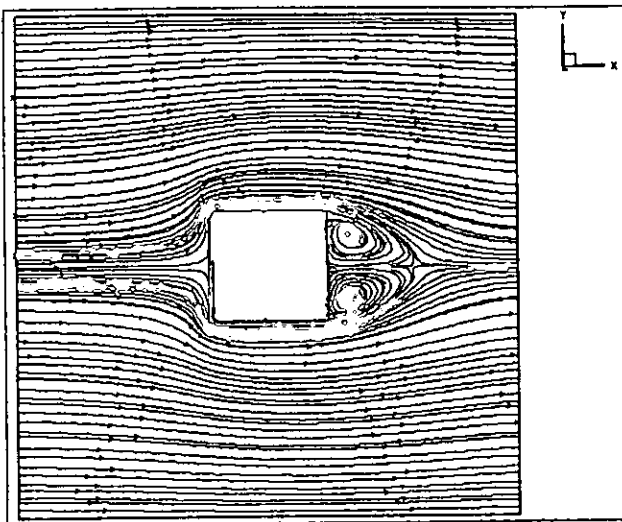


Figura 6.135 Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.0075 m del fondo del canal.

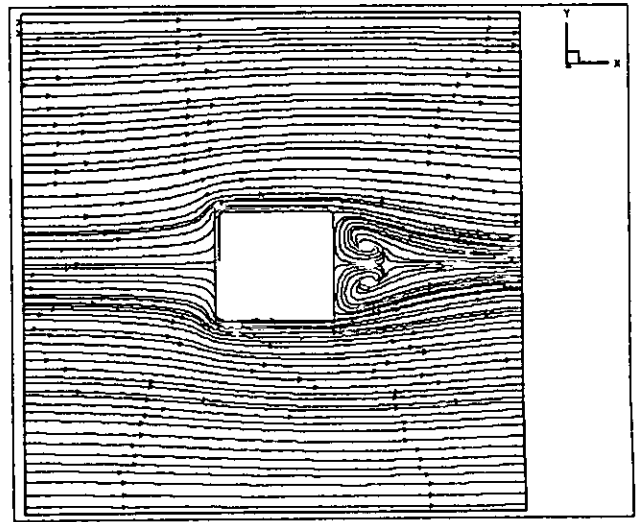


Figura 6.138 Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.0175 m del fondo del canal.

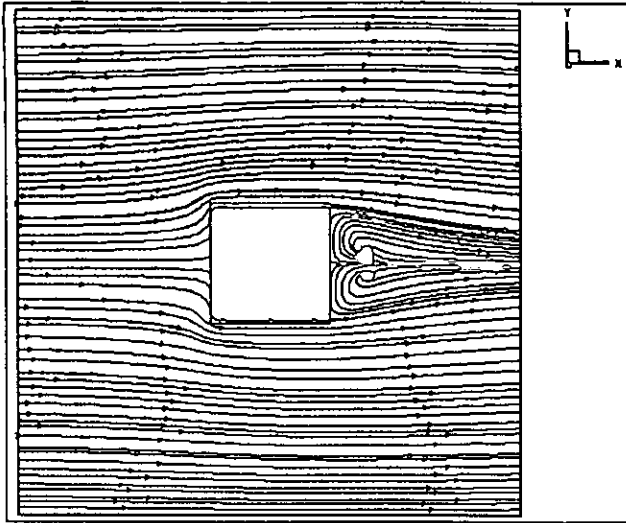


Figura 6.139 Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.02 m del fondo del canal.

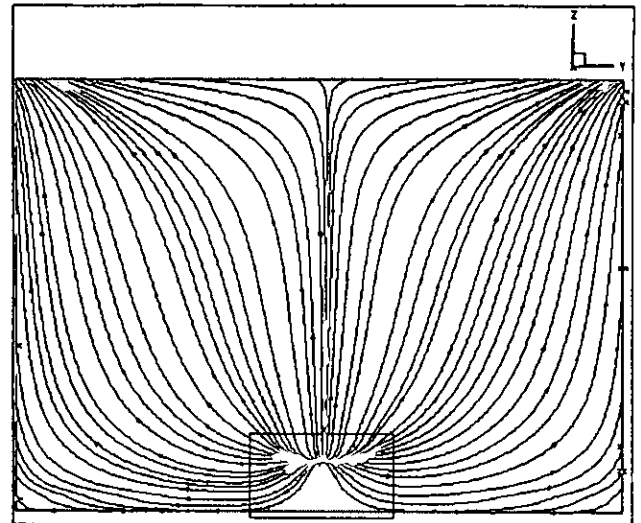


Figura 6.142 Corte transversal de las líneas de superficie de la velocidad, a la entrada del flujo al obstáculo.

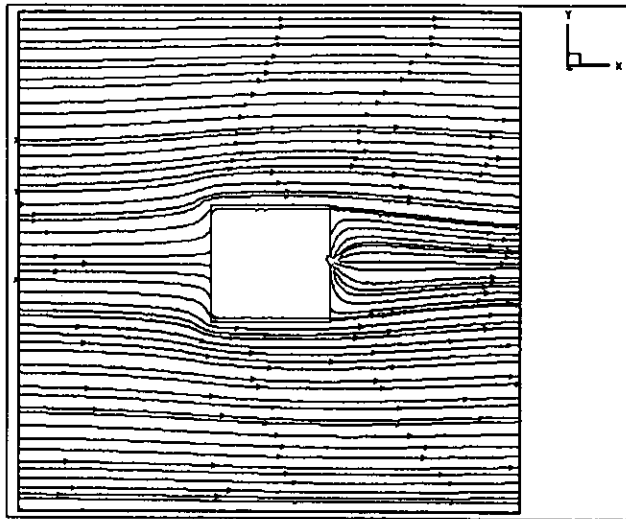


Figura 6.140 Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.0225 m del fondo del canal.

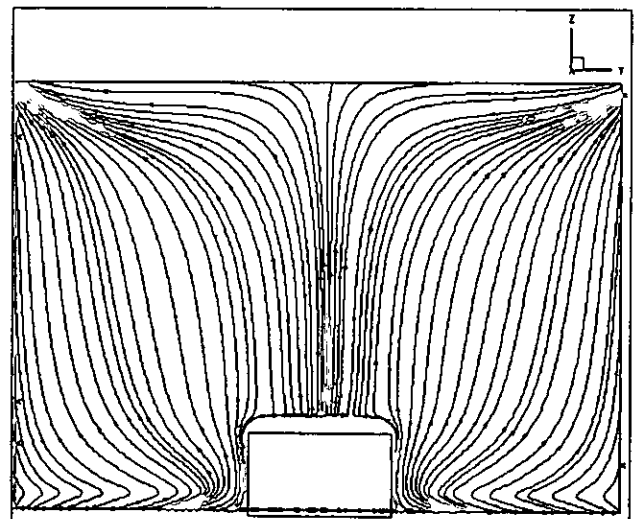


Figura 6.143 Corte transversal de las líneas de superficie de la velocidad, a la mitad del obstáculo.

