45

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE CLASES DE MODULOS CERRADAS BAJO EXTENSIONES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

FRANCISCO JAVIER SANTILLAN COVARRUBIAS

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE RIOS MONTES

2002

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito: sobre clases de módulos cerradas bajo extensiones.

realizado por Francisco Javier Santillán Covarrubias

con número de cuenta 9220106-2 **, quién cubrió los créditos de la carrera de** Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. José Ríos Montes	José Ríos M.
Propietario	Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas	
Propietario	Dr. Emilio LLuis Riera	
Suplente	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Suplente	Dr. Alejandro Alvarado García	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

A mi familia con todo mi cariño, especialmente a
Diego y Daniel.

¿Quién los ve andar por la ciudad
si todos están ciegos?
Ellos se toman de la mano: algo habla
entre sus dedos, lenguas dulces
lamen la húmeda palma, corren por las falanges,
y arriba está la noche llena de ojos.

Son los amantes, su isla flota a la deriva
hacia muertes de césped, hacia puertos
que se abren entre sábanas.
Todo se desordena a través de ellos,
todo encuentra su cifra escamoteada;
pero ellos ni siquiera saben
que mientras ruedan en su amarga arena
hay una pausa en la obra de la nada,
el tigre es un jardín que juega.

Amanece en los carros de basura,
empiezan a salir los ciegos,
el ministerio abre sus puertas.
Los amantes rendidos se miran y se tocan
una vez más antes de oler el día.

Ya están vestidos, ya se van por la calle.
Y es sólo entonces
cuando están muertos, cuando están vestidos,
que la ciudad los recupera hipócrita
y les impone los deberes cotidianos.

J. Cortázar

A Gisela con amor.

Agradecimientos

A mi parecer esta tesis no es solo el producto obtenido después de un período de trabajo académico, sino producto del esfuerzo de muchas personas a lo largo de mucho tiempo, por lo que creo absurdo pretender dar el listado completo de las personas que se han hecho acredoras a mi agradecimiento, sin embargo, me parece importante reconocer el apoyo que me han brindado algunas de ellas a lo largo de mi vida y en la realización de este trabajo.

Quiero agradecer a mis padres: Refugio y Francisco, a mi tía Lupe, a mis hermanos: Yolanda y Alejandro, y a mi cuñada Isabel; por el apoyo incondicional que siempre he recibido de ellos, por su paciencia, porque sin saberlo me han enseñado tantas y tantas cosas, y sobre todo por su cariño.

A Diego y Daniel les agradezco su cariño a pesar de tantos gritos y regaños, y también todos esos momentos divertidos que pasamos juntos.

A Gisela, quiero agradecerle; el compartir conmigo su vida, su ternura, su amor y la infinita paciencia que me guarda.

A mi demás familia: Mi madrina Juanita, Paty, Martha, Ileana, Calolo, Rodolfo, Mi primo Juan, mis tíos: Lucio, Nacho y Alfredo, les agradezco: todo su apoyo y el hacer de cada visita; un divertido mar de historias.

Quiero agradecerle a los profesores: José Ríos, Francisco Raggi, Emilio LLuis, Hugo Rincón y Alejandro Alvarado, por todas sus enseñanzas cuando he tenido la oportunidad de verlos frente a un pizarrón, y por haber dado lectura a este trabajo, haciendo observaciones y comentarios que sin duda alguna enriquecieron esta tesis y mi formación matemática.

Nuevamente, quiero agradecer a Pepe; por haberme enseñado todo lo necesario para realizar este trabajo; por la confianza, disposición y amabilidad que ha tenido conmigo durante todos estos años. Y también a Alejandro: por su amistad y toda la ayuda que me prestó a lo largo de mi estancia en la facultad.

Quiero expresar mi mayor agradecimiento a la Máxima Casa de Estudios de este país; la Universidad Nacional Autónoma de México, que me ha albergado desde el bachillerato y en la cual he obtenido todo mi aprendizaje académico; así, como la mayor parte de mis viviencias. Particularmente quiero agradecer a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas por otorgarme las facilidades para realizar este trabajo.

Por último, me gustaría aclarar, que me resulta imposible expresar todo lo que quisiera en este pequeño espacio, así que no me queda más remedio que decir: un, dos, tres, por mí y por todos mis compañeros:

A todas esas personas que han compartido conmigo: alegrías, tristezas, sentimientos, espacios, inquietudes, conocimientos, mentiras, locuras, . . . y sobre todo risas, a mis Amigos; para los que rien, para los que sueñan, para los que son cerrados, para los que no se quedan callados, a todos ellos . . . siempre, mi más sincero agradecimiento por su cariño, amistad y apoyo.

Sobre Clases de Módulos Cerradas Bajo Extensiones

Francisco Javier Santillán Covarrubias

Noviembre de 2002

Contenido

Introducción

Las clases de módulos con propiedades determinadas juegan un importante papel en diversos aspectos de la Teoría de Anillos y Módulos, por ejemplo; dada una clase C, de módulos, una de las cuestiones más importantes en la Teoría de Torsiones, así como en la Teoría de clases de Serre, es la de determinar cuando C es una clase cerrada bajo extensiones, es decir, dada una sucesión exacta corta con extremos en C, determinar cuando el centro de dicha sucesión también pertenece a C. Muchas de estas clases pueden ser determinadas por un solo módulo. Describir algunas de estas clases es nuestro interés principal. Inicialmente consideraremos dos clases de este tipo: $\mathrm{Gen}(U)$ y $\mathrm{Cog}(U)$ (la clase generada por U y la clase cogenerada por U, respectivamente), las cuales en general no son clases cerradas bajo extensiones, después extenderemos los resultados a las subcategorías cerradas $\sigma[M]$ de $R-\mathsf{Mod}$.

El objetivo central de este trabajo es caracterizar a los módulos U, para los cuales $\mathrm{Gen}(U)$, $\sigma[U]$ y $\mathrm{Cog}(U)$ resultan cerradas bajo extensiones, para esto, encontramos la relación entre las propiedades de dichas clases y las propiedades del módulo U. Para lo anterior, es necesario introducir conceptos especiales de proyectividad (en el caso de $\mathrm{Gen}(U)$ y $\sigma[U]$) e inyectividad (para el caso de $\mathrm{Cog}(U)$).

Los primeros resultados, muestran que $\mathrm{Gen}(U)$ es cerrada bajo extensiones si y sólo si U es auto-pseudo-proyectivo, además nos proporcionan otros criterios para establecer cuando $\mathrm{Gen}(U)$ tiene esta propiedad.

Introducción

Las clases de módulos con propiedades determinadas juegan un importante papel en diversos aspectos de la Teoría de Anillos y Módulos, por ejemplo; dada una clase C, de módulos, una de las cuestiones más importantes en la Teoría de Torsiones, así como en la Teoría de clases de Serre, es la de determinar cuando C es una clase cerrada bajo extensiones, es decir, dada una sucesión exacta corta con extremos en C, determinar cuando el centro de dicha sucesión también pertenece a C. Muchas de estas clases pueden ser determinadas por un solo módulo. Describir algunas de estas clases es nuestro interés principal. Inicialmente consideraremos dos clases de este tipo: $\mathrm{Gen}(U)$ y $\mathrm{Cog}(U)$ (la clase generada por U y la clase cogenerada por U, respectivamente), las cuales en general no son clases cerradas bajo extensiones, después extenderemos los resultados a las subcategorías cerradas $\sigma[M]$ de $R-\mathsf{Mod}$.

El objetivo central de este trabajo es caracterizar a los módulos U, para los cuales $\mathrm{Gen}(U)$, $\sigma[U]$ y $\mathrm{Cog}(U)$ resultan cerradas bajo extensiones, para esto, encontramos la relación entre las propiedades de dichas clases y las propiedades del módulo U. Para lo anterior, es necesario introducir conceptos especiales de proyectividad (en el caso de $\mathrm{Gen}(U)$ y $\sigma[U]$) e inyectividad (para el caso de $\mathrm{Cog}(U)$).

Los primeros resultados, muestran que $\mathrm{Gen}(U)$ es cerrada bajo extensiones si y sólo si U es auto-pseudo-proyectivo, además nos proporcionan otros criterios para establecer cuando $\mathrm{Gen}(U)$ tiene esta propiedad.

Posterior a esto, encontramos que la equivalencia entre los conceptos auto-pseudo-proyectivo y auto-ext-proyectivo está completamente determinada por el hecho de que el anillo de endomorfismos del módulo en cuestión, tenga la propiedad ser perfecto derecho, además de cierta propiedad de minimalidad para el mismo módulo.

Por otro lado, puesto que los módulos pseudo-proyectivos en particular son auto-pseudo-proyectivos, es de esperarse, que obtengamos mayor información acerca de su clase generada, por lo que tenemos la siguiente equivalencia: U es pseudo-proyectivo si y sólo si $(\mathrm{Gen}(U), \mathtt{F}(\mathrm{Gen}(U)))$ es una teoría de torsión cohereditaria, lo cual también es equivalente, a que el prerradical asociado a $\mathrm{Gen}(U)$ (la traza), resulte ser un radical o equivalentemente que dicho prerradical preserve epimorfismos. Más aún; la propiedad de un módulo U de ser pseudo-proyectivo queda completamente determinada por su ideal traza T (el cual resulta idempotente). Así mismo, dicho ideal caracteriza a las clases $\mathrm{Gen}(U)$ y $\mathtt{F}(\mathrm{Gen}(U))$. Lo anterior se debe a que es suficiente que $U = TU$, para que el módulo U sea pseudo-proyectivo. El hecho anterior a su vez es equivalente a dar una descripción de las presentaciones proyectivas de U en términos de su traza.

Para $\sigma[U]$ tenemos que: ésta es cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$ si y sólo si $\sigma[U]$ es una clase de torsión hereditaria en $\sigma[M]$. Para estudiar este caso recordemos que siempre existe un generador G en $\sigma[U]$. Entonces $\mathrm{Gen}(G) = \sigma[U]$ y podemos referirnos a los resultados anteriores. Notemos que esto no es completamente satisafactorio porque no podemos inferir esta propiedad a partir de las propiedades del módulo M. Las condiciones para que $\sigma[U]$ sea cerrada bajo extensiones, son similares a las que mencionamos antes para $\mathrm{Gen}(U)$, por ejemplo; $\sigma[U]$ cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$ si y sólo si existe un generador de $\sigma[U]$ que es auto-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$. Una de las aplicaciones más interesantes a este hecho, es que para verificar que $\sigma[U]$ es cerrada bajo extensiones, basta verificar que esto sucede para sucesiones exactas con término medio cíclico.

La existencia de un generador pseudo-proyectivo de $\sigma[U]$ está íntimamente relacionada con el hecho de que todo generador en $\sigma[U]$, sea un $T-$módulo $s-$unitario (con T el ideal traza), así como con el concepto de anillo cociente plano y con algunas descripciones de R en términos de T y de los elementos del generador. Todo lo anterior desemboca en dar condiciones para que $\mathrm{Gen}(T)$ con T un ideal idempotente se convierta en una subcategoría cerrada de $R-\mathsf{Mod}$.

También tenemos que la propiedad de que $\sigma[U]$ sea estable en $\sigma[M]$, es equivalente a que $\sigma[U]$ sea cerrada bajo cápsulas M-inyectivas (entre otras condiciones).

Para concluir, observemos que la propiedad de que $\mathrm{Cog}(U)$ sea cerrada bajo extensiones, es completamente dual (en el sentido estricto) al hecho de que $\mathrm{Gen}(U)$ sea cerrada bajo extensiones, por lo que prácticamente para cada concepto y para cada resultado que relacione U con $\mathrm{Gen}(U)$, obtenemos por medio de definiciones y argumentaciones duales, un resultado que relaciona U y $\mathrm{Cog}(U)$. Para concretar lo anterior, mencionaremos los siguientes resultados:

- $\mathrm{Cog}(U)$ es cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$ si y sólo si U es auto-pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$.

- U es pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$ si y sólo si $(\mathrm{T}(\mathrm{Cog}(U)), \mathrm{Cog}(U))$ es una teoría de torsión hereditaria en $\sigma[M]$, lo cual también es equivalente a que el prerradical asociado a $\mathrm{Cog}(U)$ (el rechazo) sea idempotente, o bien, que dicho prerradical sea hereditario.

Al estructurar este trabajo, la intención fue que estuviera auto-contenido (en la medida de lo posible), razón por la cual, está dividido en tres partes. En la primera parte se dan definiciones y resultados que no necesariamente corresponden a la Teoría General de Anillos y Módulos, los cuales son estrictamente necesarios para abordar el contenido central de esta tesis

(Capítulo 2). En la segunda parte se desarrollan cada uno de los conceptos y de los resultados que fueron mencionados en la presente introducción. Finalmente, la tercera parte consta de un apéndice, donde se encuentran definiciones y resultados que corresponden a la Teoría General de Anillos y Módulos, mismos que fueron usados para obtener algunos de los resultados.

Cabe mencionar que este trabajo está basado en el artículo "On module classes closed under extensions" publicado en 1996, por el Dr. Robert Wisbauer ([Wis96]).

Francisco Javier Santillán Covarrubias
Noviembre de 2002.

Notación

$\mathsf{An}_R(m)$	$\{r \in R \mid rm = 0\}$ con $m \in M$
$\mathrm{Cog}(M)$	clase de módulos M-cogenerados (ver 2)
$E(N)$	cápsula R-inyectiva de N (ver 62)
$\mathrm{End}(N)$	anillo de endomorfismos de N
$\mathrm{Gen}(M)$	clase de módulos M-generados (ver 2)
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	conjunto de $R-$homomorfismos de M en N
$(I : a)$	$\{r \in R \mid ra \in I\}$
$\mathrm{Im}\ f$	imágen del homomorfismo f
$\mathrm{Jac}(R)$	radical de Jacobson de R
$K \subseteq_e N$	K es un submódulo esencial de N (ver 59)
$K \ll N$	K es un submódulo superfluo de N (ver 64)
$\widehat{N}$	cápsula M-inyectiva de N (ver 7)
$\widehat{N}_U$	cápsula U-inyectiva de N (ver 47)
$\mathrm{Nuc}\ f$	núcleo del homomorfismo f
$R - \mathsf{Mod}$	categoría de $R-$módulos izquierdos (ver 1)
$\mathbf{r}$	prerradical de $R - \mathsf{Mod}$ (ver 9)
$\mathrm{Rad}(M)$	radical de Jacobson de M
$\mathrm{Re}(N, M)$	rechazo de M en N (ver 4)
$\sigma[M]$	subcategoría plena de $R-$módulos subgenerados por M
$\mathrm{Tr}(M, N)$	traza de M en N (ver 4)
$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	grupo de Prüfer

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Clases relacionadas con un módulo dado

Sea R un anillo asociativo con elemento unitario y $R-\mathsf{Mod}$ la categoría de $R-$módulos izquierdos unitarios. M siempre denotará un $R-$módulo izquierdo y los homomorfismos siempre serán $R-$homomorfismos actuando por la izquierda. Una *subcategoría plena de* $R-\mathsf{Mod}$, es una subcategoría en la cual los homomorfismos coinciden con los homomorfismos de $R-\mathsf{Mod}$. Una subcategoría plena $\mathcal{C}$ de $R-\mathsf{Mod}$, cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas es llamada *subcategoría cerrada.*

Dado un $R-$módulo M definimos la clase de módulos M*-generados,*

$$\mathrm{Gen}(M) = \{N \in R-\mathsf{Mod} \mid \text{existe un epimorfismo } M^{(\Lambda)} \longrightarrow N, \text{ para algún conjunto } \Lambda\ \},$$

Dos de las propiedades más importantes de $\mathrm{Gen}(M)$ están dadas por:

Proposición 1.1.1. *Sea M un $R-$módulo izquierdo.*

(1) *Si $N \in \mathrm{Gen}(M)$, entonces todo cociente de N también está en $\mathrm{Gen}(M)$.*

(2) *Si $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathrm{Gen}(M)$, entonces $\oplus_A N_\alpha \in \mathrm{Gen}(M)$ para todo conjunto A.*

Prueba. (1) Sea $N \in \text{Gen}(M)$ y $N' \subseteq N$. Entonces existe un epimorfismo $f : M^{(\Lambda)} \longrightarrow N$, para algún conjunto Λ. Si $p : N \longrightarrow N/N'$ es la proyección al cociente, entonces $pf : M^{(\Lambda)} \longrightarrow N/N'$, también es un epimorfismo, es decir, $N/N' \in \text{Gen}(M)$.

(2) Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de $R-$módulos en $\text{Gen}(M)$, entonces existen epimorfismos $f_\alpha : M^{(B_\alpha)} \longrightarrow N_\alpha$ para algún conjunto B_α para cada $\alpha \in A$. Para la familia de homomorfismos $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, existe por la propiedad universal de la suma directa un único homomorfismo $f : \oplus_A M^{(B_\alpha)} \longrightarrow \oplus_A N_\alpha$ que extiende a $i_\alpha f_\alpha$, con $\text{Im } f = \sum_A \text{Im } f_\alpha$. Sea $C = \bigsqcup_A B_\alpha$, entonces $\oplus_A M^{(B_\alpha)} \cong M^{(C)}$, con lo que $\oplus_A N_\alpha \in \text{Gen}(M)$ para todo conjunto A. □

Dualmente definimos la clase de módulos *M-cogenerados,*

$$\text{Cog}(M)=\{N \in R - \mathsf{Mod} \mid \text{existe un monomorfismo } N \longrightarrow M^\Lambda, \text{ para algún conjunto } \Lambda\ \},$$

Desde luego, son válidas las afirmaciones duales a 1.1.1 para $\text{Cog}(M)$:

Proposición 1.1.2. *Sea M un $R-$módulo izquierdo.*

(1) *Si $N \in \text{Cog}(M)$ y N' es un submódulo de N, entonces $N' \in \text{Cog}(M)$.*

(2) *Si $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \text{Cog}(M)$, entonces $\prod_A N_\alpha \in \text{Cog}(M)$ para todo conjunto A.*

Prueba. Dual a 1.1.1. □

Las proposiciones anteriores nos dicen que $\text{Gen}(M)$ es el prototipo de clase de módulos cerrada bajo sumas directas y cocientes mientras que $\text{Cog}(M)$ es cerrada bajo submódulos y productos directos.

Consideradas como subcategorías plenas de $R - \mathsf{Mod}$, $\text{Gen}(M)$ es una categoría cocompleta con conúcleos y $\text{Cog}(M)$ es una categoría completa con núcleos.

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización muy útil de Gen(M) y Cog(M).

Proposición 1.1.3. *Sean M y N $R-$módulos izquierdos. Entonces;*

(1) $N \in \mathrm{Gen}(M)$ *si y sólo si existe un subconjunto* $H \subseteq \mathrm{Hom}_R(M,N)$ *con* $N = \sum_{h\in H} \mathrm{Im}\ h$.

(2) $N \in \mathrm{Cog}(M)$ *si y sólo si existe un subconjunto* $H \subseteq \mathrm{Hom}_R(N,M)$ *con* $0 = \bigcap_{h\in H} \mathrm{Nuc}\ h$.

Prueba. (1) Supongamos que $N \in \mathrm{Gen}(M)$. Entonces existe un epimorfismo $g : M^{(\Lambda)} \longrightarrow N$, para algún conjunto Λ. Para cada $\lambda \in \Lambda$, tenemos la inclusión $i_\lambda : M \longrightarrow M^{(\Lambda)}$, entonces para la familia de homomorfismos $\{g_\lambda := gi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, tenemos por la propiedad universal de la suma directa que g es el homomorfismo inducido y por lo tanto $\mathrm{Im}\ g = \sum_\Lambda \mathrm{Im}\ g_\lambda$. Entonces, si $H = \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, tenemos que $\sum_{h\in H} \mathrm{Im}\ h = N$.

Ahora supongamos que existe un subconjunto $H \subseteq \mathrm{Hom}_R(M,N)$, con $N = \sum_{h\in H} \mathrm{Im}\ h$. Entonces para la familia de morfismos en H, por la propiedad universal de la suma directa existe $\bar{h} : M^{(H)} \longrightarrow N$, con $\mathrm{Im}\ \bar{h} = \sum_{h\in H} \mathrm{Im}\ h$, con lo que $\bar{h}$ es un epimorfismo y por lo tanto $N \in \mathrm{Gen}(M)$.

(2) Dual a (1). □

Una reformulación de la proposición anterior que se usará a lo largo de este trabajo es la siguiente:

Proposición 1.1.4. *Sean M, N y L, $R-$módulos izquierdos. Entonces;*

(1) $N \in \mathrm{Gen}(M)$ *si y sólo si para todo homomorfismo distinto de cero* $f : N \longrightarrow L$ *existe* $h \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ *tal que* $fh \neq 0$;

(2) $N \in \mathrm{Cog}(M)$ *si y sólo si para todo homomorfismo distinto de cero* $f : L \longrightarrow N$ *existe* $h \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ *tal que* $hf \neq 0$.

Prueba. (1) Sea $H = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ y $T = \sum_H \mathrm{Im}\ h \subseteq N$. Si $f : N \longrightarrow L$ es un homomorfismo, entonces $fh = 0$ para todo $h \in H$ si y sólo si $T \leq \mathrm{Nuc}\ f$. Si suponemos que $N \in \mathrm{Gen}(M)$, entonces por la proposición anterior $T = N$, en consecuencia $N = \mathrm{Nuc}\ f$, lo que nos dice que $f = 0$, por lo tanto si $f \neq 0$ existe $h \in H$ para el cual $fh \neq 0$.

Para el recíproco, sea $f : N \longrightarrow N/T$, la proyección al cociente, entonces $fh \neq 0$ para algún $h \in H$. Si $N/T \neq 0$ entonces como $\mathrm{Im}\ h \subseteq T$, tenemos que $fh = 0$. Esto es una contradicción, por lo tanto $N/T = 0$, es decir $N = T$, y por la proposición anterior tenemos que $N \in \mathrm{Gen}(M)$.

(2) Sea $H = \mathrm{Hom}_R(N, M)$, $K = \bigcap_H \mathrm{Nuc}\ h \subseteq N$ y $f : L \longrightarrow N$ un homomorfismo distinto de cero. Supongamos que $hf = 0$ para toda $h \in H$, entonces $\mathrm{Im}\ f \subseteq \mathrm{Nuc}\ h$, para toda $h \in H$, por lo que $\mathrm{Im}\ f \subseteq K$. Si M cogenera N entonces por la proposición anterior tenemos que $K = 0$, y por lo tanto $f = 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto existe $h \in H$, con $hf \neq 0$.

En la otra dirección, sea $i : K \longrightarrow N$, la inclusión, entonces existe $h \in H$ con $hi \neq 0$. Como $\mathrm{Nuc}\ h \supset K$, entonces $hi = 0$, por lo tanto $i = 0$, es decir, $K = 0$, por la proposición anterior esto significa que M cogenera N. □

1.2 La traza y el rechazo de un módulo

Definición 1.2.1. Dados M y N en $R-\mathrm{Mod}$, definimos la *traza* y el *rechazo de M en N* como

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M,N) &= \sum\{\mathrm{Im}\ f \mid f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)\}, \text{ y}\\ \mathrm{Re}(N,M) &= \bigcap\{\mathrm{Nuc}\ f \mid f \in \mathrm{Hom}_R(N,M)\}.\end{aligned}$$

Estos submódulos de N están caracterizados por la siguiente propiedad:

Proposición 1.2.2. *Para M y N en $R-\mathrm{Mod}$, tenemos que:*

(1) $\mathrm{Tr}(M, N)$ *es el mayor submódulo de N generado por M.*

(2) $\mathrm{Re}(N, M)$ *es el menor submódulo de* N *tal que* $N/\mathrm{Re}(N, M)$ está cogenerado por M.

Prueba. (1) Sea $L \subseteq N$, $L \in \mathrm{Gen}(M)$. Entonces existe un epimorfismo $h : M^{(\Lambda)} \longrightarrow L$ para algún conjunto Λ. Si $i_\lambda : M \longrightarrow M^{(\Lambda)}$ es la inclusión entonces por la propiedad universal de la suma directa h resulta ser el morfismo inducido por la familia $\{hi_\lambda\}_\Lambda$, por lo tanto $L = \mathrm{Im}\ h = \sum_\Lambda \mathrm{Im}\ hi_\lambda \subseteq \mathrm{Tr}(M, N)$.

Sea $H = \mathrm{Hom}_R(M, N)$, entonces $\mathrm{Tr}(M, N) = \sum_H \mathrm{Im}\ h$. Entonces la familia H, induce un homomorfismo $\bar{h} : M^{(H)} \longrightarrow N$, con $\mathrm{Im}\ \bar{h} = \sum_H \mathrm{Im}\ h$, por lo tanto $\bar{h} : M^{(H)} \longrightarrow \mathrm{Tr}(M, N)$, es un epimorfismo, con lo que $\mathrm{Tr}(M, N) \in \mathrm{Gen}(M)$.

(2) Sea $K \subseteq N$ tal que $N/K \in \mathrm{Cog}(M)$, entonces existe un monomorfismo $h : N/K \longrightarrow M^\Lambda$,para algún conjunto Λ. Sean $p : N \longrightarrow N/K$ y $\pi_\lambda : M^\Lambda \longrightarrow M$, las respectivas proyecciones. Por la propiedad universal del producto directo hp es el morfismo inducido por la familia $\{\pi_\lambda hp\}_\Lambda$, por lo tanto $K = \mathrm{Nuc}\ hp = \bigcap_\Lambda \mathrm{Nuc}\ \pi_\lambda hp \supset \mathrm{Re}(N, M)$. Sea $H = \mathrm{Hom}_R(N, M)$, por la propiedad universal del producto directo existe $\bar{h} : N \longrightarrow M^H$, con $\mathrm{Nuc}\ \bar{h} = \mathrm{Re}(N, M)$, por lo tanto existe un monomorfismo de $N/\mathrm{Re}(N, M)$ en M^H, es decir, $N/\mathrm{Re}(N, M)$ está cogenerado por M. □

Por el resultado anterior tenemos que la *traza* y el *rechazo* están fuertemente relacionados con las clases $\mathrm{Gen}(M)$ y $\mathrm{Cog}(M)$ respectivamente. Dicha relación queda expresada de la siguiente manera:

Corolario 1.2.3. *Sean* M *y* N *módulos. Entonces;*

(1) $N \in \mathrm{Gen}(M)$ *si y sólo si* $\mathrm{Tr}(M, N) = N$.

