UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

METODOS ANALITICOS Y NUMERICOS EN MATEMATICAS FINANCIERAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

ENRIQUE MENDEZ RIOS

DIRECTOR DE TESIS

DR. MOGENS BLADT PETERSEN

2000

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Métodos Analíticos y Numéricos en Matemáticas Financieras"

realizado por Enrique Méndez Ríos

Con número de cuenta 9455919-4, pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis
Propietario Dr. Mogens Bladt Petersen *Mogens Bladt*

Propietario Maestro en Economía Rafael E. Gómez-Tagle Morales *Rafael Gómez-Tagle*

Propietario Dr. Pablo Padilla Longoria *Pablo Padilla L.*

Suplente Mat. Margarita Elvira Chávez Cano

Suplente M. en A.P. Ma. del Pilar Alonso Reyes

Consejo Departamental de Matemáticas
M.en C. José Antonio Flores Díaz

PREFACIO

Sin lugar a dudas, se está mejor preparado para futuros retos mientras más disciplinas se conozcan. Las matemáticas financieras, ricas en aplicaciones y crecientes avances teóricos, son una de estas disciplinas.

He seleccionado de esta apasionante área algunos temas, representan sólo una pequeña parte, en relación con la valuación de opciones; y he tratado de presentarlos de una manera breve y clara, pero, sobre todo, con perspectiva matemática. Este trabajo es el resultado.

El propósito es una presentación lógica de las técnicas matemáticas usadas en finanzas para la evaluación de opciones Americanas y Europeas sobre acciones. Existen excelentes libros que tratan estos temas o brevemente o de una manera informal, en contraste, el tratamiento en este trabajo se intenta sea una extensión con un acercamiento diferente, tomando como base el enfoque matemático de los temas tratados.

A fin de facilitar la comprensión, algunos temas se ilustran con un ejemplo acompañado de un programa en MATLAB. Dichos programas se han traducido a Visual Basic para su uso en tres hojas de cálculo de Excel 97 y se encuentran en el disco que acompaña esta tesis. Aun cuando se trató de hacer algoritmos eficientes, se debe enfatizar que su único propósito es dar solución numérica a los mismos.

El material está dividido en tres partes íntimamente relacionadas. El capítulo primero define los conceptos y términos necesarios para la descripción de un modelo estocástico representativo de los títulos accionarios. El capítulo segundo contiene una introducción de los elementos básicos en la interpretación de los títulos opcionales de compra y venta. El énfasis es puesto en el modelo binomial de valuación de opciones, la manera en que converge a la fórmula de Black & Scholes, y como la flexibilidad del modelo permite la valuación de opciones Americanas. El capítulo tercero se enfoca en la resolución analítica y numérica de la ecuación diferencial de Black & Scholes. Finalmente, se concluye con la técnica de la simulación (Método de Montecarlo) para evaluar opciones lookback.

ÍNDICE

A mis padres.

CAPÍTULO I

PROPIEDADES PROBABILÍSTICAS

DE LAS ACCIONES

En este capítulo se desarrollan algunos aspectos probabilísticos y estadísticos de los títulos accionarios. Se mostrará un modelo estocástico que describe el comportamiento del precio de las acciones, e inferirán ciertas distribuciones probabilísticas de sus variables, y en consecuencia se calcularán sus intervalos de confianza. Comenzar con la definición del proceso de Wiener y sus propiedades es fundamental en la construcción del modelo. Identificado el modelo, es relativamente fácil obtener su esperanza y varianza, lo que lleva a poder estimar una importante característica, la volatilidad de la acción.

Introducción a los productos derivados

Los mercados derivados son aquellos en los que se intercambian instrumentos derivados. Un instrumento derivado es aquel cuyo valor depende del valor de otro instrumento, conocido como *bien subyacente*; por lo tanto, el valor del instrumento derivado existe por su dependencia del valor o precio del bien subyacente. Los instrumentos derivados "siguen" el perfil de pagos o movimientos del precio del bien subyacente, aunque esto sólo se observa durante la vigencia del instrumento derivado; puesto que siempre tiene una fecha de vencimiento previa o igual a la del bien subyacente. Los instrumentos derivados toman como bienes subyacentes una gran cantidad de instrumentos o bienes, como pueden ser: instrumentos de deuda, acciones, petróleo, café, cacao, plata, etc., y todos ellos pueden ser agrupados en las siguientes categorías:

- Acciones e Índices de Acciones
- Tasas de Interés (Instrumentos de deuda)
- Tipos de cambio (divisas en general)

- Bienes (metales, químicos, agropecuarios, etc.)
- Índices de Precios

En años recientes, los instrumentos derivados han llegado a ser de gran importancia en el campo de las finanzas; los futuros y las opciones son dos ejemplos de instrumentos derivados.

Transacciones de Contado y Adelantadas

Para comprender la importancia del plazo de vigencia de los instrumentos derivados es necesario entender cuál es la diferencia entre hacer una operación de contado y una adelantada (en *forward*). La distinción entre ambas tiene que ver con el tiempo en que se hacen las transacciones:

- **Transacción de contado**: es un acuerdo de las condiciones para la entrega de un activo (financiero o de otro tipo) y su liquidación inmediata.
- **Transacción adelantadas** (en *forward*): es un acuerdo, en un momento inicial, acerca de las condiciones para la entrega y liquidación futura de un activo.

Contratos de Futuros

Un contrato de Futuro es un compromiso legal entre un vendedor y un comprador para comprar o vender un cierto bien subyacente a una fecha futura para un cierto precio, cantidad, calidad, locación y tiempo establecidos.

Un inversionista que compra un contrato de Futuro tiene una *posición larga* en Futuros, mientras que el inversionista que vende Futuros tiene una *posición corta* en Futuros.

Tasa continua de interés

Considere un capital K invertido t años a una tasa de interés anual r_1. Si la tasa es compuesta o convertible anualmente, el monto de la inversión es:

$$M = K(1 + r_1)^t$$

Si es compuesta m veces por año, el monto de la inversión es:

$$M = K\left(1 + \frac{r_1}{m}\right)^{mt}$$

Sea K=\$100, r_1 =10% anual, y el tiempo de un año, así que t =1. Cuando se tiene una tasa compuesta anualmente (m=1), la fórmula muestra que un capital de \$100 crece a

$$\$100\left(1 + \frac{0.1}{1}\right)^{1 \cdot 1} = \$110$$

Cuando se tiene una tasa compuesta semestralmente (m=2), la fórmula muestra que el capital de $100 crece a

$$\$100\left(1+\tfrac{0.1}{2}\right)^{2\cdot 1}=\$110.25$$

Si se tiene una tasa compuesta trimestralmente (m=4), la fórmula muestra que el capital de $100 crece a

$$\$100\left(1+\tfrac{0.1}{4}\right)^{4\cdot 1}=\$110.38$$

Los efectos de incrementar la frecuencia de la tasa compuesta, es decir, incrementando m se pueden resumir en la siguiente tabla:

m	Frecuencia de la tasa compuesta	Monto del capital $100 al final de un año
1	Anual	110.00
2	Semestral	110.25
4	Trimestral	110.38
12	Mensual	110.47
52	Semanal	110.51
365	Diaria	110.52

El límite cuando m tiende a infinito se conoce como la *tasa continua de interés*:

$$M=\lim_{m\to\infty}K\left(1+\tfrac{r_1}{m}\right)^{mt}=K\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\tfrac{r_1}{m}\right)^{m}\right]^{t}=Ke^{r_1 t}$$

$$\text{pues}\quad \lim_{m\to\infty}\left(1+\tfrac{r_1}{m}\right)^{m}=e^{r_1}$$

Por tanto un capital K=$100 invertido un año a una tasa r_1=10% crece:

$$M=Ke^{r_1 t}=100e^{0.1\cdot 1}=\$110.52$$

Este es el mismo valor (truncado a centésimos) que el de la tabla cuando m =365. Por tanto para fines prácticos la tasa continua se puede pensar como una tasa compuesta diariamente.

El proceso Wiener

Una variable cuyo valor cambia en el tiempo de una manera aleatoria se dice que sigue un proceso estocástico. Los procesos estocásticos se pueden clasificar en discretos y continuos. Un proceso estocástico discreto es uno en el que el valor de la variable puede cambiar solamente en ciertos valores fijos del tiempo, mientras que un proceso continuo cambia en cualquier momento. Sea $Z(t)$ la posición de una partícula al tiempo t. En este caso t toma valores reales no negativos en las abscisas y $Z(t)$ en las ordenadas (o quizás en el plano o espacio). La temperatura de una habitación en cualquier instante de tiempo es un ejemplo de un proceso estocástico continuo.

En este capítulo se analiza un proceso estocástico continuo para el precio de las acciones. Es de importancia mencionar que en la práctica los movimientos de los precios de las acciones no siguen un esquema continuo. Los movimientos de los precios de las acciones están restringidos a valores discretos, usualmente múltiplos de \$ 1/8, y sus cambios sólo pueden observarse cuando las Bolsas de Valores están abiertas. Sin embargo, el proceso estocástico continuo es un modelo bastante útil para la mayoría de los propósitos.

Un proceso markoviano es un proceso estocástico particular donde sólo el valor actual es relevante para predecir el futuro. El valor histórico de la variable y la manera en que se ha obtenido del pasado el valor actual son irrelevantes.

Así, por ejemplo, los precios de las acciones se supone siguen un proceso markoviano. Supóngase que el valor de una acción de IBM es hoy de \$100. Si el valor de la acción sigue un proceso markoviano, nuestra predicción para el valor futuro de la acción no debería ser afectado por el precio de hace una semana, un mes o un año. El único factor relevante es que el precio de la acción vale hoy \$100[1]. La propiedad markoviana implica que la distribución probabilística del precio en cualquier momento futuro del tiempo depende únicamente del valor actual \$100 de la acción.

Los modelos de los precios de las acciones se expresan usualmente en términos de lo que se conoce como un *Proceso de Wiener*. Un Proceso de Wiener es un caso particular de un proceso estocástico markoviano. Se ha usado en la Física para describir el movimiento de una partícula (10^{-4} cm. de diámetro aproximadamente) inmersa en un líquido o gas que describe trayectorias continuas e irregulares. El movimiento de tal partícula es llamado Movimiento Browniano, en honor al botánico inglés Robert Brown, quien descubrió el fenómeno en 1827.

El comportamiento de una variable Z que sigue un proceso de Wiener puede ser entendido considerando los cambios en su valor en pequeños intervalos de tiempo. Considere un intervalo pequeño de tiempo $\Delta t=(t-s)$ y defínase $Z(t)$ - $Z(s)$ como el cambio en Z durante Δt.

Definición. Un *movimiento Browniano* o un proceso de Wiener con parámetro de varianza σ^2 es un proceso estocástico $Z(t)$ que toma valores en los números reales satisfaciendo:

i) $Z(0) = 0$;

[1] *Aspectos estadísticos de los valores históricos del precio de las acciones de IBM, pueden ser útiles para determinar la volatilidad de las acciones. Lo que se enfatiza aquí es que la trayectoria particular seguida por la acción en el pasado es irrelevante.*

ii) Para cualesquiera $s_1 \leqslant t_1 \leqslant s_2 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant t_n$, las variables aleatorias $Z(t_1) - Z(s_1), \ldots, Z(t_n) - Z(s_n)$ son independientes;

iii) Para cualesquiera $s < t$, la variable aleatoria $\Delta Z = Z(t) - Z(s)$ se distribuye normal con media 0 y varianza $\Delta t\sigma^2$, es decir, $\Delta Z \sim N(0, \Delta t\sigma^2)$.

iv) Las trayectorias son continuas, es decir, la función $t \mapsto Z(t)$ es una función continua de t.

Un movimiento Browniano *estándar* es un movimiento Browniano con $\sigma^2 = 1$. También se puede hablar de un movimiento Browniano que comience en z, es decir, $Z(0) = z$. Si $Z(t)$ es un movimiento Browniano (que comienza en cero), entonces $Y(t) = Z(t) + z$ es un movimiento Browniano que comienza en z.

Propiedades. Considere ahora un movimiento Browniano estándar; se pueden establecer las siguientes propiedades

i) $\Delta Z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, donde ε es una variable aleatoria que se distribuye normal estándar, es decir, $\varepsilon \sim N(0,1)$ pues, $\varepsilon = \dfrac{X-\mu_X}{\sigma_X} = \dfrac{\Delta Z - 0}{\sqrt{\Delta t}}$; ver apéndice (A.2.iii)

ii) La definición implica que Z sigue un proceso Markoviano.

iii) Sea T un periodo de tiempo relativamente largo y $Z(T) - Z(0)$ el incremento en el periodo. Si se divide T en N pequeños intervalos de tiempo de longitud Δt, se puede escribir:

$$T = N\Delta t, \text{ y}$$

$$Z(T) - Z(0) = \sum_{j=1}^{N} \Delta Z = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \sqrt{\Delta t}$$

$$E\left[Z(T) - Z(0)\right] = \sqrt{\Delta t}\sum_{j=1}^{N} E\left[\varepsilon_j\right] = 0$$

$$Var\left[Z(T) - Z(0)\right] = \left(\sqrt{\Delta t}\right)^2 \sum_{j=1}^{N} Var\left[\varepsilon_j\right] = \Delta t \sum_{j=1}^{N} 1 = N\Delta t = T$$

iv) La covarianza de cualesquiera dos ΔZ es cero:

$$cov(\Delta Z, \Delta Z') = E[(\Delta Z - 0)(\Delta Z' - 0)] = E[\Delta Z \Delta Z'] = E[\Delta Z]E[\Delta Z'] = 0$$

Así en cualquier intervalo de tiempo de longitud T, el incremento en el valor de una variable que sigue un proceso Wiener se distribuye normalmente con media cero y desviación estándar raíz cuadrada de T. También se debe recordar que la varianza es aditiva cuando se está hablando de variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, lo que se puede demostrar utilizando la función generatriz de momentos; o ver el apéndice (A.2.iv)

Ejemplo

Suponga que la variable aleatoria Z, que sigue un proceso Wiener está inicialmente en 25, $Z(0) = 25$, y que el tiempo T se mide en años. Al final del primer año, $T = 1$, el valor de la variable estará normalmente distribuida con:

$E[Z(T) - Z(0)] = E[Z(T) - 25] = 0$, con lo que

$E[Z(T)] = 25$, y

$Var[Z(T) - Z(0)] = Var[Z(T) - 25] = Var[Z(T)] = T$, y en consecuencia una

desviación estándar de

$\sqrt{Var[Z(T)]} = \sqrt{T} = 1$

Al término de dos años, $T = 2$, se distribuye normalmente con media 25 y desviación estándar de $\sqrt{2}$. Note que la desviación estándar, la incertidumbre de valor de la variable en un cierto tiempo en el futuro, se incrementa tanto como la raíz cuadrada del tiempo que se quiera anticipar.§

En el cálculo diferencial es común considerar incrementos pequeños para posteriormente tomar el límite cuando la variable tiende a cero. Así $\Delta y/\Delta x$ se convierte en dy/dx en el límite. Se puede proceder de igual manera con los procesos estocásticos continuos. Un proceso de Wiener es el límite cuando $\Delta t \mapsto 0$ en el proceso anteriormente descrito para Z. En consecuencia se puede escribir

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt}$$

El proceso Wiener generalizado

Un *proceso de Wiener generalizado* para una variable x puede ser definida en términos de dz como sigue:

$$dx = adt + bdz$$

donde a y b son constantes.

Para entender mejor la ecuación se puede dividir en los siguientes componentes. El término adt implica que x tiene una tasa de cambio de valor esperado (*expected drift rate*) de a por unidad de tiempo. Sin el término bdz, la ecuación queda:

$$dx = adt$$

lo que implica que

$$\frac{dx}{dt} = a$$

o

$$x = x_0 + at$$

donde x_0 es el valor de x en el tiempo cero. El término adt representa la *parte determinística* de la evolución de x, representada por la línea recta en la gráfica. En un intervalo de tiempo de longitud T, x se incrementa en una cantidad de aT. Del término bdz se puede decir que agrega ruido a la trayectoria seguida por x, es decir, es la *parte aleatoria* y por tanto impredecible del movimiento de x. La cantidad de ruido agregado es b por el proceso de Wiener. En un pequeño intervalo de tiempo Δt, el cambio en el valor de x, Δx, es:

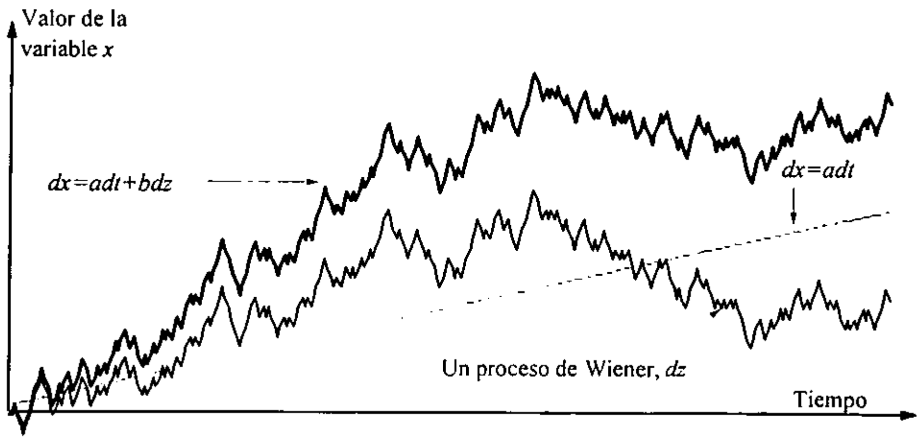
$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

donde como de costumbre ε es una variable aleatoria que se distribuye normal estándar. Por lo descrito en el apéndice (A.2.vi) Δx tiene también una distribución normal con las siguientes esperanza y varianza:

$$E[\Delta x] = E\left[a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}\,\right] = E[a\Delta t] + b\sqrt{\Delta t}\,E[\varepsilon] = a\Delta t$$

$$Var[\Delta x] = Var\left[a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}\,\right] = \left(b\sqrt{\Delta t}\right)^2 Var[\varepsilon] = b^2\Delta t \qquad \therefore$$

$$\Delta x \sim N(a\Delta t, b^2\Delta t)$$



PROCESO DE WIENER GENERALIZADO

De esta manera el proceso de Wiener generalizado tiene una tasa de cambio de valor esperado (*expected drift rate per unit of time*) por unidad de tiempo de a y una tasa de cambio de varianza (*variance rate per unit of time*) por unidad de tiempo de b^2. El proceso de Wiener o movimiento Browniano estándar que se desarrolló tiene una tasa de cambio de valor esperado (*expected drift rate*) de cero y una tasa de cambio de varianza (*variance rate*) 1. El "*drift rate*" de cero significa que el valor esperado de Z en cualquier momento futuro del tiempo es igual a su valor actual. La tasa de cambio de varianza 1 significa que la varianza del cambio en Z en un intervalo de tiempo de longitud T es igual a T.

Argumentos similares a los propuestos muestran que un cambio en el valor de x en cualquier intervalo de tiempo de longitud T se distribuye normalmente con:

$$E[x(T)-x(0)] = E\left[\sum_{j=1}^{N} \Delta x\right] = \sum_{j=1}^{N} \left(E[a\Delta t] + b\sqrt{\Delta t}\, E[\varepsilon_j]\right) = \sum_{j=1}^{N} (a\Delta t) = a\sum_{j=1}^{N} \Delta t = aT$$

$$Var[x(T)-x(0)] = Var\left[\sum_{j=1}^{N} \Delta x\right] = \sum_{j=1}^{N} \left(0 + (b\sqrt{\Delta t})^2 Var[\varepsilon_j]\right) = \sum_{j=1}^{N} b^2\Delta t = b^2 \sum_{j=1}^{N} \Delta t = b^2 T$$

siendo,

$$x(T) - x(0) = \sum_{j=1}^{N} \Delta x = \sum_{j=1}^{N} \left(a\Delta t + b\varepsilon_j \sqrt{\Delta t}\right)$$

Ejemplo

Considere la situación donde la posición de una compañía medida en miles de dólares, sigue un proceso de Wiener generalizado con una tasa de cambio de valor esperado de $a = 20$ por año y una tasa de cambio de varianza de $b^2 = 900$ por año. Inicialmente la posición de la compañía es de 50, $x(0)$=50. Al final del primer año, (T = 1), la posición de la compañía tiene una distribución normal con:

$E[x(T) - x(0)] = E[x(T) - 50)] = aT$, con lo que $E[x(T)] = 20T + 50 = 70$, y

$Var[x(T) - x(0)] = Var[x(T) - 50] = Var[x(T)] = b^2 T$, y por tanto una desviación estándar de

$\sqrt{Var[x(T)]} = b\sqrt{T} = 30.$

Al final de seis meses, (T = 0.5), tendrá una distribución normal con un valor esperado de $E[x(T)] = 20(0.5) + 50 = 60$, y $\sqrt{Var[x(T)]} = 30\sqrt{0.5} = 21.21$. Note que la desviación estándar, la incertidumbre de la posición de la compañía en un cierto tiempo en el futuro, se incrementa tanto como la raíz cuadrada del tiempo que se quiera anticipar. También, observe que la posición inicial de la compañía puede ser negativa, lo cual puede ser interpretado como que la compañía pide fondos prestados.§

El proceso de Ito

Se puede definir otro tipo de proceso estocástico, el cual se conoce como *el proceso de Ito*. Es un proceso de Wiener generalizado donde los parámetros a y b son funciones de las variables x y el tiempo t. Algebraicamente se le puede representar como:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Con lo que la tasa de cambio de la esperanza y varianza del proceso de Ito son factibles de cambiar en el tiempo.

Lema de Ito

Un resultado importante en el área de los procesos estocásticos fue descubierto por el matemático Kiyoshi Ito en 1951, el cual se conoce como el *lema de Ito*. Supóngase que el valor de la variable x sigue un proceso de Ito:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

donde dz es un proceso de Wiener, a y b son funciones de x y t. La variable Δx tiene una tasa de cambio de valor esperado de $a(x,t)$ y una tasa de cambio de varianza de $b^2(x,t)$. El lema de Ito afirma que una función $f(x,t)$ continua en (x,t), junto con sus derivadas parciales, sigue el siguiente proceso:

$$df(x,t) = \left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}a(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}b^2(x,t)\right]dt + \left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}b(x,t)\right]dz$$

donde dz es el proceso de Wiener ya estudiado. Así $f(x,t)$ también sigue un proceso de Ito con:

tasa de cambio de valor esperado de: $\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}a(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}b^2(x,t)\right]$ y

tasa de cambio de varianza de: $\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}b(x,t)\right]^2$.

Ejemplo

Antes de analizar cualquier aspecto matemático de las acciones, se puede hacer una interpretación práctica y somera de la información financiera que se publica sobre las acciones que cotizan en el *New York Stock Exchange* en un listado que aparece en publicaciones como el *Wall Street Journal*. El siguiente es un listado parcial de varias acciones, donde se analiza a la *Baltimore Gas and Electric*, BaltimrGE.

NEW YORK STOCK EXCHANGE

52 Weeks Hi	Lo	Stock	Sym	Div	Yld %	PE	Vol 100S	Hi	Lo	Close	Net Chg
				-B-B-B-							
29 5/8	17 3/4	BakrHughs	BHI	.46	1.8	dd	2761	26	25 1/2	26	+3/8

19 1/8	16 5/8	BarkFentrs	BKF	1.81e	10.0	...	165	18 1/8	17 7/8	18 1/8	...
25 5/8	17	BaldorElec	BEZ	.40f	1.6	23	66	24 1/2	24 3/8	24 3/8	-1/8
33 7/8	24 3/8	Ball Cp	BLL	1.24	4.4	12	551	28 5/8	28 3/8	28 1/2	-1/4
12 3/4	4 1/4	BallyMfg	BLY		...	dd	6366	10 3/4	10 1/8	10 1/4	-1/4
9 7/8	6	BaltimrBcp	BBB		...	9	3163	10 1/8	9 3/4	9 7/8	+1/4
26 5/8	21 1/2	BaltimrGE	BGE	1.48f	5.7	16	619	26	25 5/8	25 7/8	+1/8
72	61 1/4	BaltimrGE pfB		4.50	6.7	...	z50	67	67	67	-1/2
61 1/2	42 1/8	BancOne	ONE	1.40	2.4	17	5865	58	57 1/2	57 1/2	-3/8
18 1/2	8 3/8	BancFla	BFL		...	10	87	18 5/8	18 1/4	18 5/8	+1/2

Las primeras dos columnas proporcionan la cotización del precio más alto y el más bajo de la acción en las últimas 52 semanas, \$26⅝ y \$21½, respectivamente. El 1.48f significa que los dividendos pagados a los tenedores en el trimestre anterior fue de \$1.48 por acción. Este valor corresponde a una tasa anual del 5.7%, ya que la acción BaltimrGE se vendió en \$25⅞ (el precio de cierre en la penúltima columna), así que la tasa de dividendos es de 1.48/25.875 = 0.0572 o 5.72%.

El listado de las acciones muestra que las tasas de dividendos varían ampliamente entre empresas; tasas altas de dividendos no son necesariamente mejores inversiones que las que tengan menores tasas. Las ganancias totales de un inversionista vienen de sus dividendos y de la apreciación que en el valor de la acción se tenga. Las empresas emisoras que tienen una tasa baja de dividendos presumiblemente ofrecen mejores prospectos de apreciación, ya que de no ser así los inversionistas no estarían dispuestos a mantener esa baja tasa en sus portafolios.

El cociente *P/E* (*price earnings ratio*), es la relación del valor actual de la acción con respecto a las ganancias del año anterior. El cociente *P/E* dice cuánto un comprador de acciones tiene que pagar por dólar de ganancias que la empresa emisora genera por cada acción. El valor *P/E* también varía ampliamente entre empresas emisoras; donde no se reporte una tasa de dividendos y un cociente *P/E* significa que las empresas tuvieron cero dividendos, o cero (o negativas) ganancias.

La columna del volumen reporta que 619 lotes de BaltimrGE fueron comercializados el día anterior a la fecha en que se publicó el listado. Los títulos usualmente se comercializan en lotes de cien cada uno; aquellos inversionistas que quieran lotes de menor cantidad (*"odd lots"*), generalmente deben pagar comisiones mayores a sus agentes de inversión. El precio más alto y el más bajo de las acciones que se comercializaron el día anterior fueron \$26 y \$25⅝ , respectivamente. Finalmente el precio de cierre fue de 25⅞ lo que representó un aumento de ⅛ con respecto al día anterior.§

El modelo estocástico para las acciones.

Los precios de las acciones siguen procesos estocásticos, pero antes de sugerir uno cabe señalar algunos de su aspectos:

- Las acciones que se consideran no pagan dividendos. Por lo que las ganancias serán debidas a la apreciación o depreciación de las mismas, lo que conduce primeramente a considerar los cambios en el precio de las acciones (ΔS) en un pequeño intervalo de tiempo (Δt), y un porcentaje o tasa de rendimiento en dicho periodo ($\frac{\Delta S}{S}$).
- El precio de una acción no puede ser jamás negativo, por lo que el modelo que describe su evolución ha de ser tal que impida la aparición de tales valores.

Para construir el modelo se analiza la tasa de cambio del valor esperado (*expected drift rate*) y la tasa de cambio de la varianza (*variance rate*) de ΔS.

El movimiento en el precio de una acción debe ser, aproximadamente, proporcional a su valor; es decir, que si una acción vale hoy \$100 en un mes puede variar entre \$90 y \$110; si vale \$10 podrá variar aproximadamente entre \$9 y \$11. Lo que implica que si S es el precio de la acción, la tasa de cambio de valor esperado (*expected drift rate*) del precio de la acción deberá ser μS, para algún parámetro constante μ, es decir, $E[S]=\mu S$. Si se considera ahora un intervalo pequeño de tiempo, Δt, el incremento en la tasa de cambio de ΔS deberá ser $\mu S\Delta t$, es decir:

$$E[\Delta S] = \mu S \Delta t$$

El parámetro μ corresponde a la tasa esperada de rendimiento anualizada de la acción en un intervalo pequeño de tiempo. Para identificar plenamente al parámetro se supone una tasa de cambio de varianza (*variance rate*) del precio de la acción siempre de cero, con lo cual se tendría un modelo de la forma:

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

o

$$\frac{S - S_0}{S_0} = \mu \Delta t$$

lo que implica:

$$S = S_0(1 + \mu \Delta t)$$

Donde S_0 es el precio de la acción al tiempo cero. La ecuación muestra que el precio de la acción crece a una tasa de interés anual simple por unidad de tiempo. En promedio μ es 8% más grande que el rendimiento de una inversión libre de riesgo como los bonos del tesoro norteamericano (*Treasury bill*); así, por ejemplo, cuando el rendimiento de un *T-bill* es del 5%, un valor típico para la tasa esperada de rendimiento para la acción sería del 13% anual.

Dado que en realidad una acción no sigue un modelo determinístico, cabe preguntarse cómo ha de ser la varianza de la tasa de rendimiento en un intervalo pequeño de tiempo, es decir, $Var\left[\frac{\Delta S}{S}\right]$. Debe, pues, tener un mismo valor sin importar cual sea el precio de la acción. En otras palabras, un inversionista estará tan indeciso de su tasa de rendimiento cuando el precio de la acción tenga un valor de \$50 ó cuando valga \$10. Se define σ^2 como la tasa de cambio de varianza instantánea (*instantaneous variance rate*) del rendimiento en un pequeño intervalo de tiempo, *i.e.*, $Var[\Delta S/S]/\Delta t=\sigma^2$. Haciendo ahora uso de las propiedades de la varianza, se tiene que:

$$Var[\Delta S] = \sigma^2 S^2 \Delta t$$

Al término σ se le conoce como *la volatilidad del precio de la acción*. Los valores típicos de σ para una acción cualquiera están en el rango de 20 a 40%.

Estos argumentos sugieren que S, el precio de la acción, puede ser representado por un proceso de Ito, el cual tiene una tasa de cambio de valor esperado instantánea (*instantaneous expected drift rate*) de μS y una tasa de cambio de varianza instantánea (*instantaneous variance rate*) de $\sigma^2 S^2$. Lo que se puede expresar de manera discreta como:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta Z$$

Esta ecuación es el modelo más habitual para describir la evolución del precio de las acciones. Este proceso es el llamado *movimiento Browniano geométrico*. Es geométrico en el sentido de que S está presente en la determinación de los parámetros del modelo, es decir, al aumentar o disminuir S también lo hacen sus parámetros y como se mostrará más adelante S no puede jamás alcanzar valores negativos, pues tiene una distribución lognormal. La versión completa del modelo es:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

$$\text{pues} \quad \Delta Z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

donde σ y μ son constantes.

