



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“ Propagación de Ondas Electromagnéticas en un Plasma Magnetizado de Materia Extraña ”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

ENRIQUE MORENO MENDEZ



MEXICO, D. F.

2000

201795



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Propagación de Ondas Electromagnéticas en un Plasma Magnetizado de Materia Extraña"

realizado por MORENO MENDEZ ENRIQUE

con número de cuenta 8922951-1 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Propietario DR. DANY PIERRE PAGE ROLLINET

Propietario DR. MANUEL TORRES LABANSAT

Suplente DR. JUI TO JAVIER MARTINELL BENITO

Suplente DR. WILLIAM LEE ALARDIN

Suplente DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH

O. B.
Manuel Torres
Jui To Javier Martinell Benito
William Lee Alardin
JGP

Consejo Departamental de Física
Patricia Goldstein Menache
DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

A mi familia.

A la memoria de mi abuelo Ricardo Méndez
y mi tío Ricardo Moreno.

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a todas aquellas personas que me han ayudado a salir adelante a lo largo de mi vida y, en particular, a lo largo de mi carrera.

En particular quiero agradecer a mis padres, Matias y Rosamaría, a mis abuelos Chuy, Raquel, Ricardo y Carlos, y mis tios, quienes siempre han estado dispuestos a ayudarme. A mis hermanas, Ana y Raquel, y a mis primos con quienes he compartido mi niñez y mis sueños.

A Berenice, quien me ha apoyado incondicionalmente y me ha dado motivación e inspiración en todos mis proyectos e ideas.

También agradezco a mi tutor Dany Page, quien me permitió dar un primer vistazo a lo que es hacer ciencia y me apoyó siempre durante la realización de esta tesis. A mis sinodales, cuyas valiosas aportaciones ayudaron a formar este trabajo: M. Torres, J. Martinell, W. Lee y J. Hirsch.

A profesores como Virginia Abrín, Concepción Ruiz, José Ríos, Ana Irene Ramírez, Alicia Oliver, Patricia Goldstein, Neil Bruce, Rubén Barrera, Gerardo Carmona, Manuel Peimbert, Julieta Fierro, Miguel Angel Herrera, Claudio Firmani, Ramiro García, Esteban Amano Toyomoto, Lukas Nellen, Miriam Mondragón, Martí Ruiz, Alejandro Ayala, Antonio García, Raúl Espejel Paz, Javier Páez y Jacobo Konigsberg.

A todos mis amigos, quienes siempre han tenido valiosas pala-

Durante la realización de esta tesis y durante mi carrera he contado con las siguientes becas y apoyos, por las que agradezco al Ingeniero José de la Herrán, al Dr. Dany Page, al Dr. Martí Ruiz y a las instituciones que se mencionan a continuación:

Divulgación de la ciencia en Universum, 97 – 12/140 – 928
(Servicio Social).

Proyecto Conacyt 2127P-E9507.

Conacyt 25504-E.

SMF y Facultad de Ciencias (Viaje a Fermilab).

Fermilab (Estancia).

Índice General

| | |
|--|-----|
| | i |
| Agradecimientos | iii |
| Resumen | xi |
| 1 Materia Extraña | 1 |
| 1.1 Partículas Elementales | 1 |
| 1.1.1 Bosón de Higgs | 2 |
| 1.1.2 Quarks | 2 |
| 1.1.3 Leptones | 4 |
| 1.1.4 Interacción Gravitacional | 4 |
| 1.1.5 Interacción Electrodébil | 5 |
| 1.1.6 Interacción Fuerte | 6 |
| 1.2 Confinamiento de Quarks | 7 |
| 1.2.1 Vacío de QCD | 8 |
| 1.2.2 Modelo de la Bolsa | 12 |
| 1.3 Materia extraña | 14 |
| 1.3.1 Materia extraña hadrónica | 14 |
| 1.3.2 Strangelets | 15 |
| 1.3.3 Materia extraña en bulto | 15 |
| 1.3.4 Ecuación de estado para la materia de quarks | 18 |
| 1.3.5 Modelo Numérico | 24 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2 | Estrellas Extrañas | 29 |
| 2.1 | Modelo estándar de la evolución estelar | 29 |
| 2.2 | Supernovas | 36 |
| 2.3 | Objetos Compactos | 43 |
| 2.3.1 | Materia degenerada en objetos compactos | 44 |
| 2.3.2 | Enanas blancas | 47 |
| 2.3.3 | Estrellas de Neutrones | 47 |
| 2.3.4 | Pulsares y Magnetares | 50 |
| 2.3.5 | Estrellas Extrañas | 53 |
| 2.3.6 | Agujeros Negros | 55 |
| 2.4 | Masa y radio de las estrellas compactas | 56 |
| | | |
| 3 | Plasma de Quarks y Electrones | 61 |
| 3.1 | Conceptos | 62 |
| 3.1.1 | Frecuencia del plasma | 62 |
| 3.1.2 | Colisiones | 65 |
| 3.1.3 | Girofrecuencia | 66 |
| 3.2 | Plasma de Quarks y Electrones | 67 |
| 3.2.1 | Ecuaciones de Maxwell | 67 |
| 3.2.2 | Ecuación de onda en un plasma no magnetizado | 69 |
| 3.2.3 | Tensor dieléctrico para un plasma frío de quarks y electrones | 71 |
| 3.2.4 | Ondas Electromagnéticas en un plasma frío de quarks y electrones | 73 |
| 3.2.5 | Ondas electromagnéticas en un plasma frío y magnetizado de quarks y electrones | 77 |
| | | |
| 4 | Ondas en un Plasma de Quarks y Electrones | 83 |
| 4.1 | Ecuación de Estado | 84 |
| 4.2 | Caso Perpendicular | 86 |

| | |
|---|------------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i> | ix |
| 4.2.1 Plasma con una sola especie | 91 |
| 4.2.2 Resultados numéricos | 93 |
| 4.3 Caso Paralelo | 95 |
| 4.3.1 Resultados numéricos | 99 |
| 5 Discusión y Conclusiones | 103 |

Resumen

El objetivo principal de esta tesis es realizar un estudio sobre la posibilidad de detectar radiación térmica de una estrella de materia extraña de quarks o de quarks extraños (de ahora en adelante la llamaremos *estrella extraña*). Para lograr este objetivo la tesis está dividida en cinco capítulos:

CAPÍTULO 1:

Este capítulo inicia con una introducción general al tema de las partículas elementales y las interacciones fundamentales, describiendo las diferencias entre quarks y leptones, y entre los bosones de norma de las cuatro interacciones fundamentales. A continuación se explica brevemente qué es y bajo qué condiciones puede existir la materia de quarks. Para esto se hace un breve estudio sobre el modelo de la *bolsa de M.I.T.*, y posteriormente se revisa la ecuación de estado de la materia de quarks. La última parte de este primer capítulo hace un pequeño recuento de las posibles manifestaciones que puede tener la materia extraña. a la vez que revisa las condiciones particulares de la materia extraña en bulto, es decir, un estado en el que, dadas las condiciones de densidad y temperatura, los quarks *up*, *down* y *strange*, son *libres* dentro de la estrella extraña en lugar de estar confinados en hadrones.

CAPÍTULO 2:

El segundo capítulo de la tesis comienza mostrando las bases del modelo estándar de la astronomía, es decir, explicando las condiciones para el equilibrio hidrostático de las estrellas, y analizando el proceso evolutivo de éstas. De forma tal que la parte media del capítulo revisa un estudio acerca de los procesos que ocurren durante una explosión de supernova tipo II, esto es, el proceso que sigue una estrella para poder formar un objeto compacto. Este capítulo termina enumerando algunos de los diferentes tipos de objetos compactos que existen (enanas blancas, estrellas de neutrones, estrellas extrañas y agujeros negros), ya sea teóricamente u observacionalmente, a la vez que revisa la teoría de la materia en estado degenerado.

CAPÍTULO 3:

El tercer capítulo de la tesis realiza el análisis teórico de la transmisión de ondas electromagnéticas en un plasma de quarks y electrones magnetizado. Para esto, empieza revisando conceptos tales como la frecuencia de plasma, la girofrecuencia y las colisiones. A continuación, revisa las ecuaciones de Maxwell para el caso microscópico y para el caso macroscópico, a partir de las cuales se obtiene la ecuación de onda para plasmas no magnetizados. Posteriormente, se obtiene el tensor dieléctrico para un plasma de quarks y electrones, con lo cual se determinan las condiciones para la transmisión de ondas electromagnéticas en el plasma. Finalmente, se realiza este mismo estudio para un plasma sometido a un campo magnético espacial y temporalmente uniforme.

CAPÍTULO 4:

Finalmente, en este último capítulo se realiza un análisis numérico de las ecuaciones para la transmisión de ondas electromagnéticas dentro del plasma. Se revisan los casos de ondas con propagación perpendicular y de ondas con propagación paralela al campo magnético, además, para este último caso se revisan los casos de polarización circular derecha e izquierda.

CAPÍTULO 5:

A manera de conclusión se revisan los resultados obtenidos en el capítulo 4, y se observan las diferencias en la transmisión de ondas electromagnéticas en un plasma magnetizado y en un no magnetizado. Para este último se encuentra que no hay transmisión con frecuencia menor a la del plasma de quarks y electrones, mientras que para el primero, el campo magnético permite la propagación de algunos modos.

Capítulo 1

Materia Extraña

En este capítulo empezaremos por hacer una breve introducción a la física de partículas elementales. Primero describiremos los tipos de partículas que forman el modelo estándar y cuáles son sus características principales. Además veremos cuáles son las interacciones fundamentales, a que partículas afectan, y cuales son sus mediadores o transmisores; posteriormente revisaremos el confinamiento de los quarks y el modelo de la bolsa: una vez hecho esto, continuaremos con una descripción de la materia de quarks. Posteriormente, estudiaremos qué es la materia extraña, cuáles son las condiciones para su existencia y cuáles son las condiciones para su estabilidad. Finalmente, veremos cómo se puede producir de manera natural.

1.1 Partículas Elementales

Hoy en día el modelo estándar de las partículas elementales consta de tres interacciones fundamentales (mediadas por bosones), seis leptones y seis sabores de quarks, cada uno con tres posibles colores, además tenemos un cuadro equivalente para las antipartículas; finalmente el cuadro se completa con el bosón de

Higgs [Tabla 1.1 en la página 3]. El modelo estándar es la teoría que mejor ha logrado describir y predecir las observaciones experimentales, no obstante, no es una teoría completa, pues estrictamente no incluye a la interacción fuerte y además no toma en cuenta a la interacción gravitatoria. Es por esto que se ha estado trabajando en el desarrollo de teorías más generales como la de Gran Unificación (GUT), que intenta incorporar a la interacción fuerte, ó las de cuerdas, supercuerdas y supersimetrías (SUSY), donde se incorpora también a la interacción gravitacional.

1.1.1 Bosón de Higgs

El bosón de Higgs es el encargado de asociar a cada una de las partículas su masa observada. La interacción que cada partícula tenga con éste determina su masa en reposo. Por ejemplo, como el fotón no tiene masa en reposo no interactúa con el campo de Higgs; o puesto de otra manera, mientras mayor sea la interacción de una partícula con este campo, mayor será su masa.

Sin embargo en este trabajo no mencionaremos más al bosón de Higgs dado que no está estrechamente relacionado con la manera en que desarrollaremos los temas que se tratarán de aquí en adelante.

1.1.2 Quarks

Tanto los quarks como los leptones están divididos en tres generaciones, siendo la primera generación la de las partículas más ligeras y por ende, las más abundantes en la naturaleza. Los quarks pueden ser de uno de los seis *sabores* que se muestran en la tabla 1.1, es decir Up, Down, Charm, Strange, Top o Bot-

| Partículas Elementales | | | | | | |
|------------------------|---------------------------------|------------------------|---------------------------------------|--------------------|---|-------------------|
| Fermiones | | | | | | |
| Materia | | | | | | |
| Generación | I | | II | | III | |
| Partícula | | | | | | |
| Quarks | u Up | ~ 5 +2/3 | c Charm | ~ 1.270 +2/3 | t Top | ~ 175.000 +2/3 |
| | d Down | ~ 9 -1/3 | s Strange | ~ 175 -1/3 | b Bottom | ~ 4.400 1/3 |
| Leptones | ν_e neutrino e | < 0.008 0 | ν_μ neutrino μ | < 0.25 0 | ν_τ neutrino τ | < 35 0 |
| | e^- Electron | 0.511 1 | μ^- Muón | 105.6 1 | τ^- Tauón | 1.776.9 -1 |
| Antimateria | | | | | | |
| Generación | I | | II | | III | |
| Antipartícula | | | | | | |
| Antiquarks | \bar{u} AntiUp | ~ 5 -2/3 | \bar{c} AntiCharm | ~ 1.270 -2/3 | \bar{t} AntiTop | ~ 175.000 -2/3 |
| | \bar{d} AntiDown | ~ 9 +1/3 | \bar{s} AntiStrange | ~ 175 +1/3 | \bar{b} AntiBottom | ~ 4.400 +1/3 |
| Antileptones | $\bar{\nu}_e$ antineutrino e | < 0.008 0 | $\bar{\nu}_\mu$ antineutrino μ | < 0.25 0 | $\bar{\nu}_\tau$ antineutrino τ | < 35 0 |
| | e^+ Antielectrón | 0.511 +1 | μ^+ Antimuón | 105.6 +1 | τ^+ Antitauón | 1.776.9 +1 |
| Bosones | | | | | | |
| Interacción | Fuerte | Electro- magnetismo | Débil | Gravita- cional | Campo de Higgs | |
| | G_0 | γ_0 | Z^0 W^\pm | g_0 | H | |

Tabla 1.1: Las masas de las partículas, en la parte superior derecha de cada cuadro, están dadas en unidades de MeV/c^2 , estas masas son las de la partícula libre para los leptones y las llamadas "masas de corriente" para los quarks. Las cargas eléctricas, ubicadas en la parte inferior izquierda de cada cuadro, están dadas como $Q/|e|$. Los quarks (y los 8 gluones) pueden tener cada uno de los tres colores de la fuerza fuerte.

tom. Tanto los quarks como los leptones tienen espín con valor de $1/2$.

Los quarks interactúan principalmente por medio de la fuerza fuerte, y por lo tanto tienen carga fuerte además de la carga eléctrica, es decir, *color*. Los colores son llamados *rojo*, *verde* y *azul*. Entonces, tomando en cuenta todos los colores y sabores, en total hay 18 variedades de quarks y 18 de antiquarks. Por medio de interacciones débiles, los quarks pueden cambiar de sabor pero sólo si esto involucra también un cambio de carga, no obstante, su color debe permanecer igual. Mediante interacciones fuertes, los quarks pueden cambiar de color, pero su sabor debe permanecer igual.

1.1.3 Leptones

Existen seis tipos de leptones con sus respectivos antileptones, el electrón, el muón y el tauón y sus respectivos neutrinos. Los primeros tres, tienen masa y una carga eléctrica negativa con valor $Q/|e^-| = -1$; los neutrinos, en cambio, parecen tener una masa muy reducida o nula y su carga eléctrica es cero. Ninguno de los leptones tiene interacción fuerte, pero todos interactúan por medio de la fuerza débil. Esto deja a los neutrinos únicamente con interacción débil (y gravitacional); ésta es la razón por la cual los neutrinos pueden atravesar grandes cantidades de materia sin que interactúen con ésta, lo que a su vez, los hace muy difíciles de detectar experimentalmente.

1.1.4 Interacción Gravitacional

La interacción gravitacional es la interacción que ha sido conocida y estudiada durante más tiempo por la humanidad, no obs-

tante es la menos entendida. Sabemos que su versión cuántica requiere ir más allá de la teoría de campo, a la teoría de cuerdas. La partícula mediadora es el gravitón, cuyo espín es 2, y su masa, también, es igual a cero. Sin embargo, esta elusiva partícula aún no ha sido detectada.

El que la masa del gravitón sea cero, produce que sea una fuerza de muy largo alcance. No obstante, es la fuerza más débil de todas éstas. En este trabajo, esta fuerza sólo será tratada en el marco de la relatividad general.

1.1.5 Interacción Electrodébil

En el modelo estándar la interacción electromagnética y la débil se unifican dando como resultado la interacción electrodébil. Los bosones de norma de esta interacción son el fotón (γ), el Z^0 (ze-ta cero), el W^+ y el W^- , todos con espín igual a 1. El fotón es una partícula neutra y sin masa, mientras que el Z^0 , es neutro pero tiene una masa de alrededor de $91.18 GeV/c^2$. Por el otro lado los bosones W^+ y W^- son bosones con carga $Q/|e^-| = +1$ y $Q/|e^-| = -1$ respectivamente; la masa de estos dos bosones es de aproximadamente $80.33 GeV/c^2$. El hecho de que el γ sea un bosón sin masa permite que las interacciones electromagnéticas sean de gran alcance, en cambio las interacciones que necesitan de los bosones Z^0 , W^+ y W^- son de muy corto alcance, pues estos son muy masivos. Ésta es una de las razones por las que los neutrinos tienen una trayectoria media tan larga aún en medios muy densos, pues para que un neutrino interactúe, se necesita el intercambio de un Z^0 , un W^+ ó un W^- , y como acabamos de mencionar, la distancia entre el neutrino y la partícula interactuante debe ser muy pequeña para que la probabilidad de interacción sea considerable. Dado esto, no es tan sorprendente

que la primera señal detectable de una explosión de supernova sea una gran cantidad de neutrinos, pues son los primeros en poder desacoplarse del núcleo de la estrella en el momento de la explosión.

La fuerza débil es la responsable de la desintegración *beta* de los núcleos atómicos radioactivos y de los neutrones libres entre muchos otros fenómenos similares. En general, muchos procesos característicos de la interacción débil no son observables ya que son superados por las interacciones fuertes o por las electromagnéticas. Este tema será tocado más adelante, en la siguiente sección.

1.1.6 Interacción Fuerte

El estudio de la fuerza fuerte es relativamente complejo, y aún no existen métodos que permitan hacer cálculos suficientemente precisos usando la teoría de la Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés). A esto hay que agregar el hecho de que no se conocen los valores exactos de varias constantes fundamentales (la constante de acoplamiento α_c , las masas de las partículas fundamentales m_f e incluso constantes fenomenológicas como la de la bolsa de MIT) que se utilizan para hacer cálculos de este tipo, lo que deja abiertas muchas posibilidades al realizar dichas estimaciones. Esto nos permite, al menos teóricamente, decir que la existencia de quarks desconfiados es posible en la naturaleza (el concepto de desconfinamiento será estudiado en la Sección 1.2.1).

La fuerza fuerte es la responsable de que los quarks estén unidos en los bariones y en los mesones; la fuerza que une a los bariones en los núcleos atómicos es un residuo de esta misma fuerza. La fuerza fuerte consta de tres cargas diferentes para

materia, a las cuales se les llamó *rojo*, *verde* y *azul*, de manera que se necesita tener un quark de cada color para formar un barión. De igual manera se requiere un quark de un color y un antiquark del anticolor correspondiente para formar un mesón, de forma tal que la partícula formada sea neutra con respecto a la interacción fuerte. A los bariones y a los mesones se les conoce como *hadrones*. Los bosones de norma de la fuerza fuerte, es decir, los bosones portadores de la interacción fuerte, son los *gluones*, estos son ocho y también tienen color. Los gluones no tienen carga eléctrica ni masa y su espín tiene valor de 1.

Dentro de un intervalo espacial de un fermi (i.e. $10^{-15}\text{m} = \text{femtómetro}$), los quarks están casi libres, es decir no "sienten" fuerza, sin embargo, si uno de los quarks se aleja más allá de esta distancia, la fuerza fuerte crecerá más conforme más se aleje, esto es conocido como *confinamiento*. Entonces, si intentamos alejar un quark, de los otros dos quarks con los que conforma a un barión, o del antiquark con el que conforma a un mesón, dado que la fuerza crece, también crecerá la energía, y cuando esta energía cumpla la relación $E = 2m_q c^2$ donde m_q es la masa de este tipo de quarks, se generará un par quark-antiquark de manera que se obtengan un barión y un mesón ó dos mesones (según sea el caso inicial), quedando nuevamente, localmente neutra la carga fuerte.

1.2 Confinamiento de Quarks

Con el desarrollo actual de QCD, no es posible excluir la posibilidad de que exista materia de quarks desconfiados. Tampoco los resultados experimentales obtenidos hasta ahora, muestran indicios de que la materia de quarks sea algo que no se puede

formar e incluso sea estable; sin embargo es importante recalcar que en las condiciones con las que se ha podido experimentar hasta la fecha, la materia hadrónica es más estable, puesto que no se han logrado crear condiciones bajo las cuales la materia de quarks sea estable.

Como una posible prueba de la existencia de materia de quarks están los eventos de rayos cósmicos *Centaurus* [1]. En estos eventos, el rayo cósmico primario se fragmenta en aproximadamente 10^3 bariones sin que haya rastros de otras partículas. Cada barión tiene una energía de alrededor de $10^3 - 10^4$ GeV. Al parecer, estos rayos penetran en la atmósfera terrestre mucho más de lo que un núcleo atómico puede penetrar. Es por estas razones que se ha propuesto que estos eventos puedan ser provocados por pequeñas *gotas* de materia de quarks.

Una condición necesaria para que la formación de materia de quarks sea viable, es que la densidad del medio sea varias veces mayor que la densidad nuclear, esto es $\rho > \rho_0$ donde ρ_0 es la densidad en un núcleo atómico, es decir, $\rho_0 \approx 2.8 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$. Bajo estas condiciones, los bariones pierden su individualidad, y los quarks que los formaban son *libres* de recorrer regiones mucho más amplias produciéndose así la materia de quarks. La ecuación de estado para la materia de quarks se describe en la Sección 1.3.4.

1.2.1 Vacío de QCD

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría que explica las interacciones entre las partículas que tienen color. No obstante, hacer cálculos que impliquen la resolución de las ecuaciones de QCD cuando la interacción se hace relativamente grande es muy complicado [3]; de hecho, para el caso particular con el que tra-

bajaremos, i.e. materia nuclear a densidades muy altas, QCD es una teoría de la que no podemos obtener resultados prácticos para la ecuación de estado que utilizaremos. El modelo de la bolsa permite hacer cálculos simplificados de este tipo, es por esto que la mayoría de los cálculos que se han efectuado sobre este tema han sido realizados usando este modelo.

El modelo de la bolsa está basado en la noción de la libertad asintótica. Es un modelo fenomenológico que trata a los hadrones como *bolsas* dentro de las cuales los quarks están libres. Esta teoría permite obtener, bajo cierto ajuste de parámetros libres, las masas de los quarks. En QCD una bolsa o burbuja en el vacío cromodinámico se forma dado que el campo de color desplaza el condensado de gluones del vacío físico. La energía de esta burbuja es positiva ya que el condensado de gluones tiene energía negativa.

El modelo de la bolsa toma al medio como un *dieléctrico de color* perfecto (o casi perfecto) [4], es decir un medio equivalente a un dieléctrico (ver figura 1.1), pero para la interacción fuerte. A diferencia del caso electromagnético, las constantes dieléctricas de color en este tipo de medios son $\epsilon \ll 1$ cuando $\epsilon_{vac} = 1$ donde ϵ_{vac} es la constante dieléctrica de color para el estado vacío. ϵ está definida como $\epsilon_L = g_L^2/g^2$ donde g_L es la constante de acoplamiento de la fuerza fuerte renormalizada en el límite de longitud de onda grande (L), y $g = g_l$, donde l es una longitud de onda arbitraria, por ejemplo la del radio del protón. La razón por la que esto ocurre se describe a continuación [5]. Supongamos, para QED, que tenemos una carga de prueba aislada: ésta está emitiendo continuamente fotones virtuales en todas direcciones, es decir, produce un campo. En el caso del método perturbativo en teoría cuántica del campo,

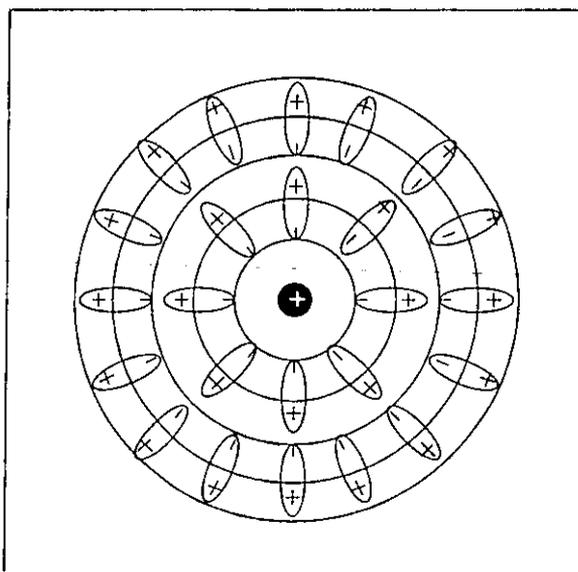


Figura 1.1: Esta figura muestra una carga eléctrica dentro de un medio dieléctrico. Como puede observarse, las cargas medidas dentro de diferentes círculos varían; esto ocasiona que la carga sea apantallada y por lo tanto, su valor total sea difícil de medir. En QED el vacío polarizable genera pares $e^- - e^+$ (fermiones) que producen un medio dieléctrico que apantalla a las cargas eléctricas. En QCD el vacío polarizable produce, principalmente, pares $g - \bar{g}$ es decir pares de bosones, con lo que las cargas fuertes crean agujeros en el medio dieléctrico de color.

tenemos que tomar en cuenta que existe la posibilidad de que estos fotones creen un par $e^- - e^+$ (ver figura 1.2.a). Por otro lado sabemos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0$ y que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ (ρ designa aquí la densidad de carga). Ahora, como debemos tomar en cuenta la posibilidad de la creación de pares $e^- - e^+$, entonces $\rho = \rho(r)$ donde r es la distancia, entonces $\rho_0 \geq \rho(r)$, pues la creación de estos pares tiene un efecto de apantallamiento sobre la carga (ver figura 1.1), o bien, la carga está en un medio dieléctrico creado por los pares $e^- - e^+$. Incluso es posible demostrar que la carga de un electrón $q_e \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 0$, [5]. En QCD ocurre algo similar con las cargas de color, sin embargo hay una

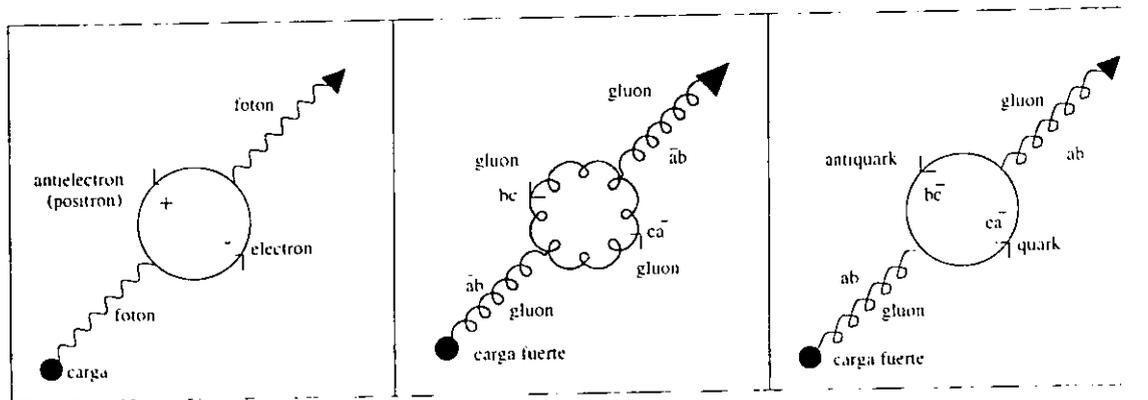


Figura 1.2: En el primer cuadro tenemos la polarización del vacío para QED, donde un fotón puede producir un par de leptones, en este caso $e^- - e^+$. Sin embargo en QCD existen dos posibilidades, esto es, el gluón puede producir un par de bosones (los gluones de la figura central), o un par de fermiones (los quarks de la figura de la derecha). Las letras a , b y c representan a los tres posibles colores de la carga fuerte.

diferencia muy importante, la creación de pares $g - \bar{g}$ (gluones) es ampliamente favorecida sobre la creación de pares $q - \bar{q}$ (quarks) cuando se polariza el vacío (ver figura 1.2), ya que la masa de los gluones es cero. Esto ocasiona un cambio de signo en las ecuaciones, ya que como $H = B$ y $D = \epsilon E = (1 - \kappa)E$, si los bosones dominan sobre los fermiones en la polarización del vacío, entonces $\epsilon < 1$; esto finalmente provoca que, cuando $\epsilon \ll 1$, el medio sea antiapantallante. Esto tiene como consecuencia que, al contrario de QED, $q_q \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$, es decir, hay libertad asintótica.

