

01174



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

---

---

Facultad de Ingeniería  
División de Estudios de Posgrado

## EVALUACION DE SISTEMAS ESTRATIFICADOS

T E S I S

Que para obtener el grado de  
MAESTRO EN INGENIERIA  
(PETROLERA)

p r e s e n t a

ANTONIO ENRIQUE ZAMARRON GALVAN

DIRECTOR DE TESIS: DR. RODOLFO GABRIEL CAMACHO VELAZQUEZ



México, D.F.

2000

28/979



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## DEDICATORIA

Deseo expresar intensamente mi reconocimiento para mi esposa Fabiola, que de no ser por su gran amor, dedicación, coraje y ternura, no sería el ser humano que hoy soy. Con su espíritu de carácter indomable me ha enseñado a luchar para salir adelante cada día. Porque estoy plenamente convencido de que haberla conocido fue lo mejor que me pudo haber sucedido.

Para nuestro hijo Esdras, quien con su inocencia y alegría vino a confirmar nuestra idea de que la vida es lo mejor de lo mejor.

Por todos los momentos compartidos y por todo lo que nos espera juntos en un futuro, para ellos, con todo mi amor, este trabajo está dedicado. Gracias por existir.

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que apoyaron la realización de este trabajo. Quiero dar las gracias de manera especial al Dr. Rodolfo Camacho por su apoyo incondicional, por todas sus sugerencias y consejos y, especialmente, por haber creído en mí. A los profesores Dr. Fernando Samaniego, Dr. Jesús Rivera, Dr. Luis Macías y Dr. Sergio Berumen por sus valiosas observaciones y recomendaciones en la elaboración del presente estudio, así como por el gran cúmulo de conocimientos transmitidos durante el desarrollo de mis estudios, lo que hago extensivo a todo el personal académico de la Facultad.

A las autoridades de PEMEX Exploración y Producción, y específicamente a la Subdirección de Perforación y Mantenimiento de Pozos, agradezco la enorme oportunidad que nos brindan a todo los que queremos continuar preparándonos. A mis superiores inmediatos mi gratitud por las facilidades otorgadas.

De igual manera, hago patente mi agradecimiento a mis padres, a mis suegros, a mis hermanos y a mis cuñados por su apoyo constante.

## RESUMEN

Zamarrón Galván, Antonio Enrique ( Maestro en Ingeniería Petrolera ).

Evaluación de Sistemas Estratificados ( 141 pags. – VII Capítulos )

Dirigida por el Dr. Rodolfo Gabriel Camacho Velázquez

( 186 palabras )

La elaboración de un simulador analítico para determinar la respuesta de presión a gasto constante para un sistema estratificado formado por " n " capas, así como la determinación de las propiedades petrofísicas características de una o varias capas de este mismo sistema, fueron los objetivos principales de este trabajo.

Los estratos podían ser iguales o tener características diferentes entre sí, como son el tipo de roca, el comportamiento de flujo, las condiciones de frontera externa y la presión inicial. Se consideró la inexistencia de flujo cruzado entre los estratos y los efectos de almacenamiento del pozo se incluyeron.

En la primera parte de este trabajo se desarrolló un simulador analítico, el cual permite determinar los ritmos de producción de cada estrato así como la respuesta de presión total del sistema estratificado, esto mediante la combinación de soluciones para una sola capa.

En la segunda parte del estudio se adaptaron algunos algoritmos de optimización ya existentes, tanto de maximización como de minimización conocidos por su potencia y precisión, con el simulador analítico desarrollado, para así poder determinar las propiedades petrofísicas desconocidas que se tienen en un sistema estratificado.

## TABLA DE CONTENIDO

|   | <u>Página</u> |
|---|---------------|
| <b>PRESENTACIÓN</b> .....                                 | <b>i</b>      |
| <b>DEDICATORIA</b> .....                                  | <b>ii</b>     |
| <b>AGRADECIMIENTOS</b> .....                              | <b>iii</b>    |
| <b>RESUMEN</b> .....                                      | <b>iv</b>     |
| <b>TABLA DE CONTENIDO</b> .....                           | <b>v</b>      |
| <b>LISTA DE TABLAS</b> .....                              | <b>vi</b>     |
| <b>LISTA DE FIGURAS</b> .....                             | <b>viii</b>   |
| <b>CAPÍTULO I.- INTRODUCCIÓN.</b> .....                   | <b>1</b>      |
| <b>CAPÍTULO II.- ANTECEDENTES.</b> .....                  | <b>5</b>      |
| <b>CAPÍTULO III.- FORMULACIÓN MATEMÁTICA.</b> .....       | <b>7</b>      |
| <b>CAPÍTULO IV.- DESARROLLO ANALÍTICO.</b> .....          | <b>11</b>     |
| <b>CAPÍTULO V.- CONSIDERACIONES DE CÓMPUTO.</b> .....     | <b>27</b>     |
| <b>CAPÍTULO VI.- RESULTADOS Y VALIDACIÓN.</b> .....       | <b>35</b>     |
| 6.1.- Respuesta de presión de un sistema estratificado.   | <b>35</b>     |
| 6.2.- Análisis de sensibilidad. ....                      | <b>67</b>     |
| 6.3.- Optimización. ....                                  | <b>92</b>     |
| <b>CAPÍTULO VII CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.</b> ..... | <b>132</b>    |
| <b>NOMENCLATURA</b> .....                                 | <b>134</b>    |
| <b>REFERENCIAS</b> .....                                  | <b>136</b>    |

## LISTA DE TABLAS

| <u>Tabla</u> |   | <u>Página</u> |
|--------------|---|---------------|
| 6.1          | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para $k_1 = k_2 = 10$ en un yacimiento infinito. ....                          | 37            |
| 6.2          | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para $k_1 / k_2 = 2, r_{eD1} = r_{eD2} = 1,000$ . ....                         | 39            |
| 6.3          | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para $k_1 / k_2 = 10, r_{eD1} = r_{eD2} = 1,000$ . ....                        | 41            |
| 6.4          | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para $k_1 / k_2 = 10, s_1 = 7, s_2 = 3, r_{eD1} = r_{eD2} = 2,000$ . ....      | 43            |
| 6.5          | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para $k_1 / k_2 = 10, s_1 = 3, s_2 = 7, r_{eD1} = r_{eD2} = 2,000$ . ....      | 45            |
| 6.6          | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para $k_1 = 5, k_2 = 0.1, s_1 = 5, s_2 = -3, r_{eD1} = r_{eD2} = 2,000$ . .... | 47            |
| 6.7          | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para $k_1 = 0.1, k_2 = 5, s_1 = 5, s_2 = -3, r_{eD1} = r_{eD2} = 2,000$ . .... | 49            |
| 6.8          | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para cuatro estratos diferentes. ....  | 51            |
| 6.9          | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para $k_1 = 1, k_2 = 0.001, L_{x11} = 500, L_{x12} = 1,000$ . ....             | 55            |
| 6.10         | Comparación de respuestas de presión a gasto constante para $k_1 = k_2 = 0.1, F_{CD} = 5$ , fractura de conductividad finita. ....    | 61            |

|             |  |            |
|-------------|--|------------|
| <b>6.11</b> | <b>Comparación de respuestas de presión a gasto constante para <math>k_1 = k_2 = 0.1</math>, <math>F_{cD} = 500</math>, fractura de conductividad finita. . . .</b>                  | <b>63</b>  |
| <b>6.12</b> | <b>Comparación de respuestas de presión a gasto constante para <math>k_1 = 0.35</math>, <math>k_2 = 0.05</math>, <math>F_{cD} = 50</math>, fractura de conductividad finita. . .</b> | <b>65</b>  |
| <b>6.13</b> | <b>Comparación de respuestas de presión a gasto constante para <math>\eta_1 = \eta_2 = 100</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, fractura de conductividad infinita. . . .</b>         | <b>71</b>  |
| <b>6.14</b> | <b>Comparación de respuestas de presión a gasto constante para <math>\eta_1 = \eta_2 = 0.01</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, fractura de conductividad infinita. . . .</b>        | <b>75</b>  |
| <b>6.15</b> | <b>Resultados con el optimizador FMIN. . . . .</b>   | <b>94</b>  |
| <b>6.16</b> | <b>Resultados con el optimizador COMPLEX para una incógnita. . . . .</b>   | <b>97</b>  |
| <b>6.17</b> | <b>Resultados con el optimizador COMPLEX para dos incógnitas. . . . .</b>  | <b>103</b> |
| <b>6.18</b> | <b>Comparación de resultados para dos incógnitas modificando el género de las variables y sus valores iniciales, utilizando el optimizador COMPLEX. . . . .</b>                      | <b>105</b> |
| <b>6.19</b> | <b>Comparación de resultados para dos incógnitas de diferente género modificando sus valores iniciales, utilizando el optimizador COMPLEX. . . . .</b>                               | <b>126</b> |
| <b>6.20</b> | <b>Valores de las variables utilizadas para la construcción de las Figuras 6.31 a 6.52. . . . .</b>  | <b>130</b> |