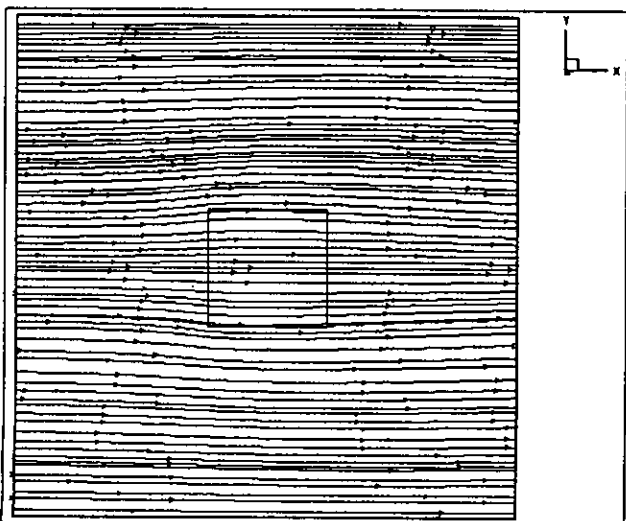


Figura 6.141 Corte x-y de las líneas de superficie de la velocidad, a 0.0375 m del fondo del canal.

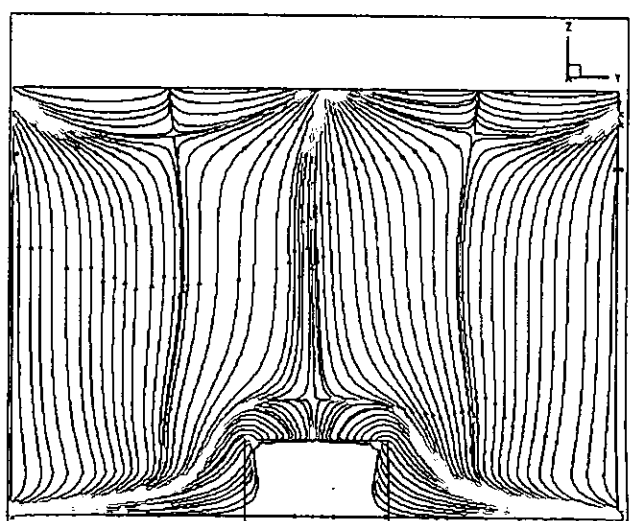


Figura 6.144 Corte transversal de las líneas de superficie de la velocidad, a la salida del obstáculo.

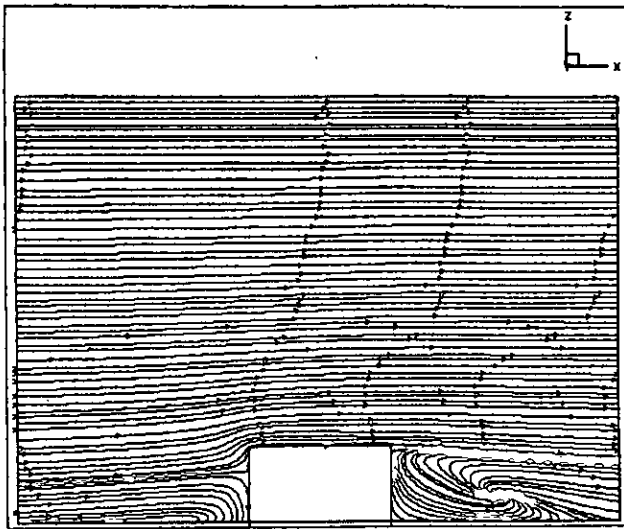


Figura 6.145 Corte longitudinal de las líneas de superficie de la velocidad, al centro del dominio en la dirección  $y$ .

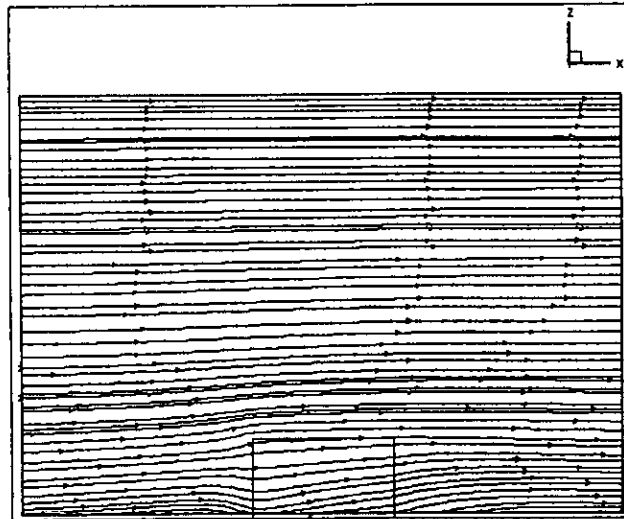


Figura 6.146 Corte longitudinal de las líneas de superficie de la velocidad, a los lados del obstáculo en la dirección  $y$ .

#### 6.5.4 OTRAS COMPARACIONES CUALITATIVAS CON TRABAJOS SEMEJANTES

En la figura 6.147 y 6.148 se muestra una comparación en el perfil de velocidades medias de un flujo sobre un obstáculo cúbico. El trabajo de Werner y Wengle (1992), consiste en la simulación numérica de un flujo sobre un cubo en el fondo de un canal de 6m. de largo por 2 m. de ancho y 2 m. de profundidad, utilizando técnicas LES con un número de Reynolds adimensional de 50 000. El problema es semejante de alguna manera al que se presenta en este estudio, aunque es obvio que las intensidades de los campos resultantes no coinciden en forma cuantitativa, si hay semejanza en cuanto a los perfiles de velocidad.

En las figuras 6.149 a 6.152 se muestran comparaciones entre el trabajo actual y el presentado por Mason y Morton (1986). Este último trabajo consiste en la simulación numérica de flujo laminar sobre diversos obstáculos con diferentes formas de contorno, el número de Reynolds fue del orden de 100-500. Debido a lo anterior, los patrones comparados no son enteramente semejantes aunque el obstáculo se parezca mucho al de este estudio, sin embargo, también dan pauta a considerar los resultados obtenidos como correctos.

Por otro lado el vórtice de anillo que se nota en la parte superior del obstáculo en la figura 6.125 coincide con el esquematizado en la figura 6.17 que infirieron Larousse, Martinuzzi y Tropea (1992), en su estudio sobre flujo alrededor de un obstáculo.