Los hadrones son regiones donde debido a la presencia de carga fuerte o de color se forma un *hoyo* en el medio. Debido a la naturaleza antiapantallante del medio, la carga inducida en la pared interior del hoyo es del mismo signo que la carga (q) contenida (pues $\epsilon \ll 1$). Por lo que si se quiere reducir el tamaño del hoyo, hay que realizar trabajo en contra de la repulsión entre

la carga contenida y la inducida. Este trabajo es infinito si se quiere reducir a cero el tamaño del hoyo, y por lo tanto éste no desaparecerá. A estas inhomogeneidades en el medio se les llama *bolsas*, *estructuras de dominio* ó *solitones*. Dentro de la bolsa, $\epsilon = 1$, mientras que fuera de ésta $\epsilon = 0$, ó $\epsilon \ll 1$. Ahora, cuando se tiene una carga aislada, o bien, el color total es diferente de cero, la masa de la bolsa es infinita, pues $\epsilon_{med} \rightarrow 0$ y

$$M \equiv U_f + U_{hoyo} \sim 4/3(q^2/2\epsilon_{med})^{3/4}(4\pi C)^{1/4}$$

donde U_f es la energía de la interacción fuerte, U_{hoyo} es la energía requerida para crear un *hoyo* en el medio, ϵ_{med} es igual a ϵ en el exterior de la bolsa (i.e. en el medio), y C es una constante. Por el contrario, si dentro de la bolsa se tiene color neutro, entonces la masa tiene un valor finito. De aquí vemos que la energía requerida para separar quarks a una distancia r es aproximadamente proporcional a ésta. Y entonces el confinamiento de los quarks se puede explicar con la suposición de que el vacío de QCD es un dieléctrico perfecto de carga de color (o casi perfecto).

1.2.2 Modelo de la Bolsa

Al comparar la masa de un hadrón con la masa de los quarks que lo componen podemos ver que a primera aproximación $m_q \cong 0$. Si introducimos un campo fenomenológico de espín cero ϱ que sea función de ϵ de manera que $\varrho(\epsilon) = 0$ cuando $\epsilon = 1$, y $\varrho(\epsilon) = \varrho_{vac}$ cuando $\epsilon = 0$, de manera que dentro de un hadrón $\varrho = 0$, y fuera del hadrón $\varrho = \varrho_{vac}$. puede mostrarse (ver referencia [4]) que habrá una energía de volumen $4\pi p R^3/3$, donde R es el radio de la bolsa, y $p \equiv U(0)$, con $U(\varrho)$ una función de densidad de energía potencial fenomenológica con mínimo absoluto en $U(\varrho_{vac}) = 0$ y un mínimo local en $\varrho = 0$. Si $U(\varrho)$ es muy

pronunciada cerca de $\varrho = 0$ y $\varrho = \varrho_{vac}$, para lograr minimizar la energía, debe existir una energía superficial de la forma $4\pi R^2 s$, donde s es una constante cuyo valor depende de la forma de $U(\varrho)$.

Dentro del hadrón, los quarks tienen energía cinética. Cuando las masas de los quarks se aproximan a cero, $p \propto 1/R$. Tomando a N como el número de quarks y antiquarks presentes en el hadrón, el término de la energía cinética puede escribirse como $N\xi/R$, donde ξ es una constante. Para los estados hadrónicos bajos $N = 2$ para mesones y $N = 3$ para bariones.

Ahora, la masa para un hadrón puede expresarse en potencias de la constante de acoplamiento g : $M = M_0 + g^2 M_1 + g^4 M_2 + \dots$ (ver [4]), por lo que, si suprimimos el intercambio vectorial ($g^2 = 0$), la masa M del hadrón a orden cero estará dada por

$$M = M_0 = N \frac{\xi}{R} + \frac{4\pi}{3} R^3 p + 4\pi R^2 s,$$

que depende de las tres constantes ξ , p y s .

Entonces, el hadrón se parece a una burbuja de gas dentro de un medio (en este caso el vacío). En esta analogía, dado que el medio ejerce una "presión" p sobre la burbuja, habrá una energía de volumen $(4/3)R^3 p$. Además hay una "tensión superficial" s que da la energía en la superficie $4\pi R^2 s$, y una "energía térmica" $N\xi/R$ del gas dentro de la burbuja. El radio R se determina minimizando la energía total M . De $-\partial M/\partial R = 0$, se obtiene que

$$4\pi R^3(2s + Rp) = N\xi.$$

La burbuja es detenida del colapso por la energía térmica del gas $N\xi/R$, y de la expansión por la tensión superficial s y la presión p . A esta burbuja se le conoce como "bolsa" en la literatura.

Cabe mencionar que a primer orden (g^2), la energía total de interacción debida a los gluones depende linealmente de N , el número total de quarks y antiquarks dentro del hadrón. Por consiguiente, es proporcional a N/R , igual que la energía cinética de los quarks $N\xi/R$. Por ende, a primer orden en g^2 tenemos que

$$M = M_0 + g^2 M_1 = N \frac{\xi_r}{R} + \frac{4\pi}{3} R^3 p + 4\pi R^2 s,$$

donde $\xi_r = \xi + O(g^2)$ es una constante independiente de N . El radio R se determina de la misma manera que antes, utilizando la ecuación $-\partial M/\partial R = 0$. Como podemos observar, las dos ecuaciones para la masa son de la misma forma; entonces con las correcciones de primer orden g^2 incluidas, podemos ver que las masas de los hadrones dependen únicamente en tres constantes: ξ_r , p y s .

1.3 Materia extraña

La materia extraña puede existir en varias formas físicas diferentes entre sí, dependiendo del número bariónico que tenga; entonces, podemos tener materia extraña compuesta por un solo barión, a la cual llamaremos materia hadrónica; y podemos tener materia extraña compuesta por varios bariones ($6 \leq A \leq 100 - 1000$), conocida como gotas de materia extraña o strangelets; ó podemos tener materia en bulto ($A \geq 100 - 1000$). A continuación hablaremos de estos tres casos.

1.3.1 Materia extraña hadrónica

Una de las posibles manifestaciones es la materia hadrónica, donde se tiene, entre otras, a las siguientes partículas: Los Λ -

hiperones o simplemente Λ 's (uds , e isospín $I = 0$), los Σ 's (qq_s , donde $q = u, d$, e $I = 1$), los Ξ 's (qss , nuevamente con $q = u, d$, e $I = 1$) y el Ω^- (sss)(aunque en total son 27 partículas diferentes divididas en un *decuplete*, dos *octupletes* u *octetes* y un *singulete*); sin embargo estos bariones ó hiperones, como son llamados en algunas ocasiones (también pueden ser llamados hipernucleones), decaen vía la interacción débil en tiempos del orden de 10^{-10} seg: esto significa que la materia extraña NO es estable si $A = 1$. No obstante existen algunos laboratorios donde se trabaja en producir núcleos que contengan este tipo de partículas, dando así un nuevo grado de libertad a la tabla periódica de los elementos químicos.

1.3.2 Strangelets

Otro tipo de materia extraña son las *strangelets* ó gotas de materia extraña; éstas no tienen más que unos cuantos centenares de bariones (i.e. A es pequeño), por lo que los efectos de tensión superficial son relevantes y no es adecuado el modelo del gas de Fermi para describirlas. En su lugar se utiliza el modelo de la bolsa de MIT, y se llenan los orbitales de quarks de una bolsa esférica. En general, se predice que este tipo de materia es inestable para A 's menores que $\sim 10 - 100$.

1.3.3 Materia extraña en bulto

Finalmente, tenemos la materia extraña en *bulto* (del inglés *bulk*), cuya descripción encaja dentro del análisis de la materia de quarks realizado en la Sección 1.3.4. Ha sido postulado que si la materia extraña existe y es estable en bulto, entonces debe ser el estado base de toda la materia, pues tendría

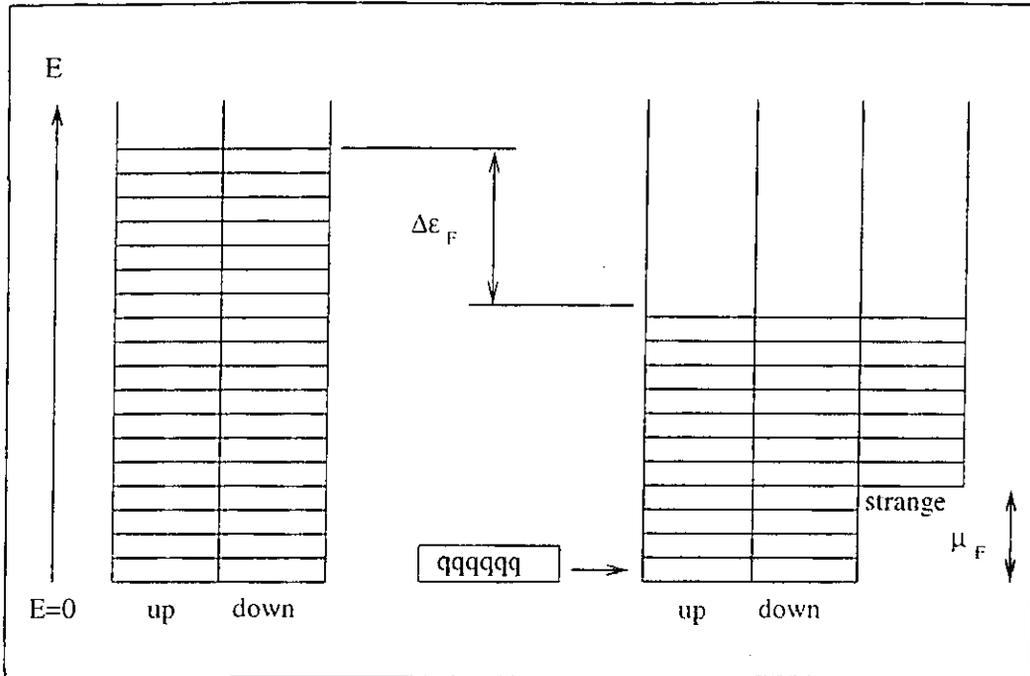


Figura 1.3: En este diagrama se muestra como en el caso de la materia de quarks, disminuye la energía de Fermi ϵ_F (donde $\epsilon_F = \epsilon_F$) un valor $\Delta\epsilon_F$ cuando los quarks se reparten en tres sabores siempre y cuando la masa del tercer tipo de quarks sea inferior a esta energía.

que estar más ligada que el hierro ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ para poder formarse y no decaer rápidamente (referencia [1]). Lo que tiene la siguiente implicación: puede absorber nucleones de materia no-extraña mediante un proceso exotérmico; esto traería como consecuencia que las estrellas de neutrones que tuvieran una fracción de materia extraña, serían convertidas en estrellas de materia extraña. Sin embargo, este tema será abordado con mayor profundidad hasta el próximo capítulo.

Entonces, revisemos qué es lo que físicamente está sucediendo dentro de la materia de quarks que hace que la materia con tres sabores de quarks sea más estable sobre la que tiene

sólamente dos sabores. Empezemos por revisar algunos conceptos de estadística cuántica; dado que los quarks son fermiones, o partículas con espín de valor $1/2$, obedecen el principio de exclusión de Pauli y por ende la estadística de Fermi-Dirac. Esto es, el principio de exclusión prohíbe que haya dos partículas con los mismos números cuánticos tales como el espín, el color, el sabor, etcétera, por lo tanto no podemos tener a dos quarks con el mismo sabor, color y espín en un mismo nivel de energía. La degeneración de los niveles de energía puede ser un factor importante, pues en un mismo nivel de energía podemos acomodar a seis quarks de cada sabor, pues los podemos repartir en tres colores y en dos espines. Entonces, si logramos tener materia de tres sabores (u, d, s), lograremos acomodar 18 quarks por nivel, en lugar de tener materia de dos sabores (u, d) que sólamente puede acomodar 12 quarks por nivel; con esto reduciremos la energía de Fermi ϵ_F del sistema, y por ende la energía total de éste. Esto se obtiene a partir de que la energía de Fermi está dada por:

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{\gamma_f 4m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}, \quad (1.1)$$

pues el factor de degeneración γ_f aumenta (ver la referencia [14]). Además sabemos que un grupo de N fermiones tiene una energía total dada por

$$U = \int E dn = \int E \frac{dn}{dE} dE \quad (1.2)$$

Entonces, si tenemos que $T \simeq 0$, podemos aproximar dn/dE a $g(E)$ (que representa al número de estados en el intervalo de energía entre E y $E + dE$, este número proviene de las diferentes orientaciones que puede tener el momento \vec{p}), con lo que

obtendremos:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{\gamma_f 4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} \quad (1.3)$$

donde $\gamma_f = 6$ es el factor de degeneración para los quarks. Entonces, integrando de 0 a ϵ_F obtenemos que:

$$U = \frac{\gamma_f 4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} E^{3/2} dE = \frac{\gamma_f 8\pi V (2m^3)^{1/2}}{5h^3} \epsilon_F^{5/2} \left(\frac{N}{V} \right) \quad (1.4)$$

Ahora, si sustituimos, utilizando la ecuación (1.1), obtenemos que la energía total es:

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \quad (1.5)$$

donde cabe destacar que este cálculo es no relativista. El resultado para el cálculo relativista es el siguiente:

$$U = \frac{4}{5} N \epsilon_F. \quad (1.6)$$

Visto esto, queda claro que U decrece junto con ϵ_F . La figura 1.3 muestra gráficamente este resultado. Por lo tanto, si existe la materia de quarks, entonces debe ser materia extraña, pues es más estable dado que su energía de Fermi es menor. Y además, debe ser un estado de la materia más ligado que el ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, el cual es el más ligado de que se conoce hoy en día. Entonces, si la materia extraña existe, es el estado base.

1.3.4 Ecuación de estado para la materia de quarks

A continuación, se presentan las ecuaciones de estado para materia de quarks como en la referencia [2]; estas ecuaciones fueron deducidas en dicha referencia ó en referencias mencionadas ahí

mismo e incluyen la información más relevante de los principales artículos sobre el tema hasta la fecha de publicación. Las ecuaciones deducidas utilizan el modelo de la bolsa que fue explicado en la sección anterior. Dado que las masas de los quarks up y down, y del electrón son muy pequeñas, las tomaremos iguales a cero. No obstante veremos que sus potenciales químicos no lo son.

Entonces, usando el modelo de la bolsa tenemos que la presión p , la densidad de energía ϵ , la densidad bariónica n_{bar} , la densidad de carga eléctrica q y la densidad de entropía s son:

$$p = \sum_q \frac{1}{3} \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\infty k^3 \frac{\partial \epsilon_q(k)}{\partial k} [n(k, \mu_q) + n(k, -\mu_q)] k^2 dk \quad (B7)$$

$$\epsilon = \sum_q \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\infty \epsilon_q(k) [n(k, \mu_q) + n(k, -\mu_q)] k^2 dk + B. \quad (1.8)$$

$$n_{bar} = \sum_q \frac{1}{3} \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\infty [n(k, \mu_q) - n(k, -\mu_q)] k^2 dk, \quad (1.9)$$

$$q = \sum_q \frac{\gamma_q}{2\pi^2} q_q \int_0^\infty [n(k, \mu_q) - n(k, -\mu_q)] k^2 dk. \quad (1.10)$$

$$s = \frac{S}{V} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V, \mu_q}, \quad (1.11)$$

donde tenemos que la energía está dada por

$$\epsilon_q(k) = (m_q^2 + k^2)^{1/2}, \quad (1.12)$$

y

$$n(k, \mu_q) = \left(\exp \left\{ \frac{\epsilon_q(k) - \mu_q}{T} \right\} + 1 \right)^{-1} \quad (1.13)$$

es la función de distribución de Fermi. q_q es la carga eléctrica de los quarks con sabor q . $\gamma_q = 3_{color} \times 2_{spin}$ es la degeneración de los quarks para cada sabor. El factor $1/3$ se debe a que existen

tres colores de quarks. La presión de la bolsa es B . Es decir B representa la diferencia de energía positiva por unidad de volumen del vacío desconfinado con respecto al vacío confinado.

Cuando se toma el límite $T \rightarrow 0$, las funciones de distribución se convierten en funciones escalón a energía μ_q , por lo que para expresar los resultados se pueden usar integrales estándar, tales como:

$$\int_0^k \frac{k^4}{\sqrt{m^2 + k^2}} dk = \frac{1}{4} \left[k^3 \sqrt{m^2 + k^2} - \frac{3}{2} m^2 k \sqrt{m^2 + k^2} + \frac{3}{2} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + k^2} + k}{m} \right) \right].$$

Usando estas integrales se obtiene que las ecuaciones para la presión, la densidad de energía y la densidad bariónica quedan expresadas de la siguiente manera:

$$p = -B + \sum_q \frac{1}{4\pi_2} \left[\mu_q k_q (\mu_q^2 - \frac{5}{2} m_q^2) + \frac{3}{2} m_q^4 \ln \left(\frac{\mu_q + k_q}{m_q} \right) \right], \quad (1.14)$$

$$\epsilon = B + \sum_q \frac{3}{4\pi_2} \left[\mu_q k_q (\mu_q^2 - \frac{1}{2} m_q^2) + \frac{1}{2} m_q^4 \ln \left(\frac{\mu_q + k_q}{m_q} \right) \right], \quad (1.15)$$

$$n_{bar} = \sum_q \frac{k_q^3}{3\pi_2}, \quad (1.16)$$

donde k_q es el momento de Fermi para el sabor q definido en términos del potencial químico $\mu_q = (m_q^2 + k_q^2)^{1/2}$.

El límite $T = 0$ es apropiado para los cálculos que se harán más adelante, pues las densidades de energía y de partículas son muy altas en el interior de las estrellas compactas (i.e. estrellas

de neutrones, de materia de quarks o de materia extraña), entonces, la densidad de energía debida a la temperatura es muy pequeña comparada con la densidad de energía debida a la densidad de bariones; es precisamente esta última, la que hace que las fronteras que definen a los bariones se *borren* y finalmente queden libres los quarks de los nucleones. Además de que la energía debida a la temperatura no es muy grande inicialmente, esta última cae rápidamente después del nacimiento de la estrella compacta a temperaturas del orden de los megaelectrón volts (MeV : $1 MeV = 1.1 \cdot 10^{10} K \times k_B$, k_B siendo la constante de Boltzmann), la cual es claramente muy pequeña si se compara con las energías de la escala nuclear ($\sim GeV$). Es importante hacer notar el hecho de que estamos tratando con agregados muy grandes de materia de quarks y por lo tanto estamos ignorando efectos de tensión superficial, además de que los electrones y/o positrones se encuentran en grandes cantidades y mezclados con los quarks, por lo que deben ser tratados, también, como un gas degenerado de Fermi.

En la referencia [6] (y en las que ahí se citan), y posteriormente en la referencia [2] se obtiene el potencial químico para la especie q de quarks a primer orden a partir de la constante de estructura fina de la fuerza fuerte $\alpha_s = g^2/16\pi$, donde g es la constante de acoplamiento de la fuerza fuerte como se presentó en la sección anterior. Como es conocido ([24]), el gran potencial termodinámico (Ω) está dado por cualquiera de las siguientes igualdades:

$$\Omega = -PV = F - N\mu = E - TS - N\mu, \quad (1.17)$$

donde P es la presión, V es el volumen, F es la energía libre, N es el número total de partículas, μ es el potencial termodinámico,

E es la energía, T es la temperatura y S es la entropía.

Por otro lado, es necesario efectuar una renormalización con respecto a un punto σ en el que $m = m(\sigma)$ y $\alpha_c = \alpha_c(\sigma)$ estén definidas. Esto se hace con la idea de poder desarrollar expansiones perturbativas con un *grupo mejorado de renormalización* para materia de quarks, pues estos cálculos están desarrollados con base en un modelo aproximado, esto es, el modelo de la bolsa de MIT, ver referencias [6], [7] y [8]. En principio, las variables observables deben ser independientes del valor del punto de renormalización σ , no obstante, en la práctica, cuando α_c no es pequeña y sólomente se utilizan cálculos de primer orden, el valor de σ sí afecta el resultado. El valor de σ se escoge muy cercano al de los potenciales químicos usados de manera que elimine a los logaritmos con valores muy grandes ($\ln\sigma/\mu$) a órdenes mayores y, además, que no genere singularidades cuando $m \rightarrow 0$; por lo tanto, de acuerdo con la referencia [6] el valor escogido es $\sigma = M_N/3 \simeq 300 \text{ MeV}$. Entonces, el potencial termodinámico renormalizado con respecto al punto σ para la especie q de quarks y de acuerdo con la ecuación (1.17) es:

$$\begin{aligned}
\Omega_q(m_q, \mu_q) = & \\
& - \frac{\gamma_q}{24\pi^2} \left\{ \mu_q \sqrt{\mu_q^2 - m_q^2} (\mu_q^2 - \frac{5}{2} m_q^2) + \frac{3}{2} m_q^4 \ln \left[\frac{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_q^2}}{m_q} \right] \right. \\
& - \frac{2\alpha_c}{\pi} \left[3 \left(\mu_q \sqrt{\mu_q^2 - m_q^2} - m_q^2 \ln \left[\frac{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_q^2}}{\mu_q} \right] \right)^2 \right. \\
& - 2 (\mu_q^2 - m_q^2)^2 - 3m_q^4 \ln^2 \left(\frac{m_q}{\mu_q} \right) \\
& \left. \left. + 6 \ln \left(\frac{\sigma}{\mu_q} \right) \left(\mu_q \sqrt{\mu_q^2 - m_q^2} m_q^2 + m_q^4 \ln \left[\frac{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_q^2}}{m_q} \right] \right) \right] \right\}, \tag{1.18}
\end{aligned}$$

donde μ_q es el potencial químico y m_q es la masa para los quarks con sabor q ($q = u, d, s$). Los potenciales termodinámicos para el electrón ($m_e = 0.511 MeV$) y para el muón ($m_\mu = 106 MeV$, nótese que en este caso $\mu_e = m_e$ y $\mu_\mu = m_\mu$) se obtienen utilizando el mismo procedimiento, únicamente se deben excluir los términos dependientes de α_c , y cambiar el factor de degeneración a $\gamma_\lambda = 2$ en lugar de $\gamma_q = 6$, ya que ni el electrón ni el muón tienen color, y el espín tiene solamente dos posibles orientaciones. A partir de esto, pueden ser calculadas la presión, la densidad de energía, la densidad de bariones, las densidades de las distintas especies de quarks, y la densidad de carga; todas éstas expresadas respectivamente, en las siguientes fórmulas dependientes del potencial termodinámico Ω :

$$p = -B - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu} = -B - \sum_i \Omega_i, \quad (1.19)$$

$$\epsilon = B + \sum_i (\Omega_i + \mu_i n_i), \quad (1.20)$$

$$n_{bar} = \frac{1}{3} \sum_{u,d,s} n_q, \quad (1.21)$$

$$n_q = - \left(\frac{\partial \Omega_q}{\partial \mu_q} \right)_{T, V}, \quad (1.22)$$

$$q = \sum_i n_i q_i, \quad (1.23)$$

donde la i es para los tres tipos de quarks (u, d y s) y los dos tipos de leptones (e , μ); el quark charm al igual que los quarks bottom y top (b, t) y el leptón (τ) de la tercera generación no son tomados en cuenta en estas fórmulas, pues su masa es mucho mayor que su potencial químico. q_i es la carga de la partícula (ya sea quark o leptón); y, como se mencionó anteriormente, B

denota la diferencia de energía del vacío confinado y el desconfinado, es decir, la constante de la bolsa.

