



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA DE AUTOMORFISMOS
DE CP^2

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

LUCIA LOPEZ DE MEDRANO ALVAREZ

DIRECTOR DE TESIS : Dr. GUILLERMO JAVIER FRANCISCO
SIERNA LOERA



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

MÉXICO D.F.

283832



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Dinámica de Automorfismos de \mathbb{CP}^2 "

realizado por **López de Medrano Alvarez Lucía**

con numero de cuenta 9123475-3 , pasante de la carrera de **Matemáticas**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario **DR. GUILLERMO JAVIER FRANCISCO SIENRA LOERA**

G. Sienna

Propietario **DR. SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY SOLA**

S. Verjovsky

Propietario **M. EN C. ANA IRENE RAMIREZ GALARZA**

Ana Irene Ramirez

Suplente **DR. HECTOR MENDEZ LANGO**

Héctor Méndez L.

Suplente **M. EN C. DIANA MAYA PADILLA**

Diana Maya Padilla

Héctor Méndez L.
Consejo Departamental de
Matemáticas

DR. HECTOR MENDEZ LANGO

A mis abuelos:

Conchita
Santiago
Lela Paz
Opa

AGRADECIMIENTOS

A Tar,
por llenar mi vida,
y esta tesis de
imagenes maravillosas.

A mi papá. A mi mamá. A Jeff.

Por todo.

A Pablo. A Esteban.

A Paula A Marie.

A Pilar.

A toda mi familia.

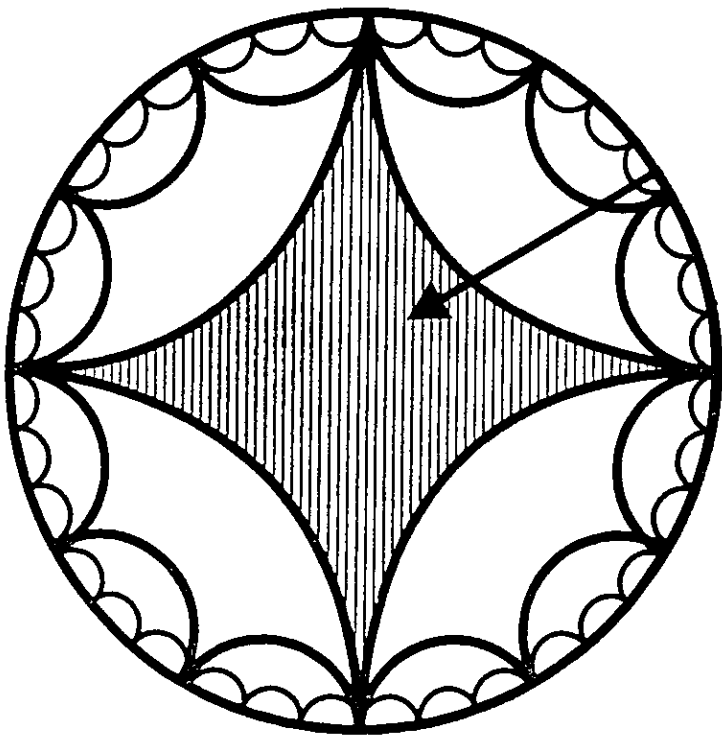
A todos mi amigos.

A todos ellos, por su amor, compañía, confianza, paciencia, apoyo y enseñanzas.

A Guillermo por su tiempo,
y por lograr quitarle a este trabajo la cara de obligación
y haberlo convertido en un trabajo de equipo.

A Alberto, Analrene, Diana y Matatias
por sus comentarios y su tiempo

DINÁMICA DE AUTOMORFISMOS DE $\mathbb{C}P^2$.



INDICE

INTRODUCCION.....	4
Capitulo I LOS ESPACIOS PROYECTIVOS	5
1.1 Geometría de los espacios proyectivos.....	5
2. Capitulo II LOS AUTOMORFISMOS DE \mathbb{P}^2	12
2.1 Los automorfismos de \mathbb{P}^2	12
2.2 Conjugación.....	23
2.3 Clasificación de los automorfismos de \mathbb{P}^2	34
3. Capitulo III INVERSIONES ANTIHOLOMORFAS DE \mathbb{P}^2	43
3.1 Inversiones antiholomorfas de \mathbb{P}^2	43
4. Capitulo IV DINAMICA DE UN GRUPO DE AUTOMORFISMOS QUE DEJA INVARIANTE B^4	51
4.1 Definición y propiedades de un automorfismo de \mathbb{P}^2 que deja invariante B^4	51
4.2 Dinámica de j_p	58
4.3 Región fundamental de j_p	65
4.4 Construcción y dinámica de un grupo de automorfismos de \mathbb{P}^2 que deja invariante B^4	66
BIBLIOGRAFIA.....	73

INTRODUCCION

En esta tesis, estudiaremos la dinámica de los automorfismos de $\mathbb{C}P^2$, el espacio proyectivo complejo de dimensión dos.

En la teoría clásica, se estudian los automorfismos de $\mathbb{C}P^1$, que son el grupo de las transformaciones de Möbius. En este grupo existen 3 tipos diferentes de automorfismos, cada uno de los cuales tiene una dinámica propia, a saber: el grupo de aquellos automorfismos cuya dinámica tiene dos puntos fijos, uno atractor y otro repulsor (elementos hiperbólicos), el grupo de aquellos cuya dinámica consiste de un solo punto fijo (elementos parabólicos) y aquellos con dos puntos fijos indiferentes (elementos elípticos). Los elementos hiperbólicos son conjugados, mediante un automorfismo, a elementos de la forma $z \rightarrow \lambda z$, $|\lambda| \neq 1$, los elementos parabólicos son conjugados a elementos de la forma $z \rightarrow z + 1$, y los elementos elípticos son conjugados a elementos de la forma $z \rightarrow \lambda z$, $|\lambda| = 1$.

Estos automorfismos se generan también mediante la composición de antiautomorfismos; es decir, mediante una composición de inversiones.

Uno de los objetivos de esta tesis es generalizar estos resultados a los automorfismos de $\mathbb{C}P^2$.

El orden de la tesis es como sigue:

En el capítulo I, se describen los espacios proyectivos complejos y algunas de sus propiedades básicas.

En el capítulo II, se estudian y se clasifican los automorfismos de $\mathbb{C}P^2$, en 6 clases dinámicas diferentes, y damos sus clases de conjugación.

En el Capítulo III, se definen y se estudian el equivalente a las inversiones de $\mathbb{C}P^1$ y demostramos que todo automorfismo de $\mathbb{C}P^2$ se genera como composición de dichas inversiones.

Finalmente en el capítulo IV, estudiamos la acción de un subgrupo libre en dos generadores, del grupo de automorfismos de $\mathbb{C}P^2$ y que deja invariante la bola unitaria. Se estudia el conjunto límite y la región fundamental de esta acción, restringida a la bola. El conjunto límite se encuentra en la frontera de la bola unitaria y su acción es minimal, es decir la cerradura de la órbita de un punto en el conjunto límite es el conjunto límite

CAPITULO I

LOS ESPACIOS PROYECTIVOS

1.1 GEOMETRIA DE LOS ESPACIOS PROYECTIVOS

1.1.1 Definición: El espacio proyectivo de dimensión n compleja, \mathbb{P}^n , es el espacio de las rectas complejas de \mathbb{C}^{n+1} que pasan por el origen; es decir, el resultado de identificar un punto distinto del origen con todos sus múltiplos complejos:

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\mathbb{C} - \{0\}}$$

Donde

$$(z, w, t) \sim (\lambda z, \lambda w, \lambda t)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ distinto de cero.

En esta tesis, siempre que se hable de rectas, planos, hiperplanos, múltiplos, números, etc. se entenderá que nos referimos a rectas complejas, planos complejos, hiperplanos complejos, múltiplos complejos, etc. excepto que se aclare lo contrario.

1.1.2 Proposición: \mathbb{P}^1 , el espacio de las rectas que pasan por el origen de \mathbb{C}^2 , es la esfera de Riemann, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Demostración: Sea $L_1 = (z, 1)$ la recta de \mathbb{C}^2 con $w = 1$ y sea $L_0 = (z, 0)$ la recta con $w = 0$. Sea $x = (z_x, w_x)$ un punto de \mathbb{C}^2 tal que $w_x \neq 0$.

El punto x nos determina una única recta L que pasa por x y por el origen $(0, 0)$. La recta L queda definida como los múltiplos de x :

$$L = \lambda x$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

En particular para $\lambda_x = \frac{1}{w_x}$ que es un número complejo distinto de 0 (ya que $w_x \neq 0, \infty$). Es

claro que $\lambda_x x \in L_1$ ya que $\lambda_x w_x = 1$.

Esto demuestra que para todo punto x de $\mathbb{C}^2 - L_0$ existe un único $\lambda_x \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_x x \in L_1$. Es decir que para todo punto x de $\mathbb{C}^2 - L_0$ existe un punto $\lambda_x x \in L_1$ tal que $x \sim \lambda_x x$.

Sean $x = (z_x, w_x)$ y $y = (z_y, w_y)$ dos puntos de L_1 , tales que $x \sim y$. Esto implica que existe

$\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lambda z_x = z_y$$

$$\lambda w_x = w_y$$

Como $x, y \in L_1$ entonces $w_x = w_y = 1$, por lo que $\lambda = 1$ y por lo tanto $x = y$.

Esto implica que $\mathbb{C}^2 - L_0$ módulo la relación es igual a L_1 . Por lo cual tenemos

$$\frac{\mathbb{C}^2 - L_0}{\mathbb{C} - \{0\}} = L_1$$

y $L_1 \cong \mathbb{C}$ ya que podemos identificar un número complejo z con el punto de L_1 , $(z, 1)$. Y cada punto $(z, 1) \in L_1$ lo podemos identificar con el número complejo z . Es decir:

$$\frac{\mathbb{C}^2 - L_0}{\mathbb{C} - \{0\}} \cong \mathbb{C}$$

Pero nos faltan los representantes de los puntos que están contenidos en $L_0 - \bar{0}$. es decir, que nos faltan los puntos que nos representen a los puntos de $L_0 - \bar{0}$

Sean $(a, 0)$ y $(b, 0)$ dos puntos de $L_0 - \bar{0}$.

Sea $\lambda_{a,b} = \frac{a}{b}$. Entonces $\lambda \in \mathbb{C}$ y es distinto de 0 ya que $\{a, b\} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

$$\lambda_{a,b}(b, 0) = (a, 0)$$

Esto implica que cualesquiera dos puntos $x, y \in L_0 - (0, 0)$, están relacionados. Es decir:

$$x \sim y \quad \forall x, y \in L_0 - (0, 0)$$

Es decir que cualquier punto de $L_0 - (0, 0)$ es equivalente a todos los puntos de $L_0 - (0, 0)$.

Sea p un punto de $L_0 - (0, 0)$, entonces:

$$\frac{L_0 - (0, 0)}{\mathbb{C} - \{0\}} = \{p\}$$

Es decir \mathbb{P}^1 es isomorfo a $\mathbb{C} \cup \{p\}$, que es la esfera de Riemann, \mathbb{S}^2 .

$$\mathbb{P}^1 = \frac{\mathbb{C}^2 - (0, 0)}{\mathbb{C} - \{0\}} \cong \mathbb{C} \cup \{p\} \cong \mathbb{S}^2$$

■

A este punto p lo llamamos el punto al infinito.

1.1.3 Definición: La parte finita de \mathbb{P}^1 es el conjunto de puntos tales que $w \neq 0$.

Hay que notar, que no existe diferencia entre los puntos de la parte finita y el punto al infinito, de hecho, $\mathbb{P}^1 - x = \mathbb{C}$, para todo punto $x \in \mathbb{P}^1$.

1.4 Proposición: \mathbb{P}^n es $\mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$.

Demostración: La demostración la vamos a hacer por inducción sobre n .

Por la proposición anterior, tenemos que para el caso $n = 1$, la proposición es cierta, ya que por la definición que hicimos \mathbb{P}^0 es igual a un punto.

Supongamos que es cierto para $n = k - 1$. Por demostrar ahora que es cierto para $n = k$.

Denotemos por $x = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_k)$ a los puntos de \mathbb{C}^{k+1} .

Sean $H_1 = \{x \in \mathbb{C}^{k+1} \mid z_k = 1\}$ el hiperplano complejo $z_k = 1$ y

$H_0 = \{x \in \mathbb{C}^{k+1} \mid z_k = 0\}$ el hiperplano complejo $z_k = 0$.

Sea $x = (z_{0x}, z_{1x}, z_{2x}, \dots, z_{kx})$ un punto de $\mathbb{C}^{k+1} - H_0$, es decir, tal que $z_{kx} \neq 0$.

El punto x determina una única recta compleja L que contiene a x y al $\bar{0}$. La recta L queda definida por todos los múltiplos complejos de x .

$$L = \lambda x$$

para toda $\lambda \in \mathbb{C}$.

En particular para $\lambda_x = \frac{1}{z_{kx}}$ que es un número complejo distinto de 0 ya que $z_{kx} \neq 0$. Es claro que $\lambda_x x \in H_1$ ya que $\lambda_x z_{kx} = 1$. Esto muestra que para todo punto x existe un único número complejo λ_x tal que $\lambda_x x \in H_1$. Es decir que para todo punto x existe un único punto $\lambda_x x \in H_1$ tal que $x \sim \lambda_x x$. Esto muestra que $\mathbb{C}^{k+1} - H_0$ módulo la relación es igual a H_1 .

$$\frac{\mathbb{C}^{k+1} - H_0}{\mathbb{C} - \{0\}} = H_1.$$

y $H_1 \cong \mathbb{C}^k$. Es decir:

$$\frac{\mathbb{C}^{k+1} - H_0}{\mathbb{C} - \{0\}} \cong \mathbb{C}^k$$

Sólo falta agregar los representantes de los puntos contenidos en H_0 . Pero $H_0 \cong \mathbb{C}^k$ por lo que

$$\frac{H_0 - \{\bar{0}\}}{\mathbb{C} - \{0\}} \cong \frac{\mathbb{C}^k}{\mathbb{C} - \{0\}}$$

que por hipótesis de inducción es igual a \mathbb{P}^{k-1} .

Entonces:

$$\frac{\mathbb{C}^{k-1} - \bar{0}}{\mathbb{C} - \{0\}} \cong \mathbb{C}^k \cup \mathbb{P}^{k-1}.$$

Con lo que probamos el resultado para toda n . ■

Entonces \mathbb{P}^n es \mathbb{C}^n union un \mathbb{P}^{n-1} para toda $n \in \mathbb{N}$.

1.1.5 **Definición:** El hiperplano al infinito es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{P}^n$ tales que $z_n = 0$.

La parte finita de \mathbb{P}^n es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{P}^n$ tales que $z_n \neq 0$.

Para todo punto x de la parte finita de \mathbb{P}^n existe un punto y de la forma

$$y = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 1)$$

tal que

$$x \sim y$$

Por esta razón algunas veces, cuando nos refiramos a puntos de la parte finita de \mathbb{P}^n , supondremos que éstos tienen la última coordenada igual distinta de 0. Análogamente al caso $n = 1$, no existe diferencia entre los puntos de la parte finita, y los puntos del hiperplano al infinito, de hecho $\mathbb{P}^n - H = \mathbb{C}^n$, para todo hiperplano $H \subset \mathbb{P}^n$.

Tomemos ahora un subespacio $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{n-1}$, $k \neq 0$. Es claro, por construcción, que

$$\frac{\mathbb{C}^k - \bar{0}}{\mathbb{C} - \{0\}} = \mathbb{P}^{k-1} \subset \mathbb{P}^n$$

De hecho, el conjunto de los subespacios de $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{n-1}$, con $k \neq 0$, es igual al conjunto de los $\mathbb{P}^{k-1} \subset \mathbb{P}^n$.

1.1.6 **Definición:** Una recta en \mathbb{P}^n es el conjunto R de puntos, tales que existe un subespacio $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^{n-1}$, tal que

$$\frac{\mathbb{C}^2 - \bar{0}}{\mathbb{C} - \{0\}} = R$$

Claramente $R = \mathbb{P}^1$.

Dados A, B, C números complejos tales que $|A| + |B| + |C| \neq 0$ sea

$$H_{A,B,C} = \{(z, w, t) \in \mathbb{C}^3 \mid Az + Bw + Ct = 0\}$$

Por construcción $H_{A,B,C}$ es un subespacio $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3$.

Sea

$$R_{A,B,C} = \frac{H_{A,B,C} - \bar{0}}{\mathbb{C} - \{0\}}$$

Entonces, R es una recta de \mathbb{P}^2 , si y solamente si existen A, B, C tales que $|A| + |B| + |C| \neq 0$

de modo que

$$R = R_{A,B,C}$$

Claramente, $(z, w, t) \in \mathbb{P}^2$ es un punto de $R_{A,B,C}$ si y solamente si

$$Az + Bw + Ct = 0$$

Dada $R_{A,B,C}$, es obvio que para todo $x \in \mathbb{P}^2$ y para toda $\lambda \in \mathbb{C} - 0$

$$x \in R_{A,B,C} \Leftrightarrow x \in R_{\lambda A, \lambda B, \lambda C}$$

Es decir, $R_{A,B,C} = R_{\lambda A, \lambda B, \lambda C}$ para toda $\lambda \neq 0$.

Como desde el principio descartamos el caso en el que $A = 0, B = 0$ y $C = 0$, y ya vimos que $R_{A,B,C} = R_{\lambda A, \lambda B, \lambda C}$, entonces a cada recta de \mathbb{P}^2 le podemos asociar un único punto de \mathbb{P}^2 de la siguiente manera:

$$R_{A,B,C} \rightarrow (A, B, C)$$

Análogamente a cada punto de \mathbb{P}^2 le podemos asociar una única recta de \mathbb{P}^2 :

$$(A, B, C) \rightarrow R_{A,B,C}$$

Esto muestra que existe una dualidad entre las rectas y los puntos de \mathbb{P}^2 . Es decir que el espacio de todas las rectas de \mathbb{P}^2 es igual a \mathbb{P}^2 .

1.1.7 Proposición: *El espacio de puntos que están en una recta dada $R_{A,B,C}$ es igual al espacio de las rectas que contienen un punto dado (A, B, C) .*

Demostración: Como ya vimos, un punto $(z, w, t) \in \mathbb{P}^2$ está en la recta $R_{A,B,C}$ si y solamente si

$$Az + Bw + Ct = 0$$

y una recta $R_{z,w,t}$ contiene al punto (A, B, C) si y solamente si

$$zA + wB + tC = 0$$

es decir, que la recta $R_{A,B,C}$ de \mathbb{P}^2 contiene al punto $(z, w, t) \in \mathbb{P}^2$ si y solamente si el punto (A, B, C) está contenido en la recta $R_{z,w,t}$. Esto prueba que a cada punto de la recta $R_{A,B,C}$ se le puede asociar una única recta que contenga al punto (z, w, t) y viceversa, lo que demuestra la proposición. ■

1.1.8 Corolario: *El espacio de rectas de \mathbb{P}^2 que contienen a un punto dado $p = (z_0, w_0, t_0)$ es igual a \mathbb{P}^1 . A este espacio lo denotamos como \mathcal{H}_p .*

De ahora en adelante siempre que nos refiramos a una recta de \mathbb{P}^n , nos estaremos refiriendo a un \mathbb{P}^1 .

De igual manera definimos un espacio de dimensión k , $P^k \subset \mathbb{P}^n$

Definición: Un espacio proyectivo de dimensión k contenido en \mathbb{P}^n es el conjunto de puntos P^k tales que existe un subespacio $H^{k+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ tal que

$$\frac{H^{k+1} - \bar{0}}{\mathbb{C} - 0} = P^k$$

Claramente $P^k \cong \mathbb{P}^k$

1.1.9 Proposición. Dados P^{k_0} y P^{k_1} , subespacios de \mathbb{P}^n , tal que $k_0 + k_1 = n + j$ con $j \geq 0$, se intersectan en un espacio P^j que contiene al menos un \mathbb{P}^1

$$P^{k_0} \cap P^{k_1} \supseteq P^j$$

Demostración: La demostración es consecuencia directa de la definición, ya que por definición, existen H^{k_0+1} y H^{k_1+1} subespacios de \mathbb{C}^{n+1} tales que

$$\frac{H^{k_0+1} - \bar{0}}{\mathbb{C} - 0} = P^{k_0}$$

$$\frac{H^{k_1+1} - \bar{0}}{\mathbb{C} - 0} = P^{k_1}$$

donde $(k_0 + 1) + (k_1 + 1) = (n + 1) + (j + 1)$ con $j + 1 \geq 1$.

Por ser subespacios de \mathbb{C}^{n+1} , entonces $H^{k_0+1} \cap H^{k_1+1}$ contiene al menos un H^{j+1} , por lo que entonces

$$P^{k_0} \cap P^{k_1} = \frac{H^{k_0+1} - \bar{0}}{\mathbb{C} - 0} \cap \frac{H^{k_1+1} - \bar{0}}{\mathbb{C} - 0} = \frac{(H^{k_0+1} \cap H^{k_1+1}) - \bar{0}}{\mathbb{C} - 0} \supseteq \frac{H^{j+1} - \bar{0}}{\mathbb{C} - 0} = P^j$$

para algún $P^j \subset \mathbb{P}^n$.

Esto muestra la proposición. ■

1.1.10 Definición: Sean x_1 y x_2 dos puntos de \mathbb{P}^n . La recta R_{x_1, x_2} generada por éstos queda definida por

$$R_{x_1, x_2} = \frac{\{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 - (0, 0)\}}{\mathbb{C} - 0}$$

Es decir la proyectivización del espacio que generan en \mathbb{C}^2 .

Dado un espacio P y un punto x contenido en \mathbb{P}^2 , definimos \overline{Px} , el espacio generado por P y por x como

$$\overline{P_X} = \frac{\{(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \mid y \in P, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 - (0, 0)\}}{\mathbb{C} - 0}$$

Definido así claramente $x \in P \Leftrightarrow \overline{P_X} = P$.

