



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

BIFURCACIONES DE SINGULARIDADES DE
CAMPOS VECTORIALES DE CODIMENSION
UNO EN R Y R^2

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

LUCIA IVONNE HERNANDEZ MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO SANCHEZ BRINGAS



284505



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



VERDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"BIFURCACIONES DE SINGULARIDADES DE CAMPOS VECTORIALES DE
CODIMENSION UNO EN R Y R^2 ".

realizado por **HERNANDEZ MARTINEZ LUCIA IVONNE**

con número de cuenta 9016987-4 , pasante de la carrera de **ACTUARIA**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis **DR. FEDERICO SANCHEZ BRINGAS**
Propietario

Propietario **DR. ERNESTO ROSALES GONZALEZ**

Propietario **DR. HECTOR F. SANCHEZ MORGADO**

Suplente **DR. EUGENIO GARNICA VIGIL**

Suplente **M. en C. JOSE MATIAS NAVARRO SOZA**

Consejo Departamental de **MATEMATICAS**
Facultad de Ciencias
M. en C. **JOSE ANTONIO FLORES DIAZ**
Consejo Departamental
de
MATEMATICAS



Quiero agradecer:

En primer lugar a mi director de tesis, el Dr. Federico Sánchez Bringas. Por todo lo que he aprendido en el tiempo que llevo trabajando contigo, por tus consejos, por tu ayuda que se ha hecho presente en todo momento y sobre todo, por su amistad. Gracias Federico por creer en mi.

A el Dr. Héctor Sánchez Morgado, por la especial atención que puso a este trabajo, porque él de alguna manera merece muchos créditos en la realización de esta tesis.

A el Dr. Ernesto Rosales, por sus comentarios y sugerencias, a Matías Navarro, mil gracias por tus comentarios, por tu ayuda invaluable durante toda mi carrera y por tu amistad.

A los profesores de la facultad de Ciencias como Joel García, Pablo Barrera, Guillermo Gómez; porque su forma de dar clases y transmitir sus conocimientos sirven de motivación a muchos alumnos como yo.

Dedico esta tesis:

A mi abuela Enriqueta, por su cariño, su apoyo, por todo lo que de ella aprendí (qed).

A mi Chero Von, por el amor que le tengo, Gustavo por estar siempre ahí, por tu paciencia, comprensión y cariño.

A mis hermanos, Ivan, Rocio, Julia y Erick, por ser como son. Por el espíritu tan grande que todos ellos tienen para salir adelante. A mi mamá, Julia Martínez por la confianza que me tiene, por el cariño que le tiene a mi hija. A mi papá José Hernández.

A todos los Gregorios de la familia, (abuelo, tío, primo), Elsy, Enrique, Joca.

A Freth Pérez, por aguantarme todos estos años ... y los que le faltan.

INDICE

Introducción	2
Capítulo 1	
Bifurcación Pitchfork	5
Bifurcación silla - nodo	13
Teorema 1.3. (Silla-nodo)	16
Teorema 1.4. (Pitchfork)	20
Bifurcación Transcritica	25
Capítulo 2	
Introducción a la bifurcación de Hopf	29
Bifurcación de Hopf	36
Teorema de la bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^2	50
Anexo 1	
Bibliografía	80

INTRODUCCION.

En algunos sistemas de ecuaciones diferenciales, que modelan fenómenos físicos o biológicos observamos la aparición de parámetros. Dada la variedad de valores que dichos parámetros pueden asumir; se puede observar que de un sistema a otro, de un valor del parámetro a otro valor suelen ocurrir cambios en la estructura cualitativa del sistema. A dichos cambios se les conoce como bifurcaciones.

El propósito de este trabajo es describir algunas de las bifurcaciones más simples. Estas son representadas por las siguientes tres ecuaciones diferenciales, las cuales dependen de un sólo parámetro,

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = \mu x - x^3 & \text{Pitchfork,} \\ \dot{x} = \mu - x^2 & \text{silla - nodo,} \\ \dot{x} = \mu x - x^2 & \text{Transcritica} \end{array}$$

y el sistema

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) & \\ \dot{y} = x + y(\mu - (x^2 + y^2)) & \text{Hopf.} \end{array}$$

En el primer capítulo se realizará un análisis del flujo de las tres ecuaciones diferenciales, determinando los puntos de equilibrio y la estabilidad de dichos puntos en una vecindad de cada uno de éstos. Se mostrarán los retratos fase de cada ecuación para algunos valores que puede asumir el parámetro.

Después de hacer referencia a éstos ejemplos, se darán los Teoremas de la bifurcación Pitchfork y Silla-nodo para dimensión uno. Dichos Teoremas nos dicen cuando, dada cualquier ecuación diferencial en \mathbb{R} con un parámetro, cuyo campo cumpla con ciertas condiciones, podemos encontrar una curva de puntos de equilibrio de la ecuación.

En el segundo capítulo analizaremos con detalle el flujo del sistema arriba mencionado, el cual es un ejemplo que describe el fenómeno de la bifurcación de Hopf.

Posteriormente se demostrará el Teorema de la bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^2 , el cual, a partir de ciertas condiciones que deberán cumplir los eigenvalores

de la matriz jacobiana de derivadas parciales del campo evaluada en el punto de equilibrio, se podrá garantizar la existencia de órbitas cerradas del sistema así como también la estabilidad de éstas.

CAPITULO 1

Comenzaremos con la ecuación:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x), \quad (1)$$

En general $x \in \mathbf{R}^n, \mu \in \mathbf{R}^k, f_{\mu} \in C^1$.

f_{μ} es el campo de la ecuación diferencial el cual involucra el parámetro μ . Un elemento $x \in \mathbf{R}^n$ representa la n -ada (x_1, \dots, x_n) de números reales y C^1 es el espacio de funciones cuya primer derivada es continua.

Definición 1.1. Dada la ecuación diferencial (1), decimos que \bar{x} es un punto de equilibrio si $f_{\mu}(\bar{x}) = 0$.

Definición 1.2. Decimos que \bar{x} es un punto de equilibrio hiperbólico, si los valores propios de $D_x f_{\mu}(\bar{x})$ tienen partes reales no nulas.

Definición 1.3. Dados dos campos f y g en \mathbf{R}^n , decimos que son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $H: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ tal que H transforma soluciones de f en soluciones de g y preserva la misma orientación en los campos.

Definición 1.4. Un campo vectorial $f \in \mathcal{X}(\mathbf{R}^n)$ (donde $\mathcal{X}(\mathbf{R}^n)$ denota el espacio de campos vectoriales en \mathbf{R}^n) es estructuralmente estable si existe una vecindad N_f de f , tal que cualquier campo $g \in N_f$ es topológicamente equivalente a f .

La definición de valor de bifurcación que se da a continuación es propuesta por Guckenheimer[1983].

Definición 1.5. Un valor del parámetro μ_0 de la ecuación (1) para el cual el flujo de (1) no es estructuralmente estable es un valor de bifurcación del parámetro μ .

BIFURCACION PITCHFORK

En esta sección analizaremos la bifurcación Pitchfork para algunos valores del parámetro. Consideremos la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad (2)$$

donde $x, \mu \in \mathbb{R}$. Para esta ecuación $f_\mu(x) = \mu x - x^3$. Asumiendo el parámetro μ los valores de 1,0,-1 tenemos que:

i) Cuando el valor del parámetro es cero, (i.e. $\mu = 0$); la ecuación diferencial (2) se reduce a $\dot{x} = -x^3$.

Trazemos la gráfica de la función $f_0(x)$ para tener una idea del comportamiento del flujo.

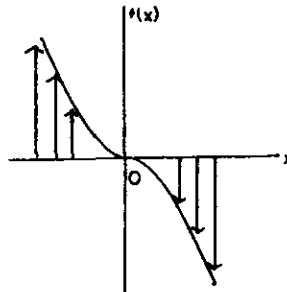


FIGURA 1.1.

De la gráfica anterior, podemos observar como será el campo visto en el espacio fase de la ecuación diferencial.

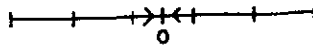


FIGURA 1.2.

Los puntos de equilibrio son aquellos valores de x donde $f_{\mu}(x) = 0$; por lo tanto, $x = 0$ es el único punto de equilibrio para esta ecuación.

ii) Para $\mu = 1$, la ecuación diferencial será $\dot{x} = x - x^3$. La gráfica de la función $f_1(x)$ es la siguiente:

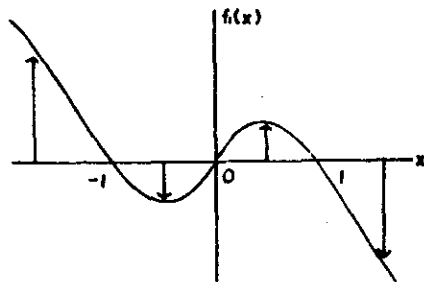


FIGURA 1.3.

De la gráfica anterior, podemos ver como es el comportamiento del campo en el espacio fase.

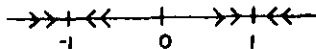


FIGURA 1.4.

Los puntos de equilibrio del campo son: $x=0$, $x=1$, $x=-1$.

iii) Para $\mu = -1$, la ecuación diferencial correspondiente es $\dot{x} = -x - x^3$. La gráfica de la función $f_{-1}(x)$ se muestra a continuación:

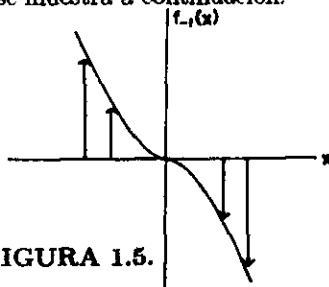


FIGURA 1.5.

Entonces el espacio fase de la ecuación será:

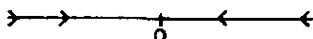


FIGURA 1.6.

El punto de equilibrio del campo es $x = 0$.

De acuerdo al valor asumido por el parámetro, se presentan diversos sistemas; trataremos a continuación de analizar la estabilidad estructural de cada uno de los sistemas presentados.

Definición 1.6. Sea \tilde{x} punto de equilibrio de la ecuación (1). Decimos que \tilde{x} es un punto de equilibrio estable si para cualquier vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ de \tilde{x} , existe una vecindad $U_1 \subset U$ que contiene a \tilde{x} tal que la imagen de cada solución x , con condición inicial en U_1 está en U para todo $t > 0$.

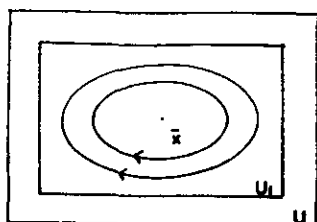


FIGURA 1.7. Estabilidad.

Ejemplo. Sea

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x, \end{aligned} \quad (3)$$

con $(x(0), y(0)) = (k_1, k_2)$.

La solución de la ecuación diferencial (3) es:

$$\begin{aligned} x(t) &= k_1 \cos t - k_2 \sin t \\ y(t) &= k_1 \sin t + k_2 \cos t \end{aligned}$$

El diagrama del espacio fase consta de círculos concéntricos en el origen.

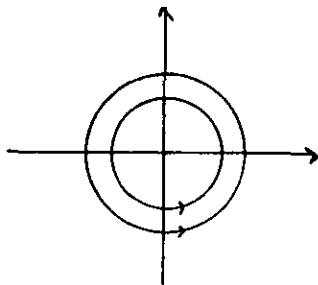


FIGURA 1.8.

Definición 1.7. Decimos que \bar{x} es punto de equilibrio asintóticamente estable, si además de cumplir con la definición 1.5., U_1 se puede elegir de forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$$

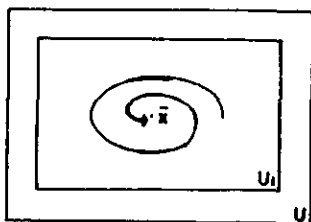


FIGURA 1.9. Estabilidad asintótica.

Ejemplo. Sea

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by \\ \dot{y} &= bx + ay, \end{aligned} \quad (4)$$

con $a < 0$. La solución del sistema (4) es el siguiente:

$$\begin{aligned} x &= e^{at}(u \cos bt - v \sin bt) \\ y &= e^{at}(u \sin bt + v \cos bt), \end{aligned}$$

donde (u, v) es una condición inicial para el sistema.

El retrato fase del sistema mencionado son espirales (o sumideros) que tienen como punto atractor el origen.

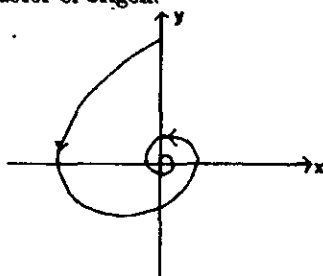


FIGURA 1.10

Definición 1.8. \tilde{x} es punto de equilibrio inestable si no es estable.

Esto significa que existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ de \tilde{x} tal que para todo $U_1 \subset U$ que contiene a \tilde{x} existe al menos una solución x cuya condición inicial está en U_1 y que no permanece enteramente en U para $t > 0$.

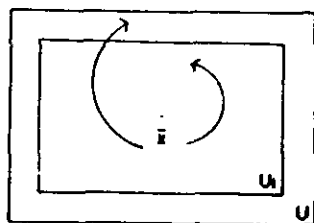


FIGURA 1.11. Inestabilidad.

Por ejemplo, si tomamos el sistema (4), pero ahora con $a > 0$, la solución

al sistema sigue siendo el mismo, pero el retrato fase en este caso son fuentes que tienen como punto repulsor el origen.

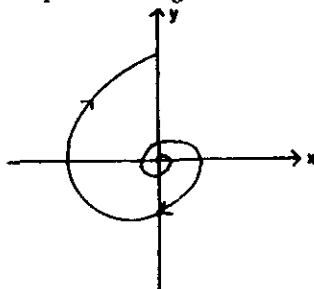


FIGURA 1.12.

Para hacer un análisis de la estabilidad de ecuaciones no lineales, tenemos que remitirnos, para empezar, a su estudio en forma local, es decir, en una vecindad alrededor de cada uno de sus puntos de equilibrio.

Nos apoyaremos en los dos siguientes Teoremas para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio de nuestros ejemplos. Nos remitiremos solo a enunciarlos, sin dar su prueba, para su consulta se puede ver Perko [1986].

Teorema 1.1. Sea \tilde{x} un punto de equilibrio de un sistema como (1). Si la matriz jacobiana de derivadas parciales evaluada en dicho punto, i.e. $D_x f_\mu(\tilde{x})$ tiene todos sus eigenvalores con parte real negativa, entonces \tilde{x} es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Teorema 1.2. Sea \tilde{x} un punto de equilibrio de un sistema como (1). Si la matriz jacobiana de derivadas parciales evaluada en dicho punto, i.e. $D_x f_\mu(\tilde{x})$, tiene un eigenvalor con parte real positiva, entonces \tilde{x} es un punto de equilibrio inestable.

Retomemos ahora nuestra ecuación (2). Con respecto a lo anterior tenemos que:

i) Para $\mu = 0$, la ecuación correspondiente era $\dot{x} = -x^3$.

Habíamos visto que el punto de equilibrio cuando la ecuación asumía este

valor del parámetro era $x = 0$.

Si calculamos la derivada del campo en el cero, es decir $D_x f_0(0)$ observamos que ésta es igual a cero.

Cuando se presenta esta situación, (es decir cuando la derivada del campo evaluada en el punto de equilibrio es igual a cero) en un sistema no lineal, no podemos afirmar que tipo de estabilidad tendrá dicho punto de equilibrio, por lo cual en este caso haremos el análisis en base al retrato fase del sistema.