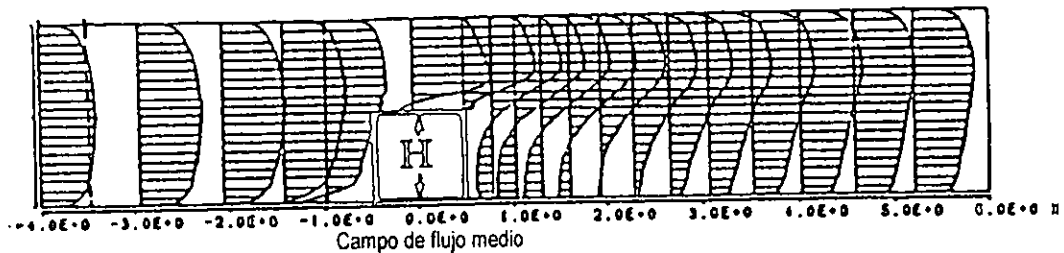


Figura 6.147 perfil de velocidades a lo largo del canal obtenido por werner y wengle (1992), en un estudio en canales abiertos en tres dimensiones.

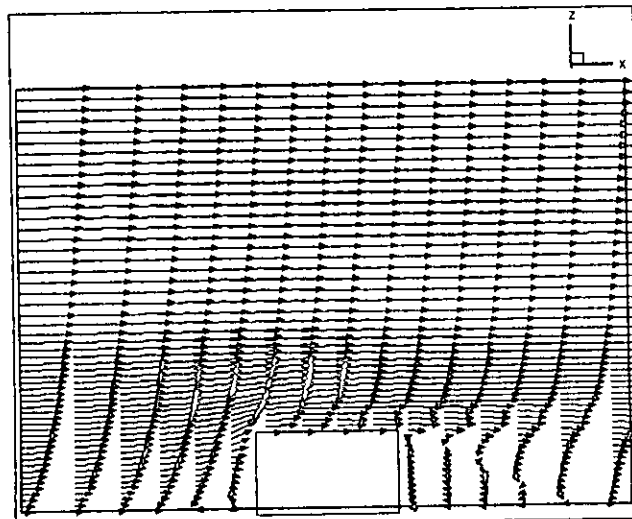


Figura 6.148 Perfil de velocidades a lo largo del canal, obtenido en el estudio actual en tres dimensiones.

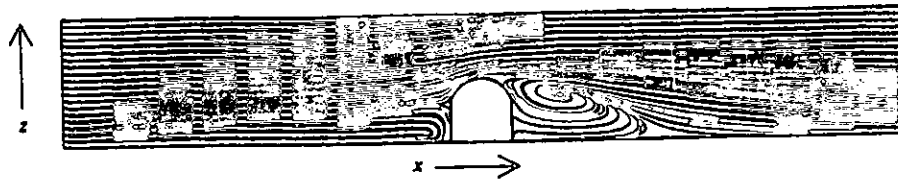


Figura 6.149 Campo de velocidades a lo largo de un canal obtenido por Mason y Morton, (1986).

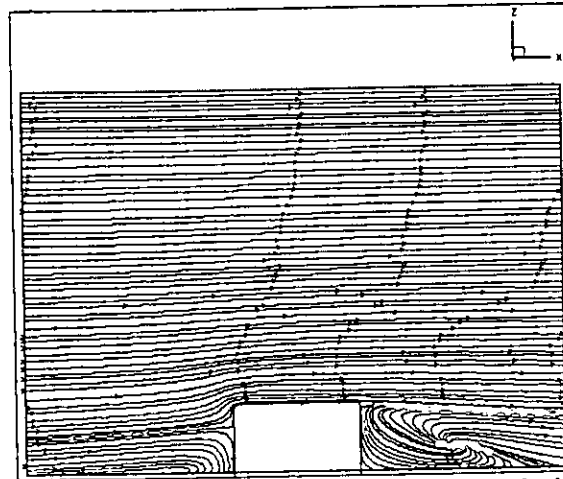


Figura 6.150 Campo de velocidades en el plano  $x-z$  a lo largo del canal, obtenido en este estudio.

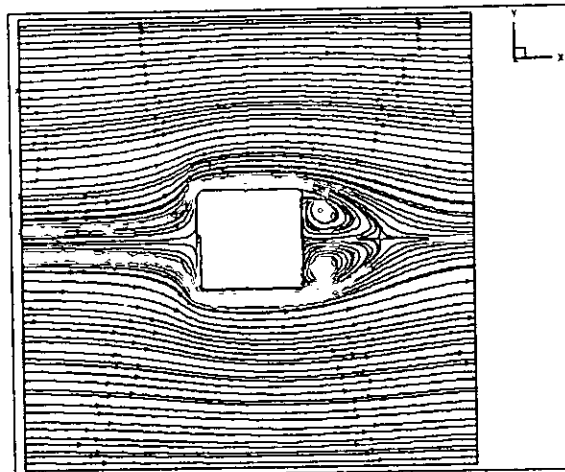


Figura 6.151 Corte  $x-y$  del campo de velocidades a lo largo del canal, obtenido en el estudio actual.

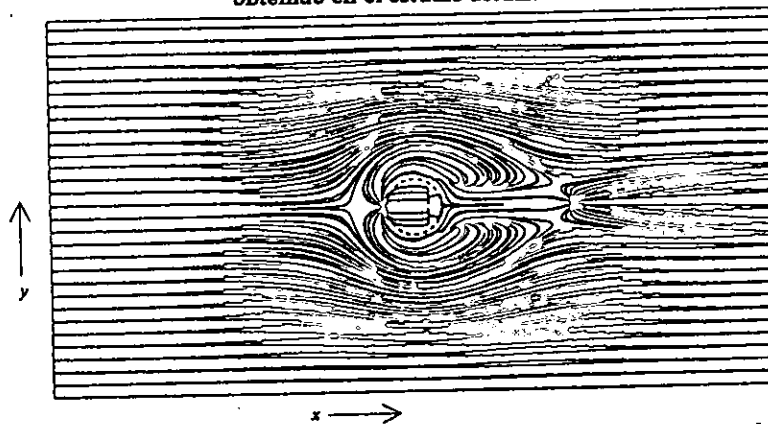


Figura 6.152 Corte  $x-y$  del campo de velocidades a lo largo de un canal, obtenido en el estudio de Mason Y Morton (1986).

---

# CAPITULO SIETE

---

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El campo de la mecánica de fluidos ha conducido al desarrollo de nuevos métodos matemáticos para resolver las ecuaciones fundamentales de movimiento de los fluidos, incluidas las simulaciones numéricas avanzadas de los diversos fenómenos de flujo.

