UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL HIPERESPACIO DE ARCOS DE UN CONTINUO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ADRIAN ULISES SOTO BAÑUELOS

DIRECTOR DE TESIS. DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

283734

2000

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis

EL HIPERESPACIO DE ARCOS DE UN CONTINUO

realizado por Adrián Ulises Soto Bañuelos

con número de cuenta 9027528-5, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dr. Sergio Macías Álvarez	
Propietario	Dr. Javier Páez Cárdenas	
Suplente	Dr. Raúl Escobedo Conde	
Suplente	M. en C. Enrique Castañeda Alvarado	

Consejo Departamental de Matemáticas.

MAT. Julio César Guevara Bravo.

Para mis padres
María Guadalupe y Roberto Eduardo.

Agradecimientos.

Son muchas las personas a quienes debo el poder haber terminado este trabajo, desde aquellos días en el internado hasta los últimos años en la universidad. Son muchos los maestros a quienes agradezco el que hayan influenciado en mi y ayudado a encontrar mi vocación en las matemáticas.

Creo que es la maestra Trinidad quien primero confió en mi como estudiante, después el maestro Azuara Capellini quien por primera vez logró que yo viera belleza en las matemáticas. Ya en la preparatoria, los maestros Daniel Torres y Miguel Cano de Matemáticas y de Física respectivamente fueron determinantes.

En la facultad, creo que quienes más han influido en mi modo de ver las matemáticas son Alejandro Illanes y Javier Páez, a quienes debo muchas de las concepciones hacia las matemáticas.

Por supuesto que agradezco aquellos libros que despertaron el interés en las matemáticas, aquellos bellos libros que papá solía dejar al alcance.

Son muchos los amigos a quienes debo el no haber claudicado en la carrera como ser humano ni como estudiante; estoy particularmente en deuda con Karla, sin cuya ayuda es posible que el autor no terminase la carrera.

Agradezco, pues, a Alicia, Ma. Luisa, Isabel (Chabela), Erik, Chucho, Silvia, Emily, Daniel, a José Luis (el "chalan"), y a tantos otros amigos que me han ayudado tanto.

Agradezco, también, a la U.N.A.M. que me permitió convivir en sus aulas con muchísima gente brillante y me brindó la oportunidad de estudiar matemáticas. Agradezco al Instituto de Matemáticas las facilidades que me otorgó para la realización de este trabajo.

Paz.

Adrián Ulises.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1 Motivación.

La teoría de continuos -espacios compactos, métricos y conexos- es una rama de la Topología de conjuntos que ha tenido un avance considerable en los últimos años; rápidamente se encuentran preguntas abiertas para investigación; está presente en ramas como teoría del punto fijo, sistemas dinámicos, teoría de gráficas, etc. Tiene, como diría un gran matemático (me refiero a Daniel Arévalo), "la belleza geométrica de las variedades sin sus complicaciones de escritura".

Quizás el libro por excelencia en Teoría de Continuos es el presentado por Nadler [8]. En él, Nadler pasa revista a una cantidad inmensa de temas relacionados con los continuos, de los cuales, por supuesto, es el intervalo $[0, 1]$ el más sencillo y el primer ejemplo de continuo dado. Se descubren allí que un continuo es un intervalo si tiene exactamente dos puntos de corte, construcciones de curvas que llenan el espacio (o el maravilloso teorema de Hahn-Mazurkewitz), de continuos que no pueden ser iguales a la unión de dos subcontinuos propios, de continuos que no tienen ningún arco, así como el increíble hecho de que un continuo no puede ser la unión ajena de una cantidad numerable de continuos, etc.

Dentro de la teoría de continuos, o quizás junto con ella, se encuentra la teoría de Hiperespacios, la cual se encuentra expuesta en los libros de Nadler [7] e Illanes y Nadler [2]. Los Hiperespacios -espacios métricos asociados a un continuo y cuyos puntos representan subconjuntos cerrados y no vacíos del continuo- muestran la riqueza que puede haber en, inclusive, el intervalo

$[0,1]$; se prueba, por ejemplo, que el hiperespacio de conjuntos cerrados del intervalo, $2^{[0,1]}$, no es sino el cubo de Hilbert. Algunos modelos para ciertos hiperespacios son dados y se estudian temas sobre teoría del punto fijo, la propiedad de cono=hiperespacio, dimensión y muchos otros más.

Es en [7, p. 601] donde se presenta el hiperespacio de arcos, $A_s(X)$, (aunque la definición de $A_s(X)$ es ligeramente distinta de la usada en este trabajo) y se dan algunas propiedades y se formulan muchas preguntas acerca de él. Y es que de este hiperespacio poco se conoce. Se prueba la existencia de cubos de Hilbert en el caso de $A_s(\mathbf{R}^2)$. Se pregunta, por ejemplo, acerca de las diferencias entre $A_s(\mathbf{R}^2)$ y su hiperespacio de círculos; acerca de si $A_s(\mathbf{R}^3)$ es homogeneo (y se prueba que $A_s(\mathbf{R}^2)$ es homogéneo usando el teorema de Schoenflies); acerca de la dimensión de ciertos espacios de arcos; se piden modelos para $A_s(\mathbf{R}^n)$ y se dan pruebas para el caso de que los arcos sean convexos, etc. Después Nadler revisa y da importancia especial al artículo de Lewis Lum ([5]) y da algunas caracterizaciones de la propiedad de que el hiperespacio $A_s(X)$ sea compacto; también muestra que el hecho de tener hiperespacio de arcos $A_s(X)$ compacto implica la propiedad del punto fijo para el caso de los continuos conexos por trayectorias.

Esta tesis seguirá un camino similar al que tomó Nadler en [7, p. 601]. En lo que resta de este capítulo, se presentará notación y se darán definiciones básicas de la teoría de Hiperespacios así como algunas propiedades básicas de los hiperespacios 2^X, $C(X)$, $F_2(X)$ y $A_s(X)$.

En el Capítulo 2 se probará que el hiperespacio $A_s([0,1]\times[0,1])$ tiene dimensión infinita encajando un cubo de Hilbert en él. De este modo, el hiperespacio de arcos es inmenso incluso para el caso de una 2-celda. Por lo anterior, nos concentraremos en los siguientes capítulos en espacios "flacos" que no permitan que los arcos tengan tanta libertad.

En el Capítulo 3 estudiaremos la conexidad por trayectorias de $A_s(X)$; y nos enfocaremos en las compactaciones métricas del intervalo $[0,\infty)$. En especial, los Teoremas 3.12 y 3.13 nos permitirán dar algunos ejemplos de espacios de arcos que no son conexos por trayectorias. A partir de los siguientes capítulos se concentrará el trabajo en dendroides.

En el Capítulo 4 se estudiarán los posibles homeomorfismos entre los espacios $F_2(X)$ y $A_s(X)$ en el caso de los dendroides siguiendo una ruta similar a la de Nadler ([7, p. 605]) -en que se pregunta si el hiperespacio de arcos de $\mathbf{R}^2$ es homeomorfo a su hiperespacio de círculos-. Para lograr lo anterior se presentan propiedades fundamentales de los dendroides y de $F_2(X)$, así como nociones de conexidad local, incluyendo continuos de convergencia. Se presenta como resultado final el Teorema 4.29, el cual da una caracterización de las dendritas en términos de la existencia de ciertos homeomorfismos entre estos dos espacios y se dan ejemplos de dendritas y de homeomorfismos.

Con los resultados del Capítulo 4, en el Capítulo 5 se presentan diversos ejemplos que nos dan una mejor comprensión de las diferencias que hay entre $F_2(X)$ y $A_s(X)$; todo esto para poder ilustrar la dificultad para probar una conjetura que surge en el capítulo anterior: ¿En un dendroide, el tener hiperespacio de arcos $As(X)$ homeomorfo al hiperespacio $F_2(X)$ implica que X es una dendrita? Con este objetivo en mente, se probarán diversos resultados relacionados con la conexidad local de $A_s(X)$. De especial importancia son los resultados obtenidos en 5.7, 5.8 y 5.10, pues nos permiten descartar muchísimos ejemplos. Se presenta también el Ejemplo 5.14, el cual no permite ser atacado con las técnicas usadas en este capítulo.

En el Capítulo 6 se presenta el artículo de Lewis Lum ([5]), el cual -entre muchos resultados interesantes- da una caracterización (ver el teorema 6.26) de dendritas en términos de ciertos hiperespacios contenidos en $A_s(X)$ (objetivo similar al perseguido en los capítulos anteriores del presente trabajo). En este capítulo se dan las definiciones de suavidad y de suavidad débil y se hará una caracterización de dendritas con ellas. También Lum introduce el concepto de orden parcial débil y usa propiedades que son corolarios de resultados que aparecen en los artículos de R. J. Koch y I. S. Krule ([4]) y de R. J. Koch ([8]). En el presente trabajo, se darán pruebas directas alternativas a las dadas en estos dos artículos (ver los teoremas 6.24 y 6.40).

En el Capítulo 7 se presentan algunas preguntas abiertas que surgieron en la elaboración de este trabajo.

Los teoremas 3.12 y 3.13 del Capítulo 3, el Teorema 4.29 y el ejemplo 4.31 del Capítulo 4, así como el material del Capítulo 5 a partir del Teorema 5.7 constituyen investigación original y no aparecen en ninguna de las publicaciones consultadas. También se dieron pruebas alternativas a los teoremas 6.24 y 6.40 del Capítulo 6.

1.2 Terminología

A lo largo de este trabajo, trataremos de uniformar nuestra notación; aunque en cada caso se intentará dejar explícito el sentido de cada símbolo. De este modo, X representará un continuo, las letras minúsculas representarán puntos en X, las letras mayúsculas representarán subconjuntos de X y las letras caligráficas representaran familias de subconjuntos de X.

Consideraremos a los números naturales, N, con el cero; esto es, $\mathrm{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, ...\}$.

También tendremos los siguientes símbolos.

R representará al conjunto de los números reales.

$int(A)$: el interior de un conjunto A.

$Fr(A)$: la frontera de un conjunto A.

$H(A, B)$: la distancia de Hausdorff entre los cerrados A y B. Ver 1.12

$B^H(\varepsilon, A)$: la bola, con la métrica de Hausdorff, con centro en el cerrado A y de radio ε.

$B(\varepsilon, a)$: la bola, con la métrica de un continuo X, con centro en el punto a y de radio ε.

$N(\varepsilon, A)$: la nube de radio ε centrada en A. Ver 1.11

$\mathcal{L}(X)$: el conjunto de puntos de conexidad local de X

$D(X, p)$: el conjunto de irreducibles con punto extremo p. Ver 6.3.

$I(A)$: el mínimo irreducible con la propiedad de contener al conjunto A. Ver 4.20

$I(a, b)$ y $[a, b]$: el continuo mínimo irreducible que contiene a a y a b. Ver 4.22

$(a; b)$: el intervalo entre a y b para un orden dado

ab : el arco con puntos extremos a y b.

$A = B|C$: significa $A = B \cup C$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ y B y C son abiertos y cerrados en A.

1.3 Continuos

Definición 1.1 *Un* continuo *es un espacio compacto, conexo, métrico y no vacío.*

La siguiente observación, cuya fácil prueba se halla en [1, p. 226], nos permitirá en muchas ocasiones dar homeomorfismos entre varios de los espacios considerados.

Observación 1.2 *Sean X un espacio compacto y Y un espacio de Hausdorff. Entonces toda función biyectiva y continua $f : X \to Y$ es un homeomorfismo.*

En diversas ocasiones necesitaremos probar la convergencia de una sucesión. Como la mayoría de los espacios en los que estaremos trabajando son compactos y métricos, nos bastará con probar, por la siguiente proposición, una condición más débil: supondremos que la sucesión ya es convergente y sólo tendremos que probar que converge al punto que proponemos como límite. La siguiente proposición nos dará algunas propiedades muy útiles para el tratamiente de sucesiones en espacios compactos métricos.

Proposición 1.3 *Sean X un compacto métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces*

(1) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, y

(2) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en X si y sólo si toda subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x.

[illegible]

Demostración. (1) Es simplemente la propiedad de Bolzano Weierstrass para compactos métricos.(Véase en [1], en el cap. XI, las secciones 3.1,3.2 y el comentario anterior a 4.1).

(2)

$\Rightarrow$)

Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Sea $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente. Por la convergencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe N tal que si $n > N$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$. Si $k > N$, entonces $n_k \geq k > N$, por lo que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, de manera que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x.

$\Leftarrow$)

Supongamos que toda subsucesión convergente de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, y supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x. Entonces existe un número ε_0 tal que el conjunto $\{j : x_j \notin B(\varepsilon_0, x)\}$ es infinito, por lo que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \notin B(\varepsilon_0, x)$, para toda k (Bolzano-Weierstrass). Como $X - B(\varepsilon_0, x)$ es compacto, tenemos que existe una subsucesión convergente $\{x_{n_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ a un punto $p \in X - B(\varepsilon_0, x)$, por lo que $p \neq x$, lo cual, por hipótesis, no es posible.

■

A continuación daremos algunas definiciones y resultados que usaremos posteriormente.

Quizás la prueba más conocida de que la circunferencia no es homeomorfa al intervalo $[0,1]$ es aquella en que se utiliza el hecho de que hay un punto $p \in [0,1]$ tal que $[0,1] - \{p\}$ es disconexo en tanto que ningún punto de la circunferencia la desconecta. A continuación pondremos nombre a esta clase de puntos.

En la literatura, se definen los puntos de corte como en la siguiente definición y a los puntos que no son de corte no les pone un nombre particular. En este trabajo se usará el nombre de *punto extremo* para los puntos que no son de corte; aunque dicho nombre tendrá el inconveniente de que convierte a todos los puntos de S^1 en puntos extremos.

Definición 1.4 *Sea X un continuo, decimos que un punto x de X es un* punto de corte *de X si $X - \{x\}$ es disconexo. Decimos que x es un* punto extremo *si $X - \{x\}$ es conexo.*

Con respecto a los puntos extremos, tenemos la siguiente

Observación 1.5 *El ser punto de corte (extremo, respectivamente) se preserva bajo homeomorfismos.*

Demostración. Sean X y Y dos continuos y sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Sea x un punto de X. Supongamos que $X - \{x\} = A \cup B$, donde los continuos A y B forman una disconexión de $X - \{x\}$. Entonces $h(X - \{x\}) = h(X) - h(\{x\}) = Y - \{h(x)\} = h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$, por lo que $h(A)$ y $h(B)$ forman una disconexión de $Y - \{h(x)\}$. ■

Hay, dentro de la clase de los continuos, una caracterización del arco en términos de los puntos de corte.

Teorema 1.6 *Todo continuo tiene al menos dos puntos extremos;si tiene exactamente dos puntos extremos, entonces es homeomorfo al intervalo* $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Véase [8, p.p.. 89 y 154 respectivamente] ■

Lo que sigue son resultados acerca de la función distancia.

Definición 1.7 *Sean (X,d) un espacio métrico. Para cada par de subconjuntos no vacíos A y B de X, denotaremos por* d(A,B) *al número* $\inf\{d(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$.

Proposición 1.8 *Sea (X, d) un continuo con métrica d y sean A y B dos cerrados no vacíos. Entonces se puede reemplazar* ínfimo *por* mínimo *en la definición de $d(A, B)$, y, si $A \cap B = \emptyset$, entonces $d(A, B) > 0$.*

Demostración. Notemos primero que la función $d : X \times X \to \mathbf{R}$ es continua y que $A \times B \subset X \times X$ es un compacto, por lo que tenemos que $d\ (A \times B)$ es un compacto de $\mathbf{R}$, así que tiene mínimo, i.e., $\text{mín}(d(A \times B))$ $=\text{mín}\{d(a, b) : a \in A \ y \ b \in B\}$.

Ahora, si $d(A, B) = 0$, entonces $d(A, B) = d(a, b) = 0$ para algún $a \in A$ y para algún $b \in B$, entonces $a = b$, de donde $A \cap B \neq \emptyset$, lo cual termina la prueba. ■

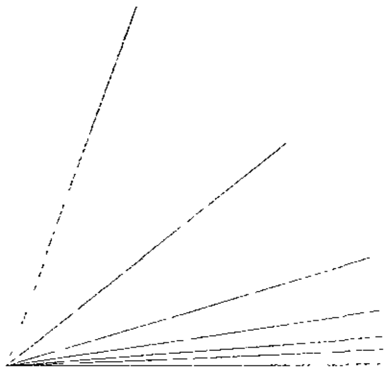
El siguiente teorema enlista algunas propiedades interesantes de los continuos.

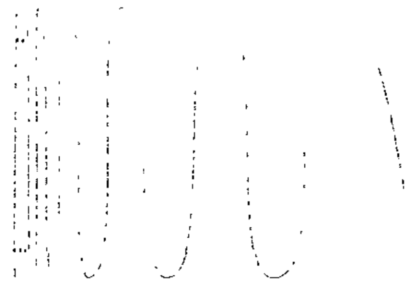
Teorema 1.9 *Si X es un continuo y $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es una sucesión de continuos tales que $A_{n+1} \subset A_n$ para toda $n \in \mathbf{N}$, entonces $\bigcap\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ es un continuo.*

Demostración. La pruebas de este resultado se encuentra en [8, p. 6] ■

A continuación daremos algunos ejemplos de continuos.

El primero, llamado escoba armónica, el cual es el conjunto formado por todos los segmenos que unen el punto $(0, 0)$ en $\mathbf{R}^2$ con el punto $(0, \frac{1}{n})$. Otro ejemplo es la cerradura de la gráfica de la curva seno de $\frac{1}{x}$ (i.e. la cerradura del conjunto $\{(x, y) : y = sen\frac{1}{x}, \text{ con } x \in (0, 1)\}$). Véase las figuras siguientes.





Entre otros ejemplos, tenemos a todos los compactos de $\mathbf{R}^n$, al cubo de Hilbert, a S^n, etc.

1.4 Hiperespacios

1.4.1 El hiperespacio 2^X

Un hiperespacio asociado a un continuo X es un conjunto cuyos elementos son ciertos subconjuntos cerrados de X (ver [2, p. 3]). Ahora, todos nuestros hiperespacios van a estar contenidos en uno muy particular, 2^X, el cual definimos a continuación.

Definición 1.10 *Si X es un continuo, definimos 2^X como el conjunto $\{A \subset X : A$ es cerrado y no vacío$\}$.*

Para darle estructura de espacio topológico a 2^X, necesitamos de varias definiciones.

Definición 1.11 *Sea X un continuo, definimos* la ε-nube con centro en A, *$N(\varepsilon, A)$, como el conjunto $\{p \in X :$ existe $a \in A$ tal que $d(a,p) < \varepsilon\}$.*

Notemos que $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{B(\varepsilon, a) : a \in A\} \subset X$ y que si dos números r y s son tales que $r < s$, entonces $N(r, A) \subset N(s, A)$

Podemos dotar a 2^X con una métrica, a la que denominaremos *métrica de Hausdorff*, de acuerdo con el siguiente resultado.

Teorema 1.12 *Si X es un continuo, entonces la función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbf{R}$ dada por $H(A, B) = \text{ínf}\,\{r \in R : A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)\}$ es una métrica.*

Demostración. Véase [2, p. 11] ■

Proposición 1.13 *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $\{A_j\}_{j \in \mathbf{J}}$ una familia de subcontinuos de X tales que $A_j \subset N(\varepsilon, A)$, para toda $j \in \mathbf{J}$. Entonces $\bigcup\{A_j : j \in \mathbf{J}\} \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Sea $b \in \bigcup\{A_j : j \in \mathbf{J}\}$, por lo que $b \in A_{j_0}$ para algún $j_0 \in \mathbf{J}$. Como $A_{j_0} \subset N(\varepsilon, A)$, existe un $a \in A$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$; esto es, que $b \in N(\varepsilon, A)$, que es lo que necesitábamos. ■

La siguiente proposición nos dará una manera equivalente para que dos cerrados no vacíos estén cerca. Antes necesitaremos de un lema.

Lema 1.14 *Sea X un continuo y sean A y B puntos de 2^X. Si $A \subset N(r, B)$, entonces existe un número $s < r$ tal que $A \subset N(s, B)$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que para todo número $s < r$, tenemos que $A - N(s, B) \neq \emptyset$. De este modo, para cada número $n \in \mathbf{N}$ tal que $r - \frac{1}{n+1} > 0$, tomemos un punto a_n en $A - N(r - \frac{1}{n+1}, B)$. Por 1.3, existe una subsucesión convergente $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$ a un punto $a \in X$ tal que $a_{n_k} \in A - N(r - \frac{1}{n_k+1}, B)$, para toda $k \in \mathbf{N}$. Claramente $a \in A$. Ahora, para cada $b \in B$, tenemos que $d(a_n, b) \geq r - \frac{1}{n_k+1}$, de manera que, tomando límites, $d(a, b) \geq r$. Como b era arbitrario, tenemos que $a \notin N(r, B)$, por lo que $A - N(r, B) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. ■

Proposición 1.15 *Sea X un continuo. Sean A y $B \in 2^X$ y $r > 0$. Entonces $H(A, B) < r$ si y sólo si $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$.*

Demostración.

$\Rightarrow$)

Como $H(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\} < r$, existe ε tal que $H(A, B) \leq \varepsilon < r$, tal que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$; pero $N(\varepsilon, B) \subset N(r, B)$, por lo que $A \subset N(r, B)$ y también $B \subset N(r, A)$.

$\Leftarrow$)

Por 1.14, existen dos números s_1 y s_2 tales que $s_1 < r$, $s_2 < r$, $A \subset N(s_1, B)$ y $B \subset N(s_2, A)$. Sea $s = \max\{s_1, s_2\}$. Como s es un número con la propiedad de que $A \subset N(s_1, B) \subset N(s, B)$ y $B \subset N(s_2, A) \subset N(s, A)$ y $H(A, B)$ es el ínfimo de los números con esa propiedad, tenemos que $H(A, B) \leq s < r$. Esto termina la prueba ■

A continuación veremos que la convergencia en 2^X se puede simplificar mucho con la ayuda de los conceptos de límite inferior y superior de una sucesión.

Definición 1.16 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en 2^X. Definimos el* limite superior *de A_n, lím sup A_n, como el conjunto $\{a \in X$: existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y puntos a_{n_k} en A_{n_k} de modo que $a_{n_k} \to a\}$. Definimos el* limite inferior *de A_n, lím inf A_n, como el conjunto $\{a \in X$: existe sucesión de puntos $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ con $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbf{N}$ y de modo que $a_n \to a\}$.*

El siguiente teorema nos da una definición equivalente.

Teorema 1.17 *Sean X un continuo, a un punto en X y $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en 2^X. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones*

(1) $a \in$ lím sup A_n si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ tenemos que $B(\varepsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n, y

(2) $a \in$ lím inf A_n si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ tenemos que $B(\varepsilon, a) \cap A_n = \emptyset$ sólo para una cantidad finita de índices n (i.e. $B(\varepsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi todo índice $n \in \mathbf{N}$)

Demostración. (1)

$\Rightarrow$)

Si $a \in$lím sup A_n, entonces existe una sucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ convergente a a tal que $a_{n_k} \in A_{n_k}$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Por definición, existe un número M tal que, para toda $k \geq M$, $a_{n_k} \in B(\varepsilon, a)$. Por lo tanto $a_{n_k} \in B(\varepsilon, a) \cap A_{n_k}$ para toda $k \geq M$, de este modo $B(\varepsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n.

$\Leftarrow$)

Supongamos que para toda $\varepsilon > 0$ $B(\varepsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n. Probaremos que $a \in$lím sup A_n.

Sean $n_1 =$ mín $\{n : B(1, a) \cap A_n \neq \emptyset\}$

$n_2 =$ mín $\{n : n > n_1$ y $B(\frac{1}{2}, a) \cap A_n \neq \emptyset\}$, y en general definamos

$n_{k+1} =$ mín $\{n : n > n_k$ y $B(\frac{1}{k+1}, a) \cap A_n \neq \emptyset\}$.

Por hipótesis, tenemos que los conjuntos sobre los que se toma el mínimo son conjuntos no vacíos, por lo que es posible tomar el mínimo.

Ya que $B(\frac{1}{k+1}, a) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$, para toda $k \in \mathbf{N}$, escojamos puntos a_{n_k} de A_{n_k} para toda $k \in \mathbf{N}$. Afirmamos que la sucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ converge a a.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos N tal que $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$, por lo que para toda $k \geq N$ tenemos que $a_{n_k} \in B(\frac{1}{k+1}, a) \cap A_{n_k} \subset B(\varepsilon, a)$. De este modo $a_{n_k} \to a$

(2)

$\Rightarrow$)

Si a $\in$lím inf A_n, entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ convergente a a tal que $a_n \in A_n$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Por definición, existe un número M tal que, para toda $n \geq M$, $a_n \in B(\varepsilon, a)$. Por lo tanto $a_n \in B(\varepsilon, a) \cap A_n$ para toda $k \geq M$, de este modo $B(\varepsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq M$, por lo que $B(\varepsilon, a) \cap A_n$ sólo puede ser vacía para una cantidad finita de índices.

$\Leftarrow$)

Supongamos que para toda $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon, a) \cap A_n = \emptyset$ sólo para una cantidad finita de índices n. Probaremos que $a \in$ lím inf A_n.

Sea $n_1 =$ mín $\{n : B(1, a) \cap A_k \neq \emptyset$ para toda $k \geq n\}$,

$n_2 =$ mín $\{n : n > n_1$ y $B(\frac{1}{2}, a) \cap A_k \neq \emptyset$ para toda $k \geq n\}$, y en general definamos

$n_{j+1} =$ mín $\{n : n > n_j$ y $B(\frac{1}{j+1}, a) \cap A_k \neq \emptyset$ para toda $k \geq n\}$.

Notemos que por la hipótesis, los conjuntos sobre los cuales se toma el mínimo son no vacíos.

Para $1 \leq i \leq n_1$ podemos escoger puntos arbitrarios $a_i \in A_i$. En general, para $n_j \leq i \leq n_{j+1}$ $(j \geq 1)$ definamos a_i escogiendo un punto arbitrario en $B(\frac{1}{j}, a) \cap A_i$. Lo anterior es posible puesto que $i \geq n_j$, de donde $B(\frac{1}{j}, a) \cap A_i \neq \emptyset$.

Afirmamos que $a_i \to a$.

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $K \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{K+1} < \varepsilon$. Sea $N = n_{K+1}$. Ahora, para toda $i \geq N$, tenemos que $a_i \in B(\frac{1}{K+1}, a) \cap A_i \subset B(\varepsilon, a)$. Por lo tanto $a_n \to a$. Esto termina la prueba de la equivalencia de las dos definiciones. ■

El siguiente resultado nos relacionará los conceptos de convergencia en la métrica de Hausdorff con aquellos de límites inferiores y superiores. Notemos que lím inf $A_n \subset$ lím sup A_n y que lím sup $A_n \neq \emptyset$ (esto último por la propiedad de Bolzano-Weierstrass).

Teorema 1.18 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en 2^X. Entonces A_n converge a un elemento $A \in 2^X$ si y sólo si lím sup $A_n =$ lím inf $A_n = A$*

Demostración. Véase [2, p. 25] ■

El resultado anterior tiene una importante consecuencia.

Teorema 1.19 *Sea X un continuo. Entonces 2^X es un continuo.*

Demostración. Ver [2, p. 114] ■

Un tipo de función que es de mucha utilidad para el estudio de los hiperespacios es el de función de Whitney. Básicamente lo que miden las funciones de Whitney es el tamaño de los subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio dado.

Definición 1.20 *Una función de Whitney μ para 2^X es una función continua y suprayectiva $\mu : 2^X \to [0,1]$ con las siguientes propiedades:*

(1) $\mu(\{a\}) = 0$ para todo $a \in X$

(2) Si $A \subset B$ y $A \neq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$, para cualquier par de elementos A y B de 2^X.

(3) $\mu(X) = 1$.

En la siguiente sección se darán otras propiedades de las funciones de Whitney.

1.4.2 El hiperespacio $C(X)$

Dentro de los hiperespacios, ocupa un lugar central el que es formado por los cerrados conexos; más formalmente, tenemos la siguiente definición

Definición 1.21 *Sea X un continuo. Denotamos por $C(X)$ al conjunto $\{C \in 2^X : C$ es conexo$\}$.Dada una función de Whitney μ, se les llama* niveles de Whitney *a los subconjuntos $\mathcal{A}$ de la forma $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t) \cap C(X)$, para algún número $t \in [0,1]$.*

Este hiperespacio tiene muchas propiedades, algunas de las cuales se enlistarán en el siguiente teorema.

Teorema 1.22 *Sea X un continuo. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(1) $C(X)$ es un continuo

(2) Si dos continuos A y $B \in C(X)$ cumplen que $A \subsetneq B$, entonces existe un homeomorfismo $\alpha : [0,1] \to \alpha([0,1]) \subset C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y para todo s y t tales que $s < t$, tenemos que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$. A α se le llama arco ordenado de A a B.

(3) Si μ es una función de Whitney para $C(X)$ (esto es, la restricción de una función de Whitney a $C(X)$), entonces $\mu^{-1}(t) \subset C(X)$ es un continuo para toda $t \in [0, \mu(X)] = [0,1]$.

Demostración. Véase [2, p.p.. 114, 112 y 160 respectivamente] ■

La siguiente proposición nos dice que si dos compactos no vacíos están cerca, entonces podemos agregar a uno de ellos un compacto no vacío de modo que la unión del fragmento y de uno de los continuos siga estando cerca del otro:

Proposición 1.23 *Sean X un continuo y A y B dos cerrados no vacíos tales que $H(A, B) < \varepsilon$. Si un continuo C está contenido en $N(\varepsilon, B)$, entonces $H(A \cup C, B) < \varepsilon$.*

Demostración. Basta probar, por 1.15, que $A \cup C \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A \cup C)$.

Como $H(A, B) < \varepsilon$, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y, por hipótesis $C \subset N(\varepsilon, B)$, de modo que por 1.13, $A \cup C \subset N(\varepsilon, B)$.

Como $N(\varepsilon, A \cup C) = N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, C)$ y, por 1.15, $B \subset N(\varepsilon, A)$, tenemos que $B \subset N(\varepsilon, A \cup C)$. ■

El límite en 2^X tiene algunas propiedades análogas a aquél en los números reales, las siguientes proposiciones nos darán algunas analogías. Éstas nos van a permitir encontrar algunas relaciones muy útiles entre las sucesiones y sus límites.