Sean x_1, x_2, \dots, x_k k puntos de \mathbb{P}^n . Sea $F_i = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i\}$, $i \leq k$ un conjunto de puntos de \mathbb{P}^n . El espacio generado por F_i , lo denotamos por $\overline{F_i}$, y queda definido por

$$\overline{F_i} = \overline{F_{i-1}x_i}$$

Claramente $\overline{F_i}$ es igual a un espacio, cuya dimensión es a lo más $k-1$

CAPITULO II

LOS AUTOMORFISMOS DE \mathbb{P}^2

2.1 LOS AUTOMORFISMOS DE \mathbb{P}^2

Los automorfismos de un espacio proyectivo \mathbb{P}^n lo podemos identificar con las transformaciones lineales invertibles de \mathbb{C}^{n+1} , ya que una función lineal invertible de \mathbb{C}^{n+1} manda rectas por el origen a rectas por el origen y tiene una inversa lineal, por lo que pensadas como funciones de \mathbb{P}^n son funciones biyectivas. A toda función lineal invertible de \mathbb{C}^{n+1} se le puede asociar una matriz cuadrada $A \in M_{n+1}$, con determinante distinto de 0, y cada una de estas matrices representa un automorfismo de la siguiente manera:

La matriz

$$M_f = \begin{bmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

representa al automorfismo f ,

$$f(z_0, z_1, \dots, z_n) = (w_0, w_1, \dots, w_n)$$

donde

$$w_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} z_j$$

2.1.1 Proposición: Sean M_f y $M_g \in M_{n+1}$ con determinante distinto de 0, las matrices que

representan a f y a g respectivamente. Si $\lambda M_f = M_g$, es decir $\lambda a_{ij} = b_{ij}$ para todos $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, donde a_{ij} y b_{ij} son las entradas i, j de M_f y M_g respectivamente, entonces f y g representan al mismo automorfismo de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Demostración: Sean f y g los automorfismos representados por M_f y por M_g respectivamente. Sea $x = (z_0, z_1, \dots, z_n)$

$$f(z_0, z_1, \dots, z_n) = (w_0, w_1, \dots, w_n)$$

$$g(z_0, z_1, \dots, z_n) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

donde

$$w_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} z_j$$

$$y_i = \sum_{j=0}^n b_{ij} z_j = \sum_{j=0}^n \lambda a_{ij} z_j = \lambda \sum_{j=0}^n a_{ij} z_j = \lambda w_i$$

Por lo que

$$\lambda f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{P}^n$$

y por lo tanto

$$f(x) \sim g(x) \quad \forall x \in \mathbb{P}^n$$

Con lo que se demuestra que f y g son el mismo automorfismo y por lo tanto la proposición es cierta. ■

Es decir, dada una matriz $M_f \in M_{n+1}$ con determinante distinto de 0, que representa al automorfismo f , el conjunto de matrices

$$\overline{M}_f = \{\lambda M_f \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

es el conjunto de todas las matrices que representan al automorfismo f de \mathbb{P}^n .

2.1.2 Definición. Dadas dos matrices M y $\widehat{M} \in M_{n+1}$ con determinante distinto de cero, decimos que son equivalentes, si inducen el mismo automorfismo: es decir, si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\lambda M = \widehat{M}$ y lo denotamos como $M \sim \widehat{M}$.

Si a cada matriz M la identificamos con todas las matrices que son equivalentes a ella, entonces las clases de equivalencia forman un grupo que se denota como $PSL(n+1, \mathbb{C})$, que es el grupo de automorfismos de \mathbb{P}^n

$$PSL(n+1, \mathbb{C}) \cong \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$$

y es igual al grupo de matrices que tienen determinante igual a 1. Es claro que para toda matriz M , existe $\widehat{M} \in \overline{M}$ $M \sim \widehat{M}$, tal que $\det \widehat{M} = 1$.

Para el caso cuando $n = 1$, a los automorfismos se les conoce como funciones DE MÖBIUS. Este caso ha sido estudiado a profundidad. En este capítulo nos dedicaremos a buscar resultados sobre el comportamiento de los automorfismos, principalmente para el caso $n = 2$, análogos a algunos resultados conocidos del caso $n = 1$. Los resultados de las funciones de Möbius se darán por

demostrados y se hará referencia a ellos continuamente.

2.1.3 Proposición: *Los automorfismos de \mathbb{P}^2 mandan rectas en rectas. Si $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ y R_{A_0, B_0, C_0} la recta determinada por la ecuación*

$$A_0z + B_0w + C_0t = 0$$

entonces $f(R_{A_0, B_0, C_0})$ también es una recta.

Demostración. Sea $M_f = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ una matriz que representa a f .

Entonces

$$f(R_{A_0, B_0, C_0}) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1z + b_1w + c_1t \\ a_2z + b_2w + c_2t \\ a_3z + b_3w + c_3t \end{pmatrix}$$

En donde $A_0z + B_0w + C_0t = 0$.

Hay que demostrar que existen A_1, B_1 y C_1 , tales que $|A_1| + |B_1| + |C_1| \neq 0$, que cumplan que si $x = (z, w, t) \in \mathbb{P}^2$

$$x \in R_{A_0, B_0, C_0} \Leftrightarrow f(x) \in R_{A_1, B_1, C_1}$$

es decir,

$$A_0z + B_0w + C_0t = 0$$

si y solamente si

$$A_1(a_1z + b_1w + c_1t) + B_1(a_2z + b_2w + c_2t) + C_1(a_3z + b_3w + c_3t) = 0$$

es decir, si y solamente si

$$(A_1a_1 + B_1a_2 + C_1a_3)z + (A_1b_1 + B_1b_2 + C_1b_3)w + (A_1c_1 + B_1c_2 + C_1c_3)t = 0$$

lo que ocurre si y solamente si el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución distinta de $(0, 0, 0)$

$$A_1a_1 + B_1a_2 + C_1a_3 = A_0$$

$$A_1b_1 + B_1b_2 + C_1b_3 = B_0$$

$$A_1c_1 + B_1c_2 + C_1c_3 = C_0$$

lo que es cierto, ya que $\det(M_f) \neq 0$ y $(A_0, B_0, C_0) \neq (0, 0, 0)$.

De hecho

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\det \begin{vmatrix} A_0 & b_1 & c_1 \\ B_0 & b_2 & c_2 \\ C_0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} = A_0 \frac{\det \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} + B_0 \frac{\det \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} + C_0 \frac{\det \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} \\
 B_1 &= \frac{\det \begin{vmatrix} a_1 & A_0 & c_1 \\ a_2 & B_0 & c_2 \\ a_3 & C_0 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} = A_0 \frac{\det \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_2 & a_3 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} + B_0 \frac{\det \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} - C_0 \frac{\det \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} \\
 C_1 &= \frac{\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & A_0 \\ a_2 & b_2 & B_0 \\ a_3 & b_3 & C_0 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} = A_0 \frac{\det \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} + B_0 \frac{\det \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\det(M_f)} + C_0 \frac{\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\det(M_f)}
 \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

esto demuestra la proposición. ■

Es decir, dada cualquier recta R y cualquier $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, $f(R)$ también es una recta. Es decir, los automorfismos mandan rectas en rectas.

Esta demostración es obvia si sabemos que toda función lineal invertible de \mathbb{C}^3 manda planos por el origen, en planos por el origen.

Pero esta demostración nos hace notar que dada $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ y cualquier recta R_{A_0, B_0, C_0} ,

$$f(R_{A_0, B_0, C_0}) = R_{A_1, B_1, C_1}$$

en donde A_1, B_1 y C_1 quedan definidos como en la ecuación 2.1.4 por lo que además encontramos un automorfismo que manda un punto (A_0, B_0, C_0) al punto (A_1, B_1, C_1) .

2.1.5 Definición: Denotemos por \mathcal{R} al espacio de rectas de \mathbb{P}^2 y por \mathcal{R}_p al espacio de rectas que pasan por el punto p .

En la sección anterior, vimos que $\mathcal{R} = \mathbb{P}^2$ y que $\mathcal{R}_p = \mathbb{P}^1$ y que a la recta $R_{A, B, C}$ de \mathbb{P}^2 le podemos asociar el punto $(A, B, C) \in \mathcal{R}$.

2.1.6 Proposición. Dada $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, sea \tilde{f} tal que

$$\tilde{f}(A_0, B_0, C_0) = (A_1, B_1, C_1)$$

si

$$f(R_{A_0, B_0, C_0}) = (R_{A_1, B_1, C_1})$$

entonces $\tilde{f} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$.

Demostración: En la proposición anterior se encontro este automorfismo, por lo que la proposición es cierta. ■

Esta proposición muestra que la acción de un automorfismo de \mathbb{P}^2 , sobre \mathcal{R} , también es un automorfismo.

Llamamos a \tilde{f} el automorfismo dual de f .

$$\tilde{f} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$$

Estos resultado tienen una importancia mayor de la que aparenta, ya que si un automorfismo f fija un punto p , entonces si R es una recta que pasa por p , $f(R)$ también es una recta que pasa por p .

Esto implica que el espacio de rectas que pasan por p es un conjunto invariante bajo f , es decir,

$$\tilde{f}(\mathcal{R}_p) = \mathcal{R}_p$$

Es claro que $\tilde{f}|_{\mathcal{R}_p} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, es decir es una función de Möbius.

2.1.7 Definición Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ y sea p un punto tal que $f(p) = p$. La derivada proyectiva de f en p es la función de \mathcal{R}_p en \mathcal{R}_p , denotada por $(d\prod)f(p)$.

$$(d\prod)f(p) : \mathcal{R}_p \rightarrow \mathcal{R}_p$$

que cumple que

$$(d\prod)f(p) = \tilde{f}|_{\mathcal{R}_p}$$

lo que implica que, para toda $R \in \mathcal{R}_p$: es decir, para toda recta que pasa por p

$$\left((d\prod)f(p) \right) (R) = \tilde{f}(R)$$

donde claramente $\tilde{f}(R) \in \mathcal{R}_p$, y por lo tanto $(d\prod)f(p) \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

La derivada proyectiva es muy útil para describir la dinámica de las rectas alrededor de los puntos fijos de los automorfismos. El hecho de que sea una función de Möbius, hace que

conozcamos su comportamiento.

2.1.8 **Lema:** *Todo Automorfismo de \mathbb{P}^2 tiene 1, 2, 3 o ∞ puntos fijos:*

Demostración: La formula de Lefschetz y el hecho de que la característica de Euler de $\mathbb{P}^2 \neq 0$ nos garantiza que todo automorfismo de \mathbb{P}^2 tiene por lo menos un punto fijo. Lo que tenemos que ver ahora es que si tiene más de 3 puntos fijos, entonces tiene una infinidad.

Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que f fija al menos 4 puntos. Sean α, β, γ y δ puntos fijos de f tales que son diferentes entre si.

Supongamos que f fija un número finito de puntos.

Sea $R_{\alpha, \beta}$ la recta que pasa por α y por β . Es claro que $f(R_{\alpha, \beta}) = R_{\alpha, \beta}$ ya que $f(R_{\alpha, \beta})$ es una recta (por ser f un automorfismo de \mathbb{P}^2) tal que contiene a α y a β :

$$\alpha = f(\alpha) \in f(R_{\alpha, \beta})$$

$$\beta = f(\beta) \in f(R_{\alpha, \beta})$$

Entonces $f|_{R_{\alpha, \beta}} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

Por la teoría de las funciones de Möbius sabemos que si $f|_{R_{\alpha, \beta}}$ tuviera 3 puntos fijos entonces sería la identidad, lo que significa que si $R_{\alpha, \beta}$ contiene otro punto fijo de f entonces $f|_{R_{\alpha, \beta}} \equiv I$, donde I es el automorfismo identidad, y por lo tanto f tendría una infinidad de puntos fijos. Esto implica que si f tiene un número finito de puntos fijos, no puede haber tres de estos colineales.

Esto implica que

$$\gamma, \delta \notin R_{\alpha, \beta}$$

Sea $R_{\gamma, \delta}$ la recta determinada γ y por δ . Es claro que

$$f(R_{\gamma, \delta}) = R_{\gamma, \delta}$$

es decir que $R_{\gamma, \delta}$ es invariante.

Sea p el punto de intersección de $R_{\alpha, \beta}$ y de $R_{\gamma, \delta}$.

$$p = R_{\alpha, \beta} \cap R_{\gamma, \delta}$$

Como $f(p) \in R_{\alpha, \beta}$ y $f(p) \in R_{\gamma, \delta}$ por ser estas invariantes entonces

$$f(p) = R_{\alpha, \beta} \cap R_{\gamma, \delta} = p$$

Es decir, p es un punto fijo de f .

Como supusimos que f tiene un número finito de puntos fijos, entonces los únicos puntos

fijos de $f|_{R_{\alpha,\beta}}$ son α y β . Es decir que $p = \alpha \circ p = \beta$.

Supongamos que $p = \alpha$. Esto implica que $\alpha \in R_{\gamma,\delta}$. Como $\alpha \neq \gamma, \delta$ entonces $f|_{R_{\gamma,\delta}}$ tendría 3 puntos fijos y por lo tanto $f|_{R_{\gamma,\delta}} = I$ y por lo tanto f tendría un número infinito de puntos fijos.

Entonces si $p = \alpha$ se contradice nuestra hipótesis de que f tiene un número finito de puntos fijos. Lo mismo sucede si suponemos que $p = \beta$, lo que demuestra la proposición. ■

Entonces si f tiene un número finito de puntos fijos entonces, ese número sólo puede ser 1, 2 o 3.

A diferencia de \mathbb{P}^1 , un automorfismo de \mathbb{P}^2 puede tener un número ∞ de puntos fijos y no ser la identidad ya que todos éstos, salvo a lo más uno, pueden estar contenidos en una recta.

2.1.9 Corolario: Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que tiene un número infinito de puntos fijos. Sea R una recta tal que contiene 3 puntos fijos de f , entonces si existen α y β puntos fijos de f tales que $\alpha, \beta \in R$, entonces $f|_R = I$.

Demostración. Lo primero que hay que notar es que si un punto $x \in R$, entonces x es un punto fijo de f , ya que por definición R tiene 3 puntos fijos de f , y por lo tanto

$$f|_R = I$$

es decir

$$x \in R \Rightarrow f(x) = x$$

Sea $R_{\alpha,\beta}$ la recta determinada por α y por β . Claramente $R \neq R_{\alpha,\beta}$ ya que por hipótesis $\alpha, \beta \in R$. Sea $p = R \cap R_{\alpha,\beta}$. Como $p \in R$ entonces $f(p) = p$ y por lo tanto $f|_{R_{\alpha,\beta}}$ tiene tres puntos fijos y por lo tanto $f|_{R_{\alpha,\beta}} = I$.

Sea x un punto de \mathbb{P}^2 tal que $x \in R$ y $x \notin R_{\alpha,\beta}$. Sean $R_{x,\alpha}$ y $R_{x,\beta}$ las rectas que unen x con α y con β respectivamente. Sean

$$\gamma = R \cap R_{x,\alpha}$$

y

$$\delta = R \cap R_{x,\beta}$$

Claramente γ y δ son puntos fijos de f , ya que ambos son puntos de R . Esto implica que $R_{x,\alpha}$ y $R_{x,\beta}$ son rectas invariantes, ya que contienen dos puntos fijos.

Esto implica que x es intersección de dos rectas invariantes y por lo tanto es un punto fijo. Es decir, que todo punto de \mathbb{P}^2 es punto fijo de f y por lo tanto $f = I$. ■

Es decir, si $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, tal que f tiene una infinidad de puntos fijos, pero $f \neq I$, entonces todos los puntos fijos de f , salvo a lo más uno, están contenidos en una recta.

Veamos ahora un par de ejemplos en donde un automorfismo f tiene una infinidad de puntos fijos, pero $f \neq I$.

2.1.10 **Ejemplo:** Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$f(z, w, t) = (\lambda z, \lambda w, t) \quad \lambda \neq 0, 1$$

En este caso f deja fija la línea $t = 0$, ya que $(z, w, 0) = (\lambda z, \lambda w, 0)$ para toda $\lambda \neq 0$.

Tomemos ahora un punto p tal que $t \neq 0$, $p = (z, w, 1)$ y evaluemos $f(p)$

$$f(z, w, 1) = (\lambda z, \lambda w, 1)$$

Claramente $(z, w, 1)$ es un punto fijo de f si y solamente si $(z, w, 1) = (0, 0, 1)$.

Esto implica que f es un automorfismo que tiene una infinidad de puntos fijos, y que no es el automorfismo identidad. Podemos notar que todos los puntos fijos, salvo uno, están contenidos en una recta.

2.1.11 **Ejemplo:** Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$f(z, w, t) = (z + \lambda t, w, t) \quad \lambda \neq 0$$

En este caso f también fija la recta $t = 0$, ya que

$$f(z, w, 0) = (z, w, 0)$$

pero en la parte finita, f no tiene puntos fijos, ya que si $\lambda \neq 0$, no existe $(z, w, 1)$ tal que

$$(z, w, 1) = (z + \lambda, w, 1)$$

Entonces, f es un automorfismo que tiene una infinidad de puntos fijos, que no es la identidad. En este caso todos los puntos fijos de f están contenidos en una recta.

Estos resultados se pueden generalizar a \mathbb{P}^n de la siguiente forma:

2.1.12 **Proposición:** Si $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ y tiene un número finito de puntos fijos entonces f tiene a lo más $n + 1$ puntos fijos.

Demostración: La demostración se hará por inducción sobre n . Por el lema 2.1.8 sabemos que la proposición es cierta para $n = 2$. Supongamos que es cierto para $n \leq k - 1$. Basta demostrar que es cierto para $n = k$.

Sea f un automorfismo de \mathbb{P}^k , tal que f tiene un número finito de puntos fijos. Supongamos que f tiene $k + 2$ puntos fijos. Sea $F = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-2}\}$ el conjunto de dichos puntos fijos. Por hipótesis de inducción cada k puntos fijos de F determinan un espacio proyectivo de

dimensión $k + 1$, \mathbb{P}^{k-1} , que es invariante, ya que si determinaran un espacio $\mathbb{P}^j \subset \mathbb{P}^k$, con $j \leq k - 1$, este que tendría mas de $j + 1$ puntos fijos, y por lo tanto tendría una infinidad.

Sea $P_{k-1, k-2}^{k-1}$ el espacio proyectivo generado por $F - \{x_{k-1}, x_{k-2}\}$. Por hipótesis de inducción $x_{k-1}, x_{k-2} \notin P_{k-1, k-2}^{k-1}$ ya que entonces en $P_{k-1, k-2}^{k-1}$ habría mas de k puntos fijos de f , y por lo tanto f tendría una infinidad de estos.

Sea R la recta generada por x_{k-1} y por x_{k-2} . Por construcción, R es una recta invariante. Dado que $\dim R = 1$ y $\dim P_{k-1, k-2}^{k-1} = k + 1$, entonces existe un punto p tal que

$$p = R \cap P_{k-1, k-2}^{k-1}$$

Por construcción, $f(p) = p$ ya que

$$f(p) \in P_{k-1, k-2}^{k-1}$$

$$f(p) \in R$$

ya que R y $P_{k-1, k-2}^{k-1}$ son invariantes. Por lo tanto

$$f(p) = R \cap P_{k-1, k-2}^{k-1} = p$$

Es decir p es un punto fijo de f .

Como $p \in R$, entonces si $p \neq x_{k-1}, x_{k-2}$, la recta R tendría 3 puntos fijos y por lo tanto tendría una infinidad lo que sería una contradicción a nuestra suposición de que f tiene un número finito de puntos fijos.

Entonces $p = x_{k-1}$ o $p = x_{k-2}$. Esto también sería una contradicción a la suposición de que f tiene un número finito de puntos fijos, ya que entonces alguno de los dos estaría en $P_{k-1, k-2}^{k-1}$, lo cual ya habíamos visto que es imposible.

Entonces, si $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ y f tiene un número finito de puntos fijos, entonces f tiene a lo más $n + 1$ puntos fijos. ■

Al igual que para el caso de los automorfismos de \mathbb{P}^2 , un automorfismo f de \mathbb{P}^n puede tener una infinidad de puntos fijos y no ser la identidad.

De hecho, podemos generalizar el corolario 2.1.9 de la siguiente manera:

2.1.13 Proposición: Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ tal que f tiene una infinidad de puntos fijos. Sea $P^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ tal que $f|_{P^{n-1}} = I$. Si existen $x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}$ puntos fijos de f , tales que $x_j \in P^{n-1}$, si $1 \leq j \leq i + 1$ entonces existe un P^m tal que $P^{n-1} \subseteq P^m \subset \mathbb{P}^n$, para el cual $f|_{P^m} = I$.

Para la demostración de la proposición, mostraremos primero el siguiente lema.

2.1.14 Lema: Para todo automorfismo f , si \overline{Px} es el espacio generado por un punto fijo x y por un espacio invariante P , entonces \overline{Px} , es decir la unión de las rectas de P a x , también

es invariante.

Demostración: Por definición, un punto $p \in \overline{P_x}$ esta en una recta R determinada un punto $y \in P$ y por x . Claramente $f(p) \in f(R)$ y $f(R) \in \overline{P_x}$, ya que $f(R)$ queda determinada por $f(y) \in P$ y por $f(x) = x$, y por lo tanto $f(p) \in \overline{P_x}$, lo que muestra la proposición. ■

Demostración de la proposición: La demostración se hará por inducción sobre n . Como ya demostramos que es cierto para el caso $n = 2$, si suponemos que es cierto para $n \leq k - 1$, basta con demostrarlo para el caso $n = k$.

Por hipótesis estamos suponiendo que existe un P^{k-1} tal que $f|_{P^{k-1}} = I$ y que existen $x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}$ tales que $x_j \notin P^{k-1}$. Tenemos que demostrar entonces que existe P^n tal que $P^{k-1} \subsetneq P^n \subset \mathbb{P}^k$, en el que $f|_{P^n} = I$.