En el caso de la bifurcación Pitchfork, observando la figura 1.1., concluimos que $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

ii) Para $\mu = 1$ la ecuación es: $\dot{x} = x - x^3$.

Los puntos de equilibrio de la ecuación (2) cuando ésta asume dicho valor del parámetro son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. Analizando la derivada del campo tenemos:

$D_x f_1(0) = 1$, por lo tanto $x = 0$ es inestable.

$D_x f_1(1) = -2$, por lo tanto $x = 1$ es asintóticamente estable.

$D_x f_1(-1) = 2$, por lo tanto $x = -1$ es inestable.

De hecho, para poderlo comprobar, podemos observar el retrato fase correspondiente, en la figura 1.2.

iii) Para $\mu = -1$ la ecuación diferencial es $\dot{x} = -x - x^3$.

El punto de equilibrio de la ecuación 2 cuando el valor del parámetro es -1 es $x = 0$. Analizando la derivada del campo tenemos $D_x f_{-1}(0) = -1$, por lo tanto el punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable. Para poderlo verificar, podemos observar el retrato fase de la figura 1.3.

De todo el análisis presentado concluimos que, en general, dada la ecuación

$$\dot{x} = f_\mu(x),$$

donde

$$f_\mu(x) = \mu x - x^3,$$

Los puntos de equilibrio de la ecuación son $x = \pm\sqrt{\mu}$ y $x = 0$.

Para $\mu < 0$ tenemos un punto de equilibrio ($x = 0$) para cada uno de los diferentes valores del parámetro. La derivada del campo es $D_x f_\mu(x) = \mu - 3x^2$. Evaluando esta derivada en el punto singular tenemos $D_x f_\mu(0) = \mu$. Aplicando el Teorema 1.1. tenemos que el punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable.

Para $\mu = 0$ tenemos que al analizar el retrato fase de la ecuación, del cual concluimos que éste también resulta ser un punto asintóticamente estable.

Para $\mu > 0$ tenemos tres puntos de equilibrio por cada valor de μ , estos son $x = +\sqrt{\mu}$, $x = -\sqrt{\mu}$ y el punto $x = 0$.

Evaluando la derivada en los puntos de equilibrio $x = \pm\sqrt{\mu}$ tenemos $D_x f_\mu(\pm\sqrt{\mu}) = -2\mu$, por lo tanto aplicando el Teorema 1.1. tenemos que estos puntos de equilibrio son asintóticamente estables.

La derivada del campo evaluada en el punto de equilibrio $x = 0$ es $D_x f_\mu(0) = \mu$, por lo cual éste punto de equilibrio es inestable.

Definición 1.9. Un diagrama de bifurcación es la representación gráfica de los puntos de equilibrio, en el espacio fase (x, μ) .

El diagrama de bifurcación correspondiente a la ecuación Pitchfork es:

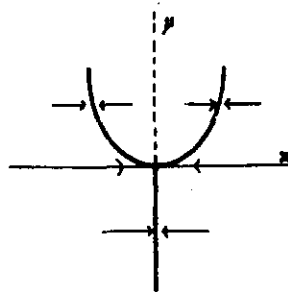


FIGURA 1.13

Las intersecciones de rectas paralelas al eje X con el diagrama de bifurcación de la ecuación, nos indican para cada valor específico de μ , cuantos puntos de equilibrio hay asignados a dicho valor.

Existe un cambio considerable en la estructura cualitativa del sistema cuando variamos el parámetro alrededor del cero, es decir, como ya se había mencionado cuando $\mu \leq 0$ tenemos un punto de equilibrio ($x = 0$) el cual es asintóticamente estable y para $\mu > 0$ tenemos ahora tres puntos de equilibrio, uno de ellos inestable ($x = 0$) y dos asintóticamente estables ($x = \pm\sqrt{\mu}$). Entonces aplicando la definición 1.5. tenemos que $\mu = 0$ es un valor de bifurcación.

BIFURCACION SILLA-NODO

Considere la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad (5)$$

donde $x, \mu \in \mathbf{R}$. Para esta ecuación, $f_{\mu}(x) = \mu - x^2$.

Busquemos los puntos singulares de esta ecuación y analizemos la estabilidad de cada uno de éstos.

a) Para $\mu > 0$.

Cuando el parámetro es positivo existen dos puntos de equilibrio, estos son: $x = +\sqrt{\mu}$, $x = -\sqrt{\mu}$.

La derivada del campo es $D_x f_{\mu}(x) = -2x$. Ahora vamos a evaluar esta derivada en el punto $x = +\sqrt{\mu}$, dándonos como resultado $D_x f_{\mu}(+\sqrt{\mu}) = -2\sqrt{\mu}$, por lo tanto aplicando el Teorema 1.1. este punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Analizemos la estabilidad para el punto $x = -\sqrt{\mu}$. La derivada evaluada en éste punto es $D_x f_{\mu}(-\sqrt{\mu}) = 2\sqrt{\mu}$, entonces por el Teorema 1.2. dicho punto es inestable.

La gráfica de $f_\mu(x)$ cuando μ es positivo se muestra en la siguiente figura.

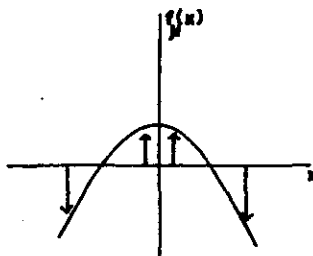


FIGURA 1.14

El retrato fase de la ecuación diferencial es el siguiente.

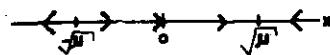


FIGURA 1.15

b) Para $\mu = 0$

El único punto singular es $x = 0$. Nuevamente se presenta el caso en el cual, al analizar la derivada del campo y evaluarla en el punto de equilibrio, da como resultado cero, (es decir $D_x f_\mu(0) = 2(0) = 0$), por lo tanto no podemos usar los Teoremas 1.1. y 1.2.. Necesitamos analizar el retrato fase de la ecuación para este valor del parámetro. La gráfica de $f_0(x) = -x^2$ es el siguiente.

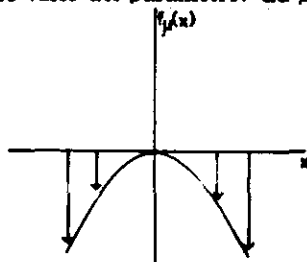


FIGURA 1.16

De ésta gráfica podemos obtener el retrato fase de la ecuación, el cual es el siguiente.

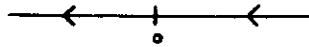


FIGURA 1.17

Así podemos ver que $x = 0$ es un punto de equilibrio inestable.

c) Para $\mu < 0$

En este caso, como tenemos raíces complejas, entonces no tenemos puntos de equilibrio.

La gráfica de $f_\mu(x)$ cuando μ es negativo es la siguiente.

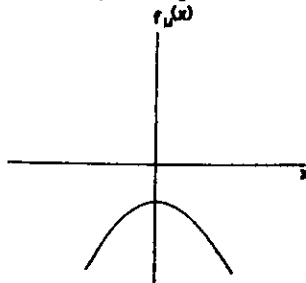


FIGURA 1.18

El retrato fase de la ecuación se muestra en la figura 1.19



FIGURA 1.19

La bifurcación silla-nodo, tiene el siguiente diagrama de bifurcación.

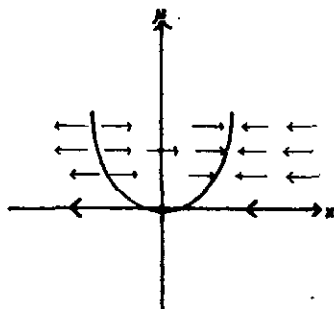


FIGURA 1.20

Nuevamente observamos que alrededor del parámetro $\mu = 0$, pasamos de dos puntos de equilibrio; uno de ellos inestable ($x = -\sqrt{\mu}$) y el otro ($x = +\sqrt{\mu}$) asintóticamente estable cuando el parámetro es positivo a ningún punto de equilibrio cuando el parámetro es negativo.

Cuando el parámetro es cero existe un único punto de equilibrio inestable ($x = 0$), entonces por la definición 1.5. $\mu = 0$ es un valor de bifurcación.

Después de haber visto los ejemplos de las bifurcaciones Pitchfork y silla-nodo, los teoremas que veremos a continuación nos dicen cuando, dada cualquier ecuación diferencial en \mathbf{R} (con un parámetro), cuyo campo cumpla con ciertas condiciones, podemos encontrar una curva de puntos de equilibrio de la ecuación.

Más aún, podemos hacer el análisis de la estabilidad de dichos puntos, así como dar el diagrama de bifurcación correspondiente a la ecuación.

Teorema 1.3. (silla-nodo).

Considere la ecuación diferencial en \mathbf{R}

$$\dot{x} = f_{\mu}(x),$$

donde $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$, $f_{\mu} \in C^{\infty}$. Suponga que:

$$f_0(0) = 0, f'_0(0) = 0, f''_0(0) \neq 0 \text{ y } \left. \frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}(0) \neq 0.$$

Entonces existe una función $\mu : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que:

$$f_{\mu(x)}(x) = 0,$$

además $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 0$, $\mu''(0) \neq 0$.

Demostración.

Definamos $G(x, \mu) = f_{\mu}(x)$. Observemos que:

$$G(0, 0) = f_0(0) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \mu}(0, 0) = \frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}(0) \neq 0,$$

entonces podemos aplicarle el teorema de la función implícita a la función G , por lo tanto: existe una función $\mu \in C^{\infty}$, $\mu : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}$ la cual satisface $\mu(0) = 0$,

$$G(x, \mu(x)) = 0.$$

Apliquemos ahora regla de la cadena para derivar la función G .

$$\frac{\partial G(x, \mu(x))}{\partial x} + \frac{\partial G(x, \mu(x))}{\partial \mu} \mu'(x) = 0.$$

Despejando $\mu'(x)$ tenemos:

$$\mu'(x) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}(x, \mu(x))}{\frac{\partial G}{\partial \mu}(x, \mu(x))}.$$

Derivando por segunda vez la función μ , evaluando en $x = 0$ y haciendo las sustituciones correspondientes llegamos a la siguiente expresión:

$$\mu''(0) = \frac{-f_0''(0)}{\frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}(0)}.$$

Observación: los signos de $f_0''(0)$ y $\frac{df_\mu}{d\mu}|_{\mu=0}(0)$ determinan la "dirección" de la bifurcación. Si éstas derivadas tienen signos opuestos, entonces el diagrama de bifurcación es el siguiente:

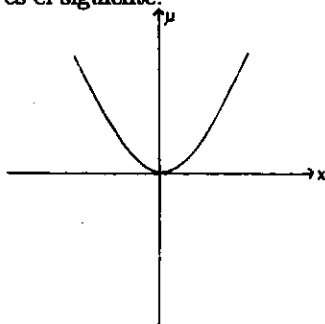


FIGURA 1.21.

Análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Para saber la estabilidad de los puntos de equilibrio tomemos la ecuación $f_{\mu(x)}(x) = 0$, derivémosla y despejemos $f'_{\mu(x)}(x)$.

$$f'_{\mu(x)}(x) + \frac{\partial f_{\mu(x)}}{\partial \mu} \mu'(x) = 0,$$

entonces

$$f'_{\mu(x)}(x) = -\frac{\partial f_{\mu(x)}}{\partial \mu} \mu'(x),$$

Por lo tanto la estabilidad de los puntos de equilibrio dependerá de los signos que asuma $\frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mu}$ y μ'' en una vecindad de cero. Para esto, tenemos que dividir el análisis en cuatro casos.

a) $\frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mu}(0) > 0$, $\mu''(0) > 0$.

entonces se tiene que:

$$\mu'(x) < 0 \text{ si } x < 0,$$

$$\mu'(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

Por lo tanto:

$$f'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x < 0,$$

$$f'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x > 0.$$

Entonces el retrato fase para este caso será:

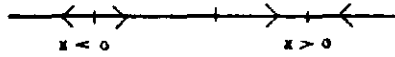


FIGURA 1.22.

b) $\frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mu}(0) > 0, \mu''(0) < 0.$

entonces se tiene que:

$$\mu'(x) > 0 \text{ si } x < 0,$$

$$\mu'(x) < 0 \text{ si } x > 0.$$

Por lo tanto:

$$f'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x < 0,$$

$$f'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

El retrato fase será:

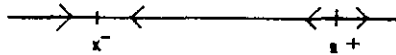


FIGURA 1.23.

c) $\frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mu}(0) < 0, \mu''(0) > 0.$

entonces se tiene que:

$$\mu'(x) < 0 \text{ si } x < 0,$$

$$\mu'(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

Por lo tanto:

$$f'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x < 0,$$

$$f'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

El retrato fase es:

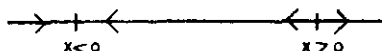


FIGURA 1.24.

d) $\frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mu}(0) < 0$, $\mu''(0) < 0$.

entonces se tiene que:

$$\mu'(x) > 0 \text{ si } x < 0,$$

$$\mu'(x) < 0 \text{ si } x > 0.$$

Por lo tanto:

$$f'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x < 0,$$

$$f'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x > 0.$$

El retrato fase será:

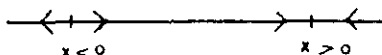


FIGURA 1.25.

Teorema 1.4.: Considere la ecuación diferencial en \mathbf{R}

$$\dot{x} = f_{\mu}(x),$$

donde $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$, $f_{\mu} \in C^{\infty}$. Suponga que:

$$f_{\mu}(-x) = -f_{\mu}(x), \quad f_{\mu}(0) = 0, \quad f'_0(0) = 0, \quad f''_0(0) = 0, \quad f'''_0(0) \neq 0 \text{ y } \frac{\partial f'_{\mu}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}(0) \neq 0.$$

Entonces existe una función $\mu : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que:

$$f_{\mu(x)}(x) = 0,$$

además $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 0$, $\mu''(0) \neq 0$.

Demostración.

Por el lema 2.4. que se demostrará en el Capítulo 2, tenemos que $f_\mu(x)$ se puede escribir de la forma:

$$f_\mu(x) = xg_\mu(x).$$

Podemos afirmar lo siguiente. La función $g_\mu(x)$ satisface las hipótesis del teorema 1.3.

$$1) f'_\mu(x) = g_\mu(x) + xg'_\mu(x),$$

$$f'_0(0) = g_0(0) + 0g'_0(0) = 0,$$

por lo tanto $g_0(0) = 0$.

$$2) f''_\mu(x) = 2g'_\mu(x) + xg''_\mu(x),$$

$$f''_0(0) = 2g'_0(0) + 0g''_0(0) = 0,$$

por lo tanto $g'_0(0) = 0$.

$$3) f'''_\mu(x) = 3g''_\mu(x) + xg'''_\mu(x),$$

$$f'''_0(0) = 3g''_0(0) + 0g'''_0(0) \neq 0,$$

por lo tanto $g''_0(0) \neq 0$.

$$4) f'_\mu(x) = g_\mu(x) + xg'_\mu(x),$$

$$\frac{\partial f'_\mu(x)}{\partial \mu} = \frac{\partial g_\mu(x)}{\partial \mu} + x \frac{\partial g'_\mu(x)}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial f'_\mu}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}(0) = \frac{\partial g_\mu}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}(0) + 0 \frac{\partial g'_\mu}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}(0) \neq 0,$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial g_\mu}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}(0) \neq 0.$$

Entonces existe una función $\mu \in C^\infty$, $\mu : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ la cual satisface $\mu(0) = 0$,

$$g_{\mu(x)}(x) = 0.$$

Además, $\mu'(0) = 0$, $\mu''(0) \neq 0$. En este caso,

$$\mu''(0) = \frac{-f_0'''(0)}{\frac{\partial f'_\mu}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}(0)},$$

Si los signos de $f_0'''(0)$ y $\frac{\partial f'_\mu}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}(0)$ son opuestos, el diagrama de bifurcación de $f_{\mu(x)} = xg_{\mu(x)} = 0$ será el que se muestra a continuación.