## LISTA DE FIGURAS

| <u>Figura</u>  | <u>Página</u> |
|--|---------------|
| 1.1 Representación esquemática de un sistema estratificado con características diferentes. ....    | 4             |
| 4.1 Diagrama de flujo para la respuesta de presión a gasto constante para un sistema líquido. .... | 14            |
| 4.2 Gráfica de $t_D$ y $t_{DJ}$ en una misma escala de tiempo. ....                                | 19            |
| 4.3 Gráfica de $t_D$ y $t_{DJ}$ con sus respectivas escalas de tiempo. ...                         | 20            |
| 5.1 Cálculo de la derivada logarítmica con el algoritmo de Stehfest.                               | 33            |
| 5.2 Cálculo de la derivada logarítmica con la expresión de pendiente entre dos puntos. ....        | 34            |
| 6.1 Dos estratos en un yacimiento infinito con $k_1 = k_2$ . ....                                  | 38            |
| 6.2 Dos estratos en un yacimiento cerrado con $k_1 / k_2 = 2$ . ....                               | 40            |
| 6.3 Dos estratos en un yacimiento cerrado con $k_1 / k_2 = 10$ . ....                              | 42            |
| 6.4 Dos estratos en un yacimiento cerrado con $s_1 = 7, s_2 = 3$ . ....                            | 44            |
| 6.5 Dos estratos en un yacimiento cerrado con $s_1 = 3, s_2 = 7$ . ....                            | 46            |
| 6.6 Dos estratos en un yacimiento cerrado con $k_1 = 5, k_2 = 0.1, s_1 = 5, s_2 = -3$ . ....       | 48            |
| 6.7 Dos estratos en un yacimiento cerrado con $k_1 = 0.1, k_2 = 5, s_1 = 5, s_2 = -3$ . ....       | 50            |
| 6.8 Gráfica comparativa para cuatro estratos en un yacimiento cerrado. ....                        | 52            |

|             |   |           |
|-------------|---|-----------|
| <b>6.9</b>  | <b>Dos estratos con una fractura de conductividad infinita. . . . .</b>   | <b>56</b> |
| <b>6.10</b> | <b>Dos estratos iguales con una fractura de conductividad finita y<br/><math>F_{cD} = 0.5</math>. . . . .</b>   | <b>62</b> |
| <b>6.11</b> | <b>Dos estratos iguales con una fractura de conductividad finita<br/>con <math>F_{cD} = 500</math>. . . . .</b>   | <b>64</b> |
| <b>6.12</b> | <b>Dos estratos iguales con una fractura de conductividad finita<br/>con <math>F_{cD} = 50</math>. . . . .</b>  | <b>66</b> |
| <b>6.13</b> | <b>Dos estratos con una fractura de conductividad infinita con <math>\eta_1 /</math><br/><math>\eta_2 = 100, L_{xf1} = 500, L_{xf2} = 100</math>. . . . .</b>                 | <b>72</b> |
| <b>6.14</b> | <b>Dos estratos con una fractura de conductividad infinita con <math>\eta_1 /</math><br/><math>\eta_2 = 100, L_{xf1} = 500, L_{xf2} = 1000</math>. . . . .</b>                | <b>73</b> |
| <b>6.15</b> | <b>Dos estratos con una fractura de conductividad infinita con <math>\eta_1 /</math><br/><math>\eta_2 = 100, L_{xf1} = 500, L_{xf2} = 500</math>. . . . .</b>                 | <b>74</b> |
| <b>6.16</b> | <b>Dos estratos con una fractura de conductividad infinita con <math>\eta_1 /</math><br/><math>\eta_2 = 0.01, L_{xf1} = 500, L_{xf2} = 100</math>. . . . .</b>                | <b>76</b> |
| <b>6.17</b> | <b>Dos estratos con una fractura de conductividad infinita con <math>\eta_1 /</math><br/><math>\eta_2 = 0.01, L_{xf1} = 500, L_{xf2} = 1000</math>. . . . .</b>               | <b>77</b> |
| <b>6.18</b> | <b>Dos estratos con una fractura de conductividad infinita con <math>\eta_1 /</math><br/><math>\eta_2 = 0.01, L_{xf1} = 500, L_{xf2} = 500</math>. . . . .</b>                | <b>78</b> |
| <b>6.19</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de<br/>conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 100, L_{xf1} = 500, L_{xf2} = 100, N = 4</math>. . . . .</b> | <b>79</b> |

|             |  |           |
|-------------|--|-----------|
| <b>6.20</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 100</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 100</math>, <math>N = 2</math>.</b>   | <b>80</b> |
| <b>6.21</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 100</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 500</math>, <math>N = 4</math>.</b>   | <b>81</b> |
| <b>6.22</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 100</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 500</math>, <math>N = 2</math>.</b>   | <b>82</b> |
| <b>6.23</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 100</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 1000</math>, <math>N = 4</math>.</b>  | <b>83</b> |
| <b>6.24</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 100</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 1000</math>, <math>N = 2</math>.</b>  | <b>84</b> |
| <b>6.25</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 0.01</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 100</math>, <math>N = 4</math>.</b>  | <b>85</b> |
| <b>6.26</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 0.01</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 100</math>, <math>N = 2</math>.</b>  | <b>86</b> |
| <b>6.27</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 0.01</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 500</math>, <math>N = 4</math>.</b>  | <b>87</b> |
| <b>6.28</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 0.01</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 500</math>, <math>N = 2</math>.</b>  | <b>88</b> |
| <b>6.29</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 0.01</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 1000</math>, <math>N = 4</math>.</b> | <b>89</b> |
| <b>6.30</b> | <b>Gastos fraccionales para dos estratos con una fractura de conductividad infinita: <math>\eta_1 / \eta_2 = 0.01</math>, <math>L_{xf1} = 500</math>, <math>L_{xf2} = 1000</math>, <math>N = 2</math>.</b> | <b>90</b> |

|             |   |            |
|-------------|---|------------|
| <b>6.31</b> | <b>Superficie <math>k_1 / k_2</math> con espaciamentos iguales en ambos ejes:<br/>0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, 6.4, 12.8, 25.6, 51.2, 102.4. ....</b>  | <b>107</b> |
| <b>6.32</b> | <b>Vista en planta de la superficie generada en la Figura 6.31. ...</b>   | <b>108</b> |
| <b>6.33</b> | <b>Superficie <math>k_1 / k_2</math> con espaciamentos iguales en ambos ejes: 1,<br/>2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. ....</b>   | <b>109</b> |
| <b>6.34</b> | <b>Vista en planta de la superficie generada en la Figura 6.33. ...</b>   | <b>110</b> |
| <b>6.35</b> | <b>Superficie <math>k_1 / k_2</math> con espaciamentos de malla diferentes en<br/>ambos ejes. ....</b>  | <b>111</b> |
| <b>6.36</b> | <b>Vista en planta de la superficie generada en la Figura 6.35. ...</b>   | <b>112</b> |
| <b>6.37</b> | <b>Superficie <math>k_1 / k_2</math> con espaciamentos de malla diferentes en<br/>ambos ejes y valores reales de las incógnitas coincidiendo en<br/>una pareja de valores de los espaciamentos. ....</b>  | <b>113</b> |
| <b>6.38</b> | <b>Superficie <math>k_1 / k_2</math> con espaciamentos de malla diferentes,<br/>modificando las propiedades petrofísicas y los valores reales de<br/>las incógnitas sin coincidir con alguna pareja de valores de los<br/>espaciamentos. ....</b> | <b>114</b> |
| <b>6.39</b> | <b>Vista en planta de <math>h_1 / h_2</math> con espaciamentos de malla iguales.</b>  | <b>115</b> |
| <b>6.40</b> | <b>Vista en planta de <math>h_1 / h_2</math> con espaciamentos de malla<br/>diferentes. ....</b>  | <b>116</b> |
| <b>6.41</b> | <b>Vista en planta de <math>h_1 / h_2</math> con propiedades petrofísicas<br/>diferentes y espaciamentos de malla iguales. ....</b>   | <b>117</b> |

|             |   |            |
|-------------|---|------------|
| <b>6.42</b> | <b>Vista en planta de <math>h_1 / h_2</math> con propiedades petrofísicas y espaciamentos de malla diferentes. ....</b>   | <b>118</b> |
| <b>6.43</b> | <b>Vista en planta de <math>h_1 / h_2</math> modificando las propiedades petrofísicas, espaciamentos de malla diferentes y valores reales de las incógnitas coincidiendo con una pareja de valores de los espaciamentos. ....</b>     | <b>119</b> |
| <b>6.44</b> | <b>Vista en planta de <math>h_1 / h_2</math> modificando las propiedades petrofísicas, espaciamentos de malla diferentes y valores reales de las incógnitas sin coincidir con alguna pareja de valores de los espaciamentos. ....</b> | <b>120</b> |
| <b>6.45</b> | <b>Mismo caso que la Figura 6.44 pero con otra pareja de valores reales de las incógnitas. ....</b>   | <b>121</b> |
| <b>6.46</b> | <b>Vista en planta de <math>h_1 / h_2</math> modificando las propiedades petrofísicas, espaciamentos de malla diferentes y valores reales coincidiendo con una pareja de valores de los espaciamentos. ....</b>                       | <b>122</b> |
| <b>6.47</b> | <b>Superficie <math>\phi_1 / \phi_2</math> con espaciamentos de malla diferentes y valores reales de las incógnitas sin coincidir con alguna pareja de valores de los espaciamentos. ....</b>   | <b>123</b> |
| <b>6.48</b> | <b>Superficie <math>\phi_1 / \phi_2</math> con espaciamentos de malla diferentes y valores reales de las incógnitas coincidiendo con una pareja de valores de los espaciamentos. ....</b>   | <b>124</b> |

|             |   |            |
|-------------|---|------------|
| <b>6.49</b> | <b>Superficie <math>\phi_1 / \phi_2</math> modificando las propiedades petrofísicas, espaciamentos de malla diferentes y valores reales de las incógnitas coincidiendo con una pareja de valores de los espaciamentos. ....</b> | <b>125</b> |
| <b>6.50</b> | <b>Vista en planta de <math>k_1 / \phi_1</math>. ....</b>   | <b>127</b> |
| <b>6.51</b> | <b>Vista en planta de <math>k_2 / \phi_1</math>. ....</b>   | <b>128</b> |
| <b>6.52</b> | <b>Vista en planta de <math>k_1 / \phi_2</math>. ....</b>   | <b>129</b> |

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

Las crecientes necesidades energéticas en el mundo han provocado un incremento acelerado en la demanda de hidrocarburos. Esto ha generado que se exploten de manera simultánea horizontes productores que poseen características diferentes, y cuya producción está gobernada por modelos diferentes.

Por tal motivo, de unos cuantos años a la fecha se han realizado intervenciones en pozos productores que tienen estratos con gran potencial con la finalidad de incorporarlos a producción lo más pronto posible. La alternativa más atractiva y utilizadas para llevar a cabo lo anterior ha sido realizar estimulaciones y fracturamientos hidráulicos masivos, esto es, tratar simultáneamente varios cuerpos productores con características diferentes en un mismo pozo.

