

00384

5



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

GRÁFICAS ITERADAS DE CLANES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

M.C. MARTÍN EDUARDO FRÍAS ARMENTA

DIRECTOR DE TESIS: MAT. VICTOR MANUEL NEUMANN LARA

283091



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Mat. Victor Neumann Lara por su dirección y apoyo en la realización del presente trabajo. A mi jurado por el tiempo dedicado a leer y corregir mi tesis: Dr. Francisco Larrión Riveroll, Dra. Hortensia Galeana Sánchez, Dr. Jorge Luis Arocha Pérez, Dr. Jorge Urrutia Galicia, Dr. Javier Bracho Carpizo, Dr. Eduardo Rivera Campo. A DGEP por su apoyo económico. Al Instituto de Matemáticas de la UNAM, en especial a la unidad Cuernavaca, por las facilidades para realizar este trabajo. Y a la familia Rivermar Molina por brindarme residencia.

A Darwel Aguirre Sanz, el amor de mi vida.

A mis padres, Refugio Jovita Armenta García y Eduardo Frías Zamorano.

Gráficas Iteradas de Clanes

Resumen de Tesis Doctoral

Sea G una gráfica, las subgráficas completas maximales de G son los clanes de G . La gráfica de clanes ($k(G)$) de G es la gráfica de intersección de la colección de clanes de G , en otras palabras $k(G)$ tiene un vértice por cada clan de G y sus vértices son adyacentes cuando los clanes que representa tienen intersección no vacía. La n -ésima gráfica de clanes de G se define por inducción, es decir, es la gráfica de clanes de la $n-1$ -ésima gráfica de clanes.

El presente trabajo queda enmarcado en la línea de investigación sobre k -carácter, la cual trata de decidir si:

1. El orden de las sucesivas gráficas iteradas de clanes diverge.
2. Las sucesivas gráficas de clanes se estacionan en algún ciclo.
3. Las sucesivas gráficas de clanes convergen a un punto.

Las primeras las llamaremos k -divergentes, las segundas k -estacionarias y las últimas k -nulas.

Nuestro principal resultado es un teorema que en esencia dice que al eliminar vértices dominados (vértices que tienen su vecindad cerrada incluida en la vecindad cerrada de otro vértice) no altera el k -carácter de una gráfica.

También, se definen dismantelamientos y otras ideas relacionadas además de que se estudian sus vínculos con otros conceptos.

Y se presenta una familia de gráficas k -nulas que al pegarlas por un punto a otra gráfica H , el k -carácter de la gráfica resultante es el mismo que el de H .

Nuestro trabajo facilita la determinación del k -carácter de una gráfica.

Iterated Clique Graphs

Doctoral Thesis Summary

Let G be a graph, cliques of G are the G 's maximal complete subgraphs. The G 's clique graph ($k(G)$) is the graph of intersection of the collection of cliques of G , in others words $k(G)$ has a vertex for each clique of G and their vertexes are adjacents when the cliques that they represent have no empty intersection. The n -th graph of G 's clique is defined by induction, it means, it is the clique graph of $n-1$ -th graph of cliques.

The present work is framed on the investigation line about the k -behavior, that tries to decide if:

1. The order of successive iterated clique graphs diverges.
 2. The successive clique graphs enters in a cycle.
 3. The successive clique graphs converges to a point.
- The first ones, we call them k -diverged, the second ones we call them k -stationary and the last ones, we call them k -null.

Our main result is a theorem that says: when we eliminated dominated vertex (vertexes that have its closed neighborhood included in the closed neighborhood of the other vertex) do not change the k -behavior of the graph.

Also, we defined dismantling and other ideas related, in addition, we studied their links with other concepts

And we, also, present a family of k -null graphs that when they adhere by a point of another graph H , the k -behavior of the result graph is the same to H .

Our work make easy to decide the k -behavior of the graphs.

Contenido

1	Introducción	5
2	Preliminares	9
3	El Operador de Clanes	19
4	Desmantelamientos ($\overset{\#}{\rightarrow}$)	25
4.1	Dominación.	25
4.2	Definición de Desmantelamiento ($\overset{\#}{\rightarrow}$).	29
4.3	Propiedades de $\overset{\#}{\rightarrow}$	36
4.4	Productos y $\overset{\#}{\rightarrow}$	38
4.5	Gráficas Cubrientes y $\overset{\#}{\rightarrow}$	48
5	Resultado Principal (Invariancia de k bajo $\overset{\#}{\rightarrow}$)	53
6	Gráficas Punteadas	59
6.1	Gráficas Anuladoras.	59
6.2	Gráficas Totalmente Anuladoras.	65
6.3	Gráficas Totalmente Desmantelables de Arranque Único.	67
7	Algunas Generalizaciones del Teorema Principal	75
7.1	Una Pequeña Generalización.	75
7.2	El Operador Γ	77
7.3	Γ y Gráficas Anuladoras	79

Capítulo 1

Introducción

Sea G una gráfica, las subgráficas completas máximas de G son los clanes de G . La gráfica de clanes ($k(G)$) de G es la gráfica de intersección de la colección de clanes de G , en otras palabras $k(G)$ tiene un vértice por cada clan de G y sus vértices son adyacentes cuando los clanes que representa tienen intersección no vacía. Las gráficas $k^n(G)$ se definen por inducción, de modo que $k^n(G) = k(k^{n-1}(G))$.

Importante para el estudio de gráficas iteradas de clanes, antes de el estudio propiamente dicho, es un artículo de Hamelink [20] publicado en 1968 donde da una condición suficiente para que una gráfica sea la gráfica de clanes de otra, esta condición es: Para cualquier colección de clanes $\{k_{i_1}, \dots, k_{i_t}\}$ de G que formen un clan de $k(G)$, se tiene que $k_{i_1} \cap \dots \cap k_{i_t} \neq \emptyset$. Roberts y Spencer [44] dan una caracterización de las gráficas que son la gráfica de clanes de otra gráfica, a saber: una gráfica G es gráfica de clanes de otra, si existe una cubierta de G de subgráficas completas que cumplen con la propiedad H de Helly: si un conjunto de segmentos en la recta se intersectan dos a dos se intersectan todos a la vez. Este resultado contiene claramente al de Hamelink [20] ya que el conjunto de clanes cubren a G , y cada clan es una gráfica completa. Sin embargo, el estudio de gráficas iteradas de clanes propiamente dicho inicia con Hedetniemi y Salater [23] que da una caracterización de la segunda gráfica de clanes de las gráficas que no tienen triángulos: la subgráfica inducida por todos los vértices que tienen grado mayor o igual a 2.

Revisando la investigación realizada hasta el momento, sobre gráficas iteradas de clanes nos encontramos que podemos agruparla en cuatro, líneas de

estudio:

1. k – *carácter* : Decidir si el orden de las sucesivas gráficas iteradas de clanes diverge, si la gráfica se estaciona en algún ciclo o se va a un punto.
2. Diámetro: Que le sucede al diámetro de las sucesivas gráficas iteradas de clanes: diverge, permanece constante, crece de uno en uno, está acotado, decrece, etcétera.
3. Clases de gráficas cerradas bajo k : Son clases de gráficas que al aplicarles el operador de clanes a sus miembros la gráfica resultante cae en la misma clase.
4. Temas varios: Contribuciones varias que no podemos poner en las otras clasificaciones.

k – *carácter* : Este grupo es el más grande [1, 3, 7, 9, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 37, 40, 41]. En esta línea de trabajo, los primeros en tener una aportación son Escalante [9] que para cada n muestra una gráfica tal que $k^n(G) \cong G$, es decir, da una familia infinita de gráficas estacionarias. Y Neumann-Lara que prueba que existe una gráfica de orden divergente (el octaedro), esto último también lo reporta Escalante [9] (que existen gráficas k –*nulas* es trivial, cualquier trayectoria es k –*nula*), la existencia de gráficas de cada k –*carácter* quedó saldado con esto.

De los sólidos platónicos se sabe desde el principio que uno es k – *nulo* $k(\text{tetraedro}) = K_1$, dos son periódicos de periodo dos $k^2(\text{cubo}) = \text{cubo}$ y $k^2(\text{dodecaedro}) = \text{dodecaedro}$, y como ya se dijo el $\circ(k^n(\text{octaedro}))$ tiende a infinito con la n ; la pregunta de cuál es el k –comportamiento del icosaedro permaneció casi 30 años y fue contestada por Pizaña [40], quien concluye que es k – *divergente*.

Larrión y Neumann [28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 37] han aportado mucha teoría a esta línea de investigación.

Diámetro: En este punto lo que hemos encontrado en la literatura es [2, 5, 7, 25, 31, 39] en [7] y [25] se acota el crecimiento del diámetro, esto es, $d(G) + 1 \geq d(k(G)) \geq d(G) - 1$, mientras que en [31] se muestran ejemplos de gráficas de diámetro divergente.

Clases de gráficas cerradas bajo k : En este apartado podemos incluir [3, 8, 9, 26], aquí podemos destacar un resultado debido a Escalante [9]: el conjunto de las gráficas cuyo conjunto de clanes tienen la propiedad H de Helly es cerrado, también en [3] recopilan otras clases cerradas a saber: clan-Helly, disco-Helly, cordales fuertes, Ptoloméicas, bloque y multiclanes.

Temas varios: En este punto podemos incluir: [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 33, 36, 44, 45]. Los resultados más destacados son el ya mencionado anteriormente de Roberts y Spencer [44] y el debido a Hazan y Neumann [22]: Un orden parcial finito tiene la propiedad del punto fijo si la gráfica de comparabilidad correspondiente es k -nula, este último en especial vuelve muy interesante el k -carácter de una gráfica.

El presente trabajo queda enmarcado en la línea de investigación sobre k -carácter. Nuestro principal resultado es el teorema 5.7 que en esencia dice que el eliminar vértices dominados (vértices que tienen su vecindad cerrada incluida en la vecindad cerrada de otro vértice) no altera el k -carácter de la gráfica.

En el capítulo 2 se describen las definiciones y resultados preliminares: gráfica, conexidad, morfismos, operaciones entre gráficas, etcétera.

En el capítulo 3 se define la gráfica de clanes, se dan algunos ejemplos de cómo calcular las sucesivas iteradas de clanes y se dan algunos ejemplos de gráficas en los tres distintos k -comportamientos.

En el capítulo 4 se define qué es un vértice dominado, qué es desmantelamiento, qué es un desmantelamiento corto, qué es un núcleo, qué es un prenúcleo; la relación que hay entre los desmantelamientos y:

1. El operador de clanes.
2. Las operaciones entre gráficas.
3. Las gráficas cubrientes.

En el capítulo 5 en esencia se da la prueba del resultado principal (teorema 5.7): eliminar vértices dominados no altera el k -carácter de G .

En el capítulo 6 se estudian las gráficas punteadas, éstas podrían llevar a solucionar el problema de qué es lo que sucedería con el k -carácter de dos gráficas al pegarlas por un punto, si se sabe de antemano que una es k -nula y se sabe el k -carácter de la otra.

En el capítulo 7 se dan algunas generalizaciones del resultado principal.

Durante el desarrollo de este trabajo hemos empleado frecuentemente un programa de computación que permite calcular la gráfica de clanes de una gráfica dada, este programa fue diseñado por Miguel Angel Pizaña y Francisco Larrión. Este programa nos permitió estudiar el k -caracter de numerosos casos particulares.

Capítulo 2

Preliminares

Una *gráfica* $G = (V, E)$ es un par formado por un conjunto V (ó $V(G)$) llamado conjunto de vértices y por un conjunto de pares no ordenados E (ó $E(G)$) de elementos de V llamados aristas; una arista $e \in E$ se denotará a veces por los vértices que la componen (ejemplo uv ó $[u, v]$). Se dice que $v, w \in V(G)$ son *adyacentes* si $vw \in E(G)$. Los *vértices terminales* de la arista uv son u y v . El *grado* $grad(v)$ de un vértice v es el número de aristas que contienen a v , (en la figura 2.1 $grad(v_1) = 3$). Un *camino* de u a v ó uv -camino es una sucesión de vértices v_0, v_1, \dots, v_l tal que $u = v_0, v = v_l$ y cada par de vértices consecutivos son adyacentes. La longitud de un camino es el número de aristas que figuran en el camino. Se dice que un camino es nulo si tiene longitud cero. Un camino no nulo cuyos extremos son iguales (resp. distintos) se llama cerrado (resp. abierto). Un camino que no repite

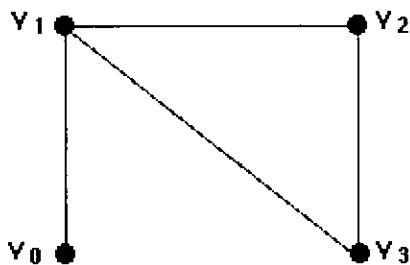


Figura 2.1

aristas (resp. vértices) se llama paseo (resp. trayectoria).

Sea G una gráfica. Diremos que G es *conexa* si para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ existe un uv -camino. El orden $o(G)$ de G es el número de vértices de G . Una gráfica H se dice *subgráfica* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Una *subgráfica inducida* H de G es una subgráfica de G con $E(H)$ el conjunto de todas las aristas de $E(G)$ cuyos vértices terminales son elementos de $V(H)$, denotaremos esto como $H \subseteq_* G$.

$N[u]$ denotará la vecindad cerrada de u , $N(u)$ denotará la vecindad abierta de u .

Un r -homomorfismo de una gráfica G a una gráfica H , $f : G \rightarrow H$, es una función de $V(G)$ a $V(H)$ tal que para cualquier par de vértices adyacentes u_1, u_2 de G se tiene que $f(u_1)$ y $f(u_2)$ son adyacentes ó $f(u_1) = f(u_2)$. Un r -homomorfismo $\rho : G \rightarrow H$ es una r -retracción o retracción reflexiva si existe un r -homomorfismo $\sigma : H \rightarrow G$ tal que $\rho\sigma$ es la identidad en H .

Cuando para un r -homomorfismo $f : G \rightarrow H$ exista una inversa $g : H \rightarrow G$, con fg la identidad en G y gf la identidad en H diremos que f es un isomorfismo de gráficas y G y H son isomorfas ($G \cong H$). Supondremos en este trabajo que a cada gráfica G se le asociado otra gráfica $\tau(G)$ llamada su tipo de isomorfismo y que satisface las condiciones:

- $\tau(G) \cong G$
- $\tau(G) \cong \tau(G')$ si y solo si $G \cong G'$.

En este trabajo se consideran varias operaciones entre gráficas. Sean G y H gráficas, el conjunto de vértices del *producto cartesiano* $G \square H$, *producto débil* $G \times H$, *producto lleno* $G \circ H$ y *composición* $G[H]$ es el producto cartesiano $V(G) \times V(H)$. El conjunto de aristas es:

1. Para el producto cartesiano

$$E(G \square H) = \{[(x_i, y_i), (x_j, y_j)] : (x_i, y_i), (x_j, y_j) \in V(G \square H) \text{ y } x_i = x_j, y_i y_j \in E(H) \text{ ó } x_i x_j \in E(G), y_i = y_j\}.$$

Es decir, habrá una arista entre un par de vértices si en una proyección es un vértice y en la otra es una arista, ver figuras 2.2 y 2.3.

2. Para el producto débil

$$E(G \times H) = \{[(x_i, y_i), (x_j, y_j)] / (x_i, y_i), (x_j, y_j) \in V(G \times H) \text{ } x_i x_j \in E(G) \text{ y } y_i y_j \in E(H)\}.$$

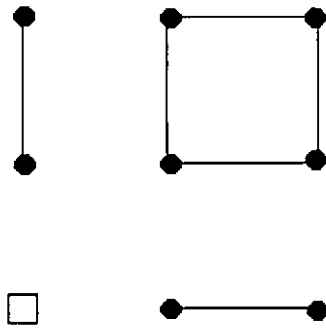


Figura 2.2

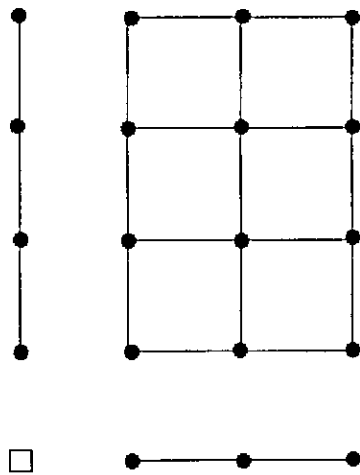


Figura 2.3

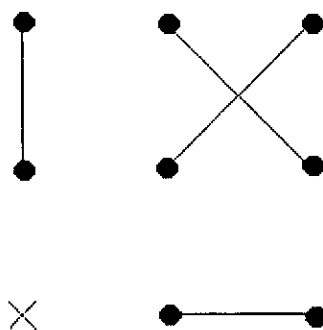


Figura 2.4

Es decir, habrá una arista entre un par de vértices si en ambas proyecciones es una arista, ver figuras 2.4 y 2.5.

3. Para el producto fuerte

$$E(G \boxtimes H) = \{[(x_i, y_i), (x_j, y_j)] / (x_i, y_i), (x_j, y_j) \in V(G \boxtimes H) \ x_i x_j \in E(G) \text{ y } y_i y_j \in E(H) \text{ ó } x_i = x_j, y_i y_j \in E(H) \text{ ó } x_i x_j \in E(G), y_i = y_j\}.$$

Es decir, habrá una arista entre un par de vértices si en ambas proyecciones es una arista ó un vértice, ver figuras 2.6 y 2.7.

4. Para la composición

$$E(G[H]) = \{[(x_i, y_i), (x_j, y_j)] / (x_i, y_i), (x_j, y_j) \in V(G \times H) \ x_i = x_j \in E(G) \text{ y } y_i y_j \in E(H) \text{ ó } x_i x_j \in E(G)\}. \text{ Es decir, habrá una arista entre un par de vértices si en la proyección hacia } G \text{ es arista ó si en la proyección hacia } G \text{ es un vértice y hacia } H \text{ es una arista, ver figuras 2.8 y 2.9.}$$

5. Para el producto \circ

$$E(G \circ H) = \{[(x_i, y_i), (x_j, y_j)] / (x_i, y_i), (x_j, y_j) \in V(G \circ H) \ x_i x_j \in E(G) \text{ ó } y_i y_j \in E(H) \text{ ó } x_i = x_j \text{ ó } y_i = y_j\}.$$

Es decir, habrá una arista entre un par de vértices si en cualquiera de las dos proyecciones es una arista ó un vértice, ver figuras 2.10 y 2.11 (en esta última figura está dibujado el complemento de la gráfica, ya

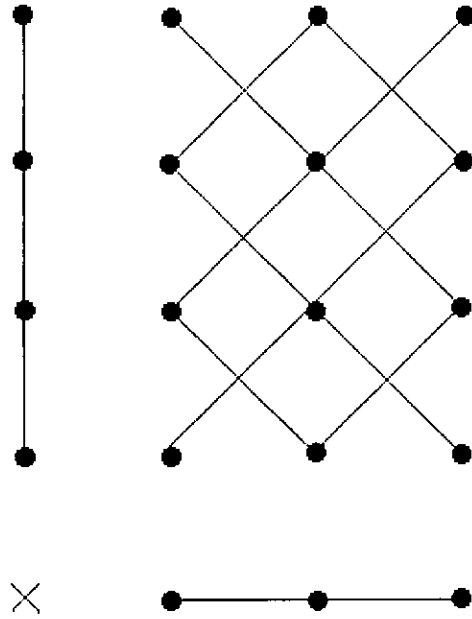


Figura 2.5

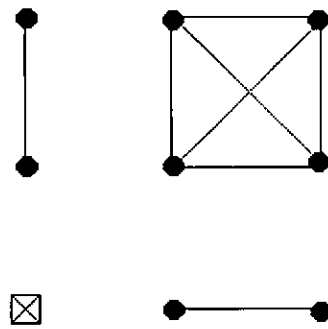


Figura 2.6

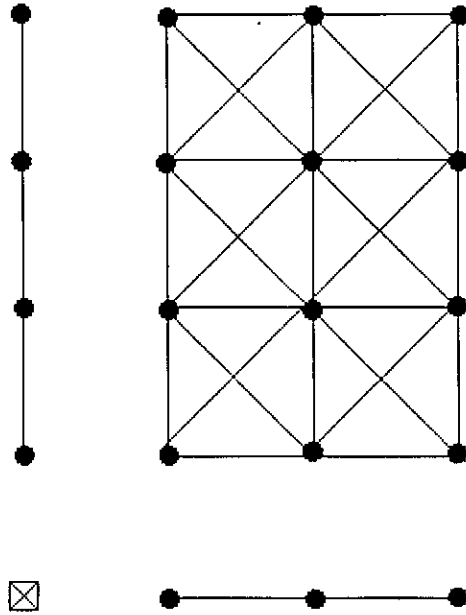


Figura 2.7

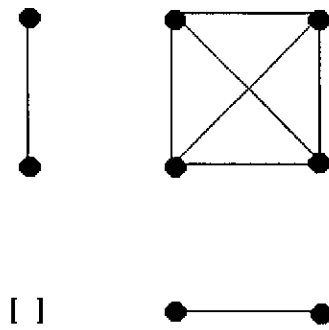


Figura 2.8

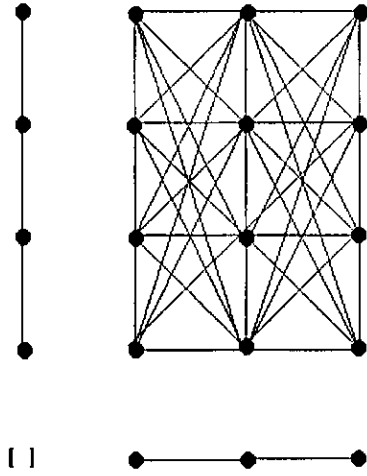


Figura 2.9

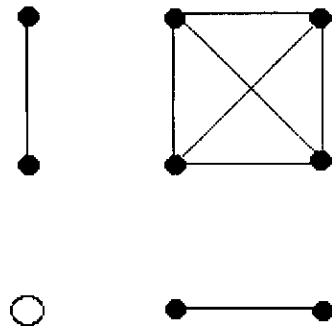


Figura 2.10

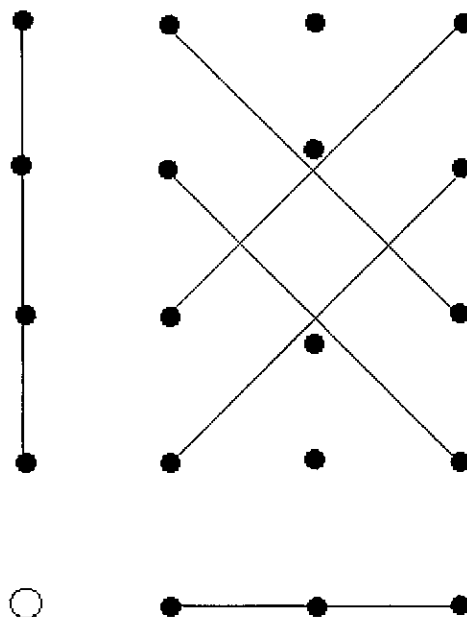


Figura 2.11

que el producto \circ produce muchas aristas; en esta gráfica sólo le faltan cuatro aristas para ser completa).

