01168

DEDUCCIONES EQUIVALENTES DE LA FORMULA DE BLACK-SCHOLES

JOSE FRANCISCO MARTINEZ SANCHEZ

Tesis de Maestría en
Investigación de Operaciones

Departamento de Sistemas
México, D.F., 2000

Agradecimientos

A mis Padres y hermanos por su constante apoyo y motivación, a mi novia por su comprensión durante el desarrollo de esta tesis.

Agradezco de manera especial al Dr. Francisco Venegas Martínez por la dirección del presente trabajo de tesis.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION

La generación de portafolios con un balance adecuado entre riesgo y rendimiento es una tarea fundamental de la ingeniería financiera. Una clase importante de instrumentos que actúan como seguros contra contingencias financieras son las opciones. En un ambiente de extrema volatilidad, estos intrumentos proporcionan al inversionista un mecanismo para inmunizar el portafolio contra fluctuaciones adversas en los mercados financieros con bajos costos de transacción.

El surgimiento y crecimiento de las opciones en mercado financieros está marcado por varias fechas importantes: En 1973, se bursatilizan opciones sobre acciones en el Chicago Board of Trade (CBOT). En el mismo año, se presenta un avance teórico importante con la aparición de la fórmula de Black y Scholes. En 1979, debido a un cambio de estrategia de la Reserva Federal de los Estados Unidos de Norte América se generó un nivel de alta volatilidad en los mercados financieros, los agentes se vieron en la necesidad de buscar nuevas técnicas financieras para contrarrestar su exposición al riesgo. Los inversionistas observaron que el empleo de las opciones reducía en forma eficiente la exposición al riesgo mercado.

Una opción es un producto derivado que por el pago de una prima da a su tenedor (comprador) el derecho, más no la obligación, de comprar o vender el producto subyacente (bienes, acciones, índices bursátiles, divisas, futuros, etc.) a un precio determinado, llamado precio de ejercicio durante la vigencia del contrato y hasta la fecha de vencimiento. La contraparte, el emisor, de estos títulos tiene la obligación de vender o comprar el producto subyacente. En resumen, la utilidad de estos instrumentos consiste en asegurar un bien o servicio a través del pago de una prima cuyo monto dependerá de las probabilidades de que el bien o servicio experimente un cambio desfavorable para el interesado. Si esto ocurre, el interesado pierde únicamente el valor de la prima. En el contrato de opción se especifican cinco elementos:

1. Tipo de opción.- opción de compra o de venta (americana o europea).

2. Activo subyacente.- es el activo (acciones, divisas, tasas de interés, petróleo, oro, etc.).

3. Cantidad del activo negociado.- es la cantidad, en unidades, del activo subyacente que está estipulado que se puede comprar o vender por cada contrato de opción.

4. Fecha de vencimiento.- es la fecha en que se vence el contrato. Las fechas de vencimiento se fijan de acuerdo con el calendario trimestral, de tal manera que existen vencimientos cada tres meses, siendo el máximo vencimiento de nueve meses.

5. Precio de ejercicio.- es el precio al que se podrá ejercer el contrato, es decir, el precio al que se podrá comprar o vender el activo subyacente, según la opción sea de compra o de venta.

Hay otro elemento determinado por el mercado que no figura estipulado en el contrato, que es el precio a pagar por la opción, precio que se fija en el mercado organizado de opciones, siguiendo la ley de la oferta y la demanda. Este precio recibe el nombre de prima.

Es importante observar que en los contratos de opciones sólo se obliga al vendedor su cumplimiento, mientras que el comprador tiene el derecho (opción) de ejercer el contrato, pero no está obligado a ello. Esto permite al poseedor de una opción, no sólo a cubrirse ante posibles pérdidas sino también la posibilidad de obtener un beneficio en caso de que la evolución del precio del activo asociado a la opción sea favorable.

Por otro lado, las opciones, al igual que los futuros son contratos estandarizados, permitiendo que las transacciones se efectúen en mercados abiertos, organizados y con garantías de su cumplimiento. Esta característica genera liquidez para llevar a cabo distintas combinaciones y estrategias para ampliar y diversificar las carteras de inversión. A diferencia de los mercados de futuros, en las opciones, el comprador del contrato sólo está obligado al pago de una prima (precio de la opción) que recibirá el vendedor, quién aportará el margen inicial y de mantenimiento a la cámara de compensación, según la evolución del mercado.

La inversión en opciones también es una alternativa para especular (obtener ganancias extraordinarias asumiendo riesgos sobre tendencias inesperadas). Es también posible realizar operaciones de arbitraje aprovechando desequilibrios temporales en la prima de las opciones.

Las opciones financieras más comunes son las que tienen como subyacente a los títulos de capital (acciones), los índices de mercados accionarios, las divisas extranjeras, títulos de deuda pública y futuros. Se distinguen entre sí con base en tres criterios: tipo, clase y serie. El tipo nos indica si la opción es de compra (call) o de venta (put). Todas las opciones sobre el mismo subyacente que sean del mismo tipo determinan una clase. Las opciones que pertenezcan a una clase y que tengan la misma fecha de vencimiento formarán una serie. En las opciones se presentan dos posiciones, las cuales nos indican la postura que presenta cada una con respecto al contrato:

Posición larga.- es la postura que presenta el comprador (quien paga la prima) de una opción, sin importar si ésta es un opción de compra o de venta.

Posición corta.- es la postura que presenta el emisor o vendedor de la opción (recibe la prima) de compra o de venta.

Una vez firmado un contrato de opciones, existen tres formas de cerrarlo:

a. El comprador ejerce su derecho.

b. El comprador permite que pase la fecha de vencimiento sin ejercer su derecho, dándose por terminado el contrato.

c. El comprador puede vender la opción a un tercero, o el emisor puede recomprar la opción al comprador, es decir la opción se liquida.

El presente trabajo tiene como propósito establecer las condiciones y características inherentes al Modelo de Black-Scholes, para la valuación de opciones financieras. En forma detallada se analizan 2 métodos alternativos para llegar a la fórmula de Black-Scholes.

En el Capítulo 1 *Teoría del Interés*, se define el valor del dinero en el tiempo y oportunidades de arbitraje: los cuales constituyen una parte medular para entender la Teoría de Opciones.

En el Capítulo 2 *Tipos de Opciones*, se definen los conceptos básicos de la Teoría de Opciones, se analizan las características de un contrato y los diferentes tipos de contratos; lo anterior con la finalidad de que el lector se involucre con el lenguaje utilizado en el mercado de derivados.

En el Capítulo 3 *Comportamiento Aleatorio de los Activos*, se aborda de manera intuitiva el comportamiento aleatorio de los activos financieros, como son las acciones, el tipo de cambio e índices; se analizan los conceptos de rendimiento y riesgo como parte de la valuación de activos en tiempo discreto; asimismo, se presenta el proceso de Wiener para el caso continuo.

El Capítulo 4 *Cálculo Estocástico*, se discuten de manera simple e intuitiva algunos elementos del cálculo estocástico; en virtud de su importancia en el análisis financiero. Se analizan modelos estocásticos que cumplen con las propiedades de Markov y Martingala. Se utiliza la Variación Cuadrática junto con las propiedades anteriores para introducir el concepto de Movimiento Browniano. De manera similar, utilizando el Límite Cuadrado Medio se llega a la definición de la Integral Estocástica y en particular de la Integral de Itô.

El Capítulo 5 *Modelo de Black-Scholes* inicia con el análisis de un portafolio libre de riesgo formado por una posición larga de opciones y por una posición corta de cierta cantida dx del bien subyacente. De manera tal que el resultado es una ecuación formada por una parte determinística y otra estocástica; esta última se le conoce como el riesgo del portafolio, la cual es susceptible de eliminarse escogiendo adecuadamente la cantidad del subyacente. Si además suponemos que no existe posibilidad de arbitraje, se está en condiciones de establecer la ecuación de Black-Scholes, la cual es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica.

En el Capítulo 6 *Ecuaciones Diferenciales Parciales*, se estudian los conceptos básicos de las Ecuaciones Diferenciales Parciales; entre las que se encuentra la llamada ecuación de calor o de difusión.

En el Capítulo 7 *Valores Esperados y la Fórmula de Black-Scholes*, se calcula la fórmula de Black-Scholes en términos de valores esperados.

En el Capítulo 8 *La Ecuación de Calor y la Fórmula de Black-Scholes*, se transforma la ecuación diferencial parcial determinísta de Black-Scholes en la ecuación de difusión o de calor.

Finalmente, se presenta un conjunto de conclusiones en donde se resaltan las ventajas y limitaciones de los métodos analizados.

CAPITULO 1. TEORIA DEL INTERES

1.1 INTRODUCCION

El primer mercado organizado y reconocido de opciones, El Chicago Board Options Exchange (CBOE), comenzó su operación en 1973. Poco tiempo después, mercados similares surgieron en Europa, Asia y, más recientemente, en América Latina. En el caso mexicano, se cuenta con el Mercado Mexicano de Derivados S.A. de C.V. (MEXDER).

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de los mercados de opciones. En particular, se introducen los conceptos del valor del dinero en el tiempo y las condiciones de arbitraje, los cuales son fundamentales en el desarrollo de la teoría de opciones.

1.2 VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

Uno de los conceptos más útiles en finanzas es el del valor del dinero en el tiempo. Si hoy contamos con una cantidad M de dinero, podemos guardarlo en el ropero y sacarlo dentro de un cierto periodo de tiempo, o bien podemos invertirlo en la creación de una nueva empresa. Si esto último es muy riesgoso, podemos prestarlo a alguien que voluntariamente asuma el riesgo por nosotros, regresándonos dentro de un período nuestro dinero más una cantidad adicional, lo que llamamos interés. Sin embargo, surge otra fuente de riesgo, el riesgo crédito, es decir, el riesgo de que a quien le préstamos no cumpla en regresar M y/o el interés. Los bancos son una alternativa para prestarles nuestro dinero y reducir la exposición al riesgo, ya que ellos diversifican los recursos en diferentes proyectos, además de existir mecanismos regulados de protección para los ahorradores. Por otro lado, los bancos al tomar el dinero de mucha gente, pueden invertir en proyectos que un solo individuo no podría realizar. Asimismo, los bancos compiten por el dinero y dejan a las fuerzas de la oferta y la demanda fijar el nivel de la tasa de interés.

Supogamos, por el momento, que la tasa de interés es constante. Se dice que el interés es simple cuando éste se calcula en un solo periodo base sobre la cantidad que inicialmente se invirtió, mientras que el interés compuesto es aquel que se calcula sobre el interés y la inversión inicial en dos o más periodos base. Siendo este último, el que nos interesa. El interés compuesto se puede definir de dos formas, como interés compuesto discreto o interés continuamente capitalizable.

Supongamos que se invierte una cantidad M a una tasa de interés anualizada r, aquí el periodo base es un año. Al final de un año el retorno Q_1 de la inversión con interés simple, será:

$$Q_1 = M(1 + r). \tag{1.1}$$

Después de dos años, el retorno de la inversión, Q_2 con interés compuesto discreto está dado por

$$Q_2 = [M(1 + r)](1 + r) = M(1 + r)^2. \tag{1.2}$$

Después de n anõs se tendrá un retorno $Q_n = M(1+r)^n$, lo cual nos proporciona un ejemplo de interés compuesto discreto en n períodos.

Ahora supongamos que se reciben m pagos de interés durante el año a una tasa de r/m. Al final del un año se tendrá un retorno

$$R_1 = M\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m. \tag{1.3}$$

Si la frecuencia de estos m pagos de interés durante el año se incrementa y, al mismo tiempo, la tasa de interés disminuye, es decir, si $m \to \infty$, entonces estaremos hablando de intereses continuamente capitalizables Por lo tanto, de (1.3) se sigue que

$$R_1 = M\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = Me^{(m\log(1+\frac{r}{m}))} \to Me^r \tag{1.4}$$

cuando $m \to \infty$. En este caso, Me^r representa el retorno a un año con una tasa de interés continuamente capitalizable. De manera análoga, después de un tiempo t, tendremos el retorno

$$R_t = Me^{rt}. \tag{1.5}$$

1.3 ACCIONES

El desarrollo de las cotizaciones de los precios de las acciones está lejos de ser predecible. Si se pudiera predecir el desarrollo de los precios de las acciones en el futuro entonces nos haríamos ricos. Aunque muchas personas han dicho que pueden predecir los precios con algunos grados de variación en la exactitud, nadie ha dado un caso completamente convincente. En este trabajo se tomará el punto de vista de que los precios tienen grandes elementos de aleatoriedad. Esto no significa que no podemos modelar los precios de las acciones, sino que los modelos deberán ser hechos en un sentido probabilístico. Sin duda la realidad de la situación miente entre la predicción completa y la perfecta aleatoriedad, al menos por que ha habido muchos casos de manipulación del mercado donde grandes operaciones han movido los precios de las acciones en una dirección favorable a la persona que hizo el movimiento.

1.4 BIENES

Los bienes son usualmente productos de materias primas tales como metales preciosos, petróleo, alimentos, etc. Los precios de estos son impredecibles pero algunas veces muestran efectos estacionales, por la escacez del producto resultan precios altos. Los bienes son usualmente operados por gente que no necesita la materia prima. Por ejemplo, ellos podrán sólo especular en la dirección del precio del oro sin querer acumularlo. Casi todas las operaciones son hechas en los mercados de futuros, haciendo contratos para comprar o vender el bien en algún tiempo en el futuro. El trato es cerrado antes de que el bien sea entregado.

1.5 DIVISAS

Otra cantidad financiera que debemos discutir es la tasa a la que una moneda puede ser intercambiada por otra. Este es el mundo del mercado de cambios. Algunas monedas son de flotación fija y otras son de libre flotación. Sin embargo, las tasas de intercambio de una moneda a otra deberán ser consistentes entre ellas. Por ejemplo, si es posible intercambiar dólares por libras y libras por yenes, implica que existe una relación entre dólar/libra, libra /yen y dólar/yen en tasas de intercambio. Si esta relación queda fuera de línea entonces es posible hacer beneficios por arbitraje.

1.6 INDICES

Para medir como las acciones del mercado se mueven globalmente, se han desarrollado los índices del mercado de acciones. Un índice típico está hecho por la suma de los pesos de una selección o canasta de acciones representativas. La selección podría ser diseñada para representar el mercado en general, tal como el Standard & Poors 500 (S & P 500) en E.U. o el Financial Times Stock Exchange (FTSE 100) en Inglaterra.