Lo anterior ha traído consigo problemas para evaluar estos tratamientos ya que la herramienta principal para hacerlo, la cual consiste en el análisis de una prueba de presión, proporciona resultados globales debido a la acción simultánea de todos los estratos. De tal forma que se vuelve realmente complejo el poder determinar si dichos tratamientos se diseñaron de manera óptima, tanto desde el punto de vista técnico como del económico, siendo igualmente importantes ambos factores. Esto tiene como consecuencia la pérdida total del control de información, dificultando la caracterización y explotación correcta del yacimiento, así como el acarreo de los mismos errores para trabajos posteriores, reflejándose en pérdidas económicas sustanciales.

De aquí la inquietud en realizar un estudio de esta naturaleza, con la finalidad de contar con las herramientas necesarias para la evaluación de este tipo de tratamientos.

En este trabajo se presenta una metodología con la cual se obtienen las respuestas de presión a gasto constante para yacimientos estratificados, que se encuentran comunicados únicamente por el pozo, a partir de soluciones existentes para yacimientos formados por una sola capa. Cada estrato puede presentar características diferentes, como la permeabilidad, la porosidad, el espesor, el factor de daño y la presión inicial. Se consideran diferentes condiciones de pozo ( vertical fracturado, vertical sin fracturar, horizontal ). Se pueden tener yacimientos homogéneos o naturalmente fracturados. Las condiciones de frontera externa también pueden variar ( frontera infinita, cerrada o a presión constante ). Adicionalmente se incluyen los efectos de almacenamiento del pozo, los cuales se consideran constantes durante todo el proceso de cálculo ( Figura 1.1 ).

El simulador que se desarrolla con este trabajo es analítico, lo cual implica una reducción sustancial en el tiempo de cómputo requerido, comparado con un simulador numérico.

Un trabajo anterior presentado por Spath y cols.<sup>1</sup> consideró algunas de las situaciones mencionadas anteriormente. Utilizando este trabajo como base, el presente estudio se extiende y analiza nuevas soluciones, como es el caso de fracturas de conductividad finita, en donde se utiliza una solución semianalítica desarrollada por Blasingame y Poe<sup>5</sup>.

Asímismo, y como parte fundamental del estudio, se determinan una o varias propiedades de cada capa ( de acuerdo a las necesidades ), adaptando el simulador analítico desarrollado con algunos algoritmos de optimización, presentándose los resultados obtenidos y las ventajas y desventajas de utilizar los diferentes optimizadores. Adicionalmente se realiza un estudio más detallado de algunos casos



especiales en donde se dificulta la obtención de las propiedades de las capas, analizándose mediante la generación de superficies que involucran a dichas propiedades bajo diferentes condiciones ( métodos de interpolación, espaciamientos de mallas, etc. )

En este trabajo también se realizan algunos análisis de sensibilidad, con la finalidad de examinar el efecto que tienen algunos parámetros en las soluciones obtenidas.

Una consideración importante a mencionar es que todas las soluciones que se obtengan para un solo estrato deben estar referidas a una sola escala de tiempo, lo cual implica que se tengan que realizar algunas modificaciones en la solución analítica de cada capa.

Las soluciones analíticas que se obtienen son aproximadas, ya que se resuelven en el espacio de Laplace, utilizándose el algoritmo de inversión numérica de Stehfest<sup>19</sup> para realizar las transformaciones al espacio real.

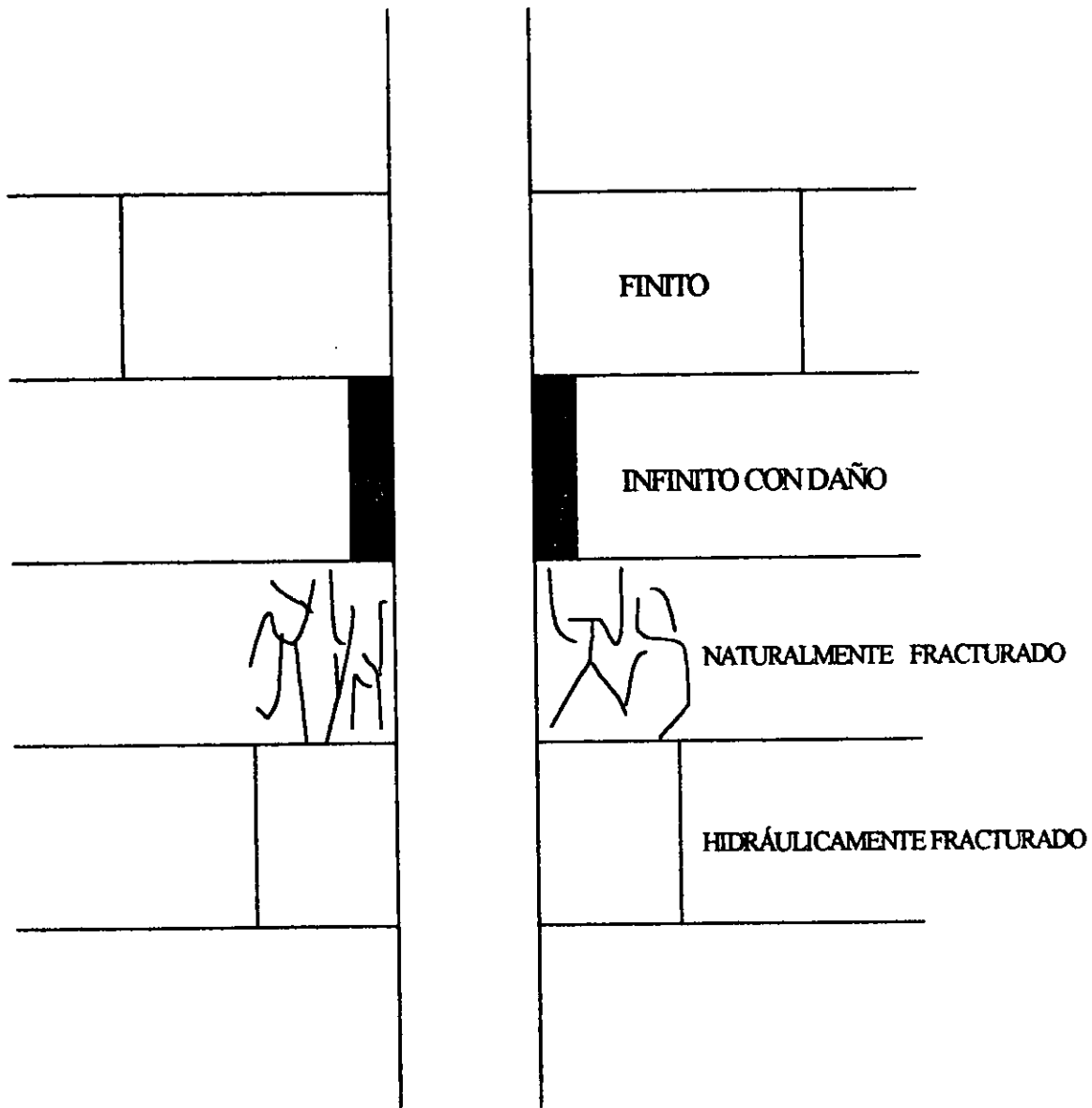


Figura 1.1.- Representación de las diferentes condiciones que pueden presentar las capas de un sistema estratificado.

## **CAPÍTULO II**

### **ANTECEDENTES**

Muchos autores han realizado una gran cantidad de estudios para poder determinar el comportamiento de presión que se obtiene cuando dos o más estratos interactúan de manera simultánea en la producción de un pozo. Entre los primeros métodos aceptados y más utilizados destacan los desarrollados por Lefkovits y cols.<sup>8</sup>, Cobb<sup>9</sup>, Tariq<sup>10</sup> y Larsen<sup>11</sup>.

Lefkovits analizó el comportamiento característico que presenta un sistema estratificado en yacimientos con fronteras cerradas. Cobb implementó un simulador numérico y obtuvo los primeros resultados considerando solamente un sistema compuesto por dos estratos, los cuales presentaban barreras impermeables y se encontraban comunicados únicamente por el pozo. Tariq tomó las soluciones obtenidas por Cobb y les incluyó los efectos de almacenamiento y daño. Larsen fue más allá considerando propiedades físicas y presiones iniciales diferentes en cada estrato.

Con base en estos estudios, la tendencia consistía en tratar de obtener un procedimiento general para determinar las respuestas de presión para un sistema con un número de capas tan grande como fuera posible.

Bajo esta premisa, Ehlig - Economides y Joseph<sup>12</sup> desarrollaron un método general para manejar un sistema de " n " capas los cuales podrían o no presentar flujo cruzado. Más adelante, Mavor y Walkup<sup>13</sup> presentaron un método para la combinación de diferentes capas con barreras impermeables comunicadas únicamente por el pozo, basándose en la teoría electromagnética, en donde se considera a cada estrato como un arreglo de resistencias en paralelo, esto de acuerdo a su distribución en el

yacimiento. Posteriormente, Kuchuk y Wilkinson<sup>14</sup> desarrollaron un procedimiento analítico para combinar los diferentes patrones de flujo existentes en un sistema estratificado. En el trabajo de Spath y cols.<sup>1</sup> se presentó una metodología eficiente para obtener la respuesta de presión del pozo en un yacimiento que se encuentra formado por un sistema de " n " capas con barreras impermeables, comunicadas por el pozo y que presentan características diferentes cada una de ellas, como son los factores de daño, las difusividades, las extensiones areales, las presiones iniciales y los comportamientos de flujo.

Todos los estudios anteriores se basaron en la consideración de un sistema líquido, esto debido a la simplificación existente para los desarrollos analíticos, ya que las escalas de tiempo para las cuales se obtienen las respuestas de presión se pueden relacionar linealmente.

El trabajo de Spath y cols. se tomó como punto de partida en el desarrollo de este trabajo, con la idea de implementar toda la metodología para sistemas en flujo de líquido ligeramente compresible.