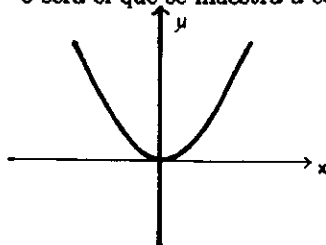


FIGURA 1.26.

Análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Como ya se había calculado, la derivada de $f'_\mu(x)$ es:

$$f'_\mu(x) = g_\mu(x) + xg'_\mu(x),$$

evaluando en $\mu = \mu(x)$ tenemos:

$$f'_{\mu(x)}(x) = xg'_{\mu(x)}(x),$$

ya que $g_{\mu(x)}(x) = 0$. El análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio nuevamente lo dividiremos por casos.

a) $\frac{\partial f'_0}{\partial \mu}(0) > 0, \mu''(0) > 0.$

entonces se tiene que:

$$\mu'(x) < 0 \text{ si } x < 0, \text{ entonces } g'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x < 0,$$

$$\mu'(x) > 0 \text{ si } x > 0, \text{ entonces } g'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x > 0.$$

Por lo tanto:

$$f'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x < 0,$$

$$f'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x > 0,$$

El punto $x = 0$, también es punto de equilibrio, al evaluar en la derivada, por hipótesis se tiene que es un punto de equilibrio no hiperbólico, pero su estabilidad se puede deducir de éste análisis y del retrato fase que a continuación presentamos.

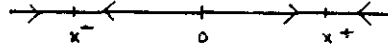


FIGURA 1.27.

b) $\frac{\partial f'_0}{\partial \mu}(0) > 0, \mu''(0) < 0.$

entonces se tiene que:

$$\mu'(x) > 0 \text{ si } x < 0, \text{ entonces } g'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x < 0,$$

$$\mu'(x) < 0 \text{ si } x > 0, \text{ entonces } g'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

Por lo tanto:

$$f'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x < 0,$$

$$f'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x > 0,$$

El retrato fase en este caso es:

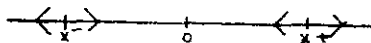


FIGURA 1.28.

c) $\frac{\partial f_{\mu}'}{\partial \mu}(0) < 0$, $\mu''(0) > 0$.

entonces se tiene que:

$$\mu'(x) < 0 \text{ si } x < 0, \text{ entonces } g'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x < 0,$$

$$\mu'(x) > 0 \text{ si } x > 0, \text{ entonces } g'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

Por lo tanto:

$$f'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x < 0,$$

$$f'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x > 0,$$

El retrato fase será:

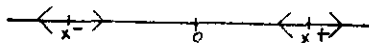


FIGURA 1.29.

d) $\frac{\partial f_{\mu}'}{\partial \mu}(0) < 0$, $\mu''(0) < 0$.

entonces se tiene que:

$$\mu'(x) > 0 \text{ si } x < 0, \text{ entonces } g'_{\mu(x)}(x) > 0 \text{ si } x < 0,$$

$$\mu'(x) < 0 \text{ si } x > 0, \text{ entonces } g'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x > 0.$$

Por lo tanto:

$$f'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x < 0,$$

$$f'_{\mu(x)}(x) < 0 \text{ si } x > 0,$$

El retrato fase es:

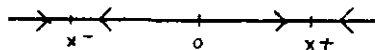


FIGURA 1.30.

BIFURCACION TRANSCRITICA

Considere la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \quad (6)$$

donde $x, \mu \in \mathbb{R}$, para esta ecuación diferencial $f_\mu(x) = \mu x - x^2$.

a) Para $\mu > 0$

Cuando el parámetro es positivo tenemos dos puntos de equilibrio, éstos son $x = 0, x = \mu$. La derivada del campo es: $D_x f_\mu(x) = \mu - 2x$. Tomemos el punto de equilibrio $x = 0$. Evaluando la derivada anterior en éste punto singular tenemos $D_x f_\mu(0) = \mu$, como $\mu > 0$ el Teorema 1.2. nos dice que nuestro punto singular $x = 0$ es inestable.

Para el punto de equilibrio $x = \mu$, la derivada evaluada en éste punto es $D_x f_\mu(\mu) = -\mu$, por lo tanto aplicando el Teorema 1.1. el punto singular $x = \mu$ es asintóticamente estable.

La gráfica $f_\mu(x)$ cuando $\mu > 0$ se muestra a continuación:

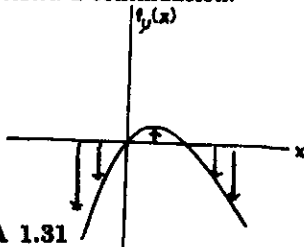


FIGURA 1.31

Entonces el retrato fase de la ecuación diferencial (6) para $\mu > 0$ es:

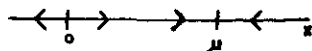


FIGURA 1.32

b) Para $\mu = 0$

El único punto de equilibrio es $x = 0$. La derivada del campo evaluada en el punto de equilibrio es cero (i.e. $D_x f_\mu(0) = 0$). Nuevamente necesitamos analizar el retrato fase de la ecuación (6) para este valor del parámetro. La gráfica de $f_0(x) = -x^2$, es la siguiente:

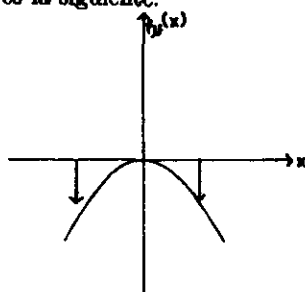


FIGURA 1.33

El retrato fase de la ecuación (6) para $\mu = 0$ es:

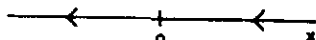


FIGURA 1.34

Del retrato fase podemos observar que $x = 0$ es un punto de equilibrio inestable.

c) Para $\mu < 0$

Tenemos dos puntos de equilibrio cuando el parámetro es negativo, éstos

son $x = 0$, $x = \mu$.

Evaluando la derivada del campo en el punto de equilibrio $x = 0$ nos da como resultado $D_x f_\mu(0) = \mu$, entonces por el Teorema 1.1. éste punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Para el punto de equilibrio $x = \mu$ la derivada del campo evaluada en dicho punto es $D_x f_\mu(\mu) = -\mu$, por lo tanto por el Teorema 1.2. el punto $x = \mu$ es inestable.

La gráfica de $f_\mu(x)$ cuando $\mu < 0$ es la siguiente:

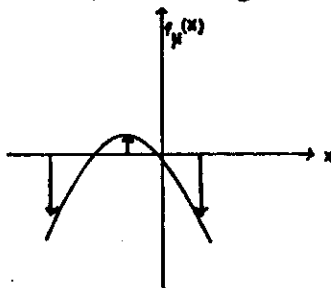


FIGURA 1.35

De la gráfica anterior podemos deducir el retrato fase de la ecuación (6) cuando el parámetro es negativo.

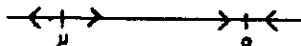


FIGURA 1.36

La estabilidad de los puntos de equilibrio $x = \mu$, $x = 0$ cambia drásticamente cuando el parámetro toma valores alrededor del cero, es decir, el punto de equilibrio $x = 0$ pasa de ser inestable cuando $\mu > 0$ a ser un punto de equilibrio asintóticamente estable para $\mu < 0$.

Análogamente el punto de equilibrio $x = \mu$ pasa de ser un punto de equilibrio asintóticamente estable cuando $\mu > 0$ a un punto de equilibrio inestable cuando $\mu < 0$, entonces $\mu = 0$ es un valor de bifurcación.

El diagrama de bifurcación para la ecuación $\dot{x} = \mu x - x^2$ es:

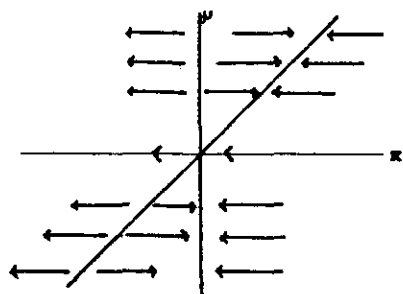


FIGURA 1.37

CAPITULO 2

INTRODUCCION A LA BIFURCACION DE HOPF

En el capítulo anterior, consideramos varios tipos de bifurcaciones de sistemas unidimensionales, las cuales pueden ocurrir en una vecindad de un punto de equilibrio. Dependiendo de los valores asignados al parámetro, cuando se presenta el caso en el cual, la derivada evaluada en el punto de equilibrio se anulaba, analizabamos directamente el retrato fase. Ahora nos toca analizar el tipo de bifurcaciones que pueden ocurrir cuando en un sistema bidimensional, la matriz correspondiente a la derivada evaluada en el punto de equilibrio tiene eigenvalores imaginarios puros; es decir cuando el punto de equilibrio de la linealización es un centro.

Las soluciones a los ejemplos que a continuación analizaremos, pueden consultarse en Hirsch, Smale[1987].

Tomemos el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - g_\mu(x) \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}\quad (7)$$

donde $g_\mu(x) \in C^\infty, \mu \in \mathbb{R}$.

En este caso:

$$f_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} y - g_\mu(x) \\ -x \end{pmatrix}$$

Con esto se pretende ver como será el comportamiento del campo del sistema (7) para diversas funciones g_μ .

1) Si $g_\mu = 0$ el sistema (7) queda expresado como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}$$

El único punto de equilibrio es el origen. La derivada del campo, evaluada

en el punto de equilibrio es la siguiente:

$$D_x f_\mu(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solución con condición inicial (x_0, y_0) , para este sistema será:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \operatorname{sen}(t) + y_0 \operatorname{cos}(t) \\ y(t) &= x_0 \operatorname{cos}(t) - y_0 \operatorname{sen}(t). \end{aligned}$$

El retrato fase que podemos observar es el formado por un centro.

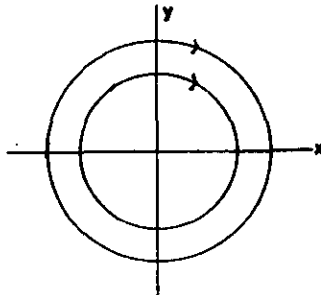


FIGURA 2.1

2) Si consideramos ahora $g_\mu(x) = \mu x$ tenemos que el sistema (7) queda expresado como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \mu x \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

para esta función g_μ el campo será:

$$f_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} y - \mu x \\ -x \end{pmatrix}$$

El único punto de equilibrio es el origen. La derivada del campo evaluada en el punto de equilibrio es la siguiente:

$$D_x f_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

los eigenvalores de la matriz son:

$$\lambda = 1/2[-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}].$$

Analizemos el tipo de eigenvalores que tendremos y la estabilidad alrededor del punto de equilibrio para los diversos valores del parámetro.

Si $\mu \in (0, 2)$ tendremos eigenvalores complejos cuya parte real es negativa, entonces nuestro punto de equilibrio será un pozo asintóticamente estable, por lo cual al dibujar el retrato fase de las soluciones, éste sería el siguiente:

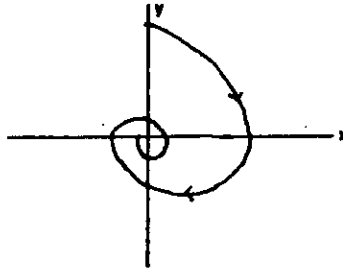


FIGURA 2.2

Si $\mu \in [2, \infty)$ tenemos eigenvalores reales. Entonces el punto de equilibrio $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable. El retrato fase de las soluciones tendría la siguiente forma:

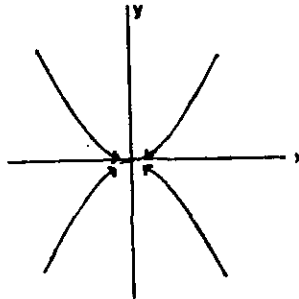


FIGURA 2.3

Si $\mu \in (-2, 0)$ el punto de equilibrio $(0, 0)$ sigue siendo un pozo, pero

inestable.

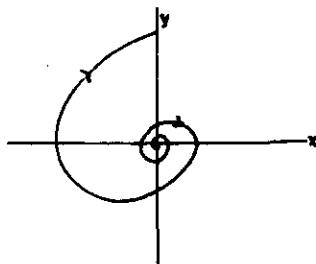


FIGURA 2.4

Si $\mu \in (-\infty, -2]$ el punto de equilibrio $(0, 0)$ será un nodo inestable.

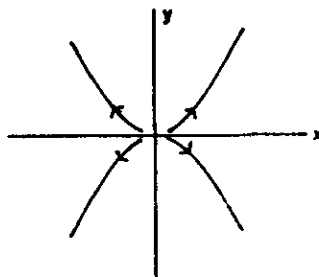


FIGURA 2.5

Consideremos ahora $g_\mu(x) = -\mu x + x^3$. Para esta función g_μ el campo queda expresado como:

$$f_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} y - (x^3 - \mu x) \\ x \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema (7) queda expresado como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - (x^3 - \mu x) \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \quad (8)$$

Ahora, para facilitarnos el análisis del campo de esta ecuación diferencial, tomemos como caso particular cuando el valor del parámetro es uno. Es decir, consideremos el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - (x^3 - x) \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}\quad (9)$$

El único punto de equilibrio de este sistema es el origen. Para hacer un análisis del retrato fase de este sistema dividiremos el plano en cuatro regiones las cuales están limitadas por las siguientes curvas:

$$\begin{aligned}y^+ &= \{(x, y)/y > 0, x = 0\}, \\ g^+ &= \{(x, y)/x > 0, y = x^3 - x\}, \\ y^- &= \{(x, y)/y < 0, x = 0\}, \\ g^- &= \{(x, y)/x < 0, y = x^3 - x\},\end{aligned}$$

Graficamente estas curvas son:

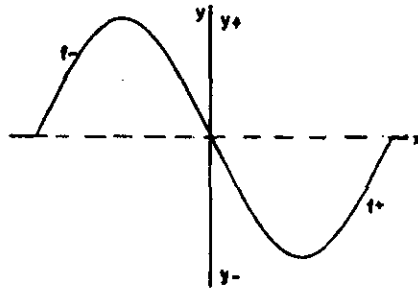


FIGURA 2.6

Primero veamos como es el comportamiento del campo sobre cada una de éstas curvas.

Observemos que $\dot{x} = 0$ en g^+ , g^- , lo cual nos indica que sobre éstas dos curvas, el campo tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{"algo diferente de cero"} \end{pmatrix},$$

por lo tanto, sobre ambas curvas, el campo es vertical.

Para determinar la dirección del campo, tomemos el punto (1,0) el cual pertenece a g^+ . Sustituyendolo en el campo tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Entonces, para puntos que pertenezcan a la curva g^+ tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el campo vectorial es vertical, con dirección negativa.

Análogamente, si nos encontramos en la curva g^- , el campo es vertical, con dirección positiva, i.e.,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Cuando nos encontramos situados en y^+ , tenemos que el campo es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el campo es horizontal con dirección hacia la derecha.