1.7 VALORES DE RENTA FIJA

En depósitos a plazo fijo, el banco ofrecerá una tasa de interés para el periodo del depósito, 1 mes, 6 meses o 1 año. La tasa de interés no será necesariamente la misma para cada periodo, y generalmente entre más grande es el periodo más grande será la tasa de interés, aunque este no es siempre el caso. A veces, si se necesita tener inmediatamente acceso al dinero, entonces se estará expuesto a tasas de interés que cambiaran cada vez, las tasas de interés no son constantes. Estos dos tipos de pagos de interés, fijos y variables, son considerados en muchos instrumentos financieros.

1.8 BONOS CONTRA INFLACION

A la lista de los bonos emitidos por el gobierno de los E.U se agrega los bonos vinculados a la inflación. Estos han estado vigentes en Inglaterra desde 1981, y han probado ser exitosos para asegurar que el ingreso no se desgasta con la inflación. En inglaterra la inflación es medida por el RPI (Retail Price Index). Este índice es una medida de la inflación anual, usando una canasta de bienes y servicios, incluyendo pagos de amortización de interés. El índice es publicado mensualmente. Los cupones y el pago del principal de los bonos vinculados a la inflación estan relacionados con el incremento del RPI. Para el caso de México, se cuenta con instrumentos denominados en UDI's.

1.9 FORWARDS Y FUTUROS

Un contrato forward es un acuerdo donde una parte se compromete a comprar un activo a otra parte en un tiempo específico en el futuro y a un precio determinado. El efectivo no es intercambiado sino hasta la fecha de vencimiento del contrato. Los términos del contrato hacen una obligación de comprar el activo en la fecha de entrega. sin ninguna otra alternativa. El activo podría ser una acción. un bien o una moneda. Un contrato de futuros es semejante al de un forward. Los contratos de futuros son comunmente operados a tráves de una bolsa, la cual estandariza los términos del contrato. La pérdida o ganancia de una posición de futuros es calculada cada día y el cambio en el valor es pagado de una parte a la otra. Así que, con los contratos de futuros existe un pago gradual de fondos desde su inicio hasta el vencimiento. Los forwards y futuros tienen 2 usos principales, especulación y cobertura. Si se cree que el mercado está a la alza, se podría beneficiar entrando en un contrato de futuros o forward. Si la espectativa de mercado es correcta entonces mucho dinero cambiará de manos (diariamente o al vencimiento) a su favor. Esto es especulación y es muy riesgoso. La cobertura es por el contrario, libre de riesgo. Por ejemplo, si queremos pagar en yenes en 6 meses, pero vivimos en América y todos los gastos son en dólares, entonces se podrá hacer un contrato de futuros para asegurar un tipo de cambio por el monto de tus ingresos en yenes. Una vez que el tipo de cambio este garantizado, no se estará expuesto a fluctuaciones en el tipo de cambio dólar/yen.

1.9.1 UN EJEMPLO DE NO ARBITRAJE

Aunque no se ha discutido mucho sobre los contratos forwards y futuros, se probará con un ejemplo el principio de no arbitraje. Consideremos un contrato forward que nos obliga entregar un monto F, y a recibir al tiempo T el activo subyacente. La fecha hoy es t y el precio actual del activo es $S(t)$: este es el precio spot, el monto por el que podrí amos obtener inmediatamente el activo. Cuando lleguemos al vencimiento entregaremos el monto F y recibiremos el activo con valor $S(T)$, que no conoceremos hasta T.

Conocemos $F, S(t), t$ y T. Existe alguna relación entre ellos?. Podrá pensarse que no, ya que el contrato forward nos obliga a recibir el monto $S(T) - F$ al vencimiento y es desconocido. Sin embargo si obtenemos un portafolio especial de operaciones hoy, podremos eliminar toda la incertidumbre en el futuro. Esto se puede hacer como sigue: Entrar en un contrato forward. Esto no cuesta nada pero nos expone a la incertidumbre del valor del activo al vencimiento. Al mismo tiempo vendemos el activo, llamado posición corta. Ahora tenemos una cantidad $s(t)$ en efectivo debido a la venta del activo y un contrato forward. Solo que nuestra posición neta es cero. Ahora metemos el efectivo en el banco, para recibir intereses. Al vencimiento, entregamos el monto F y recibimos el activo. Esto cancela nuestra posición corta sea cual sea el valor $S(T)$. Al vencimiento hemos garantizado $-F$ en efectivo así como la cuenta en el banco. La palabra "garantizado "es importante por que enfatiza que es independiente del valor del activo. La cuenta bancaria contiene la inversión inicial $s(t)$ con intereses, esto tiene un valor al vencimiento de

$$S(t)e^{r(T-t)}.$$

Nuestra posición neta al vencimiento es entonces

$$S(t)e^{r(T-t)} - F.$$

Como nosotros iniciamos con un portafolio con valor cero y terminamos con un monto predecible, este debe ser cero. Podemos concluir que

$$F = S(t)e^{r(T-t)} \qquad (1.6).$$

Esta es la relación entre el precio spot y el precio forward. Es una relación lineal, el precio forward es proporcional al precio spot.

Si esta relación es violada entonces tendríamos una oportunidad de arbitraje. Imaginemos que F es menor que $S(t)e^{r(T-t)}$. Para explotarlo y hacer un beneficio de arbitraje libre de riesgo, se deben hacer las siguientes operaciones: Al vencimiento tendrémos $S(t)e^{r(T-t)}$ en el banco, un activo corto y un forward largo. La posición del activo se cancela cuando entregamos el monto F, dejando un beneficio de $S(t)e^{r(T-t)} - F$. Si F es mas grande que lo obtenido en (1.3) entonces entraríamos en la posición opuesta, llendo cortos en el forward. Otra vez se tiene un beneficio libre de riesgo. La experiencia nos dice que los inversionistas actuarán rápidamente para tomar ventaja de esta oportunidad, y en el proceso de precios se ajustará hasta eliminarla. En las bolsas de derivados es posible cotizar y negociar contratos de opciones sobre el futuro de algún subyacente.

CAPITULO 2. TIPOS DE OPCIONES

2.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior presentamos algunos conceptos básicos de finanzas. En éste trataremos con uno de los temas principales de la teoría de opciones. El capítulo no es técnico, sino más bien descriptivo, aquí se distinguen las características de un contrato de opciones más simples que se encuentran en el mercado, los cuales a su vez son los más comunes; asimismo, se da una explicación de la terminología estándar que se utiliza en el mercado.

Las opciones han existido desde hace mucho tiempo, pero sólo a partir del 26 de abril de 1973 fueron operadas en bolsa, fue entonces cuando los contratos de opciones se estandarizaron y se listaron en un mercado reconocido, el Chicago Board Options Exchange (CBOE). Inicialmente solo negociaban calls sobre 16 títulos de capital. Los puts fueron introducidos 4 años más tarde, en 1977. Actualmente, en los Estados Unidos de Norteamérica las opciones son operadas en el CBOE, el American Stock Exchange, el Pacific Stock Exchange y en el Philadelphia Stock Exchange. Alrededor del mundo existen cerca de 50 bolsas en donde se pueden operar opciones, entre las que se incluye el MEXDER.

2.2 OPCIONES

El dueño de un contrato forward o futuro, tiene la obligación de mantenerlo hasta el vencimiento del contrato, a menos que la posición sea cerrada antes del vencimiento, el dueño deberá tomar la posesión del bien, moneda o lo que cubra el contrato, sin importar cual sea el valor del activo.

Una opción simple proporciona al dueño el derecho de ejercer en el futuro a un precio previamente acordado, pero sin obligación. Por lo tanto, si la acción baja, no tenemos que comprarla.

Una opción de compra (también llamada call) es el derecho de comprar un activo particular por un monto acordado en un tiempo específico en el futuro.

Como un ejemplo, consideremos la siguiente opción de compra de la acción Iomega. Esta opción da el derecho de comprar una acción Iomega a un precio $E = 25$ en un mes. El precio de la acción hoy es de \$24.5 La cantidad de E que es la que pagarémos por la acción es llamada precio de ejercicio o strike price. La fecha en la que deberemos ejercer la opción, es llamada fecha de vencimiento o expiración. El activo en que se basa la opción es llamada activo subyacente.

Consideremos lo que podría pasar en el siguiente mes, hasta la fecha de vencimiento. Supongamos que el precio de la acción es E. ¿Qué haremos al vencimiento?. Podríamos ejercer la opción, entregando \$25 y recibiendo la acción. ¿Tiene esto sentido? No, porque la acción tiene un valor de tan solo \$24.5. Aún sin ejercer la opción y si realmente queremos la acción, la podríamos comprar en el mercado a \$21.5. Ahora, que pasa si el precio de la acción sube a \$29?, deberíamos ejercer la opción, pagando \$25 por una acción que vale \$29, lo que nos daría un beneficio de \$4.

Deberemos ejercer la opción al vencimiento si la acción está por arriba del precio de ejercicio y no la debemos de ejercer en caso contrario.

Si usamos S como el precio de la acción y E como el precio de ejercicio entonces el valor de la opción al vencimiento será

$$\text{máx}\,(S - E, 0). \tag{2.1}$$

Esta función sobre el activo subyacente es llamada función de pagos.

¿Por qué deberíamos escoger una opción? Claramente, si se tiene una opción de compra se querrá que la acción suba lo más posible. Entre más alto sea el precio de la acción, más grande será el beneficio. Nuestra decisión de comprar dependerá de cuanto cueste.

¿Qué pasa si se cree que la acción va a bajar; existe un contrato que podamos comprar y con el que nos podamos beneficiar?

Una opción de venta(también llamada put) es el derecho de vender un activo particular por un monto acordado a un tiempo específico en el futuro.

El dueño de una opción de venta desea que el precio de la acción baje, vendiendo el activo a un precio mayor. La función de pagos de una opción de venta es

$$\text{máx}\,(E - S, 0). \tag{2.2}$$

Ahora la opción es ejercida solo si la acción está por debajo del precio de ejercicio.

Podemos ver que entre mas grande sea el precio de ejercicio, será menor el precio de los calls y mayor el de los puts, ésto tiene sentido ya que el call permite comprar el subyacente al precio de ejercicio, así que entre menor sea el precio de ejercicio más valor tendrá la opción. Lo contrario es cierto para un put, ya que permite vender el subyacente al precio de ejercicio.

¿Qué debe pasar cuando el tiempo de vencimiento disminuya? La respuesta es que como cada vez hay menos tiempo para que el activo subyacente se mueva, entonces el valor de la opción convergerá a la función de pagos.

Una de las características más importantes de los calls y puts es que no tienen una dependencia lineal con el activo subyacente. A diferencia de los futuros los cuales dependen linealmente del subyacente. La no-linealidad es muy importante en el precio de las opciones, la aleatoriedad en el activo subyacente y la curvatura en el valor de la opción con respecto al activo estan íntimamente relacionados.

Los calls y puts son dos de las opciones más simples. Por esta razón también se les llama vainilla por la obicuidad de ese sabor. Existen muchas clases de opciones, algunas de las que se examinarán más adelante. Otro término que se usa para describir contratos que dependen de algunos activos fundamentales es el de derivados.

2.3 DEFINICION DE TERMINOS COMUNES

Las matemáticas financieras y de teoría de derivados tienen un argot especial. El argot proviene del mundo matemático y del mundo financiero. Generalmente, el argot financiero tiene como objetivo el de simplificar la comunicación y poner a todos en igualdad. Aquí se muestran algunas de las definiciones más comunes, algunas ya se han visto, otras se verán en el transcuso del libro.

Prima: La cantidad inicialmente pagada por el contrato.

Activo Subyacente: El instrumento financiero del cual depende el valor de la opción. Las acciones, bienes, monedas e índices serán denotados por S. El pago de la opción es definido como una función del activo subyacente al vencimiento.

Precio de Ejercicio: La cantidad por la que el activo subyacente puede ser comprado (call) o vendido (put). Será denotado por E. Esta definición se aplica realmente solo para calls y puts.

Fecha de Vencimiento: Es la fecha en la que la opción se puede ejercer o la fecha en la que la opción termina. Será denotado por T.

Valor Intrínseco: Es el pago que se recibiría si el precio del activo subyacente estuviera a su precio actual en la fecha de vencimiento.

Valor en el Tiempo: Cualquier valor en el que la opción esta por arriba de su valor intrínseco. La incertidumbre alrededor del valor futuro del activo subyacente significa que el valor de la opción es generalmente diferente del valor intrínseco.

Dentro del Dinero: Es una opción con valor intrínseco positivo. En una opción de compra es cuando el precio del activo está por arriba del precio de ejercicio, en una opción de venta es cuando el precio del activo está por abajo del precio de ejercicio.

Fuera del Dinero: Es una opción sin valor intrínseco solo con valor en el tiempo. En una opción de compra es cuando el precio del activo esta por abajo del precio de ejercicio, en una opción de venta es cuando el precio del activo esta por arriba del precio de ejercicio.

Sobre el Dinero:Es cuando el precio de ejercicio de un call y un put es igual al nivel actual del activo.

Posición larga:Es un monto positivo de alguna cantidad, o una exposición positiva a una cantidad.

Posición corta:Es un monto negativo de alguna cantidad, o una exposición negativa a una cantidad. Muchos activos pueden ser vendidos en corto, con algunas restricciones del tiempo antes de ser regresados.

2.4 EMISION DE OPCIONES

Se ha hablado sobre los derechos de quien compra una opción. Pero para cada opción que es vendida, alguien en alguna parte debe ser responsable si la opción es ejercida. Si tenemos una opción de compra tenemos el derecho de comprar en algún tiempo en el futuro una acción. ¿A quién se la vamos a comprar? Al final, la acción debe ser entregada por la persona que emitió la opción. El emisor de una opción es una persona que se compromete a entregar el activo subyacente, si la opción es un call, o comprarlo, si la opción es un put. El emisor es la persona que recibe la prima.

En la práctica, la mayoría de las opciones, son adquiridas a través de una bolsa, demanera que el comprador de una opción no conoce quién es el emisor. El que tiene la opción puede venderla a alguien mas, por medio de la Bolsa para cerrar su posición. Sin embargo, a pesar de quién sea el poseedor de la opción, o de quién la tenía, el emisor es la persona que tiene la obligación de entregar o comprar el subyacente.

El comprador de la opción obtiene derechos especiales mediante una prima, y un resultado incierto. El emisor recibe un pago garantizado por adelantado, pero tiene obligaciones en el futuro.

2.5 MARGEN

La emisión de opciones es muy riesgosa. La pérdida de comprar una opción es en el peor de los casos la prima inicial, la ganancia puede ser ilimitada. La ganancia para el emisor de la opción es limitada pero la pérdida podría ser ilimitada. Por esta razón, para cubrir el riesgo de default en el evento de un resultado desfavorable, las cámaras de compensación, que registran y liquidan las opciones, insisten en el depósito de un margen por parte del emisor de las opciones. Las cámaras de compensación actuan como contraparte en cada transacción.