Lema 1.24 *Sea X un continuo. Sean $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ dos sucesiones convergentes en 2^X que convergen a dos continuos A y B respectivamente. Si $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbf{N}$, entonces $A \subset B$.*

Demostración. Sea $a \in A$. Como $a \in \text{lím inf } A_n = A$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ que converge a a (1.16) y tal que $a_n \in A_n \subset B_n$. Ya que $a_n \in B_n$ para toda $n \in \mathbf{N}$, debemos tener que $a \in \text{lím inf}(B) = B$ ■

La siguiente proposición es, en cierto sentido, una generalización de la anterior.

Proposición 1.25 *Sean X un continuo y $\{B_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión en 2^X convergente a un continuo B. Entonces lím $\overline{N(\frac{1}{n}, B_n)} = B$.*

Demostración.

Por 1.3 basta con probar que si una subsucesión $\{\overline{N(\frac{1}{n_k}, B_{n_k})}\}_{k\in\mathbf{N}}$ de $\{\overline{N(\frac{1}{n}, B_n)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge a un continuo N, entonces $N = B$. Para no complicar la notación, aplicaremos el argumento a la sucesión $\{\overline{N(\frac{1}{n}, B_n)}\}_{n\in\mathbf{N}}$; se aplican los mismos argumentos para una subsucesión cualquiera.

Como $B_n \subset \overline{N(\frac{1}{n}, B_n)}$, para toda $n \in \mathbf{N}$, por 1.24, tenemos que $B \subset N$.

Para ver que $N \subset B$, supongamos, por el contrario que existe un punto $h \in N - B$. Por 1.18 y1.16, existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ convergente a h en X con $h_n \in \overline{N(\frac{1}{n}, B_n)}$ para toda $n \in \mathbf{N}$. Dada $n \in \mathbf{N}$, podemos encontrar un punto $r_n \in N(\frac{1}{n}, B_n)$ con la propiedad de que $d(r_n, h_n) < \frac{1}{n}$. Como $r_n \in N(\frac{1}{n}, B_n)$, existe $b_n \in B_n$ tal que $d(r_n, b_n) < \frac{1}{n}$. Por lo tanto $d(h_n, b_n) < d(h_n, r_n) + d(r_n, b_n) < \frac{2}{n}$. Tomando una subsucesión convergente para $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ si fuera necesario, obtenemos al tomar límites que $d(h, b) = 0$, por lo que $h = b \in \text{lím inf}\, B_n = B$, lo cual no es posible. Esto último completa la prueba de que $\text{lím}\, \overline{N(\frac{1}{n}, B_n)} = B$.

Ahora, por 1.24, tenemos que $A \subset N = B$. ■

De la proposición anterior obtenemos de modo inmediato el siguiente corolario.

Corolario 1.26 *Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$son dos sucesiones en 2^X convergentes a dos cerrados A y B, respectivamente y son tales que $A_n \subset \overline{N(\frac{1}{n}, B_n)}$, para toda $n \in \mathbf{N}$, entonces $A \subset B$.*

Los siguientes resultados nos darán más información acerca de la estructura de $C(X)$.

Lema 1.27 *Sean X un continuo y U un abierto en X. Entonces el subconjunto de 2^X cuyos elementos son los subcontinuos de X contenidos en U es un abierto en 2^X.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} = \{A \in 2^X : A \subset U\}$ y A un elemento de $\mathcal{U}$. Si $U = X$, entonces $\mathcal{U} = 2^X$, que es abierto en 2^X. Supongamos entonces que $U \neq X$. Daremos una bola en la métrica de Hausdorff para 2^X que tenga a A y que esté contenida en $\mathcal{U}$.

Sea $\varepsilon = d(A, X - U)$. Como A y $X - U$ no se intersectan, tenemos, por 1.8, que $\varepsilon > 0$. Probaremos que $N(\varepsilon, A) \subset U$. Si $N(\varepsilon, A) - U$ fuera no vacío, entonces habría un punto x en X y otro a en A tales que $d(x,a) < \varepsilon$ y $x \notin U$, por lo que $x \in X - U$ y, por tanto, $d(A, X - U) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción.

Sea B en $B^H(\varepsilon, A)$. Por definición, $B \subset N(\varepsilon, A) \subset U$, por lo que $B \in \mathcal{U}$. Esto prueba que $\mathcal{U}$ es un abierto. ■

Lema 1.28 *Sean X un continuo y $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $C(X)$. Entonces el subconjunto A de X dado por $A = \bigcup\{B : B \in \mathcal{A}\}$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Notemos que todo elemento de $\mathcal{A}$ es un subconjunto de A. La prueba se divide en dos partes:

(1) A es cerrado:

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de A convergente a un punto a en X. Como $a_n \in A$, $a_n \in A_n$ para algún A_n en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es compacto, hay una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un continuo $L \in \mathcal{A}$. Ya que lím $a_{n_k} = a$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$, tenemos (1.16) que $a \in$lím inf $A_{n_k} =$ lím $A_{n_k} = L$ y, puesto que $L \in \mathcal{A}$, se sigue que $L \subset A$ y, por tanto, $a \in A$.

(2) A es conexo:

Supongamos que A no es conexo. Entonces hay dos cerrados, no vacíos y ajenos A_1 y A_2 en A tales que $A = A_1 \cup A_2$. El que A_1 y A_2 sean no vacíos implica que hay elementos de $\mathcal{A}$ que intersectan a A_1 y a A_2, respectivamente. Al ser A cerrado, tenemos que A_1 y A_2 son dos cerrados ajenos de X, así que, por normalidad de X, tenemos que existen dos abiertos no vacíos y ajenos U y V de X tales que $A_1 \subset U$ y $A_2 \subset V$.

Sean $\mathcal{U} = \{C \in C(X) : C \subset U\}$ y $\mathcal{V} = \{D \in C(X) : D \subset V\}$. Por el Lema 1.27 tenemos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos y como $U \cap V = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Ahora veremos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{V}$ son no vacíos.

Observemos que si un elemento B en $\mathcal{A}$ intersecta tanto a A_1 como a A_2, entonces tendríamos que $B \cap A_1$ y $B \cap A_2$ darían una disconexión de B. Como esto no es posible, tenemos que $B \subset A_1$ o $B \subset A_2$ para cualquier B en $\mathcal{A}$. Esto es, los elementos de $\mathcal{A}$ sólo pueden ser subconjuntos de A_1 o de A_2. Sea B un elemento de $\mathcal{A}$ que intersecte a A_1. Por la observación anterior, $B \subset A_1 \subset U$, por lo que $B \in \mathcal{U}$. Así que $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Similarmente, se prueba que $\mathcal{A} \cap \mathcal{V}$ es no vacío.

Veremos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Sea $B \in \mathcal{A}$. Como vimos en el párrafo anterior, $B \subset A_1$ o $B \subset A_2$. En el primer caso $B \subset U$, y en el segundo $B \subset V$. Es decir, $B \in \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Esto termina la prueba de que $\mathcal{A} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Los párrafos anteriores prueban que $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{V}$ son una disconexión de $\mathcal{A}$. Esto nos da la contradicción que prueba la conexidad de A ∎

Ahora veamos como, dado un arco en $C(X)$, lo podemos "enderezar" de modo que tengamos una función creciente. Conviene recordar que en un espacio métrico compacto los conceptos de continuidad y de continuidad uniforme coinciden.

Lema 1.29 *Sea R un cerrado de un continuo X. Entonces el conjunto $\mathcal{A} \subset C(X)$ formado por todos los subcontinuos de X que intersectan a R es cerrado (y, por tanto, compacto).*

Demostración. El conjunto $C(X) - \mathcal{A}$ es el conjunto cuyos elementos son los subcontinuos de X que no intersectan a R. Entonces $C(X) - \mathcal{A}$ es el conjunto de los subcontinuos de X contenidos en $X - R$. Así, por el Lema 1.27, tenemos que $C(X) - \mathcal{A}$ es abierto, por lo que $\mathcal{A}$ es cerrado. ∎

Lema 1.30 *Sean X un continuo y α una función continua del intervalo $[0,1]$ a $C(X)$. Entonces la función f dada por $f(t) = \bigcup\{\alpha(s) : 0 \leq s \leq t\}$ es una función continua del intervalo $[0,1]$ a $C(X)$.*

Demostración. Primero hay que argumentar por qué $f(t) \in C(X)$. Como $[0,t]$ es un continuo, entonces $\alpha([0,t]) \subset C(X)$ es un subcontinuo de $C(X)$. Por el Lema 1.28, $\bigcup\{\alpha(s) : 0 \leq s \leq t\}$ es un subcontinuo de X y, por tanto, un elemento de $C(X)$.

Para ver la continuidad de la función, tomemos $\varepsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ la dada por la continuidad uniforme de α para ε, es decir, δ tiene la propiedad de que si $|x-y| < \delta$, entonces $H(\alpha(x), \alpha(y)) < \varepsilon$. Afirmamos que δ también nos sirve para la continuidad de f.

Sean $r \leq t$ dos números en $[0,1]$ tales que $|r-t| < \delta$. Probaremos dos contenciones.

(1) $f(r) \subset N(\varepsilon, f(t))$

Esto es sencillo, pues $f(r) \subset f(t)$.

(2) $f(t) \subset N(\varepsilon, f(r))$.

Notemos primero que $f(t) = f(r) \cup (\bigcup\{\alpha(s) : r \leq s \leq t\})$.

Probemos primero que $\alpha(s) \subset N(\varepsilon, f(r))$, para toda s en $[r,t]$. Sea s en $[r,t]$. Como $|s-r| < \delta$, tenemos, por la elección de δ, que $H(\alpha(s), \alpha(r)) < \varepsilon$, lo cual implica que $\alpha(s) \subset N(\varepsilon, \alpha(r))$. Ya que $\alpha(r) \subset f(r)$, tenemos que $\alpha(s) \subset N(\varepsilon, \alpha(r)) \subset N(\varepsilon, f(r))$

Tenemos entonces que $\bigcup\{\alpha(s) : r \leq s \leq t\} \subset N(\varepsilon, f(r))$, lo que combinado con que $f(r) \subset N(\varepsilon, f(r))$, nos da que $f(t) = f(r) \cup (\bigcup\{\alpha(s) : r \leq s \leq t\}) \subset N(\varepsilon, f(r))$, que es lo que necesitamos. Las contenciones (1) y (2) nos dicen que $H(f(r), f(t)) < \varepsilon$ y esto último termina la prueba de la continuidad de f. ■

1.4.3 Los hiperespacios $F_1(X)$ y $F_2(X)$.

Si X es un continuo, entonces hay una manera natural de encajarlo en $C(X)$; de hecho, se puede encajar usando una isometría. Consideremos la siguiente definición.

Definición 1.31 *Sea X un continuo. Denotamos por $F_1(X)$ al conjunto $\{\{p\} : p \in X\}$. A los elementos de $F_1(X)$ se les llama singletones.*

El espacio $F_2(X)$ se obtiene cambiando ligeramente la definición de $F_1(X)$ y contiene de manera natural a $F_1(X)$.

Definición 1.32 *Sea X un continuo. Denotamos por $F_2(X)$ al conjunto $\{\{p, q\} : p, q \in X\}$. A los elementos de $F_2(X)$ se les llama* pares.

En los tres últimos capítulos de este trabajo se darán propiedades del hiperespacio $F_2(X)$.

1.4.4 El hiperespacio de arcos, $A_s(X)$.

El hiperespacio de arcos, $A_s(X)$, compartirá con los otros espacios algunas características; pero no siempre será compacto, como en el caso de S^1 (pues tiene arcos que convergen a todo S^1); ni siquiera en el caso de que $A_s(X)$ no contenga copias de S^1.

En la literatura se suele considerar al hiperespacio de arcos considerandolo como el hiperespacio de los conjuntos que son homeomorfos al intervalo $[0, 1]$. En este trabajo vamos a considerar a $F_1(X) \subset A_s(X)$ de modo que $A_s(X)$ no sólo tiene a conjuntos homeomorfos al intervalo $[0, 1]$; sino que también contiene singletones.

Definición 1.33 *Sea X un continuo. Denotemos por $A_s(X)$ al conjunto $\{A \in C(X) : A$ es un singleton o A es homeomorfo al intervalo $[0,1] \subset \mathbf{R}\}$.*

Teorema 1.34 *Sea X un continuo. Entonces $A_s(X)$ es conexo y Hausdorff.*

Demostración. Sea $A \in A_s(X)$. Sea $p \in A$. Por 1.22, existe un arco ordenado $f : [0,1] \to C(X)$ tal que $f(0) = \{p\}$, $f(1) = A$ y $\{p\} \subset f(t) \subset A$, de modo que $f(t)$ es un arco para toda $t \in [0,1]$. De lo anterior, tenemos que $f([0,1]) \subset A_s(X)$. Tenemos que $F_1(X) \cup f([0,1])$ es un conexo contenido en $A_s(X)$ que conecta a A con $F_1(X)$. De esto se sigue que $A_s(X)$ es conexo. Como $A_s(X) \subset C(X)$ tenemos que $A_s(X)$ es Hausdorff. ■

Existen ejemplos en los que $A_s(X) - F_1(X)$ no es conexo. Para ver esto tomemos un continuo Y, en el plano, que no contenga ningún arco (para ver un ejemplo de tal continuo consulte [8, p. 13]). Agreguemos, en $\mathbf{R}^3$, dos arcos ajenos α_1 y α_2 que toquen al continuo en dos puntos y_1 y y_2. Es claro entonces que el continuo $X = Y \cup \alpha_1 \cup \alpha_2$ tiene las propiedades requeridas, puesto que $A_s(Y)$ es homeomorfo a $F_1(X)$. De lo anterior, tenemos que $A_s(X) - F_1(X) = (A_s(\alpha_1) - F_1(\alpha_1)) \cup (A_s(\alpha_2) - F_1(\alpha_2))$ no es conexo.

A lo largo de este trabajo más propiedades de $A_s(X)$ serán reveladas.

Capítulo 2

Dimensión de $A_S(X)$.

En este capítulo encontraremos algunos teoremas técnicos que nos permitirán probar que la dimensión de $A_s([0,1]\times[0,1])$ es infinita. La prueba se centrará en encontrar un cubo de Hilbert. Con relación a esto, en [2, p. 89] (ver también [2, p. 75]) se prueba que $2^{[0,1]\times[0,1]}$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. Encajaremos el cubo de Hilbert en $A_s([0,1]\times[0,1]) \subset 2^{[0,1]\times[0,1]}$ (el cual no es un espacio compacto, pues contiene arcos que convergen a una copia de S^1).

A lo largo de este capítulo, representaremos a la derivada de una función f como f'.

El primer resultado técnico nos dirá que para buscar los máximos del valor absoluto de una función hay que buscar en los máximos o mínimos de la función.

Lema 2.1 *Sea $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una función y supongamos que $h = |f|$ tiene un máximo en x_0, entonces $f(x_0)$ es un máximo o un mínimo de f.*

Demostración. Tenemos que $h(x_0) = |f(x_0)|$. Si $f(x_0) \geq 0$, entonces $f(x_0)$ es un máximo de f, pues si existe un número x tal que $f(x) > f(x_0) > 0$, entonces $|h(x)| > |h(x_0)|$, lo que es una contradicción.

Si $f(x_0) < 0$, entonces $f(x_0)$ es un mínimo de f, pues si existe un número x tal que $f(x) < f(x_0) < 0$, entonces -$f(x) > -f(x_0) > 0$ y, puesto que $|f(x)| = -f(x)$ y $|f(x_0)| = -f(x_0)$, tenemos que $h(x) > h(x_0)$, otra contradicción. ■

El siguiente resultado nos dirá que, para saber si las imágenes de un punto bajo dos polinomios de primer grado en un intervalo están cerca, basta saber si los polinomios evaluados en los extremos del intervalo nos dan valores cercanos.

Lema 2.2 *Sean $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ dos polinomios de primer grado y sea $\varepsilon > 0$. Si $|f(a) - g(a)| < \varepsilon$ y $|f(b) - g(b)| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in [a,b]$.*

Demostración. Sean $f(x) = a_1x+b_1$ y $g(x) = a_2x+b_2$ y tomemos $h = g-f$.

Si $h'(x) = 0$, entonces $a_1 = a_2$ y $|f(x)-g(x)| = |b_1-b_2| = |f(a)-g(a)| < \varepsilon$, para toda $x \in [a,b]$.

Si $h'(x) \neq 0$, entonces h alcanza su máximo y su mínimo en $\{a,b\}$. Ahora, como $|h|$ es continua y alcanza su máximo en $[a,b]$, tenemos, por el Lema 2.1, que $|h|$ alcanza su máximo en un punto donde h alcance un máximo o un mínimo. Pero h es un polinomio lineal, así que h alcanza su máximo o su mínimo en $\{a,b\}$, por lo que $|h|$ alcanza su máximo en $\{a,b\}$. Supongamos que $|h|$ alcanza su máximo en a, entonces $|f(x) - g(x)| = |h(x)| \leq |h(a)| = |f(a) - g(a)| < \varepsilon$, para toda x. El caso para b es análogo. ■

De manera muy parecida, para saber si -en un intervalo- el valor de un polinomio de primer grado en un número x es mayor que el de otro polinomio de primer grado evaluado en el mismo número x, basta saber si lo es en los extremos del intervalo:

Lema 2.3 *Sean $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ dos polinomios de primer grado. Si $f(a) \leq g(a)$, $f(b) \leq g(b)$ y un número x cumple que $a \leq x \leq b$, entonces $f(x) \leq g(x)$.*

Demostración. Sean $f(x) = a_1x+b_1$ y $g(x) = a_2x+b_2$ y tomemos $h = g-f$.

Si $h'(x) = a_2 - a_1 = 0$, entonces $h(x) = b_2 - b_1$, para toda $x \in [a,b]$. Como $h(a) \geq 0$, tenemos que $h(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$.

Si $h'(x) \neq 0$, entonces h alcanza su mínimo en $\{a,b\}$. Supongamos , sin perdida de generalidad, que lo alcanza en a. Entonces, para toda $x \in [a,b]$, tenemos que $0 \leq h(a) \leq h(x) = g(x) - f(x)$, por lo que $f(x) \leq g(x)$, lo cual era lo que se quería probar. ■

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de números reales no negativos tal que $a_n \leq \frac{1}{2^n}$ para toda $n \in \mathbf{N}$, definiremos una función $f : [0,1] \to [0,1]$ cuya restricción a un intervalo de la forma $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$ coincide con un polinomio de primer grado que en el punto $1 - \frac{1}{2^n}$ toma el valor a_n y que en el punto $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ toma el valor a_{n+1}.

Lema 2.4 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,\infty)$ tal que $a_n \leq \frac{1}{2^n}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces la función $f:[0,1]\to[0,1]$ definida como*

$$f(t) = \begin{cases} (\frac{a_{n+1}-a_n}{2^{-(n+1)}})(t-(1-\frac{1}{2^n}))+a_n & si\ t\in[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}] \\ 0 & si\ t=1 \end{cases}$$

está bien definida y $a_n = f(1-\frac{1}{2^n})$.

Demostración.

Si $t\in\{0,1\}$, entonces no hay ningún problema de definición.

Si $t\in[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}]\cap[1-\frac{1}{2^{n+1}}, 1-\frac{1}{2^{n+2}}]$, entonces $t = 1-\frac{1}{2^{n+1}}$. Ahora, por un lado

$$\begin{aligned} f(1-\frac{1}{2^{n+1}}) &= (\frac{a_{n+1}-a_n}{2^{-(n+1)}})((1-\frac{1}{2^{n+1}})-(1-\frac{1}{2^n}))+a_n \\ &= (\frac{a_{n+1}-a_n}{2^{-(n+1)}})(\frac{1}{2^{n+1}})+a_n = a_{n+1}-a_n+a_n = a_{n+1} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$f(1-\frac{1}{2^{n+1}}) = (\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{2^{-(n+2)}})((1-\frac{1}{2^{n+1}})-(1-\frac{1}{2^{n+1}}))+a_{n+1} = a_{n+1}.$$

Por lo que f está bien definida y, aunado a que $f(0) = (\frac{a_1-a_0}{2^{-1}})(0)+a_0 = a_0$, nos da que $f(1-\frac{1}{2^n}) = a_n$, para toda $n\in\mathbb{N}$. ■

El anterior teorema justifica la siguiente

Definición 2.5 *Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $0\leq a_n\leq\frac{1}{2^n}$, para toda $n\in\mathbb{N}$. Se dice que la función f definida como*

$$f(t) = \begin{cases} (\frac{a_{n+1}-a_n}{2^{-(n+1)}})(t-(1-\frac{1}{2^n})+a_n & si\ t\in[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}] \\ 0 & si\ t=1 \end{cases}$$

es la función asociada a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 2.6 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n\leq\frac{1}{2^n}$. Entonces la función asociada a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es continua.*

Demostración. Sea f la función asociada. Probaremos que $0 \leq f(t) \leq 1-t$, para todo $t \in [0,1]$.

Si $t = 1$, entonces la afirmación es clara: $f(1) = 0$.

Si $t \in [0,1)$, entonces hay un número natural n_0 tal que $t \in [1 - \frac{1}{2^{n_0}}, 1 - \frac{1}{2^{n_0+1}}]$. Como $f(t)$ restringida a ese intervalo es un polinomio de primer grado, basta, por el Lema 2.3, probar la desigualdad en $1 - \frac{1}{2^n}$ y en $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Tenemos que $0 \leq f(1 - \frac{1}{2^n}) = a_n \leq \frac{1}{2^n} = 1 - (1 - \frac{1}{2^n})$ y $0 \leq f(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) = a_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - (1 - \frac{1}{2^{n+1}})$, de manera que $0 \leq f(t) \leq 1 - t$.

Ahora, como en todo punto de $[0,1)$ la función es continua por pedazos, basta con verificar la continuidad en el uno. Tomando límites, tenemos que $\text{lím}_{t\to 1} 0 = 0$ y $\text{lím}_{t\to 1} 1 - t = 0$, por lo que $\text{lím}_{t\to 1} f(t)$ existe y es igual a $0 = f(1)$. Por lo tanto, la función es continua. ■

Notemos que, dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales -con las propiedades requeridas en la proposición anterior- y su función asociada f, el conjunto $A(f) = \{(t, f(t)) : t \in [0,1]\}$ es un arco en $[0,1] \times [0,1]$.

Ahora ya estamos listos para probar el teorema principal de este capítulo, el cual nos dice que en el caso de una celda, el hiperespacio de arcos es inmenso, de hecho todo el cubo de Hilbert queda encajado allí. Para ello, recordemos la definición del cubo de Hilbert.

Definición 2.7 El cubo de Hilbert **H** *es el producto de los intervalos* $[0, \frac{1}{2^n}]$, *con* $n = 0, 1, 2, ...$ *y con la topología producto.*

A **H** se le puede dotar de la métrica $d((x_0, x_1, ...), (y_0, y_1, ...)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|$. Es posible comprobar que la topología que d induce a H es la misma que la topología producto (véase [1, p. 191]) y, como el producto topológico de espacios compactos es compacto,así como el producto de conexos es conexo, vemos que **H** es un continuo y es claro que tiene dimensión infinita, pues contiene celdas de dimensión tan grande como se desee.

Teorema 2.8 *La dimensión de* $A_s([0,1] \times [0,1])$ *es infinita.*

Demostración. Para probarlo daremos un encaje de **H** en $A_s([0,1]\times[0,1])$.

Sea $F : \mathbf{H} \to A_s([0,1] \times [0,1])$ la función que a cada punto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del cubo de Hilbert le asigna el arco determinado por la función f asociada a la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, le asigna el conjunto $A(f) = \{(t, f(t)) : t \in [0,1]\}$.

La función F es inyectiva, pues si $F(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}) = F(\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}})$, entonces, tomando las funciones f y h asociadas a $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y a $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, respectivamente, tenemos que $f = h$, de manera que, en particular, $a_n = f(1-\frac{1}{2^n}) = h(1-\frac{1}{2^n}) = x_n$,para todo $n \in \mathbf{N}$.

Para ver que F es un homeomorfismo en su imagen, basta ver que F es continua, pues $\mathbf{H}$ es compacto y $A_s([0,1]\times[0,1])$ es de Hausdorff..

Así, tomemos un punto $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{H}$, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la bola en la métrica de Hausdorff $B^H(\varepsilon, F(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}))$. Sea N tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ y consideremos el abierto U en $\mathbf{H}$ dado por

$$U = ((a_0-\varepsilon, a_0+\varepsilon)\cap[0,\frac{1}{2^0}])\times\ldots\times((a_N-\varepsilon,a_N+\varepsilon)\cap[0,\frac{1}{2^N}])\times\prod_{n=N+1}^{\infty}[0,\frac{1}{2^n}]$$

Notemos que $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in U$. Probaremos que $F(U) \subset B^H(\varepsilon, F(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}))$.

Sean $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in U$ y $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ la función asociada a $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Tenemos que $|c_n - a_n| < \varepsilon$ si $n < N$. Lo anterior junto con el hecho de que $0 \le c_n \le \frac{1}{2^N} \le \varepsilon$ y $0 \le a_n \le \frac{1}{2^N} \le \varepsilon$ si $n \ge N$, nos muestra que $|c_n - a_n| < \varepsilon$ para toda $n \in \mathbf{N}$.

Sólo resta probar que $H(F(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}), F(\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}})) < \varepsilon$, para ello sólo probaremos que $F(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}) \subset N(\varepsilon, F(\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}))$; la prueba de que $F(\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}) \subset N(\varepsilon, F(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}))$ es análoga.

Sea $(t, f(t))$ un punto del arco $F(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}})$. Tenemos que probar que existe un elemento del arco $F(\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}})$ que dista de $(t, f(t))$ en menos que ε.

Si $t = 1$, entonces $(t, f(t)) = (1, 0) \in F(\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}) \subset N(\varepsilon, F(\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}))$.

Si $t \in [0, 1)$, entonces hay un número natural n_0 tal que $t \in [1-\frac{1}{2^{n_0}}, 1-\frac{1}{2^{n_0+1}}]$, probaremos que $|g(t) - f(t)| < \varepsilon$ usando el Lema 2.2.

Como $|g(1-\frac{1}{2^{n_0}}) - f(1-\frac{1}{2^{n_0}})| = |c_{n_0} - a_{n_0}| < \varepsilon$ y $|g(1-\frac{1}{2^{n_0+1}}) - f(1-\frac{1}{2^{n_0+1}})| = |c_{n_0+1} - a_{n_0+1}| < \varepsilon$, entonces, por 2.2, tenemos que $|g(t) - f(t)| < \varepsilon$.

Notemos que $d((t, g(t)), (t, f(t))) = |f(t) - g(t)| < \varepsilon$. Ahora, como $(t, g(t)) \in F(\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}})$, tenemos que $F(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}) \subset N(\varepsilon, F(\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}))$, esto termina la prueba. ■

Notemos que en el teorema anterior tenemos que $F(H)\cap F_1([0,1]\times[0,1]) = \emptyset$, por lo que $A_s([0,1]\times[0,1]) - F_1([0,1]\times[0,1])$ tiene encajado a un cubo de Hilbert.

Capítulo 3

Conexidad por trayectorias.

En este capítulo mostraremos que si X es una compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$, entonces $A_s(X)$ es arco-conexo si y sólo si el residuo de X es un arco o un punto.

Definición 3.1 *Un continuo X se dice que es una* compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$ *si existe un homeomorfismo $i:[0,\infty)\to i([0,\infty))\subset X$ tal que $i([0,\infty))$ es denso en X. Al homeomorfismo i se le llama* encaje *y a $X-i([0,\infty))$ se le denomina* residuo.

Con relación a la definición anterior, en ocasiones identificaremos al homeomorfismo i con su imagen siempre intentando que el contexto clarifique a cual nos referimos.

Observemos que podemos pedirle a X que sea compacto y métrico solamente, puesto que, como tiene un conexo denso, X mismo debe ser conexo.

Comenzaremos por dar algunos teoremas que aclaren un poco cómo son las compactaciones métricas del intervalo $[0,\infty)$.

Lema 3.2 *Sean X una espacio métrico, D un subconjunto denso de X y V un abierto de X. Entonces $V\subset\overline{(V\cap D)}$.*

Demostración. Sean $v\in V$ y U un abierto tal que $v\in U$. Como $V\cap U$ es un abierto no vacío y D es denso, existe $p\in D\cap(V\cap U)$, por lo que p es un punto de U que está en $V\cap D$. ■

La siguiente serie de proposiciones nos dará algunas características de estas compactaciones métricas.

Proposición 3.3 *Sean $a \in [0,\infty)$ y X una compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$ con encaje $i : [0,\infty) \to X$ y residuo R. Entonces:*

(1) El conjunto $i([0,a])$ es cerrado en X,

(2) El conjunto $i((a,\infty)) \cup R$ es abierto en X,

(3) El conjunto $i([0,a))$ es abierto en X,

(4) El conjunto $i([0,\infty))$ es abierto en X,

(5) El conjunto R es cerrado,

(6) El conjunto $i([a,\infty)) \cup R$ es cerrado, y

(7) El conjunto $i((a,\infty))$ es abierto en X .

Demostración.

(1) Es claro, pues es imagen de un compacto bajo la función continua i.

(2) Como $i((a,\infty)) \cup R = X - i([0,a])$, se sigue de (1)

(3) Ya que $i([0,a))$ es abierto en el conjunto $i([0,\infty))$, tenemos que $i([0,a)) = i([0,\infty)) \cap U$ para algún abierto U de X. Por otro lado, $i([0,a)) \subset i([0,a])$, por lo que $\overline{i([0,a))} \subset \overline{i([0,a])} = i([0,a])$, así que $\overline{i([0,a))} \subset i([0,a])$. Por el Lema 3.2, $U \subset \overline{i([0,\infty)) \cap U} = \overline{i([0,a))} \subset i([0,a]) \subset i([0,\infty))$, por lo que $i([0,a)) = U \cap i([0,\infty)) = U$ es un abierto en X.

(4) Como $i([0,\infty)) = \bigcup\{i([0,b)) : b \in [0,\infty)\}$, esta afirmación se sigue de (3)

(5) Es claro de (4), pues $R = X - i([0,\infty))$.

(6) Ya que $i([a,\infty)) \cup R = X - i([0,a))$, de (3) obtenemos el resultado.

(7) Tenemos que $i(a,\infty)) = X - (R \cup i([0,a]))$, el cual por (5) y (1) es abierto. ■

Ahora argumentaremos por qué el residuo tiene que ser un continuo, y diremos que casi todos los puntos de $i([0,\infty))$ son puntos de corte.