En y^- el campo es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el campo es horizontal con dirección hacia la izquierda.

La siguiente figura nos muestra la dirección del campo sobre las cuatro curvas analizadas.

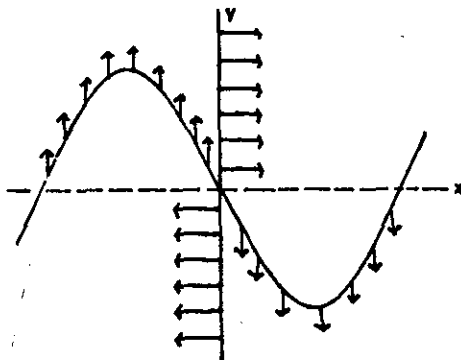


FIGURA 2.7.

Lo que nos resta por ver, es saber como es el campo entre cada una de estas 4 curvas. Llamemos:

$$A = \{(x, y)/x > 0, y > g_{\mu}^{+}(x)\},$$

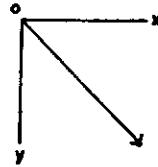
$$B = \{(x, y)/x > 0, y < g_{\mu}^{+}(x)\},$$

$$C = \{(x, y)/x < 0, y < g_{\mu}^{-}(x)\},$$

$$D = \{(x, y)/x < 0, y > g_{\mu}^{-}(x)\}.$$

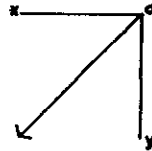
En A tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &> 0 \\ \dot{y} &< 0, \end{aligned}$$



En B tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &< 0 \\ \dot{y} &< 0, \end{aligned}$$



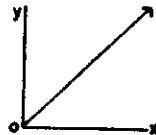
En C tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &< 0 \\ \dot{y} &> 0, \end{aligned}$$



En D tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &> 0 \\ \dot{y} &> 0, \end{aligned}$$



De todo este análisis, podemos observar que el campo rota alrededor del punto de equilibrio. La siguiente figura nos muestra el comportamiento del campo.

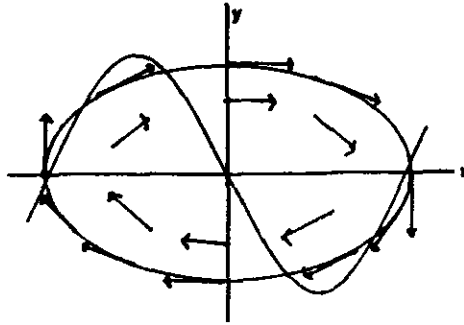


FIGURA 2.8

BIFURCACION DE HOPF

Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= x + y(\mu - (x^2 + y^2)), \end{aligned} \quad (10)$$

Para este sistema, $f_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde

$$f_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \end{pmatrix}.$$

El único punto de equilibrio que tenemos es el origen. Para analizar la estabilidad del sistema en una vecindad del punto de equilibrio tomemos la diferencial de f_μ evaluada en dicho punto, esta es:

$$D_x f_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

Los eigenvalores correspondientes son: $\lambda = \mu \pm i$. Por los Teoremas 1.1. y 1.2. sabemos que la parte real de los eigenvalores (cuando ésta es diferente de

cero), determina la estabilidad del sistema alrededor del punto de equilibrio. Entonces para el sistema (10) el origen es asintóticamente estable cuando $\mu < 0$ y resulta ser inestable cuando $\mu > 0$.

En el caso en que $\mu = 0$ tenemos un par de eigenvalores imaginarios puros; dado que el sistema no es lineal, requeriremos del siguiente teorema, el cual nos dará una idea de como será el comportamiento del sistema para este valor del parámetro. (No daremos la prueba del teorema, si se quieren ver más detalles, se puede consultar Perko[1986]).

Teorema. Sea E subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 tal que $0 \in E$ y sea $f_\mu \in C^1(E)$. Supongamos que la parte lineal del sistema es $A = D_x f_\mu(0)$. Supongamos que el origen es un centro para el sistema lineal, entonces el origen es un centro, un centro-foco, o un foco para el sistema no lineal.

Entonces, de lo anterior podemos concluir que para $\mu = 0$, tenemos tres alternativas para el retrato fase; para determinar exactamente a cual de estos corresponde el sistema, haremos un cambio del sistema a coordenadas polares para concluir el análisis del flujo.

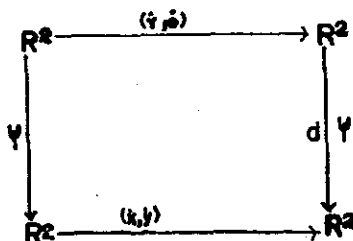
El cambio de coordenadas rectangulares a polares esta dado por:

$$\psi(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

y su inversa es:

$$\psi^{-1}(r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1}(y/x)),$$

donde $(x, y) \neq 0$. El siguiente diagrama conmutativo, nos muestra el cambio de coordenadas. $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones de clase C^1 expresadas en coordenadas rectangulares.



Expresadas en coordenadas polares, tenemos que las ecuaciones correspondientes de este cambio son:

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= r\cos\theta P(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta Q(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ r^2\dot{\theta} &= r\cos\theta Q(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta P(r\cos\theta, r\sin\theta), \end{aligned}$$

Realizando las sustituciones correspondientes en el sistema (10) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos\theta(-r\sin\theta + r\cos\theta(\mu - r^2)) + \sin\theta(r\cos\theta + r\sin(\mu - r^2)) \\ r\dot{\theta} &= \cos\theta(r\cos\theta + r\sin(\mu - r^2)) - \sin\theta(-r\sin\theta + r\cos\theta(\mu - r^2)), \end{aligned}$$

Simplificando, llegamos a que este sistema expresado en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{11}$$

Dadas las ecuaciones en coordenadas polares, podemos hacer el análisis de los retratos fase. Tomemos un ejemplo con $\mu = 1$. El sistema queda descrito como:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

Si $0 < r < 1$ y tenemos $\dot{r} > 0$, por lo tanto r es creciente para $r \in (0, 1)$. Si $r > 1$ tenemos $\dot{r} < 0$, por lo tanto r es decreciente para $r > 1$. Si $r = 1$ tenemos $\dot{r} = 0$, por lo que r es constante.

Además sabemos que el retrato fase son espirales (con el punto de equilibrio inestable, por el valor del parámetro). Cabe hacer notar la aparición de un ciclo en $r = 1$.

El retrato fase del sistema (11) cuando el valor del parámetro es 1 es el que se muestra en la figura 2.9.

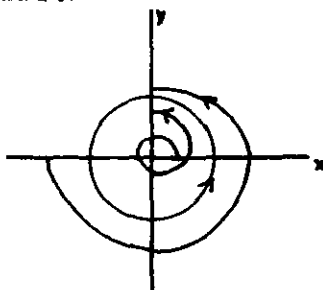


FIGURA 2.9

Considere un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) \quad (1)$$

cuyo flujo es $\phi_{\mu}(x, t)$ donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu, t \in \mathbb{R}$, $f \in C^1$.

Definición 1.9. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales como (1), un ciclo o una órbita periódica de dicho sistema es cualquier solución Γ , tal que $\Gamma(t + T) = \Gamma(t)$ para alguna $T \in \mathbb{R}$.

Definición 1.10. La T mínima para la cual se cumpla que $\Gamma(t + T) = \Gamma(t)$ es llamado el periodo de la órbita Γ .

Definición 1.11. Una órbita periódica (o un ciclo) de Γ es llamada ciclo límite estable si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de Γ tal que para todo $x \in U$ y $t \geq 0$, $\|\phi_{\mu}(x, t), \Gamma\| < \epsilon$.

Analizando para cualquier valor del parámetro el sistema (11) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

Si $r = 0$ ó $\mu - r^2 = 0$, tenemos que $\dot{r} = 0$ lo cual implica que r es constante. Si pedimos que $\mu > 0$ podemos despejar r de la segunda ecuación, obteniendo $r = \pm\sqrt{\mu}$. Por lo tanto, el ciclo para cada valor $\mu = \mu_0$ estará dado por:

$$\Gamma_{\mu_0}(t) = \sqrt{\mu_0}(\cos t, \sin t)$$

Con respecto al resto de las soluciones tenemos que si damos una condición inicial r_0 tal que $r_0 > \sqrt{\mu_0}$, tendremos que $\dot{r} < 0$, lo cual nos dice que r es decreciente. Por otro lado, si tomamos como condición inicial alguna $r_0 < \sqrt{\mu_0}$ entonces tenemos que $\dot{r} > 0$, lo cual quiere decir que r es creciente, además de tener la característica de estar contenida dentro de la órbita periódica.

Ambos tipos de soluciones se van enroscando al ciclo límite, esto lo demostraremos a continuación.

Teorema: El ciclo que aparece para cada $\mu = \mu_0$, (donde $\mu_0 > 0$) del sistema de ecuaciones diferenciales (10) es un ciclo límite estable.

Primeramente daremos un bosquejo de los pasos de la demostración.

1) Definimos sobre el ciclo Γ_{μ_0} una sección transversal Σ . Tomemos como sección Σ al eje X .

2) La aplicación de Poincaré. La intersección del flujo de la ecuación diferencial con la sección transversal va formando una sucesión de puntos sobre la misma sección, es así como definimos la aplicación de Poincaré $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$. Dicha aplicación nos identifica un punto $(x, 0) \in \Sigma$ con el primer corte del flujo $\phi_{\mu_0}(x, t)$ con Σ ; es decir $(P(x, 0), 0)$, de tal forma que x y $P(x, 0)$ tengan el mismo signo.

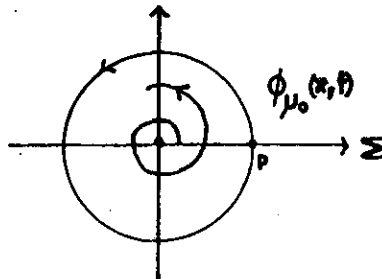


FIGURA 2.10.

Dicha aplicación tiene un punto fijo p , dado por la intersección de la sección transversal con el ciclo.

3) La sucesión generada sobre la sección transversal es monótona y creciente para las soluciones con condición inicial $r_0 < \sqrt{\mu_0}$ (análogamente es monótona decreciente para las soluciones con condición inicial $r_0 > \sqrt{\mu_0}$). Esta sucesión es acotada por lo tanto converge, digamos a un punto p' .

4) Demostrar que $p = p'$ donde p es el punto fijo de la aplicación.

5) El mapeo de Poincaré no depende de la sección transversal Σ que se elija.

Demostración:

1) Sea Γ_{μ_0} el ciclo correspondiente para el valor del parámetro $\mu = \mu_0$,

$$\Gamma_{\mu_0}(t) = \sqrt{\mu_0}(\cos t, \sin t),$$

Ahora, tomemos como sección transversal Σ al eje X , claramente se puede ver que la sección Σ es transversal a Γ_{μ_0} en el punto de intersección el cual llamaremos $p = (p_1, 0)$.

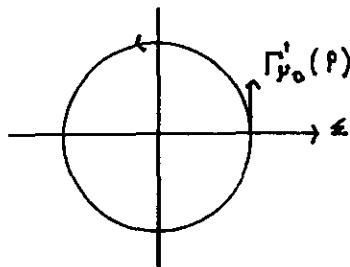


FIGURA 2.11.

2) La aplicación de Poincaré.

Dado que la aplicación de Poincaré está determinada por el flujo del sistema de ecuaciones diferenciales, entonces resolveremos el sistema para tener la expresión analítica de dicha aplicación.

Recordemos que nuestro sistema en coordenadas polares (cuando el valor

del parámetro es $\mu = \mu_0$) esta expresado como:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu_0 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

Entonces podemos resolver el sistema por variables separables dándonos como solución:

$$\phi_{\mu_0}(a_0, t) = \left(\left[\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu_0} \right) e^{-2\mu_0 t} + \frac{1}{\mu_0} \right]^{-1/2}, t \right)$$

donde $a_0 = (r_0, 0)$ (con $r_0 < \sqrt{\mu_0}$) es una condición inicial del sistema.

Ya que nuestra sección transversal Σ es invariante bajo la transformación a coordenadas polares y sabiendo que el periodo del ciclo es 2π , entonces la aplicación de Poincaré será:

$$P(r_0) = \left[\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu_0} \right) e^{-4\pi\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \right]^{-1/2}$$

Observemos que si tomamos una solución con condición inicial tal que $r_0 = \sqrt{\mu_0}$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} P(\sqrt{\mu_0}) &= \left[\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} \right) e^{-4\pi\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \right]^{-1/2} \\ &= \sqrt{\mu_0} \end{aligned}$$

lo cual indica que la condición inicial con $r_0 = \sqrt{\mu_0}$ será un punto fijo de la aplicación, es decir esa condición inicial pertenece al ciclo Γ_{μ_0} .

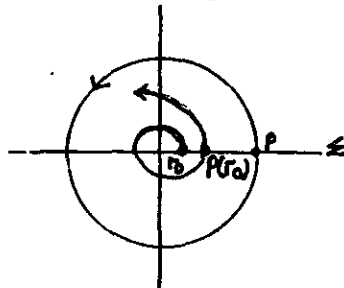


FIGURA 2.12.

3) Es así como generamos sobre la sección Σ una sucesión de puntos dados por la intersección del flujo con Σ .

$$a_0 = (r_0, 0)$$

$$a_1 = P(a_0)$$

$$a_2 = P(a_1)$$

.

.

.

$$a_n = P(a_{n-1})$$

donde $r_0 < \sqrt{\mu_0}$. Dicha sucesión puede verse con mayor claridad en la siguiente gráfica.

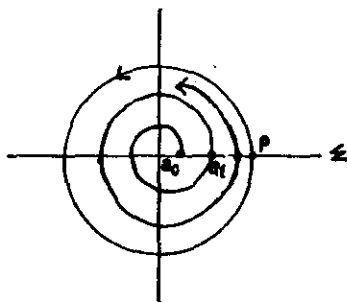


FIGURA 2.13.

En el análisis del flujo que se realizó, vimos que $\phi_\mu(a_0, t)$ es creciente para $a_0 = (r_0, 0)$, donde $r_0 < \sqrt{\mu_0}$. Por lo tanto se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\|(a_0, a_1)\| < \|(a_0, a_2)\| < \dots < \|(a_0, a_n)\|.$$

Además la sucesión es acotada por la órbita periódica Γ_μ ya que no la puede atravesar, porque implicaría que $\phi_\mu(a_0, t)$ intersecta a la órbita

periódica, lo cual violaría el teorema de Existencia y Unicidad. Por lo tanto, la sucesión es creciente y acotada, entonces converge, digamos a un punto p' .

4) Por demostrar que $p = p'$.

Supongamos que $p' > p$. Esto significa que existe un elemento a_n de la sucesión tal que $\|(a_0, a_n)\| > \|(a_0, p)\|$, pero sabemos que Γ_μ y $\phi_\mu(a_0, t)$ son continuas, entonces implicaría que Γ_μ y $\phi_{\mu_0}(a_0, t)$ se intersectan en algún punto, lo cual es una contradicción, ya que las soluciones no se pueden intersectarse en ningún punto.