El margen aparece de dos maneras, el inicial y de matenimiento. El margen inicial es la cantidad depositada al comenzar el contrato. El margen total deberá estar arriba de un margen de mantenimiento preestablecido. Si está por abajo de éste nivel entonces más dinero (o el equivalente en valores) deberán ser depositados. Los niveles de estos márgenes varían en cada mercado.

2.6 CONVENCIONES DE MERCADO

La mayoría de los contratos de opciones más simples son comprados y vendidos a través de bolsas. Estas bolsas hacen más simple y más eficiente la localización de compradores para vendedores. Parte de esta simplificación envuelve las convenciones sobre las características de los contratos como las fechas de vencimiento y precios de ejercicio viables. Por ejemplo, los calls y puts aparecen en series. Esto se refiere a la fecha de vencimiento y al precio de ejercicio. Típicamente una bolsa tiene tres fechas de vencimiento en las que se pueden negociar. Una vez estandarizado los contratos a operar a través de la bolsa se promueve la liquidez de los instrumentos.

2.7 VALOR DE LA OPCION ANTES DE LA FECHA DE VENCIMIENTO

El contrato nos da derechos específicos pero no obligaciones. Dos cosas son claras sobre el valor del contrato antes del vencimiento: el valor dependerá de qué tan alto esté el precio del activo hoy, y cuanto tiempo falta para la fecha de vencimiento.

Entre más grande sea el precio del activo hoy, se esperará que sea más grande al vencimiento de la opción y por tanto más valor tendrá una opción de compra. Por otro lado, una opción de venta deberá ser más barata por el mismo razonamiento. Entre mayor sea el tiempo para vencimiento, más tiempo tendrá el subyacente para subir o bajar de precio. Es eso bueno o malo si tenemos una opción de compra?. Aún más, entre más tengamos que esperar hasta obtener un pago, de menor valor será el pago simplemente por el valor del dinero en el tiempo.

El aspecto de encontrar un valor justo en el que nos enfocaremos por ahora es tomando en cuenta la dependencia en el precio del activo y el tiempo. Se usará c para denotar el valor de la opción y será una función del valor del activo subyacente S y el tiempo t. Se puede escribir $c(S,t)$ para el valor del contrato.

Conocemos el valor del contrato al vencimiento. Si usamos T para denotar la fecha de vencimiento entonces en $t = T$ la función c es conocida, y es la función de pagos. Por ejemplo si tenemos una opción de compra entonces

$$c(S,T) = \text{máx }(S - E, 0). \tag{2.3}$$

2.8 FACTORES QUE AFECTAN LOS PRECIOS DE LOS DERIVADOS

Los dos factores que afectan más a los precios de las opciones son el valor del activo subyacente S y el tiempo al vencimiento t. Estas cantidades son variables, que significa que ellas cambian inevitablemente durante la vida del contrato; si el subyacente no cambiará entonces el precio sería trivial.

Así mismo, son parámetros que afectan al precio de la opción la tasa de interés y el precio de ejercicio. La tasa de interés tendrá un efecto en el valor de la opción por medio del valor del dinero en el tiempo, debido a que el pago será recibido en el futuro; la tasa de interés también juega otro papel que veremos más adelante. Claramente, el precio de ejercicio es importante: entre más grande sea el precio de ejercicio en un call, menor será el valor del call.

Si tenemos una opción en acciones entonces su valor dependerá de los dividendos que serán pagados durante la vida de la opción. Existe un parámetro importante que no se ha mencionado, y que tiene un impacto mayor en el valor de la opción. El parámetro es la volatilidad. La volatilidad es una medida del monto de fluctuación del activo subyacente, una medida de aleatoriedad.

La definición técnica de la volatilidad es la desviación estándar anualizada del rendimiento de los activos.

La volatilidad es particularmente un parámetro interesante por que es muy difícil de estimar. Una vez estimada, nos encontramos con que nunca permanece constante y que es impredecible. Una vez que se empiece a pensar que la volatilidad sigue una caminata aleatoria entonces parece natural tratarla como una variable.

2.9 ESPECULACION Y APALANCAMIENTO

Si se va a comprar una opción que está muy fuera del dinero, quizás no cueste mucho, especialmente si no queda mucho tiempo para el vencimiento. Si la opción vence sin valor, entonces no se habría perdido mucho. Sin embargo, si hay un movimiento dramático en el subyacente, haciendo que la opción termine dentro del dinero, se podría tener un beneficio muy grande en relación con la inversión inicial. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

La fecha de hoy es 14 de abril y el precio de la acción de TelMex es de \$666. El costo de una opción de compra con precio de ejercicio de \$680 y vencimiento el 22 de agosto es de \$39. Se espera que la acción suba significativamente en agosto. ¿Qué se tiene que hacer para beneficiarme si se cumple la expectativa?.

Comprar la acción

Supongamos que compro la acción a un precio de \$666. Supongamos que a mediados de agosto la acción sube a \$730. Tendré una ganacia de \$64 por acción. Aún más importante es el rendimiento obtenido, que esta dado por

$$\frac{730-666}{666} \times 100 = 9.6\%$$

Comprar el call

Si se adquiere la opción de compra a \$39, entonces al vencimiento se podrá ejercer la opción call, pagando \$680 y recibiendo unas acciones con valor de \$730. He pagado \$39 y recibo \$50. Obteniendo un beneficio de \$11 por opción, en términos de rendimiento se tiene

$$\frac{\text{valor del activo al vencimiento} - \text{precio de ejercicio} - \text{costo del call}}{\text{costo del call} \times 100}$$

$$= \frac{730-680-39}{39} \times 100 = 28\%$$

Este es un ejemplo de apalancamiento. La opción fuera del dinero tiene un gran apalancamiento, un beneficio alto probable contra una pequeña inversión. La desventaja de este apalancamiento es que en una opción de compra es más probable que permanezca fuera del dinero y se pierda toda la inversión. Si la acción de TelMex permanece a $666 entonces la inversión tendrá el mismo valor pero en la opción se pierde el 100%.

Los contratos con un apalancamiento alto son muy riesgosos para el emisor de la opción. El comprador sólo arriesga una cantidad pequeña, aunque es muy probable que la pierda, su pérdida está limitada a la prima inicial. Pero el emisor arriesga una gran pérdida contra la ganancia de un beneficio pequeño. El emisor tiene que pensarlo dos veces antes de hacer el trato a menos que pueda compensar el riesgo, comprando otros contratos. La compensación del riesgo al comprar otros contratos relacionados se conoce como cobertura.

El apalancamiento explica una de las razones de comprar opciones. Si se tiene un fuerte presentimiento acerca de la dirección del mercado entonces los derivados pueden ser explotados para obtener mejores rendimientos, si se está en lo correcto al comprar o vender el subyacente.

2.10 EJERCER ANTES DE LA FECHA DE VENCIMIENTO

Las opciones simples descritas anteriormente son ejemplos de opciones europeas porque el ejercicio sólo es permitido hasta la fecha de vencimiento. Algunos contratos permiten ser ejercidos en cualquier fecha antes del vencimiento, estos son llamados opciones americanas. Las opciones americanas dan al poseedor más derechos que la equivalente europea, y por lo tanto tienen mayor valor. El principal punto de interés en las opciones americanas es cuando ejercer la opción.

CAPITULO 3. COMPORTAMIENTO ALEATORIO DE LOS ACTIVOS

3.1. INTRODUCCION

En este capítulo se describe un modelo simple en tiempo continuo para acciones y otros instrumentos financieros, inspirado por el experimento del lanzamiento de una moneda. Esto nos lleva al mundo del cálculo estocástico y de los procesos de Wiener. A pesar de que existe una gran cantidad de teoría detrás de las ideas que se describen, se explicará todo de la manera más simple y accesible posible. Modelaremos el comportamiento de las acciones, tipos de cambio y bienes básicos, pero las ideas se aplican dentro del mundo de los instrumentos de renta fija como veremos en la sección cuatro.

3.2. SIMILITUDES ENTRE ACCIONES, TIPOS DE CAMBIO, BIENES BASICOS E INDICES

Cuando se invierte en algo, ya sea en una acción, un bien básico, una pieza de arte o una carrera de caballos, la preocupación principal es tener un retorno satisfactorio sobre la inversión. Se entiende por retorno el incremento porcentual en el valor de la acción, junto con los dividendos acumulados en el mísmo período.

$$\text{Retorno} = \frac{\text{Cambio en el valor de la acción + flujos de efectivo acumulados}}{\text{Valor original de la acción}} \tag{3.1}$$

Conviene diferenciar entre el porcentaje o crecimiento relativo y el crecimiento absoluto. Supongamos que se puede invertir en cualquiera de dos acciones, ambas incrementan su valor en un promedio de 10, la acción A tiene un valor de 100 y la acción B vale actualmente 1.000. Claramente, la primera es una mejor inversión: al final del año, la acción A valdrá probablemente 110 (si el pasado sirve de algo) y la acción B aumenta a 1,010. Ambas subieron 10, pero la acción A tuvo un incremento del 10% y la B del 1% únicamente. Si se tienen 1,000, sería mejor invertir en 10 acciones A que en una B. Esto demuestra que cuando modelamos sobre acciones se debe tomar en cuenta el retorno. Con respecto a esto, todas las acciones, tipos de cambio, bienes básicos y los índices de los mercados de capitales pueden ser tratados de manera similar. ¿Que retorno se espera obtener de ellos?

Parte del trabajo de estimación de retornos para cada acción es calcular que tanta incertidumbre existe en el valor de la acción. En la siguiente sección se muestra que la aleatoriedad juega un papel importante dentro de los mercados financieros, y se empieza a construir un modelo para los retornos de las acciones incorporando dicha aleatoriedad.

3.3. ANALIZANDO RETORNOS

Si se denota el valor de la acción en el día i por S_i entonces el retorno del día i al día $i+1$ esta dado por

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}. \tag{3.2}$$

Se han ignorado los dividendos en este caso. Esto se permite, especialmente porque se pagan únicamente de dos a cuatro veces por año. La media de la distribución de retornos es

$$\bar{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} R_i. \tag{3.3}$$

y la desviación estándar muestral es

$$\sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(R_i - \bar{R})^2}. \tag{3.4}$$

donde M es el número de retornos dentro de la muestra (uno menor que el número de precios de activos).

Suponiendo que los retornos empíricos son similares a una Normal estándar, entonces se asumen éstos como una variable aleatoria, distribuidos Normalmente con media y desviación estándar conocidas distintas de cero:

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \text{media} + \text{desviación estándar} \times \phi \tag{3.5}$$

donde ϕ es una variable normal estándar.

3.4. ESCALAS DE TIEMPO

Se denota al intervalo o incremento de tiempo por dt. La media de los retornos es proporcional al tamaño de dicho intervalo. Esto es, entre más largo es el tiempo en cada observación de la muestra, mayor será el movimiento que la acción tendrá en promedio.

$$\text{Media} = \mu dt. \tag{3.6}$$

para alguna μ la cual se supone que es constante.

Si por el momento no se considera la aleatoriedad, nuestro modelo es simplemente

$$\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu dt. \tag{3.7}$$

rescribiendo se obtiene que

$$S_{i+1} = S_i(1 + \mu dt). \tag{3.8}$$

Si la acción comienza en S_0 en el tiempo $t = 0$ entonces después de transurrido un período de tiempo dt tenemos

$$S_1 = S_0(1 + \mu dt). \tag{3.9}$$

Después de transcurridos dos períodos de tiempo, $2dt$

$$S_2 = S_1(1 + \mu dt) = S_0(1 + \mu dt)^2, \tag{3.10}$$

y después de M intervalos de tiempo $t = M$, $dt = T$

$$S_M = S_0(1 + \mu dt)^M. \tag{3.11}$$

Esto es entonces

$$S_M = S_0(1 + \mu dt)^M = S_0 e^{MLn(1+\mu dt)} \approx S_0 e^{\mu M dt}. \tag{3.12}$$

El anterior resultado es importante por dos razones:

Primero, sin aleatoriedad la acción presenta un crecimiento exponencial, como el dinero en el banco. Segundo, el modelo es significativo cuando los intevalos de tiempo tienden a cero. Si hubiera elegido escalar la media de la distribución de los retornos con cualquier otra potencia de dt hubiera resultado un modelo trivial ($S_T = S_0$) o valores infinitos de la acción.

El segundo punto puede llevarnos a la alternativa de ajustar al componente aleatorio de los retornos. ¿Cómo se ajusta la desviación estándar de los retornos con el incremento de tiempo dt? De nuevo, considere qué pasa después de que T/dt incrementos de tiempo, cada uno de tamaño dt (i.e. después de un tiempo total T). Dentro de la raíz cuadrada en la expresión (3.4) existen un gran número de términos, T/t. Para que la desviación estándar sea finita mientras dt tiende a cero, cada uno de los elementos debe ser $O(dt)$. Como cada término es el cuadrado de un retorno, la desviación estándar de los retornos de la acción sobre un periodo de tiempo dt debe ser $O(dt^{\frac{1}{2}})$, $O(h)/h \to cte$ $.cuando$ $h \to 0$:

$$\text{Desviación estándar} = \sigma dt^{\frac{1}{2}}, \tag{3.14}$$

donde σ es un parámetro que mide la cantidad de aleatoriedad. Entre más grande es este término, más incierto es el retorno de la acción. Por el momento se asumirá como una constante. Incluyendo esto dentro del modelo

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu dt + \sigma \phi dt^{\frac{1}{2}}, \tag{3.15}$$

Se puede escribir la ecuación (3.15) como

$$S_{i+1} - S_i = \mu S_i dt + \sigma S_i \phi dt^{\frac{1}{2}}. \tag{3.16}$$

El lado izquierdo de la ecuación es el cambio en el precio de la acción del tiempo i al $i+1$. La parte de la derecha es el "modelo ". Podemos pensar en esta ecuación como el modelo para la caminata aleatoria del precio. Se conoce el valor de la acción hoy, pero el valor que tendrá mañana es desconocido. De acuerdo con (3.16), se distribuye con respecto al valor presente.

3.4.1. TASA DE CAMBIO

El parámetro μ se denomina tasa de cambio, el cambio esperado o la tasa de crecimiento del activo. Estadísticamente, es difícil de medir ya que la media se ajusta al parámetro δt y puede estimarse con

$$\mu = \frac{1}{M dt} \sum_{i=1}^{M} R_i. \tag{3.17}$$

La unidad de tiempo que generalmente se utiliza es el año, en donde a μ se le denomina la tasa de cambio anualizada.