6. Suma (+)

Si G y H son gráficas, definimos la gráfica $G + H$ como sigue $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ $E(G + H) = \{[x, y] : xy \in E(G), \text{ ó } xy \in E(H) \text{ ó } x \in V(G) \text{ y } y \in V(H)\}$.

Es decir, a diferencia de los otros operadores, los vértices son la unión

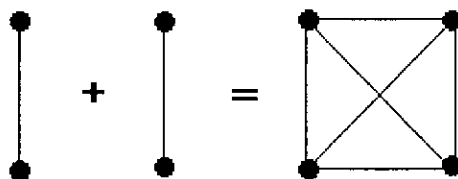


Figura 2.12

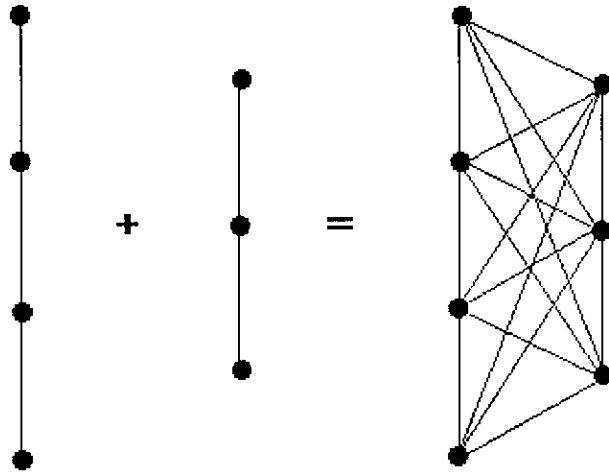


Figura 2.13

disjunta de los vértices de las dos gráficas originales. Las aristas serán las originales más una arista por cada par de vértices xy con x en una de las gráficas y y en la otra, ver figuras 2.12 y 2.13.

Observemos que las proyecciones en los productos, cartesiano débil, fuerte, o y hacia la G en la composición son r -retracciones.

Capítulo 3

El Operador de Clanes

Si A es una familia de conjuntos, la gráfica de intersección de A es una gráfica que tiene un vértice por cada conjunto de la familia y una arista entre cada par de vértices si se intersectan los conjuntos que representan (ver el ejemplo de la figura 3.1).

Una *gráfica completa* tiene una arista entre cada par de vértices, en la figura 3.2 tenemos cuatro gráficas completas.

En una gráfica arbitraria las subgráficas completas las ordenamos por inclusión, las maximales las llamaremos clanes, por ejemplo, en la gráfica de la figura 3.3 $\{u_1\} \subseteq \{u_1, u_2\}$ entonces la subgráfica inducida por $\{u_1\}$ es completa pero está contenida en la subgráfica inducida por $\{u_1, u_2\}$ por lo cual $\{u_1\}$ no es clan, ahora esta última es completa y no está contenida en ninguna otra completa, por lo que es maximal y por ello clan. Los clanes de esta figura son: $\{u_1, u_2\}$, $\{u_2, u_3, u_4\}$, $\{u_3, u_5, u_6, u_7\}$, $\{u_4, u_8\}$, $\{u_7, u_8, u_9\}$.

La gráfica de clanes $k(G)$ de G es la gráfica de intersección de la familia de clanes. En la gráfica de la figura 3.4 tenemos la gráfica de clanes de la figura 3.3, donde el v_1, v_2, \dots, v_5 representan respectivamente a $\{u_1, u_2\}$, $\{u_2, u_3, u_4\}$, $\{u_3, u_5, u_6, u_7\}$, $\{u_4, u_8\}$, $\{u_7, u_8, u_9\}$.

Observemos que si G y G' son isomorfas entonces $k(G)$ y $k(G')$ son isomorfas, es decir k respeta el tipo de isomorfismo.

Se dice que una gráfica F es **k -periódica** con periodo p si es isomorfa a $k^p(F)$ pero no a $k^q(F)$ para $1 \leq q < p$.

En la figura 3.6 tenemos una gráfica k -periódica de periodo uno, en la figura 3.5 tenemos una gráfica k -periódica de periodo dos.

Una gráfica G se dice que es **estacionaria** si existe n entero para el cual

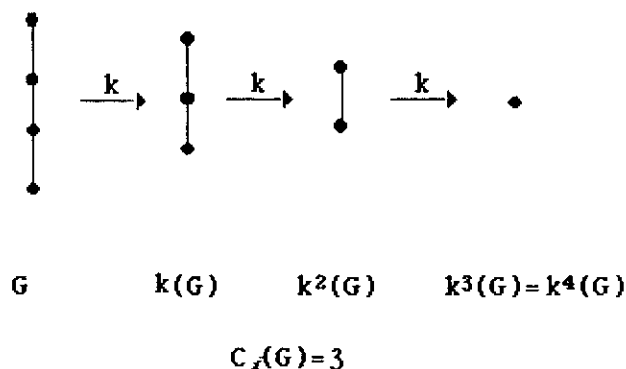


Figura 3.7

$k^n(G)$ es k -periódica, al mínimo de esos n será llamado **índice de clanes** $ci(G)$, si no existe tal n diremos que el índice de clanes es ∞ . Aplicándole tres veces el operador de clanes a la gráfica de la figura 3.3 obtenemos una gráfica k -periódica a saber la gráfica de la figura 3.6, entonces la gráfica de la figura 3.3 es estacionaria y su índice de clanes es tres.

Una clase especial de gráficas estacionarias son las k -nulas, éstas son las que se estacionan en K_1 , la gráfica de la figura 3.7 es k -nula. Diremos que G , k -diverge si $|k^n(G)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. El ejemplo más clásico de gráfica k -divergente es el octaedro (la prueba de esto se debe a Víctor Neumann y la primera vez que aparece publicada es en [9]), si consideramos a esta gráfica como parejas de vértices no adyacentes, tenemos que los clanes son todos los subconjuntos de vértices que toman un vértice de cada pareja (en la figura 3.8 tenemos al octaedro platónico O_3), entonces pensando a O_n como el conjunto de n parejas de vértices no adyacentes, cada clan se forma un elemento de cada pareja, así se tiene que O_n tiene 2^n clanes, hacemos parejas de clanes complementarios así obtenemos 2^{n-1} parejas y $k(O_n) = O_{2^{n-1}}$ (ver figura 3.9) en el caso del octaedro clásico O_3 tenemos que su gráfica de clanes es O_4 y de esta última es O_8 (ver figura 3.10) y así sucesivamente.

El octaedro es un ejemplo en el cual $ci(G) = \infty$.

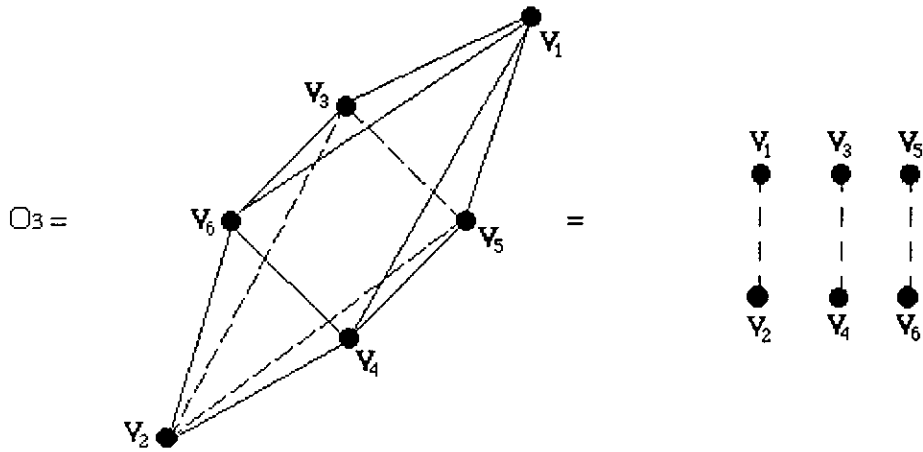


Figura 3.8

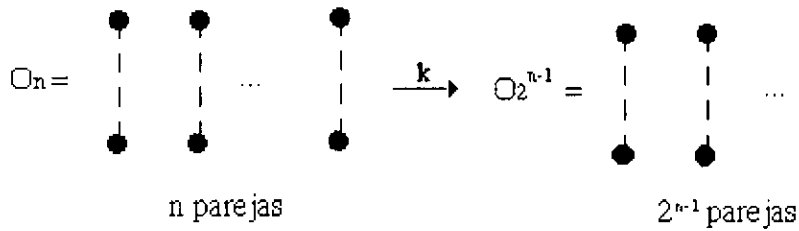


Figura 3.9

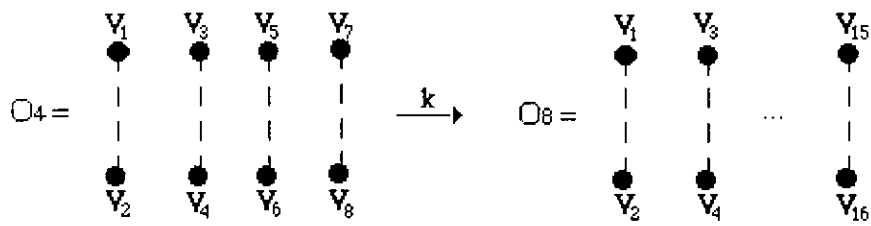


Figura 3.10

Capítulo 4

Desmantelamientos ($\overset{\#}{\rightarrow}$)

4.1 Dominación.

Definición 4.1 Si G es una gráfica, d y z elementos de $V(G)$ y $\{d, z\} \in E(G)$ diremos que d es **dominado** por z si cualquier vecino de d es también vecino a z , esto es, $N[z] \supseteq N[d]$, y escribiremos $z \succeq_G d$, (omitiremos la G cuando sea obvio a que gráfica nos referimos), esto induce un preorden en G .

En la gráfica de la figura 4.1 tenemos que $z \succeq d$ y $d \succeq z$, en general, diremos que x se relaciona o es equivalente a y ($x \sim y$) si $x \succeq y$ y $y \succeq x$, ésta es una relación de equivalencia y denotaremos por \tilde{x} la clase donde está x .

En la figura 4.2 tenemos que $z \succeq d$ pero $d \not\succeq z$, estaremos usando el símbolo $>$ para cuando tengamos dominancia y no equivalencia así en la gráfica de la figura 4.2 tenemos que $z > d$.

Proposición 4.2 [4] Los siguientes resultados son válidos para preórdenes:

1. $x \preceq y$ si y solo si $\tilde{x} \preceq \tilde{y}$.
2. Si en un preorden hacemos cociente por la relación de equivalencia, obtenemos un orden parcial.

■

Si x es adyacente a y , $x' \in \tilde{x}$, y $y' \in \tilde{y}$ entonces $y \in N[x] = N[x']$ luego $x' \in N[y] = N[y']$ así que x' es adyacente a y' .

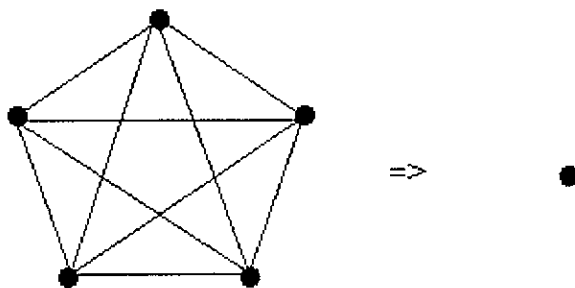


Figura 4.3

Definición 4.3 Definimos G/\sim como la gráfica cuyos vértices son las clases de equivalencia de G con la relación \sim y cuyas aristas son

$$E(G/\sim) = \{\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \subseteq V(G/\sim) : \tilde{x} \neq \tilde{y} \text{ y } \{x, y\} \in E(G)\}.$$

Debido a lo anteriormente mencionado $E(G/\sim)$ está bien definido; la gráfica cociente de la gráfica que está a la izquierda en la figura 4.3, es la gráfica que está a la derecha (K_1); la gráfica de la figura 4.5 es la gráfica cociente de la gráfica de la figura 4.4.

Observación 4.4 Si (G, \succsim) es un conjunto con el preorden de la dominación entonces $(G/\sim, \succsim)$ es un orden parcial.

Observación 4.5 Sea G una gráfica y \preceq el preorden de la dominación, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $y \in N[x]$ si y solo si $\tilde{y} \in N[\tilde{x}]$.
2. $N[x] = \{y \in G : \tilde{y} \in N[\tilde{x}]\}$.
3. $N[\tilde{x}] = \{\tilde{y} \in G/\sim : y \in N[x]\}$.
4. $N[x] \subsetneq N[y]$ si y solo si $N[\tilde{x}] \subsetneq N[\tilde{y}]$.

Una **gráfica irreducible** es una gráfica que no tiene puntos dominados, el siguiente lema nos ayudará a decidir cuando una gráfica es irreducible. En particular dice que un ciclo de longitud mayor o igual a cuatro es irreducible. El concepto de gráfica irreducible es importante para nuestro trabajo.

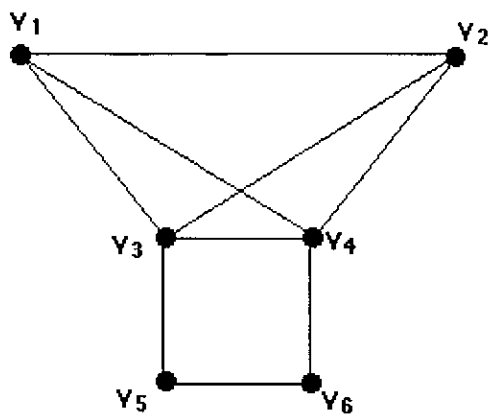


Figura 4.4

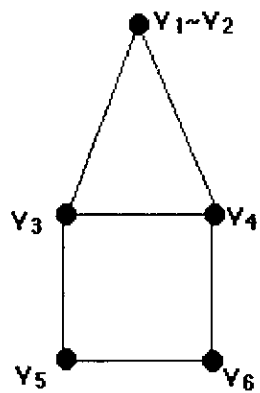


Figura 4.5

Lema 4.6 *Sea G una gráfica y $a, b \in V(G)$ adyacentes. Existen $c, d \in V(G)$, tal que c es adyacente a a , d es adyacente a b y la subgráfica inducida por $\{c, a, b, d\}$ es una línea o un ciclo de longitud cuatro, si y solo si a y b no son comparables en el preorden de dominación de G .*

Demostración

(\implies) En cualquiera de los casos $d \notin N[a]$ y $c \notin N[b]$, entonces $N[b] \not\subseteq N[a]$ y $N[a] \not\subseteq N[b]$ por tanto $b \not\prec a$ y $a \not\prec b$.

(\impliedby) Como a y b no son comparables existen $c, d \in V(G)$ tal que $c \in N[a]$, $d \in N[b]$, $c \notin N[b]$, y $d \notin N[a]$ por lo cual la subgráfica inducida por $\{c, a, b, d\}$ es una trayectoria o un ciclo de longitud cuatro.

■

4.2 Definición de Desmantelamiento ($\#$).

Definición 4.7 *Sea G una gráfica y H una subgráfica inducida de G , diremos que hay desmantelamiento corto interno de G a H , en símbolos $G \xrightarrow{\#} H$, si cada elemento de $V(G) - V(H)$ está dominado por algún elemento de $V(H)$.*

Definición 4.8 *Si G y H son gráficas, diremos que hay un desmantelamiento corto de G a H , en símbolos $G \xrightarrow{\#} H$, si existe H' subgráfica inducida de G isomorfa a H tal que $G \xrightarrow{\#_0} H'$.*

En particular, si $G \xrightarrow{\#_0} H$ se tiene $G \xrightarrow{\#} H$. Admitiremos que $G \xrightarrow{\#_0} G$. Esta expresión es cierta por vacuidad.

Observemos que si $G \cong G'$, $H \cong H'$, y $G \xrightarrow{\#} H$ entonces $G' \xrightarrow{\#} H'$, es decir $\xrightarrow{\#}$ respeta el tipo de isomorfismo.

Definición 4.9 *Sea G una gráfica y H una subgráfica inducida de G , diremos que H es un prenúcleo de G , si $G \xrightarrow{\#_0} H$ y cualquier otra gráfica F que cumpla $G \xrightarrow{\#_0} F$ y $F \subseteq_* H$ implica que $F = H$.*

Es decir, un prenúcleo es un desmantelamiento máximo en un sólo paso.

Puede haber más de un prenúcleo; al conjunto de prenúcleos de G lo denotaremos por $\mathfrak{PN}(G)$.

G se desmantela internamente a H si existe una serie de desmantelamientos cortos internos tales que $G \xrightarrow{\#_0} G_1 \xrightarrow{\#_0} \dots \xrightarrow{\#_0} H$.

Diremos que G se desmantela a H si mediante desmantelamientos cortos sucesivos a partir de G obtenemos una gráfica isomorfa a H . Diremos que una gráfica G se desmantela internamente a $v \in V(G)$ si G se desmantela internamente a $\{v\}$. Diremos que una gráfica es totalmente desmantelable si mediante desmantelamientos cortos obtenemos una gráfica isomorfa a K_1 . Así mismo el eliminar un solo vértice dominado será llamado *desmantelamiento elemental*.

Diremos que $H \subseteq_* G$ es un núcleo de G si H es irreducible y G se desmantela internamente a H . Al conjunto de núcleos de G lo denotaremos por $\mathfrak{N}(G)$.

Lema 4.10 *Si $x, y \in V(G)$, $x \lesssim y$, $x \neq y$ y H es prenúcleo de G entonces es cierta una de las siguientes dos cosas*

1. $x \notin V(H)$
2. $y \sim x$ y $y \notin V(H)$.

Demostración

Si $x \notin V(H)$ caemos en 1). Entonces veamos que pasa si $x \in V(H)$: Supongamos que $y \in V(H)$ entonces cada elemento de $(V(G) - V(H)) \cup \{x\}$ esta dominado por alguno de $V(H) - \{x\}$, así $G \xrightarrow{\#_0} H - \{x\}$ por lo que H no sería prenúcleo lo que es una contradicción, entonces $y \notin V(H)$. Ahora supongamos que $y \approx x$, como $y \notin V(H)$ entonces existe $z \in V(H)$ que domine a y , sabemos que en G todo vértice que domine a y debe de dominar a x , así $x \lesssim z$ pero por el mismo argumento anterior no puede haber en $V(H)$ un vértice que domine a x lo que es una contradicción.

■

Proposición 4.11 *Si H es un prenúcleo de G y $G \xrightarrow{\#} E$ entonces existe $E' \cong E$ tal que $G \xrightarrow{\#_0} E' \xrightarrow{\#_0} H$*

Demostración

Hagamos $n = o(G) - o(E)$, sabemos que existe $E'' \cong E$ tal que $G \xrightarrow{\#_0} E''$, sea $\{x_1, \dots, x_n\} = V(G) - V(E'')$ y sea m el menor entero para el cual $x_m \in V(H)$ entonces existe $y_m \notin V(H)$ tal que $x_m \sim y_m$. Hagamos $E'_m =$

$(E'' - \{x_m\}) \cup \{y_m\}$ al renombrar $y_1 = x_1, \dots, y_{m-1} = x_{m-1}$ tenemos que $G \xrightarrow{\#_0} E'_m$, $E \cong E'_m$ y $V(G) - V(E'_m) = \{y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$, entonces repitiendo el procedimiento anterior hasta llegar a una l tal que $V(H) \subseteq V(E'_l)$, se tiene que $E' = E'_l$ es la gráfica buscada.

■

El siguiente corolario nos da una caracterización de prenúcleo.

Corolario 4.12 *H es prenúcleo de G si y solo si $G \xrightarrow{\#_0} H$ y para cada gráfica E tal que $G \xrightarrow{\#} E$ tenemos que $E \xrightarrow{\#} H$.*

Demostración

(\implies) Por la proposición 4.11 tenemos que existe $E' \cong E$ tal que $G \xrightarrow{\#_0} E' \xrightarrow{\#_0} H$ así $E \xrightarrow{\#} H$.