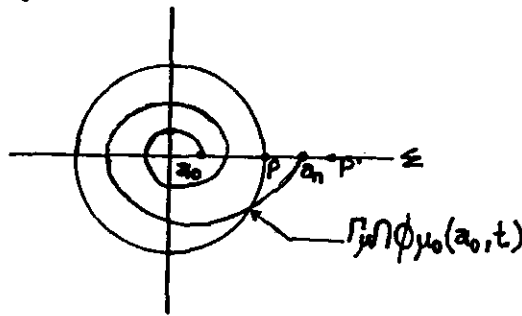


FIGURA 2.14.

Ahora supongamos $p' < p$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p'$, lo cual también es una contradicción porque entonces p' sería el punto fijo de la aplicación de Poincaré pues si no se acumula en otro lugar la sucesión y no p como se había supuesto.

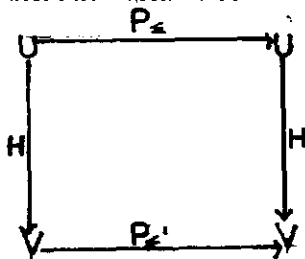
5) El comportamiento no depende de la sección transversal.

En la demostración, trabajamos con una sección transversal determinada, pero todo el análisis realizado, no depende de la sección transversal que se elija, es decir, el comportamiento del mapeo de Poincaré sigue siendo esencialmente el mismo (la sucesión monótona que se genera sobre la transversal Σ sigue siendo monótona creciente o decreciente en la transversal Σ').

Cómo lo garantizamos?

Nos interesa encontrar un homeomorfismo que llamaremos H el cual conjugue la aplicación de Poincaré de la sección Σ en la aplicación de Poincaré

en la sección Σ' ; donde Σ' es una curva diferenciable y transversal a Γ_{μ_0} en el punto p . El homeomorfismo buscado, deber cumplir con el siguiente diagrama conmutativo.



Donde U es una vecindad sobre Σ que contiene a el punto fijo p y V es una vecindad sobre Σ' que también contiene a p .

Del diagrama conmutativo podemos obtener la siguiente ecuación:

$$P_{\Sigma}(x) = H^{-1}P_{\Sigma'}H(x),$$

o bien,

$$HP_{\Sigma}(x) = P_{\Sigma'}H(x)$$

El homeomorfismo tendrá como punto fijo p y se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H : U \subset \Sigma &\rightarrow V \subset \Sigma' \\ x \in U &\rightarrow H(x) \in V \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} H(x) &= \phi_{\mu_0}(x, t) \\ H(p) &= \phi_{\mu_0}(p, t') = p \end{aligned}$$

para el tiempo t' en el que $\phi_{\mu_0}(x, t)$ interseca a Σ' . Entonces la imagen de cada elemento de la sucesión $\{a_k\}$ bajo el homeomorfismo H en Σ' es $b_k = \phi_{\mu_0}(a_k, t) \cap \Sigma'$.

En donde la sucesión $\{b_k\}$ es la aplicación de Poincaré definida en la sección Σ' (con las mismas propiedades que $\{a_k\}$ en Σ).

La siguiente figura nos presenta esta situación.

$$HP_{\Sigma}(x) = P_{\Sigma}H(x)$$

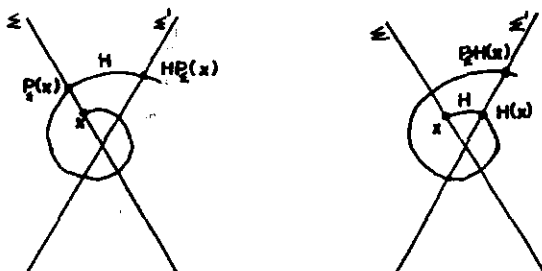


FIGURA 2.15

H es continua.

Podemos afirmar que H es continua porque el flujo es continuo, es decir:

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0)} \phi_{\mu_0}(x,t) = \phi_{\mu_0}(x_0,t_0)$$

Además; la inversa del homeomorfismo esta definida de la siguiente forma:

$$H^{-1} : V \subset \Sigma' \rightarrow U \subset \Sigma$$

$$H(x) \in V \rightarrow x \in U$$

donde:

$$H^{-1}(x) = \phi_{\mu_0}^{-1}(x,t)$$

$$H^{-1}(p) = p$$

con esto completamos la demostración.

Los retratos fase para los diversos valores del parámetro son los que se muestran en la Figura 2.16.

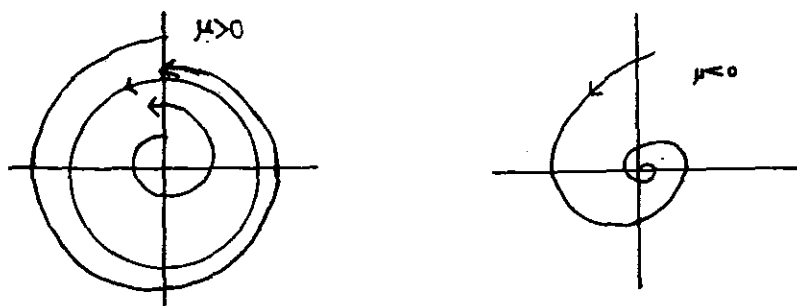


Figura 2.16

Finalmente, mostramos el diagrama de bifurcación correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales (10).

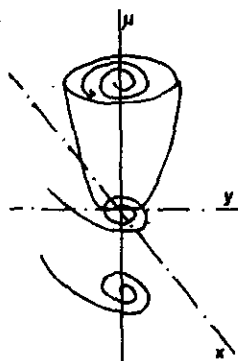


Figura 2.17

Observación acerca de la parte imaginaria de los eigenvalores.

Introduzcamos ahora un nuevo parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$, en el sistema (10) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= \alpha x + y(\mu - (x^2 + y^2)), \end{aligned} \quad (12)$$

donde

$$f_{\mu,\alpha}(x, y) = \begin{pmatrix} -\alpha y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \alpha x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \end{pmatrix}.$$

El origen sigue siendo el único punto de equilibrio para el sistema (12). Tomemos ahora la diferencial de $f_{\mu,\alpha}$ evaluada en dicho punto, esta será:

$$D_x f_{\mu,\alpha}(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}.$$

Claramente podemos observar que este nuevo parámetro afecta únicamente a la parte imaginaria de los eigenvalores, i.e., los eigenvalores en este caso serán $\lambda(\mu, \alpha) = \mu \pm \alpha i$.

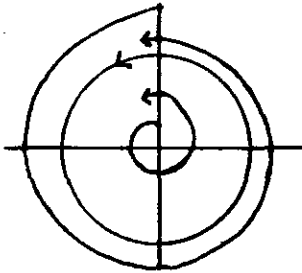
Nuestro propósito con este ejemplo es analizar el comportamiento del flujo del sistema cuando hacemos variar la parte imaginaria de éstos eigenvalores.

Para hacer este análisis, nuevamente transformaremos este sistema a coordenadas polares, dándonos como resultado la expresión:

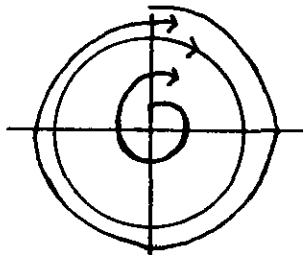
$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= \alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

Del sistema (13) se puede observar que el parámetro α solo nos determina la dirección en la cual recorre el plano el ángulo θ . Grafiquemos los retratos fase para los diversos valores de μ y α .

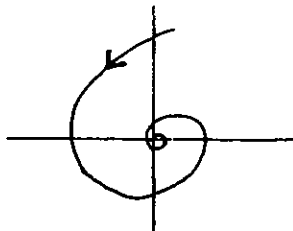
a) $\mu > 0, \alpha > 0$



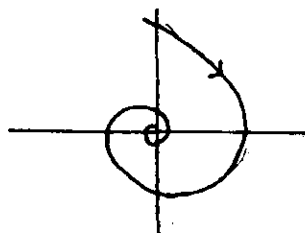
b) $\mu > 0, \alpha < 0$



b) $\mu < 0, \alpha > 0$



b) $\mu < 0, \alpha < 0$



Es decir, cuando $\alpha < 0$ el ángulo θ se mueve en sentido de las manecillas del reloj y cuando $\alpha > 0$ en sentido contrario. Observemos que la estabilidad en una vecindad del punto de equilibrio no se ve afectada cuando variamos la parte imaginaria de los eigenvalores.

Por ejemplo, si el punto de equilibrio era asintóticamente estable cuando $\mu < 0$, entonces el mismo punto de equilibrio (con el mismo valor de μ) seguirá siendo asintóticamente estable para cualquier valor de α .

El sistema de ecuaciones (10) que se acaba de analizar con todo detalle es un claro ejemplo del fenómeno de la bifurcación de Hopf. Es decir, para casos de sistemas más generales de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \mu x + f(x, y) \\ \dot{y} &= x + \mu y + g(x, y),\end{aligned}$$

donde $f, g \in C^\infty$ y son expresiones polinomiales con grado ≥ 2 .

Hopf demostró que contienen al menos una órbita periódica no trivial; y que el resto de las soluciones no estacionarias tienden a ésta órbita periódica.

Este Teorema y su demostración se discutirán con detalle a continuación.

Teorema de la bifurcación de Hopf en \mathbb{R}^2 .

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g_\mu(x, y) \\ \dot{y} &= h_\mu(x, y),\end{aligned}\quad (14)$$

donde $\mu \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$. Sea $f_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f_\mu(x, y) = (g_\mu(x, y), h_\mu(x, y))$$

f_μ es el campo vectorial de clase C^∞ asociado a la ecuación diferencial (14), y el cual cumple que $f_\mu(0, 0) = (0, 0)$ para cualquier valor de μ .

Sea f el campo vectorial extendido, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, \mu) = (g_\mu(x, y), h_\mu(x, y), \mu),$$

también de clase C^∞ .

Consideremos la matriz jacobiana de derivadas parciales del campo f_μ , i.e., $D_x f_\mu(0, 0)$ con dos eigenvalores complejos conjugados distintos los cuales llamaremos $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$, tal que para $\mu = 0$, $Re\lambda(0) = 0$ y para $\mu > 0$, $Re\lambda(\mu) > 0$. Además, $\frac{\partial Re\lambda(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} > 0$.

Entonces se cumple lo siguiente:

A) Existe una función $\mu : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $(x, 0, \mu(x))$ está en una órbita cerrada de f cuyo periodo es $\approx \frac{2\pi}{|\lambda(0)|}$, y radio que crece como $\sqrt{\mu}$, para $x \neq 0$ pequeño, y si $x = 0$, entonces $\mu(0) = 0$.

Si $(0, 0)$ es un "atractor vago" para f_0 , (este concepto se definirá en la página 75) entonces:

B) las órbitas son atractoras y $\mu(x) > 0$ para $x \neq 0$.

C) Existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al $(0, 0, 0)$ tal que cualquier órbita cerrada en U del flujo de f es una de las anteriores. (es decir, toda órbita de f pasa por la curva $(x, 0, \mu(x))$).

Observación: El campo f tiene la propiedad de que cuando tomamos planos paralelos al plano XY i.e., $\mu = \mu_0$, tenemos el campo f_{μ_0} para el valor

del parámetro μ_0 , es decir, cualquier curva solución del sistema (14) cuya condición inicial esta en el plano $\mu = \mu_0$ esta enteramente contenida en dicho plano.

La demostración de éste Teorema, es en esencia una aplicación del Teorema de la función implícita.

Mostraremos que para valores de μ pequeños, existe una función de clase C^∞ , la cual lleva al punto $(x, 0, \mu)$ a la primer intersección $(P(x, \mu), 0, \mu)$ de la órbita de $(x, 0, \mu)$ bajo el flujo de f con el eje X , de tal forma que x y $P(x, \mu)$ tengan el mismo signo.

La función $(x, 0, \mu) \rightarrow (P(x, \mu(x)), 0, \mu)$ es la aplicación de Poincaré asociado a la órbita cerrada que pasa por $(x, 0, \mu(x))$.

Definiremos la función de desplazamiento $V(x, \mu) = P(x, \mu) - x$. Usando el Teorema de la función implícita encontraremos una curva $(x, \mu(x))$, de ceros de V , es decir una curva por la cual atraviezan las órbitas cerradas del flujo de f .

Usando algunos resultados acerca de la aplicación de Poincaré, encontraremos condiciones bajo las cuales las órbitas sean atractoras.

La unicidad de dichas órbitas es esencialmente la unicidad que esta definida intrínsecamente en el Teorema de la función Implícita.

Demostración del Teorema.

1) Cambio de base para obtener la matriz canónica.

Dado el sistema (14), cuya matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio tiene eigenvalores complejos conjugados distintos, se demostrará que existe un cambio de base que depende de μ que lleva a la matriz correspondiente $D_x f_\mu(0, 0)$ a la forma:

$$D_x f_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix},$$

se demostrará que los eigenvalores así como dicho cambio de base son funciones de μ de clase C^∞ . También se hará notar que dicho cambio de base deja invariante al eje X .

Lema 2.1. : Sea $\mu \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix}$,

una función de clase C^∞ de $U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$. Considere a la matriz con dos eigenvalores distintos para todo $\mu \in [a, b] \subset U$. Entonces los eigenvalores son funciones de clase C^∞ de $(a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Demostración.

Tomemos la matriz y calculemos sus eigenvalores, i.e.,

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

El polinomio característico será:

$$\lambda^2 - (a_{11}(\mu) + a_{22}(\mu))\lambda + a_{11}(\mu)a_{22}(\mu) - a_{12}(\mu)a_{21}(\mu),$$

Entonces las raíces de dicho polinomio son:

$$\lambda(\mu) = \frac{a_{11}(\mu) + a_{22}(\mu) \pm \sqrt{(a_{11}(\mu) - a_{22}(\mu))^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2},$$

Como siempre tenemos eigenvalores distintos, entonces el discriminante $(a_{11}(\mu) - a_{22}(\mu))^2 + 4a_{12}a_{21} \neq 0$, para todo μ , y como se tiene que cada $a_{i,j}$ para $i, j = 1, 2$ es C^∞ , entonces cada eigenvalor $\lambda(\mu)$ también es C^∞ .

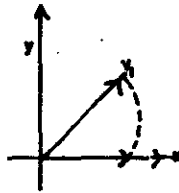
Lema 2.2.: Sea $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, una transformación lineal que es real en vectores reales y que no tiene eigenvalores reales. Sea $v_1 + iv_2$ un eigenvector con eigenvalor λ . Entonces existe un eigenvector $(1, 0) + i(\alpha(\mu), \beta(\mu))$, el cual tiene el mismo eigenvalor.

Demostración.

Cualquier múltiplo complejo de v , es un eigenvector de T con eigenvalor λ . Entonces es suficiente demostrar que existe un escalar $z \in \mathbb{C}$ donde $z = x + iy$, tal que $z(v_1 + iv_2) = (1, 0) + i(\alpha(\mu), \beta(\mu))$.

Demostrar que existe dicho escalar, es fácil geoméricamente, puesto que multiplicar por i es rotar 180 grados, entonces solo hay que elegir el escalar

apropiado que nos lleve al vector v_1 al vector $(1, 0)$.



Analíticamente esto es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}v_{11}x - v_{12}y &= 1 \\v_{21}x - v_{22}y &= 0\end{aligned}$$

Para que dicho sistema tenga solución tenemos que ver que las columnas del sistema son independientes sobre \mathbb{R} , es decir que $(v_{11}, v_{21}) \neq c(v_{12}, v_{22})$.