Ejemplo

Considere una acción que no paga dividendos, tiene una volatilidad de 25% al año, y con una tasa esperada de rendimiento del 20% anual. Con estos datos μ = 0.2 y σ = 0.25. El modelo para el precio de la acción es:

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.2\Delta t + 0.25\varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Considere ahora un intervalo de tiempo de una semana o 0.0192 años, y un precio inicial de la acción de \$100. Entonces $\Delta t = 0.0192$, $S = 100$, y

$$\Delta S = 100(0.00384 + 0.03464\varepsilon)$$

$$\Delta S = 0.384 + 3.464\varepsilon$$

lo que muestra que el *cambio en el precio* de la acción tiene una distribución normal con media de \$0.384 y desviación estándar de \$3.464 §

Finalmente, los parámetros del modelo son:

$$E\left[\frac{\Delta S}{S}\right] = E[\mu \Delta t] + \sigma \sqrt{\Delta t}\, E[\varepsilon] = \mu \Delta t$$

$$Var\left[\frac{\Delta S}{S}\right] = 0 + \left(\sigma \sqrt{\Delta t}\right)^2 Var[\varepsilon] = \sigma^2 \Delta t$$

Por tanto;

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t\right)$$

La distribución lognormal en las acciones

Sea X una variable aleatoria positiva, y defínase una nueva variable aleatoria $Y=\ln X$. Si Y se distribuye normalmente con media μ_Y y varianza $\sigma^2{}_Y$, entonces se dice que X se distribuye lognormal. Su función de densidad está dada por:

$$f\left(x;\mu_Y,\sigma_Y^2\right) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} e^{\left[-\frac{\left(\ln x - \mu_Y\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right]} \quad \text{para } x > 0$$

y con:

$$E[X] = e^{\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2}$$

$$Var[X] = e^{2\mu_Y + 2\sigma_Y^2} - e^{2\mu_Y + \sigma_Y^2}$$

La gráfica de una variable que tenga una distribución lognormal, a diferencia de la gráfica de la normal, está solamente definida para valores positivos y está sesgada a la derecha (sesgo positivo, es decir, la cola mayor de la curva se tiende a la derecha) así que su media, mediana y moda son todas diferentes.

Del modelo estocástico propuesto para las acciones se puede tomar la versión continua:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

y del lema de Ito, se sigue que el proceso de una función $f(S,t)$ es:

$$df(S,t) = \left[\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]dt + \left[\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\sigma S\right]dz$$

donde $a = \mu S$ y $b = \sigma S$. Si ahora se define $f(S,t) = \ln S$, entonces:

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial S} = \frac{1}{S} \qquad \frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \qquad \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} = 0 \qquad \text{con lo que:}$$

$$df(S,t) = \left[\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right]dt + [\sigma]dz$$

Como σ y μ son constantes, la ecuación indica que $f(S,t)$ sigue un proceso de Wiener generalizado, y en consecuencia:

$$\Delta f \sim N\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\Delta t, \sigma^2 \Delta t\right)$$

Al tiempo actual $f(S,t) = \ln S$, y en algún tiempo futuro $f(S,T) = \ln S_T$. Su cambio durante el intervalo de tiempo $T-t$ es $\Delta f = \ln S_T - \ln S$ y está normalmente distribuido, con:

$$\ln S_T - \ln S \sim N\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

De las propiedades de la distribución normal (A.2. v) expuestas en el apéndice se sigue que:

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

Lo que muestra que $\ln S_T$ se distribuye normalmente y en consecuencia S_T se distribuye lognormal, y su valor esperado y varianza están dados por:

$$\begin{aligned}
E[S_T] &= e^{\ln S + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} = e^{\ln S + \mu(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\
&= Se^{\mu(T-t)} \\
Var[S_T] &= e^{2[\ln S + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)] + 2\sigma^2(T-t)} - e^{2[\ln S + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)] + \sigma^2(T-t)} \\
&= e^{2\ln S + 2\mu(T-t) - \sigma^2(T-t) + 2\sigma^2(T-t)} - e^{2\ln S + 2\mu(T-t) - \sigma^2(T-t) + \sigma^2(T-} \\
&= e^{\ln S^2 + 2\mu(T-t) + \sigma^2(T-t)} - e^{\ln S^2 + 2\mu(T-t)} \\
&= S^2 e^{2\mu(T-t)}\left[e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right]
\end{aligned}$$

Un intervalo de confianza para S_T puede ser calculado a partir de la distribución normal estándar:

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln S_T - E[\ln S_T]}{\sqrt{Var[\ln S_T]}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ln S_T - \left(\ln S + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \sim N(0,1) \qquad \therefore$$

$$P\left[-Z_{1-\alpha/2} < \frac{\ln S_T - \left(\ln S + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} < Z_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

Donde α es el nivel de significancia de la prueba y es tal que da lugar a un intervalo del (1- α)100% de confianza y $Z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil (percentil) de nivel 1- $\alpha/2$ de una distribución normal estándar.

$$P\left[(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t} + \ln S < \ln S_T < Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t} + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \ln S\right]$$
$$= 1-\alpha$$

$$P\left[e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)-Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t}+\ln S} < S_T < e^{Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t}+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\ln S}\right] = 1-\alpha \quad \therefore$$

$$\left(Se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)-Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t}}, Se^{Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t}+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\right)$$

es un intervalo del (1- $\alpha/2$)100% de confianza para S_T.

Ejemplo

Considere que el precio de una acción vale $50, con una tasa anual de valor esperado del 18%, y una volatilidad del 20% anual. Un intervalo del 90% de confianza para el precio de la acción dentro de medio año viene dado por:

$$\left(Se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)-Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t}}, Se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\left(50e^{\left(0.18-0.5(0.2)^2\right)(0.5)-1.6449(0.2)\sqrt{0.5}}, 50e^{\left(0.18-0.5(0.2)^2\right)(0.5)+1.6449(0.2)\sqrt{0.5}}\right)$$

$$(42.9226, 68.3503) \ \S$$

La distribución de la tasa de rendimiento

La propiedad del precio de las acciones de distribuirse lognormal puede usarse para calcular la distribución de la tasa continua de rendimiento de una acción del tiempo t a T relativamente largo (mayor o igual a un año). Se define la tasa continua de rendimiento anual del tiempo t a T como η.

Por tanto:

$$S_T = Se^{\eta(T-t)} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{1}{T-t}\ln\frac{S_T}{S}, \quad :$$
$$\ln S_T - \ln S = \ln\frac{S_T}{S} \sim N\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

De las propiedades de la distribución normal expuestas en el apéndice (A.2. vi) se sigue que:

$$\frac{1}{T-t}\ln\frac{S_T}{S} \sim N\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2), \frac{\sigma^2}{(T-t)}\right) \quad \therefore$$
$$\eta \sim N\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2), \frac{\sigma^2}{(T-t)}\right)$$

El resultado muestra que la esperanza de la tasa continua de rendimiento es μ - $0.5\sigma^2$. Esto puede parecer extraño, ya que anteriormente μ se definió como el valor esperado de la tasa de rendimiento en un intervalo pequeño de tiempo; y si ahora $\Delta t = T - t$, se tendría que

$$E[S_T] = Se^{\mu(T-t)}$$
$$\ln E[S_T] = \ln S + \mu(T-t)$$
$$\mu = \frac{\ln E[S_T] - \ln S}{(T-t)} = \frac{\ln E\left[\frac{S_T}{S}\right]}{(T-t)} = E\left[\frac{1}{(T-t)}\ln\left(\frac{S_T}{S}\right)\right]$$

Sin embargo esta última igualdad es falsa, pues el logarítmo no es una función lineal, es decir no es cierto que

$$\ln E\left[\frac{S_T}{S}\right] = E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S}\right)\right]$$

Así pues, η se refiere a una tasa compuesta continuamente, mientras que μ se refiere a una tasa de interés (simple) anual en un intervalo de tiempo.

Además, siguiendo el mismo procedimiento que condujo a este resultado pero tomando ahora $f(S,t) = S$ en el lema de Ito, se tiene

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial S} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2} = 0 \qquad \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} = 0$$

Por tanto

$$df(S,t) = \left[\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]dt + \left[\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\sigma S\right]dz$$
$$dS = [\mu S]dt + [\sigma S]dz$$

que en su versión discreta es

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\Delta Z$$

y en consecuencia

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$$

es decir

$$\frac{1}{\Delta t}\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\Delta t}\right)$$

Así

$$\mu = \frac{E\left[\frac{\Delta S}{S}\right]}{\Delta t}$$

Indudablemente esta diferencia es debido a la forma de tomar $f(S,t)$ en el lema de Ito, para el primer el primer caso (η), se toma una función no lineal, para el segundo caso se toma una función lineal.

Ejemplo

Considere una acción con una tasa esperada de rendimiento anual del 20% y una volatilidad del 25% por año. La distribución de la tasa continua de rendimiento η dentro de 18 meses es:

$$\eta \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\eta \sim N\left(0.2 - \frac{0.25^2}{2}, \frac{0.25}{\sqrt{1.5}}\right)$$

$$\eta \sim N(0.168, 0.204)\ \S$$

Se le calculará ahora un intervalo de confianza. Partiendo de la distribución para η se tiene que:

$$\eta \sim N\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2), \frac{\sigma^2}{(T-t)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\eta - E[\eta]}{\sqrt{Var[\eta]}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\eta - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}} \sim N(0,1) \qquad \therefore$$

$$P\left[-Z_{1-\alpha/2} < \frac{\eta - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}} < Z_{1-\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2 - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}} < \eta < \mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2 + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\therefore \quad \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2 - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}, \mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2 + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\right)$$

es un intervalo del $(1-\alpha/2)100\%$ de confianza para η.

Estimación de la volatilidad histórica

Para calcular empíricamente la volatilidad del precio de las acciones, usualmente se observa el precio de las acciones en intervalos iguales de tiempo (por ejemplo, diariamente, semanalmente, o mensualmente).

Se define:

$n+1$: el número de observaciones
S_i: el precio de la acción al final del i-ésimo intervalo ($i = 0,1,\dots, n$)
τ : la longitud de cada intervalo de tiempo en años

y sea

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Como $S_i = S_{i-1}e^{u_i}$, u_i es la tasa continua de rendimiento en el i-ésimo intervalo. Dado que $u_i \sim N(\mu', \sigma'^2)$, siendo:

$$\mu' = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t) = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\tau, \text{ y}$$

$$\sigma'^2 = \sigma^2(T-t) = \sigma^2\tau$$

entonces $u_1, u_2, \dots, u_n$ es una muestra aleatoria de n elementos de una distribución normal.

La varianza muestral s^2 dada por:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2 \quad \text{o}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2$$

siendo $\overline{u}$ la media de las u_i; es un estimador usual de la varianza, por lo que puede usarse para estimar a σ^2. Como $Var[u_i] = \sigma^2\tau$, la varianza muestral s^2 es por tanto un estimador de $\sigma^2\tau$, luego entonces σ^2 puede ser estimada por $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{s^2}{\tau}$$

Para aproximar un error del estimador ($\hat{\sigma}$) se hará uso del estimador máximo-verosímil de una distribución normal, tal estimador en este caso es[2]:

$$s'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2$$

Cuando el tamaño muestral n es grande, la diferencia de utilizar n, n - 1 o n + 1 como divisor en el estimador de $\sigma^2\tau$ es pequeña; los estimadores s^2 y s'^2 serán entonces aproximadamente iguales. Ahora, tal estimador cumple con las propiedades establecidas en el apéndice (A.4. iv) y por la propiedad de invarianza de los estimadores máximo-verosímiles, el estimador máximo-verosímil de $\sigma\sqrt{\tau}$ es:

$$s = \hat{\sigma}\sqrt{\tau} \qquad \text{o} \qquad \hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

ya que $\sigma\sqrt{\tau}$ es la raíz cuadrada positiva (una función con inversa) de la varianza. Además, es asintóticamente eficiente con distribución asintótica normal, es decir;

$$s \sim N\left(\sigma', \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\sigma'}\ln f(U;\sigma')\right)^2\right]}\right)$$

Para calcular la varianza del estimador s, se observa que:

---

[2]*La función de verosimilitud para una muestra de tamaño n de una distribución normal con parámetros* μ' *y* σ'^2 *está dada por:*

$$L = \left(\frac{1}{2\pi\sigma'^2}\right)^{n/2} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(u_i - \mu')^2}{2\sigma'^2}}$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma'^2) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(u_i - \mu')^2}{2\sigma'^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma'} = -\dfrac{n}{2\sigma'^2} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \mu')^2}{2\sigma'^4} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu'} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \mu')}{\sigma'^2} = 0 \end{cases} \qquad \text{resolviendo el sistema}$$

$$\hat{\mu}'_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n}u_i}{n} = \overline{u} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}'^2_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2}{n}$$

$$f(u,\mu',\sigma') = \frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu')^2}{2\sigma'^2}}$$

$$\ln f(u,\mu',\sigma') = -\frac{(u-\mu')^2}{2\sigma'^2} - \ln\sigma' - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\frac{\partial \ln f(u,\mu',\sigma')}{\partial\sigma'} = (u-\mu')^2\sigma'^{-3} - \frac{1}{\sigma'}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(u,\mu',\sigma')}{\partial\sigma'^2} = -\frac{3(u-\mu')^2}{\sigma'^4} + \frac{1}{\sigma'^2}, \qquad \text{como}$$

$$E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\sigma'}\ln f(U;\sigma')\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\sigma'^2}\ln f(U;\sigma')\right] \qquad \text{se tiene que}$$

$$E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\sigma'}\ln f(U;\sigma')\right)^2\right] = \frac{3}{\sigma'^4}E\left[(u-\mu')^2\right] - \frac{1}{\sigma'^2}$$

$$= \frac{3\sigma'^2}{\sigma'^4} - \frac{1}{\sigma'^2} = \frac{2}{\sigma'^2} \qquad \therefore$$

$$1/nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\sigma'}\ln f(U;\sigma')\right)^2\right] = \frac{\sigma'^2}{2n} \qquad \Rightarrow \qquad s \sim N\left(\sigma', \frac{\sigma'^2}{2n}\right), \text{ es decir}$$

$$s \sim N\left(\sigma\sqrt{\tau}, \frac{\sigma^2\tau}{2n}\right).$$

Y aplicando las propiedades de la distribución normal (A.2. vi) se concluye que:

$$\frac{s}{\sqrt{\tau}} \sim N\left(\frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}, \frac{\sigma^2\tau}{2n\tau}\right)$$

$$\hat{\sigma} \sim N\left(\sigma, \frac{\sigma^2}{2n}\right)$$

De esta forma el error de este estimador es aproximadamente:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}} = \frac{s}{\sqrt{2\tau n}}$$

Una manera de elegir n que funcione razonablemente bien es tomar el cierre de los precios de las acciones diarias de los últimos 90 a 180 días más recientes (los días en que la casa de bolsa se encuentre cerrada han de ser ignorados para el mejor cálculo de la volatilidad).

Este análisis supone que la acción no paga dividendos, lo que puede arreglarse para una acción que sí los paga sustituyendo la fórmula por

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i + div}{S_{i-1}}\right)$$

donde div es el dividendo pagado en el día i (ver la sección *dividendos en la ecuación diferencial de Black & Scholes* del capítulo III).

Ejemplo

---

1. Considere una acción con una tasa esperada de rendimientos del 14% anual y una volatilidad anual del 20%. Se tomarán intervalos de tiempo de 3.65 días, es decir, $\Delta t = 0.01$ años. Como:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu\Delta t, \sigma^2 \Delta t\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sim N(0.0014, 0.0004)$$

El método de *Monte Carlo* aproxima el comportamiento de los precios financieros usando simulaciones por computadora para generar trayectorias aleatorias del precio. Las simulaciones se basan en extracciones aleatorias de una variable de una distribución probabilística deseada. Un buen algoritmo generará números que parecen independientes en el tiempo, si tal sucesión es verdaderamente aleatoria es un asunto que no se discutirá. Los buenos algoritmos generadores de números aleatorios deben generar series que pasen todas las pruebas convencionales de independencia; de no ser así, las características de los precios simulados tendrán un comportamiento diferente al estudiado. MATLAB ofrece un generador de números aleatorios a través de su función `randn`, que se distribuye normalmente con media cero y varianza uno.

Una trayectoria para el precio de las acciones se puede simular tomando repetidamente muestras de $N(0.0014, 0.0004)$. Una manera de hacerlo es tomar muestras de $\varepsilon \sim N(0, 1)$, para luego transformarlas usando la relación:

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.0014 + 0.02\varepsilon_t$$

Las tablas al final del capítulo muestran dos simulaciones particulares de los movimientos de los precios de las acciones en 89 periodos. Se supone un precio inicial de la acción de \$20. En el escenario A, para el primer periodo el número aleatorio generado es 0.6577 (se muestran sólo cuatro cifras decimales) con lo que $\frac{\Delta S}{S} = 0.0146$ y $S_1 = 20.2911$. También se muestran la parte determinística de la trayectoria y la componente estocástica.

Se calcula ahora la esperanza y varianza del precio de la acción.

$$\begin{aligned} E[S_T] &= Se^{\mu(T-t)} \\ &= 20e^{(0.14)(0.89)} \\ &= 22.6539 \\ Var[S_T] &= S^2 e^{2\mu(T-t)}\left[e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right] \\ &= 20^2 e^{2(0.14)(0.89)}[e^{0.2^2(0.89)} - 1] \\ &= 18.5989 \end{aligned}$$

El intervalo de 95% de confianza para S_T viene dado por:

$$\left(Se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)-Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t}}, Se^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+Z_{1-\alpha/2}\sigma\sqrt{T-t}}\right) =$$

$$\left(20e^{\left(0.14-0.5(0.2)^2\right)(0.89)-1.96(0.2)\sqrt{0.89}},\ 20e^{\left(0.14-0.5(0.2)^2\right)(0.89)+1.96(0.2)\sqrt{0.89}}\right) =$$

$(15.3746, 32.2121)$.

Por lo que, del valor final del precio de la acción de 100 trayectorias diferentes que se puedan generar se tiene la confianza de que en 95 de ellas el valor final estará dentro del intervalo. En este ejemplo, \$20.833 es el precio final de la acción en el escenario A; \$24.4723 en el escenario B, y ambos precios están en el intervalo.

El intervalo de 95% de confianza para la tasa continua de rendimiento anual η viene dado por:

$$\left(\mu-\tfrac{1}{2}\sigma^2-Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}},\ \mu-\tfrac{1}{2}\sigma^2+Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\right)$$

$$=\left(0.14-0.5(0.2)^2-\frac{1.96(0.2)}{\sqrt{0.89}},\ 0.14-0.5(0.2)^2+\frac{1.96(0.2)}{\sqrt{0.89}}\right)$$

$=(-0.2955,\ 0.5355)$ o

$(-29.55\%,\ 53.55\%)$

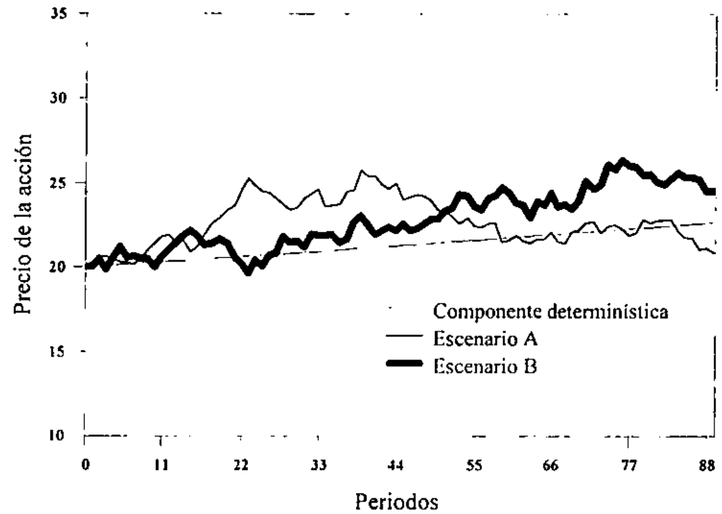
es decir, que para varios escenarios la tasa continua de rendimiento estará en el intervalo en el 95% de los casos. Para estos escenarios se tiene que:

$$\eta=\frac{1}{T-t}\ln\left[\frac{S_T}{S}\right]$$

$$\eta=\frac{1}{0.89}\ln\left[\frac{20.833}{20}\right]=0.0458 \text{ o } 4.45\% \text{ para el escenario A, y}$$

$$\eta=\frac{1}{0.89}\ln\left[\frac{24.4723}{20}\right]=0.2267 \text{ o } 22.67\% \text{ para el escenario B.}$$

en ambos casos las tasas están dentro del intervalo.



SIMULACIÓN DE TRAYECTORIAS

2. Se calculará ahora la volatilidad histórica de las acción de Telmex (Última tabla)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2} \text{ donde } u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \text{ y } u_i = \ln\left(\frac{S_i + div}{S_{i-1}}\right)$$

en los días que pagan dividendos. Haciendo los cálculos pertinentes (aproximandos a cuatro decimales) se encuentra que:

$$\sum_{i=1}^{89} u_i = 0.3572 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{89} u_i^2 = 0.0578 \quad \therefore \; s = 0.0253$$

Dado que el año tiene 52 semanas, hay 104 días no laborables (sábados y domingos) y 9 días feriados; lo que hace un total de 252 días laborables. Por tanto:

$$\tau = \frac{1}{252} = 0.0039 \text{ años}$$

y el valor de la volatilidad es:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}} = \frac{0.0253}{\sqrt{0.0039}} = 0.4019 \quad \text{o} \quad 40.1901\% \text{ anual}$$

con un error aproximado de:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}} = \frac{0.4019}{\sqrt{2(89)}} = 0.0301 \quad \text{o} \quad 3.01\% \text{ por año.}$$

ESCENARIO A					
Periodo i	Variable Aleatoria ε_i	Parte determinística de la Trayectoria $S_i = S_{i-1}(1 + \mu i \Delta t)$	Componente Estocástica $\sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} = 0.02\varepsilon_i$	Modelo $\Delta S/S = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$ $\Delta S/S = 0.0014 + 0.02\varepsilon_i$	Precio de la Acción $S_i = S_{i-1}(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}) + S_{i-1}$ $S_i = S_{i-1}(0.0014 + 0.02\varepsilon_i) + S_{i-}$
0		20.00			20
1	0.6577	20.0280	0.0132	0.0146	20.2911
2	0.6459	20.0560	0.0129	0.0143	20.5816
3	0.1034	20.0840	0.0021	0.0035	20.6530
4	-0.4585	20.1120	-0.0092	-0.0078	20.4925
5	-0.5934	20.1400	-0.0119	-0.0105	20.2780
6	-0.0726	20.1680	-0.0015	-0.0001	20.2769
7	-0.3399	20.1960	-0.0068	-0.0054	20.1675
8	0.8933	20.2240	0.0179	0.0193	20.5560
9	1.0221	20.2520	0.0204	0.0218	21.0050
10	0.8085	20.2800	0.0162	0.0176	21.3741
11	1.0096	20.3080	0.0202	0.0216	21.8356
12	0.0050	20.3360	0.0001	0.0015	21.8683
13	-1.0026	20.3640	-0.0201	-0.0187	21.4604
14	0.1160	20.3920	0.0023	0.0037	21.5403
15	-1.5191	20.4200	-0.0304	-0.0290	20.9160
16	0.5459	20.4480	0.0109	0.0123	21.1736
17	1.6312	20.4760	0.0326	0.0340	21.8940
18	1.4386	20.5040	0.0288	0.0302	22.5546
19	0.7235	20.5320	0.0145	0.0159	22.9125
20	0.9540	20.5600	0.0191	0.0205	23.3818
21	0.5126	20.5880	0.0103	0.0117	23.6542
22	1.8118	20.6160	0.0362	0.0376	24.5445
23	1.3913	20.6440	0.0278	0.0292	25.2618
24	-0.8564	20.6720	-0.0171	-0.0157	24.8645
25	-0.8454	20.7000	-0.0169	-0.0155	24.4789
26	-0.1610	20.7280	-0.0032	-0.0018	24.4344
27	-0.7925	20.7560	-0.0159	-0.0145	24.0813
28	-0.7443	20.7840	-0.0149	-0.0135	23.7565
29	-0.8668	20.8120	-0.0173	-0.0159	23.3779
30	0.3037	20.8400	0.0061	0.0075	23.5526
31	1.0347	20.8680	0.0207	0.0221	24.0730
32	0.5847	20.8960	0.0117	0.0131	24.3883
33	0.3957	20.9240	0.0079	0.0093	24.6154
34	-2.0622	20.9520	-0.0412	-0.0398	23.6346
35	0.0343	20.9800	0.0007	0.0021	23.6839
36	-0.0129	21.0080	-0.0003	0.0011	23.7110
37	1.6226	21.0360	0.0325	0.0339	24.5136
38	0.1014	21.0640	0.0020	0.0034	24.5977
39	2.2763	21.0920	0.0455	0.0469	25.7519
40	-0.7517	21.1200	-0.0150	-0.0136	25.4008
41	-0.0415	21.1480	-0.0008	0.0006	25.4153
42	-1.0247	21.1760	-0.0205	-0.0191	24.9300
43	-0.6199	21.2040	-0.0124	-0.0110	24.6558
44	0.5652	21.2320	0.0113	0.0127	24.9691

45	-2.0003	21.2600	-0.0400	-0.0386	24.0051
46	0.2276	21.2880	0.0046	0.0060	24.1480
47	0.2455	21.3160	0.0049	0.0063	24.3004
48	-0.2975	21.3440	-0.0060	-0.0046	24.1898
49	-0.5113	21.3720	-0.0102	-0.0088	23.9763
50	-1.2899	21.4000	-0.0258	-0.0244	23.3913
51	-0.3935	21.4280	-0.0079	-0.0065	23.2400
52	-0.5470	21.4560	-0.0109	-0.0095	23.0183
53	-1.0776	21.4840	-0.0216	-0.0202	22.5544
54	0.7626	21.5120	0.0153	0.0167	22.9300
55	-1.1721	21.5400	-0.0234	-0.0220	22.4246
56	-0.1611	21.5680	-0.0032	-0.0018	22.3837
57	0.3517	21.5960	0.0070	0.0084	22.5725
58	0.0872	21.6240	0.0017	0.0031	22.6435
59	-2.6789	21.6520	-0.0536	-0.0522	21.4620
60	0.2997	21.6800	0.0060	0.0074	21.6206
61	0.5310	21.7080	0.0106	0.0120	21.8805
62	-0.8444	21.7360	-0.0169	-0.0155	21.5416
63	-0.3458	21.7640	-0.0069	-0.0055	21.4228
64	0.4568	21.7920	0.0091	0.0105	21.6486
65	-0.0308	21.8200	-0.0006	0.0008	21.6655
66	0.8689	21.8480	0.0174	0.0188	22.0724
67	-1.2313	21.8760	-0.0246	-0.0232	21.5597
68	-0.3949	21.9040	-0.0079	-0.0065	21.4196
69	1.4934	21.9320	0.0299	0.0313	22.0894
70	0.2758	21.9600	0.0055	0.0069	22.2421
71	0.8241	21.9880	0.0165	0.0179	22.6399
72	0.0968	22.0160	0.0019	0.0033	22.7154
73	-1.6118	22.0440	-0.0322	-0.0308	22.0149
74	0.8808	22.0720	0.0176	0.0190	22.4336
75	0.0427	22.1000	0.0009	0.0023	22.4841
76	-0.4924	22.1280	-0.0098	-0.0084	22.2942
77	-1.0447	22.1560	-0.0209	-0.0195	21.8596
78	0.2638	22.1840	0.0053	0.0067	22.0055
79	1.7886	22.2120	0.0358	0.0372	22.8235
80	-0.4525	22.2400	-0.0091	-0.0077	22.6489
81	0.1448	22.2680	0.0029	0.0043	22.7462
82	-0.0262	22.2960	-0.0005	0.0009	22.7662
83	0.1312	22.3240	0.0026	0.0040	22.8578
84	-1.5753	22.3520	-0.0315	-0.0301	22.1696
85	-1.0182	22.3800	-0.0204	-0.0190	21.7492
86	-0.1339	22.4080	-0.0027	-0.0013	21.7214
87	-1.5759	22.4360	-0.0315	-0.0301	21.0672
88	0.1340	22.4640	0.0027	0.0041	21.1532
89	-0.8268	22.4920	-0.0165	-0.0151	20.8330

ESCENARIO B

Periodo i	Variable Aleatoria ε_i	Parte determinística de la Trayectoria $S_i = S_{i-1}(1 + \mu i \Delta t)$	Componente Estocástica $\sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} = 0.02\varepsilon_i$	Modelo $\Delta S/S = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$ $\Delta S/S = 0.0014 + 0.02\varepsilon_i$	Precio de la Acción $S_i = S_{i-1}(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}) + S_{i-1}$ $S_i = S_{i-1}(0.0014 + 0.02\varepsilon_i) + S_{i-1}$
0		20.00			20
1	-0.0556	20.0280	-0.0011	0.0003	20.0058
2	1.2193	20.0560	0.0244	0.0258	20.5216
3	-1.6312	20.0840	-0.0326	-0.0312	19.8809
4	1.5825	20.1120	0.0317	0.0331	20.5379
5	1.4723	20.1400	0.0294	0.0308	21.1715
6	-1.4128	20.1680	-0.0283	-0.0269	20.6029
7	0.0662	20.1960	0.0013	0.0027	20.6590
8	-0.4225	20.2240	-0.0085	-0.0071	20.5133
9	-0.1736	20.2520	-0.0035	-0.0021	20.4708
10	-1.1391	20.2800	-0.0228	-0.0214	20.0331
11	1.5095	20.3080	0.0302	0.0316	20.6659
12	0.8902	20.3360	0.0178	0.0192	21.0628
13	0.8888	20.3640	0.0178	0.0192	21.4667
14	0.8245	20.3920	0.0165	0.0179	21.8507
15	0.6275	20.4200	0.0125	0.0139	22.1555
16	-0.6181	20.4480	-0.0124	-0.0110	21.9127
17	-1.4253	20.4760	-0.0285	-0.0271	21.3187
18	0.0611	20.5040	0.0012	0.0026	21.3746
19	0.7002	20.5320	0.0140	0.0154	21.7039
20	-0.7084	20.5600	-0.0142	-0.0128	21.4268
21	-2.0674	20.5880	-0.0413	-0.0399	20.5708
22	-0.8597	20.6160	-0.0172	-0.0158	20.2459
23	-1.5535	20.6440	-0.0311	-0.0297	19.6452
24	1.9046	20.6720	0.0381	0.0395	20.4211
25	-0.9652	20.7000	-0.0193	-0.0179	20.0554
26	1.5421	20.7280	0.0308	0.0322	20.7021
27	0.2700	20.7560	0.0054	0.0068	20.8428
28	2.2929	20.7840	0.0459	0.0473	21.8278
29	-0.8889	20.8120	-0.0178	-0.0164	21.4703
30	0.0987	20.8400	0.0020	0.0034	21.5427
31	-0.8691	20.8680	-0.0174	-0.0160	21.1984
32	1.7331	20.8960	0.0347	0.0361	21.9629
33	-0.2042	20.9240	-0.0041	-0.0027	21.9039
34	-0.1117	20.9520	-0.0022	-0.0008	21.8857
35	0.0170	20.9800	0.0003	0.0017	21.9237
36	-1.1520	21.0080	-0.0230	-0.0216	21.4493
37	0.5118	21.0360	0.0102	0.0116	21.6989
38	2.3237	21.0640	0.0465	0.0479	22.7377
39	0.6541	21.0920	0.0131	0.0145	23.0670
40	-1.2813	21.1200	-0.0256	-0.0242	22.5082
41	-1.2927	21.1480	-0.0259	-0.0245	21.9578
42	0.3652	21.1760	0.0073	0.0087	22.1489
43	0.4356	21.2040	0.0087	0.0101	22.3729
44	-0.5587	21.2320	-0.0112	-0.0098	22.1542