Proposición 3.4 *Sean $a \in (0,\infty)$ y X una compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$ con encaje i. Entonces $i(a)$ es un punto de corte de X.*

Demostración. Sea R el residuo de la compactación. Observemos que $X - i(a) = i([0,a)) \cup i((a,\infty) \cup R$. Por 3.3, $i([0,a))$ es abierto y, como $i(0) \in i([0,a))$, tenemos que $i([0,a)) \neq \emptyset$. Por 3.3 nuevamente, $i((a,\infty)) \cup R$ es un abierto y, como $i(a+1) \in i((a,\infty)) \cup R$, tenemos que $i(a,\infty) \cup R \neq \emptyset$. Así, tenemos que $i([0,a))$ e $i((a,\infty) \cup R$ son una disconexión de $X - \{a\}$. ■

Proposición 3.5 *Sea X una compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$ con residuo R e inmersión i. Entonces $R = \bigcap\{\overline{i([n,\infty))} : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración.
(1) $R \subset \bigcap\{\overline{i([n,\infty))} : n \in \mathbb{N}\}$.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $R \subset \overline{i([0,\infty))} = \overline{i([0,n]) \cup i([n,\infty))} = \overline{i([0,n])} \cup \overline{i([n,\infty))} = i([0,n]) \cup \overline{i([n,\infty))}$, esto último por 3.3. Como $R \cap i([0,\infty)) = \emptyset$, tenemos que $R \subset \overline{i([n,\infty))}$.
(2) $\bigcap\{\overline{i([n,\infty))} : n \in \mathbb{N}\} \subset R$
Supongamos, por el contrario, que existe un punto x tal que $x \notin R$ y $x \in \bigcap\{\overline{i([n,\infty))} : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $x \in i([0,\infty))$, por lo que $x = i(x')$ para algún $x' \in [0,\infty)$. Por la inyectividad de i tenemos que $i(x) \notin \overline{i([N,\infty))}$, para ningún numero natural $N > x'$. Esto contradice que $x \in \bigcap\{\overline{i([n,\infty))} : n \in \mathbb{N}\}$. ■

Es conveniente recordar, con relación a la proposición anterior, que la intersección anidada de continuos es, a su vez, un continuo (por 1.9). Esto nos da inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.6 *El residuo de una compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$ es un continuo.*

Corolario 3.7 *Sean X una compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$ con inmersión i y residuo R. Sea $H \in C(X)$ y supongamos que $i([m,\infty)) \subset H$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $R \subset H$.*

Demostración. Como H es un cerrado tenemos que $\overline{i([m,\infty))} \subset H$. Así, tenemos que $R = \bigcap\{\overline{i([n,\infty))} : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{i([m,\infty))} \subset H$. ■

Corolario 3.8 *Sea X una compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$ con inmersión i y residuo R. Sea A un continuo que intersecta al residuo R y a $i([0,\infty))$. Entonces $i([a,\infty)) \cup R \subset A$ para todo elemento $a \in A \cap i([0,\infty))$.*

Demostración. Sea $a \in A \cap i([0,\infty))$. Si existe $p \in [a,\infty)$ tal que $p \notin A$, entonces $A \cap i([0,p))$ y $A \cap (i(p,\infty) \cup R)$ son una disconexión de A, pues por 3.4 p es un punto de corte para X. Esta contradicción prueba que $i([0,\infty)) \subset A$ para toda $a \in A \cap i([0,\infty))$ Por 3.7, tenemos que $R \subset A$. Por tanto $i([a,\infty)) \cup R \subset A$. ■

Recordemos que una función de Whitney para $C(X)$ es una función $\mu : C(X) \to \mathbf{R}$ con las siguientes propiedades.

(1) $\mu(\{a\}) = 0$ para todo $a \in X$,

(2) Si $A \subset B$ y $A \neq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$, para cualquier par de subcontinuos A y B de X, y

(3) $\mu(X) = 1$.

Dada una función de Whitney μ, se les llama niveles de Whitney a los subconjuntos $\mathcal{A}$ de $C(X)$ de la forma $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$, para algún número $t \in [0, 1]$.

En este momento conviene que demos un lema que nos dirá que si un continuo está en la nube de otro y ambos son casi del mismo tamaño, entonces están cerca.

Proposición 3.9 *Sean X un continuo y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un número δ tal que para todo par de subcontinuos A y B de X que cumplan que $B \subset N(\delta, A)$ y $|\mu(A) - \mu(B)| < \delta$, tenemos que $H(A, B) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe un número $\varepsilon > 0$ para el cual no se cumple el enunciado.

Así, dado $n \geq 1$, hagamos $\delta = \frac{1}{n}$, por lo que existen dos continuos A_n y B_n tales que $B_n \subset N(\frac{1}{n}, A_n)$, $H(A_n, B_n) \geq \varepsilon$ y $|\mu(A_n) - \mu(B_n)| < \frac{1}{n}$. Tomando subsucesiones convergentes si fuera necesario, podemos suponer que las sucesiones $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ convergen a dos continuos A y B, respectivamente.

Como $B_n \subset N(\frac{1}{n}, A_n) \subset \overline{N(\frac{1}{n}, A_n)}$, por 1.26, tenemos que $B \subset A$ y, por la continuidad de μ, tenemos que $|\mu(A) - \mu(B)| = 0$, por lo que $\mu(A) = \mu(B)$, de manera que $B = A$, y tenemos entonces que $H(A, B) = 0$. Por la continuidad de la distancia tenemos que $H(A_n, B_n) \to H(A, B) = 0$, de modo que existe un número N tal que $H(A_N, B_N) < \varepsilon$. Esto último contradice la elección de A_N y de B_N. Esto termina la prueba de la proposición ■

De este teorema se obtiene sin dificultad el siguiente resultado.

Corolario 3.10 *Sean X un continuo y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un número δ tal que para dos continuos A y B que cumplan que $B \subset N(\delta, A)$ y $\mu(A) = \mu(B)$, tenemos que $H(A, B) < \varepsilon$.*

También vamos a necesitar del siguiente lema

Lema 3.11 *Sea X una compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$ con inmersión i. Entonces $\{i([0,n])\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X)$ que converge a X.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como X es compacto, existen $n \in \mathbf{N}$ y $x_1,...,x_n \in X$ tales que $X = N(\varepsilon, \{x_1,...x_n\})$. Ya que $i([0,\infty))$ es denso en X, para cada $j \in \{1,...,n\}$ podemos elegir un número $t_j \in [0,\infty)$ tal que $d(x_j, i(t_j)) < \varepsilon$. Entonces $X = N(2\varepsilon, \{i(t_1),...,i(t_n)\})$. Sea $M \in \mathbf{N}$ tal que $t_j \leq M$ para toda $j \in \{1,...,n\}$. Entonces $X = N(2\varepsilon, i([0,m]))$ para toda $m \geq M$. De manera que $H(X, i([0,m))) < 2\varepsilon$ para toda $m \geq M$. Por tanto $i([0,m]) \to X$ ■

Ahora ya estamos listos para probar un teorema que nos va a caracterizar, dentro de la clase de las compactaciones métricas del intervalo $[0,\infty)$, a los continuos que son conexos por trayectorias.

Teorema 3.12 *Sea X una compactación métrica del $[0,\infty)$. Entonces $A_s(X)$ es arcoconexo si y sólo si el residuo es un arco (por lo que es homeomorfo al intervalo $[0,1]$ o es un punto).*

Demostración. Sea $i : [0,\infty) \to X$ la inmersión.

$\Rightarrow$)

Tomemos $p = i(0)$ y $r \in R$. sea $\alpha : [0,1] \to A_s(X)$ una función continua e inyectiva tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = \{r\}$. Sea $f : [0,1] \to C(X)$ la función dada por $f(t) = \bigcup\{\alpha(s) : s \leq t\}$. Por 1.30, tenemos que f es continua. Sea $t_0 = \text{mín } \{t : f(t) \cap R \neq \emptyset\}$, se justifica tomar el mínimo debido a que $\{t : f(t) \cap R \neq \emptyset\} = f^{-1}(\{K : K \cap R \neq \emptyset\})$ es un cerrado por 1.29 no vacío ($f(1) = \{r\} \subset R$)y por la continuidad de f. Como $f(0) = \alpha(0) = \{i(0)\} \notin R$, tenemos que $t_0 > 0$. Notemos que $f(t_0) = \bigcup f([0,t_0])$, por lo que $f(t_0)$ es un continuo que tiene a $i(0)$ y a r, por lo que por 3.8, tenemos que $R \subset f(t_0)$.

Si $t < t_0$, tenemos, por la minimalidad de t_0, que $f(t) \cap R = \emptyset$, por lo que $(\bigcup f([0,t_0))) \cap R = \emptyset$. Ahora, como $R \subset f(t_0) = (\bigcup f([0,t_0))) \cup \alpha(t_0)$, debemos tener que $R \subset \alpha(t_0)$. Como $\alpha(t_0)$ es un arco y R es un subcontinuo de él, tenemos que R es un arco o un punto.

$\Leftarrow$)

Primero probaremos que es posible conectar un arco contenido en $i([0,\infty))$ con el residuo (el cual está en $A_s(X)$). Tomemos una función de Whitney

$\mu : C(X) \to [0,1]$. Probaremos que $\mu^{-1}(\mu(R))$ es un arco en $A_s(X)$. Supondremos que X es compactación métrica del $[0,1)$; esto lo podemos hacer porque $[0,1)$ es homeomorfo a $[0,\infty)$. De modo que supondremos que $i : [0,1) \to X$ es un encaje.

Sea $f : \mu^{-1}(\mu(R)) \to [0,1]$ dada por

$$f(A) = \begin{cases} \text{mín } (i^{-1}(A)) & \text{Si } A \neq R \\ 1 & \text{Si } A = R \end{cases}$$

Como $\mu^{-1}(\mu(R))$ es un continuo (ver 1.22), basta probar que f es inyectiva, continua y que toma el valor 0 y el valor 1.

Sea $A \in \mu^{-1}(\mu(R))$. Primero observemos que si $A \neq R$, no es posible que $A \cap R \neq \emptyset$ y que $A \cap i([0,1)) \neq \emptyset$, pues el Corolario 3.8 implicaría que el residuo $R \subsetneq A$, lo cual es imposible pues $\mu(R) = \mu(A)$. Esto muestra que $A \subset R$ (lo cual es también imposible) o bien que $A \subset i([0,1))$. De manera que f está bien definida.

(1) f alcanza el valor 1.

Es claro, pues $f(R) = 1$

(2) f alcanza el valor 0.

Como $\mu(\{i(0)\}) = 0$ e $i([0,1-\frac{1}{n}]) \to X$ (esto por 3.11, usando el homeomorfismo $h : [0,\infty) \to [0,1)$ donde $h(t) = 1 - \frac{1}{t+1}$, para toda $t \in [0,\infty)$), tenemos que $\mu(i([0,\frac{1}{n}]) \to \mu(X) > \mu(R)$, de manera que existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $\mu(i[0,1-\frac{1}{m}]) > \mu(R)$. Ya que la función que a cada s en $[0,1)$ le asigna el número $\mu(i([0,s]))$ es una función continua, el teorema del valor intermedio nos garantiza la existencia de un número t en $[0,1)$ tal que $\mu([0,t]) = \mu(R)$. Entonces $i([0,t]) \in \mu^{-1}(\mu(R))$ e $i^{-1}(i([0,t])) = [0,t]$, de modo que $f(i([0,t])) = 0$.

(3) f es inyectiva.

Supongamos que $f(A) = f(B) = t_0$. Si $A = R$, entonces $f(B) = 1$, así que $B = R$. Análogamente si $B = R$, entonces tenemos que $A = R$.

Si $A \neq R$ y $B \neq R$, entonces $A \subset i([0,1))$, por lo que $i^{-1}(A) \subset [0,1)$; análogamente, $i^{-1}(B) \subset [0,1)$

Como $f(A) = \text{mín } (i^{-1}(A))$, tenemos que $i^{-1}(A) = [t_0, a]$ para alguna $a \in [0,1)$ e $i^{-1}(B) = [t_0, b]$ para algún $b \in [0,1)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \leq b$. Entonces $i^{-1}(A) \subset i^{-1}(B)$, por lo que $A \subset B$. Como $\mu(A) = \mu(B)$, tenemos que $A = B$.

(4) f es continua.

Sean $A \subset i([0,1))$, $\varepsilon > 0$ y $t = f(A)$. Tenemos que $i^{-1}(A) = [a_1, a_2]$ para algunos números a_1 y a_2 en $[0,1)$. Sea δ tal que $N(\delta, i^{-1}(A)) =$

$N(\delta, [a_1, a_2]) \subset [0, 1)$. Definamos $i^* : C([a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon]) \to C(X)$ como $i^*(D) = i(D)$; es decir, $i^*(D)$ es la imagen bajo i del subcontinuo D de $[a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon]$. Esta función i^* es llamada *función inducida* y se puede probar que es continua (véase [2, p. 106])

Notemos que por la inyectividad de i en $[a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon]$, la función i^* es una función que manda singletones en singletones y que preserva contenciones propias, de modo que, después de multiplicar por cierto escalar, $\mu \circ i^*$ es una función de Whitney en $[a_1 - \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_1]$. Por lo anterior, el Corolario 3.10 nos garantiza la existencia de un número $\delta < \varepsilon_1$ tal que si un intervalo $B = [b_1, b_2] \subset N(\delta, [a_1, a_2])$ y $(\mu \circ i^*)(B) = (\mu \circ i^*)(A)$, entonces $H([a_1, a_2], [b_1, b_2]) < \varepsilon$

Notemos que $i(N(\delta, [a_1, a_2]))$ es un abierto en X (por ser i un encaje y ser $i([0.\infty))$ abierto en X) Ahora, sea $\mathcal{C} = \{C : \mu(C) = \mu(R)$ y $C \subset i(N(\delta, [a_1, a_2]))\}$. Por 1.27 tenemos que $\mathcal{C}$ es un abierto de $C(X)$ intersectado con el nivel. Además, $A \in \mathcal{C}$.

Veremos que $f(\mathcal{C}) \subset (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$

Sea $C \in \mathcal{C}$. Como $\mu(C) = \mu(A)$, entonces $C = i([c_1, c_2])$ para algunos c_1 y c_2 en $[0, 1)$. Ya que $\mu \circ i^*([c_1, c_2]) = \mu \circ i^*([a_1, a_2])$, entonces tenemos, por la elección de δ, que $H([c_1, c_2], [a_1, a_2]) < \varepsilon$. Por lo tanto, $|c_1 - a_1| < \varepsilon$; pero $c_1 = f(C)$ y $a_1 = f(A)$, así que $|f(A) - f(C)| < \varepsilon$.

Esto termina la prueba de la continuidad de f en los puntos del nivel contenidos en $i([0, 1))$; falta probar la continuidad en R.

Supongamos, por el contrario, que f no es continua en R. Entonces existe un número $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión $A_n \to R$ tal que $A_n \in (\mu^{-1}(\mu(R)) - \{R\})$ y con la propiedad de que $1 - f(A_n) = |1 - f(A_n)| \geq \varepsilon_0$, por lo que $f(A_n) \leq 1 - \varepsilon_0$. Tomemos $t_n = f(A_n)$. Tomando, si fuera necesario, una subsucesión convergente a un número $t \in [0, 1]$, podemos suponer que $t = \text{lím}\, t_n \leq 1 - \varepsilon_0$, por lo que $i(t) \notin R$. Como $i(t_n) \in A_n$ debemos de tener por la continuidad de i y por 1.24 que $i(t) \in \text{lím}\, A_n = R$. Lo cual es una contradicción.

De la prueba de (1), (2), (3) y (4) tenemos que el singleton $\{i(0)\}$ puede ser conectado en $A_s(X)$ con R.

Ahora, sólo hay dos tipos de arcos en X, los cuales dependen de si R es un singletón o un continuo homeomorfo a $[0, 1]$. En el primer caso los arcos o están contenidos en $i([0, 1))$ o contienen a R; en el segundo caso o los arcos están contenidos en $i([0, 1))$ o están contenidos en R. Es claro que cualquier arco que pertenezca a alguna de estas categorías puede ser conectado, en $A_s(X)$, a ya sea $\{i(0)\}$ o a R. Por tanto, $A_s(X)$ es conexo por trayectorias. ■

Notemos que en la prueba del teorema anterior, en el caso en que el residuo es degenerado, obtenemos que $\mu(R) = 0$, por lo que la restricción de la función f al conjunto $\mu^{-1}(\mu(R)) \subset C(X)$ es, de hecho, un homeomorfismo y la compactación es un arco.

En el caso en que el residuo de una compactación métrica es no degenerado podemos decir más acerca de cómo son los arcos que conectan a un singleton de $A_s(X)$ en el encaje con un singleton de $A_s(X)$ en el residuo: Dicho arco en $A_s(X)$ debe de pasar por el residuo, el cual, por 3.12, es un elemento de $A_s(X)$.

Teorema 3.13 *Sea X una compactación métrica del intervalo $[0,\infty)$ con residuo R no degenerado. Supongamos que $A_s(X)$ es conexo por trayectorias. Sean $e \in i([0,\infty))$, $r \in R$ y $\alpha : [0,1] \to A_s(X)$ un arco tal que $\alpha(0) = \{e\}$ y que $\alpha(1) = \{r\}$. Entonces existe un número $t_0 \in [0,1]$ tal que $\alpha(t_0) = R$.*

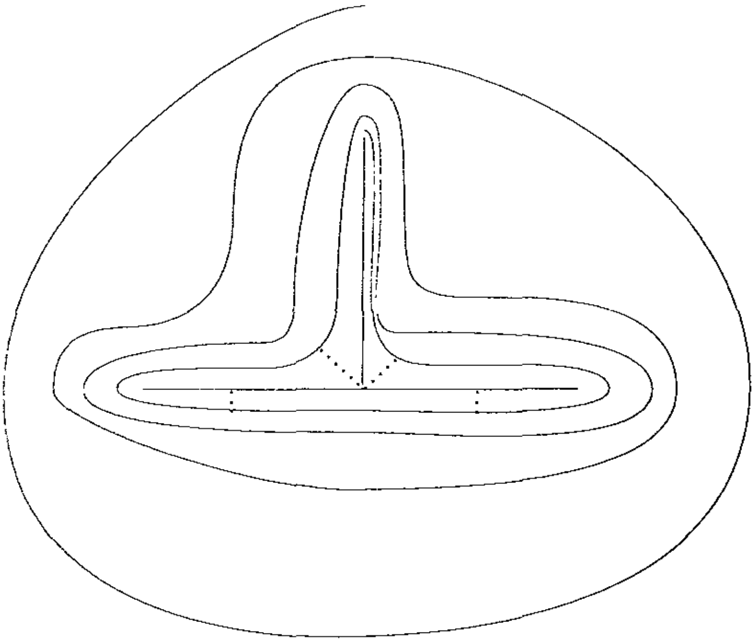
Demostración. Sean f como en la primera parte de la prueba de 3.12 para α; esto es, definamos f como $f : [0,1] \to C(X)$ la función dada por $f(t) = \bigcup\{\alpha(s) : s \leq t\}$. Ya se había mencionado en 3.12 que f es continua, se había visto que el residuo R de la compactación es un arco y que $R \subset \alpha(t_0)$, donde $t_0 = \text{mín}\ \{t : f(t) \cap R \neq \emptyset\}$.

Como $\alpha(t_0)$ es un arco, existe un homeomorfismo $\beta : [0,1] \to \alpha(t_0) \subset X$. Dado que R es no degenerado, tomemos dos elementos p y q en el residuo y tomemos a_1 y a_2 en $[0,1]$ de tal modo que $p = \beta(a_1)$ y $q = \beta(a_2)$. Supongamos, además, que $a_1 < a_2$.

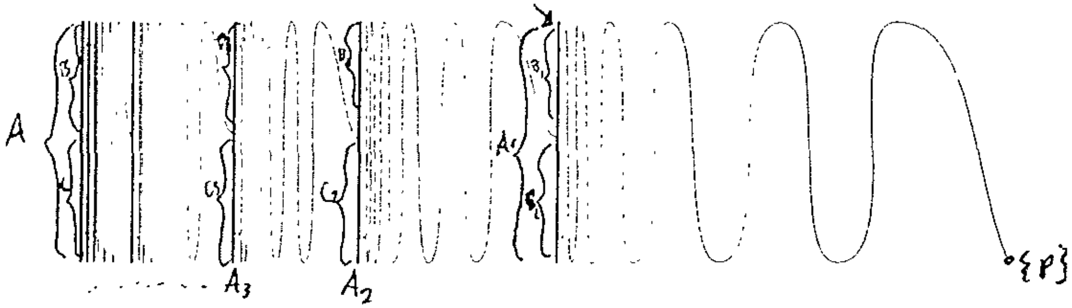
Sea a un número tal que $a_1 < a < a_2$. Si $\beta([0,a]) \not\subset R$, entonces $\beta([0,a]) \cap i([0,1)) \neq \emptyset$, por lo que $\beta([0,a])$ es un subcontinuo de X que intersecta al encaje e intersecta a R (pues $p \in \beta([0,a])$). Así que por 3.8 tenemos que $R \subset \beta([0,a])$, por lo que existe un número a_3 con $0 \leq a_3 < a_1 < a < a_2$ y tal que $\beta(a_3) = q = \beta(a_2)$, lo cual contradice la inyectividad de β. Como a era cualquiera, obtenemos que $\beta([0,a_2)) \subset R$.

De manera análoga $\beta((a_1,1]) \subset R$. Ahora, $\beta([0,1]) = \beta([0,a_2) \cup (a_1,1]) = \beta([0,a_2)) \cup \beta((a_1,1]) \subset R$, por lo que $\alpha(t_0) = \beta([0,1]) \subset R$, esto termina la prueba. ■

El teorema 3.12 nos dice que, para el siguiente espacio, el espacio de arcos no es conexo por trayectorias.



Estos no son los únicos ejemplos de espacios de arcos que no son conexos por trayectorias; usando el Teorema 3.13 se puede probar que el siguiente espacio, mostrado en la siguiente figura, tampoco tiene espacio de arcos conexo por trayectorias.



Para ver esto, notemos que si queremos conectar el punto $\{p\}$ con el arco A tenemos que pasar por los arcos A_1, A_2,... Por lo que si hubiera un arco $\alpha : [0,1] \to A_s(X)$ con $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = A$ tendríamos una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a 1 y tal que $\alpha(t_n) = A_n$. Notemos que $A_n \to A$.

Notemos que para pasar de A_n a un arco a su izquierda, tenemos que achicar a A_n hasta un subcontinuo de B_n o hasta un subcontinuo de C_n.

Entonces existe $s_n \geq t_n$ tal que $\alpha(s_n) \subset B_n$ o $\alpha(s_n) \subset C_n$. Tomando límites, como $t_n \leq s_n \leq 1$, tenemos que $\alpha(s_n) \to A$ y que, ademas debe de converger a un subcontinuo de B o de A, lo cual es imposible.

Capítulo 4

Comparaciones entre $F_2(X)$ y $A_S(X)$.

En el caso del intervalo, es posible mostrar que $F_2([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]\times[0,1]$ usando la función que a cada par $\{x,y\}\in F_2([0,1])$ le asocia el punto $(x,y)\in \mathbf{R}^2$. También es posible probar que $C([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]\times[0,1]$ usando el homeomorfismo que a cada subcontinuo $[x,y]$ le asocia el punto $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. Como, en el intervalo, $C(X)=A_s(X)$ tenemos que $A_s([0,1])$ es homeomorfo a $F_2(X)$. En este capítulo estaremos interesados en los espacios para los que dicho homeomorfismo existe y en el Teorema 4.29 daremos una caracterización para una clase de continuos.

La existencia de un homeomorfismo entre $F_2(X)$ y $A_s(X)$ no será posible cuando los continuos contengan copias de S^1, pues el tener círculos fuerza a que el espacio de arcos no sea compacto ($F_2(X)$ siempre es compacto). Es por estos resultados que nos concentraremos en el estudio de espacios que sean conexos por trayectorias, que no contengan círculos y que sean lo suficientemente "flacos", para no permitir que $A_s(X)$ tenga dimensión infinita.

La herramienta que encontramos más útil para comparar los espacios $F_2(X)$ y $A_s(X)$ será la conexidad local. Obtendremos un teorema que caracteriza en algunos casos a los espacios para los cuales $F_2(X)$ es homeomorfo a $A_s(X)$. Este resultado nos dice, de paso, que en el caso de existir un homeomorfismo entre $F_2(X)$ y $A_s(X)$ para un espacio de los no considerados, el homeomorfismo entre estos espacios no es tan manejable.

Primeramente, necesitaremos unos resultados acerca de la conexidad local.

En los libros de topología se dan varias definiciones de vecindad. En este trabajo la palabra vecindad va a tener un significado amplio y tendremos que una vecindad no siempre tendrá que ser abierta. Así, tenemos la siguiente definición.

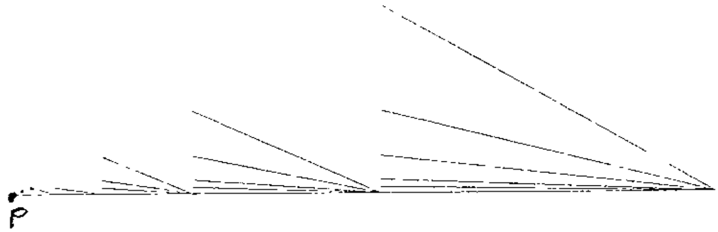
Definición 4.1 *Sea X un continuo. Sea A un subconjunto de X. Decimos que A es una* vecindad de un punto $x \in X$ *si* $x \in int(A)$.

Con esta definición de vecindad podemos hacer diferencias sutiles en cuanto a la conexidad. Comparemos las siguientes dos definiciones.

Definición 4.2 *Sea X un continuo. Decimos que X es* localmente conexo *en un punto p de X si toda vecindad de p contiene a una vecindad* ***abierta*** *conexa de p. Decimos que X es* localmente conexo *si es localmente conexo en todos sus puntos.*

Definición 4.3 *Sea X un continuo. Decimos que X es* conexo en pequeño *en un punto p de X si toda vecindad de p contiene a una vecindad conexa de p. Decimos que X es* conexo en pequeño *si es conexo en pequeño en todos sus puntos.*

La única diferencia entre estos dos conceptos está en que en la conexidad se pide que la vecindad conexa de p sea abierta. El siguiente es el ejemplo clásico (ver [8, p. 84]) de un continuo con un punto de conexidad en pequeño que no es un punto de conexidad local. Consta de varias escobas armónicas pegadas una enseguida de la otra y teniendo cada vez menor tamaño hasta que convergen a un punto.



Proposición 4.4 *Un continuo X es conexo en pequeño en un punto p si y sólo si toda vecindad abierta (respectivamente, cerrada) de p contiene a una vecindad conexa del punto p.*

Demostración.

$\Rightarrow$)

Es claro que si toda vecindad contiene a una vecindad conexa, entonces toda vecindad abierta (respectivamente, cerrada) contiene a una vecindad conexa.

$\Leftarrow$)

Si tenemos que toda vecindad cerrada de un punto p contiene a una vecindad conexa de p, y damos una vecindad cualquiera B de p, entonces, por la regularidad de X, podemos encontrar un abierto U tal que $p \in U \subset \bar{U} \subset int(B) \subset B$, por lo que existe una vecindad conexa C de p tal que $p \in C \subset \bar{U} \subset B$.

Si tenemos que toda vecindad abierta de un punto p contiene a una vecindad conexa de p, y damos una vecindad cualquiera B de p, entonces, existe una vecindad conexa C de p tal que $p \in C \subset int(B) \subset B$. ■

El siguiente resultado nos da una caracterización de los espacios localmente conexos en términos de las componentes de sus abiertos.

Lema 4.5 *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si las componentes de todo abierto de X son abiertas.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sean X un continuo localmente conexo, C la componente de un abierto U de X, y $p \in C$. Ya que U es abierto, existe una vecindad abierta y conexa N de p tal que $N \subset U$. Entonces $N \subset C$, pues C es la componente de U que tiene a p. Esto prueba que $p \in int(C)$, por lo tanto $C = int(C)$, lo que prueba que C es abierto.

$\Leftarrow$) Sean p un punto y U una vecindad abierta de él, entonces la componente de U que tiene a p es un abierto conexo contenido en U ■

Teorema 4.6 *Un espacio X es localmente conexo si y sólo si es conexo en pequeño en todos sus puntos.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Esto es claro, pues la conexidad local en p implica la conexidad en pequeño en p.

$\Leftarrow$) Supongamos, por el contrario, que X no es localmente conexo. Esto quiere decir, por el Lema 4.5, que hay un abierto U que tiene una componente

C que no es abierta. Como C no es abierta, podemos tomar un punto p en C tal que $p \in Fr(C) \cap U$. Como X es conexo en pequeño en p hay una vecindad conexa L de p tal que $L \subset U$. Al ser C la componente de p, tenemos que $L \subset C$, y ya que $p \in int(L)$, tenemos que $p \in int(C)$, lo cual es absurdo, ya que supusimos que $p \in Fr(C)$. ■

Ahora veremos un resultado que nos dice que los continuos que no son espacios localmente conexos tienen un punto en que sus vecindades están fragmentadas de modo que no se les puede conectar. Antes de esto debemos dar algunas definiciones acerca de qué quiere decir que estén fragmentadas.

Definición 4.7 *Decimos que dos subconjuntos A y B de X* no se pueden conectar por continuos dentro de una vecindad V *si todo continuo C que cumpla que $A \cup B \cup C$ sea conexo debe intersectar a $X - V$.*

En la literatura se define *continuo de convergencia* de un modo ligeramente distinto de como lo definiremos a continuación. La razón para definirlo del modo en que lo hacemos es tener un nombre especial para los elementos de la sucesión.

Definición 4.8 *Decimos que los elementos de una sucesión de continuos en $C(X)$ $\{A_0, A_1, A_2, ...\}$ son* continuos de convergencia *para una vecindad V de un punto p si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(0) $p \in A_0 \cap int(V)$

(1) A_n no es degenerado para ningún número $n \in \mathbb{N}$

(2) $A_n \to A_0$

(3) Si $n \neq m$, entonces $A_n \cap A_m = \emptyset$, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$.

(4) Si $n \neq m$, entonces A_n y A_m no se pueden conectar por continuos dentro de V.