1.3.5 Modelo Numérico

A continuación mostraremos un par de gráficas realizadas por medio de un modelo numérico. En nuestro modelo utilizamos las siguientes cuatro ecuaciones:

$$\mu_s = \mu_d \equiv \mu, \quad (1.24)$$

$$\mu_e + \mu_u \equiv \mu, \quad (1.25)$$

$$n_{bar} = \frac{1}{3} (n_u + n_d + n_s), \quad (1.26)$$

$$-n_e + \frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s = 0. \quad (1.27)$$

Donde las dos primeras nos dan el equilibrio químico entre las cuatro especies de partículas que contiene nuestro modelo de materia extraña; la tercera ecuación nos fija el número bariónico en el sistema, y la cuarta ecuación nos da neutralidad de carga. Los valores de las densidades n_i ($i = u, d, s$ y e) para las partículas se obtienen de los potenciales químicos utilizando las ecuaciones (1.18) y (1.22). Tenemos así cuatro ecuaciones para las cuatro variables μ_u , μ_d , μ_s y μ_e . Variando el valor de n_{bar} podemos, al resolver estas ecuaciones, obtener la presión y densidad de energía de la materia de quark usando las ecuaciones (1.19) y (1.20), es decir la ‘ecuación de estado’ $P = P(n_{bar})$ y $\epsilon = \epsilon(n_{bar})$. En este modelo, nuestros parámetros libres son α_c , B , y m_s , a los cuales les variaremos sus valores (ver figuras 4.2 a 4.5); σ se fija con el valor indicado previamente establecido ($\sigma = 300\text{MeV}$).

Practicamente esta cuatro ecuaciones se resuelven numericamente con el metodo de Newton-Raphson. Este metodo necesita valores iniciales de las variables que deben estar cerca de la solución y, por iteraciones, converge hacia la solución hasta obtener la precisión requerida. Por esta razón se empieza con un n_{bar} muy grande de tal manera que la solución debe ser $\mu_u \simeq \mu_d \simeq \mu_s$ y $\mu_c \simeq 0$ y estos valores se toman como valores iniciales para las iteraciones de Newton-Raphson. Teniendo la solución a este primer valor de n_{bar} se sigue disminuyendolo progresivamente y en cada paso se utiliza la solución al n_{bar} anterior como valor inicial. A continuación se muestran, como ejemplo, dos gráficas para el caso $\alpha_c = 0.3$, $m_s = 150\text{MeV}$ y $B^{1/4} = 150\text{MeV}$.

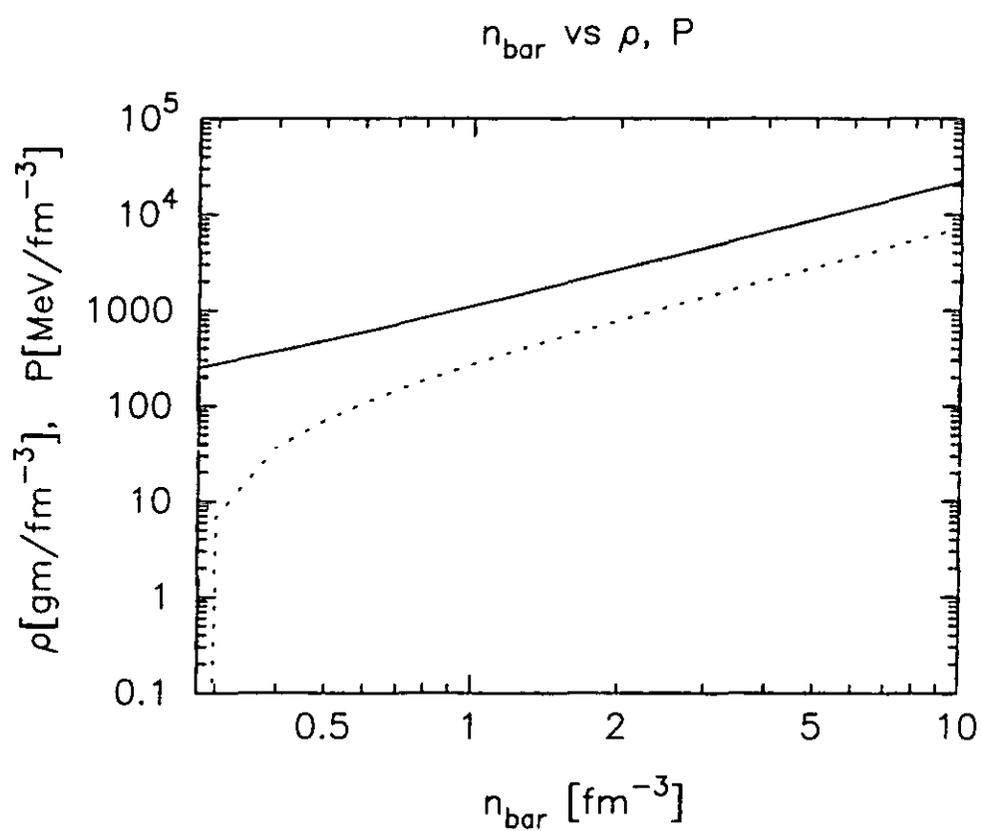


Figura 1.4: Presión (línea continua) y densidad (línea punteada) graficadas contra la densidad de bariones, de acuerdo con las ecuaciones (1.19) y (1.21).

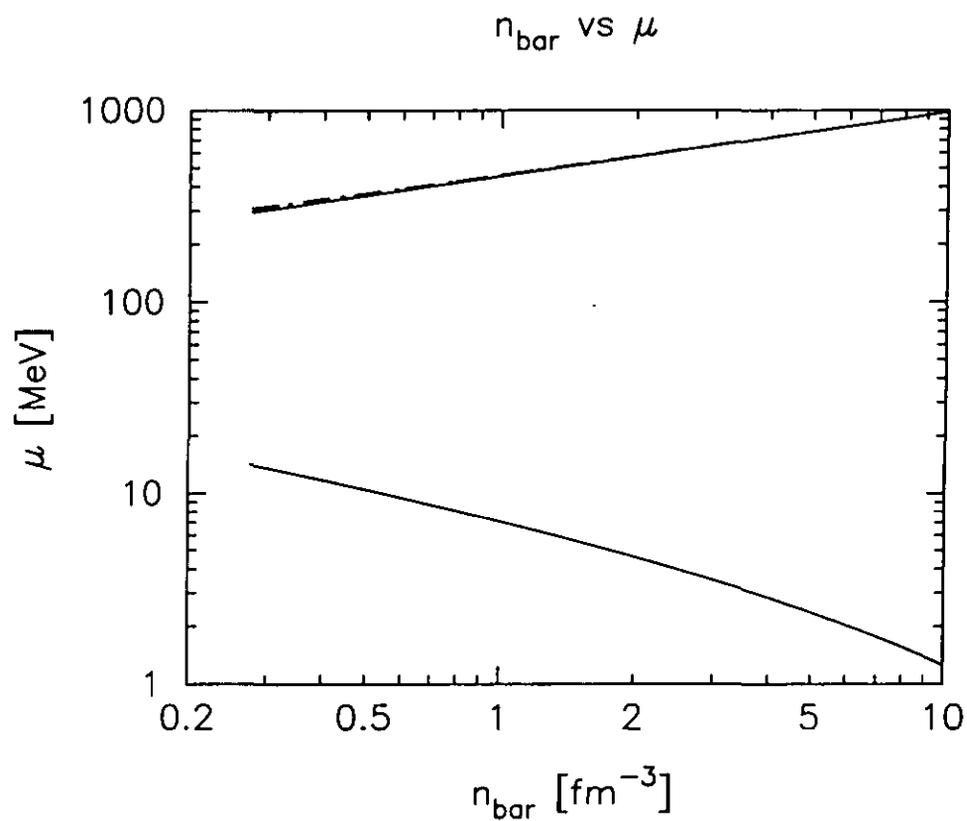


Figura 1.5: Podemos observar como varía el potencial químico de cada especie de partícula con respecto a la densidad bariónica. Podemos ver que los potenciales químicos de los tres quarks son muy parecidos, mientras que el de los electrones es más de un orden de magnitud menor en la superficie.

Capítulo 2

Estrellas Extrañas

A lo largo de este capítulo, describiremos brevemente la evolución estelar, veremos qué tipo de estrellas pueden generar objetos tales como las *estrellas compactas* y los *agujeros negros* pasando por los procesos que los originan. Posteriormente, haremos una descripción y una comparación entre las estrellas de neutrones y las estrellas extrañas, al tiempo que se discuten algunas de las características más sobresalientes de los pulsares. Y finalmente, haremos una breve descripción de los agujeros negros y su posible origen.

2.1 Modelo estándar de la evolución estelar

Empecemos por hacernos las preguntas “¿Qué son las estrellas?” y “¿Cómo *funcionan*?”. Para responder a estas preguntas imaginemos que tenemos una cantidad muy grande de gas; esta cantidad debe ser lo suficientemente grande no sólo para lograr que esté unido gravitacionalmente, sino para que la temperatura en el centro, o mejor dicho, en el *núcleo* de esta aglomeración sea lo suficientemente alta como para encender el hidrógeno que ahí se encuentra. Pero vayamos un poco más a fondo; actualmente sa-

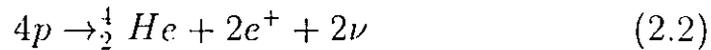
bemos, ya sea por las observaciones, o por la teoría cosmológica, que cerca del 74% de la materia bariónica del universo se encuentra en átomos de hidrógeno (H), y otra fracción como del 24% forma átomos de helio (He), el resto está constituido por núcleos más pesados. Usando la terminología astronómica podemos decir que las abundancias iniciales son $X \simeq 74\%$, $Y \simeq 24\%$ y $Z \simeq 2\%$. Es por esta razón que nos importa que el gas alcance la temperatura a la que se fusiona el hidrógeno cuando hablamos de estrellas, pues es sencillo ver que un gran porcentaje de la masa total original de cualquier estrella se encontrará formando átomos de H. La otra razón fundamental para que nos importe la temperatura de fusión del hidrógeno es que es la más baja de todos los elementos químicos, y por ende, la primera en ocurrir cuando se eleva la temperatura en el núcleo de una protoestrella.

Una vez mencionado lo anterior, podemos continuar con la descripción de la formación de una estrella. Originalmente debe existir una nube de gas; ésta será perturbada por algún medio, por ejemplo, la onda de choque de una explosión cercana de supernova; el paso de esta onda de choque a través de la nube causará variaciones en su densidad, lo que ocasionalmente puede llevar a que se generen colapsos gravitacionales en su interior. El gas contenido dentro de una de estas regiones empezará a aumentar su temperatura, pues la presión se elevará, y podemos ver que si lo aproximamos teóricamente como a un gas ideal la siguiente ecuación se cumplirá:

$$T = \frac{pV}{nk_B} \quad (2.1)$$

donde T es la temperatura, p es la presión, V es el volumen, n es el número de partículas y k_B es la constante de Boltzman. Entonces, al subir la temperatura de la nube de gas, las molecu-

las se disociarán dejando átomos “libres”; además estos átomos empezarán a ionizarse, y por último si la temperatura sube lo suficiente, se fusionarán. Sin embargo, lo que ahora nos interesa es lo siguiente, todos los procesos que acabamos de mencionar, son procesos radiativos, i.e. generan fotones, los cuales, pueden dejar, casi sin pérdida de energía, el campo gravitacional de la nube colapsada de gas. Por lo tanto, existe pérdida de energía para la nube, lo que implica que ésta no podrá desligarse nuevamente, y por lo tanto se garantiza la unión gravitacional de la nube; y más aún, el colapso gravitacional continuará hasta que alguna otra fuerza crezca hasta el punto de poder contrarrestarlo. Esto no sucede sino hasta que la temperatura en el núcleo se eleva lo suficiente como para iniciar el proceso por medio del cual se fusionan 4 átomos de hidrógeno en uno de ${}^4_2\text{He}$ vía la siguiente reacción (el proceso completo viene descrito en el capítulo 7 de la referencia [15]):



con lo cual existe una fuente de energía que permite mantener la temperatura y por lo tanto la presión; con esto se logra controlar el colapso, y por ende el incremento en la temperatura; esto, claro está, hasta que el combustible se agota; cuando se logra este equilibrio, podemos decir que la nube, o mejor dicho, la protoestrella, pasa a ser una estrella. A dicho estado de equilibrio hidrostático donde se consume el hidrógeno, por medio de fusión, se le conoce como secuencia principal, y es donde una estrella pasa cerca del 90% de su “vida”. La ecuación que describe al equilibrio hidrostático se deduce en [15] y es la primera de las mostradas a continuación; entre todas describen a una estrella simétricamente esférica, estática y sin movimiento

hidrodinámico:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (2.4)$$

$$L = -4\pi r^2 \left(\frac{ac}{3\rho\kappa} \right) \frac{dT^4}{dr} \quad (2.5)$$

$$\epsilon = \frac{dL}{dm} \quad (2.6)$$

donde G es la constante gravitacional, r el radio, m la masa, ρ la densidad, L la luminosidad, a es la constante de Stefan-Boltzmann, c es la velocidad de la luz en el vacío, κ la opacidad y ϵ la energía nuclear liberada por unidad de masa por segundo. El Modelo Estándar es una solución de las primeras tres ecuaciones, la última no está considerada explícitamente.

No obstante que la estrella se encuentra perfectamente ligada y bajo equilibrio hidrostático, no permanece estática, pues se encuentra emitiendo fotones (y neutrinos) de manera continua, es decir, perdiendo energía, lo que trae como consecuencia que la estrella evolucione todo el tiempo. Esto es, para poder mantener una temperatura constante, la estrella debe consumir el hidrógeno que se encuentra en su núcleo, lo que a largo plazo creará un núcleo de helio en su interior. Los mejores modelos estelares propuestos hasta la fecha, predicen que la fracción de la masa total de una estrella que se encuentra formando al núcleo de helio de la misma, al final de la secuencia principal, es parecida o igual para, al menos, las estrellas contenidas en el intervalo de 0.1 a 20–30 masas solares (M_{\odot}). Lo cual trae como consecuencia que exista una relación, para este mismo intervalo, aproximadamente homogénea entre la masa inicial de la estrella

y su período de permanencia en la secuencia principal. Y en efecto, observacionalmente, puede comprobarse (ver tabla en la referencia [16]) que la relación entre masa y tiempo está dada, bajo una buena aproximación, por:

$$\frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{-5/2} \quad (2.7)$$

Es decir, si una estrella como el Sol permanece en la secuencia principal al rededor de 10^{10} años, una estrella 10 veces más masiva permanecerá sólomente del orden de 3×10^7 años.

Cuando una estrella haya consumido todo el combustible disponible en su núcleo, habrá llegado al final de su permanencia en la secuencia principal. La falta de reacciones termonucleares ocasionará que la presión hacia el exterior disminuya y por lo tanto, que la contracción gravitacional continúe reduciendo el tamaño del núcleo estelar; con lo cual, la temperatura de éste se elevará nuevamente y la envoltente se expandirá, produciendo una gigante roja. Como puede observarse en la gráfica de E/A vs. A (figura 2.1), el proceso que más energía libera es el de fusionar hidrógeno en helio, seguido por el de fusionar helio en carbón, y mientras más se acerca uno al pico de la gráfica, en el ${}_{26}^{56}\text{Fe}$, menos exotérmica es la reacción, por ende, los diferentes periodos evolutivos de una estrella masiva son cada vez más breves. Experimentalmente, la fórmula que nos proporciona la relación entre la energía de amarre de los núcleos atómicos, E_B , el número de nucleones que contengan, A , y su masa, $M(Z, A)$, es la siguiente (referencia [17]):

$$\frac{E_B}{A} = \frac{c^2}{A} [ZM_H + (A - Z)M_n - M(Z, A)] \quad (2.8)$$

donde E_B es la energía de amarre, A es el número de nucleones del isótopo correspondiente, Z es la carga del núcleo, o lo que

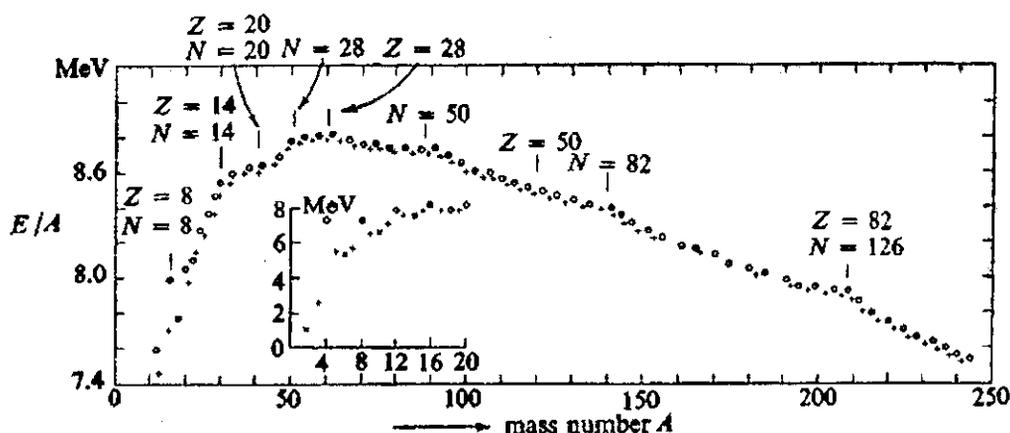


Figura 2.1: Podemos observar que el máximo de esta gráfica se encuentra alrededor de los núcleos que contienen 56 nucleones. Esta gráfica fue obtenida de la referencia [26].

es lo mismo, el número de protones en el núcleo, M_H es la masa atómica del ^1_1H neutro (1.008142amu) y M_n es la masa del neutrón (1.008983amu). La gráfica se muestra en la figura 2.1.

Ahora, la estrella tiene originalmente una entropía por barión inicial de $\sim 100k_B/\text{barión}$, que conforme la estrella evolucione, decrecerá en su núcleo a costa de aumentar en la capa envolvente (principalmente formada de hidrógeno). Esto es intuitivamente claro si vemos que en el núcleo de la estrella originalmente hay nucleones separados unos de otros (hidrógeno ionizado), y conforme la estrella evoluciona, estos nucleones van uniéndose, o mejor dicho, fusionándose para producir átomos más grandes; esto es, los protones y los neutrones se van ordenando (o reduciendo su entropía) dentro de un menor número de núcleos atómicos, mientras liberan energía, la cual calentará las capas exteriores de la estrella (i.e. subirá su entropía). A partir de las ecuaciones de equilibrio hidrostático (2.4, 2.5, 2.6), puede

obtenerse que:

$$S_c = 3/2K_1 \ln(T_c/\rho_c^{2/3}) + K_2 = K_1 \ln(M^2/T^{2/3}) + K_3 \quad (2.9)$$

donde K_1 , K_2 y K_3 son constantes, y el subíndice c indica valores en el centro de la estrella. Entonces, como puede verse, la entropía (S_c), la masa (M) y la temperatura (T) de la estrella están estrechamente relacionadas. De hecho, resulta claro de esta ecuación que la masa de la estrella será la que determine tanto la entropía como la temperatura interiores en cada etapa de la evolución estelar. Es decir, si la estrella no es lo suficientemente masiva cuando se acabe el combustible en su núcleo, comenzará a colapsarse, y la temperatura crecerá. Sin embargo, la entropía decrecerá más rápido (llegando a ser del orden de $2k_B$ /barión) y los electrones presentes en el núcleo de la estrella se degenerarán, deteniendo así, por presión de degeneración, la contracción gravitacional, y por ende el incremento en la temperatura; esto producirá que la estrella se convierta en una enana blanca luego de dispersar, por medio de fuertes vientos estelares, las capas exteriores de la estrella. Este proceso se puede producir durante varias de las tantas etapas de contracción del núcleo de la estrella, lo que trae como consecuencia que puedan existir enanas blancas formadas por diferentes elementos químicos degenerados, por ejemplo He, C, N, O, Si, Ne, etcétera. Incluso, si la protoestrella tiene una masa inferior a $\sim 0.08M_\odot$, la temperatura para encender al hidrógeno no podrá ser alcanzada antes de que ocurra la degeneración de los electrones presentes, lo que trae como consecuencia que se produzca una *enana café*.

No obstante, si la masa de la estrella es lo suficientemente grande, la temperatura de fusión de las *cenizas* de la etapa de combustión anterior será siempre alcanzada antes de que los electrones lleguen a un estado de degeneración. Además, la tem-

peratura crecerá gradualmente hacia el interior, por lo que habrá *capas*, dentro de las cuales se seguirá fusionando el combustible de la etapa anterior, a este modelo se le conoce como de la *cebolla* (ver figura 2.2)

Por otro lado, suponiendo que el material que constituye la estrella satisface una ecuación del tipo $P = (\gamma - 1)u$, u siendo la densidad de energía interna, tenemos el teorema del virial:

$$(3\gamma - 1)U + \Omega_g = 0 \quad (2.10)$$

que relaciona a la energía total interna de la estrella (U) con la energía gravitacional total ($\Omega_g = -K_4GM^2/R$, donde $K_4 \sim 1$ depende de los detalles de la estructura de la estrella). De aquí se puede obtener la expresión para la energía total de confinamiento de la estrella en términos de su radio y su masa:

$$E_T = U + \Omega_g = \frac{4 - 3\gamma}{3(\gamma - 1)} \frac{K_4GM^2}{R} \quad (2.11)$$

por lo tanto, el índice adiabático γ tiene que ser mayor a $4/3$ para que la energía de confinamiento sea negativa y la estrella esté ligada. Para un plasma formado por un gas ideal no degenerado y no relativista el índice adiabático es $5/3$ por lo que fuera de los períodos de contracción, o mejor dicho, cuando la estrella está en equilibrio hidrostático, el índice adiabático permanece arriba del valor $4/3$ y por lo tanto la estrella es estable.

2.2 Supernovas

Si la masa inicial de la estrella se encuentra en el rango contenido entre $\sim 0.08M_\odot$ a $\sim 8M_\odot$: la temperatura crecerá lo suficientemente rápido, durante la contracción al comienzo de la secuencia

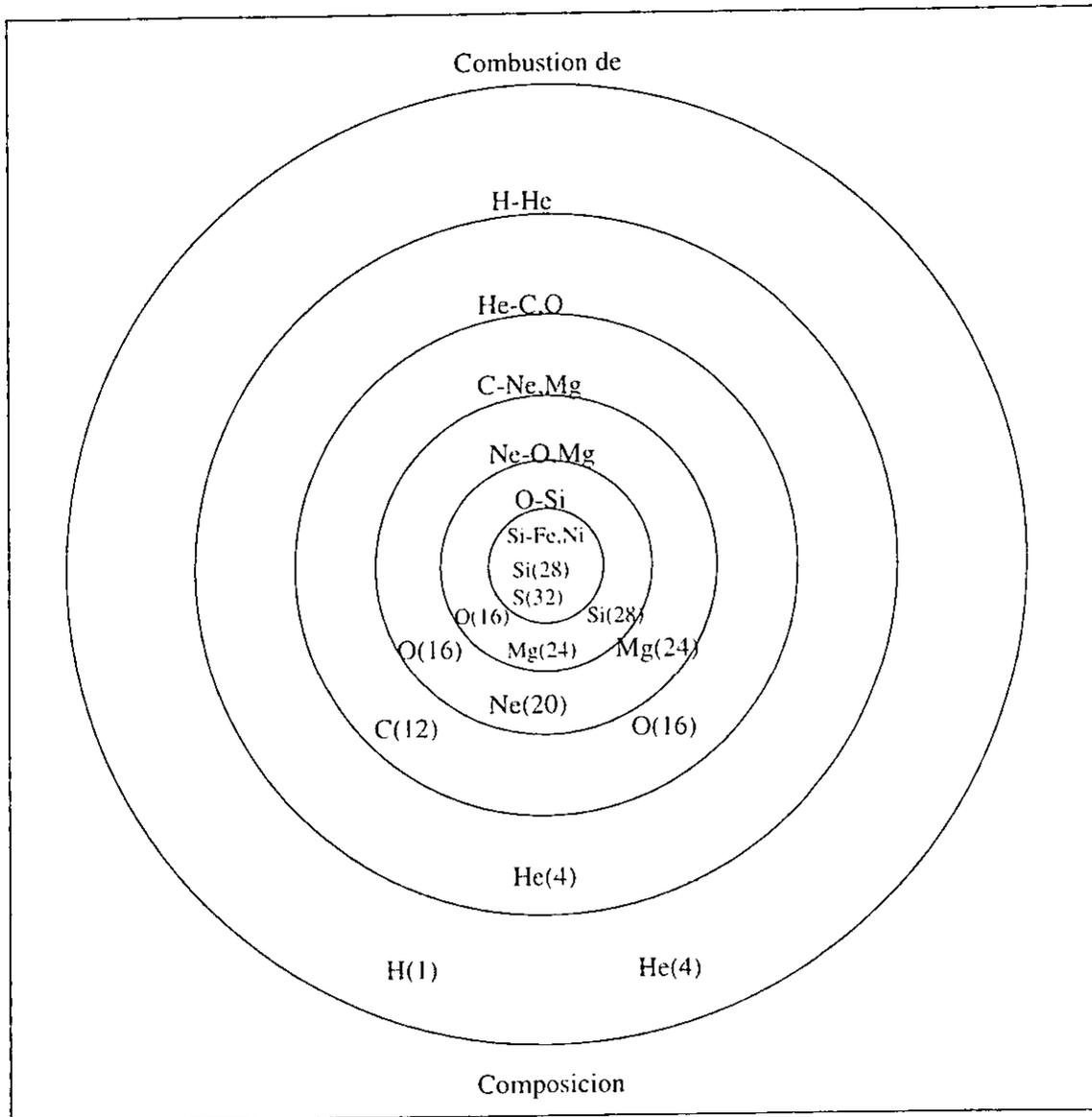


Figura 2.2: Este esquema estilo *cebolla* (no a escala) del interior de una estrella masiva poco antes de la explosión de supernova nos ayuda a ver cuáles son las diferentes capas en las que hay distintas etapas de fusión (por ejemplo, en la interior se está fusionando Si en Fe y Ni) y cuáles son los elementos de mayor abundancia (por ejemplo, en la capa exterior, los elementos más abundantes son el ${}^1_1\text{H}$ y el ${}^4_2\text{He}$).

principal, como para encender la fusión de H en He, y posteriormente la fusión de He en C y O, pero terminarán con un núcleo degenerado de C y O, posiblemente con una pequeña proporción de elementos más pesados.