45	0.8799	21.2600	0.0176	0.0190	22.5751
46	-0.9299	21.2880	-0.0186	-0.0172	22.1869
47	0.1210	21.3160	0.0024	0.0038	22.2716
48	0.5953	21.3440	0.0119	0.0133	22.5680
49	0.5966	21.3720	0.0119	0.0133	22.8688
50	-0.1854	21.4000	-0.0037	-0.0023	22.8160
51	1.0175	21.4280	0.0204	0.0218	23.3123
52	0.2831	21.4560	0.0057	0.0071	23.4770
53	1.6722	21.4840	0.0334	0.0348	24.2950
54	-0.2890	21.5120	-0.0058	-0.0044	24.1886
55	-1.3426	21.5400	-0.0269	-0.0255	23.5729
56	-0.4181	21.5680	-0.0084	-0.0070	23.4088
57	1.3174	21.5960	0.0263	0.0277	24.0584
58	0.2487	21.6240	0.0050	0.0064	24.2117
59	0.9373	21.6520	0.0187	0.0201	24.6995
60	-0.6704	21.6800	-0.0134	-0.0120	24.4029
61	-1.3222	21.7080	-0.0264	-0.0250	23.7917
62	-0.2962	21.7360	-0.0059	-0.0045	23.6841
63	-1.6376	21.7640	-0.0328	-0.0314	22.9415
64	1.9695	21.7920	0.0394	0.0408	23.8774
65	-0.5410	21.8200	-0.0108	-0.0094	23.6524
66	1.5667	21.8480	0.0313	0.0327	24.4267
67	-1.7165	21.8760	-0.0343	-0.0329	23.6223
68	0.1251	21.9040	0.0025	0.0039	23.7145
69	-0.6077	21.9320	-0.0122	-0.0108	23.4595
70	1.0272	21.9600	0.0205	0.0219	23.9742
71	2.2951	21.9880	0.0459	0.0473	25.1083
72	-0.9516	22.0160	-0.0190	-0.0176	24.6656
73	0.4305	22.0440	0.0086	0.0100	24.9125
74	2.2101	22.0720	0.0442	0.0456	26.0485
75	-0.4771	22.1000	-0.0095	-0.0081	25.8365
76	0.9128	22.1280	0.0183	0.0197	26.3443
77	-0.6967	22.1560	-0.0139	-0.0125	26.0141
78	-0.1454	22.1840	-0.0029	-0.0015	25.9749
79	-1.0875	22.2120	-0.0218	-0.0204	25.4463
80	0.1369	22.2400	0.0027	0.0041	25.5516
81	-1.1085	22.2680	-0.0222	-0.0208	25.0209
82	-0.2812	22.2960	-0.0056	-0.0042	24.9151
83	0.5643	22.3240	0.0113	0.0127	25.2312
84	0.6831	22.3520	0.0137	0.0151	25.6113
85	-0.6915	22.3800	-0.0138	-0.0124	25.2930
86	0.0103	22.4080	0.0002	0.0016	25.3336
87	-0.4290	22.4360	-0.0086	-0.0072	25.1517
88	-1.4203	22.4640	-0.0284	-0.0270	24.4724
89	-0.7020	22.4920	-0.0014	0.0000	24.4723

TELMEX					
Periodo i	Fecha	Cierre	Dividendos	S_i/S_{i-1}	$\ln(S_i/S_{i-1})$
0		47.7500			
1	11-Dic-98	48.7500		1.0209	0.0207
2	14-Dic-98	46.8750		0.9615	-0.0392
3	15-Dic-98	46.6875		0.9960	-0.0040
4	16-Dic-98	45.8125		0.9813	-0.0189
5	17-Dic-98	47.3125		1.0327	0.0322
6	18-Dic-98	48.5625	0.4100	1.0351	0.0345
7	21-Dic-98	49.5625		1.0206	0.0204
8	22-Dic-98	49.6250		1.0013	0.0013
9	23-Dic-98	50.2500		1.0126	0.0125
10	24-Dic-98	49.6250		0.9876	-0.0125
11	28-Dic-98	50.0000		1.0076	0.0075
12	29-Dic-98	49.4375		0.9888	-0.0113
13	30-Dic-98	49.0000		0.9912	-0.0089
14	31-Dic-98	48.6875		0.9936	-0.0064
15	4-Ene-99	49.0625		1.0077	0.0077
16	5-Ene-99	48.7500		0.9936	-0.0064
17	6-Ene-99	48.8125		1.0013	0.0013
18	7-Ene-99	48.1875		0.9872	-0.0129
19	8-Ene-99	46.2500		0.9598	-0.0410
20	11-Ene-99	45.4375		0.9824	-0.0177
21	12-Ene-99	43.8750		0.9656	-0.0350
22	13-Ene-99	42.2500		0.9630	-0.0377
23	14-Ene-99	42.9375		1.0163	0.0161
24	15-Ene-99	47.7500		1.1121	0.1062
25	19-Ene-99	48.1250		1.0079	0.0078
26	20-Ene-99	50.1875		1.0429	0.0420
27	21-Ene-99	49.9375		0.9950	-0.0050
28	22-Ene-99	49.1250		0.9837	-0.0164
29	25-Ene-99	48.6875		0.9911	-0.0089
30	26-Ene-99	48.5625		0.9974	-0.0026
31	27-Ene-99	48.5625		1.0000	0.0000
32	28-Ene-99	51.8125		1.0669	0.0648
33	29-Ene-99	51.1250		0.9867	-0.0134
34	1-Feb-99	51.6875		1.0110	0.0109
35	2-Feb-99	51.6875		1.0000	0.0000
36	3-Feb-99	52.7500		1.0206	0.0203
37	4-Feb-99	52.0000		0.9858	-0.0143
38	5-Feb-99	53.0000		1.0192	0.0190
39	8-Feb-99	53.2656		1.0050	0.0050
40	9-Feb-99	51.1250		0.9598	-0.0410
41	10-Feb-99	51.2500		1.0024	0.0024
42	11-Feb-99	53.2500		1.0390	0.0383
43	12-Feb-99	52.7500		0.9906	-0.0094
44	16-Feb-99	53.5625		1.0154	0.0153
45	17-Feb-99	52.6875		0.9837	-0.0165
46	18-Feb-99	54.0625		1.0261	0.0258
47	19-Feb-99	56.1875		1.0393	0.0386
48	22-Feb-99	58.8125		1.0467	0.0457

49	23-Feb-99	58.1250		0.9883	-0.0118
50	24-Feb-99	57.7500		0.9935	-0.0065
51	25-Feb-99	57.1875		0.9903	-0.0098
52	26-Feb-99	57.1875		1.0000	0.0000
53	1-Mar-99	56.8750		0.9945	-0.0055
54	2-Mar-99	55.3125		0.9725	-0.0279
55	3-Mar-99	55.1875		0.9977	-0.0023
56	4-Mar-99	55.1875		1.0000	0.0000
57	5-Mar-99	58.3125		1.0566	0.0551
58	8-Mar-99	60.7500		1.0418	0.0410
59	9-Mar-99	62.0000		1.0206	0.0204
60	10-Mar-99	65.5000	0.3600	1.0623	0.0604
61	11-Mar-99	64.8125		0.9895	-0.0106
62	12-Mar-99	63.5625		0.9807	-0.0195
63	15-Mar-99	63.7500		1.0029	0.0029
64	16-Mar-99	66.1875		1.0382	0.0375
65	17-Mar-99	66.0000		0.9972	-0.0028
66	18-Mar-99	65.3750		0.9905	-0.0095
67	19-Mar-99	65.1250		0.9962	-0.0038
68	22-Mar-99	63.8750		0.9808	-0.0194
69	23-Mar-99	62.2500		0.9746	-0.0258
70	24-Mar-99	62.2656		1.0003	0.0003
71	25-Mar-99	64.5625		1.0369	0.0362
72	26-Mar-99	63.1875		0.9787	-0.0215
73	29-Mar-99	65.4375		1.0356	0.0350
74	30-Mar-99	65.5000		1.0010	0.0010
75	31-Mar-99	66.0000		1.0076	0.0076
76	1-Abr-99	65.6250		0.9943	-0.0057
77	5-Abr-99	68.4375		1.0429	0.0420
78	6-Abr-99	69.8750		1.0210	0.0208
79	7-Abr-99	70.0000		1.0018	0.0018
80	8-Abr-99	70.0000		1.0000	0.0000
81	9-Abr-99	68.6250		0.9804	-0.0198
82	12-Abr-99	69.3750		1.0109	0.0109
83	13-Abr-99	67.6250		0.9748	-0.0255
84	14-Abr-99	68.2500		1.0092	0.0092
85	15-Abr-99	69.0000		1.0110	0.0109
86	16-Abr-99	69.3125		1.0045	0.0045
87	19-Abr-99	68.6875		0.9910	-0.0091
88	20-Abr-99	67.3125		0.9800	-0.0202
89	21-Abr-99	67.3125		1.0000	0.0000

CAPÍTULO II

EL MÉTODO BINOMIAL EN LA VALUACIÓN DE OPCIONES

La introducción ofrece una breve exposición de las principales definiciones y características (los perfiles de pérdidas y ganancias) que coadyuvan al mejor entendimiento de los títulos opcionales de compra y venta. Además, se establece la terminología que se usará a lo largo del capítulo. El núcleo del capítulo es la distribución binomial, que constituye un elemento básico en la construcción del modelo de valoración de opciones; y como se verá, en el caso límite converge a la bien conocida fórmula de Black & Scholes. Al lado de las relaciones matemáticas, otros conceptos son necesarios en su desarrollo: el arbitraje y la inversión indiferente al riesgo.

Uno de los grandes mercados que comercializa con los contratos de opciones es el *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), estos contratos están suscritos a (bienes subyacentes) acciones, índices accionarios, monedas extranjeras, productos agropecuarios, metales preciosos y futuros de tasas de interés. Aunque sus diferencias son de carácter cuantitativo, entre otras, las más transparentes son las que se suscriben sobre acciones y son las que se presentan.

Una opción otorga el derecho pero no la obligación de comprar (o vender) un cierto bien subyacente a un precio establecido y durante un período determinado.

El *precio de ejercicio* de una opción (*X, e«x»ercise*; *K, stri«k»e*) es el precio de compra o venta del bien subyacente y a la fecha de contrato se denomina *expiración* o *fecha de vencimiento* $(T - t)$.

Las opciones se clasifican:

- **Opciones de compra** (*Call, "C"*). Este tipo de opciones otorgan a su tenedor, el derecho de adquirir el bien subyacente a una fecha futura determinada para un precio establecido.
- **Opciones de venta** (*Put, "P"*). Este tipo de opciones otorgan a su tenedor, el derecho de vender el bien subyacente a una fecha futura determinada para un precio establecido.

Existen dos posiciones en cada contrato. Por una parte está el inversionista que ha tomado la *posición larga* (*long position*), es decir, ha comprado la opción. Por la otra está el inversionista que ha tomado la *posición corta* (*short position*), es decir, ha vendido o suscrito la opción. El suscriptor de la opción recibe un pago, pero posteriormente tendrá responsabilidades potenciales.

Prima

El inversionista que utiliza las opciones debe pagar una prima (*premium*), la cual representa la compensación del comprador por el poder de ejercer la opción si el hacerlo le proporciona ganancias, y se compone de los siguientes valores:

- **Valor Intrínseco.** Se define como el máximo de cero y de el valor que tendría si fuera ejercida inmediatamente. Por lo que para las opciones de compra (Call) es el máx$[S_T - X, 0]$, siendo S_T el precio de mercado de la acción (S_T, *«S»pot*). Para las opciones de venta (Put) es el máx$[X - S_T, 0]$. Durante la vida de una opción se dice que está *dentro del dinero* (*in-the-money*) cuando ésta tiene un valor intrínseco, *en el dinero* (*at-the-money*) cuando el precio de ejercicio y el de mercado son iguales, *fuera de dinero* (*out-of-the-money*) cuando el ejercerla no produce ninguna ganancia o cuando no tiene valor intrínseco. Lo que muestra claramente que una opción será ejercida solamente si está dentro del dinero.

- **Valor Extrínseco.** La diferencia entre el valor de la prima de la opción y su valor intrínseco es llamada el *valor en el tiempo* (*time value*) *de la opción o valor extrínseco*. Este valor hace referencia a la posibilidad de esperar, y no ejercer inmediatamente la opción, para que el precio de mercado se sitúe en una posición favorable. Es importante notar que cuando la opción está a punto de vencer (expirar) el único valor que tiene es su valor intrínseco.

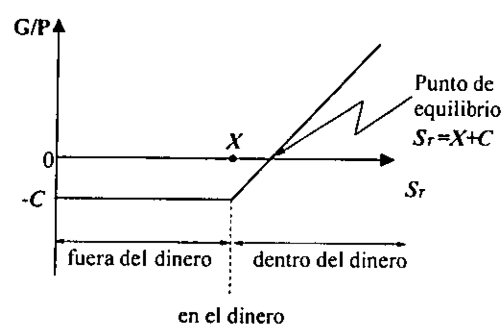
Una opción que puede ser solamente ejercida al vencimiento se le denomina *Europea* (y se le denotará con una letra minúscula) y una opción que puede ser ejercida en cualquier momento de la vida del contrato se le llama *Americana* (se le denotará con una letra mayúscula).

Perfiles de pérdidas y ganancias

Los diagramas de pagos relacionan dos cosas: el precio del bien subyacente (acciones, petróleo, etc.) y las ganancias o pérdidas de la opción en la fecha de vencimiento. Así, no sólo se considera el valor intrínseco de la opción, sino que se incluye el valor que se pagó o se recibió por la prima, según sea el caso.

Perfil de un Call largo

Este es el perfil básico *al vencimiento del contrato* cuando se ha adquirido una opción de compra, es decir, cuando el inversionista tiene una posición larga. En la gráfica se puede observar que si el precio de mercado de la acción (S_T) en la fecha de vencimiento es menor al precio de ejercicio (X) entonces la opción no tiene ningún valor; la opción expira fuera del dinero y el comprador de la Call pierde la prima C que pagó por la opción. Si por el contrario el precio de mercado de la acción estuviera por arriba del precio de ejercicio, entonces la opción tiene valor y está dentro del dinero, por lo que se puede comprar la acción a X, siendo que su precio de mercado es más alto. Entre más alto sea el precio de mercado mayor será el beneficio que obtenga la posición larga.



Perfil de ganancias para un Call largo

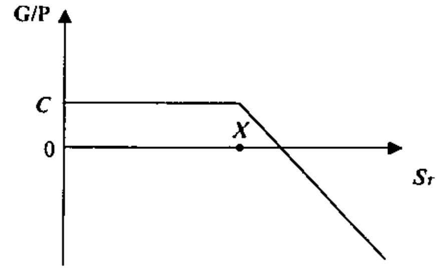
Cabe hacer notar que no se obtiene el beneficio de todo el valor intrínseco cuando el precio de la acción S_t es mayor que X, debido a que se tuvo que pagar una cantidad C al principio de la operación. $S_T - X$ sería el beneficio de ejercer la opción, pero se llega al *punto de equilibrio* (*break-even point*) hasta que $S_T = X + C$ para recuperar el precio pagado por la opción[1]. Sólo a precios mayores del punto de equilibrio, $S_T > X + C$, se obtendrían ganancias "reales" de haber comprado la opción[2]. Se mostrará ahora lo que sucede con el emisor de este instrumento.

Perfil de un Call corto

El emisor o suscriptor de la opción de compra recibe la prima C y se compromete a vender al comprador el bien subyacente (S_T) a un precio de X. A lo largo de la vigencia del contrato, entre más alto se encuentre el precio del bien subyacente más pierde el emisor de

[1]*En la fórmula del punto de equilibrio se están sumando cantidades de diferentes periodos, sin contemplar el valor del dinero en el tiempo. Las cantidades S_T y X se dan en la fecha de vencimiento o en el momento que se ejerce la opción, pero el comprador de la Call tuvo que desembolsar C cuando compró la opción.*
[2]*Por supuesto no se están considerando los costos de transacción, comisiones, impuestos, entre otros.*

la opción. Esto se debe a que la posición corta tiene que comprar la acción (bien subyacente) en el mercado a S_T y venderla a X.



Perfil de ganancias para un Call corto

Por otro lado, si la Call termina fuera del dinero ($S_T < X$) entonces el emisor se ve beneficiado quedándose con el importe de la prima C, puesto que el tenedor no va a ejercer la opción. Como se observa en el diagrama, la posición corta es totalmente simétrica a la posición larga, porque todo lo que gana la posición larga es exactamente lo que pierde la corta y viceversa. Como se puede ver es una posición muy desventajosa si se compara con el Call largo, claro está que precisamente por ello el emisor de la opción cobra la prima C al principio de la operación. Además, en términos muy generales, se puede decir que el emisor de la Call piensa que la acción no va a subir de precio mientras que el comprador de la Call está dispuesto a pagar la prima (C) con la idea de ejercerla cuando el precio de la acción suba.

Vale la pena mencionar que las posiciones cortas en opciones representan una contingencia probable para el inversionista que tiene la posición larga y por ello existe un sistema de márgenes que cubre las posibles pérdidas que se tengan.

Ejemplo

El siguiente cuadro es una reproducción de un listado de opciones sobre acciones (son las más sencillas para el análisis) del *Wall Street Journal*. La parte que se analizará es sobre las acciones de *Motorola*.

LISTED OPTIONS QUOTATIONS

			—Call—		—Put—	
Option/	Strike	Exp.	Vol	Last	Vol	Last
Morgan	70	Dec	50	1 1/2	...	...
71 5/8	70	Jan	40	3 1/4	...	...
71 5/8	75	Jan	60	3/4	6	4 3/4
71 5/8	80	Jun	30	1 9/16	...	...
Motrla	75	Dec	448	12 3/8	...	...
89 1/4	75	Jan	229	14 3/8	...	...
89 1/4	80	Dec	210	8 5/8	1	1/16
89 1/4	80	Jan	349	10 1/4	761	1 1/8
89 1/4	85	Dec	355	4 1/4	871	1/8

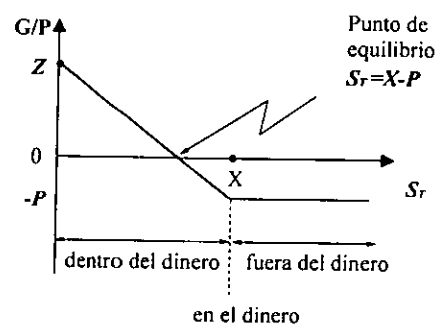
89 1/4	85	Jan	442	6 3/4	552	2 1/4
89 1/4	85	Apr	10	9 1/4	49	4 7/8
89 1/4	85	Jul	124	11 3/8	...	...
89 1/4	90	Dec	1756	1/2	748	1 3/8
89 1/4	90	Jan	738	4	338	4 1/4
89 1/4	90	Apr	47	7	39	7 1/2
89 1/4	95	Dec	25	1/16	369	6 1/8
89 1/4	95	Jan	501	2	37	7 3/4
89 1/4	95	Apr	69	4 7/8	20	10
89 1/4	100	Jul	...	...	547	11
89 1/4	105	Jan	443	5/16	5	16 1/2
89 1/4	110	Jan	131	3/14	...	...
MryGRd	5	Dec	...	...	665	2 1/8
2 3/4	5	Jan	584	3/16	962	2 7/16
2 3/4	5	Apr	1354	7/16	56	2 2/16
2 3/4	5	Jul	127	1/2	55	2 1/4

Cabe mencionar que para las opciones sobre acciones cada contrato da el derecho de comprar o vender 100 de las acciones. Los números de la columna debajo del nombre de la emisora de la acción representan el último hecho del día anterior del precio de la acción en el *New York Stock Exchange*, para el caso de Motorola es de \$89.25 por acción. La columna con el nombre *Strike (price)* muestra que las opciones sobre Motorola se comercializan con un precio de ejercicio de \$75 a \$110 con incrementos de \$5. Mientras que para algunas acciones sus precios de ejercicio son generalmente puestos en intervalos de cinco puntos, intervalos más grandes pueden ser puestos para acciones con un valor superior a \$100, e intervalos de \$2½ pueden ser usados para acciones que se venden por debajo de \$30. Si el precio de la acción se mueve en intervalos fuera del rango de los precios de ejercicio de los ya existentes, nuevas opciones con precios de ejercicio adecuados pueden ser ofrecidas. Por tanto, en cualquier momento, las opciones dentro y fuera del dinero serán listadas, como lo es en el ejemplo de Motorola. La siguiente columna en el listado proporciona el mes de maduración (*expiration date*) para cada contrato. El tiempo preciso de expiración es a las 10:59 p.m. del sábado siguiente al tercer viernes del mes de maduración. El último día en que la opción se comercializa es el tercer viernes del mes de maduración. Las opciones sobre acciones se dan en los ciclos trimestrales de Enero, Febrero o Marzo. El ciclo de Enero consta de los meses de Enero, Abril, Julio y Octubre. El de Febrero de Febrero, Mayo, Agosto y Noviembre; y el de Marzo con los meses de Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre. Los dos últimos pares de columnas muestran el número de contratos (volumen) comercializados en ese día y el precio de cierre para la Call y la Put, respectivamente. Cuando una opción no se comercializó tres puntos aparecen en la columna del volumen y del precio.

Ganancias para un Call largo. Según el listado una opción Call con maduración en Abril sobre una acción de Motorola con un precio de ejercicio de \$90, se vende en \$7. Hasta el día de expiración de la opción Call Americana (el sábado posterior al tercer viernes de abril), el tenedor de la Call puede ejercer su derecho de comprar las acciones de Motorola por \$90. El día en que se publicó el listado, las acciones de Motorola se vendían en \$89.25. Si el precio permanece debajo de \$90, la opción expirará sin valor, y el inversionista que compró la opción Call perderá \$7 pagado por la prima. Si, por otra parte, el precio es superior a los $90, $100 por ejemplo, la opción será redituable ya que da a su tenedor el derecho de comprar en $90 una acción que vale $100.

Ganancias para un Put largo. En el mismo ejemplo; el precio de la opción Put es de $7.50. Lo que da derecho a su tenedor de vender las acción de Motorola por $90 en cualquier momento hasta la fecha de expiración, si así lo desea. Por lo que si fuese ejercida inmediatamente, el tenedor tendría una ganancia de $90-$89.25=$0.75. Obviamente la persona que paga $7.5 por el derecho no tiene ninguna intención de ejercerla inmediatamente. Si el precio de la acción de Motorola es superior a $90 cerca de la fecha de expiración, la opción Put se dejará expirar perdiéndose el valor de la prima. Sin embargo, si la acción termina en $86, el tenedor de la opción la ejercerá, con una ganancia de $90-$86=$4. A pesar de la ganancia obtenida, el tenedor de la opción Put aún pierde, pues tuvo que pagar $7.5 en su compra.§

Perfil de un Put largo



Perfil de ganancias para un Put largo

Si las expectativas de los inversionistas son a una baja en el mercado (*bear market*), entonces se requiere de un instrumento para protegerse ante una probable baja en el precio de la acción u otro bien subyacente. Este instrumento es la posición larga en una opción de venta (Put). El diagrama básico de un Put largo difiere del Call en que el segmento inclinado tiene una pendiente negativa. El beneficio de tener la opción se obtiene cuando baja de precio el bien subyacente por debajo del precio de ejercicio pactado (X)

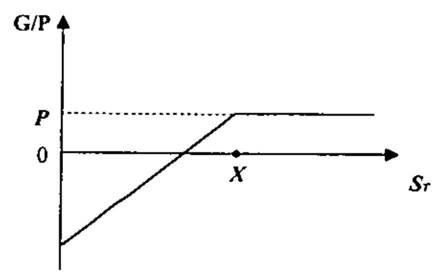
El derecho de ejercicio (de vender) lo tiene la posición larga en la Put, dado que por ello pagó la prima P y tiene derecho a las ganancias en caso de haberlas. Como se observa en el diagrama, las ganancias están limitadas al punto Z, si por alguna razón el bien subyacente llegara a tener un precio de cero, el beneficio máximo consistiría en vender a X el bien que tiene un precio de mercado de cero.

Por otra parte, el poseedor del derecho de venta no ejercerá éste si el precio del bien en el mercado es superior a X. Preferiría tomar el precio del mercado (S_T) que ejercer su opción de venta a un precio de X.

Dado que existe una prima de la opción que se tiene que pagar al principio, el punto de equilibrio, sin considerar el valor del dinero en el tiempo, es de $S_T = X - P$. Si el precio del bien subyacente (S_T) es menor que esa cantidad entonces existe una ganancia real al ejercer la opción puesto que además de tener un valor intrínseco positivo se recupera la inversión en la opción.

Perfil de un Put corto

La contraparte de cualquier posición larga en opciones de venta (Put) es el suscriptor y se dice que tiene la posición corta en la opción (Put corto).



Perfil de ganancias para un Put corto

El suscriptor recibe una prima y a cambio se compromete a comprar el bien subyacente. Durante la vigencia del contrato, el emisor va a tener una pérdida contingente cuando el precio de mercado del bien subyacente sea menor al precio de ejercicio ($S_T < X$), pues en cualquier momento puede ser requerido para pagar el precio de ejercicio del bien subyacente, aunque su precio real en el mercado sea menor. Si por el contrario, el precio de mercado es mayor que el de ejercicio ($S_T > X$) el Put estará fuera del dinero y la posición larga no ejercerá su derecho de venta, quedándose entonces el emisor con la prima.

Al igual que con las Calls la posición corta en la Put es simétrica a la posición larga, porque lo que gana una parte lo pierde la otra.

Ejemplo

Una opción sobre el *S&P 100*, es una opción Americana, que cotiza en el *Chicago Board Option Exchange*, basada en el índice *Standard and Poor's* de un grupo de 100 acciones. La construcción del índice es a través de un promedio ponderado al valor de mercado de las acciones del grupo. En contraste con las opciones sobre acciones, las opciones sobre índices no requieren que se compre o venda el índice en si, pero sí que se pague su valor en efectivo. Por ejemplo, un contrato da el derecho de comprar o vender 100 veces el índice al precio de ejercicio especificado.

El 19 de octubre de 1987 ("*Black Monday*") el índice *Dow Jones* perdió 508 puntos para cerrar en 1 738.74. Las acciones, por ejemplo, de IBM perdieron 31¾ para cerrar en 103⅓, mientras que la Kodak cerraba en 62⅞ perdiendo 27¼ .

Al sonar la campana de apertura de aquel día, el índice *Dow Jones* perdía inmediatamente 200 puntos para situarse en 2 046. A las 10:00 a.m. el índice se había situado en 2 100, comenzando con una serie de altibajos durante la mayor parte del día. Pero lo peor estaba por venir. Cerca de las 14:45, comenzó una venta masiva, lo que restó otros 300 puntos al índice. Al sonar la campana de cierre, parecía que el índice había perdido la sorprendente cantidad de 400 puntos. Sin embargo, el enorme volumen mantuvo las computadoras trabajando con transacciones realizadas horas atrás. Es después de dos horas que los inversionistas se dieron cuenta que la pérdida total del día excedía los 500 puntos.

Días antes, el índice *Dow Jones* mantuvo un ritmo creciente tras otro. En una estrategia financiera considerada por muchos corredores como segura, sugerían a sus clientes suscribir opciones Put sobre el índice *S&P 100* con un precio de ejercicio que estaba entre 10 y 15% por debajo del índice, es decir, suscribían opciones que estaban fuera del dinero (15% fuera) y recibían pequeñas cantidades de dinero por concepto de las primas. La gran mayoría de los clientes suscribieron Puts "no cubiertas" (*naked puts*) por una estrategia como vender futuros sobre el mismo índice, por lo que no podían protegerse de una baja en el mercado. Los suscriptores creían firmemente quedarse con esas primas, pues aunque el mercado comenzará a bajar, creían tener el tiempo de cancelar sus posiciones (comprar opciones Put). Imagine su sorpresa cuando el 19 de Octubre el mercado se desplomaba más del 20%; no podían contactar con sus corredores porque estaban fuera de alcance o sus teléfonos estaban ocupados. Sin embargo, al cierre los corredores podían telefonearlos con la noticia de que los tenedores de las opciones Put demandaban su derecho de vender y que por lo tanto enviaran un cheque de caja por la cantidad completa. Las opciones sobre el *S&P 100* se liquidan en efectivo por lo que algunos tuvieron que vender todo lo que poseían para reunir esa enorme cantidad de dinero, lo que contribuyó aún más con la volatilidad extrema de los mercados después de semanas.

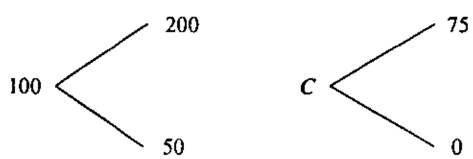
La cara sonriente de la moneda. En septiembre de ese mismo año algunos inversionistas compraron opciones Put fuera del dinero sobre el índice *S&P 100* a un precio de entre $2 y $3 como una protección de una baja en el mercado. El 20 de octubre, un día después del desplome, el valor de los contratos se había elevado a $130. Haciendo cálculos: mientras que el índice perdía más del 20%, el valor de las opciones se elevaba a $130, un movimiento del 4200%; es lo que se conoce como apalancamiento.§

El método binomial

Dentro de los aspectos importantes del método binomial, destaca su flexibilidad en la valuación de opciones Americanas; característica que sólo comparte con la solución numérica de la ecuación diferencial parcial representativa de las opciones.

Una técnica útil y muy popular para la evaluación de opciones involucra la construcción de lo que se conoce como un *árbol binomial*. Éste es un árbol que representa las posibles trayectorias que puede seguir el precio del activo subyacente durante la vida del derivado financiero.