Sea $P_1 = \overline{P_x}$ el espacio generado por P y por x_1 . Sea $P_j = \overline{P_{j-1}x_j}$, $1 \leq j \leq i$ el espacio generado por P y por x_1, x_2, \dots, x_j .

Por como definimos P_j , éste tiene dimensión a lo más $n - i + j$.

Si $x_{j-1} \in P_j$, para alguna $j \leq i$ entonces P_j , tendría un P^{n-1} fijo y por lo menos $n - i + j + 1$ puntos fijos distintos, y por hipótesis de inducción existiría P^{n-1} tal que $P^{n-1} \subsetneq P^n \subset P_j \subset P^n$ para el cual $f|_{P^n} = I$ con lo que quedaría demostrada la proposición.

Entonces vamos a suponer que esto no sucede, es decir que $x_{j-1} \notin P_j$, si $j \leq i$ lo que implica que P_j tiene dimensión $n - i + j$, si $1 \leq j \leq i$. En particular, P_{i-1} tiene dimensión $n - 1$.

Sea $R_{i,i-1}$ la recta generada por x_i y por x_{i-1} . La dimensión de $R_{i,i-1}$ es 1, y por lo tanto intersecta a P_{i-1} en al menos un punto. Si lo intersectara en más de un punto entonces $R_{i,i-1} \subset P_{i-1}$ lo que implicaría que

$$x_i, x_{i-1} \in P_{i-1}$$

Es decir que P_{i-1} tendría un $P^{n-1} = P^{n-1-(i-1)}$ y más de i puntos fijos, lo que por hipótesis de inducción demostraría la proposición.

Supondremos entonces que $R_{i,i-1} \cap P_{i-1}$ es exactamente un punto. Llamémosle x .

$$R_{i,i-1} \cap P_{i-1} = x$$

Como x es intersección de espacios invariantes es un punto fijo, y por lo tanto $R_{i,i-1}$ tiene 3 puntos invariantes y por lo tanto $f|_{R_{i,i-1}} = I$.

Sea P^n el espacio generado por P^{n-1} y por $R_{i,i-1}$. Claramente P^n es un espacio fijo, ya que es combinación de puntos fijos, y además

$$P^{n-1} \subseteq P^n \subseteq P^n$$

con lo que la proposición queda demostrada. ■

2.1.15 **Proposición:** *Todo automorfismo f de \mathbb{P}^2 tiene 1, 2, 3 o ∞ rectas invariantes.*

Demostración: Lo primero que hay que notar, es que toda recta invariante contiene al menos un punto fijo, ya que un automorfismo restringido a una recta invariante es una función de Möbius, y por lo tanto tiene uno, dos o una infinidad de puntos fijos. Esto nos sirve mucho ya que si hay una recta invariante, ésta pasa por alguno de los puntos fijos de f , por lo que basta que conozcamos el comportamiento de las rectas alrededor de los puntos fijos, para que detectemos rectas invariantes.

Analicemos los posibles casos, según el número de puntos fijos de f .

Si hay un solo punto fijo α :

Como α es el único punto fijo de f entonces toda recta invariante contiene a α . Como $(d \prod) f(\alpha) \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ entonces tiene 1, 2 o ∞ puntos fijos, es decir que f deja invariantes 1, 2 o ∞ rectas invariantes que pasan por α . Más adelante veremos que el único caso posible

es que haya una única recta invariante.

Si hay dos puntos fijo α y β :

Sea $R_{\alpha, \beta}$ la recta que contiene a α y a β . Por contener 2 puntos fijos $R_{\alpha, \beta}$ es invariante. Si hubiera otras rectas invariantes, éstas deben pasar por α o por β , ya que deben contener un punto fijo.

Supongamos que por α , pasa al menos otra recta invariante R_α . Por la derivada proyectiva sabemos que sólo puede haber dos casos: que pase exactamente una recta invariante más por α , o que todas las rectas que pasan por α sean invariantes. En ambos casos, si por β pasara otra recta $R_\beta \neq R_{\alpha, \beta}$. Sea $p = R_\alpha \cap R_\beta$. Por ser intersección de rectas invariantes entonces p es punto fijo de f . Como $\alpha \notin R_\beta$ y $\beta \notin R_\alpha$, entonces $p \neq \alpha, \beta$ lo que nos llevaría a una contradicción a la suposición de que f tiene exactamente 2 puntos fijos. Entonces la única recta invariante que pasa por β es $R_{\alpha, \beta}$.

Entonces si tenemos exactamente 2 puntos fijos hay tres casos: que la recta que los une sea la única recta invariante, o que por alguno de los puntos pase otra recta invariante o que todas las rectas que pasen por alguno de los puntos sean invariantes. Es decir hay una, dos o una infinidad de rectas invariantes. Más adelante veremos que si hay dos puntos fijos, entonces hay por lo menos 2 rectas invariantes.

Si hay 3 puntos fijos α, β y γ :

Sean $R_{\alpha, \beta}, R_{\alpha, \gamma}$ y $R_{\beta, \gamma}$ las rectas determinadas por α y β , por α y γ y por β y γ respectivamente. Claramente estas son diferentes entre sí, y las 3 son invariantes.

Supongamos que existe otra recta invariante R . Esta debe contener al menos uno de los puntos fijos de f , supongamos α , por lo tanto por α pasan tres rectas invariantes, y por la

derivada proyectiva, todas las rectas que pasan α son invariantes.

Sea p un punto de $R_{\beta,\gamma}$, $p \neq \beta, \gamma$ y sea $R_{\alpha,p}$ la recta determinada por α y por p . Entonces $p = R_{\beta,\gamma} \cap R_{\alpha,p}$. Como ambas rectas son invariantes, entonces p es fijo, lo que es una contradicción a la hipótesis de que f tiene exactamente 3 puntos fijos. Por lo tanto las únicas rectas invariantes son las determinadas por los puntos fijos.

Si hay ∞ puntos fijos, hay tres casos: f es la identidad, todos los puntos fijos están contenidos en una recta o todos están contenidos en una recta excepto uno.

En el primer caso y en el tercero, f tendría una infinidad de rectas invariantes. En el segundo, hay tres casos: una única recta invariante, que por uno de los puntos pase otra recta invariante, o que todas las rectas que pasen por alguno de los puntos sean invariantes. En todos los casos hay una, dos o una infinidad de rectas invariantes.

Estos son todos los casos, y en todos hay una, dos, tres o infinitas rectas invariantes, con lo que se demuestra la proposición. ■

2.2 CONJUGACION

2.2.1 Definición: Sean $f, g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$. Decimos que f, g son conjugados ($f \sim g$), si existe $h \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$fh = hg$$

o visto de otra manera, si

$$h^{-1}fh = g$$

Es fácil observar que si $f \sim g$ entonces f, g tienen la misma dinámica:
Si $f(x) = p$ entonces

$$g(h^{-1}(x)) = h^{-1}fh(h^{-1}(x)) = h^{-1}f(x) = h^{-1}(p)$$

Por lo tanto sabemos que si en una hay puntos fijos, puntos periódicos etc. sabemos que en la otra hay la misma cantidad de éstos y su comportamiento es el mismo.

Si $f \sim g$, entonces f, g tienen la misma cantidad de puntos fijos:

Sea p un punto fijo de f , entonces $h^{-1}(p)$ es un punto fijo de g ya que:

$$g(h^{-1}(p)) = h^{-1}fh(h^{-1}(p)) = h^{-1}f(p) = h^{-1}(p)$$

Así mismo el comportamiento de las líneas del haz de líneas de estos puntos fijos es igual en

ambas funciones, ya que si $f \sim g$, y p es un punto fijo de f , entonces como ya vimos $h^{-1}(p)$ es un punto fijo de g . Sea x un punto de \mathbb{P}^2 , $x \neq p$, y $R_{x,p}$ la recta que une x y p .

$$\left(d \prod\right) f(p) \sim \left(d \prod\right) g(h^{-1}(p))$$

Sea h un automorfismo de \mathbb{P}^2 y sea $X = x_0, x_1, x_2, \dots$ una sucesión de puntos de \mathbb{P}^2 . Es claro que X converge a x en \mathbb{P}^2 si y sólo si $h(X) = h(x_0), h(x_1), h(x_2), \dots$ converge a $h(x)$ en \mathbb{P}^2 .

Sabiendo esto es claro que la dinámica es la misma en dos automorfismos conjugados ya que si $f^n(x) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$ para algún punto x de \mathbb{P}^2 y p punto fijo de f , entonces $g^n(h^{-1}(x)) \rightarrow h^{-1}(p)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(h^{-1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^{-1} f^n h(h^{-1}(x)) = h^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = h^{-1}(p)$$

y si $f^n(x)$ no converge, entonces $g^n(h^{-1}(x))$ tampoco converge.

Durante este trabajo utilizaremos mucho esto y otros resultados de la conjugación, ya que conjugando podemos llevar un ejemplo al parecer complicado a uno canónico. Por ejemplo: Siempre podemos suponer que la recta invariante es la recta $t = 0$, que si hay 3 rectas invariantes entonces las otras 2 son los ejes, que si hay un número finito de puntos fijos son algunos de éstos: $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$. La demostración de estos hechos ésta en los siguientes resultados:

2.2.2 Lema: Dada una recta R en \mathbb{P}^2 existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $f(R) = R$.

Demostración: Si $R = R_x$ la demostración es trivial ya que $g = I$ cumple, por lo que podemos suponer que $R \neq R_x$.

Sean $(\alpha, \beta, 1)$ y $(\gamma, \delta, 1)$ dos puntos generadores de R . Como $R \neq R_x$, entonces siempre podemos encontrar dos puntos en ella tal que la tercera coordenada $t \neq 0$ y podemos dividir entre t de manera que la tercera coordenada sea igual a 1. Primero vamos a trasladar a $(\gamma, \delta, 1)$ al $(0, 0, 1)$ con la translación $T \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ definida por

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\gamma \\ 0 & 1 & -\delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\det M_T = 1)$$

es decir que $T(R)$ es una recta que pasa por el origen y por el punto $T(\alpha, \beta, 1) = (\alpha - \gamma, \beta - \delta, 1)$.

Es decir que para toda recta $R \neq R_x$ que no pase por el punto origen, existe un automorfismo T tal que $T(R)$ es una recta que pasa por el origen.

Falta mostrar que para toda recta R que pase por el origen, existe un automorfismo h tal que

$$h(R) = R_\alpha.$$

Dado un punto $v = (z_0, w_0, 1)$ y una recta R , que pasa por el origen y por v , existe $h \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $h(R) = R_\alpha$ y tal que $h(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$. Esta h queda definida por la matriz

$$M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ w_0 & -z_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definida así, $\det M_h = -w_0$ es decir que es distinto de cero para toda recta distinta de la recta $\{w = 0\}$. Entonces

$$h(z_0, w_0, 1) = (z_0 + 1, w_0, 0) \text{ y } h(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

y por lo tanto $h(R) = R_\alpha$.

En el caso de que R sea la recta $\{w = 0\}$, el automorfismo

$$h(z, w, t) = (z, t, w)$$

manda R a R_α .

Es decir dada una recta $R \neq R_\alpha$ que pase por el origen, existe un automorfismo h tal que $h(R) = R_\alpha$.

Con esto demostramos que dada cualquier recta R existe $f = h \circ T$ tal que $f(R) = R_\alpha$ ($T = I$ si R es una recta que pasa por el origen). ■

Hay que notar que este lema implica que si un automorfismo f deja invariante una recta R , por conjugación siempre podemos suponer que dicha recta es la recta $t = 0$ ya que si f deja la recta R invariante entonces existe $\hat{f} = gfg^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$f(R_\alpha) = R_\alpha.$$

ya que

$$\hat{f}(R_\alpha) = gfg^{-1}(R_\alpha) = gf(R) = g(R) = R_\alpha$$

y que por ser conjugada a f tiene su misma dinámica.

2.2.3 Corolario: Dadas dos rectas R_0 y R_1 existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $g(R_0) = R_1$.

Demostración: Podemos suponer que ambas son distintas de la línea al infinito ya que si alguna fuera la recta al infinito ya estaría demostrado. Por el lema 2.2.2 sabemos que existen h_0 y h_1 tal que $h_i(R_i) = R_\alpha$, para $i = 0, 1$. Esto implica que $h_1^{-1}(R_\alpha) = R_1$. Definamos $g = h_1^{-1} \circ h_0$. El automorfismo g por ser composición de automorfismos, es un automorfismo y cumple con lo que queremos ya que:

$$h_1^{-1} \circ h_0(R_0) = h_1^{-1}(R_x) = R_1$$

■

2.2.4 **Lema:** *Todo función lineal $l : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ se extiende a la línea al infinito.*

Demostración: Sea $l : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ una transformación lineal tal que su matriz asociada

$$M_l = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

y tal que $\det M_l \neq 0$ Entonces

$$l(z, w) = (a_1 z + b_1 w, a_2 z + b_2 w)$$

y la extendemos a un automorfismo $L : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ de la siguiente manera:

$$(z, w, t) \rightarrow (a_1 z + b_1 w, a_2 z + b_2 w, t)$$

de forma que en la línea el infinito ($t = 0$) se comporta así:

$$L(z, w, 0) \rightarrow (a_1 z + b_1 w, a_2 z + b_2 w, 0)$$

es decir deja la recta al infinito invariante.

Ahí como en cualquier otra recta invariante de un automorfismo, la función actúa como una transformación de Möbius.

$$(z, w, 0) \rightarrow (a_1 z + b_1 w, a_2 z + b_2 w, t)$$

$$\left(\frac{z}{w}, 1, 0 \right) \rightarrow \left(\frac{a_1 \frac{z}{w} + b_1}{a_2 \frac{z}{w} + b_2}, 1, 0 \right)$$

$$\xi \rightarrow \frac{a_1 \xi + b_1}{a_2 \xi + b_2}$$

La matriz asociada a L sería

$$M_L = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y $\det M_l = \det M_L \neq 0$.

2.2.5 Ejemplos:

1. La función lineal $l : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, definida como $l(z, w) = (2z, w)$.

$$M_l = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la extendemos a un automorfismo $L : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, tal que

$$M_L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este es un ejemplo de una función con infinitos puntos fijos, que es distinto de la identidad. En este ejemplo la función en la línea al infinito se comporta como multiplicación por dos ya que al punto $(z, w, 0)$ lo manda al punto $(2z, w, 0)$ es decir:

$$\frac{z}{w} \rightarrow \frac{2z}{w}$$

$$\xi \rightarrow 2\xi$$

En este caso los puntos fijos son todos los de la recta $z = 0$ y el $(1, 0, 0)$. Los primeros son repulsores en todas las direcciones salvo en la dirección de la recta $z = 0$ en la que son indiferentes y el último es atractor. Todos los puntos fuera de $z = 0$ tienden al punto $(0, 0, 1)$. Todas las rectas que pasan por el $(0, 0, 1)$ se van a ir pegando a la recta $w = 0$, excepto la recta $z = 0$ en la que la función es la identidad y las rectas con z constante se van a ir alejando de la recta $z = 0$. Las rectas con la w constante son invariantes y su dinámica es la misma que en $w = 0$.

2. La función lineal $l : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, definida como $l(z, w) = (2z, \frac{w}{2})$.

$$M_l = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

se extiende a un automorfismo $L : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, tal que

$$M_L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo los puntos fijos son el $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. En la recta $w = 0$ y en $(1, 0, 0)$ la dinámica es prácticamente la misma que en el caso anterior, pero el hecho de que que en la recta $z = 0$ la dinámica sea como multiplicación por un medio hace que ahora el $(0, 0, 1)$ sea atractor en la dirección $z = 0$. Es decir que en este ejemplo se muestra la existencia de puntos silla que no presentan los automorfismos de \mathbb{P}^1 . En la recta $t = 0$ el punto $(z, w, 0)$ va al $(2z, \frac{1}{2}w, 0)$. Es decir que aquí también la recta $t = 0$ es invariante, pero

no la fija:

$$\frac{z}{w} \rightarrow \frac{2z}{\frac{1}{2}w} = \frac{4z}{w}$$

$$\xi \rightarrow 4\xi$$

Todos los puntos fuera de esta recta tienden al $(1, 0, 0)$. Aquí las rectas por el origen se van pegando a $w = 0$ y las de w constante también. Las rectas con z constante se van a ir alejando de la recta $z = 0$.

2.2.6 Proposición: Si $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ y deja invariante a la recta R entonces $f_{2:-R} : \mathbb{P}^2 - R \rightarrow \mathbb{P}^2 - R$ es una función afín de $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$.

2.2.7 Lema: La proposición se cumple para $R = R_x$.

Demostración: Sea $M_f = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a la función f . Es decir,

$$f(z, w, t) = (a_1z + b_1w + c_1t, a_2z + b_2w + c_2t, a_3z + b_3w + c_3t)$$

Por la suposición de que R_x es invariante, sabemos que si $t = 0$ entonces

$$a_3z + b_3w + c_3(0) = 0$$

para todas z y w por lo que $a_3 = b_3 = 0$ y podemos suponer que $c_3 = 1$.
Entonces

$$M_f = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como sabemos que el $\det M_f \neq 0$, entonces el $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$

Cuando la $t \neq 0$ es decir en $\mathbb{P}^2 - R_x$,

$$f(z, w, 1) = (a_1z + b_1w + c_1, a_2z + b_2w + c_2, 1)$$

Aquí podemos ver a la función

$$f = g + T$$

en donde g es una función lineal de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 dada por la matriz

$$M_g = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

y T una traslación por el vector (c_1, c_2) , por lo tanto f es una función afín de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 , que es isomorfo a $\mathbb{P}^2 - L_\alpha$. ■

Demostración de la proposición: Sea R una recta de \mathbb{P}^2 tal que $f(R) = R$. Por el lema 2.2.2 existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $g(R) = R_\alpha$. Sea $f' = gfg^{-1}$.

Dado que $f'(R_\alpha) = R_\alpha$, entonces $f' |_{\mathbb{P}^2 - R_\alpha}$ es una función afín de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 .

Como $f \sim f'$ entonces tienen la misma dinámica y por lo tanto f' se comporta en $\mathbb{P}^2 - R_\alpha$ de la misma forma que f en $\mathbb{P}^2 - g^{-1}(R_\alpha) = \mathbb{P}^2 - R$ y por lo tanto f se comporta como una función afín de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 . ■

2.2.8 Corolario: Si f deja invariantes R_1 y R_2 y en R_1 y R_2 se comporta como la identidad, entonces $f \equiv I$

Dem: Sea R_0 cualquier otra recta de \mathbb{P}^2 . Por tener 2 puntos fijos (las intersecciones con R_1 y con R_2) entonces R_0 es invariante. Por la proposición anterior sabemos que si R_0 es invariante entonces f se comporta afínmente en $f_{\mathbb{P}^2 - R_0}$.

Por hipótesis R_1 y R_2 son fijas, entonces f se comporta como una función afín que fija dos rectas, es decir, como la identidad. Basta ver que también es la identidad en R_0 .

Sea $R \in \mathbb{P}^2$

$$f(R) = R$$

y $f(p) = p$ para todo $p \in R, p \neq s$, donde

$$s = R \cap R_0$$

Como R_0 y R son invariantes entonces $f(s) \in R_0$ y $f(s) \in R$, por lo tanto

$$f(s) \in R_0 \cap R = s$$

Es decir $f(s) = s$ para toda $s \in R_0$, es decir $f |_{R_0} = I$ y por lo tanto $f \equiv I$ en todo \mathbb{P}^2 . ■

2.2.9 Lema: Dadas tres rectas R_0, R_1 y R_2 no concurrentes existe $G \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $f(R_0) = R_\alpha, f(R_1) = R_{\{\neq 0\}}$ y $f(R_2) = R_{\{\neq 0\}}$.

Demostración: Por el lema 2.2.2 existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $g(R_0) = (R_\alpha)$. Vamos a demostrar que existe $h \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$h(R_\alpha) = R_\alpha, h(g(R_1)) = R_{\{\neq 0\}}$$

y

$$h(g(R_2)) = R_{\{w=0\}}.$$

Sabemos que dadas 2 rectas R_a y R_b concurrentes en \mathbb{C}^2 existe una función afin \hat{h} de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 tal que $\hat{h}(R_a) = R_{\{z=0\}}$ y $\hat{h}(R_b) = R_{\{w=0\}}$.