En canales abiertos, la turbulencia está asociada a remolinos de diferentes tamaños; estos pueden variar en magnitud, desde los grandes, cuya dimensión es aproximadamente igual a la profundidad del flujo, hasta los más pequeños cuya dimensión es  $10^{-3}$  más pequeña que aquéllos. Aún con las técnicas computacionales disponibles hoy en día, no es posible resolver todas las escalas del movimiento, ya que para hacerlo se necesitarían mallas muy finas de muchos elementos (quizá miles) en cada dirección coordenada, o sea, aunque se conocen las ecuaciones que describen al flujo de manera exacta, no es posible resolver dichas ecuaciones para algún flujo de relevancia práctica.

Como ya se observó a lo largo de este trabajo, se optó por el camino heurístico, es decir, por modificar las ecuaciones básicas para poder resolverlas, suponiendo dos hipótesis básicas, la primera en el sentido de que en un flujo es posible separar el comportamiento macroscópico de las variables y sus fluctuaciones turbulentas y en segundo lugar, de que es posible relacionar tales fluctuaciones con el movimiento medio.

Debido a que comúnmente el obstáculo tridimensional se estudia como una perturbación a la capa límite, pocos trabajos se enfocan al estudio de los patrones de flujo alrededor de éste y a su influencia en la formación de estructuras turbulentas más complejas, que permiten un mejor entendimiento de los procesos que provocan un gran intercambio de cantidad de movimiento, calor y masa en canales abiertos.

Cabe señalar que aunque el flujo sobre obstáculos ha sido abordado por grandes pensadores, como Leonardo Da Vinci, Ludwig Prandtl, y Theodore Von Kármán, dicho problema no tiene una solución teórica satisfactoria aún para obstáculos circulares, modalidad que ha sido ampliamente estudiada y en la cual existen importantes avances. Sin embargo, el problema se complica cuando se le agregan grados de libertad extra (aristas afiladas), como es el caso de este estudio.

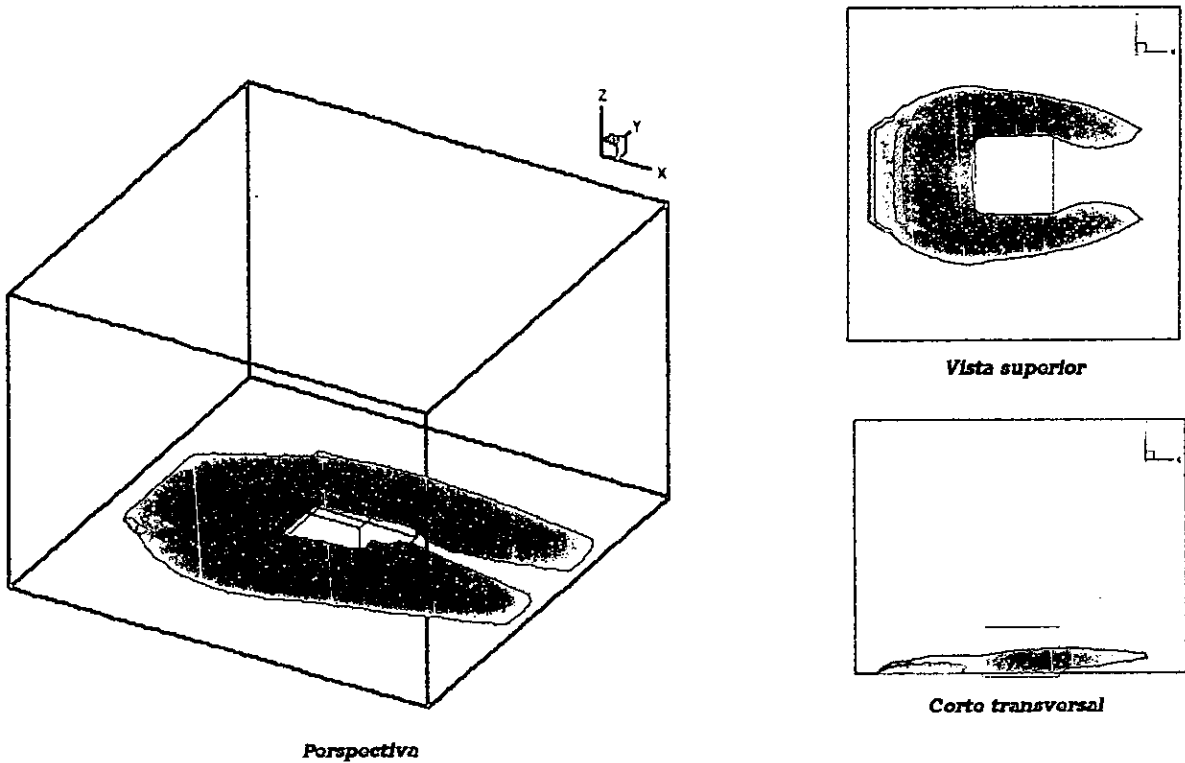


Este trabajo se encaminó a la simulación de dicho problema. Para ello se desarrolló un módulo del programa que permite considerar dos modelos de turbulencia, uno de longitud de mezcla (modelo de orden cero) y un modelo  $\kappa$ - $\epsilon$ . Lo que se busca es tener un modelo en el que las escalas finas de la turbulencia puedan ser representadas correctamente y así obtener información valiosa de la influencia en los procesos de transporte en regiones cercanas a la pared de dichas estructuras turbulentas. También se busca la visualización de estructuras coherentes para determinar la contribución de éstas a los procesos de transporte de sedimentos.

En lo referente a la deformación del flujo, se presentan resultados que validan el modelo. Las figuras 5.13 a y b, muestran una comparación entre los resultados obtenidos en este estudio y la recopilación hecha en el trabajo de Franke y Rodi (1992), de la velocidad media  $U$  a lo largo del canal, en el plano  $x$ - $z$ . Además en la figura 5.80 y 5.81 se presenta, también con el mismo trabajo, una comparación de la evolución de la energía cinética a lo largo del canal, en el mismo plano. No obstante, resultados como las tasas de deformación total de las cantidades media y fluctuantes, no existen, hasta donde esta investigación bibliográfica fue llevada a cabo, para flujos con características similares. Así pues, la ausencia de resultados numéricos y/o experimentales en flujos tridimensionales, refleja la complejidad del problema. En esa sección una contribución importante de este trabajo, fue mostrar la deformación total de las variables o la forma en que influyen mecanismos difíciles de evaluar como los esfuerzos secundarios  $uv$ ,  $uw$ ,  $vw$ , que son responsables del desarrollo del flujo secundario.

Otra contribución importante del trabajo, es la manipulación de la ecuación estadística de vorticidad en tres dimensiones, en donde un término sumamente complejo como las correlaciones de vorticidad,  $u_i \omega_j$ , se evalúa en función de los tensores de Reynolds mediante un desarrollo matemático en el que se aprovechan las propiedades netamente turbulentas del flujo. El modelo fue validado cualitativamente con trabajos similares. La información aportada al estudio por esta ecuación es de suma importancia, ya que permite identificar mejor las estructuras turbulentas que se obtuvieron en etapas previas.