(\impliedby) Sea $F \subseteq_* H$ tal que $G \xrightarrow{\#_0} F$ en particular $G \xrightarrow{\#} F$ y así $F \xrightarrow{\#} H$ por tanto $F \cong H$ y H es prenúcleo.

■

El siguiente teorema nos dice que todos los prenúcleos de una gráfica G son iguales salvo isomorfismos.

Teorema 4.13 *Un prenúcleo de G es único salvo isomorfismos.*

Demostración

Sean $H, H' \in \mathfrak{PN}(G)$ entonces $G \xrightarrow{\#_0} H$ y $G \xrightarrow{\#_0} H'$ por el corolario 4.12 tenemos que $H \xrightarrow{\#} H'$ y $H' \xrightarrow{\#} H$ por tanto $H \cong H'$.

■

Al tipo de isomorfismo de los prenúcleos lo denotaremos por $PN(G)$. Podemos definir ahora $PN^n(G) = PN(PN^{n-1}(G))$. Al mínimo n para el cual $PN^n(G) = PN^{n+1}(G)$ será llamado índice de desmantelamiento ($i_{\#}(G)$). Si tenemos que $G \xrightarrow{\#_0} H$ siempre se puede encontrar $H' \in \mathfrak{PN}(G)$ tal que $H \xrightarrow{\#_0} H'$ considerando el conjunto de vértices apropiado.

Es claro, a partir del teorema 4.13 que todos los núcleos de G son del mismo tipo de isomorfismos.

Observación 4.14 *De cualquier forma que se desmantele una gráfica se obtiene al final gráficas isomorfas.*

Proposición 4.15 Sean G y H gráficas, $G \overset{\#0}{\rightarrow} H$ si y solo si existe una retracción $\rho : G \rightarrow H$ con sección inversa la identidad y $x \lesssim_G \rho(x)$ para cada $x \in V(G)$.

Demostración

(\implies) Sea $x \in V(G)$. Si $x \in V(H)$ entonces $\rho(x) = x$. Si $x \notin V(H)$ entonces existe $y \in V(H)$ con $x \lesssim y$. Así definimos para este caso $\rho(x) = y$. Por la definición de ρ , $x \lesssim \rho(x)$. De aquí que $N_G[x] \subseteq N_G[\rho(x)]$ así ρ preserva aristas, y como la identidad en H compuesta con ρ es la identidad en H , ρ es r -retracción.

(\impliedby) Sea $x \in V(G) - V(H)$. Entonces $x \lesssim \rho(x) \in V(H)$ por tanto $G \overset{\#0}{\rightarrow} H$.

■

Esta retracción diremos que está asociada al desmantelamiento interno corto.

De igual manera tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.16 Sean G y H gráficas, $G \overset{\#}{\rightarrow} H$ si y solo si existe una retracción $\rho : G \rightarrow H$ con sección inversa $\sigma : H \rightarrow G$ y $x \lesssim \sigma(\rho(x))$ para cada $x \in V(G)$.

Demostración

(\implies) Sabemos que existe $H' \cong H$ tal que $G \overset{\#0}{\rightarrow} H'$. Sea $\sigma : H \rightarrow H'$ el isomorfismo que hay de H a H' . Compongamos la retracción de la proposición anterior con σ^{-1} y obtenemos la retracción buscada.

(\impliedby) Sea $H' = \sigma(H)$ y sea $x \in V(G) - V(H)$. Entonces $x \lesssim \sigma(\rho(x)) \in V(H')$ por tanto $G \overset{\#0}{\rightarrow} H' \cong H$.

■

Así, a esta retracción le llamaremos asociada al desmantelamiento corto.

Observemos que G es un cono si y solo si $G \overset{\#}{\rightarrow} K_1$ (ver figura 4.6).

Definición 4.17 La *gráfica recortada* $P(G)$ de una gráfica G es la subgráfica inducida por los máximos de G/\sim . $P^{i+1}(G)$ es la recortada de $P^i(G)$. El entero i más pequeño para el cual estas dos gráficas coinciden será llamado *índice de recortamiento* $P_i(G)$ de la gráfica G , y la *gráfica completamente recortada* está definida por $P^\infty(G) = P^{P_i(G)}(G)$.

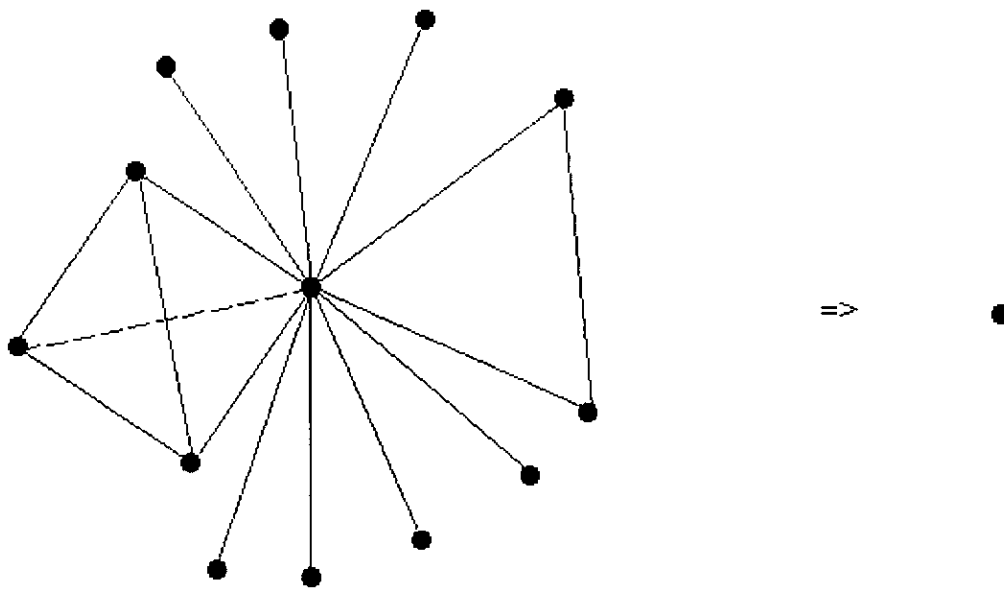


Figura 4.6

Si G es la gráfica de la figura 4.4 entonces G/\sim es la gráfica de la figura 4.5, $P(G)$ es la gráfica inducida por $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ que son los máximos, $P^2(G) = P(G)$ y $P_i(G) = 1$. Observemos que $G \xrightarrow{\#} P(G)$.

Proposición 4.18 *Si G es una gráfica entonces $P(G) \cong PN(G)$.*

Demostración:

Sea $G' \in \mathfrak{PN}(G)$ y sea $f : G' \rightarrow P(G)$, definida $f(x) = \tilde{x}$ la clase de x en G .

1. f está bien definida.

Supongamos lo contrario, es decir, existen $x \in V(G')$ y $\tilde{y} \in P(G)$, tal que $\tilde{x} < \tilde{y}$, esto implica por la observación 4.5 $x < y$ y así por el lema 4.10 $x \notin V(G')$ lo que es una contradicción.

2. f y f^{-1} preservan aristas.

Esto es por la definición 4.3.

3. f es inyectiva.

$f(x) = f(y)$ implica $\tilde{x} = \tilde{y}$ entonces $x \lesssim y$ y $y \lesssim x$ y por el lema 4.10 en $V(G')$ no puede haber más que uno de una misma clase así $x = y$.

4. f es suprayectiva.

Supongamos $\tilde{x} \in P(G)$ sin preimagen, es decir, existe $z \in V(G')$ tal que $z \notin \tilde{x}$ y $z \gtrsim y$ para cada $y \in \tilde{x}$ esto implica que $z > x$ entonces $\tilde{z} > \tilde{x}$ y así $\tilde{x} \notin P(G)$.

■

Lema 4.19 $PN(c(G)) \cong k(G)$. Más aun $k(G)$ es el único elemento de $\mathfrak{PN}(c(G))$.

Demostración

Sea $G' \in \mathfrak{PN}(G)$.

• $V(k(G)) \subseteq V(G')$

Tomemos $x \in V(k(G))$ y supongamos que $x \notin V(G')$ entonces existe $y \in V(G')$ tal que $y \gtrsim x$ de aquí que y , como subgráfica completa de G , intersecta a x y a todas las completas que intersecta x , entre otras los puntos que componen a x , esto quiere decir que $x \subseteq y$ pero como x es completa maximal $x = y$, lo cual es una contradicción.

- $V(G') \subseteq V(k(G))$

Tomemos $x \in V(c(G))$ tal que $x \notin V(k(G))$ entonces existe $y \in V(k(G))$ tal que $x \subseteq y$ y así $x \lesssim y$

Lo que implica que $G' = k(G)$.

■

El conjunto de intervalos en una recta tienen la propiedad H de Helly, lo cual significa que: si cada par de un subconjunto de intervalos se intersectan dos a dos se intersectan todos a la vez, esta propiedad tiene sus análogos para convexos de cualquier dimensión.

Diremos que una **gráfica** tiene la propiedad **H** de **Helly**, si cada familia de clanes que se intersectan dos a dos se intersectan todos a la vez.

El siguiente lema es una reformulación de un teorema de Escalante [9, Teorema 2]

Lema 4.20 [9] Si G es una gráfica con la propiedad H de Helly entonces $k^2(G) \cong PN(G)$.

Demostración:

Sabemos que $G \xrightarrow{\#} PN(G)$, sea $G' \in \mathfrak{PN}(G)$ y sea $x \in V(G')$ entonces la familia de clanes en G que lo contiene es un clan de $k(G)$ que llamaremos x^* ; supongamos que no, es decir, hay un clan en G que intersecta a cada uno de los clanes que contienen a x ; como G tiene la propiedad H de Helly existe y tal que está en todos los clanes que contienen a x , así como en el nuevo clan, eso quiere decir que $x \lesssim y$, y $y \not\lesssim x$, por tanto $x \notin V(G')$ lo que es una contradicción.

Definimos $h : G' \rightarrow k^2(G)$ como $h(x) = x^*$, la función está bien definida por lo que hemos mencionado anteriormente. Si dos elementos x, y de $V(G')$ son adyacentes entonces hay un clan que los contiene a ambos, por tanto $x^* \cap y^* \neq \emptyset$, así h preserva aristas. Si $x, y \in V(G)$ y $h(x) = h(y)$ entonces $x^* = y^*$ y de aquí que la familia de clanes que contienen a x y la familia de clanes que contienen a y es la misma, por lo cual $x \sim y$, esto implica que o son iguales o uno de ellos no está en G' (por el lema 4.10) por tanto h es inyectiva. Como G es Helly todos los vértices de $k^2(G)$ provienen de una familia de clanes de G cuya intersección es no vacía, supongamos que hay un x tal que todos los elementos de esa intersección están en $V(G) - V(G')$ y uno de ellos es x , entonces existe $y \in V(G')$ tal que $x \lesssim y$, de aquí que el conjunto de clanes que contienen a x no es maximal en $k(G)$ y así no es un

clan en $k(G)$, ahora si $x^* \cap y^* \neq \emptyset$ hay un clan que contiene a x y y por tanto x y y son adyacentes y así h^{-1} preserva aristas.

■

4.3 Propiedades de $\xrightarrow{\#}$.

Lema 4.21 Si $G \xrightarrow{\#_0} H$ y A, B clanes de G (no necesariamente distintos) con $A \cap B \neq \emptyset$ entonces existe $y \in V(H)$ tal que $y \in A \cap B$.

Demostración

Sea $x \in A \cap B$, si $x \in V(H)$ no hay nada que hacer, en otro caso, existe $y \in V(H)$ que domina a x , es decir, $A \cup B \subseteq N[x] \subseteq N[y]$ por tanto $y \in A \cap B$.

■

Teorema 4.22 Si $G \xrightarrow{\#} H$ entonces $k(G) \xrightarrow{\#} k(H)$.

Demostración:

Sea $H' \cong H$ tal que $G \xrightarrow{\#_0} H'$.

Definiremos $g : k(H') \rightarrow k(G)$ y probaremos que

- g es isomorfa a su imagen.
- $k(G) \xrightarrow{\#_0} g(k(H'))$

Sea $B \in V(k(H'))$, B es completa en G la extendemos a un clan (esta extensión no necesariamente es única) entonces $g(B)$ será el que hayamos elegido.

1. g es inyectiva.

Sean $A, B \in V(k(H'))$ tales que $g(A) = g(B)$, por la definición de g se tiene $A \subseteq g(A) = g(B) \supseteq B$ entonces, como todos los vértices de A son vecinos de todos los vértices de B , $A = B$.

2. g preserva adyacencias.

Sean $B, B' \in V(k(H'))$ tales que $B \cap B' \neq \emptyset$ esto es, existe $w \in B \cap B'$ como $g(B)$ es una extensión de B y $g(B')$ es una extensión de B' entonces $w \in g(B) \cap g(B')$.

3. g^{-1} preserva adyacencias.

Sean $B, B' \in V(k(H))$ tales que $g(B) \cap g(B') \neq \emptyset$ por el lema 4.21 existe $w \in g(B) \cap g(B') \cap V(H')$ como $g(B)$ es una extensión de B y $g(B')$ es una extensión de B' entonces $w \in B \cap B'$.

4. Todo elemento de $V(k(G)) - V(g(k(H')))$ está dominado por alguno de $V(g(k(H')))$.

Sea $A \in V(k(G)) - V(\bar{g}(k(H')))$ y sea B un clan de H' que contenga a $A \cap V(H')$ por probar que $A \lesssim g(B)$:

Sea $C \in N[A]$ entonces $A \cap C \neq \emptyset$, por el lema 4.21 existe $y \in A \cap C \cap V(H')$, luego $y \in B$, así $y \in g(B)$. Entonces $g(B) \cap C \neq \emptyset$ y por último $C \in N[g(B)]$.

■

Teorema 4.23 Si G es totalmente desmantelable, entonces $i_{\#}(G) - 2 \geq i_{\#}(k^2(G))$.

Demostración:

Como $PN^{i_{\#}(G)-1}(G)$ es un cono entonces $k^2(PN^{i_{\#}(G)-1}(G)) \cong K_1$

y por el teorema 4.22,

$$k^2(G) \xrightarrow{\#} k^2(PN(G)) \xrightarrow{\#} k^2(PN^2(G)) \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} k^2(PN^{i_{\#}(G)-1}(G)) \cong K_1$$

Así se tiene que $i_{\#}(G) - 2 \geq i_{\#}(k^2(G))$.

■

Como consecuencia directa de este teorema tenemos la siguiente reformulación de un importante resultado de E. Prisner[41].

Teorema 4.24 Si G es una gráfica totalmente desmantelable entonces

$$k^{2i_{\#}(G)}(G) = K_1.$$

■

Lema 4.25 Si $G \xrightarrow{\#} H$, H es irreducible y G tiene la propiedad H de Helly entonces $k^2(G) \cong H$.

Demostración:

Este lema es consecuencia directa del lema 4.20 ya que en particular $H \in \mathfrak{PN}(G)$.

■

Teorema 4.26 Si $PN^{i_{\#}(G)}(G)$ es libre de triángulos entonces $i_{\#}(G) - 2 \geq i_{\#}(k^2(G))$.

Demostración:

Sea G' una gráfica irreducible y sin triángulos: **Observemos que si $H \xrightarrow{\#^0} G'$ entonces H tiene la propiedad H de Helly**, Sean $\{A_j\}_{j=1}^m$ clanes de H cuya intersección dos a dos es no vacía, y sean $B_j = A_j \cap V(G')$ para $j = 1, \dots, m$. Ya que G' es libre de triángulos los B_j son o una arista o un punto, entonces la intersección de todos los $\{B_j\}_{j=1}^m$ es no vacía, ya que varios segmentos que se intersectan dos a dos o forman un triángulo, o se intersectan en un punto, y como $\bigcap_{j=1}^m B_j \subseteq \bigcap_{j=1}^m A_j$ entonces la intersección de todos los A_j es no vacía.

Por la anterior observación, el teorema 4.22 y el lema 4.25

tenemos que $k^2(PN^{i\#(G)-1}G) \cong PN^{i\#(G)}(G)$ y

$$k^2(G) \xrightarrow{\#} k^2(PN(G)) \xrightarrow{\#} k^2(PN^2(G)) \xrightarrow{\#} \dots$$

$$\xrightarrow{\#} k^2(PN^{i\#(G)-1}(G)) \cong PN^{i\#(G)}(G)$$

Por tanto $i_{\#}(G) - 2 \geq i_{\#}(k^2(G))$.

■

Como corolario de este teorema tenemos la siguiente reformulación de un resultado importante de E. Prisner [41].

Teorema 4.27 *Si G es una gráfica y $PN^{i\#(G)}(G)$ es libre de triángulos entonces $k^{2n}(G) = PN^{i\#(G)}(G)$.*

■

4.4 Productos y $\xrightarrow{\#}$.

Teorema 4.28 *Sean G, G', G'', H, H' y H'' gráficas si $G \xrightarrow{\#^0} G'', G \xrightarrow{\#} G', H \xrightarrow{\#^0} H''$, y $H \xrightarrow{\#} H'$ entonces:*

1. $G \circ H \xrightarrow{\#^0} G'' \circ H''$.

2. $G \circ H \xrightarrow{\#} G' \circ H'$.

Demostración:

Sea $(x, y) \in V(G \circ H) - V(G'' \circ H'')$ entonces $x \notin G''$ o $y \notin H''$.

Caso 1.

$x \notin G'', y \in H''$.

Existe $x'' \in G''$ tal que $x \lesssim x''$ entonces $N[x, y] = (N[x] \times V(H)) \cup (V(G) \times N[y]) \subseteq (N[x''] \times V(H)) \cup (V(G) \times N[y]) = N[x'', y]$

Caso 2.

$x \in G''$, $y \notin H''$.

Se procede simétricamente al caso 1.

Caso 3.

$x \notin G''$, $y \notin H''$.

existen $x'' \in V(G'')$ y $y'' \in V(H'')$ tal que $x \lesssim x''$ y $y \lesssim y''$ entonces $N[x, y] = (N[x] \times V(H)) \cup (V(G) \times N[y]) \subseteq (N[x''] \times V(H)) \cup (V(G) \times N[y'']) = N[x'', y'']$.

El segundo punto se sigue directo del primero.

■

El orden de $k^2(P_6 \circ C_5)$ se aproxima al millón de vértices, los teoremas 4.22 y 4.28 nos permiten probar que $k^5(P_6 \circ C_5) \cong K_1$. Esto hace resaltar la importancia de éstos resultados.

Corolario 4.29 $P_6 \circ C_5$ se anula en máximo cinco iteraciones de clanes.

Demostración:

$$C_5 \xrightarrow{\#} C_5$$

también

$$P_6 \xrightarrow{\#} P_4 \xrightarrow{\#} P_2$$

por tanto

$$P_6 \circ C_5 \xrightarrow{\#} P_4 \circ C_5 \xrightarrow{\#} P_2 \circ C_5$$

como $P_2 \circ C_5$ es completa, y por el teorema 4.22 :

$$k(P_6 \circ C_5) \xrightarrow{\#} k(P_4 \circ C_5) \xrightarrow{\#} K_1$$

y nuevamente por el teorema 4.22 y observando que $k(P_4 \circ C_5)$ es un cono, tenemos así

$$k^3(P_6 \circ C_5) \xrightarrow{\#} K_1$$

Iterando dos pasos más concluimos que $k^5(P_6 \circ C_5) = K_1$.

■

Observación 4.30 Sean $(x, y), (w, z) \in G \circ H$, si $(x, y) \lesssim (w, z)$ entonces $(x, u) \lesssim (w, u)$ para toda $u \in V(H)$ ó $(v, y) \lesssim (v, z)$ para toda $v \in V(G)$.

Demostración

Supongamos que no, es decir, existe $u \in V(H)$ y $v \in V(G)$ para los cuales $(x, u) \not\lesssim (w, u)$ y $(v, y) \not\lesssim (v, z)$ entonces existen $x' \in N[x]$ y $y' \in N[y]$ con $x' \notin N[w]$ y $y' \notin N[z]$ y así $(x', y') \in N[(x, y)]$ y $(x', y') \notin N[(w, z)]$ lo que es una contradicción.

■

Lema 4.31 Sean G y H gráficas, ninguna de las cuales es un cono si $(x, y), (w, z) \in G \circ H$, $(x, y) \lesssim (w, z)$ y $(x, y) \neq (w, z)$ entonces $x \lesssim w$ y $x \neq w$ ó $y \lesssim z$ y $y \neq z$.

Demostración

Caso 1) $x \neq w$ y $y = z$.

Supongamos que existe $u \in V(G)$ tal que $u \in N[x]$ y $u \notin N[w]$, como H no es cono, existe $v \in V(H)$ tal que $v \notin N[z]$, así $(u, v) \in N[(x, y)]$ y $(u, v) \notin N[(w, z)]$ de aquí que $(x, y) \not\lesssim (u, v)$ lo cual es una contradicción. Por tanto no existe tal u y $x \lesssim w$.

Caso 2) $x = w$ y $y \neq z$.

Se procede de la misma manera que el caso 1) obteniéndose que $y \lesssim z$.

Caso 3) $x \neq w$ y $y \neq z$.