Como $\mathbb{P}^2 - R_\alpha = \mathbb{C}^2$, entonces $g(R_1) - R_\alpha$ y $g(R_2) - R_\alpha$ son rectas de \mathbb{C}^2 y por lo tanto existe \hat{h} tal que $\hat{h}(g(R_1) - R_\alpha) = R_{\{z=0\}} - R_\alpha$ y $\hat{h}(g(R_2) - R_\alpha) = R_{\{w=0\}} - R_\alpha$. La función \hat{h} es de la forma

$$\hat{h}(z, w) = (a_1 z + c_1, b_2 w + c_2)$$

Entonces vamos a definir

$$h(z, w, t) = (a_1 z + c_1 t, b_2 w + c_2 t, t)$$

Es claro que definiendo h de esta manera

$$h(g(R_1)) = R_{\{z=0\}}$$

$$h(g(R_2)) = R_{\{w=0\}}$$

Esto demuestra el lema ya que entonces si $G = h \circ g$

$$G(R_0) = h \circ g(R_0) = h(R_\alpha) = R_\alpha$$

$$G(R_1) = h \circ g(R_1) = h(g(R_1)) = R_{\{z=0\}}$$

$$G(R_2) = h \circ g(R_2) = h(g(R_2)) = R_{\{w=0\}}$$

■

2.2.10 Corolario: *Dado un automorfismo $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ que deja invariantes 3 rectas no concurrentes R_0, R_1 y R_2 , existe $F \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, $F \sim f$ tal que F deja invariantes las rectas $R_\alpha, R_{\{z=0\}}$ y $R_{\{w=0\}}$.*

Demostración: La demostración es obvia de la proposición, ya que sabemos que existe $G \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$G(R_0) = R_\alpha$$

$$G(R_1) = R_{\{z=0\}}$$

$$G(R_2) = R_{\{w=0\}}$$

entonces

$$F = hfh^{-1}$$

deja invariantes $R_\alpha, R_{\{z=0\}}$ y $R_{\{w=0\}}$ y cumple que $f \sim F$. ■

Esto muestra que si estamos estudiando la dinámica de un automorfismo que deja invariantes 3 rectas no concurrentes, podemos suponer que estas son $R_{\{x\}}, R_{\{z=0\}}$ y $R_{\{w=0\}}$

2.2.11 Corolario: *Sean $R_{1,0}, R_{1,1}$ y $R_{1,2}$ 3 rectas no concurrentes. Entonces dadas*

cualesquiera rectas $R_{2,0}, R_{2,1}$ y $R_{2,2}$ no concurrentes, existe $h \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$h(R_{1,j}) = R_{2,j} \quad j = 0, 1, 2$$

Demostración: Por el lema 2.2.9 existen F_1 y F_2 tales que

$$\begin{aligned} F_1(R_{1,0}) &= R_{\alpha} \\ F_1(R_{1,1}) &= R_{\gamma=0} \quad i = 1, 2 \\ F_1(R_{1,2}) &= R_{\omega=0} \end{aligned}$$

Entonces

$$h = F_2^{-1} \circ F_1$$

cumple con lo que queríamos, ya que

$$\begin{aligned} h(R_{1,0}) &= F_2^{-1} \circ F_1(R_{1,0}) = F_2^{-1}(R_{\alpha}) = R_{2,0} \\ h(R_{1,1}) &= F_2^{-1} \circ F_1(R_{1,1}) = F_2^{-1}(R_{\gamma=0}) = R_{2,1} \\ h(R_{1,2}) &= F_2^{-1} \circ F_1(R_{1,2}) = F_2^{-1}(R_{\omega=0}) = R_{2,2} \end{aligned}$$

■

2.2.12 Corolario: Sean $x_{1,0}, x_{1,1}$ y $x_{1,2}$ puntos no colineales de \mathbb{P}^2 , $x_{1,j} \neq x_{1,i}$ si $i \neq j$. Entonces dados cualesquiera 3 puntos no colineales $x_{2,0}, x_{2,1}$ y $x_{2,2}$, $x_{2,j} \neq x_{2,i}$ si $i \neq j$ existe $h \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$h(x_{1,j}) = x_{2,j} \quad j = 0, 1, 2$$

Demostración: Sea $R_{i,(j,k)}$ la recta determinada por $x_{i,j}$ y por $x_{i,k}$, $i = 1, 2$, $j, k = 0, 1, 2$, $j \neq k$.

Claramente $\{R_{i,(0,1)}, R_{i,(0,2)}, R_{i,(1,2)}\}$ son no concurrentes, para $i = 1, 2$ y

$$R_{i,(j,k_0)} \cap R_{i,(j,k_1)} = x_{i,j}$$

si $k_0 \neq k_1$. Por el corolario 2.2.11 existe $h \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$h(R_{1,(j,k)}) = R_{2,(j,k)}$$

esto implica que

$$h(x_{1,j}) = h(R_{1,(j,k_0)} \cap R_{1,(j,k_1)}) = R_{2,(j,k_0)} \cap R_{2,(j,k_1)} = x_{2,j}$$

lo que demuestra el corolario. ■

2.2.13 Proposición: Dada una recta R de \mathbb{P}^2 y $\psi : R \rightarrow R$, $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, existe $\Psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, tal que $\Psi(R) = R$ y que $\Psi|_R = \psi$.

2.2.14 Lema: La proposición se cumple para $R = R_{\alpha}$.

Demostración: Como $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ entonces

$$\psi(z, w, 0) = (a_1z + b_1w, a_2z + b_2w, 0)$$

Dados $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, definamos Ψ_{c_1, c_2} como

$$\Psi_{c_1, c_2}(z, w, t) = (a_1z + b_1w + c_1t, a_2z + b_2w + c_2t, t)$$

$\Psi_{c_1, c_2}(R_\alpha) = R_\alpha$, y $\Psi_{c_1, c_2}|_{R_\alpha} = \psi$ con lo que se cumple el lema.

Es decir que existe un automorfismo Ψ , que cumple lo que queremos, por cada punto de \mathbb{C}^2 . Es decir, que hay una infinidad. ■

Demostración de la proposición: Por el lema 2.2.2 existe $h \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que

$$h(R) = R_\alpha.$$

Sea $g = (h|_R) \circ \psi \circ (h^{-1}|_{R_\alpha}) : R_\alpha \rightarrow R_\alpha$ una función de Möbius. Por el lema 2.2.14 existe una infinidad de $G \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tales que $G(R_\alpha) = R_\alpha$, y que $G|_{R_\alpha} = g$. Sea G_0 alguno de estos automorfismos. Entonces definamos Ψ_0 como:

$$\Psi_0 = h^{-1} \circ G_0 \circ h$$

y vamos a ver que esta función cumple con lo que queremos:

$$\Psi_0(R) = h^{-1} \circ G_0 \circ h(R) = h^{-1} \circ G_0(R_\alpha) = h^{-1}(R_\alpha) = R$$

$$\Psi_0|_R = h^{-1}|_{R_\alpha} \circ G_0|_{R_\alpha} \circ h|_R = h^{-1}|_R \circ (h|_{R_\alpha} \circ \psi \circ h^{-1}|_{R_\alpha}) \circ h|_R = \psi$$

con lo que se demuestra la proposición. Al igual que para el caso $R = R_\alpha$ hay una infinidad de automorfismos que cumplen con esto. ■

2.2.15 Lema: Si $G \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, R es una recta invariante de G tal que $G|_R = g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ y g es conjugada a $g' \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, es decir que existe $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tal que $g' = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$, entonces existe una extensión \hat{G} de g' y una extensión Φ de ϕ tal que $\hat{G} = \Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$.

Demostración: Por hipótesis $g' = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$. Por la proposición 2.2.13 existe $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\Phi(R) = R$ y $\Phi|_R = \phi$.

Sea $\hat{G}_\Phi = \Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$. Por construcción $\hat{G}_\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ y $\hat{G}_\Phi \sim G$.

Faltaría mostrar que \hat{G}_Φ es una extensión de G , es decir que $\hat{G}_\Phi(R) = R$, y que $\hat{G}_\Phi|_R = g'$ lo que claramente se cumple ya que

$$G'_\Phi(R) = \Phi \circ G \circ \Phi^{-1}(R) = \Phi G(R) = \Phi(R) = R$$

$$G'_\Phi|_R = \Phi|_R \circ G|_R \circ \Phi^{-1}|_R = \phi \circ g \circ \phi^{-1} = g'$$

con lo que queda demostrado el lema. ■

2.2.16 Proposición: Dadas R_1 y R_2 rectas de \mathbb{P}^2 , y $\psi_1, \psi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tales que $\psi_i : R_i \rightarrow R_i$, y que $\psi_1(R_1 \cap R_2) = \psi_2(R_1 \cap R_2) = R_1 \cap R_2$, existe una única $\Psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\Psi(R_i) = R_i$, y que $\Psi|_{R_i} = \psi_i$.

2.2.17 Lema: La proposición se cumple para $R_{w=0}$ y $R_{z=0}$.

Demostración: Como $\psi_1(z, 0, t) = (a_1z + c_1t, 0, a_3z + d_1t)$ y $\psi_2(0, w, t) = (0, a_2w + c_2t, b_3w + d_2t)$, y $\psi_i(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ entonces $c_i = 0$ ($i = 1, 2$) y $d_1 = d_2 = d$.

Entonces $\psi_1(z, 0, t) = (a_1z, 0, a_3z + dt)$, y $\psi_2(0, w, t) = (0, b_2w, b_3w + dt)$, entonces

$$\Psi(z, w, t) = (a_1z, b_2w, a_3z + b_3w + dt)$$

es un automorfismo de \mathbb{P}^2 que cumple con lo que queremos. Esto demuestra la existencia de Ψ por lo que sólo falta probar la unicidad; es decir, que para todo automorfismo Ψ' que cumpla con la proposición existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda\Psi = \Psi'$.

Sea $\Psi'(z, w, t) = (A_1z + B_1w + C_1t, A_2z + B_2w + C_2t, A_3z + B_3w + C_3t)$ un automorfismo que cumple que

$$\Psi'(z, 0, t) = \psi_1(z, 0, t)$$

Demostración de la proposición: Sabemos que existe un automorfismo h tal que $h(R_1) = R_{z=0}$ y que $h(R_2) = R_{w=0}$ entonces

$$h\psi_1h^{-1} : R_{z=0} \rightarrow R_{z=0}$$

$$h\psi_2h^{-1} : R_{w=0} \rightarrow R_{w=0}$$

por el lema anterior sabemos que existe un único automorfismo Ψ' tal que

$$\Psi'|_{R_{z=0}} = h\psi_1h^{-1}$$

$$\Psi'|_{R_{w=0}} = h\psi_2h^{-1}$$

Sea $\Psi = h^{-1}\Psi'h$, entonces

$$\Psi|_{R_1} = h^{-1}\Psi h|_{R_1} = h^{-1}\Psi|_{R_{\neq 0}} h = h^{-1}h\psi_1 h^{-1}h = \psi_1$$

$$\Psi|_{R_2} = h^{-1}\Psi h|_{R_2} = h^{-1}\Psi|_{R_{=0}} h = h^{-1}h\psi_2 h^{-1}h = \psi_2$$

Como $\Psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ y es única, entonces $\Psi|_{R_i} \in \text{Aut}(R_i)$ y es única, con lo que se demuestra la proposición. ■

Esto implica que si conocemos el comportamiento de un automorfismo en 2 rectas invariantes, conocemos su comportamiento en todo \mathbb{P}^2 .

En esta sección hemos demostrado que para estudiar la dinámica de un automorfismo, basta con estudiar la dinámica de las restricciones a las rectas invariantes, que por ser estas transformaciones de Möbius, conocemos el tipo de comportamiento que pueden tener. También vimos que por conjugación, podemos suponer que las rectas invariantes son las rectas que tienen una de sus coordenadas igual a cero, y por lo tanto que los puntos fijos son $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ o $(1, 0, 0)$.

En la siguiente sección haremos una clasificación de los automorfismos de \mathbb{P}^2 precisamente basándonos en su comportamiento en las rectas invariantes.

2.3 CLASIFICACION DE AUT(\mathbb{P}^2)

En el caso de \mathbb{P}^1 , existe una clasificación de sus automorfismos, según la dinámica de estos, en elípticos (e) (que incluye el automorfismo identidad), hiperbólicos (h) o parabólicos (p).

Cabe mencionar que tanto en el caso e como en el h el ejemplo canónico es

$$(z, w) \rightarrow (az, w)$$

$$\frac{z}{w} \rightarrow a \frac{z}{w}$$

con la diferencia que en el caso e , $|a| = 1$ y en caso h , $|a| \neq 1$.

Ambos casos tienen 2 puntos fijos pero en el caso e son puntos fijos indiferentes, mientras que en el caso h uno de los puntos fijos es atractor y el otro repulsor.

El ejemplo canónico del caso p es

$$(z, w) \rightarrow (z + bw, w)$$

$$\frac{z}{w} \rightarrow \frac{z}{w} + b$$

En este caso hay un solo punto fijo, que es repulsor en unas direcciones y atractor en otras. El automorfismo identidad podemos clasificarlo como de tipo e o p , pero durante este trabajo lo consideraremos de tipo e .

Ahora vamos a hacer una clasificación de los automorfismos de \mathbb{P}^2 análoga a la anteriormente mencionada:

Vamos a ir separando poco a poco los distintos tipos. Primero hacemos una clasificación según la dinámica de las rectas invariantes que tiene el automorfismo. Vamos a separar los automorfismos que tienen 3 rectas invariantes no concurrentes de los que tienen todas sus rectas invariantes concurrentes. Es decir, diferenciando los automorfismos tales que existe una recta R tal que para todo punto fijo x de f , $x \in R$ de los que no cumplen con esta característica.

A los que tienen 3 rectas invariantes no concurrentes los vamos a clasificar por su comportamiento en éstas. Obviamente en ninguna de estas rectas el comportamiento es parabólico, ya que todas tienen al menos 2 puntos fijos (las intersecciones con las otras dos rectas).

En los siguientes resultados se va a suponer que las 3 rectas son no concurrentes.

2.3.1 Lema: Sean R_0, R_1 y R_2 rectas invariantes de f tales que f actúa hiperbólicamente en R_1 y elípticamente en R_2 . Entonces f actúa hiperbólicamente en R_0 .

Demostración: Por conjugación podemos suponer que $R_0 = R_x, R_1 = R_{w=0}$ y $R_2 = R_{z=0}$ y que f se comporta de la siguiente manera:

$$f(z, 0, t) = (az, 0, t)$$

con $|a| \neq 1$,

$$f(0, w, t) = (0, bw, t)$$

con $|b| = 1$.

Como ya vimos esto nos garantiza que $f(z, w, t) = (az, bw, t)$, entonces si $t = 0$

$$\frac{z}{w} \rightarrow \frac{az}{bw}$$

$$\xi \rightarrow \frac{a}{b} \xi$$

y dado que $|a| \neq 1$ y $|b| = 1$ entonces $|\frac{a}{b}| \neq 1$ y por lo tanto el comportamiento en R_x es hiperbólico. Esto nos va a determinar nuestro primer tipo de comportamiento:

TIPO H: Tiene 3 rectas invariantes no concurrentes de las cuales en 2 la dinámica es hiperbólica y en la tercera el comportamiento es elíptico (que incluye la identidad) o hiperbólico.

Automáticamente tenemos nuestro segundo tipo de dinámica:

TIPO E: Tiene también 3 rectas invariantes no concurrentes pero ahora el comportamiento en todas es elíptico ya que como probamos no puede haber 2 elípticas y una hiperbólica.

Estos dos tipos nos clasifican el comportamiento de todos los automorfismos que tienen 3

rectas invariantes y claramente al automorfismo identidad se le clasifica como de **TIPO E**.

Ahora vamos a clasificar como **TIPO P** a los automorfismos que tiene todas sus rectas invariantes concurrentes, o lo que es lo mismo todos sus puntos fijos contenidos en una recta.

Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que todas las rectas que deja invariantes son concurrentes. Por conjugación podemos suponer que una de estas es R_∞ .

Si deja la recta al infinito invariante entonces podemos suponer que

$$f(z, w, t) = (az + bw + ct, dz + ew + gt, t)$$

es decir, que su matriz asociada es $M_f = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por lo que en $t = 0$

$$\frac{z}{w} \rightarrow \frac{az + bw}{dz + ew} = \frac{a\frac{z}{w} + b}{d\frac{z}{w} + e}$$

$$\xi \rightarrow \frac{a\xi + b}{d\xi + e}$$

y esta transformación puede ser elíptica, hiperbólica o parabólica.

Caso I) hiperbólico: $\xi \rightarrow A\xi$ con $|A| \neq 1$

Caso II) elíptico: $\xi \rightarrow A\xi$ con $|A| = 1$

Caso III) parabólico: $\xi \rightarrow \xi + B$

Por el lema 2.2.15 podemos suponer que en los casos I y II f es conjugada a:

$$\Psi(z, w, t) = (Az + ct, Bw + gt, t)$$

por lo que cuando $t = 0$

$$(z, w, t) \rightarrow (Az, Bw, 0)$$

$$\frac{z}{w} \rightarrow \frac{Az}{Bw} = \tilde{A} \frac{z}{w}$$

$$\xi \rightarrow \tilde{A}\xi$$

Obviamente estamos suponiendo que $c \neq 0$ o que $g \neq 0$ ya que de otra manera estaríamos en el caso anterior.

En el caso III podemos suponer que f es conjugada a:

$$\Psi(z, w, t) = (Az + Bw + ct, Aw + gt, t)$$

por lo que en $t = 0$,

$$(z, w, 0) \rightarrow (Az + Bw, Aw, 0)$$

$$\frac{z}{w} \rightarrow \frac{Az + Bw}{Aw} = \frac{A\frac{z}{w} + B}{A} = \frac{z}{w} + \frac{B}{A} = \frac{z}{w} + \tilde{B}$$

$$\xi \rightarrow \xi + \tilde{B}$$

Vamos a estudiar primero que pasa en los casos I y II y después estudiaremos el caso III:

CASOS I Y II: $\xi \rightarrow \tilde{A}\xi$.

Lo que tenemos que analizar es lo que ocurre en la parte en la que $t \neq 0$:

$$(z, w, 1) \rightarrow (Az + c, Bw + g, 1)$$

Es claro que si existe una recta invariante en la parte finita, su intersección con la recta al infinito sería fija. Como estamos suponiendo que los únicos puntos fijos de R_x son $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$ entonces si existe una recta invariante en la parte finita, ésta tendría que pasar por alguno de estos puntos, es decir rectas con z constante o con w constante.

Spongamos un punto fijo $p = (z_0, w_0, 1)$ en la parte finita, entonces las rectas (z_0, w, t) y (z, w_0, t) serían rectas invariantes, por lo que tendríamos 3 rectas invariantes no concurrentes y entonces Ψ sería un automorfismo de TIPO H o de TIPO E. Es decir que no puede haber puntos fijos tales que $t \neq 0$.

Vamos a ver para qué casos hay puntos fijos en la parte finita; es decir, para cuales A, B las siguientes ecuaciones tiene solución:

$$Az + c = z \Rightarrow z = \frac{c}{1-A}$$

$$Bw + g = w \Rightarrow w = \frac{g}{1-B}$$

lo que implicaría que si A y B son distintos de 1 entonces en la parte finita hay un único punto fijo $(\frac{c}{1-A}, \frac{g}{1-B}, 1)$ y al menos dos rectas invariantes ($z = \frac{c}{1-A}$ y $w = \frac{g}{1-B}$) lo que sería una contradicción.

Entonces $A = 1$ o $B = 1$.

Si $B = 1$ entonces no hay puntos fijos y hay al menos una recta invariante en la parte finita que sería $z = \frac{c}{1-A}$ en la que la dinámica es parabólica.

El caso en el que $A = 1$, tampoco hay puntos fijos y hay al menos una recta invariante en la parte finita que sería la recta $w = \frac{g}{1-B}$ en la que la dinámica es parabólica.

Si $A = 1$ y $B = 1$ entonces también hay una recta invariante: la determinada por el origen y por el punto $(c, g, 1)$.

es decir que Ψ sólo puede ser de alguna de estas formas

$$\Psi(z, w, t) = (Az + ct, w + gt, t) \quad A \neq 1$$

$$\Psi(z, w, t) = (z + ct, Bw + gt, t) \quad B \neq 1$$

$$\Psi(z, w, t) = (z + ct, w + gt, t)$$

Claramente los dos primeros casos son equivalentes, por lo que podemos analizar sólo uno.

$$\Psi(z, w, t) = (Az + ct, w + gt, t) \quad A \neq 1$$

En este caso los únicos puntos fijos son $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$ y en la recta al infinito actúa elípticamente si $|A| = 1$ (Caso II) o hiperbólicamente si $|A| \neq 1$ (Caso I).

Como por el punto $(1, 0, 0)$ sólo pasa una línea invariante, es claro que $(d\Pi)\Psi(1, 0, 0)$ actúa parabólicamente.

Calculemos $(d\Pi)\Psi(0, 1, 0)$. Como $\Psi(z_0, w, 1) = (Az_0 + c, w + g, 1)$ entonces a una recta con $z = z_0$ la manda a una recta con $z = Az_0 + c$ es decir

$$\left(d\Pi\right)\Psi(0, 1, 0)(R_z) = (R_{Az+c})$$

como $A \neq 1$, entonces $(d\Pi)\Psi(0, 1, 0)$ nunca es la identidad y por lo tanto sólo hay dos rectas invariantes. El comportamiento de $(d\Pi)\Psi(0, 1, 0)$ en el caso I es hiperbólico y en el caso II es elíptico.

En el caso I faltaría estudiar los casos en el que $|A| \leq 1$ y en el que $|A| \geq 1$.

Si $|A| \leq 1$ entonces en R_α el punto atractor es el $(0, 0, 1)$ y en este caso el punto atractor de $(d\Pi)\Psi(0, 1, 0)$ es $R_{\frac{c}{1-A}}$ por lo que las rectas que pasan por el punto $(0, 1, 0)$ van a tender a la recta con $z = \frac{c}{1-A}$ salvo R_α que es una recta fija repulsora. En la recta invariante atractora el automorfismo actúa parabólicamente y por lo tanto $(0, 1, 0)$ es atractor en una dirección y repulsor en otra.

Si $|A| \geq 1$ el punto atractor de R_α es el punto $(1, 0, 0)$ y por lo tanto las rectas que pasan por $(0, 1, 0)$ van a tender a R_α y salvo la recta con $z = \frac{c}{1-A}$ que es una recta fija repulsora.

Nos queda por estudiar es el caso en el que

$$\Psi(z, w, t) = (z + ct, w + gt, t)$$

es decir cuando $A = 1$ y $B = 1$. En este caso, el automorfismo se comporta como la identidad en R_α ya que si $t = 0$

$$(z, w, 0) \rightarrow (z, w, 0)$$

y en este caso todas las rectas que contienen al punto $(c, g, 0)$ son invariantes, y por lo tanto

$$(d \prod) \Psi(c, g, 0) = I$$

En este caso el punto $(c, g, 0)$ es un punto fijo que es atractor en unas direcciones y repulsor en otras.

Esto prueba que tanto en el caso I como en el II siempre hay al menos 2 rectas invariantes, una parabólica y la otra hiperbólica (caso I) o elíptica (caso II), es decir, que en estos dos casos hay 2 puntos fijos.

CASO III) Análogamente al caso anterior vamos a buscar puntos fijos que son la solución a las ecuaciones

$$\begin{aligned} Az + Bw + c &= z \\ Aw + g &= w \Rightarrow w = \frac{g}{1-A} \end{aligned}$$

Si $A = 1$ no hay puntos fijos y si $A \neq 1$ entonces hay un punto fijo en la parte finita

$$\left(\frac{c + B \frac{g}{1-A}}{1-A}, \frac{g}{1-A}, 1 \right)$$

En este caso hay una recta invariante con 2 puntos fijos por lo que podríamos llevarlo al caso I o al II.