Ahora ya estamos listos para dar una definición precisa de que las vecindades estén fragmentadas. En la prueba del siguiente teorema se usara una de las versiones del *Teorema de los golpes en la frontera*, el cual afirma que, en un continuo, la cerradura de la componente de una vecindad intersecta a la frontera de la vecindad. La versión que se usará en el siguiente teorema es la dada en [8, p. 75].

Teorema 4.9 *Si un continuo X no es conexo en pequeño en un punto p, entonces existen continuos de convergencia para alguna vecindad de p.*

Demostración. Como X no es conexo en pequeño en p, por 4.4 hay una vecindad cerrada V de p tal que todo continuo L con la propiedad de que $p \in L \subset V$ cumple que $p \in Fr(L)$.

Sea L la componente de V que tiene a p. Como $p \in Fr(L)$, existe una sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ tal que $p_n \to p$ con $p_n \in int(V) - L$ para toda $n \in \mathbf{N}$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea L_n la componente de V que contiene a p_n. Notemos que ninguna de las componentes L_n es degenerada, pues, por el *Teorema de los golpes en la frontera* (ver [8, p. 75]), tenemos que $L_n \cap Fr(V) \neq \emptyset$.

Tomando una subsucesión convergente si fuera necesario, podemos pensar que $\{L_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge a algún continuo A_0 (por 1.3). Ya que V es un conjunto cerrado, tenemos que $A_0 \subset V$. Como $L_n \cap Fr(V) \neq \emptyset$ para toda $n \geq 1$, tenemos por 1.29 que $A_0 \cap Fr(V) \neq \emptyset$.Esto prueba (1) de la definición.

Ya que $A_0 \subset V$ es conexo y tiene a p, tenemos que $A_0 \subset L$.

Enseguida veremos que podemos escoger $\{n_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ de tal modo que si $l \neq k$, entonces $L_{n_l} \cap L_{n_k} = \emptyset$, y definiremos $A_k = L_{n_k}$. Primero notemos que $L \neq L_n$ para toda $n \geq 1$, pues ambas son componentes de V y $p_n \in L_n - L$. Entonces $L_1 \cap A_0 = \emptyset$, así que podemos tomar $n_1 = 1$. Como $H(L_1, A_0) > 0$, existe un $n_2 > n_1$ tal que $H(L_{n_2}, A_0) < H(L_1, A_0)$ (Recordemos que $L_n \to A_0$). Nuevamente, $H(L_{n_2}, A_0) > 0$. Así, podemos proceder por inducción y obtenemos una sucesión $\{L_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$ de $\{L_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ que converge a A_0 y si $l \neq k$, entonces $L_{n_l} \cap L_{n_k} = \emptyset$, puesto que son componentes distintas. Definimos entonces $A_k = L_{n_k}$. Esto prueba (2) y parte de (3); sólo nos falta ver, para probar (3), que $A_k \cap A_0 = \emptyset$, para toda $k \geq 1$. Pero ya habíamos mencionado que $L_n \neq L$, lo que implica que $L_n \cap L = \emptyset$. Por tanto $A_k \cap A_0 = \emptyset$ para toda $k \geq 1$.Esto termina de probar (3) de la definición.

Para probar (4) tomemos un continuo K y supongamos que $A_k \cup K \cup A_l \in C(X)$ con $k \neq l$. Si $K \subset V$, entonces $A_k \cup K \cup A_l$ es un subcontinuo de V que intersecta a A_k, por lo que (ya que A_k es componente de V) $A_k \cup K \cup A_l \subset A_k$, por lo que $A_l \cap A_k \neq \emptyset$, pero eso es imposible en virtud de (3). Entonces $K \cap (X - V) \neq \emptyset$. Esto prueba (4). ∎

Observación 4.10 *En la prueba del teorema anterior, se cumple que $K \cap Fr(X - V) \neq \emptyset$.*

Demostración. Efectivamente, K es un conjunto conexo que intersecta tanto a V como a $X - V$ por lo que $\emptyset \neq K \cap Fr(V) = K \cap Fr(X - V)$. ■

El siguiente lema es la versión de regularidad en los espacios localmente conexos.

Lema 4.11 *Sean X un continuo localmente conexo, $a \in X$ y V un abierto que tiene a a. Entonces hay un abierto conexo U tal que $a \in U \subset \overline{U} \subset V$.*

Demostración. Sean X, a y V como en el enunciado. Como X es regular, podemos hallar una vecindad abierta W de a con la propiedad de que $a \in W \subset \overline{W} \subset V$. Ya que X es localmente conexo, existe un abierto conexo U, que tiene a a y está contenido en W. Por lo tanto, $a \in U \subset W$. Entonces $\overline{U} \subset \overline{W} \subset V$, de donde $U \subset \overline{U} \subset \overline{W} \subset V$. Esto termina la prueba. ■

Ahora vamos a dar una serie de resultados que dicen que la convergencia en $F_2(X)$ es muy semejante a la convergencia de X.

Comenzamos con un resultado que nos da una caracterización útil para la convergencia en $F_2(X)$. A partir de él sabremos cómo son las distancias en la métrica de Hausdorff para $F_2(X)$.

Proposición 4.12 *Sea X un continuo . Sean A y B en $C(X)$. Entonces*

$$H(A, B) = máx\{máx\{d(a, B) : a \in A\}, máx\{d(b, A) : b \in B\}\}$$

Demostración. La idea de toda la prueba será mostrar que la condición $B \subset N(\varepsilon, A)$ equivale a decir que máx $\{d(b, A) : b \in B\} < \varepsilon$.

Recordemos que $H(A, B) = \text{ínf } J$, donde $J = \{\varepsilon > 0 : B \subset N(\varepsilon, A)$ y $A \subset N(\varepsilon, B)\}$. Sea M =máx$\{$máx$\{d(a, B) : a \in A\}$,máx$\{d(b, A) : b \in B\}\}$. Dividimos la prueba en dos partes:

(1) M es cota inferior de J.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B \subset N(\varepsilon, A)$ y $A \subset N(\varepsilon, B)$.

Primero probaremos que máx$\{d(b, A) : b \in B\} < \varepsilon$.

Sea $b_0 \in B$ tal que $d(b_0, A)$ =máx$\{d(b, A) : b \in B\}$. Como $B \subset N(\varepsilon, A)$, para b_0 existe $a_0 \in A$ tal que $d(b_0, a_0) < \varepsilon$. Como $d\,(b_0, A) \leq d(b_0, a_0)$, tenemos que

$$\text{máx}\{d(b, A) : b \in B\} = d\,(b_0, A) \leq d(b_0, a_0) < \varepsilon$$

Para probar que $\text{máx}\{d(a,B) : a \in A\} < \varepsilon$ se hace lo mismo, simplemente se intercambian los papeles de A y de B. Así que M =máx{máx{$d(a,B)$: $a \in A\}$,máx$\{d(b, A : b \in B\}\} < \varepsilon$.

(2) M es la máxima de las cotas inferiores de J.

Para probar lo anterior mostraremos que si un número r cumple que $r > M$, entonces $B \subset N(r,A)$ y $A \subset N(r,B)$, por lo que si M' fuera una cota inferior de J mayor que M, entonces $\frac{M+M'}{2}$ sería un elemento de J y sería más pequeño que M', lo cual no es posible.

Así, sea $r > M$. Primero probaremos que $B \subset N(r,A)$. Tomemos $b \in B$, y sea $a_0 \in A$ tal que $d(b,a_0) = d(b,A)$. Como $d(b,a_0) \leq$máx$\{d(c,A) : c \in B\} \leq M < r$, tenemos que $B \subset N(r,A)$.

Para probar que $A \subset N(r,B)$, simplemente hay que intercambiar los papeles de A y de B. Esto termina la prueba de la equivalencia de las dos definiciones. ■

Del resultado anterior podemos derivar cómo es la distancia en $F_2(X)$, la cual nos va a ser muy útil para nociones de convergencia y nos dirá en qué tipo de cosas $F_2(X)$ es muy parecido a X.

Corolario 4.13 *Sean X un continuo, $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b_1, b_2\}$ dos elementos de $F_2(X)$. Entonces*

$$H(\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2\}) = \text{máx}\{d(a_1,B), d(a_2,B), d(b_1,A), d(b_2,A)\}$$

Básicamente una sucesión converge en $F_2(X)$, si es la “unión” de dos sucesiones convergentes en X.

Proposición 4.14 *Sea X un continuo. Entonces una sucesión $\{c_n, d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $F_2(X)$ converge a un punto $\{a,b\}$ de $F_2(X)$ si y sólo si existen dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen a a y a b, respectivamente, y tales que $\{a_n, b_n\} = \{c_n, d_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

($\Rightarrow$)

(1) Si $a = b$

Tomemos $a_n = c_n$ y $b_n = d_n$. Como $\{c_n, d_n\} \to \{a\}$, entonces dada $\varepsilon > 0$, existe un número N tal que $H(\{c_n,d_n\},\{a,b\}) < \varepsilon$, para toda $n > N$. Por 4.13, $H(\{c_n,d_n\},\{a,b\})$ =máx$\{d(c_n,a), d(d_n,a)\} < \varepsilon$, por lo que $d(c_n,a) < \varepsilon$ y $d(d_n,a) < \varepsilon$. Por tanto $a_n \to a$ y $b_n \to b$.

(2) Si $a \neq b$

Sea r tal que $B(r,a) \cap B(r,b) = \emptyset$. Como la sucesión $\{c_n, d_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge a $\{a,b\}$, existe un número $M \in \mathbf{N}$ tal que, para toda $n \geq M$,

$$H(\{c_n, d_n\}, \{a,b\}) < r.$$

Observemos que, por 4.13,

$$H(\{c_n, d_n\}, \{a,b\}) =$$

$$\text{máx}\{d(a, \{c_n, d_n\}), d(b, \{c_n, d_n\}), d(c_n, \{a,b\}), d(d_n, \{a,b\})\}$$

Primero veremos que sólo hay un elemento del par $\{c_n, d_n\}$ que está en $B(r,a)$.

Tenemos, para toda $n > M$, que la distancia $d(a, \{c_n, d_n\}) < r$, de donde $d(a, c_n) < r$ o $d(a, d_n) < r$. Como veremos, estas dos opciones son excluyentes. Para ver esto, supongamos que $d(a, c_n) < r$ y que $d(a, d_n) < r$. De la definición de Bola tenemos que $\{c_n, d_n\} \subset B(r,a)$. De la elección de r tenemos que $d(b, c_n) > r$ y $d(b, d_n) > r$, por lo que $d(b, \{c_n, d_n\}) > r$, lo que implica que $H(\{c_n, d_n\}, \{a,b\}) > r$, contradiciendo la elección de M. De este modo sólo hay un elemento de $\{c_n, d_n\}$ que está en $B(r,a)$. Análogamente, sólo hay en elemento de $\{c_n, d_n\}$ que está en $B(r,b)$.

Por lo anterior, definamos

$$a_n = \begin{cases} c_n & \text{si } n \in \{1, 2, ..., M\} \\ \text{el elemento de } \{c_n, d_n\} \text{ que está en } B(r,a) & \text{si } n > M \end{cases}$$

De manera análoga, definamos

$$b_n = \begin{cases} d_n & \text{si } n \in \{1, 2, ..., M\} \\ \text{el elemento de } \{c_n, d_n\} \text{ que está en } B(r,b) & \text{si } n > M \end{cases}$$

Ahora veamos que $a_n \to a$ y que $b_n \to b$.

Notemos que $\{c_n, d_n\} = \{a_n, b_n\}$ para toda $n \in \mathbf{N}$, por lo que

$$H(\{a_n, b_n\}, \{a,b\}) = H(\{c_n, d_n\}, \{a,b\})$$

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\varepsilon' = \text{mín}\{\varepsilon, r\}$. Por la convergencia de $\{c_n, d_n\} = \{a_n, b_n\}$, podemos tomar un número N' tal que si $n > N'$, entonces

$$H(\{a_n, b_n\}, \{a,b\}) < \varepsilon'$$

Tomemos $N = \text{máx}\{M, N'\}$

Sea $n > N$. Tenemos entonces que $H(\{a_n,b_n\}, \{a,b\}) < \varepsilon'$, por lo que

$$\text{máx}\{d(a, \{a_n, b_n\}), d(b, \{a_n, b_n\}), d(a_n, \{a, b\}), d(b_n, \{a, b\})\} < \varepsilon'.$$

Como $d(a, b_n) > \varepsilon'$ (ya que b_n no está en la bola $B(\varepsilon', a) \subset B(r, a)$ por definición) debemos tener que $d(a, a_n) = d(a, \{a_n, b_n\}) < \varepsilon$. Análogamente para b_n. De este modo tenemos que $a_n \to a$ y que $b_n \to b$.

($\Leftarrow$) Supongamos que las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a a y a b, respectivamente. Tenemos que probar que $\{a_n, b_n\} \to \{a, b\}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos L y M tales que $d(a_n, a) < \varepsilon$ y $d(b_n, b) < \varepsilon$ para n mayor que L y M, respectivamente. Sea $N = \text{máx}\{L, M\}$. Entonces, si $n > N$, tenemos que

$$\text{máx}\{d(a, \{a_n, b_n\}), d(b, \{a_n, b_n\}), d(a_n, \{a, b\}), d(b_n, \{a, b\})\}$$

$$\leq \text{máx}\{d(a, a_n), d(b, b_n), d(a_n, a), d(b_n, b)\} < \max\{\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon\} = \varepsilon$$

Esto termina la prueba de la equivalencia de las nociones de convergencia en $F_2(X)$. ■

La anterior caracterización nos da el siguiente corolario

Corolario 4.15 *Sea X un continuo. Entonces la función $f : X \times X \to F_2(X)$ dada por $f(x, y) = \{x, y\}$ es una función continua y sobre, por lo tanto $F_2(X)$ es un continuo.*

En general, la intersección de dos continuos no es un continuo, como se puede observar en la circunferencia. Sin embargo, hay un caso en que la intersección de continuos es un continuo: cuando tenemos una sucesión anidada y decreciente (ver 1.9). Relacionado con las intersecciones existe un resultado muy interesante de intersección que no involucra sucesiones en el caso en que el espacio sea hereditariamente unicoherente, esto es, que no contenga "círculos". La demostración de este teorema, cuyo enunciado está en 4.23 se puede encontrar en [6, p. 31]

Definición 4.16 *Un continuo X se dice que es* unicoherente *si para cualquier par de continuos A y B de X tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición 4.17 *Un continuo se dice que es* hereditariamente unicoherente *si todo subcontinuo de él es unicoherente (i.e. si la interseccion de cualquier par de subcontinuos que se intersecten es un subcontinuo)*

Una manera de parafrasear la unicoherencia hereditaria es que la intersección de cualesquier par de subcontinuos es conexa. Un ejemplo de un continuo que es hereditariamente unicoherente es el continuo dado por la cerradura de la gráfica de la curva sen$(\frac{1}{x})$. Sin embargo, dicho continuo no es conexo por trayectorias. La clase de los que son conexos por trayectorias recibe un nombre especial.

Definición 4.18 *Un continuo se dice que es un* dendroide, *si es hereditariamente unicoherente y es conexo por trayectorias.*

También será importante la idea de que "sólo haya un camino entre dos puntos".

Definición 4.19 *Un continuo X se dice que es* irreducible *con respecto a un subconjunto A de X si X no contiene subcontinuos propios que contengan a A.*

Con respecto a esta definición es claro que, dado un subconjunto $\{a, b\}$ de la circunferencia, existen dos continuos C y D que son irreducibles con respecto a $\{a, b\}$: los dos arcos que unen a a con b. Así que debemos pedirle a nuestros espacios que no tengan "círculos", para que quede un único irreducible.

Definición 4.20 *Dado un subconjunto no vacío A de un continuo hereditariamente unicoherente X, entonces el conjunto*

$$I(A) = \bigcap\{B \in C(X) : A \subset B\}$$

Teorema 4.21 *está bien definido y es un continuo.*

Demostración.

Definición 4.22 *Al conjunto $I(A)$ se le conoce como* el irreducible de A. *Si a y b son dos puntos en X, denotaremos indistintamente a $I(\{a, b\})$ por $I(a, b)$ y por $[a, b]$.*

Es claro que $I(A)$ es un subconjunto cerrado de X y que si un continuo B cumple que $A \subset B$, entonces $I(A) \subset B$. En el caso de que X sea un continuo hereditariamente unicoherente se tiene que $I(A)$ es un continuo, como muestra la siguiente proposición, cuya prueba se encuentra en [6, p. 31].

Proposición 4.23 *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente y sea A un subconjunto no vacío de X. Entonces $I(A)$ es un subcontinuo de X el cual es irreducible con respecto a A.*

En [6, p. 35] también se encuentra la siguiente proposición no trivial y muy útil para el estudio de los dendroides.

Proposición 4.24 *Sea X un dendroide, y sea ab un arco en X, entonces existe un arco cd maximal con respecto a la contención y tal que $ab \subset cd$.*

De hecho, si le pedimos a X que sea un dendroide (i.e., que además sea conexo por trayectorias), obtendremos más adelante que el irreducible de un par de puntos tendrá que ser un arco, pues tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.25 *Los subcontinuos de un dendroide son dendroides.*

Demostración. Sean X un dendroide y $A \in C(X)$. Claramente A es hereditariamente unicoherente. Basta, entonces, con probar que es conexo por trayectorias.

Sean a y b dos puntos en A. Por la conexidad por trayectorias de X, existe un arco α con extremos a y b. Por la unicoherencia hereditaria $\alpha \cap A \subset \alpha$ es conexo y tenemos que a y $b \in \alpha \cap A$, por lo que $\alpha \cap A$ es un subarco de α que contiene a a y a b. Esto implica que $\alpha \cap A = \alpha \subset A$. Esto termina de probar la conexidad por trayectorias de A. ■

Como una consecuencia de este último teorema tenemos que el irreducible de un par de puntos debe de ser un arco; usaremos las nociones de punto de corte y de punto extremo que dimos en el primer capítulo.

Corolario 4.26 *Si X es un dendroide y $a \neq b$ son elementos de X, entonces $I(\{a, b\})$ es el único arco de X con puntos extremos a y b. Por lo anterior, a $I(\{a, b\})$ lo denotaremos por ab.*

Demostración. Así, por 4.25, para cada par de puntos a y b en X tenemos que $I(\{a,b\})$ es un continuo conexo por trayectorias. Tomemos un arco α que conecte a a con b. Por la minimalidad de $I(\{a,b\})$ tenemos que $I(\{a,b\}) \subset \alpha$. Ahora, por 4.23, $I(\{a,b\})$ es arco conexo; por lo que existe un arco $\beta \subset I(\{a,b\}) \subset \alpha$ que tiene a a y b como puntos extremos. Es claro que entonces $\beta = \alpha$, por lo que $\beta = I(\{a,b\}) = \alpha$ ■

La condición de que X sea conexo por trayectorias es necesaria como se puede observar en el ejemplo de la curva sen$(\frac{1}{x})$, pues si escogemos los puntos (1,sen(1)) y $(0,1)$ el conjunto irreducible de este conjunto de dos puntos es todo el continuo, el cual se sabe que no es un arco.

El siguiente sencillo resultado tendrá algunas aplicaciones en lo que sigue.

Lema 4.27 *Sea X un dendroide y sean a, b y c puntos en X. Si $ab \cap bc = \{b\}$, entonces $ab \cup bc = ac$.*

Demostración. Si $a = b$ o $b = c$, el teorema es evidente. Supongamos , pues, que $a \neq b \neq c$. Tomemos dos homeomorfismos $f : [0,1] \to ab$ y $g : [1,2] \to bc$, con $f(0) = a$, $f(1) = b$, $g(1) = b$ y $g(2) = c$. Definamos a la función $h : [0,2] \to ab \cup bc$ como

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0,1] \\ g(t) & \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$$

(1) h es inyectiva.

Tomemos t_1 y t_2 en $[0,2]$ y supongamos que $h(t_1) = h(t_2)$. Por la inyectividad de f y de g podemos suponer que $t_1 \in [0,1]$ y que $t_2 \in [1,2]$, por lo que tenemos que $f(t_1) = g(t_2)$, de donde $f(t_1) = g(t_2) \in ab \cap bc = \{b\}$. Por la inyectividad de f y de g, tenemos que $t_1 = t_2 = 1$.

(2) h es suprayectiva.

Esto se sigue de la suprayectividad de f y de g.

(3) h es continua.

Es continua pues es una función definida en dos pedazos, en cada pedazo es continua y las definiciones coinciden en el cerrado $\{1\}$ (Véase [1, p. 83]).

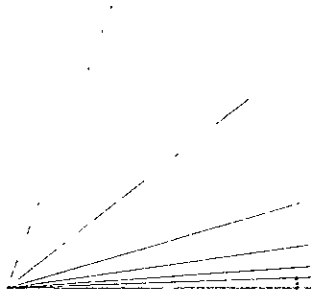
Lo anterior prueba que $ab \cup bc$ es un arco y, como X es un dendroide, tenemos por la unicidad de los arcos (4.26), que $ab \cup bc = ac$. ■

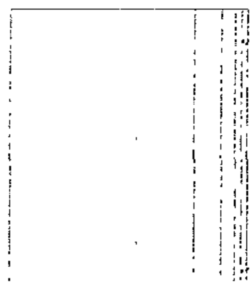
Daremos ahora una serie de propiedades que cumplirán lo dendroides.

Dentro de la clase de los dendroides, juega un papel muy importante los que son localmente conexos. Dichos continuos tienen propiedades adicionales

Definición 4.28 *Una* dendrita *es un dendroide localmente conexo.*

Entre los ejemplos de dendritas tenemos a todas las gráficas finitas. Los ejemplos más sencillos de dendroides que no son dendritas son la escoba armónica y el peine, ilustrados en la siguiente figura.





Como veremos a continuación, tuvimos éxito en caracterizar a las dendritas dentro de los dendroides comparando su hiperespacio de arcos con su hiperespacio de pares de puntos.

En este momento conviene recordar un resultado sencillo de topología general que afirma que toda biyección continua de un compacto a un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo (ver 1.2).

Teorema 4.29 *Sea X un dendroide. Entonces X es localmente conexo (i.e., una dendrita) si y sólo si existe un homeomorfismo $h : F_2(X) \to A_s(X)$ con la propiedad de que $A \subset h(A)$ para toda $A \in F_2(X)$.*

Demostración.

$(\Rightarrow)$

Supongamos que X es localmente conexo. Vamos a dar un homeomorfismo explícito entre $F_2(X)$ y $A_s(X)$.

Sea $h : F_2(X) \to A_s(X)$ dada por $h(\{a,b\}) = ab$, donde ab denota al único arco de X que tiene a a y a b como extremos, cuando $a \neq b$; y $ab = \{a\}$, cuando $a = b$. Dicha asignación se justifica por el Corolario 4.26.

(1) h es inyectiva.

Supongamos que $h(\{a,b\}) = h(\{c,d\})$.

Si $a = b$, entonces $\{a\} = h(\{a\}) = h(\{c,d\})$, por lo tanto $\{c,d\} \subset \{a\}$, por lo que $c = d = a$. En el caso en que $c = d$, obtenemos de manera análoga que $c = d = a$.

Por el párrafo anterior, podemos suponer que $a \neq b$ y que $c \neq d$.

Como un arco sólo tiene dos puntos extremos, los extremos de ab son a y b; mientras que los extremos de cd son c y d. Si tenemos que $ab = cd$, concluimos que $\{a,b\} = \{c,d\}$. Por lo tanto h es inyectiva.

(2) h es sobre.

Sea A un arco y sean a y b sus puntos extremos. Por definición $h(\{a,b\})$ es el único arco que tiene por extremos a a y a b, de manera que $h(\{a,b\}) = A$.

En el caso que tomemos un conjunto $\{a\} \in A_s(X)$, por definición $h(\{a\}) = \{a\}$. Esto termina la prueba de (2).

(3) ahora probaremos que h es continua.

Sea $\{\{a_n, b_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $F_2(X)$ que converja a un punto $\{a,b\}$ en $F_2(X)$. Podemos suponer, por el Lema 4.14 que $a_n \to a$ y que $b_n \to b$. Tenemos que probar que $h(\{a_n, b_n\}) \to h(\{a,b\})$. Para probarlo basta probar, por 1.3, que toda subsucesión convergente de $h(\{a_n, b_n\})$ converge a $h(\{a,b\})$. Podemos considerar, pasando a una subsucesión si fuera necesario que $\{h(\{a_n, b_n\})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a un continuo $Y \in C(X)$.

Probaremos que $Y = h(\{a,b\})$ en dos partes.

(a) $h(\{a,b\}) \subset Y$

Por definición tenemos que $\{a_n, b_n\} \subset h(\{a_n, b_n\})$, por lo que (Lema 1.24) $\{a,b\} \subset Y$. Ahora, $h(\{a,b\})$ es, por definición, el continuo más pequeño con la propiedad de contener a $\{a,b\}$, por lo que $h(\{a,b\}) \subset Y$.

Hasta ahora no hemos usado que X es localmente conexo. Dicha propiedad nos dará lo que falta para probar la continuidad de h.

(b) $Y \subset h(\{a,b\})$

Sea $k \in \mathbb{N}$. Consideremos las vecindades respectivas $B(\frac{1}{k}, a)$ y $B(\frac{1}{k}, b)$ de a y b. Por el Lema 4.11, podemos encontrar vecindades cerradas y conexas A_k y B_k de a y de b, respectivamente, tales que $A_k \subset B(\frac{1}{k}, a) \subset N(\frac{1}{k}, h\{a,b\})$ y $B_k \subset B(\frac{1}{k}, b) \subset N(\frac{1}{k}, h\{a,b\})$. Tenemos, entonces, que $A_k \cup h(\{a,b\}) \cup B_k \subset N(\frac{1}{k}, h\{a,b\})$. Como $a_n \to a$ y $b_n \to b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in A_k$ y $b_n \in B_k$ para toda $n \geq N$. Ya que $A_k \cup ab \cup B_k$ es un continuo que tiene a $\{a_n, b_n\}$, entonces (por la minimalidad de a_nb_n) tenemos que $a_nb_n \subset \overline{A_k \cup ab \cup B_k}$ para toda $n \geq N$. Por 1.24, $Y \subset \overline{A_k \cup ab \cup B_k} \subset N(\frac{1}{k}, ab) \subset \overline{N(\frac{1}{k}, ab)}$.

Ahora, por 1.25, tenemos que $\overline{N(\frac{1}{k}, ab)} \to ab$, así que $Y \subset ab$.

Esto termina de probar (b), por lo que la prueba de (3) está completa.

Recordemos que, por 4.15, $F_2(X)$ es un compacto y ya sabemos que $A_s(X)$ es un espacio de Hausdorff . Por (1), (2), (3) y 1.2 tenemos que la función h es una función biyectiva y continua, así que h es un homeomorfismo.

$(\Leftarrow)$

Supongamos, por el contrario, que X es un dendroide no localmente conexo y que hay un homeomorfismo $h : F_2(X) \to A_s(X)$ tal que $h(A) \subset A$, para todo A en $F_2(X)$. Notemos que un singleton $\{a\}$ puede ser considerado ya sea como un elemento de $A_s(X)$ o como un elemento de $F_2(X)$, por lo que se le puede aplicar tanto h como h^{-1}.

Primero probaremos que $h(\{a\}) = \{a\}$ para toda a en X. Para ello, probaremos que $h^{-1}(\{a\}) = \{a\}$, para toda $\{a\} \in A_s(X)$. Como $\{a\} \in A_s(X)$, existe un par $\{c, d\} \in F_2(X)$ tal que $h(\{c, d\}) = \{a\}$; pero entonces $\{c, d\} \subset h(\{c, d\}) = \{a\}$, por lo que $c = d = a$. Por tanto $h^{-1}(\{a\}) = \{a\}$, para cualquier $\{a\}$. Así que si $a \in X$, tenemos que $\{a\} = h(h^{-1}(\{a\})) = h(\{a\})$. Lo anterior nos dice que el homeomorfismo no mueve a los singletones..

Como X no es localmente conexo, entonces, por 4.9 existe una sucesión de continuos no degenerados $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, un continuo A_0 no degenerado y una vecindad cerrada V de un punto a de X tales que:

(0) $a \in A_0 \cap int(V)$

(1) A_n no es degenerado para ningún número $n \in \mathbf{N}$

(2) $A_n \to A_0$

(3) Si $n \neq m$, entonces $A_n \cap A_m = \emptyset$, para toda $n, m \in \mathbf{N}$

(4) Si $n \neq m$, entonces A_n y A_m no se pueden conectar por continuos dentro de V.

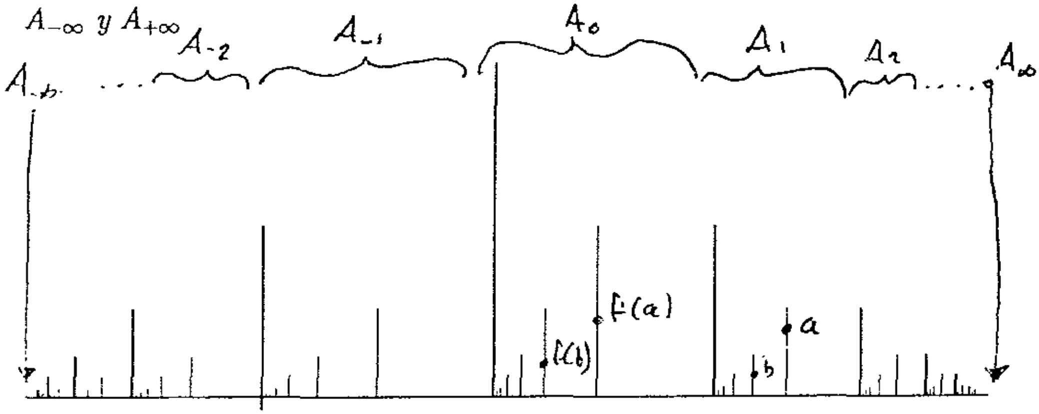
Como $a \in A_0$, y $A_n \to A_0$, existe una sucesión convergente $a_n \to a$ tal que $a_n \in A_n$, para toda n (pues $a \in$ lím $\inf(A_n)$). Como $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{a_n, a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, tenemos por 4.14 que $\{a_n, a_n\} \to \{a\}$ en $F_2(X)$. De lo anterior tenemos que $h(\{a_n\}) \to h(\{a\}) = \{a\}$. Ahora, considerando la sucesión $\{a_n, a_{n+1}\}_{n\in\mathbf{N}} \in F_2(X)$, vemos por 4.14 que $\{a_n, a_{n+1}\} \to \{a\}$, por lo que $h(\{a_n, a_{n+1}\}) \to \{a\}$. Pero, por otro lado, $h(\{a_n, a_{n+1}\}) \cup A_n \cup A_{n+1}$ es un conexo, y $h(\{a_n, a_{n+1}\})$ es un continuo, por lo que, por 4.10, $h(\{a_n, a_{n+1}\}) \cap fr(X - V) \neq \emptyset$. Ahora, de 1.29 se sigue que $\emptyset \neq (\text{ lím } h(\{a_n, a_{n+1}\})) \cap fr(X - V) = h(\{a\}) \cap fr(X - V) = \{a\} \cap fr(X - V)$, por lo que $a \in fr(X - V) =$

$fr(V)$; pero de (0) tenemos que $a \in int(V)$. ¡Contradicción! Por lo tanto X es localmente conexo y, entonces, es una dendrita. ■

Ejemplo 4.30 *Hay dendroides X y homeomorfismos $h : F_2(X) \to A_s(X)$ que no satisfacen que $A \subset h(A)$ para toda $A \in F_2(X)$.*

El ejemplo más sencillo es el intervalo $[0,1]$; para ver esto, tomemos el homeomorfismo $g : [0,1] \to [0,1]$ dado por $g(t) = t^2$. Tomemos $f : F_2(X) \to A_s(X)$ dado por $f(\{a,b\}) = [g(a), g(b)]$ (donde $a \leq b$). Entonces $\frac{1}{2} \notin \{\frac{1}{4}\} = f(\{\frac{1}{2}\})$.