Supongamos que existen $u \in V(G)$ y $v \in V(H)$ tales que $u \in N[x]$, $v \in N[y]$, $u \notin N[w]$ y $v \notin N[z]$ entonces $(u, v) \in N[(x, y)]$ y $(u, v) \notin N[(w, z)]$ así $(x, y) \not\lesssim (u, v)$ lo cual es una contradicción. Por tanto o no existe tal u ó no existe tal v y $x \lesssim w$ ó $y \lesssim z$.

■

Teorema 4.32 Si G y H son gráficas ninguna de las cuales es un cono entonces $PN(G \circ H) \cong PN(G) \circ PN(H)$

Demostración

Sean $G' \in \mathfrak{PN}(G)$ y $H' \in \mathfrak{PN}(H)$ por el teorema 4.28 tenemos que $G \circ H \xrightarrow{\#_0} G' \circ H'$ y podemos escoger $F \in \mathfrak{PN}(G \circ H)$ tal que

$$\begin{array}{ccc} G \circ H & \xrightarrow{\#_0} & G' \circ H' \\ & \searrow \#_0 & \downarrow \#_0 \\ & & F \end{array}$$

Sea $(x, y) \in G' \circ H'$ tal que $(x, y) \notin F$ claramente existe $(w, z) \in F$ tal que $(x, y) \lesssim_{G \circ H} (w, z)$ y por el lema 4.31 se tiene que $x \lesssim w$ y $x \neq w$ ó $y \lesssim z$ y $y \neq z$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \lesssim w$ y $x \neq w$ por el lema 4.10 se tiene que $x \notin V(G')$ ó $w \sim x$ y $w \notin V(G')$. Por tanto no existe tal (x, y) ; así $G' \circ H' = F$ y $PN(G \circ H) \cong PN(G) \circ PN(H)$.

■

Teorema 4.33 *Si G y H son gráficas y:*

1. *G es totalmente desmantelable y H no, entonces:*

- (a) *$G \circ H$ es totalmente desmantelable.*
- (b) *$i_{\#}(G \circ H) = i_{\#}(G)$.*
- (c) *$G \circ H$ se anula en máximo $2i_{\#}(G)$ iteraciones del operador de clanes.*

2. *G, H son totalmente desmantelables, entonces:*

- (a) *$G \circ H$ es totalmente desmantelable.*
- (b) *$i_{\#}(G \circ H) = \min(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$.*
- (c) *$G \circ H$ se anula en máximo $2\min(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$ iteraciones del operador de clanes.*

3. *Ni G ni H son totalmente desmantelables, entonces*

$$i_{\#}(G \circ H) = \max(i_{\#}(G), i_{\#}(H)).$$

Demostración

1. Como G es totalmente desmantelable entonces $PN^{n-1}(G)$ es un cono donde $n = i_{\#}(G)$. Por el teorema 4.32 tenemos que $G \circ H \xrightarrow{\#} PN(G \circ H) \cong PN(G) \circ PN(H) \xrightarrow{\#} PN^2(G \circ H) \cong PN^2(G) \circ PN^2(H) \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} PN^{n-1}(G \circ H) \cong PN^{n-1}(G) \circ PN^{n-1}(H) \xrightarrow{\#} K_1$, así es que, $G \circ H$ es totalmente desmantelable, $i_{\#}(G \circ H) = i_{\#}(G)$ y $G \circ H$ se anula en máximo $2i_{\#}(G)$ iteraciones esto último por el teorema 4.23.

2. Sean $n_1 = i_{\#}(G)$, $n_2 = i_{\#}(H)$, $G_i = PN^i(G)$ y $H_i = PN^i(H)$. Por el teorema 4.32 tenemos que $G \circ H \xrightarrow{\#} PN(G \circ H) \cong PN(G) \circ PN(H) \xrightarrow{\#}$

$PN^2(G \circ H) \cong PN^2(G) \circ PN^2(H) \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} PN^{n-1}(G \circ H) \cong PN^{n-1}(G) \circ PN^{n-1}(H) \xrightarrow{\#} K_1$, donde $n = \min(n_1, n_2)$ así es que, $G \circ H$ es totalmente desmantelable, $i_{\#}(G \circ H) = \min(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$ y $G \circ H$ se anula en máximo $2\min(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$ iteraciones, esto último por el teorema 4.23.

3. Por el teorema 4.32 $G \circ H \xrightarrow{\#} PN(G \circ H) \cong PN(G) \circ PN(H) \xrightarrow{\#} PN^2(G \circ H) \cong PN^2(G) \circ PN^2(H) \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} PN^{n-1}(G \circ H) \cong PN^{n-1}(G) \circ PN^{n-1}(H) \xrightarrow{\#} PN^n(G \circ H) \cong PN^n(G) \circ PN^n(H)$ para cualquier n natural entonces $i_{\#}(G \circ H) = \max(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$.

■

Suma

Teorema 4.34 Sean G, G', G'', H, H' y H'' gráficas si $G \xrightarrow{\#} G', G \xrightarrow{\#_0} G'', H \xrightarrow{\#} H'$ y $H \xrightarrow{\#_0} H''$ entonces:

1. $G + H \xrightarrow{\#_0} G'' + H''$.
2. $G + H \xrightarrow{\#} G' + H'$.

Demostración:

Sea $x \in V(G + H) - V(G'' + H'')$. Sin pérdida de generalidad sea $x \in G$ entonces $x \in G - G''$ y existe x'' tal que $x \lesssim_G x''$ así $x \lesssim_{G+H} x''$.

La segunda parte se sigue directo de la primera.

■

Teorema 4.35 Si G y H son gráficas ninguna de las cuales es un cono entonces $PN(G + H) \cong PN(G) + PN(H)$.

Demostración

Sean $G' \in \mathfrak{PN}(G)$ y $H' \in \mathfrak{PN}(H)$ por el teorema 4.34 sabemos que

$$G + H \xrightarrow{\#_0} G' + H'$$

también podemos escoger $F \in \mathfrak{PN}(G + H)$ tal que

$$\begin{array}{ccc} G + H & \xrightarrow{\#_0} & G' + H' \\ & \searrow \#_0 & \downarrow \#_0 \\ & & F \end{array}$$

Supongamos que existe $x \in V(G' + H')$ tal que $x \notin V(F)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in V(G)$ entonces existe $y \in V(F)$ tal que $x \lesssim_{G+H} y$, no puede ser que $y \notin V(H)$ ya que eso significa que H es un cono, entonces $y \in V(G)$ y $x \lesssim_G y$. Por el lema 4.10 tenemos que $x \notin V(G)$ ó $y \notin V(G)$ lo que es una contradicción.

■

Teorema 4.36 Si G y H son gráficas y:

1. G es totalmente desmantelable y H no, entonces:

- (a) $G + H$ es totalmente desmantelable.
- (b) $i_{\#}(G + H) = i_{\#}(G)$.
- (c) $G + H$ se anula en máximo $2i_{\#}(G)$ iteraciones del operador de clanes.

2. G, H son totalmente desmantelables entonces:

- (a) $G + H$ es totalmente desmantelable.
- (b) $i_{\#}(G + H) = \min(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$.
- (c) $G + H$ se anula en máximo $2 \min(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$ iteraciones del operador de clanes.

3. Ni G ni H son totalmente desmantelables entonces

$$i_{\#}(G + H) = \max(i_{\#}(G), i_{\#}(H)).$$

Demostración

1. Como G es totalmente desmantelable entonces $PN^{n-1}(G)$ es un cono, donde $n = i_{\#}(G)$. Por el teorema 4.35 tenemos que $G + H \xrightarrow{\#} PN(G + H) \cong PN(G) + PN(H) \xrightarrow{\#} PN^2(G + H) \cong PN^2(G) + PN^2(H) \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} PN^{n-1}(G + H) \cong PN^{n-1}(G) + PN^{n-1}(H) \xrightarrow{\#} K_1$, así es que, $G + H$ es totalmente desmantelable, $i_{\#}(G + H) = i_{\#}(G)$ y $G + H$ se anula en máximo $2i_{\#}(G)$ iteraciones esto último por el teorema 4.23.

2. Sean $n_1 = i_{\#}(G)$, $n_2 = i_{\#}(H)$, $G_i = PN^i(G)$ y $H_i = PN^i(H)$. Por el teorema 4.35 tenemos que $G + H \xrightarrow{\#} PN(G + H) \cong PN(G) + PN(H) \xrightarrow{\#}$

$PN^2(G+H) \cong PN^2(G) + PN^2(H) \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} PN^{n-1}(G+H) \cong PN^{n-1}(G) + PN^{n-1}(H) \xrightarrow{\#} K_1$, donde $n = \min(n_1, n_2)$ así es que, $G+H$ es totalmente desmantelable, $i_{\#}(G+H) = \min(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$ y $G+H$ se anula en máximo $2\min(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$ iteraciones esto último por el teorema 4.23.

3. Por el teorema 4.35 $G+H \xrightarrow{\#} PN(G+H) \cong PN(G) + PN(H) \xrightarrow{\#} PN^2(G+H) \cong PN^2(G) + PN^2(H) \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} PN^{n-1}(G+H) \cong PN^{n-1}(G) + PN^{n-1}(H) \xrightarrow{\#} PN^n(G+H) \cong PN^n(G) + PN^n(H)$ para cualquier n natural entonces $i_{\#}(G+H) = \max(i_{\#}(G), i_{\#}(H))$.

■

Composición

Teorema 4.37 Si G, H, H' y H'' son gráficas tales que $H \xrightarrow{\#} H'$ y $H \xrightarrow{\#_0} H''$ entonces:

1. $G[H] \xrightarrow{\#_0} G[H'']$.
2. $G[H] \xrightarrow{\#} G[H']$.

Demostración:

Sea $(x, y) \in V(G[H]) - V(G[H''])$ entonces $y \in V(H) - V(H'')$ y existe $w \in H''$ tal que $y \lesssim w$, así $N[x, y] = (\{x\} \times N[y]) \cup (N(x) \times V(H)) \subseteq (\{x\} \times N[w]) \cup (N(x) \times V(H)) = N[x, w]$,

así se tiene 1. 2 se sigue directamente de 1.

■

Lema 4.38 Sea G, G'', G' y H gráficas si H es un cono, $G \xrightarrow{\#_0} G''$, $G \xrightarrow{\#} G'$ y v_0 es el centro del cono H entonces

1. $G[H] \xrightarrow{\#_0} G''[\{v_0\}]$
2. $G[H] \xrightarrow{\#} G'$

Demostración

Sea $(x, y) \in V(G[H])$ tal que $(x, y) \notin G''[\{v_0\}]$.

Recordemos que $N_{G[H]}[(x, y)] = N_G(x) \times V(H) \cup \{x\} \times N[y]$.

y $N[v_0] = H$.

Caso 1

$x \notin G''$, $y = v_0$ implica que existe $z \in V(G'')$ tal que $x \lesssim_G z$

$$\begin{aligned} N_{G[H]}[(x, y)] &= N_G(x) \times V(H) \cup \{x\} \times N[y = v_0] \\ &\subseteq N_G[z] \times V(H) \cup \{x\} \times N[v_0] \\ &= N_G[z] \times V(H) \\ &= N_G(z) \times V(H) \cup \{z\} \times N[v_0] \\ &= N_{G[H]}[(z, v_0)] \end{aligned}$$

y $(x, y) \lesssim_{G[H]} (z, v_0) \in V(G''[v_0])$, por el lema 4.10 $(x, y) \notin V(G''[v_0])$.

Caso 2

$x \in G''$, $y \neq v_0$ implica

$$\begin{aligned} N_{G[H]}[(x, y)] &= N_G(x) \times V(H) \cup \{x\} \times N[y] \\ &\subseteq N_G(x) \times V(H) \cup \{x\} \times N[v_0] \\ &= N_{G[H]}[(x, v_0)] \end{aligned}$$

y $(x, y) \lesssim_{G[H]} (x, v_0) \in V(G''[\{v_0\}])$, por el lema 4.10 $(x, y) \notin V(G''[\{v_0\}])$.

Caso 3

$x \notin G''$, $y \neq v_0$ implica que existe $z \in V(G'')$ tal que $x \lesssim_G z$

$$\begin{aligned} N_{G[H]}[(x, y)] &= N_G(x) \times V(H) \cup \{x\} \times N[y] \\ &\subseteq N_G[z] \times V(H) \cup \{x\} \times N[v_0] \\ &= N_G[z] \times V(H) \\ &= N_G(z) \times V(H) \cup \{z\} \times N[v_0] \\ &= N_{G[H]}[(z, v_0)] \end{aligned}$$

y $(x, y) \lesssim_{G[H]} (z, v_0) \in V(G''[\{v_0\}])$, por el lema 4.10 $(x, y) \notin V(G''[\{v_0\}])$.

Así se tiene 1, 2 se sigue directo de 1.

■

Teorema 4.39 $PN(G[H]) \cong G[PN(H)]$ cuando H no sea un cono y $PN(G[H]) \cong PN(G)$ cuando sí lo sea.

Demostración

Primera parte H no es un cono.

Sea $H' \in \mathfrak{PN}(H)$ por el teorema 4.37 tenemos que

$$G[H] \xrightarrow{\#0} G[H']$$

y podemos escoger $F \in \mathfrak{PM}(G[H])$ de tal manera que

$$\begin{array}{ccc} G[H] & \xrightarrow{\#_0} & G[H'] \\ & \searrow \#_0 & \downarrow \#_0 \\ & & F \end{array}$$

supongamos que existe $(x, y) \in V(G[H'])$ tal que $(x, y) \notin V(F)$ entonces existe $(w, z) \in V(F)$ tal que $(x, y) \lesssim_{G[H]} (w, z)$ esto es $N[(x, y)] \subseteq N[(w, z)]$ pero

- $N[(x, y)] = (N(x) \times V(H)) \cup \{x\} \times N[y].$
- $N[(w, z)] = (N(w) \times V(H)) \cup \{w\} \times N[z].$

Como H no es un cono se tiene que $x = w$, por lo cual $N[y] \subseteq N[z]$ entonces por el lema 4.10 ó $y \notin V(H')$ ó $z \notin V(H')$ lo que es una contradicción. Por tanto $F = G[H']$ y $PN(G[H]) \cong G[PN(H)].$

Segunda parte H es un cono.

Sea $G' \in \mathfrak{PM}(G)$, por el lema 4.38 tenemos

$$G[H] \xrightarrow{\#_0} G'[\{v_0\}]$$

donde v_0 es el centro del cono H . Podemos escoger $F \in \mathfrak{PM}(G[H])$ tal que

$$\begin{array}{ccc} G[H] & \xrightarrow{\#_0} & G'[\{v_0\}] \\ & \searrow \#_0 & \downarrow \#_0 \\ & & F \end{array}$$

supongamos que existe $(x, v_0) \in V(G'[\{v_0\}])$ tal que $(x, v_0) \notin V(F)$ entonces existe $(w, v_0) \in V(F)$ tal que $(x, v_0) \lesssim_{G[H]} (w, v_0)$ esto implica que $x \lesssim_G w$, ahora por el lema 4.10 $x \notin V(G')$ ó $w \notin V(G')$ lo que es una contradicción.

■

Teorema 4.40 Si G y H son gráficas totalmente desmantelables entonces $G[H]$ es totalmente desmantelable y $i_{\#}(G[H]) = i_{\#}(G) + i_{\#}(H) - 1$

Demostración

Se sigue directamente del teorema 4.39.

■

Producto Fuerte .

Teorema 4.41 Sean G, G', G'', H, H' y H'' gráficas, si ninguna es cono, $G \xrightarrow{\#} G', G \xrightarrow{\#_0} G'', H \xrightarrow{\#} H'$ y $H \xrightarrow{\#_0} H''$ entonces:

1. $G \boxtimes H \xrightarrow{\#_0} G'' \boxtimes H''$.
2. $G \boxtimes H \xrightarrow{\#} G' \boxtimes H'$.

Demostración:

Sea $(x, y) \in V(G \boxtimes H) - V(G'' \boxtimes H'')$

Caso 1.

$x \notin G'', y \in H''$.

Hay $x'' \in G$ tal que $x \lesssim x''$ entonces $N[x, y] = N[x] \times N[y] \subseteq N[x''] \times N[y] = N[x'', y]$

Caso 2.

$x \in G'', y \notin H''$.

Simétrico al caso 1.

Caso 3.

$x \notin G'', y \notin H''$.

Existen $x'' \in G$ y y'' tal que $x \lesssim x''$ y $y \lesssim y''$ entonces $N[x, y] = N[x] \times N[y] \subseteq N[x''] \times N[y''] = N[x'', y'']$.

La segunda parte es consecuencia directa de la primera.

■

Teorema 4.42 $PN(G \boxtimes H) \cong PN(G) \boxtimes PN(H)$

Demostración

Sean $G' \in \mathfrak{PN}(G)$ y $H' \in \mathfrak{PN}(H)$, por el teorema 4.41 tenemos

$$G \boxtimes H \xrightarrow{\#_0} G' \boxtimes H'$$

podemos escoger $F \in \mathfrak{PN}(G \boxtimes H)$ de tal manera que

$$\begin{array}{ccc} G \boxtimes H & \xrightarrow{\#_0} & G' \boxtimes H' \\ \searrow \#_0 & & \downarrow \#_0 \\ & & F \end{array}$$

supongamos que existe $(x, y) \in V(G' \boxtimes H')$ tal que $(x, y) \notin V(F)$ entonces existe $(w, z) \in V(F)$ tal que $(x, y) \lesssim_{G \boxtimes H} (w, z)$, esto implica $N[(x, y)] =$

Proposición 4.48 Si $f : G \rightarrow G'$ es un homomorfismo cubriente n a 1 , triangular, entonces existe $\bar{f} : PN(G) \rightarrow PN(G')$ tal que es un homomorfismo cubriente triangular n a 1 .

Demostración

Sea $H' \in \mathfrak{PN}(G')$

$G' \xrightarrow{\#_0} H'$ por la proposición 4.46 tenemos $G \xrightarrow{\#_0} f^{-1}(H')$ y podemos escoger $H \in \mathfrak{PN}(G)$ de tal manera que

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\#_0} & f^{-1}(H') \\ \searrow \#_0 & & \downarrow \#_0 \\ & & H \end{array}$$

luego, nuevamente por la proposición 4.46

$$G' \xrightarrow{\#_0} f(f^{-1}(H')) \xrightarrow{\#_0} f(H) \xrightarrow{\#_0} H''$$

para alguna $H'' \in \mathfrak{PN}(G')$ como

$$H' = f(f^{-1}(H')) \xrightarrow{\#_0} f(H) \xrightarrow{\#_0} H''$$

y $H' \cong H''$ se tiene $f(H) = H'$ y restringiendo f a H se tiene el homomorfismo requerido.

■

Proposición 4.49 (\boxtimes) Si $\pi_1 : G_1 \rightarrow G'_1$, y $\pi_2 : G_2 \rightarrow G'_2$ son homomorfismos cubrientes triangulares n a 1 , m a 1 respectivamente, entonces $\pi_1 \boxtimes \pi_2 : G_1 \boxtimes G_2 \rightarrow G'_1 \boxtimes G'_2$ es un homomorfismo cubriente triangular mn a 1 .

Demostración

Sea $(a', b') \in G'_1 \boxtimes G'_2$ como a' tiene n preimágenes y b' tiene m preimágenes entonces podemos escoger un (a, b) de mn maneras distintas tal que $\pi_1 \boxtimes \pi_2(a, b) = (a', b')$.

Probemos ahora que $N_{G_1 \boxtimes G_2}[a, b] = N_{G_1}[a] \times N_{G_2}[b]$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in N[a, b] &\Leftrightarrow x \in N[a] \text{ y } y \in N[b] \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in N[a] \times N[b] \end{aligned}$$

Por tanto

$$N_{G'_1 \boxtimes G'_2}[a', b'] \cong N_{G_1}[a] \times N_{G_2}[b] \cong N_{G_1}[a] \times N_{G_2}[b] \cong N_{G_1 \boxtimes G_2}[a, b]$$

■

Proposición 4.50 (o) Si $\pi_1 : G_1 \rightarrow G'_1$ y $\pi_2 : G_2 \rightarrow G'_2$ son cubrientes triangulares n a 1 y m a 1 respectivamente entonces

$\pi_1 \circ \pi_2 : G_1 \circ G_2 \rightarrow G'_1 \circ G'_2$ es un homomorfismo cubriente triangular mn a 1.

Demostración

Sea $(a', b') \in G'_1 \circ G'_2$ como a' tiene n preimágenes y b' tiene m preimágenes entonces podemos escoger un (a, b) de mn maneras distintas tal que $\pi_1 \circ \pi_2(a, b) = (a', b')$.

Probemos ahora que $N[a, b] = N[a] \times V(G_1) \cup V(G_2) \times N[b]$

$(x, y) \in N[a, b] \Leftrightarrow x \in N[a] \circ y \in N[b]$

$\Leftrightarrow (x, y) \in N[a] \times V(G_1) \cup V(G_2) \times N[b]$

Por tanto

$N_{G_1 \circ G_2}[a', b'] \cong N[a'] \times V(G_1) \cup V(G_2) \times N[b']$

$\cong N[a] \times V(G_1) \cup V(G_2) \times N[b] \cong N_{G_1 \circ G_2}[a, b]$

Para la siguiente proposición utilizaremos la definición de cubriente con vecindades abiertas ($N(x)$).

■

Proposición 4.51 (x) Si $\pi_1 : G_1 \rightarrow G'_1$ y $\pi_2 : G_2 \rightarrow G'_2$ son homomorfismos cubrientes triangulares n a 1 y m a 1 respectivamente, entonces

$\pi_1 \times \pi_2 : G_1 \times G_2 \rightarrow G'_1 \times G'_2$ es un homomorfismo cubriente triangular mn a 1.