Supongamos que no son independientes, es decir que $v_2 = cv_1$ entonces:

$$v_1 + iv_2 = (1 + ic)v_1$$

despejando el vector v_1 , tenemos:

$$v_1 = (1 + ic)^{-1}(v_1 + iv_2),$$

mismo que debería ser un eigenvector real, pero tenemos que este vector es:

$$v_1 = \frac{1}{1 + c^2}(v_1 + cv_2) + \frac{i}{1 + c^2}(cv_1 + v_2)$$

el cual no es un vector real, por lo tanto la ecuación tiene solución.

Lema 2.3.: Sea T como en el lema anterior, entonces $Tv_1 = \operatorname{Re}\lambda v_1 - \operatorname{Im}\lambda v_2$ y $Tv_2 = \operatorname{Im}\lambda v_1 + \operatorname{Re}\lambda v_2$.

Demostración.

$$Tv_1 = \operatorname{Re}T(v_1 + iv_2),$$

ya que T es real en vectores reales,

$$= \operatorname{Re}\lambda(v_1 + iv_2),$$

esto es porque v es eigenvector de T ,

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Re}[\operatorname{Re}\lambda v_1 + i\operatorname{Im}\lambda v_1 + i\operatorname{Re}\lambda v_2 - \operatorname{Im}\lambda v_2], \\ &= \operatorname{Re}\lambda v_1 - \operatorname{Im}\lambda v_2. \end{aligned}$$

De forma semejante, demostraremos la segunda afirmación.

$$Tv_2 = \operatorname{Im}T(v_1 + iv_2),$$

$$= \operatorname{Im}\lambda(v_1 + iv_2),$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Im}[\operatorname{Re}\lambda v_1 + i\operatorname{Im}\lambda v_1 + i\operatorname{Re}\lambda v_2 - \operatorname{Im}\lambda v_2], \\ &= \operatorname{Im}\lambda v_1 + \operatorname{Re}\lambda v_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz correspondiente a esta transformación será:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix},$$

Usando los Lemas anteriores tenemos que si $(1, 0) + i(\alpha(\mu), \beta(\mu))$ es un eigenvector de la diferencial del campo f_μ evaluada en el punto de equilibrio, es decir $D_x f_\mu(0, 0)$ con eigenvalor $\lambda(\mu)$, entonces $(1, 0)$ y $(\alpha(\mu), \beta(\mu))$ son vectores independientes tal que la matriz en su forma canónica asociada es:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix},$$

Ahora mostraremos que el eigenvector $(\alpha(\mu), \beta(\mu))$ es de clase C^∞ como función de μ .

Considere la diferencial del campo f_μ evaluada en el punto de equilibrio,

$$D_x f_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix}.$$

Tenemos que, por ser $(1, 0) + i(\alpha(\mu), \beta(\mu))$ eigenvector de la matriz, se cumple:

$$T((1, 0) + i(\alpha(\mu), \beta(\mu))) = \lambda(1, 0) + i(\alpha(\mu), \beta(\mu)),$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + i\alpha(\mu) \\ i\beta(\mu) \end{pmatrix} = \lambda(\mu) \begin{pmatrix} 1 + i\alpha(\mu) \\ i\beta(\mu) \end{pmatrix},$$

Desarrollamos y obtenemos:

$$\begin{aligned} a_{11}(\mu) &= \operatorname{Re}\lambda(\mu) - \operatorname{Im}\lambda(\mu)\alpha(\mu) \\ a_{21}(\mu) &= -\operatorname{Im}\lambda(\mu)\beta(\mu), \end{aligned}$$

De éstas dos últimas ecuaciones podemos despejar los términos $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$,

$$\alpha(\mu) = \frac{\operatorname{Re}\lambda(\mu) - a_{11}(\mu)}{\operatorname{Im}\lambda(\mu)}$$

$$\beta(\mu) = \frac{-a_{21}(\mu)}{\operatorname{Im}\lambda(\mu)},$$

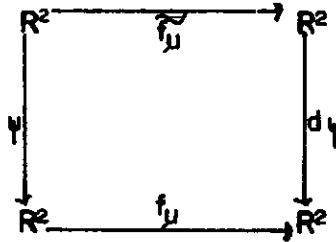
Debido a que el cambio de coordenadas es lineal para cada μ y porque las funciones $\alpha(\mu)$ y $\beta(\mu)$ son de clase C^∞ , en las nuevas coordenadas, el campo f_μ será también de clase C^∞ , entonces ya podemos asumir que el cambio de base ha sido hecho, es decir que:

$$D_x f_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix}.$$

2) Cambio a coordenadas polares.

Existe un único campo vectorial $\tilde{f}_\mu \in C^\infty$ en \mathbb{R}^2 tal que $\tilde{f}_\mu(r, \theta) = d\psi^{-1}f_\mu\psi$, donde $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la transformación a coordenadas polares, $\psi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Considere el siguiente diagrama conmutativo:



Como ya se había mencionado, f_μ es el campo de la ecuación diferencial y ψ es la transformación a coordenadas polares, i.e., $\psi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, entonces del diagrama conmutativo se tiene que:

$$\tilde{f}_\mu(r, \theta) = d\psi^{-1}f_\mu\psi,$$

Tenemos que:

$$f_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} g_\mu(x, y) \\ h_\mu(x, y) \end{pmatrix},$$

y

$$d\psi^{-1}(r, \theta) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

Entonces se tiene la composición:

$$d\psi^{-1}f_\mu\psi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_\mu \\ h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el campo $\tilde{f}_\mu(r, \theta)$, es:

$$\tilde{f}_\mu(r, \theta) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_\mu(r, \theta) \\ \tilde{h}_\mu(r, \theta) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta g_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta h_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ -\sin \theta g_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \cos \theta h_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{pmatrix}$$

Queremos ver que el campo \tilde{f}_{μ} es también C^{∞} . Debido a que $f_{\mu} \in C^{\infty}$ y que las funciones seno, coseno también son C^{∞} , la primer entrada del campo \tilde{f}_{μ} resulta ser también C^{∞} .

Para la segunda entrada, i.e., $\tilde{h}_{\mu}(r, \theta)$, observamos que en $r = 0$ existe una indeterminación, entonces tomaremos el límite cuando r tiende a cero de dicha función.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{h}_{\mu}(r, \theta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-1}{r} \sin \theta g_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{1}{r} \cos \theta h_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= -\sin \theta \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r} + \cos \theta \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r} \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que $(g_{\mu}(0, 0), h_{\mu}(0, 0)) = (0, 0)$, entonces podemos sumárselo a la expresión anterior, dándonos:

$$-\sin \theta \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta) - g_{\mu}(0, 0)}{r} + \cos \theta \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_{\mu}(r \cos \theta, r \sin \theta) - h_{\mu}(0, 0)}{r}$$

y esta expresión se puede escribir como:

$$= -\sin \theta D_{\mathbb{R}} g_{\mu}(0, 0)(\cos \theta, \sin \theta) + \cos \theta D_{\mathbb{R}} h_{\mu}(0, 0)(\cos \theta, \sin \theta)$$

Ahora bien, tenemos la matriz

$$D_{\mathbb{R}} f_{\mu}(0, 0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda(\mu) & \operatorname{Im} \lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im} \lambda(\mu) & \operatorname{Re} \lambda(\mu) \end{pmatrix},$$

por lo tanto:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{h}_\mu(r, \theta) = -\operatorname{sen}\theta(\operatorname{Re}\lambda\cos\theta + \operatorname{Im}\lambda\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta(-\operatorname{Im}\lambda\cos\theta + \operatorname{Re}\lambda\operatorname{sen}\theta)$$

$= -\operatorname{Im}\lambda(\mu)$.

Entonces podemos redefinir el campo \tilde{f}_μ de la siguiente manera:

$$\tilde{f}_\mu(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta g_\mu(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}\theta h_\mu(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \\ \frac{\cos\theta}{r} g_\mu(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} h_\mu(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \end{pmatrix}$$

si $r \neq 0$, y

$$\tilde{f}_\mu(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta g_\mu(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}\theta h_\mu(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) \end{pmatrix}$$

si $r = 0$.

Ahora, para ver que el campo $\tilde{f}_\mu(r, \theta)$ es C^∞ , mostraremos que las funciones $1/r g_\mu(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, $1/r h_\mu(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ son también C^∞ cuando son extendidas como arriba.

Lema 2.4.: Sea $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ , Entonces:

$$A(x, y) - A(0, 0) = xA_1(x, y) + yA_2(x, y),$$

donde $A_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial x} dt$, $A_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial y} dt$, son C^∞ , así:

$$A_1(0, 0) = \frac{\partial A(0, 0)}{\partial x} \quad A_2(0, 0) = \frac{\partial A(0, 0)}{\partial y}$$

Demostración.

Considere la función $A(tx, ty)$, derivémosla con respecto a t .

$$\frac{\partial A(tx, ty)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t},$$

donde $v = tx$, $w = ty$, entonces se tiene que:

$$\frac{\partial A(tx, ty)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial v}x + \frac{\partial A}{\partial w}y.$$

Ahora integremos con respecto a t , sobre el intervalo $(0, 1)$,

$$\int_0^1 \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial t} dt = \int_0^1 \left(\frac{A(tx, ty)}{\partial v}x + \frac{A(tx, ty)}{\partial w}y \right) dt$$

$$A(x, y) - A(0, 0) = \int_0^1 \left(\frac{A(tx, ty)}{\partial v}x + \frac{A(tx, ty)}{\partial w}y \right) dt.$$

Podemos escribir la expresión de la siguiente manera:

$$A(x, y) - A(0, 0) = \int_0^1 \frac{A(tx, ty)}{\partial x}x + \frac{A(tx, ty)}{\partial y}y dt$$

con lo cual hemos demostrado la primer parte del Lema.

Ahora demostraremos que si,

$$A_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial x} dt, \quad A_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial y} dt, \text{ entonces:}$$

$$A_1(0, 0) = \frac{\partial A(0, 0)}{\partial x} \quad A_2(0, 0) = \frac{\partial A(0, 0)}{\partial y}$$

Demostración.

$$A_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial x} dt,$$

entonces,

$$A_1(0, 0) = \int_0^1 \frac{\partial A(0, 0)}{\partial x} dt,$$

por lo tanto:

$$A_1(0, 0) = \frac{\partial A(0, 0)}{\partial x}.$$

Análogamente para A_2 , se tiene que:

$$A_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial y} dt,$$

$$A_2(0, 0) = \int_0^1 \frac{\partial A(0, 0)}{\partial y} dt,$$

$$A_2(0, 0) = \frac{\partial A(0, 0)}{\partial y}.$$

Con esto hemos demostrado el Lema.

Por el Lema, se tiene que las expresiones $1/rg_\mu(rcos\theta, rsen\theta)$, $1/rh_\mu(rcos\theta, rsen\theta)$ pueden ser reescritas de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r}g_\mu(rcos\theta, rsen\theta) = cos\theta \int_0^1 \frac{\partial g_\mu}{\partial x}(rtcos\theta, rtsen\theta)dt + sen\theta \int_0^1 \frac{\partial g_\mu}{\partial y}(rtcos\theta, rtsen\theta)dt,$$

Análogamente

$$\frac{1}{r}h_\mu(rcos\theta, rsen\theta) = cos\theta \int_0^1 \frac{\partial h_\mu}{\partial x}(rtcos\theta, rtsen\theta)dt + sen\theta \int_0^1 \frac{\partial h_\mu}{\partial y}(rtcos\theta, rtsen\theta)dt,$$

y con esto, podemos observar que dichas funciones son claramente de clase C^∞ . Por lo tanto, el campo \tilde{f}_μ como se había extendido es C^∞ .

3) La aplicación de Poincaré.

Hagamos algunas aclaraciones en cuanto a la notación usada para el flujo del campo f_μ y el campo extendido f , mismos que son expresados tanto en coordenadas polares como rectangulares.

El flujo ϕ_μ corresponde a el campo \tilde{f}_μ , dicho flujo esta expresado en coordenadas polares. $\phi_\mu : \mathbf{R}^2 \times (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$\tilde{\phi}_\mu(r, \theta, t) = (\tilde{a}_\mu(r, \theta, t), \tilde{b}_\mu(r, \theta, t)),$$

análogamente el flujo ϕ_μ es el flujo del campo f_μ expresado en coordenadas rectangulares $\phi_\mu : \mathbb{R}^2 \times (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi_\mu(x, y, t) = (a_\mu(x, y, t), b_\mu(x, y, t))$$

El flujo para el campo extendido \tilde{f} , se define de manera semejante, $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^2 \times (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

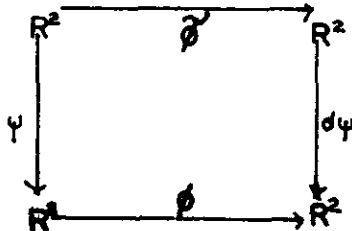
$$\tilde{\phi}(r, \theta, \mu, t) = (a_\mu(r, \theta, t), b_\mu(r, \theta, t), \mu)$$

Por último, el flujo para el campo extendido f , se define:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \times (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\phi(x, y, \mu, t) = (a_\mu(x, y, t), b_\mu(x, y, t), \mu)$$

Cabe hacer notar que los flujos $\tilde{\phi}$ y ϕ son conjugados, es decir, $\tilde{\phi} = \psi^{-1} \phi \psi$.



Como ya acabamos de definir, el campo cuando $r = 0$ es: $\tilde{f}(0, \theta, \mu) = (0, -Im\lambda(\mu), \mu)$, el flujo correspondiente $\tilde{\phi}(0, \theta, \mu, t) = (0, \theta - Im\lambda(\mu)t, \mu)$.

La trayectoria del origen $(r, \theta, \mu) = (0, 0, 0)$ es:

$$\tilde{\phi}(0, 0, 0, t) = (0, -Im\lambda(0)t, 0).$$

Tomemos ahora el tiempo $t = \frac{2\pi}{|\lambda(0)|}$,

$$\tilde{\phi}(0, 0, 0, \frac{2\pi}{|\lambda(0)|}) = (0, -2\pi, 0).$$

Ahora bien, para un punto de la forma $(0, 0, \mu)$, el flujo será:

$$\tilde{\phi}(0, 0, \mu, t) = (0, -\text{Im}\lambda(\mu)t, \mu),$$

Si tomamos ahora el tiempo $t = \frac{2\pi}{\text{Im}\lambda(\mu)}$,

$$\tilde{\phi}(0, 0, \mu, \frac{2\pi}{\text{Im}\lambda(\mu)}) = (0, -2\pi, \mu),$$

y entonces la trayectoria del $(0, 0, \mu)$ bajo $\tilde{\phi}$ es $(0, -2\pi, \mu)$

Debido a esto, y a que los eigenvalores son funciones de μ de clase C^∞ , se tiene que:

$$|\lambda(0)| \approx \sqrt{(\text{Re}\lambda(\mu))^2 + (\text{Im}\lambda(\mu))^2}$$

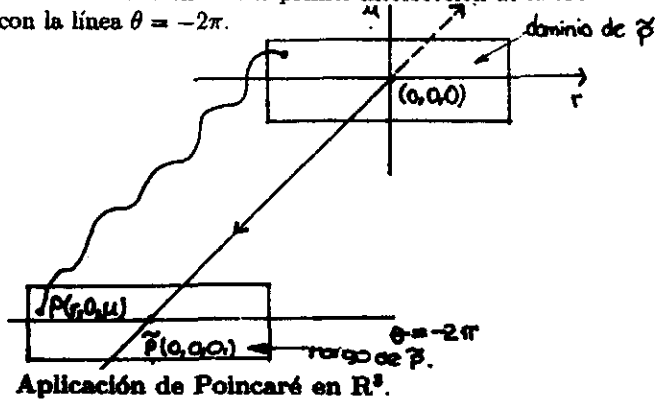
lo cual nos dice que las órbitas cerradas no triviales del campo f , tienen periodo semejante a $\frac{2\pi}{|\lambda(0)|}$.