3.4.2. VOLATILIDAD

Al parámetro σ se le conoce como la volatilidad de la acción, y se estima mediante

$$\sqrt{\frac{1}{(M-1)dt} \sum_{i=1}^{M} (R_i - R)^2}. \tag{3.18}$$

De nuevo, la volatilidad se da en términos anualizados.

La volatilidad es el valor más importante de la teoría de derivados. Debido a su ajuste con el tiempo, la tasa y la volatilidad tienen distintos efectos en la trayectoria del activo. La tasa no es aparente en periodos cortos de tiempo donde domina la volatilidad. En periodos más largos de tiempo, como por ejemplo décadas, la tasa de volatilidad adquiere mayor importancia.

3.5. PROCESO DE WIENER

Hasta ahora, tenemos un modelo que le permite a la acción tomar cualquier valor después de un intervalo de tiempo. Este es un avance pero aún no se ha llegado a tiempo contínuo.

Todavía tenemos un modelo de tiempo discreto. Esta sección es una breve introducción al tiempo contínuo de ecuaciones como (3.15).

Se puede pensar en dX como una variable aleatoria determinada por una distribución Normal con media cero y varianza dt:

$$E[dX] = 0 \;\; \text{y} \;\; E[dX^2] = dt.$$

Esto no es exactamente lo que se pretende, pero esta cercano a la idea correcta. A esto se le denomina un proceso de Wiener. El punto importante es que podemos construir una teoría en tiempo contínuo utilizando un porceso de Wiener en lugar de distribuciones Normales y tiempo discreto.

3.6. EL MODELO MAS ACEPTADO PARA ACCIONES, TIPOS DE CAMBIO, BIENES BASICOS E INDICES

Nuestro modelo de precios de acciones en tiempo contínuo, utilizando la notación de un proceso de Wiener, se puede escribir como

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX. \tag{3.19}$$

Esta es la primera ecuación diferencial estocástica. Es un modelo en tiempo contínuo de precios de los activos. Este es el modelo más aceptado para acciones, tipo de cambio, bienes básicos e índices, y el fundamento de la teoría financiera.

CAPITULO 4. CALCULO ESTOCASTICO

4.1. INTRODUCCION

El cálculo estocástico es una herramienta útil en el desarrollo de modelos matemáticos para el estudio de los fenómenos financieros. Esto se debe al comportamiento aleatorio que las variables financieras presentan. El objetivo de este capítulo es presentar en forma accesible e intuitiva dicha herramienta de tal manera que, al final del mismo, el lector pueda utilizar las técnicas del cálculo estocástico en el análisis financiero.

La mayor parte de los artículos en el campo de las finanzas tiene un contenido importante en herramientas matemáticas. El rigor matemático es la tendencia que prevalece en la investigación en campos jovenes como son las matemáticas en finanzas. Sin embargo, la intuición tiene que acompañar al marco teórico y metodológico.

4.2. MOTIVACION

Considere el experimento aleatorio de lanzar una moneda. El conjunto de posibles resultados, o espacio muestral, es $\Omega = \{a, s\}$, donde a=águila y s=sol. Cada vez que caiga águila, se gana 1, y cada vez que caiga sol, se pierde 1. Suponga que se realizan N repeticiones independientes del experimento. Sea X_i la variable aleatoria que representa la ganancia o pérdida en el i-ésimo lanzamiento. Es decir, $X_i(a) = 1$ y $X_i(s) = -1$. Suponga que $P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = 1/2$. Este experimento puede verse también como una caminata aleatoria discreta, en donde se da un paso de longitud 1 a la derecha y un paso de longitud 1 a la izquierda. En este caso, se cumple que:

$$\mathrm{E}[X_i] = 0, \quad \mathrm{Var}[X_i] = \mathrm{E}\left[X_i^2\right] = 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{E}[X_iX_j] = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

En este ejemplo, no importa si las esperanzas son condicionales con respecto al pasado o no. En otras palabras, si salen i, águilas seguidas, donde $i < m$, ésto no afectará el resultado del lanzamiento $i + 1 \leq m$.

Si se denota a S_n como la ganancia acumulada hasta el n-ésimo lanzamiento, entonces se puede escribir

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{4.1}$$

donde, el valor inicial S_0 es cero. En este caso, la esperanza o la varianza de S_n, sí importa el pasado. La esperanza y varianza antes de que se lleve a cabo el experimento son:

$$\mathrm{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[X_i\right] = 0,$$

y

$$E\left[S_n^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{1<i<j<n} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^2\right] = n.$$

Por lo tanto, $\text{Var}[S_n] = n$.

Suponga ahora que ya han ocurrido $n-1$ lanzamientos. Claramente, se puede utilizar esta información para decir algo acerca de la esperanza de la ganancia acumulada en el lanzamiento n. La esperanza condicional de S_n dados los $n-1$ primeros lanzamientos es

$$E[S_n|X_1, \ldots, X_{n-1}] = S_{n-1}. \tag{4.2}$$

En efecto,

$$P\{S_n = S_{n-1} + 1|X_1, \ldots, X_{n-1}\} = P\{S_n = S_{n-1} + 1\} = \frac{1}{2},$$

y

$$P\{S_n = S_{n-1} - 1|X_1, \ldots, X_{n-1}\} = P\{S_n = S_{n-1} - 1\} = \frac{1}{2},$$

Por lo tanto,

$$\text{E}[S_n|X_1, \ldots, X_{n-1}] = \frac{1}{2}(S_{n-1} + 1) + \frac{1}{2}(S_{n-1} - 1) = S_{n-1}.$$

Note que

$$\text{E}[S_1|S_0] = S_0 = 0, \quad E[S_2|S_0, S_1] = E[S_2|S_1] = S_1,$$

y

$$E[S_3|S_0, S_1, S_2] = E[S_3|S_2] = S_2.$$

Finalmente, se puede verificar que

$$P\{S_n|S_1, \ldots, S_{n-1}\} = P\{S_n|S_{n-1}\} = \frac{1}{2}.$$

4.3. PROPIEDADES DE MARTINGALAS Y DE MARKOV

Los resultados de la sección anterior son muy importantes, la esperanza condicional de la variable aleatoria S_n dados eventos pasados depende únicamente del valor inmediato anterior S_{n-1}. Esto significa que la esperanza condicional de las ganancias en el siguiente lanzamiento, es únicamente la cantidad con que se cuenta en este momento. En este caso, se dice que el juego es justo. A esto se le conoce como la propiedad de Martingala. Por otro lado, el juego no tiene memoria mas allá de donde se encuentra en este momento. Esto se le llama propiedad de Markov. Muchos de los modelos financieros que se presentarán tienen la propiedad de Markov. Esto es de gran importancia para modelos en finanzas, como se verá mas adelante.

4.4. CAMINATA ALEATORIA

Considere el proceso estocástico definido para cada $n \in N$. Considere n lanzamientos, la ganancia estandarizada del primer, segundo y n-ésimo lanzamiento, respectivamente, se definen como:

$$W_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{X_1}{\sqrt{n}}.$$

$$W_n\left(\frac{2}{n}\right) = W_n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{X_2}{\sqrt{n}}.$$

$$\vdots$$

$$W_n(1) = W_n\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{X_n}{\sqrt{n}}.$$

Claramente,

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}. \tag{4.3}$$

Donde $S_i = X_1 + X_2 + ... + X_i$ Observe que

$$W_n\,(1) = \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}}. \tag{4.4}$$

Por el Teorema del Límite Central, cuando $n \to \infty$

$$\frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

4.5. VARIACION CUADRATICA

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(W_n\left(\frac{i}{n}\right) - W_n\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S_i}{\sqrt{n}} - \frac{S_{i-1}}{\sqrt{n}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S_i - S_{i-1}\right)^2.\end{aligned}$$

Pero

$$|S_i - S_{i-1}| = 1.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(W_n\left(\frac{i}{n}\right) - W_n\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)^2 = 1. \tag{4.5}$$

4.6. MOVIMIENTO BROWNIANO

En la sección anterior no se consideró el tiempo, de aquí en adelante el tiempo t entre lanzamientos, jugará un papel preponderante. los N lanzamientos se llevan a cabo en un tiempo t, de esta manera cada lanzamiento se realizará cada t/N unidades de tiempo. El monto de la apuesta también es modificado, ya no será 1, sino $\sqrt{t/N}$.

Este nuevo experimento tiene las propiedades de Markov y de Martingala. La variación cuadrática media en N lanzamientos es ahora

$$\sum_{n=1}^{N}\left(W_N\left(\frac{nt}{N}\right)-W_N\left(\frac{(n-1)t}{N}\right)\right)^2. \tag{4.6}$$

La ganancia en el primero, segundo y n-ésimo lanzamiento es:

$$\begin{aligned} W_N\left(\frac{t}{N}\right) &= X_1\sqrt{\frac{t}{N}},\\ W_N\left(\frac{2t}{N}\right) &= W_N\left(\frac{t}{N}\right)+X_2\sqrt{\frac{t}{N}}=\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{N}}\right)\sqrt{t},\ ;\\ &\vdots\\ W_N(t) &= \frac{S_N}{N}\sqrt{t}\to\mathcal{N}(0,t)\ \text{ cuando }\ N\to\infty \end{aligned} \tag{4.7}$$

es decir, $W_N(t)$ converge en distribución a $W(t)$ que es normal con media cero y varianza uno. Ahora considerando el tiempo, se tiene

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N}\left(W_N\left(\frac{nt}{N}\right)-W_N\left(\frac{(n-1)t}{N}\right)\right)^2\\ &=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{S_n}{\sqrt{N}}\sqrt{t}-\frac{S_{n-1}}{\sqrt{N}}\sqrt{t}\right)^2\\ &=\frac{t}{N}\sum_{n=1}^{N}(S_n-S_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Pero

$$|S_n-S_{n-1}|=1.$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(W_N\left(\frac{nt}{N}\right)-W_N\left(\frac{(n-1)t}{N}\right)\right)^2=t. \tag{4.8}$$

Las propiedades del movimiento Browniano son las siguientes:

- Finito: Cualquier otra escala de las apuestas o "incrementos "con intervalos de tiempo hubiesen resultado en una caminata aleatoria al infinito en un tiempo finito, o un límite en el cual no existe ningún movimiento. Es importante que los incrementos se trazan con la raíz cuadrada de los intervalos de tiempo.
- Contínuo: Las trayectorias son contínuas, no existen discontinuidades. El movimeinto Browniano es el límite en tiempo contínuo de la caminata aleatoria discreta.
- Markov: La distribución condicional de la información dada $X(t)$ hasta $\tau < t$ depende solo de $X(\tau)$.
- Martingala: Dada la información hasta $\tau < t$, la esperanza condicional de $X(t)$ es $X(\tau)$.
- Variación cuadrática: Si dividimos del tiempo 0 al t en una partición con $n+1$ puntos de partición $t_n = \frac{nt}{N}$ entonces

$$\sum_{n=1}^{N} (W(t_n) - W(t_{n-1}))^2 \to t.$$

(casi donde quiera)

- Normalidad: Sobre incrementos de tiempo finitos de t_{n-1} a t_n, $W(n_i) - W(t_{n-1})$ se distribuye como una Normal con media cero y varianza $t_n - t_{n-1}$.

Habiendo generado la idea y las propiedades del movimiento Browniano a partir de una serie de experimentos, podemos descartar estos últimos para dejar al movimiento Browniano definido por sus propiedades. Estas propiedades son de gran importancia en los modelos financieros.

4.7. INTEGRACION ESTOCASTICA

Se define una integral estocástica como

$$\int_0^t f(\tau)\,dW(\tau) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(t_{n-1})(W(t_n) - W(t_{n-1})) \tag{4.9}$$

con $t_n = \frac{nT}{N}$.

Antes de manipular esto de alguna manera o discutir sus propiedades, vamos a establecer que la función $f(t)$ que se va a integrar está evaluada en la suma del lado izquierdo, en el punto t_{n-1}. Será de gran importancia que cada evaluación de funciones no se conozca el incremento aleatorio que lo multiplica, i.e. la integración es no anticipada. En términos financieros, veremos que realizamos acciones de como escoger un portafolio y sólo entonces si el precio de la acción presenta algún movimiento. Esta elección de integración es natural en finanzas, asegurando que no utilizamos información acerca del futuro de nuestras acciones presentes.

4.8. LIMITE EN EL ERROR CUADRADO MEDIO

Sea

$$V_N = \sum_{n=1}^{N} W(t_{n-1})[W(t_n) - W(t_{n-1})].$$

Es decir, que la variable W es evaluada en el tiempo t_{n-1} en lugar del t_n. En el caso de la integral de Riemann-Stieltjes, se obtiene el mismo resultado tomando cualquiera de los puntos extremos. Sin embargo, en el caso de la integral estocástica, los resultados pueden cambiar dependiendo de si se usa $W(t_n)$ o $W(t_{n-1})$. Como se notará mas adelante, es condición fundamental de la integral de Itô, que los integrandos sean no anticipados. V_n es una variable aleatoria, por tanto para calcular el límite, es necesario utilizar una aproximación probabilística, es decir, el límite cuadrado medio. Entonces

$$\lim_{N\to\infty} E[V_N - V]^2 = 0.$$

O equivalentemente

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\sum_{n=1}^{N} W(t_{n-1})\Delta W(t_n) - V\right]^2 = 0,$$

donde por simplicidad

$$\Delta W(t_n) = W(t_n) - W(t_{n-1}).$$

Enseguida se calcula explícitamente el anterior límite.