Demostración

Sea $(a', b') \in G'_1 \times G'_2$ como a' tiene n preimágenes y b' tiene m preimágenes entonces podemos escoger un (a, b) de mn maneras distintas tal que $\pi_1 \times \pi_2(a, b) = (a', b')$.

Probemos ahora que $N(a, b) = N(a) \times N(b)$

$(x, y) \in N(a, b) \Leftrightarrow x \in N(a)$ y $y \in N(b)$

$\Leftrightarrow (x, y) \in N(a, b)$

Por tanto

$N_{G'_1 \times G'_2}(a', b') \cong N_{G'_1}(a') \times N_{G'_2}(b') \cong N_{G_1}(a) \times N_{G_2}(b) \cong N_{G_1 \times G_2}(a, b)$

■

Proposición 4.52 (Composición) Si $\pi_1 : G_1 \rightarrow G'_1$ y $\pi_2 : G_2 \rightarrow G'_2$ son homomorfismos cubrientes triangulares n a 1 y m a 1 respectivamente, entonces,

$\pi_1[\pi_2] : G_1[G_2] \rightarrow G'_1[G'_2]$ es un homomorfismo cubriente triangular mn a 1.

Demostración

Sea $(a', b') \in G'_1[G'_2]$ como a' tiene n preimágenes y b' tiene m preimágenes, entonces podemos escoger un (a, b) de mn maneras distintas tal que $\pi_1[\pi_2](a, b) = (a', b')$.

Probemos ahora que $N_{G_1[G_2]}[a, b] = N_{G_1}(a) \times V(G_2) \cup \{a\} \times N_{G_2}[b]$

$(x, y) \in N_{G_1[G_2]}[a, b] \Leftrightarrow (x, y) \in N_{G_1}(a) \times V(G_2) \cup \{a\} \times N_{G_2}[b]$

Por tanto

$$\begin{aligned} N_{G'_1[G'_2]}[a', b'] &\cong N_{G'_1}(a') \times V(G'_2) \cup \{a'\} \times N_{G'_2}[b'] \\ &\cong N_{G_1}(a) \times V(G_2) \cup \{a\} \times N_{G_2}[b] \cong N_{G_1[G_2]}[a, b] \end{aligned}$$

■

Proposición 4.53 (\square) Si $\pi_1 : G_1 \rightarrow G'_1$ y $\pi_2 : G_2 \rightarrow G'_2$ son cubrientes triangulares n a 1 y m a 1 respectivamente entonces

$\pi_1 \square \pi_2 : G_1 \square G_2 \rightarrow G'_1 \square G'_2$ es un cubriente triangular mn a 1.

Demostración

Sea $(a', b') \in G'_1 \square G'_2$ como a' tiene n preimágenes entonces podemos escoger un (a, b) de mn maneras distintas tal que $\pi_1 \square \pi_2(a, b) = (a', b')$ y como $N(a, b) = N(a) \times \{b\} \cup \{a\} \times N(b)$.

Entonces

$$\begin{aligned} N_{G'_1 \square G'_2}[a', b'] &\cong N_{G'_1}(a') \times \{b'\} \cup \{a'\} \times N_{G'_2}(b) \\ &\cong N_{G_1}(a) \times \{b\} \cup \{a\} \times N_{G_2}(b) \\ &\cong N_{G_1 \square G_2}[a, b]. \end{aligned}$$

■

Capítulo 5

Resultado Principal

(Invariancia de k bajo $\xrightarrow{\#}$)

Definición 5.1 Sean G , H y H' gráficas si $G \xrightarrow{\#} H$ y $G \xrightarrow{\#_0} H' \cong H$ definiremos $G_{\#H}$ como la gráfica de intersección de

$$\{A \cap V(H')/A \text{ es un clan de } G\}.$$

Del lema 5.2 a la proposición 5.5 G , H , H' y $G_{\#H}$ serán como en la definición 5.1.

Lema 5.2 $c(H') \xrightarrow{\#_0} G_{\#H} \xrightarrow{\#_0} k(H')$.

Demostración:

Sabemos que

$$k(H') \subseteq_* G_{\#H} \subseteq_* c(H')$$

por la proposición 4.18 y el lema 4.19 tenemos que cada elemento de $V(c(H')) - V(k(H'))$ está dominado por alguno de $V(k(H'))$; si a $V(c(H')) - V(k(H'))$ le quitamos algunos elementos, los que queden siguen estando dominados, así tenemos que cada elemento de $V(G_{\#H}) - V(k(H'))$ está dominado por alguno de $V(k(H'))$ o lo que es lo mismo

$$G_{\#H} \xrightarrow{\#_0} k(H')$$

Ahora, si a $V(c(H')) - V(k(H'))$ le quitamos algunos elementos ($V(G_{\#H}) - V(k(H'))$) y se los pasamos a $V(k(H'))$ los que queden seguirán estando dominados, así tenemos que cada elemento de $V(c(H)) - V(G_{\#H})$ está dominado por alguno de $V(G_{\#H})$ o lo que es lo mismo

$$c(H') \xrightarrow{\#_0} G_{\#H}$$

■

Lema 5.3 *Existe una retracción $f : k(G) \rightarrow G_{\#H}$ con sección inversa $g : G_{\#H} \rightarrow k(G)$ con las siguientes propiedades:*

1. $N[g(f(A))] = N[A]$ para toda $A \in k(G)$.
2. $k(G) \xrightarrow{\#_0} g(G_{\#H})$.

Demostración:

Definimos $f(A) = A \cap V(H')$, sea B un elemento de $V(G_{\#H})$ y $g(B)$ un clan de G que contiene a B tal que $f(g(B)) = B$, por el lema 4.21 f preserva aristas y claramente g es isomorfismo sobre su imagen. Por tanto f es retracción.

Sean $A, B \in V(k(G))$ tal que $f(A) = f(B)$ por el lema 4.21 si $C \in V(k(G))$ es vecino de A también es vecino de B , y como $f(g(f(A))) = f(A)$ tenemos $N[g(f(A))] = N[A]$, en particular $N[A] \subseteq N[g(f(A))]$ así $k(G) \xrightarrow{\#_0} g(G_{\#H})$.

■

Corolario 5.4 $k^2(G) = k(G_{\#H})$.

Demostración:

$G_{\#H} \cong g(G_{\#H})$ donde g es como en el lema 5.3. Ya que cada elemento A de $k(G)$ tiene la misma vecindad que $g(f(A)) \in g(G_{\#H})$, entonces se tiene el corolario.

■

Proposición 5.5 *Si H es periódica de periodo n , y $G \xrightarrow{\#} H$ entonces*

$$k^{n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} k^n(G) \xrightarrow{\#} H$$

Demostración:

Por el lema 5.2 tenemos que

$$c(H) \xrightarrow{\#} G_{\#H} \xrightarrow{\#} k(H)$$

Por el teorema 4.22

$$k^{n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} k^{n-1}(G_{\#H}) \xrightarrow{\#} k^n(H) \cong H$$

y por el corolario 5.4

$$k^{n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} k^n(G) \xrightarrow{\#} H$$

■

Proposición 5.6 *Si H es periódica de periodo n entonces $c(H)$ es estacionaria y existe m tal que $k^m(c(H)) \cong k^{m+n}(c(H))$.*

Demostración:

Por el lema 4.19 tenemos que $c(H) \xrightarrow{\#} k(H)$. En la proposición 5.5 hacemos $G = k^{n-1}(c(H))$ obtenemos

$$k^{n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} k^{2n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} H$$

de aquí aplicando el teorema 4.22:

$$k^{n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} k^{2n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} k^{3n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} k^{mn-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} H$$

para cualquier m natural. Como $k^{n-1}(c(H))$ es de orden finito debe de haber dos $k^{i_0 n-1}(c(H))$ iguales, digamos

$$k^{i_0 n-1}(c(H)) \cong k^{i_1 n-1}(c(H))$$

con $i_0 \not\cong i_1$ entonces

$$k^{i_0 n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} k^{(i_0+1)n-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} \dots \xrightarrow{\#} k^{i_1 n-1}(c(H))$$

y de aquí que

$$k^{i_0 n-1}(c(H)) \cong k^{(i_0+1)n-1}(c(H))$$

por tanto $c(H)$ es estacionaria y haciendo $m = i_0 n - 1$ se tiene que $k^m(c(H)) \cong k^{m+l}(c(H))$, donde l divide a n .

■

El siguiente es el principal resultado de este trabajo

Teorema 5.7 $G \xrightarrow{\#} H$ entonces H y G tienen el mismo comportamiento bajo k es decir:

1. G es k -nula si y solo si H es k -nula.
2. G es estacionaria si y solo si H es estacionaria.
3. G es k -divergente si y solo si H es k -divergente.

Demostración

1a) Si G es k -nula, entonces existe un entero n tal que:

$$K_1 = k^n(G) \xrightarrow{\#} k^n(H)$$

Así H es k -nula.

1b) Si H es k -nula, entonces existe n tal que

$$k^n(G) \xrightarrow{\#} k^n(H) = K_1$$

Así $k^{n+2}(G) = K_1$, por tanto G es k -nula.

2a) G es estacionaria.

Sea $m = i_{\#}(G)$ sabemos que $k^m(G) \cong k^{m+n}(G) \cong k^{m+in}(G) \xrightarrow{\#} k^{m+in}(H)$, para toda $i \in \mathbb{N}$, pero como $k^m(G)$ es desmantelable a un número finito de gráficas, hay i_0 y i_1 tal que $k^{m+i_0n}(H) \cong k^{m+i_1n}(H)$ por tanto H es estacionaria.

2b) H es estacionaria. Por la proposición 5.6 se tiene que $c(H)$ es estacionaria, por la proposición 5.5 se tiene $k^{m-1}(c(H)) \xrightarrow{\#} k^m(G)$ para algún m , y por **2a)** G es estacionaria.

3) Es consecuencia de las otras dos.

■

Hasta aquí sabemos que el desmantelamiento no cambia el k -comportamiento pero si una gráfica es periódica de periodo n puede desmantelarse a una gráfica periódica de menor o mayor período, la gráfica de la figura 5.1 es un ejemplo de esto, esta gráfica es periódica de periodo 3, si le quitamos v_3 su periodo será 1 y si le eliminamos v_2 será de periodo 6.

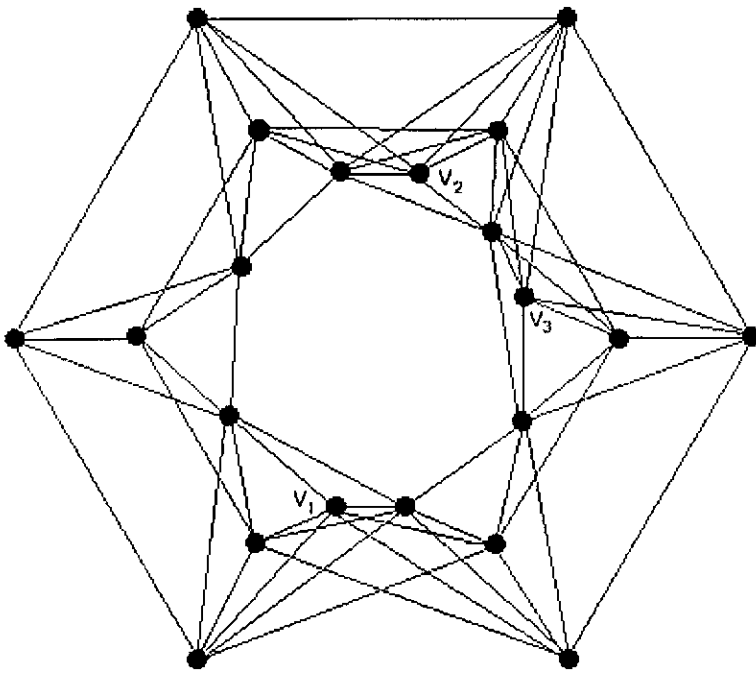


Figura 5.1

Capítulo 6

Gráficas Punteadas

6.1 Gráficas Anuladoras.

Una gráfica punteada $\alpha = (G, v)$ es un par que consta de una gráfica G y un vértice distinguido $v \in V(G)$. Un homomorfismo de gráficas punteadas será un homomorfismo de gráficas que manda vértice distinguido en vértice distinguido; una retracción de gráficas punteadas será una retracción de gráficas que manda vértice distinguido en vértice distinguido, etcétera.

A la gráfica de (G, v) la denotaremos por $gr(G, v) = G$, el punto distinguido lo denotaremos por $\bullet(G, v) = v$.

Definiremos ahora el producto \vee que es la unión disjunta de las gráficas de los pares en cuestión y la identificación de los vértices distinguidos, es decir:

$$(G, v) \vee (G', v') = (G \dot{\cup} G', v = v')$$

Proposición 6.1 \vee es asociativa, cerrada, existe un neutro y es conmutativa.

Demostración

1. Asociativa:

$$\begin{aligned} ((G, v) \vee (G', v')) \vee (G'', v'') &= (G \dot{\cup} G', v = v') \vee (G'', v'') \\ &= [(G \dot{\cup} G') \dot{\cup} G'', (v = v') = v''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[G \dot{\cup} (G' \dot{\cup} G'', v = (v' = v'')) \right] \\
&= (G, v) \vee (G' \dot{\cup} G'', v' = v'') \\
&= (G, v) \vee ((G', v') \vee (G'', v''))
\end{aligned}$$

2. Cerrada:

Obvio, puesto que $(G \dot{\cup} G', v = v')$ es un par con vértice distinguido.

3. Neutro:

$$\begin{aligned}
(K_1, v) \vee (G, v') &= (K_1 \dot{\cup} G, v = v') \\
&= (G, v = v') \\
&= (G, v')
\end{aligned}$$

4. Conmutativa:

$$\begin{aligned}
(G, v) \vee (G', v') &= (G \dot{\cup} G', v = v') \\
&= (G' \dot{\cup} G, v' = v) \\
&= (G', v') \vee (G, v)
\end{aligned}$$

■

Observación 6.2 Denotemos por $k(G)$ la gráfica de clanes de G y por $K(G)$ los clanes de la gráfica G (es decir, $k(G) = \Omega(K(G))$).

Definición 6.3 $\xi(G, v) = (\Omega(K(k(G)) \cup \{v^*\}), v^*)$, donde v^* es el conjunto de clanes que contienen a v^* .

Hay que notar que v^* en algunos casos es un clan de clanes y en otros no, lo que estamos haciendo es incluirlo sea o no, ésto es equivalente a calcular la segunda de clanes de $G \cup [v, w]$ donde w es un vértice que no está en G , ya que la nueva arista $[v, w]$ hace que v^* sea un clan de clanes.

Definición 6.4 Una gráfica punteada (G, v) es ξ -nula si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\xi^n(G, v) = (K_1, v^{(n)})$.

(G, v) es ξ -periódica si existe n natural tal que $\xi^n(G, v) \cong (G, v^{(n)})$; una gráfica punteada (G, v) es estacionaria si existe m natural tal que $\xi^m(G, v)$ es ξ -periódica.

Diremos que (G, v) ξ -diverge si $|\xi^m(G, v)| \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Definición 6.5 Diremos que dos gráficas punteadas α y α' tienen el mismo ξ -carácter si:

1. α es ξ -nula si y solo si α' también lo es.
2. α es ξ -estacionaria si y solo si α' también lo es.
3. α es ξ -divergente si y solo si α' también lo es.

Definición 6.6 Diremos que una gráfica punteada γ es k -nula si $gr(\gamma)$ es k -nula

Definición 6.7 α es anuladora si $gr(\alpha \vee \beta)$ es k -nula, para toda β k -nula.

Observación 6.8 Si $v = \bullet(\alpha \vee \beta)$ entonces v es un punto de corte, de $gr(\alpha \vee \beta)$.

Demostración

Como

$$(\alpha \vee \beta) = (gr(\alpha) \dot{\cup} gr(\beta), \bullet\alpha = \bullet\beta)$$

No hay otra manera de llegar de la $gr(\alpha)$ a la $gr(\beta)$ más que pasando por v .

■

Lema 6.9 Si v es un punto de corte de G entonces v^* es un clan de $k(G)$.

Demostración

Supongamos que el lema es falso, entonces hay un clan W de G que no contiene a la v pero intersecta a todos los clanes que contienen a v . Pero hay clanes que contienen a v en ambos lados de las componentes de $G - \{v\}$, entonces W tiene puntos de ambos lados y por lo tanto un puente de un lado a otro, lo que es una contradicción.

■

Definición 6.10 Si α y α' son gráficas punteadas, diremos que $\alpha \xrightarrow{\#_0} \alpha'$ si $gr(\alpha) \xrightarrow{\#_0} gr(\alpha')$ y $\bullet(\alpha') = \bullet(\alpha)$.

También diremos que $\alpha \xrightarrow{\#} \alpha''$ si existe $\alpha' \cong \alpha''$ tal que $\alpha \xrightarrow{\#_0} \alpha'$.

Proposición 6.11 Las siguientes son propiedades de ξ .

1. $gr(\xi(\alpha)) \xrightarrow{\#} k^2(gr(\alpha))$
2. $\xi(\alpha \vee \beta) = \xi(\alpha) \vee \xi(\beta)$
3. $gr(\xi(\alpha \vee \beta)) \cong k^2(gr(\alpha \vee \beta))$
cuando $gr(\alpha) \neq k_1 \neq gr(\beta)$

Demostración

1. $G = gr(\alpha)$

$$\begin{aligned} gr(\xi(\alpha)) &= gr(\Omega(K(k(G)) \cup \{\bullet(\alpha)^*\}), \bullet(\alpha)^*) \\ &= \Omega(K(k(G)) \cup \{\bullet(\alpha)^*\}) \\ &\xrightarrow{\#} \Omega(K(k(G))) \end{aligned}$$

si $\bullet(\alpha)^* \in K(k(G))$ se da la igualdad y si no quiere decir que es una gráfica completa que no es clan, y así puede ser desmantelada

$$gr(\xi(\alpha)) \xrightarrow{\#} k^2(gr(\alpha))$$

- 2.

$$\begin{aligned} \xi(\alpha \vee \beta) &= (\Omega(K(k(gr(\alpha \vee \beta)))) \cup \{(v_\alpha = v_\beta)^*\}, (v_\alpha = v_\beta)^*) \\ &= (\Omega(K(k(gr(\alpha))) \cup K(k(gr(\beta))) \cup \{v_\alpha^* = v_\beta^*\}), v_\alpha^* = v_\beta^*) \\ &= (\Omega[K(k(gr(\alpha))) \cup \{v_\alpha^*\}], v_\alpha^*) \vee \\ &\quad (\Omega[K(k(gr(\beta))) \cup \{v_\beta^*\}], v_\beta^*) \\ &= \xi(\alpha) \vee \xi(\beta) \end{aligned}$$

3. $gr(\alpha) \neq K_1 \neq gr(\beta)$

$$\begin{aligned}
 gr(\xi(\alpha \vee \beta)) &= gr(\Omega(K(k(gr(\alpha \vee \beta))) \cup (v_\alpha = v_\beta)^*), (v_\alpha = v_\beta)^*) \\
 &= gr(\Omega(K(k(gr(\alpha \vee \beta)))), (v_\alpha = v_\beta)^*) \\
 &\text{(ya que } v_\alpha = v_\beta \text{ es punto de corte).} \\
 &= gr(K^2(gr(\alpha \vee \beta)), (v_\alpha = v_\beta)^*) \\
 &= K^2(gr(\alpha \vee \beta))
 \end{aligned}$$

■

Proposición 6.12 Si $\alpha \xrightarrow{\#} \alpha'$ entonces α es anuladora si y sólo si α' es anuladora.

Demostración

$$\begin{aligned}
 \alpha \text{ es anuladora} &\iff gr(\alpha \vee \beta) \text{ es } k\text{-nula} \\
 &\quad \text{para toda } \beta \text{ } k\text{-nula} \\
 &\iff gr(\alpha' \vee \beta) \text{ es } k\text{-nula} \\
 &\quad \text{para toda } \beta \text{ } k\text{-nula} \\
 &\iff \alpha' \text{ es anuladora.}
 \end{aligned}$$

■

Proposición 6.13 $f : \alpha \rightarrow \alpha'$ retracción y α es anuladora entonces α' es anuladora.

Demostración

α es anuladora, entonces $\alpha \vee \beta$ es k -nula para toda β k -nula y como $f : \alpha \rightarrow \alpha'$ es una retracción que manda punto distinguido en punto distinguido, entonces $(f, i) : \alpha \vee \beta \rightarrow \alpha' \vee \beta$ para toda β es una retracción, esto, debido a la proposición 6.11 y las propiedades de retracción [35], por lo cual $\alpha' \vee \beta$ es k -nula cada vez que $\alpha \vee \beta$ sea k -nula y por tanto para toda β k -nula.

■

Proposición 6.14 Si α y β son anuladores entonces $\alpha \vee \beta$ es anulador.

Proposición 6.22 Si G es perfectamente desmantelable entonces $G \circ H$ y $G + H$ son perfectamente desmantelables.