(2) $N \in \mathrm{Cog}(M)$ *si y sólo si* $\mathrm{Re}(N, M) = 0$.

Una de las propiedades más importantes de la *traza* y el *rechazo* es la de ser submódulos invariantes bajo homomorfismos:

Proposición 1.2.4. *Sean* M, N *y* L *módulos, y sea* $f : N \longrightarrow L$ *un homomorfismo. Entonces*

$$f(\mathrm{Tr}(M,N)) \subseteq \mathrm{Tr}(M,L) \text{ y } f(\mathrm{Re}(N,M)) \subseteq \mathrm{Re}(L,M).$$

Prueba. Para la primera afirmación simplemente observemos que si $h \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, entonces $fh \in \mathrm{Hom}_R(M,L)$ y $f(\mathrm{Im}\ h) = \mathrm{Im}\ fh \subset \mathrm{Tr}(M,L)$. Para la segunda, si $x \in \mathrm{Re}(N,M)$ y $h \in \mathrm{Hom}_R(L,M)$, entonces $hf \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ y por lo tanto $hf(x) = 0$, es decir, $f(x) \in \mathrm{Nuc}\ h$ para toda $h \in \mathrm{Hom}_R(L,M)$, por lo que $f(x) \in \mathrm{Re}(L,M)$. □

1.3 La categoría $\sigma[M]$

Para estudiar las propiedades del módulo M formamos la siguiente subcategoría plena de $R-$ Mod,

$$\sigma[M] = \{N \in R-\mathrm{Mod} \mid N \text{ es submódulo de un módulo } M\text{-generado}\}.$$

$\sigma[M]$ es cerrada bajo sumas directas, núcleos y conúcleos. Por lo tanto existen en $\sigma[M]$ productos fibrados y sumas fibradas (ver A.8 y A.9). En $\sigma[M]$, existe el producto de cualquier familia de módulos aunque este no necesariamente coincide con el producto en $R-$ Mod, por ejemplo, si $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{Z} \mid p \text{ es primo}\}$ y $M = \oplus_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}_p$, entonces $\mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$ y por lo tanto $\prod_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$. Ahora, utilizando el hecho de que cualquier suma directa de grupos de torsión es de torsión y que cocientes de un grupo de torsión, nuevamente son de torsión, concluimos que $\prod_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$ es un grupo de torsión (como grupo abeliano), por lo tanto $\prod_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$, no puede ser isomorfo a $\prod_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}_p \in \mathbb{Z}-$ Mod que no es de torsión.

Observación 1.3.1. Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría cerrada de $R-$ Mod tal que $M \in \mathcal{C}$. Si $N \in \sigma[M]$, N es submódulo de un módulo M-generado, es decir, N es submódulo de un cociente de una suma directa de copias de M, como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas entonces $N \in \mathcal{C}$. En otras palabras, $\sigma[M]$ es la menor subcategoría cerrada de $R-$ Mod que contiene al módulo M.

Más aún:

Proposición 1.3.2. *Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría cerrada de $R-\mathsf{Mod}$ entonces $\mathcal{C}$ es de la forma $\sigma[M]$ para algún $M \in R-\mathsf{Mod}$.*

Prueba. Sea X un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos que pertenecen a $\mathcal{C}$ y sea $M = \oplus_{x\in X} Rx$. Entonces es claro que $M \in \mathcal{C}$ y por la observación anterior $\sigma[M] \subseteq \mathcal{C}$. Por otro lado, si $K \in \mathcal{C}$ y $k \in K$, entonces $Rk \hookrightarrow M$, por lo que $Rk \in \sigma[M]$ para todo $k \in K$, con lo que $\oplus_{k\in K} Rk \in \sigma[M]$, y como la suma es un cociente de la suma directa entonces $\sum_{k\in K} Rk = K \in \sigma[M]$. □

También tenemos que:

Proposición 1.3.3. *Los conjuntos*

$$\mathcal{M}_e = \{K \subseteq M^{(\mathbb{N})} \mid K \textit{ finitamente generado } \} \textit{ y } \mathcal{M}_z = \{Rm \mid m \in M^{(\mathbb{N})}\}$$

son conjuntos de generadores en $\sigma[M]$.

Prueba. Sea $N \in \sigma[M]$. Como ya hemos visto, es suficiente probar que todo submódulo cíclico $Rn \subseteq N$, $n \in N$, está generado por $\mathcal{M}_z$ (y por lo tanto por $\mathcal{M}_e$): Por definición existe un módulo M-generado $\widetilde{N}$ con $N \subseteq \widetilde{N}$. Sea $\varphi : M^{(\Lambda)} \longrightarrow \widetilde{N}$ un epimorfismo y sea $m \in M^{(\Lambda)}$ tal que $\varphi(m) = n \in N$. Entonces $m \in M^{(\mathbb{N})}$, es decir, $Rm \in \mathcal{M}_z$ y la restricción $\varphi\mid_{Rm}: Rm \longrightarrow Rn$ es un epimorfismo. □

Por lo anterior, $\sigma[M]$ tiene generador, por ejemplo,

$$G := \bigoplus\{Rm \mid m \in M^{(\mathbb{N})}\}, \text{ es un generador de } \sigma[M].$$

También tenemos que cualquier $N \in \sigma[M]$ tiene ***cápsula inyectiva*** en $\sigma[M]$, también llamada cápsula M-inyectiva de N, y usualmente denotada por $\widehat{N}$. $\widehat{N}$ es isomorfa a la traza de M en la cápsula inyectiva $E(N)$ de N en $R-\mathsf{Mod}$, es decir, $\widehat{N} = \mathrm{Tr}(M, E(N))$. Es muy conocido que $\widehat{N}$ es la mayor extensión esencial de N en $\sigma[M]$, (ver A.3.2).

Las propiedades internas de $\mathrm{Gen}(M)$ y $\sigma[M]$ están determinadas por las propiedades internas de M, es decir, son propiedades relacionadas con M

mismo, como la M-proyectividad o la M-inyectividad. Por ejemplo, independientemente del anillo R, para un módulo semisimple, todos los módulos en $\sigma[M]$ son M-inyectivos y M-proyectivos.

Para un estudio extensivo de las propiedades de $\sigma[M]$ ver [Wis91: C3-s15].

1.4 Clases de módulos cerradas bajo extensiones

Definición 1.4.1. Sea M un R−módulo izquierdo. Para dos clases de módulos $\mathtt{C}$ y $\mathtt{D}$ en $\sigma[M]$ denotamos por $\mathtt{E}_M(\mathtt{D},\mathtt{C})$ a la clase de R−módulos N, para los cuales existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow N \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

en $\sigma[M]$, donde $C \in \mathtt{C}$ y $D \in \mathtt{D}$.

Decimos que $\mathtt{C}$ es *cerrada bajo extensiones en* $\sigma[M]$ si $\mathtt{C} = \mathtt{E}_M(\mathtt{C},\mathtt{C})$.

En el caso de que $\sigma[M] = R-\mathsf{Mod}$ escribimos $\mathtt{E}(\mathtt{D},\mathtt{C}) := \mathtt{E}_M(\mathtt{D},\mathtt{C})$.

Proposición 1.4.2. *Sean* $\mathtt{C}$ *y* $\mathtt{D}$ *subclases de* $R-\mathsf{Mod}$ *cerradas bajo isomorfismos. Para cualquier ideal izquierdo* I *de* R, $R/I \in \mathtt{E}(\mathtt{D},\mathtt{C})$ *si y sólo si existe un ideal izquierdo* $J \supset I$ *de* R, *tal que* $J/I \in \mathtt{C}$ *y* $R/J \in \mathtt{D}$.

Prueba. Supongamos que $R/I \in \mathtt{E}(\mathtt{D},\mathtt{C})$. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} R/I \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

con $C \in \mathtt{C}$ y $D \in \mathtt{D}$. Para un único ideal izquierdo $J \supset I$ de R, con $\mathrm{Im}\, f = J/I$, $J/I \cong C \in \mathtt{C}$ y $R/J \cong D \in \mathtt{D}$. La otra implicación es trivial. □

En la siguiente proposición observaremos que las propiedades de $\mathtt{C}$ y $\mathtt{D}$ son transferidas a $\mathtt{E}(\mathtt{D},\mathtt{C})$.

Proposición 1.4.3. *Sean* $\mathtt{C}$ *y* $\mathtt{D}$ *subclases de* $\sigma[M]$.

(i) *Si* $\mathtt{C}$ *y* $\mathtt{D}$ *son cerradas bajo submódulos (cocientes, sumas directas) entonces* $\mathrm{E}_M(\mathtt{D},\mathtt{C})$ *es también cerrada bajo submódulos (respectivamente bajo cocientes y sumas directas).*

(ii) *Si* $\mathtt{C}$ *y* $\mathtt{D}$ *son subcategorías cerradas de* $R-\mathsf{Mod}$ *entonces* $\mathrm{E}_M(\mathtt{D},\mathtt{C})$ *también es una subcategoría cerrada de* $\sigma[M]$.

Prueba. (i) Sea $0 \longrightarrow C \longrightarrow N \longrightarrow D \longrightarrow 0$, una sucesión exacta en $\sigma[M]$ con $C \in \mathtt{C}$ y $D \in \mathtt{D}$. Si $0 \longrightarrow L \longrightarrow N$ es exacta, formando el diagrama de producto fibrado* obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P^* & \longrightarrow & L & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & N & \longrightarrow & D & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Si $\mathtt{C}$ y $\mathtt{D}$ son cerradas bajo submódulos tenemos que $P \in \mathtt{C}$ y $Q \in \mathtt{D}$ y por lo tanto $L \in \mathrm{E}_M(\mathtt{D},\mathtt{C})$. Las otras afirmaciones se prueban de manera similar usando las propiedades de la suma fibrada y la propiedad universal de la suma directa respectivamente.

(ii) Es consecuencia de (i). □

1.5 Prerradicales

Definición 1.5.1. Un prerradical $\mathbf{r}$ en $R-\mathsf{Mod}$ asigna a cada $R-$módulo N un submódulo $\mathbf{r}(N)$, de tal forma que cada homomorfismo $N \longrightarrow L$, induce un homomorfismo $\mathbf{r}(N) \longrightarrow \mathbf{r}(L)$ por medio de la restricción, es decir, un prerradical es un subfuntor del funtor identidad en la categoría de $R-$módulos.

Un prerradical es idempotente si $\mathbf{rr} = \mathbf{r}$ y se llama radical si $\mathbf{r}(N/\mathbf{r}(N)) = 0$, para todo $R-$módulo N.

Si $\mathbf{r}$ es un prerradical en $R-\mathsf{Mod}$, entonces $\mathbf{r}(R)$ es un ideal bilateral pues es invariante bajo todos lo endomorfismos de ${}_RR$.

Además tenemos las siguientes propiedades:

Lema 1.5.2. *Sea* $\mathbf{r}$ *un prerradical en* $R-\mathsf{Mod}$ *entonces son válidas las siguientes afirmaciones:*

(i) *Para cualquier familia de módulos* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\mathbf{r}(\oplus_A N_\alpha) = \oplus_A \mathbf{r}(N_\alpha)$.

(ii) *Para cualquier módulo* N *se tiene* $\mathbf{r}(R)N \subseteq \mathbf{r}(N)$.

(iii) *Si* N *es un módulo proyectivo entonces* $\mathbf{r}(N) = \mathbf{r}(R)N$.

(iv) *Si* $\mathbf{r}(L/K) = (\mathbf{r}(L)+K)/K$ *para todo* $R-$*módulo libre* L *con* $K \subseteq L$, *entonces* $\mathbf{r}(M/N) = (\mathbf{r}(M)+N)/N$ *para todo* $M \in R-\mathsf{Mod}$ *con* $N \subseteq M$.

Prueba. (i) Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de módulos e $i_\alpha : N_\alpha \longrightarrow \oplus_A N_\alpha$, la inclusión, ésta induce un monomorfismo $\bar{i}_\alpha : \mathbf{r}(N_\alpha) \longrightarrow \mathbf{r}(\oplus_A N_\alpha)$ para cada $\alpha \in A$, de tal forma que $\bar{i}_\alpha = i_\alpha \mid_{\mathbf{r}(N_\alpha)}$. Ahora, por la propiedad universal de la suma directa, la familia $\{\bar{i}_\alpha\}_{\alpha\in A}$, induce un homomorfismo $\varphi : \oplus_A \mathbf{r}(N_\alpha) \longrightarrow \mathbf{r}(\oplus_A N_\alpha)$ con Nuc $\varphi = \oplus_A$ Nuc $\bar{i}_\alpha = 0$, por lo que $\oplus_A \mathbf{r}(N_\alpha) \subseteq \mathbf{r}(\oplus_A N_\alpha)$.

Ahora consideremos la proyección $\pi_\alpha : \oplus_A N_\alpha \longrightarrow N_\alpha$. Y sea $\bar{\pi}_\alpha : \mathbf{r}(\oplus_A N_\alpha) \longrightarrow \mathbf{r}(N_\alpha)$ el homomorfismo inducido por π_α, es decir, $\bar{\pi}_\alpha = \pi_\alpha \mid_{\mathbf{r}(\oplus_A N_\alpha)}$ y sea $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathbf{r}(\oplus_A N_\alpha)$ entonces $\bar{\pi}_\alpha((x_\alpha)_{\alpha\in A}) = x_\alpha \in \mathbf{r}(N_\alpha)$, para toda $\alpha \in A$, por lo tanto $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \oplus_A \mathbf{r}(N_\alpha)$, es decir, $\oplus_A \mathbf{r}(N_\alpha) = \mathbf{r}(\oplus_A N_\alpha)$.

(ii) Consideremos el homomorfismo $\varphi : R^{(N)} \longrightarrow N$, definido por $(r_n)_{n\in N} \mapsto \sum_{n\in N} r_n n$, este induce un homomorfismo $\bar{\varphi} : \mathbf{r}(R^{(N)}) \longrightarrow \mathbf{r}(N)$. Entonces por (i), tenemos que $\mathbf{r}(R^{(N)}) = \mathbf{r}(R)^{(N)}$, y como $\bar{\varphi} = \varphi \mid_{\mathbf{r}(R^{(N)})}$, entonces Im $\bar{\varphi} = \{\sum_{i=1}^{k} a_i n_i \mid a_i \in \mathbf{r}(R), n_i \in N\} = \mathbf{r}(R)N$, por lo tanto $\mathbf{r}(R)N \subseteq \mathbf{r}(N)$.

(iii) Sea N un módulo proyectivo, entonces existe un módulo libre F tal que $F = N \oplus K$. Sin pérdida de la generalidad supongamos que $F = R^{(I)}$, para algún conjunto I. Nuevamente, por (i), tenemos que $\mathbf{r}(F) = \mathbf{r}(R^{(I)}) = \mathbf{r}(R)^{(I)} = (\mathbf{r}(R)R)^{(I)} = \mathbf{r}(R)R^{(I)} = \mathbf{r}(R)F$ y también $\mathbf{r}(N) \oplus \mathbf{r}(K) = \mathbf{r}(F) = \mathbf{r}(R)F = \mathbf{r}(R)(N \oplus K) = \mathbf{r}(R)N \oplus \mathbf{r}(R)K$. Por (ii), tenemos que $\mathbf{r}(R)N \subseteq \mathbf{r}(N)$ y $\mathbf{r}(R)K \subseteq \mathbf{r}(K)$, por lo tanto $\mathbf{r}(N) = \mathbf{r}(R)N$.

(iv) Sea $M \in R-\mathsf{Mod}$ y $N \subseteq M$, y sean $\alpha : L \longrightarrow M$ un epimorfismo con L libre, $L' := \alpha^{-1}(N)$, $p : M \longrightarrow M/N$, y $\pi : L \longrightarrow L/L'$ las proyecciones al cociente, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\pi} & L/L' \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ M & \xrightarrow{p} & M/N \end{array}$$

con β un isomorfismo. Este diagrama induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r}(L) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbf{r}(L/L') \\ {\scriptstyle\bar{\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\beta}} \\ \mathbf{r}(M) & \xrightarrow{\bar{p}} & \mathbf{r}(M/N) \end{array}$$

con $\bar{\beta}$ también isomorfismo. La hipótesis nos dice que $\bar{\pi}$ es un epimorfismo, lo que implica que $\bar{p}$ también lo es, es decir, $\mathbf{r}(M/N) = \operatorname{Im} \bar{p} = \mathbf{r}(M)/(\mathbf{r}(M) \cap N) \cong (\mathbf{r}(M) + N)/N$. $\square$

Otra propiedad que nos será de gran utilidad en algunos resultados posteriores es la siguiente:

Lema 1.5.3. *Sea* $\mathbf{r}$ *un radical y* $K \subseteq \mathbf{r}(N)$*, entonces* $\mathbf{r}(N/K) = \mathbf{r}(N)/K$.

Prueba. La proyección al cociente $p : N \longrightarrow N/K$, induce un homomorfismo $\bar{p} : \mathbf{r}(N) \longrightarrow \mathbf{r}(N/K)$, tal que $\bar{p} = p\,|_{\mathbf{r}(N)}$, por lo que $\operatorname{Nuc} \bar{p} = \operatorname{Nuc} p \cap \mathbf{r}(N) = K \cap \mathbf{r}(N) = K$, entonces tenemos que $\mathbf{r}(N)/K \cong \operatorname{Im} \bar{p} \subseteq \mathbf{r}(N/K)$. Por otro lado, como $K \subseteq \mathbf{r}(N)$, podemos definir el homomorfismo $\alpha : N/K \longrightarrow N/\mathbf{r}(N)$ como $n + K \mapsto n + \mathbf{r}(N)$, y éste induce un homomorfismo $\bar{\alpha} : \mathbf{r}(N/K) \longrightarrow \mathbf{r}(N/\mathbf{r}(N))$. Como $\mathbf{r}$ es un radical tenemos que $\bar{\alpha} = 0$, es decir, $\mathbf{r}(N/K) = \text{Nuc } \bar{\alpha} = \text{Nuc } \alpha \cap \mathbf{r}(N/K) = \mathbf{r}(N)/K \cap \mathbf{r}(N/K)$, por lo que $\mathbf{r}(N/K) \subseteq \mathbf{r}(N)/K$, y en consecuencia tenemos la igualdad. □

Observación 1.5.4. Combinando la proposición 1.2.2, el corolario 1.2.3 y la proposición 1.2.4 obtenemos que $\text{Tr}(M, N)$ es un prerradical idempotente mientras que $\text{Re}(N, M)$ es un radical.

Cabe resaltar que el concepto de prerradical puede introducirse en cualquier categoría abeliana completa, cocompleta y localmente pequeña. En este trabajo nos concentraremos exclusivamente en *la traza* y *el rechazo* de módulos en $\sigma[M]$.

1.6 Teorías de torsión en $\sigma[M]$

Recordaremos algunas nociones básicas de teorías de torsión. Estas técnicas son familiares en $R-$ Mod, aunque es bien sabido que también se aplican a cualquier categoría del tipo de $\sigma[M]$.

Definición 1.6.1. Una clase de módulos $\mathcal{T}$ en $\sigma[M]$ es llamada una

- *clase de pretorsión* si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas y cocientes de módulos;
- *clase de pretorsión hereditaria* si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas, cocientes y submódulos;
- *clase de torsión* si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas, cocientes y extensiones en $\sigma[M]$;
- *clase de torsión hereditaria* si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas, cocientes, submódulos y extensiones en $\sigma[M]$;
- *clase estable* si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones esenciales en $\sigma[M]$;

- *clase TTF* si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo productos directos en $\sigma[M]$, cocientes, submódulos y extensiones en $\sigma[M]$.

Observación 1.6.2. Dado un prerradical $\mathbf{r}$ podemos asociarle dos clases de R−módulos

$$\mathfrak{T}_{\mathbf{r}} = \{N \in R\text{−Mod} \mid \mathbf{r}(N) = N\}, \text{ y}$$
$$\mathfrak{F}_{\mathbf{r}} = \{N \in R\text{−Mod} \mid \mathbf{r}(N) = 0\}$$

$\mathfrak{T}_{\mathbf{r}}$ resulta ser una clase de pretorsión mientras que $\mathfrak{F}_{\mathbf{r}}$ es cerrada bajo submódulos y productos directos. Una consecuencia de lo anterior es que no hay homomorfismos no nulos entre módulos en $\mathfrak{T}_{\mathbf{r}}$ y $\mathfrak{F}_{\mathbf{r}}$. Más aún, si $\mathfrak{T}$ es una clase de pretorsión, M un R−módulo y $\mathbf{t}(M)$ denota la suma de todos los submódulos de M que pertenecen a $\mathfrak{T}$, entonces $\mathbf{t}(M)$ es un cociente de la suma directa de dichos submódulos por lo que $\mathbf{t}(M) \in \mathfrak{T}$. Por lo tanto, $\mathfrak{T}$ contiene un submódulo mayor $\mathbf{t}(M) \in \mathfrak{T}$. En este sentido $\mathfrak{T}$ da a lugar a un prerradical $\mathbf{t}$ de $R-$ Mod. Combinando este procedimiento con la asignación previa $\mathbf{r} \mapsto \mathfrak{T}_{\mathbf{r}}$ restringida a los prerradicales idempotentes, tenemos que existe una correspondencia biyectiva entre los prerradicales idempotentes de $R-$ Mod y las clases de pretorsión de $R-$ Mod. Dualmente, existe una correspondencia biyectiva entre los radicales de $R-$Mod y las clases cerradas bajo submódulos y productos directos de $R-$ Mod.

Observación 1.6.3. Por el Corolario 1.2.3 y la Observación anterior tenemos que $\mathfrak{T}_{\mathrm{Tr}(M,N)} = \mathrm{Gen}(M)$ y $\mathfrak{F}_{\mathrm{Re}(N,M)} = \mathrm{Cog}(M)$, y además $\mathbf{t}_{\mathrm{Gen}(M)} = \mathrm{Tr}(M,N)$ y $\mathbf{r}_{\mathrm{Cog}(M)} = \mathrm{Re}(N,M)$.

Definición 1.6.4. Un par (T,F) de subclases no vacías de $\sigma[M]$ es llamado *teoría de torsión en $\sigma[M]$* si satisface:

(i) $\mathrm{T} = \{T \in \sigma[M] \mid$ para toda $F \in \mathrm{F}$, $\mathrm{Hom}_R(T,F) = 0\}$

(ii) $\mathrm{F} = \{F \in \sigma[M] \mid$ para toda $T \in \mathrm{T}$, $\mathrm{Hom}_R(T,F) = 0\}$

Proposición 1.6.5. *Si (T,F) es una teoría de torsión, entonces T es una clase de torsión y F es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones.*

Prueba. Veamos que la suma directa de cualquier familia de módulos en $\mathtt{T}$ está en $\mathtt{T}$. Sea $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathtt{T}$ entonces $\mathrm{Hom}_R(T_\alpha, F) = 0$ para todo $F \in \mathtt{F}$ y como $\mathrm{Hom}_R(\oplus_I T_\alpha, F) = \prod_I \mathrm{Hom}_R(T_\alpha, F) = 0$, entonces $\oplus_I T_\alpha \in \mathtt{T}$.

Por otro lado, sea $T \in \mathtt{T}$ y $T' \subset T$. Tenemos que ver que $\mathrm{Hom}_R(T/T', F)$ es cero, para todo $F \in \mathtt{F}$, supongamos que $\mathrm{Hom}_R(T/T', F) \neq 0$ para algún $F \in \mathtt{F}$ entonces existe $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(T/T', F)$. Si $p : T \longrightarrow T/T'$ es la proyección al cociente entonces $p \neq 0$ y por lo tanto $0 \neq fp \in \mathrm{Hom}_R(T, F) = 0$, lo cual es una contradicción, así $f = 0$ y entonces $T/T' \in \mathtt{T}$.

Para ver que $\mathtt{T}$ es cerrada bajo extensiones consideremos la sucesión $0 \longrightarrow T' \longrightarrow T \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$ exacta en $\sigma[M]$ con $T', T'' \in \mathtt{T}$. Sea $F \in \mathtt{F}$, aplicando $\mathrm{Hom}_R(\,\cdot\,, F)$ a dicha sucesión obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T'', F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T', F)$$

con lo que $\mathrm{Hom}_R(T, F) = 0$ y por lo tanto $T \in \mathtt{T}$.

Usando argumentos duales obtenemos que $\mathtt{F}$ es cerrada bajo productos, submódulos y extensiones. □

Definición 1.6.6. Una teoría de torsión $(\mathtt{T}, \mathtt{F})$ es llamada *hereditaria* si $\mathtt{T}$ es cerrada bajo submódulos, *cohereditaria* si $\mathtt{F}$ es cerrada bajo cocientes de módulos, y *estable* si $(\mathtt{T}, \mathtt{F})$ es hereditaria y $\mathtt{T}$ es cerrada bajo extensiones esenciales en $\sigma[M]$.

A continuación veremos como cualquier clase de módulos en $\sigma[M]$ puede extenderse a una clase de torsión.