### CAPÍTULO III

## FORMULACIÓN MATEMÁTICA

Se considera el flujo de un fluido ligeramente compresible, de viscosidad constante y de una sola fase. Se supone al yacimiento como horizontal y cada estrato es cilíndrico en su frontera exterior. Además el flujo es paralelo a las capas y se supone una distribución de presión inicial uniforme en cada capa.

Se consideran " n " estratos que se encuentran comunicados solamente por el pozo. Se supone que cada estrato es un medio poroso uniforme. Las propiedades ( permeabilidad, porosidad, espesor, compresibilidad total, daño y presión inicial ), el tipo de terminación ( pozo vertical sin fracturar o fracturado, pozo horizontal ), la extensión areal con condición de frontera exterior ( infinita, cerrada, a presión constante ) son totalmente arbitrarias para cada capa. Los efectos de almacenamiento en el pozo se consideran constantes durante todo el desarrollo.

Para describir las propiedades del sistema en su totalidad, sin importar el número de estratos, se definen los siguientes parámetros:

$$k_{avg} = \frac{\sum k_j h_j}{h} \quad (3.1)$$

$$(\phi C_T)_{avg} = \frac{\sum \phi_j C_{Tj} h_j}{h} \quad (3.2)$$

$$\eta_{avg} = \frac{k_{avg} h}{(\phi c_T)_{avg} h} = \frac{\sum k_j h_j}{\sum \phi_j c_{Tj} h_j} \quad (3.3)$$

donde:

$$h = \sum h_j \quad (3.4)$$

En la expresión para el cálculo de la difusividad no se incluye el término de la viscosidad  $\mu$ , bajo la suposición de que es la misma e igual a 1 cp en cada estrato.

En este trabajo todos los resultados son presentados, por facilidad y generalidad, en forma adimensional, mediante el uso de las variables que se muestran líneas abajo.

a) Caída de presión adimensional:

$$p_D = \frac{k_{avg} h \Delta p}{141.2 q B \mu} \quad (3.5)$$

b) Tiempo adimensional:

$$t_D = \frac{0.0002637 k_{avg} t}{\mu (\phi c_T)_{avg} r_w^2} \quad (3.6)$$

c) Ritmo de producción adimensional:

$$q_D = \frac{141.2 q(t) B \mu}{k_{avg} h \Delta p} \quad (3.7)$$

d) Distancia radial adimensional:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (3.8)$$

e) Conductividad de fractura adimensional:

$$F_{cD} = \frac{k_f W}{k L_{xf}} \quad (3.9)$$

La ecuación anterior es la definición de ésta variable para un solo estrato y una fractura homogéneos. Para el caso de un sistema estratificado la expresión a utilizar es<sup>22</sup>:

$$F_{cD} = \frac{k_f W}{k_{avg} L_{xf}} \quad (3.10)$$

La ecuación anterior es válida sólo para el caso en que la permeabilidad de la fractura no varía con la distancia con respecto al radio del pozo.

De acuerdo a los grupos adimensionales definidos, la ecuación diferencial

planteada a resolverse es la siguiente:

$$\frac{1}{r_{Dj}} \frac{\partial}{\partial r_{Dj}} \left( r_{Dj} \frac{\partial p_{Dj}}{\partial r_{Dj}} \right) = \frac{\eta_{avg}}{\eta_j} \frac{\partial p_{Dj}}{\partial t_D} \quad (3.11)$$

La ecuación anterior se resuelve en el espacio de Laplace para diferentes condiciones de frontera, utilizándose el algoritmo de inversión de Stehfest para llevar la solución al espacio real. Por lo tanto, dicha ecuación en el espacio de Laplace queda como:

$$\frac{1}{r_{Dj}} \frac{\partial}{\partial r_{Dj}} \left( r_{Dj} \frac{\partial \bar{p}_{Dj}}{\partial r_{Dj}} \right) = u \frac{\eta_{avg}}{\eta_j} \bar{p}_{Dj} \quad (3.12)$$

donde " u " es la variable de Laplace.



## CAPÍTULO IV

### DESARROLLO ANALÍTICO

#### 4.1.- Metodología.

La metodología propuesta para obtener la respuesta de presión del pozo a gasto constante inicia con la suposición de que las presiones iniciales en cada capa son idénticas. Una característica única de un yacimiento estratificado de este tipo, que está comunicado únicamente por el pozo es que si es producido a presión constante, entonces las capas están aisladas y así la producción de cada estrato es independiente de los demás. De acuerdo a lo anterior, el ritmo de producción total se obtiene a partir de los ritmos de producción por capa, ponderados con sus respectivas propiedades:

$$q_D(t_D) = \sum \frac{k_j h_j}{k_{avg} h} q_{Dj}(t_D) \quad (4.1)$$

Mediante el teorema de Duhamel presentado por van Everdingen y Hurst<sup>20</sup> se pueden combinar las soluciones a presión y gasto constante:

$$\bar{p}_{wD} \bar{q}_D = \frac{1}{u^2} \quad (4.2)$$

donde " u " es la variable de Laplace, como ya se definió anteriormente.

Por lo tanto, combinando las dos ecuaciones anteriores en el espacio de Laplace,

la respuesta de presión total para presiones iniciales iguales en las capas es:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{1}{u^2 \sum \alpha_j \bar{q}_{Dj}} \quad (4.3)$$

donde:

$$\alpha_j = \frac{k_j h_j}{k_{avg} h} \quad (4.4)$$

Para el caso en que las presiones iniciales sean diferentes, se tiene<sup>1</sup>:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{\sum \alpha_j \bar{q}_{Dj} p_{oDj}}{u \sum \alpha_j \bar{q}_{Dj}} + \frac{1}{u^2 \sum \alpha_j \bar{q}_{Dj}} \quad (4.5)$$

donde:

$$p_{oDj} = \frac{2 \pi k_{avg} h (p_r - p_{Dj})}{q \mu} \quad (4.6)$$

En este caso, las presiones adimensionales están definidas en términos de una presión de referencia ( $p_r$ ) establecida de antemano, la cual puede ser la presión inicial

máxima que se tenga en el conjunto de capas; además el término  $p_{o_j}$  representa las presiones iniciales en cada capa.

Asimismo, para el caso de presiones iniciales diferentes, el ritmo de producción total para este tipo de yacimientos produciendo a presión constante es:

$$\bar{q}_D = \sum \alpha_j \bar{q}_{Dj} - \sum \alpha_j \bar{q}_{Dj} p_{oDj} \quad (4.7)$$

Adicionalmente, los ritmos de producción individuales se pueden obtener mediante el teorema de Duhamel:

$$q_{Dj} = \frac{\alpha_j [(\bar{p}_{wD} - p_{oDj}) / u]}{u \bar{p}_{wDj}} \quad (4.8)$$

Todo el procedimiento anterior se representa de forma general en la Figura 4.1.

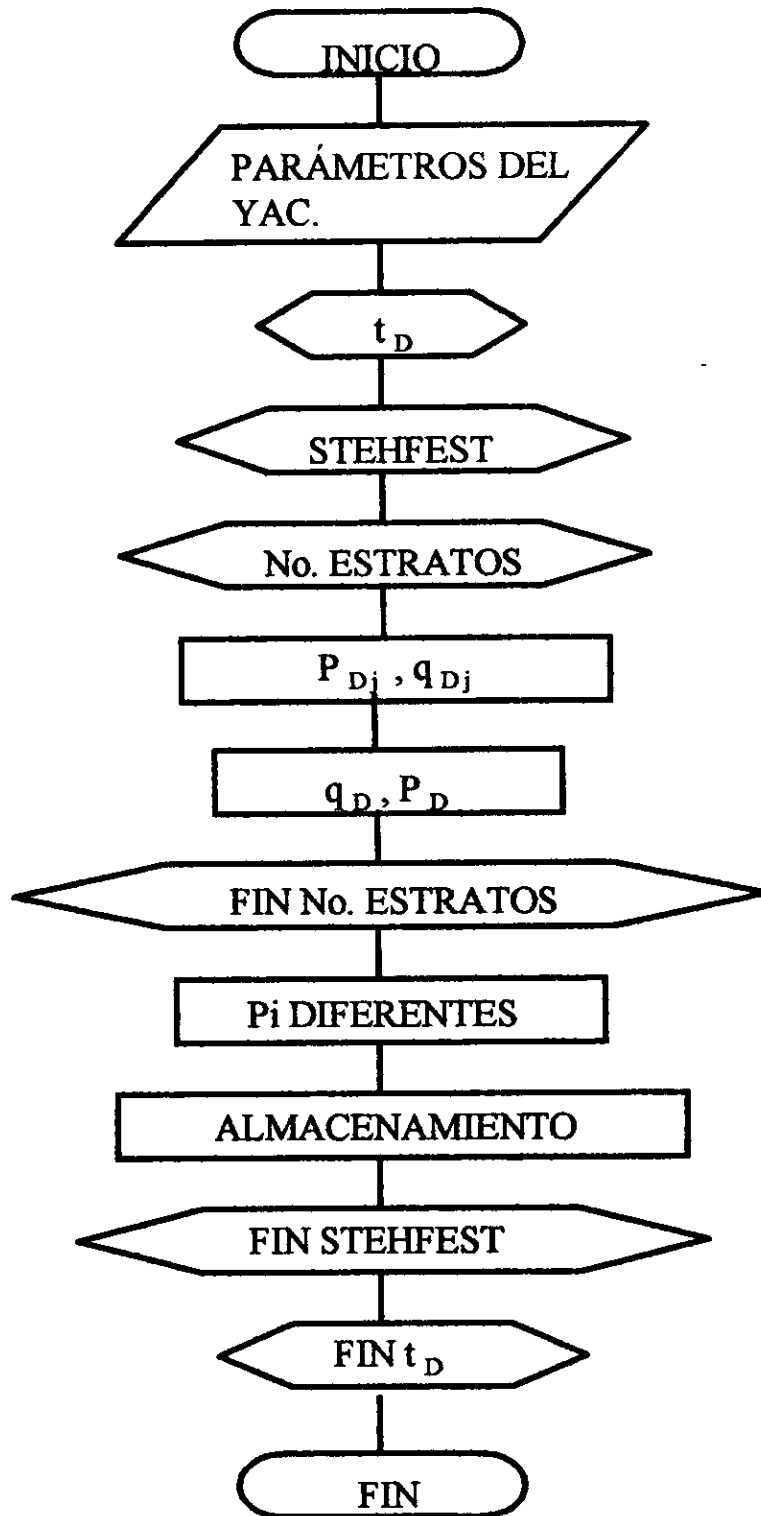


Figura 4.1.- Diagrama de flujo para determinar la respuesta de presión a gasto constante en un sistema estratificado.