Definición de la aplicación de Poincaré.

Existe una vecindad $U = \{ (r, 0, \mu) \mid r \in (-\epsilon, \epsilon), \mu \in (-\epsilon, \epsilon) \}$ tal que la aplicación de Poincaré $\tilde{P}(r, 0, \mu)$ se define como:

$$\tilde{P}(r, 0, \mu) = (\hat{P}(r, \mu), -2\pi, \mu),$$

donde $\tilde{P}(r, \mu)$ es la coordenada en r de la primer intersección de la órbita del punto $(r, 0, \mu)$, con la línea $\theta = -2\pi$.



Observemos que dicha aplicación depende del flujo, por lo cual \tilde{P} es C^∞ .

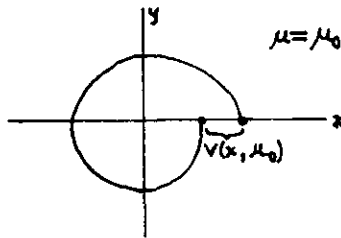
La función $T(r, \mu)$, el cual es el tiempo t para el cual el flujo $\tilde{\phi}(r, 0, \mu, t) = \tilde{P}(r, 0, \mu)$ también es C^∞ .

Nótese que bajo ψ , el eje r se convierte en el eje X .

$$\psi(r, 0) = (r \cos 0, r \operatorname{sen} 0) = (r, 0),$$

Definamos también la función de desplazamiento: $V : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x, \mu) = P(x, \mu) - x, \text{ o bien, } P(x, \mu) = V(x, \mu) + x.$$



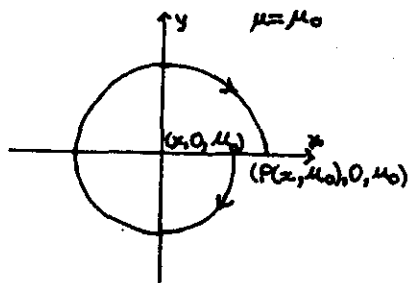
Función de desplazamiento $V(x, \mu)$.

Esta última función $V(x, \mu) + x$, está bien definida y es de clase C^∞ en

una vecindad, $U = \{ (x, 0, \mu) \text{ tq } x \in (-\epsilon, \epsilon), \mu \in (-\epsilon, \epsilon) \}$.

$(V(x, \mu) + x, 0, \mu)$ nos indica la primer intersección de la órbita del punto $(x, 0, \mu)$ con el eje X , tal que el signo de x y el signo de $P(x, \mu)$ sean los mismos.

Cabe destacar que para cada valor de μ existe una aplicación de Poincaré, entonces al variar $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$, tenemos una familia de aplicaciones.



Aplicación de Poincaré para un valor μ_0 del parámetro

Una vez definida la aplicación de Poincaré, demosetremos el siguiente Lema.

Lema 2.5.:

$$\frac{\partial P(x, \mu)}{\partial x} \Big|_{x=0, \mu=\mu} = e^{\frac{2\pi R_{0\lambda}(\mu)}{T_{m\lambda}(\mu)}}$$

Demostración:

Por la forma en que se eligió el dominio de la aplicación, el flujo del sistema satisfase la siguiente ecuación:

$$P(x, \mu) = \int_0^{T(x, \mu)} g_{\mu}(a_{\mu}(x, 0, t), b_{\mu}(x, 0, t)) dt$$

Tenemos que derivar $P(x, \mu)$ con respecto a x , entonces calcularemos:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x, \mu) - P(x, \mu)}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{T(x+\Delta x, \mu)} g_\mu(a_\mu(x + \Delta x, 0, t), b_\mu(x + \Delta x, 0, t)) dt \\
&\quad - \frac{1}{\Delta x} \int_0^{T(x, \mu)} g_\mu(a_\mu(x, 0, t), b_\mu(x, 0, t)) dt \\
&= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{T(x, \mu)} g_\mu(a_\mu(x + \Delta x, 0, t), b_\mu(x + \Delta x, 0, t)) - g_\mu(a_\mu(x, 0, t), b_\mu(x, 0, t)) dt \\
&\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{T(x, \mu)}^{T(x+\Delta x, \mu)} g_\mu(a_\mu(x + \Delta x, 0, t), b_\mu(x + \Delta x, 0, t)) dt
\end{aligned}$$

de la expresión anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x} \int_0^{T(x, \mu)} g_\mu(a_\mu(x + \Delta x, 0, t), b_\mu(x + \Delta x, 0, t)) - g_\mu(a_\mu(x, 0, t), b_\mu(x, 0, t)) dt \\
&= \int_0^{T(x, \mu)} \frac{\partial g_\mu(a_\mu(x, 0, t), b_\mu(x, 0, t))}{\partial x} dt \quad (1)
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x} \int_{T(x, \mu)}^{T(x+\Delta x, \mu)} g_\mu(a_\mu(x + \Delta x, 0, t), b_\mu(x + \Delta x, 0, t)) dt \\
&= g_\mu(a_\mu(x, 0, T(x, \mu)), b_\mu(x, 0, T(x, \mu))) \frac{\partial T(x, \mu)}{\partial x} \quad (2)
\end{aligned}$$

Queremos evaluar cada una de estas expresiones para $x = 0$. Sabemos que $(0, 0)$ es punto fijo del flujo, entonces tenemos que

$g_\mu(0, 0) = 0$, y $(a_\mu(0, 0, t), b_\mu(0, 0, t)) = (0, 0)$, entonces la expresión (2) será:

$$g_\mu(a_\mu(0, 0, T(0, \mu)), b_\mu(0, 0, T(0, \mu))) \frac{\partial T(x, \mu)}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$= g_\mu(0, 0) \frac{\partial T(x, \mu)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

por lo tanto la expresión (2) se cancela. Analizemos ahora la expresión (1).

$$\frac{\partial g_\mu(a_\mu(x, 0, t), b_\mu(x, 0, t))}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial g_\mu(a_\mu(x, 0, t), b_\mu(x, 0, t))}{\partial a} \frac{\partial a_\mu(x, 0, t)}{\partial x} + \frac{\partial g_\mu(a_{\mu,t}(x, 0), b_{\mu,t}(x, 0))}{\partial b} \frac{\partial b_{\mu,t}(x, 0)}{\partial x}$$

Evaluando la expresión anterior para $x = 0$ tenemos:

$$\frac{\partial g_\mu(a_{\mu,t}(0, 0), b_{\mu,t}(0, 0))}{\partial x} dt =$$

$$\frac{\partial g_\mu(0, 0)}{\partial a} \frac{\partial a_{\mu,t}(0, 0)}{\partial x} + \frac{\partial g_\mu(0, 0)}{\partial b} \frac{\partial b_{\mu,t}(0, 0)}{\partial x}$$

Ahora bien, de nuestras hipótesis tenemos que:

$$D_x f_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix},$$

de la cual obtenemos:

$$\frac{\partial g_\mu(0, 0)}{\partial a} = \operatorname{Re}\lambda(\mu), \quad \frac{\partial g_\mu(0, 0)}{\partial b} = \operatorname{Im}\lambda(\mu).$$

Por otro lado, necesitamos las expresiones de la derivada del flujo evaluado en cero, esto es:

$$D(\phi_\mu(0, 0, t)) = e^{tA},$$

donde $A = D_{\bar{x}}f_\mu(0, 0)$. Desarrollando, obtenemos:

$$D(\phi_\mu(0, 0, t)) = e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)} \begin{pmatrix} \cos \operatorname{Im}\lambda(\mu)t & \operatorname{sen} \operatorname{Im}\lambda(\mu)t \\ -\operatorname{sen} \operatorname{Im}\lambda(\mu)t & \cos \operatorname{Im}\lambda(\mu)t \end{pmatrix},$$

entonces,

$$\frac{\partial a_\mu(0, 0, t)}{\partial x} = e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)} \cos \operatorname{Im}\lambda(\mu)t, \quad \frac{\partial b_\mu(0, 0, t)}{\partial x} = -e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)} \operatorname{sen} \operatorname{Im}\lambda(\mu)t.$$

y ahora sabiendo que el periodo en $x = 0$ es:

$$T(0, \mu) = \frac{2\pi}{\operatorname{Im}\lambda(\mu)}$$

podemos sustituir todo en la expresión (1), dándonos como resultado:

$$= \int_0^{2\pi/\operatorname{Im}\lambda(\mu)} (\operatorname{Re}\lambda(\mu)e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)} \cos \operatorname{Im}\lambda(\mu)t - \operatorname{Im}\lambda(\mu)e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)} \operatorname{sen} \operatorname{Im}\lambda(\mu)t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\operatorname{Im}\lambda(\mu)} \operatorname{Re}\lambda(\mu)e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)} \cos \operatorname{Im}\lambda(\mu)t dt \\ - \int_0^{2\pi/\operatorname{Im}\lambda(\mu)} \operatorname{Im}\lambda(\mu)e^{t\operatorname{Re}\lambda(\mu)} \operatorname{sen} \operatorname{Im}\lambda(\mu)t dt$$

Para la primer integral podemos hacer el cambio de variable $u = \operatorname{Re}\lambda(\mu)t$, con el cual nos queda la expresión:

$$= \int_0^{2\pi/\operatorname{Im}\lambda(\mu)} e^u \cos \operatorname{Im}\lambda(\mu) / (\operatorname{Re}\lambda(\mu)) u du$$

apliquemos el método de integración por partes para resolverla. Haciendo $u = \cos Im\lambda(\mu)/(Re\lambda(\mu))u$, $dv = e^u$, llegamos al siguiente resultado:

$$\int_0^{2\pi/Im\lambda(\mu)} e^u \cos Im\lambda(\mu)/(Re\lambda(\mu)) u du = e^{\frac{2\pi Re\lambda(\mu)}{Im\lambda(\mu)}} \frac{Re\lambda(\mu)^2}{Re\lambda(\mu)^2 + Im\lambda(\mu)^2}$$

Análogamente, para la segunda integral tenemos que, haciendo primero un cambio de variable ($u = Im\lambda(\mu)t$), y después aplicando integración por partes llegamos al resultado:

$$\int_0^{2\pi/Im\lambda(\mu)} e^{Re\lambda(\mu)u/Im\lambda(\mu)} \operatorname{sen} u du = -e^{\frac{2\pi Re\lambda(\mu)}{Im\lambda(\mu)}} \frac{Im\lambda(\mu)^2}{Re\lambda(\mu)^2 + Im\lambda(\mu)^2}$$

con lo cual tenemos que el resultado final para la expresión será:

$$\int_0^{2\pi/Im\lambda(\mu)} e^{t Re\lambda(\mu)} (Re\lambda(\mu) \cos Im\lambda(\mu)t - Im\lambda(\mu) \operatorname{sen} Im\lambda(\mu)t) dt = e^{\frac{2\pi Re\lambda(\mu)}{Im\lambda(\mu)}}$$

con esto queda demostrado el Lema.

Aplicando el Lema 2.5., podemos obtener la parcial con respecto a x evaluada en $(x, \mu) = (0, \mu)$ de la función de desplazamiento $V(x, \mu)$, la cual es:

$$\frac{\partial V(0, \mu)}{\partial x} = e^{2\pi \frac{Re\lambda(\mu)}{Im\lambda(\mu)}} - 1.$$

4) Usar el Teorema de la función implícita para encontrar órbitas cerradas.

La manera más obvia para tratar de encontrar órbitas cerradas del flujo del sistema es tratar de encontrar los ceros de la función V , (es decir, encontrar los puntos fijos diferentes de cero del mapeo de Poincaré).

Como $V(0,0) = 0$, si alguna de las parciales de V , $\frac{\partial V}{\partial x}(0,0)$ ó $\frac{\partial V}{\partial \mu}(0,0)$, fuesen diferentes de cero, las condiciones del Teorema de la función implícita pueden satisfacerse y podemos encontrar una curva de la forma: $(x(\mu), \mu)$ ó $(x, \mu(x))$ tal que $V = 0$ a lo largo de esa curva.

Pero, por desgracia no sucede eso, ya que $\frac{\partial V}{\partial \mu}(0,0) = 0$ (porque el campo se anula en el cero para todo μ); y $\frac{\partial V}{\partial x}(0,0) = e^{2\pi \operatorname{Re}\lambda(0)} / \operatorname{Im}\lambda(0) - 1 = 0$, porque $\operatorname{Re}\lambda(0) = 0$.

Entonces, para encontrar las órbitas cerradas del campo, usaremos la función:

$$\tilde{V}(x, \mu) = \begin{cases} \frac{V(x, \mu)}{x} & x \neq 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x}(0,0) & x = 0 \end{cases}$$

Lema 2.6.: \tilde{V} es C^∞ .

Demostración:

Lo primero que tenemos que ver es que \tilde{V} es continua en cero, para esto, tenemos que demostrar que:

$$\lim_{(x, \mu) \rightarrow (0,0)} \frac{V(x, \mu)}{x} = 0$$

Habíamos visto que $V(x, \mu) = P(x, \mu) - x$, entonces,

$$\frac{V(x, \mu)}{x} = \frac{P(x, \mu)}{x} - 1.$$

Entonces el problema se reduce a verificar que:

$$\lim_{(x, \mu) \rightarrow (0,0)} \frac{P(x, \mu)}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x, \mu)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{T(x, \mu)} g_\mu(a_{\mu,t}(x, 0), b_{\mu,t}(x, 0)) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{T(x, \mu)} g_\mu(a_{\mu,t}(x, 0), b_{\mu,t}(x, 0)) - g_\mu(0, 0) dt \end{aligned}$$

y como $g_\mu(0, 0) = 0$,

$$= \int_0^{T(x, \mu)} \frac{\partial g_\mu(a_{\mu,t}(x, 0), b_{\mu,t}(x, 0))}{\partial x} dt$$

Pero como ya se había demostrado, esta integral era igual a $e^{\frac{2\lambda(\mu)}{Tm\lambda(\mu)}}$, por lo tanto:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} e^{\frac{2\lambda(\mu)}{Tm\lambda(\mu)}} = 1,$$

por lo tanto es continua en cero.

Ahora lo que tenemos que ver es que \tilde{V} es C^∞ .

$$V(x, \mu) = \int_0^1 \frac{\partial V(tx, \mu)}{\partial x} x dt,$$

porque $V(0, \mu) = 0$. Ahora,

$$\frac{V(x, \mu)}{x} = \int_0^1 \frac{\partial V(tx, \mu)}{\partial x} dt,$$

para $x \neq 0$, pero de esta última expresión podemos observar que \tilde{V} es C^∞ , puesto que V es C^∞ .

Lema 2.7.: $\tilde{V}(0,0) = 0$, $\frac{\partial \tilde{V}(0,0)}{\partial \mu} \neq 0$, entonces existen vecindades N_1, N_2 del cero, y una única función $\mu \in C^\infty$, $\mu : N_1 \rightarrow N_2$, tal que $\mu(0) = 0$ y $V(x, \mu(x)) = 0$.

Lo que tenemos que hacer, es aplicarle el Teorema de la función implícita a la función \tilde{V} , para ello primero tenemos que checar si dicha función cumple con las condiciones de este teorema.