Ejemplo 4.31 *Otro ejemplo es el ilustrado en la siguiente figura. Para construirlo, se construye primero el continuo A_0, formado por un segmento vertical, por varios segmentos verticales que se le aproximan, así como por un segmento horizontal que los une. Despues se ponen copias de A_0, denotadas como A_i (para cada número entero i), convergiendo a dos puntos llamados $A_{-\infty}$ y $A_{+\infty}$*



Notemos que existe un homeomorfismo $f : F_2(X) \to F_2(X)$ que consiste en "mover a la izquierda" los puntos; esto es, si $a \in A_n$ y $b \in A_m$ (y n y m son las más pequeñas con esa propiedad.)entonces $f(\{a,b\})$ es el par formado por la copia de a en A_{n-1} y la copia de b en B_{m-1}. Si $a \in A_{-\infty}$ o $a \in A_\infty$, entonces la copia de a la consideraremos como a misma; similarmente con b. Como X es una dendrita, el homeomorfismo g que a cada par asocia el arco que los tiene por extremos es un homeomorfismo con la propiedad de que $A \subset g(A)$. Es claro que $g \circ f$ es un homeomorfismo entre $F_2(X)$ y $A_s(X)$ que no tiene la propiedad deseada. (Este ejemplo se basa en el ejemplo dado por Lum en [5, p. 116]).

Capítulo 5

Conexidad Local y Ejemplos.

En este capítulo analizaremos algunos ejemplos que nos permitirán conocer algunas diferencias que existen entre $F_2(X)$ y $A_s(X)$ para dendroides X que no sean localmente conexos. A lo largo de este capítulo denotaremos por

$$\mathcal{L}(X) = \{x \in X : X \text{es localmente conexo en } x\}.$$

Necesitaremos un lema técnico que nos dirá que si un continuo está entre dos continuos cercanos a un tercero, entonces este último está cercano a cualquiera contenido en los dos primeros.

Lema 5.1 *Sean A, B, C y D subcontinuos de un continuo X. Si $A \subset B \subset C$ y $H(A, D) < \varepsilon$ y $H(C, D) < \varepsilon$, entonces $H(B, D) < \varepsilon$.*

Demostración. (1) $D \subset N(\varepsilon, B)$

Tenemos que $D \subset N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, B)$, pues $H(A, D) < \varepsilon$ y $A \subset B$.

(2) $B \subset N(\varepsilon, D)$

Tenemos que $B \subset C \subset N(\varepsilon, D)$, pues $H(C, D) < \varepsilon$ y $B \subset C$. ■

Lema 5.2 *Sea X un continuo y sea U un abierto en X. Entonces el conjunto cuyos elementos son los cerrados no vacíos que intersectan a U es un abierto en 2^X.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}$.

Tomemos $a \in A \cap U$. Como U es abierto, existe un número $r > 0$ tal que $B(r, a) \subset U$. Afirmamos que $B^H(r, A) \subset \mathcal{U}$. En efecto, si un continuo B es tal que $H(B, A) < r$, entonces $A \subset N(r, B)$ (por 1.15), por lo que existe un punto $b \in B$ tal que $d(b, a) < r$, de modo que $b \in B(r, a) \subset U$. Esto último prueba que $B \cap U \neq \emptyset$. ■

Lema 5.3 *Sea X un continuo y sea $f : X \times X \to F_2(X)$ la función dada por $f(x, y) = \{x, y\}$. Entonces f es continua, suprayectiva, abierta y cerrada.*

Demostración. La continuidad de f está dada por 4.15 y es claro que f es suprayectiva; .

Para ver que f es abierta tomemos un abierto básico $U \times V$ de $X \times X$, entonces $f(U \times V) = \{\{x, y\} : x \in U$ y $y \in V\} = \{A \in F_2(X) : A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset\}$, el cual es un abierto por 5.2 y1.27; de este modo, f es abierta. Como $X \times X$ es un compacto, tenemos que f es cerrada. ■

Teorema 5.4 *Sea X un continuo y sean a y b dos puntos en X. Entonces $\{a, b\} \in \mathcal{L}(F_2(X))$ si y sólo si $\{a, b\} \subset \mathcal{L}(X)$.*

Demostración. Sea $f : X \times X \to F_2(X)$ la función dada por $f(x, y) = \{x, y\}$. De 5.3 tenemos que f es continua, suprayectiva, abierta y cerrada. Denotemos por π_1 y π_2 a las proyecciones de $X \times X$ a X.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\{a, b\} \in \mathcal{L}(F_2(X))$

(1) Caso en que $a = b$.

Sea U una vecindad abierta de a. Tomemos $\mathcal{U} = \{A \in F_2(X) : A \subset U\}$, el cual es un abierto en $F_2(X)$. Por hipótesis, existe una vecindad abierta y conexa $\mathcal{V}$ de $\{a\}$ tal que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Sea $V = \{x \in X :$ existe $y \in X$ tal que $\{x, y\} \in \mathcal{V}\}$, el cual es un abierto, puesto que $V = \pi_1(f^{-1}(\mathcal{V}))$. Notemos que si un punto $\{x, y\}$ en $F_2(X)$ está en $\mathcal{V}$, entonces $\{x, y\} \subset V$. Para ver esto, observemos que $x \in V$, pues y es tal que $\{x, y\} \in \mathcal{V}$; similarmente $y \in V$, pues x es tal que $\{y, x\} \in \mathcal{V}$.

Enseguida probaremos que V es conexo.

Supongamos que esto no ocurre, entonces existen dos abiertos ajenos y no vacíos H y K tales que $V = H \cup K$.

Como $\{a\} \in V$, tenemos que $a \in V$. Así que podemos suponer que $a \in H$.

Daremos una separación de $\mathcal{V}$. Para ello, definamos $\mathcal{H} = \{A \in F_2(X) : A \subset H\}$, $\mathcal{K} = \{A \in F_2(X) : A \subset K\}$ y $\mathcal{M} = \{A \in F_2(X) : A \cap H \neq \emptyset$ y $A \cap K \neq \emptyset\}$ y notemos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K} \cup \mathcal{M}$ son conjuntos abiertos ajenos y que $\mathcal{H} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Afirmamos que $(\mathcal{K} \cup \mathcal{M}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Para ver esto, notemos que como $K \neq \emptyset$, existe un elemento $k \in K$ tal que $\{k, k'\} \in \mathcal{V}$, por lo que $k' \in H$ o $k' \in K$. De modo que $\{k, k'\} \in \mathcal{K}$ o $\{k, k'\} \in \mathcal{M}$.

Para probar que $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \cup (\mathcal{K} \cup \mathcal{M})$, tomemos $A \in \mathcal{V}$. Entonces, por la observación hecha a la definición de V tenemos que $A \subset V = H|K$. Es claro ahora que $A \in \mathcal{H} \cup (\mathcal{K} \cup \mathcal{M})$, pues A tiene a lo más dos elementos. Esto termina el caso en que $a = b$.

(2) Caso en que $a \neq b$.

Sean U_1 y U_2 dos vecindades abiertas de a y b, respectivamente, tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Sea $\mathcal{U} = \{A \in F_2(X) : A \subset U_1 \cup U_2,\ A \cap U_1 \neq \emptyset \text{ y } A \cap U_2 \neq \emptyset\}$. Notemos que $\{a, b\} \in \mathcal{U}$ y que, por 1.27 y 5.2, $\mathcal{U}$ es un abierto en $F_2(X)$. Ahora, por hipótesis, existe una vecindad abierta conexa $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ con $\{a, b\} \in \mathcal{V}$.

Sea $V = \{x \in X : x \in U_1 \text{ y existe } y \in X \text{ tal que } \{x, y\} \in \mathcal{V}\}$. Notemos que $V = \pi_1(f^{-1}(\mathcal{V})) \cap U_1$, de manera que V es un abierto.

Probaremos enseguida que V es conexo. Supongamos, por el contrario, que existe una separación de V en dos conjuntos abiertos y no vacíos H y K de X; es decir, $V = H|K$. Observemos que $H \cap U_2 = \emptyset$ y que $K \cap U_2 = \emptyset$.

Daremos una separación de $\mathcal{V}$. Para ello, tomemos los conjuntos $\mathcal{H} = \{A \in F_2(X) : A \in \mathcal{V} \text{ y } A \cap H \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{K} = \{A \in F_2(X) : A \in \mathcal{V} \text{ y } A \cap K \neq \emptyset\}$. Notemos que los conjuntos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son ajenos, pues si un conjunto A cumple que $A \cap H$ y $A \cap K$ son no vacíos, entonces A tendría al menos tres puntos (pues $A \cap U_2 \neq \emptyset$), lo cual no es posible.

Como $H \neq \emptyset$, existe un punto $x \in H$. Por definición de V, existe un elemento y tal que $\{x, y\} \in \mathcal{V}$; entonces $\{x, y\} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{V}$. De este modo tenemos que $\mathcal{H} \cap \mathcal{V}$ es no vacío; que $\mathcal{K} \cap \mathcal{V}$ es no vacío se prueba análogamente.

Para probar que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ inducen una separación, resta probar que $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. Así que tomemos un conjunto A en $\mathcal{V}$. Si $A \cap H = \emptyset$ y $A \cap K = \emptyset$, entonces $A \cap V = \emptyset$, así que $A \cap U_1 = \emptyset$. Y, como $A \subset U_1 \cup U_2$, obtenemos que $A \subset U_2$. Esto es una contradicción puesto que $A \in \mathcal{U}$. De este modo $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$, lo que prueba que $\mathcal{V}$ no es conexo, lo cual no es posible por la elección de $\mathcal{V}$. Esta contradicción termina el caso en que $a \neq b$, con lo que la primera parte del teorema queda probada.

$\Leftarrow$) Tomemos la función $f : X \times X \to F_2(X)$ como en 5.3. Supongamos que a y b son puntos en $\mathcal{L}(X)$ y sea $\mathcal{U}$ una vecindad de $\{a, b\}$. Como $f^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto en $X \times X$, podemos encontrar un abierto $U_1 \times U_2$ de tal modo que $a \in U_1$, $b \in U_2$ y $U_1 \times U_2 \subset f^{-1}(\mathcal{U})$. Por la conexidad local, existen abiertos conexos V_1 y V_2 tales que $(a, b) \in V_1 \times V_2 \subset U_1 \times U_2$. Como f es continua y abierta $f(V_1 \times V_2)$ es un abierto conexo tal que $\{a, b\} \in f(V_1 \times V_2) \subset f(U_1 \times U_2) \subset f(f^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$; esta última desigualdad se sigue de que f es suprayectiva. ■

El siguiente resultado será muy útil, pues dice básicamente que, en un dendroide, para entrar desde un punto a un subcontinuo hay que hacerlo a través de un punto único de entrada ("hay que pasar por la puerta de entrada")

Teorema 5.5 *Sean X un dendroide, $p \in X$ y $A \in C(X)$. Entonces existe un único punto $z \in A$ con la propiedad de que para cualquier punto $a \in A$, tenemos que $pa = pz \cup za$. Además, z tiene la propiedad de que $pz \cap A = \{z\}$*

Demostración. Supongamos que $p \in A$. En este caso hacemos $z = p$. Entonces, para todo $a \in A$, $pa = pp \cup pa = pz \cup za$. Por otra parte, si existe un $w \in A$ tal que $pa = pw \cup wa$ para toda $a \in A$, entonces en particular $\{p\} = pp = pw \cup wp$. De modo que $w \in \{p\}$ y $w = p$. Así que z es único para este caso.

Supongamos que $p \notin A$. Elegimos un punto $q \in A$ y un homeomorfismo $f : [0,1] \to pq$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$. Sea t_0 =mín $f^{-1}(A \cap pq)$ y hagamos $z = f(t_0)$. Veremos que z tiene las propiedades deseadas.

Sea $a \in A$. Debemos probar que $z \in pa$. Por 4.25, los subcontinuos de dendroides son dendroides, tomemos el arco $za \subset A$. Notemos que $za \cap pz = \{z\}$, pues de lo contrario existe un número $t < t_0$ tal que $f(t) \in za \cap pz \subset A$, lo cual contradice la elección de z. Por lo tanto $za \cup pz$ es un arco (4.27) y, por la unicidad de los arcos (4.26), tenemos que $za \cup pz = pa$.

Para probar la unicidad de z, supongamos que existe $w \in A$ tal que $pq = pw \cup wa$ para toda $a \in A$. En particular, $pz = pw \cup wa$. Esto muestra que $w \in pz \cap A$ y como el único punto de pz que pertenece a A es z, obtenemos que $w = z$.

Para ver que $pz \cap A = \{z\}$, notemos que $z \in pz \cap A$ y que si $x \in pz \cap A$, entonces $px = pz \cap zx$, de manera que $z \in px$ y $x \in pz$. Esto implica que $x = z$. Por tanto $pz \cap A = \{z\}$. ■

El teorema anterior justifica la siguiente

Definición 5.6 *Sean X, p, A y z como en el teorema anterior. Al punto z se le denomina* el punto de entrada de p hacia A.

Otro nombre para z es "el cero de A con respecto a p" . Este último nombre es con relación al orden débil $\leq_p$ que se presentará en el Capítulo 6.

Teorema 5.7 *Sea X un dendroide y sea a en $\mathcal{L}(X)$. Entonces $aa \in \mathcal{L}(A_s(X))$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la bola $B^H(\varepsilon, aa)$. Como X es localmente conexo en a, existe una vecindad abierta y conexa U de a tal que $U \subset B(\varepsilon, a) \subset X$. Sea $\mathcal{U} = \{A \in A_s(X) : A \subset U\}$. Por 1.27, $\mathcal{U}$ es un abierto en $A_s(X)$.

Probaremos el resultado por etapas:

(1) Claramente $\{a\} \in \mathcal{U}$.

(2) $\mathcal{U} \subset B^H(\varepsilon, aa)$.

Para ver la validez de (2), sea $A \in \mathcal{U}$. Basta probar que $aa \subset N(\varepsilon, A)$ y que $A \subset N(\varepsilon, aa)$ (por 1.15). Tomemos un elemento cualquiera p de A. Como $p \in A \subset U \subset B(\varepsilon, a)$, tenemos que $d(p, a) < \varepsilon$, lo que prueba que $aa \subset N(\varepsilon, A)$. Ya que $A \subset U \subset B(\varepsilon, a) = N(\varepsilon, aa)$, tenemos la contención faltante.

(3) $\mathcal{U}$ es conexa:

Sea $A \in \mathcal{U}$. Sea $p \in A$. Tomemos un arco ordenado $f : [0,1] \to A_s(X)$ tal que $f(0) = \{p\}$, $f(1) = A$ y $\{p\} \subset f(t) \subset A$ para cada $t \in [0,1]$. Como $H(\{p\}, \{a\}) = d(p, a) < \varepsilon$ y $H(A, aa) < \varepsilon$, obtenemos de 1.15 que $H(f(t), aa) < \varepsilon$ para toda $t \in [0,1]$. Como $p \in U$ tenemos que $F_1(U) \cup f([0,1])$ es un conexo totalmente contenido en $\mathcal{U}$ que conecta a A con $\{a\}$; como A era cualquiera, tenemos que $\mathcal{U}$ es conexo. ■

Notemos que en la prueba del teorema anterior pudimos dar vecindades abiertas conexas; aunque no sabemos si éstas son conexas por trayectorias. El problema se hará más evidente en el siguiente teorema.

Teorema 5.8 *Sea X un dendroide y sean a y b dos puntos distintos en $\mathcal{L}(X)$. Entonces $A_s(X)$ es conexo en pequeño en ab. Si, además , tanto a como b tienen una base local de vecindades abiertas y conexas por trayectorias, entonces ab tiene una base local de vecindades abiertas y conexas por trayectorias en $A_s(X)$.*

Demostración. Primero probaremos el caso en que tanto a como b tienen una base local de vecindades abiertas y conexas por trayectorias. El caso en que sólo haya vecindades conexas y abiertas aparece entre paréntesis.

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $B^H(\varepsilon, ab)$; supongamos, además, que $B(\varepsilon, a) \cap B(\varepsilon, b) = \emptyset$. Tomemos c y d en ab de modo que $H(cd, ab) < \varepsilon$ y que cd esté contenido en el interior de ab;es decir, $cd \subset ab$ y $a, b \notin cd$. Sea $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ un número tal que $B(\varepsilon', a) \cap cd = \emptyset$ y $B(\varepsilon', b) \cap cd = \emptyset$. Por la conexidad local en a y en b, existen abiertos conexos U y V tales que $a \in U \subset \bar{U} \subset B(\varepsilon', a)$ y $b \in V \subset \bar{V} \subset B(\varepsilon', b)$.

Sea $\mathcal{U} = \{A \in A_s(X) : A \cap U \neq \emptyset,\ A \cap V \neq \emptyset \text{ y } A \in B^H(\varepsilon, ab)\}$

(respectivamente, se puede pedir que U_1 sea un cerrado conexo que tiene al punto a en su interior y tal que $U_1 \subset B(\varepsilon', a)$. También tomamos V_1 con las propiedades similares, pero para b. En este caso se define $\mathcal{U} = \{A \in A_s(X) : A \cap U_1 \neq \emptyset,\ A \cap V_1 \neq \emptyset \text{ y } A \in B^H(\varepsilon, ab)\}$)

Es claro por 5.2 que $\mathcal{U}$ es una vecindad abierta (respectivamente, vecindad no necesariamente abierta) y que $ab \in \mathcal{U}$. Por otro lado $\mathcal{U} \subset B^H(\varepsilon, ab)$ por construcción; así que sólo falta probar que $\mathcal{U}$ es conexo por trayectorias.

Para ver ello, sea $A \in \mathcal{U}$. Tomemos a' en $A \cap U$ (respectivamente, $A \cap U_1$) y b' en $A \cap V$ (respectivamente, $A \cap V_1$). Notemos que por la conexidad por trayectorias de U y de V (respectivamente, de U_1 y V_1, pues son subdendroides por 4.25) y por la unicidad de los arcos, que los arcos $a'a$ y $b'b$ están contenidos en U y V respectivamente (respectivamente, en U_1 y V_1). Por 5.5, podemos tomar a'' el punto de entrada de a' hacia ab. Es decir, a'' es el único punto en ab tal que $a'a'' \cap ab = \{a''\}$. Entonces $a'' \in a'a$. Definimos análogamente a b'' y notemos que $cd \subset a''b'' \subset ab$. Como $a'a'' \cup a''b'' \cup b''b'$ es un arco que conecta a a' con b', tenemos que $a'b' \subset a'a'' \cup a''b'' \cup b''b'$, por lo que $cd \subset a''b'' \subset a'b'$. Sean $f : [0,1] \to A_s(X)$ y $g : [0,1] \to A_s(X)$ dos arcos ordenados (1.22) de $a''b''$ a $a'b'$ y de $a''b''$ a ab, respectivamente. Entonces $a''b'' \subset f(t) \subset a'b'$ y $a''b'' \subset g(s) \subset ab$ para todos los números t y s en $[0,1]$.

Probaremos que $f(t) \in \mathcal{U}$ y que $g(s) \in \mathcal{U}$ para toda t y s en $[0,1]$. Como $a''b'' \subset f(t)$ y $a''b'' \subset g(s)$, basta probar que $f(t) \in B^H(\varepsilon, ab)$, $g(s) \in B^H(\varepsilon, ab)$. Ahora, por 5.1, basta probar que $H(ab, a''b'') < \varepsilon$, $H(ab, a'b') < \varepsilon$ y que $H(ab, ab) < \varepsilon$.

Tenemos que $a''b'' \subset ab \subset N(\varepsilon, ab)$; por otro lado, $ab \subset N(\varepsilon, cd) \subset N(\varepsilon, a''b'')$, por 1.15 vemos que $H(ab, a''b'') < \varepsilon$.

También tenemos que $a'b' \subset A \subset N(\varepsilon, ab)$ y que $ab \subset N(\varepsilon, cd) \subset N(\varepsilon, a'b')$, por lo que $H(ab, a'b') < \varepsilon$. Esto último termina la prueba de que $a'b'$ se puede conectar por una trayectoria dentro de $\mathcal{U}$ con ab.

Tomando un arco ordenado de $a'b'$ a su vez se puede conectar con A dentro de $\mathcal{U}$ por una trayectoria. Por tanto, $\mathcal{U}$ es conexo por trayectorias. ■

Corolario 5.9 *Sea X un continuo, y sean a y $b \in X$. Si tanto a como b tienen una base local de vecindades (abiertas) conexas por trayectorias, entonces $ab \in \mathcal{L}(A_s(X))$.*

A continuación daremos un lema que será muy útil para conocer si un arco es de conexidad local o no en $A_s(X)$. Como se verá en los ejemplos, no es una caracterización; pero ayuda a eliminar un buen número de casos.

Lema 5.10 *Sea X un continuo y sea $A \in A_s(X)$. Si existen un abierto U y una sucesión de arcos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a A con la propiedad de que, para toda $n \in \mathbb{N}$, A_n y A están contenidos en componentes distintas de U, entonces $A \notin \mathcal{L}(A_s(X))$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $A \in \mathcal{L}(A_s(X))$. Tomemos un abierto U_1 en X tal que $A \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset U$ y $\mathcal{U} = \{B \in A_s(X) : B \subset U\}$, el cual es un abierto (por 1.27) con $A \in \mathcal{U}$, por lo que existe un abierto conexo $\mathcal{V}$ tal que $A \in \mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$.

Sea $\mathcal{W}$ la cerradura de $\mathcal{V}$ con respecto a $C(X)$ ($\mathcal{W} = \overline{\mathcal{V}}$). Entonces $\mathcal{W}$ es un subcontinuo de $C(X)$ tal que todos sus elementos están contenidos en $\overline{U_1} \subset U$. Sea $B = \bigcup\{C : C \in \mathcal{W}\}$. Por 1.28, B es un subcontinuo de X tal que $A \subset B \subset \overline{U_1} \subset U$. Ya que $A_n \to A$, existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $A_m \in \mathcal{V}$, entonces $A_m \subset B$. De manera que A y A_m están contenidas en la componente de U que contiene a B. Esto es absurdo. ■

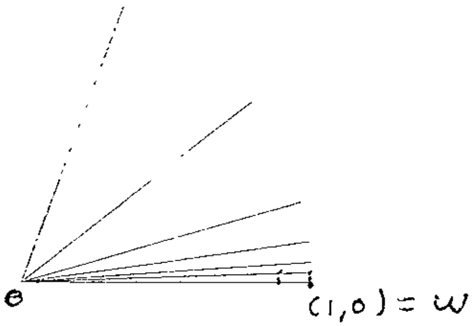
A continuación definiremos un continuo al que se le denomina "la escoba armónica"

Ejemplo 5.11 *Existe un dendroide X para el cual $F_2(X)$ no es homeomorfo a $A_s(X)$.*

Descripción:

Al continuo que vamos a construir lo denominaremos con el nombre de *escoba* y en la literatura también aparece con el nombre de *abanico armónico.*

En el plano $\mathbf{R}^2$ sea A_n el segmento que une el punto $(0,0) = \theta$ con el punto $(1, \frac{1}{n})$. Definimos A_0 como el segmento que une θ con $(1,0)$. Definimos X como $\bigcup\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$. Véase la siguiente figura.



Demostración.

Veremos que $F_2(X)$ no es homeomorfo a $A_s(X)$ viendo que $Fr(\mathcal{L}(F_2(X))) \cap \mathcal{L}(F_2(X))$ consta de sólo un punto, en tanto que $Fr(\mathcal{L}(A_s(X)) \cap \mathcal{L}(A_s(X))$ tiene al menos dos puntos (y, de hecho, es un arco).

Notemos que $\{x, y\} \in Fr(\mathcal{L}(F_2(X)) \cap \mathcal{L}(F_2(X))$ si y sólo si $\{x, y\}$ es un punto que es límite de una sucesión de puntos en donde $F_2(X)$ no es localmente conexo; pero $\{x, y\}$ es un punto de conexidad local de $F_2(X)$.

$\mathcal{L}(F_2(X)) = \{\{\theta, y\} : y \notin \theta\omega\} \cup \{\{\theta\}\}$

$\mathcal{L}(F_2(X)) \cong$ (no es compacto)

En virtud del Teorema 5.4, esto último es equivalente a pedir que tanto x como y sean puntos de conexidad local de X que además pueden ser aproximados por puntos en donde X no es localmente conexo. Es claro que sólo [illegible] esas propiedades ;*por lo que $Fr(\mathcal{L}(F_2(X)) \cap \mathcal{L}(F_2(X)) = \{\{\theta\}\}$.

Es fácil observar que en X el concepto de conexidad local y el de conexidad local por trayectorias coinciden, por lo que de 5.9 tenemos que los únicos arcos en que $A_s(X)$ no es localmente conexo deben de ser arcos en los que algún extremo no sea de conexidad local para X.

Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto $Fr(\mathcal{L}(A_s(X)) \cap \mathcal{L}(A_s(X))$.

Ya que $(\frac{1}{n},0)(\frac{1}{n},0) \to \theta\theta$, tenemos por 5.10 y por 5.7 que $\theta\theta \in \mathcal{A}$. Sea $a = (1,0) \in A_0$, veremos que $\theta a \in \mathcal{A}$. Notemos que por 5.10 todo arco de la forma $(\frac{1}{n},0)a \notin \mathcal{L}(A_s(X))$. Además, observemos que $(\frac{1}{n},0)a \to \theta a$. Basta, pues, con ver que $\theta a \in \mathcal{L}(A_s(X))$.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos un arco $xy \in B^H(\varepsilon, \theta a)$. Tenemos entonces dos casos:

(1) Supongamos que $xy \subset A_i$, para alguna $i \geq 1$(el caso en que $xy \subset A_0$ se puede tratar con ideas similares y es mucho más fácil) y supongamos que $x \in \theta y$. Notemos que $xy \subset \theta y \cup \theta a$, con $H(\theta y \cup \theta a, \theta a) < \varepsilon$, por lo que, tomando un arco ordenado α que empiece en xy y termine en $\theta y \cup \theta a$ (ver 1.22 y notemos que el arco ordenado está hecho de elementos de $A_s(X)$), tenemos por 5.1 que todo elemento de α está en $B^H(\varepsilon, \theta a)$, de modo que $\alpha \subset B^H(\varepsilon, \theta a)$. Tomando un arco β que empiece en $\theta y \cup \theta a$ y termine en θa, otra aplicación de 5.1 nos muestra que $\beta \subset B^H(\varepsilon, \theta a)$. De este modo $\alpha \cup \beta$ es un conexo que conecta a θa con xy.

(2) Supongamos que $xy = \theta x \cup \theta y \subset A_i \cup A_j$, para algunas i y $j \in \mathbb{N}$. Notemos que $H(\theta x, \theta a) < \varepsilon$ o $H(\theta y, \theta a) < \varepsilon$; supongamos lo primero.

Tomemos un arco ordenado γ que empiece en θx y termine en $\theta x \cup \theta y$. Por 5.1, $\gamma \subset B^H(\varepsilon, \theta a)$. Por (1) existe un continuo $\alpha \cup \beta \subset B^H(\varepsilon, \theta a)$ que conecta a θx con θa. De este modo, $\alpha \cup \beta \cup \gamma \subset B^H(\varepsilon, \theta a)$ es un continuo que conecta a $\theta x \cup \theta y$ con θa. Esto último prueba que $B^H(\varepsilon, \theta a)$ es conexa.

Por lo tanto $\theta a \in \mathcal{L}(A_s(X))$, de este modo $\theta a \in \mathcal{A}$. Un razonamiento similar muestra que todo arco θb con $b \in A_0$ está en $\mathcal{A}$. ■

Observación 5.12 *En la prueba anterior* $\mathcal{A} = \{\theta a : a \in A_0\}$.

Demostración. Denotemos por $\mathcal{B} = \{\theta a : a \in A_0\}$. Ya en la prueba anterior se mencionó que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Falta probar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Supongamos, por el contrario, que existe un arco $xy \in \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Por el Teorema 5.8 xy debe tener un extremo en $A_0 - \{\theta\}$, y

*el conjunto propuesto tiene esas propiedades
(Notemos que no es compacto

por hipótesis debe de tener otro extremo en $X - A_0$. De manera que podemos suponer que $xy = \theta x \cup \theta y$ con $x \notin A_0$ y $y \in A_0 - \{\theta\}$.