Se pretende calcular el límite de la variable aleatoria V paso a paso, con la finalidad de aclarar el significado de la integral de Itô como el límite cuadrado medio de una suma aleatoria. El primer paso consiste en manipular los términos de V_n. Nótese que para cualquier a y b se tiene que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

o

$$ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2].$$

Aplicando esta transformación para $a = W(t_{n-1})$ y $b = \Delta W(t_n)$ se tiene que

$$V_N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}[(W(t_{n-1}) + \Delta W(t_n))^2 - W(t_{n-1})^2 - \Delta W(t_n)^2].$$

Pero

$$\Delta W(t_n) + W(t_{n-1}) = W(t_n).$$

Lo cual produce

$$V_N = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{N} W(t_n)^2 - \sum_{n=1}^{N} W(t_{n-1})^2 - \sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2]\right].$$

El primer y segundo sumando de la ecuación anterior son los mismos excepto por el primer y último elemento. Cancelando términos similares y notando que $W(_0) = 0$, por definición:

$$V_N = \frac{1}{2}\left[W(T)^2 - \sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2\right].$$

Notese que $W(T)$ es independiente de n, y por lo tanto, el límite cuadrado medio de V_N es determinado por el límite cuadrado medio del término $\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2$. En otras palabras, se requiere encontrar la Z en

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2 - Z\right]^2 = 0.$$

En esta expresión, existen dos cuadrados. Uno pertenece a la misma variable aleatoria y el otro al tipo de límite que se esta usando. Por lo tanto, el límite contendrá potencias de cuatro en $\Delta W(t_n)$. Primero calculamos la esperanza:

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2\right].$$

Esta constituye un buen candidato para Z. Tomando las esperanzas:

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2\right] = \sum_{n=1}^{N} E[\Delta W(t_n)^2] = \sum_{i=1}^{n}(t_n - t_{n-1})$$

lo cual se simplifica a

$$\sum_{n=1}^{N}(t_n - t_{n-1}) = T.$$

Si ahora se usa lo anterior para sustituir a Z, podemos evaluar la esperanza:

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2 - T\right]^2 =$$

$$E\left\{\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^4 + 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{j<n}^{N}[\Delta W(t_n)^2][\Delta W(t_j)^2] + T^2 - 2T\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2\right\}.$$

Ahora se considera el lado derecho de la ecuación anterior, y por ser un proceso de Wiener los incrementos son independientes,

$$E\left[\Delta W(t_n)^2 \Delta W(t_j)^2\right] = (t_n - t_{n-1})(t_j - t_{j-1})$$

Y

$$E\left[\Delta W(t_n)^4\right] = 3(t_n - t_{n-1})^2.$$

Se obtiene

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2 - T\right]^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} 3(t_n - t_{n-1})^2$$

$$+2\sum_{n=1}^{N}\sum_{j<n}^{N}(t_n - t_{n-1})(t_j - t_{j-1})$$

$$+T^2 - 2T\sum_{n=1}^{N}(t_n - t_{n-1}).$$

Ahora se utiliza el echo de que $(W(t_n) - W(t_{n-1})) = h$, para toda i, debido a que todos los intervalos son del mismo tamaño, se tiene lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{N} 3(W(t_n) - W(t_{n-1}))^2 = 3Nh^2$$

$$2\sum_{n=1}^{N}\sum_{j<n}^{N} W(t_n) - W(t_{n-1})W(t_j) - W(t_{j-1}) = N(N-1)h^2$$

y

$$T^2 - 2T\sum_{n=1}^{N} W(t_n) - W(t_{n-1}) = -T^2 = -N^2h^2.$$

Juntando lo anterior, tenemos

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2 - T\right]^2 = 3Nh^2 + N(N-1)h^2 - N^2h^2,$$

lo cual significa que

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2 - T\right]^2 = 2Nh^2 = 2Th.$$

Esto implica que cuando $N \to \infty$, el tamaño de los intervalos tienden a cero, y

$$\lim_{h\to 0} E\left[\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2 - T\right]^2 = \lim_{h\to 0} 2Th = 0.$$

Así, el límite cuadrado medio de $\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2$ es T. Regresando a V_N

$$V_n = \frac{1}{2}\left[W(T)^2 - \sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2\right].$$

se encuentra el límite cuadrado medio de V_N usando el límite cuadrado medio de

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta W(t_n)^2$$

para obtener:

$$\lim_{N \to 0} E[V_N]^2 = \frac{1}{2}\left[W(T)^2 - T\right].$$

El término en el lado derecho es la Integral de Itô:

$$\int_0^T W(t_{n-1}) dW(t_{n-1}).$$

Es claro que la Integral de Itô es una expresión diferente que el cálculo estándar. La Integral de Itô es dada por

$$\int_0^T W(t_{n-1}) dW(t_{n-1}) = \frac{1}{2}\left[W(T)^2 - T\right].$$

Para el caso de la integral de Riemman, no existe el término T. Este es un ejemplo donde la Integral de Itô es calculada explícitamente utilizando el límite cuadrado medio. Se encontró que la integral de Itô es el límite de la variable aleatoria $\frac{1}{2}[W(T)^2 - T]$.

CAPITULO 5. MODELO DE BLACK-SCHOLES

5.1 INTRODUCCION

En este capítulo se inicia con un modelo de ecuaciones diferenciales estocásticas para explicar la correlación que existe entre una acción y una opción y con el fin de diseñar un portafolio libre de riesgo. Supondremos que no existe arbitraje al igualar los retornos de los portafolios con la tasa libre de riesgo.

Los argumentos se modifican de forma trivial para incorporar dividenos sobre el precio del activo subyacente. así como valuar opciones sobre bienes básicos y divisas, al igual que opciones sobre futuros.

5.2 UN PORTAFOLIO LIBRE DE RIESGO

En el capítulo 2 se describió algunas características de las opciones y de los mercados de opciones. Se introdujo la idea del call(compra) y del put(venta) de las opciones, entre otros. El valor de un call (compra) de una opción es claramente una función de varios parámetros en el contrato, tales como, el precio de ejercicio E y al plazo de vencimiento $T - t$, donde T es la fecha de vencimiento y t es la fecha corriente. El valor también dependerá de propiedades de la activo subyacente, tales como su precio y sus cambios en rendimiento y volatilidad, así como la tasa de interés libre de riesgo. Podemos escribir el valor de una opción como:

$$c(S, t; \sigma, \mu; E, T; r) \tag{5.1}$$

Note que los puntos y coma separan los diferentes tipos de variables y parámetros:

- S y t son variables;
- σ y μ son parámetros asociados con el precio de la activo o bien subyacente;
- E y T son parámetros asociados con el detalle del contrato en particular;
- r es un parámetro asociado con la unidad monetaria en el cual el activo esta tasado.

No mencionaremos todos los parámetros, excepto cuando sea importante. Por el momento utilizaremos $c(S, t)$ para denotar el valor de la opción.

Una simple observación es que el precio de la opción subirá si el precio del subyacente sube y bajará si el subyacente baja. Esto es claro porque un call tiene un mayor pago a medida que aumente el valor del subyacente al vencimiento. Esto es un ejemplo de correlación ente dos instrumentos financieros, en este caso la correlación es positiva. Un put y su subyacente tienen una correlación negativa.

Utilizaremos Π para denotar el valor de un portafolio con una posición larga de opciones y con una posición corta de alguna cantidad Δ del bien subyacente

$$\Pi = c(S, t) - \Delta S \tag{5.2}$$

El primer término de la derecha es la opción y el segundo término es la posición corta de alguna cantidad Δ. Note el signo negativo del segundo término. Por el momento Δ la tomaremos como una constante escogida por nosotros. Se asumirá que el bien subyacente sigue un proceso estocástico lognormal.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX. \tag{5.3}$$

Es natural preguntar como el valor del portafolio cambia a través del tiempo de t a $t + dt$. El cambio en el valor del portafolio esta dado por una parte por los cambios en el valor de la opción y por otra en el cambio del subyacente.

$$d\Pi = dc - \Delta dS. \tag{5.4}$$

Note que Δ no cambió durante un período; no podemos anticiparnos al cambio en S. Del lema de Itô tenemos:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial c}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}dt. \tag{5.5}$$

Por tanto el cambio en el precio del portafolio esta dado por:

$$d\Pi = \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial c}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}dt - \Delta dS. \tag{5.6}$$

5.3 ELIMINACION DEL RIESGO: DE LA COBERTURA DELTA

La ecuación(5.6) contiene dos tipos de términos, el determinístico y el aleatorio. Los términos determinísticos contienen dt y el aleatorio dS. Pretendamos por el momento que conocemos el valor de c y sus derivadas entonces conocemos todo acerca de (5.6) exccepto el valor de dS. Y esta cantidad nunca la conoceremos por adelantado.

El término aleatorio es el riesgo del portafolio. Se puede reducir o eliminar el riesgo escogiendo cuidadosamente a Δ.

$$\left(\frac{\partial c}{\partial S} - \Delta\right) dS. \tag{5.7}$$

Si escogemos

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} \tag{5.8}$$

Entonces dicho término se hace cero.

Cualquier reducción aleatoria es generalmente un término de cobertura, la perfecta eliminación del riesgo, al analizar la correlación entre dos instrumentos (es el caso de una opción y su subyacente) es generalmente llamada cobertura delta.

La cobertura delta es un ejemplo de una estrategia de cobertura dinámica. De un periodo a otro la cantidad $\partial c/\partial S$ cambia, ya que ,es igual a c, una función con cambios en las variables S y t. Este concepto de cobertura perfecta debe ser equilibrada continuamente.

5.4 SIN ARBITRAGE

Después de haber escogido el valor de Δ como sugerimos anteriormente, tenemos que el cambio en el valor del portafolio esta dado por lo siguiente:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt \tag{5.9}$$

Este cambio es completamente libre de riesgo. Si existiera un cambio libre de riesgo $d\Pi$ en el valor del portafolio Π, entonces obtendríamos el mísmo rendimiento equivalente que si se hubiera invertido el capital a una tasa libre de riesgo.

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{5.10}$$

Este es un ejemplo del principio de no arbitraje. Para observar esto, consideremos el hecho de qué pasaría si la tasa de rendimiento del portafolio fuera, primero, más grande y después fuera menor que la tasa libre de riesgo. Si se pudiera garantizar que el rendimiento fuera más grande que r, que el portafolio con cobertura delta, entonces lo que se haría es pedir prestado al banco y pagar una tasa de interes r, invertiríamos en el portafolio de aciones/opciones y ganaríamos un beneficio. Si, por otra parte, el rendimiento fuera menor que la tasa libre de riesgo entonces no debemos usar la cobertura delta e invertir el dinero en el banco.

5.5 ECUACION DE BLACK-SCHOLES

Sustituyendo (5.2), (5.8), y (5.9) en (5.10) obtenemos que

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt = r \left(c - S\frac{\partial c}{\partial S} \right) dt. \tag{5.11}$$

Dividiendo por dt y reescribiendo obtenemos que

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0. \tag{5.12}$$

está es la ecuación de Black-Scholes.

La ecuación de Black-Scholes es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica. De hecho casi todas las ecuaciones diferenciales parciales en finazas tienen forma similar. Generalmente son lineales, esto significa que si se tienen dos soluciones entonces la suma de ellas también es una solución. Las ecuaciones financieras también son generalmente parabólicas, éstas se relacionan con la ecuación de difusión de calor. Un ventaja de esto es que las ecuaciones son relativamente fáciles de resolver numéricamente.

La ecuación de Black-Scholes contiene todas las variables que son obvias y los parámetros tales como el activo subyeente, el tiempo, la volatilidad, pero no se hace mención de la tasa de cambio μ. Cualquier dependencia sobre la tasa de cambio se anuló mientras eliminamos el componente dS del portafolio. El argumento económico para esto es que podemos perfectamente cubrir la opción con el subyacente y no debemos tomar un riesgo inecesario. Únicamente las tasa de rendimiento libre de riesgo aparece en la ecuación. Esto significa que si estamos de acuerdo con la volatilidad del activo entonces igualmente estamos de acuerdo con el valor de la opción aunque tengamos diferentes estimadores de la tasa de cambio.

Otra forma de ver el concepto de cobertura es preguntando que pasa si tomamos un portafolio que tiene solamente una acción, una cantidad Δ y efectivo. si Δ es la derivada parcial de alguna opción entonces el portafolio tendrá un monto al vencimiento que es igual al pago de la opción. En otras palabras, podemos usar el mismo argumento del modelo Black-Scholes para replicar la opción con sólo comprar y vender el activo subyacente, esta idea se conoce como mercado completo.

5.6 HIPOTESIS DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES

- El subyacente sigue una distribución lognormal. Esto no es completamente necesario. El "factor "σ no necesariamente tiene que ser constante para encontrar soluciones, pero debe ser dependiente del tiempo.

- La tasa de interés libre de riesgo es una función del tiempo. Esta restricción sólo nos ayuda a encontrar soluciones explícitas. Si r fuera constante nos facilitaría el trabajo.

- No existen dividendos sobre el subyacente.

- Cobertura delta se hace en tiempo contínuo. Esto definitivamente es imposible. La cobertura debe hacerse en tiempo discreto. Frecuentemente el tiempo entre recoberturas dependerá del nivel de los costos de transacción en el mercado del subyacente. Para costos más pequeños lo más frecuente es la recobertura.

- No existen costos de transacción sobre el subyacente. La dinámica de la cobertura delta en realidad es costosa, ya que existe un spread de oferta y demanda sobre el subyacente.

- No existen oportunidades de arbitraje. Cuando existen oportunidades de arbitraje; mucha gente gana dinero al encontralas, es sumamente importante subrayar que excluimos el modelo que dependa del arbitrage. El arbitraje surge cuando dos flujos de efectivo idénticos tienen diferentes valores.

5.7 CONDICIONES FINALES

Se debe especificar el valor de la opción c como una función del subyacente en la fecha de vencimiento T. Esto es, tendrémos que especificar el valor $c(S,T)$, para el pago.

Por ejemplo, si tenemos un opción call entonces sabemos que:

$$c(S,T) = \text{máx}(S - E, 0). \tag{5.13}$$

Para un put tenemos que:

$$c(S,T) = \text{máx}(E - S, 0). \tag{5.14}$$

CAPITULO 6. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

6.1 INTRODUCION

El análisis y solución de las ecuaciones diferenciales parciales es un gran objetivo. Este capítulo tiene como finalidad presentar los conceptos básicos del tema, que permitan continuar con el resto del trabajo.

6.2 UNA PERSPECTIVA HISTORICA PARA LA ECUACION DE BLACK-SCHOLES

La ecuación diferencial parcial de Black-Scholes es bidimensional , S y t, es una ecuación parabólica, lo que significa que es diferenciable dos veces con respecto a la variable, S, y diferenciable una vez con respecto a, t. Ecuaciones con esta forma son mejor conocidas como ecuaciones de difusión o de calor.

Las ecuaciones de difusión han tenido gran éxito para modelar:

- la difusión de un material en otro, partículas de humo en el aire
- el flujos de calor de una parte de un objeto a otro
- las reacciones químicas
- la actividad eléctrica en las membranas de los organismos vivos, modelo de Hodgkin-Huxley
- la dispersión de poblaciones; los individuos se mueven aleatoriamente y evita el crecimiento
- la persuación y evasión en sistemas de depredador-presa

En la mayoría de estos casos las ecuaciones resultantes son más complicadas que la ecuación de Black-Scholes.

La ecuación de calor más simple para la temperatura de una barra es comunmente escrita de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde u es la temperatura, x es la coordenada parcial y t es el tiempo. Considera el flujo de entrada y salida en una pequeña sección de una barra. El flujo de calor es proporcional al gradiente de la temperatura

$$\frac{\partial u}{\partial x}.$$

y por tanto su derivada, la segunda derivada de la temperatura es el calor retenido en una pequeña sección. El calor retenido es visto como el cambio en la temperatura, representado matemáticamente como

$$\frac{\partial u}{\partial t}.$$

El balance de la segunda derivada parcial con respecto a x y de la primera derivada parcial con recpecto a t da como resultado la ecuación de calor. (Existiría un coeficiente en la ecuación que dependa de las propiedades de la barra en donde se transmite el calor, pero tenemos sólo uno.)