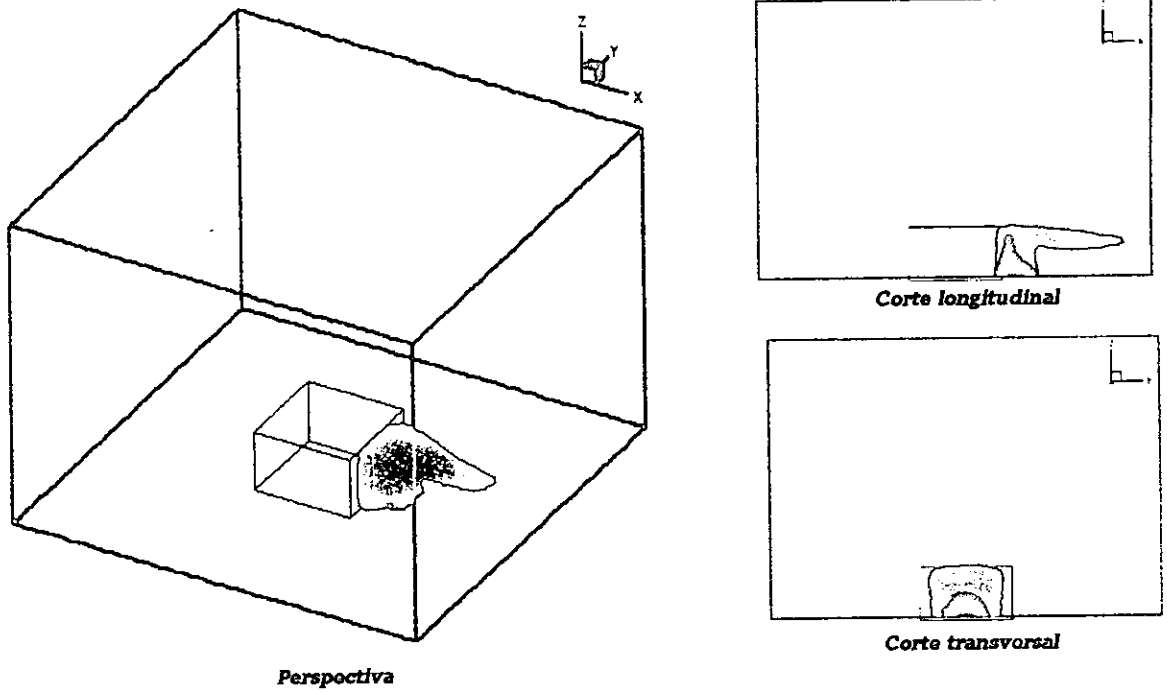
La interpretación de los resultados no es sencilla, la experiencia, el conocimiento del flujo y de la mecánica de fluidos son fundamentales para tal efecto. Al programa se le incluyó otra ecuación adicional: la ecuación de transporte de un escalar, en este caso un contaminante pasivo, a la cual se le aplicó el mismo procedimiento estadístico que a las anteriores, ec. (3.51) y algunos de los resultados complementarios obtenidos de interés son los siguientes. En la figura 7.1 se aprecia claramente el vórtice de herradura que fue referido en capítulos anteriores. En esa figura el sembrado del escalar se hizo aproximadamente a una longitud  $x/L=1$ , en la dirección  $x$  y en la dirección  $y$ , desde una longitud  $y/L=2$  hasta  $y/L=3$ .



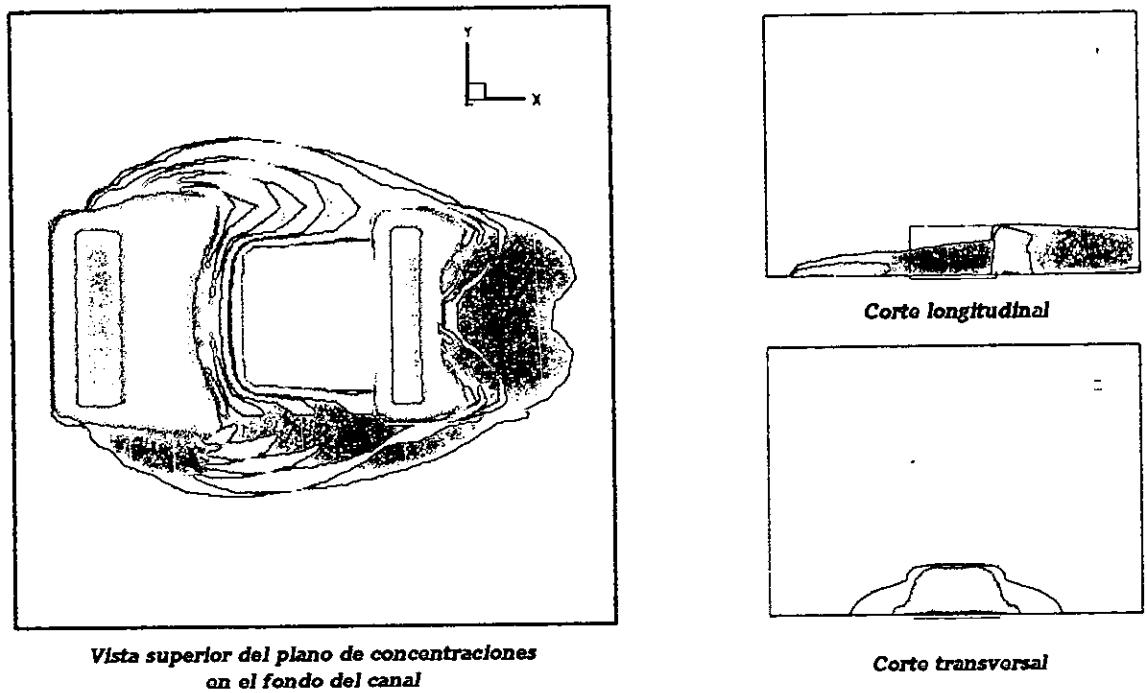
**Figura. 7.1** Vórtice de horradura obtenido con la ecuación de transporte escalar acoplada a las ecuaciones hidrodinámicas

En la figura 7.2 se observan otras características del flujo, estas se obtuvieron sembrando el contaminante después del obstáculo a una distancia  $x/L=3$ , en la dirección principal, a  $y/L=2.25$  hasta  $y/L=2.75$ , en la dirección transversal. En esta figura se observa en forma clara el vórtice de tubo, ya mencionado en capítulos anteriores, saliendo de la parte posterior del obstáculo. En la figura mencionada se muestran este mismo, así como sus cortes en diferentes planos.