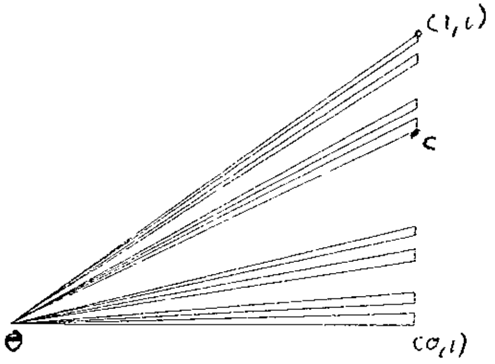
Supongamos que $x \in A_n$ para una $n \geq 1$. Elegimos un punto $z \in X - (A_0 \cup A_n)$ que esté cercano a y. Entonces xz está cercano a xy. Supongamos que $z \in A_m$ para alguna $m \neq n$ y 0. Observemos que el conjunto $\{xw : w \in A_m\}$ intersectado con una vecindad pequeña $\mathcal{U}$ de xy es un subconjunto propio abierto, cerrado y no vacío de $\mathcal{U}$. Por lo que las vecindades pequeñas de xy no son conexas. Ésta es una contradicción que muestra que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. ■

La técnica usada en la observación anterior será explotada para analizar otro ejemplo. Notemos que, en el caso de la escoba, el conjunto de puntos de conexidad local era muy grande y que fue necesario analizar a la frontera del conjunto de puntos de conexidad local para poder encontrar diferencias topológicas entre $F_2(X)$ y $A_s(X)$.

En el siguiente ejemplo el espacio sólo tendrá un punto de conexidad local y el análisis de los puntos de conexidad local en los espacios $F_2(X)$ y $A_s(X)$ bastará para probar que dichos espacios no son homeomorfos.

Ejemplo 5.13 *Sea X el cono sobre el conjunto de Cantor. Entonces el conjunto $\mathcal{L}(F_2(X))$ tiene un solo punto y $\mathcal{L}(A_s(X))$ es homeomorfo a X.*

Demostración. Denotemos por θ al punto $(0,0)$ y por C al conjunto de Cantor, el cual lo pensaremos contenido en el segmento que une al punto $(0,1)$ con el punto $(1,1)$. Para cada $c \in C$ denotemos por A_c al segmento que une a θ con c. De este modo, $X = \bigcup\{A_c : c \in C\}$. Véase la siguiente figura.

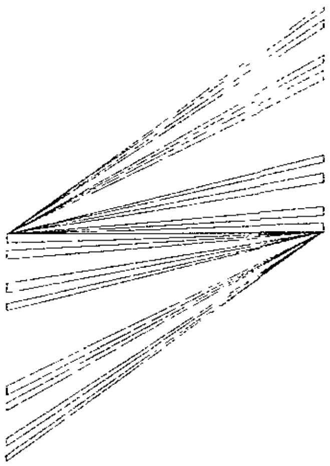


Por 5.4 es claro que $\{\theta\}$ es el único punto en que $F_2(X)$ es localmente conexo. Resta probar que $\mathcal{L}(A_s(X))$ es homeomorfo a X.

Veremos que $\mathcal{L}(A_s(X)) = \{\theta y : y \in X\}$.

La prueba de que $\{\theta y : y \in X\} \subset \mathcal{L}(A_s(X))$ es análoga a (1) y (2) del ejemplo anterior. Para ver que $\mathcal{L}(A_s(X)) \subset \{\theta y : y \in X\}$ notemos que, por 5.10, $\mathcal{L}(A_s(X)) \subset \{ab \in A_s(X) : a, b \in X \text{ y } \theta \in ab\}$. De este modo basta con probar que los arcos de la forma $\theta a \cup \theta b$, con $a \neq \theta \neq b$ y $\theta \in ab$, no son puntos de conexidad local para $A_s(X)$. Entonces a y b están en diferentes patas A_u y A_v, respectivamente, de X. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, a) \cap A_v = \emptyset = B(\varepsilon, b) \cap A_u$; lo que es más, podemos pedir el conjunto $\{w \in C : A_w \cap B(\varepsilon, a)\} \cap \{w \in C : A_w \cap B(\varepsilon, b)\} = \emptyset$. Sea $\mathcal{U} = \{A \in A_s(X) : A \cap B(\varepsilon, a) \neq \emptyset \text{ y } A \cap B(\varepsilon, b) \neq \emptyset\}$. Sea $f : \mathcal{U} \to F_2(X)$ dada por $f(xy) = \{x, y\}$. Observando la geometría de X, uno puede ver que f es continua y abierta. Si suponemos que $ab \in \mathcal{L}(A_s(X))$, entonces tendríamos que $f(ab) = \{a, b\}$ es un punto de conexidad local de $F_2(X)$, por lo que $a \in \mathcal{L}(X)$; esta contradicción nos muestra que $\mathcal{L}(A_s(X)) \subset \{\theta y : y \in X\}$, lo cual termina la discusión. ■

En los dos ejemplos anteriores, vimos que un arco en $A_s(X)$ no tiene por que ser de conexidad local aunque sea maximal o contenga puntos de conexidad local. Desde luego que las técnicas usadas se centraron en el análisis de los conjuntos en que $F_2(X)$ y $A_s(X)$ eran localmente conexos. En la mayoría de los ejemplos analizados el conjunto de puntos en los que $A_s(X)$ era localmente conexo era ostensiblemente mas "grande" que aquel para $F_2(X)$; incluso puede ocurrir el caso en que sea vacío para $F_2(X)$ y no vacío para $A_s(X)$ (En la figura siguiente -la cual está formada por dos conos sobre el conjunto de cantor unidos por uno de sus segmentos- notar que el segmento que une a los dos conos sobre el conjunto de cantor es un punto de conexidad local para $A_s(X)$; en tanto que $F_2(X)$ no tiene ningún punto de conexidad local).



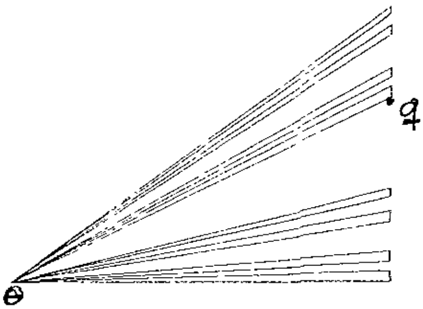
Ante esto, uno podría conjeturar que el conjunto de puntos en que $A_s(X)$ es localmente conexo nunca es vacío; pero dicha conjetura es falsa, como muestra el siguiente ejemplo, el cual no puede ser atacado usando estas técnicas.

Ejemplo 5.14 *Existe un dendroide D para el cual $\mathcal{L}(F_2(D)) = \mathcal{L}(A_s(D)) = \emptyset$.*

Descripción:

Construiremos el dendroide D en el espacio de 3 dimensiones $\mathbb{R}^3$.

Sobre el plano $z = 0$ tracemos el cono sobre el conjunto de Cantor; a este conjunto de Cantor lo denotaremos por C, y lo consideraremos contenido en el segmento que une al punto $(1,0,0)$ con el punto $(1,1,0)$. Además hacemos que el vértice del cono sea el punto $\theta = (0,0,0)$. Para cada punto $q \in C$, denotemos por r_q al punto medio del segmento θq. Denotemos por q_0 al punto $(1,0,0)$. A los arcos que estén enteramente contenidos en este cono les llamaremos arcos del tipo Q (del piso).



Sobre cada arco del tipo θq con $q \in C$, construiremos dos continuos homeomorfos al cono sobre el conjunto de Cantor, A_q, B_q con las siguientes propiedades:
-el vértice de A_q es q, el vértice de B_q es r_q,
-$A_q \cap B_q$ es el segmento θq,
-A_q (resp., B_q) está contenido en el semiespacio de puntos que satisfacen $z \geq 0$ (resp., $z \leq 0$)
-la proyección de $A_q \cup B_q$ sobre el plano $z = 0$ es igual al segmento θq.

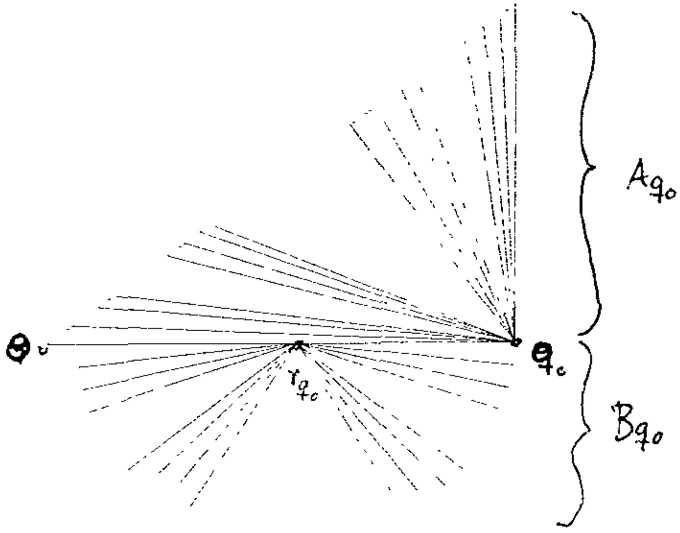
La construcción explícita de A_q y B_q es como sigue:

Primero definiremos A_{q_0} y B_{q_0}.

En el plano $y = 0$ construyamos lo siguiente:
(1) Sobre el segmento que une a los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 0, 1)$ construimos una copia del conjunto de Cantor que llamamos C_0, y hacemos A_{q_0} igual al cono de C_0 con q_0 como vértice. A los arcos que estén enteramente contenidos en esta parte de A_{q_0} les llamaremos arcos del tipo A.

(2) Construyamos una copia D_0 del conjunto de Cantor sobre la semicircunferencia, en el semiplano de los puntos que satisfacen $y = 0$, $z \leq 0$, con centro en r_0, radio $\frac{1}{2}$ y de modo que $\theta, q_0 \in D_0$. Sea B_{q_0} el cono del conjunto D_0 con vértice en r_0. A los arcos que estén enteramente contenidos en esta parte de B_{q_0} les llamaremos arcos del tipo B (en el sol).

Esto termina la construcción de A_{q_0} y B_{q_0}.



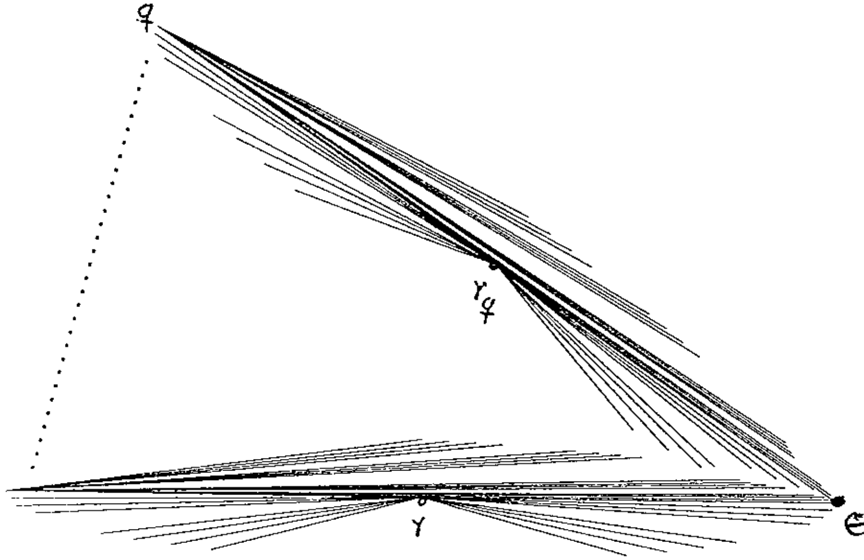
Ya estamos en posición de definir A_q y B_q para cada $q \in C$.

Dada $q \in C$, sea A_q (resp., B_q) el continuo que resulta de rotar A_{q_0} (resp., B_{q_0}) con eje de rotación dado por el eje z de modo que q coincida con q_0. En este caso diremos que un arco es del tipo A o B si es el rotado (usando el eje z) de un arco del tipo A o B en A_{q_0}.

Finalmente, definimos

$$D = \bigcup\{A_q \cup B_q : q \in C\}.$$

Una representación gráfica de D es la siguiente:



Notemos que D es un dendroide y que $\mathcal{L}(F_2(D)) = \emptyset$, pues $\mathcal{L}(D) = \emptyset$ (ver 5.4)

Por lo tanto basta con que mostremos que $\mathcal{L}(A_s(D)) = \emptyset$.

Sea ab un arco en X. Consideraremos varios casos.

Caso 1. $\theta \notin ab$. Este caso se sigue de 5.10.

Caso 2. $\theta \in ab$

Caso 2.1 $ab = \theta a \cup \theta b$ con $a \in A_q \cup B_q - \{\theta\}$, $b \in A_r \cup B_r - \{\theta\}$ con $q \neq r$ y $q, r \in C$.

Tomemos $q_n \to q$ y $r_n \to r$ dos sucesiones con $r_n \neq r$ y $q_n \neq q$ para toda n. Tomemos θa_n y θb_n arcos que sean rotaciones de θa y θb y de modo que $\theta a_n \in A_{q_n} \cup B_{q_n}$ y $\theta b_n \in A_{r_n} \cup B_{r_n}$. Notemos que $\theta a_n \cup \theta b_n \to \theta a \cup \theta b$; pero que para ninguna $n \in \mathbf{N}$ tenemos que $\theta a_n \cup \theta b_n$ puede ser conectado por conexos que disten poco de $\theta a \cup \theta b$, pues para viajar por arcos desde el arco $\theta a_n \cup \theta b_n$ hasta $\theta a \cup \theta b$, alguno de los dos segmentos θa_n y θb_n tiene que reducirse hasta convertirse en el punto θ, lo cual lo aleja del arco $\theta a \cup \theta b$ (*Ver nota). Esto último nos dice que $ab \notin \mathcal{L}(A_s(X))$.

Caso 2.2 $ab = \theta b$ y $\theta b \subset A_q \cup B_q$ para alguna $q \in C$.

Caso 2.2.1 $q \in \theta b$ (esto es, un arco del tipo A)

Si $b = q$ ($ab = \theta q$, el cual es un arco del tipo A y del tipo B), entonces tomemos una sucesión de arcos $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del tipo B en $A_q \cup B_q$ que converjan a ab y que sólo se intersecten entre ellos y con θq en r_q; notemos que no se pueden conectar por conexos que disten poco de $\theta q = ab$.

Si $b \neq q$ (el cual es un arco del tipo A; pero no B). Tomemos una sucesión de arcos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del tipo A en $A_q \cup B_q$ que converjan a ab y que sólo se intersecten entre ellos y con ab en q; notemos que no se pueden conectar por conexos que disten poco de ab (*Ver nota).

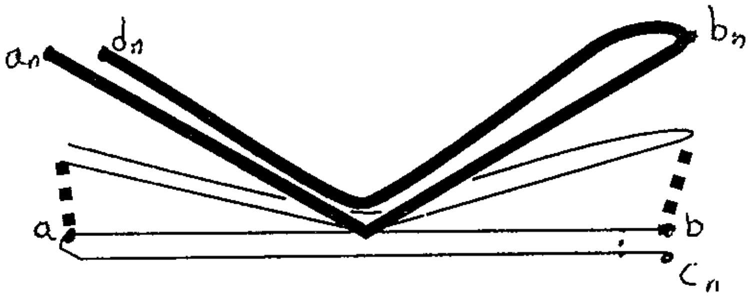
Caso 2.2.2 $q \notin \theta b$ (esto es, es un arco del tipo B)

Si $\theta b \subset \theta q$ (el cual es un arco del tipo B y del tipo A). Entonces el resultado se sigue del teorema 5.10.

Si $\theta b \subset B_q$; pero $\theta b - \theta q \neq \emptyset$. Tomemos una sucesión de arcos $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del tipo B en $A_q \cup B_q$ que converjan a ab y que sólo se intersecten entre ellos y con ab en r_q; notemos que no se pueden conectar por conexos que disten poco de ab (*Ver nota).

Esto termina todos los casos y termina la discusión. ■

*Nota: Una prueba formal de este hecho se dificulta por la posible presencia, en los dendroides, de dobleces en los arcos. Observe que en la siguiente figura el arco $a_n b_n$ puede conectarse con el arco ab por arcos cercanos al arco ab,simplemente hay que alargar o acortar siguiendo los pasos marcados a continuación: $a_n b_n \to a_n d_n \to \theta d_n \to d_n c_n \to \theta c_n \to bc_n \to ab$.



Capítulo 6

Suavidad y Suavidad débil.

En este capítulo se presentarán los conceptos de suavidad y de suavidad débil, los cuales permitirán distinguir dobleces en los dendroides y algunas caracterizaciones de las dendritas a base de sus hiperespacios. También se darán algunas condiciones, basadas en estas mismas ideas, para caracterizar a los dendroides dentro de los espacios hereditariamente unicoherentes usando un orden muy especial. Para esta parte del trabajo se seguirá a Lum ([5]).

Lema 6.1 *Sean X un continuo, A y B en $C(X)$, y dos sucesiones $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Entonces $A_n \cup B_n \to A \cup B$.*

Demostración. Supongamos por 1.3 y 1.18 que la sucesión $\{A_n \cup B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge y probaremos que $\lim\inf B_n \cup A_n = B \cup A$.

(1) $\lim\inf B_n \cup A_n \subset B \cup A$.

Sea $x \in \lim\inf B_n \cup A_n$. Por la Definición 1.16, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x y tal que $x_n \in A_n \cup B_n$ para toda $n \geq 1$. Observemos que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_{n_k} \in A_{n_k}$, o existe una sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_{n_k} \in B_{n_k}$. En el primer caso tenemos que $\{x_{n_k}\} \subset A_{n_k}$, por lo que (1.26) tenemos que $\{x\} \subset A$. De modo similar en el segundo caso obtenemos que $x \in B$. De modo que $x \in A \cup B$.

(2) $B \cup A \subset \lim\inf B_n \cup A_n$.

Sea $x \in B \cup A$. Supongamos que $x \in B$, por lo que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x y tal que $x_n \in B_n \subset A_n \cup B_n$ para cada $n \geq 1$. Esto prueba que $x \in \lim\inf B_n \cup A_n$. ■

Definición 6.2 *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente y sea $p \in X$. Definimos el* orden débil *de X con respecto a p por la condición: $a \leq_p b$ si y sólo si $a \in [p, b]$. Diremos que $a <_p b$ si $a \leq_p b$ y $a \neq b$.*

Notemos que el orden débil es transitivo y reflexivo. A continuación definiremos al conjunto de todos los arcos que tienen un extremo común.

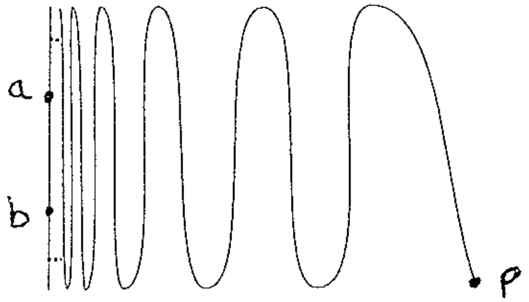
Definición 6.3 . *Sea X un dendroide y sea $p \in X$. Definimos*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X,p) &= \{\alpha \in A_s(X) - F_1(X) : \text{uno de los extremos de } \alpha \text{ es } p\} \cup \{p\} \\ &= \{px \in A_s(X) : x \in X\}. \end{aligned}$$

Al conjunto $\mathcal{D}(X,p)$ le llamaremos el *p-pulpo de X*.

Definición 6.4 *Sea X un dendroide y sea $p \in X$. Definimos la función $\eta_p : X \to \mathcal{D}(X,p)$ por $\eta_p(a) = pa$.*

Notemos que en la definición anterior podría darse el caso de que el orden débil no fuera un orden parcial y que, por lo tanto, podría darse el caso en que $a \leq_p b$ y $b \leq_p a$ sin que $a = b$. Véase la siguiente figura.



Esta peculiar patología se resuelve cuando pedimos que el continuo sea conexo por trayectorias, como veremos en el teorema 6.28, pues tenemos la siguiente observación.

Observación 6.5 *Con la notación de las definiciones anteriores, tenemos que el orden débil $\leq_p$ es un orden parcial si y sólo si la función η_p es inyectiva.*

Demostración.

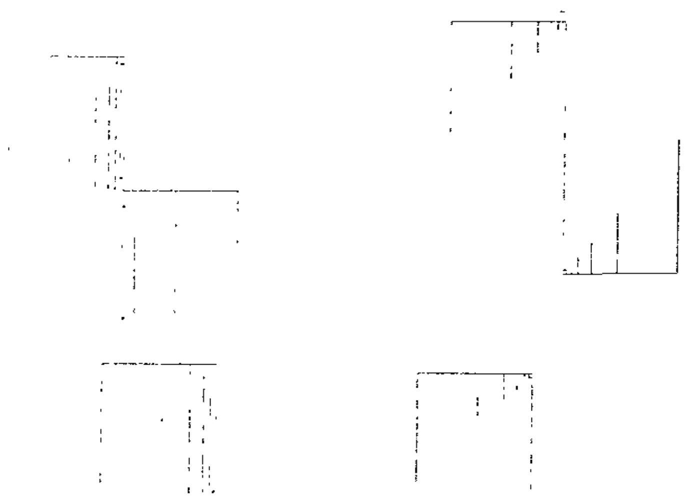
$\Rightarrow$) Supongamos que $\leq_p$ es un orden parcial y supongamos que para dos puntos x y y se tiene que $\eta_p(x) = \eta_p(y)$, es decir $[p,x] = [p,y]$, por lo que $x \in [p,y]$ y $y \in [p,x]$ de donde obtenemos que $x \leq_p y$ y que $y \leq_p x$, por lo que $x = y$ ($\leq_p$ es un orden parcial). Esto prueba la inyectividad.

$\Leftarrow$) Supongamos que η_p es inyectiva y supongamos que $x \leq_p y$ y que $y \leq_p x$. Esto quiere decir que $x \in [p,y]$ y $y \in [p,x]$. Como $x \in [p,y]$ y

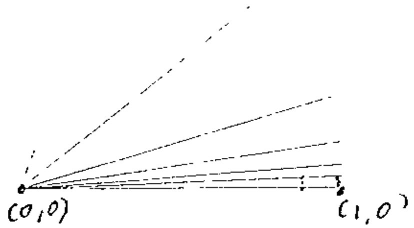
$p \in [p, y]$ tenemos que (ver 4.20) $[p, x] \subset [p, y]$ y similarmente obtenemos que $[p, y] \subset [p, x]$, por lo que $[p, x] = [p, y]$. Por la inyectividad de η_p obtenemos que $x = y$. ■

Definición 6.6 *Se dice que un dendroide X es* débilmente suave *en un punto $p \in X$ si existe un punto $p \in X$ para el cual el p-pulpo de X, $\mathcal{D}(X,p)$, es compacto; al punto p se le llama* punto inicial débil *de X, también se dice que X es* débilmente suave en p. *Además se dice que X es* suave *si existe un punto $p \in X$ tal que la función η_p es continua. A tal punto p se le llama* punto inicial *de X, o* punto de suavidad de X

A continuación mostraremos dos ejemplos de dendroides débilmente suaves. Observe que los de la izquierda tienen puntos en que no son suaves (son suaves en todos sus puntos de conexidad local).

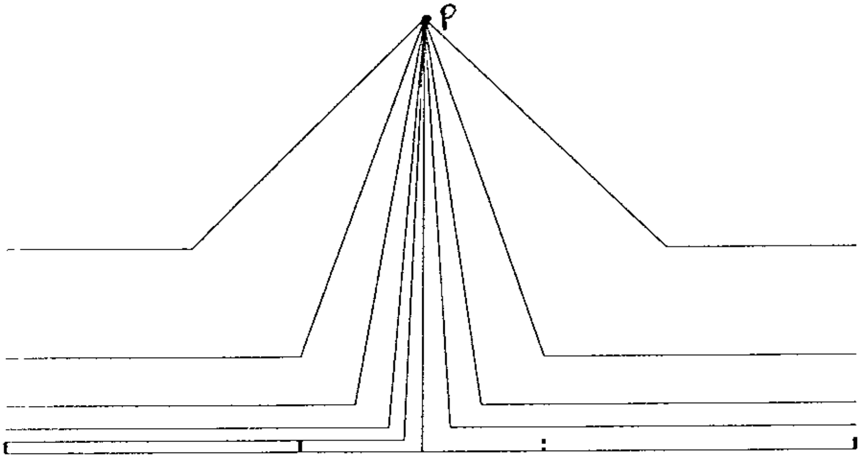


Observe que el punto inicial no es único. Por ejemplo, en la escoba, cualquier punto que no está en el segmento límite -y el mismo origen- son puntos iniciales (de suavidad) para la escoba.



Este ejemplo es interesante pues si tomamos ahora $p = (1,0)$, entonces p también es un punto inicial débil de X (aunque no es inicial). Observe que hay muchas sucesiones de arcos en $\mathcal{D}(X,p)$ que convergen al arco $(0,0)p$ que también pertenece a $\mathcal{D}(X,p)$. Sin embargo, si tomamos un punto q en el segmento $(0,0)p$ diferente de los extremos, q no es un punto inicial débil de X pues hay segmentos en $\mathcal{D}(X,q)$ que convergen también al segmento $(0,0)p$ que, en este caso, no pertenece a $\mathcal{D}(X,q)$. Por tanto $\mathcal{D}(X,q)$ no es compacto.

Notemos que el que un dendroide sea suave en un punto, no implica que $A_s(X)$ sea un espacio compacto como se puede observar en la siguiente figura, en donde tenemos que en el punto p el dendroide es suave y p es un punto de suavidad; sin embargo, tenemos que hay una sucesión de arcos que tienen a p y que convergen a algo que no es un arco (el cual es llamado triodo simple).



Observación 6.7 *En el caso en que X es un dendroide suave con punto inicial p, tenemos que η_p es un homeomorfismo natural entre X y el p-pulpo de X.*

Demostración. Para comprobar esto, notemos que, por hipótesis η_p es continua y sobre. Como X es compacto sólo nos falta ver que η_p es inyectiva (ver 1.2). Tomemos pues dos puntos $x, y \in X$ y supongamos que $\eta_p(x) = \eta_p(y)$. Es decir, $px = py$. Si $x \neq y$, entonces x es un elemento del arco py diferente del extremo y. De manera que px tiene que ser un subcontinuo propio de py, lo que es un absurdo que muestra que $x = y$. Por tanto η_p es inyectiva y, en consecuencia, un homeomorfismo. ■

La observación del párrafo anterior nos dice, en particular, que si X es suave en un punto p, entonces X es débilmente suave en el mismo punto p.

En este momento conviene recordar el teorema 5.5 gracias al cual se dio la definición de punto de entrada. En el contexto de este capítulo al punto de entrada de p hacia A también se le puede llamar "el cero de A con respecto a p".Este último nombre es con relación al orden débil $\leq_p$. Para mejor referencia, reescribimos el enunciado del teorema y la definición.

"Sean X un dendroide, $p \in X$ y $A \in C(X)$. Entonces existe un único punto $z \in A$ con la propiedad de que para cualquier punto $a \in A$, tenemos que $pa = pz \cup za$. Además, z tiene la propiedad de que $pz \cap A = \{z\}$. Al punto z se le denomina *el punto de entrada de p hacia A*."

Como una aplicación de la existencia de puntos de entrada, relacionaremos a la suavidad en un dendroide con aquella de los subdendroides.

Teorema 6.8 *Un subcontinuo de un dendroide suave es un dendroide suave.*

Demostración. Sean X un dendroide con punto inicial p y $A \in C(X)$. Sea z el punto de entrada de p hacia A. Veremos que A es suave con punto inicial z. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a un punto a de A. Como X es suave, tenemos que $pa_n \to pa$; por lo que $pz \cup za_n \to pz \cup za$. Probaremos que $za_n \to za$.

Por 1.3 supongamos que $za_n \to L$, entonces $pz \cup za_n \to pz \cup L$ (6.1). Por unicidad del límite, tenemos que $pz \cup L = pz \cup za$, de manera que $L = (pz \cup L) \cap A = (pz \cup za) \cap A = za$. Esto termina la prueba de la suavidad para A. ■

Enseguida veremos algunos conceptos que nos caracterizaran a las funciones continuas de un continuo X a 2^X.

Definición 6.9 *Sean X un continuo y $f : X \to 2^X$ una función, se dice que f es* semicontinua inferiormente *(respectivamente,* superiormente*) en un punto $x \in X$ si $f(x) \subset \liminf f(x_n)$ (respectivamente, $\limsup f(x_n) \subset f(x)$) para toda sucesión de puntos de X, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $x_n \to x$.*

El siguiente lema relaciona los conceptos de semicontinuidad y continuidad.

Lema 6.10 *Sean X un continuo, $x \in X$ y $f : X \to 2^X$ una función. Entonces f es continua si y sólo si f es semicontinua inferior y superiormente.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a un punto $x \in X$.

$\Rightarrow$) Que f sea continua quiere decir (1.18) que lím $f(x_n) = f(x)$. De manera que lím inf $f(x_n)$ =lím sup $f(x_n) = f(x)$.

$\Leftarrow$) Observemos que

$$f(x) \subset \liminf f(x_n) \subset \limsup f(x_n) \subset f(x)$$

por lo que lím inf $f(x_n)$ =lím sup $f(x_n) = f(x)$. Esto quiere decir que lím $f(x_n) = f(x)$ y entonces f es continua. ■

Teorema 6.11 *La función η_p definida en 6.4 siempre es semicontinua inferiormente.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que η_p no es semicontinua inferiormente; entonces existen un punto $x \in X$ y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n \to x$ y existe un punto y en $\eta_p(x)-$lím inf $\eta_p(x_n)$. Entonces existe un número $\varepsilon > 0$ para el que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con la propiedad de que $px_{n_k} \cap B(\varepsilon, y) = \emptyset$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Supongamos, además, que $\{px_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge (ver 1.3) a un continuo W. Notemos que $y \notin W$, que $p \in W$ y que $x \in W$.

Entonces $\eta_p(x) = px = I(p, x) \subset W$. Pero $y \in \eta_p(x) = px$ y $y \in W$. Esta contradicción completa la prueba del teorema ■

Observación 6.12 *Notemos que en el teorema anterior sólo se usó la unicoherencia hereditaria del continuo; no fue usada la conexidad por trayectorias. Así que la prueba también valdría -cuando X es hereditariamente unicoherente- con sólo cambiar la definición de η_p definiendo $\eta_p(a) = I(p, a)$ (ver la definición de $I(p, a)$ en 4.20).*

Una aplicación de la observación anterior será dada en 6.41

Teorema 6.13 *Sean X un dendroide y $p \in X$. Dada $x \in X$, $\eta_p(px)$ es un arco en $\mathcal{D}(X, p)$ que une a $\{p\}$ con px En particular, $\mathcal{D}(X, p)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Consideremos el arco px. Como px es un continuo suave con punto de suavidad p, tenemos que la restricción de η_p a px, $\hat{\eta}_p : px \to \mathcal{D}(px, p)$ es un homeomorfismo por las observaciones que se hicieron a la definición de suavidad. Esto quiere decir que $\hat{\eta}_p(px)$ es un arco en $\mathcal{D}(px,p) \subset \mathcal{D}(X,p)$. Es claro que sus puntos extremos son $\hat{\eta}_p = \{p\}$ y $\hat{\eta}_p(x) = px$. ■

Las siguientes definiciones se harán para espacios métricos, puesto que serán aplicados a espacios como $\mathcal{D}(X,p)$, los cuales no siempre son compactos.