Estrellas más masivas que $\sim 8M_{\odot}$ probablemente lograrán encender todos los procesos de fusión bajo condiciones no degeneradas hasta llegar al Fe. Cuando el combustible de la etapa que genera hierro en el núcleo de la estrella se agota, la estrella comienza a colapsarse nuevamente; sin embargo, tanto la fusión de ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ en elementos más pesados, como la fisión del mismo en elementos más ligeros, son procesos endotérmicos (ver la figura 2.1), por lo que no hay un mecanismo que pueda detener, otra vez, el colapso gravitacional. En esta etapa, la densidad del núcleo de la estrella es del orden de entre 10^9 y 10^{10}g/cm^3 , la temperatura se encuentra con valores entre los 3×10^9 y $9 \times 10^9 \text{K}$, y la entropía ha descendido a cerca de $2k_B/\text{barión}$. A pesar de la fuerte presión de degeneración que ejercen los electrones, la densidad es tan alta y la fuerza gravitacional tan grande, que el colapso es inevitable. A este valor se le conoce como el límite de la masa de Chandrasekhar; la masa de Chandrasekhar está relacionada con el colapso gravitacional de una estrella y con la presión de degeneración de las partículas que constituyen la materia del núcleo estelar, es decir, partículas que obedecen la ley estadística de Fermi-Dirac, o fermiones.

Básicamente el problema es el siguiente: La presión ejercida por un gas degenerado *no relativista* es:

$$P = \frac{1}{5}(3\pi)^{2/3} \left(\frac{\hbar^2}{m_e} \right) (N_A Y_E)^{5/3} \rho^{5/3} = \kappa \rho^{5/3} \quad (2.12)$$

donde Y_E es el número de electrones y N_A es el número de Avogadro. Por lo que el índice adiabático γ es mayor que $4/3$. Ahora,

la masa del núcleo seguirá aumentando, pues conforme se consume más combustible en la capa externa de éste, la cantidad de materia en átomos de Fe aumentará. Entonces, a partir de las ecuaciones de equilibrio hidrostático (en particular la ecuación (2.4)) y de la ecuación (2.12), se puede deducir que $\rho_c \propto M^2$ (ver [18]) donde ρ_c es la densidad central; por lo tanto, a partir del instante en que el momento de Fermi p_F , correspondiente a la densidad central (dado que $p_F \propto \rho_c^{1/3}$), exceda el valor $m_e c$, la ecuación que describe al gas degenerado pasará a ser relativista, y por lo tanto

$$\epsilon_{F_c} \propto P_F^2 \rightarrow \epsilon_{F_c} \propto P_F \quad (2.13)$$

donde ϵ_{F_c} es la energía de Fermi en el centro de la estrella; esto trae como consecuencia que el índice adiabático se suavice (del inglés *softens*) hasta $4/3$, el valor crítico de la ecuación 2.11, quedando:

$$P_c = \kappa' \rho^{4/3} \quad (2.14)$$

Ahora, sabemos de las ecuaciones (2.3) a (2.6), que

$$P_c \propto GM^{2/3} \rho_c^{4/3}. \quad (2.15)$$

Entonces, si igualamos las ecuaciones (2.14) y (2.15) obtenemos la ecuación de una masa particular:

$$M_c = [K_5/m_B^2](\hbar c/G)^{3/2} Y_e^2 = 1.456 M. (2Y_e)^2 \quad (2.16)$$

donde m_B es la masa bariónica (que se toma como 1 amu). Ésta es la masa de Chandrasekhar, y es el límite máximo para la masa de cualquier enana blanca o núcleo estelar de gas degenerado compuesto por núcleos y electrones. Sin embargo el número de electrones por barión (Y_e) en el núcleo estelar, el valor de la entropía, y la presión de la red Coulombiana pueden renormalizar el valor de κ' , y con esto, el valor real del límite de la masa de

Chandrasekhar puede variar entre los valores de $1.2M_{\odot}$ a $2.0M_{\odot}$. Otros factores que pueden ser de importancia para determinar los posibles valores de esta masa son el transporte convectivo de energía y la captura de electrones.

La vida promedio de una estrella cuya masa sea del orden de las $10M_{\odot}$'s es de aproximadamente unos 10^7 años, sin embargo el proceso descrito a continuación ocurre en tiempos que van desde unas centésimas de segundo, hasta tiempos no mucho mayores a un segundo. Esto ocurre lo suficientemente rápido como para que sólo el núcleo de la estrella tenga tiempo de reaccionar antes de que el mecanismo de la explosión o el colapso gravitacional sea totalmente irreversible; i.e. el mecanismo que hace detonar a una supernova es un fenómeno que depende única y exclusivamente de su núcleo.

Como ya ha sido mencionado, la temperatura interior de la estrella poco antes de llegar al valor crítico para la masa de su núcleo es del orden de $3 \times 10^9\text{K}$ a $9 \times 10^9\text{K}$, o bien de 0.3 a 0.8MeV y la densidad es cercana a los 10^{10}g/cm^3 ; a estas densidades la energía de Fermi de los electrones se encuentra en el rango de los MeV's, y por ende supera el umbral de captura de los electrones por núcleos de Mg, Ne e incluso Fe; además, la temperatura de fotodisociación del Fe es de $\sim 0.6\text{MeV}$. Esto trae como consecuencia que el índice adiabático quede con un valor inferior al del punto crítico de $4/3$.

Entonces, cuando la presión de la red de electrones degenerados no puede sostener el peso del núcleo de la estrella, este último cede y se empieza a colapsar muy rápidamente. Sin embargo, el colapso no es homogéneo a lo largo de la dirección radial, pues una partícula cercana al borde del núcleo "siente" una fuerza gravitacional mucho más fuerte que una partícula

cercana al centro (donde de hecho no se siente fuerza gravitacional debido a la simetría radial del campo); esto genera que se formen dos ondas de choque diferentes (ambas con dirección hacia el centro de la estrella) que a la larga generarán la explosión de la supernova.

La onda de choque interior es una onda subsónica que es finalmente detenida cuando su radio es menor a los 100 kilómetros (el radio original del núcleo es de varios miles de kilómetros) y su densidad es de unos $2 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$, por la presión de degeneración de los neutrones, o bien, dado que los nucleones son no relativistas y se repelen fuertemente, el índice adiabático sube a valores de entre 2 y 3; la mayor parte de los nucleones presentes serán neutrones, pues la mayoría de los protones se recombinan con los electrones para formar neutrones. Sin embargo, el manto exterior del núcleo no se entera de este suceso y sigue cayendo hacia el centro de la estrella. Además, dado que la fuerza es más intensa en el exterior del núcleo, la materia en caída libre alcanzará velocidades supersónicas, y dada la densidad del medio, esto significa velocidades del orden de la cuarta parte de la velocidad de la luz en el vacío. Se estima que las mayores velocidades se alcanzan cerca del radio que incluye de 0.5 a $0.8M_{\odot}$.

Ahora, recordemos que el radio de un átomo es del orden de $1\text{\AA} = 1 \times 10^{-10} \text{m}$ es decir ocupa un volumen del orden de $(4/3)\pi \times 10^{-30} \text{m}^3$; por otro lado, el radio de un núcleo atómico es del orden de $1 \text{fm} = 1 \times 10^{-15} \text{m}$, por lo que su volumen es del orden de $(4/3)\pi \times 10^{-45} \text{m}^3$. esto implica que un núcleo atómico ocupa un volumen 10^{15} veces más pequeño que el de un átomo (donde los electrones no estén en estado degenerado), y por lo tanto, si la estrella logra vencer la presión de degeneración de los electrones, podrá reducir su tamaño hasta llegar a la densidad

de los núcleos atómicos, es decir $2 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$, o bien 10^{15} veces menor al tamaño que tendría el núcleo de la estrella si sus electrones no estuvieran en estado degenerado.

Pero, retrocedamos un poco. Cuando la densidad es cercana a los 10^{11}g/cm^3 , el núcleo de la estrella empieza a volverse opaco a los neutrinos, ya que la trayectoria media de estos es del orden del radio del núcleo estelar para esta densidad y temperatura; posteriormente, las corrientes neutras producidas por dispersión de núcleos atómicos, y por electrones, logran detener totalmente el flujo de neutrinos hacia el exterior, pues la sección transversal de los neutrinos es proporcional al cuadrado de su energía, esto es $\sigma_\nu \propto E_\nu^2$; esto provoca que la contracción sea adiabática y la entropía específica sea del orden de $1.0k/\text{barión}$, siendo así éste, uno de los pocos fenómenos macroscópicos donde la interacción débil tiene un papel fundamental.

Finalmente, la onda exterior chocará con la onda interior, ya en proceso de estabilización, esto producirá una onda de choque con una energía de unos 10^{53}ergs (el Sol emite unos 10^{31}ergs/seg), con dirección hacia el exterior. Esta onda tendrá que "luchar" por salir contra las décimas de masa solar del núcleo de la estrella que siguen cayendo aceleradamente hacia el centro. Si la onda es lo suficientemente fuerte, y la masa del manto del núcleo exterior a la onda no es muy grande, la explosión de supernova será vía el *mecanismo rápido* (ver la referencia [18]). Pues una vez que la onda alcanza la superficie del núcleo estelar, la densidad cae dramáticamente, y apesar de que alrededor del 90% de la masa de la estrella se encuentra aún por fuera, ya no hay mecanismo alguno que pueda detener su salida.

Por el contrario, si la onda de choque original no es lo suficientemente fuerte, o si el núcleo es muy masivo (posiblemente

mayor a $1.2 - 1.3M_{\odot}$), la onda de choque puede quedarse atrapada dentro del núcleo. Si esto sucede pueden ocurrir dos cosas: la primera sería que, debido a que la materia continúa cayendo hacia el interior de la onda de choque *estacionaria*, la generación de neutrinos continuara en el interior, y como estos quedan atrapados dentro de la onda de choque dadas las altas densidad y temperatura del medio, tendería a formarse una *neutrínósfera*, la cual ejercería presión hacia el exterior. Cuando la energía de la neutrínósfera creciese lo suficiente, la onda de choque podría reiniciar su expansión, pues, además, la masa exterior a la onda de choque habría disminuido. A este mecanismo donde la formación de una neutrínósfera revitaliza a la onda de choque estacionaria se le conoce como *mecanismo lento*, y su duración temporal es de unas decenas a unos centenares de veces mayor a la del mecanismo rápido, pues la onda rebota como unidad varias veces en ambas direcciones radiales antes de lograr salir. La segunda posibilidad, sería que la onda de choque no pudiese salir del núcleo, en cuyo caso, la estrella completa tendría tiempo suficiente como para reaccionar a la falta de presión interna, por lo tanto se colapsaría totalmente y no habría explosión de supernova; posiblemente sólo podría observarse que la estrella desaparece del cielo y sería factible que hubiese una gran emisión de ondas gravitacionales.

2.3 Objetos Compactos

Como se vió en la sección anterior, el final de la “vida” de una estrella puede ser muy diferente según las condiciones existentes previas al momento en que se agota el combustible termonuclear en su núcleo. Esto es, una estrella con masa inicial baja

producirá una enana blanca, ya sea de helio, carbón, oxígeno u otros elementos de baja masa atómica. Por otro lado, una estrella cuyo núcleo logre evolucionar hasta el hierro, producirá una supernova, pero ¿qué remanentes pueden resultar tras un fenómeno de esta magnitud? La respuesta correcta es que no se sabe con exactitud, pues aún no se ha logrado observar una explosión de supernova y pocos años después un remanente en particular, aunque ahora existen algunos candidatos tales como SN1987A. No obstante, existen registros de algunas explosiones de supernova, de hace algunos siglos, donde ahora se observa una nebulosa que rodea a un pulsar. Por lo tanto, las respuestas más adecuadas pueden ser las que se plantearán en esta sección.

2.3.1 Materia degenerada en objetos compactos

Antes de describir estrellas con materia fermiónica en estado degenerado, es prudente hacer una breve introducción al tema de la materia en este estado. Primero supondremos que el gas está formado por neutrones, protones y electrones. Para los neutrinos se considerará un potencial químico $\mu_\nu = 0$, y por lo tanto, no se tomarán en cuenta para esta aproximación, dado que tienen masa igual o cercana a cero, carga eléctrica cero, energía de Fermi muy pequeña, y además, si $T < 10^{10} K$ no están atrapados dentro de la estrella, pues su sección transversal se vuelve muy pequeña ($\sigma_{\nu n} \propto E_\nu^2$) y su interacción vía fuerza débil es también despreciable. Entonces, utilizaremos una ecuación de estado en la que no interactúan las partículas entre sí (gas perfecto), y se encuentran en proporción tal que la densidad de bariones tiene su valor energético más bajo. Además, consideraremos a la materia en equilibrio *beta*, esto es, las dos siguientes reacciones ocurrirán estrictamente bajo la misma cantidad de eventos, y

estos sólo podrán ocurrir sobre la superficie de la esfera de Fermi, pues los niveles inferiores están saturados:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \nu_e \quad (2.17)$$

$$p^+ + e^- \rightarrow n + \bar{\nu}_e \quad (2.18)$$

Para que la materia pueda degenerarse, y para que se puedan dar estas condiciones es necesario que $T = 0$ ó al menos que $T \ll T_F = E_F/k_B$ donde E_F es la energía de Fermi, que a su vez está dada por:

$$E_F = (p_F^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}, \quad (2.19)$$

o bien por

$$E_F = (\hbar^2 k_F^2 + m^2 c^4)^{1/2}, \quad (2.20)$$

en donde $\hbar = c = 1$; por otro lado $p = \hbar k$ donde k es el número de onda (y $k = |\vec{k}|$).

Y en efecto, la temperatura en el interior de una estrella compacta al nacer es $T \geq 10^{11} K$, pero desciende rápidamente, y en pocos segundos, cuando es inferior a $\sim 10^{10} K$ la temperatura de la estrella afecta muy poco a los cálculos, pues $10^{10} K \sim 1 MeV$, mientras que $(E_F(n, p) - m_{n, m}) \sim 100 MeV$, por lo tanto la aproximación $T = 0$ es válida pocos segundos después del colapso y la materia de la estrella puede ser tratada como materia degenerada.

Ahora, como información extra se puede obtener la proporción de protones y neutrones a partir de un modelo simplificado de la materia que forma una estrella de neutrones. Empecemos por observar que dadas las ecuaciones (2.17) y (2.18) y utilizando las relaciones de la ecuación de estado descritas en el capítulo anterior, la condición de equilibrio beta existe y por lo

tanto se cumple que para los potenciales químicos:

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n + \mu_\nu = \mu_n. \quad (2.21)$$

Además por neutralidad de carga eléctrica sabemos que la siguiente relación se debe cumplir:

$$n_e = n_p, \quad (2.22)$$

Tomando esto en cuenta, y buscando minimizar la energía total (a densidad fija), obtenemos que el momento de Fermi de los nucleones a densidad ρ es:

$$\rho = \frac{(k_n^3 + k_p^3)}{3\pi^2}, \quad (2.23)$$

si ahora se fija la densidad de bariones y tomamos una densidad superior al umbral de los neutrones ($\rho = k_p^3/3\pi^2 = 7.4919 \times 10^{-9} \text{ fm}^{-3}$) podemos escribir

$$k_n = (3\pi^2\rho - k_p^3)^{1/3}. \quad (2.24)$$

De acuerdo con la referencia [2], en el régimen ultrarrelativista e ignorando la presencia de bariones diferentes a protones y neutrones, se obtiene que:

$$\rho_p = \frac{1}{8}\rho, \quad (2.25)$$

esto es, la densidad de protones es un octavo de la densidad de bariones de acuerdo con esta aproximación. De hecho, este límite se obtiene desde abajo, por lo que $(1/8)\rho$ es una cota máxima.

2.3.2 Enanas blancas

Estas estrellas están formadas por átomos cuyos electrones se encuentran en estado degenerado. Se forman a partir de una estrella cuya masa inicial era menor a $\sim 4M_{\odot}$ y por lo tanto su proceso de evolución generalmente se detiene antes de producir elementos más pesados que el carbón o el oxígeno. Como se mencionó antes, los electrones en el núcleo de la estrella se degeneran, impidiendo de esta manera que la contracción del núcleo estelar continúe, y con esto, que la temperatura siga elevándose; de esta manera, la temperatura nunca alcanza el punto de fusión del material obtenido en la fase inmediata anterior, con lo cual se detiene el proceso de evolución. Las capas superiores son expulsadas por el fuerte viento estelar generado en el núcleo de la estrella, dejándolo al descubierto, y radiando únicamente la energía térmica producida antes de su formación.

El límite para la masa de Chandrasekhar de una estrella formada por un gas de electrones degenerado se expresó en la ecuación (2.16). Entonces, si la masa de una enana blanca es mayor que la masa de Chandrasekhar, ésta se vuelve inestable ante el colapso gravitacional.

2.3.3 Estrellas de Neutrones

Cuando una enana blanca sobrepasa el límite de la masa de Chandrasekhar (por ejemplo por acreción de una estrella compañera en sistemas binarios o múltiples), o cuando la explosión de supernova desacopla las capas envolventes de una estrella masiva, una de las posibilidades es que se forme una estrella de neutrones a partir de la contracción gravitacional del núcleo de la estrella hasta que es detenido por la presión de degeneración

de los nucleones constituyentes de la estrella, esto es, cuando la densidad ha alcanzado densidades del orden de la densidad nuclear ($= 2.8 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$).

Es importante hacer notar, que las estrellas de neutrones están ligadas única y exclusivamente por la interacción gravitacional, ya que para $A \sim 250$, la interacción fuerte deja de ser efectiva (esta suposición se basa en la observación de que los núcleos mayores a este tamaño son inestables). Este parámetro afecta la masa de Chandrasekhar haciendo que su límite sea más grande, pues la presión de degeneración actúa en contra de la fuerza gravitacional; de esta manera, la masa límite para las estrellas de neutrones estará, en parte, determinada por el valor que tenga este parámetro dentro de la ecuación de estado de la estrella. Cuando un parámetro de la ecuación de estado tiene este efecto se dice que la *rigidiza*, si algún parámetro tiene un efecto opuesto, entonces se dice que la *suaviza*. Mientras más *rígida* sea la ecuación de estado, más se acercará la velocidad del sonido (v_s) a la velocidad de la luz (c), ambas dentro del medio, de forma tal que la ecuación de estado más dura es cuando $v_s/c = 1$. Esta ecuación de estado nos proporciona también, una cota máxima para el límite de la masa de Chandrasekhar de una estrella de neutrones (ver referencia [2]):

$$M \approx 3.14M_{\odot} \quad (2.26)$$

si la densidad de saturación es igual a la nuclear ($\rho = 0.153$ bariones fm^{-3} , o bien $\epsilon_0 \approx 2.5 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$). Pero si la densidad de saturación se escoge mayor, este límite puede crecer aún más, sin embargo no hay que olvidar que casi todas las ecuaciones de estado que se usan en la literatura son bastante más suaves.

Otro parámetro que puede afectar estos resultados, independientemente de la ecuación de estado, es la rotación de la estrella

de neutrones. La estrella original, antes de colapsarse tiene un momento angular dado; el momento angular se debe conservar durante el colapso y esto implica que si el radio decrece, la velocidad angular crecerá. Se han observado pulsares con períodos de rotación del orden de los milisegundos, lo cual nos indica que esto en realidad sucede, pero el hecho de que esto suceda nos genera dos preguntas interesantes, la primera es si la materia que se encuentra en el ecuador no tiene una velocidad cercana a la de la luz, y la segunda es si la frecuencia de la estrella no está muy cerca de la frecuencia de Kepler.

La respuesta a la primera pregunta es que no, podemos calcular, de manera sencilla que esto no sucede: El radio de estas estrellas es cercano a los 10 kilómetros, esto implica que la circunferencia ecuatorial es un poco mayor a los 60km, la velocidad de la luz es casi 3×10^5 km/s, es decir, un fotón puede darle una vuelta a la estrella en 2×10^{-4} s (o bien 0.2ms); por lo tanto, la estrella podría rotar hasta cinco veces más rápido, como un cuerpo sólido y con el mismo radio, sin que una partícula en su ecuador viajara más rápido que la luz.

Ahora la respuesta al segundo problema es bastante más difícil de obtenerse, pues debe ser encontrada por medio de cálculos que implican relatividad general. Estos se pueden encontrar en la referencia [2]. no obstante, una buena aproximación para obtener el límite en el periodo de rotación del pulsar con respecto a la frecuencia de Kepler es:

$$P \approx 10.1M \left(\frac{M}{R} \right)^{3/2} > 0.167 \frac{M}{M} \text{ms.} \quad (2.27)$$

Esto, para una estrella de neutrones promedio (donde su masa es del orden de $1.4M_{\odot}$), pone un límite mínimo cercano a un cuarto de milisegundo; aunque, considerando otros factores, este límite

mínimo, suele tomar valores del orden de un milisegundo.

2.3.4 Pulsares y Magnetares

Supongamos que el núcleo de una estrella, antes de colapsarse, tiene un campo magnético con una magnitud entre 10^6 y 10^7 gauss (para una estrella cuyo campo superficial es del orden de 10^2 gauss) y un radio del orden de 10^7 m. Ahora, durante el colapso gravitacional de una estrella, la conductividad eléctrica de su núcleo es muy alta, ya que el material está altamente ionizado, por lo que las líneas de flujo del campo magnético quedan *congeladas* dentro del material en proceso de colapso. Supongamos que el colapso de la estrella se detiene cuando la densidad de la materia que la compone es similar al de la densidad de los núcleos atómicos, esto es, cuando el radio del núcleo estelar es de unos 10^4 m. Dado que el flujo de campo magnético se conserva y el área por la que éstas atraviesan es proporcional al cuadrado del radio, su densidad debe crecer de igual manera y por lo tanto, para el ejemplo que se está tratando, el campo magnético resultante será cercano a los 10^{12} gauss.

En la práctica, han sido observados pulsares con campos que van de los 10^8 a los 10^{12} gauss; incluso, recientemente se ha logrado detectar, estrellas compactas cuyo campo magnético llega a valores de 10^{15} a 10^{16} gauss; a estas estrellas se les ha llamado Magnetares. El mecanismo que permite que estas estrellas tengan campos tan intensos aún se desconoce, aunque ya se ha comenzado a hacer investigación en esta área.

El campo magnético de una estrella compacta puede ser un dipolo, un cuadrupolo, un octupolo, o algo aún más complicado, sin embargo las componentes no dipolares del campo magnético decaen rápidamente con la distancia, y por lo tanto, un obser-

vador situado a unas decenas de kilómetros de la superficie de la estrella registraría un campo magnético muy parecido al de un dipolo. Ahora, dado que las líneas de campo magnético se *anclan* en el material de la estrella, están obligadas a girar junto con la estrella sobre el eje de rotación de ésta. Sin embargo, el eje del dipolo principal del campo magnético y el eje de rotación de la estrella no tienen por que estar alineados entre sí, ya que, aunque ambos son fenómenos cuyas magnitudes se ven fuertemente afectadas por el proceso de colapso, son totalmente independientes uno del otro. De hecho, un evento cataclísmico de la magnitud de la explosión de una supernova, puede ocasionar que, aunque antes del colapso estén orientados en la misma dirección el eje de rotación y el del dipolo principal, después del colapso, el ángulo entre ambos ejes sea muy diferente al original.

Entonces, existe un radio en el que si una partícula está girando alrededor de la estrella con el mismo período que ésta, la partícula debe viajar a la velocidad de la luz para no retrasarse (pues el campo magnético está congelado). A un cilindro imaginario cuyo eje sea el eje de rotación de la estrella y su radio sea el de la partícula viajando a la velocidad de la luz, se le llama *cilindro de luz* (ver la figura 2.3). Si una partícula viaja sobre una línea de campo magnético que sale del cilindro de luz, por ejemplo un fotón virtual del mismo campo, entonces, no puede girar junto con la estrella, pues tendría que viajar más rápido que la luz para lograrlo. Esto trae como consecuencia que las líneas de campo magnético exteriores al cilindro de luz se *enrollen* sobre el eje de rotación, y como esto no es favorable en términos de la energía, el resultado neto será que el campo magnético empezará a frenar la rotación de la estrella compacta.