1.6.7 Teorías de torsión generadas y cogeneradas

Definición 1.6.8. Para cualquier subclase $\mathtt{C}$ de $\sigma[M]$ definimos

$$\mathtt{T}(\mathtt{C}) := \{T \in \sigma[M] \mid \text{para toda } C \in \mathtt{C},\ \mathrm{Hom}_R(T, C) = 0\}, \text{ y}$$
$$\mathtt{F}(\mathtt{C}) := \{F \in \sigma[M] \mid \text{para toda } C \in \mathtt{C},\ \mathrm{Hom}_R(C, F) = 0\}$$

Dada esta definición es claro que $\mathtt{C} \subseteq \mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C}))$ y $\mathtt{C} \subseteq \mathtt{F}(\mathtt{T}(\mathtt{C}))$.

Definición 1.6.9. Las teorías de torsión $(\mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C})), \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ y $(\mathtt{T}(\mathtt{C}), \mathtt{F}(\mathtt{T}(\mathtt{C})))$ son llamadas *teoría de torsión generada por* $\mathtt{C}$ *y teoría de torsión cogenerada por* $\mathtt{C}$, respectivamente.

Más aún:

Proposición 1.6.10. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $(\mathtt{C}, \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ *es una teoría de torsión;*

(b) $\mathtt{C} = \mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C}))$*;*

(c) $\mathtt{C}$ *es una clase de torsión.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Sea $T \in \mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C}))$, entonces $\mathrm{Hom}_R(T, F) = 0$, para toda $F \in \mathtt{F}(\mathtt{C})$ y por lo tanto $T \in \mathtt{C}$, con lo que $\mathtt{C} = \mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C}))$.

(b)$\Rightarrow$(a) Es claro a partir de la definición que $(\mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C})), \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ es una teoría de torsión y por (b), $(\mathtt{C}, \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ es una teoría de torsión.

(a)$\Rightarrow$(c) Se tiene por la proposición 1.6.5

(c)$\Rightarrow$(b) Basta mostrar que $\mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C})) \subseteq \mathtt{C}$. Como ya mencionamos $(\mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C})), \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ es una teoría de torsión. Sea $C \in \mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C}))$ entonces tenemos que $\mathrm{Hom}_R(C, F) = 0$, para todo $F \in \mathtt{F}(\mathtt{C})$. Puesto que $\mathtt{C}$ es una clase de torsión, por la observación A.7.5 tenemos que C contiene un submódulo mayor $T \in \mathtt{C}$. Ahora supongamos que existe $0 \neq \alpha : T' \longrightarrow C/T$ para algún $T' \in \mathtt{C}$, entonces $\mathrm{Im}\ \alpha \in \mathtt{C}$ y además $\mathrm{Im}\ \alpha = C'/T$ con $T \subset C' \subseteq C$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow C' \longrightarrow C'/T \longrightarrow 0$$

Como $\mathtt{C}$ es cerrada bajo extensiones tenemos que $C' \in \mathtt{C}$. Lo anterior contradice la maximalidad de T, la contradicción viene de suponer que $\alpha \neq 0$, por lo tanto $\alpha = 0$, y en consecuencia $C/T \in \mathtt{F}(\mathtt{C})$ y como $\mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C})) \cap \mathtt{F}(\mathtt{C}) = 0$ entonces $C = T \in \mathtt{C}$ y por lo tanto $\mathtt{C} = \mathtt{T}(\mathtt{F}(\mathtt{C}))$. $\square$

Proposición 1.6.11. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $(\mathtt{T}(\mathtt{C}), \mathtt{C})$ *es una teoría de torsión;*

(b) $\mathtt{C} = \mathtt{F}(\mathtt{T}(\mathtt{C}))$*;*

(c) $\mathtt{C}$ *es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones.*

Prueba. La equivalencia entre (a) y (b) se obtiene como en la proposición anterior. (a)$\Rightarrow$(c) se tiene también por la proposición 1.6.5 y (c)$\Rightarrow$(b) se obtiene de forma dual a la proposición anterior. □

Proposición 1.6.12. *Si* $(\mathtt{C}, \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ *es una teoría de torsión, son equivalentes:*

(a) $(\mathtt{C}, \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ *es hereditaria;*

(b) $\mathtt{F}(\mathtt{C})$ *es cerrada bajo cápsulas inyectivas;*

(c) *existe un módulo M-inyectivo $Q \in \sigma[M]$ con* $\mathtt{F}(\mathtt{C}) = \mathrm{Cog}(Q)$.

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Sea $F \in \mathtt{F}(\mathtt{C})$ y $\widehat{F}$ su cápsula M-inyectiva. Sea $f : C \longrightarrow \widehat{F}$ con $C \in \mathtt{C}$. Entonces $\mathrm{Im}\, f$ es un cociente de C y por lo tanto está en $\mathtt{C}$ por lo que $\mathrm{Im}\, f \cap F \in \mathtt{C}$ y como $\mathtt{C} \cap \mathtt{F}(\mathtt{C}) = 0$, tenemos que $\mathrm{Im}\, f \cap F = 0$. Ahora, $F \subseteq_e \widehat{F}$, entonces $\mathrm{Im}\, f = 0$, y por lo tanto $f = 0$, con lo que $\widehat{F} \in \mathtt{F}(\mathtt{C})$.

(b)$\Rightarrow$(c) Sea $Q = \prod_{Rx \in \mathtt{F}(\mathtt{C})} \widehat{Rx}$, donde $\widehat{Rx}$ es la cápsula M-inyectiva de Rx. Entonces Q es M-inyectivo y por lo tanto inyectivo en $\sigma[M]$, por (b), $Q \in \mathtt{F}(\mathtt{C})$ y entonces $\mathrm{Cog}(Q) \subseteq \mathtt{F}(\mathtt{C})$. Ahora, sea $F \in \mathtt{F}(\mathtt{C})$ y $0 \neq x \in F$. Considerando las inclusiones y de que Q es inyectivo en $\sigma[M]$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rx \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[d, "f"] \\ & \widehat{Rx} \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

donde f resulta monomorfismo, y por lo tanto F es isomorfo a un submódulo de Q por lo que $F \in \mathrm{Cog}(Q)$, es decir, $\mathrm{Cog}(Q) = \mathtt{F}(\mathtt{C})$.

(c)$\Rightarrow$(a) Sea $C' \subseteq C \in \mathtt{C}$, $0 \neq f' : C' \longrightarrow Q$ e $i : C' \longrightarrow C$ la inclusión. Entonces como Q es inyectivo en $\sigma[M]$, existe $0 \neq f : C \longrightarrow Q$, esto es una contradicción pues por hipótesis $Q \in \mathtt{F}(\mathtt{C})$, entonces $f' = 0$ con lo que $(\mathtt{C}, \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ es hereditaria. □

Proposición 1.6.13. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $(\mathtt{C}, \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ *y* $(\mathtt{T}(\mathtt{C}), \mathtt{C})$ *son teorías de torsión;*

(b) $\mathtt{C}$ *es una clase TTF.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Se tiene por la proposición 1.6.5

(b)$\Rightarrow$(a) Es una consecuencia inmediata de las proposiciones 1.6.10 y 1.6.11 □

Para $M = R$, las clases TTF pueden ser descritas por un ideal idempotente:

1.6.14 Clases TTF en $R - \mathsf{Mod}$

Proposición 1.6.15. *Para una clase* $\mathtt{C}$ *en* $R - \mathsf{Mod}$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $(\mathtt{C}, \mathtt{F}(\mathtt{C}))$ *y* $(\mathtt{T}(\mathtt{C}), \mathtt{C})$ *son teorías de torsión;*

(b) $\mathtt{C}$ *es una clase TTF;*

(c) *existe un ideal idempotente I de R tal que:*

$$\mathtt{C} = \{C \in R - \mathsf{Mod} \mid IC = 0\} = R/I - \mathsf{Mod},$$
$$\mathtt{T}(\mathtt{C}) = \{T \in R - \mathsf{Mod} \mid IT = T\},$$
$$\mathtt{F}(\mathtt{C}) = \{F \in R - \mathsf{Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(R/I, F) = 0\}.$$

Prueba. (a)$\Leftrightarrow$(b) Se tiene por la proposición anterior.

(b)$\Rightarrow$(c) Sea $I := \bigcap\{J \mid J$ es un ideal izquiedo de R y $R/J \in \mathtt{C}\}$, entonces I es un ideal izquierdo. Ahora, sea $a \in R$ e

$$(I : a) = \{r \in R \mid ra \in I\},$$

consideremos el submódulo cíclico $R\bar{a} \subseteq R/I$, entonces $R\bar{a} \in \mathsf{C}$ y además $R\bar{a} \cong R/(I : a)$, entonces $I \subseteq (I : a)$, y por lo tanto I es un ideal derecho.

Para la primer igualdad: sea $C \in \mathsf{C}$ y $0 \neq x \in C$, entonces $Rx \in \mathsf{C}$, además $Rx = R/J$, con $J = \mathsf{An}(x)$, por lo que $I \subseteq J$, y entonces $Ix = 0$ para toda $x \in C$, es decir, $IC = 0$. Ahora supongamos que C es un $R/I-$módulo, entonces $C \cong (R/I)^{(X)}$ para algún conjunto X. Sea $R/J \in \mathsf{C}$, entonces $I \subseteq J$, por lo que tenemos un epimorfismo $R/I \longrightarrow R/J$, para cada ideal J que aparece en la definición de I, entonces por la propiedad universal del producto directo tenemos un monomorfismo $R/I \longrightarrow \prod_{R/J \in \mathsf{C}} R/J$. Puesto que $\prod_{R/J\in\mathsf{C}} R/J \in \mathsf{C}$, tenemos que $R/I \in \mathsf{C}$, y por lo tanto $(R/I)^{(X)} \in \mathsf{C}$, es decir, $C \in \mathsf{C}$.

Para la segunda igualdad: sea $T \in \mathsf{T}(\mathsf{C})$, supongamos que $T \neq IT$, entonces $T/IT \neq 0$, y $T/IT \in \mathsf{T}(\mathsf{C})$. Ahora, $I(T/IT) = 0$ y por la descripción anterior para C, tenemos que $T/IT \in \mathsf{C}$, esto es una contradicción pues $\mathsf{C} \cap \mathsf{T}(\mathsf{C}) = 0$, por lo tanto $IT = T$. Para la otra contención, tomemos T tal que $T = IT$, y sea $f \in \mathrm{Hom}_R(T, C)$ con $C \in \mathsf{C}$, entonces $\mathrm{Im}\ f \in \mathsf{C}$, por lo que $0 = If(T) = f(IT) = f(T) = \mathrm{Im}\ f$, y por lo tanto $T \in \mathsf{T}(\mathsf{C})$.

Para la última igualdad: como ya vimos $R/I \in \mathsf{C}$, entonces tenemos que $\mathrm{Hom}_R(R/I, F) = 0$, para toda $F \in \mathsf{F}(\mathsf{C})$. Sea $f : C \longrightarrow F$ y $J \subseteq R$ un ideal tal que $R/J \in \mathsf{C}$, entonces $I \subseteq J$, por lo que tenemos un epimorfismo $R/I \longrightarrow R/J$, el cual induce un monomorfismo $\mathrm{Hom}_R(R/J, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/I, F)$, y por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(R/J, F) = 0$, para todo $R/J \in \mathsf{C}$. Ahora bien, si suponemos que $C \in \mathsf{C}$ y $f \neq 0$ tenemos que existe $x \in C$ tal que $f(x) \neq 0$, y por lo tanto $f\mid_{Rx} \neq 0$, lo cual contradice el hecho de que $\mathrm{Hom}_R(R/J, F) = 0$, para todo $R/J \in \mathsf{C}$, entonces $f = 0$ y por lo tanto $F \in \mathsf{F}(\mathsf{C})$.

Solo nos resta demostrar que I es idempotente, para ello sea $a \in I$, consideremos el submódulo cíclico $R\bar{a} \subseteq I/I^2$. Es claro que $(I^2 : a)$ es un ideal izquierdo e $I \subseteq (I^2 : a)$, por lo que existe un epimorfismo

$R/I \longrightarrow R/(I^2 : a)$ y como $R\bar{a} \cong R/(I^2 : a)$, tenemos que $R\bar{a}$ es un cociente de R/I que como sabemos está en C y por lo tanto $R\bar{a} \in$ C. Puesto que lo anterior sucede para todo submódulo ciclico de I/I^2 y C es cerrada bajo sumas directas tenemos que $I/I^2 \in$ C. Ahora consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow R/I^2 \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Puesto que C es cerrada bajo extensiones tenemos que $R/I^2 \in$ C, por lo que $I \subseteq I^2$ y por lo tanto $I = I^2$.

(c)$\Rightarrow$(b) Puesto que I es un ideal, es claro que $R/I - \mathsf{Mod}$ es cerrada bajo cocientes y submódulos. Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq R/I - \mathsf{Mod}$, entonces $\mathsf{An}(\prod_A N_\alpha) = \bigcap_A \mathsf{An}((n_\alpha)_{\alpha\in A}) = \bigcap_A \left(\bigcap_{n_\alpha \in N_\alpha} \mathsf{An}(n_\alpha)\right) = \bigcap_A \mathsf{An}(N_\alpha)$ y como $IN_\alpha = 0$, para toda $\alpha \in A$, entonces $I \subseteq \mathsf{An}(\prod_A N_\alpha)$ y por lo tanto $\prod_A N_\alpha$ es un $R/I-$módulo. Para ver que $R/I - \mathsf{Mod}$ es cerrada bajo extensiones consideremos la sucesión $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ exacta en $R - \mathsf{Mod}$, sea $n \in N$ entonces $I\bar{n} = 0$ en L, es decir, $In \subseteq K$, por lo tanto $I(In) \subseteq IK = 0$ y como I es idempotente tenemos que $In = 0$ para toda $n \in N$, por lo tanto $IN = 0$, con lo que N es un $R/I-$módulo y en conclusión $R/I - \mathsf{Mod}$ es una clase TTF. $\square$

Capítulo 2

Clases de módulos cerradas bajo extensiones

2.1 Gen(U) cerrada bajo extensiones.

Definición 2.1.1. Sea P un $R-$módulo y $p : N \longrightarrow L$ un epimorfismo en $R-\mathsf{Mod}$. P es llamado *pseudo-proyectivo respecto a p* si para todo homomorfismo distinto de cero $f \in \mathrm{Hom}_R(P, L)$ existen $s \in \mathrm{End}(P)$ y $g : P \longrightarrow N$ que satisfacen $pg = fs \neq 0$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ N & \xrightarrow{p} & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

puede ser extendido no trivialmente al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{s} & P & & \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ N & \xrightarrow{p} & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

P es llamado *im-proyectivo con respecto a p* si las condiciones de arriba se satisfacen con s un epimorfismo.

Como es usual diremos que P *es proyectivo con respecto a* p si las condiciones de arriba se satisfacen con s un isomorfismo (o $s = Id_P$)

Es fácil verificar que P es pseudo-proyectivo con respecto a p si y sólo si $p\,\mathrm{Hom}_R(P, N)$ es esencial en $\mathrm{Hom}_R(P, L)$ como $\mathrm{End}(P)-$submódulo.

Estaremos interesados en módulos que son pseudo-proyectivos con respecto a diferentes clases de epimorfismos.

Definición 2.1.2. Sea M un $R-$módulo y $U, P \in \sigma[M]$. P es llamado:

- *U-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$* si P es pseudo-proyectivo con respecto a todos los epimorfismos $p : N \longrightarrow L$ en $\sigma[M]$ con $\mathrm{Nuc}\, p \in \mathrm{Gen}(U)$;
- *auto-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$* si es P-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$;
- *pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$* si es pseudo-proyectivo con respecto a todos los epimorfismos en $\sigma[M]$;
- *im-proyectivo en $\sigma[M]$* si es im-proyectivo con respecto a todos los epimorfismos en $\sigma[M]$.

En lugar de decir *pseudo-proyectivo en* $R-\mathsf{Mod}$ sólo diremos *pseudo-proyectivo* para abreviar.

Es claro que los módulos proyectivos cumplen todas las definiciones anteriores, más adelante daremos ejemplos no triviales de algunos de estos conceptos.

Observación 2.1.3. En general, $\mathrm{Gen}(U)$ *no es una clase cerrada bajo extensiones*, por ejemplo; si $U = \mathbb{Z}_2$, podemos formar la sucesión exacta en $\mathbb{Z}-\mathsf{Mod}$; $0 \longrightarrow 2\mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0$ con extremos en $\mathrm{Gen}(\mathbb{Z}_2)$ y con $\mathbb{Z}_4 \notin \mathrm{Gen}(\mathbb{Z}_2)$. Uno de los objetivos de este trabajo, es dar condiciones necesarias y suficientes para que $\mathrm{Gen}(U)$ sea cerrada bajo extensiones.

Con las nociones que hasta aquí hemos introducido podemos describir a los módulos auto-pseudo-proyectivos, que son algunos módulos para los que su clase generada es cerrada bajo extensiones, como veremos en la siguiente proposición.

2.1.4 Módulos auto-pseudo-proyectivos en $\sigma[M]$

Proposición 2.1.5. *Para un $R-$módulo M y $U \in \sigma[M]$ son equivalentes:*

(a) *U es auto-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$;*

(b) Gen(U) *es cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$;*

(c) *todo generador en* Gen(U) *es U-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$;*

(d) *todo $N \in \sigma[M]$ con una sucesión exacta $U^{(\Lambda)} \longrightarrow N \longrightarrow U^{(\Lambda)} \longrightarrow 0$ pertenece a* Gen(U).

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Sea $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\sigma[M]$ con $K, L \in \mathrm{Gen}(U)$, tenemos que demostrar que $N \in \mathrm{Gen}(U)$. Supongamos que $\mathrm{Tr}(U,N) \neq N$. Entonces como $\mathrm{Tr}(U,N)$ es el mayor submódulo de N que es $U-$generado tenemos que $K \subseteq \mathrm{Tr}(U,N)$, y $L' := N/\mathrm{Tr}(U,N)$ es un cociente de L, por lo tanto está en Gen(U). Para cualquier $f : U \longrightarrow L'$ distinta de cero obtenemos por (a), el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & U \arrow[d, "f"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tr}(U,N) \arrow[r] & N \arrow[r, "p"] & L' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $pg \neq 0$. Esto es una contradicción pues $g(U) \subset \mathrm{Tr}(U,N)$. Por lo tanto tenemos que $L' = 0$, y en consecuencia $N \in \mathrm{Gen}\ (U)$.

(b)$\Rightarrow$(a) Sea $p : N \longrightarrow L$ un epimorfismo en $\sigma[M]$ con $\mathrm{Nuc}\, p \in \mathrm{Gen}(U)$. Para cualquier f distinta de cero en $\mathrm{Hom}_R(U,L)$ y p formamos el producto fibrado, y obtenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "g'"] & U \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & N \arrow[r, "p"] & L \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Puesto que $pg' = fs' \neq 0$ y por hipótesis $P \in \mathrm{Gen}(U)$, existe $h : U \to P$ que satisface que $pg'h = fs'h \neq 0$, lo cual muestra que U es U-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$.

(c)$\Rightarrow$(a) Obvio.

(a)$\Rightarrow$(c) Sea G un generador en $\sigma[M]$, $p : N \longrightarrow L$ un epimorfismo en $\sigma[M]$ con Nuc $p \in \mathrm{Gen}(U)$ y $f \in \mathrm{Hom}_R(G, L)$ distinto de cero, tenemos que demostrar que existe $s \in \mathrm{End}(G)$ y $g : G \longrightarrow N$ que satisface $pg = fs \neq 0$. Puesto que G es $U-$generado, por la proposición 1.1.4 tenemos que existe $k : U \longrightarrow G$ tal que $fk \neq 0$, por (a), U es auto-pseudo-proyectivo y por lo tanto existen $s' \in \mathrm{End}(U)$ y $g' : U \longrightarrow N$ que satisfacen $pg' = (fk)s' \neq 0$. Por otro lado, como U está en $\mathrm{Gen}(G)$, por 1.1.4, para $s' \in \mathrm{End}(U)$ existe $h \in \mathrm{Hom}_R(G, U)$ tal que $s'h \neq 0$, entonces si $s := ks'h$ y $g := g'h$ tenemos que $pg = p(g'h) = (pg')h = (fks')h = f(ks'h) = fs \neq 0$, y por lo tanto G es U-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$.

(d)$\Rightarrow$(b) Sea $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\sigma[M]$ con $K, L \in \mathrm{Gen}(U)$, tenemos que demostrar que $N \in \mathrm{Gen}(U)$. Por hipótesis existen epimorfismos $k : U^{(\Lambda')} \longrightarrow K$, $l : U^{(\Lambda'')} \longrightarrow L$, para algún Λ' y Λ'' respectivamente. Sea $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$, entonces la sucesión $U^{(\Lambda)} \xrightarrow{fk\pi_{\Lambda'}} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$, es exacta (Im $fk\pi_{\Lambda'}$ = Im f = Nuc g), para $l' = l\pi_{\Lambda''}$ y g formamos el producto fibrado y obtenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc}
U^{(\Lambda)} & \longrightarrow & P & \xrightarrow{g'} & U^{(\Lambda)} & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle l'} & & \\
U^{(\Lambda)} & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g} & L & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Por (d), tenemos que $P \in \mathrm{Gen}(U)$. Como h resulta ser un epimorfismo tenemos que N es cociente de P y por lo tanto $N \in \mathrm{Gen}(U)$ como se deseaba.

(b)$\Rightarrow$(d) Sea $N \in \sigma[M]$ y $U^{(\Lambda)} \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} U^{(\Lambda)} \longrightarrow 0$ exacta en $\sigma[M]$. Sabemos que Im $f \cong U^{(\Lambda)} / \mathrm{Nuc}\, f \in \mathrm{Gen}(U)$ y $N / \mathrm{Im}\, f = N / \mathrm{Nuc}\, g \cong$ Im $g = U^{(\Lambda)} \in \mathrm{Gen}(U)$, entonces la sucesión $0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, f \longrightarrow N \longrightarrow \mathrm{Im}\, g \longrightarrow 0$ es exacta y por (b), $N \in \mathrm{Gen}(U)$. $\square$

Observación 2.1.6. Sea $G := \oplus_{n>0}\mathbb{Z}_n$, entonces Gen($G$) es la clase de los *Grupos abelianos de torsión*, que es una clase cerrada bajo extensiones, por lo que G resulta auto-pseudo-proyectivo según la proposición anterior, y además G no es proyectivo en $\mathbb{Z} - \mathsf{Mod}$. En la Observación 2.1.22 verificaremos que G tampoco es pseudo-proyectivo en $\mathbb{Z} - \mathsf{Mod}$.

Para $M = R$, la proposición 2.1.5 nos da la siguiente caracterización:

2.1.7 Módulos auto-pseudo-proyectivos en $R - \mathsf{Mod}$

Proposición 2.1.8. *Para un R—módulo U son equivalentes:*

(a) *U es auto-pseudo-proyectivo;*

(b) Gen(U) *es cerrada bajo extensiones;*

(c) *todo generador en* Gen(U) *es auto-pseudo-proyectivo;*

(d) *todo $N \in R - \mathsf{Mod}$ con una sucesión exacta $U^{(\Lambda)} \longrightarrow N \longrightarrow U^{(\Lambda)} \longrightarrow 0$ pertenece a* Gen(U).

Definición 2.1.9. Sea M un R—módulo y $U, P \in \sigma[M]$. P es llamado *U-ext-proyectivo* en $\sigma[M]$, si P es proyectivo con respecto a todos los epimorfismos $p : N \longrightarrow L$ en $\sigma[M]$ con Nuc $p \in$ Gen(U), es decir, cualquier diagrama con renglón exacto

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ N & \xrightarrow{p} & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

puede ser extendido conmutativamente por algún $P \longrightarrow N$, siempre que Nuc $p \in$ Gen(U) y $N \in \sigma[M]$.

U es llamado *auto-ext-proyectivo* si es U-ext-proyectivo en $R - \mathsf{Mod}$. Obviamente tal módulo es auto-pseudo-proyectivo.

Observación 2.1.10. A continuación veremos que cualquier $\mathbb{Z}-$módulo es U-ext-proyectivo en $\sigma[\mathbb{Z}]$, si U es divisible. Sea $P \in \mathbb{Z}-\mathsf{Mod}$ y D un grupo divisible distinto de cero. Sea $p : N \longrightarrow L$ un epimorfismo en $\mathbb{Z}-\mathsf{Mod}$, con Nuc $p \in \mathrm{Gen}(D)$ y $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, L)$. Puesto que sumas directas y cocientes de divisibles, nuevamente son divisibles, tenemos que Nuc p es divisible, por lo que la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathrm{Nuc}\ p \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$, se escinde, es decir, existe $h : L \longrightarrow N$ tal que $ph = Id_L$, entonces si $g = hf$ tenemos que $f = pg \neq 0$, con lo que P es D-ext-proyectivo en $\mathbb{Z}-\mathsf{Mod}$. En particular los grupos divisibles constituyen una familia de $\mathbb{Z}-$módulos auto-ext-proyectivos que no son proyectivos.

A continuación daremos algunas propiedades de los módulos auto-ext-proyectivos.

Proposición 2.1.11. *Sea M un $R-$módulo y $U, P \in \sigma[M]$. Entonces:*

(1) *Sumas directas y sumandos directos de módulos U-ext-proyectivos son nuevamente U-ext-proyectivos (en $\sigma[M]$).*

(2) *Una suma directa de copias de un módulo auto-ext-proyectivo es nuevamente auto-ext-proyectivo (en $\sigma[M]$).*

(3) *P es U-ext-proyectivo si y sólo si toda sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0$$

en $\sigma[M]$ con Nuc $p \in \mathrm{Gen}(U)$ *se escinde.*

Prueba. (1) Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de módulos U-ext-proyectivos, $p : N \longrightarrow L$ en $\sigma[M]$ con Nuc $p \in \mathrm{Gen}(U)$ y $f : \oplus_I M_\alpha \longrightarrow L$. Sea i_α la inclusión natural de M_α, en $\oplus_I M_\alpha$ y $f_\alpha := f i_\alpha$. Por hipótesis, para cada f_α, existe $g_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N$, tal que $pg_\alpha = f_\alpha$. Para la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$, existe por la propiedad universal de la suma directa, $g : \oplus_I M_\alpha \longrightarrow N$ tal que $gi_\alpha = g_\alpha$ entonces $pgi_\alpha = pg_\alpha = f_\alpha = fi_\alpha$, puesto que pg y f coinciden en i_α, para toda $\alpha \in I$, tenemos que $pg = f$, con lo que $\oplus_I M_\alpha$ es U-ext-proyectivo.