El siguiente ejemplo muestra aspectos importantes en la valuación de opciones. Suponga que el precio de una acción puede tomar sólo dos valores en la maduración de la opción: su precio puede incrementarse o decrementarse. La acción se vende ahora en $100, y su precio puede duplicarse a $200 o decrementarse a la mitad en $50 al final del año. Una opción Call sobre la acción tiene un precio de ejercicio de $125 y una fecha de maduración de un año. La tasa libre de riesgo es del 8%. Al final del año, el valor de la opción será únicamente su valor intrínseco (su valor en el tiempo al final del periodo es de cero): cero, si el precio de la acción baja, o $75, si el precio de la acción llega a $200. Estas posibilidades se muestran en el siguiente árbol binario:

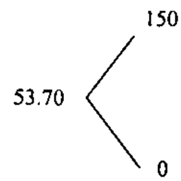


Precio de la acción   Valor de la opción Call

Compare estas ganancias con las de un portafolio que consiste de una acción y pedir un préstamo de $46.30 a una tasa de interés del 8%. Las ganancias de este portafolio también dependen del precio de la acción al final del año.

Valor de la acción al final del año	50	200
-Pago del préstamo con intereses	-50	-50
Total	0	150

El gasto necesario para establecer este portafolio es de $53.70: $100 del valor de la acción, menos $46.30 del préstamo. De esta manera, el árbol para el valor del portafolio es:



Valor del portafolio

¡El valor de este portafolio[3] es exactamente dos veces el valor de la opción Call para cualesquiera de los dos valores de la acción! En otras palabras, dos opciones Call replicarán exactamente las ganancias de este portafolio; luego entonces, el precio de venta de dos opciones Call debe ser igual al costo de establecer el portafolio:

$$2C=\$53.70$$

o cada Call debería venderse a $\underline{C=\$26.85}$.

En vista de lo anterior, si se pide un préstamo y se compran acciones en la proporción adecuada se puede *replicar* una posición larga con opciones Call. Así, dado el precio de la acción, el precio de ejercicio, la tasa de interés, el tiempo, y la volatilidad de la acción (representada por las tasas de incremento o decremento), se puede encontrar un precio para las opciones Call.

La noción de réplica juega un papel muy importante en el siguiente portafolio:

$$\Pi = \begin{cases} -2C: & \text{suscribir dos opciones} \\ 1S: & \text{comprar una acción} \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \Pi=S-2C$$

Note que el portafolio Π está perfectamente cubierto (*hedged*) de los cambios en el precio de la acción, es decir, el valor del portafolio es independiente del precio final de la acción:

Valor de la acción al final del año	50	200
-Obligaciones por las dos Calls	0	-150
Ganancia neta	50	50

Se ha creado un portafolio libre de riesgo con una ganancia de \$50 al final del año. Su valor debe ser el valor presente de \$50 o \$50/1.08=\$46.30.

De la fórmula propuesta:

$$\Pi=S-2C$$

[3]*Conjunto formado con diferentes activos financieros con la finalidad de diversificar el riesgo de inversión.*

$$46.30 = 100 - 2C \quad \text{y por tanto}$$
$$C = 26.85$$

La habilidad para crear un portafolio perfectamente cubierto es la clave en este argumento. Así, este portafolio permite expresar el valor de la opción en función de la cantidad de acciones.

Se afirma que tal valor es el precio justo para la opción. Pues si el precio estuviera sobrevaluado o subvaluado se podrían obtener ganancias sin riesgo por medio del arbitraje:

Arbitraje con posición corta

Suponiendo que el precio de la opción fuera mayor, por ejemplo $30, podría pedirse un préstamo para comprar las acciones y suscribir opciones (posición corta). Al término del periodo, sin importar el valor final de la acción, se devolvería el préstamo con un saldo positivo.

Para ver el resultado de la operación en forma analítica, se recurre a una tabla que muestra la posición al inicio y en la fecha de vencimiento del portafolio. La primera columna muestra los activos financieros que integran el portafolio, en la segunda se tienen los movimientos de ingresos o egresos para generar el portafolio al inicio, y en la tercera se tienen los valores en la fecha de vencimiento de los contratos que integran el portafolio.

	Flujo inicial de dinero	Flujo al final del periodo para sendos precios de la acción.	
		S_T=50	S_T=200
Suscribir dos opciones	$60.00	$0.00	-$150.00
Comprar una acción	-$100.00	$50.00	$200.00
Pedir prestados $40 al 8%	$40.00	-$43.20	-$43.20
Total	$0.00	$6.80	$6.80

¡Aunque la inversión inicial es cero, en un año se obtienen ganancias y sin riesgo! Note que el valor presente de las ganancias es igual al doble del precio en que se sobrevaluó la opción. El valor presente de $6.80 al 8% es $6.30. Como se suscribieron dos opciones, la ganancia por opción es de $3.15 que es exactamente igual al sobrevalúo de la opción, $30, menos su valor justo de $26.85.

Arbitraje con posición larga

El otro caso puede ilustrarse suponiendo que se subvalúa la opción, por ejemplo en \$24. La estrategia consistiría en vender en corto[4] las acciones e invertir la cantidad obtenida a la tasa libre de riesgo, y comprar las opciones (posición larga). Las acciones de la venta en corto se devolverían íntegramente al final del año y se obtendría también un saldo positivo, como lo muestra el siguiente cuadro:

	Flujo inicial de dinero	Flujo al final del periodo para sendos precios de la acción.	
		S_T=50	S_T=200
Comprar dos opciones	-\$48.00	\$0.00	\$150.00
Venta en corto	\$100.00	-\$50.00	-\$200.00
Invertir \$52 al 8%	-\$52.00	\$56.16	\$56.16
Total	\$0.00	\$6.16	\$6.16

Si se conjunta el resultado de ambos arbitrajes se comprueba lo afirmado.

Finalmente, se puede concluir que el rendimiento del portafolio Π es la tasa libre de riesgo (denotada por r_1), pues de no ser así se podría hacer arbitraje como se mostró.

$$\frac{\Pi_f - \Pi_0}{\Pi_0} = r_1 \Delta t \qquad \text{o} \qquad \Delta\Pi = r_1 \Pi_0 \Delta t$$

Esta expresión es de gran utilidad en la construcción de la ecuación diferencial de Black & Scholes como se mostrará en el tercer capítulo.

En la generalización del modelo hay que considerar ciertas restricciones:

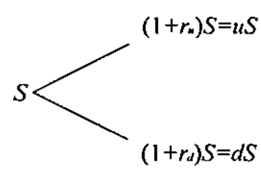
- Los mercados son perfectos y competitivos, es decir, no hay costos en las transacciones, no hay requerimientos de margen, y no se pagan impuestos. Los contratos o títulos son infinitamente divisibles, es decir, los inversionistas pueden comprar fracciones de contratos si lo desean. Hay una única tasa de interés, r_1 , y los inversionistas pueden sin ningún riesgo pedir y prestar dinero a esa tasa.

- Los inversionistas prefieren más riqueza que menos, con lo que se está seguro de que todas las oportunidades de arbitraje serán inmediatamente aprovechadas

[4] *Vender acciones que no se poseen todavía en espera de que su precio baje cuando se tengan que devolver.*

Modelo para un periodo

El precio de la acción hoy es de S, en la fecha de maduración (un periodo) puede tomar uno de dos valores; si hay un movimiento al alza entonces valdrá uS, si hay un movimiento a la baja valdrá dS. Siendo el valor de $u=1+r_u$ y el de $d=1+r_d$. Los parámetros r_u y r_d son las posibles tasas de rendimiento del bien subyacente en ese primer periodo (se considera que $r_u > 0$ y $r_d < 0$ para un caso real). Gráficamente se puede representar como:



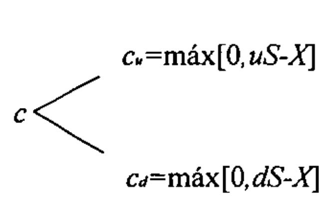
Se define $r = 1+ r_1$, donde el parámetro r_1 es la tasa de interés sin riesgo durante el periodo. Para que no haya oportunidades de arbitraje, se requiere que $u > r > d$ (observe que $u > r > d \Leftrightarrow r_u > r_1 > r_d$).

Si $u > d > r$, un inversionista podría hacer arbitraje pidiendo dinero prestado a la tasa r_1 (ó r) para comprar la acción en el mercado. Al final del periodo, el precio de la acción (sin importar que se haya incrementado o decrementado) valdría más que el monto de su deuda, siendo tal diferencia su ganancia.

Por otra parte, si $r > d > u$ un arbitrajista realizaría una venta en corto de la acción e invertiría el dinero a la tasa libre de riesgo. Sin importar cual sea el valor final de la acción al final del periodo, el monto invertido tendrá un valor superior, con lo que podrá comprarse la acción (saldando la deuda) y obtener así, ganancias.

Para valuar una opción Call (Europea) sobre la acción, sea c el valor actual de la opción Call, c_u su valor al final del periodo si el precio de la acción es uS, y c_d su valor al final del periodo si el precio de la acción es dS. Si X es el precio de ejercicio de la opción, en su fecha de expiración la opción tendrá valor intrínseco únicamente.

Gráficamente:



El portafolio, que proporciona las mismas ganancias al final del periodo que la Call, consta de una posición larga en Δ acciones y un préstamo por un monto B a la tasa libre de riesgo r_1. Por ser B un préstamo tendrá siempre un valor negativo, y Δ será siempre no negativo. Establecer este portafolio requerirá una inversión de $\Delta S+B > 0$. Al final del periodo, el valor del portafolio para un alza y una baja del precio de la acción será:

$$\Delta S+B \left\langle \begin{array}{l} uS\Delta+rB \\ \\ dS\Delta+rB \end{array} \right.$$

Se selecciona a Δ y a B de tal manera que para cualquier posible resultado al final del periodo, las ganancias del portafolio y el valor de la opción sean iguales, es decir, que los portafolios sean equivalentes.

$$\begin{cases} uS\Delta + rB = c_u \\ dS\Delta + rB = c_d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se encuentra que[5]:

$$\Delta = \frac{c_u - c_d}{(u-d)S}$$

$$B = \frac{uc_d - dc_u}{(u-d)r}$$

Recordando que no puede haber oportunidades de arbitraje, debe ser cierto que:

$$\begin{aligned} c &= S\Delta + B \\ &= \frac{c_u - c_d}{u-d} + \frac{uc_d - dc_u}{(u-d)r} \\ &= \frac{\left[\frac{rc_u - rc_d}{u-d} + \frac{uc_d - dc_u}{u-d}\right]}{r} \\ &= \frac{\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right)c_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)c_d\right]}{r} \end{aligned}$$

Se define $p = \frac{r-d}{u-d}$, y en consecuencia $q = 1 - p = \frac{u-r}{u-d}$.

Simplificando:

$$c = \frac{\left[pc_u + qc_d\right]}{r}$$

[5] *El valor de Δ se puede leer como la diferencia en el valor de las Call dividido por la diferencia en el valor de las acciones, con lo que los cocientes se pueden pensar como incrementos. A Δ se le conoce como el hedge ratio de la opción Call.*

Dado que $0 < r < u$, entonces $r - d < u - d$ y por tanto $0 < (r-d)/(u-d) < 1$, es decir, la variable p puede ser interpretada como la probabilidad de un alza en el precio de la acción; la variable q es entonces la probabilidad de una baja.

Inversión indiferente al riesgo

Un aspecto interesante que se observará en la fórmula de Black & Scholes es que el modelo no requiere ninguna información acerca de la compensación por parte de los inversionistas para tomar diferentes riesgos. Lo que teóricamente significa que el precio de una opción no depende de las preferencias de riesgo del inversionista: dos inversionistas que tengan diferentes preferencias de riesgo pueden estar de acuerdo en un precio justo para una opción.

Esta observación conduce a un argumento ingenioso presentado por Cox y Ross: debido a que las preferencias de riesgo no afectan el precio de la opción, cualquier suposición acerca de las preferencias de riesgo, las cuales están incorporadas dentro de una metodología válida para valuar opciones, no puede afectar los valores producidos por esta metodología. Esto sería cierto aun si las supuestas preferencias de riesgo fueran inconsistentes con aquellas expuestas por los inversionistas: las preferencias de riesgo son simplemente irrelevantes.

De esta manera, los analistas pueden simplificar la tarea de evaluar opciones suponiendo que las preferencias de riesgo de los inversionistas son cero. Específicamente, esto es equivalente a suponer *que todas las acciones y cualesquiera otros activos riesgosos tienen una tasa esperada igual a la tasa libre de riesgo* y que todos los flujos de efectivo deberían ser traídos a valor presente a la tasa libre de riesgo. A pesar de ser inconsistente con la realidad, esta suposición produce precios correctos para las opciones.

Se dice que una inversión es *indiferente al riesgo* (*risk- neutral*) si:

- El valor esperado del rendimiento de cualquier activo financiero es la tasa libre de riesgo; y
- si cualquier monto futuro se puede evaluar trayendo a valor presente su valor esperado a la tasa libre de riesgo.

Ejemplo

El valor esperado de la acción se puede calcular con ayuda de las variables p y q:

$$\begin{aligned} E[S_T] &= pSu + (1-p)Sd \\ &= pS(u-d) + Sd \\ &= \frac{r-d}{u-d}S(u-d) + Sd \\ &= rS = (1+r_1)S \end{aligned}$$

y usando propiedades de la esperanza:

$$E\left[\frac{S_T - S}{S}\right] = r_1$$

Por lo que la inversión en títulos accionarios (con las características mencionadas) es indiferente al riesgo.

De igual manera se puede calcular el valor esperado de las ganancias (valor intrínseco) de la opción Call:

$$E[c_T] = pc_u + qc_d$$

De manera que el valor calculado de la Call se puede escribir:

$$c = \frac{[pc_u + qc_d]}{r} = \frac{E[c_T]}{r_1 + 1}$$

Esta última ecuación se interpreta diciendo que el valor de la opción Call es igual al valor esperado de las ganancias de la opción Call traído a valor presente. Usando las propiedades de la esperanza, la ecuación queda:

$$E\left[\frac{c_T - c}{c}\right] = r_1$$

por lo que también el valor esperado del rendimiento de la Call es indiferente al riesgo.§

En el ejemplo numérico considerado anteriormente, $u = 1+1$, $d = 1+(-0.5)$, $r = 1 + 0.08$, $T = 1$, $c_u = 75$, $c_d = 0$. Por tanto:

$$p = \frac{r-d}{u-d} = \frac{1.08 - 0.5}{2 - 0.5} = 0.387$$

$$q = 1 - p = 0.613$$

$$\Delta = \frac{c_u - c_d}{uS - dS} = \frac{75 - 0}{200 - 50} = 0.5$$

$$B = \frac{uc_d - dc_u}{(u-d)r} = \frac{2(0) - .05(75)}{(2 - 0.5)1.08} = -23.15$$

$$c = \frac{pc_u + qc_d}{r} = \frac{0.387(75) - 0.613(0)}{1.08} = 26.875$$

Lo que concuerda con los datos obtenidos en el ejemplo. El *hedge ratio* de este ejemplo es de una acción por dos Calls, o de un medio. Por cada opción suscrita, se debe de mantener media acción en el portafolio Π para protegerlo. En este contexto el *ratio* tiene una fácil interpretación: es el cociente del rango de los valores de la opción entre los valores de la acción a través de los dos posibles resultados. La opción vale \$0 o \$75, lo que da un rango de \$75. El valor de la acción es \$50 o \$200, con un rango de \$150. El cociente de los rangos es 75/150 o un medio, que es el *hedge ratio* que se estableció.

Modelo para dos periodos

Ahora se considera la situación de una opción Call con dos periodos. Se supone que tanto u como d son constantes durante los dos periodos. Los siguientes abanicos ilustran la situación:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & uuS \\ & uS \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ S \arrow[ur] \arrow[dr] & & duS \\ & dS \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & ddS \end{tikzcd}$$

Observe que los eventos u^2S y d^2S son relativamente difíciles de suceder, ya que requieren de dos movimientos consecutivos al alza o a la baja en los dos periodos. El evento intermedio duS (= udS) tiene más probabilidades de ocurrir, ya que se puede arribar a él por dos trayectorias diferentes.

Paralelamente, el árbol binario para la opción Call:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & c_{uu}=\text{máx}[0,uuS\text{-}X] \\ & c_u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ c \arrow[ur] \arrow[dr] & & c_{du}=\text{máx}[0,duS\text{-}X] \\ & c_d \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & c_{dd}=\text{máx}[0,ddS\text{-}X] \end{tikzcd}$$

El objetivo del análisis es calcular el valor de la opción en el nodo inicial del árbol. El valor c_{uu} después de dos periodos es el valor de la Call si el precio de la acción tuvo dos movimientos consecutivos al alza; c_{du} y c_{dd} tienen definiciones análogas. Si se analiza el árbol binario en retrospectiva el valor de c_u puede ser calculado de c_{uu} y c_{du}; el valor de c_d de c_{du} y c_{dd}; y finalmente el valor c de c_u y c_d. Así pues, del análisis anterior:

$$c_u = \frac{pc_{uu} + qc_{ud}}{r}$$

y

$$c_d = \frac{pc_{du} + qc_{dd}}{r}$$

De manera similar el valor de c se calcula en términos de c_u y c_d ; y observando que el valor de c_{du} es igual a c_{ud} se obtiene:

$$\begin{aligned} c &= \frac{pc_u + qc_d}{r} \\ &= \frac{p\left[\dfrac{pc_{uu} + qc_{ud}}{r}\right] + q\left[\dfrac{pc_{du} + qc_{dd}}{r}\right]}{r} \\ &= \frac{p^2 c_{uu} + 2pqc_{du} + q^2 c_{dd}}{r^2} \\ &= \frac{p^2 \max[0, u^2S - X] + 2pq \max[0, duS - X] + q^2 \max[0, d^2S - X]}{r^2} \end{aligned}$$

Esta última ecuación muestra las probabilidades para un movimiento al alza, uno al centro y otro a la baja de los nodos finales que se alcanzaron. Observe que los coeficientes del numerador se comportan como una variable aleatoria discreta de una distribución binomial con parámetro p.

Generalización

Suponga que se continúa aumentando el número de periodos, es decir, que el tiempo de vida de la opción se puede dividir en años, meses o días; cada uno con un doble proceso. Se puede establecer un procedimiento recursivo que calcule el valor de la Call con cualquier número de periodos:

$$c = \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - X]}{r^n}$$

Aunque es, *per se*, una fórmula completa, se puede simplificar de una manera conveniente.

Se encontrarán ahora los valores de j que hacen cero el valor máximo. Esto ocurre si el valor final de la acción hace que la opción esté fuera del dinero, es decir,

$$\begin{aligned}
\max[0, u^j d^{n-j} S - X] &= 0 \\
&\Leftrightarrow \quad u^j d^{n-j} S - X < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad u^j d^{n-j} < \frac{X}{S} \\
&\Leftrightarrow \quad j \ln u + (n-j) \ln d < \ln(X/S \\
&\Leftrightarrow \quad j(\ln u - \ln d) < \ln(X/S) - n \\
&\Leftrightarrow \quad j \ln(u/d) < \ln(X/Sd^n) \\
&\Leftrightarrow \quad j < \ln(X/Sd^n)/\ln(u/d) \\
&\Leftrightarrow \quad j < [\![\ln(X/Sd^n)/\ln(u/d)]\!] +
\end{aligned}$$

Ahora, para toda $j < a$, $\max[0, u^j d^{n-j} S - X] = 0$ y para toda $j \geqq a$, $\max[0, u^j d^{n-j} S - X] = u^j d^{n-j} S - X$. Por tanto,

$$c = \frac{\sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} [u^j d^{n-j} S - X]}{r^n}$$

Si $a > n$, la Call estará fuera del dinero y valdrá cero, pues $a > n \geqq j$.

Reordenando la ecuación, se obtiene

$$c = S\left[\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}\left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^n}\right)\right] - Xr^{-n}\left[\sum_{j=a}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}\right]$$

Note que la expresión entre corchetes del lado derecho es $B(a,n;p)$, ver apéndice (B.1), mientras que la expresión del lado izquierdo se puede arreglar para que represente también la distribución acumulativa binomial.

Juntando aquellos términos de superíndices iguales:

$$p^j q^{n-j}\left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^n}\right) = p^j q^{n-j}\left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^{n-j} r^j}\right) = \frac{p^j u^j}{r^j}\left(q^{n-j}\frac{d^{n-j}}{r^{n-j}}\right) = \left[\left(\frac{u}{r}\right)p\right]^j\left[\left(\frac{d}{r}\right)q\right]^{n-j} = p'^j\left(q'\right)^{n-j}$$

donde p' es una probabilidad, pues siendo $0 < r < u$ y $p < 1$ se tiene que $0 < p(r/u) < 1$.

Además:

$$1 = p' + q' = \left(\frac{u}{r}\right)p + \left(\frac{d}{r}\right)q = \frac{up + dq}{r} = \frac{u\dfrac{r-d}{u-d} + d\dfrac{u-r}{u-d}}{r} = \frac{\dfrac{ur - ud + ud - rd}{u-d}}{r} = \frac{r}{r}$$

Conjuntando estos resultados, se obtiene una expresión más compacta:

$$c = SB(a,n;p') - Xr^{-n}B(a,n;p)$$

Esta última ecuación se explica de una manera intuitiva: *es el valor presente de las ganancias potenciales de la opción ajustado por la probabilidad de que termine dentro del dinero.*

El valor para la opción Put se calcula a partir de la ecuación binomial para la opción Call, que se ha propuesto, observando que ahora su valor intrínseco es $\max[0, X\text{-}u^j d^{n\text{-}j}S\,]$:

$$put = \frac{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}\max\left[0, X - u^j d^{n-j}S\right]}{r^n}$$

Note que mientras la opción Call está fuera del dinero la opción Put está adentro del dinero y viceversa:

$\max[0, X\text{-}u^j d^{n\text{-}j}S\,] = 0$ para $j > a$

$\max[0, X\text{-}u^j d^{n\text{-}j}S\,] = u^j d^{n\text{-}j}S$ para $j \leqq a$

$$put = \frac{\sum_{j=0}^{a} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} [X - u^j d^{n-j} S]}{r^n}$$

Repitiendo los mismos cálculos que se hicieron para la opción Call se obtiene:

$$\begin{aligned} put &= Xr^{-n}B(0,a;p) - SB(0,a;p') \\ &= Xr^{-n}\left[1 - B(a,n;p)\right] - S\left[1 - B(a,n;p')\right] \\ &= S\left[B(a,n;p') - 1\right] - Xr^{-n}\left[B(a,n;p) - 1\right] \\ &= c + Xr^{-n} - S \end{aligned}$$

A esta última ecuación se le conoce como la *paridad Put-Call.*

Paridad Put Call

Suponga que se suscribe una opción Put (Put corto) y se compra una opción Call (Call largo) con el mismo precio de ejercicio, X, y misma fecha de maduración, T. Cuando expiren las opciones, las ganancias netas serán iguales a las ganancias en la Call menos los pagos que tengan que hacerse por la Put. Las ganancias o pagos dependerán del valor final de mercado del bien subyacente S_T:

	$S_T \leq X$	$S_T > X$
Ganancias de la Call	0	$S_T - X$
Obligaciones de la Put	$-(X-S_T)$	0
Total	$S_T - X$	$S_T - X$

Considere ahora un portafolio constituido de una acción y un préstamo (*levered equity*), que se pagará a la tasa libre de riesgo r_1. El préstamo es hoy de $Xe^{-r_1 T}$ y S_0 se invierte en comprar la acción. La ganancia total de este portafolio a la fecha de maduración es $S_T - X$, la misma que la de la estrategia con opciones.

Dado que en ambos casos las ganancias o pérdidas a la fecha de maduración son las mismas, el costo de establecerlas hoy debe ser el mismo. El gasto neto necesario en el primer caso es $p - c$; se recibe una prima de p por la venta de la Put, mientras que se desembolsa $-c$ para la compra de la Call. De igual manera para el segundo portafolio se tiene un gasto neto de $Xe^{-r_1 T} - S_0$; se recibe un préstamo de $Xe^{-r_1 T}$ menos el costo de la acción. Igualando estos gastos, se concluye que:

$$p - c = Xe^{-r_1 T} - S_0 \qquad \text{o} \qquad p = Xe^{-r_1 T} - S_0 + c$$

Ejemplo

Suponga que se tienen los siguientes datos sobre una acción:

- Precio de la acción \$100
- Precio de la Call \$8.0559
- Tiempo de expiración tres meses
- Precio de ejercicio \$95
- Tasa libre de riesgo anual 7%

Usando estos datos, se obtiene el valor de la opción Put

$$p = Xe^{-r_f T} - S_0 + c = 95e^{-0.07(3/12)} - 100 + 8.0559$$
$$= 1.4079\ \S$$

La ecuación sólo se aplica a opciones Europeas sobre acciones que no pagan dividendos; pues, la ecuación sólo se cumplirá si cada posición se mantiene hasta el final del periodo.

Ejemplo

MATLAB ofrece un ambiente sencillo en la implementación de las fórmulas calculadas. El método consiste en crear las funciones básicas que constituirán la ecuación.

```
=================================================================
%FUNCIÓN comb
%CALCULA LAS COMBINACIONES DE n EN j ELEMENTOS
%
%  USO function y=comb(n,j)

function y=comb(n,j)

           y=1;

           for i=0:j-1
                 y=y*(n-i)/(j-i);
           end
 end
=================================================================
%FUNCIÓN bin
%CALCULA LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL ACUMULATIVA DE a A
% n CON PARÁMETRO p
%
%  USO   function y=bin(a,n,p)

function y=bin(a,n,p)

           y=0;

           for j=a:n
               y1=comb(n,j)*p^j*(1-p)^(n-j);
               y=y1+y;
           end
end
```

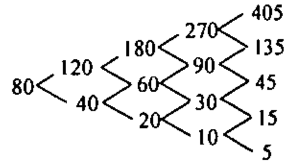
```
==================================================================
%FUNCIÓN opbin
%CALCULA LOS VALORES DE LAS OPCIONES CALL Y PUT EUROPEAS POR EL
%MÉTODO BINOMIAL
%
%USO    function [c,p]=opbin(S,X,r1,u,d,n)
%
%      c       EL VALOR DE LA OPCIÓN CALL EUROPEA
%      p       EL VALOR DE LA OPCIÓN PUT EUROPEA
%      S       EL VALOR DE MERCADO DE LA ACCIÓN
%      X       EL PRECIO DE EJERCICIO
%      r1      LA TASA LIBRE DE RIESGO
%      u       LA TASA AL ALZA DE LA ACCIÓN
%      d       LA TASA A LA BAJA DE LA ACCIÓN
%      n       EL NÚMERO DE PERIODOS

function [c,p]=opbin(S,X,r1,u,d,n)

       r=1+r1;
       pp=(r-d)/(u-d);
       p1=(u/r)*pp;
       a=fix(log(X/(S*d^n))/log(u/d))+1;   %fix CALCULA LA PARTE
                                            % ENTERA

       c=S*bin(a,n,p1)-X*r^(-n)*bin(a,n,pp);
       p=c+X*r^(-n)-S;
end
==================================================================
```

Considere una opción Europea con cuatro periodos de un mes sobre una acción que no paga dividendos y que tiene un precio de \$80, precio de ejercicio de \$80 y tasa libre de riesgo del 10% anual. Suponga que u=1.5 y d=0.5.
Con estos datos se tiene que: $r_1 = 0.1$ y $p = \dfrac{r-d}{u-d} = 0.6$

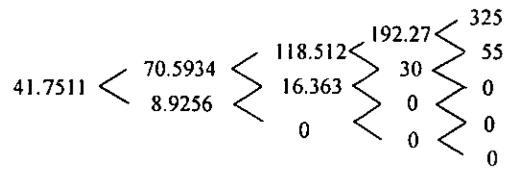
Usando la función `opbin`, se encuentra que:

```
» [c,p]=opbin(80,80,0.1,1.5,0.5,4)

      c=
          41.7512

      p=
          16.3923
```

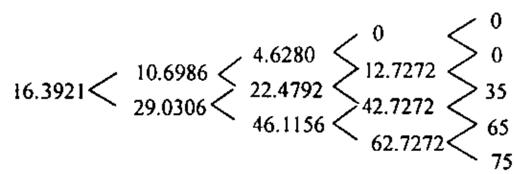
El siguiente diagrama muestra la situación



PRECIOS DE LA ACCIÓN



VALORES DE LA CALL



VALORES DE LA PUT

Los valores de la Call y de la Put se calcularon en retrospectiva usando la relación:

$$c = \frac{pc_u + qc_d}{r} = \frac{0.6c_u + 0.4c_d}{1.1} \quad \S$$

La volatilidad en la fórmula binomial

Un elemento muy importante en la valoración de opciones es su volatilidad. A partir de la volatilidad se desean encontrar ecuaciones que determinen el valor de u, r, d, y p.

En la construcción del árbol binario, se consideró que r_1 representaba la tasa libre de riesgo durante $T-t$ como durante el periodo $\Delta t[=(T-t)/n]$, ahora, es necesario hacer una distinción.

A la tasa anual libre de riesgo durante el intervalo de tiempo $T-t$ se le continuará denotando por r_1; y a la tasa libre de riesgo durante Δt se le denotará por $\hat{r}_1$. Como $\hat{r}_1$ depende del número de subintervalos, n, en que se subdivide $T-t$ su valor debe ser ajustado. De esta manera:

$$\hat{r}_1 = r_1 \Delta t \qquad \text{y como:}$$

$$r = 1 + r_1 \quad \text{su valor también tiene que ajustarse}$$

$$r = 1 + \hat{r}_1 = 1 + r_1 \Delta t$$

En el capítulo anterior se encontró que S_T tiene una distribución lognormal con

$$E[S_T] = Se^{\mu(T-t)} \text{ y}$$

$$Var[S_T] = S^2 e^{2\mu(T-t)}\left[e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right]$$

Dado que para *un periodo* de longitud $T-t$:

$$\begin{aligned} E[S_T] &= pSu + qSd \\ Var[S_T] &= E\left[S_T^2\right] - E^2[S_T] \\ &= p(Su)^2 + q(Sd)^2 - \left[pSu + qSd\right]^2 \\ &= S^2\left[pu^2 + qd^2 - \left(pu + qd\right)^2\right] \end{aligned}$$

y si se considera que $T-t$ es *un periodo* de longitud Δt; y que μ es la tasa libre de riesgo r_1, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Se^{r_1 \Delta t} = pSu + qSd \\ S^2 e^{2r_1 \Delta t}[e^{\sigma^2 \Delta t} - 1] = S^2\left[pu^2 + qd^2 - \left(pu + qd\right)^2\right] \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} e^{r_1 \Delta t} = pu + qd \\ e^{2r_1 \Delta t + \sigma^2 \Delta t} = pu^2 + qd^2 \end{cases}$$

El sistema expone dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que hay que imponer una tercera condición. Por simplicidad se define: $a = e^{r_1 \Delta t}$ y $b^2 = e^{2r_1\Delta t + \sigma^2 \Delta t} = a^2 e^{\sigma^2 \Delta t}$

- Si $u = \frac{1}{d}$, de la primera ecuación del sistema:

$$a = pu + (1-p)d = p(u-d) + d \qquad \therefore$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} \quad \text{y en consecuencia}$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{a-d}{u-d} = \frac{u-d-a+d}{u-d} = \frac{u-a}{u-d}$$

De la segunda ecuación del sistema:

$$b^2 = pu^2 + qd^2 = \frac{a-d}{u-d}u^2 + \frac{u-a}{u-d}d^2 = \frac{a(u^2-d^2)+d-u}{u-d} = a(u+d) - 1 = au + a\frac{1}{u} - 1 \qquad \therefore$$

$$0 = au^2 - (b^2+1)u + a$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$u = \frac{(b^2+1) + \sqrt{(b^2+1)^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{1 + e^{2r_1\Delta t + \sigma^2 \Delta t} + \sqrt{\left(e^{2r_1\Delta t + \sigma^2\Delta t} + 1\right)^2 - 4e^{2r_1 \Delta t}}}{2e^{r_1\Delta t}}$$

- Si $p = ½$

De la primera ecuación del sistema:

$$2a = u + d \quad \therefore \quad d^2 = 4a^2 + u^2 - 4au$$

De la segunda ecuación:

$$2b^2 = u^2 + d^2 = u^2 + 4a^2 + u^2 - 4au \qquad \therefore$$

$$0 = u^2 - 2au + (2a^2 - b^2)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$u = \frac{2a + \sqrt{4a^2 - 4(2a^2 - b^2)}}{2} = a + \sqrt{b^2 - a^2} = a + \sqrt{a^2 e^{\sigma^2\Delta t} - a^2} = a + a\sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}$$

$$= e^{r_1\Delta t}\left[1 + \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right] \quad \text{y para que } 2a = u + d;$$

$$d = e^{r_1\Delta t}\left[1 - \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right]$$

De esta manera, los valores para u y d se calculan a través de la volatilidad, y obviamente de r_1 y Δt también.