Definición 6.14 *Dado un espacio métrico X y un orden parcial $\leq$ definido para los puntos de X, decimos que este orden es* cerrado *si dadas dos sucesiones de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X convergentes a puntos $x, y \in X$ y tales que $x_n \leq y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x \leq y$.*

Notemos que en la definición de cerrado se afirman dos cosas, la primera es que los límites deben de ser comparables y la segunda es que el modo de compararse es el adecuado. De este modo para que un orden no sea cerrado basta con que los límites de sucesiones comparables no lo sean.

La justificación del nombre de cerrado para un orden la da el siguiente resultado.

Teorema 6.15 *Un orden parcial $\leq$ en un espacio métrico X es cerrado si y sólo si $\{(x,y) \in X \times X : x \leq y\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times X$.*

Demostración. Sea $A = \{(x,y) \in X \times X : x \leq y\}$

$\Rightarrow$) Supongamos que $\leq$ es un orden cerrado. Tomemos una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pares ordenados convergente a un punto (x,y) con $(x_n,y_n) \in A$. Notemos que $x_n \to x$ y que $y_n \to y$. Como $x_n \leq y_n$, tenemos que $x \leq y$, por lo que $(x,y) \in A$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones convergentes a x y a y respectivamente y tales que $x_n \leq y_n$; por lo que el par ordenado $(x_n, y_n) \in A$. Observemos que $(x_n, y_n) \to (x,y)$, de manera que $(x,y) \in A$; es decir, $x \leq y$. ■

Observemos que el orden en 2^X dado por la contención es un orden parcial cerrado (por 1.26). Si tomamos puntos p, a y b de un dendroide X , sabemos lo que significa que $a \leq_p b$. Ahora, en el caso en que $\mathcal{D}(X,p)$ sea un dendroide, ¿qué significa que $pb \leq_{pp} pc$? Enseguida lo veremos.

Lema 6.16 *Si p, a y b son puntos de un dendroide X y $\mathcal{D}(X,p)$ es también un dendroide , entonces $pb \leq_{pp} pc$ si y sólo si $pb \subset pc$.*

Demostración. Por definición de orden débil $pb \leq_{pp} pc$ si y sólo si pb está en el arco, en $\mathcal{D}(X,p) \subset C(X)$, que une a pp con pc, esto es, en el arco $pppc$. Consideremos un arco ordenado α en $C(X)$ que empiece en pp y termine en pc (ver 1.22).

Veremos que $\alpha = pppc$. Para ello, tomemos un continuo $A \in \alpha$. Como $A \subset pc$ y $pp \subset A$, tenemos que A es un arco $pq \subset pc$ Esto prueba que $\alpha \subset \mathcal{D}(X,p)$. Como tanto α como $pppc$ son arcos en el dendroide $\mathcal{D}(X,p)$ con puntos extremos pp y pq, tenemos que $\alpha = pppc$.

Ahora, el arco pb está en el arco ordenado $\alpha = pppc$ si y sólo si $pb \subset pc$. ■

Con la notación del teorema anterior, notemos que dice que, en el caso de los p-pulpos que sean dendroides, tenemos que el orden parcial débil coincide con el orden parcial dado por la contención en $C(X)$; por lo que podemos observar que el orden parcial $\leq_{pp}$en $\mathcal{D}(X,p)$ es siempre un orden cerrado relativo a $\mathcal{D}(X,p)$ (en virtud de 6.16, que $\leq_{pp}$ sea un orden cerrado en $\mathcal{D}(X,p)$ dice que si dos sucesiones de **arcos con extremo p** -en que un arco de una sucesión esta siempre contenido en el correspondiente de la otra sucesión- **convergieran a dos arcos con extremo p**, entonces uno está contenido en el otro); aunque el orden $\leq_p$ no necesariamente sea un orden cerrado para X (puesto que puede ocurrir que dos sucesiones de puntos comparables converja a dos puntos que ni siquiera son comparables)

Del siguiente sencillo resultado podremos derivar una consecuencia interesante que relacionará los conceptos de suavidad con los conceptos de ordenes parciales que hemos desarrollado.

Lema 6.17 *Un dendroide X es suave con punto inicial $p \in X$ si y sólo si el orden débil de X con respecto a p, $\leq_p$, es cerrado.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es suave con punto de suavidad p. Tomemos dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converjan a x y a y respectivamente y tales que $x_n \leq_p y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x_n \in py_n$; i.e., $\{x_n\} \subset py_n$, así que (1.26) $x \in py$; es decir, $x \leq_p y$.

$\Leftarrow$) Supongamos que el orden débil, $\leq_p$, es cerrado. Por 6.11 la función η_p es semicontinua inferiormente. Basta, entonces, con probar que es semicontinua superiormente.

Sean $x \in X$ un punto y $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión convergente a x. Tenemos que probar que $\lim\sup \eta_p(x_n) \subset \eta_p(x)$. Supongamos, por el contrario, que existe $y \in \lim\sup \eta_p(x_n) - \eta_p(x)$. Tomemos una sucesión $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ convergente a y y con la propiedad de que $y_{n_k} \in px_{n_k}$ (i.e., $y_{n_k} \leq_p x_{n_k}$). Ya que $\leq_p$ es cerrado y $y_{n_k} \leq_p x_{n_k}$, tenemos que $y \leq_p x$, por lo que $y \in px$; lo cual contradice la elección de y. ■

A continuación daremos unas caracterizaciones que nos serán útiles para entender mejor el concepto de suavidad débil.

Teorema 6.18 *Sea X un dendroide y sea $p \in X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) si $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ son dos sucesiones de X convergentes a los puntos x y y, respectivamente y si además $x_n \leq_p y_n$ para toda $n \in \mathbf{N}$, entonces $x \leq_p y$ o $y \leq_p x$,
(2) si $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, es una sucesión de X convergente al punto x, entonces $\lim\inf px_n = py$ para algún punto $y \in X$.
(3) el punto p es un punto inicial débil de X.

Demostración.
(1)$\Rightarrow$(2). Sea $W = \lim\inf px_n$. Primero veremos que W es un continuo. Tomemos $q \in W$ y afirmamos que $pq \subset W$. Para probar esto último supongamos, por el contrario, que existe un punto $r \in pq - W$. Como $r \notin W = \lim\inf px_n$, tenemos que existen un número $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ con la propiedad de que $px_{n_k} \cap B(\varepsilon, r) = \emptyset$ para toda k. Ya que $q \in \lim\inf px_n \subset \lim\inf px_{n_k}$ existe una sucesión de puntos $\{q_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ tal que $q_k \to q$ y $q_k \in px_{n_k}$ para cada $k \in \mathbf{N}$. Por 1.3, podemos suponer que la sucesión $\{pq_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ es convergente. Notemos que $r \notin \lim px_{n_k}$. También notemos que contiene a p y a q, de donde tenemos por 4.20 que $pq \subset \lim pq_k$, así que $r \in \lim pq_k \subset \lim\inf px_{n_k}$; lo cual no es posible por la definición de r. Esto prueba que W es conexo.

Por 4.24 existe un arco maximal $ab \subset W$ tal que $p \in ab$. Como a y b están en $\lim\inf px_n$, tenemos que $a = \lim a_n$ y $b = \lim b_n$ para algunas sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tales que a_n y b_n están en px_n para cada $n \in \mathbf{N}$. Entonces tenemos que $a_{n_k} \leq_p b_{n_k}$ para una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ de $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ o $b_{n_k} \leq_p a_{n_k}$ para alguna subsucesión $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ de $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. En cualquier caso $a \leq_p b$ o $b \leq_p a$, por lo que $a \in pb$ o $b \in pa$. Así que $ab \subset pb$ o $ab \subset pa$, y por maximalidad tenemos que $ab = pa$ o $ab = pb$; pero en cualquier caso p

es un punto extremo de ab. De manera que podemos suponer que $ab = pb$. Veremos que $W = pb$.

Como dijimos, $pb \subset W$; de modo que falta probar que $W \subset pb$.

Sea $w \in W$ y tomemos una sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a w y tal que $w_n \in px_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, o bien existe una subsucesión $\{w_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $w_{n_k} \leq b_{n_k}$, para toda $k \in \mathbb{N}$; o bien existe una subsucesión $\{w_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{w_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $b_{n_l} \leq w_{n_l}$. Así que tenemos que $w \leq_p b$ o que $b \leq_p w$, por lo que $w \in pb$ o $b \in pw$. Si $w \in pb$, no hay nada más que hacer; si $b \in pw$, tenemos que $pb \subset pw$. Por la maximalidad de pb, tenemos entonces que $pb = pw$, de donde $w = b \in pb$. Esto termina la prueba de (1)$\Rightarrow$(2).

(2)$\Rightarrow$(3) Tenemos que probar que si $\{px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces su límite es de la forma py. Pero si $\{px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces lím px_n =lím inf $px_n = py$, para alguna $y \in X$.

(3)$\Rightarrow$(1) Supongamos que dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a dos puntos a y b, respectivamente, y que $a_n \leq_p b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora, por hipótesis, la sucesión $\{pb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{pb_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a un arco py para algún punto y en X. Como $\{a_{n_k}\} \subset pb_{n_k}$ y $\{b_{n_k}\} \subset pb_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos que a, $b \in py$. Entonces $a \in pb$ o $b \in pa$; es decir, $a \leq_p b$ o $b \leq_p a$. ■

La siguiente prueba será, casi palabra a palabra, una reproducción de la respectiva para la suavidad.

Teorema 6.19 *Todo subcontinuo de un dendroide débilmente suave es un dendroide débilmente suave.*

Demostración. Sean X un dendroide con punto inicial débil p y $A \in C(X)$. Sea z el punto de entrada de p hacia A. Veremos que A es débilmente suave con punto inicial z. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a un punto a de A. Como X es débilmente suave, tenemos que $pa_n \to py$ para alguna $y \in X$; por lo que $pz \cup za_n \to pz \cup zy$. Probaremos que $za_n \to zy$.

Por 1.3 podemos suponer que $za_n \to L$, entonces $pz \cup za_n \to pz \cup L$ (por 6.1). Por unicidad del límite, tenemos que $pz \cup L = pz \cup zy$. Notemos que $pz \cap zy = \{z\}$ ($z \in py$) y que $pz\cap$ lím $za_n = \{z\}$ (pues como $za_n \subset A$, tenemos por 1.26 que lím $za_n \subset A$, por lo que $pz\cap$ lím $za_n \subset A$, y sólo z puede estar en la intersección). De manera que lím $za_n = L = (pz \cup zy) - (pz - \{z\}) = zy$. Como lím $za_n \subset A$, tenemos que $zy \subset A$. Esto termina la prueba de la suavidad débil para A. ■

Teorema 6.20 *Sea X un dendroide y sea $p \in X$. Si $Y \subset X$ y z es el punto de entrada de p hacia Y, entonces el z-pulpo de Y es homeomorfo a $\eta_p(Y) \subset \mathcal{D}(X,p)$.*

Demostración. Definimos la función $f : 2^X \times 2^X \to 2^X$ como $f(A,B) = A \cup B$, para toda A y toda B en 2^X y sea h la restricción a $D(Y,z) \times \{pz\}$, el cual es homeomorfo a $D(Y,z)$ (esto es, $h(zq) = zq \cup pz$, el cual es un arco por 4.27 y la definición de z). Como f es continua por 6.1, notemos que f también es cerrada, puesto que $2^X \times 2^X$ es compacto Hausdorff y 2^X es Hausdorff. De este modo, la restricción $h : D(Y,z) \times \{pz\} \to \eta_p(Y)$ es continua y es cerrada (notemos que es cerrada puesto que la restringimos a su rango). Como h también es inyectiva, tenemos que h es biyectiva.

Ya que h es una biyección continua y cerrada, tenemos que h es un homeomorfismo. ■

Corolario 6.21 *Con la notación del Teorema anterior, si p es un punto inicial débil de X, entonces $\eta_p(Y)$ es un subcontinuo de $\mathcal{D}(X,p)$.*

Demostración. $\eta_p(Y)$ es homeomorfo a $\mathcal{D}(Y,z)$, el cual es un continuo por la prueba de 6.19. ■

COMENTARIO. Como una primera aplicación de lo que hemos visto hasta ahora en este capítulo, L. Lum contestó la siguiente pregunta de S. B. Nadler, Jr.: ¿Si un dendroide X es homeomorfo a $\mathcal{D}(X,p)$ para alguna $p \in X$, entonces X es un dendroide suave? A continuación escribimos la prueba que dio Lum.

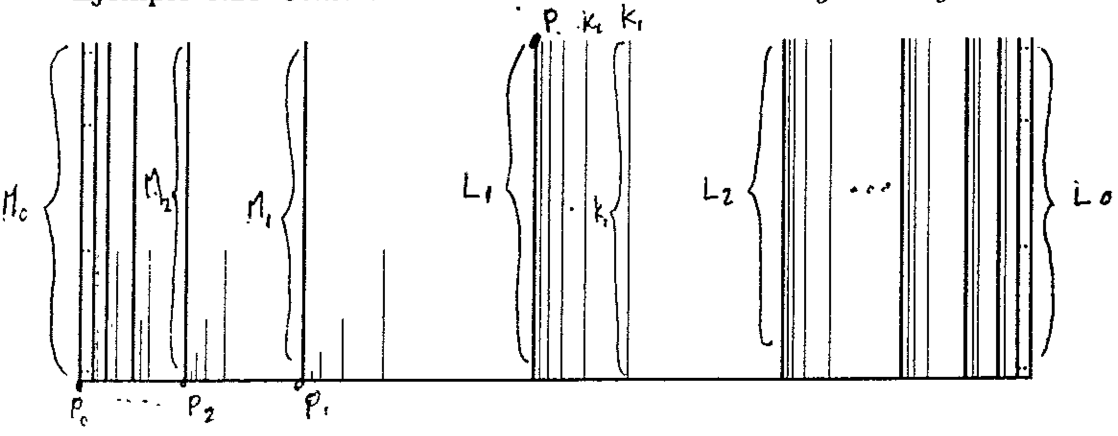
Teorema 6.22 *Un dendroide X es suave si y sólo si existe un punto $p \in X$ tal que X es homeomorfo a $\mathcal{D}(X,p)$.*

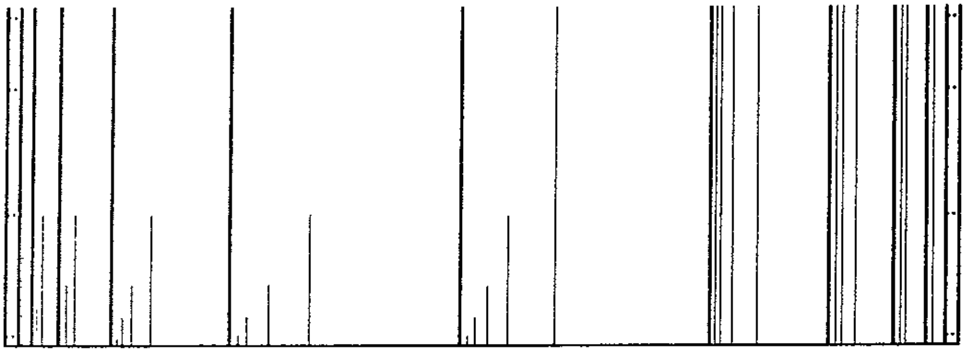
Demostración. $\Rightarrow$) Éste es la observación 6.7.

$\Leftarrow$) Supongamos que X es un dendroide homeomorfo a $\mathcal{D}(X,p)$ para alguna $p \in X$. Tenemos entonces que $\mathcal{D}(X,p)$ es un dendroide. Por 6.16, el orden débil parcial $\leq_{pp}$ es equivalente al orden dado por la contención, pues $\mathcal{D}(X,p)$ es un dendroide; así que se puede aplicar el Teorema 6.17 a $\mathcal{D}(X,p)$ y al orden cerrado $\subset$. Así que tenemos que el dendroide $\mathcal{D}(X,p)$ es suave, por lo que X es suave. ■

En el Teorema anterior, uno podría conjeturar que si X es homeomorfo a $\mathcal{D}(X,p)$, entonces p es un punto inicial de X. Esto no necesariamente es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.23 *Considere el continuo X ilustrado en la siguienteFigura ??.*

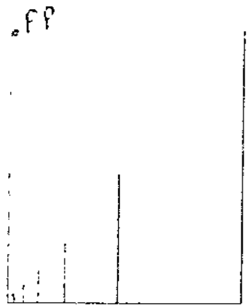


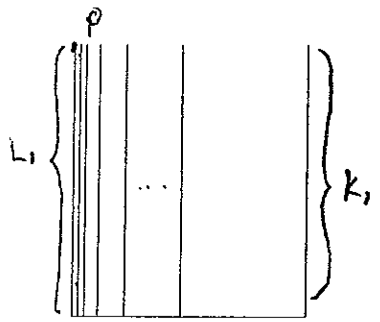


Donde los segmentos verticales L_n convergen al segmento L_0. Además para cada L_n hay una sucesión de segmentos verticales que tiende a L_n por la derecha. Por otra parte, los segmentos verticales M_n tienden al segmento M_0. Y para cada punto p_n hay una sucesión de segmentos, a la derecha de M_n, que convergen al conjunto de un solo punto $\{p_n\}$.

Notemos que el punto p no es un punto de suavidad de X.

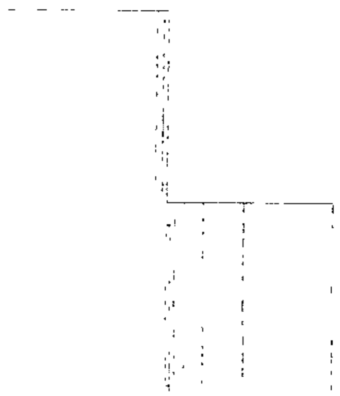
Sea Y el subdendroide que es igual a la cerradura de $X - \bigcup\{K_n : n \geq 1\}$. Notemos que $p \in Y$ y p es un punto de suavidad de Y. Entonces, por 6.7, Y es homeomorfo a $\mathcal{D}(p, Y)$, con el homeomorfismo natural que a cada q le asigna el arco pq. Para tener todo el p-pulpo de X $(\mathcal{D}(p, X))$ bastaría unirle a $\mathcal{D}(p, Y)$ el conjunto $\mathcal{A} = \{pq : q \in (L_1 \cup \bigcup\{K_n : n \geq 1\})\}$. En el siguiente ejemplo, tenemos una descripción geométrica de $\mathcal{A}$.

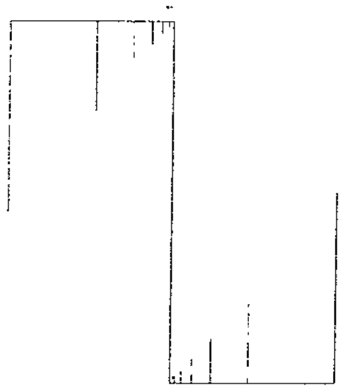




De manera que $\mathcal{A}$ es homeomorfo a $M_1 \cup J \cup (\bigcup\{J_n : n \geq 1\})$. Por tanto $\mathcal{D}(p, X)$ es homeomorfo al continuo que resulta de empequeñecer en X a cada segmento K_n hasta que tiene una altura $\frac{1}{2^n}$, sin alterar el resto de X. Como claramente el resultado es homeomorfo a X (bastaría recorrer todo apropiadamente y con la escala necesaria para cada porción), obtenemos finalmente que $\mathcal{D}(p, X)$ es homeomorfo a X.

A continuación mostraremos que los dendroides son localmente conexos en sus puntos iniciales. Nuestra prueba es diferente a la dada por Koch y Krule en [4]. Nosotros usaremos funciones de Whitney para mostrar este resultado. Concluimos entonces que un dendroide que es suave en todos sus puntos tiene que ser una dendrita. Para suavidad débil, un dendroide no necesariamente es localmente conexo en sus puntos iniciales débiles, como ya habíamos dicho en el ejemplo de la escoba armónica.





Como veremos más tarde, cuando X es un dendroide débilmente suave en todos sus puntos, entonces X es localmente conexo en todos sus puntos y, por tanto, es una dendrita.

Proposición 6.24 *Sea X un dendroide suave en un punto p, entonces X es localmente conexo en p.*

Demostración. Sea $\mu : 2^X \to [0,1]$ una función de Whitney y sea U una vecindad de p.

Primero probaremos que $(\mu \circ \eta_p)^{-1}([0, \frac{1}{n}))$ es un abierto conexo de X para toda $n \geq 1$.

Como η_p es continua por la suavidad de X, tenemos que $\mu \circ \eta_p$ es continua y por lo tanto $(\mu \circ \eta_p)^{-1}([0, \frac{1}{n}))$ es un abierto en X que tiene a p. Para ver la conexidad, tomemos un punto $b \in (\mu \circ \eta_p)^{-1}([0, \frac{1}{n})) \subset X$, esto es, $\mu(pb) < \frac{1}{n}$, y un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(pb)$ (1.22) que conecte a pp con pb. Observemos que $\alpha(t)$ es un arco contenido en pb para cada $t \in [0,1]$. y notemos que ya que $\mu(pb) < \frac{1}{n}$, y que, como $pp \subset \alpha(t) \subset pb$, tenemos que $0 = \mu(pp) \leq \mu(\alpha(t)) \leq \mu(pb) < \frac{1}{n}$, por lo que $\alpha(t) \subset (\mu \circ \eta_p)^{-1}([0, \frac{1}{n}))$, para toda $t \in [0,1]$. De lo anterior, tenemos que $\bigcup\{\alpha(t) : t \in [0,1]\} \subset (\mu \circ \eta_p)^{-1}([0, \frac{1}{n}))$. Ahora, por 1.28, $\bigcup\{\alpha(t) : t \in [0,1]\}$ es un continuo, de modo que $(\mu \circ \eta_p)^{-1}([0, \frac{1}{n}))$ es conexo.

Tomemos $\mathcal{A} = \{pz : pz \cap (X - U) \neq \emptyset\}$, el cual es un cerrado de $D(X,p)$, y por suavidad en p, tenemos que $\mathcal{A}$ es un cerrado en 2^X, por lo que $\mu(\mathcal{A})$ es un cerrado en $[0, \mu(X)]$. Ahora, si un punto $x \in X$ cumple que $\mu(px) = 0$, entonces $x = p$, pues $\mu(px) = 0$ sólo si px es un punto; como $p \in px$ y $x \in px$, tenemos que $px = pp$. Así que $0 \notin \mu(\mathcal{A})$.

Tomemos un natural N tal que $\frac{1}{N} < \text{mín } \mu(\mathcal{A})$. Probaremos enseguida que $(\mu \circ \eta_p)^{-1}([0, \frac{1}{N})) \subset U$. Supongamos, por el contrario que existe un punto $y \in X$ tal que $\mu(py) < \frac{1}{N}$ y tal que $y \in (X - U)$. Observemos que $py \cap (X - U) \neq \emptyset$, por lo que $py \in \mathcal{A}$, de modo que $\mu(py) \geq \text{mín } \mu(\mathcal{A}) > \frac{1}{N}$. Esta contradicción muestra que $(\mu \circ \eta_p)^{-1}([0, \frac{1}{N})) \subset U$ y termina la prueba de la conexidad local para X en el punto inicial p. ■

Teorema 6.25 *Si X es un dendroide, entonces X es una dendrita si y sólo si todo punto de X es un punto inicial débil.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea p un punto cualquiera de X. Dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto x, en la prueba del Teorema 4.29 probamos que, como $\{p, x_n\} \to \{p, x\}$ y X es una dendrita, entonces $px_n \to px$. Por lo tanto, X es suave en p.

$\Leftarrow$) Supongamos, por el contrario, que X no es localmente conexo, entonces, por 4.9, existen continuos $\{A_0, A_1, A_2, ...\}$ para una vecindad V de un punto $z \in X$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(0) $z \in A_0 \cap int(V)$

(1) A_n no es degenerado para ningún número $n \in \mathbb{N}$

(2) $A_n \to A_0$

(3) Si $n \neq m$, entonces $A_n \cap A_m = \emptyset$, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$.

(4) Si $n \neq m$, entonces A_n y A_m no se pueden conectar por continuos dentro de V.

Tomemos dos puntos q y r en A_0. Observemos que A_0 es un dendroide, por lo que $qr \subset A_0$. Ya que $A_n \to A_0$, existen sucesiones $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen a q y a r respectivamente y tales que q_n y r_n están en A_n, para toda $n \in \mathbb{N}$. Tomemos un punto p_0 en $qr - \{q, r\}$.

Afirmamos que para toda $n \geq 1$, se tiene que $p_0 \in qq_n$ o $p_0 \in rr_n$. Para ver esto, supongamos que $p_0 \notin qq_n$ y que $p_0 \notin rr_n$. Debido a que $rr_n \cup q_nr_n$ y $q_nr_n \cup qq_n$ son continuos que se intersectan, tenemos que $(rr_n \cup q_nr_n) \cup (q_nr_n \cup qq_n)$ es un dendroide que contiene a r y a q, por lo que contiene a rq; pero entonces $p_0 \in (rr_n \cup q_nr_n) \cup (q_nr_n \cup qq_n)$, lo que no ocurre, pues $p_0 \notin q_nr_n \subset A_n$ (recordemos que $A_0 \cap A_n = \emptyset$).

Por lo anterior debemos de tener que para un número infinito de naturales n que $p_0 \in qq_n$ o que para un número infinito de naturales n tenemos que $p_0 \in rr_n$. Supondremos que ocurre lo segundo sin pérdida de generalidad y que $p_0 \in rr_n$ para toda $n \geq 1$; esto último lo podemos hacer pues podemos escoger una subsucesión en caso necesario.

Sea $p \in p_0r - \{p_0, r\}$. Como $p_0 \in rr_n$, notamos que $p \in rr_n - \{r, r_n\}$, por lo que $p_0 \in pr_n$, así que $p_0r_n \subset pr_n$. Debido a que $\liminf p_0r_n$ es un continuo (ver 6.18)con $r_n \to r$, obtenemos que $p_0r \subset \liminf pr_n$. Por otro lado, por ser p un punto inicial débil, tenemos que $\liminf pr_n = pr'$, para algún punto r'.

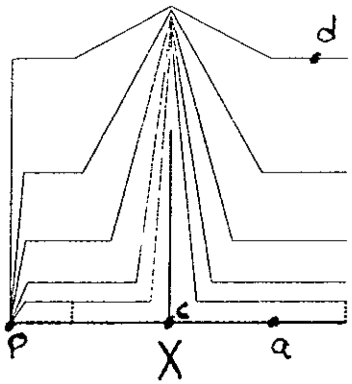
Pero entonces $p_0r \subset pr'$, por lo que no es posible que $p \in p_0r - \{p_0, r\}$. Esta contradicción termina la prueba. ∎

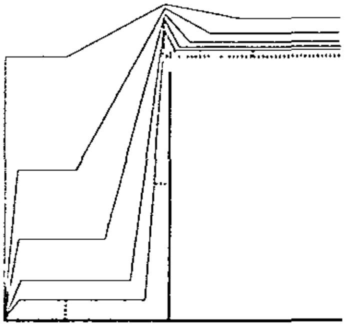
Corolario 6.26 *Sea X un dendroide débilmente suave con punto inicial débil p. Si $\mathcal{D}(X,p)$ es homeomorfo a $\mathcal{D}(X,q)$ para toda $q \in X$, entonces X es una dendrita.*

Demostración. Como $D(X,p)$ es compacto (p es un punto inicial débil), tenemos que $\mathcal{D}(X,q)$ también lo es, por lo que q también es un punto inicial débil. De lo anterior tenemos que todos los puntos son puntos iniciales débiles y el resultado se sigue del teorema anterior. ■

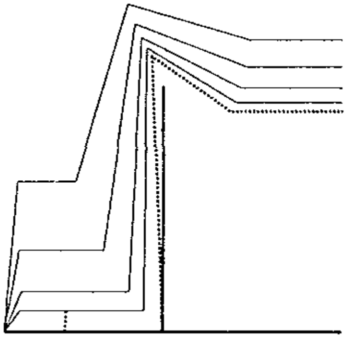
En el resultado anterior es necesario que X sea un dendroide débilmente suave.