Para el converso supongamos que $\oplus_I M_\alpha$ es U-ext-proyectivo. Sea $p : N \longrightarrow L$ en $\sigma[M]$ con Nuc $p \in$ Gen(U), $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow L$ y sea $f := f_\alpha \pi_\alpha$, donde π_α es la proyección canónica. Por hipótesis, para f, existe $g : \oplus_I M_\alpha \longrightarrow N$ tal que $pg = f$, definimos $g_\alpha := gi_\alpha$ y tenemos que $pg_\alpha = pgi_\alpha = fi_\alpha = f_\alpha \pi_\alpha i_\alpha = f_\alpha Id_{M_\alpha} = f_\alpha$, y por lo tanto M_α es U-ext-proyectivo para toda $\alpha \in I$.

(2) Supongamos que U es auto-ext-proyectivo. Por el inciso (1), tenemos que $U^{(\Lambda)}$ es U-ext-proyectivo, y como Gen(U) = Gen($U^{(\Lambda)}$), entonces $U^{(\Lambda)}$ es $U^{(\Lambda)}$-ext-proyectivo, es decir, $U^{(\Lambda)}$ es auto-ext-proyectivo.

(3) Supongamos que P es U-ext-proyectivo, entonces para Id_P existe $g : P \longrightarrow N$ tal que $pg = Id_P$ y por lo tanto la sucesión se escinde.

Para el recíproco, sea $p' : N \longrightarrow L$ en $\sigma[M]$ con $K =$ Nuc $p' \in$ Gen(U) y $f : P \longrightarrow L$. Formemos el digrama de producto fibrado para f y p'

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & N \arrow[r, "p'"] & L \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Tenemos que $p'g = fp$, como la sucesión de arriba se escinde tenemos que existe $h : P \longrightarrow X$ tal que $ph = Id_P$, entonces si $g' := gh$ tenemos que $p'g' = p'gh = fph = fId_P = f$ y por lo tanto P es U-ext-proyectivo. $\square$

Observación 2.1.12. Como se mencionó antes cualquier módulo auto-ext-proyectivo es auto-pseudo-proyectivo. La implicación inversa no es cierta en general: Considere un módulo U auto-pseudo-proyectivo junto con un submódulo U-generado K. Obviamente $U \bigoplus (U/K)$ es un generador en Gen(U) y por lo tanto es auto-pseudo-proyectivo según la proposición 2.1.8. Si K no es sumando directo de U, entonces $U \bigoplus (U/K)$ no es auto-ext-proyectivo.

Como siempre, bajo condiciones adecuadas podemos encontrar en Gen(U) un generador auto-ext-proyectivo.

Algunos resultados y definiciones que se usarán en la siguiente proposición deberán ser consultados en el apéndice, pues corresponden a la teoría general de anillos y módulos. Por el momento, sólo recordemos que un anillo se llama *local* si el conjunto de las no unidades de R forma un ideal.

Definición 2.1.13. Un generador $X \in \mathrm{Gen}(U)$ es llamado *mínimo* si para cualquier descomposición $X = X' \oplus X''$, $\mathrm{Tr}(X', X'') \neq X''$.

Observación 2.1.14. Si U es finitamente generado y suma de módulos con anillos de endomorfismos locales, entonces existe un generador $U-$*mínimo.*

Proposición 2.1.15. *Sea $U \in \sigma[M]$ finitamente generado y mínimo (en el sentido de arriba) y $T =$ $\mathrm{End}(U)$. Supongamos que T es perfecto derecho o U_T es finitamente generado y T es semiperfecto. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathrm{Gen}(U)$ *es cerrada bajo extensiones en* $\sigma[M]$*;*

(b) U *es auto-pseudo-proyectivo en* $\sigma[M]$*;*

(c) U *es auto-ext-proyectivo en* $\sigma[M]$.

Prueba. (a)$\Leftrightarrow$(b) Se sigue de la proposición 2.1.5

(c)$\Rightarrow$(b) Es inmediata de la definición.

Sólo falta demostrar (a)$\Rightarrow$(c). Supongamos que T es perfecto derecho, por la proposición A.6.3, existe $e \in T$ idempotente primitivo, de tal forma que eTe es un anillo local. Puesto que $eTe \cong \mathrm{End}(eU)$ (como anillos: $ehe \mapsto (ehe)(em)$), podemos suponer que $\mathrm{End}(eU)$ es un anillo local. Además, como e es idempotente tenemos que $U = eU \oplus (1-e)U$, donde eU es inescindible por ser e primitivo, entonces si $U_0 := eU$ y $U_1 := (1-e)U$ tenemos que $U = U_0 \oplus U_1$, y como U es mínimo, entonces $\mathrm{Tr}(U_1, U_0) \neq U_0$. Supongamos que U no es auto-ext-proyectivo, por la proposición 2.1.11 esto es equivalente a suponer que U_0 no es auto-ext-proyectivo, es decir, que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow E \xrightarrow{f} U_0 \longrightarrow 0.$$

no se escinde para algún $K \in \text{Gen}(U)$. Es claro que $U_0 \in \text{Gen}(U)$, entonces por (a), tenemos que E es $U-$generado y como U_0 es finitamente generado existe un epimorfismo

$$U_1^k \bigoplus U_0^k = U^k \xrightarrow{h} E \xrightarrow{f} U_0.$$

para algún $k \in \mathbb{N}$. Sea $S := \text{End}(U_0)$. Puesto que f no es una retracción, ninguno de los $fh\mid_{U_0} \in S$ es un isomorfismo, y como S es local, dichos homomorfismos están en Jac S. Usando nuevamente el hecho de que S es local, tenemos que $\text{Rad}_S(U_0) = \text{Rad}(S)U_0$. Además, si $i_{U_j} : U_j \hookrightarrow U$ son las inclusiones con $j = 0, 1$, por la propiedad universal de la suma directa Im $fh = \sum_{n=1}^{K} fhi_{U_{0_n}} + \sum_{n=1}^{K} fhi_{U_{1_n}}$, y como U_0 es finitamente generado, por el *Lema de Nakayama* (A.4.2), $\text{Rad}(S)U_0$ es un $S-$submódulo superfluo de U_0. Por lo tanto concluímos que

$$U_0 = \text{Im } fh = \textstyle\sum_{n=1}^{K} fhi_{U_{1_n}} \subseteq \text{Tr}(U_1, U_0)$$

entonces $\text{Tr}(U_1, U_0) = U_0$, lo cual contradice la minimalidad de U y por lo tanto f es una retracción, por proposición 2.1.11 U es U-ext-proyectivo en $\sigma[M]$. □

Ahora caracterizaremos a los módulos pseudo-proyectivos en $\sigma[M]$.

2.1.16 Módulos pseudo-proyectivos en $\sigma[M]$

Proposición 2.1.17. *Sea $U \in \sigma[M]$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *U es pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$;*

(b) *para $N \in \sigma[M]$ y* $\text{Tr}(U, N) \subseteq L \subseteq N$ *se tiene que* $\text{Tr}(U, N/L) = 0$*;*

(c) *para cualquier $N \in \sigma[M]$ y $K \subseteq N$,* $\text{Tr}(U, N/K) = (\text{Tr}(U, N) + K)/K$*;*

(d) $(\text{Gen}(U), \text{F}(\text{Gen}(U)))$ *es una teoría de torsión cohereditaria en $\sigma[M]$.*

Prueba. (a)⇒(b) Supongamos que $\mathrm{Tr}(U, N/L)$ no es cero, es decir, $\mathrm{Tr}(U, N/L) = K/L$, con $L \subseteq K \subseteq N$ entonces, como *la traza es un prerradical*, tenemos que $\mathrm{Tr}(U, K) \subseteq \mathrm{Tr}(U, N) \subseteq L$. Por (a), para el epimorfismo $p : K \longrightarrow K/L$ y $f \in \mathrm{Hom}_R(U, K/L)$ existen $s \in \mathrm{End}(U)$ y $g : U \longrightarrow K$ que satisfacen $pg = fs \neq 0$, lo cual es una contradicción pues $g(U) \subseteq \mathrm{Tr}(U, K) \subseteq L$. La contradicción viene de suponer que $\mathrm{Tr}(U, N/L) \neq 0$, por lo tanto $\mathrm{Tr}(U, N/L) = 0$.

(b)⇒(c) Sea $K \subseteq N$ y $\mathrm{Tr}(U, N) = L$, entonces $\mathrm{Tr}(U, N/L) = 0$, es decir, *la traza de U en N se comporta como un radical.* Sea $T/K = \mathrm{Tr}(U, N/K)$ entonces $(L+K)/K \subseteq T/K$, para todo $K \subseteq N$, por el lema 1.5.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(U, (N/K)/((L+K)/K)) &= \mathrm{Tr}(U, (N/K))/((L+K)/K) \\
&= (T/K)/((L+K)/K) \\
&\cong T/(L+K)
\end{aligned}$$

Puesto que $L \subseteq L + K \subseteq N$, usando nuevamente la hipótesis tenemos que

$$\mathrm{Tr}(U, N/(L+K)) = 0$$

y como $N/(L+K)) \cong \big(N/K)/((L+K)/K\big)$, entonces

$$T/(L+K) \cong \mathrm{Tr}(U, N/(L+K)) = 0$$

y por lo tanto $T = L + K = \mathrm{Tr}(U, N) + K$.

(c)⇒(d) Sea $0 \xrightarrow{f} K \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con K y L en $\mathrm{Gen}(U)$. Entonces $K = \mathrm{Tr}(U, K) \cong f(\mathrm{Tr}(U, K)) \subseteq \mathrm{Tr}(U, N)$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{Tr}(U, N) \longrightarrow \mathrm{Tr}(U, N)/K \longrightarrow 0$$

y observemos que $\mathrm{Tr}(U, N)/K = \mathrm{Tr}(U, N)/(\mathrm{Tr}(U, N) \cap K) \cong (\mathrm{Tr}(U, N) + K)/K = \mathrm{Tr}(U, N/K) \cong \mathrm{Tr}(U, L) = L$ por lo tanto tenemos que $\mathrm{Tr}(U, N) = N$, es decir, $N \in \mathrm{Gen}(U)$. Entonces $\mathrm{Gen}(U)$ es una clase de torsión y por la proposición 1.6.10 tenemos que $(\mathrm{Gen}(U), \mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U)))$ es una teoría de torsión. Ahora, sea $N \in \mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U))$, y $K \subseteq N$. Por (c)

$$\mathrm{Tr}(U, N/K) = (\mathrm{Tr}(U, N) + K)/K = K/K = 0$$

es decir, $N/K \in \mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U))$ y por lo tanto $\mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U))$ es cohereditaria.

(d)$\Rightarrow$(a) Sea $p : N \longrightarrow L$ un epimorfismo en $\sigma[M]$ y $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(U, L)$. Para f y p formamos el producto fibrado y obtenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{s'} & U & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ N & \xrightarrow{p} & L & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Supongamos que $\mathrm{Hom}_R(U, P) = 0$, entonces $P \in \mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U))$, por lo tanto $U \in \mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U))$, lo cual es una contradicción, por lo tanto existe $0 \neq h : U \longrightarrow P$, entonces si $s := s'h$ y $g := g'h$ tenemos que $fs = fs'h = pg'h = pg$, y por lo tanto U es pseudo-proyectivo. □

Los módulos pseudo-proyectivos en $R-$ Mod pueden ser caracterizados por sus ideales traza $\mathrm{Tr}(U, R)$. Para ello recordemos el siguiente hecho.

Proposición 2.1.18. *Sea I un ideal izquierdo de R y N un $R-$módulo. Entonces $IN \in \mathrm{Gen}(I)$, y por tanto $IN \subseteq \mathrm{Tr}(I, N)$. Si I es idempotente entonces $IN = \mathrm{Tr}(I, N)$.*

Prueba. Sea $n \in N$ y $f_n : I \longrightarrow N$ definida por $f_n(i) = in$, $\mathrm{Im} f_n = In \subseteq IN$, entonces $In \subseteq \mathrm{Tr}(I, IN)$ para toda $n \in N$, por lo cual $\sum_{n \in N} In \subseteq \mathrm{Tr}(I, IN)$, es decir, $IN \subseteq \mathrm{Tr}(I, IN)$, por lo que $IN = \mathrm{Tr}(I, IN)$. Como $\mathrm{Tr}(I, N)$ es el mayor submódulo de N que está en $\mathrm{Gen}(I)$ tenemos que $IN \subseteq \mathrm{Tr}(I, N)$. Para la segunda parte de la proposición supongamos que I es idempotente. Sea $x \in \mathrm{Tr}(I, N)$, entonces $x = \sum_{j=1}^{m} f_j(a_j)$ con $f_j \in \mathrm{Tr}(I, N)$ y $a_j \in I$, como I es idempotente tenemos que $a_j = b_j c_j$ con $b_j, c_j \in I$. Entonces $x = \sum_{j=1}^{m} f_j(a_j) = \sum_{j=1}^{m} f_j(b_j c_j) = b_j \sum_{j=1}^{m} f_j(c_j) \in I\ \mathrm{Tr}(I, N)$ por lo tanto $\mathrm{Tr}(I, N) \subseteq I\ \mathrm{Tr}(I, N)$, y como $I\ \mathrm{Tr}(I, N) \subseteq \mathrm{Tr}(I, N)$ tenemos que $\mathrm{Tr}(I, N) = I\ \mathrm{Tr}(I, N) \subseteq IN$ de modo que $\mathrm{Tr}(I, N) = IN$. □

Observación 2.1.19. Afirmamos que los ideales idempotentes del anillo R consituyen una familia de $R-$módulos pseudo-proyectivos. Sea I un ideal idempotente de R, entonces por la Proposición 2.1.18, $\mathrm{Tr}(I, N) = IN$ para todo $N \in R-\mathsf{Mod}$. De lo anterior, tenemos que si $K \subseteq N$ entonces $\mathrm{Tr}(I, N/K) = I(N/K) \cong (IN + K)/K = (\mathrm{Tr}(I, N) + K)/K$, y por la Proposición 2.1.17, I es un $R-$módulo pseudo-proyectivo.

2.1.20 Módulos pseudo-proyectivos en $R - \mathsf{Mod}$

Proposición 2.1.21. *Para U un $R-$módulo y $T := \mathrm{Tr}(U, R)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *U es pseudo-proyectivo;*

(b) *Para cualquier $R-$módulo libre N y K submódulo de N, $\mathrm{Tr}(U, N/K) = (\mathrm{Tr}(U, N) + K)/K$;*

(c) *$(\mathrm{Gen}(U), \mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U)))$ es una teoría de torsión cohereditaria;*

(d) *Existe un $R-$módulo libre (proyectivo) P y un epimorfismo $p_0 : P \longrightarrow U$ con $P = \mathrm{Nuc}\ p_0 + \mathrm{Tr}(U, P)$;*

(e) *Existe un R-módulo libre (proyectivo) P, un epimorfismo $p_0 : P \longrightarrow U$ y un homomorfismo $q_0 : U^{(\Delta)} \longrightarrow P$ tal que $p_0 q_0 : U^{(\Delta)} \longrightarrow U$ es epimorfismo;*

(f) *Para todo $R-$módulo L, $\mathrm{Tr}(U, L) = TL$;*

(g) *$U = TU$;*

(h) $\mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U)) = R/T - \mathsf{Mod}$.

Si estas condiciones se satisfacen entonces $T = T^2$ y $\mathrm{Gen}(U) = \mathrm{Gen}(T)$

Prueba. (a)$\Leftrightarrow$(b)$\Leftrightarrow$(c), se sigue del lema 1.5.2 (iv) y de la proposición 2.1.17.

(b)$\Rightarrow$(d) Todo módulo es cociente de un módulo libre (proyectivo). Sea $p_0 : P \longrightarrow U$ un epimorfismo con P libre. Entonces $P/\mathrm{Nuc}\ p_0 \cong$

$U \in \mathrm{Gen}(U)$ y por lo tanto $\mathrm{Tr}(U, P/\mathrm{Nuc}\ p_0) = P/\mathrm{Nuc}\ p_0$, por (b), $\mathrm{Tr}(U, P/\mathrm{Nuc}\ p_0) = (\mathrm{Tr}(U, P) + \mathrm{Nuc}\ p_0)/\ \mathrm{Nuc}\ p_0 = P/\mathrm{Nuc}\ p_0$, es decir, $P = \mathrm{Tr}(U, P) + \mathrm{Nuc}\ p_0$.

(d)$\Rightarrow$(e) Por hipótesis existe un $R-$módulo libre P y un epimorfismo $p_0 : P \longrightarrow U$ con $P = \mathrm{Nuc}\ p_0 + \mathrm{Tr}(U, P)$. Sea $H = \mathrm{Hom}_R(U, P)$ y $q_0 : U^{(H)} \longrightarrow P$, el homomorfismo inducido por H, entonces $\mathrm{Im}\ q_0 = \mathrm{Tr}(U, P)$ por lo que, $\mathrm{Im}\ p_0q_0 = p_0(\mathrm{Im}\ q_0) = p_0(\mathrm{Tr}(U, P)) = p_0(\mathrm{Nuc}\ p_0 + \mathrm{Tr}(U, P)) = p_0(P) = U$, por lo tanto p_0q_0 es un epimorfismo.

(e)$\Rightarrow$(a) Sea $p : N \longrightarrow L$ y $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(U, L)$, entonces $fp_0 \neq 0$ y como por hipótesis P es libre (proyectivo) existe $g' : P \longrightarrow N$ tal que $pg' = fp_0 \neq 0$, también por hipótesis existe $q_0 : U^{(\Delta)} \longrightarrow U$ tal que p_0q_0 es un epimorfismo. Sea $i : U \longrightarrow U^{(\Delta)}$ la inclusión, entonces $fp_0q_0i \neq 0$. Sea $s := p_0q_0i \in \mathrm{End}(U)$ y $g := g'q_0i : U \longrightarrow N$, entonces $pg = p(g'q_0i) = (pg')q_0i = (fp_0)q_0i = f(p_0q_0i) = fs \neq 0$ con lo que U es pseudo-proyectivo.

(b)$\Rightarrow$(f) Sea $L \in R-\mathsf{Mod}$, y sea $p : P \longrightarrow L$ con P libre. Es claro que $p(TP) = Tp(P) = TL$ entonces $p\ |_{TP}$ es un epimorfismo sobre TL y por lo tanto $TL \cong TP/(TP \cap \mathrm{Nuc}\ p)$. Por (b) tenemos que $\mathrm{Tr}(U, L) = \mathrm{Tr}(U, P/\mathrm{Nuc}\ p) = (\mathrm{Tr}(U, P) + \mathrm{Nuc}\ p)/\mathrm{Nuc}\ p$, entonces por el lema 1.5.2 (iii) $\mathrm{Tr}(U, P) = TP$ por lo tanto $\mathrm{Tr}(U, L) = (TP + \mathrm{Nuc}\ p)/\mathrm{Nuc}\ p \cong TP/(TP \cap \mathrm{Nuc}\ p) \cong TL$.

(f)$\Rightarrow$(g) Obvio

(g)$\Rightarrow$(h) Si $N \in \mathrm{Gen}(U)$ entonces para algun conjunto Λ, $N \cong U^{(\Lambda)}/K = (TU)^{(\Lambda)}/K = TU^{(\Lambda)}/K = TN$. Sea F un $R/T-$módulo y $f : N \longrightarrow F$ con $N \in \mathrm{Gen}(U)$, entonces $f(N) = f(TN) = Tf(N) = 0$, por lo tanto $F \in \mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U))$. Para la otra contensión, sea $F \in \mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U))$, por la proposición 1.5.2 $TF \subseteq \mathrm{Tr}(U, F) = 0$, entonces F es un $R/T-$módulo.

(h)$\Rightarrow$(a) Igual que (d)$\Rightarrow$(a) en la proposición 2.1.17

Por (c), tenemos que $\mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U))$ es una clase TTF, por la proposición 1.6.15 existe un ideal idempotente I tal que $\mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U)) = R/I-\mathsf{Mod}$, por (h), $\mathrm{F}(\mathrm{Gen}(U)) = R/T-\mathsf{Mod}$, entonces R/I es un $R/T-$módulo por lo tanto $T(R/I) = 0$, y puesto que T es un ideal tenemos que $T = TR \subseteq I$, análogamente $I \subseteq T$, por lo que $T = I$, y por lo tanto T es idempotente. Combinando (c), 1.6.10 y 1.6.15 tenemos que

$$\mathrm{Gen}(U) = \{N \in R-\mathsf{Mod} \mid TN = N\},$$

entonces $T \in \mathrm{Gen}(U)$ y por lo tanto $\mathrm{Gen}(T) \subseteq \mathrm{Gen}(U)$. Por la proposición 2.1.18 tenemos que $\mathrm{Tr}(T,N) = TN$, entonces si $N \in \mathrm{Gen}(U)$, $\mathrm{Tr}(T,N) = N$, es decir, $\mathrm{Gen}(U) \subseteq \mathrm{Gen}(T)$, por lo tanto $\mathrm{Gen}(U) = \mathrm{Gen}(T)$. $\square$

Observación 2.1.22. Con el resultado anterior podemos verficar que en general, los módulos auto-pseudo-proyectivos no son pseudo-proyectivos. Sea $G := \oplus_{n>0}\mathbb{Z}_n$, entonces como ya vimos en la Observación 2.1.6, G es auto-pseudo-proyectivo $\mathbb{Z}-\mathsf{Mod}$. Supongamos que G es pseudo-proyectivo, entonces por la proposición anterior, $G = \mathrm{Tr}(G,\mathbb{Z})\ G$, pero como G es un grupo de torsión y $\mathbb{Z}$ es libre de torsión, tenemos que $\mathrm{Tr}(G,\mathbb{Z}) = 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto G es un $\mathbb{Z}-$módulo auto-pseudo-proyectivo, que no es pseudo-proyectivo en $\mathbb{Z}-\mathsf{Mod}$. Además, G tampoco es auto-ext-proyectivo, pues para $p : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4$ y $f := \pi_{\mathbb{Z}_2}$, tenemos que $g = \pi_{\mathbb{Z}_4}$ y $s \neq Id_G \quad ((x_n)_{n>0} \overset{s}{\mapsto} (p(x_4), 0, 0, ...))$.

Definición 2.1.23. Dos $R-$módulos N y M son llamados:

- *traza equivalentes* si $\mathrm{Gen}(N) = \mathrm{Gen}(M)$;
- *epi-equivalentes* si existen epimorfismos $N \longrightarrow M$ y $M \longrightarrow N$.

En la siguiente proposición observaremos la relación entre estas dos nociones:

Proposición 2.1.24. *Para dos $R-$módulos N, M las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *N y M son traza equivalentes;*

(b) *existe un conjunto Λ tal que $N^{(\Lambda)}$ y $M^{(\Lambda)}$ son epi-equivalentes.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Por hipótesis existen epimorfismos $\varphi : N^{(A)} \longrightarrow M$ y $\psi : M^{(B)} \longrightarrow N$ para conjuntos A y B respectivamente. Supongamos que alguno de dichos conjuntos no es finito y sin pérdida de generalidad supongamos que $card(A) \geq card(B)$. Sea $i_\alpha : N \longrightarrow N^{(A)}$ la inclusión y $\psi_\alpha := i_\alpha\psi$. Por la propiedad universal de la suma directa, la familia de homomorfismos $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ induce un único homomorfismo $\bar{\psi} : M^{(B\times A)} = M^{(A)} \longrightarrow N^{(A)}$, con Im $\bar{\psi} = \sum_{\alpha\in A}$ Im ψ_α , y como ψ es un epimorfismo entonces Im $\psi_\alpha =$ Im i_α , por lo que Im $\bar{\psi} = N^{(A)}$. Análogamente existe un epimorfismo $\bar{\varphi} : N^{(A\times A)} \longrightarrow M^{(B\times A)} = M^{(A)}$. Entonces si $card(\Lambda) = \{card(A), card(B)\}$ tenemos que $N^{(\Lambda)}$ y $M^{(\Lambda)}$ son epi-equivalentes. Ahora, si ambos conjuntos son finitos entonces $card(\Lambda) = card(\mathbb{N})$ y por lo tanto tenemos que ψ y φ junto con las respectivas proyecciones, inducen epimorfismos $M^{(\mathbb{N})} \longrightarrow N^{(\mathbb{N})}$ y $N^{(\mathbb{N})} \longrightarrow M^{(\mathbb{N})}$.

(b)$\Rightarrow$(a) Supongamos que existen epimorfismos $M^{(\Lambda)} \longrightarrow N^{(\Lambda)} \longrightarrow M^{(\Lambda)}$, entonces $M^{(\Lambda)} \in$ Gen($N^{(\Lambda)}$) = Gen(N) , es decir, Gen(M) $\subseteq$ Gen(N). Análogamente Gen(N) $\subseteq$ Gen(M) y por lo tanto Gen(N) = Gen(M). □

Lema 2.1.25. *Para un $R-$módulo U las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *U es im-proyectivo;*

(b) *existe un R-módulo libre (proyectivo) P, un epimorfismo $p_0 : P \longrightarrow U$ y un homomorfismo $q_0 : U \longrightarrow P$ tal que $p_0q_0 : U \longrightarrow U$ es epimorfismo.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Nuevamente usaremos el hecho de que todo módulo es cociente de un módulo libre (proyectivo). Sea $p_0 : P \longrightarrow U$ un epimorfismo con P libre. Por (a), para p_0 e Id_U existen $s \in \mathrm{End}(U)$ y $q_0 : U \longrightarrow P$ que satisfacen $p_0 q_0 = s \neq 0$, con s un epimorfismo.