Se hizo un nuevo cálculo sembrando el contaminante no sólo en la parte anterior del obstáculo sino también en la parte posterior de éste. Las distancias a las que el contaminante se sembró en este experimento coincidió con el caso de la figura 7.1, para la parte anterior del obstáculo; sin embargo, para la parte posterior las distancias fueron aproximadamente de  $x/L=3$  y de  $y/L=2$  hasta  $y/L=3$ . En los resultados de dicho experimento numérico se observan dos estructuras turbulentas muy importantes, como son el vórtice de pie o fondo y los vórtices opuestos. En la figura 7.3 se presentan los resultados obtenidos.



**Figura. 7.2** Vórtico de tubo y sus diferentes cortes obtenido con la ecuación de transporte escalar acoplada a las ecuaciones hidrodinámicas



**Figura. 7.3** Vórtico de fondo y vórtices opuestos obtenidos con la ecuación de transporte escalar acoplada a las ecuaciones hidrodinámicas

Por otra parte, en diversos estudios al respecto encontrados en la literatura (Mason y Morton, 1986; Acarlar y Smith, 1987; Franke y Rodi, 1992; Larousse et al, 1992; Werner y Wengle, 1992) pareciera ser que cada investigador nombra o considera "fenómenos importantes" a estructuras turbulentas de acuerdo a su interpretación e ingenio.

En este punto, se puede afirmar que la estructura turbulenta más importante que se halló en este estudio, y que no está sujeta a "subjetividades", es el vórtice par en el fondo del canal con el subsecuente vórtice de horquilla, asimismo el vórtice de pie en la parte anterior del obstáculo y el vórtice de superficie libre, estos vórtices están ampliamente reportados en la literatura de flujos con obstáculos. Sin embargo, hay otros para los que la literatura no hace mención de ellos ni de sus causas físicas, como varios vórtices de anillo, vórtices de tubo, vórtices en las aristas del obstáculo y varios núcleos vorticosos, sobre los cuales no se halló referencia alguna.

Los resultados obtenidos hasta ahora, son interesantes y han permitido obtener información complementaria al estudio de las estructuras turbulentas en el fondo de un canal. A pesar de ello, aún quedan más dudas que aciertos. Este es el principio de las cosas novedosas, como lo mencionó el profesor Moisés Berezowsky (Comm. pers.).

Dos cosas resaltan a primera vista, las estructuras turbulentas están ligadas tanto al modelo de turbulencia como al mallado. La simulación correcta de éstas requerirá de un refinamiento de ambas condiciones, lo cual lleva a un mayor conocimiento teórico y matemático del problema. Evidentemente, esto también lleva a una complejidad numérica, tanto por la solución de los modelos de turbulencia de orden superior, como del requerimiento de un equipo de cómputo más potente; por esta razón estudios con técnicas LES o DNS, sólo son aplicables a problemas bidimensionales en los cuales se ha logrado representar muy bien la estela de Von Kármán a una distancia suficientemente larga (Rodi, 1992). Así pues, es claro que los estudios tridimensionales que existen en la época actual están limitados tanto en espacio físico como en números de Reynolds, y a la espera de una nueva generación de computadoras, (J.C.R. Hunt, 1989).

El modelo propuesto considera conceptos fundamentales que permitieron la simulación con suficiente precisión; y una malla con incrementos pequeños y progresiones logarítmicas, el tamaño de ésta fue de 53 x 53 x 59 elementos. El programa fue corrido en una estación de trabajo SUN ultra de dos procesadores. Cada simulación, tomó alrededor de 12 horas de cálculo.

Para obtener más y mejores resultados se propuso, además de ampliar el dominio, refinar la malla, lo cual se llevó a cabo, sin embargo, esta vez la capacidad de la estación de trabajo no fue suficiente. Por lo que en el futuro se planea ejecutar el programa con dichas modificaciones, en una supercomputadora tipo CRAY.

Todo lo anterior tiene que ver con algo muy importante, y esto es que, utilizando un modelo promediado, sin un equipo de cómputo tan sofisticado y con un costo de tiempo de cómputo

extremadamente bajo, se logró reproducir una amplia gama de estructuras turbulentas, algunas de las cuales son consideradas por algunos autores como estructuras coherentes; esto se refiere por supuesto, al vórtice par. Se presenta también un indicio de estructuras que emergen del fondo del canal y que siguen la dirección del flujo conforme se desarrolla la capa límite. La analogía de este fenómeno con las estructuras denominadas "burst" queda por investigar.

El desarrollo posterior de este estudio tiene que ver con las modificaciones ya mencionadas, además de la inclusión de un modelo de orden superior, y la visualización de estructuras coherentes aplicada a procesos de transporte de sedimentos. También, y debido a que la formación de vórtices (en canales) depende fuertemente de las condiciones de frontera, por ejemplo, el vórtice de superficie libre (Nezu y Nakagawa, 1993), la perspectiva del trabajo, se relaciona con la incorporación al programa **QUETZAL/3D** de condiciones de frontera más reales y por ende más complejas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anderson, D. A., Tannehill, J. C. y Pletcher, R. H., (1980) '*Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*', W.J Minkowycs y E.M. Sparrow, Editors, Hemisphere publishing corporation, USA.
- Acarlar M.S. y Smith C.R., (1987) '*A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer . Part. 1. Hairpin vortices generated by a hemisphere protuberance*', J. Fluid Mech., vol 175: pp. 1-41.
- Acarlar M.S. y Smith C.R., (1987) '*A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer . Part. 2. Hairpin vortices generated by a fluid injection*', J. Fluid Mech., vol 175: pp. 43-83.
- Arfken, G., (1981) '*Métodos matemáticos para físicos*', Editorial Diana. México.
- Berezowsky, V.,(1994) '*Análisis de flujos turbulentos a superficie libre*' Series del Instituto de Ingenieria , UNAM No. 564. México.
- Bird, R. B., Stewart, W. E. y Lightfoot, E. N., (1987) '*Fenómenos de transporte*', Ed. Repla, México.
- Boussinesq, J. (1877) '*Essai sur la théorie des eaux courantes*', Mem. Pres. par div. Savants a l'Academie Sci., Paris, 23, 1-680.
- Boussinesq, J. (1897) '*Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section*', Tomo I-II, Gautier-Villars, Paris.
- Bradshaw, P., D.H. Ferriss and N. P. Atwell, (1967) '*Calculations of boundary layer development using the turbulent energy equation*', J. Fluid Mech., vol. 28, pp. 593-616.
- Bradshaw, P., (1976) '*Turbulence*', Topics in applied physics, Vol. 12. Ed. Spriger-Verlag Berlin Heidelberg New York. USA.
- Bradshaw, P., (1987) '*Turbulent Secondary Flows*', Ann. Rev. Fluid Mech. 1987, Vol. 19: pp. 53-74
- Brown, G. L. y Roshko, A. (1974) '*On density effects and Large structures in turbulent mixing layers*', J. Fluid Mech.76, 127-44.
- Cervantes, J., (1988) '*Apuntes de introducción al estudio del flujo turbulento*' Departamento de fluidos y termica. U.N.A.M. México.