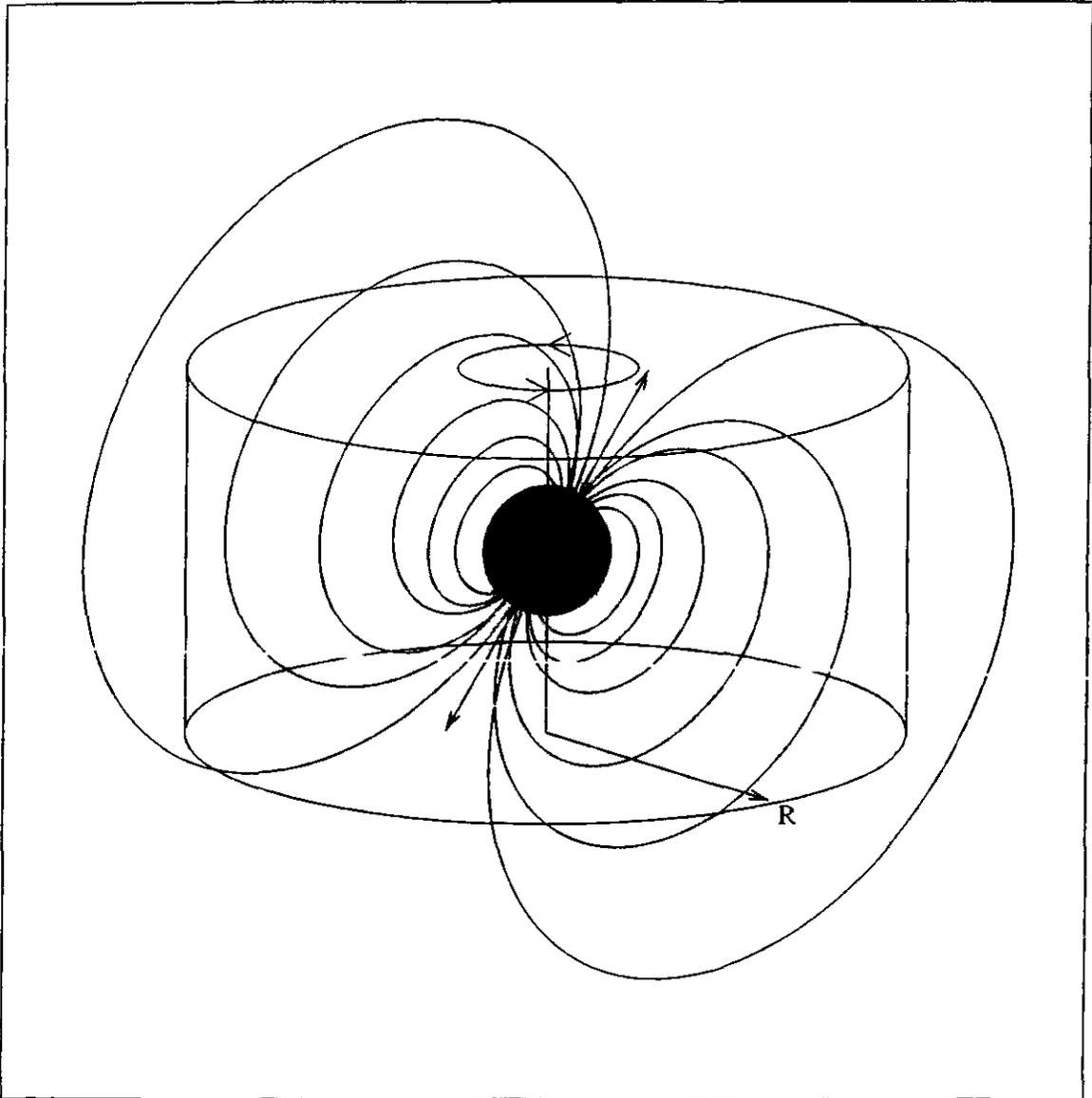


Figura 2.3: El radio R_c del cilindro de luz para un pulsar está dado por la siguiente relación: $R_c = c/\Omega$, donde c es la velocidad de la luz y Ω es el período de rotación de la estrella. En esta figura, la última línea de campo magnético dibujada sale del cilindro de luz; por esta razón no podría cerrarse como se muestra en la figura, sino que en realidad se debe enrollar sobre el eje del cilindro antes de cerrarse nuevamente sobre el pulsar.

2.3.5 Estrellas Extrañas

Recordando el tema de la sección anterior y asociándolo con lo que se discutió en el primer capítulo, puede uno llegar a la siguiente idea: Dado que la presión debida a la atracción gravitacional es muy alta en el núcleo de una estrella de neutrones, la densidad estelar puede ser superior a la densidad nuclear (en la literatura se suelen encontrar, frecuentemente, valores un orden de magnitud mayor al de la densidad nuclear); esto trae como consecuencia que los quarks que forman a los bariones se empiezen a mezclar unos con otros; es decir, es posible que en toda la región en la que la densidad es mayor que un cierto valor crítico, ocurra una transición de fase y que todos los quarks que formaban bariones pasen a formar un plasma de quarks y gluones (QGP por sus siglas en inglés); entonces, los quarks quedarían *libres* de moverse dentro de una región mucho más grande que los bariones, es decir, dentro de la estrella. Pero, si esto ocurre, y de acuerdo a lo que vimos en el primer capítulo, habrá una segunda transición de fase en la que poco menos de la tercera parte de los quarks (up y down) se conviertan en quarks extraños (strange), siendo éste otro de los pocos fenómenos macroscópicos donde la fuerza débil es la principal responsable de lo que sucede. Se espera que la transición de una estrella de neutrones a una estrella extraña sea un evento visible dada la cantidad de energía que debe ser liberada.

Pero uno puede preguntarse si es posible diferenciar a grandes distancias una estrella de neutrones de una estrella extraña. Esta es una pregunta interesante, dado que los modelos para ambos tipos de estrellas predicen datos similares para una estrella de $\sim 1.4M_{\odot}$, lo cual coincide con la masa estimada de los pulsares observados hasta la fecha. No obstante hay dife-

rencias fundamentales en la estructura de las estrellas descritas por un modelo y por el otro, lo cual puede ocasionar que haya fenómenos que se puedan producir con un modelo y no con el otro, o viceversa. Por ejemplo, el modelo de las estrellas de neutrones puede explicar el fenómeno de los *glitches* (desajustes abruptos en el período de rotación del pulsar), usando protones superconductores y neutrones superfluidos en el núcleo de la estrella y protones y neutrones *normales* en las capas exteriores, de manera que los vórtices del superfluido y las líneas de campo magnético se vayan quedando *atoradas* en la frontera que divide estas dos regiones. Por el momento no se ha desarrollado un modelo equivalente para estrellas extrañas. Por otro lado, si un pulsar con un período inferior a un tercio de milisegundo fuese detectado, la posibilidad de que fuese una estrella extraña sería muy alta, ya que una estrella de neutrones no puede girar con tal velocidad angular sin que el material de su ecuador se pierda (por fuerza centrífuga), pues estas estrellas están unidas únicamente por la fuerza gravitacional. En cambio, una estrella extraña estaría unida, principalmente, por fuerza fuerte (pues recordemos que sus quarks tienen libertad asintótica sobre toda la estrella); gracias a esto, una estrella extraña puede girar mucho más rápidamente sin perder su material.

Otra posible diferencia entre las estrellas de neutrones y las estrellas extrañas es su emisión térmica; una estrella de neutrones emite radiación térmica como un cuerpo negro (de hecho ya se ha detectado esta radiación en cuatro pulsares, ver referencia [23]), en cambio, es probable que una estrella extraña no pueda emitir radiación térmica dado que la frecuencia del QGP puede ser muy alta. Pero este es el tema del siguiente capítulo, así que por lo pronto lo dejaremos pendiente.

2.3.6 Agujeros Negros

El último tipo de objetos compactos del que hablaremos son los agujeros u hoyos negros, aunque no profundizaremos mucho en este tema, pues no está estrechamente ligado a los temas que discutiremos en los próximos capítulos.

Cuando el núcleo de la estrella en proceso de colapso es muy masivo, y la fuerza de gravedad es, por ende, muy grande, la presión de degeneración de los nucleones (e incluso la de los quarks que los componen) no es suficiente como para detener el colapso gravitacional de la estrella, así pues ya nada logrará frenarlo, y la estrella, posiblemente completa(ya que no habrá una gran onda de choque que desacople las capas externas de la estrella) se colapsará por completo, obteniéndose un agujero negro de varias masas solares.

Sin embargo, éste no es el único mecanismo por el que se puede obtener un agujero negro, ya que una estrella compacta puede pasar el límite de Chandrasekhar, posiblemente por acreción o por fusión con una estrella compañera. Además, en los últimos años se han reportado agujeros negros de varios millones de masas solares en los núcleos de algunas galaxias, y se cree que estos fueron formados vía otros mecanismos.

Un agujero negro tiene un campo gravitacional tan intenso que dentro de su radio de Schwarzschild $r_s = 2GM/c^2$ ó bien, horizonte de eventos, todo, incluso la luz, cae hacia su centro o singularidad; y es por esta razón que recibe éste nombre, ya que un observador fuera de este radio, no puede recibir ningún tipo de información sobre lo que ocurre dentro del horizonte (por ejemplo, no puede tener un campo magnético, ya que los fotones, reales o virtuales, no pueden salir del horizonte de eventos). El radio de Schwarzschild que mencionamos funciona bien para

un agujero negro estático, sin embargo, puede variar para un agujero negro en rotación.

2.4 Masa y radio de las estrellas compactas

Ahora veremos un poco del formalismo de la Relatividad General para estrellas esféricas estáticas (i.e., sin rotación). Esta sección está basada en dos referencias, [27] y [28].

Entonces, supondremos que la geometría del espacio-tiempo es esféricamente simétrica, lo que significa que los resultados no serán muy exactos para una estrella compacta con un período de rotación pequeño. Empleando las coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) , la geometría interior y exterior del espacio-tiempo toma la forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2Gm/c^2r} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.28)$$

La longitud propia radial es entonces $dl = dr/\sqrt{1 - 2Gm/c^2r}$, y el tiempo propio es $d\tau = e^\Phi dt$.

Las ecuaciones de Einstein acopladas al tensor de energía-momento para un fluido perfecto nos proporcionan las ecuaciones estándar

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.29)$$

que determinan la función de masa $m = m(r)$,

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gmc^2 + 4\pi Gr^3 P}{c^4 r^2 (1 - 2Gm/c^2r)}, \quad (2.30)$$

para el “potencial gravitacional” $\Phi = \Phi(r)$ y la ecuación de

Tolman-Oppenheimer-Volkoff para el equilibrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho c^2 + P) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{(\rho + P/c^2)(Gm + 4\pi Gr^3 P/c^2)}{r^2(1 - 2Gm/c^2 r)}. \quad (2.31)$$

Regularidad en la geometría a $r = 0$ implica que la condición de frontera para la ecuación (2.29) es

$$m(r = 0) = 0 \quad (2.32)$$

mientras que para la ecuación (2.31) la presión central

$$P(r = 0) = P_c \quad (2.33)$$

está especificada, a través de la ecuación de estado de la forma $P = P(\rho)$, con la densidad central ρ_c tratada como un parámetro libre. Debido a la naturaleza lineal de la ecuación (2.30), Φ puede ser escalada de manera que siempre cumpla con

$$e^{\Phi(R)} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}; \quad (2.34)$$

cuando la simetría interior del espacio-tiempo ha sido así especificada, ésta se une suavemente a lo largo de la “superficie” de la estrella a un campo de Schwarzschild externo caracterizado por $M = m(R)$.

Para una ecuación de estado dada, fijando P_c ó ρ_c , pueden integrarse las ecuaciones (2.29), (2.30) y (2.31) numéricamente, obteniendo así la masa y el radio de la estrella compacta. Variando el valor de ρ_c se puede generar una curva de masa contra radio para esta ecuación de estado. En la figura 2.4 hemos hecho esto para la ecuación de estado de materia extraña que hemos

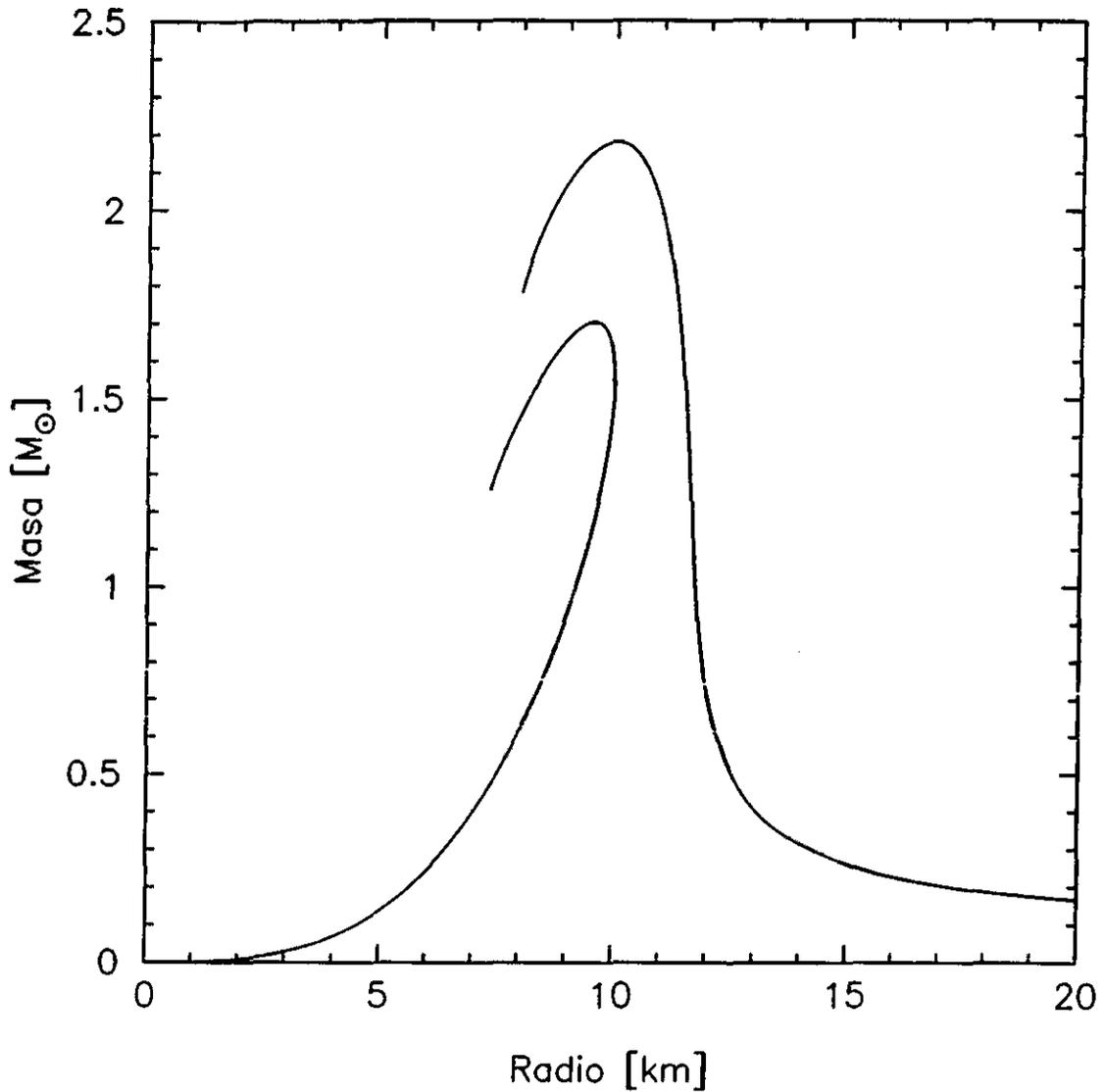


Figura 2.4: En esta figura hemos graficado la relación radio-masa para una estrella de neutrones (derecha), y para una estrella extraña (izquierda). Podemos observar que, a diferencia del caso de las estrellas de neutrones, las estrellas extrañas, no tienen una masa mínima; además, su volumen aumenta proporcionalmente con la masa, mientras que para las estrellas de neutrones, dado que están ligadas gravitacionalmente y no por interacción fuerte, el radio aumenta cuando disminuye la masa.

descrito en el capítulo 1 y para una estrella de neutrones utilizando la ecuación de estado de la referencia [25].

Como podemos observar en la figura 2.4, la estrella de materia extraña no tiene un límite inferior para la masa de la estrella, lo que nos puede llevar, en un extremo, nuevamente al caso de la materia extraña en strangelets. Es interesante ver que la relación entre la masa y el volumen (radio a la tercera potencia) es lineal, lo que nos indica que la densidad es casi homogénea radialmente; esto es de esperarse, pues la estrella completa está ligada por medio de la interacción fuerte. De hecho, la superficie de una estrella extraña es del orden de un fermi, pues la densidad cae unos 15 ordenes de magnitud (hasta cero) en este intervalo. Si la materia extraña tiene carga eléctrica, debe existir una pequeña *atmósfera* de electrones de hasta unos 500 fm de espesor.

Por otro lado, la estrella de neutrones tiene un perfil totalmente diferente, pues está ligada gravitacionalmente; por lo tanto, cuando disminuye su masa aumenta el radio, pues la fuerza gravitacional disminuye y la presión de degeneración de los neutrones empieza a ser dominante. Entonces, si la masa disminuye considerablemente, por medio de algún mecanismo, posiblemente terminaríamos con una enana blanca en lugar de la estrella de neutrones.

Es importante notar que en esta gráfica, dentro del intervalo de $0.7M_{\odot}$ a $1.7M_{\odot}$, los dos tipos de estrellas tienen un perfil relativamente parecido, y la diferencia en el radio es de entre 2 y 3 kilómetros aproximadamente. Por lo que resulta claro que la diferencia entre ambos modelos no es fácil de distinguir sin que exista algún tipo claro de diferencia en la fenomenología de estas estrellas; como por ejemplo, el período de rotación o una masa muy grande ($2M_{\odot}$).

Capítulo 3

Plasma de Quarks y Electrones

En general, estamos acostumbrados a tratar con la materia en tres fases, el sólido, el líquido y el gaseoso, pues en la Tierra son los tres fases con los que más contacto tenemos, sin embargo, en el universo, la mayor parte de la materia que podemos observar se encuentra en un estado en el que la energía por partícula es mucho mayor que en la Tierra, tanto que la fuerza eléctrica que une a los electrones y los núcleos no es lo suficientemente grande como para mantenerlos unidos. El estado resultante se conoce como plasma. En este estado se observan fenómenos que no se producen en los otros tres estados: a continuación haremos una breve revisión de los conceptos básicos que se deben manejar para estudiar este tema. Posteriormente se realizará un estudio más detallado de la transmisión de una onda electromagnética a través de un plasma de quarks y electrones.

3.1 Conceptos

3.1.1 Frecuencia del plasma

La frecuencia de un plasma corresponde a las oscilaciones propias de éste, es decir a sus modos normales de oscilación, los cuales dependerán del tipo de partículas y fuerzas (entre las partículas) que existan en el medio. Veamos esto con más detalle: Consideremos un medio globalmente neutro, constituido por dos tipos de partículas, unas con carga positiva $+e$ y una cierta masa, las otras con carga de la misma magnitud pero negativa, $-e$, y masa pequeña en comparación con las positivas, de forma tal que las concentraciones locales de carga puedan ser no-neutras. Un ejemplo de esto podría ser con electrones e iones. Tomemos además una temperatura lo suficientemente pequeña como para que el movimiento de las partículas debido a ésta sea despreciable, y supongamos una distribución inicial de partículas uniforme, de manera tal que antes de sufrir cualquier perturbación el medio es neutro localmente.

Si ahora traemos, desde infinito, una cierta cantidad de cargas, por ejemplo, negativas, el medio será perturbado por un campo eléctrico \vec{E} de manera que las cargas negativas del medio se alejarán y las cargas positivas, dada su mayor inercia (pues inicialmente requerimos un cociente grande de masas), no tendrán tiempo de reaccionar y la región quedará cargada positivamente. Supongamos ahora que las cargas negativas con las que se perturbó el sistema se vuelven a alejar hasta infinito, entonces, las cargas que habían sido desplazadas regresarán a su posición inicial y restablecerán la neutralidad local del medio ($\vec{E} = 0$). Sin embargo cuando lleguen ahí, traerán una energía cinética equivalente a la transferida inicialmente por el cam-

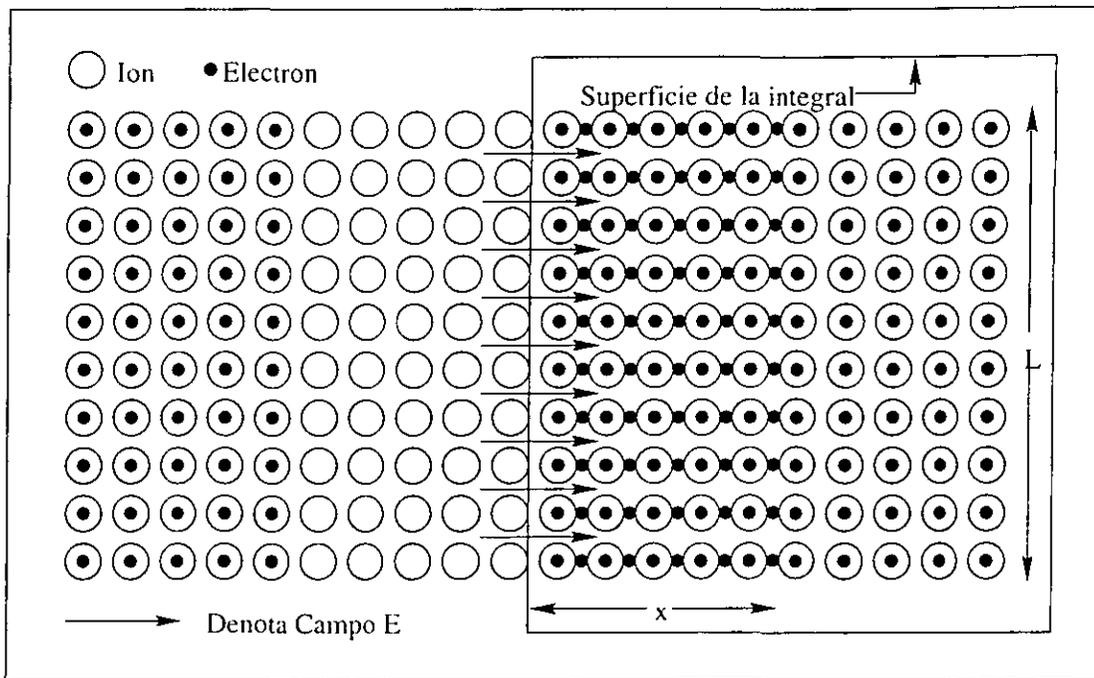


Figura 3.1: Si tenemos una onda electromagnética barriendo el plasma de izquierda a derecha, el desplazamiento de los electrones será como en la figura. También podemos observar la superficie sobre la que estamos realizando la integración.

po eléctrico (inercia), pero la dirección será contraria, entonces las cargas negativas se seguirán de frente hasta que su energía cinética vuelva a ser cero y su energía potencial sea máxima, ocurrido lo cual, las cargas regresarán a su posición inicial y el ciclo se repetirá de manera periódica e indefinida en el caso en que no exista una fuerza externa que altere este proceso. Es decir, tendremos oscilaciones del plasma.

En la mayor parte de los plasmas las cargas negativas son electrones y las cargas positivas son iones positivos tales como protones e incluso átomos o moléculas ionizadas. Al recíproco del período que tarda un electrón en cumplir un ciclo como el que describimos arriba se le conoce como *frecuencia de plasma*

del electrón, y lo denotaremos por ω_{pe} . Podemos calcular esta frecuencia para un electrón bajo la influencia de un campo eléctrico si utilizamos su ecuación de movimiento (procedimiento utilizado en la referencia [20])

$$m\ddot{x} = -e\vec{E}, \quad (3.1)$$

con la dirección de x paralela al campo eléctrico, y el teorema de Gauss

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q/\epsilon_0, \quad (3.2)$$

donde Q es la carga contenida en una superficie cerrada S . Si suponemos que la distribución es homogénea a lo largo del plano perpendicular a la dirección en que se propagó la onda (ver figura 3.1) podemos escribir entonces lo siguiente:

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = -LE, \quad (3.3)$$

donde L es el área (longitud en el caso bidimensional) de la superficie sobre la que estamos integrando. Ahora, si tenemos una densidad n_0 de partículas en equilibrio, entonces

$$Q = Lxn_0e, \quad (3.4)$$

donde la x es el desplazamiento de los electrones con respecto a su posición de equilibrio. A partir de (3.2), (3.3) y (3.4) podemos obtener que

$$E = n_0ex/\epsilon_0, \quad (3.5)$$

y si sustituimos (3.5) en la ecuación (3.1) obtenemos que

$$\ddot{x} = -\omega_{pe}^2x, \quad (3.6)$$

donde hemos nombrado ω_{pe} , esto es, frecuencia del plasma. a

$$\omega_{pe} = (n_0q_e^2/m\epsilon_0)^{1/2}. \quad (3.7)$$

3.1.2 Colisiones

Ahora hagamos un análisis sencillo del efecto que tiene la relación de dispersión de las colisiones entre las partículas del plasma de quarks y electrones sobre su movimiento. Una manera sencilla de representar las colisiones es tomando una ecuación de movimiento como la que presentamos a continuación:

$$m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -q\vec{E} - \nu m \vec{v} \quad (3.8)$$

donde v , m , q y ν son la velocidad, la masa, la carga, y la frecuencia de colisión, respectivamente, para la partícula.