6.3 SIGNIFICADO DE LOS TERMINOS PARA LA ECUACION DE BLACK-SCHOLES

La ecuación de Blanck-Scholes puede ser interpretada como un ecuación de difusión, la ecuación básica es un balance de la primera derivada parcial de t y la segunda derivada parcial de S:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}. \tag{6.1}$$

Si fueran los únicos términos en la ecuación de Black -Scholes podría exibirse un suave efecto, que cualquier discontinuidad en el pago sería instantaneamente difundida. La única diferencia entre estos términos y los que aparecen en la ecuación de difusión o calor, es que el coeficiente de difusión es una función de una de las variables S. De esta forma tenemos difusión en un ambiente no homogéneo.

El término de la primera derivada parcial de S

$$rS\frac{\partial c}{\partial S}.$$

Se puede tomar como un término de convexión. Si la ecuación representa algún sistema físico, tal como la difusión de partículas de humo en la atmósfera, entonces el término convectivo puede ser debido a una brisa que sopla al humo en la dirección referida. El término final

$$-rc.$$

Es un término de reacción. Equilibrando este término y la derivada del tiempo proporcionaría un modelo para disminución de un cuerpo radioactivo, con la vida media que se relacionada con r.

Considerando estos términos juntos se obtiene una ecuación de difusión, convexión y de reacción.

6.4 CONDICIONES DE FRONTERA, INICIALES Y FINALES

Para especificar un problema únicamente debemos definir condiciones de frontera y condiciones iniciales o finales. Las condiciones de frontera nos dice como las soluciones deben comportarse durante todo el tiempo en ciertos valores del activo. En problemas financieros nosotros especificamos el comportamiento de la solución en $S = 0$ y cuando $S \to \infty$. Debemos también especificar como la solución inicia. Además, de establecer una condicion final. Esta es generalmente la función del pago al vencimiento.

6.5 METODOS DE SOLUCION

No emplearemos mucho tiempo en encontrar la solución exacta para la ecuación de Black-Scholes. Ésta es importante, pero en la práctica resulta que los modelos tienen características que hacen imposible encontrarla. Las soluciones de forma cerrada que son usadas en la práctica serán cubiertas en los siguientes capítulos.

6.5.1 TRANSFORMACION A LA ECUACION DE DIFUSION CON COEFICIENTE CONSTANTE

Algunas veces puede ser útil transformar la ecuación básica de Black-Scholes, haciendo un cambio de variables. Si escribimos

$$c(S, t) = e^{\alpha x + \beta\tau} U(x, \tau) \tag{6.2}$$

donde

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right), \quad \beta = -\frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)^2, \quad S = e^x, \quad \text{y} \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}.$$

Entonces $U(x, \tau)$ satisface la ecuación de difusión básica

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{6.3}$$

Esta simple ecuación es más fácil de manejar que la ecuación de Black-Scholes. Algunas veces puede ser importante, por ejemplo cuando se busca soluciones de forma cerrada, o en algunos esquemas numéricos simples. En el capítulo 8, regresaremos a esta ecuación diferencial parcial.

6.6 SOLUCIONES NUMERICAS

Aunque existen diversas técnicas que podemos utilizar para encontrar soluciones , en la mayoría de los casos debemos resolver la ecuación de Black-Scholes numéricamente. Pero no importa ya que las ecuaciones diferenciales parabólicas son las más fáciles de resolver numéricamente. Obviamente, existen cualquier cantidad de técnicas sofisticadas.

CAPITULO 7. VALORES ESPERADOS Y LA FORMULA DE BLACK-SCHOLES

7.1 INTRODUCION

En este capítulo se calcula de manera exhaustiva la fórmula de Black-Scholes en términos de valores esperados. Se supone que el subyacente es una acción que sigue un Proceso Markoviano de Difusión, cuya parte estocástica es un proceso de Wiener.

7.2 FUNCION DE DENSIDAD DEL VALOR DEL SUBYACENTE

Enseguida se deduce la función de densidad del valor del subyacente en la fecha de vencimiento.

Suponga que la variable subyacente es una acción y sigue un proceso Markoviano de difusión:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}z_t, \tag{7.1}$$

donde z_t es un proceso de Wiener (movimiento Browniano), es decir, z_t tiene incrementos normales independientes con $\mathrm{E}[\mathrm{d}z_t] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}z_t] = \mathrm{E}[(\mathrm{d}z_t)^2] = \mathrm{d}t$. En este caso se puede escribir

$$\mathrm{d}z_t = \mathcal{E}\sqrt{\mathrm{d}t} \qquad \text{con} \qquad \mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{7.2}$$

Dado que $\mathrm{E}[\mathrm{d}z_t] \approx \mathrm{d}z_t$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}z_t] = \mathrm{E}[(\mathrm{d}z_t)^2] \approx (\mathrm{d}z_t)^2$, las siguientes reglas para el cálculo estocástico son válidas

$$\mathrm{d}z_t\mathrm{d}t = 0, \qquad \mathrm{d}z_t\mathrm{d}z_t = \mathrm{d}t \qquad \text{y} \qquad \mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0. \tag{7.3}$$

En virtud de (7.2), con $\mathrm{d}t = T - t$, se puede escribir que

$$\frac{S_T - S_t}{S_t} \sim \mathcal{N}(\mu(T-t), \sigma^2(T-t)). \tag{7.4}$$

Considere ahora una función $G = G(S_t, t)$. La expansión en una serie de Taylor hasta términos de segundo orden conduce a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G =& \frac{\partial G}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}(\mathrm{d}S_t)^2 + 2\frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial t}\mathrm{d}S_t\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2\right).\end{aligned} \tag{7.5}$$

La sustitución de (7.1) y (7.3) en (7.5) conduce a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G =& \frac{\partial G}{\partial S_t}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}z_t) + \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}z_t)^2 + 2\frac{\partial^2 G}{\partial S_t\partial t}(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}z_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2\right) \\ =& \left(\frac{\partial G}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}z_t.\end{aligned} \tag{7.6}$$

Observe que si $G = \log S_t$, entonces

$$\frac{\partial G}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \tag{7.7}$$

En consecuencia,

$$\mathrm{d}\log S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z_t. \tag{7.8}$$

Para el caso discreto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta \log S_t &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \Delta z_t. \\
\log S_t - \log S_0 &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma \Delta z_t; \qquad \Delta z_t = \mathcal{E}\sqrt{\Delta t} \\
\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma \Delta z_t.
\end{aligned}$$

Para $t = 0$, se tiene

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \Delta z_t.$$

De lo anterior se sigue que

$$\log S_t - \log S_0 = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T\right). \tag{7.9}$$

Bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, se sigue que

$$\mu = r. \tag{7.10}$$

Considere una variable aleatoria normal $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$, es bien conocido que la función de densidad, $\phi(\epsilon)$, de $\mathcal{E}$ está dada por

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}. \tag{7.11}$$

Considere ahora una variable aleatoria de la forma

$$\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left((r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)\right). \tag{7.12}$$

En este caso, se dice que $S_T/S_0 > 0$ tiene una distribución lognormal con media $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ y varianza $\sigma^2 T$. Por lo anterior,

$$\mathcal{E} = \frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{7.13}$$

En este caso,

$$S_T \equiv g(\epsilon) = S_0 \exp\left\{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T\right\}$$

Si se define ahora

$$g^{-1}(S_T) \equiv \frac{\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{7.14}$$

la función de densidad de S_T está dada por

$$f_{s_T}(s) = \phi_\epsilon(g^{-1}(S_T))\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(S_T)}{\mathrm{d}S_T}\right|. \tag{7.15}$$

A continuación se muestra que,

$$f_{s_T}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}. \tag{7.16}$$

Para ello, note que

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Sea} \quad S_T = S_0 \exp\left\{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T\right\} \Rightarrow g^{-1}(S_T) = \frac{\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left((r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T\right).$$

La función de densidad de S_T está dada por

$$f_{s_T}(s) = \phi_\epsilon(g^{-1}(S_T))|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(S_T)}{\mathrm{d}S_T}|.$$

Entonces, $\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \qquad \Rightarrow \phi_\epsilon(g^{-1}(S_T)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}$

Por lo que,

$$f_{s_T}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{1}{\frac{S_T}{S_0}}\frac{1}{S_0}\right|$$

Por lo tanto

$$f_{s_T}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}.$$

Observe ahora que la media de S_T satisface

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_T) &= \int_0^\infty s f_{S_T}(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty s\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}S_0e^{\epsilon\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\sigma\sqrt{T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}e^{\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon,
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

$$
\text{Note que, } \mathcal{E} = \frac{\log\left(\dfrac{S_T}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad \Rightarrow \qquad S_T = S_0e^{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} \tag{7.18}
$$

Sea $S_T = s$. Se Calcula la diferencial de s, esto es

$$
\mathrm{d}s = S_0e^{\epsilon\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\sigma\sqrt{T}\mathrm{d}\epsilon. \tag{7.19}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_T) &= S_0\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}e^{\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-2\sigma\sqrt{T}\epsilon+\sigma^2T)}e^{\frac{1}{2}\sigma^2T+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-\sigma\sqrt{T})^2}e^{rT}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0e^{rT}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u \\
&= S_0e^{rT},
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

donde u se ha escogido como:

$$
u = \epsilon - \sigma\sqrt{T}. \tag{7.21}
$$

El segundo momento de S_T se calcula como sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_T^2) &= \int_0^{\infty} s^2 f_{S_T}(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\infty} \frac{s^2}{\sqrt{2\pi T}\sigma s} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\infty} \frac{s}{\sqrt{2\pi T}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{2[\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T]}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2+2\sigma\sqrt{T}\epsilon} e^{2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-4\sigma\sqrt{T}\epsilon+4\sigma^2T)} e^{2[\sigma^2T+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T]}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-4\sigma\sqrt{T}\epsilon+4\sigma^2T)} e^{2\sigma^2T+2rT-\sigma^2T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-2\sigma\sqrt{T})^2} e^{\sigma^2T+2rT}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{\sigma^2T+2rT}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-2\sigma\sqrt{T})^2}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{\sigma^2T+2rT}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2}\mathrm{d}w \\
&= S_0^2 e^{\sigma^2T+2rT} \\
&= S_0^2 e^{[\sigma^2+2r]T}.
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

donde

$$w = \epsilon - 2\sigma\sqrt{T}.$$

En consecuencia,

$$\mathrm{Var}(S_T) = \mathrm{E}(S_T^2) - \mathrm{E}[(S_T)]^2 = S_0^2 e^{\sigma^2T+2rT} - S_0^2 e^{2rT} = S_0^2 e^{2rT}(e^{\sigma^2T}-1). \tag{7.23}$$

El precio de una opción de compra de tipo europeo en $t=0$, $c = c(S_0, T, r, \sigma)$ está dado por

$$c = e^{-rT}\mathrm{E}[\max(S_T - X, 0)], \tag{7.24}$$

donde X es el precio de ejercicio. Así pues.

$$
\begin{aligned}
c =& e^{-rT}\mathrm{E}[\max(S_T - X, 0)] \\
=& e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} \max(S_T - X, 0) f_{s_T}(s)\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT}\int_{X}^{\infty} (s - X) f_{s_T}(s)\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT}\int_{s>X} (s - X) f_{s_T}(s)\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT}\int_{s>X} s f_{s_T}(s)\mathrm{d}s - e^{-rT}\int_{s>X} X f_{s_T}(s)\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT} S_0 \int_{s>X} s\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \qquad (7.25) \\
& - e^{-rT}\int_{s>X} X\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT}\int_{s>X} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
& - e^{-rT} S_0 \int_{s>X} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Recordemos que $\mathcal{E} = \frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ entonces,

$$S_T = S_0 e^{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}.$$

El subíndice de la integral es $s > X \quad \Rightarrow \quad S_0 \exp \mathcal{E}\sigma\sqrt{T} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T > X$.

Note que,

$$\mathrm{d}s = S_0 e^{\epsilon\sigma\sqrt{T} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}\sigma\sqrt{T}\mathrm{d}\epsilon.$$

Por lo tanto, esto nos conduce a

$$
\begin{aligned}
c =& e^{-rT} S_0 \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(X/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} \sigma\sqrt{T}\mathrm{d}\epsilon \\
& - e^{-rT} X \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(X/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\mathrm{d}\epsilon \\
=& e^{-rT} S_0 \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(X/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon \\
& - e^{-rT} X \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(X/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\mathrm{d}\epsilon \\
=& e^{-rT} S_0 \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(X/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-2\sigma\sqrt{T}\epsilon+\sigma^2 T)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon \\
& - e^{-rT} X \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(X/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\mathrm{d}\epsilon \\
=& e^{-rT} S_0 \int_{\left\{\epsilon-\sigma\sqrt{T} > \frac{\log(X/S_0)-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-\sigma\sqrt{T})^2} e^{rT}\mathrm{d}\epsilon \\
& - e^{-rT} X \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(X/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\mathrm{d}\epsilon .
\end{aligned}
$$

Note que en la cuarta línea de la ecuación anterior $s > X$ (ecuación 7.25). Esto es,

$$
S > X \quad \Rightarrow \quad S_0 e^{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} > X \Rightarrow \begin{cases} e^{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} > \dfrac{X}{S_0} \\ \text{aplicando el logaritmo, se tiene} \\ \mathcal{E}\sigma\sqrt{T}+(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2)T > \ln\dfrac{X}{S_0} \end{cases}
$$

Por lo tanto,

$$
\mathcal{E} > \frac{\log\left(\frac{X}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
c =& S_0 \int_{\left\{-\infty < u < \frac{\log(S_0/X)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u \\
& - e^{-rT} X \int_{\left\{-\infty < \epsilon < \frac{\log(S_0/X)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon \\
=& S_0\Phi(d_1) - e^{-rT} X\,\Phi(d_2).
\end{aligned} \tag{7.26}
$$

Por lo tanto,

$$c = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}X\,\Phi(d_2).$$

donde,

$$d_1 = d_1(S_0, T, X, r, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{7.27}$$

y

$$d_2 = d_2(S_0, T, X, r, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{7.28}$$

La función $\Phi(d)$ es la función de distribución de $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$, es decir,

$$\Pr\{\mathcal{E} \leq d\} = \Phi(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon = 1 - \Phi(-d). \tag{7.29}$$

A través de un procedimiento similar se puede mostrar que si $p = p(S_0, T, X, r, \sigma)$ es el precio de una opcion de venta de tipo europeo, entonces

$$p = e^{-rT}X\,\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1). \tag{7.30}$$