Observe que sin importar cual sea el valor de u,

$$\lim_{n\to\infty} u = 1^+ \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} d = 1^-$$

Estas dos imposiciones son bastante convenientes en la solución del sistema, ya que conservan las desigualdades que en un principio se establecieron:

$$d < r < u$$

Ejemplo

Considere una opción Europea con un tiempo de expiración de 3 meses sobre una acción que no paga dividendos. Con precio de mercado y precio de ejercicio de \$100 y \$95 respectivamente; tasa libre de riesgo del 7% y volatilidad del 20% anual.

En estas condiciones $S = 100$, $X = 95$, $r_1 = 0.07$, $T - t = 0.25$, $\sigma = 0.2$

La siguiente tabla muestra los diferentes valores para la opción Call y Put al incrementar el valor de n; así como el valor de las variables r, u, d, p, p' que también dependen de n. Los valores se han calculado teniendo en cuenta las dos soluciones que se encontraron al sistema de ecuaciones. Los valores están redondeados a millonésimas y se ha usado la función `opbin(S,X,r1,u,d,n)` para encontrar sus valores.

Para $n = 50$ se tiene que

$$\Delta t = (T-t)/n = 0.25/50 = 0.005$$

$$r = 1 + \hat{r}_1 = 1 + r_1\Delta t = 1 + 0.07(0.005) = 1.00035$$

Primera solución

$$u = \frac{1 + e^{2r_1\Delta t + \sigma^2\Delta t} + \sqrt{\left(e^{2r_1\Delta t + \sigma^2\Delta t} + 1\right)^2 - 4e^{2r_1\Delta t}}}{2e^{r_1\Delta t}}$$

$$= \frac{1 + e^{2(0.07)(0.005)+(0.2)^2(0.005)} + \sqrt{\left(e^{2(0.07)(0.005)+(0.2)^2(0.005)} + 1\right)^2 - 4e^{2(0.07)(0.005)}}}{2e^{(0.07)(0.005)}}$$

$$= 1.01496$$

$$d = 1/u = 0.98526$$

$$p = (e^{r_1\Delta t} - d)/(u - d) = (e^{(0.07)(0.005)} - 0.9852)/(1.01496 - 0.9852) = 0.508074$$

$$p' = \frac{u}{r}p = \frac{1.01496}{1.00035}(0.508074) = 0.515495$$

```
>>[c,p]=opbin(100,95,0.00035,1.01496,0.98526,50)

      c=
         8.218924

      p=
         1.571173
```

Segunda solución

$$u = e^{r_1 \Delta t}\left[1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}\right]$$

$$= e^{(0.07)(0.005)}\left[1 + \sqrt{e^{(0.2)^2(0.005)} - 1}\right] = 1.014498$$

$$d = e^{r_1 \Delta t}\left[1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}\right]$$

$$= e^{(0.07)(0.005)}\left[1 - \sqrt{e^{(0.2)^2(0.005)} - 1}\right] = 0.986202$$

$$p = 1/2$$

$$p' = \frac{u}{r}p = \frac{1.014498}{1.00035}(0.5) = 0.507071$$

```
>>[c,p]=opbin(100,95,0.00035,1.014498,0.986202,50)

      c=
         8.061527

      p=
         1.413776
```

Primera solución (u=1/d)							
n	r	u	d	p	p'	Call	Put
50	1.000350	1.014960	0.985260	0.508074	0.515495	8.218924	1.571173
100	1.000175	1.010406	0.989701	0.505864	0.511039	8.171360	1.523466
500	1.000035	1.004553	0.995468	0.502717	0.504988	8.105053	1.457044
1000	1.000018	1.003202	0.996808	0.501937	0.503536	8.089061	1.441037
Segunda solución (p=1/2)							
n	r	u	d	p	p'	Call	Put
50	1.000350	1.014498	0.986202	0.5	0.507071	8.061527	1.413776
100	1.000175	1.010177	0.990173	0.5	0.505000	8.056617	1.408722
500	1.000035	1.004507	0.995563	0.5	0.502236	8.055653	1.407644
1000	1.000018	1.003180	0.996855	0.5	0.501581	8.055597	1.407574

§

En el siguiente tema se mostrará que cuando n tiende a infinito el método binomial converge a la fórmula de Black & Scholes. Además, ensayando para diferentes valore de p se encuentra que la aproximación es mejor (la gráfica tiende a la figura característica de la campana de Gauss) para valores de p cercanos a ½ (y para $npq > 10$) por lo que la segunda solución se prefiere a la primera.

La fórmula de Black & Scholes

Cuando se definió la inversión indiferente al riesgo se encontró que:

$$c = \frac{E[c_T]}{r_1 + 1}$$

es decir, el valor de la opción Call es igual al valor esperado de la opción Call al final del periodo traído a valor presente. Por comodidad se supondrá que tal valor es traído a valor presente pero a una tasa continua:

$$c = \frac{E[c_T]}{e^{r_1(T-t)}}$$

$$E[c_T] = E\left[\max(S_T - X, 0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(s - X)f(s)ds$$

donde S_T es la variable aleatoria continua de una distribución lognormal, y como se mostró (capítulo anterior); es tal que:

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S + (r_1 - \sigma^2/2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

siendo, además, $f(s)$ su función de densidad.

Ahora; $\max(S_T - X, 0) = S_T - X$ si $S_T > X$, es decir, para $s > X$, por lo que:

$$E\left[\max(S_T - X, 0)\right] = \int_{s=X}^{\infty}(s - X)f(s)ds = s\int_{s=X}^{\infty} f(s)ds - X\int_{s=X}^{\infty} f(s)ds$$

con:

$$f(s) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}}e^{-\left[\ln s - \ln S - (r_1 - \sigma^2/2)(T-t)\right]^2/2\sigma^2(T-t)}$$

El segundo sumando de la integral es;

$$X\int_{s=X}^{\infty} f(s)ds = \frac{X}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}}\int_{s=X}^{\infty} e^{-\left[\ln s - \ln S - (r_1 - \sigma^2/2)(T-t)\right]^2/2\sigma^2(T-t)}\frac{ds}{s}$$

y haciendo el cambio de variable $w = \dfrac{\ln(s/S) - (r_1 - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, se tiene que:

$$dw = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\frac{ds}{s}\right) \quad \therefore \quad \frac{ds}{s} = \sigma\sqrt{T-t}\,dw$$

Para calcular el límite de la integral, se despeja s del cambio de variable propuesto, es decir;

$$\ln(s/S) = w\sigma\sqrt{T-t} + (r_1 - \sigma^2/2)(T-t) \quad \therefore \quad s = Se^{w\sigma\sqrt{T-t} + (r_1-\sigma^2/2)(T-t)}$$

y como $s > X$ se tiene que:

$$Se^{w\sigma\sqrt{T-t} + (r_1-\sigma^2/2)(T-t)} > X \quad \therefore$$

$$w > \frac{\ln(X/S) - (r_1 - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = b$$

y se define:

$$-b = \frac{\ln(S/X) + (r_1 - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2$$

Con lo que la integral queda:

$$X\int_{s=X}^{\infty} f(s)ds = X\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{w=b}^{\infty} e^{-w^2/2}dw = X\left[1 - N(b)\right] = XN(-b) = XN(d_2)$$

Para la siguiente integral, se tiene:

$$\begin{aligned}
s\int_{s=X}^{\infty} f(s)ds &= s\int_{s=X}^{\infty} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\left[\ln s - \ln S - (r_1-\sigma^2/2)(T-t)\right]^2/2\sigma^2(T-t)}ds \\
&= s\int_{w=b}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}dw \\
&= Se^{w\sigma\sqrt{T-t} + (r_1-\sigma^2/2)(T-t)}\int_{w=b}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}dw \\
&= S\int_{w=b}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2 + w\sigma\sqrt{T-t} + r_1(T-t) - \sigma^2/2(T-t)}dw \\
&= Se^{r_1(T-t)}\int_{w=b}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left[w^2/2 - w\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2/2(T-t)\right]}dw
\end{aligned}$$

pero observe que:

$$\begin{aligned}
\frac{w^2}{2} - w\sigma\sqrt{T-t} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) &= \frac{1}{2}\left[w^2 - 2w\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[w - \sigma\sqrt{T-t}\right]^2
\end{aligned}$$

con lo que:

$$
\begin{aligned}
s\int_{s=X}^{\infty} f(s)ds &= Se^{r_1(T-t)}\int_{w=b}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5\left(w-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}dw \\
&= Se^{r_1(T-t)}\left[1-N\left(b-\sigma\sqrt{T-t}\right)\right] \\
&= Se^{r_1(T-t)}N\left(\sigma\sqrt{T-t}-b\right) \\
&= Se^{r_1(T-t)}N\left(\sigma\sqrt{T-t}+d_2\right)
\end{aligned}
$$

por lo que si se define: $d_1 = \sigma\sqrt{T-t} + d_2$

$$
s\int_{s=X}^{\infty} f(s)ds = Se^{r_1(T-t)}N(d_1)
$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{E[c_T]}{e^{r_1(T-t)}} \\
&= \frac{Se^{r_1(T-t)}N(d_1)-XN(d_2)}{e^{r_1(T-t)}} \\
&= SN(d_1)-Xe^{-r_1(T-t)}N(d_2)
\end{aligned}
$$

la cual se conoce como *la fórmula de Black & Scholes* para opciones Europeas.

El cálculo de la Put es a través de la paridad Put-Call:

$$
\begin{aligned}
p &= c+Xe^{-r_1(T-t)}-S \\
&= SN(d_1)-Xe^{-r_1(T-t)}N(d_2)+Xe^{-r_1(T-t)}-S \\
&= Xe^{-r_1(T-t)}\left[1-N(d_2)\right]-S\left[1-N(d_1)\right] \\
&= Xe^{-r_1(T-t)}N(-d_2)-SN(-d_1)
\end{aligned}
$$

Recapitulando, la fórmula de Black & Scholes para valuar una opción Call Europea es por tanto:

$$
c = SN(d_1)-Xe^{-r_1(T-t)}N(d_2)
$$

donde

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln(S/X)+(r_1+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= \frac{\ln(S/X)+(r_1-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

y donde:

$\underline{N(d)}$: es la función de distribución acumulativa de una variable que es normalmente distribuida con media cero y varianza uno, es decir, es la probabilidad de que tal variable sea menor o igual que d.

$\underline{r_1}$: es la tasa libre de riesgo durante $T-t$.

La fórmula tiene una interpretación particular en relación al portafolio consistente de una posición larga en acciones y un préstamo a la tasa libre de riesgo r_1. Al final del presente trabajo, se mostrará que $N(d_1)=\Delta$, el número de acciones en el portafolio. En previo desarrollo se mostró que $c=S\Delta+B$, siendo B la cantidad de dinero invertido a la tasa libre de riesgo. Paralelamente, se observa que $B = Xe^{-r_1(T-t)}N(d_2)$. *El primer término en la fórmula de Black & Scholes,* $SN(d_1)$*, es la cantidad invertida en las acciones; el segundo término,* $Xe^{-r_1(T-t)}N(d_2)$*, es el dinero pedido a préstamo.*

Convergencia a la fórmula de Black & Scholes

Se desea que la fórmula del método binomial de valoración de opciones converja a la fórmula de Black & Scholes cuando n tiende a infinito, es decir, cuando $T-t$ es dividido en una gran cantidad de periodos. Al subdividir el periodo de tiempo, se considerará que el precio de la acción sigue los principios que se establecieron en el capítulo anterior, es decir, que su distribución es lognormal.

La fórmula binomial de valoración de opciones que se calculó es:

$$c = SB(a,n;p') - Xr^{-n}B(a,n;p)$$

Como $r^n = (1+\hat{r}_1)^n = (1+r_1\Delta t)^n = \left(1+\frac{r_1(T-t)}{n}\right)^n$

se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r_1(T-t)}{n}\right)^n = e^{r_1(T-t)} \quad \therefore$$

$$\lim_{n\to\infty} r^{-n} = e^{-r_1(T-t)}$$

Por otra parte, se mostrará que mientras n tiende a infinito,

$$B(a;n,p) \to N(d_2) \qquad \text{y} \qquad B(a;n,p') \to N(d_1)$$

La distribución binomial acumulativa referida a p es,

$$B(a,n;p) = P\left[a \le j\right]$$

y como j es una variable aleatoria discreta que se distribuye binomialmente, su media es np y su varianza npq.

Por el teorema del límite central, si n es grande, la variable definida por:

$$Z = \frac{j - E[j]}{\sqrt{Var[j]}} \sim N(0,1)$$

luego entonces

$$B(a,n;p) = P\left[a \le j\right] = P\left[\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{j-np}{\sqrt{npq}}\right] = P[b \le Z] = 1 - P[Z < b] = 1 - N(b)$$

donde $b = \dfrac{a-np}{\sqrt{npq}}$

y por la propiedad de simetría de la distribución acumulativa normal estándar:

$$B(a,n;p) = N(-b)$$

Ahora, recuerde que de la fórmula binomial:

$$\begin{aligned} a &= [\![\, \ln(X/Sd^n)/\ln(u/d)]\!] + 1 \\ &= \frac{\ln(X/S) - n\ln d}{\ln(u/d)} + \varepsilon \end{aligned}$$

donde ε es un número entre cero y uno, y por tanto:

$$a = \frac{\ln(X/S) - n\ln d + \varepsilon\ln(u/d)}{\ln(u/d)}$$

Por otra parte sea S_T el precio final de la acción al tiempo $T- t$. Durante los n periodos, S_T pudo haber seguido cualquier trayectoria, entonces

$$S_T = u^j d^{(n-j)} S$$

siendo j la variable aleatoria discreta binomial que representa los movimientos al alza (de manera similar $n- j$ representa los movimientos a la baja) durante los n periodos. Así,

$$\begin{aligned} S_T/S &= u^j d^{(n-j)} \\ \ln(S_T/S) &= j\ln u + (n-j)\ln d \\ &= j\ln(u/d) + n\ln d \end{aligned}$$

Recuerde que el precio de la acción sigue una distribución lognormal;

$$\ln(S_T/S) \sim N\left((r_1 - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

luego entonces:

$$E\left[\ln(S_T/S)\right] = E\left[j\ln(u/d) + n\ln d\right] = \ln(u/d)E[j] + n\ln d \qquad \therefore$$

$$E[j] = \frac{E\left[\ln(S_T/S)\right] - n\ln d}{\ln(u/d)} \qquad i.e.,$$

$$np = \frac{(r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - n\ln d}{\ln(u/d)}$$

Note que r_1 es la tasa referida a p.

Por otra parte, para:

$$Var\left[\ln(S_T/S)\right] = Var\left[j\ln(u/d) + n\ln d\right] = \ln^2(u/d)Var[j] \qquad \therefore$$

$$Var[j] = \frac{Var\left[\ln(S_T/S)\right]}{\ln^2(u/d)} \qquad i.e.,$$

$$npq = \frac{\sigma^2(T-t)}{\ln^2(u/d)} \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{npq} = \frac{\sigma\sqrt{(T-t)}}{\ln(u/d)}$$

Acomodando los valores obtenidos se tiene que:

$$b = \frac{a-np}{\sqrt{npq}} = \frac{\dfrac{\ln(X/S) - n\ln d + \varepsilon\ln(u/d)}{\ln(u/d)} - \dfrac{(r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - n\ln d}{\ln(u/d)}}{\dfrac{\sigma\sqrt{(T-t)}}{\ln(u/d)}}$$

$$= \frac{\ln(X/S) - (r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \varepsilon\ln(u/d)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \qquad \therefore$$

$$-b = \frac{\ln(S/X) + (r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \varepsilon\ln(u/d)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \qquad \text{y como} \quad \lim_{n\to\infty}\ln(u/d) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(-b) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(S/X) + (r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \varepsilon\ln(u/d)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \frac{\ln(S/X) + (r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \text{i.e.,}$$

$$\lim_{n\to\infty}(-b) = d_2$$

La forma en que p influye sobre el valor de d_2 es a través de r_1 (y claramente también, a través de los valores de u y d), ya que como se estableció en la primera ecuación del sistema de ecuaciones;

$$e^{r_1\Delta t} = pu + qd$$

Por lo que para calcular el valor d_1, se hará un símil con la tasa r_1' relativa a p', es decir,

$$\begin{aligned} e^{r_1'\Delta t} &= p'u + q'd \\ &= \left(\tfrac{u}{r}p\right)u + \left(\tfrac{d}{r}q\right)d \\ &= \tfrac{1}{r}\left(pu^2 + qd^2\right) \end{aligned}$$

y usando la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (y recordando que $\Delta t = \frac{T-t}{n}$):

$$\begin{aligned} e^{r_1'\Delta t} &= \tfrac{1}{r}e^{2r_1\Delta t+\sigma^2\Delta t} && \Rightarrow \\ \left(e^{r_1'\Delta t}\right)^n &= \left(\tfrac{1}{r}e^{2r_1\Delta t+\sigma^2\Delta t}\right)^n && \Rightarrow \\ e^{r_1'(T-t)} &= \frac{1}{r^n}e^{2r_1(T-t)+\sigma^2(T-t)} && \text{y mientras } n \to \infty \\ e^{r_1'(T-t)} &= e^{-r_1(T-t)}e^{2r_1(T-t)+\sigma^2(T-t)} && \Rightarrow \\ e^{r_1'(T-t)} &= e^{r_1(T-t)+\sigma^2(T-t)} && \text{y por tanto,} \\ r_1' &= r_1 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Paralelamente al desarrollo expuesto, se tiene que:

$$b' = \frac{a - np'}{\sqrt{np'q'}} = \frac{\dfrac{\ln(X/S) - n\ln d + \varepsilon\ln(u/d)}{\ln(u/d)} - \dfrac{(r_1' - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - n\ln d}{\ln(u/d)}}{\dfrac{\sigma\sqrt{(T-t)}}{\ln(u/d)}}$$

$$= \frac{\ln(X/S) - (r_1' - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \varepsilon\ln(u/d)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \therefore$$

$$\lim_{n\to\infty}(-b') = \frac{\ln(S/X) + (r_1' - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \text{y sustituyendo el valor de } r_1'$$

$$= \frac{\ln(S/X) + (r_1 + \sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$= \frac{\ln(S/X) + (r_1 + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad i.e.$$

$$\lim_{n\to\infty}(-b') = d_1$$

Finalmente, al conjuntar todos estos resultados:

$$\lim_{n\to\infty} c = \lim_{n\to\infty}\left(SB(a,n,p') - Xr^{-n}B(a,n,p)\right)$$

$$c = S\lim_{n\to\infty} B(a,n,p') - X\lim_{n\to\infty} r^{-n}\lim_{n\to\infty} B(a,n,p)$$

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r_1(T-t)}N(d_2)$$

Con lo que la fórmula binomial converge a la fórmula de Black & Scholes cuando el intervalo de tiempo $T-t$ se subdivide infinitamente y u, r, d, p se escogen de la manera descrita.

Ejemplo

Recordando el último ejemplo: Considere una opción Europea con un tiempo de expiración de 3 meses sobre una acción que no paga dividendos. Con precio de mercado y precio de ejercicio de \$100 y \$95 respectivamente; tasa libre de riesgo del 7% y volatilidad del 20% anual.

En estas condiciones S=100, X=95, r_1=0.07, $T-t$=0.25, σ=0.2

```
================================================================
%FUNCIÓN normal
%FUNCIÓN PARA CALCULAR EL ÁREA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR
%DE CERO A x.
%
%USO function y=normal(x)

function y=normal(x)

         y=0.5+0.5*erf(x/sqrt(2));

         % erf ES LA FUNCIÓN ERROR DE ALTA PRECISIÓN
```

$$\% \ \mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$\% \ N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-0.5t^2}dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-z^2}dz \quad \therefore$$

$$\% \ N(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{erf}(x/\sqrt{2})$$

```
  return
  end
================================================================

%FUNCIÓN bs
%FUNCIÓN PARA CALCULAR LOS VALORES DE LAS OPCIONES CALL Y PUT
%EUROPEAS A TRAVÉS DE LA FÓRMULA DE BLACK & SCHOLES
%
% USO:     function [c,p]=bs(S,X,r1,T,vol)
%
%     c     EL VALOR DE LA OPCIÓN CALL EUROPEA
%     p     EL VALOR DE LA OPCIÓN PUT EUROPEA
%     S     EL VALOR DE MERCADO DE LA ACCIÓN
%     X     EL PRECIO DE EJERCICIO
%     r1    LA TASA LIBRE DE RIESGO
%     T     FECHA DE MADURACIÓN EN AÑOS
%     vol   LA VOLATILIDAD

  function [c,p]=bs(S,X,r1,T,vol)
```

```
          d1=(log(S/X)+(r1+0.5*vol^2)*T)/(vol*sqrt(T));
          d2=d1-vol*sqrt(T);

          c=S*normal(d1)-X*exp(-r1*T)*normal(d2);
          p=c+X*exp(-r1*T)-S;
return;
end
==================================================================
```

Usando la función bs, se encuentra que:

```
>>[c,p]=bs(100,95,0.07,0.25,0.2)

    c=
       8.0559

    p=
       1.4079
```

Resultados que son muy cercanos a los obtenidos en el ejemplo anterior para valores grandes de n.§

Valuación de opciones Americanas

Hasta ahora, las opciones que se consideraron fueron Europeas. Por ello, nuevamente, se retoma el uso de los árboles binarios en la valuación de opciones como se ilustró anteriormente.

Se mostrará a continuación de una manera intuitiva que el valor de una opción Call Europea (que no paga dividendos) es igual al valor de una opción Call Americana sobre la misma acción, es decir, que $c=C$. Para ilustrar la naturaleza general del argumento considere una opción Call Americana sobre una acción que no paga dividendos con un mes de expiración cuando el precio de la acción es de $50 y el precio de ejercicio es de $40. La opción está muy adentro del dinero y el poseedor de la opción puede decidirse a ejercerla inmediatamente.

Si el inversionista planea tener la acción por más de un mes, no sería conveniente ejercer la opción. La mejor estrategia sería mantener la opción y ejercerla al final del mes. De esta manera, ahorra el interés de los $40 del precio de ejercicio durante el mes, y como la acción no paga dividendos no se sacrificaría ningún ingreso por concepto de la acción. Otra razón para esperar es el hecho de que el precio de la acción puede situarse por debajo de los $40 en un mes. ¡Siendo el caso, la opción expira sin valor y el inversionista agradece que la decisión de ejercer inmediatamente no haya sido tomada! Este argumento muestra que no hay ventajas en ejercer inmediatamente la opción si el inversionista planea mantener la acción por el resto de vida de la opción.

Por otro lado, si el inversionista planea ejercer la opción y vender la acción; la mejor estrategia para él sería vender la opción. La opción sería comprada por otro inversionista que desea conservar la acción. Tal inversionista existe, pues de no ser así, el precio actual de la acción no sería de $50. De esta manera, el precio obtenido por la venta de la opción (= valor intrínseco + valor en el tiempo) sería mayor a $10, su valor intrínseco.

Recapitulando, una razón por la cual una opción Call no debería ser ejercida antes del tiempo de expiración es por el seguro que proporciona. Cuando se mantiene la opción, en lugar de la acción, proporciona un seguro para el inversionista ante una baja en el precio de la acción inferior al precio de ejercicio. Una vez que la opción se ha ejercido el seguro termina. El valor del dinero en el tiempo, es una razón más para esperar; mientras más se dilate el tiempo de pago es mejor.

Sin embargo no sucede lo mismo con las opciones Put Americanas, donde puede ser beneficioso un pronto ejercicio de la opción. De hecho, en cualquier momento de su vida una opción Put deberá ser ejercida prontamente si está suficientemente dentro del dinero. Considere una situación extrema, donde el precio de ejercicio es de \$10 y el precio de la acción es virtualmente cero. Un ejercicio inmediato de la opción permite a un inversionista una ganancia de \$10. Si el inversionista espera, la ganancia de ejercerla podría ser menor de \$10 pero no podría ser mayor de \$10 pues no se permiten precios negativos de la acción. Además, recibir \$10 ahora es preferible a recibirlos en el futuro. Por tanto la opción Put Americana debe ser ejercida inmediatamente.

Resta pues, evaluar la opción Put Americana.

El método binomial en la valuación de opciones Put Americanas

Recuerde que un árbol binario representa las posibles trayectorias que puede seguir el precio de una acción durante la vida de la opción. La opción se evalúa comenzando al final del árbol (al tiempo T) y regresando hasta el nodo inicial.

Se define P_{ij} como el valor de la opción Put Americana en el j-ésimo nodo para el tiempo $i\Delta t$ donde $0 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq i$, siendo N el número de subintervalos de longitud Δt en que se subdivide el tiempo de vida de la opción. El precio de la acción en el nodo (i,j) es $Su^j d^{i-j}$. El valor de la opción Put Americana en la fecha de expiración es $\max[X-S_T, 0]$, de esta manera:

$$P_{Nj} = \max[X - Su^j d^{N-j}, 0] \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N$$

De los cálculos obtenidos en el capítulo anterior, se hace un símil para el cálculo de la opción Put Americana

$$P = \frac{pP_u + qP_d}{r}$$

Donde P_u, P_d representan los valores de la opción al alza y a la baja respectivamente; p y q sus probabilidades correspondientes. La tasa libre de riesgo r_1 se incluye en la relación $r = 1 + r_1$. También se encontró que tales parámetros pueden tomar los siguientes valores (segunda solución).

$\Delta t = (T - t)/N$

$r = 1 + r_1 \Delta t$

$p = q = 1/2$

$u = e^{r_1 \Delta t}[1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}\ ]$

$d = e^{r_1 \Delta t}[1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}\ ]$

Por tanto el valor de la opción es,

$$P_{i,j} = \frac{pP_{i+1,j+1} + qP_{i+1,j}}{r} = \frac{0.5P_{i+1,j+1} + 0.5P_{i+1,j}}{1 + r_1 \Delta t}$$

para $0 \le i \le N\text{-}1$ y $0 \le j \le i$.

Por ser la opción Americana, su valor en cada nodo debe ser comparado con su valor intrínseco, para finalmente obtener:

$$P_{i,j} = \max\left\{X - Su^j d^{i-j}, \frac{0.5P_{i+1,j+1} + 0.5P_{i+1,j}}{1 + r_1 \Delta t}\right\}$$

Ejemplo

Considere una opción Put Americana con cinco meses de vida sobre una acción que no paga dividendos cuando el precio de la acción es \$50, con precio de ejercicio de \$50, tasa de interés libre de riesgo del 10% anual y una volatilidad del 40%.

Con estos datos:

S=50, X=50, r_1=0.10, σ=0.40, y T=0.4167.

Se divide el intervalo de tiempo en 5 y 1000 subintervalos respectivamente.

```
==================================================================
%FUNCIÓN amput
%FUNCIÓN PARA CALCULAR EL VALOR DE UNA OPCIÓN PUT AMERICANA POR EL
%MÉTODO BINOMIAL
%
%USO   function P=amput(S,X,r1,T,vol,n)

function P=amput(S,X,r1,T,vol,n)

                %DEFINICIÓN DE DATOS
        dt=T/n;
        r=1+r1*dt;
        u=exp(r1*dt)*(1+sqrt(exp(dt*vol^2)-1));
        d=exp(r1*dt)*(1-sqrt(exp(dt*vol^2)-1));
        pp=0.5;
        qq=0.5;

        for k=n+2:-1:1
            P(1,k)=0;
        end
```

```
                    %CALCULO DEL VALOR DE LA OPCIÓN

         for i=n+1:-1:1

                 for j=i:-1:1
                     c1=X-S*u^(j-1)*d^(i-j);
                     c2=(pp*P(1,j+1)+qq*P(1,j))/r;
                     a(1,j)=max(c1,c2) ;
                 end

              P=a(1,1:i);

          end
return;

end
==================================================================
>>P=amput(50,50,0.1,0.4167,0.4,5)

      P=
         4.5388

>>P=amput(50,50,0.1,0.4167,0.4,1000)

      P=
         4.2855
```

§

CAPÍTULO III

LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

DE

BLACK & SCHOLES

En este último capítulo se enmarca la presencia de la ecuación de Black & Scholes como un caso particular de una ecuación diferencial parabólica. Como tal, el arribo a su solución puede seguir diferentes caminos, y en el ínterin necesitarse definir nuevos conceptos que faciliten la resolución plena del problema.

La ecuación diferencial de Black & Scholes

En el capítulo primero se estableció que el modelo estocástico que representa el comportamiento de las acciones es,

$dS = \mu S dt + \sigma S dz$ para el caso continuo

$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta Z$ para el caso discreto

Sea c el precio de la opción Call contingente a la acción S. El lema de Ito afirma que una función $f(x,t)$ sigue el siguiente proceso:

$$df(x,t) = \left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} a(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} b^2(x,t) \right] dt + \left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} b(x,t) \right] dz$$

siendo $dx=a(x,t)dt+b(x,t)dz$ un proceso de Ito.
Por tanto,

$$dc(S,t)=\left[\frac{\partial c(S,t)}{\partial S}\mu S+\frac{\partial c(S,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c(S,t)}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]dt+\left[\frac{\partial c(S,t)}{\partial S}\sigma S\right]dz$$

siendo $a(S,t)=\mu S$ y $b(S,t)=\sigma S$.