Esta ecuación puede tomarse como que representa ya sea al efecto total de muchas perturbaciones pequeñas en la trayectoria de la partícula, o como el efecto promedio para una distribución de partículas. Si hacemos una transformada de Fourier temporal

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (3.9)$$

y

$$\vec{v}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{v}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (3.10)$$

Ahora dado que no hay campo eléctrico externo $\vec{E} = \vec{E}$, donde \vec{E} es el campo promedio debido a la oscilación de las partículas; la velocidad puede descomponerse en dos partes $\vec{v} = \bar{v} + \tilde{v}$, donde \bar{v} es la *velocidad de flujo*, que en nuestro caso tomaremos como cero y \tilde{v} es, nuevamente, la velocidad promedio de la oscilación de las partículas.

$$\tilde{v} = -i \frac{q}{m \left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right)} \vec{E}, \quad (3.11)$$

donde hemos dejado fuera al término $\tilde{v}_a \cdot \nabla \tilde{v}_a$, dado que estamos tomando fluctuaciones a primer orden únicamente, es decir, linealizamos. Entonces podemos ver que el efecto de las colisiones

es equivalente a una renormalización de la masa:

$$m \rightarrow \left(1 + i \frac{\nu}{\omega}\right) m. \quad (3.12)$$

De igual manera podemos asociar el efecto de las colisiones a la frecuencia, obteniendo así una frecuencia efectiva:

$$\omega \rightarrow \omega + i\nu. \quad (3.13)$$

Ahora, si la velocidad de flujo fuese distinta de cero la transformada de Fourier sería dependiente de la posición, esto es

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (3.14)$$

y

$$\vec{v}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{v}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (3.15)$$

y la ecuación (3.12) pasaría a ser

$$m \rightarrow \left(1 + i \frac{\nu}{\omega - \vec{v} \cdot \vec{k}}\right) m. \quad (3.16)$$

3.1.3 Girofrecuencia

La fuerza de Lorentz está dada por la ecuación

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}). \quad (3.17)$$

y en particular, si tenemos una partícula cargada con velocidad \vec{v} y carga q_a en un campo magnético uniforme \vec{B}_0 la fuerza que el campo magnético ejerce sobre la partícula estará dada por

$$\vec{F} = q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0. \quad (3.18)$$

y en particular, la magnitud de la fuerza será

$$F = \frac{qv_{\perp}B_0}{c}. \quad (3.19)$$

También sabemos que la aceleración centrípeta está dada por

$$a = \frac{v_{\perp}^2}{r}, \quad (3.20)$$

Entonces, utilizando la ecuación (3.19) y la segunda ley de Newton (i.e. $\vec{F} = m\vec{a}$), tenemos que

$$F = \frac{qv_{\perp}B_0}{c} = m \frac{v_{\perp}^2}{r}, \quad (3.21)$$

a partir de lo cual podemos despejar

$$\frac{v_{\perp}}{r} = \frac{qB}{mc}, \quad (3.22)$$

pero

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{r}, \quad (3.23)$$

con lo que finalmente llegamos a la expresión para la girofrecuencia:

$$\omega_g = \left| \frac{qB}{mc} \right| \quad (3.24)$$

donde hemos puesto el valor absoluto por conveniencia; posteriormente veremos porqué.

3.2 Plasma de Quarks y Electrones

3.2.1 Ecuaciones de Maxwell

Para tratar con ondas electromagnéticas en un plasma requerimos las ecuaciones de Maxwell. A continuación se muestran las

ecuaciones en su forma microscópica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (3.26)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3.27)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.28)$$

En particular haremos uso de las dos últimas, la ley de Ampère-Maxwell (3.27) y la ley de Faraday (3.28), pues estas dos ecuaciones determinan la respuesta del campo electromagnético a las corrientes en el plasma. Sin embargo, nos resultará de utilidad el manejar también las ecuaciones en su forma macroscópica, puesto que el hecho de que la onda electromagnética se transmita dentro de un medio formado por partículas cargadas cambia macroscópicamente los efectos observables; para estudiar este caso necesitamos introducir al campo eléctrico macroscópico (también se puede introducir al campo magnético macroscópico, pero para nuestros propósitos no resulta necesario):

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (3.29)$$

donde \vec{P} es la polarización del medio. Si el medio tiene respuesta lineal, la ecuación (3.29) se puede escribir como:

$$\vec{D} = \vec{K} \vec{E}, \quad (3.30)$$

donde \vec{K} es el *tensor dieléctrico*. Por componentes tenemos que

$$D_r = K_{rs} E_s. \quad (3.31)$$

En la sección 3.2.2 obtendremos la relación entre el tensor \vec{K} , y el *tensor de conductividad* σ .

Entonces, las ecuaciones macroscópicas equivalentes a (3.25), (3.26), (3.27), y (3.28) respectivamente, son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.32)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (3.33)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi \vec{j}_{DC}, \quad (3.34)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.35)$$

En estas ecuaciones la densidad de corriente está dada por $\vec{j} = \vec{j}_{DC} + \vec{j}_i$ donde \vec{j}_{DC} es la densidad de corriente producida por el campo magnético \vec{B}_0 que atraviesa el medio (que para el problema que nos atañe es uniforme y no varía con el tiempo, por lo cual la corriente es directa), y $\vec{j}_i = \partial \vec{P} / \partial t$ es la corriente inducida por la perturbación.

Entonces, a partir de las ecuaciones (3.27) y (3.34) podemos ver que la corriente puede expresarse como

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \vec{j}_{DC} \quad (3.36)$$

3.2.2 Ecuación de onda en un plasma no magnetizado

Por otro lado, necesitamos tener una manera de saber cómo afecta el campo electromagnético a la corriente, pero precisamente

la ley de Ohm nos resuelve este problema, entonces escribimos

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} + \vec{j}_{DC}, \quad (3.37)$$

o bien, por componentes

$$j_r = \sigma_{rs} E_s + j_{(DC)r}, \quad (3.38)$$

Utilizando la suposición de que el estado no perturbado del sistema es estacionario, podemos utilizar transformadas de Fourier en el tiempo. Por el momento únicamente necesitamos considerar una componente con dependencia temporal, por lo tanto tendremos que las sustituciones serán de la forma

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (3.39)$$

e igualmente, para la corriente

$$\vec{j}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{j}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (3.40)$$

Podemos ver que para la densidad de corriente \vec{j}_{DC} (producida por el campo magnético uniforme y sin variación temporal \vec{B}_0), la frecuencia $\omega = 0$, y por ende $\partial \vec{j}_{DC} / \partial t = 0$.

Ahora la ecuación (3.36) se puede expresar como

$$j_r = -\frac{i\omega}{4\pi} (D_r - E_r), \quad (3.41)$$

donde j_r , D_r y E_r son funciones de ω ; cabe mencionar que cuando $\omega \neq 0$, \vec{j}_{DC} no aparece en la ecuación (3.36). Ahora, si utilizamos la ley de Ohm (3.38) podemos escribir a \vec{D} en función de \vec{E} :

$$D_r = E_r + \frac{i4\pi}{\omega} \sigma_{rs} E_s. \quad (3.42)$$

A σ se le conoce como el *tensor de conductividad*. Si comparamos esta relación con la del *tensor dieléctrico* K de la ecuación

(3.31), podemos ver que ambos tensores están relacionados por la siguiente ecuación

$$K_{rs} = \delta_{rs} + \frac{i4\pi}{\omega} \sigma_{rs}. \quad (3.43)$$

Si ahora obtenemos el rotacional de la ley de Faraday (3.28), sustituimos el rotacional del campo magnético con \vec{D} (3.34), posteriormente lo sustituimos con el tensor dieléctrico (3.31) y finalmente utilizamos la transformada de Fourier (3.39) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (K_{rs} E_r) = -\frac{(i\omega)^2}{c^2} \vec{K} \cdot \vec{E} \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{K} \cdot \vec{E}, \end{aligned}$$

lo que nos proporciona la ecuación de onda del campo eléctrico:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{K} \cdot \vec{E} = 0. \quad (3.44)$$

Esta ecuación de onda nos sirve para analizar un plasma que tenga varias especies de partículas cargadas; cada una de éstas contribuirá en la corriente \vec{j} de manera que el tensor dieléctrico \vec{K} será la suma de todas las contribuciones. Además la ecuación (3.44) no requiere que el sistema sea espacialmente uniforme.

3.2.3 Tensor dieléctrico para un plasma frío de quarks y electrones

Ahora consideraremos un plasma de quarks y electrones sin campo magnético y sin colisiones entre partículas. Denotaremos la

carga de las diferentes partículas por q_a . Su masa efectiva estará denotada por m_a , y estará dada por:

$$m_a = \frac{\mu_a}{c^2}, \quad (3.45)$$

donde μ_a es el potencial químico de la especie a . La relación entre el campo eléctrico y la corriente debe obtenerse de la siguiente ecuación de movimiento para los diferentes componentes del plasma:

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} \equiv m_a \left(\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + \vec{v}_a \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_a \right) = q_a \vec{E}. \quad (3.46)$$

Pero por el momento sólo nos interesa tratar con fluctuaciones de manera lineal, por lo que el término $\vec{v}_a \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_a$ de la ecuación de movimiento (3.46) no lo tomaremos más en cuenta

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = \frac{q_a \vec{E}}{m_a}. \quad (3.47)$$

Entonces si utilizamos nuevamente la transformada de Fourier de la ecuación (3.39), podemos escribir la ecuación de movimiento para cada especie como

$$\vec{v}_a = \frac{i q_a}{m_a \omega} \vec{E}. \quad (3.48)$$

Ahora, sabemos que la velocidad de los iones y la densidad de corriente están relacionadas por

$$\vec{j}_a = n_a(\vec{x}) q_a \vec{v}_a, \quad (3.49)$$

donde $n_a(\vec{x})$ es la densidad de partículas de la especie a antes de la perturbación. Entonces la densidad de corriente \vec{j} estará dada por

$$\vec{j} = \sum_a \vec{j}_a = \frac{i}{\omega} \sum_a \frac{n_a(\vec{x}) q_a^2}{m_a} \vec{E}. \quad (3.50)$$

Por lo tanto, la ecuación del tensor de conductividad para una especie del plasma de quarks y electrones, frío, estacionario, sin campo magnético y sin colisiones es

$$\sigma_{rs} = \sum_a \sigma_{(a)rs} = \frac{i}{\omega} \sum_a \frac{n_a(\vec{x})q_a^2}{m_a} \delta_{rs}. \quad (3.51)$$

Si sustituimos esta ecuación (3.51) en la ecuación (3.43) y utilizamos la definición de la frecuencia de plasma (3.7) obtenemos que el tensor dieléctrico estará dado por

$$K_{rs} = \delta_{rs} + \left(\frac{i4\pi}{\omega}\right) \left(\frac{i}{\omega}\right) \sum_a \left(\frac{n_a(\vec{x})q_a^2}{m_a}\right) \delta_{rs} = \left(1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{\omega^2}\right) \delta_{rs}, \quad (3.52)$$

entonces, podemos ver que

$$\frac{\omega^2}{c^2} K_{rs} E_r = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{\omega^2}\right) \delta_{rs} E_r = \left(\frac{\omega^2 - \sum_a \omega_{(a)p}^2}{c^2}\right) \delta_{rs} E_r. \quad (3.53)$$

3.2.4 Ondas Electromagnéticas en un plasma frío de quarks y electrones

Empezemos por definir a

$$\Omega_p^2 = \sum_a \omega_{(a)p}^2, \quad (3.54)$$

utilizando esta definición y la ecuación (3.53) obtenemos que la ecuación de onda (3.44) se transforma en

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - \left(\frac{\omega^2 - \Omega_p^2}{c^2}\right) \vec{E} = 0. \quad (3.55)$$

Tomemos ahora un plasma que además de ser estacionario es homogéneo si no ha sido perturbado; entonces, la transformada

de Fourier que nos permita hacer un análisis tanto en el espacio como en el tiempo será

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (3.56)$$

Dada esta transformada de Fourier (3.56), la ecuación de onda (3.44) se puede escribir ahora como

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{k} \cdot \vec{E} = 0. \quad (3.57)$$

y el caso particular de la ecuación (3.55), se puede escribir como

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} + \left(\frac{\omega^2 - \Omega_p^2}{c^2} \right) \vec{E} = 0. \quad (3.58)$$

La ecuación de onda (3.58), permite ondas con amplitud diferente de cero sólo para algunas relaciones entre el vector de onda \vec{k} y la frecuencia ω ; esto se conoce como la *relación de dispersión*.

Si expresamos al campo eléctrico en función de sus componentes paralelas y perpendiculares al vector de onda \vec{k}

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \quad (3.59)$$

y dado que

$$\vec{k} \times \vec{E}_{\parallel} = 0 = \vec{k} \cdot \vec{E}_{\perp}, \quad (3.60)$$

la ecuación de onda (3.58) se simplifica, quedando como

$$-c^2 k^2 \vec{E}_{\perp} + (\omega^2 - \Omega_p^2)(\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}) = 0. \quad (3.61)$$

Y dado que las componentes son perpendiculares entre sí, la ecuación se puede separar en dos ecuaciones distintas, una para \vec{E}_{\parallel} :

$$(\omega^2 - \Omega_p^2) \vec{E}_{\parallel} = 0, \quad (3.62)$$

y otra para \vec{E}_\perp :

$$(\omega^2 - \Omega_p^2 - c^2 k^2) \vec{E}_\perp = 0. \quad (3.63)$$

Entonces podemos ver que habrá dos *modos* diferentes de propagación de ondas, el *modo longitudinal*, en el cual $\vec{E} \parallel \vec{k}$, y cuya relación de dispersión está dada por

$$\omega^2 = \Omega_p^2, \quad (3.64)$$

y el *modo transversal*, donde $\vec{E} \perp \vec{k}$, y la relación de dispersión está dada por

$$\omega^2 = \Omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (3.65)$$

El primero, el modo longitudinal, corresponde a oscilaciones electrostáticas del plasma (ver sección 3.1.1).

El segundo, el modo transversal, corresponde a una onda electromagnética, pues viendo la ley de Faraday (3.28), vemos que involucra una onda eléctrica y una onda magnética perpendiculares entre sí y con el vector de onda \vec{k} . Es claro que estas ondas sólo se propagarán si su frecuencia es mayor que la frecuencia de plasma, es decir, tienen un *corte* en $\omega^2 = \Omega_p^2$. Esto se hace evidente cuando de la relación de dispersión (3.65) despejamos el vector de onda:

$$k = \pm(\omega^2 - \Omega_p^2)^{1/2}, \quad (3.66)$$

lo cual es real para $\omega > \Omega_p$, y podemos ver que en este caso el vector de onda es real y por lo tanto las ondas se propagan. Ahora, la *velocidad de grupo* está definida por

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k}; \quad (3.67)$$

entonces, para este caso, la velocidad de grupo estará dada por

$$u = c \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad (3.68)$$

de forma que si $\omega \rightarrow \infty$, entonces $u_r \rightarrow c$, y si $\omega \rightarrow \Omega_p$, entonces $u_r \rightarrow 0$.

Por el otro lado, si $\omega < \Omega_p$, entonces la ecuación para el vector de onda será

$$k = \pm ic^{-1}(\Omega_p^2 - \omega^2)^{1/2}, \quad (3.69)$$

como el vector de onda es imaginario, en una dirección crecerá exponencialmente y en la otra decrecerá exponencialmente. Sabemos que el sistema es estable dado que la frecuencia de onda es siempre real para k real en la ecuación (3.66), además no hay una fuente de energía en el sistema; por lo tanto el crecimiento exponencial para el caso imaginario representa una onda disipativa.

Por otro lado, vemos que cuando $\omega \ll \Omega_p$ el vector de onda es

$$k = \pm \frac{i\Omega_p}{c}, \quad (3.70)$$

entonces la onda decrece exponencialmente en el espacio con una longitud característica dada por

$$\lambda_s = \frac{c}{\Omega_p}, \quad (3.71)$$

que se conoce como *profundidad de penetración electromagnética*. Entonces, si una onda electromagnética incide sobre un plasma y su frecuencia es menor que la de éste, la onda no se propagará dentro del plasma, sino que penetrará una distancia comparable a λ_s , y posteriormente será reflejada.

3.2.5 Ondas electromagnéticas en un plasma frío y magnetizado de quarks y electrones

Si ahora agregamos un campo magnético uniforme \vec{B}_0 al sistema, la onda electromagnética generará un campo eléctrico \vec{E} y una componente magnética $\delta\vec{B}$ adicional. Entonces la ecuación de movimiento (3.46) será remplazada por una nueva:

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{q_a}{m_a} \vec{E} + \frac{q_a}{m_a c} \vec{v}_a \times \vec{B}_0, \quad (3.72)$$

donde hemos suprimido nuevamente el término de segundo orden $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$, y además el término, también de segundo orden, $\vec{v} \times \delta\vec{B}$.

Si orientamos el sistema de referencia de forma tal que el campo magnético pueda ser expresado como $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$, obtendremos a partir de la ecuación de movimiento (3.72) que

$$\frac{dv_{(a)1}}{dt} = \frac{q_a}{m_a} E_1 + \frac{q_a}{m_a c} v_{(a)2} B_0, \quad (3.73)$$

$$\frac{dv_{(a)2}}{dt} = \frac{q_a}{m_a} E_2 - \frac{q_a}{m_a c} v_{(a)1} B_0, \quad (3.74)$$

y

$$\frac{dv_{(a)3}}{dt} = \frac{q_a}{m_a} E_3. \quad (3.75)$$

Si consideramos los componentes de las transformadas de Fourier (3.56), y utilizamos la expresión para la girofrecuencia (3.24) (donde la masa está dada por la ecuación (3.16)), tendremos que las ecuaciones de movimiento (3.73), (3.74) y (3.75), pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$i\omega v_{(a)1} = -\frac{q_a}{m_a} E_1 - \omega_{(a)g} v_{(a)2}, \quad (3.76)$$

$$i\omega v_{(a)2} = -\frac{q_a}{m_a} E_2 + \omega_{(a)g} v_{(a)1}, \quad (3.77)$$

y

$$i\omega v_{(a)3} = -\frac{q_a}{m_a} E_3. \quad (3.78)$$

Retomemos la definición de la girofrecuencia (3.24):

$$\omega_g = \left| \frac{qB}{mc} \right|,$$

entonces podemos escribir

$$\epsilon_a \omega_{g(a)} = \frac{q_a B}{m_a c}, \quad (3.79)$$

donde ϵ_a es el signo de la carga q_a de la partícula a . Ahora, a partir de las ecuaciones (3.76) y (3.77) podemos despejar las componentes de las velocidades v_1 y v_2 para obtener las siguientes ecuaciones:

$$v_{(a)1} = \frac{iq_a}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} (\omega E_1 + i\epsilon_a \omega_{(a)g} E_2), \quad (3.80)$$

$$v_{(a)2} = \frac{iq_a}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} (-i\epsilon_a \omega_{(a)g} E_1 + \omega E_2); \quad (3.81)$$

de la ecuación (3.78) podemos obtener la componente de la velocidad v_3 :

$$v_{(a)3} = \frac{iq_a}{m_a \omega} E_3. \quad (3.82)$$

A partir de la ecuación (3.37) y de las ecuaciones de movimiento (3.80), (3.81) y (3.82), obtenemos la relación matricial para la densidad de corriente y el campo eléctrico:

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \sum_a n_a q_a \begin{pmatrix} \frac{i q_a \omega}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & -\frac{\epsilon_a q_a \omega_{(a)g}}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & 0 \\ \frac{\epsilon_a q_a \omega_{(a)g}}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & \frac{i q_a \omega}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i q_a}{m_a \omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

Por lo tanto, el tensor de conductividad de la ecuación (3.51) puede escribirse como

$$\vec{\sigma} = \sum_a \begin{pmatrix} \frac{i n_a q_a^2 \omega}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & -\frac{\epsilon_a n_a q_a^2 \omega_{(a)g}}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & 0 \\ \frac{\epsilon_a n_a q_a^2 \omega_{(a)g}}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & \frac{i n_a q_a^2 \omega}{m_a(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i n_a q_a^2}{m_a \omega} \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

De la ecuación del tensor dieléctrico (3.43) obtenemos entonces que

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & -\sum_a \frac{i \epsilon_a \omega_{(a)p} \omega_{(a)g}}{\omega(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & 0 \\ \sum_a \frac{i \epsilon_a \omega_{(a)p} \omega_{(a)g}}{\omega(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & 1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Con este resultado podemos estudiar la propagación de ondas en un plasma frío y magnetizado uniformemente si tomamos la ecuación de onda (3.57)

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{K} \cdot \vec{E} = 0,$$

que es válida para cualquier dirección del vector de onda \vec{k} con respecto al campo magnético de corriente directa (CD) \vec{B}_0 .

Es importante hacer notar dos casos especiales para el tensor dieléctrico de la ecuación (3.85). El primer caso es para $\omega_p = 0$, esto es, cuando la densidad de partículas cargadas es cero, pues el tensor se reduce al tensor unitario (diagonal). Entonces la ecuación (3.2.5), representa simplemente la relación de dispersión para ondas electromagnéticas transversales en el vacío. Para esta situación la ecuación de onda nos muestra que $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, por lo que no existe un modo de \vec{E} paralelo a \vec{k} .

Ahora, si la onda se propaga en un campo magnético muy intenso, de forma tal que podamos tomar el límite $\omega_g \rightarrow \infty$, el tensor dieléctrico (3.85) se reducirá a

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Si se toma el producto escalar de la ecuación de onda (3.57) con el vector de onda \vec{k} se encuentra un modo longitudinal con campo eléctrico paralelo a \vec{B}_0 que representa oscilaciones del plasma para la relación de dispersión (3.64)

$$\omega^2 = \omega_p^2.$$

El campo magnético no afecta a las partículas cargadas con movimiento paralelo a éste. Por otro lado, si hacemos el producto vectorial de (3.57) y \vec{k} , observamos que las componentes del campo eléctrico transversales a \vec{B}_0 satisfacen la relación de dispersión para el vacío (3.65), esto es, cuando $\omega_p = 0$. La interpretación es que un campo magnético muy intenso evita que

las partículas cargadas se muevan de manera perpendicular al campo magnético, de manera que no tienen ninguna influencia en la propagación de ondas.

Capítulo 4

Propagación de Ondas Electromagnéticas en un Plasma Magnetizado de Quarks y Electrones

En este último capítulo serán expuestos los resultados sobre la propagación de ondas electromagnéticas en el plasma frío (cuya energía térmica sea mucho menor que su energía total interna) y magnetizado (su campo magnético tendrá una intensidad entre los 10^{12} y 10^{16} gauss), formado por electrones y quarks *up*, *down* y *strange* descritos por la ecuación de estado utilizada en el primer capítulo. Separaremos la propagación en dos casos particulares, el de la propagación a lo largo de un eje perpendicular al campo magnético, y el de la propagación a lo largo de un eje paralelo al campo magnético, tal y como se realizó al final del capítulo 3. Estudiaremos los modos de propagación para la onda electromagnética con polarización circular derecha e izquierda (para el caso de propagación paralela al campo magnético) y el modo único para la propagación perpendicular al campo magnético; señalaremos también las diferencias prin-

cipales que existen entre estos dos modos.

4.1 Ecuación de Estado

En el capítulo 1 analizamos la ecuación de estado para la materia formada por quarks *up*, *down* y *strange*, y por electrones; utilizando los resultados teóricos, se ha desarrollado un código en Fortran, que nos permite calcular numéricamente las frecuencias de plasma y las girofrecuencias para el plasma regido por esta ecuación de estado a diferentes densidades bariónicas (entiéndase en este caso como la densidad para grupos de tres quarks no ligados por fuerza fuerte). En las figuras hemos cortado las gráficas a una densidad de 2 bariones/fm³ dado que estamos interesados en fenómenos específicamente relacionados con la propagación de fotones en la superficie de la estrella.

La figura 4.1 nos muestra la distribución de las frecuencias para las diferentes especies de partículas. El orden de la distribución no variará a lo largo de las gráficas, pues ni la frecuencia de plasma ni la girofrecuencia dependen de la constante de estructura fina, α_c , ni de la constante de la bolsa de M.I.T., B . El tercer parámetro en cuestión, la masa del quark *strange*, únicamente afecta las girofrecuencias y las frecuencias de plasma de este mismo quark, de forma que pueden hacerse más pequeñas al aumentar la masa, pero como se puede observar, la diferencia es mínima, y para los valores permitidos por el estudio de E. Farhi y R. L. Jaffe [6], no hay ninguna alteración en el orden de las frecuencias en cuestión.

Las figuras 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5, muestran los resultados obtenidos para las frecuencias de plasma y girofrecuencias de las cuatro especies de partículas, donde variamos $B^{1/4}$ horizontal-

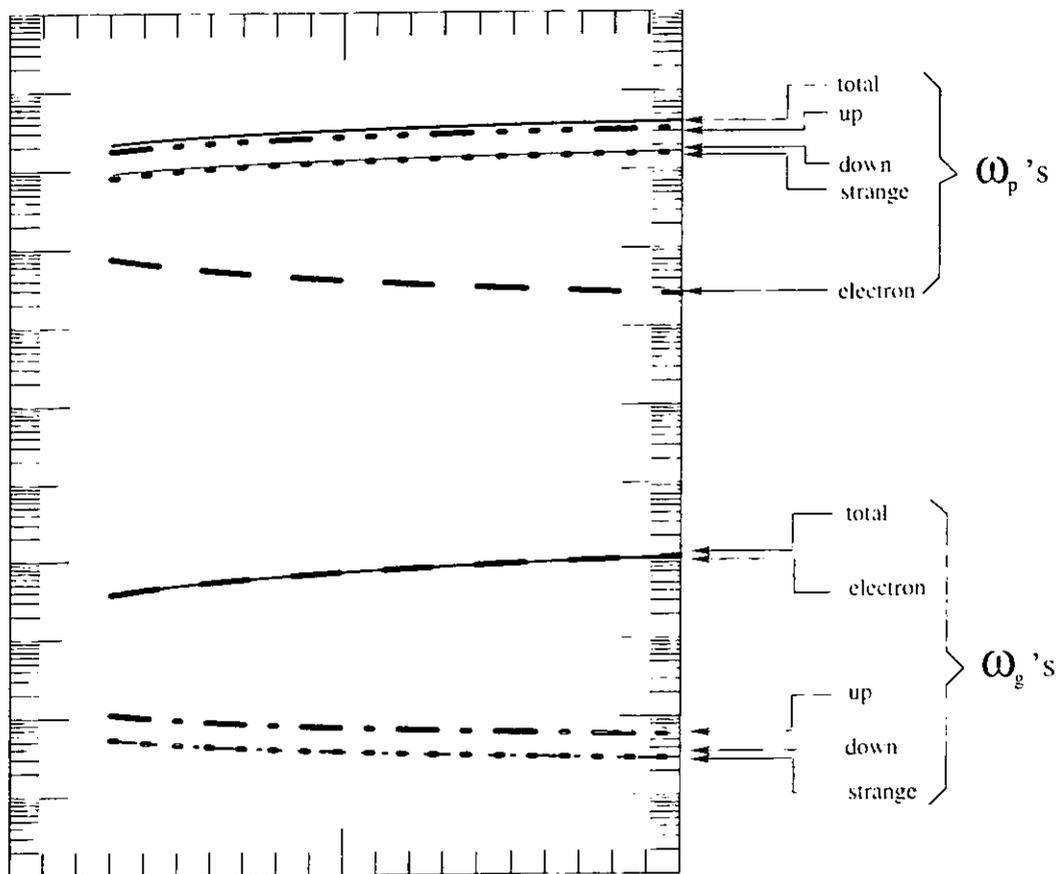


Figura 4.1: Esta gráfica muestra el formato usado por las gráficas de las siguientes páginas. Es importante notar que el orden de las frecuencias de plasma, y las girofrecuencias no se alterarán para los quarks y los electrones a lo largo de estas gráficas. Nota: Para las frecuencias de plasma, la línea continua delgada es la del quark down. Y para las girofrecuencias es la línea punteada delgada.

mente, m_s verticalmente, y α_c de una página a la siguiente.