Por lo tanto $A = 1$ y entonces el único punto fijo está en la recta al infinito.

Si $g = 0$ entonces f dejaría invariantes todas las rectas con w constante y en particular en la recta $w = \frac{c}{B}$, y f sería la identidad, por lo que estaríamos en el caso anterior.

Entonces el caso III se reduce al caso

$$(z, w, t) \rightarrow (z + Bw + ct, w + gt, t)$$

es decir que su matriz asociada es de la forma

$$M_{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & B & c \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en donde $g \neq 0$.

Como el punto $y = (1, 0, 0)$ es el único punto fijo, si existiera otra recta invariante, ésta tendría que contener a y : es decir, tendría que ser una recta con w constante.

Como $g \neq 0$, entonces $w \neq w + gt$ si $t \neq 0$ y por lo tanto no existe ninguna recta invariante

diferente de la recta al infinito.

Resumiendo: Si un automorfismo f tiene todas sus rectas invariantes concurrentes entonces hay tres casos :

1) f tiene dos puntos fijos, y en la recta R que los contiene la dinámica es hiperbólica. La derivada proyectiva en uno de estos puntos es parabólica, es decir R es la única recta invariante que pasa por éste. Por el otro punto pasa otra única recta invariante, la cual tiene una dinámica parabólica.

2) f tiene al menos dos puntos fijos, y en la recta R que los contiene la dinámica es elíptica. Si la dinámica en R es distinta de la identidad entonces f tiene exactamente 2 puntos fijos. La derivada proyectiva en uno de estos puntos es parabólica, es decir R es la única recta invariante que pasa por éste. Por el otro punto pasa otra única otra recta invariante, la cual tiene una dinámica parabólica.

Si la dinámica en la R es la identidad, entonces existe un punto de R en el cual la derivada proyectiva es la identidad y por lo tanto todas las rectas que lo contienen son invariante. En todos los demás puntos de R la derivada proyectiva es parabólica; es decir, R es la única recta invariante que pasa por éstos.

3) f tiene un único punto fijo y una única recta invariante. Las matrices que representan este último caso, son de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & B & c \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y forman un grupo llamado el Grupo de Heissenberg .

A cada una de estas matrices le podemos asociar un punto en \mathbb{R}^3 , el (B, c, g) , y el producto de matrices induce un producto en \mathbb{R}^3 distinto del canónico:

$$(\alpha, \beta, \gamma) * (\alpha', \beta', \gamma') = (\alpha + \alpha', \beta + \alpha', \gamma + \beta' + \gamma')$$

lo que muestra que \mathbb{R}^3 tiene más de una estructura de grupo.

2.3.2 Corolario: *es un automorfismo con sólo un punto fijo $p \Leftrightarrow$ Solo hay una recta invariante.*

Demostración: La demostración es directa del análisis que acabamos de hacer. ■

Después de este análisis, queda demostrado el teorema principal de este trabajo:

2.3.3 Teorema: Sea f un automorfismo de \mathbb{P}^2 . Entonces f es de alguno de estos tipos

$$\text{TIPO H } \left\{ \begin{array}{c} 3h \\ 2h \text{ y } 1e \end{array} \right\}$$

TIPO E {3e}

$$\text{TIPO P } \left\{ \begin{array}{c} 1p \\ 1p \text{ y } 1h \\ 1p \text{ y } 1e \end{array} \right\}$$

La dinámica alrededor de los puntos fijos puede variar en automorfismos del mismo tipo según si la norma de los escalares es mayor o menor que 1, según si el ángulo de rotación es racional o no y según la derivada de éstos en los puntos fijos. A continuación vamos a estudiar con atención algunos ejemplos representativos de los distintos tipos de automorfismos:

2.2.4 Ejemplos:

$$1) f(z, w, t) = (w, z, t)$$

En este caso hay 3 rectas invariantes: $R_1 = (z, z, t)$, $R_2 = (z, -z, t)$ y $R_3 = (z, w, 0)$. En R_1 , f es la función identidad por lo que no sólo es invariante, es fija. En R_2 , f manda z en $-z$, es decir, como un automorfismo elíptico de orden 2 y finalmente en R_3 , f manda z en $\frac{1}{z}$ lo que también es un automorfismo elíptico de orden 2. Es claro que esta función es una involución holomorfa, ya que al cuadrado es la identidad. Obviamente es un automorfismo de **TIPO E**, de orden 2, por lo que sus puntos fijos son indiferentes.

$$2) f(z, w, t) = (z + w, w, t)$$

En este caso hay una infinidad de rectas invariantes: $R_1 = (z, w, 0)$; $R_2 = (z, 0, t)$ y todas las rectas con w constante. En R_1 , f manda z en $z + 1$ por lo que su único punto fijo es el $(1, 0, 0)$, que es un punto parabólico. En R_2 la función es la identidad. En las rectas con w constante el comportamiento de f es parabólico y todo punto de \mathbb{P}^2 que no pertenezca a R_2 tiende al punto fijo $(1, 0, 0)$. Este automorfismo es de **TIPO P** (1p y 1e).

Claramente su derivada en el punto fijo $(1, 0, 0)$ es la identidad.

$$3) f(z, w, t) = (2(z + w), 2w, t)$$

En este caso la dinámica de la recta al infinito es exactamente la misma del caso anterior. Aquí el único otro punto fijo de la parte finita es el origen. La única otra recta invariante sería la recta $w = 0$ en la que f tiene un comportamiento hiperbólico y todas las rectas que pasan por el origen se van a ir pegando a ésta. Todos los puntos excepto el origen tienden al punto $(1, 0, 0)$. En este caso la derivada de f en este punto es hiperbólica en donde la recta atractora es la recta al infinito. Este automorfismo es de **TIPO P** (1p y 1h).

$$4) f(z, w, t) = (a(z + w), aw, t) \text{ con } |a| = 1$$

Este caso es un ejemplo de un automorfismo de \mathbb{P}^2 de **TIPO P** (1p y 1e) que sólo tiene 2 rectas invariantes. Los puntos fijos y las rectas invariantes son los mismos que en el caso anterior, pero la dinámica de estos es diferente. Los puntos fijos son indiferentes y la dinámica de la recta $w = 0$ es elíptica. La derivada de f en $(1, 0, 0)$ es elíptica. Este automorfismo es de orden finito si el argumento de a es racional. En este caso todos los puntos serían periódicos con el mismo periodo excepto los puntos fijos.

$$5) f(z, w, t) \rightarrow (z + w + t, w + t, t)$$

En este caso f tiene un único punto fijo $(1, 0, 0)$ y la única recta invariante es la recta al infinito. Claramente este es un ejemplo de un automorfismo de **TIPO P** (1 p).

CAPITULO III

INVERSIONES ANTIHOLOMORFAS DE \mathbb{P}^2

3.1 INVERSIONES ANTIHOLOMORFAS DE \mathbb{P}^2

Guiándonos otra vez en la teoría de los automorfismos de \mathbb{P}^1 , en la que se garantiza que cualquiera de éstos puede ser generado por la composición de 2 o 4 inversiones, surge naturalmente el interés por las inversiones antiholomorfas en \mathbb{P}^2 .

En \mathbb{P}^1 la inversión canónica es el antiautomorfismo i que manda z en $\frac{1}{\bar{z}}$:

$$\begin{aligned} i(z, w) &= (\bar{w}, \bar{z}) \\ \left(\frac{z}{w}, 1\right) &\leftrightarrow \left(\frac{\bar{w}}{\bar{z}}, 1\right) \\ (\xi, 1) &\rightarrow \left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) \\ (1, 0) &\leftrightarrow (0, 1) \end{aligned}$$

aunque la simple conjugación también es una inversión con respecto a \mathbb{R} .

$$\sigma(z, w) \rightarrow (\bar{z}, \bar{w})$$

de hecho

$$i = g \circ \sigma$$

en donde $g(z, w) = (w, z) \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$

Para definir la inversión canónica i en \mathbb{P}^2 vamos a pedir que ésta se comporte en la línea al infinito como la inversión canónica de \mathbb{P}^1 :

$$(z, w, 0) \rightarrow (\bar{w}, \bar{z}, 0)$$

$$\frac{z}{w} \rightarrow \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$$

$$\xi \rightarrow \frac{1}{\bar{\xi}}$$

Generalizando a todo \mathbb{P}^2 definimos:

3.1.1 **Definición:** La inversión canónica de P^2 queda definida como:

$$\dot{\mathbf{i}}(z, w, t) = (\bar{w}, \bar{z}, \bar{t}).$$

Y la conjugación en P^2 sería:

$$\rho(z, w, t) = (\bar{z}, \bar{w}, \bar{t})$$

De hecho

$$\dot{\mathbf{i}} = f \circ \rho$$

en donde $f \in \text{Aut}(P^2)$

$$f(z, w, t) = (w, z, t)$$

Vamos a estudiar el comportamiento de $\dot{\mathbf{i}}$.

Lo primero que tenemos que notar es que $\dot{\mathbf{i}}^2 = I$; es decir, $\dot{\mathbf{i}}$ es una involución antiholomorfa.

$$\dot{\mathbf{i}}^2(z, w, t) = \dot{\mathbf{i}}(\dot{\mathbf{i}}(z, w, t)) = \dot{\mathbf{i}}(\bar{w}, \bar{z}, \bar{t}) = (\bar{\bar{z}}, \bar{\bar{w}}, \bar{\bar{t}}) = (z, w, t)$$

Por como construimos i , ésta deja fijo el círculo unitario C de la recta al infinito; es decir, para los puntos x

$$x = (e^{i\theta}, 1, 0) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\dot{\mathbf{i}}(x) = \dot{\mathbf{i}}(e^{i\theta}, 1, 0) = (1, e^{-i\theta}, 0) = (e^{i\theta}, 1, 0) = x$$

Otro punto fijo de $\dot{\mathbf{i}}$ es el origen

$$\dot{\mathbf{i}}(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

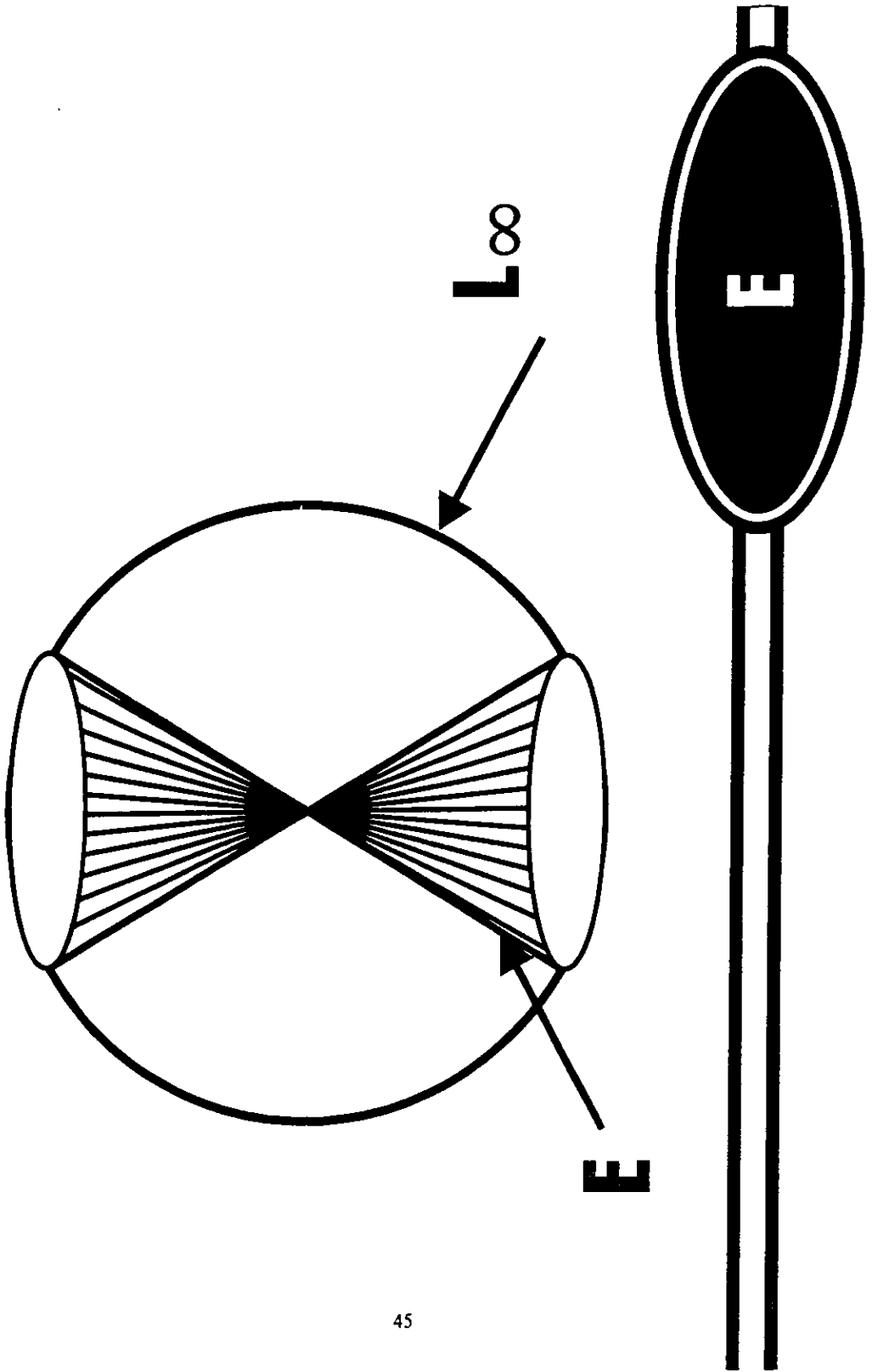
Como sabemos, la línea determinada por dos puntos fijos es una recta invariante, entonces $\dot{\mathbf{i}}$ deja invariantes a todas las rectas que unen los puntos de C con el origen $(0, 0, 1)$.

3.1.2 **Definición:** Al conjunto de todas estas rectas le vamos a llamar E , y va a ser un espejo de inversión de $\dot{\mathbf{i}}$.

Entonces

$$E_i = C \cup \{x \in P^2 \mid x = (e^{i\theta}z, z, 1) \quad \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Claramente la recta $R = (z, z, t) \in E_i$.



A cada punto de R , distinto del origen le podemos asociar un S^1 de la siguiente manera

$$(z_0, z_0, 1) \rightarrow (e^{i\theta} z_0, z_0, 1) = C_{z_0} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$(1, 1, 0) \rightarrow (e^{i\theta}, 1, 0) = C_x$$

Claramente un punto $p \in E_i \Leftrightarrow p \in C_{z_0} \cup (0, 0, 1)$ para algún $z_0 \in \mathbb{P}^1$

$$E_i = \left(\bigcup_{z \in \mathbb{P}^1} C_z \right) \cup (0, 0, 1)$$

y $C_z \cap C_w = \emptyset$ si $z \neq w$.

Es decir que por cada punto de R , excepto por el $(0, 0, 1)$ pasa un S^1 . Es decir

$$E_i = S^1 \otimes S^2$$

en el que un S^1 ha sido colapsado a un punto. Es decir, E_i es una variedad de tres dimensiones, la cual tiene como frontera un $S^1 \otimes S^1$ con un S^1 colapsado; es decir, un toro con un S^1 colapsado a un punto.

Hay que notar que E_i no es el único cono invariante, de hecho hay una infinidad de conos invariantes. Esto es claro ya que en cada recta R de E_i , i actúa como una inversión antiholomorfa de \mathbb{P}^1 , lo que implica que deja un S^1 fijo y por lo tanto dado cualquier punto fijo $x \in R$ la unión de las rectas generadas por el S^1 fijo de R y por x es un cono de inversión que se comporta exactamente igual que E_i .

3.1.3 Definición: Llamamos $intE_i$ al conjunto de puntos x tales que la recta que contiene a x y a $(0, 0, 1)$ intersecta a R_x en un punto del interior de C . Es decir, los puntos (z, w, t) para los que

$$\left| \frac{z}{w} \right| \leq 1$$

Análogamente llamamos $extE_i$ a los puntos (z, w, t) tales que

$$\left| \frac{z}{w} \right| \geq 1$$

Por definición un punto $(z, w, t) \in E_i$ si y solamente si

$$\left| \frac{z}{w} \right| = 1$$

Por como construimos E_i , éste separa a nuestro espacio en tres partes: El interior de E_i ($intE_i$), el exterior de E_i ($extE_i$), y E_i . Al decir que E_i separa a \mathbb{P}^2 nos referimos a que dado un punto $x \in intE_i$ y otro punto $y \in extE_i$, cualquier trayectoria que una x con y intersecta a E_i , que es el espejo de inversión de \hat{I} ya que como veremos \hat{I} manda $intE_i$ a $extE_i$ y

viceversa.

$$\text{int}E_i \leftrightarrow \overline{\text{ext}E_i}$$

3.1.4 **Proposición:** $\dot{i}(\text{ext}E_i) = \text{int}E_i$, y viceversa

Demostración: Sea $p = (z_0, w_0, 0)$ en el cual

$$\left| \frac{z_0}{w_0} \right| \neq 1$$

Es decir un punto de $\text{ext}E_i$. Calculemos la acción de \dot{i} en p

$$\dot{i}(z_0, w_0, 0) = (\overline{w_0}, \overline{z_0}, 0)$$

y por lo tanto está en $\text{int}E_i$, ya que

$$\left| \frac{\overline{w_0}}{\overline{z_0}} \right| = \left| \frac{w_0}{z_0} \right| \neq 1$$

Análogamente si $p \in \text{int}E_i$, entonces $\dot{i}(p) \in \text{ext}E_i$.

Con esto demostramos la proposición. ■

Claramente si $p \in R$ una línea que pasa por el origen, tal que $R \cap R_\alpha = x$ entonces

$$\dot{i}(p) \in \dot{i}(R)$$

que es una línea tal que $\dot{i}(R) \cap R_\alpha = i(x)$.

En particular la recta $z = 0$ va a dar a la recta $w = 0$.

Sea R una recta que contenga al punto $(0, 1, 0)$, es decir una recta con z constante.

Supongamos $z = z_0$.

$$R = (z_0, w, t)$$

Si calculamos $i(R)$

$$\dot{i}(R) = \dot{i}(z_0, w, t) = (\overline{w}, \overline{z_0}, \overline{t})$$

podemos constatar que $i(R)$ es una recta con w constante $w = \overline{z_0}$.

Estudiemos ahora el comportamiento de \dot{i} en las rectas que definen a E_i ; es decir, en las rectas que son de la forma $(e^{i\theta}z, z, t)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. Sea $R_{\theta_0} = (e^{i\theta_0}z, z, t)$ la recta asociada θ_0 .

Como sabemos que $R_{\theta_0} \cap R_\alpha$ es un punto fijo. Analizemos su comportamiento en la parte finita

$$(e^{i\theta_0}z, z, 1) \mapsto (\overline{z}, e^{-i\theta_0}\overline{z}, 1) = (e^{i\theta_0}(e^{-i\theta_0}\overline{z}), (e^{-i\theta_0}\overline{z}), 1)$$

con lo que vemos otra vez, que es una recta invariante en la que la acción de \dot{I} , es una rotación de argumento θ_0 seguido de una conjugación. Es decir que el ángulo de la rotación en una recta $R \in E_i$ depende del argumento de su intersección con R_x . Podemos notar que la recta real, con ángulo $-\frac{\theta_0}{2}$ con respecto al eje real, es fija. Esta línea también depende de θ_0 . Es decir, en cada una de las rectas complejas que determinan E_i , una línea real (o S^1) queda fija. Es decir hay un cono real fijo, al cual llamaremos $\mathbb{R}E_i$. Los puntos de $\mathbb{R}E_i$ son los únicos puntos fijos de i . Es decir

$$\dot{I}(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}E_i$$

Cuando llamamos a E_i "un" espejo de inversión, queremos decir que para cada una de estas líneas, existe otro espejo de inversión. Es decir, si l es una línea real de $\mathbb{R}E_i$, y si tomamos un punto $x \in \mathbb{R}E_i$; es decir, punto fijo de la inversión, $x \notin l$, el cono $E_{x,l}$ generado por x y por l , también es un cono invariante. En cada una de las rectas que generan este cono también hay un S^1 fijo, el cual está contenido en $\mathbb{R}E_i$. Es decir que para cualesquiera dos espejos de inversión de \dot{I} , E y E' ,

$$E \cap E' = \mathbb{R}E_i$$

Ahora vamos a definir una inversión de \mathbb{P}^2 en general.

3.1.5 Definición: Una inversión de \mathbb{P}^2 es toda función de la forma $A\rho$ tal que

$$(A\rho)^2 = Id$$

y donde $A \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, y ρ es la conjugación entrada por entrada: $\rho(z, w, t) = (\bar{z}, \bar{w}, \bar{t})$

Como ya habíamos visto

$$\dot{I} = f \circ \rho$$

donde $f(z, w, t) = (w, z, t)$.

Lo primero que hay que notar es que por como está definida ρ , $\rho^2 = Id$.