- Chen, C. J. y Rodi, W., (1980) *Vertical turbulent buoyant jets*, Heat and Mass transfer, Pergamon Press, England.
- Chorin, A. J., (1967) *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*, J. Comp. Physics. 2, pp. 12-26.
- Chou, P.Y., (1949) *Pressure flow of a turbulent fluid between two infinite parallel planes*, Quart. Appl. Math., 3, pp. 198-209.
- Chung, M.K. y Sung, H.J., (1984) *Four-equation turbulence model for prediction of the turbulent boundary layer affected by buoyancy force over a flat plate*, J. Heat Mass Transfer, Vol. 27, pp. 2387-2395.
- Daly, B.J. y Harlow J.F., (1970) *Transport equation in turbulence* Phys. Fluids, vol. 13, pp. 26-34.
- Daly, B.J. y Harlow J.F., (1981) *Dinámica de fluidos con aplicaciones en la ingeniería* Ed. Trillas, Primera reimpression. México.
- Deissler, R. G., (1986) *Is Navier-Stokes turbulence chaotic?*, Phys. Fluids, vol 29, No. 5.
- Dekeyser, I. y Sini, J. F., (1987) *Numerical prediction of turbulent plane jets and forced plumes by use of  $\kappa$ - $\epsilon$  model of turbulence*, J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, no. 9, pag. 1787-1801, Grand Britain.
- De Moor, G., (1983) *Les theories de la turbulence dans la couche limite atmosphérique*, Cours et manuels No. 3, Ecole Nationale de la Météorologie Toulouse-Mirail, France.
- Favre, A. J., (1971) *Equations statistiques aux fluctuations turbulentes dans les écoulements compressibles*, C. R. Académie de Sciences. Serie A.
- Fletcher, C. A. J., (1988) *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vol. 1 y 2. Ed. Springer-Verlag, USA.
- Frank, W., (1988) *Transport phenomena in turbulent flows*, Hirata M., Kasgi N., Editors. Hemisphere Publishing Corporation, USA.
- Franke, R. y Rodi, W., (1992) *Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulence models*, F. Durst, Re. Friedrich, B.E. Launder, F. W. Schmidt, U. Schumann y J.H. Whitelaw, Editors. Turbulent Shear flows 8. Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

- Fox y Mc Donald, (1978) *'Introduction to fluid mechanics'*, Ed. John Wiley & sons.
- Gawain, T.H. y Pritchett, J.W., (1970) *'A unified heuristic model of fluid turbulence'*, J. Comp. Physics, Vol. 5.
- Harlow, F.H. y Welch, J.E., (1965). Phys. Fluids 8, 2182-2189.
- Hinze, J.O., (1987) *'Turbulence'*, Ed. Mc. Graw Hill Publishers Company, Ltd. USA.
- Hirsch, C., (1988) *'Numerical computation of internal and external flows'*, Fundamentals of numerical discretization, Vol. 1. Ed. John Wiley & sons, USA.
- Ippen, A.T. y F. Raichlen, (1957). *'Turbulence in civil engineering; Measurements in free surface streams'*, J. Hydraulics Div., ASCE 83: HY-5:1-27.
- Kazimi, S.M.A. (1976) *'Mechanic solids'*, Ed. Mc. Graw Hill Publishers Company, Ltd. USA.
- Kim, J., P. Moin, y R. Moser (1987). *'Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number'*, J. Fluid Mech., Vol. 177:133-166.
- Klebanov, P.S., (1954) *'Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient'*, NACA, TN-3178.
- Kolmogorov, A.N., (1941) *'The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers'*, C.R. Acad. Sci., U.R.S.S., 30:301.
- Kolmogorov, A.N., (1942) *'Equations of turbulent motion of an incompressible fluid'*, Izv. Akad. Nauk, SSSR, ser. Fiz. VI, Nos. 1-2, 56-58.
- Larousse A., Martinuzzi R., y Tropea C., (1992) *'Flow around surface-mounted, three-dimensional obstacle'*, F. Durst, Re. Friedrich, B.E. Launder, F. W. Schmidt, U. Schumann and J.H. Whitelaw, Editors. Turbulent Shear flows 8. Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- Laufer, J., (1951) *'Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel'*, NACA, Tech., Report 1053.
- Laufer, J., (1954) *'The structure of turbulence in fully developed pipe flow'*, NACA, Tech., Report 1174.
- Launder, B. E. y Spalding, D. B., (1972) *'Lectures in mathematical models of turbulence'*, Ed. Academic Press Inc., Grand Britain.
- Launder, B. E. y Spalding, D. B., (1974) *'The numerical computation of turbulent flow'*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., vol. 3, pp. 269.



- Launder, B. E., (1975) *'Progress in the modelling of turbulent transport'*, Von Kármán Institute for Fluids Dynamics, Lecture series No. 76, Rhode St. Genèse, Bélgica.
- Launder, B. E., (1988) *'Turbulence modelling of three-dimensional shear flows'*, 2nd European turbulent conference, Berlin, Alemania.
- Launder, B. E., (1991) *'Review of second-moment closure: present and future?'*, Von Kármán Institute for Fluids Dynamics, Lecture series N 1991-02, Rhode St. Genèse, Bélgica.
- Leschziner, M. A., (1991) *'Two equation models for high Reynolds-Number flow'* Von Kármán Institute for Fluids Dynamics, Lecture series N 1991-02, Rhode St. Genèse, Bélgica.
- Lesieur, M., (1993) *'Turbulence in fluids'*, Ed. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- Levi, E., (1982) *'Mecánica de los fluidos'*, Instituto de Ingeniería, UNAM. México.
- Levi, E., (1965) *'Elementos de mecánica de fluidos'*, Ed. Limusa. México.
- Lumley, J. L. y Panofsky, H. A., (1964) *'The Structure Atmospheric Turbulence'*, Ed. John Wiley & Sons, USA.
- Madsen, O.S., (1976) *'Sediment transport and coastal processes'*, Ed. MIT Press. USA.
- Mason, P.J. y Morton B.R., (1986) *'Trailing vortices in the wake of surface-mounted obstacles'*, J. Fluid Mech., vol 175: pp. 248-293.
- Massey, B. S., (1979) *'Mecánica de fluidos'*, Ed. C.E.C.S.A. México.
- Moin, P. y J. Kim., (1982) *'Numerical investigation of turbulent channel'*, J. Fluid Mech., Vol. 118: pp: 341-377.
- Mollo-Christensen, E. y Landahl, M. T., (1992) *'Turbulence and random processes in fluid mechanics'*, Ed. Cambridge University Press. USA.
- Mompean, G., (1989) *'Modélisation des écoulements turbulents avec transferts thermiques en convection mixte'*, Tesis de doctorado de la École Centrale de Lyon, France.
- Nee, V.W. y L.S.G. Kovaszny, (1969) *'Simple phenomenological theory of turbulent shear flows'*, Phys. Fluids, vol. 12: pp. 473-484.
- Newman, R.G., Launder, B.E. and Lumely, J.L., (1981) *'Modelling the behaviour of homogeneous scalar turbulence'*, J. Fluid Mech., Vol. 111: pp. 217-232.
- Newman, R.G., Launder, B.E. and Lumely, J.L. (1981) *'Modelling the behaviour of homogeneous scalar turbulence'* J. Fluid Mech., Vol. 111, pp. 217-232.