(b)$\Rightarrow$(a) Sea $p : N \longrightarrow L$ un epimorfismo en $R-\mathsf{Mod}$ y $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_R(U, L)$. Por (b), tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglón inferior exacto

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "q_0"] & P \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "g'"] & U \arrow[d, "f"] & \\ & N \arrow[r, "p"] & L \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

entonces, si $s : p_0 q_0$ y $g := g' q_0$ tenemos que $fs = pg \neq 0$, con s un epimorfismo, con lo que U es im-proyectivo. $\square$

En la siguiente proposición daremos la relación entre los módulos pseudo-proyectivos, los módulos im-proyectivos y los módulos libres.

Proposición 2.1.26. *Para un $R-$módulo U las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *U es pseudo-proyectivo en $R-\mathsf{Mod}$;*

(b) *para algún conjunto Λ, $U^{(\Lambda)}$ es im-proyectivo;*

(c) *U es traza equivalente a un $R-$módulo im-proyectivo;*

(d) *existe un $R-$módulo libre (proyectivo) P y $f \in End(P)$ con $Im\ f = Im\ f^2$, de tal forma que U es traza equivalente a $Im\ f$;*

(e) *existe un $R-$módulo libre (proyectivo) P y $f, h \in End(P)$ con $f = f^2 h$, de tal forma que U es traza equivalente a $Im\ f$.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Por (a), y la proposición 2.1.21 (e), existe un R-módulo libre (proyectivo) P, un epimorfismo $p_0 : P \longrightarrow U$ y un homomorfismo $q_0 : U^{(\Delta)} \longrightarrow P$ tal que $p_0 q_0 : U^{(\Delta)} \longrightarrow U$ es epimorfismo. Sea Λ un conjunto de tal forma que $card(\Lambda \times \Delta) = card(\Lambda)$ y sean $\bar{p_0} := (p_0)_\Lambda : P^{(\Lambda)} \longrightarrow U^{(\Lambda)}$ y $\bar{q_0} := (p_0)_\Lambda : U^{(\Lambda)} \longrightarrow P^{(\Lambda)}$ los homomorfismos inducidos por p_0 y q_0 respectivamente, entonces la composición

$$U^{(\Lambda)} = U^{(\Lambda\times\Delta)} \xrightarrow{\bar{q_0}} P^{(\Lambda)} \xrightarrow{\bar{p_0}} U^{(\Lambda)}$$

es un epimorfismo. Además, como P es proyectivo tenemos que $P^{(\Lambda)}$ también lo es, por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglón inferior exacto.

$$\begin{tikzcd}
U^{(\Lambda)} \arrow[r, "\bar{q_0}"] & P^{(\Lambda)} \arrow[r, "\bar{p_0}"] \arrow[d, "g'"] & U^{(\Lambda)} \arrow[d, "f"] & \\
& N \arrow[r, "p"] & L \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

entonces si $s : \bar{p_0}\bar{q_0}$ y $g := g'\bar{q_0}$ tenemos que $fs = pg \neq 0$, con s un epimorfismo, con lo que $U^{(\Lambda)}$ es im-proyectivo.

(b)$\Rightarrow$(c) Es claro, pues como anteriormente mencionamos Gen($U^{(\Lambda)}$) = Gen(U) para todo módulo U y todo conjunto Λ.

(c)$\Rightarrow$(d) Por hipótesis, U es traza equivalente a un R−módulo im-proyectivo L, por el lema anterior existe un R-módulo libre (proyectivo) P, un epimorfismo $p_0 : P \longrightarrow L$ y un homomorfismo $q_0 : L \longrightarrow P$, de tal forma que $p_0q_0 : L \longrightarrow L$ es epimorfismo. Sea $f := q_0p_0$, entonces $\text{Im } f^2 = q_0p_0q_0p_0(P) = q_0(p_0q_0(L)) = q_0(L) = q_0p_0(P) = \text{Im } f$. Además, de la hipótesis y de las igualdades anteriores se desprende que $L = p_0q_0(L) = p_0(\text{ Im } f)$, y $q_0(L) = \text{Im } f$. Por lo anterior, tenemos que $p_0 |_{Im\ f}$ y q_0 son epimorfismos sobre L e Im f respectivamente, por lo tanto tenemos que Gen(L) = Gen(Im f) y por lo tanto U e Im f son traza equivalentes.

(d)$\Rightarrow$(e) Por hipótesis existe un R−módulo libre (proyectivo) P y $f \in \text{End}(P)$ con $\text{Im } f = \text{Im } f^2$, de tal forma que U es traza equivalente a Im f. Lo único que falta es encontrar $h \in \text{End}(P)$ que cumpla la igualdad que se pide. Consideremos el epimorfismo $f : P \longrightarrow \text{Im} f$, como P es proyectivo, tenemos que para f misma, existe $h \in \text{End}(P)$ de tal forma que $f = fh$, por lo que $f = f^2 = f^2h$.

(e)$\Rightarrow$(d) Es claro pues $f = f^2h$ implica que $f = f^2$.

(d)$\Rightarrow$(a) Por (d), existe un R−módulo libre P y $f \in \text{End}(P)$, con $f = f^2$. Consideremos la composición $\text{Im } f \overset{i}{\hookrightarrow} P \xrightarrow{f} \text{Im } f$, entonces $fi(\text{Im } f) = \text{Im } f^2 = \text{Im } f$, por lo tanto fi es un epimorfismo, y por el lema

2.1.25 tenemos que $\operatorname{Im} f$ es im-proyectivo. Con un argumento similar al usado en (a)$\Rightarrow$(c) de la proposición 2.1.5, tenemos que U es pseudo-proyectivo en $R-\mathsf{Mod}$. $\square$

2.2 $\sigma[U]$ cerrada bajo extensiones

$\sigma[U]$ es cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$ si y sólo si $\sigma[U]$ es una clase de torsión hereditaria en $\sigma[M]$. Para estudiar este caso recordemos que siempre existe un generador G en $\sigma[U]$. Entonces $\operatorname{Gen}(G) = \sigma[U]$ y podemos referirnos a la proposición 2.1.5. Notemos que esto no es completamente satisfactorio porque no podemos inferir esta propiedad a partir de las propiedades del módulo M.

2.2.1 $\sigma[U]$ cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$

Proposición 2.2.2. *Para $U \in \sigma[M]$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$\sigma[U]$ es cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$;*

(b) *existe un generador G en $\sigma[U]$ el cual es G-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$;*

(c) *todo generador en $\sigma[U]$ es auto-pseudo-proyectivo en $\sigma[M]$;*

(d) *$\sigma[U]$ contiene todos los módulos cíclicos de $\mathrm{E}_M(\sigma[U],\sigma[U])$;*

(e) *todo $N \in \sigma[M]$ que tiene una sucesión exacta $U^{(\Delta)} \longrightarrow N \longrightarrow U^{(\Delta)}$ (para algún conjunto Δ) pertenece a $\sigma[U]$.*

Prueba. La equivalencia entre (a),(b) y (c) se tiene por la proposición 2.1.8.

(a)$\Rightarrow$(d) Obvio.

(d)$\Rightarrow$(e) Sea $N \in \sigma[M]$ y $U^{(\Delta)} \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} U^{(\Delta)}$ exacta en $\sigma[M]$. Es claro que $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Im} g$ están en $\sigma[U]$, entonces la sucesión $0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow N \longrightarrow \operatorname{Im} g \longrightarrow 0$ es exacta y por lo tanto $N \in \mathrm{E}_M(\sigma[U],\sigma[U])$, como $\sigma[U]$

es cerrada bajo submódulos $\mathrm{E}_M(\sigma[U], \sigma[U])$ también lo es, por lo que Rx pertenece a $\mathrm{E}_M(\sigma[U], \sigma[U])$ para todo $x \in N$, y por (d) $Rx \in \sigma[U]$ para todo $x \in N$ con lo que $\sum_{x \in N} Rx$ está en $\sigma[U]$, es decir, $\mathrm{N} \in \sigma[U]$.

(e)$\Rightarrow$(a) Sea $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\sigma[M]$ con $K, L \in \sigma[U]$, entonces existe un módulo U−generado X tal que $K, L \subseteq X$. Para un conjunto apropiado Λ, podemos encontrar un epimorfismo $h : U^{(\Lambda)} \longrightarrow X$ e inclusiones $j : K \hookrightarrow X$ e $i : L \hookrightarrow X$. Para $V := h^{-1}(N) \subseteq U^{(\Lambda)}$ tenemos que $h(V) = N$. Formemos el diagrama conmutativo con renglones exactos de la suma fibrada para f y j.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & N \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Q \arrow[r] & L \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Para q y h formamos el diagrama conmutativo con renglones exactos del producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Q \arrow[r, "q"] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Lo que nos conduce a una sucesión exacta $U^{(\Delta)} \longrightarrow P \longrightarrow U^{(\Delta)}$. Por (e) $P \in \sigma[U]$, es decir, existe un módulo U−generado Y con $P \subseteq Y$, puesto que Q es isomorfo a un cociente de P que a su vez es submódulo de un cociente de Y, entonces $Q \in \sigma[U]$, como N es isomorfo a un submódulo de Q tenemos que $N \in \sigma[U]$. $\square$

En el caso particular de que $U = R$, el teorema anterior queda de la siguiente forma:

2.2.3 $\sigma[U]$ es cerrada bajo extensiones en $R-\mathsf{Mod}$

Proposición 2.2.4. *Para un R-módulo U las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$\sigma[U]$ es cerrada bajo extensiones;*

(b) *existe un generador auto-pseudo-proyectivo en $\sigma[U]$;*

(c) *todo generador en $\sigma[U]$ es auto-pseudo-proyectivo;*

(d) *$\sigma[U]$ contiene todos los módulos cíclicos de $\mathrm{E}(\sigma[U], \sigma[U])$;*

(e) *todo R-módulo N que tiene una sucesión exacta $U^{(\Delta)} \longrightarrow N \longrightarrow U^{(\Delta)}$ (para algún conjunto Δ) pertenece a $\sigma[U]$.*

En vista de la proposición 2.2.2 es natural considerar el caso cuando $\sigma[U]$ tiene un generador pseudo-proyectivo en $\sigma[U]$. Este caso esta esencialmente descrito en 2.1.17. Cuando $\sigma[U]$ tiene generador pseudo-proyectivo en $R-\mathsf{Mod}$ podemos referirnos a las propiedades del ideal traza. Para ello es de mucha utilidad desarrollar distintas técnicas para las diferentes situaciones que se puedan presentar. Recordemos algunos hechos y definiciones.

2.2.5 $T-$módulos $s-$unitarios

Definición 2.2.6. Sea T un anillo sin elemento unitario. Un $T-$módulo izquierdo N se llama $s-$unitario si $u \in Tu$ para toda $u \in N$.

Para un ideal $T \subseteq R$, todo $R-$módulo es un $T-$módulo y tenemos las siguientes relaciones:

Proposición 2.2.7. *Sea T un ideal en R. Para cualquier $R-$módulo N. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *N es un $T-$módulo $s-$unitario;*

(b) *para todo submódulo ${}_RL \subseteq_R N$, $L = TL$;*

(c) *para toda $k \in \mathbb{N}$ y $u_1, ..., u_k \in N$, existe $t \in T$ con $u_i = tu_i$ para toda $i = 1, ..., k$;*

(d) *para cuaquier conjunto Λ, $N^{(\Lambda)}$ es un $T-$módulo $s-$unitario.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Sea N es un $T-$módulo $s-$unitario, y ${}_RL \subseteq_R N$. Es claro que $TL \subseteq L$. Sea $l \in L$ entonces $l \in N$, por hipótesis $l \in Tl \subseteq TL$, y por lo tanto $L = TL$.

(b)$\Rightarrow$(a) Sea $m \in N$, $m \neq 0$. Entonces por (b), $Rm = TRm$, y como T es ideal de R tenemos que $m \in Rm = Tm$, entonces $m = tm$ para algún $t \in T$, con lo que N es s-unitario.

(b)$\Rightarrow$(c) Sea $k \in \mathbb{N}$, haremos inducción sobre k. Si $k = 1$ entonces por (a) existe $t \in T$ tal que $u_1 = tu_1$. Supongamos entonces que el resultado vale para cualesquiera $k-1$ elementos de N. Sean $u_1, ..., u_k \in N$, puesto que $N = TN$, existen t_i elementos de T con $i = 1, ..., k$ tal que $u_i = t_iu_i$. Sea $v_i = u_i - t_ku_i$, para $i = 1, ..., k-1$. Por hipótesis de inducción existe $t' \in T$ tal que $v_i = t'v_i$. Sea $t = t_k + t' - t't_k$. Entonces para toda u_i con $i = 1, ..., k-1$ se tiene que $tu_i = t_ku_i + t'u_i - t't_ku_i = t_ku_i + t'(u_i - t_ku_i) = t_ku_i + t'(v_i) = t_ku_i + v_i = t_ku_i + u_i - t_ku_i = u_i$. Además $tu_k = t_ku_k + t'u_k - t't_ku_k = t_ku_k + t'u_k - t'u_k = u_k$. Por lo tanto existe $t \in T$ tal que $u_k = tu_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

(c)$\Rightarrow$(d) Sea $(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in N^{(\Lambda)}$. Entonces $n_\lambda = 0$ para casi toda $\lambda \in \Lambda$. Sean n_{λ_i} los elementos distintos de cero en $(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ con $i = 1, ..., k$. Por (c) existe $t \in T$ tal que $n_{\lambda_i} = tn_{\lambda_i}$. Entonces $t(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ con lo que $N^{(\Lambda)}$ es s-unitario para todo conjunto Λ.

(d)$\Rightarrow$(a) Obvio. □

Para recordar definiciones y resultados acerca de los módulos planos ver A.7 y A.7.8.

2.2.8 Anillos $s-$unitarios

Proposición 2.2.9. *Para T un ideal en R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *T es $s-$unitario izquierdo;*

(b) *para todo ideal izquierdo I de R, $TI = T \cap I$;*

(c) *para todo $R-$módulo ${}_RL \subseteq_R N$, $TL = TN \cap L$;*

(d) *R/T es un $R-$módulo derecho plano.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(c) Sea ${}_RL \subseteq_R N$. Tenemos que demostrar que $TN \cap L \subseteq TL$. Sea $x \in TN \cap L$, en particular $x \in TN$, por lo que $x = \sum_{i=1}^{k} t_i n_i$ con $t_i \in T$ y $n_i \in N$. El inciso (a), junto con la proposición 2.2.7 (c), nos dice que existe $t \in T$ tal que $t_i = tt_i$ $\forall$ i. Por lo tanto $tx = t\sum_{i=1}^{k} t_i n_i = \sum_{i=1}^{k} tt_i n_i = \sum_{i=1}^{k} t_i n_i = x$, como x también está en L tenemos que $x \in TL$, y por lo tanto $TL = TN \cap L$.

(c)$\Rightarrow$(b) Sea I un ideal izquierdo de R. Considerando ${}_RI \subseteq_R R$, tenemos que $TI = TR \cap I = T \cap I$.

(b)$\Rightarrow$(a) Sea $u \in T$, entonces Ru es un ideal de R y por (b), $u \in T \cap Ru = TRu = Tu$.

(b)$\Leftrightarrow$(d) Se sigue de la proposición A.7.11. □

Ahora estamos listos para la siguiente proposición:

2.2.10 $\sigma[U]$ con generador pseudo-proyectivo

Proposición 2.2.11. *Sea U un $R-$módulo, $G := \bigoplus\{Ru \mid u \in U^{(\mathbb{N})}\}$ y $T := \mathrm{Tr}(\sigma[U], R) = \mathrm{Tr}(G, R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *G es pseudo-proyectivo;*

(b) *todo generador en $\sigma[U]$ es pseudo-proyectivo;*

(c) *$\sigma[U]$ es cerrada bajo extensiones y* $\mathrm{F}(\sigma[U])$ *es cerrada bajo cocientes de módulos;*

(d) $(\sigma[U], \mathrm{F}(\sigma[U]))$ *es una teoría de torsión cohereditaria;*

(e) *G es un $T-$módulo $s-$unitario;*

(f) *todo módulo en $\sigma[U]$ es un $T-$módulo $s-$unitario;*

(g) *U es un $T-$módulo $s-$unitario;*

(h) *para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $g_1, ..., g_k \in G$, $R = T + \bigcap_{i=1}^{k} \mathsf{An}_R(g_i)$;*

(i) *para toda $g \in G$, $R = T + \mathsf{An}_R(g)$;*

(j) *para todo $N \in \sigma[U]$ el morfismo canónico $\psi_N : T \otimes_R N \longrightarrow N$ es una biyección;*

(k) *$U = TU$ y $(R/T)_R$ es U-plano.*

Prueba. (a)$\Leftrightarrow$(b) Igual que (a)$\Leftrightarrow$(c) en la proposición 2.1.5.

(c)$\Leftrightarrow$(d) Es obvio.

(a)$\Leftrightarrow$(d) Es claro a partir de la proposición 2.1.21, pues por hipótesis $\sigma[U] = \mathrm{Gen}(G)$.

(d)$\Rightarrow$(e) Por (d) y 2.1.21, $\mathrm{Tr}(G, L) = TL$ para todo $R-$módulo. $\sigma[U]$ es cerrada bajo submódulos, entonces $L = TL$ para todo $_RL \subseteq G$, por 2.2.7, tenemos que G es un $T-$módulo $s-$unitario.

(e)$\Rightarrow$(a) Por (e) y 2.2.7, tenemos que $TG = G$ y por 2.1.21, G es pseudo-proyectivo.

(e)$\Rightarrow$(f) Sea M en $\sigma[U]$, por lo tanto $M \in \mathrm{Gen}(G)$. Entonces existe un epiformismo $\varphi : G^{(\Lambda)} \longrightarrow M$ para algún conjunto Λ. Por hipótesis G es un $T-$módulo $s-$unitario, por la proposición 2.2.7, $G^{(\Lambda)}$ también lo es. Sea $m \in M$, entonces existe $g \in G^{(\Lambda)}$ tal que $\varphi(g) = m$, para $g \in G^{(\Lambda)}$ existe $t \in T$ tal que $g = tg$, por lo tanto $tm = t\varphi(g) = \varphi(tg) = \varphi(g) = m$, y por lo tanto M es $s-$unitario.

(f)⇒(g) y (h)⇒(i) Obvio.

(e)⇒(h) Para $k \in \mathbb{N}$ y $g_1, ..., g_k \in G$, consideremos el monomorfismo

$$\gamma : R/\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{An}_R(g_i) \longrightarrow G^k, \text{ definida por } \bar{r} \longmapsto (rg_i)_{1 \leq i \leq k}.$$

Por (e), $T\mathrm{Im}\gamma = \mathrm{Im}\gamma$, y como $\mathrm{Im}\gamma \cong R/\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{An}_R(g_i)$ concluímos que

$$T(R/\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{An}_R(g_i)) = R/\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{An}_R(g_i)$$

Es decir, $R/\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{An}_R(g_i) \in \mathrm{Gen}(G)$. Además G es pseudo-proyectivo, entonces por la proposición 2.1.17

$$\mathrm{Tr}(G, (R/\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{An}_R(g_i))) = (\mathrm{Tr}(G, R) + \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{An}_R(g_i))/\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{An}_R(g_i)$$

y por lo tanto $R = T + \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{An}_R(g_i)$.

(g)⇒(e) Por (g) y 2.2.7, $U^{(\mathbb{N})}$ es $s-$unitario, y como $G \subseteq U^{(\mathbb{N})}$ entonces G también lo es.

(i)⇒(e) Para $g \in G$ existen elementos $x \in \mathrm{An}_R(g)$, $t \in T$ con $1_R = x + t$, por lo tanto $g = (x + t)g = tg \in Tg$, es decir, G es $s-$unitario.

(e)⇒(j) Para $N \in \sigma[U]$, $N = TN$ (por (e)), es decir, ψ_N es suprayectiva. Para probar la inyectividad de ψ_N consideremos $\sum_{i=1}^{k} t_i \otimes n_i \in \mathrm{Nuc}\ \psi_N$, donde $t_i \in T$ y $n_i \in N$, es decir, $\sum_{i=1}^{k} t_i n_i = 0$. Como ${}_RT$ es un $T-$módulo $s-$unitario existe $t \in T$ con $t_i = tt_i \forall\, i = 1, ...k$ (por 2.2.7). Entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} t_i \otimes n_i = \sum_{i=1}^{k} tt_i \otimes n_i = \sum_{i=1}^{k} t \otimes t_i n_i = 0$$

Por lo tanto ψ_N es inyectiva.

(j)⇒(e) Consideremos un submódulo $K \subseteq G$ y formemos el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
 & T \otimes K \arrow[r] \arrow[d, "\psi_K"] & T \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\psi_G"] & T \otimes G/K \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{G/K}"] & O \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & G \arrow[r] & G/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por (j) ψ_G y $\psi_{G/K}$ son isomorfismos. De lo anterior concluímos que ψ_K es epimorfismo por lo que $K = \mathrm{Im}\psi_K = TK$, es decir, G es $s-$unitario.

(a)$\Rightarrow$(k) Puesto (a)$\Rightarrow$(g), tenemos que U es $s-$unitario y por lo tanto $U = TU$. Como G es pseudo-proyectivo por la proposición 2.1.21, $T = T^2$, es decir, T es $s-$unitario entonces por la proposición 2.2.9, $(R/T)_R$ es plano, en particular $U-$plano.

(k)$\Rightarrow$(g) Sea $N \subseteq U$ un submódulo e $i : L \hookrightarrow N$. Definimos $\varphi_N : R/T \otimes_R N \longrightarrow N/TN$ y $\varphi_U : R/T \otimes_R U \longrightarrow U/TU$ como $\varphi_N((r+T)\otimes n) = rn + TN$ y $\varphi_U((r+T)\otimes u) = ru + TU$, respectivamente, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & R/T \otimes_R N & \xrightarrow{Id_{R/T}\otimes i} & R/T \otimes_R U \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_N} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_U} \\ 0 & \longrightarrow & N/TN & \xrightarrow{i'} & U/TU \end{array}$$

es conmutativo, por (k), $(R/T)_R$ es $U-$plano, por lo tanto los renglones son exactos. De que $U/TU = 0$ se sigue que $N/TN = 0$, es decir, $N = TN$ por lo tanto U es un $T-$módulo $s-$unitario. □

Combinando los resultados anteriores tenemos las siguientes observaciones acerca de ideales idempotentes.

Corolario 2.2.12. *Para un ideal idempotente T de R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathrm{Gen}(_RT)$ *es cerrada bajo submódulos;*

(b) *para cualesquiera R-módulos $_RL \subseteq_R N$, $TL = TN \cap L$;*

(c) *R/T es un R-módulo derecho plano;*

(d) *T es un anillo $s-$unitario izquierdo;*

(e) *para toda $t \in T$, $R = T + \mathsf{An}_R(t)$;*

(f) *para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $t_1, ..., t_k \in T$, $R = T + \bigcap_{i=1}^{k} \mathsf{An}_R(t_i)$;*

(g) *todo $R/T-$módulo izquierdo inyectivo es R-inyectivo;*

(h) $R/T -$ Mod *tiene un cogenerador R-inyectivo.*

Prueba. Combinando las proposiciones A.7.11 y 2.2.9 obtenemos la equivalencia entre (b), (c), (d), (g) y (h).

(f)$\Rightarrow$(e) Obvio.

(e)$\Rightarrow$(a) Por (e), T es un anilo s-unitario (como en (i)$\Rightarrow$(e) 2.2.11), por la proposición 2.2.9, $TL = TN \cap L$ para todo $R-$módulo N y $_RL \subseteq_R N$, por lo que Gen$(_RT)$ resulta hereditaria.

Por (a), Gen$(_RT)$ es una subcategoría cerrada, por la proposición 1.3.2 tenemos que Gen$(_RT) = \sigma[K]$ para algún $K \in R -$ Mod, y además $\mathrm{Tr}(\sigma[K], R) = \mathrm{Tr}(T, R) = T$, entonces como T es un generador pseudo-proyectivo por la proposición 2.2.11, tenemos que (a) implica (e) y (f).

(a)$\Leftrightarrow$(b) Sea $_RL \subseteq_R N$, entonces $TL \subseteq TN \cap L$, por (a), $TL \subseteq TN \cap L \in$ Gen(T) y como TL es el mayor submódulo de L que está en Gen(T) tenemos que $TN \cap L \subseteq TL$ y por lo tanto $TL = TN \cap L$.

El recíproco también es claro como ya se vió: sea $_RL \subseteq_R N$ con $N \in$ Gen(T) por(b), $TL = TN \cap L = N \cap L = L$ y por lo tanto $L \in$ Gen(T). □

2.3 Subcategorías estables

Recordemos que una clase $\mathcal{T} \subseteq \sigma[M]$ es llamada *estable en* $\sigma[M]$ si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones esenciales en $\sigma[M]$.