#### 4.2.- Escala de tiempo.

Las soluciones para cada capa están sujetas a ciertas modificaciones debido a que se tienen que llevar a una escala única de tiempo. Si se sabe que:

$$t_1 = a t \quad (4.9)$$

donde " a " es una constante cualquiera, se puede establecer que  $t_1$  y  $t$  están relacionadas linealmente. Por lo tanto, aplicando la definición de la transformada de Laplace se tiene:

$$L\{f(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ut} f(t_1) dt \quad (4.10)$$

Pero de 4.9 se tiene:

$$L\{f(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u(t_1/a)} f(t_1) d(t_1/a) \quad (4.11)$$

reacomodando términos:

$$L\{f(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (1/a) e^{-(u/a)t_1} f(t_1) dt_1 \quad (4.12)$$

aplicando la transformada de Laplace:

$$L\{f(t)\} = (1/a) F(u/a) \quad (4.13)$$

Así, si:

$$t_D = k t / \phi \mu c_T L^2 \quad (4.14)$$

$$t_{D1} = k_1 t / (\phi \mu c_T)_1 L^2 \quad (4.15)$$

entonces:

$$a = t_{D1} / t_D = \eta_1 t L^2 / \eta_{avg} t L^2 \quad (4.16)$$

$$a = \eta_1 / \eta_{avg} \quad (4.17)$$

Por lo tanto:

$$L\{f(t)\} = (1 / \eta_1 / \eta_{avg}) F(u / \eta_1 / \eta_{avg}) \quad (4.18)$$

reacomodando términos:

$$L\{f(t)\} = (\eta_{avg} / \eta_1) F(u \eta_{avg} / \eta_1) \quad (4.19)$$

Generalizando:

$$L\{f(t_j)\} = (\eta_{avg} / \eta_j) F(u \eta_{avg} / \eta_j) \quad (4.20)$$

Para comprobar el resultado anterior, se probó con la respuesta de presión a gasto constante para un pozo produciendo en un yacimiento infinito, homogéneo, con almacenamiento y daño, la cual está dada por:

$$\bar{p} = \frac{K_0(u)^{1/2} + s(u)^{1/2} K_1(u)^{1/2}}{u \{ (u)^{1/2} K_1(u)^{1/2} + C_D u [ K_0(u)^{1/2} + s(u)^{1/2} K_1(u)^{1/2} ] \}} \quad (4.21)$$

quedando como:

$$\bar{p} = \frac{(\eta_{avg} / \eta_j) (K_0(u_j)^{1/2} + s(u_j)^{1/2} K_1(u_j)^{1/2})}{u_j \{ (u_j)^{1/2} K_1(u_j)^{1/2} + C_D u_j [ K_0(u_j)^{1/2} + s(u_j)^{1/2} K_1(u_j)^{1/2} ] \}} \quad (4.22)$$

donde:

$$u_j = u \eta_{avg} / \eta_j \quad (4.23)$$

En los resultados obtenidos al aplicar lo anterior, se puede apreciar como los valores de  $t_{Dj}$  corresponden a los de  $t_D$  multiplicados por una constante como se aprecia en la Figura 4.2. Llevando estas curvas a sus respectivas escalas de tiempo, como se

observa en la Figura 4.3, se puede verificar el objetivo buscado: trasladar la respuesta de presión a una escala de tiempo única.



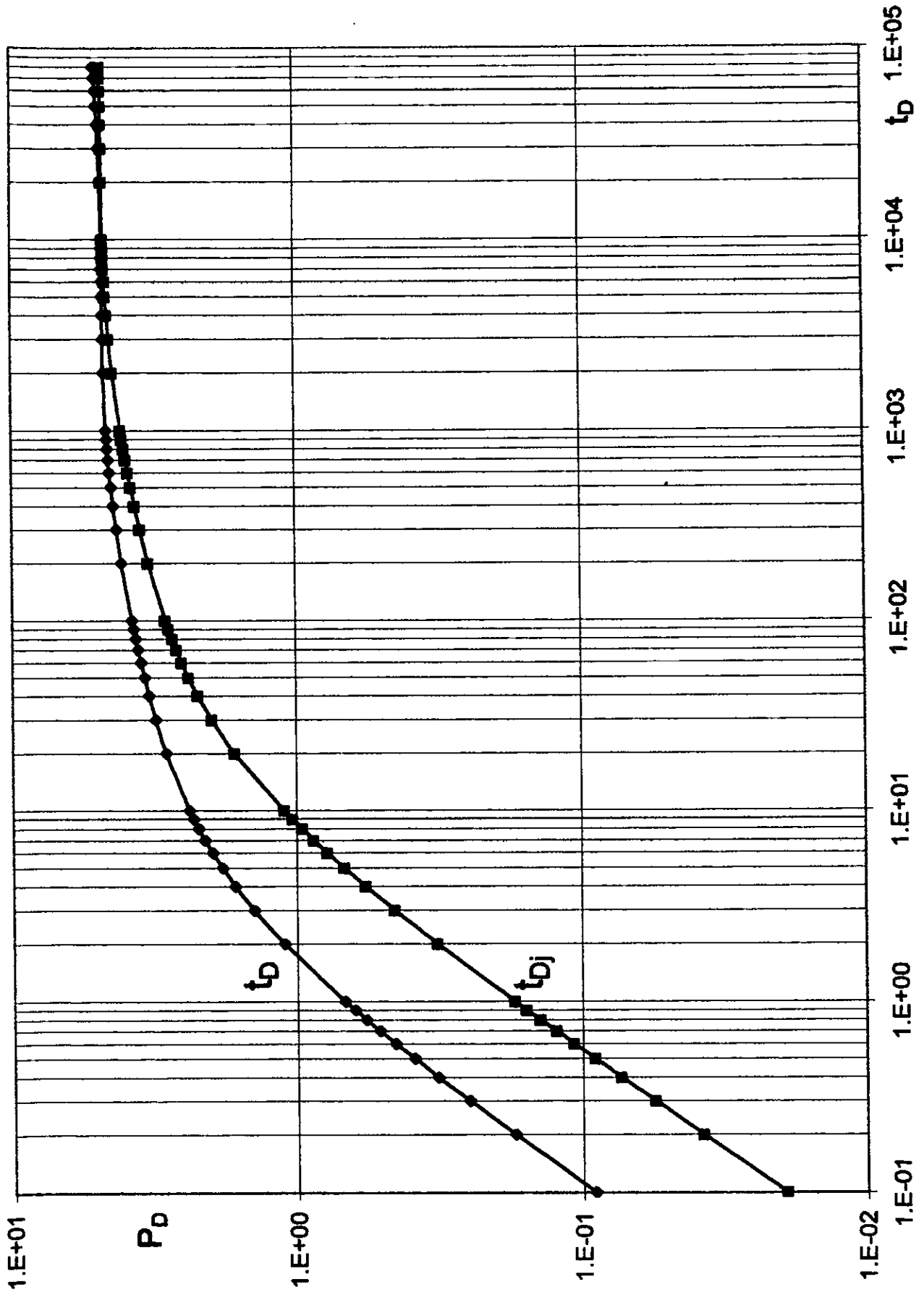


Fig. 4.2.- Gráfica comparativa para  $p_D$  vs  $t_D$  y  $t_{Dj}$  en una misma escala