- Nezu, I., (1977 a) "Turbulent structure in open channel flows", Tesis de doctorado presentada en la Universidad de Kyoto; Kyoto, Japón
- Nezu, I. Y Rodi, W. (1986) "Open channel flow measurements with a laser Doppler anemometer", J. Hydraulic Eng., ASCE, 112:335-355.
- Nezu, I. Y Nakagawa, H., (1993) "Turbulence In Open Channel Flows", Monograph. Ed. A. A. Balkema, Rotterdam, Netherlands.
- Nogotov, E. F., (1978) 'Applications of numerical heat transfer', Ed. UNESCO, Series in thermal and fluids engineering, USA.
- Peralta, R., (1994) "Fluidos: apellido de líquidos y gases ", Colecc. La ciencia desde México, Num. 119. Ed. Fondo de Cultura Económica. México.
- Perry, A.E. y Chong, M.S., (1987) "A description of eddying motions and flow patterns using critical-point concepts", Ann. Rev. Fluid Mech. 1987, Vol.19: pp. 125-155.
- Peyret, R. y Taylor. T. D., (1983) 'Computational methods for fluid flow", Ed. Springer-Verlag, USA.
- Prandtl, L., y Wieghardt. (1925) 'Über die ausgebildete Turbulenz', ZAMM, 5: 136.
- Prandtl, L., y Wieghardt. (1945) 'Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz', Nach. Akad. Wiss., Goettingen, Vol. 19, no. 6.
- Ramírez, H., y Capetillo, R., (1996) 'Estudio de patrones de flujo y dispersión de contaminantes atmosféricos, con un modelo 3D', XVII Congreso Latinoamericano de Hidraulica, Guayaquil, Ecuador.
- Ramírez, H., (1991) 'Modelisation au second ordre d'écoulements turbulents fortement chauffés', Tesis de doctorado del Laboratoire de Mécanique de Fluides de la École Centrale de Nantes, France.
- Rey, C., (1985) 'Mise en évidence des effets de variation de la masse volumique dans les équations aux corrélations des champs turbulents de vitesse et de temperature', Jornadas de estudio sobre 'Les écoulements à masse volumique variables'. Marsella, France. pp. 29.
- Reynolds, O., (1883) 'An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channel', Philos. Trans. Roy. Soc., London, Vol. 174: pp. 935-82.
- Reynolds, O., (1894) 'On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion', Philos. Trans. Roy. Soc., London, Vol. 186: pp. 123-164.

- Reynolds, W. C., (1976) *'Computation of Turbulent Flows'*, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, California, USA.
- Rodi, W., (1978) *'Turbulence models and their application in hydraulics'*, Book Publication of International Association for Hydraulic Research, Delft, Netherlands.
- Rodi, W., (1980) *'Turbulence models and their application in hydraulics: a state of the art review'*, Book Publication of International Association For Hydraulic Research, Delft, Netherlands.
- Rodi, W., (1991) *'Introduction to the modeling of turbulence'*, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, Ed. Germany Pergamon Press.
- Roger, P. y Thomas, D. T. (1983) *'Computational methods for fluid flow'*, Springer series in computational physics; Springer-Verlag New York, USA.
- Rotta, J. C., (1951) *'Statistische theorie nichthomogener turbulenz'* Z. Phys., 129, p. 547.
- Sadeh, W. Z., (1988) *'Trends in turbulence measurements'*, Proc. Of 3<sup>rd</sup>. Int. Symp. On refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, IAHR, Tokyo, pp.1-24.
- Schiestel, R., (1982) *'Modelisation des écoulements turbulents'*, Curso I.M.S.T. Université d'Aix-Marseille II.
- Smith, C.R., (1996), *'Coherent Flow structures in smooth-wall turbulent boundary layers: Facts, mechanisms and speculation'*, Coherent Flow Structures in Open Channels; Philip J. Ashworth, Sean J. Bennett, James L. Best, Stuart J. McLelland, Editors. Ed. John Wiley and Sons.
- Sini, J. F., (1986) *'Modélisation d'écoulements turbulents libres bidimensionnels avec effets de flottabilité. Cas du panache en milieu stratifié'*, Tesis de doctorado del Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence de L'Université d'Aix-Marseille II, France.
- Spalding, D.B., (1971) *'Concentration fluctuation in a round turbulent free jet'*, Chem. Eng. Science, Vol. 26: pp. 95-107.
- Streeter, V.L. y Wylie, E.B., (1988) *'Mecánica de los fluidos'*, Ed. Mc Graw Hill/Interamericana, México.
- Taylor, G.I., (1935) *'Statistical theory of turbulence'*, Parts 1-4, Proc. of Royal Soc. of London. Series A, 151:421.

- Taft, J. (1974) 'A numerical model for including arbitrary external boundaries in the M.A.C. incompressible fluid computing technique', J. Comp. Phys. Vol. 4, pp. 543-551.
- Tominaga, A y K. Ezaki, (1985) "An experimental study on three-dimensional turbulent structure in a rectangular open-channel flow ", Proc. Of Japan Soc. Civil Engrs, 357: 81-88 (in Japanese).
- Winant, C.D. y Browand, F. K., (1974) "Vortex pairing: The mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number", J. Fluid Mech. Vol. 93: pp.325-35.
- Welty, J. R., Wicks, C. E. y Wilson, R. E., (1982) 'Fundamentos de transferencia de momento, calor y masa', Ed. Limusa, México.
- Werner H. y Wengle H., (1992) "Large-eddy simulation of turbulent flow over and around a cube in a plate", F. Durst, Re. Friedrich, B.E. Launder, F. W. Schmidt, U. Schumann y J.H. Whitelaw, Editors. Turbulent Shear flows 8. Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- Yalin, M.S., (1972) "Mechanics of sediment transport" , Ed. Pergamon Press, Oxford.