4.2 Propagación de ondas perpendiculares al campo magnético

Reorientemos el sistema de referencia sobre el plano $x_1 - x_2$ de manera que el eje x_1 coincida con el vector de onda \vec{k} , esto es $\vec{k} = (k, 0, 0)$. Podemos utilizar la siguiente identidad vectorial

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - k^2 \vec{E} \quad (4.1)$$

para transformar la ecuación de onda (3.57) en

$$-k^2 \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} + \frac{\omega^2}{c^2} K \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Si introducimos la notación

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{\omega^2 - \omega_{(a)g}^2} \right], \\ B &= -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2 \epsilon_a \omega_{(a)g}}{\omega(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

podemos escribir la ecuación de onda (4.2) de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} A & iB & 0 \\ -iB & -k^2 + A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

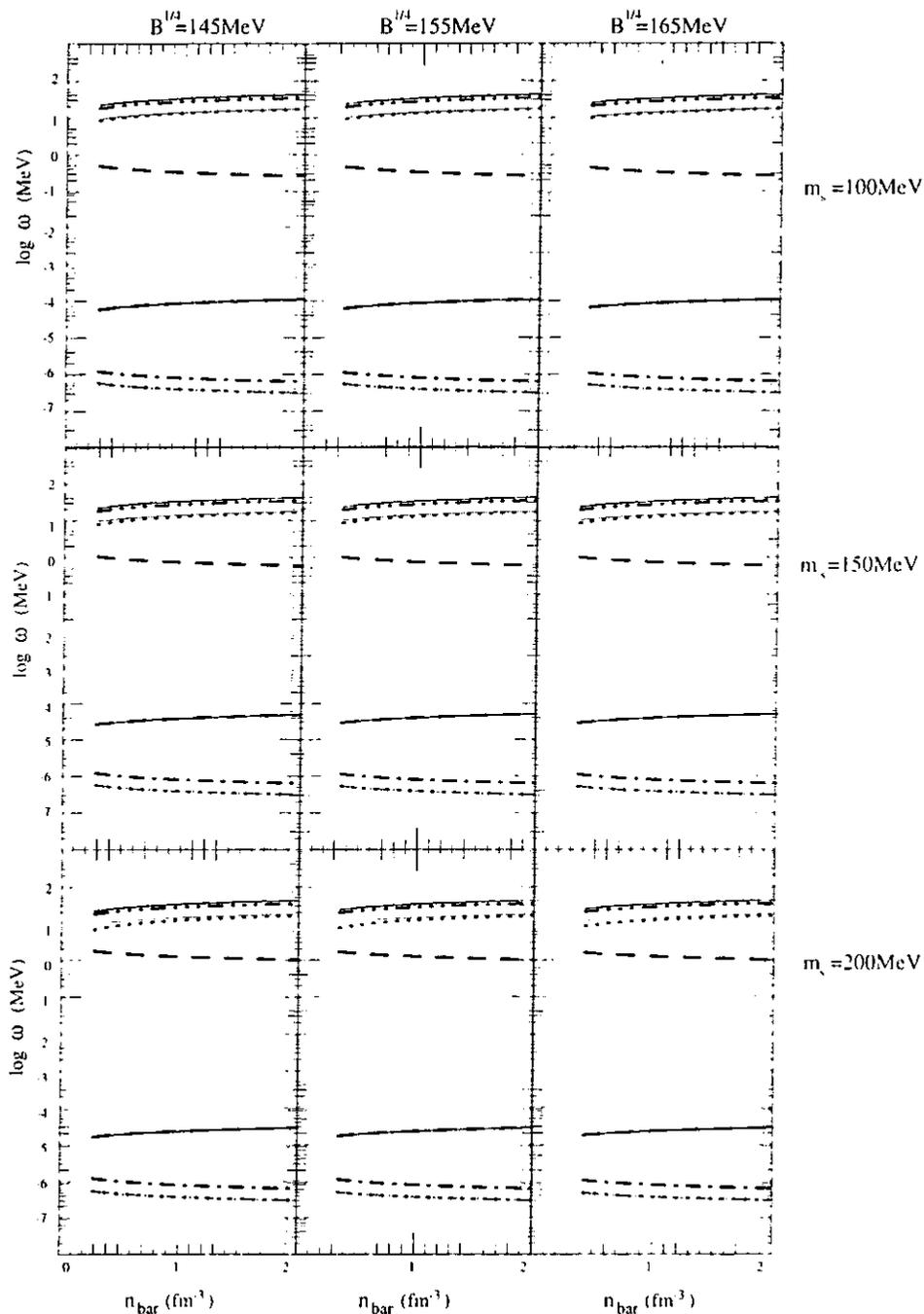


Figura 4.2: En este conjunto de gráficas $\alpha_c = 0$. En cada columna tenemos un valor de la constante de la bolsa fijo, mientras que en cada renglón hemos fijado el valor de la masa del quark strange.

88CAPÍTULO 4. ONDAS EN UN PLASMA DE QUARKS Y ELECTRONES

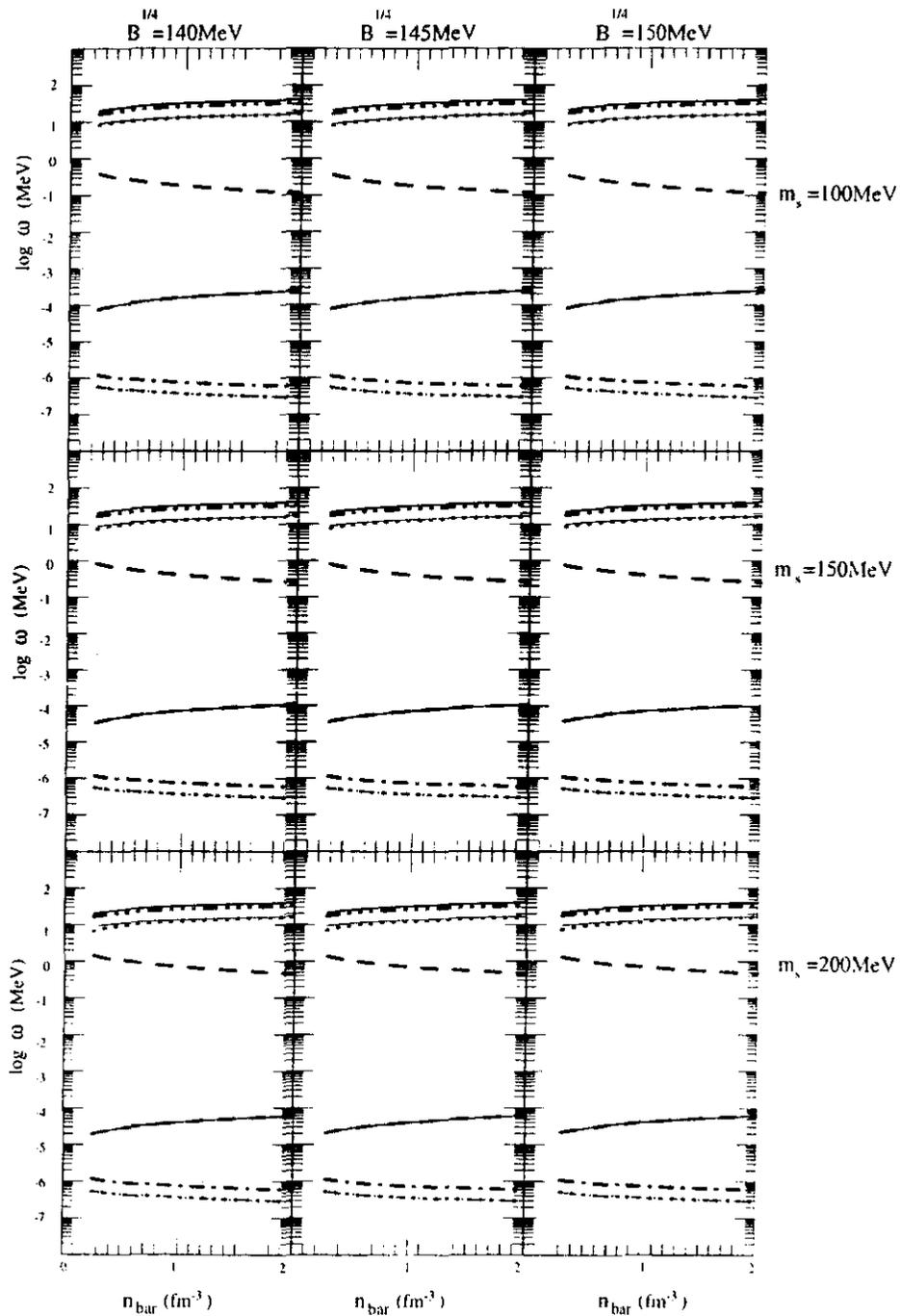


Figura 4.3: En este conjunto de gráficas $\alpha_c = 0.3$.

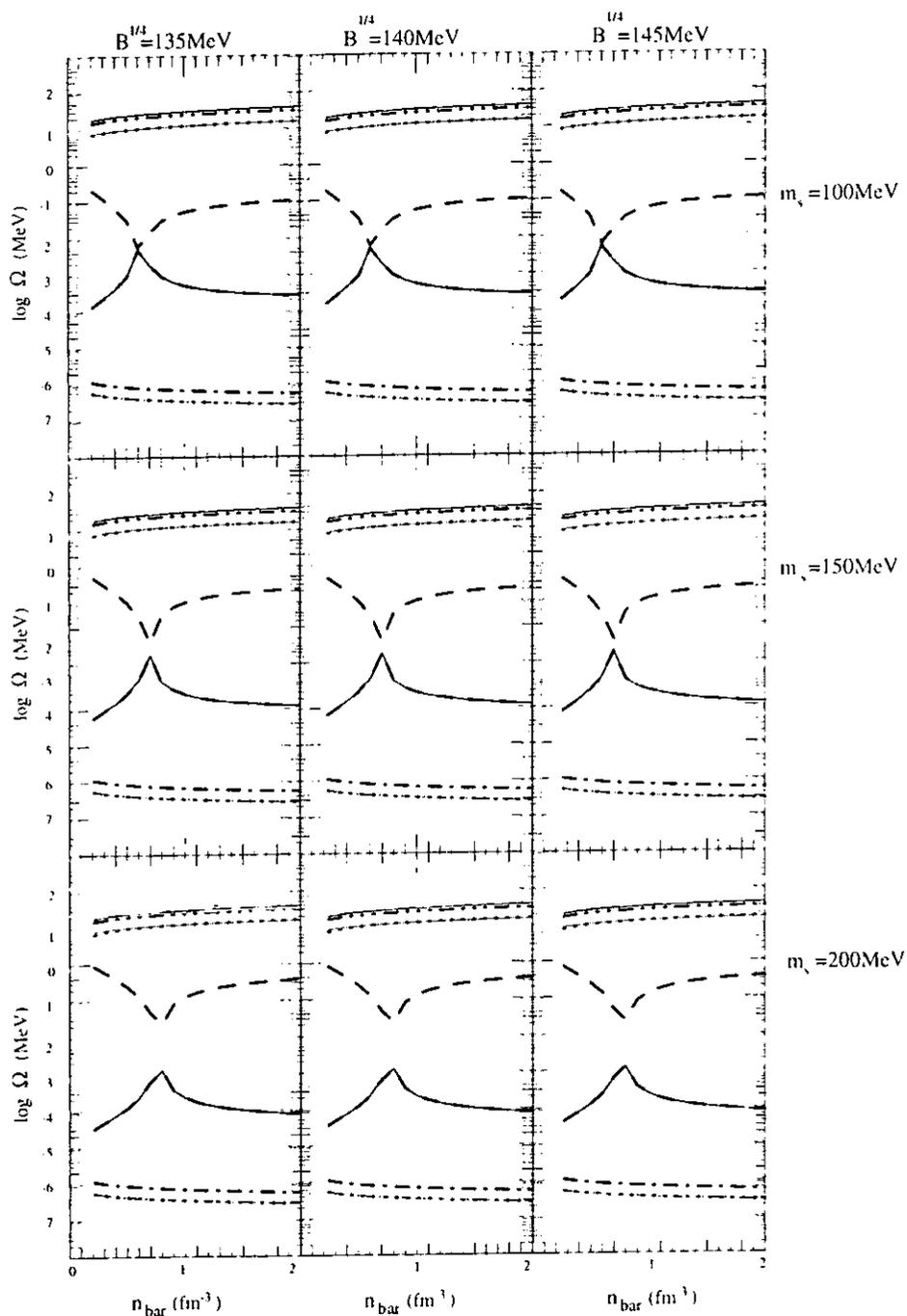


Figura 4.4: En este conjunto de gráficas $\alpha_c = 0.6$; podemos apreciar que para este valor de α_c , y a densidades bariónicas un poco por arriba de $1/2$, la materia extraña tiene carga negativa y por lo tanto pasamos de tener electrones a positrones.

90CAPÍTULO 4. ONDAS EN UN PLASMA DE QUARKS Y ELECTRONES

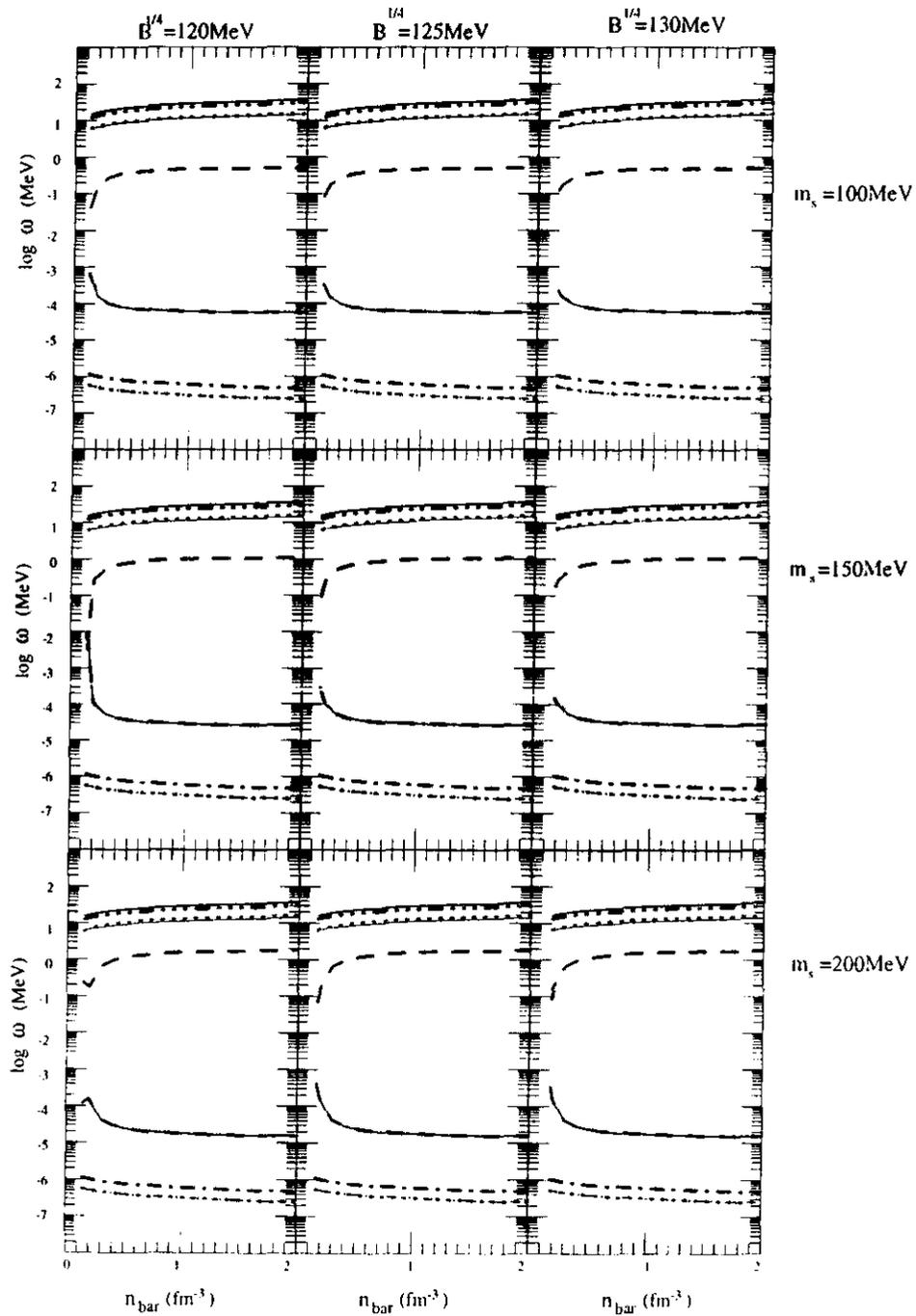


Figura 4.5: En este conjunto de gráficas $\alpha_c = 0.9$.

A partir de esta matriz es claro que los componentes de \vec{E} perpendiculares a \vec{B}_0 están desacoplados de los paralelos. La relación de dispersión correspondiente a $E_3 \neq 0$ es

$$\omega^2 = \Omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (4.5)$$

que es idéntica a la relación de dispersión para ondas electromagnéticas en un plasma no magnetizado (3.65). Para el modo que estamos considerando, el campo eléctrico es paralelo al campo magnético de CD. Dado que las partículas cargadas son libres de moverse paralelamente al campo magnético, podemos ver que este último no tendrá efecto sobre la relación de dispersión.

El caso más interesante involucra a E_1 y E_2 . Podemos ver que se satisface la ecuación matricial homogénea:

$$\begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & -k^2 + A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

Para que el vector (E_1, E_2) sea diferente de cero en esta ecuación (4.6), el determinante de la matriz debe ser igual a cero. Por lo que

$$A^2 - k^2 A - B^2 = 0, \quad (4.7)$$

o bien, en función del vector de onda

$$k^2 = \frac{A^2 - B^2}{A}. \quad (4.8)$$

4.2.1 Plasma con una sola especie

Ahora para el caso de un plasma frío y magnetizado donde sólo hay un tipo de cargas en movimiento, como por ejemplo un plasma con iones positivos masivos (un átomo ionizado) y cargas negativas libres (electrones), se puede obtener una relación

de dispersión relativamente simple para la propagación de ondas electromagnéticas perpendiculares al campo magnético, expresada para k^2 en términos de ω^2 :

$$c^2 k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 - \omega_g^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_g^2}. \quad (4.9)$$

En las figuras 4.6 y 4.7 podemos ver esta relación graficada para un plasma de electrones. En las regiones donde $c^2 k^2 < 0$, las ondas serán evanescentes, mientras que en las regiones donde $c^2 k^2 > 0$, las ondas se propagarán. Los ceros del numerador de la ecuación (4.9) son los límites inferiores de frecuencia o *frecuencia de corte*, para los dos modos de propagación, y están dados por las siguientes dos ecuaciones:

$$\omega_I = -\frac{1}{2}\omega_g + (\omega_p^2 + \frac{1}{4}\omega_g^2)^{1/2} \quad (4.10)$$

y

$$\omega_D = \frac{1}{2}\omega_g + (\omega_p^2 + \frac{1}{4}\omega_g^2)^{1/2}. \quad (4.11)$$

El denominador de la ecuación (4.9) se vuelve cero cuando $\omega = \omega_H$ (una *frecuencia de resonancia*), conocida como *frecuencia híbrida superior*, donde

$$\omega_H = (\omega_p^2 + \omega_g^2)^{1/2}. \quad (4.12)$$

Entonces, las ondas electromagnéticas se pueden propagar perpendicularmente al campo magnético en este tipo de plasmas cuando $\omega_I < \omega < \omega_H$ o cuando $\omega > \omega_D$ (ver figura 4.7).

Cabe mencionar que apartir de las ecuaciones 4.10 y 4.11 es fácil ver que cuando $\omega_g \ll \omega_p$ las raíces estarán muy cercanas al polo, y por ende la banda de frecuencias con valores de k^2 positivos, será muy estrecha.

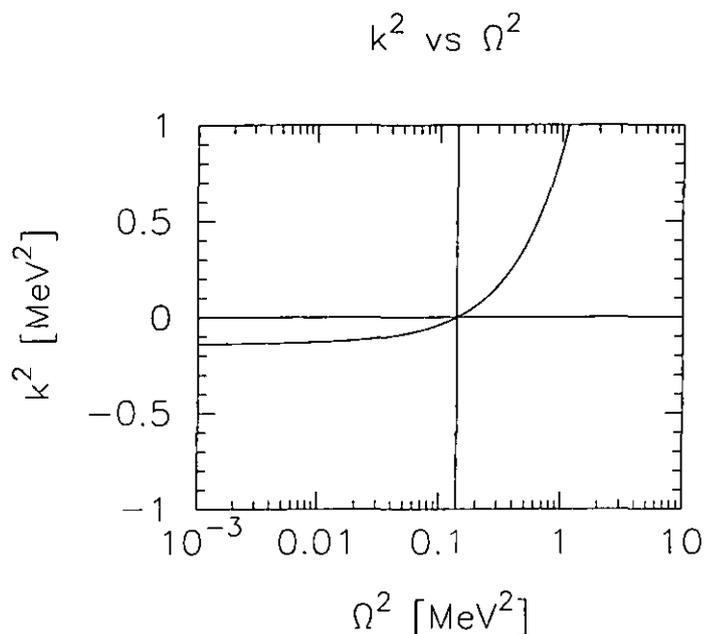


Figura 4.6: Para un plasma de una sola especie tendremos un solo polo cuando la frecuencia se acerque a la frecuencia de resonancia ω_H . En la figura 4.7 se ve un acercamiento a este polo.

4.2.2 Resultados numéricos

Regresando al caso del plasma de quarks y electrones, como podemos ver en la figura 4.8, donde hemos graficado A vs ω , y B vs ω respectivamente; A y B tienen polos cuando $\omega^2 = \omega_{(a)g}^2$, entonces podemos ver que hay tres polos, uno para la girofrecuencia de los electrones, otra para la girofrecuencia de los quarks up, y otro para la girofrecuencia de los quarks down y strange (recordemos que sus potenciales químicos y sus cargas son iguales).

De la ecuación (4.8), podemos ver que k^2 puede tener polos cuando $A^2 \rightarrow \infty$, o cuando $B^2 \rightarrow \infty$, no obstante, estos polos se cancelan unos a otros para cada una de las girofrecuencias de los quarks.

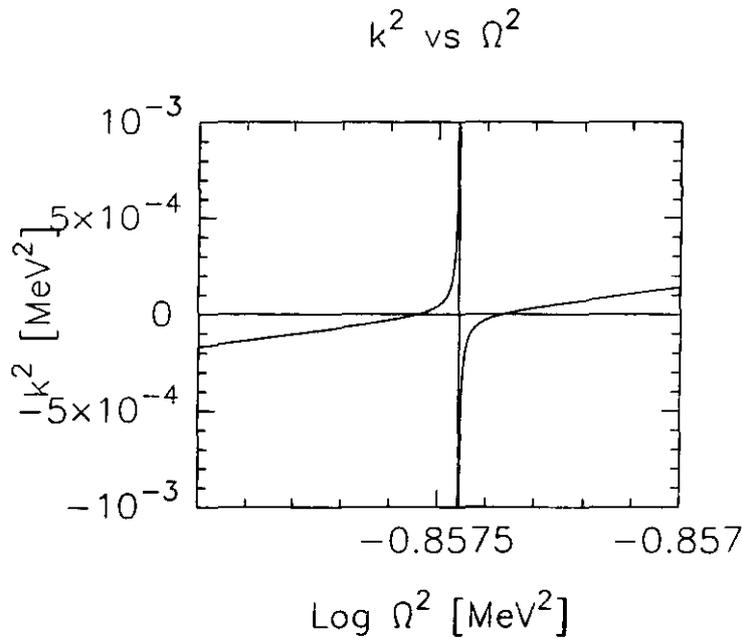


Figura 4.7: Esta figura es una ampliación de la gráfica 4.6, donde podemos observar con mayor detalle como k^2 crece muy rápidamente cuando la frecuencia se acerca a ω_H . Es importante notar que la escala para Ω^2 ha cambiado.