Demostración

• Producto \circ

Sea $(v, w) \in V(G \circ H)$ entonces existen $\{G_i\}_{i=1}^n$ tales que

$$(G, v) = (G_1, v) \xrightarrow{\#_0} (G_2, v) \xrightarrow{\#_0} (G_3, v) \xrightarrow{\#_0} \dots \xrightarrow{\#_0} (G_n, v) = (\{v\}, v)$$

Ahora

$$(G, v) \circ (H, w) = (G_1, v) \circ (H, w) \xrightarrow{\#_0} (G_2, v) \circ (H, w) \xrightarrow{\#_0} \dots$$

$$\xrightarrow{\#_0} (G_{n-1}, v) \circ (H, w) = (K_1, v) \circ (K_1, w)$$

y por lo tanto es desmantelable a (v, w) .

• Suma

Como G es perfectamente desmantelable tenemos que, para cualquier x vértice de G existen $\{G_i\}_{i=1}^n$ tales que $G \xrightarrow{\#_0} G_1 \xrightarrow{\#_0} \dots \xrightarrow{\#_0} G_n = \{x\}$.

Sea $v \in G$ entonces

$(G + H, v) \xrightarrow{\#_0} (G_1 + H, v) \xrightarrow{\#_0} \dots \xrightarrow{\#_0} (G_n + H, v) = (\{v\} + H, v)$ y esta última se desmantela a v .

Sea $v \in H$

$$G + H \xrightarrow{\#_0} G_1 + H \xrightarrow{\#_0} \dots \xrightarrow{\#_0} G_n + H =$$

$$= \{v\} + H \xrightarrow{\#_0} \{x\} + \{v\} \text{ y esta última se desmantela a } v.$$

■

Proposición 6.23 Si G y H son gráficas totalmente desmantelables $G + H$ es perfectamente desmantelable.

Demostración

Sea $v \in V(G + H)$ sin pérdida de generalidad podemos suponer $v \in V(G)$. Como H es totalmente desmantelable, sea x un punto al que se desmantela H y $\{H_i\}_{i=1}^n$ gráficas tales que $H \xrightarrow{\#_0} H_1 \xrightarrow{\#_0} \dots \xrightarrow{\#_0} H_n = \{x\}$ entonces $G + H \xrightarrow{\#_0} G + H_1 \xrightarrow{\#_0} \dots \xrightarrow{\#_0} G + H_n \xrightarrow{\#_0} \{v\} + \{x\}$ y esta última se desmantela a v .

■

Proposición 6.24 Si G y H son gráficas perfectamente desmantelables entonces $G \boxtimes H$ y $G[H]$ son perfectamente desmantelables.

Demostración

• Producto Fuerte

$(v, w) \in V(G \boxtimes H)$ entonces existen $\{G_i\}_{i=1}^n, \{H_j\}_{j=1}^m$ tales que
 $(G, v) = (G_1, v) \xrightarrow{\#^0} (G_2, v) \xrightarrow{\#^0} (G_3, v) \xrightarrow{\#^0} \dots \xrightarrow{\#^0} (G_n, v) = (\{v\}, v)$
 $(H, w) = (H_1, w) \xrightarrow{\#^0} (H_2, w) \xrightarrow{\#^0} (H_3, w) \xrightarrow{\#^0} \dots \xrightarrow{\#^0} (H_m, w) = (\{w\}, w)$
 sin pérdida de generalidad supondremos $n < m$

Ahora

$$\begin{aligned} (G, v) \boxtimes (H, w) &= (G_1, v) \boxtimes (H_1, w) \xrightarrow{\#^0} (G_2, v) \boxtimes (H_2, w) \xrightarrow{\#^0} \dots \\ &\xrightarrow{\#^0} (G_n, v) \boxtimes (H_n, w) = (\{v\}, v) \boxtimes (H_n, w) \xrightarrow{\#^0} (\{v\}, v) \boxtimes (H_{n+1}, w) \\ &\xrightarrow{\#^0} \dots \xrightarrow{\#^0} (\{v\}, v) \boxtimes (H_m, w) = (\{v\}, v) \boxtimes (\{w\}, w) = (\{(v, w)\}, (v, w)). \end{aligned}$$

•Composición

$(v, w) \in V(G[H])$ entonces existen $\{G_i\}_{i=1}^n, \{H_j\}_{j=1}^m$ tales que
 $(G, v) = (G_1, v) \xrightarrow{\#^0} (G_2, v) \xrightarrow{\#^0} (G_3, v) \xrightarrow{\#^0} \dots \xrightarrow{\#^0} (G_n, v) = (\{v\}, v)$
 $(H, w) = (H_1, w) \xrightarrow{\#^0} (H_2, w) \xrightarrow{\#^0} (H_3, w) \xrightarrow{\#^0} \dots \xrightarrow{\#^0} (H_m, w) = (\{w\}, w)$

Ahora

$$\begin{aligned} (G, v)[(H, w)] &= (G_1, v)[(H_1, w)] \xrightarrow{\#^0} (G_1, v)[(H_2, w)] \xrightarrow{\#^0} \dots \\ &\xrightarrow{\#^0} (G_1, v)[(H_m, w)] = (G_1, v)[(\{w\}, w)] \xrightarrow{\#^0} (G_2, v)[(\{w\}, w)] \xrightarrow{\#^0} \dots \\ &\xrightarrow{\#^0} (G_n, v)[(\{w\}, w)] = (\{v\}, v)[(\{w\}, w)] = (\{(v, w)\}, (v, w)). \end{aligned}$$

■

6.3 Gráficas Totalmente Desmantelables de Arranque Único.

Una gráfica totalmente desmantelable de arranque único es una gráfica totalmente desmantelable a K_1 que inicialmente tiene un solo punto dominado. Hay infinidad de gráficas totalmente desmantelables de arranque único, las gráficas de las figuras 6.1, 6.2 y 6.3 son ejemplos de éste tipo de gráficas.

El árbol de bloques y puntos de corte de G ($BC(G)$) tiene por vértices a los bloques y puntos de corte y por aristas a los pares $\{Y, y\}$ tales que Y es bloque de G y y punto de corte de G que pertenece a $V(Y)$.

Si X_0 es un bloque de G denotaremos $\overrightarrow{BC}(G, X_0)$ a la gráfica orientada obtenida del árbol $BC(G)$ tomando como raíz a X_0 .

Proposición 6.25 *Una gráfica cuyos bloques son totalmente desmantelables no es necesariamente totalmente desmantelable.*

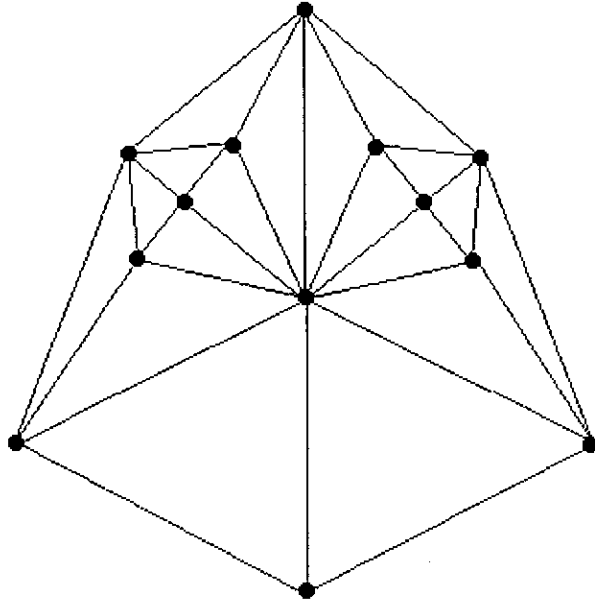


Figura 6.1

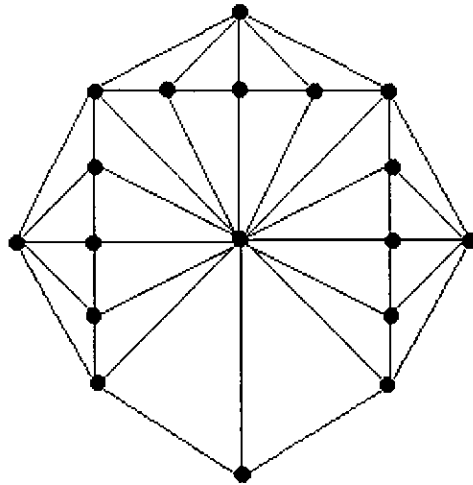


Figura 6.2

Demostración

Sea (G, v) una gráfica punteada, tal que G es una gráfica totalmente desmantelable de arranque único y cuyo único vértice dominado en el primer paso es v entonces $(G, v) \vee (G, v)$ es irreducible.

■

Observación 6.26 *Un vértice de corte nunca está dominado.*

Observación 6.27 *Si a una gráfica la estamos desmantelando vértice por vértice, dos puntos que están de lados distintos de un punto de corte y que están dominados pueden ser eliminados en distinto orden.*

Proposición 6.28 *Sea $G = G_1 \cup G_2$, con $G_1 \cap G_2 = \{x\}$, y G desmantelable internamente a x_0 :*

1. *Si $x_0 \in G_1$ y $x_0 \neq x$ entonces G_2 es desmantelable internamente a x y G_1 es desmantelable internamente a x_0 .*
2. *Si $x_0 = x$ entonces ambas G_1 y G_2 son desmantelables internamente a x_0 .*

Demostración

1. Hagamos esto por inducción sobre el orden de G .

$o(G) = 2$ es trivial. Supongamos que G_1 es desmantelable internamente a x_0 y G_2 es desmantelable internamente a x cuando $o(G) = n$, y supongamos $o(G) = n + 1$. Sea $x_1 \neq x_0$ un punto dominado de G :

Caso a:

Si $x_1 \in G_1$, entonces $o(G - \{x_1\}) = n$ y por hipótesis de inducción $G_1 - \{x_1\}$ es desmantelable internamente a x_0 y G_2 es desmantelable internamente a x . Ahora, como x_1 es un punto dominado de G entonces también es un punto dominado de G_1 y así G_1 se desmantela internamente a x_0 .

Caso b:

Si $x_1 \in G_2$, entonces $o(G - \{x_1\}) = n$ y por hipótesis de inducción G_1 es desmantelable internamente a x_0 y $G_2 - \{x_1\}$ es desmantelable internamente a x . Ahora como x_1 es un punto dominado de G entonces también es un punto dominado de G_2 y así G_2 se desmantela internamente a x .

2. Esta parte también será por inducción sobre el orden de G .

$o(G) = 1$ es trivial. Supongamos que tanto G_1 como G_2 son desmantelables internamente a x_0 , para $o(G) = n$, y supongamos que $o(G) = n + 1$, sea x_1 un punto dominado de G :

Caso a:

$x_1 \in G_1$, entonces $o(G - \{x_1\}) = n$ y por hipótesis de inducción $G_1 - \{x_1\}$ es desmantelable internamente a x_0 y G_2 es desmantelable internamente a x_0 , ahora como x_1 es un punto dominado de G entonces también es un punto dominado de G_1 y así G_1 se desmantela internamente a x_0 .

Caso b:

Si $x_1 \in G_2$ entonces se procede como en el caso 2a.

■

Proposición 6.29 *Sea G una gráfica que se desmantela internamente a x_0 , G_0, G_1, \dots, G_r subgráficas tales que:*

1. G_0 contiene a x_0 .
2. $G = \bigcup_{i=0}^r G_i$.
3. $G_{i_0} \cap G_{i_1} = \emptyset$ si $i_0 \neq i_1$ y $i_0 \neq 0 \neq i_1$.
4. $G_0 \cap G_i = \{x_i\}$.

entonces cada G_i se desmantela a x_i , con $i = 0 \dots r$

Demostración

Por inducción sobre r :

Si $r = 1$ es exactamente la proposición anterior.

Para $r = n$ cada G_i se desmantela a x_i , con $i = 0 \dots n$.

Para $r = n + 1$. Sea $G'_1 = \bigcup_{i=0}^n G_i$ y $G'_2 = G_{n+1}$, usando la proposición anterior G'_1 es desmantelable internamente a x_0 y G'_2 es desmantelable internamente a x_{n+1} , y por hipótesis de inducción tenemos que cada G_i es desmantelable internamente a x_i .

■

Lema 6.30 *Sea G una gráfica con n bloques, si G se desmantela internamente a x_0 y X_0 es un bloque de G que contiene a x_0 , entonces X_0 se desmantela a x_0 . Además cada bloque Y de G distinto de X_0 se desmantela a $y \in V(Y)$ punto de corte de G , siempre que el par (Y, y) sea arco de $\overrightarrow{BC}(G, X_0)$.*

Demostración.

Si sólo hay un bloque el lema es obvio. Supongámoslo cierto para cualquier gráfica con número de bloques $n - 1$; sea Z un bloque terminal de $BC(G)$ distinto de X_0 , y $z \in V(Z)$ punto de corte entonces por la proposición 6.29 $G - (Z - \{z\})$ se desmantela a x_0 , y Z se desmantela internamente a z y por hipótesis de inducción se tiene completa la prueba.

■

Teorema 6.31 *Una gráfica G es desmantelable internamente a x_0 si y solo si contiene un bloque X_0 que se desmantela internamente a x_0 con la siguiente propiedad : todo bloque $Y \neq X_0$, se desmantela internamente al único $y \in Y$ tal que $[Y, y]$ es arco de $\overrightarrow{BC}(G, X_0)$.*

Demostración

(\implies) Se sigue directo del lema 6.30.

(\impliedby) Desmantelando bloque por bloque se tiene que G es desmantelable internamente a x_0 .

■

Corolario 6.32 *Una gráfica, cuyos bloques son subgráficas completas, es totalmente desmantelable.*

Teorema 6.33 *Si el árbol de bloques y puntos de corte de una gráfica G totalmente desmantelable tiene n vértices terminales entonces G tiene al menos $n - 1$ puntos dominados.*

Demostración

Por el teorema 6.31 tenemos un bloque de G (X_0) que se desmantela internamente a algún x_0 .

Cada bloque (en particular terminal) $Y \neq X_0$ se desmantela internamente a y donde $(Y, y) \in A(\overrightarrow{BC}(G, X_0))$; como X_0 puede ser vértice terminal, al menos tendremos $n - 1$ bloques terminales $\{Y_i\}_{i=1}^{n-1} \subseteq V(\overrightarrow{BC}(G, X_0))$, distintos de X_0 , que se desmantelan respectivamente a y_i donde $(Y_i, y_i) \in A(\overrightarrow{BC}(G, X_0))$ entonces, existen $z_i, x_i \in V(Y_i)$ tales que $x_i \lesssim z_i$, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

■

Teorema 6.34 *Si G es una gráfica totalmente desmantelable de arranque único entonces su árbol de bloques y puntos de corte $BC(G)$ es una trayectoria.*

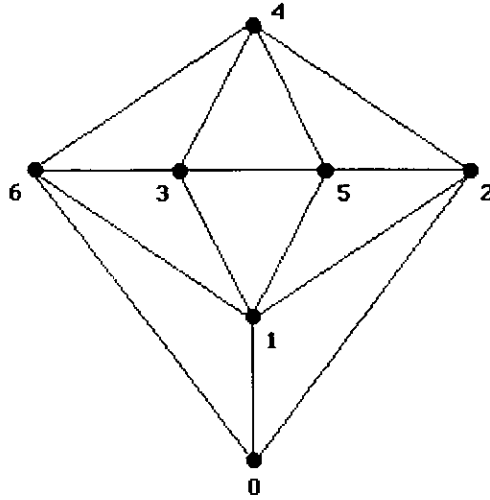


Figura 6.3

Demostración

Si $BC(G)$ tiene más de dos vértices terminales por el teorema anterior tendríamos al menos dos puntos de arranque, lo que es una contradicción.

■

Proposición 6.35 *La gráfica totalmente desmantelable de arranque único de orden menor tiene orden 7 y es isomorfa a las gráfica de la figura 6.3*

Demostración:

Es claro que en la figura 6.3 tenemos una gráfica totalmente desmantelable que en el primer paso sólo se puede eliminar el 0.

Probemos ahora que no hay una de orden 6, totalmente desmantelable y de arranque único, más aún no hay otra de orden 7. Sea G totalmente desmantelable, de arranque único y de orden mínimo. Llamaremos 0 al vértice dominado y 1 al vértice que lo domina es decir $N[0] \subseteq N[1]$. El 0 debe de tener un vecino $2 \neq 1$, en caso contrario tendríamos un vértice de corte en 1, (por la observación 6.26, 1 no puede ser eliminado si no es eliminado por completo uno de los lados) una vez eliminado (el 0), ninguna vecindad de otro vértice sufrirá cambio más que la del vértice 1, entonces en el siguiente paso es el único que se puede eliminar pero en tal caso tendríamos una gráfica más pequeña (sin el 0) que cumple las condiciones de la proposición.

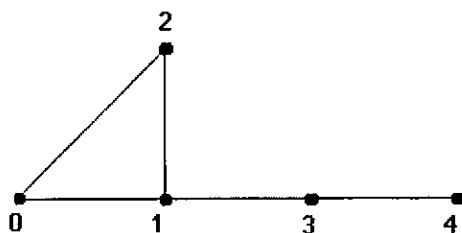


Figura 6.4

El 1 no puede estar dominado en un principio por lo tanto debe de tener un vecino 3 que no sea vecino del 2 ni del 0. El 3 debe tener un vecino 4 que no sea vecino del 1. Observemos que el 4 no puede ser vecino del 0 por que en tal caso sería vecino del 1.

Hasta ahora la subgráfica $H \subseteq G$ que tenemos es la gráfica de la figura 6.4, esta subgráfica es inducida o no dependiendo de si está o no la arista $[2, 4]$ en $E(G)$, revisemos primero el caso cuando H es inducida:

- Caso 1) La arista $[2, 4]$ no está. En este caso $2 \lesssim_H 1$ y $4 \lesssim_H 3$, y cada uno necesita un vecino (no puede ser ninguno de los que ya están por que H es inducida), si ese vecino no es común tendríamos siete vértices y no hay manera de acomodar las aristas de tal forma que se pueda obtener otra gráfica totalmente desmantelable de arranque único. Si ese vecino (el 5) es común no puede ser vecino ni de 1 ni de 3 por lo cual debe de haber al menos un vértice más, para que al eliminar el 0 se pueda seguir eliminando vértices, pero no hay manera de colocarlo de modo que sea suficiente para tener una nueva gráfica de arranque único de 7 vértices.
- Caso 2) La arista $[2, 4]$ si está (ver figura 6.5). Al eliminar el 0 debe de haber al menos dos vértices dominados $\{x, y\}$ (de otra manera empezamos sin el 0) y tienen que ser vecinos del 0, si son dos que no están en H , G tedaría orden de al menos 7 y no hay manera de acomodar la gráfica para obtener otra gráfica totalmente desmantelable de arranque único de orden 7. Si $x \in \{1, 2\}$ y $y = 5$ que no esta en H , debe de haber otro vértice (el 6) que no esté en H que domine a x al eliminar el 0, de nuevo tendríamos 7 vértices y la única manera de obtener una gráfica totalmente desmantelable de arranque único es colocar un vértice 6 con

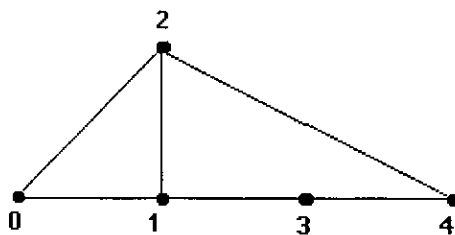


Figura 6.5

vecinos 1, 2, 3, 4 y ésta es isomorfa a la gráfica de la figura 6.3. Si los vértices dominados al eliminar el 0 son el 1 y 2, y si para cada uno tiene un vecino distinto que los domina habría 7 vértices, y no hay manera de poner arista y obtener una gráfica totalmente desmantelable de arranque único. Si es el mismo (llamémoslo 5) éste debe de ser vecino del 3 y del 4, pero ahora tenemos que tanto el 3 como 4 están dominados por el 5, entonces necesitan un vecino (el 6) que no sea vecino del 5, (observar que no puede ser el 0 porque $H \cup [2, 4]$ es inducida), y así G tendría al menos 7 vértices y no hay manera de acomodar la gráfica para obtener otra gráfica totalmente desmantelable de arranque único de orden 7.

■

Capítulo 7

Algunas Generalizaciones del Teorema Principal

7.1 Una Pequeña Generalización.

Definición 7.1 Si G es una gráfica $x, y \in V(G)$ tales que:

1. $d(x, y) \lesssim 2$.
2. Existe X clan que contiene a x y que interseca a todos los clanes que contienen a y .
3. Para cada X' clan que interseca a todos los clanes de y , se tiene que $x \in X'$.

entonces diremos que x domina débilmente a y y escribiremos $x \overset{\circ}{\lesssim} y$.

Teorema 7.2 Si G es una gráfica y $v_0 \in V(G)$ con la siguientes propiedades:

1. El conjunto de clanes de G que no contienen a v_0 tienen la propiedad H de Helly.
2. Para cada $x \in V(G)$, $d(x, v_0) \lesssim 2$.
3. Para cada $x \in V(G)$ con $d(x, v_0) = 2$ se tiene que $x \overset{\circ}{\lesssim} v_0$.

entonces $k^2(G)$ es un cono en \hat{v}_0

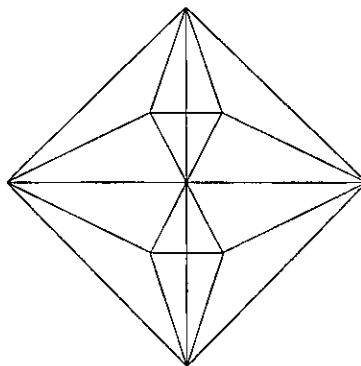


Figura 7.1

Demostración:

Sea $B \in V(k^2(G))$

Caso 1) B es una extensión de $\lambda(x)$ para algún $x \in V(G)$,

Caso 1.1) $d(x, v_0) = 1$: hay un clan de G que contiene a $\{x, v_0\}$ y está tanto en $\lambda(x)$ como en $\lambda(v_0)$ por tanto $d(B, v_0) \leq 1$.