3.1.6 Lema: Si $A\rho$ es una inversión de \mathbb{P}^2 , entonces se cumple que

$$A\rho = \rho\bar{A}$$

Demostración:

$$A(z, w, t) = (a_1z + b_1w + c_1t, a_2z + b_2w + c_2t, a_3z + b_3w + c_3t)$$

entonces

$$A\rho(z, w, t) = A(\bar{z}, \bar{w}, \bar{t}) = (a_1\bar{z} + b_1\bar{w} + c_1\bar{t}, a_2\bar{z} + b_2\bar{w} + c_2\bar{t}, a_3\bar{z} + b_3\bar{w} + c_3\bar{t})$$

mientras que

$$\begin{aligned}\rho\bar{A}(z, w, t) &= \sigma(\bar{a}_1z + \bar{b}_1w + \bar{c}_1t, \bar{a}_2z + \bar{b}_2w + \bar{c}_2t, \bar{a}_3z + \bar{b}_3w + \bar{c}_3t) \\ &= \left(\overline{\bar{a}_1z + \bar{b}_1w + \bar{c}_1t}, \overline{\bar{a}_2z + \bar{b}_2w + \bar{c}_2t}, \overline{\bar{a}_3z + \bar{b}_3w + \bar{c}_3t} \right) \\ &= (a_1z + b_1w + c_1t, a_2z + b_2w + c_2t, a_3z + b_3w + c_3t) = A\sigma(z, w, t)\end{aligned}$$

De estas dos propiedades se deduce que el siguiente lema

3.1.7 Lema: Si $A\rho$ es una inversión de \mathbb{P}^2 entonces

$$Id = A\rho A\rho = A\bar{A}\rho^2 = A\bar{A}$$

y por lo tanto, si $A\rho$ y $B\rho$ son dos inversiones de \mathbb{P}^2 .

$$A\rho \circ B\rho = A\rho B\bar{B} = A\bar{B}$$

Esto implica que

3.1.8 Teorema: Dadas dos inversiones cualesquiera, su composición es un automorfismo. Es más, dado un número par de inversiones, su composición es un automorfismo.

Faltaría ver si todo automorfismo, se puede descomponer como composición de inversiones. Esto sería lo mismo que demostrar que dado cualquier automorfismo, éste se puede descomponer en un número par de automorfismos A_i tales que $A_i\bar{A}_i = Id$.

Vamos a detenemos a estudiar el comportamiento de σ . Notemos que

$$\rho(z, w, 0) \rightarrow (z, \bar{w}, 0)$$

es decir que ρ deja invariante la línea al infinito, en la que fija toda la recta real. También fija al origen, por lo que podemos deducir que deja invariantes todas las rectas que unen al origen con la recta real de la línea al infinito; es decir, todas las rectas de pendiente real que cruzan por el origen:

$$\rho(z, rz, 1) \rightarrow (z, r\bar{z}, 1)$$

con $r \in \mathbb{R}$.

Es decir ρ actúa en las rectas de pendiente real como una reflexión en el eje real de la recta. Sea E_ρ cono de rectas que unen el origen con el eje real de la recta al infinito.

$$E_\rho = \{(z, rz, t) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

A este cono lo vamos a llamar nuestro espejo de inversión E_σ .

E_ρ divide a \mathbb{P}^2 en dos partes:

$$M = \left\{ (z, w, t) \mid \frac{z}{w} = x + iy, y \leq 0 \right\}$$

$$N = \left\{ (z, w, t) \mid \frac{z}{w} = x + iy, y \geq 0 \right\}$$

Claramente $M \cup N \cup E_\rho = \mathbb{P}^2$.

Es claro que $\rho(M) = N$ y viceversa., ya que si la parte imaginaria de $\frac{z}{w}$ es menor que 0, entonces la parte imaginaria de $\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ es mayor que 0 y viceversa.

Tomemos un punto x de \mathbb{P}^2 que no pertenezca a E_ρ . Este está contenido en una única recta R que pasa por el origen. De hecho, como en toda recta por el origen $\frac{z}{w}$ es fijo, entonces R está contenida en N o en M , salvo por el origen.

Sea p tal que

$$p = R \cap R_x$$

Si nos fijamos en $\rho(p)$ va a estar del lado "contrario" de E_ρ del que se encuentra p , y como ρ manda rectas en rectas y el origen es fijo, entonces $\rho(R)$ es una recta por el origen que pasa por $\rho(p)$ por lo que toda la recta R se va a encontrar del lado contrario de E_ρ con respecto a su imagen, en particular el punto x .

Sea L una recta con $z = z_0$ constante, entonces $\sigma(L)$ es una recta con z constante igual a \bar{z}_0 . Es decir que el conjunto de rectas con z constante es invariante bajo ρ . Análogamente sucede para las rectas con w constante y claramente con todo conjunto de rectas que tengan pendiente constante real.

3.1.10. Proposición : *Toda inversión A_ρ deja invariante un cono E_{A_ρ} , de dimensión 3 real que actúa como espejo de inversión; es decir que A_ρ mapea la parte de adentro de E_{A_ρ} en lo de afuera y viceversa.*

Demostración: Sea p un punto fijo de A_ρ . Si tomamos la derivada proyectiva de A_ρ en p , ésta resulta ser una involución antiholomorfa de \mathbb{P}^1 , que por ser conjugada a la inversión canónica de \mathbb{P}^1 , deja un círculo C fijo, lo que implica que existe un cono invariante bajo A_ρ . Definimos a ese conjunto de rectas invariantes como E_{A_ρ} . Sea R una recta del cono y restringjamos A_ρ a ésta.

$$A_{\rho R} : R \rightarrow R$$

Esta función también es una involución antiholomorfa por lo que también fija un círculo C_L que contiene a p . Sea ahora R' una recta que pasa por p y que no esté contenida en E_{A_ρ} . Como $R' \notin C$, éste no es un punto fijo de la derivada proyectiva y por lo tanto su imagen $\widehat{R'}$ se encuentra al otro lado de C . Esto implica que $A_\rho(R')$ es una recta al otro lado de E_{A_ρ} . Como para todo punto s de \mathbb{P}^2 existe una única recta que pasa por s y por p entonces queda demostrado que A_ρ intercambia ambos lados de E .

CAPITULO IV

DINAMICA DE UN GRUPO DE AUTOMORFISMOS QUE DEJA INVARIANTE B^4

4.1 DEFINICION Y PROPIEDADES DE UN AUTOMORFISMO DE \mathbb{P}^2 QUE DEJA INVARIANTE B^4

Vamos a ver ahora el caso particular en el que el espejo de inversión tiene su vértice en el punto $(0, 1, 0)$, que la recta compleja invariante es la recta $w = 0$ y que el círculo de inversión sobre ésta es perpendicular a la intersección de la bola unitaria con la recta $w = 0$.

Si pensamos ahora únicamente en la bola unitaria, el espejo de inversión es la intersección de ésta con el cono, que dado que tiene su vértice en el infinito, en la parte finita, es un cilindro. ¿Cómo es esta intersección? Primero la vamos a ver topológicamente por lo que podemos suponer que nuestro círculo de inversión en $w = 0$ es una recta real que pasa por el origen, es decir, un diámetro de la circunferencia intersección de la bola con la recta $w = 0$.

La intersección del cono generado por este diámetro y la bola unitaria es topológicamente equivalente a la intersección de una bola de dimensión 4 con un espacio de dimensión tres, que es una bola de dimensión tres.

Si la intersección del espejo con la recta $w = 0$ no es una recta real sino un arco de circunferencia, entonces geoméricamente la intersección del espejo de inversión con la bola unitaria es como un cuernito.

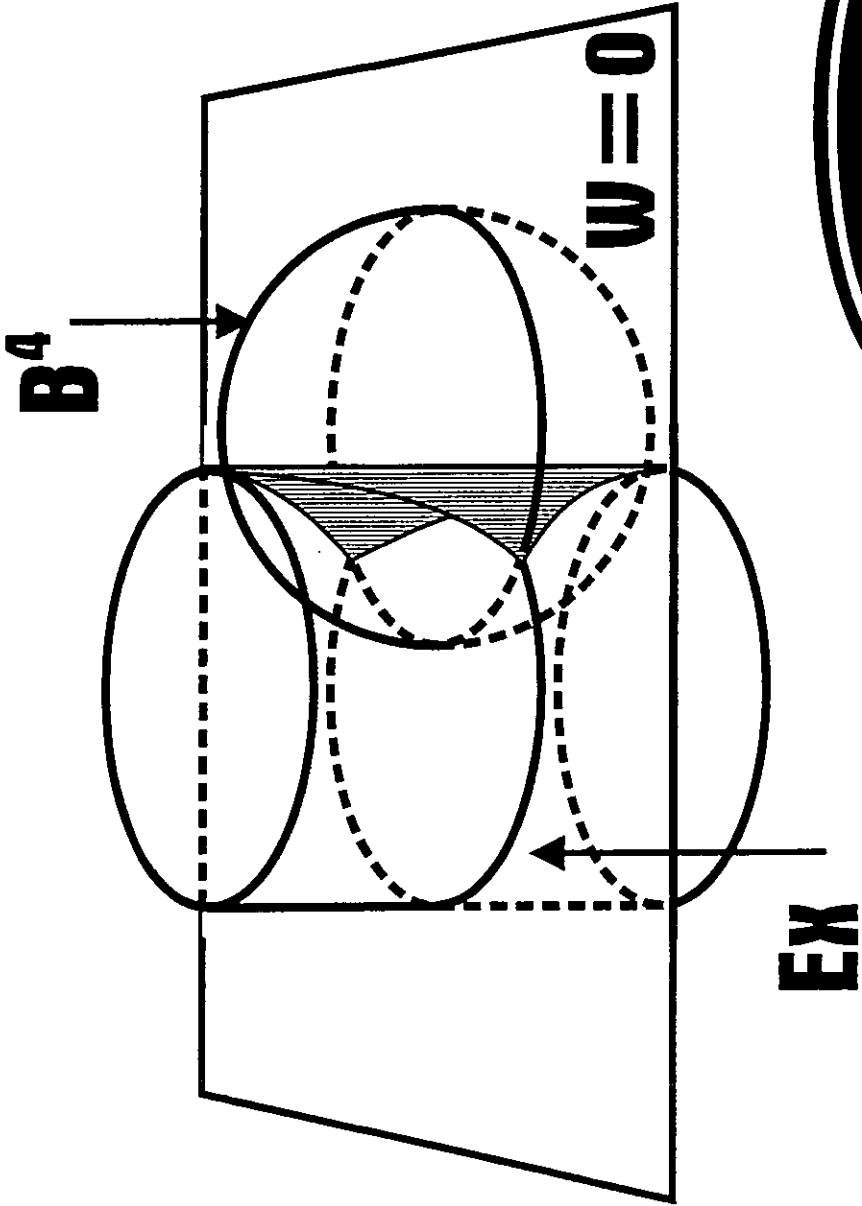
Ahora vamos a construir un grupo generado por dos automorfismos que fijan la bola unitaria B^4 , y vamos a estudiar su comportamiento.

4.1.1 Definición: Definimos como $h_{p,r} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ a la función, tal que

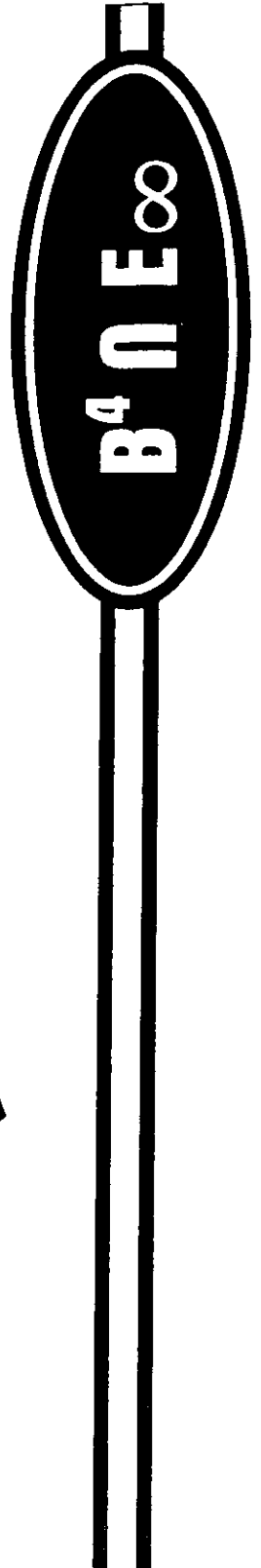
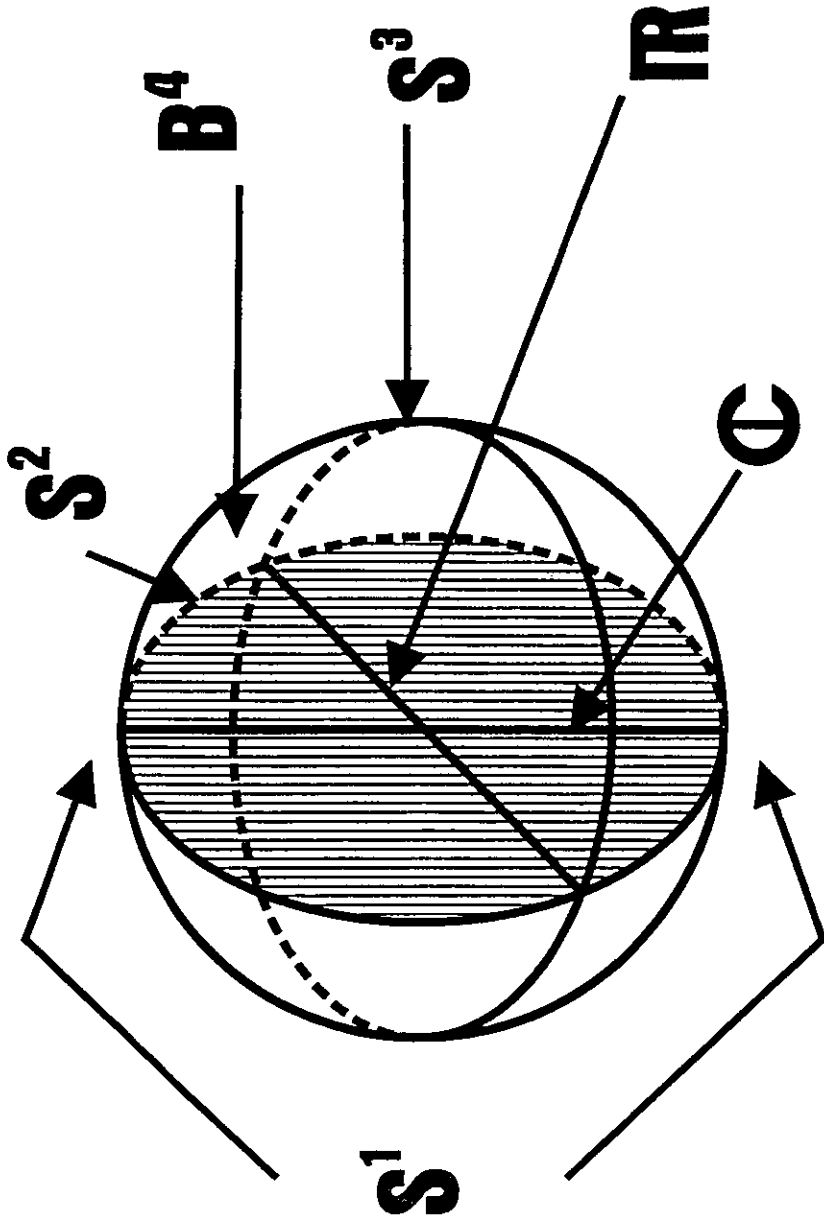
$$h_{p,r}(z, w, t) = (-z + (r^2 - p^2)\bar{t}, r\bar{w}, z + p\bar{t})$$

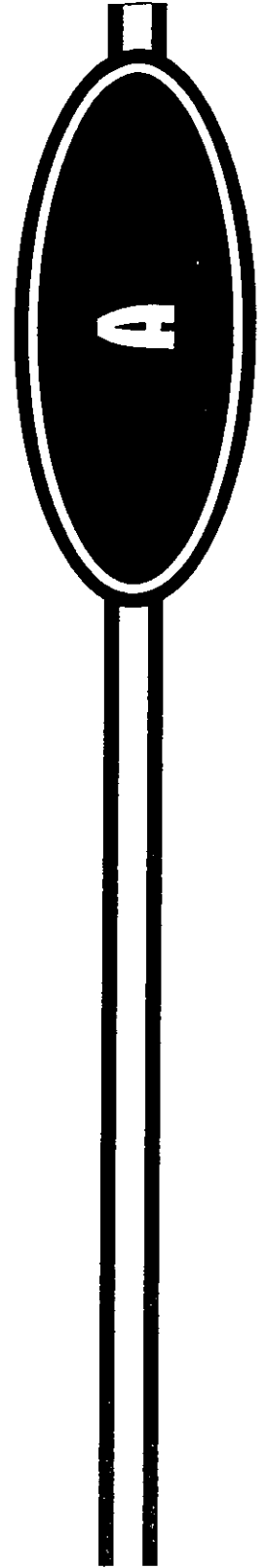
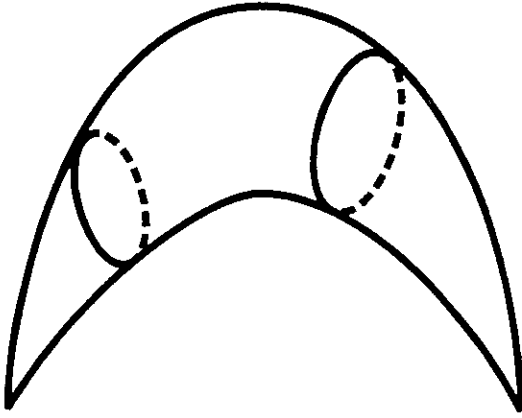
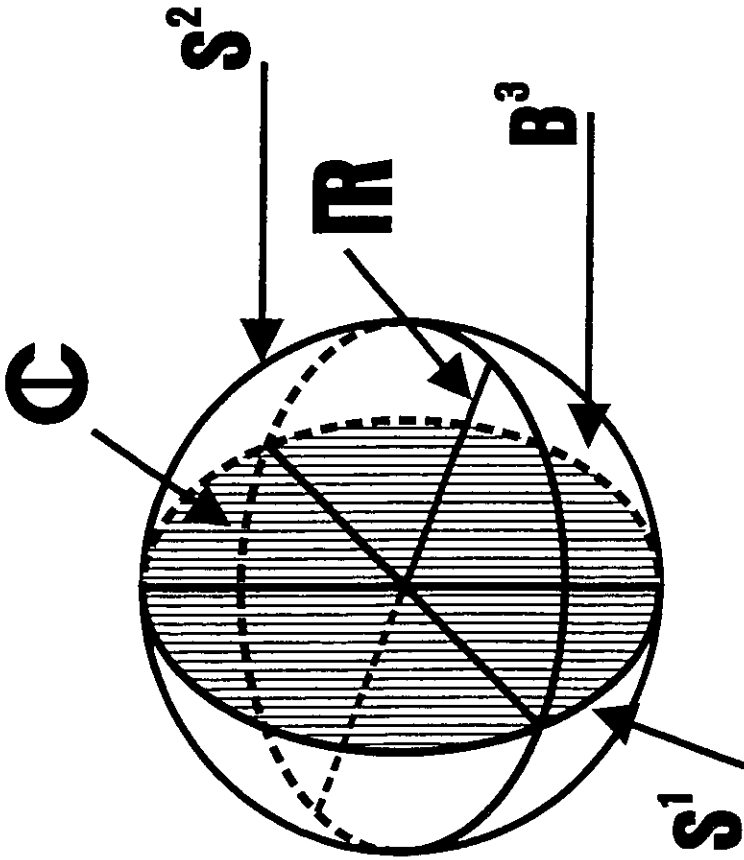
donde $p, r \in \mathbb{R}^+$.

4.1.2 Lema: $h_{p,r}$ deja invariante la recta $w = 0$. En esta recta $h_{p,r}$ se comporta como una inversión de \mathbb{P}^1 en la que el círculo $C_{p,r}$ de inversión es el círculo con centro en $(-p, 0, 1)$ y radio r .



$B^4 \cap E$





Demostración: De la definición de $h_{p,r}$, se sigue que

$$h_{p,r}(z, 0, 1) = (-zp + (r^2 - p^2)\bar{z}, 0, z + p\bar{z})$$

con lo que queda demostrado el primer punto del lema

El círculo en esta recta con centro en $(-p, 0, 1)$ queda definido por

$$C_{p,r} = \{(re^{i\theta} - p, 0, 1) \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$

Utilizando de nuevo la definición de $h_{p,r}$, se sigue que

$$\begin{aligned} h_{p,r}(re^{i\theta} - p, 0, 1) &= (-(re^{i\theta} - p)p + r^2 - p^2, 0, re^{i\theta} - p + p) \\ &= \left(\frac{-(re^{i\theta} - p)p + r^2 - p^2}{re^{i\theta}}, 0, 1 \right) \\ &= \left(\frac{-pre^{i\theta} + r^2}{re^{i\theta}}, 0, 1 \right) \\ &= (re^{i\theta} - p, 0, 1) \end{aligned}$$

para toda θ , con lo que queda demostrado que $h_{p,r}(C_{p,r}) = C_{p,r}$ siendo éste no sólo invariante sino fijo. El centro del círculo, al aplicarle $h_{p,r}$ va al punto de intersección de $w = 0$ con la recta al infinito.

$$h_{p,r}(-p, 0, 1) = (r^2, 0, 0)$$

con lo que se demuestra el lema.

Otro punto fijo de $h_{p,r}$ es el punto $(0, 1, 0)$:

$$h_{p,r}(0, 1, 0) = (0, r, 0).$$

por lo que el espejo de inversión $E_{p,r}$ queda determinado por las rectas determinadas por este punto y los puntos de $C_{p,r}$.

Que el punto $(0, 1, 0)$ sea un punto fijo nos muestra también que el conjunto de las rectas con z constante es invariante. Sea R la recta con $z = z_0$ constante $R = (z_0, w, 1)$, entonces

$$h_{p,r}(R) = (-\bar{z}_0 p + r^2 - p^2, r\bar{w}, \bar{z}_0 + p)$$

y dado que la primera coordenada depende de z únicamente, $h_{p,r}(R)$ es una recta con

$z = \frac{r^2}{\bar{z}-p} + p$ que también es constante.