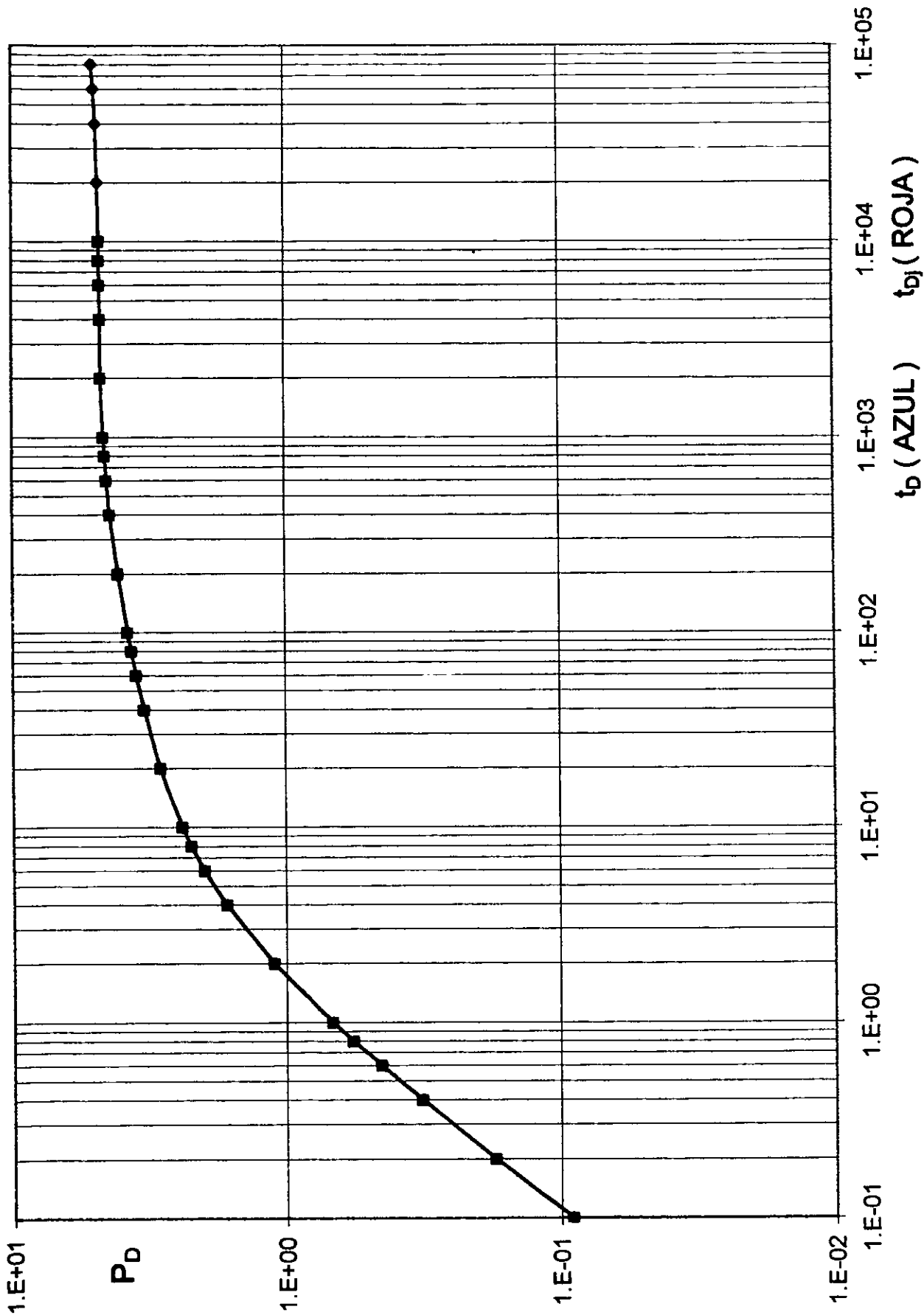


Fig. 4.3.- Gráfica comparativa para  $p_D$  vs  $t_b$  y  $t_{bj}$  en diferentes escalas

### 4.3.- Factor de daño.

Otra modificación que se tiene que realizar es cuando se tiene un factor de daño negativo en uno o varios estratos. En este caso se tiene que trabajar con el radio efectivo del pozo, el cual está dado por la siguiente expresión:

$$r_w' = r_w e^{-s} \quad (4.24)$$

lo que origina que la definición de tiempo adimensional se modifique:

$$t_D = \frac{0.0002637 k_{avg} t}{\mu (\phi C_T)_{avg} (r_w')^2} \quad (4.25)$$

En este caso, el radio efectivo del pozo varía de estrato a estrato, por lo tanto, la nueva ecuación diferencial parcial a resolver, definida originalmente por ( 3.10 ), queda como:

$$\frac{1}{r_{Dj}} \frac{\partial}{\partial r_{Dj}} \left( r_{Dn} \frac{\partial \bar{p}_{Dj}}{\partial r_{Dj}} \right) = u \frac{\eta_{avg}}{\eta_j r_w'^2} \bar{p}_{Dj} \quad (4.26)$$

donde:

$$r_{Dj} = \frac{r_{wj}'}{r_{wn}'} \quad (4.27)$$

y:

$$r'_w = r_w e^{-u_j} \quad (4.28)$$

En caso de que no se efectúe este cambio se generarán fuertes errores, ya que las soluciones que contienen valores negativos de daño se vuelven inestables para tiempos adimensionales pequeños cuando se invierten al espacio real.

Para mostrar la aplicación de las modificaciones anteriores, se ilustra el caso de dos estratos en un yacimiento infinito. La solución general de la ecuación 4.25 sin considerar almacenamiento y daño, en el espacio de Laplace es:

$$\bar{p}_{Dj} = A_j I_0(u_j^{1/2} r_D) + B_j K_0(u_j^{1/2} r_D) \quad (4.29)$$

Para un yacimiento infinito se tiene la siguiente condición de frontera externa:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_D = 0 \quad (4.30)$$

Para satisfacer ésta condición el valor de  $A_j$  debe ser cero, debido a que se tiene que  $I_0(u_j^{1/2} r_D) \rightarrow \infty$  cuando  $r_D \rightarrow \infty$ , por lo tanto la solución queda como:

$$\bar{p}_{Dj} = B_j K_0(u_j^{1/2} r_D) \quad (4.31)$$

Diferenciando con respecto a  $r_D$  se tiene:

$$\frac{\partial \bar{p}_{Dj}}{\partial r_D} = -B_j u_j^{1/2} K_1(u_j^{1/2} r_D) \quad (4.32)$$

Se sabe que para dos capas:

$$q = q_1 + q_2 \quad (4.33)$$

entonces la condición de frontera interior queda como:

$$2\pi \frac{k_1 h_1}{\mu} \left( r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) + 2\pi \frac{k_2 h_2}{\mu} \left( r \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) = q \quad (4.34)$$

En forma adimensional:

$$\frac{k_1 h_1}{k_{avg} h} \left( r_D \frac{\partial p_{D1}}{\partial r_D} \right) + \frac{k_2 h_2}{k_{avg} h} \left( r_D \frac{\partial p_{D2}}{\partial r_D} \right) = -1 \quad (4.35)$$

Obteniendo la transformada de Laplace:

$$\frac{k_1 h_1}{k_{avg} h} \left( r_D \frac{\partial \bar{p}_{D1}}{\partial r_D} \right) + \frac{k_2 h_2}{k_{avg} h} \left( r_D \frac{\partial \bar{p}_{D2}}{\partial r_D} \right) = -\frac{1}{u} \quad (4.36)$$

Sustituyendo 4.32 se tiene:

$$\frac{k_1 h_1}{k_{avg} h} r_D B_1 u_1^{1/2} K_1(u_1^{1/2} r_D) + \frac{k_2 h_2}{k_{avg} h} r_D B_2 u_2^{1/2} K_1(u_2^{1/2} r_D) = \frac{1}{u} \quad (4.37)$$

Sustituyendo 4.27 para trabajar con radios efectivos:

$$\frac{k_1 h_1}{k_{avg} h} \frac{r'_{w1}}{r'_{w2}} B_1 u_1^{1/2} K_1(u_1^{1/2} \frac{r'_{w1}}{r'_{w2}}) + \frac{k_2 h_2}{k_{avg} h} \frac{r'_{w2}}{r'_{w2}} B_2 u_2^{1/2} K_1(u_2^{1/2} \frac{r'_{w2}}{r'_{w2}}) = \frac{1}{u} \quad (4.38)$$

Simplificando:

$$\frac{k_1 h_1}{k_{avg} h} \frac{r'_{w1}}{r'_{w2}} B_1 u_1^{1/2} K_1(u_1^{1/2} \frac{r'_{w1}}{r'_{w2}}) + \frac{k_2 h_2}{k_{avg} h} B_2 u_2^{1/2} K_1(u_2^{1/2}) = \frac{1}{u} \quad (4.39)$$

Por otra parte, suponiendo que las presiones instantáneas en las caras de los estratos son iguales, se tiene:

$$B_1 K_0(u_1^{1/2} \frac{r'_{w1}}{r'_{w2}}) = B_2 K_0(u_2^{1/2} \frac{r'_{w2}}{r'_{w2}}) \quad (4.40)$$

Resolviendo las ecuaciones ( 4.39 ) y ( 4.40 ) para  $B_1$  se tiene:

$$B_1 = \frac{k_{avg} h K_0(u_2^{1/2})}{u [k_1 h_1 K_0(u_2^{1/2}) u_1^{1/2} (r'_{w1}/r'_{w2}) K_1(u_1^{1/2} r'_{w1}/r'_{w2}) + k_2 h_2 u_2^{1/2} K_0(u_1^{1/2} r'_{w1}/r'_{w2}) K_1(u_2^{1/2})]} \dots\dots\dots (4.41)$$

Finalmente, la ecuación 4.31 queda como:

$$\bar{p}_D = \frac{k_{avg} h K_0(u_1^{1/2} r'_{w1}/r'_{w2}) K_0(u_2^{1/2})}{u [k_1 h_1 K_0(u_2^{1/2}) u_1^{1/2} (r'_{w1}/r'_{w2}) K_1(u_1^{1/2} r'_{w1}/r'_{w2}) + k_2 h_2 u_2^{1/2} K_0(u_1^{1/2} r'_{w1}/r'_{w2}) K_1(u_2^{1/2})]} \dots\dots\dots (4.42)$$

De acuerdo a lo anterior, y en términos generales, se puede establecer lo siguiente:

- 1) En las expresiones ya conocidas para la determinación de la respuesta de presión, se eliminan los términos que involucran al daño, ya que estos ya aparecen en la determinación de los radios efectivos.
- 2) Se deben sustituir todos los términos de " r<sub>D</sub> " que estén presentes en las expresiones mencionadas en el inciso anterior, por los correspondientes radios efectivos r<sub>Dj</sub> = r'\_{wj} / r'\_{wn} , de acuerdo al número de capas.

Para el caso de dos estratos en un yacimiento homogéneo cerrado, definiendo:

$$A = [ K_1((u_j)^{1/2} r_{eDj}) I_1((u_j)^{1/2}) - I_1((u_j)^{1/2} r_{eDj}) K_1((u_j)^{1/2}) ] \quad (4.43)$$

La solución general incluyendo el daño es:

$$\bar{p} = \frac{-(\eta_{avg} / \eta_j) [ K_1((u_j)^{1/2} r_{eDj}) I_0((u_j)^{1/2} r_{Dj}) - I_1((u_j)^{1/2} r_{eDj}) K_0((u_j)^{1/2} r_{Dj}) + s_j (u_j)^{1/2} A ]}{u A (\eta_{avg} / \eta_j) (u_j)^{1/2}} \dots\dots\dots ( 4.44 )$$

Con las modificaciones a realizar, la solución queda:

$$\bar{p} = \frac{-(\eta_{avg} / \eta_j) [ K_1((u_j)^{1/2} r_{eDj}) I_0((u_j)^{1/2} r_{Dj} / r_{Dn}) - I_1((u_j)^{1/2} r_{eDj}) K_0((u_j)^{1/2} r_{Dj} / r_{Dn}) ]}{u (\eta_{avg} / \eta_j) (u_j)^{1/2} A} \dots\dots\dots ( 4.45 )$$

4.4.- Almacenamiento.