Discretizando la fórmula, se obtiene:

$$\Delta c(S,t)=\left[\frac{\partial c(S,t)}{\partial S}\mu S+\frac{\partial c(S,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c(S,t)}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]\Delta t+\frac{\partial c(S,t)}{\partial S}\sigma S\Delta Z$$

siendo ΔS y $\Delta c(S,t)$ los incrementos en S y c en un intervalo pequeño de tiempo Δt.

A fin de eliminar el proceso ΔZ ($=\varepsilon\sqrt{\Delta t}$) se construye el siguiente portafolio Π,

$$\left\{\begin{array}{ll} -c & : \text{Suscribir una opción (posición corta en una opción)} \\ +\frac{\partial c}{\partial S}S & : \text{Comprar } \frac{\partial c}{\partial S} \text{ acciones (posición larga en acciones)} \\ \hline \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial c}{\partial S}S-c=\Pi$$

Obsérvese la semejanza de $\frac{\partial c}{\partial S}$ con $\Delta=\frac{c_u-c_d}{uS-dS}$, el *hedge ratio* del capítulo anterior.

Un cambio $\Delta\Pi$ en el portafolio durante Δt da como resultado:

$$\Delta\Pi=\frac{\partial c}{\partial S}\Delta S-\Delta c\ \ i.e.,$$

$$\begin{aligned}\Delta\Pi&=\frac{\partial c}{\partial S}\left[\mu S\Delta t+\sigma S\Delta Z\right]-\left[\frac{\partial c}{\partial S}\mu S+\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]\Delta t-\frac{\partial c}{\partial S}\sigma S\Delta Z\\&=-\left[\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]\Delta t\end{aligned}$$

En el capítulo segundo se estableció la fórmula que relaciona al portafolio anterior;

$$\Delta\Pi=r_1\Pi\Delta t$$

con r_1 la tasa libre de riesgo durante Δt. De igual manera se estableció que el portafolio Π está libre de riesgo durante Δt, pues de lo contrario, podría hacerse arbitraje.

Así,

$$\Delta\Pi = -\left[\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]\Delta t$$

$$r_1\Pi = -\left[\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]$$

$$r_1\left[\frac{\partial c}{\partial S}S - c\right] = -\left[\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right] \quad \therefore$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial c}{\partial S}r_1 S = r_1 c$$

Esta última expresión recibe el nombre de *ecuación diferencial de Black & Scholes.*

Ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales se pueden clasificar de diferentes maneras. Antes que nada, las ecuaciones pueden ser *lineales* o *no lineales*; dependiendo de los coeficientes de las derivadas parciales en la ecuaciones. Si la ecuación es una combinación lineal de la función y sus derivadas parciales, se le llama ecuación diferencial parcial lineal.

El segundo tipo de clasificación tiene que ver con el *orden* de diferenciación. Si todas las derivadas parciales en la ecuación son de primer orden, entonces la ecuación diferencial parcial también será de primer orden. Si hay parciales cruzadas, o segundas parciales, entonces la ecuación diferencial parcial se le llama de segundo orden.

El tercer tipo de clasificación es intrínseco a la ecuación general lineal de segundo orden:

$$a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + c(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + f(x,t)u + g(x,t) = 0$$

y se clasifican de la siguiente manera:

- si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación es elíptica
- si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación es parabólica
- si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación es hiperbólica

Formas canónicas

Las tres ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden más importantes son

1. La ecuación de Poisson $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$
2. La ecuación de onda $c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
3. La ecuación de calor $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$

La ecuación de Poisson es la representación estándar de la ecuación elíptica. La ecuación de onda es el ejemplo estándar de la ecuación hiperbólica, y la ecuación de calor de una ecuación parabólica.

La ecuación de Poisson con $f = 0$ es llamada la ecuación de Laplace. La ecuación de Poisson y la ecuación de Laplace aparecen en el estudio de problemas de potencia. La ecuación de onda surge del estudio de la vibración de cuerdas y en problemas de propagación de ondas. A la ecuación de calor se le conoce como la ecuación de *difusión*, pues se presenta en el estudio de la conducción del calor en sólidos y en problemas concernientes a procesos de difusión en gases y líquidos.
En particular, la ecuación de Black & Scholes

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + r_1 S \frac{\partial^2 c}{\partial S} = r_1 c$$

es parabólica para $S > 0$.

La ecuación de difusión

La ecuación de calor o difusión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

representa el flujo (difusión) de calor en un medio continuo, y ha sido estudiada por casi dos siglos, de ahí que se disponga de una considerable cantidad de teoría acerca de sus propiedades y soluciones. La idea intuitiva es considerar que u representa la temperatura uniforme dentro de cada elemento de sección transversal a lo largo de una barra, la cual se supone está perfectamente aislada en su superficie lateral.

Propiedades básicas de la ecuación de difusión

- *Principio de superposición.* Si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son soluciones, entonces para cualesquiera constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ la combinación lineal $u(x,t) = c_1 u_1, c_2 u_2, \ldots, c_k u_k$ también es solución.
- Es una ecuación lineal.
- Es una ecuación parabólica

Condiciones de frontera de la ecuación de difusión

Es claro que de las condiciones iniciales y de frontera dependerá la solución de la ecuación de difusión. En su solución se considerará solamente el caso para una región infinita. También se considerará que el calor fluye en una barra de longitud muy grande, haciendo que L, la longitud de la barra, tienda a infinito. En este sentido, los siguientes son los parámetros del problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad -\infty < x < \infty\,,\; t > 0.$$

con condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x)$$

donde

- $u_0(x)$ es una función con un número finito de discontinuidades de salto
- $\lim_{|x|\to\infty} u_0(x)e^{-ax^2} = 0$ para cualquier $a > 0$
- $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$ para cualquier $t > 0$

Se dice que un problema está bien planteado si existe una solución, es única y es analítica (existe el límite de la derivada). Tal es el caso de la ecuación de difusión, y para fines prácticos, se pensará que la solución de la ecuación de difusión es una función continua de x.

Solución por similitud

Algunas veces sucede que la solución a una ecuación diferencial parcial, junto con sus condiciones iniciales y finales, depende de una combinación especial de las dos variables independientes. Si tal es el caso, el problema se puede reducir a una ecuación diferencial ordinaria en donde tal combinación es la variable independiente. La solución a esta ecuación diferencial ordinaria se le conoce como *solución por similitud* a la ecuación diferencial parcial original.

Antes de proceder a resolver la ecuación, conviene definir algunos conceptos:

La función delta

La función delta es usualmente definida en una de las tres formas siguientes

A. Por la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

donde $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$

B. Como un límite:

$$\delta(t) = \lim_{c\to 0} f_c(t)$$

de una secuencia de funciones que satisfacen

i) $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)dt = 1$

ii) $\lim_{c\to 0} f_c(t) = 0$ para todo $t \neq 0$

C. Por la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$$

donde $f(t)$ es una función arbitraria, continua en el origen.

Lo anterior, o cualquier otra definición de $\delta(t)$, carecería de significado si se pretendiera ver a $\delta(t)$ como una función ordinaria, pues no es una función en el sentido de la definición usual. Su comprensión es mejor si la función delta se presenta como un concepto nuevo, una función generalizada, como a veces se le llama, caracterizada por ciertas propiedades. La definición C ofrece un significado preciso; A o B sin embargo, no especifican de manera única a $\delta(t)$ porque existen otras funciones generalizadas que satisfacen A o B.

Estas funciones tienen un enorme valor operacional en las matemáticas de la física. En honor de Paul A.M. Dirac, quien popularizó el uso de estas funciones, son comúnmente llamadas las *funciones delta de Dirac*.

A continuación se presentan ciertas propiedades de $\delta(t)$:

i) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$, por lo que si $a = -1$, $\delta(t)$ es par.

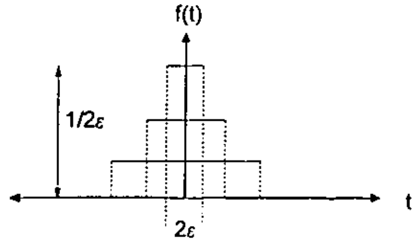
ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)f(t)dt = f(\tau)$

Ejemplo

1. Los siguientes modelos son ilustrativos y de particular interés

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } |t| < \varepsilon \\ 0 & \text{si } |t| > \varepsilon \end{cases}$$

La siguiente gráfica de la función muestra tres elementos de la sucesión infinita de la función delta. Note que mientras ε tiende a cero la gráfica tiende a ser más alta y más delgada.



Tres miembros de la función delta

Ahora, haciendo uso de la definición B, se encuentra que el área bajo la curva o bien su integral es uno, independientemente del valor de ε, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)dt = 2\varepsilon\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) = 1$$

Por otra parte

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t) = 0$ para $t \neq 0$, y por tanto

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t)$$

Luego entonces, de una manera intuitiva, se puede describir a δ(t) como una "función" que es cero en todas partes excepto en $t = 0$, donde se hace infinito, y que además tiene un área unitaria bajo su gráfica.

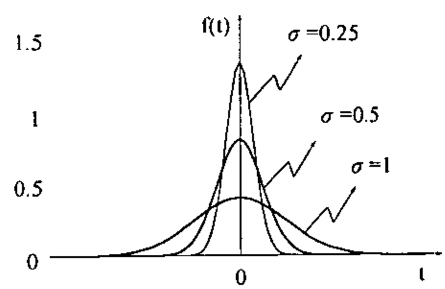
2. La siguiente función es muy conocida en probabilidad

$$f_c(t) = \frac{1}{c\sqrt{\pi}} e^{-t^2/c^2}$$

Para c > 0, esta función es una curva gaussiana, pues si $c = \sigma\sqrt{2}$, entonces

$$f_c(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(t-0)^2/2\sigma^2}$$

la cual es la función de densidad de la distribución normal con media cero y desviación estándar σ. Como en el caso anterior, la gráfica de la función se hace más alta y más delgada a medida que c se hace pequeño, es decir, a medida que la desviación estándar se hace pequeña.



Curvas gaussianas

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)dt = 1 \quad \text{y}$$

$\lim\limits_{c\to 0} f_c(t) = 0$ para $t \neq 0$

y por tanto

$\delta(t) = \lim_{c \to 0} f_c(t)$

Observe que la función de densidad se desploma rápidamente (vale cero) cuando $|t| \to \infty$.
§

Retomando la ecuación de difusión, se busca una solución en la que $u_\delta(x,t)$ dependa solamente de x y t a través de la combinación $\xi = x/t^\beta$, con lo que $u_\delta(x,t) = t^\alpha U(x/t^\beta)$.

En particular se ensayará la forma $u_\delta(x,t) = t^{-1/2} U(x/t^{1/2})$.

Diferenciando se encuentra que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\delta}{\partial t} &= -\frac{1}{2} t^{-1/2} x t^{-3/2} U'(\xi) - \frac{1}{2} t^{-3/2} U(\xi) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{U'(\xi)}{t\sqrt{t}} (x/t^{1/2}) - \frac{1}{2} \frac{U(\xi)}{t\sqrt{t}} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{U'(\xi)}{t\sqrt{t}} \xi - \frac{1}{2} \frac{U(\xi)}{t\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\delta}{\partial x} &= t^{-1/2} t^{-1/2} U'(\xi) \\
&= \frac{U'(\xi)}{t} \quad \text{y} \\
\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x^2} &= t^{-1} t^{-1/2} U''(\xi) \\
&= \frac{U''(\xi)}{t\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\delta}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x^2} \\
-\frac{1}{2} \frac{U'(\xi)}{t\sqrt{t}} \xi - \frac{1}{2} \frac{U(\xi)}{t\sqrt{t}} &= \frac{U''(\xi)}{t\sqrt{t}} \qquad \therefore \\
U''(\xi) + \frac{1}{2}\left[\xi U'(\xi) + U(\xi)\right] &= 0 \qquad \text{i.e.} \\
U''(\xi) + \frac{1}{2}\left[\xi U(\xi)\right]' &= 0
\end{aligned}$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria.
Integrando,

$$U'(\xi)+\frac{1}{2}\xi U(\xi)=C$$

Esta nueva ecuación diferencial lineal de primer orden se resuelve usando el siguiente factor de integración:

$$e^{\int \frac{1}{2}\xi d\xi}=e^{\frac{1}{4}\xi^2}$$

$$U'(\xi)e^{\frac{1}{4}\xi^2}+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}\xi^2}\xi U(\xi)=Ce^{\frac{1}{4}\xi^2}$$

$$\left[U(\xi)e^{\frac{1}{4}\xi^2}\right]'=Ce^{\frac{1}{4}\xi^2}$$

Integrando

$$U(\xi)e^{\frac{1}{4}\xi^2}-K=C\int e^{\frac{1}{4}\xi^2}d\xi$$

$$\begin{aligned}U(\xi)&=Ce^{-\frac{1}{4}\xi^2}\int e^{\frac{1}{4}\xi^2}d\xi+Ke^{-\frac{1}{4}\xi^2}\\&=C\int d\xi+Ke^{-\frac{1}{4}\xi^2}\\&=C\xi+Ke^{-\frac{1}{4}\xi^2}\end{aligned}$$

para C y K constantes. Si en particular se toma $C=0$ y $K=1/2\sqrt{\pi}$, la solución es

$$\begin{aligned}u_\delta(x,t)&=t^{-1/2}U(x/t^{1/2})\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}\qquad \text{para}\quad -\infty<x<\infty,\ t>0\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sqrt{2t})}e^{-(x-0)^2/2(\sqrt{2t})^2}\end{aligned}$$

es decir, la solución es la función de densidad de la distribución normal con media cero y desviación estándar $\sqrt{2t}$, y como se mostró en el ejemplo *2*,

$$u_\delta(x,0)=\delta(x).$$

La función $u_\delta(x,0)$ cuando $t=x=0$ se interpreta, idealizadamente, diciendo que en el principio todo el calor está concentrado en un solo punto, en $x=0$, con valor infinito; mientras que en otro lado, $x\neq 0$, su temperatura es nula. Además, como su integral es uno, tal cantidad de calor es unitaria. Por otra parte, para $t>0$, aunque sea pequeño, y para cualquier x, $u_\delta(x,t)>0$: el calor que en un principio se encontraba concentrado en $x=0$ se difunde inmediatamente a lo largo de la barra. A la función

$u_\delta(x,t)$ se le conoce como *la solución fundamental* de la ecuación de difusión, y puede ser usada para derivar una solución explícita al problema con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$.

Si $u_\delta(x,t)$ es una solución de la ecuación de difusión, entonces también lo es

$$u_\delta(x-\eta,t) = u_\delta(\eta - x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(\eta-x)^2/4t}$$

Pues,

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{2(\eta - x)}{4t} e^{-(\eta-x)^2/4t} = \frac{(\eta - x)}{2t} u_\delta(\eta - x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x^2} = u_\delta(\eta - x, t)\left[\frac{-1}{2t}\right] + \left[\frac{\eta - x}{2t}\right]^2 u_\delta(\eta - x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x^2} = \frac{\partial u_\delta}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{(\eta - x)^2}{4t^2} e^{-(\eta-x)^2/4t} + \frac{-1}{2t \cdot 2\sqrt{\pi t}} e^{-(\eta-x)^2/4t}$$

$$= \frac{(\eta - x)^2}{4t^2} u_\delta(\eta - x, t) + \left[\frac{-1}{2t}\right] u_\delta(\eta - x, t)$$

siendo η cualquier número.

Con valor inicial

$$u_\delta(\eta - x, 0) = \delta(\eta - x)$$

luego entonces, para toda η , la función

$$c u_\delta(\eta - x, 0) = u_0(\eta)\delta(\eta - x)$$

satisface la ecuación de difusión, donde en particular se toma la constante $c = u_0(\eta)$,

Ahora, como la ecuación de difusión es lineal, se puede usar el principio de superposición a soluciones de esta forma. Así, sumando infinitamente todas las soluciones para $-\infty < \eta < \infty$ se obtiene la integral

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\eta) u_\delta(x - \eta, t) d\eta$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\eta) e^{-(x-\eta)^2/4t} d\eta$$

con condición inicial,

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\eta)\delta(\eta - x) d\eta$$

que es la solución explícita al problema inicialmente planteado. Tal solución sólo es válida para toda función continua $u_0(\eta)$ que satisfaga las condiciones inicialmente propuestas, pues si $u_0(\eta) = e^{\eta^4}$, la integral diverge. Finalmente, utilizando una propiedad de la función delta, la condición inicial queda

$$u(x,0) = u_0(x)$$

Unicidad de la solución

Supóngase que hay dos funciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ que satisfacen la ecuación de difusión. Sea

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

y considere la función

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v^2(x,t)dx$$

Claramente

$$E(t) \geq 0$$

y

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[u_1(x,0) - u_2(x,0)\right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[u_0(x) - u_0(x)\right]^2 dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Diferenciando respecto a t,

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 2v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}dx \qquad \text{e integrando por partes} \\ &= v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \end{aligned}$$

y por la condición establecidas de la ecuación de difusión $v(\infty,t) = v(-\infty,t) = 0$

$$E'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \leq 0$$

Por lo que $E(t)$ es una función no creciente y como $E(0) = 0$, entonces $E(t) \leq 0$. Pero, por definición de $E(t)$, $E(t) \geq 0$, por tanto $E(t) \equiv 0$ para $t \geq 0$.
Así, $v(x,t) = 0$ y $u_1 = u_2$, de manera que la solución es única.

Solución por la transformada de Fourier

La anterior solución también puede derivarse usando la *transformada de Fourier*. La transformada tiene una gran importancia al resolver problemas que involucran ecuaciones diferenciales o integrales.

La transformada de Fourier $F(\omega)$ de una función $f(t)$ se define por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

La transformada inversa de Fourier se puede expresar en términos de $F(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$F(\omega)$ y $f(t)$ son llamadas *pares de transformadas de Fourier*.

Ejemplo

Sea

$f(t) = e^{-at^2}$ para $a > 0$

Entonces

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-i\omega t}dt$$

Dado que la integral no puede ser evaluada con técnicas elementales, se puede diferenciar respecto de ω bajo la integral, es decir,

$$F'(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} te^{-at^2}ie^{-i\omega t}dt$$

Ahora, sean

$$u = ie^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad du = -ii\omega e^{-i\omega t}dt = \omega e^{-i\omega t}dt$$

$$dv = te^{-at^2}dt \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2a}e^{-at^2}$$

en la integración por partes

$$F'(\omega) = -ie^{-i\omega t}\frac{1}{2a}e^{-at^2}\Big|_{t=-\infty}^{\infty} - \frac{\omega}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-i\omega t}dt$$

$$= -\frac{\omega}{2a}F(\omega) \qquad \therefore$$

$$F'(\omega) - \frac{\omega}{2a}F(\omega) = 0$$

Esta ecuación diferencial tiene el siguiente factor de integración

$$e^{\int \frac{\omega}{2a} d\omega} = e^{\omega^2/4a}$$

$$e^{\omega^2/4a} F'(\omega) - \tfrac{\omega}{2a} e^{\omega^2/4a} F(\omega) = 0$$

$$\left(F(\omega) e^{\omega^2/4a}\right)' = 0$$

$$F(\omega) = Ce^{-\omega^2/4a}$$

El valor de C se calcula haciendo $\omega = 0$

$$C = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \qquad \therefore$$

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\omega^2/4a}$$

Utilizando la transformada inversa,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\omega^2/4a} e^{i\omega t} d\omega$$

$$e^{-at^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/4a} e^{i\omega t} d\omega$$

El siguiente caso especial para $a = 1/4A$ será de gran utilidad

$$\sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{-t^2/4A} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\omega^2} e^{i\omega t} d\omega \quad §.$$

A fin de poder aplicar la transformada de Fourier en la solución de la ecuación de difusión, se multiplica la ecuación por $e^{-i\omega x}$ e integra sobre $-\infty < x < \infty$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-i\omega x}dx \\
&= U'(\omega,t) - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-i\omega x}dx
\end{aligned}
$$

Utilizando integración por partes en,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-i\omega x}dx &= \left.\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\omega x}\right|_{x=-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\omega x}dx \\
&= i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\omega x}dx
\end{aligned}
$$

donde

$$\overline{u} = e^{-i\omega x} \qquad d\overline{u} = -i\omega e^{-i\omega x}dx$$

$$dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \qquad v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Nuevamente integrando por partes

$$
\begin{aligned}
i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\omega x}dx &= i\omega\left[\left. u e^{-i\omega x}\right|_{x=-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx\right] \\
&= -\omega^2 U(\omega,t)
\end{aligned}
$$

donde

$$\underline{u} = e^{-i\omega x} \qquad d\underline{u} = -i\omega e^{-i\omega x}dx$$

$$d\underline{v} = \frac{\partial u}{\partial x}dx \qquad \underline{v} = u$$

se ha supuesto que $\frac{\partial u}{\partial x}$ tiende a cero cuando x tiende a $\pm\infty$ en la integración por partes.

Así, la ecuación transformada queda,

$$0 = U'(\omega,t) + \omega^2 U(\omega,t)$$

y como

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{entonces}$$
$$U(\omega,0) = U_0(\omega).$$

Multiplicando por el factor de integración $e^{\int \omega^2 dt} = e^{\omega^2 t}$ la ecuación diferencial obtenida,

$$\begin{aligned} 0 &= e^{\omega^2 t} U'(\omega,t) + \omega^2 e^{\omega^2 t} U(\omega,t) \\ &= \left(e^{\omega^2 t} U(\omega,t)\right)' \qquad \therefore \\ & U(\omega,t) = ce^{-\omega^2 t} \end{aligned}$$

Si $t=0$ entonces $U(\omega,0) = c$, *i.e.*, $c = U_0(\omega)$.

Así,

$$U(\omega,t) = U_0(\omega) e^{-\omega^2 t}$$

Haciendo uso de la transformada inversa de Fourier, se obtiene, finalmente, la solución $u(x,t)$ de la ecuación de difusión.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[U_0(\omega) e^{-\omega^2 t}\right] e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta\right] e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\eta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega(x-\eta)} d\omega\right] d\eta \end{aligned}$$

Observe que la integral entre corchetes es la que se obtuvo en el ejemplo para el caso especial $a=1/4$A.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u_0(\eta) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-(x-\eta)^2/4t}\right] d\eta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\eta) e^{-(x-\eta)^2/4t} d\eta \end{aligned}$$

Solución explícita de la ecuación diferencial de Black & Scholes

La ecuación diferencial de Black & Scholes para una opción Call Europea con valor $c(S,t)$ está dada por:

$$\frac{\partial c(S,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 c(S,t)}{\partial S^2}+r_1S\frac{\partial c(S,t)}{\partial S}=r_1c$$

con condiciones iniciales y de frontera

$c(0,t)=0$

$c(S,t)\to S \quad \text{si} \quad S\to\infty$

$c(S,T)=\max[S-X,0]$

La primera condición muestra que el valor de la opción es cero si el precio de mercado del bien subyacente es cero, es decir, si la opción está "completamente" fuera del dinero. Por otra parte, el precio de la opción Call aumenta conforme lo hace el precio del bien subyacente, pues su valor intrínseco es mayor. La última condición establece que al expirar la opción su único valor es su valor intrínseco.

El primer paso para transformar la ecuación de Black & Scholes en la ecuación de difusión es eliminar S y S^2.

Se define

$$S=Xe^x \qquad \Rightarrow \quad x=\ln(S/X)$$
$$t=T-\tau/0.5\sigma^2 \qquad \Rightarrow \quad \tau=(T-t)0.5\sigma^2$$
$$c=Xv(x,\tau)$$

Así,

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial c}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}=X\frac{\partial v}{\partial \tau}\left[-\frac{1}{2}\sigma^2\right]$$
$$\frac{\partial c}{\partial S}=\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S}=\left[X\frac{\partial v}{\partial x}\right]\left[\frac{X}{S}\frac{1}{X}\right]=e^{-x}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial S}\right)\frac{\partial x}{\partial S}=\left[e^{-x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-e^{-x}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\left[\frac{1}{S}\right]=\left[\frac{X}{S^2}\right]\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

Con lo que la ecuación de Black & Scholes se transforma en,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c(S,t)}{\partial S^2} - r_1 S \frac{\partial c(S,t)}{\partial S} + r_1 c$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 X \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left[\frac{X}{S^2}\right]\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right] - r_1 S\left(\frac{X}{S}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + r_1 X v(x,\tau)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial x} - kv$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv$$

donde $k = r_1/0.5\sigma^2$, con

$$\begin{aligned} c(S,T) &= \max[S - X, 0] \\ &= \max[Xe^x - X, 0] \\ &= X\max[e^x - 1, 0] \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} &c(S,t) = Xv(x,\tau) \\ &c(S,T) = Xv(x,0) \quad \Rightarrow \\ &v(x,0) = \max[e^x - 1, 0] \end{aligned}$$

Observe que la nueva ecuación diferencial contiene solamente un parámetro, k, en lugar de los cuatro parámetros originales del problema.

El siguiente cambio de variable convertirá la ecuación diferencial en la ecuación de difusión.

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau} u(x,\tau)$$

Así,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta e^{\alpha x+\beta\tau} u = e^{\Delta}\left[\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u\right] \qquad \text{siendo } \Delta = \alpha x + \beta\tau$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x} + u a e^{\Delta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a e^{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x} + u a^2 e^{\Delta} + \frac{\partial u}{\partial x} a e^{\Delta} = e^{\Delta}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + u a^2\right]$$

y, la ecuación se transforma en

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv$$

$$e^{\Delta}\left[\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u\right] = e^{\Delta}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + ua^2\right] + (k-1)e^{\Delta}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + ua\right] - ke^{\Delta}u$$

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \left[a^2 + (k-1)a + k\right]u + \left[2a + (k-1)\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Para que esta igualdad sea la ecuación de difusión, se debe cumplir que

$$\begin{cases} \beta = a^2 + (k-1)a + k \\ 0 = 2a + (k-1) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se encuentra que;

$a = -\frac{1}{2}(k-1)$ y

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{4}(k-1)^2 - \frac{1}{2}(k-1)^2 - k = -\frac{1}{4}(k-1)^2 - k = -\frac{1}{4}[k^2 - 2k + 1 + 4k] \\ &= -\frac{1}{4}(k+1)^2\end{aligned}$$

Así: $v = e^{ax+\beta\tau}u(x,\tau) = u(x,\tau)e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}$

La ecuación de Black & Scholes, finalmente, se ha transformado en la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{para} \quad -\infty < x < \infty,\ \tau > 0$$

Si $\tau = 0$, se encuentra que la condición inicial es:

$$\begin{aligned} v(x,\tau) &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau) \\ v(x,0) &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x}u(x,0) \\ \max(e^x - 1, 0) &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x}u_0(x) \qquad \therefore \\ u_0(x) &= \max(e^{\frac{1}{2}(k-1)x}e^x - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \end{aligned}$$

La ecuación de difusión tiene por solución:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\eta=-\infty}^{\infty} u_0(\eta)e^{-(x-\eta)^2/4\tau}d\eta$$

Es conveniente hacer el cambio de variable $x' = (\eta - x)/\sqrt{2\tau}$ que facilita el cálculo de la integral.

Así,

$$\eta = x + x'\sqrt{2\tau}$$
$$d\eta = \sqrt{2\tau}\,dx'$$

Si $\quad e^{\frac{1}{2}(k+1)\eta} > e^{\frac{1}{2}(k-1)\eta}$, entonces $\quad \eta > 0 \quad$ y $\quad u_0(\eta) = e^{\frac{1}{2}(k+1)\eta} - e^{\frac{1}{2}(k-1)\eta}$

Luego entonces

$$\eta = x + x'\sqrt{2\tau} > 0, \; i.e., \; \infty > x' > \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$$

Así,

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{\sqrt{2\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{x'=-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} u_0(x + x'\sqrt{2\tau})e^{-x'^2/2}dx' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'=-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} \left[e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})}\right]e^{-x'^2/2}dx' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'=-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x'\sqrt{2\tau}-x'^2/2}dx' - \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'=-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)x'\sqrt{2\tau}-x'^2/2}dx \\
&= I_1 - I_2
\end{aligned}$$

En el cálculo de I_1, observe que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}x'(k+1)\sqrt{2\tau} &= \frac{1}{4}(k+1)^2\tau - \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}x'(k+1)\sqrt{2\tau} - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2\tau - \frac{1}{2}\left[x'^2 + x'(k+1)\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}(k+1)^2\tau\right] \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2\tau - \frac{1}{2}\left[x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right]^2
\end{aligned}$$

de esta manera,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'=-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x'\sqrt{2\tau}-x'^2/2}dx' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'=-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau-\frac{1}{2}\left[x'-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right]^2}dx' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'=-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[x'-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right]^2}dx'
\end{aligned}$$

Sea

$$\rho = x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \qquad x' = \rho + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$
$$d\rho = dx'$$

y los nuevos límites para la integral son,

$$\infty > x' > \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$$
$$\infty > \rho + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} > \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$$
$$\infty > \rho > \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$
$$\infty > \rho > -d_1$$

Así,

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\rho=-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \end{aligned}$$

El cálculo para I_2 es semejante a I_1, excepto que ahora $(k+1)$ se sustituye por $(k-1)$ en todo el procedimiento,

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \qquad \text{con} \qquad d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \tfrac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

Finalmente, regresando los cambios de variable,

$$\begin{aligned} c(S,t) &= Xv(x,\tau) \\ &= Xe^{-\frac{1}{2}(k-1)x} e^{-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x,\tau) \\ &= Xe^{-\frac{1}{2}(k-1)x} e^{-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \left[e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \right] \\ &= Xe^{x} N(d_1) - Xe^{-k\tau} N(d_2) \\ &= SN(d_1) - Xe^{-[r_1/0.5\sigma^2](T-t)(0.5\sigma^2)} N(d_2) \\ &= SN(d_1) - Xe^{-r_1(T-t)} N(d_2) \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} = \frac{x + \frac{1}{2}(k+1)2\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

$$= \frac{\ln(S/X) + \frac{1}{2}(r_1/0.5\sigma^2 + 1)2(T-t)0.5\sigma^2}{\sqrt{2\tau}} = \frac{\ln(S/X) + (r_1 + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \text{y}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r_1 - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

El cálculo de la opción Put Europea se realiza a través de la paridad Put-Call.

$$\begin{aligned} p &= Xe^{-r_1(T-t)} - S + c \\ &= Xe^{-r_1(T-t)} - S + SN(d_1) - Xe^{-r_1(T-t)}N(d_2) \\ &= Xe^{-r_1(T-t)}\left[1 - N(d_2)\right] - S\left[1 - N(d_1)\right] \\ &= Xe^{-r_1(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \end{aligned}$$

El hedge ratio

El *hedge ratio* de la opción es,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial c}{\partial S} \\ &= S\frac{\partial}{\partial S}N(d_1) + N(d_1) - Xe^{-r_1(T-t)}\frac{\partial}{\partial S}N(d_2) \\ &= SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} + N(d_1) - Xe^{-r_1(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= N(d_1) + SN'(d_1)\left[\frac{\frac{X}{S}\frac{1}{X}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] - Xe^{-r_1(T-t)}N'(d_2)\left[\frac{\frac{X}{S}\frac{1}{X}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] \\ &= N(d_1) + \left[SN'(d_1) - Xe^{-r_1(T-t)}N'(d_2)\right]\left[\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}\right] \end{aligned}$$

A continuación se verificará que,

$$SN'(d_1) = Xe^{-r_1(T-t)}N'(d_2)$$

Dado que,

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{s=-\infty}^{d_1} e^{-s^2/2}ds$$

entonces

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2}$$

Así,

$$SN'(d_1) = Xe^{-r_1(T-t)}N'(d_2)$$
$$S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2} = Xe^{-r_1(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_2^2/2}$$
$$Se^{-d_1^2/2+d_2^2/2} = Xe^{-r_1(T-t)}$$

$$-\frac{d_1^2}{2} = \frac{-\ln^2(S/X) - 2\ln(S/X)(r_1 + 0.5\sigma^2)(T-t) - (r_1 + 0.5\sigma^2)^2(T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)}$$

$$\frac{d_2^2}{2} = \frac{\ln^2(S/X) + 2\ln(S/X)(r_1 - 0.5\sigma^2)(T-t) + (r_1 - 0.5\sigma^2)^2(T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)}$$

$$-\frac{d_1^2}{2} + \frac{d_2^2}{2} = \frac{-2\ln(S/X)\sigma^2(T-t) - 2r_1\sigma^2(T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)}$$
$$= -\ln(S/X) - (T-t)r_1$$

Sustituyendo este valor encontrado,

$$Se^{-d_1^2/2+d_2^2/2} = Xe^{-r_1(T-t)}$$
$$Se^{-\ln(S/X)-(T-t)r_1} = Xe^{-r_1(T-t)}$$
$$Xe^{-r_1(T-t)} = Xe^{-r_1(T-t)}$$

Por tanto la igualdad es cierta.