$\tilde{V}(0,0) = 0$, ahora tenemos que verificar que $\frac{\partial \tilde{V}(0,0)}{\partial \mu} \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu} \Big|_{(0,0)} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\tilde{V}(0, \mu) - \tilde{V}(0, 0)}{\mu} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} (\tilde{V}(0, \mu) - \tilde{V}(0, 0)) \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial V(0, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial V(0, 0)}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left(e^{\frac{2\pi \operatorname{Re}\lambda(\mu)}{\operatorname{Im}\lambda(\mu)}} - 1 \right), \\ &= \left(\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda(\mu)}{\partial \mu} \frac{2\pi \operatorname{Im}\lambda(\mu)}{(\operatorname{Im}\lambda(\mu))^2} - \frac{\partial \operatorname{Im}\lambda(\mu)}{\partial \mu} \frac{\operatorname{Re}\lambda(\mu)}{(\operatorname{Im}\lambda(\mu))^2} \right) e^{\frac{2\pi \operatorname{Re}\lambda(\mu)}{\operatorname{Im}\lambda(\mu)}}. \end{aligned}$$

Si evaluamos en $\mu = 0$, tenemos:

$$= \frac{2\pi}{\operatorname{Im}\lambda(0)} \frac{\partial \operatorname{Re}\lambda(0)}{\partial \mu} \neq 0$$

ya que por hipótesis tenemos que la derivada de la parte real de los eigenvalores, evaluada en $\mu = 0$, es diferente de cero.

Como acabamos de ver, la función \hat{V} , cumple con el Teorema de la función implícita, por lo tanto, existen vecindades N_1, N_2 , alrededor del cero, tal que $\hat{V}(x, \mu(x)) = 0$, i.e., que $\hat{V} = 0$ a lo largo de la curva $(x, \mu(x))$, entonces:

$$\frac{V(x, \mu(x))}{x} = 0 \quad \text{para } x \neq 0, \text{ por lo tanto } V(x, \mu(x)) = 0.$$

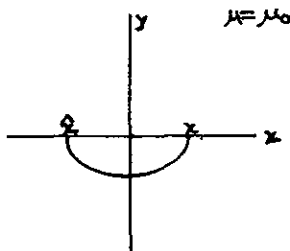
5) Condiciones para la estabilidad de las órbitas.

Ahora analizaremos algunos resultados de las derivadas de μ y V en cero.

Lema 2.8.: $\mu'(0) = 0$.

Demostración.

Por la manera en la cual elegimos el dominio de V , sabemos que si $V(x, \mu(x)) = 0$ para $x \neq 0$, entonces la órbita cerrada que pasa por el punto $(x, 0, \mu(x))$, cruza el eje X en el punto $(\hat{x}, 0, \mu(\hat{x}))$, de tal forma que x y \hat{x} tienen signo opuesto.



El flujo correspondiente a la órbita de x no puede cortar en la parte positiva del eje X , porque entonces x no sería punto fijo de la aplicación de Poincaré (y por lo tanto $V(x, \mu(x)) \neq 0$ para ese valor de x).

Elijamos ahora una sucesión de puntos $\{x_n\}$ que converja a cero. Entonces para cada x_n elemento de la sucesión, existe un $y_n < 0$ (por la razón que se mencionó en un principio), y tal que $\mu(x_n) = \mu(y_n)$, porque tanto x_n como y_n están en la misma órbita del flujo.

Afirmación: La sucesión $\{y_n\}$ también converge a cero.

Demostración de la afirmación.

Como el periodo de las órbitas en una vecindad del cero es $\approx 2\pi/|\lambda(0)|$, podemos asumir que dicho periodo está acotado en esta vecindad. Llamemos k a la cota del periodo.

El periodo $T \in [0, k]$. Entonces restringiremos el dominio del flujo de la ecuación diferencial. Considere $\phi_\mu : [-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha] \times [0, k] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $[-\alpha, \alpha] \subset (-\epsilon, \epsilon)$.

Como se tiene que ϕ_μ es continua, manda conjuntos compactos en compactos, es decir, $\phi_\mu([-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha] \times [0, k]) = D \subset \mathbb{R}^2$ donde D es compacto.

Dado un punto $(x_n, 0, \mu(x_n), t_n) \in [-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha] \times [0, k]$, entonces su imagen $\bar{y}_n = (y_n, 0) = \phi_\mu((x_n, 0, \mu(x_n), t_n)) \in D$, por lo tanto, cualquier sucesión $\{\bar{y}_n\}$ está contenida en D .

Tomemos la sucesión $\{\bar{y}_n\}$, la cual está acotada, entonces dicha sucesión contiene al menos una subsucesión convergente. Sea $\{\bar{y}_{n_k}\}$ una subsucesión convergente. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n_k}, 0, \mu(x_{n_k}), t_{n_k}) = (0, 0, 0, t_0)$, por continuidad de ϕ_μ se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_\mu(x_{n_k}, 0, \mu(x_{n_k}), t_{n_k}) = \phi_\mu(0, 0, 0, t_0) = (0, 0),$$

por lo tanto, todas las subsucesiones convergentes $\{\bar{y}_{n_k}\}$ convergen al $(0, 0)$.

Ahora, para terminar, vamos a demostrar que todas las subsucesiones de $\{\bar{y}_n\}$ son convergentes, y por lo tanto como ya hemos visto todas estas convergen a $(0, 0)$, con lo cual terminaremos la demostración.

Sea Y el conjunto de todas las subsucesiones convergentes. Considerese ahora al conjunto $A \subset Y$ tal que para todo $a \in A$, a es un elemento de alguna sucesión convergente $\{\bar{y}_n\}$

afirmación: $A^c = \emptyset$.

Supongamos que existe $x \in A^c$, entonces tomemos $\{x\} \cup \{\bar{y}_n\}$, la cual resulta ser una sucesión convergente, lo cual es una contradicción, por lo tanto $A^c = \emptyset$.

Con esto demostramos que toda sucesión $\{\bar{y}_n\} = (y_n, 0)$ es convergente, y converge al $(0, 0)$.

Continuemos con la demostración del lema 2.8.

Ahora, como $\mu(0) = 0$, y como la función $\mu \in C^\infty$ en cero, se tiene que:

$$\mu'(0) = \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\mu(x_n) - \mu(0)}{x_n},$$

y por otro lado, también

$$\mu'(0) = \lim_{y_n \rightarrow 0} \frac{\mu(y_n) - \mu(0)}{y_n},$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\mu(x_n) - \mu(0)}{x_n} = \lim_{y_n \rightarrow 0} \frac{\mu(y_n) - \mu(0)}{y_n}$$

Pero como $\mu(x_n)/x_n$ tiene signo opuesto a $\mu(y_n)/y_n$, se tiene que $\mu'(0) = 0$. Con lo cual demostramos el lema.

Lema 2.9.: $V(0, 0) = \frac{\partial V(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial x^2} = 0$

Demostración.

Como $V(x, \mu(x)) = 0$, vamos a obtener la derivada total de esta expresión.

$$\frac{\partial V(x, \mu(x))}{\partial x} + \frac{\partial V(x, \mu(x))}{\partial \mu} \mu'(x) = 0$$

Derivemos nuevamente,

$$\frac{\partial^2 V(x, \mu(x))}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 V(x, \mu(x))}{\partial x \partial \mu} \mu'(x) + \frac{\partial^2 V(x, \mu(x))}{\partial \mu^2} (\mu'(x))^2 + \frac{\partial V(x, \mu(x))}{\partial \mu} \mu''(x) = 0$$

despejando $\frac{\partial^2 V(x, \mu(x))}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 V(x, \mu(x))}{\partial x^2} = - \left[2 \frac{\partial^2 V(x, \mu(x))}{\partial x \partial \mu} \mu'(x) + \frac{\partial^2 V(x, \mu(x))}{\partial \mu^2} (\mu'(x))^2 + \frac{\partial V(x, \mu(x))}{\partial \mu} \mu''(x) \right]$$

evaluando en $(0, 0)$ tenemos que $\frac{\partial V(0,0)}{\partial \mu} = 0$, $\mu'(0) = 0$, por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial x^2} = 0$$

con lo cual demostramos el lema.

Definición: $(0, 0)$ es un atractor vago para f_0 si $\frac{\partial^3 V(0,0)}{\partial x^3} < 0$.

Esta condición implica que el origen es asintóticamente estable. Para ver detalles se puede consultar Marsden [1976].

Lema 2.10.: Si $(0, 0)$ es un atractor vago para f_0 , entonces las órbitas que pasan por $(x, 0, \mu(x))$ son atractoras y $\mu(x) > 0$ para valores $x \neq 0$ y pequeños.

Demostración:

Primero demostraremos que $\mu(x) > 0$ para x pequeño y diferente de cero. Sabemos que $\mu(0) = \mu'(0) = 0$, lo cual indica que $x = 0$ es un punto crítico de μ . Entonces, para demostrar que $\mu(x) > 0$, Tenemos que ver que en $x = 0$, la función μ tiene un mínimo local.

Tomemos nuevamente la ecuación $V(x, \mu(x)) = 0$ y derivémosla tres veces. Evaluando en $x = 0$ obtenemos la ecuación:

$$3\mu''(0) \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial \mu \partial x} + \frac{\partial^3 V(0,0)}{\partial x^3} = 0.$$

De esta ecuación, despejamos $\mu''(0)$ y tenemos:

$$\mu''(0) = - \frac{\partial^3 V(0,0) / \partial x^3}{\partial^2 V(0,0) / 3 \partial \mu \partial x}.$$

Pero como ya se había visto,

$$\frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial \mu \partial x} = \frac{2\pi}{Im\lambda(0)} \frac{\partial Re\lambda(0)}{\partial \mu} > 0.$$

y como $(0,0)$ es un atractor vago, entonces se tiene que $\mu''(0) > 0$. Por lo tanto μ tiene un mínimo local en cero, entonces $\mu(x) > 0$ para valores de x pequeños.

vskip 3mm Ahora, para demostrar que la órbita que atraviesa el punto $(x, 0, \mu(x))$ es atractora, nos auxiliaremos del siguiente Teorema. La demostración de este Teorema se puede consultar en Perko[1986].

Teorema: Considere el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f_\mu(x)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^k$. Supongase que dicho sistema tiene una órbita periódica. Si los eigenvalores de la derivada de la aplicación de Poincaré asociados con esta órbita son menores que uno en valor absoluto entonces la órbita es atractora.

Basándonos en el Teorema anterior mostraremos que los eigenvalores de la derivada de la aplicación de Poincaré asociados con esta órbita son menores que uno en valor absoluto.

La aplicación de Poincaré asociada con la órbita que atraviesa $(x, 0, \mu(x))$, con $x \neq 0$ es $P_{\mu(x)}(x') = P(x', \mu(x))$.

La derivada de $P_\mu(x)$, evaluada en el punto x es: $\partial P(x, \mu(x))/\partial x$.

Debido a que $\partial P(0, 0)/\partial x = 1$, entonces existe una vecindad del $(0, 0)$, en la cual $\partial P(x, \mu(x))/\partial x > -1$. Entonces solo necesitamos mostrar que para $x \neq 0$, $\partial P(x, \mu(x))/\partial x < 1$.

Pedir que $\partial P(x, \mu(x))/\partial x < 1$ es equivalente a pedir que $\partial V(x, \mu(x))/\partial x < 0$.

Considere la función:

$$f(x) = \frac{\partial V(x, \mu(x))}{\partial x}$$

Para demostrar que $\partial V(x, \mu(x))/\partial x < 0$, tenemos que ver que la función $f(x)$ tiene un máximo local en $(0, 0)$.

Analizemos la función f y sus derivadas en cero.

$$f(0) = \frac{\partial V(0, 0)}{\partial x} = 0$$

y también,

$$f'(0) = \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial \mu \partial x} \mu'(0) = 0$$

Ahora derivemos por segunda vez la función f ,

$$f''(x) = \frac{\partial^3 V(x, \mu(x))}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 V(x, \mu(x))}{\partial \mu \partial x^2} \mu'(x) + \frac{\partial^3 V(x, \mu(x))}{\partial \mu^2 \partial x} (\mu'(x))^2 + \frac{\partial^2 V(x, \mu(x))}{\partial \mu \partial x} \mu''(x)$$

Evaluando en $x = 0$ tenemos:

$$f''(0) = \frac{\partial^3 V(0,0)}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial \mu \partial x} \mu''(0)$$

Ya habíamos calculado la expresión de $\mu''(0)$ en términos de las parciales de V , dicha expresión era:

$$\mu''(0) = - \frac{\partial^3 V(0,0) / \partial x^3}{\partial^2 V(0,0) / 3 \partial \mu \partial x}$$

La sustituiremos para obtener:

$$f''(0) = \frac{2}{3} \frac{\partial^3 V(0,0)}{\partial x} < 0$$

Por lo tanto $f(x)$ tiene un máximo local en $x = 0$. Entonces

$$f(x) = \frac{\partial V(x, \mu(x))}{\partial x} < 0 \text{ en una vecindad del } (0,0).$$

Entonces se tiene que

$$\left| \frac{\partial P(x, \mu(x))}{\partial x} \right| < 1$$

por lo tanto las órbitas que pasan por $(x, 0, \mu(x))$ son atractoras.

6) Unicidad de las órbitas cerradas.

Como ya se había mencionado, la unicidad de las órbitas es heredada del Teorema de la función implícita. Podemos formalizar esto enunciándolo como un lema.

Lema 2.11. Existe una vecindad N del $(0,0,0)$ tal que cualquier órbita cerrada en N del flujo de f pasa por uno de los puntos $(x, 0, \mu(x))$.

La demostración de este lema la podemos consultar en Marsden[1976]

Con esto queda demostrado el Teorema de la bifurcación de Hopf.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Anexo 1.

Teorema de la función implícita.

El teorema de la función implícita es una herramienta indispensable en la teoría de bifurcación. La siguiente versión nos servirá para el estudio bifurcaciones en ecuaciones diferenciales, cerca de un punto de equilibrio.

Teorema Sea $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ un vector en \mathbf{R}^k . Supongase que $F : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; (\mu, x) \rightarrow F(\mu, x)$, es una función de clase C^1 que satisface:

$$F(\bar{0}, 0) = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{0}, 0) \neq 0$$

Entonces existen constantes $\delta > 0$ y $\eta > 0$, y una función de clase C^1 definida en:

$$\psi : \mu, \|\mu\| < \delta \rightarrow \mathbf{R}$$

tal que:

$$\psi(\bar{0}) = 0, F(\mu, \psi(\mu)) = 0$$

para $\|\mu\| < \delta$. Además, si hay un $(\mu_0, x_0) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}$ tal que $\|\mu_0\| < \delta$ y $|x_0| < \eta$, y que satisface la ecuación $F(\mu_0, x_0) = 0$ entonces $x_0 = \psi(\mu_0)$.

BIBLIOGRAFIA

GUCKENHEIMER, John. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer - Verlag, New York, 1983.

MARSDEN, . Hopf's bifurcations and its application. Springer -Verlag, New York, 1976.

PERKO, Laurence. Diferential Equations an Dynamical Systems. Springer - Verlag, New York, 1986.

HIRSCH, Morris W. and I. Smale. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press, 1987.

COURANT, John. Introducción al Cálculo y al análisis matemático volumen 2. Limusa editores. México, 1994.

DEVANEY, Robert L. An introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison- Wesley. 1989.