Para incorporar los efectos de almacenamiento del pozo se utiliza la expresión:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{1}{C_D s^2 + (1 / \bar{p}_{wD \text{ con } CD=0})} \dots\dots\dots ( 4.46 )$$

La expresión anterior es general y puede ser usada para cualquier solución de presión adimensional sin importar el modelo de yacimiento con el que se calcule.



## **CAPÍTULO V**

### **CONSIDERACIONES DE CÓMPUTO**

#### **5.1.- Programa principal.**

Se elaboró un programa de cómputo en FORTRAN para obtener los objetivos planteados en este estudio.

El programa no tiene algún tipo de restricción, el número de capas a utilizar es ilimitado, únicamente se tiene que revisar, y en su caso modificar, la instrucción DIMENSION para no quedar fuera de rango. Asimismo se debe poner atención en la introducción del número de datos de tiempo y presión que el programa tiene que leer de entrada, especificándose dicha cantidad. Se requieren proporcionar como datos de entrada para cada estrato, la permeabilidad, la porosidad, el espesor, la compresibilidad total, el factor de daño, la presión inicial, un valor estimado para cada una de las propiedades que no se conocen y que se quieren determinar, y finalmente, las lecturas que se tengan de presiones en la cabeza del pozo con sus respectivos tiempos, considerando la respuesta total debida al número de estratos. Además se tiene que especificar el valor del radio de drene, en caso de que la frontera exterior sea cerrada o a presión constante.

#### **5.2.- Producción en una fractura vertical.**

Para el caso en que se tengan estratos en un pozo fracturado verticalmente dentro de un yacimiento infinito, se utilizó la expresión a gasto constante de Ozkan y

Raghavan<sup>6</sup>:

$$p_D = \frac{1}{2 u u^{1/2}} \left[ \int_0^{x_1} K_0(z) dz + \int_0^{x_2} K_0(z) dz \right] \quad (5.1)$$

donde:

$$X_1 = u^{1/2} (L_x/L)(1 + X_D) \quad y \quad X_2 = u^{1/2} (L_x/L)(1 - X_D)$$

Esta ecuación no se puede integrar numéricamente debido a que cuando el argumento " z " de la función Bessel es igual a cero, dicha función no existe. Por tal motivo, para estos casos se tuvo que utilizar una serie de expansión, presentada por Abramowitz y Stegun<sup>34</sup>, definida como:

$$\int_0^x K_0(z) dz = -x (\ln(x/2) + \gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!) (2k+1)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!) (2k+1)^2} +$$

$$+ x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!) (2k+1)} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \quad (5.2)$$

en donde " γ " es la constante de Euler cuyo valor aproximado es de 0.57721565.

Un comentario importante para esta expansión, es que se ha observado que cuando  $x \rightarrow \infty$ , el valor de la integral es:

$$\int_0^x K_0(z) dz = \pi / 2 \quad (5.3)$$

También se ha observado que para propósitos prácticos, para valores de  $x \geq 20$  se puede considerar que  $x \rightarrow \infty$ , ya que la diferencia entre el resultado obtenido de la integral mediante la serie de expansión, comparado con  $\pi / 2$ , prácticamente es despreciable.

### 5.3.- Inversión numérica.

Como ya se mencionó anteriormente, el algoritmo de inversión que se utilizó en este trabajo es el de Stehfest. Este algoritmo utiliza un parámetro " N " el cual significa el número de veces que se evalúa la función proporcionada a lo largo del eje real. Este parámetro lo asigna el usuario y depende de la exactitud de la máquina. Teóricamente, entre más grande sea su valor más preciso es el resultado obtenido para la función. Sin embargo, durante el desarrollo de la solución para fracturas de conductividad infinita se observó que entre más grande era el valor de N, más inestables eran los resultados obtenidos, optándose por trabajar con una  $N = 4$ , la cual proporcionó los menores errores, permaneciendo inestable sólo en algunos puntos.

#### 5.4.- Funciones Bessel.

Como se ha podido observar durante el desarrollo de este estudio, se ha estado trabajando con funciones Bessel modificadas de primero y segundo orden. En general, estos cálculos no presentan ninguna dificultad; sin embargo, hace pocos años ( 5 ó 6 ), cuando se presentaba la relación  $K_0(x) / K_1(x)$ , se tenía una división por cero, ya que para argumentos de  $K_1$  mayores de 86 se generan valores numéricos del orden de  $2.20 \times 10^{-39}$ , los cuales caían fuera del rango del comando de doble precisión que se manejaba en ese entonces. Debido a que durante el desarrollo de las soluciones se presenta el argumento  $u \eta_{avg} / \eta_j$ , se manejaban continuamente valores del argumento mayores de 86. En algunas ocasiones, estos problemas se podían resolver si se contaba con un compilador que usara el comando de doble precisión " G floating data ", el cual proporcionaba un número mayor de decimales para trabajar, pero esto no era una garantía de que el problema se solucionara. Afortunadamente con los avances tecnológicos que se han presentado recientemente, esto ha dejado de ser un conflicto ya que se pueden trabajar con cantidades suficientemente grandes, provocando una disminución sustancial de errores que se presentaban anteriormente, generándose una mayor precisión en los resultados obtenidos. La computadora utilizada para la elaboración del programa de cómputo de este trabajo abarcó un rango desde  $1 \times 10^{-307}$  hasta  $1 \times 10^{307}$  por lo que, prácticamente, no tuvo mayor relevancia el que tan grandes o pequeños fueran los argumentos de las funciones Bessel que se trabajaron.

### 5.5.- Primera derivada.

En lo que se refiere al cálculo de la derivada logarítmica, se obtuvo de dos maneras distintas:

a) en primera instancia se obtuvo el producto  $u p_{wD}$  en el espacio de Laplace, se invirtió numéricamente al espacio real con el algoritmo de Stehfest con lo que se obtuvo  $dp_{wD} / dt_D$ , y éste último se multiplicó por  $t_D$ , y

b) se aplicó la definición clásica de derivada ( pendiente entre dos puntos ):

$$\frac{\partial p}{\partial \ln t} = \frac{p_2 - p_1}{\ln(t_2 / t_1)} \quad (5.4)$$

utilizando los resultados de la respuesta de presión en el espacio real.

En la Figura 5.1 se puede observar el resultado obtenido con el primer método para dos estratos homogéneos con frontera cerrada, y en los cuales todas las propiedades son iguales con excepción del radio de drene. Los resultados obtenidos se compararon con los de Spath concordando muy bien, aunque dicha comparación se efectuó superponiendo las gráficas ya que no se publicaron los resultados de Spath de manera tabular.

Para el caso de dos estratos con una fractura de conductividad infinita, se presenta la Figura 5.2 utilizando el segundo método, en donde la derivada debe ser de 0.5 una vez que se alcanza el flujo pseudoradial ( de acuerdo a resultados obtenidos por varios autores en la literatura ), el cual se obtiene de manera muy cercana. La oscilación que se observa en la curva a tiempos cortos se debe a la inestabilidad observada por el parámetro N de Stehfest, ya comentado anteriormente.

En algunos casos se pueden presentar dificultades para el cálculo de la derivada logarítmica en el espacio de Laplace, sobre todo cuando esta tiende a un valor de 0.5, por lo tanto, para estos casos se recomienda efectuar en el espacio real el cálculo de la derivada, ya que se obtienen buenos resultados y además se reduce el tiempo de cómputo, esto debido al número de iteraciones que tiene que hacer el algoritmo de Stehfest para cada dato.