A partir de (7.29) y (7.25) se puede establecer la condición de paridad de venta-compra

$$
\begin{aligned}
p + S_0 &= e^{-rT}X\,\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1) + S_0 \\
&= e^{-rT}X\,\Phi(-d_2) + S_0(1 - \Phi(-d_1)) \\
&= e^{-rT}X(1 - \Phi(d_2)) + S_0\Phi(d_1) \\
&= -e^{-rT}\Phi(d_2)) + S_0\Phi(d_1) + e^{-rT}X \\
&= c + e^{-rT}X.
\end{aligned} \tag{7.31}
$$

Claramente, el análisis anterior puede ser repetido para $c = c(S_t, T-t, X, r, \sigma)$ y $p = p(S_t, T-t, X, r, \sigma)$. En cuyo caso, obtenemos

$$c = c(S_t, T-t, X, r, \sigma) = S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}X\,\Phi(d_2) \tag{7.32}$$

y

$$p = p(S_t, T-t, X, r, \sigma) = e^{-r(T-t)}X\,\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1). \tag{7.33}$$

Por supuesto, d_1 y d_2 también se modifican. De hecho,

$$d_1 = d_1(S_t, T, X, r, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{S_t}{X}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{7.34}$$

y

$$d_2 = d_2(S_t, T, X, r, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{S_t}{X}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{7.35}$$

La delta, $\Delta_c \equiv \partial c/\partial S_t$, para una opción de compra de tipo europeo está dada por

$$\begin{aligned}
\Delta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial S_t} &= \frac{\partial S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} X\,\Phi(d_2)}{\partial S_t} \\
&= \Phi(d_1) + S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} - Xe^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S_t} \\
&= \Phi(d_1) + [S_t\Phi'(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)]\frac{\partial d_1}{\partial S_t} \\
&= \Phi(d_1).
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Por lo tanto,

$$\Delta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial S_t} = \Phi(d_1).$$

ya que de $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, se sigue por un lado que

$$\frac{\partial d_2}{\partial S_t} = \frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sigma S_t\sqrt{T-t}}, \tag{7.37}$$

mientras que por otro lado

$$
\begin{aligned}
d_2^2 &= (d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2 \\
&= d_1^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}d_1 + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\log\left(\frac{S_t}{X}\right) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\left(\log\left(\frac{S_t}{X}\right) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right) + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\log\left(\frac{S_t}{X}\right) - 2r(T-t) - \sigma^2(T-t) + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\log\left(\frac{S_t}{X}\right) - 2r(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\log\left(\frac{S_t}{X}\right) - 2\log e^{r(T-t)} \\
&= d_1^2 - 2\left[\log\left(\frac{S_t}{X}\right) + \log\left(e^{r(T-t}\right)\right] \\
&= d_1^2 - 2\log\left[\left(\frac{S_t}{X}\right)\left(e^{r(T-t}\right)\right] \\
&= d_1^2 - 2\log\left[\left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{X}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ la ecuación anterior, se tiene

$$
-\frac{d_2^2}{2} = -\frac{d_1^2}{2} + \log\left[\frac{S_t e^{r(T-t)}}{X}\right]
$$

lo cual implica, a su vez, que

$$
e^{-\frac{1}{2}d_2^2} = e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\left(\frac{S e^{r(T-t)}}{X}\right). \tag{7.39}
$$

equivalentemente

$$
\Phi'(d_2)X e^{-r(T-t)} = \Phi'(d_1)S, \tag{7.40}
$$

con lo que se sigue (7.35).

La gamma, $\Gamma_c \equiv \partial^2 c/\partial S_t^2$, de una opción de compra de tipo europeo satisface:

$$
\Gamma_c \equiv \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t}\left[\frac{\partial c}{\partial S_t}\right] = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S_t} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S_t} = \Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}}.
$$

Por lo tanto,

$$
\Gamma_c \equiv \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}} > 0. \tag{7.41}
$$

Ahora calculemos la variación de c con respecto de T, es decir

$$
\begin{aligned}
\Theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial T} &= \frac{\partial\left[S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}X\,\Phi(d_2)\right]}{\partial T} \\
&= S_t\frac{\partial\Phi(d_1)}{\partial T} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - \left[e^{-r(T-t)}X\frac{\partial\Phi(d_2)}{\partial T} + \Phi(d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}X}{\partial T}\right] \\
&= S_t\frac{\partial\Phi(d_1)}{\partial T} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - e^{-r(T-t)}X\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T} - \Phi(d_2)Xe^{-r(T-t)}(-r) \\
&= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - e^{-r(T-t)}X\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)},
\end{aligned}
$$

sabemos que $\Phi'(d_2)e^{-r(T-t)}X = \Phi'(d_1)S_t$, entonces

$$
\begin{aligned}
\Theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial T} &= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - e^{-r(T-t)}X\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)} \\
&= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - \Phi'(d_1)S_t\frac{\partial d_2}{\partial T} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)} \\
&= S_t\Phi'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T}\right] + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)},
\end{aligned}
$$

recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial T} \Rightarrow \left[\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial T}$. Por lo tanto,

$$
\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}},
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\Theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial T} &= S_t\Phi'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T}\right] + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)} \\
&= S_t\Phi'(d_1)\left[\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\right] + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)}; \qquad \frac{\partial S_t}{\partial T} = 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\Theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial T} = S_t\Phi'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)}. \tag{7.42}
$$

La variación de c con respecto de σ, está dada por

$$
\begin{aligned}
\text{Vega}_c \equiv \frac{\partial c}{\partial\sigma} &= \frac{\partial\left[S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}X\,\Phi(d_2)\right]}{\partial\sigma} \\
&= S_t\frac{\partial\Phi(d_1)}{\partial\sigma} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial\sigma} - e^{-r(T-t)}X\frac{\partial\Phi(d_2)}{\partial\sigma} \\
&= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial\sigma} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial\sigma} - e^{-r(T-t)}X\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial\sigma}.
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\Phi'(d_2)e^{-r(T-t)}X = \Phi'(d_1)S_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} &= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} - e^{-r(T-t)}X\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
&= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} - \Phi'(d_1)S_t\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
&= S_t\Phi'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right] + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}.
\end{aligned}$$

Note que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial \sigma} \Rightarrow \left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right] = \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial \sigma}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} &= S_t\Phi'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right] + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} \qquad \frac{\partial S_t}{\partial \sigma} = 0. \\
&= S_t\Phi'(d_1)\left[\sqrt{T-t}\right] + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma};
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Vega}_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_t\Phi'(d_1)\sqrt{T-t}. \tag{7.43}$$

La variación de c con respecto de r, está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial r} &= \frac{\partial\left[S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}X\,\Phi(d_2)\right]}{\partial r} \\
&= S_t\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial r} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - \left[e^{-r(T-t)}X\,\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial r} + \Phi(d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}X}{\partial r}\right] \\
&= S_t\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial r} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - e^{-r(T-t)}X\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} - \Phi(d_2)Xe^{-r(T-t)}(T-t)(-1) \\
&= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - e^{-r(T-t)}X\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} + \Phi(d_2)Xe^{-r(T-t)}(T-t).
\end{aligned}$$

Sabemos que $\Phi'(d_2)e^{-r(T-t)}X = \Phi'(d_1)S_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial r} &= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - e^{-r(T-t)}X\,\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)}(T-t) \\
&= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - \Phi'(d_1)S_t\frac{\partial d_2}{\partial r} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)}(T-t) \\
&= S_t\Phi'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial d_2}{\partial r}\right] + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)}(T-t).
\end{aligned}$$

recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial r} \Rightarrow \left[\frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial d_2}{\partial r}\right] = \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial r}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial d_2}{\partial r} = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial r} &= \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)}(T-t)\\ &= \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} + \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)}(T-t); \qquad \frac{\partial S_t}{\partial r} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \Phi(d_2)Xre^{-r(T-t)}(T-t) > 0. \tag{7.44}$$

La variación de c con respecto de X, está dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial X} &= \frac{\partial\left[S_t\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}X\Phi(d_2)\right]}{\partial X}\\ &= S_t\frac{\partial\Phi(d_1)}{\partial X} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial X} - \left[e^{-r(T-t)}X\frac{\partial\Phi(d_2)}{\partial X} + \Phi(d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}X}{\partial X}\right]\\ &= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial X} + \Phi(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial X} - e^{-r(T-t)}X\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial X} - \Phi(d_2)e^{-r(T-t)}\\ &= -e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) < 0.\end{aligned}$$

ya que $\Phi'(d_1) = 0$, $\Phi'(d_2) = 0$ y $\frac{\partial S_t}{\partial X} = 0$. Recordemos que

$$p = p(S_t, T-t, X, r, \sigma) = e^{-r(T-t)}X\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1).$$

$$\begin{aligned}\Delta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial S_t} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}X\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1)\right]}{\partial S_t}\\ &= e^{-r(T-t)}X\frac{\partial\Phi(-d_2)}{\partial S_t} - S_t\frac{\partial\Phi(-d_1)}{\partial S_t} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial S_t}\\ &= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} - \Phi(-d_1),\end{aligned}$$

sabemos que $\Phi'(-d_2)e^{-r(T-t)}X = \Phi'(-d_1)S_t$, entonces

$$\begin{aligned}\Delta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial S_t} &= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} - \Phi(-d_1)\\ &= S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} - \Phi(-d_1)\\ &= S_t\Phi'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t}\right] - \Phi(-d_1)\end{aligned}$$

recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} + \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial S_t} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial S_t}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r} = 0,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\Delta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial S_t} &= -\Phi(-d_1) < 0 \\ &= \Phi(d_1) - 1 < 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Delta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial S_t} = -\Phi(-d_1) < 0. \tag{7.45}$$

De la condición de paridad venta-compra se obtiene que

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial S_t} &= \Phi(d_1) - 1 \\ \frac{\partial c}{\partial S_t} &= \Phi(d_1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial S_t} = \frac{\partial c}{\partial S_t} - 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial p}{\partial S_t} + 1 = \frac{\partial c}{\partial S_t}. \tag{7.46}$$

La elasticidad de c con respecto a S_t, está dada por

$$\epsilon_{c,S} = \frac{\partial \log(c)}{\partial \log(S_t)} = \frac{\frac{\partial c}{c}}{\frac{\partial S_t}{S_t}} = \Phi(d_1)\frac{S_t}{c}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_p \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t}\left[\frac{\partial P}{\partial S_t}\right] = \frac{\partial \Delta_p}{\partial S_t} &= \frac{\partial\left[-\Phi(-d_1)\right]}{\partial S_t} \\ &= -\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t}.\end{aligned}$$

pero $d_1 = d_1(S_t, T, X, r, \sigma) = \frac{\log(\frac{S_t}{X}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \Rightarrow \frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} = \frac{-1}{\frac{S_t}{X}}\frac{1}{X}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$

Por lo tanto, $\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} = \left[\frac{-1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\right]$. Entonces,

$$\begin{aligned}\Gamma_p \equiv \frac{\partial \Delta_p}{\partial S_t} &= -\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t}, \\ &= \Phi'(-d_1)\left[\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\right] > 0.\end{aligned} \tag{7.47}$$

Note que $\Gamma_p = \Gamma_c$.

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_p \equiv \frac{\partial P}{\partial \sigma} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}X\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1)\right]}{\partial \sigma}\\
&= e^{-r(T-t)}X\frac{\partial \Phi(-d_2)}{\partial \sigma} - S_t\frac{\partial \Phi(-d_1)}{\partial \sigma} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}\\
&= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}
\end{aligned}$$

sabemos que $\Phi'(-d_2)e^{-r(T-t)}X = \Phi'(-d_1)S_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_p \equiv \frac{\partial P}{\partial \sigma} &= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}\\
&= S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}\\
&= S_t\Phi'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma}\right] - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}
\end{aligned}$$

recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial\sigma} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial\sigma} + \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial\sigma} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial\sigma} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial\sigma}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial\sigma}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_p \equiv \frac{\partial P}{\partial \sigma} &= S_t\Phi'(-d_1)\sqrt{T-t} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}; \qquad \frac{\partial S_t}{\partial \sigma} = 0\\
&= S_t\Phi'(-d_1)\sqrt{T-t} > 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Vega}_p \equiv \frac{\partial P}{\partial \sigma} = S_t\Phi'(-d_1)\sqrt{T-t} > 0. \tag{7.48}$$

La variación de P con respecto de X, está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial X} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}X\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1)\right]}{\partial \sigma}\\
&= e^{-r(T-t)}X\frac{\partial \Phi(-d_2)}{\partial X} + \Phi(-d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}X}{\partial X} - S_t\frac{\partial \Phi(-d_1)}{\partial X} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial X}\\
&= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial X} + \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial X} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial X}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\Phi'(-d_2)e^{-r(T-t)}X = \Phi'(-d_1)S_t$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial X} &= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial X} + \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial X} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial X}\\
&= S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial X} + \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial X} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial X}\\
&= S_t\Phi'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial X} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial X}\right] + \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial X}.
\end{aligned}
$$

Recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial X} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial X} + \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial X} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial X} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial X}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial X}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial X} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial X} = 0.$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial X} &= \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial X}; \qquad \frac{\partial S_t}{\partial X} = 0,\\
&= \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} > 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} > 0. \tag{7.49}$$

La variación de P con respecto de r, es

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}X\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1)\right]}{\partial r}\\
&= e^{-r(T-t)}X\frac{\partial\Phi(-d_2)}{\partial r} + \Phi(-d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}X}{\partial r} - S_t\frac{\partial\Phi(-d_1)}{\partial r} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r}\\
&= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} + \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)}(-)(T-t) - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\Phi'(-d_2)e^{-r(T-t)}X = \Phi'(-d_1)S_t$, y $\frac{\partial S_t}{\partial r} = 0$ entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial r} &= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} + \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)}(-)(T-t) - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\\
&= S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} + \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)}(-)(T-t) - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\\
&= S_t\Phi'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\right] - \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)}(T-t).
\end{aligned}
$$

Recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial r} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial r} + \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial r} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial r}$. Entonces,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\Phi(-d_2)e^{-r(T-t)}(T-t) < 0. \tag{7.50}$$

Variación de P con respecto de T. Esto es,

$$\begin{aligned}
\Theta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial T} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}X\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1)\right]}{\partial T} \\
&= e^{-r(T-t)}X\frac{\partial\Phi(-d_2)}{\partial T} + \Phi(-d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}X}{\partial T} - S_t\frac{\partial\Phi(-d_1)}{\partial T} - \Phi(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} \\
&= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} + \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)}(-r) - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial T}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\Phi'(-d_2)e^{-r(T-t)}X = \Phi'(-d_1)S_t$. y $\frac{\partial S_t}{\partial T} = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\Theta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial T} &= e^{-r(T-t)}X\Phi'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} + \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)}(-r) - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial T} \\
&= S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} + \Phi(-d_2)Xe^{-r(T-t)}(-r) - S_t\Phi'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial T} \\
&= S_t\Phi'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial T}\right] - r\Phi(-d_2)Xe^{-r(T-t)}.
\end{aligned}$$

Pero, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial T} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial T} + \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial T} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial T}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial T}$. Entonces,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial T} = \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}.$$

Por lo tanto,

$$\Theta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial T} = S_t\Phi'(-d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - r\Phi(-d_2)Xe^{-r(T-t)}. \tag{7.51}$$

CAPITULO 8. LA ECUACION DE CALOR Y LA FORMULA BLACK-SCHOLES

8.1 INTRODUCION

En este capítulo se transforma la ecuación diferencial parcial determinísta de Black-Scholes en la ecuación de difusión de calor. Se analiza el caso de un call europeo, estableciendo para ello las condiciones de frontera y las condiciones iniciales.