2.3.1 Subcategorías estables en $\sigma[M]$

Proposición 2.3.2. *Para $U \in \sigma[M]$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$\sigma[U]$ es estable en $\sigma[M]$;*

(b) *$\sigma[U]$ es cerrada bajo cápsulas $M-$inyectivas;*

(c) *todo módulo $U-$inyectivo en $\sigma[U]$ es $M-$inyectivo;*

(d) *para cualquier* $N \in \sigma[M]$, $\mathrm{Tr}(\sigma[U], N)$ *es esencialmente cerrado en* N;

(e) *para cuaquier módulo* $M-$*inyectivo* $N \in \sigma[M]$, $\mathrm{Tr}(U, N)$ *es un sumando directo en* N;

(f) *para cuaquier módulo* $U-$*inyectivo* $N \in \sigma[M]$, $\mathrm{Tr}(U, N)$ *es* $M-$*inyectivo.*

Prueba. (a)⇒(b) Sea $N \in \sigma[U]$ y $\widehat{N}$ su cápsula $M-$inyectiva. $\widehat{N}$ es una extensión esencial de N, por (a), $\widehat{N} \in \sigma[U]$.

(b)⇒(c) Sea $N \in \sigma[U]$ y $\widehat{N}_U$ su cápsula $U-$inyectiva. $\widehat{N}_U$ es la mayor extensión esencial de N en $\sigma[U]$. Si N es $U-$inyectivo entonces $N = \widehat{N}_U$, por (b), $\widehat{N} \in \sigma[U]$, entonces $\widehat{N}_U = \widehat{N}$, por lo tanto N es $M-$inyectivo.

(c)⇒(d) Sea $N \in \sigma[M]$, $T := \mathrm{Tr}(\sigma[U], N)$ y $\widehat{T}_U$ la cápsula $U-$inyectiva de T. Entonces, $T \subseteq \widehat{T}_U \cap N \in \sigma[U]$ y como T es el mayor submódulo de N que pertenece a $\sigma[U]$ tenemos que $T = \widehat{T}_U \cap N$, por (c), $\widehat{T}_U = \widehat{T}$, es decir $T = \widehat{T} \cap N$. Supongamos que $T \subseteq_e K$, $K \subseteq N$, entonces en particular $\widehat{T} \cap N \subseteq K$ y como $\widehat{T}$ es la mayor extensión esencial de T en $\sigma[M]$ tenemos que $K \subseteq \widehat{T}$ y por lo tanto $T = K$, es decir, T es esencialmente cerrado en N.

(d)⇒(e) Sea $T := \mathrm{Tr}(\sigma[U], N)$. Si N es $M-$inyectivo entonces $\widehat{T} \subseteq N$, por (d), T es esencialmete cerrado en N, por lo tanto $T = \widehat{T}$, es decir, T es sumando directo de N. Por otro lado, observemos que si N es $U-$inyectivo entonces $\mathrm{Tr}(U, N)$ también lo es, pues para cualquier homomorfismo $f : U \longrightarrow N$, $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Tr}(U, N)$. Es claro que $\mathrm{Tr}(U, N) \subseteq T$ y como ambos son $U-$inyectivos tenemos que $\mathrm{Tr}(U, N)$ es sumando directo de T y por lo tanto de N.

(e)⇒(f) Sea N un módulo $U-$inyectivo en $\sigma[M]$. Entonces como en la implicación anterior $T := \mathrm{Tr}(U, N)$ resulta $U-$inyectivo. Sea $T' := \mathrm{Tr}(U, \widehat{T})$, entonces $\mathrm{Tr}(U, T) \subseteq \mathrm{Tr}(U, \widehat{T}) = T'$ y como $\mathrm{Tr}(U, T) = \mathrm{Tr}(U, \mathrm{Tr}(U, N)) = \mathrm{Tr}(U, N) = T$ (la traza es un prerradical idempotente) entonces $T \subseteq T'$. Por (e), T' es sumando directo de $\widehat{T}$, es decir, $\widehat{T} = T' \oplus K$ para algún $K \subseteq \widehat{T}$. Puesto que $T \subseteq T'$ y $T \subseteq_e \widehat{T}$ tenemos que $K = 0$ y entonces $T' = \widehat{T}$. Por otro lado, $T \in \sigma[U]$ y T $U-$inyectivo implica que $T = \widehat{T}_U$, y como $T' = \widehat{T}_U$ tenemos que $T = T' = \widehat{T}$ y por lo tanto $\mathrm{Tr}(U, N)$ es $M-$inyectivo.

(f)$\Rightarrow$(a) Sea $N \in \sigma[U]$ y N' una extensión esencial de N en $\sigma[M]$. entonces $N' \subseteq \widehat{N}$. Además, $\widehat{N}$ es $U-$inyectivo, por (f), $\mathrm{Tr}(U, \widehat{N})$ es $M-$inyectivo, por lo tanto $\widehat{N} = \mathrm{Tr}(U, \widehat{N}) \oplus K$, para algún $K \subseteq \widehat{N}$. Por otro lado, N intersecta a $\mathrm{Tr}(U, \widehat{N})$, entonces $N \cap K = 0$ y por lo tanto $K = 0$, es decir, $\widehat{N} = \mathrm{Tr}(U, \widehat{N}) \in \sigma[U]$. Como $N' \subseteq \widehat{N}$ y $\sigma[U]$ es cerrada bajo submódulos entonces $N' \in \sigma[U]$ y por lo tanto $\sigma[U]$ es cerrada bajo extensiones. $\square$

Observemos que para una subcategoría estable $\sigma[U] \subseteq \sigma[M]$, los módulos $U-$inyectivos en $\sigma[M]$ no tienen por que ser $M-$inyectivos. La siguiente proposición nos proporciona un criterio para saber cuando un módulo $U-$inyectivo en $\sigma[M]$ es $M-$inyectivo.

Proposición 2.3.3. *Para $U \in \sigma[M]$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *todo módulo $U-$inyectivo en $\sigma[M]$ es $M-$inyectivo;*

(b) *todo módulo $U-$inyectivo en $\sigma[U]$ y todo módulo $X \in \sigma[M]$ para el cual $\mathrm{Tr}(\sigma[U], X) = 0$, es $M-$inyectivo.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Por hipótesis todo módulo $U-$inyectivo en $\sigma[M]$ es $M-$inyectivo, en particular si está en $\sigma[U]$. Ahora, sea $X \in \sigma[M]$ con $\mathrm{Tr}(\sigma[U], X) = 0$, y $0 \longrightarrow K \longrightarrow U$ un monomorfismo. Entonces $K \in \sigma[U]$, por lo que el morfismo cero es el único morfismo de K a X, el cual es trivialmente extendido por el morfismo cero de U a X, por lo tanto X es $U-$inyectivo y por (a), X es $M-$inyectivo.

(b)$\Rightarrow$ (a) Sea $X \in \sigma[M]$, $U-$inyectivo. Entonces $Y := \mathrm{Tr}(\sigma[U], X) \subseteq X$ es también $U-$inyectivo como se vió en la proposición anterior ((d)$\Rightarrow$ (e)), como $Y \in \sigma[U]$, por (b), Y es $M-$inyectivo y por lo tanto sumando directo de X. Entonces $X = Y \oplus Z$ para algún ${}_RZ \subseteq_R X$, además $\mathrm{Tr}(\sigma[U], Z) = 0$, pues de lo contrario $Y \cap Z \neq 0$ debido a que $\mathrm{Tr}(\sigma[U], Z) \subseteq \mathrm{Tr}(\sigma[U], X) = Y$ por lo tanto Z es $M-$inyectivo y en consecuencia X también lo es. $\square$

Proposición 2.3.4. *Sea $U \in \sigma[M]$ y supongamos que $\sigma[U]$ es estable en $\sigma[M]$. Entonces $\sigma[U]$ es cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$.*

Prueba. Sea $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\sigma[M]$, con $K,\ N \in \sigma[U]$. Por hipótesis la cápsula $M-$inyectiva $\widehat{K}$ de K está en $\sigma[U]$. Calculando la suma fibrada* obtenemos el diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{K} \arrow[r] & Q^{*} \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El renglón de abajo se escinde. Entonces $Q \cong \widehat{K} \oplus N \in \sigma[U]$, por lo tanto $L \in \sigma[U]$. $\square$

2.4 Cog(U) cerrada bajo extensiones

El hecho de que Cog(U) sea una clase cerrada bajo extensiones está relacionado con condiciones de inyectividad para el módulo U, lo cual es el dual de las condiciones de proyectividad que se consideraron antes. A continuación se darán algunas definiciones y resutados duales a los de la sección 2.1.

Las nociones duales a 2.1.1 quedan como siguen:

Definición 2.4.1. Sea Q un $R-$módulo y $h : L \longrightarrow N$ un monomorfismo en $R-\mathsf{Mod}$. Q es llamado *pseudo-inyectivo con respecto a* h si para todo homomorfismo distinto de cero $f \in \mathrm{Hom}_R(L, Q)$, existen $s \in \mathrm{End}(Q)$ y $g : N \longrightarrow Q$ que satisfacen $gh = sf \neq 0$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & N \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

puede ser extendido no trivialmente al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & N \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & Q & \xrightarrow{s} & Q \end{array}$$

Obviamente Q es pseudo-inyectivo con respecto a h si y sólo si $\mathrm{Hom}_R(N,Q)h$ es un $\mathrm{End}(Q)-$submódulo esencial de $\mathrm{Hom}_R(L,Q)$.

Q es llamado:

- *nuc-inyectivo con respecto a h* si las condiciones de arriba se satisfacen con s un monomorfismo.
- *inyectivo con respecto a h* si las condiciones de arriba se satisfacen con s un isomorfismo (o $s = Id_Q$).

Aplicaremos estas nociones con respecto a diferentes clases de monomorfismos. Primero recordemos que para $f : N \longrightarrow M$, Conuc f está definido como Conuc $f = M/\mathrm{Im} f$. Como estaremos tratando con monomorfismos, entonces que Conuc $f \in \mathrm{Cog}(U)$ simplemente quiere decir $M/N \in \mathrm{Cog}(U)$.

Dual a 2.1.2 definimos:

Definición 2.4.2. Sea M un $R-$módulo y $U, Q \in \sigma[M]$. Q es llamado:

- *U-pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$* si Q es pseudo-inyectivo con respecto a todos los monomorfismos $h : L \longrightarrow N$ en $\sigma[M]$, con Conuc $h \in \mathrm{Cog}(U)$;
- *auto-pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$* si es pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$ con respecto a todos los monomorfismos $h : L \longrightarrow N$ en $\sigma[M]$, con Conuc $h \in \mathrm{Cog}(Q)$;
- *pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$* si Q es pseudo-inyectivo con respecto a todos los monomorfismos en $\sigma[M]$;

- *nuc-inyectivo en* $\sigma[M]$ si es nuc-inyectivo con respecto a todos los monomorfismos en $\sigma[M]$.

Observación 2.4.3. Sea $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$, entonces S es un $R-$módulo izquierdo simple. Además, S es proyectivo, ya que como módulo izquierdo $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$. Sea $h : L \longrightarrow N$ un monomorfismo con Conuc $h \in$ Cog(S), entonces Conuc h es isomorfo a un submódulo de S^X para algún conjunto X. Puesto que ${}_RS = {}_{\mathbb{R}}S$, tenemos que $S^X = S^{(Y)}$ para algún conjunto Y. Entonces S^X es semisimple, por lo que Conuc h es sumando directo de S^X, por lo tanto Conuc $h \cong S^{(Z)}$ para algún conjunto Z, con card $(Z) \leq$ card (Y), por lo tanto Conuc h es proyectivo. Con una argumentación dual a la hecha en 2.1.10, S resulta auto-pseudo-inyectivo en $\sigma[R]$. Además, S no es inyectivo en $\sigma[R]$, pues $S \subseteq_e \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$.

Observación 2.4.4. Al igual que Gen(U), Cog(U) en general *no es una clase cerrada bajo extensiones*, por ejemplo si $U = \mathbb{Z}_{p^{n-1}}$, con p un número primo y $n \in \mathbb{N}$, podemos formar la sucesión exacta en $\mathbb{Z}$ − Mod; $0 \longrightarrow p\mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^n}/p\mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow 0$ con extremos en Cog($\mathbb{Z}_{p^{n-1}}$) y con $\mathbb{Z}_{p^n} \notin$ Cog($\mathbb{Z}_{p^{n-1}}$).

Dual a 2.1.5 tenemos:

2.4.5 Módulos auto-pseudo-inyectivos en $\sigma[M]$

Proposición 2.4.6. *Para $U \in \sigma[M]$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *U es auto-pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$;*

(b) *si $h : L \longrightarrow N$ es un monomorfismo en $\sigma[M]$ con* Conuc $h \in$ Cog(U) *y* $\mathrm{Hom}_R(N, U)h = 0$, *entonces* $\mathrm{Hom}_R(L, U) = 0$*;*

(c) Cog(U) *es cerrada bajo extensiones;*

(d) $(\mathrm{T}(U), \mathrm{Cog}(U))$ *es una teoría de torsión;*

(e) *todo* $N \in \sigma[M]$ *con una sucesión exacta* $0 \longrightarrow U^{\Lambda} \longrightarrow N \longrightarrow U^{\Lambda}$ *pertenece a* $\mathrm{Cog}(U)$.

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Supongamos que $\mathrm{Hom}_R(L,U) \neq 0$, entonces existe $0 \neq f : L \longrightarrow U$ y por lo tanto existen $s \in \mathrm{End}(U)$ y $g : N \longrightarrow U$ que satisfacen $gh = sf \neq 0$, lo cual contradice la hipótesis de que $\mathrm{Hom}_R(N,U)h = 0$, por lo tanto $f = 0$.

(b)$\Rightarrow$(c) Sea $i : \mathrm{Re}(N,U) \hookrightarrow N$. Entonces $\mathrm{Hom}_R(N,U)i = 0$, por (b), $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Re}(N,U),U) = 0$. Por lo anterior tenemos que $\mathrm{Re}(\mathrm{Re}(N,U),U) = \mathrm{Nuc}\ 0 = \mathrm{Re}(N,U)$, es decir, *el rechazo de* N *en* U *es idempotente*. Sea $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\sigma[M]$, con $K, L \in \mathrm{Cog}(U)$. Por el corolario 1.2.3 tenemos que $\mathrm{Re}(K,U) = \mathrm{Re}(L,U) = 0$, además, $g(\mathrm{Re}(N,U)) \subseteq \mathrm{Re}(L,U) = 0$, por lo tanto existe un único monomorfismo $h : \mathrm{Re}(N,U) \longrightarrow K$, como $\mathrm{Re}(N,U)$ es idempotente tenemos que $\mathrm{Re}(N,U) \subseteq \mathrm{Re}(K,U) = 0$, lo cual implica que $N \in \mathrm{Cog}(U)$ y por lo tanto $\mathrm{Cog}(U)$ es cerrada bajo extensiones.

(a)$\Leftrightarrow$(c) Sea $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\sigma[M]$ con $K, L \in \mathrm{Cog}(U)$. Supongamos $\mathrm{Re}(N,U) \neq 0$, sabemos que $\mathrm{Re}(N,U)$ es es el menor submódulo de N tal que $N/\mathrm{Re}(N,U)$ está cogenerado por U. Entonces como $N/K \cong L \in \mathrm{Cog}(U)$ tenemos que $\mathrm{Re}(N,U) \subseteq K$ con lo que $\mathrm{Re}(N,U) \in \mathrm{Cog}(U)$. Con lo anterior tenemos que existen homomorfismos no cero entre $\mathrm{Re}(N,U)$ y U. Sea $0 \neq f : \mathrm{Re}(N,U) \longrightarrow U$ e $i : \mathrm{Re}(N,U) \longrightarrow N$ la inclusión. Como U es auto-pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$, existen $s \in \mathrm{End}(U)$ y $g : N \longrightarrow U$ tal que $gi = sf \neq 0$, es decir $g(Re(\mathrm{N,U})) \neq 0$. Lo anterior es una contradicción, pues para toda $x \in \mathrm{Re}(N,U)$ se tiene que $x \in \mathrm{Nuc}\ g$, esta contradicción viene de suponer que $\mathrm{Re}(N,U) \neq 0$, por lo tanto $\mathrm{Re}(N,U) = 0$ y entonces $N \in \mathrm{Cog}(U)$ con lo que $\mathrm{Cog}(U)$ resulta cerrada bajo extensiones.

Para la otra dirección, sea $h : L \longrightarrow N$ un monomorfismo en en $\sigma[M]$ con $\mathrm{Conuc}\ h \in \mathrm{Cog}(U)$ y $0 \neq f : L \longrightarrow U$. Para h y f formamos la suma fibrada y obtenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & N & \xrightarrow{s} & N/L & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{s'} & Q & \longrightarrow & N/L & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

con $g'h = s'f \neq 0$. Puesto que U y N/L están en Cog(U) tenemos que Q también está en Cog(U), por lo tanto existe un monomorfismo $\varphi : Q \longrightarrow U^{\Lambda}$ para algún conjunto Λ. Sea $\pi : U^{\Lambda} \longrightarrow U$ la proyección, entonces definimos $s := \pi\varphi s'$ y $g := \pi\varphi g'$, y obtenemos que $gh = \pi\varphi g'h = \pi\varphi s'f = sf \neq 0$, con lo que U es auto-pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$.

(c)$\Leftrightarrow$(d) Recordemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\mathrm{Cog}(U)) =& \{T \in \sigma[M] \mid \text{para toda } F \in \mathrm{Cog}(U), \mathrm{Hom}_R(T, F) = 0\} \text{ y} \\ \mathrm{T}(U) =& \{T \in \sigma[M] \mid \mathrm{Hom}_R(T, U) = 0\}. \end{aligned}$$

Entonces es claro que $\mathrm{T}(\mathrm{Cog}(U)) \subseteq \mathrm{T}(U)$. Sea $T \in \mathrm{T}(U)$ y supongamos que $T \notin \mathrm{T}(\mathrm{Cog}(U))$, entonces existe $0 \neq f : T \longrightarrow F$ para algún $F \in \mathrm{Cog}(U)$ y por lo tanto tenemos un homomorfismo distinto de cero $T \longrightarrow F \longrightarrow U^{\Lambda} \longrightarrow U$, para algún conjunto Λ. Esto es una contradicción, por lo tanto $T \in \mathrm{T}(\mathrm{Cog}(U))$, es decir $\mathrm{T}(\mathrm{Cog}(U)) = \mathrm{T}(U)$. Por la proposición 1.6.11, tenemos que Cog(U) es cerrada bajo extensiones si y sólo si ($\mathrm{T}(U)$, Cog(U)) es una teoría de torsión.

(c)$\Leftrightarrow$(e) Sea $N \in \sigma[M]$ y $0 \longrightarrow U^{\Lambda} \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} U^{\Lambda}$ exacta en $\sigma[M]$. Entonces la sucesión $0 \longrightarrow \mathrm{Im} f \longrightarrow N \longrightarrow \mathrm{Im} g \longrightarrow 0$, es exacta y como $\mathrm{Im}\ f \cong U^{\Lambda} \in \mathrm{Cog}(U)$ e $\mathrm{Im}\ g \subseteq U^{\Lambda} \in \mathrm{Cog}(U)$, por (c), $N \in \mathrm{Cog}(U)$.

Para el converso, sea $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\sigma[M]$, con $K, L \in \mathrm{Cog}(U)$, tenemos que demostrar que $N \in \mathrm{Cog}(U)$. Por hipótesis existen monomorfismos $k' : K \longrightarrow U^{\Lambda'}$ y $l' : L \longrightarrow U^{\Lambda''}$, para algún Λ' y Λ'' respectivamente. Sea $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$ y $l : L \xrightarrow{l'} U^{\Lambda''} \xrightarrow{i} U^{\Lambda}$ entonces la sucesión $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{lg} U^{\Lambda}$ es exacta pues Nuc lg = Nuc $g = \mathrm{Im} f$. Para f y $k : K \xrightarrow{k'} U^{\Lambda'} \xrightarrow{i'} U^{\Lambda}$, formamos la suma fibrada y obtenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & N \arrow[r, "\iota g"] \arrow[d, "p"] & U^{\Lambda} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & U^{\Lambda} \arrow[r, "f'"'] & Q \arrow[r, "g'"'] & U^{\Lambda}.
\end{tikzcd}$$

Por (e), $Q \in \mathrm{Cog}(U)$. Sea $x \in$ Nuc p, entonces $0 = g'p(x) = g(x)$, es decir $x \in$ Nuc $g =$ Im f por lo tanto existe $y \in K$ tal que $f(y) = x$, con lo que $0 = p(x) = p(f(y)) = f'k(y)$ y como $f'k$ es mono tenemos que $y = 0$, y entonces p es monomorfismo. De que N es isomorfo a un submódulo de Q, concluimos que $N \in \mathrm{Cog}(U)$. □

El siguiente resultado es dual a 2.1.17:

2.4.7 Módulos pseudo-inyectivos en $\sigma[M]$

Proposición 2.4.8. *Sea $U \in \sigma[M]$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *U es pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$;*

(b) *si $h : L \longrightarrow N$ es un monomorfismo en $\sigma[M]$ para el cual $\mathrm{Hom}_R(N, U)h = 0$, entonces $\mathrm{Hom}(L, U) = 0$;*

(c) *$\mathrm{Cog}(U)$ es cerrada bajo extensiones, $\mathrm{T}(U)$ es cerrada bajo submódulos;*

(d) *$(\mathrm{T}(U), \mathrm{Cog}(U))$ es una teoría de torsión hereditaria;*

(e) *para todo monomorfismo $h : L \longrightarrow N$ en $\sigma[M]$ con $L \in \mathrm{Cog}(U)$ existe algún $g : N \longrightarrow U^{\Lambda}$ tal que $gh : L \longrightarrow U^{\Lambda}$ es mono;*

(f) *$\widehat{U} \in \mathrm{Cog}(U)$.*

Prueba. La equivalencia entre los incisos (a), (b), (c) y (d) se obtiene como en la proposición anterior.

(d)$\Rightarrow$(e) Sea $h : L \longrightarrow N$ un monomorfismo en $\sigma[M]$ con $L \in \text{Cog}(U)$. Sea $H = \text{Hom}_R(N, U)$, entonces por la propiedad universal del producto directo, existe un único homomorfismo $g : N \longrightarrow U^\Lambda$ con Nuc $g = \text{Re}(N, U)$. Puesto que (b) y (d) son equivalentes, tenemos que $\text{Hom}_R(\text{Re}(N, U), U) = 0$, es decir, $\text{Re}(N, U) \in \text{T}(U)$. Ahora, sea $x \in$ Nuc gh, entonces $h(x) \in$ Nuc g y $h(x) \in \text{Im } h \cong L$. Además, $\text{Re}(N, U) \cap L \subseteq \text{T}(U) \cap \text{Cog}(U) = 0$, por lo tanto $h(x) = 0$, como h es monomorfismo entonces $x = 0$ y por lo tanto gh también lo es.

(e)$\Rightarrow$(f) Sea $i : U \hookrightarrow \widehat{U}$ la inclusión, por (e), existe $g : \widehat{U} \longrightarrow U^\Lambda$ de tal forma que gi es un monomorfismo. Supongamos que Nuc $g \neq 0$, entonces tenemos que Nuc $g \cap U \neq 0$, es decir, existe $0 \neq x \in N$ de tal forma que $gi(x) = g(x) = 0$, lo cual contradice el hecho de que gi es un monomorfismo, por lo tanto g es monomorfismo y en consecuencia $\widehat{U} \in \text{Cog}(U)$.

(f)$\Rightarrow$(a) Sea $h : L \longrightarrow N$ un monomorfismo, $0 \neq f : L \longrightarrow U$ e $i : U \hookrightarrow \widehat{U}$ la inclusión. Puesto que $\widehat{U}$ es inyectivo en $\sigma[M]$ y por hipótesis $\widehat{U} \in \text{Cog}(U)$ tenemos el diagrama conmutativo con renglón de arriba exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[d, "g'"] & & \\
 & U \arrow[r, "i"] & \widehat{U} \arrow[r, "\varphi"] & U^\Lambda \arrow[r, "\pi"] & U
\end{tikzcd}$$

Entonces, si $g := \pi\varphi g'$ y $s := \pi\varphi i$ tenemos que $0 \neq gh = \pi\varphi g'h = \pi\varphi i f = sf$ y por lo tanto U es pseudo-inyectivo. □

Por (f), M es pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$ si y sólo si M cogenera su cápsula $M-$inyectiva.

Un caso especial de los resultados previos es:

2.4.9 Módulos nuc-inyectivos en $\sigma[M]$

Proposición 2.4.10. *Para $U \in \sigma[M]$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *U es nuc-inyectivo;*

(b) *para todos los monomorfismos $h : L \longrightarrow N$ y $f : L \longrightarrow U$ en $\sigma[M]$ existe $g : N \longrightarrow U$ con* Nuc $gh \subseteq$ Nuc$f$*;*

(c) *para todos los monomorfismos $h : U \longrightarrow N$ en $\sigma[M]$ existe $g : N \longrightarrow U$ tal que $gh : U \longrightarrow U$ es mono;*

(d) *U y $\widehat{U}$ son subisomorfos;*

(e) *U es subisomorfo a un módulo $M-$inyectivo.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Es claro a partir de la definición de nuc-inyectivo.

(b)$\Rightarrow$(c) Sea $h : U \longrightarrow N$ un monomorfismo en $\sigma[M]$. Por (b), para Id_U existe $g : N \longrightarrow U$ con Nuc $gh \subseteq$ Nuc Id_U, por lo tanto gh es mono.

(c)$\Rightarrow$(d) Sea $i : U \hookrightarrow \widehat{U}$ la inclusión, por (c), existe $g : \widehat{U} \longrightarrow U$ de tal forma que gi es un monomorfismo. Sea $x \in$ Nuc g, entonces existe $0 \neq r \in R$ de tal forma que $rx \in U$, entonces $gi(rx) = rg(x) = 0$, lo que implica que $rx = 0$ y por lo tanto $x = 0$, es decir, g es un monomorfismo, entonces U y $\widehat{U}$ son subisomorfos.

(d)$\Rightarrow$(e) Obvio.