Así, se concluye que,

$$\Delta = N(d_1)$$

Solución numérica de la ecuación diferencial de Black & Scholes. Los métodos de diferencias finitas

Los métodos de diferencias finitas se usan para obtener soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales. Constituyen una técnica muy poderosa y flexible y, si se aplican adecuadamente, son capaces de generar soluciones numéricas precisas de diferentes tipos de ecuaciones diferenciales parciales.

La idea central de los métodos de diferencia finita consiste en remplazar las derivadas parciales de la ecuación diferencial por aproximaciones basadas en las expansiones de series de Taylor de una función cerca de los puntos o punto de interés. Por ejemplo, la derivada parcial $\partial f(S,t)/\partial t$ se define como,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(S, t + \Delta t) - f(S, t)}{\Delta t}$$

y se puede aproximar por,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(S, t + \Delta t) - f(S, t)}{\Delta t}$$

la cual se conoce como una aproximación por diferencia finita, ya que envuelve pequeñas diferencias de la variable dependiente f. Esta diferencia finita en particular se llama *diferencia progresiva*, por sumarle Δt a t. Como lo sugiere la definición, mientras más pequeño sea Δt más precisa será la aproximación.

También se tiene que,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(S, t) - f(S, t - \Delta t)}{\Delta t}$$

y por tanto, la aproximación por diferencia finita

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(S, t) - f(S, t - \Delta t)}{\Delta t}$$

que se conoce como *diferencia regresiva.*

Observe que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\right] = \frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(S, t + \Delta t) - f(S, t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(S, t) - f(S, t - \Delta t)}{\Delta t}\right] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(S, t + \Delta t) - f(S, t - \Delta t)}{2\Delta t}\right]\end{aligned}$$

lo que da origen a la aproximación

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(S, t+\Delta t) - f(S, t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

que se conoce como *diferencia centrada.*

De la misma manera, se pueden definir aproximaciones por diferencias finitas para $\partial f/\partial S$. Para la parcial segunda, $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$, se puede definir una aproximación *simétrica* por diferencias finitas como una diferencia progresiva de una diferencia regresiva de la primera parcial o viceversa. En cualesquiera de los casos se obtiene una *aproximación simétrica por diferencia centrada.*

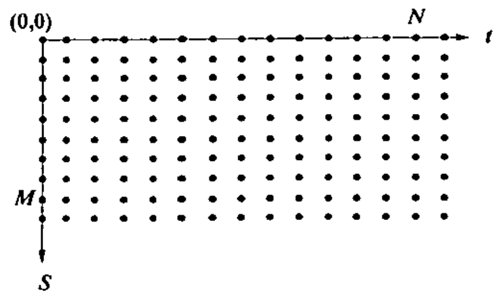
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial S} &\approx \frac{f(S,t) - f(S-\Delta S, t)}{\Delta S} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &\approx \frac{1}{\Delta S}\left[\frac{f(S+\Delta S, t) - f(S,t)}{\Delta S} - \frac{f(S-\Delta S+\Delta S, t) - f(S-\Delta S, t)}{\Delta S}\right] \\
&= \frac{f(S+\Delta S, t) - 2f(S,t) + f(S-\Delta S, t)}{\Delta S^2}
\end{aligned}$$

A fin de ilustrar la técnica, se considera una opción Put Americana sobre una acción que no paga dividendos. La ecuación diferencial que la opción debe satisfacer es,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + r_1 S\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = r_1 P$$

Se supone que $\Delta t = T/N$ y se consideran los siguientes $N+1$ puntos 0, $1\Delta t$, $2\Delta t, \ldots, T$. Se escoge también un cierto número de puntos para el precio de la acción. S_{max} es el precio de la acción y es suficientemente grande que, cuando se alcanza, el valor de la opción Put prácticamente carece de valor. Se define $\Delta S = S_{max}/M$ y se considera un total de $M+1$ puntos; 0, $1\Delta S$, $2\Delta S, \ldots, S_{max}$. De esta forma, se ha dividido el plano $S \times t$ en una red que consta de $(M+1)\times(N+1)$ nodos. El punto (i,j) de la red es el punto que corresponde al precio de acción $i\Delta S$ y al tiempo $j\Delta t$. Se usará la variable P_{ij} para denotar el valor de la opción en el nodo (i,j).

Malla para la aproximación por diferencias finitas



El método implícito de diferencias finitas

Para un punto interior (i,j) de la red, $\partial P(S,t)/\partial S$ se puede aproximar por una diferencia centrada

$$\frac{\partial P}{\partial S} \approx \frac{P(S+\Delta S,t)-P(S-\Delta S,t)}{2\Delta S}$$

que brevemente se escribirá,

$$\frac{\partial P}{\partial S} \approx \frac{P(i+1,j)-P(i-1,j)}{2\Delta S} = \frac{P_{i+1,j}-P_{i-1,j}}{2\Delta S}$$

Para $\partial P/\partial t$ se usa una diferencia progresiva

$$\frac{\partial P}{\partial t} \approx \frac{P_{i,j+1}-P_{i,j}}{\Delta t}$$

Para $\partial^2 P/\partial S^2$ se usa una diferencia centrada simétrica

$$\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \approx \frac{P_{i+1,j}-2P_{i,j}+P_{i-1,j}}{\Delta S^2}$$

Sustituyendo estas aproximaciones, y notando que $S=i\Delta S$, la ecuación diferencial se transforma en,

$$\frac{P_{i,j+1}-P_{i,j}}{\Delta t}+r_1 i\Delta S\frac{P_{i+1,j}-P_{i-1,j}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\sigma^2 i^2\Delta S^2\frac{P_{i+1,j}-2P_{i,j}+P_{i-1,j}}{\Delta S^2}=r_1 P_{i,j}$$

para $i=1, 2, \ldots, M-1$ y $j=0, 1, \ldots, N-1$.

Reordenando, se obtiene

$$a_i P_{i-1,j}+b_i P_{i,j}+c_i P_{i+1,j}=P_{i,j+1}$$

donde

$$a_i=\frac{1}{2}r_1 i\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2 i^2\Delta t$$
$$b_i=1+\sigma^2 i^2\Delta t+r_1\Delta t$$
$$c_i=-\frac{1}{2}r_1 i\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2 i^2\Delta t$$

Los métodos implícitos requieren de la solución de un sistema de ecuaciones. Se considerará la técnica de *LU* (descomponer la matriz original un una matriz *triangular superior* y en una matriz *triangular inferior*) para resolver numéricamente este sistema.

El método explícito de diferencias finitas

El método implícito de diferencias finitas tiene la ventaja de que siempre converge a la solución de la ecuación diferencial a medida que ΔS y Δt se aproximan a cero. Una de las desventajas del método implícito es que deben de resolverse M -1 ecuaciones para calcular los valores de $P_{i,j}$ de los $P_{i,j+1}$. El método puede simplificarse si los valores de $\partial P/\partial S$ y $\partial^2 P/\partial S^2$ en el punto (i,j) de la malla se suponen iguales a los del punto $(i,j+1)$. Así,

$$\frac{\partial P}{\partial S} \approx \frac{P_{i+1,j+1} - P_{i-1,j+1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \approx \frac{P_{i+1,j+1} - 2P_{i,j+1} + P_{i-1,j+1}}{\Delta S^2}$$

y la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\Delta t} + r_1 i\Delta S \frac{P_{i+1,j+1} - P_{i-1,j+1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta S^2 \frac{P_{i+1,j+1} - 2P_{i,j+1} + P_{i-1,j+1}}{\Delta S^2} = r_1 P_{i,j}$$

o

$$P_{i,j} = a_i^* P_{i-1,j+1} + b_i^* P_{i,j+1} + c_i^* P_{i+1,j+1}$$

donde

$$a_i^* = \frac{1}{1 + r_1 \Delta t}\left(-\tfrac{1}{2} r_1 i\Delta t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t\right)$$

$$b_i^* = \frac{1}{1 + r_1 \Delta t}(1 - \sigma^2 i^2 \Delta t)$$

$$c_i^* = \frac{1}{1 + r_1 \Delta t}\left(\tfrac{1}{2} r_1 i\Delta t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t\right)$$

Si al tiempo j +1, se conocen los valore $P_{i,j+1}$ para todos los valores de i, entonces se puede explícitamente calcular $P_{i,j}$. Esta es la razón por la cual el método es llamado *explícito*.

Este método es fácil de usar, pero frecuentemente sufre de problemas de inestabilidad. Estos problemas surgen debido a que los ordenadores usan aritmética de precisión finita; lo que introduce errores de redondeo en las soluciones numéricas. Este método es *estable* si los errores de redondeo no se magnifican en cada iteración en el procedimiento de solución. Si los errores de redondeo se incrementan en magnitud en cada iteración, entonces el método se vuelve *inestable*.

El método de Crank-Nicholson

El método de *Crank-Nicholson* se usa para sobreponer las limitaciones de estabilidad impuestas por el método explícito. El método implícito de diferencias finitas de Crank-Nicholson es esencialmente un promedio de los métodos implícito y explícito. Especificamente, para el método implícito se tiene

$$P_{i,j+1} = a_i P_{i-1,j} + b_i P_{i,j} + c_i P_{i+1,j}$$

y para el método explícito se tiene

$$a_i^* P_{i-1,j+1} + b_i^* P_{i,j+1} + c_i^* P_{i+1,j+1} = P_{i,j}$$

Promediando estos dos métodos se tiene

$$\tfrac{1}{2}\left(P_{i,j+1} + a_i^* P_{i-1,j+1} + b_i^* P_{i,j+1} + c_i^* P_{i+1,j+1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(P_{i,j} + a_i P_{i-1,j} + b_i P_{i,j} + c_i P_{i+1,j}\right)$$

si
$g_{i,j+1} = P_{i,j+1} + a_i^* P_{i-1,j+1} + b_i^* P_{i,j+1} + c_i^* P_{i+1,j+1}$

se obtiene

$$P_{i,j} + a_i P_{i-1,j} + b_i P_{i,j} + c_i P_{i+1,j} = g_{i,j+1}$$

Lo que muestra que este método es similar al método implícito de diferencias finitas. La ventaja del método de Crank-Nicholson es que converge más rápidamente a la solución que el método implícito o explícito.

El valor de la opciones Put al tiempo T es su valor intrínseco, por tanto

$$P_{i,N} = \max[X - i\Delta S, 0] \qquad \text{para} \quad i = 0, 1, \ldots, M$$

El valor de la opción cuando cuando el precio de la acción es cero es X, por tanto

$$P_{0,j} = X \qquad \text{para} \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

El valor de la opción tiende a cero cuando el precio de la acción tiende a infinito. Por tanto se puede usar la aproximación

$$P_{M,j} = 0 \qquad \text{para} \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

Esta tres ecuaciones definen el valor de la opción Put a lo largo de tres lados de la malla. Así dado los valores $P_{i,N}$ se pueden obtener los valores $g_{i,N}$ explícitamente para $i= 0, 1,\ldots, M$. Resta encontrar los valores de la opción Put en los otros nodos de la red. Considere los puntos correspondientes al tiempo $T\text{-}\Delta t$;

$$a_i P_{i-1,N-1} + b_i P_{i,N-1} + c_i P_{i+1,N-1} + P_{i,N-1} = g_{i,N} \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, M-1$$

que forman un sistema con M-1 ecuaciones, las cuales pueden ser resueltas para las incógnitas $P_{1,N-1}$, $P_{2,N-1}$, ... , $P_{M-1,N-1}$. Una vez calculados estos valores, cada valor de $P_{i,N-1}$ se compara con $X\text{-}i\Delta S$. Si $P_{i,N-1} < X\text{-}i\Delta S$, la opción se debe ejercer al tiempo $T\text{-}\Delta t$ y $P_{i,N-1}$ se define como X- $i\Delta S$. Los nodos correspondientes al tiempo T-$2\Delta t$ se manejan de manera similar hasta obtener $P_{1,0}$, $P_{2,0}$, ... , $P_{M-1,0}$. Uno de estos valores es el que interesa.

La implementación del algoritmo de Crank-Nicholson se basa en el hecho de que el sistema de ecuaciones se expresa en forma matricial

$$\begin{bmatrix} rr_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & rr_2 & c_2 & & \vdots \\ 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{M-2} \\ 0 & 0 & & a_{M-1} & rr_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,N-1} \\ P_{2,N-1} \\ \vdots \\ \\ P_{M-1,N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1,N} \\ g_{2,N} \\ \vdots \\ \\ g_{M-1N} \end{bmatrix}$$

$$C\vec{p} = \vec{g}$$

siendo $rr_i = b_i + 1$, donde la primera matriz es *tridiagonal*, es decir, solamente los elementos de la diagonal, la supradiagonal y la subdiagonal no son cero. Lo que tiene importantes consecuencias en la solución del sistema. Primero, no se tienen que almacenar todos los ceros de la matriz, solamente los que son diferentes a cero. Segundo, la estructura tridiagonal de la matriz, hace que existan algoritmos eficientes en su solución.

Supóngase que la matriz $\boldsymbol{C}$ se puede factorizar en las matrices $\boldsymbol{L}$, matriz triangular inferior y $\boldsymbol{U}$, matriz triangular superior.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & l_{M-1M-2} & l_{M-1M-1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{M-2M-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{LU}$, sin contar los elementos cero, se obtienen las siguientes ecuaciones

$rr_1 = l_{11}$

$a_i = l_{i,i-1}$ para cada $i = 2, 3,..., M$-1; (diagonal inferior)

$rr_i = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}$ para cada $i = 2, 3,..., M$-1; (diagonal principal)

$c_i = l_{ii}u_{i,i+1}$ para cada $i = 2, 3,..., M$-2; (diagonal superior)

El problema original $\boldsymbol{C}\vec{p}=\vec{g}$ puede ser escrito $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}\vec{p})=\vec{g}$, el cual a su vez puede ser dividido en un problema más simple,

$$\boldsymbol{L}\,\vec{z}=\vec{g} \text{ con } \boldsymbol{U}\vec{p}=\vec{z} \text{ un vector intermedio.}$$

La solución de L y U es un caso simple de eliminación gaussiana.

$l_{11} = rr_1$

$u_{12} = c_1 / l_{11}$

Para cada $i = 2, 3, \ldots, M\text{-}2$, tomar

$l_{i,i-1} = a_i$

$l_{ii} = rr_i - l_{i,i-1} u_{i-1,i}$

$u_{i,i+1} = c_i / l_{ii}$

y finalmente

$l_{M-1,M-2} = a_{M-1}$

$l_{M-1,M-1} = rr_{M-1} - l_{M-1,M-2}\, u_{M-2,M-1}$.

Ejemplo

Se retoma el último ejemplo donde se valuó una opción Americana.

Considere una opción Put Americana con cinco meses de vida sobre una acción que no paga dividendos cuando el precio de la acción es \$50, con precio de ejercicio de \$50, tasa de interés libre de riesgo del 10% anual y una volatilidad del 40%.

Con estos datos:

S=50, X=50, $r1$ =0.10, σ =0.40, y T=0.4167.

El siguiente algoritmo hace uso del método de Crank Nicholson para valuar la opción Americana. Por el momento, aunque se considera la función de dividendos, esta es cero.

```
=================================================================
% Función cndiv
% FUNCIÓN PARA CALCULAR EL VALOR DE UNA OPCIÓN PUT CON DIVIDENDOS
% POR EL METODO DE CRANK NICHOLSON DE DIFERENCIAS FINITAS
%
%     USO [P]= cndiv(tipo,h,Smax,X,r1,T,vol,N,M)
%         tipo  :a ó A para calcular la opción Americana,
%                con cualquier otra letra calcula la opción
%                Europea
%         h     :Es la función de dividendos
%         Smax  :El valor máximo del precio de la acción
%         X     :El precio de ejercicio
%         r1    :La tasa libre de riesgo
%         vol   :La volatilidad
%         P     :Matriz de salida de M x N
%         M     :Número de filas de P
%         N     :Número de columnas de la matriz P
```

```
function[P]=cndiv(tipo,h,Smax,X,r1,T,vol,N,M)

dt=T/N;      %SE DETERMINAN LOS TAMAÑOS DE PASO PARA EL TIEMPO Y
dS=Smax/M;   % PRECIO DE LA ACCIÓN

for j=1:M+1 %DEFINE LOS VALORES DE LA ÚLTIMA COLUMNA DE P
        P(j,N+1)=max(X-(j-1)*dS,0);
end

for i=1:N   %SE DEFINEN LOS EXTREMOS DE P
        P(M+1,i)=0;  % LA ÚLTIMA FILA
        P(1,i)=X;    % LA PRIMERA FILA
end


for k=N:-1:1  %COMIENZA EL CICLO GENERAL

%SE DIFINEN LOS COMPONENTES DE LA MATRIZ TRIDIAGONAL C

    for j=1:M-1
a(j,k)=(0.5*r1*j*dt-0.5*(vol^2)*(j^2)*dt)-0.5...
        *feval(h,j*dS,k*dt)*dt/dS;

rr(j)=((vol^2)*(j^2)*dt+r1*dt)+2;

c(j,k)=(-0.5*r1*j*dt-0.5*(vol^2)*(j^2)*dt)+0.5...
       *feval(h,j*dS,k*dt)*dt/dS;

     % SE DEFINEN LOS COEFICIENTES DE P PARA EL VECTOR g
aa(j,k)=(-0.5*r1*j*dt+0.5*(vol^2)*(j^2)*dt+0.5...
           *feval(h,j*dS,k*dt)*dt/dS)/(1+r1*dt);

bb(j)=(1-(vol^2)*(j^2)*dt)/(1+r1*dt);

cc(j,k)=(0.5*r1*j*dt+0.5*(vol^2)*(j^2)*dt-0.5...
         *feval(h,j*dS,k*dt)*dt/dS)/(1+r1*dt);
    end


        %SE DEFINEN LOS ELEMENTOS DEL VECTOR g

for j=2:M

 g(j-1,N+1)=P(j,N+1)+aa(j-1)*P(j-1,N+1)+bb(j-1)*P(j,N+1)...
             +cc(j-1)*P(j+1,N+1);
end



%SE RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO LU
%              DE DESCOMPOSICIÓN DE MATRICES

%                 SE CALCULAN LAS MATRICES L,U

                l(1,1)=rr(1);
                u(1,2)=c(1,k)/l(1,1);

              for i=2:M-2
                l(i,i-1)=a(i,k);
                l(i,i)=rr(i)-l(i,i-1)*u(i-1,i);
                u(i,i+1)=c(i,k)/l(i,i);
              end
                l(M-1,M-2)=a(M-1,k);
                l(M-1,M-1)=rr(M-1)-l(M-1,M-2)*u(M-2,M-1);
```

```
                        %SE CALCULA z DE Lz=g

                 z(1)=g(1,k+1)/l(1,1);

              for i=2:M-1
                 z(i)=(g(i,k+1)-l(i,i-1)*z(i-1))/l(i,i);
              end

                        %SE CALCULA p DE Up=z
                   p(M-1,k+1)=z(M-1);
               for i=M-2:-1:1
                  p(i,k+1)=z(i)-u(i,i+1)*p(i+1,k+1);
               end

%  TERMINA LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA


      % SELECCIONA EL TIPO DE OPCIÓN QUE SE CALCULARÁ
  for j=1:M-1
       if tipo=='a'| tipo=='A',
            P(j+1,k)=max(p(j,k+1),X-j*dS); %PARA LA PUT
                                           %AMERICANA
       else
            P(j+1,k)=p(j,k+1); %EN OTRO CASO, CALCULA LA
                                 %EUROPEA
       end
  end

                 %SE REDEFINEN LAS g's

         for j=2:M
g(j-1,k)=P(j,k)+aa(j-1,k)*P(j-1,k)+bb(j-1)*P(j,k)...
         +cc(j-1,k)*P(j+1,k);
         end

end % TERMINA EL CICLO GENERAL
=================================================================

>> P=cndiv('a','hdiv',100,50,0.1,0.4167,0.4,10,20)

P =

  Columns 1 through 7
```

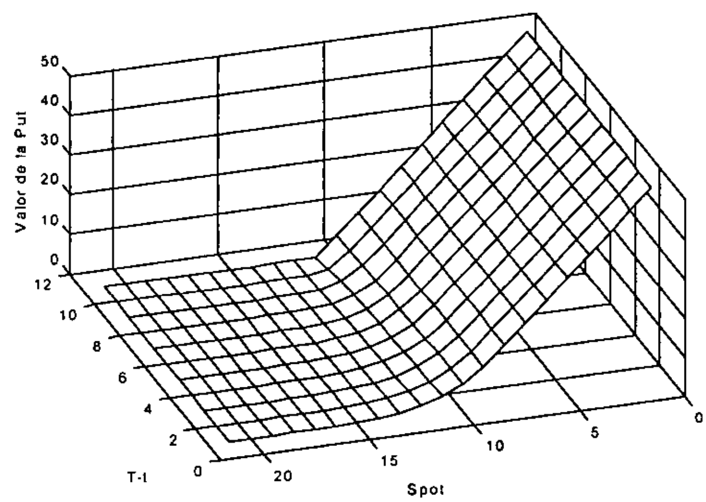
50.0000	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000
45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000
40.0000	40.0000	40.0000	40.0000	40.0000	40.0000	40.0000
35.0000	35.0000	35.0000	35.0000	35.0000	35.0000	35.0000
30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
25.0000	25.0000	25.0000	25.0000	25.0000	25.0000	25.0000
20.0000	20.0000	20.0000	20.0000	20.0000	20.0000	20.0000
15.0000	15.0000	15.0000	15.0000	15.0000	15.0000	15.0000
10.2040	10.1360	10.0747	10.0259	10.0000	10.0000	10.0000
6.6625	6.5205	6.3708	6.2112	6.0373	5.8426	5.6268
4.1576	3.9738	3.7741	3.5548	3.3103	3.0344	2.7174
2.4965	2.3134	2.1169	1.9047	1.6743	1.4226	1.1459
1.4542	1.2993	1.1376	0.9694	0.7952	0.6166	0.4372
0.8279	0.7103	0.5922	0.4749	0.3608	0.2530	0.1565
0.4635	0.3808	0.3013	0.2266	0.1588	0.1004	0.0544
0.2565	0.2014	0.1510	0.1063	0.0687	0.0393	0.0188
0.1405	0.1055	0.0749	0.0494	0.0295	0.0153	0.0065
0.0757	0.0545	0.0368	0.0228	0.0126	0.0060	0.0023
0.0389	0.0270	0.0174	0.0102	0.0053	0.0023	0.0008
0.0163	0.0111	0.0069	0.0039	0.0019	0.0008	0.0003
0	0	0	0	0	0	0

```
  Columns 8 through 11
```

50.0000	50.0000	50.0000	50.0000

45.0000	45.0000	45.0000	45.0000
40.0000	40.0000	40.0000	40.0000
35.0000	35.0000	35.0000	35.0000
30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
25.0000	25.0000	25.0000	25.0000
20.0000	20.0000	20.0000	20.0000
15.0000	15.0000	15.0000	15.0000
10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
5.3946	5.1652	5.0000	5.0000
2.3414	1.8658	1.1838	0
0.8398	0.5034	0.1642	0
0.2648	0.1169	0.0260	0
0.0785	0.0272	0.0046	0
0.0230	0.0066	0.0009	0
0.0069	0.0017	0.0002	0
0.0021	0.0004	0.0000	0
0.0007	0.0001	0.0000	0
0.0002	0.0000	0.0000	0
0.0001	0.0000	0.0000	0
0	0	0	0

GRAFICO DE LA OPCION PUT AMERICANA



A fin de crear el gráfico con estos datos en particular, se ha seleccionado el rango de 0 a 100 para S (el gráfico muestra las 21 filas), y el rango de 0 a 5 meses para el tiempo t (el gráfico muestra la 11 columnas). Siendo, en este caso, la función de dividendos:

```
=================================================================
%FUNCIÓN hdiv
%ES LA FUNCIÓN CONTINUA DE DIVIDENDOS
%
%USO    function y=hdiv(S,t)

function y=hdiv(S,t)

y=0;

return;
=================================================================
```

Dividendos en la ecuación diferencial de Black & Scholes

El precio de una opción sobre una acción que paga dividendos es afectado por estos pagos y por tanto la ecuación diferencial de Black & Scholes debe ser modificada. Los dividendos tienen el efecto de reducir el precio de la acción en la fecha en que se pagan los dividendos (*ex-dividend date*). Los valores de las opciones Call están por tanto negativamente relacionados a los montos de cualquier dividendo anticipado, y los valores de las opciones Put están positivamente relacionados a los montos de los dividendos. Se consederará el caso para una función $D(S,t)$ continua. Sea dt el periodo de tiempo en el cual la acción paga un dividendo de $D(S,t)dt$. Se afirma que el precio de la acción debe disminuir en una cantidad igual al dividendo pagado. (Si el precio de la acción, por ejemplo, disminuye más que el dividendo, un arbitrajista podría obtener ganancias vendiendo la acción antes que se paguen los dividendos y comprándola inmediatamente después. De manera similar se tendría para un precio mayor a los dividendos.)

Con el pago de dividendos, el modelo estocástico propuesto para las acciones se transforma en:

$$dS = \left(\mu S - D(S,t)\right)dt + \sigma S dz$$

Al inicio del capítulo se estableció un portafolio: $\Pi = \frac{\partial c}{\partial S}S - c$ y un cambio, $\Delta\Pi$, en el valor del mismo durante Δt

$$\Delta\Pi = -\left[\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]\Delta t$$

Durante Δt el tenedor del portafolio obtiene ganancias iguales a $\Delta\Pi$ y dividendos iguales a $D(S,t)\frac{\partial c}{\partial S}\Delta t$, pues se recibe $D(S,t)$ por cada acción, y se tienen $\frac{\partial c}{\partial S}$ acciones.

Defínase ΔW como el cambio en el valor del portafolio durante Δt. Así,

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta\Pi + D(S,t)\frac{\partial c}{\partial S}\Delta t\\ &= \left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + D(S,t)\frac{\partial c}{\partial S}\right]\Delta t\end{aligned}$$

y dado que el portafolios durante Δt está libre de riesgos

$$\Delta W = r_1 \Pi \Delta t$$

$$\left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + D(S,t)\frac{\partial c}{\partial S}\right]\Delta t = r_1\left[\frac{\partial c}{\partial S}S - c\right]\Delta t$$

la ecuación de una opción Europea sobre una acción que paga dividendos es:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \left[r_1 S - D(S,t)\right]\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = r_1 c$$

sujeta a las condiciones; $c(0,t) = 0$, $c(S,T) = \max[0,S - X]$ y a la condición adicional $c(S,t) \geq \max[0,S - X]$ para una opción Americana.

Al evaluar la opción Call Americana para el caso en que la acción no paga dividendos ($D(S,t) = 0$) se mostró que su valor era igual al valor de la opción Call Europea. Una extensión de este argumento muestra que cuando hay dividendos, se debe ejercer la opción solamente al tiempo inmediato anterior en que la acción pague los dividendos.

El caso más simple para una opción Europea consisten en incorporar una tasa continua y constante; es decir, $D(S,t) = qS$. Considere dos tipos de acciones; la primera con una tasa continua de dividendos q por año y la segunda que no pague dividendos. El pago de una tasa continua de dividendos hace que el aumento en el precio de la acción sea menor al precio de la acción de no existir esta tasa en una cantidad q. Si, con una tasa q, la acción aumenta de S al tiempo t a S_T al tiempo T, entonces en ausencia de dividendos, crecería de S al tiempo t a $S_T e^{q(T-t)}$ al tiempo T. De manera similar, en ausencia de dividendos crecería de $Se^{-q(T-t)}$ al tiempo t a S_T al tiempo T. Por lo que para valuar una opción Europea sobre una acción que proporcione una tasa continua de dividendos q, el valor del precio de la acción S, se sustituye por su valor presente $S_T e^{-q(T-t)}$ en la fórmula de Black & Scholes:

$$c = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r_1(T-t)}N(d_2)$$

$$p = Xe^{-r_1(T-t)}N(-d_2) - Se^{-q(T-t)}N(-d_1)$$

y como

$$\ln(Se^{-q(T-t)}/X) = \ln(S/X) - q(T-t)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r_1 - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r_1 - q - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Ejemplo

Para valuar opciones sobre divisas, se define S como el tipo de cambio, es decir, el valor de una unidad de divisa extranjera en dólares americanos. Una divisa extranjera tiene la propiedad de que su tenedor puede ganar intereses a la tasa libre de riesgo prevaleciente en el país de la divisa extranjera. La tasa continua de dividendos es la tasa libre de riesgo en el país extranjero. Por tanto, el poseedor de la divisa extranjera recibe una tasa de dividendos igual a la trasa libre de riesgo de la divisa extranjera.