8.2 DEDUCCION DE LA ECUACION DE CALOR

La ecuación diferencial parcial Black-Scholes y las condicones de frontera para un call, $c(S,t)$, Europeo estan dadas por

$$\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0. \tag{8.1}$$

con

$$c(0,t) = 0 \qquad c(S,t) \sim S \quad \text{cuando} \quad S \quad \rightarrow \quad \infty,$$

$$c(S,t) = \max(S - E, 0)$$

Mediante cambios de variable, la ecuación anterior puede ser llevada a la ecuación de difusión o calor. Para ello, sea

$$S = Ee^x \qquad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \qquad c(S,t) = E\nu(x,\tau)$$

$$\nu(x,0) = \max(e^x - 1, 0); \qquad k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}.$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} c(S,t) &= \max(S - E, 0) \\ &= \max(Ee^x - E, 0) \\ &= \max(E(e^x - 1), 0) \\ &= E\max(e^x - 1, 0) \\ &= E\nu(x,0) \quad \text{donde} \quad \nu(x,0) = \max(e^x - 1, 0) \end{aligned}$$

Note que $S = Ee^x \Rightarrow x = \ln\left(\frac{S}{E}\right)$ y $t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$.

Las derivadas parciales de c con respecto de t y s, es decir $\frac{\partial c}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$ y $\frac{\partial c}{\partial S}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial E\nu(x,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial E\nu(\ln\left(\frac{S}{E}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}{\partial t} \\
&= E\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial t} \\
&= E\left[\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\right]. \\
&= E\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\left[\frac{-1}{2}\sigma^2\right]
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial S} &= \frac{\partial E\nu(x,\tau)}{\partial S} = \frac{\partial E\nu(\ln\left(\frac{S}{E}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}{\partial S} \\
&= E\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial S} \\
&= E\left[\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S}\right] \\
&= E\frac{\partial \nu}{\partial x}\left[\frac{1}{S}\right] \\
&= E\frac{\partial \nu}{\partial x}\left[\frac{1}{Ee^x}\right] \\
&= \frac{\partial \nu}{\partial x}e^{-x}.
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial E\nu(x,\tau)}{\partial S}\right) = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}e^{-x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}e^{-x}\right)\frac{\partial x}{\partial S} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \nu(x,\tau)}{\partial x^2}e^{-x} - e^{-x}\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial S} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \nu(x,\tau)}{\partial x^2}e^{-x} - e^{-x}\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}\right)\frac{1}{Ee^x} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \nu(x,\tau)}{\partial x^2}e^{-x} - e^{-x}\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}\right)\frac{e^{-x}}{E} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \nu(x,\tau)}{\partial x^2}e^{-2x} - e^{-2x}\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}\right)\frac{1}{E}.
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

Sustituimos la ecuación (8.2), (8.3) y (8.4) en (8.1), esto es

$$\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0$$

$$E\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\left[\frac{-1}{2}\sigma^2\right] + \frac{1}{2}E^2 e^{2x}\sigma^2\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}e^{-2x} - e^{-2x}\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)\frac{1}{E} + rEe^{x}\frac{\partial \nu}{\partial x}e^{-x} - rE\nu = 0$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\left[\frac{-1}{2}\sigma^2\right] + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial \nu}{\partial x} + r\frac{\partial \nu}{\partial x} - r\nu = 0$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\nu = 0$$

Despejando $\frac{\partial \nu}{\partial \tau}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nu}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\nu; \qquad \text{sea } k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\\
&= \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial \nu}{\partial x} + k_1\frac{\partial \nu}{\partial x} - k_1\nu\\
&= \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + (k_1 - 1)\frac{\partial \nu}{\partial x} - k_1\nu.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + (k_1 - 1)\frac{\partial \nu}{\partial x} - k_1\nu. \tag{8.5}$$

El siguiente cambio de variable es

$$\nu = e^{\alpha x + \beta \tau}u(x, \tau).$$

Se calculan las derivadas parciales de ν con respecto de τ y x, es decir $\frac{\partial \nu}{\partial \tau}$, $\frac{\partial \nu}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nu}{\partial x} &= \frac{\partial e^{\alpha x + \beta \tau}u(x, \tau)}{\partial x}\\
&= e^{\alpha x + \beta \tau}\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + u(x, \tau)e^{\alpha x + \beta \tau}\alpha\\
&= e^{\alpha x + \beta \tau}\left[\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \alpha u(x, \tau)\right].
\end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \nu}{\partial x}\right]\\
&= e^{\alpha x + \beta \tau}\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}e^{\alpha x + \beta \tau}\alpha + u(x, \tau)e^{\alpha x + \beta \tau}\alpha^2 + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau}\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}\\
&= e^{\alpha x + \beta \tau}\left[\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \alpha^2 u(x, \tau)\right].
\end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial \tau} &= e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + u(x,\tau)e^{\alpha x+\beta\tau}\beta \\ &= e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \beta u(x,\tau)\right].\end{aligned} \tag{8.8}$$

Sustituimos las ecuaciones (8.6), (8.7) y (8.8) en la ecuación (8.5), esto es

$$\begin{aligned}e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \beta u(x,\tau)\right] &= e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha^2 u(x,\tau)\right] \\ &\quad + (k_1-1)e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha u(x,\tau)\right] - k_1 e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) \\ \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \beta u(x,\tau) &= \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha^2 u(x,\tau) \\ &\quad + (k_1-1)\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha u(x,\tau)\right] - k_1 u(x,\tau).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k_1-1)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right] - k_1 u. \tag{8.9}$$

O bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u - \alpha^2 u - (k_1-1)\alpha u + k_1 u &= 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k_1-1)\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + u[\beta - \alpha^2 - (k_1-1)\alpha + k_1] &= \frac{\partial u}{\partial x}[2\alpha + k_1 - 1] + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

$$\text{Si} \quad \beta - \alpha^2 - (k_1-1)\alpha + k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha^2 + (k_1-1)\alpha - k_1. \tag{8.10}$$

Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x}[2\alpha + k_1 - 1] + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8.11}$$

$$\text{Sea} \quad 2\alpha + k_1 - 1 = 0. \tag{8.12}$$

Por lo tanto, la ecuación de calor está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8.13}$$

Note que de las ecuaciones (8.10) y (8.12), se tiene

$$\begin{cases} 2\alpha + k_1 - 1 = 0 \\ \alpha^2 + (k_1 - 1)\alpha - k_1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \quad k_1 - 1 = -2\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \alpha = \dfrac{-1}{2}(k_1 - 1) \\ \alpha^2 = \dfrac{1}{4}(k_1 - 1)^2. \end{array}$$

Sustituyendo el valor de $k_1 - 1$ y el valor α^2 en β, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha(-2\alpha) - k_1 &= \beta \\ \alpha^2 - 2\alpha^2 - k_1 &= \beta \\ -\alpha^2 - k_1 &= \beta \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \beta &= -k_1 - \alpha^2 = -k_1 - \frac{1}{4}(k_1 - 1)^2 = -k_1 - \frac{1}{4}(k_1^2 - 2k_1 + 1)^2 = -k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4}k_1^2 - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}[k_1^2 + 2k_1 + 1] = -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2 \\ \alpha &= \frac{-1}{2}(k_1 - 1) \end{aligned} \tag{8.14}$$

Sustituimos (8.14) en $\nu = e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau)$, entonces

$$\nu = e^{\frac{-1}{2}(k_1 - 1)x - \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}u(x,\tau) \tag{8.15}$$

Por lo tanto, la ecuación de calor está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

con $u(x,0) = u_0(x) = \max\{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0\}$.

La solución a la ecuación de difusión de calor, que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, lineal, parabólica, está dada por

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}}\,\mathrm{d}s$$

donde

$$u_0(x) = \max\left\{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0\right\}$$

Considérese el siguiente cambio de variable

$$x' = \frac{s - x}{\sqrt{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad s = x + \sqrt{2\tau}x'; \qquad \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}s = \sqrt{2\tau}\mathrm{d}x'$$

Note que $x'^2 = \frac{(s-x)^2}{2\tau} = \frac{(x-s)^2}{2\tau}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-x'^2 2\tau}{4\tau}} (\sqrt{2\tau}) \mathrm{d}x' \\
&= \frac{\sqrt{2\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \sqrt{\frac{2\tau}{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x'.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$u_0(s) = \max\left\{ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}x')}, 0 \right\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \max\left\{ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}x')}, 0 \right\} e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}x')} \right\} e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')} e^{\frac{1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}x')} e^{\frac{1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \Psi_1 - \Psi_2.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')} e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} e^{-\frac{1}{2}x'^2+\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}x'} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} e^{\frac{-1}{2}\left[x'^2-(k_1+1)\sqrt{2\tau}x'\right]} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2} e^{\frac{-1}{2}\left[x'^2-(k_1+1)\sqrt{2\tau}x'+\frac{(k_1+1)^2\tau}{2}\right]} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2} e^{\frac{-1}{2}\left[x'-\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right]^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}\left[x'-\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right]^2} \mathrm{d}x'.
\end{aligned}
$$

Sea $w = x' - \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x'} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}w = \mathrm{d}x'$. Note que cuando x' toma el valor $x' = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$, w toma el valor $w = x' - \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2} = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}$. Entonces, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}\left[x'-\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right]^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}w^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\left[\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right]}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}w^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}} \Phi_1(d_1),
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

donde, $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}$ e $\Phi_1(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2}\mathrm{d}s$ es la función de distribución acumulativa para la distribución normal. El cálculo para Ψ_2 es idéntico sólo que en lugar de $k_1 + 1$ es $k_1 - 1$. Recordemos que

$$
\nu = e^{\frac{-1}{2}(k_1-1)x-\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} u(x,\tau),
$$

donde $k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad k_1 + 1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1 = \frac{r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}$.

Sea

$$x = \log\left(\frac{S}{E}\right); \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t); \qquad c = cE\nu(x,t),$$

$$c(S,t) = S\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2).$$

Note que, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \quad \Rightarrow \quad 2\tau = \sigma^2(T-t) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2\tau} = \sigma\sqrt{(T-t)}$.Entonces,

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right)}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\frac{r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}\sqrt{2\tau}}{2} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right)}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{2\tau}}{2\frac{1}{2}\sigma^2} \\
&= \frac{\sigma^2\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{2\tau}\sqrt{2\tau}}{\sqrt{2\tau}\sigma^2} \\
&= \frac{\sigma^2\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)2\tau}{\sqrt{2\tau}\sigma^2}; \qquad 2\tau = \sigma^2(T-t) \\
&= \frac{\sigma^2\left[\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]}{\sqrt{2\tau}\sigma^2} \\
&= \frac{\left[\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]}{\sqrt{2\tau}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d_1 = \frac{\left[\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]}{\sqrt{2\tau}}. \tag{8.18}$$

Analogamente para d_2.

CONCLUSIONES

El Mercado de Derivados y en particular el de Opciones presenta una alternativa de inversión que está desarrollándose de manera importante en las economías emergentes, como es el caso de México, a través del Mercado Mexicano de Derivados S.A. de C.V. (MEXDER). Los diversos tipos de contratos listados que ofrece este mercado, presentan básicamente 2 escenarios de inversión: el especulativo y el de cobertura.

Desde la vertiente económica, los Derivados constituyen un contrapeso importante para equilibrar los mercados financieros. Es así que los contratos de Futuros, Forwards y Opciones ayudan a "cubrirse "contra fluctuaciones adversas en los precios de acciones, divisas, bienes, índices, entre otros.

En cuanto al desarrollo de la Teoría de Derivados, y en particular de las Opciones, se cuenta con herramientas que permiten valuar a los activos financieros. El modelo más conocido y utilizado es el llamado "Modelo de Black-Scholes ", desarrollado al principio de los 70's por Fisher Black y Myron Scholes. Hasta el momento, se han realizado gran variedad de investigaciones tomando como base dicho modelo. Como resultado de estos trabajos, se ha generado, un importante número de extensiones del modelo; sin embargo, la complejidad técnica es también digna de considerarse.

En este trabajo se presentaron 2 alternativas para encontrar la Fórmula de Black-Scholes, que a pesar de su complejidad, en la práctica, constituyen buenas herramientas de apoyo para la Valuación de Opciones.

Hoy en día, el crecimiento acelerado de las llamadas Tecnologías de la Información conjuntamente con el desarrollo de métodos númericos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, constituyen otra alternativa viable para la Valuación de Opciones.

Por lo que considero que esta última alternativa, tendrá un campo importante de desarrollo como herramienta de apoyo para la toma de decisiones financieras. Sin soslayar la importancia de continuar investigando sobre la Teoría de Derivados.

Bibliografía

Paul Wilmott: Edit. Wiley. 1998, DERIVATIVES, The Theory and Practice of Financial Engineering.

Salih N. Neftci; Edit. Academic Press. 1996, An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.

Hulls, Jhon; Edit. Prentice Hall. 1993, Options, Futures and Other Derivative Securities.

Black, Fisher and Scholes Marion; Edit. Journal of Political Economy, 81, 637-654, 1973. The pricing of Options and Corporate Liaibilities.

Cox, J.C., and Rubinstein, M.; Edit. Prentice Hall, New York, 1985, Options Markets.

Merton, R.; Edit. Blackwell, Cambridge, 1990, Continuous Time Finance.

Malliaris, A.G.; Edit. SIAM Review 25,481-496,1983, Itô Calculus in Financial Decision Making.

Ross, S.; Edit. Journal of Business, 1978, A Simple Approach to Valuation of Risk Streams.