(e)$\Rightarrow$(a) Sea $h : L \longrightarrow N$ un monomorfismo y $0 \neq f : L \longrightarrow U$, por (e), U es subisomorfo a un módulo $M-$inyectivo K, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglón de arriba exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[d, "g'"] & \\
& U \arrow[r, "\alpha"] & K \arrow[r, "\beta"] & U
\end{tikzcd}$$

Entonces si $g := \beta g'$ y $s := \beta\alpha$ tenemos que $gh = \beta g'h = \beta\alpha f = sf$, además como α y β son monomorfismos s también lo es, por lo tanto U es nuc-inyectivo. $\square$

Dual a 2.1.23

Definición 2.4.11. Dos $R-$módulos N y L son llamados

- *rechazo equivalentes* si $\mathrm{Cog}(N) = \mathrm{Cog}(L)$;
- *subisomorfos* si existen monomorfismos $N \longrightarrow L$ y $L \longrightarrow N$.

La siguiente proposición es dual a 2.1.24, y relaciona las dos nociones anteriores:

Proposición 2.4.12. *Para dos $R-$módulos N, L las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *N y L son rechazo equivalentes;*

(b) *existe un conjunto Λ tal que N^Λ y L^Λ son subisomorfos.*

Entre módulos pseudo-inyectivos y nuc-inyectivos tenemos la siguiente conexión:

Proposición 2.4.13. *Para $U \in \sigma[M]$:*

(a) *U es pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$;*

(b) *existe un conjunto Λ tal que U^Λ es nuc-inyectivo;*

(c) *U es rechazo equivalente a un módulo nuc-inyectivo en $\sigma[M]$.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(c) $U \hookrightarrow \widehat{U}$ induce un monomorfismo $U^A \longrightarrow \widehat{U}^A$ para todo conjunto A, entonces $U \hookrightarrow U^A \longrightarrow \widehat{U}^A$ es un monomorfismo, es decir, $U \in \mathrm{Cog}(\widehat{U})$ y por lo tanto $\mathrm{Cog}(U) \subseteq \mathrm{Cog}(\widehat{U})$. Por (a), y la proposición 2.4.8, $\widehat{U} \in \mathrm{Cog}(U)$, por lo tanto, $\mathrm{Cog}(U) = \mathrm{Cog}(\widehat{U})$, es decir, U es rechazo equivalente a un módulo $M-$inyectivo, en particular nuc-inyectivo.

(c)$\Rightarrow$(b) Como, $\mathrm{Cog}(U) = \mathrm{Cog}(K)$, con K nuc-inyectivo, por la proposición 2.4.12, existe un conjunto Λ, de tal forma que U^Λ y K^Λ son subisomorfos. Sea $h : L \longrightarrow N$ un monomorfismo en $\sigma[M]$ y $0 \neq f : L \longrightarrow U^\Lambda$.

Entonces por las hipótesis anteriores tenemos el siguiente diagrama conmutativo con el renglón de arriba exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dd, "g'"] & \\ & U^{\Lambda} \arrow[d, "\alpha"] & & \\ & K^{\Lambda} \arrow[r, "s'"] & K^{\Lambda} \arrow[r, "\beta"] & U^{\Lambda} \end{tikzcd}$$

con $s'\alpha f = g'h \neq 0$ y s' un monomorfismo, entonces si $s := \beta s'\alpha$ y $g := \beta g'$, tenemos que $sf = \beta s'\alpha f = \beta g'h = gh \neq 0$ con s un monomorfismo, por lo tanto U^{Λ} es nuc-inyectivo.

(b)$\Rightarrow$(c) Es claro pues, $\mathrm{Cog}(U^{\Lambda}) = \mathrm{Cog}(U)$ para todo conjunto Λ, entonces si Λ es el conjunto para el cual U^{Λ} es nuc-inyectivo, tenemos (c).

(b)$\Rightarrow$(a) Sea $h : L \longrightarrow N$ un monomorfismo en $\sigma[M]$ y $0 \neq f : L \longrightarrow U$. Consideremos a la proyección $\pi_{\lambda} : U^{\Lambda} \longrightarrow U$ y a la inclusión $U \hookrightarrow U^{\Lambda}$, para formar el diagrama conmutativo con el renglón de arriba exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dd, "g'"] & \\ & U \arrow[d, "i_{\lambda}"] & & \\ & U^{\Lambda} \arrow[r, "s'"] & U^{\Lambda} \arrow[r, "\pi_{\lambda}"] & U^{\Lambda} \end{tikzcd}$$

Como U^{Λ} es nuc-inyectivo, tenemos que $s'i_{\lambda}f = g'h \neq 0$, entonces si $s := \pi_{\lambda}s'i_{\lambda}$ y $g := \pi_{\lambda}g'$ tenemos que $sf = \pi_{\lambda}s'i_{\lambda}f = \pi_{\lambda}g'h = gh \neq 0$, y por lo tanto U es pseudo-inyectivo en $\sigma[M]$. $\square$

Apéndice A

En este apéndice presentaremos algunas definiciones y resultados que fueron usados libremente a lo largo de este trabajo y que corresponden a la Teoría general de Módulos.

A.1 Submódulos esenciales

Definición A.1.1. Sea M un $R-$módulo y N un submódulo de M, se dice que N *es esencial en* M ($N \subseteq_e M$), si $K \cap N = 0$ con $K \subseteq M$ implica $K = 0$. En este caso, se acostumbra decir que M es una extensión esencial para N.

Una equivalencia de la definición anterior es:

Proposición A.1.2. *Sean N y M dos $R-$módulos. Entonces $N \subseteq_e M$ si y sólo si para todo $0 \neq m \in M$ existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq rm \in N$.*

Prueba. Supongamos que $N \subseteq_e M$ y sea $0 \neq m \in M$, entonces $Rm \neq 0$ y por lo tanto $Rm \cap N \neq 0$.

En la otra dirección, sea $K \subseteq M$ con $K \cap N = 0$, supongamos que $K \neq 0$, entonces existe $0 \neq k \in K$, por hipótesis existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq rk \in N$ con lo que $K \cap N \neq 0$, esto es una contradicción, por lo tanto $K = 0$ y entonces $N \subseteq_e M$. $\square$

Definición A.1.3. Sea M un $R-$módulo y N un submódulo de M, se dice que N *es esencialmente cerrado en* M, si M no contiene extensiones esenciales propias de N, es decir, si $N \subseteq_e K$ y $K \subseteq M$, entonces $K = N$.

Definición A.1.4. Dado M un $R-$módulo y un submódulo $N \subseteq M$, *un pseudo-complemento para* N *en* M es un submódulo $K \subseteq M$ máximo con la propiedad de que $N \cap K = 0$.

Observemos $\mathfrak{F} = \{L \subseteq M \mid L \cap N = 0\}$ cumple las hipótesis del *lema de Zorn*, lo cual nos garantiza la existencia de pseudo-complementos.

Lema A.1.5. *Sea* M *un* $R-$*módulo y* N *es* esencialmente cerrado *en* M. *Entonces si* M *es inyectivo* N *también es inyectivo.*

Prueba. Sea K un pseudo-complemento para N en M. Consideremos el monomomorfismo $f : N \longrightarrow M/K$ definido por $n \mapsto n + K$ y la inclusión $i : N \hookrightarrow M$. Como M es inyectivo tenemos el diagrama conmutativo con renglón superior exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & M/K \arrow[dl, "\bar{i}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Es claro que $N \cong (N \oplus K)/K$. Sea $T/K \subseteq M/K$ de tal forma que $(N \oplus K)/K \ \cap \ T/K = 0$, entonces tenemos que $T \ \cap \ (N \oplus K) = K$. Observemos que $T \ \cap \ N \ \subseteq \ T \ \cap (N \oplus K) = K$, lo que implica $T \ \cap \ N = 0$, como K es un pseudo-complemento tenemos que $T = K$ y por lo tanto $T/K = 0$, es decir, $(N \oplus K)/K \subseteq_e M/K$, con lo que $\bar{i}$ resulta monomorfismo. Por hipótesis, N es esencialmente cerrrado en M por lo que $(N \oplus K)/K = M/K$, es decir, $N \oplus K = M$ y por lo tanto N es inyectivo. $\square$

A.2 Cápsulas inyectivas en R – Mod

Definición A.2.1. Sea D un grupo abeliano. D es *divisible* si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in D$ existe $y \in D$ de tal forma que $x = ny$.

Proposición A.2.2. *Todo grupo divisible es inyectivo como $\mathbb{Z}$–módulo.*

Prueba. Sea D un grupo divisible. Por el criterio de Baer, es suficiente verificar que D es inyectivo respecto a los ideales de $\mathbb{Z}$. Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $f : n\mathbb{Z} \longrightarrow D$ un $\mathbb{Z}$–homomorfismo, entonces $f(n) \in D$ por lo tanto existe $y \in D$ tal que $f(n) = ny$, entonces definimos $\bar{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow D$ como $\bar{f}(m) = my$ con lo que tenemos que $\bar{f}$ extiende a f y por lo tanto D es inyectivo en $\mathbb{Z}$ – Mod. $\square$

De la proposición anterior y de algunos otros hechos se desprende el siguiente resultado (para mayores detalles ver [DAU94]):

Proposición A.2.3. *Si D es un grupo divisible entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ *es inyectivo como R–módulo.*

Observación A.2.4. De la teoría general de grupos abelianos sabemos que cualquier grupo abeliano M se puede sumergir en un grupo divisible D, y por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ resulta ser un monomorfismo. Combinando estas observaciones con las dos proposiciones anteriores y con el hecho de que $M \cong \mathrm{Hom}_R(R, M) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ tenemos la siguiente proposición:

Proposición A.2.5. *Todo R–módulo izquierdo se puede sumergir en un R–módulo izquierdo inyectivo.*

Definición A.2.6. Una sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} E$ se llama monomorfismo esencial si $\mathrm{Im}\, \varepsilon \subseteq_e E$.

Definición A.2.7. Sean E y M R–módulos, E inyectivo. Entonces E es la cápsula inyectiva de M, si existe un monomorfismo esencial $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} E$.

Proposición A.2.8. *Todo $R-$módulo tiene cápsula inyectiva.*

Prueba. Sea $M \in R - \mathsf{Mod}$, entonces existe un $R-$módulo inyectivo E de tal forma que $M \subseteq E$. Sea $\mathfrak{F} = \{_RK \subseteq E \mid M \subseteq_e K\}$, es fácil ver que $\mathfrak{F}$ satisface las hipótesis del *lema de Zorn* por lo que $\mathfrak{F}$ tiene máximos. Sea $\bar{K}$ uno de tales máximos. Supongamos que $\bar{K} \subseteq_e T$ con $\bar{K} \subset T \subset E$, entonces tenemos que $M \subseteq_e T$, ésto contradice la maximalidad de $\bar{K}$, por lo tanto $\bar{K}$ es esencialmente cerrado en E y por el lema A.1.5, $\bar{K}$ es inyectivo, por lo tanto tenemos que $\bar{K}$ es una cápsula inyectiva para M. $\square$

Una caracterización muy útil de la cápsula inyectiva es la siguiente:

Proposición A.2.9. *Sea $M \in R - \mathsf{Mod}$ y $E(M)$ su cápsula inyectiva. Entonces*

(a) *$E(M)$ es la máxima extensión esencial de M en $R - \mathsf{Mod}$.*

(b) *$E(M)$ es el menor inyectivo que contiene a M en $R - \mathsf{Mod}$.*

Prueba. (a) Supongamos que $M \subseteq_e K$ para algún $K \in R-\mathsf{Mod}$. Puesto que $E(M)$ es inyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglón exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & K \arrow[dl, "\bar{i}"] \\ & E(M) & \end{tikzcd}$$

Sea $k \in \mathrm{Nuc}\ \bar{i}$, como $M \subseteq_e K$ tenemos que existe $0 \neq r \in R$ tal que $rk \in M$, entonces $i(rk) = \bar{i}(rk) = r\bar{i}(k) = 0$, como i es mono, tenemos que $rk = 0$ y por lo tanto $k = 0$ con lo que $\bar{i}$ es monomorfismo y por lo tanto $K \subseteq E(M)$.

(b) Se prueba de manera similar intercambiando K con $E(M)$. $\square$

Observemos que de la proposición anterior obtenemos la unicidad de la cápsula inyectiva (salvo isomorfismos).

Dado un $R/J-$módulo una descripción de su cápsula $R/J-$inyectiva es la siguiente:

Proposición A.2.10. *Sea M un $R/J-$módulo. Si $E(M)$ es su cápsula $R-$inyectiva y $E_{R/J}(M)$ su cápsula $R/J-$inyectiva, entonces*

$$E_{R/J}(M) = \{x \in E(M) \mid Jx = 0\}.$$

Prueba. Sea $E = \{x \in E(M) \mid Jx = 0\}$ y $x \in E$, entonces existe $r \in R$ tal que $rx \in M$, si $r + J = J$ entonces $(r + J)x = Jx = 0 \in J$, en otro caso $r + J \neq J$ y por lo tanto $(r + J)x \neq Jx = 0$, es decir, todo $x \in E$ tiene un multiplo escalar en M sobre R/J, entonces por la proposición A.1.2, $M \subseteq_e E$ y por la proposición A.2.9, tenemos que $E \subseteq E_{R/J}(M)$. Sea I un ideal izquierdo de R de tal forma que $J \subseteq I$. Consideremos el siguiente diagrama con renglón exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I/J \arrow[r] \arrow[d, "f"] & R/J \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & E \arrow[r, "i"] & E(M) \end{tikzcd}$$

Este diagrama es conmutativo pues $\mathrm{Hom}_{R/J}(I/J, E) = \mathrm{Hom}_R(I/J, E)$ y $E(M)$ es inyectivo. Además, $0 = \bar{f}(J) = J\bar{f}(\bar{1})$ por lo que $\bar{f}(\bar{1}) \in E$, es decir, E es $R/J-$inyectivo, entonces por la proposición A.2.9, $E_{R/J}(M) \subseteq E$ y por lo tanto $E_{R/J}(M) = E$. □

A.3 Cápsulas inyectivas en $\sigma[M]$

La existencia y unicidad de cápsulas inyectivas en $\sigma[M]$ se prueba de forma similar que en R − Mod. Una caracterización muy útil de la cápsula $M-$inyectiva es la siguiente:

Proposición A.3.1. *Sea $N \in \sigma[M]$, $\widehat{N}$ y $E(N)$ las cápsulas inyectivas de N en $\sigma[M]$ y en $R-$Mod respectivamente. Entonces $\widehat{N} \cong \mathrm{Tr}(M, E(N))$.*

Prueba. Es claro que $N \subseteq \mathrm{Tr}(M, E(N)) \subseteq E(N)$. Además, como $E(N)$ es $M-$inyectivo entonces $\mathrm{Tr}(M, E(N))$ también lo es: para cualquier homomorfismo $f : M \longrightarrow E(N)$, $\mathrm{Im}\ f \subseteq \mathrm{Tr}(M, E(N))$. Por otro lado, si

$x \in \mathrm{Tr}(M, E(N))$ entonces existe $r \in R$ de tal forma que $rx \in N$ (pues $x \in E(N)$), es decir, $N \subseteq_e \mathrm{Tr}(M, E(N))$, por lo tanto $\mathrm{Tr}(M, E(N))$ junto con la inclusión $N \hookrightarrow \mathrm{Tr}(M, E(N))$ es una cápsula inyectiva para N, y por la unicidad, tenemos que $\widehat{N} \cong \mathrm{Tr}(M, E(N))$. $\square$

De acuerdo con la proposicion A.2.9, tenemos la siguiente caracterización para las cápsulas inyectivas en $\sigma[M]$:

Proposición A.3.2. *Sea $N \in \sigma[M]$ y $\widehat{N}$ su cápsula $M-$inyectiva. Entonces*

(a) *$\widehat{N}$ es la máxima extensión esencial de N en $\sigma[M]$.*

(b) *$\widehat{N}$ es el menor inyectivo que contiene a N en $\sigma[M]$.*

A.4 Submódulos superfluos

Dual a la noción de *submódulo esencial*, definimos la de *submódulo superfluo:*

Definición A.4.1. Sea M un $R-$módulo y N un submódulo de M, se dice que N *es superfluo en* M ($N \ll M$), si $N + K = M$ con $K \subseteq M$ implica $K = M$.

Proposición A.4.2. *Sea M finitamente generado, $J(R)$ el radical de Jacobson de R e I un ideal de R. Si $I \subseteq J(R)$ entonces $IM \ll M$.*

Supongamos que $IM + K = M$ con $K \subset M$, entonces tenemos que $M = IM + K \subseteq J(R)M + K \subseteq J(M) + K$. Puesto que M es finitamente generado existe un submódulo máximo $H \subset M$ de tal forma que $K \subset H$, entonces $M \subseteq J(M) + K \subset J(M) + H$ y como $J(M) \subseteq H$ se tiene que $J(M) + H = H$, es decir, $M \subset H$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $K = M$ con lo que $IM \ll M$.

La proposición anterior es una de las versiones del *Lema de Nakayama.*

A.5 Cubiertas proyectivas en $R-$ Mod y en $\sigma[M]$

Definición A.5.1. Una sucesión exacta $M \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$ es un *epimorfismo superfluo* si Nuc $\pi \ll M$.

Definición A.5.2. Sean P y N $R-$módulos, P proyectivo. Entonces P *es la cubierta proyectiva de* N, si existe un epimorfismo superfluo $P \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$. Si los módulos están en $\sigma[M]$, entonces P se llama $\sigma[M]-$cubierta proyectiva de N.

Definición A.5.3. Dado un módulo M y un submódulo $N \subseteq M$ *un suplemento para* N *en* M, es un submódulo $K \subseteq M$ mínimo con la propiedad de que $N + K = M$.

Aunque existen suficientes módulos proyectivos en $\sigma[M]$ y $R-$ Mod, un módulo no necesariamente tiene cubierta proyectiva. La existencia de capsulas inyectivas está relacionada con la existencia de *pseudo-complementos*, lo cual, como anteriormente observamos está garantizado por el *lema de Zorn*. Para obetener cubiertas proyectivas necesitamos que existan *suplementos*, lo cual no siempre sucede, por ejemplo, cualquier submódulo propio de ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ carece de suplementos.

Las siguientes afirmaciones describen a la cubierta proyectiva sin mencionar su existencia.

Proposición A.5.4. *Sea* M *un* $R-$*módulo y* $P \xrightarrow{\pi} N$ *una cubierta proyectiva de* N. *Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) *Si* $f : Q \longrightarrow N$ *es un epimorfismo con* Q *proyectivo, entonces existe una descomposición* $Q = Q_1 \oplus Q_2$, *con* $Q_1 \cong P$, $Q_2 \cong$ Nuc f , y $f|_{Q_1}: Q_1 \longrightarrow N$ es una cubierta proyectiva de N.

(2) Si (Q, f) es otra cubierta proyectiva de N, entonces existe un isomorfismo $h : Q \longrightarrow P$ con $\pi h = f$.

Prueba. (1) De la proyectividad de Q tenemos que existe $h : Q \longrightarrow P$ con $\pi h = f$. Puesto que π es superfluo, h resulta epimorfismo y por lo tanto h se escinde. Es decir, existe algún $g : P \longrightarrow Q$ con $hg = Id_P$ y por lo tanto $Q = \mathrm{Im}\ g \oplus \mathrm{Nuc}\ h$, haciendo $Q_1 = \mathrm{Im}\ g$ y $Q_2 = \mathrm{Nuc}\ h$ obtenemos la descomposición deseada. Q_1 es proyectivo, y como $\pi = fg\,|_{Q_1}$, el epimorfismo $f\,|_{Q_1}$ es superfluo.

(2) Si f es superfluo, Nuc f no puede contener un sumando directo distinto de cero, y por lo tanto $Q_2 = 0$ en (1). □

Observemos que por (1), ningún cociente propio y no trivial de $\mathbb{Z}$ puede tener cubierta proyectiva en $\mathbb{Z} - \mathsf{Mod}$.

A.6 Anillos semiperfectos y perfectos derechos

Definición A.6.1. Sea R un anillo y $J(R)$ su radical de Jacobson. R se llama *semiperfecto* si $R/J(R)$ es semisimple y los idempotentes en $R/J(R)$ pueden ser levantados a R.

Definición A.6.2. Un anillo R se llama *perfecto derecho* si todo R—módulo derecho tiene cubierta proyectiva.

Un resultado que enlaza los dos conceptos anteriores es el siguiente:

Proposición A.6.3. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *R es semiperfecto;*

(b) *R tiene un conjunto completo de idempotentes ortogonales $e_1, \ldots, e_n$ de tal forma que cada e_iRe_i es un anillo local;*

(c) *Todo R—módulo derecho (izquierdo) simple tiene cubierta proyectiva;*

(d) *Todo $R-$módulo derecho (izquierdo) finitamente generado tiene cubierta proyectiva.*

Prueba. Ver [AF74: C7-s27]. □

De la proposición anterior es claro que todo anillo perfecto derecho es semiperfecto.

A.7 Módulos planos en Mod $- R$

Aquí mencionaremos algunos de los resultados más importantes acerca de los $R-$módulos derechos planos, cabe resaltar que dichos resultados también son válidos para los $R-$módulos izquierdos planos.

Definición A.7.1. Un $R-$módulo derecho F es *plano* si $F \otimes_R \cdot$ preserva monomorfismos de $R-$módulos izquierdos.

Proposición A.7.2. *Sea $\{F_i\}_I$ una familia de $R-$módulos derechos entonces $\oplus_I F_i$ es es plano si y sólo si cada F_i es plano.*

Prueba. Sea $L \longrightarrow M$ un monomorfismo de $R-$módulos izquierdos. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\oplus_I F_i) \otimes_R L & \longrightarrow & (\oplus_I F_i) \otimes_R M \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \oplus_I (F_i \otimes_R L) & \longrightarrow & \oplus_I (F_i \otimes_R M) \end{array}$$

Donde los isomorfismos están definidos por $((x_i)_I \otimes l) \mapsto (x_i \otimes l)_I$. El renglón de arriba es un monomorfismo si y sólo si el renglón de abajo lo es, y esto sucede si y sólo si cada $(F_i \otimes_R L) \longrightarrow (F_i \otimes_R M)$ es un monomorfismo. □

Proposición A.7.3. *Todo $R-$módulo proyectivo es plano.*

Prueba. R_R es plano puesto que $R_R \otimes_R L \cong L$. Por la proposición anterior tenemos que $R^{(I)}$ es plano para todo conjunto I, por lo tanto cualquier módulo libre es plano. Entonces, como todo módulo proyectivo es sumando directo de un módulo libre, nuevamente, por la proposición anterior tenemos que dicho módulo proyectivo es plano. □

Proposición A.7.4. *Sean ${}_AF_R$ y ${}_RE$ dos módulos dados, supongamos que ${}_RE$ es un cogenerador inyectivo. Entonces F_R es plano si y sólo si* $\mathrm{Hom}_A(F, E)$ *es un $R-$módulo izquierdo inyectivo.*

Prueba. Sea $\alpha : M \longrightarrow N$ un monomorfismo de $R-$módulos izquierdos. Éste induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_A(F, E)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha,1)} & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_A(F, E)) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathrm{Hom}_A(N \otimes_R F, E) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha\otimes 1,1)} & \mathrm{Hom}_A(M \otimes_R F, E) \end{array}$$

Si F_R es plano, entonces $\alpha\otimes 1 : M\otimes_R F \longrightarrow N\otimes_R F$ es un monomorfismo, y ${}_RE$ inyectivo implica que $\mathrm{Hom}(\alpha \otimes 1, 1)$ es un epimorfismo. Por la conmutatividad se sigue qu $\mathrm{Hom}(\alpha, 1)$ es un epimorfismo, y po lo tanto $\mathrm{Hom}_A(F, E)$ es un $R-$módulo inyectivo.

Supongamos ahora que $\mathrm{Hom}_A(F, E)$ es un $R-$módulo inyectivo. Regresando al argumento anterior podemos concluir que $\mathrm{Hom}(\alpha \otimes 1, 1)$ es un epimorfismo. Sea $0 \neq x \in M \otimes_R F$. Puesto que ${}_RE$ es un cogenerador inyectivo existe una función $A-$lineal $\varphi : M \otimes_R F \longrightarrow E$ tal que $\varphi(x) \neq 0$. Puesto $\mathrm{Hom}(\alpha \otimes 1, 1)$ es un epimorfismo tenemos que $\varphi = \psi(\alpha \otimes 1)$ para algún $\psi : N \otimes_R F \longrightarrow E$. De que $\varphi(x) \neq 0$ se sigue que $(\alpha \otimes 1)(x) \neq 0$ entonces $\alpha \otimes 1$ es un monomorfismo. Por lo tanto F_R es plano. □

En el caso particular de que $A = \mathbb{Z}$ y $E = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, tenemos que:

Corolario A.7.5. *Un módulo F_R es plano si y sólo si* $\widehat{F} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *es un $R-$módulo izquierdo inyectivo.*

Por este resultado podemos obtener un criterio de *planitud*

Proposición A.7.6. *Un $R-$módulo F_R es plano si y sólo si el homomorfismo canónico $F \otimes_R I \longrightarrow F$ es un monomorfismo para cada ideal izquierdo finitamente generado I de R.*

Prueba. Supongamos que $F \otimes_R I \longrightarrow F$ es un monomorfismo para cada ideal izquierdo finitamente generado I de R. Entonces es claro que esto es válido para ideales izquierdos I arbitrarios, si $\sum y_i \otimes a_i \in F \otimes_R I$, entonces a_i pertenece a un módulo izquierdo finitamente generado $J \subseteq I$, y la composición $F \otimes_R J \longrightarrow F \otimes_R I \longrightarrow F$ es un monomorfismo. Entonces si $\sum y_i \otimes a_i$ va a cero en F, se debe a que $\sum y_i \otimes a_i$ es cero en $F \otimes_R J$ y por lo tanto cero en $F \otimes_R I$.