Caso 1.2) $d(x, v_0) = 2$: Como $x \overset{\circ}{\lesssim} v_0$ se tiene que todas las extensiones de $\lambda(x)$ contienen a un elemento de $\lambda(v_0)$ por tanto $d(B, v_0) \leq 1$.

Caso 2) B no es la extensión de un $\lambda(x)$ para toda $x \in V(G)$:

Entonces los elementos de B , que son clanes de G , no tienen la propiedad de Helly entonces uno de ellos contiene a v_0 y así $B \cap \lambda(v_0) \neq \emptyset$. Por tanto $d(B, \widehat{v}_0) \leq 1$.

■

Como ejemplo tenemos la segunda gráfica de clanes de la gráfica de la figura 7.1

7.2 El Operador Γ

Notación

Sea G una gráfica y G^- subgráfica. Sea $z \in k(G)$.

Definimos:

$$z^- = z \cap G^-$$

$$A = \{z_j \in k(G) \mid j \in J\} \in k^2(G)$$

$$A^- = \{z_j^- \mid z_j \in A\}$$

$$A_* = A^- \cap k(G^-)$$

$$A_x = A_* \text{ Cuando } V(G) - V(G^-) = \{x\}$$

$$\Gamma_x(G) = \Omega(\{\alpha - \{x\} : \alpha \text{ es clan de } G\})$$

Un 2-clan de una gráfica es un clan de clanes

Definición 7.3 A es un 2-clan bueno (respecto de x) si A_x es un 2-clan de G^- , es malo en caso contrario.

Observación 7.4 Existe $g : \Gamma_x(G) \rightarrow k(G)$ ($g(z^-) = z$) que es biyectiva y homomorfismo pero no isomorfismo.

Teorema 7.5 Si $V(G) - V(G^-) = \{x\}$ y x es tal que:

1. Todo 2-clan malo respecto de x está dominado por un 2-clan bueno respecto de x .
2. $\forall B = \{z_i^-\}_{i \in I} \in V(k(\Gamma_x(G)))$. se tiene que

$$A = \{z_i\}_{i \in I} \in V(k^2(G))$$

entonces $\Gamma_x(G)$ y G tienen el mismo k -carácter.

La prueba de éste teorema se resume en dos afirmaciones:

Afirmación 1. Existe $\bar{g} : V(k(\Gamma_x(G))) \rightarrow V(k^2(G))$ isomorfismo sobre su imagen definida como $\bar{g}(B) = \bar{g}(\{z_i^-\}_{i \in I}) = \{z_i\}_{i \in I}$.

Demostración.

- Está bien definida por 2).
- Es inyectiva en vértices : sean $B, B' \in V(k(\Gamma_x(G)))$ tal que $\bar{g}(B) = \bar{g}(B')$ entonces, tenemos que $\bar{g}(\{z_i^-\}_{i \in I}) = \bar{g}(\{z'_i\}_{i \in I})$ por tanto, $\{z_i\}_{i \in I} = \{z'_i\}_{i \in I}$ y así, $B = B'$.

- \bar{g} es biyectiva en aristas:

$$\{B, B'\} \in E(k(\Gamma_x(G)))$$

$$\Leftrightarrow B \cap B' \neq \emptyset.$$

$$\Leftrightarrow z^- \in B \cap B'.$$

$$\Leftrightarrow z \in \bar{g}(B) \cap \bar{g}(B').$$

$$\Leftrightarrow \bar{g}(B) \cap \bar{g}(B') \neq \emptyset.$$

$$\Leftrightarrow \{\bar{g}(B), \bar{g}(B')\} \in E(k^2(G)).$$

Afirmación 2. $A \in V(k^2(G)) - V(\bar{g}(k(\Gamma_x(G))))$ entonces A es malo.

Demostración

Supongamos que A no es malo, es decir, A es bueno.

entonces A_x es 2-clan de $G - \{x\} = G^-$ de aquí que A_x es completa en $\Gamma_x(G)$. ($A_x \subset A^- \subset \Gamma_x(G)$).

Pensemos en que tipo de elementos de $\Gamma_x(G)$ completan A_x a un clan.

Sea $z^- \notin A_x$ tal que $\{z^-\} \cup A_x$ es completa en $\Gamma_x(G)$:

- $z^- \cup \{x\}$ es clan de G .

Ya que de otra manera $z^- \in k(G - \{x\})$ por tanto $z^- \in A_x$, lo que es una contradicción.

- $g(z^-) = z \in A$.

Sea $z' \in A$.

Caso 1: $z'^- \in A_x$ entonces $z^- \cap z'^- \neq \emptyset$.

Caso 2: $z'^- \notin A_x$ entonces $x \in z \cap z'$.

Por tanto $z \in A$.

Sea $\overline{A_x}$ una extensión de A_x a un clan en $\Gamma_x(G)$, entonces:

$$\bar{g}(\overline{A_x}) \subset A$$

y como

$$\bar{g}(\overline{A_x}) \in V(k^2(G))$$

tenemos

$$\bar{g}(\overline{A_x}) = A$$

por tanto $A \in \text{imagen}(\bar{g})$, lo cual es una contradicción.

■

Corolario 7.6 Si $\Gamma_x(G)$ es desmantelable y x y G cumplen las hipótesis del teorema anterior, entonces G es k -nula.

7.3 Γ y Gráficas Anuladoras

Definimos la gráfica $H_{n+3,m}$ para $n \geq 0$ como en la figura 7.2. La $n+3$ significa el número de pisos completos (en la gráfica de la figura 7.3 se muestra lo que es un piso) y el m la longitud de la trayectoria de la cola,

Por ejemplo la gráfica $H_{6,2}$ es la gráfica de la figura 7.4.

Para lo que sigue $\xi(H, v)$ lo denotaremos como $\xi(H)$ y v siempre va ser el último vértice de la cola.

Entonces $\xi(H_{6,2})$ es la gráfica de la figura 7.5,

y $\xi(H_{n+3,m})$ es la gráfica de la figura 7.6, numeremos los vértices de estas figuras para explicar que significan: en la gráfica de la figura 7.7 hemos dado nombre a los vértices de la gráfica de la figura 7.5, y en la gráfica de la figura 7.8 hemos dado nombre a los vértices de la gráfica de la figura ?? donde los vértices adyacentes de los puntos en los centros de los triángulos van ser los vértices que estan en las esquinas del triángulo del cual es centro y de los triángulos que comparten una arista con el triángulo central (los vecinos del 11, por esta causa, son 2, 3, 8, x, 7 y 4; los vecinos del 10, por esta razón, son 2, 7, 8, x, 3, 14 y 15), union los centros de los triángulos que comparten una arista (los vecinos del 11, por esta causa son, 5,10,12; del 10 son 11 y 18) union los centros de triángulos que comparten una arista con un triángulo que comparte un arista con el triángulo central (11: 6, 13 y 18; 10: 5, 12, 17 y 19). Los vértices con centro blanco que llamaremos vértices vacios son vértices que no pertenecen a la gráfica pero los incluimos para poder utilizar el esquema anterior.

En 7.7 y ?? el 5 esta dominado por el 11, el 6 por el 12 y el 3 también por el 12, al borrarlos nos quedan respectivamente las gráficas de la figura 7.9 y de la figura ?? en éstas estan dominados el 2 por el 10 y 4 por el 13 al borrarlos estos dos vértices dominados obtenemos respectivamente las gráficas de la figura 7.11 y de la figura 7.12 tomemos como $G = (G_{n+3,2}, v) \vee (C_4, w)$ (ver gráfica de la figura 7.13) donde v es el vértice de la cola y w es cualquier vértice de C_4 . Revisemos que para $n \geq 1$ las hipotesis del teorema 7.5 son satisfechas para $G^- = G - \{x\}$ para ello nos fijaremos en un piso mas abajo (ver gráfica de la figura 7.14).

Los únicos 2-clanes que pueden ser malos son los que tienen al menos uno de los siguientes clanes

$$z_1 = \{7, 10, 11, x\}$$

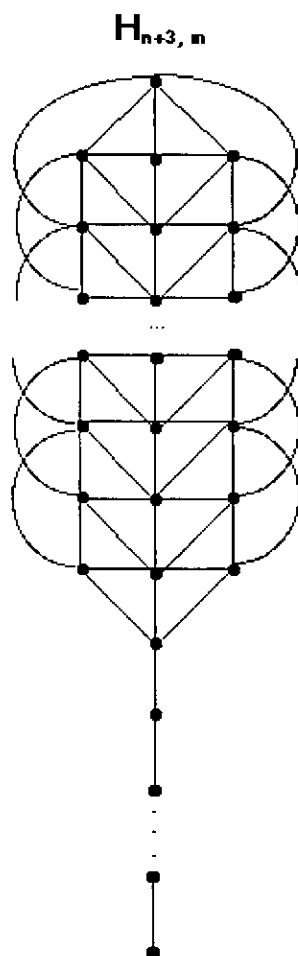


Figura 7.2

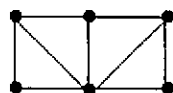


Figura 7.3

$H_{6,2}$

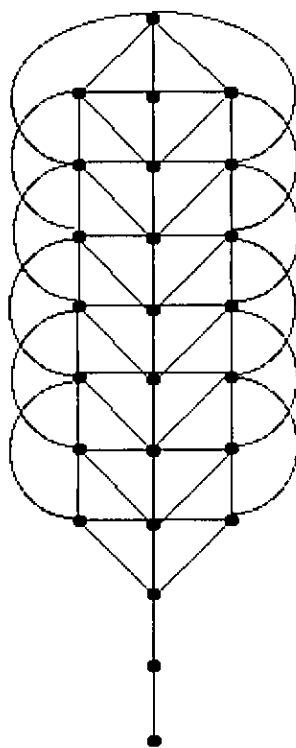


Figura 7.4

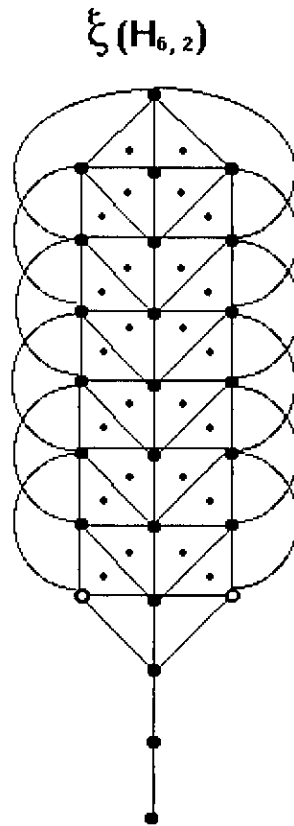


Figura 7.5

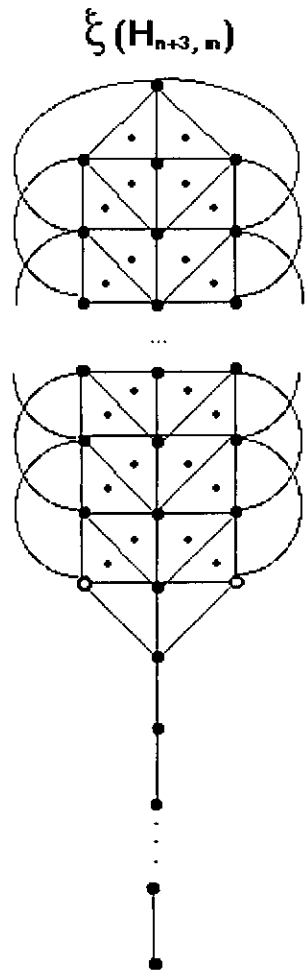


Figura 7.6

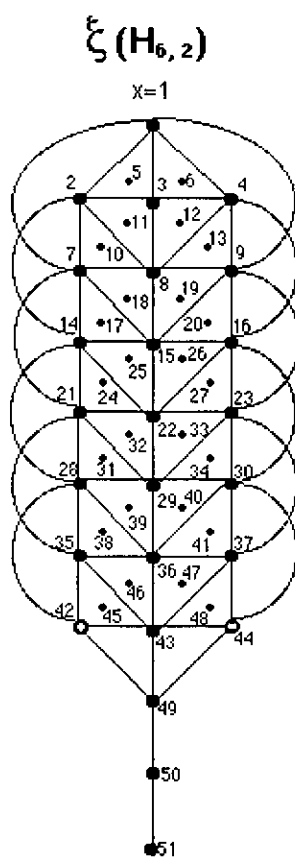


Figura 7.7

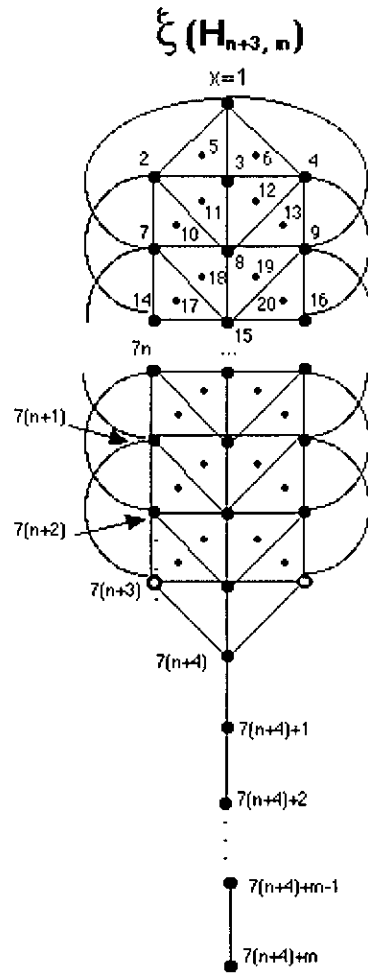


Figura 7.8

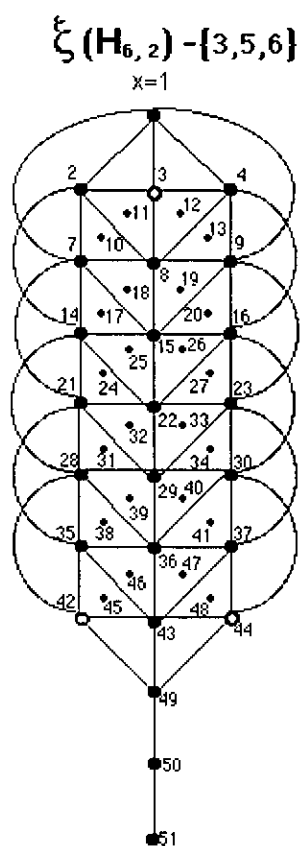


Figura 7.9

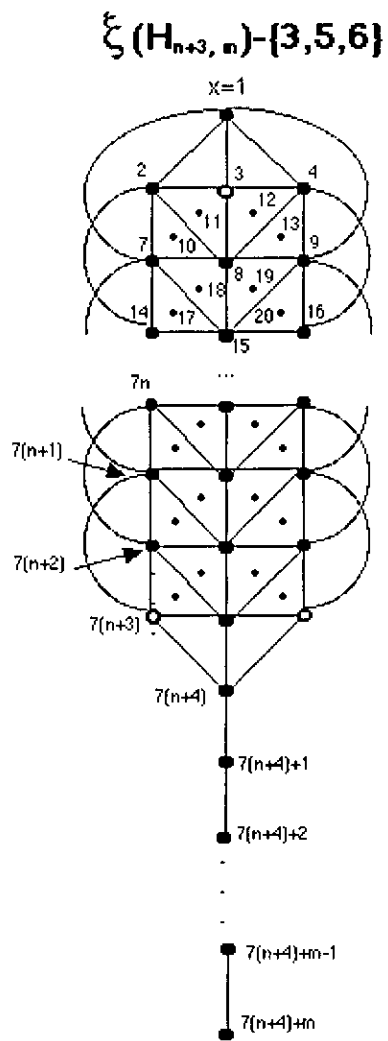


Figura 7.10

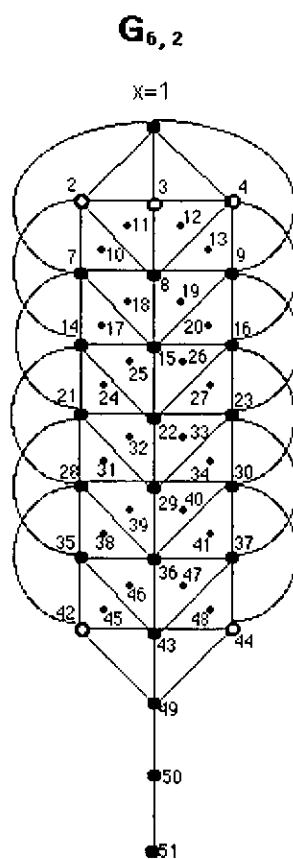


Figura 7.11

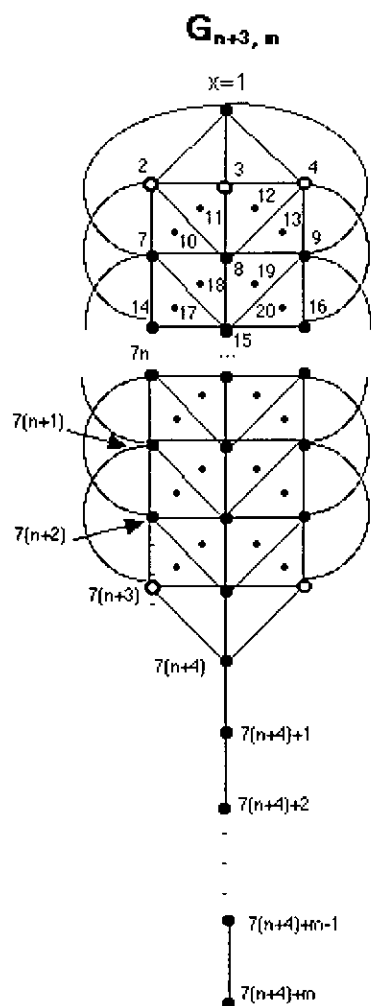


Figura 7.12

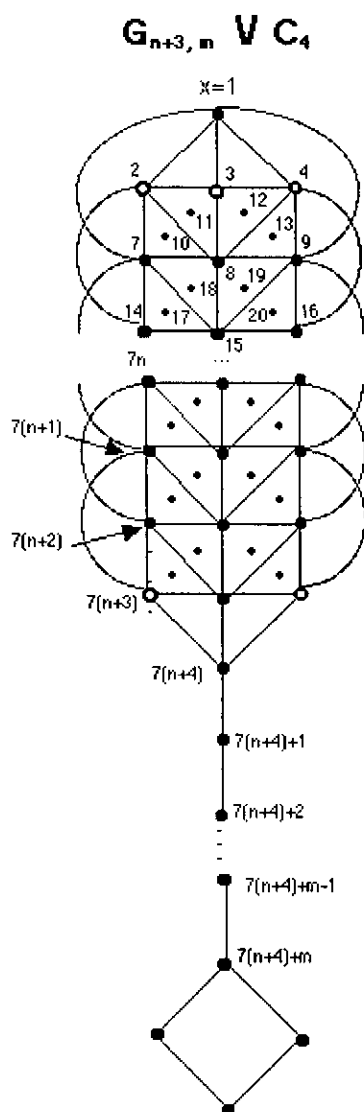


Figura 7.13

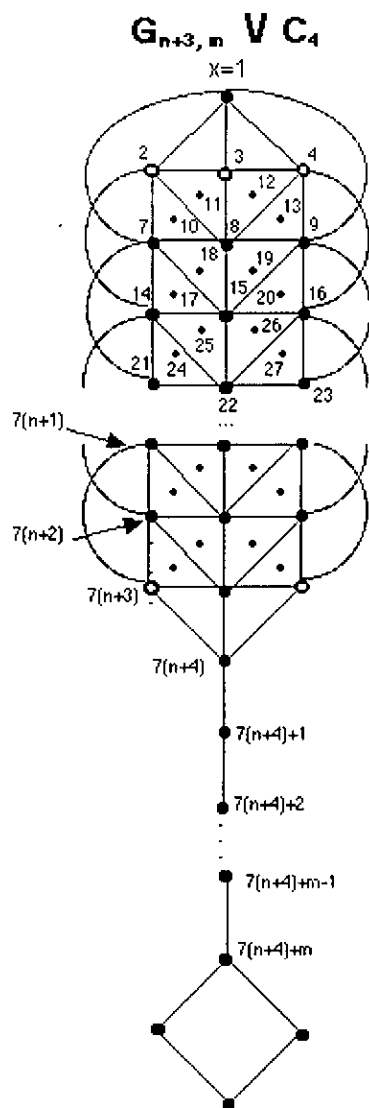


Figura 7.14

$$z_2 = \{10, 11, 12, x\}$$

$$z_3 = \{11, 12, 13, x\}$$

$$z_4 = \{9, 12, 13, x\}$$

Lo mismo para los posibles $A^- \in V(k(\Gamma_x(G)))$ que se quiera demostrar que $A \in V(k^2(G))$.