Para hacer claro el siguiente ejemplo veamos cómo son los $p-$*pulpos* del siguiente espacio para distintos puntos p. En la primera figura, tenemos al espacio X; en las figuras 2, 3, 4 y 5 tenemos a $D(p, X)$, a $D(c, X)$, a $D(a, X)$ y $D(d, X)$

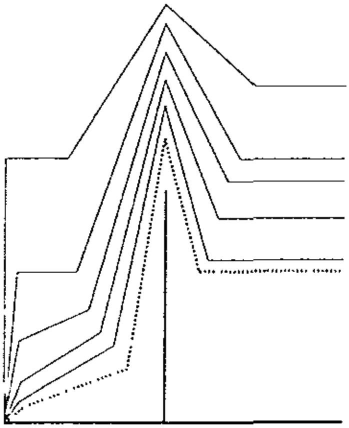




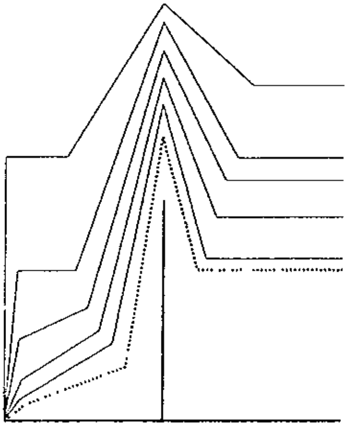
2



3



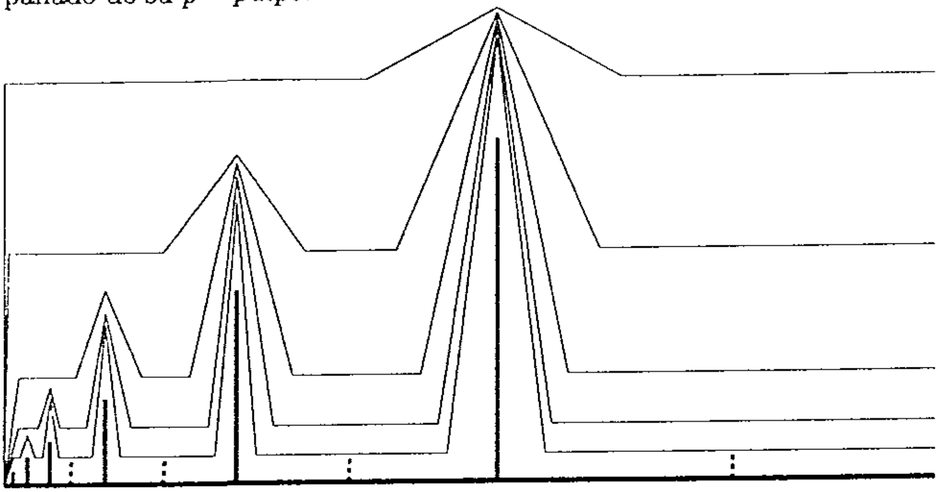
4

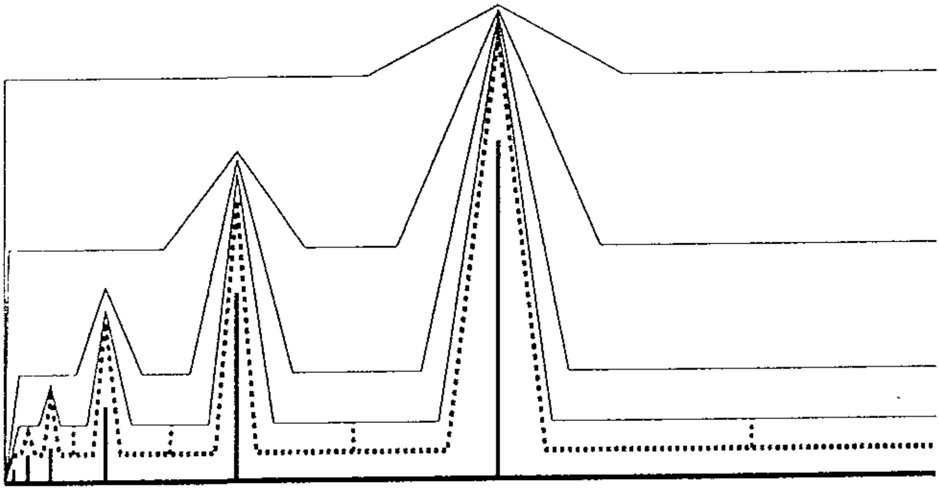


5

Para convencerse de que esos son los hiperespacios notemos que, para cada n y para cada $p \in X$, tenemos que $T \cup (\bigcup\{A_i : i \leq n\})$ es homeomorfo a $D(T \cup (\bigcup\{A_i : i \leq n\}), p)$ por ser dendrita; de modo que sólo falta ver que se van acumulando como se indica; pero es el triodo el que no permite que converja ninguno de los arcos (por lo que se puso la linea punteada).

Generalizando estas ideas, es posible probar que el siguiente espacio tiene a todos sus $p-$ *pulpos* homeomorfos entre sí. Se presenta el espacio acompañado de su $p-$ *pulpo*.





A continuación estudiaremos las relaciones existentes entre los conceptos desarrollados anteriormente para los casos en que estemos trabajando con continuos hereditariamente unicoherentes, aunque no necesariamente conexos por trayectorias. En este contexto, $[p,x] = I(p,x)$ denotará al único continuo de X que es irreducible con respecto a p y a x. De este modo $\eta_p(x) = [p,x]$.

Primero daremos un lema que nos dirá que todo irreducible se puede descomponer en dos irreducibles.

Lema 6.27 *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente, sean p y q dos puntos en X y sea z un punto en $[p,q]$. Entonces $[p,q] = [p,z] \cup [z,q]$.*

Demostración. Puesto que $[p,z] \cup [z,q]$ es un continuo que contiene a p y a q, tenemos que $[p,q] \subset [p,z] \cup [z,q]$. Ahora, como $[p,q]$ es un continuo que contiene a p y a z, tenemos que $[p,z] \subset [p,q]$; similarmente $[z,q] \subset [p,q]$, por lo que $[p,z] \cup [z,q] \subset [p,q]$, de modo que $[p,z] \cup [z,q] = [p,q]$. ■

En este punto conviene recordar que un continuo es un arco; es decir, homeomorfo al intervalo $[0,1] \subset \mathbf{R}$ si y sólo si tiene exactamente dos puntos extremos (ver 1.6). El siguiente resultado nos dará una forma de reconocer la conexidad por trayectorias en los dendroides.

Teorema 6.28 *Un continuo hereditariamente unicoherente X es conexo por trayectorias (esto es, es un dendroide) si y sólo si para todo punto $r \in X$ la función η_r es inyectiva.*

Demostración.

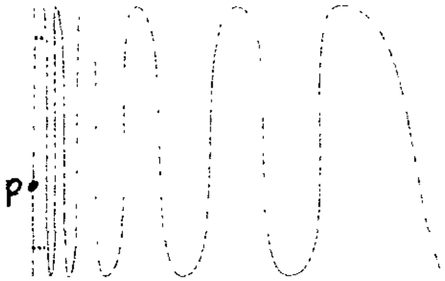
$\Rightarrow$) Si X es un dendroide y x y y son puntos de X tales que $rx = ry$; supongamos que $x \neq r$, y notemos que $y \neq r$. Tenemos que rx es un arco con r y x como puntos extremos; pero r y y también son puntos extremos del mismo arco. De manera que, ya que un arco tiene exactamente dos puntos extremos (1.6) tenemos que $x = y$. De este modo η_r es inyectiva.

$\Leftarrow$) Supongamos que η_r es inyectiva para toda $r \in X$. Tomemos dos puntos $p \neq q$ en X, basta con probar que $[p,q]$ es un arco, para lo cual usaremos 1.6.

Tomemos un punto $x \in [p,q]$ tal que $q \neq x \neq p$. Veremos que $\eta_p(x) \cap \eta_q(x) = [p,x] \cap [x,q] = \{x\}$. Supongamos, por el contrario, que existe $y \neq x$ en $[p,x] \cap [x,q]$. Como $y \in [p,x]$, tenemos que $[p,y] \subset [p,x]$; de manera similar $[y,q] \subset [x,q]$. Por 6.27, tenemos que $[p,y] \cup [y,q] = [p,q]$. Como $x \in [p,q]$, tenemos que $x \in [p,y]$ o $x \in [y,q]$. En el primer caso tenemos que $[p,y] = [p,x]$, lo que contradice la inyectividad de η_p, en tanto que si $x \in [y,q]$, tendríamos que $[y,q] = [x,q]$, lo que contradice la inyectividad de η_q. De esta contradicción se desprende que $\eta_p(x) \cap \eta_q(x) = [p,x] \cap [x,q] = \{x\}$.

Por lo anterior tenemos que $[p,q] - \{x\} = ([p,q] - \{x\}) \cup ([p,q] - \{x\}) =$ es una disconexión para $[p,q] - \{x\}$, lo que muestra que todo punto distinto de p y de q es de corte. Esto, combinado con que $[p, q]$ tiene al menos dos puntos extremos, nos muestra por 1.6 que $[p, q]$ es un arco. ■

En el teorema anterior es necesario que la función η_p sea inyectiva para todo $p \in X$. Para ver ello, consideremos la siguiente figura. En ella, η_p es inyectiva sólo para los puntos que se encuentran en el segmento límite.



Enseguida veremos un resultado que es corolario de un teorema de R. J. Koch en [3]. Aunque la prueba que daremos es distinta, usaremos en ella ideas similares a las de él.

Necesitaremos las siguientes definiciones:

Definición 6.29 *Sean X un continuo y $\leq$ un orden parcial. Si a y b son dos puntos en X tales que $a \leq b$ denotamos por $(a; b)$ al conjunto $\{x \in X : a \leq x \leq b \text{ y } b \neq x \neq a\}$*

Definición 6.30 *Sea X un continuo y sea $\leq$ un orden parcial en X. Decimos que un subconjunto C de X es una cadena si $\leq$ es un orden total (i.e. tricotómico) en C. Diremos que C es una δ-cadena si C es una cadena y cada vez que a y b son dos puntos tales que $a < b$ y para los cuales el intervalo $(a; b) = \emptyset$, tenemos que $d(a, b) \leq \delta$. Decimos que C es cerrada si C es un subconjunto cerrado de X.*

Definición 6.31 *Sea X un continuo y sea $\leq$ un orden parcial en X. Sea C una cadena y sea $q \in C$. Decimos que un punto c es δ-accesible desde q si $c = q$ o si existen un número natural $n \geq 1$ y elementos $c_0, c_1, ...c_n \in C$ tales que $c_0 = q$, $c_n = c$ y $d(c_i, c_{i+1}) \leq \delta$ para toda $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.*

Observación 6.32 *Sea X un continuo. Si un punto d es δ-accesible desde q y un punto r es tal que $d(r, d) < \delta$, entonces r es δ-accesible desde q, pues considerando los elementos $c_0, c_1, ...c_n$, c_{n+1} con $c_0 = q$, $c_n = c$ y $c_{n+1} = r$ obtenemos el resultado.*

Lema 6.33 *Sean X un continuo, $\leq$ un orden parcial cerrado y $C \subset X$ una cadena cerrada con elemento mínimo y elemento máximo. Si $A \subset C$ es un conjunto no vacío y cerrado, entonces existe mín A y máx A.*

Demostración. Sea $A \subset C$ un conjunto cerrado y, dada $a \in A$, consideremos el conjunto $A_a = \{y \in A : y \leq a\}$. Puesto que C es cerrada y el orden es cerrado, tenemos que A_a es un conjunto cerrado no vacío ($a \in A_a$). Como $\{A_a : a \in A\}$ está anidada (es un orden total) y satisfacen que la propiedad de la intersección finita de sus miembros es no vacía, tenemos (por la compacidad de C) que $\bigcap\{A_a : a \in A\} \neq \emptyset$. De este modo tomemos un elemento $x \in \bigcap\{A_a : a \in A\} \subset A$. Es claro que $x \leq a$ para toda $a \in A$ y $x \in A$. Esto muestra que x es un mínimo para A. Si existiera otro elemento $y \in A$ que es menor o igual que todos los elementos de A, entonces $x \leq y$ y $y \leq x$ por lo que $x = y$. De este modo el mín A está bien definido. La prueba para encontrar el máximo es análoga. ■

Notemos que las cadenas no tienen por que ser conexas ni tampoco cerradas y que en la definición anterior, los puntos $c_0, c_1, ...c_n$ no tienen por que estar ordenados ni creciente ni decrecientemente.

Lema 6.34 *Sea X un continuo y sea C una δ-cadena cerrada con elemento máximo (respectivamente, mínimo) $q \in C$. Entonces todos los elementos de C son δ-accesibles desde q.*

Demostración. Supondremos que C es una δ-cadena cerrada con elemento máximo q; el caso en que C tiene elemento mínimo es muy similar.

Supongamos, por el contrario, que existe un punto $d \in C$ que no es accesible desde q. Consideremos el conjunto $A = \{c \in C : c$ es δ-accesible desde $q\}$.

Veremos primero que A es abierto y cerrado en C.

(1) A es abierto. Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $r <$ mín $\{\delta, \varepsilon\}$ y $b \in B(r, a) \cap C \subset B(\varepsilon, a)$. Entonces $d(b, a) < r < \delta$, y por la observación 6.32 b es accesible. De este modo $B(r, a) \cap C \subset A$.

(2) A es cerrado. Sea $b \in \bar{A}$, por lo que $B(\delta, b) \cap A \neq \emptyset$. Tomemos $y \in B(\delta, b) \cap A$. Como $b \in A$ y $d(y, a) < \delta$, de 6.32 tenemos que $b \in A$.

Por lo anterior, A y $C - A$ son cerrados en C.

Consideremos el conjunto $C_1 = \{c \in C : c \in A$ y $d \leq c\}$. Ya que el orden es cerrado, tenemos que C_1 es un cerrado en C (y, por lo tanto, también en X). Tenemos que C es no vacío, pues el elemento máximo q pertenece a C_1.

Sea $m = \text{mín}\, C_1$, lo cual está justificado por 6.33. Ahora consideremos el conjunto $C_2 = \{c \in C : c \in X - A \text{ y } d \leq c \leq m\}$. Como $X - A$ es un conjunto cerrado y el orden parcial es cerrado, tenemos que C_2 es un conjunto cerrado en C. Notemos que $d \in C_2$, por lo que $C_2 \neq \emptyset$. Por 6.33, podemos tomar $o = \text{máx}\, C_2$.

Observemos que $d \leq o \leq m$ y que si un punto r es tal que $d \leq o \leq r \leq m$, entonces tenemos por las definiciones de m y de o que $r = o$ o $r = m$. De lo anterior deducimos que $(o; m) = \emptyset$. De la definición de δ-cadena, tenemos entonces que $d(m, o) \leq \delta$. Ahora, como $m \in A$, se sigue de 6.32 que $o \in A$; lo cual no es posible puesto que $o \in C_2$. Esto termina la prueba de la δ-accesibilidad de todos los puntos de C. ■

Observación 6.35 *Sea X un continuo, $\delta > 0$ y A y B dos cerrados no vacíos. Supongamos que una δ-cadena cerrada C con elemento máximo (mínimo, respectivamente) es tal que $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ y $C \subset A \cup B$, entonces $d(A, B) \leq \delta$.*

Demostración. Haremos el caso en que C tiene elemento máximo; el caso en que C tiene elemento mínimo es muy similar.

Supongamos que el elemento máximo a de C está en A y tomemos un elemento b en $B \cap C$. Por 6.34, b es δ-accesible desde a, por lo que existen $n \in \mathbb{N}$ y puntos $c_0, c_1, ..., c_n$ tales que $c_0 = a$, $c_n = b$ y $d(c_i, c_{i+1}) < \delta$ para $i \in \{0, ..., n-1\}$.

Tomemos $I = \text{máx}\, \{i \in \{0, ..., n\} : c_i \in A\}$ y notemos que $I < n$. Tenemos entonces que $c_I \in A$ y $c_{I+1} \in B$; además de que $d(c_I, c_{I+1}) < \delta$, por lo que $d(A, B) \leq \delta$. ■

Lema 6.36 *Sean X un continuo y $\leq$ un orden parcial cerrado en X. Si $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente de cadenas cerradas en X, entonces $\text{lím}\, C_n$ es una cadena cerrada.*

Demostración. Basta con ver que $\text{lím}\, C_n$ es una cadena. Tomemos a y b en el $\text{lím}\, C_n$. Por 1.16 existen sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes a a y a b, respectivamente y tales que a_n y $b_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que cada C_n es una cadena, tenemos que $a_n \leq b_n$ para un número infinito de números n o que $b_n \leq a_n$ para un número infinito de números n; supongamos, sin perdida de generalidad, que ocurre lo primero. Tomando una subsucesión apropiada, tenemos que $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Tomando el límite y usando que el orden es cerrado tenemos que $a \leq b$. ■

Lema 6.37 *Sean X un continuo y $\leq$ un orden parcial cerrado en X. Si C es una cadena, entonces $\overline{C}$ es una cadena.*

Demostración. Tomemos a y b en $\overline{C}$. Por definición de $\overline{C}$ existen sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes a a y a b respectivamente y tales que a_n y $b_n \in C$. Ya que C es una cadena, tenemos que $a_n \leq b_n$ para un número infinito de números n o que $b_n \leq a_n$ para un número infinito de números n. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que ocurre lo primero. Tomando una subsucesión apropiada tenemos que $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Tomando el límite y usando que el orden es cerrado tenemos que $a \leq b$. ■

Lema 6.38 *Sean X un continuo, $q \in X$ y $\delta > 0$. Si $\leq$ un orden parcial cerrado en X, entonces existe una δ-cadena cerrada maximal H (con respecto a la inclusión) que tiene a q.*

Demostración. Sea $\delta > 0$, $q \in X$ y consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \{C : C$ es una δ-cadena y $q \in C\}$. Notemos que $\mathcal{A}$ es no vacío pues $\{q\} \in \mathcal{A}$. Para probar que existe una cadena con las propiedades deseadas usaremos el Lema de Zorn aplicado a la familia de conjuntos $\mathcal{A}$ con el orden parcial dado por la inclusión. Para ello notemos que si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una familia de δ-cadenas en la cual la inclusión induce un orden total en $\mathcal{B}$, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ es nuevamente una cadena (pues las cadenas están anidadas); aunque no sabemos si sea cerrada. Basta, pues con probar que $\overline{\bigcup \mathcal{B}}$ es también una δ-cadena. Ahora, $\overline{\bigcup \mathcal{B}}$ es una cadena por 6.37.

Para probar que $\overline{\bigcup \mathcal{B}}$ es una δ-cadena, tomemos a y $b \in \overline{\bigcup \mathcal{B}}$ y supongamos que $a \leq b$ así como que $(a; b) = \emptyset$ y $a \neq b$. Tomemos una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n \in \mathcal{B}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, para la cual existan dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes a a y a b, respectivamente y tales que a_n y $b_n \in B_n$. Podemos suponer, además que $a_n \leq b_n$ (se cumple esta desigualdad para una infinidad de números n o se da la contraria para una infinidad de números n. Pero esto último implicaría que $b \leq a$, lo que nos llevaría a que $b = a$, que es un absurdo).

Sea $H_n = \{h \in B_n : a_n \leq h \leq b_n\}$ y notemos que H_n es una δ-cadena cerrada con elemento máximo b_n. Ahora, por 6.34, todo elemento de H_n es δ-accesible desde b_n y desde a_n.

Resta probar que $d(a, b) \leq \delta$. Para ello, supongamos, por el contrario, que $d(a, b) > \delta$ y tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $d(\overline{B(\varepsilon, a)}, \overline{B(\varepsilon, b)}) > \delta$ y supongamos que $a_n \in B(\varepsilon, a)$ y $b_n \in B(\varepsilon, b)$ para toda $n \in \mathbf{N}$. Dada $n \in \mathbf{N}$, puesto que todo punto de H_n es δ-accesible tanto a a_n como a b_n, tenemos que $H_n \not\subset \overline{B(\varepsilon, a)} \cup \overline{B(\varepsilon, b)}$, de manera que existe h_n tal que $a_n \leq h_n \leq b_n$ y tal que $d(h_n, a) > \varepsilon$ y $d(h_n, b) > \varepsilon$. Tomando una subsucesión convergente si fuera necesario, podemos pensar que $h_n \to h$ para alguna $h \in \overline{\bigcup \mathcal{B}}$. Tomando límites tenemos que $d(h, a) \geq \varepsilon$ y que $d(h, b) \geq \varepsilon$ y, como el orden es cerrado, tenemos que $a \leq h \leq b$; pero $(a; b) = \emptyset$, de modo que $h = a$ o $h = b$. De lo anterior deducimos que $d(h, a) = 0$ o bien que $d(h, b) = 0$; una contradicción.

Lo anterior prueba que $\overline{\bigcup \mathcal{B}}$ es una δ-cadena, por lo que una aplicación del Lema de Zorn nos da la existencia de una δ-cadena cerrada maximal con respecto a la inclusión y que contiene a q. ■

Los teoremas anteriores se refieren a órdenes cualesquiera parciales cerrados en continuos. Para el siguiente lema usaremos una propiedad del orden débil $\leq_p$ en continuos hereditariamente unicoherentes.

Lema 6.39 *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente con orden débil $\leq_p$, $y \neq p$ un punto de X y $\delta > 0$. Entonces existe un punto $x \in X$ tal que $p <_p x <_p y$ y $d(x, y) < \delta$.*

Demostración. Consideremos el continuo $[p, y]$ y tomemos un número $\varepsilon > 0$ tal que $p \notin \overline{B(\varepsilon, y)}$ y $\varepsilon < \delta$. Ahora, si ocurriera que $Fr(B(\varepsilon, y)) \cap [p, y] = \emptyset$, tendríamos que $B(\varepsilon, y) \cap [p, y]$ y $(X - B(\varepsilon, y)) \cap [p, y]$ serían una disconexión del continuo $[p, y]$, lo cual no es posible. Por lo anterior, podemos tomar un punto $x \in Fr(B(\varepsilon, y)) \cap [p, y]$. Por la elección de ε tenemos que $x \neq p$ y que $x \neq y$. Como $x \in [p, y]$ tenemos que $[p, x] \subset [p, y]$, de modo que $p <_p x <_p y$ y $d(x, y) < \delta$. ■

Teorema 6.40 *Si X es un continuo hereditariamente unicoherente y $p \in X$ es un punto tal que el orden $\leq_p$ es un orden parcial cerrado, entonces X es conexo por trayectorias y es, por lo tanto, un dendroide.*

Demostración. Sea $q \in X - \{p\}$. Notemos que el orden restringido a $[p, q]$ es un orden parcial cerrado con elemento mínimo p y elemento máximo q por lo que podemos suponer que $X = [p, q]$. Mostraremos que $[p, q]$ es un arco.

Primero mostraremos que $[p, q]$ es una cadena conexa. La técnica para probar esto último consistirá en construir una sucesión de $\frac{1}{n}$-cadenas cerradas maximales C_n que contengan a p y después probar que el límite es una cadena conexa que contiene a p y a q, por lo que $[p,q] = \text{lím } C_n$ será una cadena conexa.

Por el Lema 6.38 tenemos que, para cada n, existe una $\frac{1}{n}$-cadena cerrada maximal C_n que tiene a q. Probaremos enseguida que $p \in C_n$. Supongamos, por el contrario, que $p \notin C_n$ y tomemos $m = \text{mín } C_n$. Por 6.39 tenemos que existe un punto $y \in C_n$ tal que $p <_p y <_p m$ y $d(y,m) < \frac{1}{n}$. Notemos que $y \notin C_n$. De este modo $C_n \subsetneq C_n \cup \{y\}$, lo cual contradice la maximalidad de C_n. De este modo $p \in C_n$.

Tomando una subsucesión convergente si fuera necesario, supongamos que C_n converge a un cerrado C en 2^X. Por 6.36 tenemos que C es una cadena cerrada, y ya que $p \in C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $p \in C$ (1.26).

Enseguida veremos que C es un conjunto conexo.

Supongamos, por el contrario, que existen dos abiertos ajenos U y V tales que $U \cap C \neq \emptyset$, $V \cap C \neq \emptyset$ y $C \subset U \cup V$; supongamos también que $q \in V$. Por la normalidad de X, y ya que C es cerrado, podemos suponer, además, que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Ya que, por 1.27, el conjunto $\{A \in 2^X : A \subset U \cup V\}$ es una vecindad en 2^X de C, podemos tomar $M \in \mathbb{N}$ tal que $C_M \subset U \cup V$. y de tal modo que $d(\overline{U}, \overline{V}) > \frac{1}{M}$. Tomemos un punto $r \in U \cap C$, el cual, por 6.34 es $\frac{1}{M}$-accesibles desde q. Como $C_M \subset \overline{U} \cup \overline{V}$, tenemos, por la observación 6.35, que $d(\overline{U}, \overline{V}) \leq \frac{1}{M}$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que C es una cadena conexa que tiene a p y a q.

Por lo anterior, tenemos que $[p,q] \subset C$ y entonces $[p,q] = C$. De este modo, $[p,q]$ es un conjunto que esta totalmente ordenado con el orden $\leq_p$. Probaremos ahora que $[p,q]$ es un arco, para lo cual nos valdremos de 1.6.

Tomemos un punto $x \in [p,q]$ tal que $p <_p x <_p q$. Probaremos que x es un punto de corte de $[p,q]$. Para tal fin, tomemos los conjuntos $H = \{c \in C : x \leq c\}$ y $L = \{c \in C : c \leq x\}$.Como en $[p,q]$ el orden es tricotómico, tenemos que $[p,q] \subset H \cup L$. También, puesto que el orden parcial es cerrado tenemos que H y L son cerrados y que si $x \in H \cap L$, entonces $c \leq x \leq c$. De lo anterior deducimos (es un orden parcial) que $x = c$, por lo que $H \cap L = \{x\}$. De este modo $[p,q] - \{x\} = (L - \{x\}) \cup (H - \{x\})$, $p \in L$, $q \in H$ y $(L - \{x\}) \cap (H - \{x\}) = \emptyset$. De manera que $(L - \{x\})$ y $(H - \{x\})$ forman una disconexión de $[p,q] - \{x\}$, por lo que x es un punto de corte de $[p,q]$. Esto aunado a que todo continuo tiene al menos dos puntos extremos, implica que $[p,q]$ tiene exactamente 2 puntos extremos. Por lo anterior, de 1.6 obtenemos que $[p,q]$ es un arco. Esto termina la prueba. ■

El teorema anterior nos permitirá generalizar los teoremas anteriores:

Teorema 6.41 *Si X es un continuo hereditariamente unicoherente, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) X es un dendroide suave

(2) Existe un punto $p \in X$ tal que η_p es inyectiva y semicontinua superiormente, y

(3) Existe un punto $p \in X$ tal que η_p es inyectiva y X es homeomorfo a $D(X,p)$ (con el homeomorfismo dado por η_p)

Demostración.

(1)$\Rightarrow$(2) Si X es un dendroide suave, entonces η_p es un homeomorfismo, por lo que es inyectiva y semicontinua superiormente.

(2)$\Rightarrow$(3) Como η_p siempre es semicontinua inferiormente (ver 6.11), tenemos que η_p es continua. Ya que η_p es inyectiva, tenemos que η_p es un homeomorfismo de X a $D(X,p)$

(3)$\Rightarrow$(1) Como η_p es inyectiva, tenemos que $\leq_p$ es un orden parcial. Usando el homeomorfismo η_p entre X y $D(X,p)$, observemos que $\leq_{pp}$ es un orden también parcial en $D(X,p)$; pero por el comentario en el párrafo anterior a 6.16, el orden $\leq_{pp}$en $D(X,p)$ siempre es cerrado, de manera, usando el homeomorfismo η_p (que preserva el orden), tenemos que $\leq_p$ es un orden parcial cerrado en X; así que por 6.40 tenemos que X es conexo por trayectorias. Como el orden débil $\leq_p$ es cerrado, tenemos que X es un dendroide suave por 6.17. ■

Capítulo 7

Preguntas.

Como ya se había dicho en el primer capítulo, el hiperespacio de arcos ha sido poco estudiado, por lo que, incluso preguntas elementales no han tenido respuesta. En el presente trabajo surgieron muchas preguntas, y de algunas se pudo hallar una respuesta parcial.

¿Existe un dendroide que no sea dendrita para el cual $F_2(X)$ sea homeomorfo a $A_s(X)$?

En los capítulos 4 y 5 se intentaron dar elementos para resolver esta pregunta; muchos ejemplos han sido descartados; pero el ejemplo del capítulo 5 muestra que la búsqueda debe ir mas alla de las propiedades que nacen de la conexidad local.

¿Si de cada uno (de alguno, respectivamente) de los puntos de ramificación de un arco ab no nace ningún arco cercano a ab, entonces ab no es un punto de conexidad local de $A_s(X)$?

Esta es, por ejemplo, la herramienta que sería excelente para poder dar una argumentación formal para el ejemplo en que tanto el hiperespacio de arcos como $F_2(X)$ tenian su conjunto de conexidad local vacío.

¿Hay un dendroide con un punto de conexidad local que no sea de conexidad local por trayectorias?

En algunos teoremas del capítulo 5 se hace mención especial de los espacios que tienen una base local de vecindades conexas por trayectorias. Sorprendentemente, un ejemplo de un dendroide sín esas características no fue encontrado; aunque es muy posible que exista alguno.

¿Qué implica que el espacio de arcos sea compacto en un dendroide?(¿suavida débil en algún punto?)

En el libro de Nadler [7, p. 611]se dan algunas consecuencias de que el hiperespacio de arcos sea compacto; por ejemplo: si el hiperespacio de arcos de un continuo conexo por trayectorias es compacto, entonces el continuo tiene la propiedad del punto fijo. Poco antes de ello, Nadler menciona que el cono de un continuo tiene hiperespacio de arcos compacto si y sólo si el continuo no posee arcos. De este modo, el cono sobre el pseudo-arco es un ejemplo de un continuo conexo por trayectorias con hiperespacio de arcos compacto y que no es un dendroide.

Siguiendo esta misma línea, en el caso de los dendroides se esperaría resultados mucho mas fuertes.

¿Hay espacios que no sean dendritas para los cuales $A_s(X)$ y $F_2(X)$ *coincidan?¿Espacios distintos del intervalo* $[0,1]$ *para los cuales* $A_s(X)$ *y* $C(X)$ *sean homeomorfos?*

Esta es, en cierto sentido una generalización de la primera pregunta: ni siquiera se conocen otros espacios para los que $A_s(X)$ y $F_2(X)$ coincidan.

¿Es la dimensión de $A_s(X)$ *igual a la de* $F_2(X)$ *siempre?¿para continuos unidimensionales?*

En particular, no se conoce la respuesta para el pseudo-arco

¿Si P *es el pseudo-arco, cuál es la dimensión de* $P \times P$*?, ¿Qué características tiene su hiperespacio de arcos?*

Debido a que $A_s(P) = F_1(P)$ este espacio puede ser fuente de muchos contraejemplos.

¿Puede L(F2(X)) * *ser un conjunto que no sea localmente conexo?*

La respuesta a esta pregunta sería un avance para la solución de la primera pregunta.

¿Si As(X) contiiene un subcontinuo con L(As(X)) no localmente conexo, implica que F2(X) ** *no es homeomorfo a As(X)?*

Una versión más específica de la pregunta anterior.

* $L(F_2(X))$

** $F_2(X)$

Referencias

[1] Dugundji, James, *Topology*, Series in Advanced Mathematics, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[2] Illanes, Alejandro y Nadler, Sam B., Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1999.

[3] Koch, R. J., *Arcs in partially ordered spaces*, Pacific J. Math. **9** (1959), pp. 723-728.

[4] Koch, R. J. y Krule, I. S., *Weak cutpoint ordering on hereditarily unicoherent continua*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), pp. 679-681

[5] Lum, Lewis, *Weakly smooth dendroids*, Fund. Math. **83**, (1974), pp. 111-120

[6] Martínez de la Vega, Verónica, *El hiperespacio de continuos con la topología producto*, Tesis de Licenciatura (Matemáticas), Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 1998.

[7] Nadler, Sam B., Jr. *Hyperspaces of sets.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1978.

[8] Nadler, Sam B., Jr. *Continuum Theory, An Introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1992.