Además la ecuación (4.8), tiene polos cuando $A = 0$. A es negativa antes de cada polo, como se observa en la gráfica 4.8. Por lo tanto, antes de cada polo, A cruza por cero, lo que implica que k^2 tendrá una raíz entre las girofrecuencias de los quarks, otra a una frecuencia poco inferior a la girofrecuencia del electrón, y otra cercana a la frecuencia del plasma. Finalmente podemos ver que existe un último polo, alrededor de los 20MeV , que corresponde a la frecuencia híbrida superior.

Es importante notar que las girofrecuencias para cada especie dependen linealmente de la intensidad del campo magnético, por lo tanto, si el campo magnético fuese el de un magnetar (aproximadamente 10^{15} gauss), en lugar del de un pulsar (como en nuestro caso, $B = 10^{12}$ gauss) las ventanas de emisión se

recorrerían unos tres órdenes de magnitud, del óptico a los rayos X.

Ahora, como se vió para el plasma de electrones, las raíces de k son, ambas, muy cercanas a la frecuencia de resonancia (4.12) para cada especie, pues la girofrecuencia de cada una de las especies es muy pequeña comparada con la frecuencia del plasma. Esto ocasiona que las frecuencias permitidas estén nuevamente restringidas a bandas muy estrechas.

4.3 Propagación de ondas paralelas al campo magnético

Consideremos ahora ondas propagándose en un plasma magnetizado, frío y uniforme, para el caso en el que el vector de onda \vec{k} es paralelo al campo magnético \vec{B}_0 . El procedimiento para hacer esto es muy similar al de la propagación de ondas perpendiculares al campo magnético, pero la relación de dispersión será significativamente diferente. Ahora tomaremos $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ y $\vec{k} = (0, 0, k)$. Si utilizamos la ecuación (3.85), encontramos que ahora la ecuación de onda (3.57) toma la forma

$$\begin{pmatrix} -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{\omega^2 - \omega_{(a)g}^2} \right) & -i \frac{\omega^2}{c^2} \sum_a \frac{\epsilon_a \omega_{(a)p}^2 \omega_{(a)g}}{\omega(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & 0 \\ i \frac{\omega^2}{c^2} \sum_a \frac{\epsilon_a \omega_{(a)p}^2 \omega_{(a)g}}{\omega(\omega^2 - \omega_{(a)g}^2)} & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{\omega^2 - \omega_{(a)g}^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} \sum_a \frac{\omega^2 - \omega_{(a)p}^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.13)$$

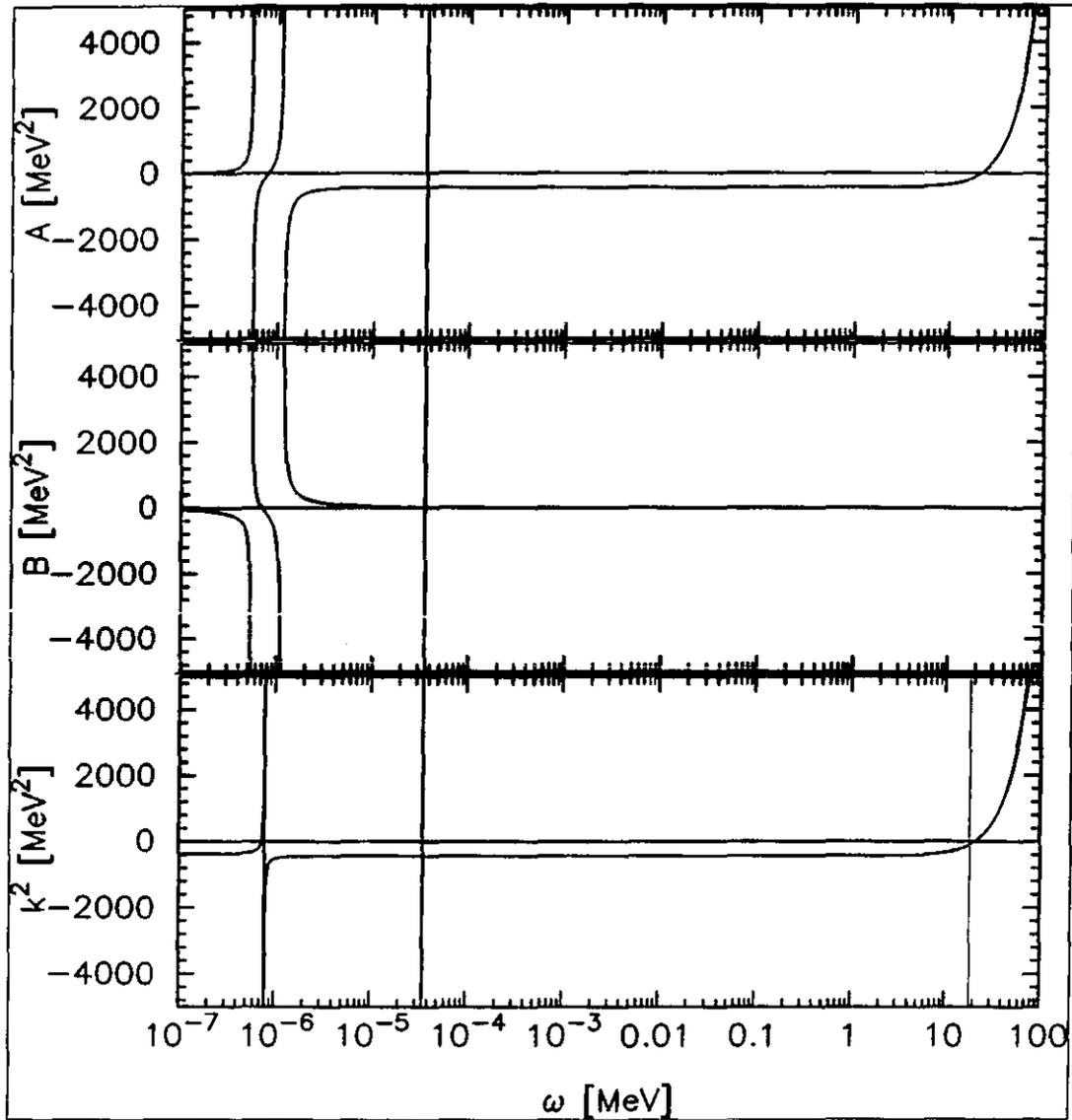


Figura 4.8: En estas tres figuras podemos observar como las graficas de A y B dan lugar a las características principales de k^2 .

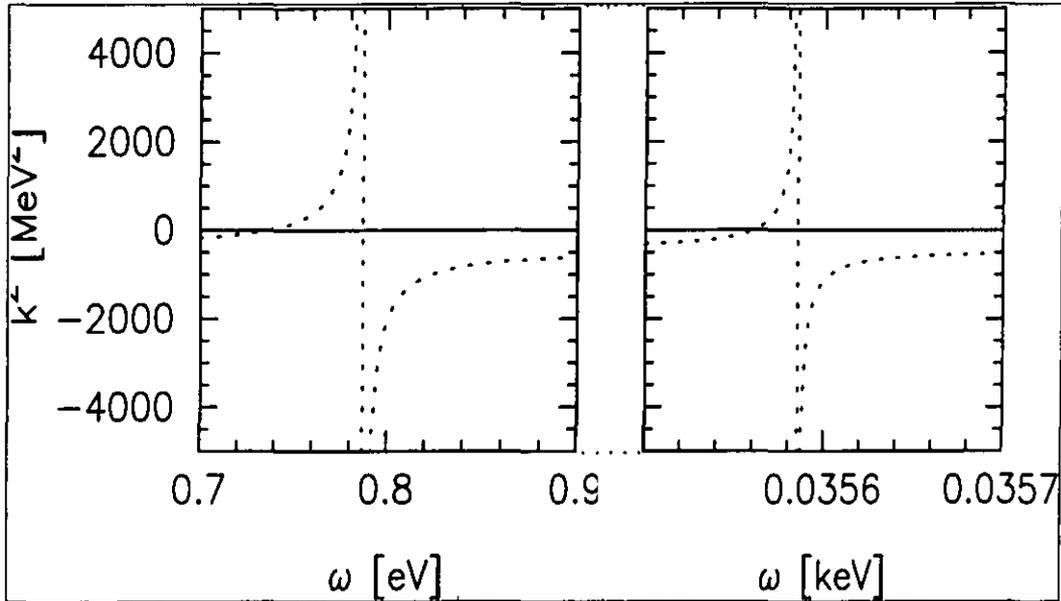


Figura 4.9: Aquí tenemos un acercamiento a los polos de k en la gráfica 4.8. donde podemos apreciar el ancho de las bandas de emisión. Nuevamente, es importante notar que la escala es diferente.

Los términos que involucran a E_3 nos llevan nuevamente a la ecuación de dispersión (3.64) para ondas electrostáticas longitudinales, esto es, oscilaciones de plasma.

Los términos que involucran a E_1 y E_2 , que describen a las ondas transversales pueden ser expresados por

$$\begin{pmatrix} C & iD \\ -iD & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.14)$$

donde C y D representan a las siguientes funciones de ω y k :

$$\left. \begin{aligned} C &= -c^2 k^2 + \omega^2 \left(1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{\omega^2 - \omega_{(a)g}^2} \right), \\ D &= \sum_a \frac{-\epsilon_a \omega_{(a)p}^2 \omega_{(a)g} \omega}{\omega^2 - \omega_{(a)g}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

El determinante de la matriz en la ecuación (4.14) nos conduce a poder expresar la relación de dispersión de la siguiente manera:

$$C = \pm D. \quad (4.16)$$

Podemos ver de la ecuación (4.14) que los componentes del campo eléctrico transversal, E_1 y E_2 , tienen el mismo valor absoluto pero están en cuadratura de fase:

$$\frac{E_1}{E_2} = \mp i. \quad (4.17)$$

Esto muestra que los modos normales de la propagación de la onda paralela al campo magnético están polarizados circularmente. Con respecto a la dirección del campo magnético,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E_1}{E_2} = +i \text{ corresponde a la polarización derecha,} \\ \frac{E_1}{E_2} = -i \text{ corresponde a la polarización izquierda.} \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

Hay que hacer notar que la polarización circular derecha puede llevar a una posible sincronía entre la rotación de la onda y la rotación natural de las partículas con carga eléctrica negativa en el campo magnético, mientras que la polarización circular izquierda puede llevar a una sincronía entre la rotación de la onda y la rotación natural de las partículas con carga eléctrica positiva en el campo magnético. Esta sincronía nos conduce a una singularidad en la relación de dispersión.

Para la relación de dispersión (4.16), vemos que entre ambos coeficientes C y D existe linealidad, y por ende podremos obtener una ecuación mucho más sencilla que para el caso de las ondas perpendiculares al campo magnético, pues no tendremos términos cruzados entre las diferentes especies del plasma. Entonces, la relación de dispersión para ondas paralelas al campo

magnético puede escribirse como:

$$c^2 k^2 = \omega^2 \left[1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{\omega (\omega \pm \epsilon_a \omega_{(a)g})} \right]. \quad (4.19)$$

Si ahora introducimos al *índice de refracción*, definido por

$$n = \frac{ck}{\omega} \quad (4.20)$$

y lo sustituimos en la relación de dispersión de la ecuación (4.19), podremos reescribirla como

$$n^2 = 1 - \sum_a \frac{\omega_{(a)p}^2}{\omega (\omega \pm \epsilon_a \omega_{(a)g})}. \quad (4.21)$$

Podemos ver entonces que cuando $\omega \rightarrow \infty$, entonces $n \rightarrow 1$, y por lo tanto, la propagación es igual que en el vacío para este caso. Sin embargo, a frecuencias más bajas la propagación de los dos modos polarizados (el derecho y el izquierdo) cambiará, pues tendremos situaciones diferentes dependiendo de si $\omega_p > \omega_g$ ó $\omega_g > \omega_p$; por consiguiente, a continuación analizamos numéricamente la ecuación 4.19.

4.3.1 Resultados numéricos

En este caso tenemos dos posibles formas de propagación, pues tenemos la polarización circular izquierda, y la derecha. Como podemos observar en la figura 4.10, la polarización izquierda tiene un polo correspondiente a la girofrecuencia del quark up, pues es el único con carga positiva; mientras que la polarización derecha tiene dos polos, uno para la girofrecuencia de los quarks down y strange, y otro para los electrones.

De la relación de dispersión (4.21) podemos ver que en general la ecuación está dominada por la frecuencia de plasma, no obstante, cuando la frecuencia es muy cercana a alguna de las girofrecuencias, este término se disparará y producirá una ventana, igual que en el caso de ondas perpendiculares.

Aquí nuevamente es importante recordar que para campos magnéticos como los de los magnetares, las ventanas de emisión se recorrerían del óptico a los rayos X.

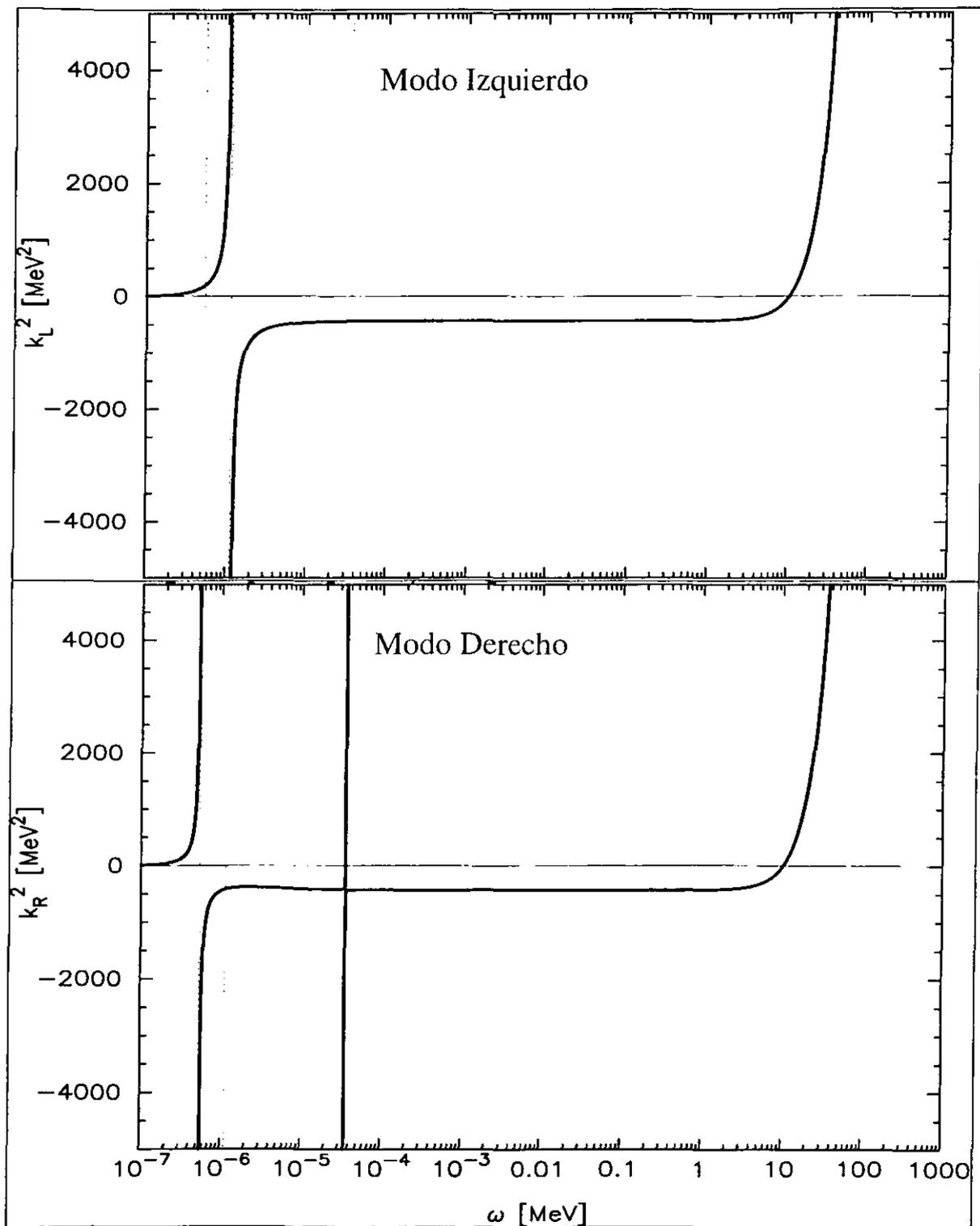


Figura 4.10: En estas dos graficas podemos ver como los dos modos de polarización tendran diferentes bandas de emisión por debajo de la frecuencia del plasma.

Capítulo 5

Discusión y Conclusiones

Hemos visto, en el capítulo anterior, que tanto el modo de propagación de ondas electromagnéticas perpendiculares al campo magnético, como el modo de propagación de ondas electromagnéticas paralelas al campo magnético pueden producir “ventanas” de emisión cuando tenemos un plasma de quarks y electrones. Esto es, para ambos casos existen bandas de frecuencias que permiten la propagación de ondas electromagnéticas con frecuencia inferior a la frecuencia del plasma. Hemos mostrado que esto es exclusivamente debido a que, al tener un medio permeado por un campo magnético, la girofrecuencia de las partículas permite que los fotones puedan propagarse en este medio.

Ha sido descrito analíticamente el mecanismo que provoca que el vector de onda k tenga valores positivos. Con esto podemos ver que las bandas de propagación permitidas dependen linealmente de la intensidad del campo magnético. Por ende, una estrella extraña con un campo magnético del orden de $\sim 10^{12}\text{G}$ puede emitir radiación electromagnética en regiones cercanas al óptico, mientras que un magnetar de materia extraña emitiría en regiones dentro de los rayos X.

No obstante debemos mencionar que, dado que la materia

extraña puede tener carga positiva (debido a la diferencia de masa entre el quark strange y los quarks up y down), es muy probable que exista una capa o atmósfera de electrones alrededor de una estrella de materia extraña, lo cual, sin duda, puede bloquear una cantidad considerable de la emisión de la superficie de la estrella; lo cual puede ser evaluado a partir de los resultados presentados en el capítulo 4.

Es por lo tanto necesario hacer una estimación de la intensidad de emisión de radiación de la estrella y compararla con la absorción de la atmósfera de electrones en la superficie de ésta.

También se requiere hacer un análisis equivalente al que se ha realizado en este trabajo tomando en cuenta varios factores que pueden afectar las observaciones; por ejemplo, las colisiones entre partículas deben evitar que el vector de propagación k se vuelva infinito para frecuencias cercanas a las girofrecuencias de cada especie; no hemos tomado en cuenta la posibilidad de radiación sincrotrónica de cada especie de partícula, la cual podría tener un papel importante en este problema; la superconductividad de color también puede tener un fuerte efecto en la emisión de radiación de la materia de quarks. Y por último, es también necesario hacer un análisis de la emisión térmica que tendría un plasma de quarks y electrones con un campo magnético tomando en cuenta que solo hay ciertas regiones de emisión permitidas, de forma tal que podamos determinar la intensidad de las líneas de emisión y su relevancia en el proceso de enfriamiento en una estrella extraña.

Bibliografía

- [1] WITTEN, E., *Physical Review D*, Vol. 30, N. 2, pp.279, 1984.
- [2] GLENDENNING, N. K., *Compact Stars*, caps.3. 6. 8. Springer Verlag, NY, EUA, 1997.
- [3] OKUN. L. B., *Particle Physics, The quest for the substance of substance*, pp.42, 133, Hardwood Academic Press, NY, EUA, 1985.
- [4] LEE, T. D. *Particle Physics & Introduction to Fiel Theory*. caps. 17, 18, 20, Hardwood Academic Press, NY, EUA, 1981.
- [5] Conversación con el Dr. Matías Moreno.
- [6] FARHI, E. & Jaffe, R. L., *Physical Review D*, Vol. 30, N. 11, pp.2379-2390, 1984.
- [7] HAENSEL, P., Zdunik, J. L., & Schaeffer. R., *Strange Quark Stars, Astronomy and Astrophysics*. Vol. 160, pp.121-128, 1985.
- [8] ALCOCK, C., Farhi, E., & Olinto, A. V., *Strange Stars, Astrophysical Journal*, 310, pp.261-272, 1986.
- [9] OLINTO, A. V., *Quark Matter in Astrophysics and Cosmology, Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields* 38. pp.303-306, 1988.
- [10] PAGE, D., *Strange Stars: Which is the ground state of QCD at finite baryon number?*, *Proceedings of the Workshop on High Energy Phenomenology*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, 1992.

Índice de Figuras

- 1.1 Esta figura muestra una carga eléctrica dentro de un medio dieléctrico. Como puede observarse, las cargas medidas dentro de diferentes círculos varían; esto ocasiona que la carga sea apantallada y por lo tanto, su valor total sea difícil de medir. En QED el vacío polarizable genera pares $e^- - e^+$ (fermiones) que producen un medio dieléctrico que apantalla a las cargas eléctricas. En QCD el vacío polarizable produce, principalmente, pares $g - \bar{g}$ es decir pares de bosones, con lo que las cargas fuertes crean agujeros en el medio dieléctrico de color. 10
- 1.2 En el primer cuadro tenemos la polarización del vacío para QED, donde un fotón puede producir un par de leptones, en este caso $e^- - e^+$. Sin embargo en QCD existen dos posibilidades, esto es, el gluón puede producir un par de bosones (los gluones de la figura central), o un par de fermiones (los quarks de la figura de la derecha). Las letras a , b y c representan a los tres posibles colores de la carga fuerte. 11
- 1.3 En este diagrama se muestra como, en el caso de la materia de quarks, disminuye la energía de Fermi ϵ_F (donde $\epsilon_F = \epsilon_F$) un valor $\Delta\epsilon_F$ cuando los quarks se reparten en tres sabores siempre y cuando la masa del tercer tipo de quarks sea inferior a esta energía. 16

- 1.4 Presión (línea continua) y densidad (línea punteada) graficadas contra la densidad de bariones, de acuerdo con las ecuaciones (1.19) y (1.21). 26
- 1.5 Podemos observar como varía el potencial químico de cada especie de partícula con respecto a la densidad bariónica. Podemos ver que los potenciales químicos de los tres quarks son muy parecidos, mientras que el de los electrones es más de un orden de magnitud menor en la superficie. 27
- 2.1 Podemos observar que el máximo de esta gráfica se encuentra alrededor de los núcleos que contienen 56 nucleones. Esta gráfica fue obtenida de la referencia [26]. 34
- 2.2 Este esquema estilo *cebolla* (no a escala) del interior de una estrella masiva poco antes de la explosión de supernova nos ayuda a ver cuáles son las diferentes capas en las que hay distintas etapas de fusión (por ejemplo, en la interior se está fusionando Si en Fe y Ni) y cuáles son los elementos de mayor abundancia (por ejemplo, en la capa exterior, los elementos más abundantes son el ${}^1_1\text{H}$ y el ${}^4_2\text{He}$). 37
- 2.3 El radio R_c del cilindro de luz para un pulsar está dado por la siguiente relación: $R_c = c/\Omega$, donde c es la velocidad de la luz y Ω es el período de rotación de la estrella. En esta figura, la última línea de campo magnético dibujada sale del cilindro de luz; por esta razón no podría cerrarse como se muestra en la figura, sino que en realidad se debe enrollar sobre el eje del cilindro antes de cerrarse nuevamente sobre el pulsar. 52

| | | |
|-----|--|----|
| 2.4 | En esta figura hemos graficado la relación radio-masa para una estrella de neutrones (derecha), y para una estrella extraña (izquierda). Podemos observar que, a diferencia del caso de las estrellas de neutrones, las estrellas extrañas, no tienen una masa mínima; además, su volumen aumenta proporcionalmente con la masa, mientras que para las estrellas de neutrones, dado que están ligadas gravitacionalmente y no por interacción fuerte, el radio aumenta cuando disminuye la masa. | 58 |
| 3.1 | Si tenemos una onda electromagnética barriendo el plasma de izquierda a derecha, el desplazamiento de los electrones será como en la figura. También podemos observar la superficie sobre la que estamos realizando la integración. | 63 |
| 4.1 | Esta gráfica muestra el formato usado por las gráficas de las siguientes páginas. Es importante notar que el orden de las frecuencias de plasma, y las girofrecuencias no se alterarán para los quarks y los electrones a lo largo de estas gráficas. Nota: Para las frecuencias de plasma, la línea continua delgada es la del quark down. Y para las girofrecuencias es la línea punteada delgada. | 85 |
| 4.2 | En este conjunto de gráficas $\alpha_c = 0$. En cada columna tenemos un valor de la constante de la bolsa fijo, mientras que en cada renglón hemos fijado el valor de la masa del quark strange. | 87 |
| 4.3 | En este conjunto de gráficas $\alpha_c = 0.3$ | 88 |
| 4.4 | En este conjunto de gráficas $\alpha_c = 0.6$; podemos apreciar que para este valor de α_c , y a densidades bariónicas un poco por arriba de $1/2$, la materia extraña tiene carga negativa y por lo tanto pasamos de tener electrones a positrones. | 89 |
| 4.5 | En este conjunto de gráficas $\alpha_c = 0.9$ | 90 |

- 4.6 Para un plasma de una sola especie tendremos un solo polo cuando la frecuencia se acerque a la frecuencia de resonancia ω_H . En la figura 4.7 se ve un acercamiento a este polo. 93
- 4.7 Esta figura es una ampliación de la gráfica 4.6, donde podemos observar con mayor detalle como k^2 crece muy rápidamente cuando la frecuencia se acerca a ω_H . Es importante notar que la escala para Ω^2 ha cambiado. 94
- 4.8 En estas tres figuras podemos observar como las graficas de A y B dan lugar a las características principales de k^2 96
- 4.9 Aquí tenemos un acercamiento a los polos de k en la gráfica 4.8, donde podemos apreciar el ancho de las bandas de emisión. Nuevamente, es importante notar que la escala es diferente. 97
- 4.10 En estas dos graficas podemos ver como los dos modos de polarización tendrán diferentes bandas de emisión por debajo de la frecuencia del plasma. 101