Los únicos clanes que intersectan a los z_i con $i = 1, 2, 3, 4$, son los siguientes:

$$z_5 = \{7, 8, 10, 11, 18\}$$

$$z_6 = \{8, 10, 11, 12\}$$

$$z_7 = \{8, 11, 12, 13\}$$

$$z_8 = \{8, 9, 12, 13, 19\}$$

$$z_9 = \{7, 10, 14, 17, 18\}$$

$$z_{10} = \{9, 13, 16, 19, 20\}$$

$$z_{11} = \{7, 8, 10, 15, 17, 18, 19\}$$

$$z_{12} = \{8, 9, 13, 15, 18, 19, 20\}$$

$$z_{13} = \{7, 14, 15, 17, 18, 25\}$$

$$z_{14} = \{9, 15, 16, 19, 20, 26\}$$

Entonces los 2-clanes malos los debemos encontrar entre subconjuntos de $\{z_i\}_{i=1}^{14}$ con al menos un elemento de $\{z_i\}_{i=1}^4$.

Los z_1, z_2, z_3, z_4 que aparezcan en un 2-clan deben estar seguidos, por ejemplo, no pueden estar el z_1 y el z_3 sin que este el z_2 , ya que para que se forme un 2-clan debe de haber un w que intersecte a z_1 y z_3 sin que intersecte a z_2 , la única manera en que sucede esto es que $z_1 \cap w = \{7\}$ y $z_3 \cap w = \{13\}$ pero esto es imposible por que no hay arista entre el 7 y el 13.

Busquemos por casos los 2-clanes malos.

Caso 1) $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subseteq A_1$ posible dos clan malo:

Luego $z_5 \notin A_1$ ya que $z_4 \cap z_5 = \emptyset$. Lo mismo para $z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}$ y z_{14} por que su intersección de los z_i con subíndices pares con el z_1 es vací

a y la de los z_i con subíndices impares con el z_4 es vacía. Por otro lado z_6 y z_7 se intersectan entre si e intersectan a cada uno de los z_i con $i = 1, 2, 3, 4$. Por lo cual $A_1 = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, z_7\}$.

Caso 2) Que falte uno de los z_1, z_2, z_3, z_4 .

Pero por lo antes dicho esto sólo es cuando falta z_1 ó z_4 .

Si falta z_4 , se tiene que z_5, z_6, z_7 se intersectan todos entre si e intersectan cada uno a cada uno de los z_1, z_2, z_3 . En cambio los z_8, \dots, z_{14} no intersectan a z_1 los de subíndice par y z_3 los de subíndice impar. De aquí que otro posible 2-clan malo es $A_2 = \{z_1, z_2, z_3, z_5, z_6, z_7\} = 11^*$.

Trabajando simétricamente cuando falta z_1 , obtenemos como posible 2-clan malo $A_3 = 12^* = \{z_2, z_3, z_4, z_6, z_7, z_8\}$.

Caso 3) Que falten dos.

Aquí hay tres subcasos que falten z_3 y z_4 , que falten z_1 y z_4 y que falten z_1 y z_2 .

Subcaso 3.1) Que falten z_3 y z_4 .

Los clancs que intersecten a z_1 y z_2 los intersectan en el 10 o en el 11 por que no hay un clan que contenga al 7 y al 12 al mismo tiempo. Estos son $z_5, z_6, z_7, z_9, z_{11}$ pero si incluimos al z_7 ya no podemos incluir a z_9 ni a z_{11} por que su intersección con z_7 es vacía, pero entonces obtendríamos $\{z_1, z_2, z_5, z_6, z_7\} \subsetneq A_2$ el cual claramente no es 2-clan. Por otro lado si no incluimos a z_7 , Obtenemos otro posible 2-clan malo: $A_4 = \{z_1, z_2, z_5, z_6, z_9, z_{11}\} = 10^*$.

Subcaso 3.2) Que faltan z_1 y z_4 .

Como en el subcaso anterior sólo pueden haber clancs que intersecten tanto a z_2 como z_3 si los intersectan en 11 ó en el 12, y estos son: z_5, z_6, z_7 y z_8 con los que se forma otro posible 2-clan malo $A_5 = \{z_2, z_3, z_5, z_6, z_7, z_8\}$ este en particular no es la estrella de nadie.

Subcaso 3.3) Que faltan z_1 y z_2 .

Se procede simétricamente al subcaso 3.1) obteniendose $A_6 = 13^* = \{z_3, z_4, z_7, z_8, z_{10}, z_{12}\}$.

Caso 4) Que haya un sólo elemento de $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

Probemos que no puede haber uno con el z_2 o el z_3 , revisemos sólo para z_2 el otro es simétrico. Para no caer en ninguno de los caso anteriores debe de haber un clan que contenga al 11 y no contenga al 10 ni al 12 pero no existe tal clan.

Ahora que sólo este el z_1 . Para no caer en ninguno de los casos anteriores debe de haber un clan que intersecte a z_1 en sólo el 7, el único que cumple con ello es el z_{13} y como no hay ningun clan que intersecte al z_1 y al z_{13} en un lugar distinto al 7, el 2-clan malo posible es el $A_7 = 7^* = \{z_1, z_5, z_9, z_{11}, z_{13}\}$.

Cuando sólo este el z_4 , se procede simétricamente y obtenemos $A_8 = 9^* = \{z_4, z_8, z_{10}, z_{12}, z_{14}\}$.

Revisemos ahora cuales son malos.

$$A_1 = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, z_7\}.$$

$A_{1x} = \{z_6, z_7\}$ que no es clan de G^- por tanto A_1 es malo.

$$A_2 = 11^* = \{z_1, z_2, z_3, z_5, z_6, z_7\}.$$

$A_{2x} = \{z_5, z_6, z_7\}$ que no es clan de G^- por tanto A_2 es malo.

$$A_3 = 12^* = \{z_2, z_3, z_4, z_6, z_7, z_8\}.$$

$A_{3x} = \{z_6, z_7, z_8\}$ que no es clan de G^- por tanto A_3 es malo.

$$A_4 = 10^* = \{z_1, z_2, z_5, z_6, z_9, z_{11}\}.$$

$A_{4x} = \{z_5, z_6, z_9, z_{11}\}$ que si es clan de G^- por tanto A_4 es bueno.

$$A_5 = \{z_2, z_3, z_5, z_6, z_7, z_8\}.$$

$A_{5x} = \{z_5, z_6, z_7, z_8\}$ que no es clan de G^- por tanto A_5 es malo.

$$A_6 = 13^* = \{z_3, z_4, z_7, z_8, z_{10}, z_{12}\}.$$

$A_{6x} = \{z_7, z_8, z_{10}, z_{12}\}$ que si es clan de G^- por tanto A_6 es bueno.

$$A_7 = 7^* = \{z_1, z_5, z_9, z_{11}, z_{13}\}.$$

$A_{7x} = \{z_5, z_9, z_{11}, z_{13}\}$ que si es clan de G^- por tanto A_7 es bueno.

$$A_8 = 9^* = \{z_4, z_8, z_{10}, z_{12}, z_{14}\}.$$

$A_{8x} = \{z_8, z_{10}, z_{12}, z_{14}\}$ que si es clan de G^- por tanto A_8 es bueno.

Ahora revisemos que todos los 2-clanes malos están dominados.

$$N[8^*] \supseteq \{A_j\}_{j=1}^8 \cup \{8^*, 18^*, 19^*\} \supseteq N[A_1] = \{A_j\}_{j=1}^8 \cup \{8^*\}, \text{ Así } A_1 \lesssim 8^*.$$

Los únicos clanes de $A_2 = 11^*$ que no estan contenidos en 8^* son z_1, z_2, z_3 pero esto clanes sólo estan en algun A_i y todos ellos son adyacentes a 8^* , por lo cual $A_2 \lesssim 8^*$. De igual forma se prueba que $A_3 \lesssim 8^*$ y $A_5 \lesssim 8^*$.

Así hemos probado la primera condición del teorema 7.5, pensemos en la segunda condición, los únicos elementos de $V(k(\Gamma_x(G)))$ que hay verificar son $\{A_j^-\}_{j=2}^8$ ya que A_1^- no es un clan de $\Gamma_x(G)$ ($z_1^- \cap z_4^- = \emptyset$) y ningun subconjunto de el forma un clan, pero todas las A_j son clanes, por tanto tenemos todas las condiciones de teorema 7.5.

Entonces G y $\Gamma_x(G)$ tienen el mismo k -character, pero $\Gamma_x(G)$ es la gráfica de clanes de $I_{n+3,m} \vee C_4$ (ver figura 7.15) por lo cual G y $I_{n+3,m} \vee C_4$ tienen el mismo k -character, así $G_{n+3,m}$ y $I_{n+3,m}$ tienen el mismo ξ -character. Como $I_{n+3,m}$ (ver gráfica de la figura 7.16) tiene x^1, x^2, x^3, x^4 dominado entonces $J_{n+3,m} = I_{n+3,m} - \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ (ver figura ??) tiene el mismo ξ -character que $I_{n+3,m}$. Luego $J_{n+3,m}$ tiene dominado al 11 por el 18 y 12 el por 19 al eliminarlos nos queda la gráfica de la figura ?? en esta última se tiene que: $10 \lesssim 18, 13 \lesssim 19, 7 \lesssim 17, 9 \lesssim 20$ y $8 \lesssim 18$ la gráfica resultante al borrarlos es $J_{n+2,m}$. En resumen para $n \geq 1$, $J_{n+2,m}$ tiene el mismo ξ -character que

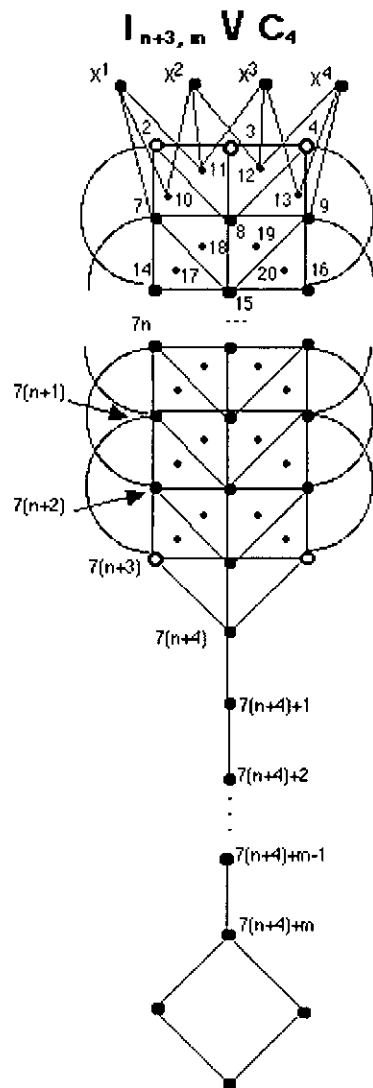


Figura 7.15

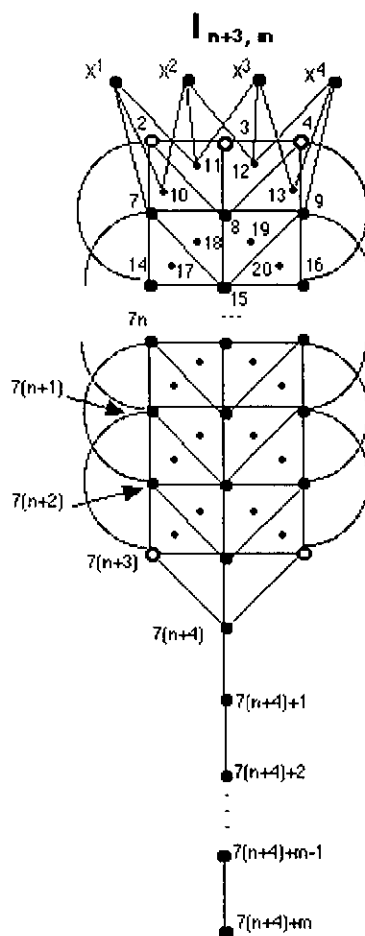


Figura 7.16

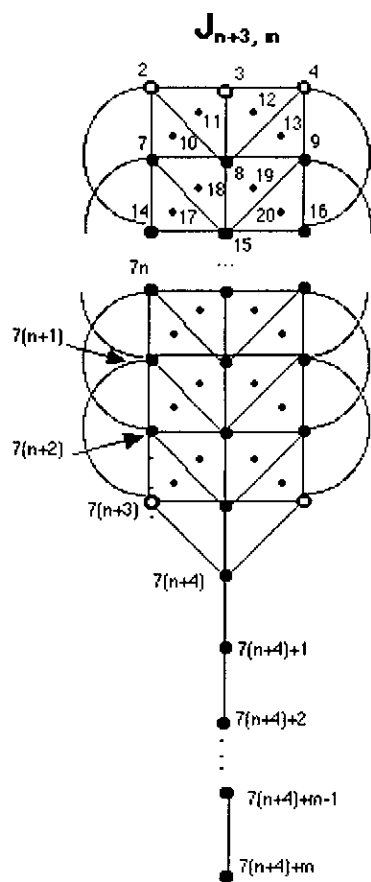


Figura 7.17

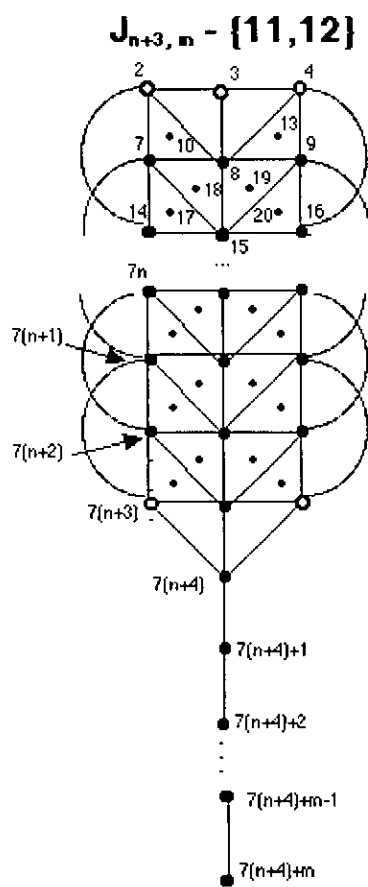


Figura 7.18

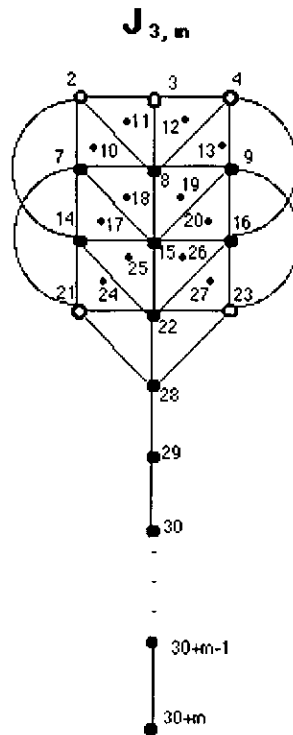


Figura 7.19

$J_{n+3,m}$, esta a su vez tiene el mismo ξ -caracter que $I_{n+3,m}$, $G_{n+3,m}$ y $H_{n+3,m}$. Entonces basta probar que $J_{3,m}$ es ξ -nula para que todas las anteriores entre ellas $H_{n+3,m}$ sean ξ -nulas y por tanto anuladoras. Pero $J_{3,m}$ es ξ -nula porque se desmantela totalmente hacia el punto distinguido (ver figura 7.19).

Bibliografía

- [1] B. D. Acharya. *Some Queries on the Periodicity and Convergence of a Graph*, in Nat. Acad. Sci. (India) Series A (1980) 185-200.
- [2] R. Balakrishnan and P. Paulraja. *Self-Clique Graphs and Diameters for Iterated Clique Graphs*. Utilitas Math. 29 (1986) 263-268.
- [3] H.-J. Bandelt and E. Prisner. *Clique Graphs and Helly Graphs*. J. Comb. Th. Series B 51 (1991) 34-46.
- [4] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society 1963.
- [5] C. F. Borstein and J.L. Szwarcfiter. *On Clique Convergent Graphs*. Graphs and Combinatorics 11 (1995) 213-220.
- [6] G. Carnazolla. *Grafi di Cricce Iterati*. Ph. D. Thesis, 1983/84.
- [7] B.-L. Chen and K.-W. Lih. *Diameters of Iterated Clique Graphs of Chordal Graphs*. J. Graph Th. 14 (1990) 391-396.
- [8] L. Chong-Keang and P. Yee-Hock. *On Graphs Without Multicliqual Edges*. Journal of Graphs Theory 5 (1981) 443-451.
- [9] F. Escalante. *Über Iterierte Clique-Graphen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 39 (1973) 58-68.
- [10] F. Escalante and B. Toft. *On Clique-Critical Graphs*. J. Comb. Th. Series B 17 (1974) 170-182.
- [11] M. Gutiérrez. Tesis Doctoral: *Grafos de Intervalos Propios y Grafos Arboreos*. Dir. L.G. Oubiña. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas Universidad Nacional de la Plata.

- [12] M. Gutiérrez, J. Meidanis. *Recognizing Clique Graphs of Directed Edge Path Graps*. Enviado a Discrete App. M.
- [13] M. Gutiérrez, J. Meidanis. *On Clique Graph Reconition*. Enviado a Ars Comb.
- [14] M. Gutiérrez. *Intersection Graphs and the Clique Operator*. Aceptado en Graph. Combinat.
- [15] M. Gutiérrez. *Tree-Clique Graphs*. Instituto de Matemática, Universidad Sedival Do Rio de Janeiro on 63 Workshop International of Combinatoric.
- [16] M. Gutiérrez, L. Oubiña. *Metric Characterizations of Proper Interval Graphs and Tree-Clique Graphs*. Journal of Graph Theory 21(2) (1996) 199-205.
- [17] M. Gutiérrez, L. Oubiña. *Minimum Proper Interval Graphs*. Discrete Mathematics 142 (1995) 77-85.
- [18] M. Gutiérrez, J. Meidanis. *The Images Under the Clique Operator of all Graphs and Clique Graph*. Enviado a Discrete Math.
- [19] M. Gutiérrez, J. Meidanis. *Algebraic Theory for the Clique Operator*. En preparación.
- [20] R.C. Hamelink. *A partial characterization of clique graphs*. J. Combinatorial Theory 5 (1968) 192-197.
- [21] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA (1969).
- [22] S. Hazan, V. Neumann-Lara. *Fixed Points of Posets and Clique Graph*. Kluwer Academic Publishers 13 (1996) 219-225.
- [23] S. T. Hedetniemi and P. J. Slater. *Line Graphs of Triangleless Graphs and Iterated Clique Graphs*. Springer Lecture Notes in Mathematics 303 (1972) 139-147.
- [24] B. Hedman. *Open Questions*. Graph Theory Newsletter. 12 (1983).
- [25] B. Hedman. *Diameters of Iterated Clique Graphs*. Hadronic J. 9 (1986) 273-276.

- [26] B. Hedman. *Clique Graphs of Time Graphs*. J. Comb. Th. Series B 37 (1984) 270-278.
- [27] C.-K. Lim. *A Result on Iterated Clique Graphs*. J. Austral. Math. Soc. (Series A) 32 (1982) 289-294.
- [28] F. Larrión and V. Neumann-Lara. *A Family of Clique Divergent Graphs with Linear Growth*. Graphs and Combinatorics 13 (1997) 263-266.
- [29] F. Larrión and V. Neumann-Lara. *Locally C_6 graphs are Clique Divergent*. Discrete Mathematics. 215, 1-3 (2000) 159-170.
- [30] F. Larrión and V. Neumann-Lara. *On Clique Divergent Graphs With Linear Growth*. Enviado.
- [31] F. Larrión and V. Neumann-Lara. *Clique Divergent Graphs With Unbounded Sequence of Diameters*. Discr. Math. 197-198 (1999) 491-501.
- [32] F. Larrión, V. Neumann-Lara and M. A. Pizaña. *Whitney Triangulations, Local Girth and Iterated Clique Graphs*. Preprint.
- [33] C.L. Lucchesi, C. Picinin and J.L. Szwarcfiter. *On Clique-Complete Graphs*. Discrete Mathematics 183 (1998) 247-254.
- [34] V. Neumann-Lara. *On Clique-divergent Graphs*, Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes (Colloques internationaux C.N.R.S, 260). Paris (1978), 313-315.
- [35] V. Neumann-Lara. *Clique Divergence in Graphs*, Algebraic Methods in Graph Theory (Coll. Math.Soc.Janos Bolyai, 25). Szeged (1981), 563-569.
- [36] V. Neumann-Lara. *Clique Divergence in Graphs. Some Variations*. Publ. Prelim. Inst. Mat. U.N.A.M. 224. México (1991), 1-14.
- [37] V. Neumann-Lara. *A Theory of Expansive Graphs*. In Preparation.
- [38] Neumann Lara Victor. *Introducción a la Teoría de Gráficas*. (Notas 10 de Noviembre de 1997).
- [39] C. Peyrat, D. F. Rall and P. J. Slater. *On Iterated Clique Graphs with Increasing Diameters*. J. Graph Th. 10 (1986) 167-171.

- [40] M.A. Pizaña. *The icosaedron is Clique-Divergent*. Sometido a Discrete Mathematics (1999).
- [41] E. Prisner. *Convergence of Iterated Clique Graphs*. Discrete Mathematics 103 (1992) 199-207.
- [42] E. Prisner. *A Common Generalization of Line Graphs and Clique Graphs*. J. Graph Th. 18 (1994) 301-313.
- [43] E. Prisner. *Graph Dynamics*. Pitman Research Notes in Mathematics Series 338. Longman, Essex (1995).
- [44] F.S. Roberts and J. H. Spencer, *A Charaterización of Clique grsphs*. Journal combinatorial Theory Serie B 10 (1972) 102-108.
- [45] W. D. Wallis and J. Wu. *Squares, Clique Graphs, and Chordality*. J. Graph Th. 20 (1995) 37-45.