Considere una opción Call Europea de cuatro meses para comprar libras esterlinas. Supóngase un tipo de cambio de a \$1.6/£, un precio de ejercicio de 1.6, una tasa libre de riesgo en Estados Unidos de 8% anual, una tasa libre de riesgo en Inglaterra de 11% anual y una volatilidad del 14.1%.

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r_1 - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$= \frac{\ln(1.6/1.6) + (0.08 - 0.11 + 0.141^2/2)(0.3333)}{0.141\sqrt{0.3333}} = -0.07604$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -0.07604 - 0.141\sqrt{0.3333} = -0.15141$$

$$N(d_1) = 0.4696$$
$$N(d_2) = 0.4398$$

$$c = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r_1(T-t)}N(d_2)$$
$$= 1.6e^{-0.11(0.333)}0.4696 - 1.6e^{-0.08(0.333)}0.4398 = 0.0404$$

§

Considere ahora el caso general de una opción con una tasa continua de dividendos $D(S,t)$. La ecuación diferencial propuesta es

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \left[r_1 S - D(S,t)\right]\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = r_1 c$$

Usando el método implícito de diferencias finitas, se obtiene

$$\frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{\Delta t} + \left[r_1 i\Delta S - D_{i,j}\right]\frac{c_{i+1,j} - c_{i-1,j}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta S^2 \frac{c_{i+1,j} - 2c_{i,j} + c_{i-1,j}}{\Delta S^2} = r_1 c$$

y reagrupando

$$a_{i,j}c_{i-1,j} + b_i c_{i,j} + \hat{c}_{i,j}c_{i+1,j} = c_{i,j+1}$$

donde

$$a_{i,j} = \tfrac{1}{2}r_1 i\Delta t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 i^2\Delta t - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta S}D_{i,j}$$
$$b_i = 1 + \sigma^2 i^2\Delta t + r_1\Delta t$$
$$\hat{c}_{i,j} = -\tfrac{1}{2}r_1 j\Delta t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 i^2\Delta t + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta S}D_{i,j}$$

De igual manera, por el método explícito de diferencias finitas

$$\frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{\Delta t} + \left[r_1 i\Delta S - D_{i,j}\right]\frac{c_{i+1,j+1} - c_{i-1,j+1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2\Delta S^2 \frac{c_{i+1,j+1} - 2c_{i,j+1} + c_{i-1,j+1}}{\Delta S^2} = r_1 c_{i,j}$$

reagrupando

$$a_{i,j}^* c_{i-1,j+1} + b_i^* c_{i,j+1} + \hat{c}_{i,j}^* c_{i+1,j+1} = c_{i,j}$$

donde

$$a_{i,j}^* = \frac{1}{1+r_1\Delta t}\left(-\frac{1}{2}r_1 i\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta S}D_{i,j}\right)$$
$$b_i^* = \frac{1}{1+r_1\Delta t}(1-\sigma^2 i^2\Delta t)$$
$$\hat{c}_{i,j}^* = \frac{1}{1+r_1\Delta t}\left(\frac{1}{2}r_1 i\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta S}D_{i,j}\right)$$

Promediando los dos métodos, se obtiene

$$c_{i,j} + a_{i,j}c_{i-1,j} + b_i c_{i,j} + \hat{c}_{i,j}c_{i+1,j} = g_{i,j+1}$$

donde

$$g_{i,j+1} = c_{i,j+1} + a_{i,j}^* c_{i-1,j+1} + b_i^* c_{i,j+1} + \hat{c}_{i,j}^* c_{i+1,j+1}$$

Observe que el método (de *Crank Nicholson*), es el mismo al expuesto anteriormente; con la salvedad que hacen los dividendos $D_{i,j}$ presentes en los coeficientes de la opción c.

Ejemplo

Cuando se evalúan opciones sobre índices accionarios se supone, para fines prácticos, que el índice sigue un movimiento browniano. Suponga que el índice es igual a S y que

$$D(S,t) = \begin{cases} 0.08Se^{-0.06t} & \text{si } S > 1000 \\ 0.05Se^{-0.06t} & \text{si } 1000 \geq S \geq 400 \\ 0.01Se^{-0.06t} & \text{si } S < 400 \end{cases}$$

es la función continua de dividendos sobre el índice.

Suponga que el nivel actual del índice S&P es 800. Se pretende encontrar el valor de una opción Put Americana sobre el índice con tiempo de maduración de 5 años. Se supone una tasa de interés del 6% y una tasa de dividendos del 2.5% anual. La volatilidad del índice es 17%.

```
» P=cndiv('a','hdiv',1600,800,0.06,5,0.17,10,20)

P =

  Columns 1 through 7

  800.0000  800.0000  800.0000  800.0000  800.0000  800.0000  800.0000
  720.0000  720.0000  720.0000  720.0000  720.0000  720.0000  720.0000
  640.0000  640.0000  640.0000  640.0000  640.0000  640.0000  640.0000
  560.0000  560.0000  560.0000  560.0000  560.0000  560.0000  560.0000
  480.0000  480.0000  480.0000  480.0000  480.0000  480.0000  480.0000
  400.0000  400.0000  400.0000  400.0000  400.0000  400.0000  400.0000
  320.0000  320.0000  320.0000  320.0000  320.0000  320.0000  320.0000
```

```
240.0000  240.0000  240.0000  240.0000  240.0000  240.0000  240.0000
166.1606  164.1908  162.3332  160.7637  160.0000  160.0000  160.0000
117.1087  114.2144  111.3168  108.4314  105.3805  101.8512   97.6762
 82.7480   79.3362   75.7839   71.9888   67.7789   62.9748   57.3714
 58.8514   55.2580   51.4702   47.3980   42.9370   37.9735   32.3785
 42.5085   38.9789   35.2792   31.3602   27.1735   22.6814   17.8251
 31.6641   28.3405   24.9063   21.3459   17.6582   13.8515    9.9827
 23.4225   20.4466   17.4270   14.3756   11.3193    8.3134    5.4442
 17.1617   14.6144   12.0803    9.5859    7.1766    4.9222    2.9254
 12.3586   10.2811    8.2536    6.3084    4.4948    2.8812    1.5622
  8.5787    6.9909    5.4682    4.0405    2.7511    1.6574    0.8283
  5.4588    4.3753    3.3514    2.4096    1.5808    0.9051    0.4235
  2.6898    2.1310    1.6091    1.1357    0.7267    0.4022    0.1802
       0         0         0         0         0         0         0

Columns 8 through 11

800.0000  800.0000  800.0000  800.0000
720.0000  720.0000  720.0000  720.0000
640.0000  640.0000  640.0000  640.0000
560.0000  560.0000  560.0000  560.0000
480.0000  480.0000  480.0000  480.0000
400.0000  400.0000  400.0000  400.0000
320.0000  320.0000  320.0000  320.0000
240.0000  240.0000  240.0000  240.0000
160.0000  160.0000  160.0000  160.0000
 92.6271   86.5633   80.0000   80.0000
 50.6931   42.3014   31.4045         0
 25.8916   18.3155    7.2006         0
 12.6257    6.8289    1.8511         0
  6.1100    2.6403    0.5534         0
  2.8872    1.0384    0.1790         0
  1.3623    0.4209    0.0621         0
  0.6488    0.1765    0.0229         0
  0.3119    0.0763    0.0089         0
  0.1475    0.0331    0.0035         0
  0.0596    0.0126    0.0013         0
       0         0         0         0
```

Donde la función de dividendos es:

```
=================================================================
%FUNCIÓN hdiv
%ES LA FUNCIÓN CONTINUA DE DIVIDENDOS
%
%USO    function y=hdiv(S,t)

function y=hdiv(S,t)

     %SI EL PRECIO DE LA ACCIÓN ES
     if S>1000, %SE PAGA UNA TASA DEL 8%
                y=0.08*S*exp(-0.06*t);

        elseif (400<=S) & (S<=1000),
                %SE PAGA UNA TASA DEL 5%
                y=0.05*S*exp(-0.06*t);

        else    %SE PAGA UNA TASA DEL 1%
               y=0.01*S*exp(-0.06*t);
    end

return;
=================================================================
```

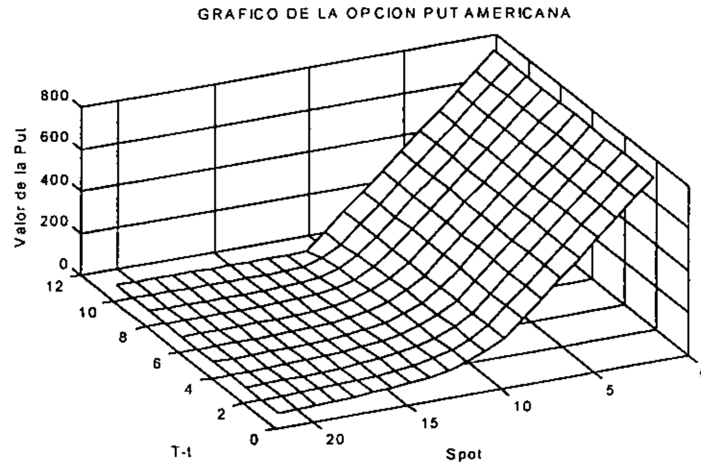


GRAFICO DE LA OPCION PUT AMERICANA
Valor de la Put
800
600
400
200
0
12
10
8
6
4
2
0
T-t
20
15
10
5
0
Spot

Opciones lookback

Se dice que un instrumento financiero es dependiente de la trayectoria si sus ganancias de alguna manera dependen de la trayectoria seguida por el precio de la acción durante la vida del instrumento. Por ejemplo, una opción Put que da el derecho a su tenedor de vender el activo subyacente a su precio promedio, que es calculado durante la vida de la opción, es dependiente de la trayectoria porque el precio promedio es una función de la trayectoria seguida por el precio del activo subyacente. Aunque existen pocas fórmulas analíticas para valuar este tipo de derivados, en la actualidad, el método más efectivo para valuarlas es la simulación por el método de Monte Carlo.

Considere, por simplicidad, un periodo de tiempo de 0 a T, tal que al tiempo 0 el tenedor de un contrato tiene el derecho, pero no la obligación, de vender una acción al tiempo T a un precio igual al máximo alcanzado durante T. Tal contrato, llamado *lookback*, es claramente una opción Put, ya que da al tenedor la opción de vender a un precio particular en la fecha de vencimiento. Sin embargo, el precio de ejercicio es una variable estocástica y es determinada solamente al final del periodo.

La inversión indiferente al riesgo ofrece una forma de valuar la opción lookback, haciendo uso de la alta velocidad de los ordenadores. Considere la valuación de la opción Put. Si $P(t)$ denota el precio de la acción al tiempo $t \in [0,T]$ y $H(0)$ es el valor inicial de la Put, entonces

$$\begin{aligned} H(0) &= e^{-r_1 T} E^* \left[\underset{0 \leqslant t \leqslant T}{Max} P(t) - P(T) \right] \\ &= e^{-r_1 T} E^* \left[\underset{0 \leqslant t \leqslant T}{Max} P(t) \right] - e^{-r_1 T} E^* \left[P(T) \right] \\ &= e^{-r_1 T} E^* \left[\underset{0 \leqslant t \leqslant T}{Max} P(t) \right] - P(0) \end{aligned}$$

donde E^* es el valor esperado y el asterisco recuerda que las trayectorias del precio de la acción son referidas a una inversión indiferente al riesgo. Observe que en el segundo sumando se ha usado el hecho que el valor esperado de $P(T)$ traído a la tasa libre de riesgo r_1 es $P(0)$. Lo cual es verdadero pues en una inversión indiferente al riesgo cualquier monto futuro se puede evaluar trayendo a valor presente su valor esperado a la tasa libre de riesgo.

Para encontrar el valor de $H(0)$ usando el método de Monte Carlo, se simulan varias trayectorias de $\{P(t)\}$, se encuentra el valor máximo para cada trayectoria, y se promedian estos valores según el número de trayectorias simuladas; su valor presente será un estimado de $H(0)$, es decir,

$$\hat{H}(0) = e^{-r_1 T} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} Y_{jn} - P(0), \qquad Y_{jn} = \underset{0 \leqslant k \leqslant n}{Max} P_{jk}$$

Considere, ahora, el siguiente movimiento Browniano Geométrico

$$dS = r_1 S dt + \sigma S dz$$

Si $f(S,t) = \ln S$, entonces por el lema de Ito,

$$df(S,t) = \left[\frac{\partial f(S,t)}{\partial S} r_1 S + \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right] dt + \left[\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\sigma S \right] dz$$
$$df(S,t) = \left[\frac{1}{S} r_1 S + 0 - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\sigma^2 S^2 \right] dt + \left[\frac{1}{S}\sigma S \right] dz$$
$$df(S,t) = \left[r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] dt + \sigma dz$$

Así, para un intervalo pequeño de tiempo Δt,

$$u_i = \ln S_i - \ln S_{i-1} \approx \left[r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \right]\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad \text{donde } \varepsilon \sim N(0,1)$$
$$\text{y} \quad u_i \sim N\left[\left(r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\Delta t, \sigma^2 \Delta t \right]$$

De la definición de u_i

$$S_i = S_{i-1}e^{u_i} \quad \text{y}$$
$$S_0 = S_0$$
$$S_1 = S_0 e^{u_1}$$
$$S_2 = S_1 e^{u_2} = S_0 e^{u_1} e^{u_2} = S_0 e^{u_1 + u_2}$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} u_i}$$

Una fórmula para calcular el valor de esta opción es proporcionada por Goldman, Sosin y Gatto (1979):

$$H(0) = P(0)e^{-r_1 T} N\left(\frac{aT}{\sigma\sqrt{T}} \right)\left[1 - \frac{\sigma^2}{2r_1} \right] - P(0) + P(0)\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r_1} \right)\left[1 - N\left(-\frac{(a+\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right]$$

donde $a = r_1 - \sigma^2/2$.

Una manera simple de mejorar la estimación del método de Monte Carlo es a través de lo que se conoce como *antithetic variable technique*. Suponga que $\overline{f}$ es un estimador insesgado que se obtiene al promediar un par de estimadores insesgados f_1 y f_2, es decir,

$$\overline{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

La varianza del estimador insesgado resultante es

$$\begin{aligned} Var\left(\overline{f}\right) &= \tfrac{1}{4}\left[Var(f_1) + 2Cov(f_1, f_2) + Var(f_2) \right] \\ &= \frac{Var(f_1) + Var(f_2)}{4} + \frac{Cov(f_1, f_2)}{2} \end{aligned}$$

Lo que muestra que la varianza del estimador $\overline{f}$ es más pequeña que la varianza de f_1 o f_2 cuando $Cov(f_1,f_2) < 0$. Por tanto, se desean dos estimadores insesgados negativamente correlacionados. Por ejemplo, si la distribución es simétrica respecto a su media y esta media se conoce (como es el caso de $\varepsilon \sim N(0,1)$) entonces $m/2$ simulaciones conducen a m trayectorias, ya que cada simulación se "refleja" a través de su media, la cual tiene las mismas propiedades estadísticas. Así, por cada trayectoria simulada $\{P_{jk}\}_{k=0}^{n}$ otra puede ser obtenida simplemete cambiando el signo de ε, construyéndose una segunda trayectoria $\{PP_{jk}\}_{k=0}^{n}$ la cual está negativamente correlacionada con la primera. Si se simulan m trayectorias, el estimador obtenido por esta técnica es un promedio de las $2m$ trayectorias

$$\begin{aligned} \widehat{H}(0) &= e^{-r_1 T} \frac{1}{2m} \left(\sum_{j=1}^{m} Y_{jn} + \sum_{j=1}^{m} YY_{jn} \right) - P(0) \\ &= e^{-r_1 T} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{Y_{jn} + YY_{jn}}{2} \right) - P(0) \qquad Y_{jn} = \underset{0 \leqslant k \leqslant n}{Max} P_{jk} \;,\; YY_{jn} = \underset{0 \leqslant k \leqslant}{Max} P \end{aligned}$$

Ejemplo

Considere que una opción lookback tiene los siguientes datos:
Tasa libre de riesgo del 5% anual
Volatilidad de 20%
Precio inicial de la acción de \$40
Tiempo de maduración de un año

Haciendo uso de la fórmula se encuentra que

$$\begin{aligned} H(0) &= P(0) e^{-r_1 T} N\left(\frac{aT}{\sigma\sqrt{T}} \right) \left[1 - \frac{\sigma^2}{2r_1} \right] - \\ &\quad P(0) + P(0)\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r_1} \right) \left[1 - N\left(-\frac{(a+\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right] \\ &= 40 e^{-0.05(1)} N\left(\frac{0.03(1)}{0.2\sqrt{1}} \right) \left[1 - \frac{0.2^2}{2(0.05)} \right] - 40 \\ &\quad + 40\left(1 + \frac{0.2^2}{2(0.05)} \right) \left[1 - N\left(-\frac{(0.03 + 0.2^2)(1)}{0.2\sqrt{1}} \right) \right] \\ &= 5.7162 \end{aligned}$$

Los siguientes algoritmos calculan, el primero, el valor máximo del precio de una acción en una trayectoria simulada, el segundo, el valor de la opción lookback.

```
%FUNCIÓN QUE CALCULA EL VALOR MÁXIMO ALCANZADO POR UNA ACCIÓN QUE
%SIGUE UNA TRAYECTORIA ALEATORIA DURANTE EL PERIODO T.
%
%USO function [PP,P]=traymax(So,T,r1,vol,n)
%
%  P  : El valor máximo de la primera trayectoria
%  PP : El valor máximo de la segunda trayectoria (reflejada)
%  So : El valor inicial de la acción
%  T  : Periodo de tiempo
%  r1 : La tasa libre de riesgo
%  vol: La volatilidad
%  n  : El número de divisiones del periodo

function [PP,P]=traymax(So,T,r1,vol,n)

dt=T/n;
mu=r1-0.5*vol^2;
sigma=0;
sigma2=0;
P=So;
PP=So;

for i=1:n
   e=randn; %NÚMEROS ALEATORIOS CON DISTRIBUCIÓN NORMAL(0,1)
   u=mu*dt+vol*e*sqrt(dt); %MODELO PARA EL MOVIMIENTO BROWNIANO
                            %GEOMÉTRICO
   uu=mu*dt+vol*(-e)*sqrt(dt); %anthitetic variable technique

   sigma2=sigma2+uu;
   sigma=sigma+u;

   S=So*exp(sigma); %PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL SIGUIENTE PERIODO
   SS=So*exp(sigma2);

   P=max(P,S); %EL VALOR MÁXIMO DURANTE EL PERIODO
   PP=max(PP,SS); % EL VALOR MÁXIMO PARA LA SEGUNDA TRAYECTORIA
end
============================================================
%FUNCIÓN QUE CALCULA EL VALOR DE LA OPCIÓN LOOKBACK
%
%USO function H=lookb(So,T,vol,r1,n,m)
%
%  H  : El valor de la opción lookback
%  So : El valor inicial de la acción
%  T  : Periodo de tiempo
%  r1 : La tasa libre de riesgo
%  vol: La volatilidad
%  n  : El número de divisiones del periodo
%  m  : El número de simulaciones

function H=lookb(So,T,vol,r1,n,m)

S=0;

for j=1:m
   [YY,Y]=traymax(So,T,r1,vol,n);
   S=S+Y+YY; %SE SUMAN LOS PRECIOS MÁXIMOS ALCANZADOS
end


H=((S*exp(-r1*T))/(2*m))-So; %SE ESTIMA EL VALOR DE LA
```

```
                                  %OPCIÓN LOOKBACK
return
================================================================
```

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos al hacer uso de la función `lookb` con m=50000

```
» H=lookb(40,1,0.2,0.05,100,50000)

H =
    5.1917
```

n	$\hat{H}(0)$
100	5.1917
250	5.3834
365	5.4428
500	5.4704

§.

CONCLUSIÓN

La valuación de productos financieros derivados es uno de los sucesos significativos de las finanzas modernas, y como tal, sus modelos se basan en conceptos probabilísticos y estadísticos.

El modelo que caracteriza a los títulos accionarios es fundamental en el desarrollo del trabajo, pues su recurrencia es a lo largo de los tres capítulos. En el primero su estructura estocástica se manifiesta en los gráficos que son muy similares a los encontrados en cualquier diario financiero. En el segundo, su presencia es fundamental en la demostración de la convergencia del modelo binomial al de Black & Scholes, y en el tercero ayuda a establecer la ecuación diferencial de Black & Scholes.

La primera fórmula del método binomial de valuación de opciones encontrada, requiere que se impongan valores burdos a u y a d a fin de encontrar un valor de la opción; de ahí la importancia que la volatilidad de las acciones tiene al hacerse presente en las nuevas propuestas de u y d que refinan el valor de la opción. La precisión ahora alcanzada, puede compararse tanto como se quiera al valor proporcionado por el modelo de Black & Scholes; pues como es sabido la distrubución binomial converge a la normal para valores grandes de n. Hasta el momento, los dos modelos presentados sirven sólo para valuar opciones Europeas que no pagan dividendos, pero una sencilla comparación del valor en cada nodo del árbol y su valor intrínseco permite la valuación de opciones Americanas.

En el último capítulo se describe la técnica de la solución por similitud en la solución analítica de la ecuación de difusión con condiciones a la frontera conocidas de antemano, la cual muestra aspectos versátiles y sustanciales, que se analizan en cierto detalle, al encontrarse íntimamente relacionada con la función delta de Dirac, y las transformadas de Fourier. Este método lleva información valiosa de donde se deduce inmediatamente la solución general explícita de la ecuación diferencial de Black & Scholes tal y como se le conoce en la mayoría de los libros. No menos interesante es la solución numérica, donde a través de una fusión de los métodos explícitos e implícitos de diferencias finitas se forma un sistema de ecuaciones que es resuelto por un caso simple de eliminación Gaussiana. De atractivo peculiar es la gráfica trazada con la matriz solución del sistema, la cual claramente muestra una sucesión de perfiles característicos de las opciones hasta formar una especie de sillón reclinable sin brazos. Este método tiene la ventaja de que incluye una función cualquiera de dividendos que no complica el análisis de la ecuación diferencial como es el caso en la solución analítica. Finalmente como introducción a futuros temas se presentan las opciones lookback, que hacen un uso exhaustivo de los ordenadores al calcular iterativamente su valor.

Así, se han mostrado algunos modelos que por sus cualidades y estructura matemática a menudo son extremadamente útiles y explican gran parte del problema, pero que por sí solos no bastan, en la comprensión cabal de los modelos financieros.

APÉNDICE DE TÉRMINOS ESTADÍSTICOS

A.1 Esperanza, Varianza y Función Generadora de Momentos

El valor esperado de la variable aleatoria X se define como:

$E[X]=\sum_j x_j f(x_j)$, si X es discreta

$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, si X es continua; con $f(x_j)$ la función de densidad de X.

$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$, para g una función real de la variable aleatoria X.

Mientras que la varianza se define como:

$\text{Var}[X]=\sum_j (x_j-\mu)^2 f(x_j)$, si X es discreta

$\text{Var}[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$, si X es continua.

La función generatriz de momentos es el valor esperado de e^{tX}

$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx}f(x)$, si X es discreta

$m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx$, si X es continua.

Propiedades de la Esperanza, Varianza y Función Generatriz de Momentos

i) $E[aX_1 + bX_2] = aE[X_1] + bE[X_2]$

ii) $\text{Var}[aX + b] = a^2\,\text{Var}[X]$

iii) $m_{aX+b}(t) = e^{bt}m_X(at)$, para toda a y b constantes.

iv) Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con funciones generatriz de momentos $m_{X_1}(t), m_{X_2}(t), \ldots, m_{X_n}(t)$ respectivamente. Si $Y= X_1+ X_2+ ...+X_n$, entonces

$m_Y(t) = E\left[e^{t(X_1+X_2...+X_n)}\right] = E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}]\ldots E[e^{tX_n}] = m_{X_1}(t)m_{X_2}(t), \ldots, m_{X_n}(t)$

A.2 La Distribución Normal

i) La variable aleatoria X se distribuye normalmente si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ii) Si X es una variable aleatoria que se distribuye normalmente, entonces

$$E[X] = \mu$$
$$Var[X] = \sigma^2$$
$$m_X[t] = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

iii) Sea X una variable aleatoria que se distribuye normalmente, y $E[X]=\mu$ y $\mathrm{Var}[X]=\sigma^2$. La variable aleatoria $\varepsilon = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ se distribuye normalmente con media cero y varianza uno:

$$E[\varepsilon] = E\left[\frac{X}{\sigma}\right] - E\left[\frac{\mu}{\sigma}\right] = \left(\frac{1}{\sigma}\right)\mu - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = 0$$
$$Var[\varepsilon] = Var\left[\frac{X}{\sigma}\right] - Var\left[\frac{\mu}{\sigma}\right] = \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\sigma^2 - 0 = 1$$

iv) Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con $E[X_i]=\mu_i$ y $\mathrm{Var}[X_i]=\sigma_i^2$. Si $Y=X_1+X_2+,...,+X_n$, entonces:

$$Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \text{con } \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

v) Si $Z\text{-}a \sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces $Z \sim N(\mu+a,\sigma^2)$ para cualquier constante a. De la función generatriz de momentos tenemos

$$m_{Z-a}(t) = e^{-at} m_Z(t) \quad \Rightarrow \quad m_Z(t) = e^{at} m_{Z-a}(t) = e^{at} e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} = e^{(\mu+a)t} e^{\sigma^2 t^2/2}$$
$$\therefore \quad Z \sim N\left(\mu + a, \sigma^2\right)$$

vi) Si $Z \sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces $Z/a \sim N(\mu/a,\sigma^2/a^2)$ para cualquier constante $a \neq 0$. De la función generatriz de momentos tenemos

$$m_{Z/a}(t) = m_Z(t/a) = e^{\mu(t/a) - \sigma^2(t/a)^2/2} = e^{(\mu/a)t - (\sigma/a)^2 t^2/2}$$
$$\therefore \quad Z/a \sim N\left(\mu/a, \sigma^2/a^2\right)$$

de igual manera se tiene que

$$\text{si } Z \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aZ + b \sim N(a\mu + b, \sigma^2 a^2)$$

A.3 Desigualdad de Cramér-Rao

El estimador $\widehat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ si

$$E\left[\widehat{\theta}\right]=\theta$$

Las siguientes suposiciones son llamadas las condiciones de regularidad:

i) $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)$ existe para todo x y θ. Siendo f la función de densidad de X.

ii) $\frac{\partial}{\partial\theta}\int\cdots\int\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)dx_1\cdots dx_n=\int\cdots\int\frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)dx_1\cdots dx_n$

iii) $\frac{\partial}{\partial\theta}\int\cdots\int t(x_1,\dots,x_n)\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)dx_1\cdots dx_n=\int\cdots\int t(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)dx_1\cdots dx_n$

donde $\widehat{\theta}=t(x_1,\dots,x_n)$ es un estimador insesgado de θ.

iv) $0<E\left[[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)]^2\right]<\infty$ para todo θ.

Desigualdad de Cramér-Rao

Sea $X_1,\dots,X_n$ una muestra aleatoria de la función de densidad $f(x;\theta)$. Bajo las condiciones de regularidad

$$Var\left[\widehat{\theta}\right]\geq\frac{1}{nE_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2\right]}$$

Donde $\widehat{\theta}=t(x_1,\dots,x_n)$ es un estimador insesgado de θ.

Observación. Bajo los supuestos que involucran la existencia de la segunda derivada y las condiciones de regularidad:

$$E_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2\right]=-E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)\right]$$

Esta observación evita la monserga de calcular la esperanza de la función al cuadrado.

A.4 Propiedades de los estimadores máximo-verosímiles

i) Son estadísticos (estimadores) *suficientes*, *i.e.*, utilizan toda la información que posee una muestra sobre el parámetro que se estima. Además, si existe un estimador suficiente el método de máxima verosimilitud lo proporciona.

ii) Son estimadores *consistentes*, *i.e.*, que el estimador se aproxima al parámetro que se va a estimar aumentando el tamaño de la muestra.

iii) Bajo condiciones de regularidad el estimador máximo-verosímil $\widehat{\theta}_{MV}$ de θ, para una muestra aleatoria de tamaño n, es asintóticamente *eficiente* con distribución asintótica normal, *i.e.*;

$$\widehat{\theta}_{MV} \sim N\left(\theta, \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2\right]}\right)$$

iv) *Invarianza*: Si $\widehat{\theta}_{MV}$ es el estimador máximo-verosímil de θ y si $u(\theta)$ es una función de θ con función inversa, el estimador máximo-verosímil de $u(\theta)$ es $u(\widehat{\theta})$.

B.1 Distribución Binomial

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución binomial si su función de densidad está dada por:

$$f_X(k;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{para } k = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $0 \leq p \leq 1$, n es un entero positivo y q=1- p.

La función de distribución acumulativa es:

$$P\{a \leq X \leq b\} = B(a,b;p) = \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Hull, John C, **Introduction to futures and options markets**, 3rd ed. (Prentice Hall, 1998)
2. Rodríguez de Castro, J, **Introducción al análisis de productos financieros derivados**, 2a ed. (Bolsa Mexicana de Valores, 1997)
3. Parzen, Emanuel, **Modern probability theory and its applications** (New York : John Wiley, 1960)
4. Neftci, Salih N, **An introduction to the mathematics of financial derivatives**. (San Diego, Ca.: Academic Press, 1996)
5. Dubofsky, David A, **Options and financial futures: valuation and uses**, (New York: McGraw-Hill, 1992)
6. Bodie, Zvi, Alex Kane, Alan J. Marcus, **Essentials of investments**, 3rd ed. (Boston, Mass.: Irwin, McGraw-Hill, 1998)
7. Gardiner, C. W, **Handbook of stochastic methods : for physics, chemistry and the natural sciences**, 2nd ed. (Berlin: Springer-Verlag, 1985)
8. Cox, John C, Rubinstein, Mark, **Options markets** (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1985)
9. Campbell, John Y, Lo, Andrew Wen-Chuan, MacKinlay, Archie Craig, **The econometrics of financial markets** (Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1997)
10. Mood, Alexander McFarlane, Franklin A. Graybill, Duane C. Boes, **Introduction to the theory of statistics**, 3rd ed. (New York : McGraw-Hill, 1974)
11. Wilmott, Paul, Sam Howison, Jeff Dewynne, **The mathematics of financial derivatives**, (New York, N. Y.: Cambridge University Press, 1996)
12. Ross, Sheldon M, **Applied probability models : with optimization applications** (San Francisco: Holden-Day, 1970)
13. Papoulis, Athanasios, **Signal analysis** (New York : McGraw-Hill, 1977)
14. Burden, Richard L, J. Douglas Faires, **Numerical analysis**, 6th ed. (Pacific Grove: Brooks/Cole Publishing, : International Thomson Publishing, 1997)
15. **The MATLAB handbook** / Eva Part-Enander (Harlow : Addison-Wesley, 1996)