La inclusión $I \hookrightarrow R$ induce entonces un monomorfismo $F \otimes_R I \longrightarrow F$, y entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(R, \widehat{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(I, \widehat{F}) \arrow[d, "\cong"] \\
\widehat{F} \arrow[r] & \widehat{I \otimes F}
\end{tikzcd}$$

Donde el homomorfismo de abajo es un epimorfismo. Entonces también lo es el renglón de arriba, y por lo tanto, por el criterio de Baer, $\widehat{F}$ es inyectivo, entonces por el corolario anterior F es plano. $\square$

Para finalizar esta sección presentaremos un resultado técnico.

Lema A.7.7. *Sea el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & L \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma'"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma''"'] & 0 \\
K' \arrow[r, "\alpha'"] & L' \arrow[r, "\beta'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmutativo con renglones exactos. Supongamos que γ' es un monomorfismo. Entonces γ'' es un monomorfismo si y sólo si $\mathrm{Im}\ \alpha' \cap \mathrm{Im}\ \gamma' = \mathrm{Im}\ \gamma'\alpha$.

Prueba. Supongamos que γ'' es un monomorfismo. De la conmutatividad del primer cuadro tenemos que Im $\alpha' \cap$ Im $\gamma' \supseteq$ Im $\gamma'\alpha$. Ahora, sea $y \in$ Im $\alpha' \cap$ Im γ', entonces existe $k \in K'$ y $l \in L$ de tal forma que $y = \alpha'(k) = \gamma'(l)$, entonces $\beta'(y) = 0$, es decir, $0 = \beta'\gamma'(l) = \gamma''\beta(l)$ lo que implica que $\beta(l) = 0$, entonces $l \in$ Nuc $\beta =$ Im α, por lo que existe $s \in K$ tal que $\alpha(s) = l$, entonces $\gamma'\alpha(s) = \gamma'(l) = y$, con lo que $y \in$ Im $\gamma'\alpha$ y por lo tanto Im $\alpha' \cap$ Im $\gamma' =$ Im $\gamma'\alpha$.

Ahora supongamos que Im $\alpha' \cap$ Im $\gamma' =$ Im $\gamma'\alpha$. Sea $x \in$ Nuc γ'', entonces existe $l \in L$ tal que $\beta(l) = x$, entonces $0 = \gamma''\beta(l) = \beta'\gamma'(l)$ por lo que $\gamma'(l) \in$ Nuc $\beta' =$ Im α', entonces por hipótesis existe $s \in K$ tal que $\gamma'\alpha(s) = \gamma'(l)$ y como γ' es monomorfismo tenemos que $\alpha(s) = l$ y entonces $0 = \beta\alpha(s) = \beta(l) = x$ por lo que γ'' es un monomorfismo. □

A.7.8 Anillos cociente planos

Definición A.7.9. Una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ de $R-$módulos derechos es llamada *pura* si $K \otimes_R M \longrightarrow N \otimes_R M$ es un monomorfismo para todo $R-$módulo izquierdo M.

Lema A.7.10. *F es un $R-$módulo derecho plano si y sólo si para cada ideal izquierdo finitamente generado I de R el $\mathbb{Z}-$epimorfismo, $\mu_I : F\otimes_R I \longrightarrow FI$ con $\mu_I(w \otimes a) = wa$ es un monomorfismo.*

Prueba. Sean $i_I : I \longrightarrow R$ e $i_{FI} : FI \longrightarrow F$ las inclusiones y $\mu : F \otimes_R R \longrightarrow F$ el isomorfismo dado por $\mu(z \otimes a) = za$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F \otimes_R I & \xrightarrow{Id_F \otimes i_I} & F \otimes_R R \\ {\scriptstyle \mu_I}\downarrow & & {\scriptstyle \mu}\downarrow \\ FI & \xrightarrow{i_{FI}} & F \end{array}$$

Entonces $Id_F \otimes i_I$ es mono si y sólo si μ_I también es mono, entonces por la proposición A.7.6, tenemos que F es plano si y sólo si μ_I es un monomorfismo. □

Proposición A.7.11. *Para un ideal derecho J de R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *R/J es un $R-$módulo derecho plano;*

(b) *la sucesión exacta $0 \longrightarrow J \longrightarrow R \longrightarrow R/J \longrightarrow 0$ es pura en $\mathrm{Mod}-R$;*

(c) *para todo ideal izquierdo I de R, $JI = J \cap I$.*

Si J es un ideal (bilateral) en R, las siguientes condiciones también son equivalentes a las anteriores:

(d) *todo $R/J-$módulo izquierdo inyectivo es $R-$inyectivo;*

(e) *$R/J - \mathrm{Mod}$ contiene un cogenerador $R-$inyectivo.*

Prueba. (a)$\Rightarrow$(b) Sea N un $R-$módulo izquierdo, entonces $N \cong L/K$ con L libre por lo que la sucesión $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es exacta. Aplicando $J \otimes \cdot$, $R \otimes \cdot$ y $R/J \otimes \cdot$ a la sucesión anterior, obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & J \otimes K & \longrightarrow & R \otimes K & \longrightarrow & R/J \otimes K & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\
0 & \longrightarrow & J \otimes L & \xrightarrow{\mu} & R \otimes L & \xrightarrow{\varphi} & R/J \otimes L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & J \otimes N & \xrightarrow{\beta} & R \otimes N & \longrightarrow & R/J \otimes N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

con renglones y columnas exactos. Por (a), R/J es plano, por lo tanto α es monomorfismo. Tenemos que demostrar que β es monomorfismo. Sea $x \in \mathrm{Nuc}\ \beta$, es decir, $\beta(x) = 0$, x puede ser levantada a $y \in J \otimes L$, $\mu(y) \in R \otimes L$ va a dar a $\beta(x) = 0 \in R \otimes N$, por lo tanto $\mu(y)$ proviene de algún elemento $z \in R \otimes K$ y z es enviado a un elemento $u \in R/J \otimes K$. Pero $\alpha(u) = \varphi(\mu(y)) = 0$, como α es monomorfismo se tiene que $u = 0$. El elemento

$z \in R \otimes K$ debe ser entonces la imágen de algún elemento $v \in J \otimes K$, y v debe ser enviado a $y \in J \otimes L$, además L libre, implica L plano (A.7.3), es decir, μ es monomorfismo. Concluímos entonces que y va dar a cero y por lo tanto $x = 0$, con lo que β es monomorfismo y entonces la sucesión $0 \longrightarrow J \longrightarrow R \longrightarrow R/J \longrightarrow 0$ es pura en Mod-R.

(b)$\Rightarrow$(a) Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$. Aplicando $\cdot \otimes K$, $\cdot \otimes L$ y $\cdot \otimes N$ a la sucesión $0 \longrightarrow J \longrightarrow R \longrightarrow R/J \longrightarrow 0$ que por hipótesis es pura en Mod $-$ R, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columas exactos

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & J \otimes K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"] & J \otimes L \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & J \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\varsigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \otimes K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] & R \otimes L \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & R \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & R/J \otimes K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & R/J \otimes L \arrow[r] \arrow[d] & R/J \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que mostrar que β es un monomorfismo. Sea $x \in$ Nuc β, existe $y \in R \otimes K$ tal que $\alpha(y) = x$, entonces $0 = \beta(x) = \beta\alpha(y) = \eta\mu(y)$, por lo que $\mu(y) \in$ Nuc $\eta =$ Im ψ, por lo tanto existe $z \in J \otimes L$ tal que $\psi(z) = \mu(y)$, puesto que ς es un monomorfismo, por el lema A.7.7, $\text{Im}\psi\varphi = \text{Im}\mu \cap \text{Im}\psi$, por lo tanto existe $w \in J \otimes K$ tal que $\psi\varphi(w) = \mu(y)$, entonces $\mu\gamma(w) = \psi\varphi(w) = \mu(y)$, como μ es monomorfismo entonces $\gamma(w) = y$, y por lo tanto $0 = \alpha\gamma(w) = \alpha(y) = x$, con lo que β es monomorfismo y en consecuencia R/J es un $R-$módulo derecho plano.

(c)$\Leftrightarrow$(a) Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow J \xrightarrow{i_J} R \xrightarrow{p} R/J \longrightarrow 0$

y el diagrama de $\mathbb{Z}-$homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & J\otimes I \arrow[r, "i_J\otimes Id_I"] \arrow[d, "\mu"] & R\otimes I \arrow[r, "p\otimes Id_I"] \arrow[d, "\mu_I"] & R/J\otimes I \arrow[r] \arrow[d, "\mu'_I"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I\cap J \arrow[r, "\subseteq"] & I \arrow[r, "p|_I"] \arrow[d] & (R/J)I & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde μ, μ_I y μ'_I están dadas por $a\otimes b \mapsto ab$ con a y b en los respectivos módulos. Dicho diagrama es conmutativo con renglones y columnas exactas entonces, por el lema A.7.7, μ'_I es un monomorfismo si y sólo si $JI = J\cap I$, y por el lema A.7.10, tenemos que R/J es plano si y sólo si $JI = J\cap I$.

(c)$\Rightarrow$(d) Primero observemos que si $u \in J$ entonces Ru es un ideal izquierdo de R, y por (c), $u \in J\cap Ru = JRu = Ju$. Sea Q un $R/J-$módulo izquierdo $R/J-$inyectivo y $E(Q)$ su cápsula $R-$inyectiva. Sea I un ideal izquierdo de R. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglón exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "\bar{f}"] \\
 & Q \arrow[r] & E(Q)
\end{tikzcd}$$

Entonces $0 \neq \bar{f}(1) \in E(Q)$. Sea $z \in J\bar{f}(1)\cap Q$ entonces $z = u\bar{f}(1) \in Q$ con $u \in J$. Puesto que Q es un $R/J-$módulo tenemos que $Jz = Ju\bar{f}(1) = 0$, por la observación anterior tenemos que $u = tu$ para algún $t \in J$ por lo que $z = u\bar{f}(1) = tu\bar{f}(1) \in Ju\bar{f}(1) = 0$ y como $Q \subseteq_e E(Q)$ tenemos que $J\bar{f}(1) = 0$. Por la proposición A.2.10, $\bar{f}(1) \in Q$ y por lo tanto Q es $R-$inyectivo.

(d)$\Rightarrow$(e) Sea J un ideal de R, $R' = R/J$, y $E = E(\oplus_{s\in\mathcal{S}} S)$, donde $\mathcal{S}$ es un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples. Entonces E es $R'-$inyectivo. Afirmamos que E es un cogenerador $R-$inyectivo de $R' -$ Mod. Sea $M \in R' -$ Mod y $m \in M$, $m \neq 0$. Entonces

$R'm$ tiene submódulos máximos, sea K uno de tales máximos. Entonces $S = R'm/K$ es simple. Tenemos entonces el diagrama con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & R'm & \longrightarrow & M \\ & & {\scriptstyle f_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_m} \\ 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & E \end{array}$$

Donde $\bar{f}_m$ existe debido a la R'−inyectividad de E y además $\bar{f}_m \neq 0$ si $m \neq 0$. Definimos $\varphi : M \longrightarrow E^{\mathrm{Hom}(M,E)}$ como $\varphi(x) = (f(x))_{f\in\mathrm{Hom}(M,E)}$. Entonces φ es un monomorfismo: supongamos que $x \neq 0$ y $\varphi(x) = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda $f \in \mathrm{Hom}(M, E)$. Pero esto una contradicción pues $\bar{f}_x \neq 0$ si $x \neq 0$, por lo tanto $x = 0$, con lo que φ es un monomorfismo. Hemos demostrado entonces que todo R'−módulo está en $\mathrm{Cog}(E)$. Por (d), E es R−inyectivo, y por lo tanto $R'-\mathsf{Mod}$ tiene un cogenerador R−inyectivo.

(e)⇒(d) Sea $M \in R/J-\mathsf{Mod}$, R/J−inyectivo, y sea E un cogenerador R−inyectivo de $R/J-\mathsf{Mod}$. Entonces existe un R/J−monomorfismo $M \longrightarrow E^X$ para algún conjunto X. Puesto que M es R/J−inyectivo se tiene que $E^X = M \oplus K$ para algún $K \in R/J-\mathsf{Mod}$. Dicha descomposición está en $R-\mathsf{Mod}$, y como E es R−inyectivo, E^X también lo es. Entonces tenemos que M es sumando directo de un R−inyectivo, lo que implica que M es R−inyectivo.

(d)⇒(a) Consideremos al $\mathbb{Z}$−módulo $E = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Con una argumentación similar a la realizada en (d)⇒(e) podemos ver que E es un cogenerador inyectivo de $\mathbb{Z}-\mathsf{Mod}$, pues $E = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \oplus_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_{p^\infty} = \oplus_{p\in\mathcal{P}}E(\mathbb{Z}_p) = E(\oplus_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_p)$ (la última igualdad se da porque $\mathbb{Z}$ es neteriano). Es claro que R/J es un R/J−módulo derecho plano, por el corolario A.7.5, esto sucede si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R/J, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R/J−módulo izquierdo inyectivo, por (d) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R/J, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es R−inyectivo (izquierdo), aplicando nuevamente A.7.5, tenemos que R/J es un R−módulo derecho plano. □

A.8 Producto fibrado

Aquí presentaremos la construcción de los diagramas de *producto fibrado* y *suma fibrada* junto con sus propiedades más importantes.

Definición A.8.1. Sea $f_1 : M_1 \longrightarrow M$ y $f_2 : M_2 \longrightarrow M$ dos homomorfismos en $R-$ Mod. Un diagrama conmutativo en $R-$ Mod

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & M_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ M_1 & \xrightarrow[f_1]{} & M \end{array}$$

es llamado *producto fibrado* (cuadrado cartesiano) para el par (f_1, f_2) si, para todo par de homomorfismos

$$g_1 : X \longrightarrow M_1,\ g_2 : X \longrightarrow M_2 \text{ con } f_1g_1 = f_2g_2,$$

existe un único homomorfismo $g : X \longrightarrow P$ con $p_1g = g_1$ y $= p_2g = g_2$.

Para un par de homomorfismos el producto fibrado está determinado de manera única salvo isomorfismo: si $p_1' : P' \longrightarrow M_1$, $p_2' : P' \longrightarrow M_2$ es también el producto fibrado para f_1, f_2 como arriba, entonces existe un isomorfismo $h : P' \longrightarrow P$ con $p_ih = p_i'$, $i = 1, 2.$.

Proposición A.8.2. *Para todo par $f_1 : M_1 \longrightarrow M$ y $f_2 : M_2 \longrightarrow M$ de homomorfismos en $R-$ Mod el producto fibrado existe.*

Considerando las proyecciones $\pi_i : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1, 2$, obtenemos un homomorfismo

$$p^* : f_1\pi_1 - f_2\pi_2 : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M,$$

y con la restricción π_i' de π_i a Nuc $p^* \subseteq M_1 \oplus M_2$, *el cuadrado*

$$\begin{array}{ccc} \text{Nuc } p^* & \xrightarrow{\pi_2'} & M_2 \\ {\scriptstyle \pi_1'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ M_1 & \xrightarrow[f_1]{} & M \end{array}$$

es el producto fibrado para el par (f_1, f_2). Por construcción

$$\text{Nuc } p^* = \{(m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2 \mid f_1(m_1) = f_2(m_2)\}.$$

Prueba. Sea $g_1 : X \longrightarrow M_1$. $g_2 : X \longrightarrow M_2$ tal que $f_1 g_1 = f_2 g_2$ y $\bar{g} : X \longrightarrow M_1 \oplus M_2$, el correspondiente homomorfismo dado por la propiedad universal de la suma directa. Entonces

$$p^* \bar{g} = f_1 \pi_1 \bar{g} - f_2 \pi_2 \bar{g} = g_1 f_1 - g_2 f_2 = 0,$$

y por lo tanto $\bar{g}$ se factoriza a través de Nuc p^*. □

Propiedades A.8.3. *Si el diagrama conmutativo en $R-$ Mod:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f_1"'] & M \end{tikzcd}$$

representa el diagrama de producto fibrado, entonces:

(i) *Existe el siguiente diagrama con renglones exactos:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"'] & M \end{tikzcd}$$

(ii) *Si f_1 es mono, entonces h_2 también lo es.*

(iii) *Si f_1 es epi, entonces h_2 también lo es.*

(iv) *Si f_1 es mono, entonces para el diagrama conmutativo con el renglón de abajo exacto*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r, "pf_2"] \arrow[d, "f_2"] & C \arrow[d, equal] & \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"] & M \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

tenemos: el primer cuadrado es el producto fibrado si y sólo si el primer renglón es exacto. Si f_2 es epi, entonces pf_2 también lo es.

Prueba. Usando la presentación y la notación de la proposición anterior podemos suponer

$P = \text{Nuc } p^* = \{(m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2 \mid f_1(m_1) = f_2(m_2)\}, \ h_1 = \pi_1', \ h_2 = \pi_2'.$

(i) Haciendo $K = \text{Nuc } f_1$ y $K \longrightarrow P$, $k \mapsto (k, 0)$, obtenemos el diagrama deseado.

(ii) Es una consecuencia de (i).

(iii) Sea f_1 epi. Entonces, para $m_2 \in M_2$, existe $m_1 \in M_1$ con $f_1(m_1) = f_2(m_2)$. Entonces $(m_1, m_2) \in P$ y $h_2(m_1, m_2) = m_2$.

(iv) Sea f_1 mono. Si el primer cuadrado es el producto fibrado, escogiendo una representación como en (1), primero obtenemos que h_2 es mono. Para $m_2 \in \text{Nuc } pf_2$, existe $m_1 \in M_1$ con $f_1(m_1) = f_2(m_2)$. Esto significa $(m_1, m_2) \in P$ y $h_2(m_1, m_2) = m_2$. por lo tanto el primer renglón es exacto.

Ahora supongamos que el primer renglón es exacto y $g_1 : X \longrightarrow M_1$, $g_2 : X \longrightarrow M_2$, con $pf_1g_1 = pf_2g_2 = 0$, es decir, existe un único $k : X \longrightarrow P = \text{Nuc } pf_2$ con $h_2k = g_2$. También tenemos que $f_1h_1k = f_2h_2k = f_1g_1$.Y f_1 mono, implica que $h_1k = g_1$ y el cuadrado es el producto fibrado. □

A.9 Suma fibrada

Definición A.9.1. Sea $g_1 : N \longrightarrow N_1$ y $g_2 : N \longrightarrow N_2$ dos homomorfismos en $R-\mathsf{Mod}$. Un diagrama conmutativo en $R-\mathsf{Mod}$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g_2} & N_2 \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ N_1 & \xrightarrow[q_1]{} & Q \end{array}$$

es llamada *suma fibrada* para el par (g_1, g_2) si, para todo par de homomorfismos

$$h_1 : N_1 \longrightarrow Y, \ h_2 : N_2 \longrightarrow Y \text{ con } h_1g_1 = h_2g_2,$$

existe un único homomorfismo $h : Q \longrightarrow Y$ con $hq_1 = h_1$ y $hq_2 = h_2$.

Nuevamente, Q está determinado de manera única salvo isomorfismo. La suma fibrada es también llamada suma amalgamada o cuadrado cocartesiano (ver [Wis91]).

Proposición A.9.2. *Para todo par $g_1 : N \longrightarrow N_1$, $g_2 : N \longrightarrow N_2$ de homomorfismos en $R-$ Mod la suma fibrada existe.*

Con inyecciones $\epsilon_i : N_i \longrightarrow N_1 \oplus N_2$, $i = 1, 2$, obtenemos un homomorfismo

$$q^* : \epsilon_1 g_1 + \epsilon_2 g_2 : N \longrightarrow N_1 \oplus N_2.$$

Con homomorfismos canónicos $\bar{\epsilon}_i : N_i \longrightarrow N_1 \oplus N_2 \longrightarrow$ Conuc q^* el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g_2} & N_2 \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\epsilon}_2} \\ N_1 & \xrightarrow[\bar{\epsilon}_1]{} & \text{Conuc } q^* \end{array}$$

es la suma fibrada para el par (g_1, g_2). Por construcción,

$$\text{Im } q^* = (g_1\epsilon_1 + g_2\epsilon_2)(N) = \{(g_1(n), g_2(n)) \mid n \in N\} \subseteq N_1 \oplus N_2, \text{ y}$$
$$\text{Conuc } q^* = N_1 \oplus N_2 / \text{Im } q^*.$$

Prueba. Supongamos que para $i = 1, 2$, tenemos homomorfismos $h_i : N_i \longrightarrow Y$ con $h_1 g_1 = h_2 g_2$. Entonces obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{q^*} & N_1 \oplus N_2 & \longrightarrow & \text{Conuc } q^* \\ & & {\scriptstyle h_1\pi_1 - h_2\pi_2}\downarrow & & \\ & & Y & & \end{array}$$

con $(h_1\pi_1 - h_2\pi_2)q^* = (h_1\pi_1 - h_2\pi_2)(g_1\epsilon_1 + g_2\epsilon_2) = h_1 g_1 - h_2 g_2 = 0$. Por lo que existe un único homomorfismo $h :$ Conuc $q^* \longrightarrow Y$, con lo cual obtenemos el diagrama deseado. $\square$

Propiedades A.9.3. *Si el diagrama conmutativo en* $R-\mathsf{Mod}$*:*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f_2} & N_2 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_2} \\ N_1 & \xrightarrow[g_1]{} & Q \end{array}$$

representa el diagrama de la suma fibrada, entonces:

(i) *Tenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos:*

$$\begin{array}{ccccccc} N & \xrightarrow{f_2} & N_2 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \| & & \\ N_1 & \xrightarrow[g_1]{} & Q & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(ii) *Si f_2 es epi, entonces g_1 también lo es.*

(iii) *Si f_2 es mono, entonces g_1 también lo es.*

(iv) *Si f_2 es epi, entonces para el diagrama conmutativo con el renglón de arriba exacto*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{f_2} & N_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \\ & & K & \xrightarrow{f_1 i} & N_1 & \xrightarrow{g_1} & Q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tenemos: el segundo cuadrado es la suma fibrada si y sólo si el renglón de abajo es exacto. Si f_1 es mono, entonces $f_1\, i$ también lo es.

Prueba. (i) De la proposición anterior tenemos que

$$\mathrm{Im}\ q^* = \{(f_1(n), f_2(n)) \mid n \in N\}$$

con lo que obtenemos el homomorfismo

$$g : Q = N_1 \oplus N_2 / \mathrm{Im}\ q^* \longrightarrow N_2 / f_2(N),\ (n_1, n_2) + \mathrm{Im}\ q^* \mapsto n_2 + f_2(N),$$

lo que nos conduce al diagrama deseado

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & N_2 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"] & N_2/f_2(N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & Q \arrow[r, "g"] & N_2/f_2(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(ii) Obvio

(iii) Si f_2 es mono y $g_1(n_1) = (n_1, 0) + \text{Im } q^* = 0 \in N_1 \oplus N_2/\text{Im } q^*$, entonces existe $n \in N$ con $(n_1, 0) = (f_1(n), f_2(n))$, es decir, $n = 0$ y por lo tanto $n_1 = f_1(0) = 0$.

(iv) Sea f_2 epi. Si el segundo cuadrado es la suma fibrada, entonces por (i) g_1 es epi. Escogiendo $K = \text{Nuc } f_2$. Si $n_1 \in \text{Nuc } g_1$, entonces $(n_1, 0) \in \text{Im } q^*$, es decir, existe $n \in N$ con $(n_1, 0) = (f_1(n), f_2(n))$, es decir, $n \in K = \text{Nuc } f_2$. Por lo tanto el renglón de abajo es exacto.

Ahora supongamos que el renglón de abajo es exacto y sean $h_i : N_i \longrightarrow Y$, $i = 1, 2$, homomorfismos con $h_1 f_1 = h_2 f_2$. Entonces $h_1 f_1 i = 0$, y la propiedad del conúcleo de Q nos da un único homomorfismo $h : Q \longrightarrow Y$ con $hg_1 = h_1$. Entonces $h_2 f_2 = h_1 f_1 = hg_1 f_1 = hg_2 f_2$ y por lo tanto $h_2 = hg_2$ puesto que f_2 es epi. Y en consecuencia el segundo cuadrado es la suma fibrada. $\square$

Bibliografía

[AF74] Anderson, F; Fuller, K. *Rings and Categories of Modules*; Graduate Text in Mathematics, No.13, Springer Verlag: New York, 1974.

[BERtd] Berning, J. *Beziehungen zwischen links-linearen Topologien und Modulkategorien*; Dissertation, Universität Dusseldörf (1994).

[BKN82] Bican, L; Kepka, T; Nemec, P. *Rings, Modules and Preradicals*; Marcel Dekker: New York, 1982.

[DAU94] Dauns, J. *Modules and Rings*; Cambridge University Press: New York, 1994.

[FERtl] Fernández, R. *Algunas propiedades sobre clases TTF*; Tesis, Universidad Nacional Autónoma de México (1986).

[KAS82] Kasch, F. *Modules and Rings*; Academic Press: New York, 1982.

[ROT95] Rotman, J. *An Introduction to the Theory of Groups*; Graduate Text in Mathematics, No.148, Springer Verlag: New York, c1995.

[STE75] Stenström, B. *Rings of Quotients*; Graduate Text in Mathematics, No.79, Springer Verlag: New York, 1975.

[WIS91] Wisbauer, R. *Foundations of Module and Ring Theory: A Handbook for Study and Research*; Gordon And Breach: Paris, 1991.

[WIS96] Wisbauer, R. *On module classes closed under extensions*, Ring and Radicals; Gardner e.a (ed), Pitman RN 346, 73-97 (1996).