En particular las rectas con $z = re^{\theta} - p$ van a ellas mismas ya que en la parte finita

$$\begin{aligned} h_{p,r}(re^{\theta} - p, w, 1) &= \left(\overline{-(re^{\theta} - p)p + (r^2 - p^2)}, r\bar{w}, \overline{(re^{\theta} - p) + p} \right) \\ &= (-pre^{-\theta} + p^2 + r^2 - p^2, r\bar{w}, re^{-\theta}) \\ &= \left(\frac{r^2 - p(re^{-\theta})}{re^{-\theta}}, \frac{r\bar{w}}{re^{-\theta}}, 1 \right) \\ &= (re^{\theta} - p, e^{\theta}\bar{w}, 1) \end{aligned}$$

por lo que en efecto fija al círculo $(re^{\theta} - p, 0, 1)$ y en las rectas generadas por los puntos de este círculo y el punto $(0, 1, 0)$, $h_{p,r}$ actúa como una conjugación seguido de una rotación.

El ángulo de rotación no es el mismo en cada una de estas rectas, ya que depende del argumento del punto del círculo que la generó: es decir la rotación en la recta con $z = re^{\theta} - p$ es exactamente θ .

4.1.3 Proposición: $h_{p,r}$ es una inversión de \mathbb{P}^2 .

Demostración: Lo único que nos falta demostrar ahora para que cumpla todos los requisitos de una inversión, es que sea una involución. Calculemos entonces: $h_{p,r}^2(z, w)$

$$\begin{aligned} h_{p,r}^2(z, w, t) &= \left(\frac{\overline{-\bar{z}p + (r^2 - p^2)\bar{t}}p + (r^2 - p^2)(z + pt)}{r^2\bar{w}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\overline{-z p + (r^2 - p^2)\bar{t}} + p(z + p\bar{t})}{-z p + (r^2 - p^2)\bar{t}} \right) \\ &= \left(\frac{zp^2 - r^2pt + p^3t + r^2z + r^2pt - zp^2 - p^3t}{r^2w}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-zp + r^2t - p^2t + zp + p^2t}{-z p + (r^2 - p^2)\bar{t}} \right) \\ &= (r^2z, r^2w, r^2t) \\ &= (z, w, t) \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado que $h_{p,r}$ es una involución de \mathbb{P}^2 con cono de inversión definido por $C_{p,r}$ y el punto $(0, 1, 0)$

• **4.1.4 Definición:** Sea

$$H = \{h_{p,r} \mid p, r \in \mathbb{R}\}$$

la familia de todas las inversiones de este tipo.

Dentro de esta familia de inversiones existen algunas con una característica particular, las que dejan invariante la bola unitaria. Como ya sabemos que todas estas dejan invariante la recta $w = 0$ y que en esta recta la inversión se comporta como una inversión de \mathbb{P}^1 en el círculo con centro en $(-p, 0, 1)$ y radio r , si queremos que $h_{p,r}$ deje invariante la bola unitaria, la restricción a la recta $w = 0$ debe dejar invariante al círculo unitario $(\{w = 0\} \cap B^4)$.

Para que una inversión de \mathbb{P}^1 deje invariante un círculo este debe de ser perpendicular al círculo de inversión, por lo que en nuestro caso $r = \sqrt{p^2 - 1}$. Claramente, para que r tenga sentido p debe ser estrictamente mayor que 1. Esta condición es necesaria y suficiente para que $w = 0 \cap B^4$ quede invariante bajo $h_{p,r}$, faltaría probar que también lo es para que todo B^4 sea invariante.

4.1.5 **Lema:** $h_{p, \sqrt{p^2-1}}$ fija B^4 para toda $p \in \mathbb{R}, p > 1$.

Demostración

$$h_{p, \sqrt{p^2-1}}(z, w, t) = (-zp - \bar{t}, (\sqrt{p^2-1})w, z + p\bar{t})$$

Sea (z, w) tal que $|z|^2 + |w|^2 = 1$, es decir un punto de la frontera de B^4 . Tenemos que demostrar que

$$|h_{p, \sqrt{p^2-1}}(z, w)| = 1$$

Veámoslo

$$\begin{aligned} |h_{p, \sqrt{p^2-1}}(z, w)|^2 &= \left| \frac{p^2-1}{z+p} - p \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{p^2-1} w}{z+p} \right|^2 \\ &= \left(\frac{p^2-1}{z+p} - p \right) \left(\frac{p^2-1}{\bar{z}+\bar{p}} - p \right) + \left(\frac{(\sqrt{p^2-1})w}{z+p} \right) \left(\frac{(\sqrt{p^2-1})\bar{w}}{\bar{z}+\bar{p}} \right) \\ &= \left(\frac{-1-zp}{z+p} \right) \left(\frac{-1-z\bar{p}}{\bar{z}+\bar{p}} \right) + \left(\frac{(\sqrt{p^2-1})w}{z+p} \right) \left(\frac{(\sqrt{p^2-1})\bar{w}}{\bar{z}+\bar{p}} \right) \\ &= \left(\frac{1+zp+zp+|z|^2 p^2}{|z|^2+\bar{z}p+zp+p^2} \right) + \left(\frac{p^2|w|^2-|w|^2}{|z|^2+\bar{z}p+zp+p^2} \right) \\ &= \left(\frac{1-|w|^2+zp+zp+p^2(|z|^2+|w|^2)}{|z|^2+\bar{z}p+zp+p^2} \right) \\ &= \frac{|z|^2+\bar{z}p+zp+p^2}{|z|^2+\bar{z}p+zp+p^2} = 1 \end{aligned}$$

Como existen puntos del interior de la bola que son punto fijos de $h_{p, \sqrt{p^2-1}}$ y sabemos que $h_{p, \sqrt{p^2-1}}$ deja invariante la frontera de la bola y manda puntos del interior en el interior entonces por la continuidad de $h_{p, \sqrt{p^2-1}}$, el interior de la bola es invariante y por lo tanto también el exterior. Con esto queda demostrado que $h_{p,r}$ deja invariante la bola unitaria $\Leftrightarrow r = \sqrt{p^2-1}$.

Con lo que queda demostrado que $h_{p,r}$ deja invariante la bola unitaria si y solamente si $r = \sqrt{p^2-1}$.

Denotaremos por h_p a $h_{p, \sqrt{p^2-1}}$.

4.1.6 **Definición:** Sea $j_{p,r}$, el automorfismo de P^2 , tal que

$$j_{p,r} = kh_{p,r}$$

donde $k(z, w, t) = (-z, \bar{w}, \bar{t})$ es decir

$$j_{p,r}(z, w, t) = (zp - (r^2 - p^2)t, \bar{w}, z + pt)$$

y sea

$$J = \{j_{p,r} \mid p, r \in \mathbb{R}\}$$

4.1.7 **Lema:** $j_{p, \sqrt{p^2-1}}$ es un automorfismo que deja invariante B^4

Demostración: Claramente si $r = \sqrt{p^2-1}$,

$$j_{p, \sqrt{p^2-1}} = (zp + t, w\sqrt{p^2-1}, z + pt)$$

entonces $j_{p, \sqrt{p^2-1}}$ es un automorfismo que deja invariante B^4 , ya que tanto h_p como k la dejan invariante. También es invariante la frontera de B^4 es decir S^3 .

De ahora en adelante denotaremos por j_p a $j_{p, \sqrt{p^2-1}}$.

4.2 DINAMICA DE j_p

4.2.1 **Proposición:** Los únicos puntos fijos de j_p son $(1, 0, 1), (-1, 0, 1), (0, 1, 0)$.

Demostración: Los puntos fijos de j_p , son los puntos para los que existe λ tal que el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución:

$$zp + t = \lambda z$$

$$\sqrt{p^2-1} w = \lambda w$$

$$z + pt = \lambda t$$

De la segunda ecuación se deduce que si $w \neq 0$, entonces $\lambda = \sqrt{p^2 - 1}$.

Entonces, si $w \neq 0$, de la primera ecuación podemos deducir que,

$z = (\lambda - p)t = (\sqrt{p^2 - 1} - p)t$, pero por la tercera ecuación, $t = (\lambda - p)z$; es decir, si $w \neq 0$,

$$z = (\sqrt{p^2 - 1} - p)^2 z$$

por lo que la única z que resuelve este sistema es la solución para toda $p > 1$ cuando $w \neq 0$ es $z = 0$, y entonces

$$(\sqrt{p^2 - 1} - p)t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Es decir si $w \neq 0$, entonces el único punto fijo es $(0, 1, 0)$.

Si $w = 0$, entonces la segunda ecuación se cumple para toda λ .

En este caso

$$\lambda = \frac{zp + t}{z}$$

por la primera ecuación, que si queremos que sea constante, entonces t tendría que ser un múltiplo complejo de z y entonces substituyendo en la tercera ecuación

$$z + pt = \frac{zp + t}{z}t$$

$$z^2 + pzt = pzt + t^2$$

$$z^2 = t^2$$

si $t = 0$, la ecuación se resuelve, si $z = 0$, pero como estamos suponiendo que $w = 0$, el punto $(0, 0, 0)$ no es un punto de \mathbb{P}^2 .

Por lo que en $t = 0$, el único punto fijo es $(0, 1, 0)$. Si $t \neq 0$, la ecuación se resuelve cuando

$$z = \pm t$$

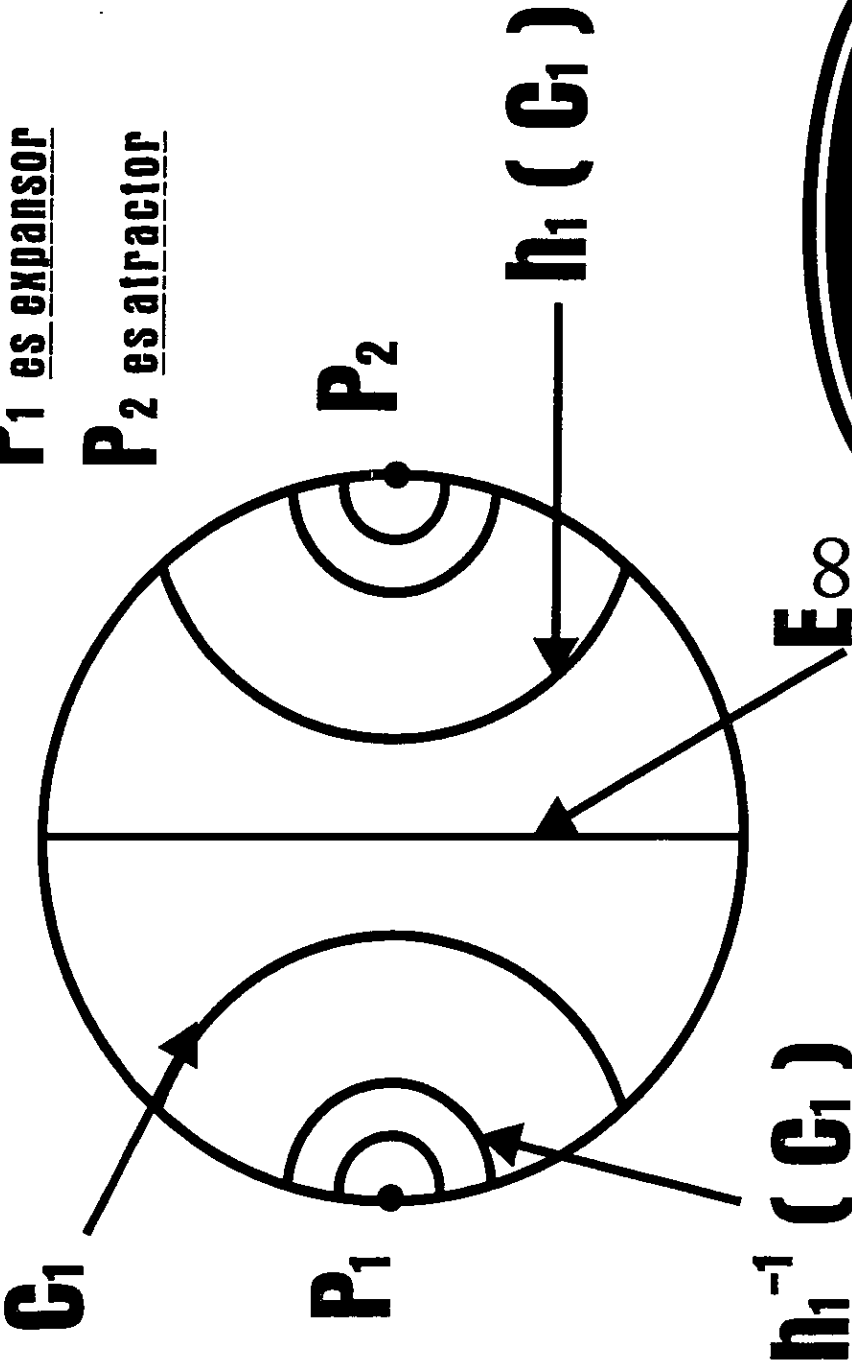
Es decir en los puntos $(1, 0, 1)$ y $(-1, 0, 1)$, con lo que queda demostrado la proposición.

4.2.2 Lema: j_p es un automorfismo de TIPO H.

Demostración: Como $j_p \mid_{w=0}$ es la composición de dos inversiones de \mathbb{P}^1 con círculos de inversión ajenos, ya que el círculo de inversión de $k \mid_{w=0}$ es el eje imaginario ($z = ix, x \in \mathbb{R}$), y por lo tanto no interseca a C_p , entonces j_p es un automorfismo de \mathbb{P}^2 que actúa hiperbólicamente en $w = 0$, que por tener un punto fijo ajeno a $w = 0$ es un automorfismo de TIPO H.

P₁ es expansor

P₂ es atractor



$h_1^{-1}(G_1)$

$h_1(G_1)$

$\langle h_1 \rangle (G_1)$

Analizemos ahora de dinámica de j_p .

Calculando j_p en el punto $(0, 0, 1)$

$$j_p(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{p}, 0, 1 \right)$$

queda claro que en $w = 0$ el punto $(1, 0, 1)$ es un punto fijo atractor y el punto $(-1, 0, 1)$ es un punto fijo repulsor.

Calculando ahora en un punto de la parte finita de la recta que determinan los puntos fijos $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ podemos determinar la dinámica de j_p en esta recta.

$$j_p(1, w, 1) = \left(1, \sqrt{\frac{p-1}{p+1}} w, 1 \right)$$

Como $1 \geq \sqrt{\frac{p-1}{p+1}}$ entonces en esta recta j_p también se comporta hiperbólicamente en esta recta siendo $(1, 0, 1)$ el punto fijo atractor y $(0, 1, 0)$ el punto fijo repulsor.

En la recta invariante determinada por $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ evaluamos en $(-1, w, 1)$

$$j_p(-1, w, 1) = \left(1, \sqrt{\frac{p+1}{p-1}} w, 1 \right)$$

Como $1 \leq \sqrt{\frac{p+1}{p-1}}$ entonces el punto atractor de esta línea es el punto $(0, 1, 0)$ y el repulsor el $(-1, 0, 1)$.

Dado que para todo punto $(z, 0, 1) \neq (-1, 0, 1)$

$$j_p^n(z, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1)$$

si $n \rightarrow \infty$ entonces toda recta R que contenga al punto $(0, 1, 0)$, es decir las de la forma (az, w, z) , distinta a la recta $(-z, w, z)$ tiende a la recta (z, w, z)

$$j_p^n(az, w, z) \rightarrow (z, w, z)$$

si $n \rightarrow \infty$ para toda $a \neq -1$.

De este resultado se deduce fácilmente que todo punto $x \in \mathbb{P}^2, x \notin (-z, w, z)$

$$j_p^n(x) \rightarrow (1, 0, 1)$$

En particular todo punto $x \in B^4, x \neq (-1, 0, 1)$

$$j_p^n(x) \rightarrow (1, 0, 1)$$

Detengamonos a estudiar el comportamiento de $j_p \mid_{B^4}$.

Por como construimos j_p , podemos conocer su comportamiento en B^4 ya que conocemos el

comportamiento de h_p y de k sobre la bola.

Sabemos que el espejo de inversión $E_{p, \sqrt{p^2-1}}$ (al que llamaremos de ahora en adelante E_p) está generado por el círculo $(e^{i\theta} \sqrt{p^2-1} - p, 0, 1)$ y el punto $(0, 1, 0)$. Llamemos $intE_p$ al conjunto de puntos de la forma $(z, w, 1)$ tales que $|z+p| \leq \sqrt{p^2-1}$, y $extE_p$ al conjunto de puntos x tales que $x \notin E_p \cup intE_p$; es decir, los puntos que tienen la forma $(z, w, 1)$ con $|z+p| \geq \sqrt{p^2-1}$, o de la forma $(z, w, 0)$ con $z \neq 0$.

Sabemos que E_p es invariante bajo h_p , aunque ya lo sepamos, volvamos a demostrar que

$$h_p(int(E_p)) = ext(E_p)$$

y viceversa.

Sea x un punto de $int(E_p)$, entonces $x = (z, w, 1)$ donde $|z+p| \leq \sqrt{p^2-1}$, es decir $z = \lambda e^{i\theta} - p$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \leq \sqrt{p^2-1}$.

Si $z \neq p$

$$\begin{aligned} h_p(x) &= \left(-(p\lambda e^{-i\theta} - p^2) - 1, \sqrt{p^2-1} w, (\lambda e^{-i\theta} - p) + p \right) \\ &= \left(-p + \frac{p^2-1}{\lambda e^{-i\theta}}, \frac{\sqrt{p^2-1}}{\lambda e^{-i\theta}} w, 1 \right) \end{aligned}$$

en donde

$$\left| \frac{p^2-1}{\lambda e^{-i\theta}} - p + p \right| = \left| \frac{p^2-1}{\lambda e^{-i\theta}} \right| = \frac{p^2-1}{\lambda} \geq \frac{p^2-1}{\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{p^2-1}$$

y por lo tanto $h_p(x) \in extE_p$.

Si $z = p$

$$h_p(x) = \left(-p^2 - 1, \sqrt{p^2-1} w, 0 \right)$$

y como $-p^2 - 1 \neq 0$, entonces $h_p(x) \in extE_p$, con lo que se demuestra que

$$h_p(intE_p) = ext(E_p)$$

Para demostrar que $h_p(extE_p) = int(E_p)$, basta notar que, h_p es una involución antiholomorfa continua.

Denotamos ahora por $B(intE_p)$ a $intE_p \cap B^4$, por $B(extE_p)$ a $extE_p \cap B^4$.

Por el analisis que acabamos de hacer y por el hecho de que B^4 es invariante bajo h_p , es claro que

$$h_p(B(intE_p)) = B(extE_p)$$

y viceversa.

Analicemos ahora el comportamiento k .

Claramente $k(E_p)$ es el conjunto de líneas determinadas por el punto $(0, 1, 0)$ y por el círculo $k(e^{i\theta} \sqrt{p^2 - 1} - p, 0, 1) = (e^{i\theta} \sqrt{p^2 - 1} + p, 0, 1)$; es decir,

$$k(E_p) = E_{-p}$$

análogamente

$$k(\text{int}E_p) = \text{int}(k(E_p)) = \text{int}E_{-p}$$

y

$$k(\text{ext}E_p) = \text{ext}(k(E_p)) = \text{ext}E_{-p}.$$

En particular

$$k(B(\text{int}E_p)) = B(\text{int}E_{-p})$$

y

$$k(B(\text{ext}E_p)) = k(B(\text{ext}E_{-p}))$$

4.2.3 **Definición:** Sea

$$\Omega_p = B(\text{ext}E_p) \cap B(\text{ext}E_{-p})$$

Notemos que

$$B = B(\text{int}E_p) \cup B(\text{int}E_{-p}) \cup \overline{\Omega_p}$$

en donde $\overline{\Omega_p} = \Omega_p \cup B(E_p) \cup B(E_{-p})$ y claramente

$$k(\Omega_p) = \Omega_p$$

Con estos elementos, ya podemos analizar el comportamiento de $j_p \mid_{B^4}$.

Como h_p deja invariante E_p entonces

$$j_p(E_p) = kh_p(E_p) = E_{-p}$$

además

$$j_p(\text{int}E_p) = k(\text{ext}E_p) = \text{ext}E_{-p}$$

$$j_p(\text{ext}E_p) = k(\text{int}E_p) = \text{int}E_{-p}$$

y como $\text{int}E_{-p} \subset \text{ext}E_p$, entonces

$$j_p(\text{int}E_{-p}) \subset j_p(\text{ext}E_p) = \text{int}E_{-p}$$

Si nos restringimos a la acción de j_p sobre a bola unitaria, y como sabemos que

$\Omega_p \subset B(\text{ext}E_p)$ entonces

$$j_p(E_p) = E_{-p}$$

$$j_p(B(\text{int}E_p)) = B(\text{ext}E_{-p}) = B(\text{int}E_p) \cup \Omega_p \cup B(E_p)$$

$$j_p(B(\text{ext}E_p)) = j_p(B(\text{int}E_{-p}) \cup \Omega_p \cup B(E_{-p})) = B(\text{int}E_{-p})$$

y por lo tanto

$$j_p(\overline{\Omega_p}) \subset j_p(\overline{B(\text{ext}E_p)}) = \overline{B(\text{int}E_{-p})}$$

lo que, en particular, quiere decir que

$$\Omega_p \cap j_p(\Omega_p) = \emptyset$$

ya que $\overline{\Omega_p} \cap \overline{B(\text{int}E_{-p})} = E_{-p}$, lo también implica que

$$j_p^{-1}(\Omega_p) \cap \Omega_p = \emptyset$$

de hecho, como $j_p(B(\text{int}E_{-p})) \subset B(\text{int}E_{-p})$ y $j_p^{-1}(B(\text{int}E_p)) \subset B(\text{int}E_p)$

$$\Omega_p \cap j_p^n(\Omega_p) = \emptyset$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto

$$j_p^m(\Omega_p) \cap j_p^n(\Omega_p) = \emptyset$$

para todos $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$, con lo que podemos formular la siguiente proposición

4.2.4 Proposición: Para todo punto $x \in \overline{B(\text{int}E_p)} - \{(-1, 0, 1)\}$ existe un único $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$j_p^N(x) \in \Omega_p \cup B(E_{-p})$$

Demostración: Por como construimos j_p sabemos que todo punto de $x \in \overline{B(\text{int}E_p)} - \{(-1, 0, 1)\}$,

$$j_p^n(x) \rightarrow (1, 0, 1)$$

es decir que $\forall \varepsilon \geq 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tales que

$$j_p^{N_\varepsilon}(x) \in B(\text{int}E_{-p})$$

y tal que para todo $n \geq N_\varepsilon$

$$j_p^n(x) \in B(\text{int}E_{-p})$$

en donde B_ε es la bola abierta, con centro en $(1, 0, 1)$ y con radio ε .

En particular para $\varepsilon = \sqrt{p^2 - 1}$, $B_\varepsilon \cap B^4 = B(\text{int}E_{-p})$.

Sea $N = N' \sqrt{p^2-1} \in \mathbb{N}$, entonces

$$j_p^{N-1} = j_p(j_p^N(x)) \in B(intE_{-p})$$

y por lo tanto

$$j_p^N(x) \in j_p^{-1}(B(intE_{-p})) = B(intE_{-p}) \cup \Omega_p \cup B(E_{-p})$$

y como $j_p^N(x) \notin (intE_{-p})$ entonces $j_p^N(x) \in \Omega_p \cup B(E_{-p})$ lo que demuestra que para todo punto $x \in \overline{B(intE_p)}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $j_p^N(x) \in \Omega_p \cup B(E_{-p})$, basta probar que es única. Por construcción, sabemos que ningún número mayor que N cumple con esto, por lo que tendríamos que probar que ningún número menor que N lo cumple, lo que se sigue del hecho de que

$$j_p^{-1}(\Omega_p \cup B(E_{-p})) \subset \overline{B(intE_p)}$$

$$j_p^{-1}(\overline{B(intE_p)}) \subset B(intE_p)$$

4.2.5 Corolario: Para todo punto $x \in \overline{B(intE_{-p})}$ existe un único $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$j_p^N(x) \in \Omega_p \cup B(E_p)$$

Demostración: La demostración de este corolario es idéntica a la demostración de la proposición 4.2.4 intercambiando j_p por j_p^{-1} . ■

4.3 REGION FUNDAMENTAL DE j_p

De estos dos hechos se deduce un resultado muy importante, pero antes de enunciarlo vamos a dar primero una definición:

4.3.1 Definición: Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ y sea $\Phi \subset \mathbb{P}^2$ un conjunto de puntos, definimos la órbita de Φ bajo f como la cerradura del conjunto de puntos $j_p^n(x) \in \mathbb{P}^2$ tales que $n \in \mathbb{Z}$, y $x \in \Phi$. Lo denotamos por $\Theta_f(\Phi)$; es decir,

$$\Theta_f(\Phi) = \overline{\{j_p^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in \Phi\}} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} j_p^n(\Phi)$$

4.3.2 Proposición: $\Theta_{j_p}(\overline{\Omega_p}) = B^4$

Demostración: Sabemos por la definición que

$$\Theta_{j_p}(\overline{\Omega_p}) = \overline{\{j_p^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in \overline{\Omega_p}\}}$$

y sabemos que

$$B^4 = B(intE_p) \cup \overline{\Omega_p} \cup B(intE_{-p})$$

Obviamente

$$\overline{\Omega_p} \subset \Theta_{j_p}(\overline{\Omega_p})$$

y por la proposición 4.2.5 y el corolario 4.2.6

$$\overline{B(\text{int}E_p)} - \{(-1, 0, 1)\} \subset \{j_p^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in \overline{\Omega_p}\}$$

$$\overline{B(\text{int}E_{-p})} - \{(1, 0, 1)\} \subset \{j_p^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in \overline{\Omega_p}\}$$

y como

$$\overline{B(\text{int}E_p) - \{(-1, 0, 1)\}} = \overline{B(\text{int}E_p)}$$

$$\overline{B(\text{int}E_{-p}) - \{(1, 0, 1)\}} = \overline{B(\text{int}E_{-p})}$$

entonces

$$\Theta_{j_p}(\overline{\Omega_p}) \supset \overline{B(\text{int}E_p)} \cup \overline{B(\text{int}E_{-p})} \cup \overline{\Omega_p} = B^4$$

Como $\overline{\Omega_p} \subset B^4$ y B^4 es un conjunto cerrado invariante bajo j_p , entonces

$$\Theta_{j_p}(\overline{\Omega_p}) \subset B^4$$

y por lo tanto

$$\Theta_{j_p}(\overline{\Omega_p}) = B^4$$

■

4.3.3 Corolario: Ω_p es una region fundamental de B^4 bajo la acción de j_p .

Demostración: Como ya demostramos

$$\Omega_p \cap \Theta_{j_p} j_p^n(\Omega_p) = \emptyset$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y por la proposición 4.3.2 $\Theta_{j_p}(\overline{\Omega_p}) = B^4$ con lo que queda demostrado que Ω_p es una region fundamental de B^4 bajo la acción de j_p . ■

4.4 CONSTRUCCION Y DINAMICA DE UN GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE \mathbb{P}^2 QUE DEJA INVARIANTE B^4 .

Así como definimos a las inversiones h también podemos definir inversiones \hat{h} como las inversiones de la forma dhd^{-1} en donde $d(z, w, t) = (w, z, t)$ y $h \in H$.

Es claro que estas inversiones dejan invariante la recta $z = 0$, en la que se comportan como las h en el eje $w = 0$. Obviamente $d h_{p,r} d^{-1} = \hat{h}_{p,r}$ es una inversión con un espejo generado por un circulo en la recta $z = 0$ y el punto $(1, 0, 0)$. La dinámica de $\hat{h}_{p,r}$ es igual a la de $h_{p,r}$ y la acción de $\hat{h}_{p,r}$ en las rectas de pendiente m es igual a la acción de $h_{p,r}$ en las rectas de pendiente $\frac{1}{m}$. Análogamente a las inversiones h , $\hat{h}_{p,r}$ deja invariante la bola unitaria si y solo

si $r = \sqrt{p^2 - 1}$. Denotaremos por \hat{h}_p a $\hat{h}_{p, \sqrt{p^2-1}}$. Es claro que

$$\hat{h}_{p,r}(z, w, t) = (r\bar{z}, -p\bar{w} + (r^2 - p^2)\bar{t}, \bar{w} + p\bar{t})$$

y en particular

$$\hat{h}_p(z, w, t) = (z\sqrt{p^2-1}, -p\bar{w} - \bar{t}, \bar{w} + p\bar{t})$$

Sea $\hat{H} = dHd^{-1}$ es decir el conjunto de todas las $\hat{h}_{p,r}$ con $p, r \in \mathbb{R}$

De igual manera definimos como $\hat{E}_{p,r}$ el espejo de inversión de $\hat{h}_{p,r}$: es decir, los puntos de la forma

$$(z, re^{i\theta} + p, 1)$$

unión el punto de la recta al infinito $(z, 0, 0)$.

Definimos como $int\hat{E}_{p,r}$ al conjunto de puntos $(z, w, 1)$ para los cuales la forma

$$|w + p| \leq r$$

y como $ext\hat{E}_{p,r}$ al conjunto de puntos $(z, w, 1)$ para los cuales

$$|w + p| \geq r$$

unión los puntos $(z, w, 0)$ donde $w \neq 0$. En este caso también se cumple que

$$\hat{h}_{p,r}(\hat{E}_{p,r}) = \hat{E}_{p,r}$$

$$\hat{h}_{p,r}(int\hat{E}_{p,r}) = ext\hat{E}_{p,r}$$

$$\hat{h}_{p,r}(ext\hat{E}_{p,r}) = int\hat{E}_{p,r}$$

Análogamente al caso anterior, sea $\hat{j}_{p,r} = \hat{k}\hat{h}_{p,r}$ en donde $\hat{k}(z, w, t) = (z, -\bar{w}, \bar{t})$.

Como $\hat{k} = dkd^{-1}$ entonces $\hat{j}_{p,r} = dkd^{-1}dh_{p,r}d^{-1} = dkh_{p,r}d^{-1} = d\hat{j}_{p,r}d^{-1}$ es decir es conjugada a $j_{p,r}$ y por lo tanto tiene la misma dinámica. Sea

$$\hat{\mathcal{J}} = \{\hat{j}_{p,r} \mid p, r \in \mathbb{R}^+\}$$

De igual forma denotaremos por \hat{j}_r a $\hat{j}_{r, \sqrt{r^2-1}}$.

Es decir \hat{j}_r es un automorfismo de TIPO H (3h) con puntos fijos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$, en donde el primero es un punto atractor en todas direcciones, el segundo un punto silla y el tercero un punto repulsor en todas direcciones.

Claramente para todo $x \in \mathbb{P}^2, x \in (z, -w, w)$

$$\hat{j}_p(x) \rightarrow (0, 1, 1)$$

En particular, todo punto $x \in B^4, x \neq (0, -1, 1)$

$$\hat{j}_p(x) \rightarrow (0, 1, 1)$$

Así mismo, sean

$$B(\text{int}\hat{E}_p) = \text{int}\hat{E}_p \cap B^4$$

$$B(\text{ext}\hat{E}_p) = \text{ext}\hat{E}_p \cap B^4$$

$$\hat{E}_{-p} = \hat{k}(\hat{E}_p)$$

$$\text{int}\hat{E}_{-p} = \hat{k}(\text{int}\hat{E}_p)$$

$$\text{ext}\hat{E}_{-p} = \hat{k}(\text{ext}\hat{E}_p)$$

$$\hat{\Omega}_p = B(\text{ext}\hat{E}_p) \cup B(\text{ext}\hat{E}_{-p})$$

y de la misma manera

$$\Theta_{\hat{j}_p}(\widehat{\Omega}_p) = B^4$$

$$\hat{j}_p^m(\widehat{\Omega}_p) \cap \hat{j}_p^n(\widehat{\Omega}_p) = \emptyset \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$$

y por lo tanto $\widehat{\Omega}_p$ es una región fundamental de B^4 bajo la acción de \hat{j}_p .

4.4.1 Definición: Sea $\Gamma_{p,q}$ el grupo generado por j_p y por \hat{j}_q .

Comenzaremos por dar condiciones aritméticas para que $\Gamma_{p,q}$ sea un grupo libre.

4.4.2 Proposición: Dados p y $q \in \mathbb{R}$, tales que $p + \sqrt{p^2 - 1} \not\equiv 1$, $q + \sqrt{q^2 - 1} \not\equiv 1$ y que

$$\left(p + \sqrt{p^2 - 1}\right)^2 + \left(q + \sqrt{q^2 - 1}\right)^2 \geq 1$$

entonces $\Gamma_{p,q}$ es un grupo libre.

Demostración: Tomemos el grupo de automorfismos generado por j_p y por \hat{j}_q .

$\Gamma_{p,q} = \langle j_p, \hat{j}_q \rangle$, es decir todos los $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tales que se puedan descomponer como una composición finita de generadores del grupo.

Por simplicidad llamemos x_0, x_1 y x_2 a $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$ respectivamente, es

decir a los puntos fijos de j_p y y_0, y_1 y y_2 a $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, -1, 1)$ respectivamente, a los puntos fijos de \hat{j}_q .

Sea $F = \{x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2\}$.

La condición de que $p + \sqrt{p^2 - 1} \cong 1$ implica que

$$B^4 \cap E_p \neq \emptyset$$

ya que el punto $(p + \sqrt{p^2 - 1}, 0, 1) \in E_p \cup B^4$.

Análogamente

$$B^4 \cap \hat{E}_q \neq \emptyset$$

Y la condición de que $(-p + \sqrt{p^2 - 1})^2 + (-q + \sqrt{q^2 - 1})^2 \cong 1$, implica que $E_p \cap \hat{E}_q \cap B^4 = \emptyset$, ya que

$$E_p \cap \hat{E}_q = (e^{\theta_1} \sqrt{p^2 - 1} - p, e^{\theta_2} \sqrt{q^2 - 1} - q, 1) \quad \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$$

y como

$$(-p + \sqrt{p^2 - 1})^2 + (-q + \sqrt{q^2 - 1})^2 \cong 1$$

entonces

$$(e^{\theta_1} \sqrt{p^2 - 1} - p, e^{\theta_2} \sqrt{q^2 - 1} - q, 1) \notin B^4 \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$$

y por lo tanto

$$E_p \cap \hat{E}_q \cap B^4 = \emptyset$$

lo que nos garantiza que $\Gamma_{p,q}$ es un grupo libre.

Estudiemos ahora el comportamiento, de $\Gamma_{p,q}$ tanto en la bola unitaria B^4 , como en todo \mathbb{P}^2 .

4.4.3 Definición: Sea $\Lambda_{p,q}$ el conjunto límite de $\Gamma_{p,q}$.

Dado que todos los elementos de $\Gamma_{p,q}$ (salvo I) son automorfismos de TIPO H, y sabemos que el conjunto límite, es igual a la cerradura del conjunto de los puntos fijos de los elementos del grupo que sean de TIPO H, entonces

$$\Lambda_{p,q} = \overline{\{x \in \mathbb{P}^2 \mid f(x) = x, f \in \Gamma_{p,q}, f \neq I\}}$$

es decir, $x \in \Lambda_{p,q}$ si y solamente si existe una sucesión $\{x_i\}$ de puntos fijos de elementos de $\Gamma_{p,q}$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$$

ESTA TESIS NO DEBE SER REPRODUCIDA SIN LA AUTORIZACION DE LA BIBLIOTECA

Como ya vimos $\overline{\{x \in \mathbb{P}^2 \mid f(x) = x, f \in \Gamma_{p,q}, f \neq I\}} = \overline{(\Gamma_{p,q})(F)}$, entonces

$$\Lambda_{p,q} = \overline{(\Gamma_{p,q})(F)}$$

Notemos que tanto j_p como \hat{j}_q dejan invariante el conjunto de puntos, tales que tienen la siguiente forma

$$(z_0\lambda, w_0\lambda, t_0\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{C} - 0, (z_0, w_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$$

ya que si $(z_0, w_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$ entonces

$$j_p(\lambda z_0, \lambda w_0, \lambda t_0) = \left(\lambda(z_0 p + t_0), \lambda \left(w_0 \sqrt{p^2 - 1} \right), \lambda(z_0 + p t_0) \right)$$

en donde $(z_0 p + t_0, w_0 \sqrt{p^2 - 1}, z_0 + p t_0) \in \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$.

Lo mismo sucede para \hat{j}_q .

Llamamos \mathbb{RP}^2 al conjunto de puntos de la forma $(\lambda z, \lambda w, \lambda t)$ donde $\lambda \in \mathbb{C} - 0$ y $(z, w, t) \in \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$.

4.4.4 Proposición: El conjunto límite $\Lambda_{p,q}$ está contenido en \mathbb{RP}^2 .

Demostración: Como \mathbb{RP}^2 es un conjunto invariante de j_p y de \hat{j}_q , entonces también es un conjunto invariante de cualquier elemento de $\Gamma_{p,q}$ y por lo tanto

$$\Gamma_{p,q}(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{RP}^2$$

y dado que $F \subset \mathbb{RP}^2$, entonces

$$\Gamma_{p,q}(F) \subset \mathbb{RP}^2$$

y por lo tanto también su cerradura, es decir

$$\Lambda_{p,q} \subset \mathbb{RP}^2$$

■

4.4.5 Corolario: Si $x \in \mathbb{P}^2$, dada cualquier sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $\Gamma_{p,q}$ tal que $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = a \in \mathbb{RP}^2$$

Demostración: Por definición de conjunto límite, $a \in \Lambda_{p,q}$ ya que por construcción existe $x \in \mathbb{P}^2$, y una sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $\Gamma_{p,q}$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = a$$

y por la proposición 4.4.4 sabemos que $\Lambda_{p,q} \subset \mathbb{RP}^2$ en particular $a \in \mathbb{RP}^2$.

Estos resultados nos muestran que si queremos estudiar $\Lambda_{p,q}$ basta fijarnos en \mathbb{RP}^2 que por ser un espacio de dimensión 2, es mucho más fácil de manejar.

4.4.6 Corolario: Si $x \in B^4$, dada cualquier sucesión $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $\Gamma_{p,q}$ tal que $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = a \in \mathbb{RP}^2 \cap S^3 = S^1$$

Demostración: Dado que B^4 y S^3 son invariantes bajo $\Gamma_{p,q}$, y $F|_{B^4} \subset S^3$, entonces

$$\Lambda_{p,q}|_{B^4} \subset S^3 \cap \mathbb{RP}^2 = S^1$$

y por como construimos a , $a \in \Lambda_{p,q}$ y por lo tanto $a \in S^1$ ■

Llamamos $B\Lambda_{p,q}$ a $S^1 \cap \Lambda_{p,q} = B^4 \cap \Lambda_{p,q} = \Gamma_{p,q}(F|_{B^4})$.

Como $F|_{\mathbb{R}^2 - B^4} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, entonces $\Lambda_{p,q} = \overline{B\Lambda_{p,q} \cup \Gamma_{p,q}((1, 0, 0), (0, 1, 0))}$

4.4.7 Proposición: Sea $\Omega_{p,q} = \Omega_p \cap \widehat{\Omega}_q$, entonces $\Omega_{p,q}$ es una región fundamental de B^4 bajo la acción de $\Gamma_{p,q}$.

Demostración: Como ya sabemos

$$\Omega_p \cap j_p(\Omega_p) = \emptyset$$

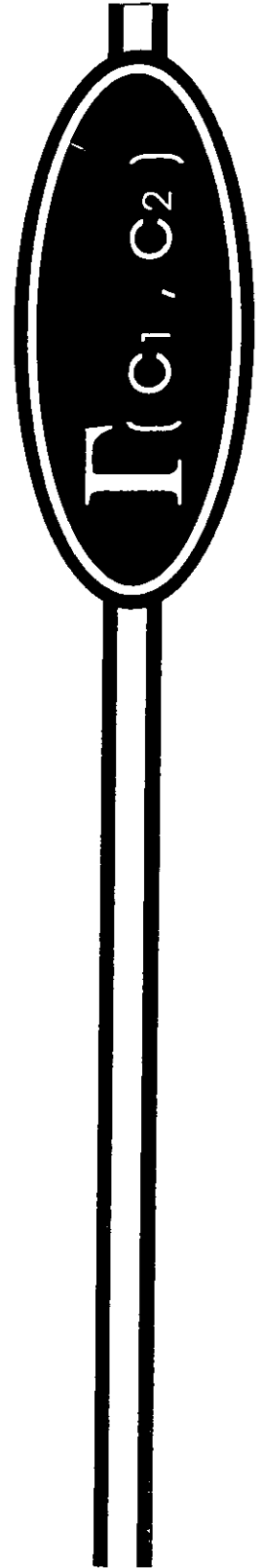
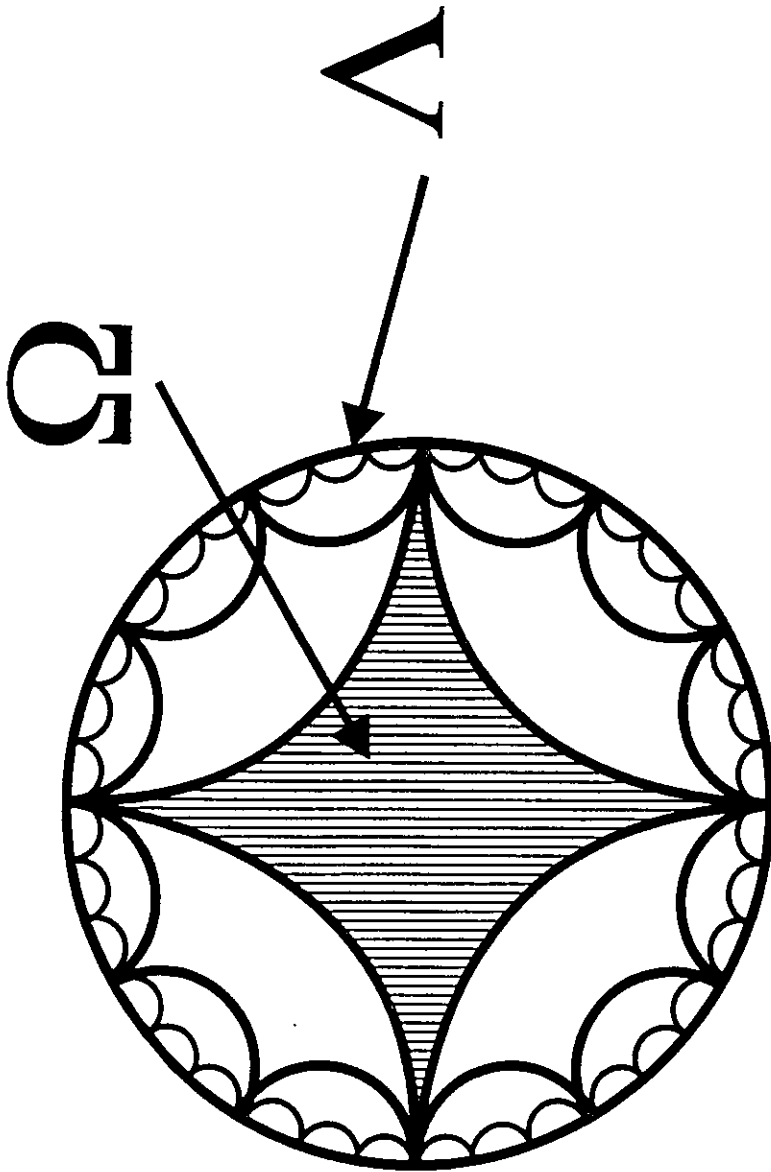
$$\widehat{\Omega}_q \cap \widehat{j}_q(\widehat{\Omega}_q) = \emptyset$$

entonces

$$\Omega_{p,q} \cap j_p(\Omega_{p,q}) = \emptyset$$

$$\Omega_{p,q} \cap \widehat{j}_q(\Omega_{p,q}) = \emptyset$$

Estos elementos nos describen toda la dinámica de $\Gamma_{p,q}$.



BIBLIOGRAFIA

Lars. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill 1953

Alan F. Beardon. *The geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag 1983

L. R. Ford. *Automorphic Functions*. Chelsea Publishing Company 1972

D. Singerman G.A. Jones. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press 1987