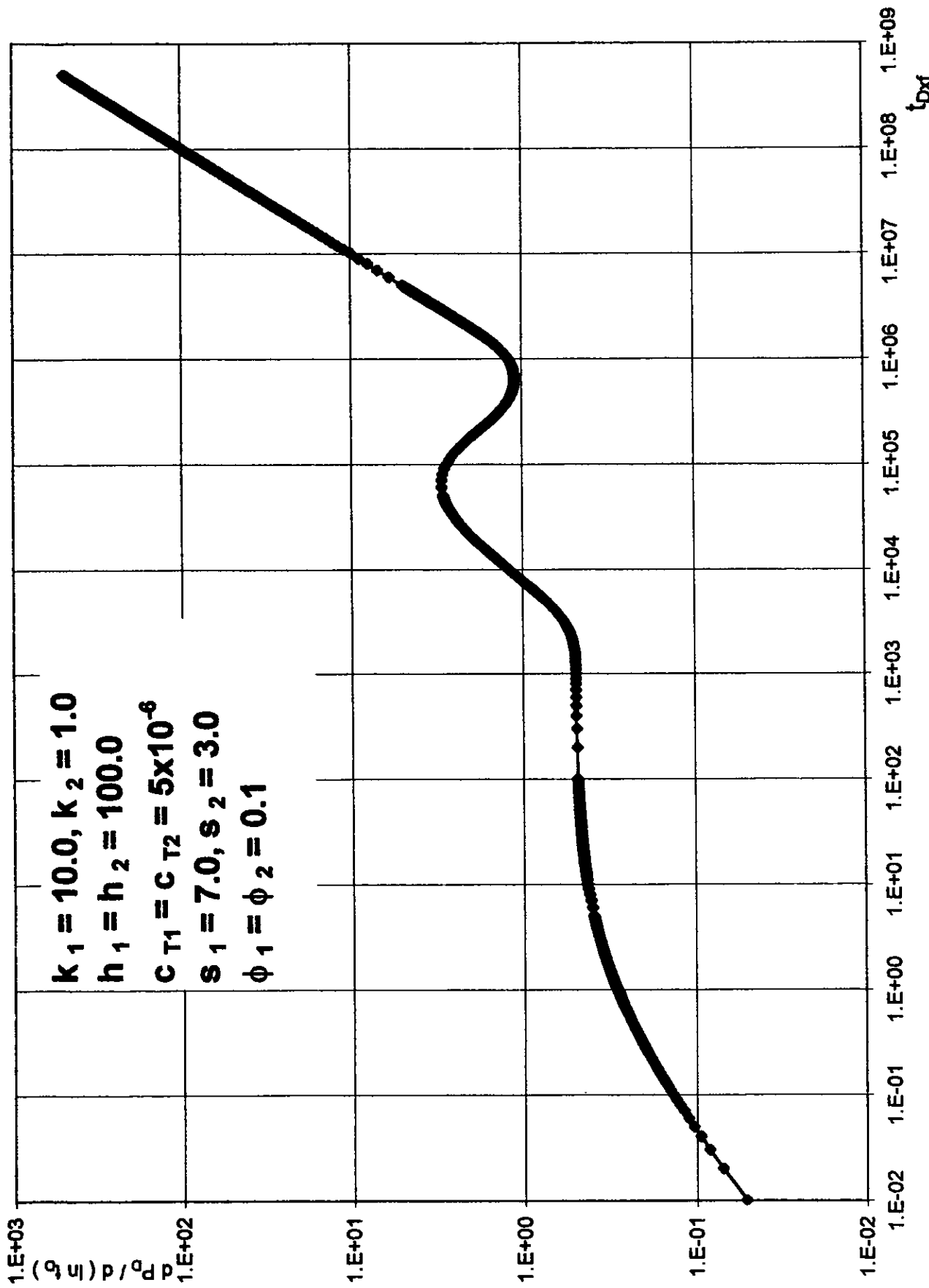


Fig. 5.1.- Derivada logarítmica para dos estratos homogéneos cerrados.

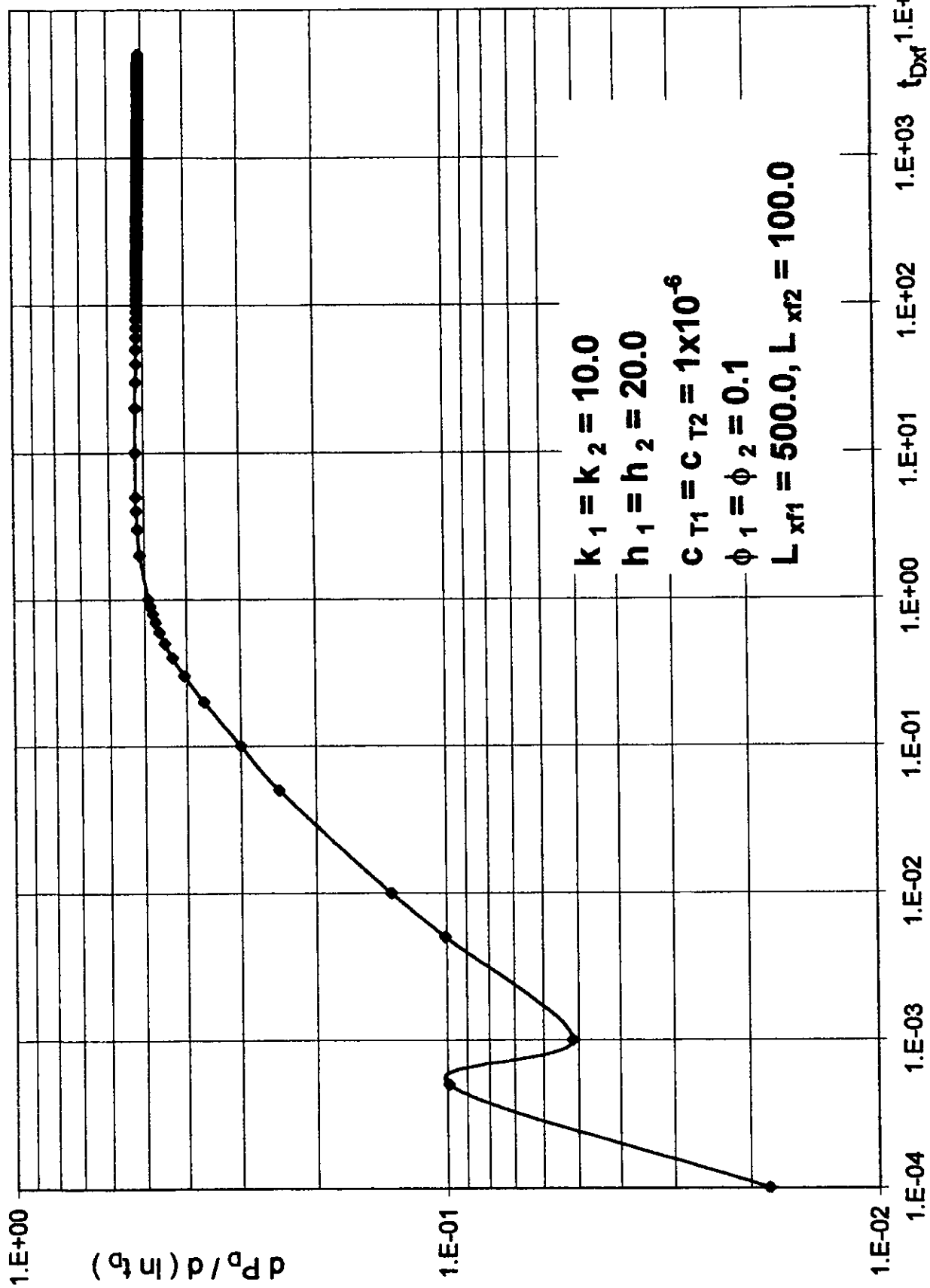


Fig. 5.2.- Derivada logarítmica para dos estratos con una fractura de conductividad infinita



## CAPÍTULO VI

### RESULTADOS Y VALIDACIÓN

#### 6.1.- Respuesta de presión para un sistema estratificado.

Los resultados obtenidos con el método propuesto se presentan, y a su vez se validan, en el presente capítulo. Se inició con los casos más simples. La Tabla 6.1 compara con Spath los resultados del caso más sencillo, como son dos estratos homogéneos en un yacimiento infinito con todas sus propiedades iguales. Dicha comparación se puede observar en la Figura 6.1 donde se aprecia mejor la exactitud alcanzada. En las Tablas 6.2 y 6.3 así como en las Figuras 6.2 y 6.3 se comparan los resultados de este trabajo con los de Cobb y Spath para diferentes relaciones de  $k_1 / k_2$  con dos estratos homogéneos en un yacimiento cerrado. Para el caso de trabajar con valores positivos de los factores de daño, las Tablas 6.4 y 6.5 y las Figuras 6.4 y 6.5 comparan los resultados con los de Tariq y Spath. Como se ha podido apreciar en todas las figuras presentadas para todos los casos anteriores, se han podido reproducir todas las soluciones con una gran precisión.

Para el caso en que se tengan valores negativos de los factores de daño, esto es, que alguna o varias capas estén estimuladas, se tuvieron que realizar algunas modificaciones tanto en las condiciones de frontera interior para poder considerar la región completa afectada, así como en la expresión de cálculo planteada. La Tabla 6.6 y la Figura 6.6 comparan los resultados obtenidos con los de Spath, para el caso en que la permeabilidad de la primera capa es mayor con respecto a la segunda, y a su vez, ésta última tiene un valor negativo del factor de daño. Para tiempos cortos se tiene una pequeña desviación de valores, así como para el último tiempo ( $5 \times 10^6$ ) con respecto

a la solución de Spath, la cual es la correcta ya que se encuentra validada con la literatura existente<sup>21</sup>. Se intentó encontrar el motivo que originó estas diferencias en los resultados mediante diferentes alternativas. Se trabajó con valores diferentes del parámetro N del algoritmo de inversión numérica de Stehfest para toda la escala de tiempo sin observarse mejoría alguna; se usaron diferentes valores de N únicamente para tiempos cortos dejando constante otro valor diferente de N para el resto de la escala del tiempo, también sin éxito; se utilizó un algoritmo que determina la N óptima para cada punto igualmente sin éxito. Se llegó incluso a pensar que se había cometido algún error en el desarrollo analítico realizado, pero ésto quedó descartado al probarse un caso diferente obteniéndose muy buenos resultados, tal y como se muestra en la Tabla 6.7 con su respectiva Figura 6.7. En este ejemplo únicamente se intercambiaron las permeabilidades de las capas, siendo mayor ahora la de la segunda capa, manteniéndose iguales el resto de las propiedades tal como en el caso anterior.

Un problema similar se presenta para el caso de analizar cuatro estratos homogéneos en un yacimiento cerrado. Al igual que el problema anterior, una de las capas se encuentra estimulada y las otras no; la menor permeabilidad de todas nuevamente se encuentra en la capa estimulada, teniéndose el mismo problema para tiempos cortos como se puede apreciar en la Tabla 6.8 y en la Figura 6.8. De manera tal que el porqué de la variación en los resultados está todavía sujeto a un análisis más profundo.

Analizando ahora el caso en que una fractura vertical atraviesa dos o más capas en un yacimiento homogéneo, se procedió a realizar el análisis por separado, iniciando con el de una fractura de conductividad infinita y posteriormente con el de una fractura de conductividad finita.

**TABLA 6.1**

**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO HOMOGÉNEO INFINITO ( FLUJO RADIAL )**

$k_1 = k_2 = 10$

$(\phi c_T h)_1 = (\phi c_T h)_2 = 1$

| $t_D$  | SPATH    | TESIS    |
|--------|----------|----------|
| 1.E+02 | 0.1081   | 0.1081   |
| 1.E-01 | 0.31424  | 0.31423  |
| 1.E+00 | 0.80207  | 0.80201  |
| 1.E+01 | 1.6508   | 1.6508   |
| 1.E+02 | 2.7231   | 2.7228   |
| 1.E+03 | 3.8601   | 3.8605   |
| 1.E+04 | 5.00856  | 5.0099   |
| 1.E+05 | 6.15926  | 6.16094  |
| 1.E+06 | 7.31423  | 7.3122   |
| 1.E+07 | 8.46378  | 8.46349  |
| 1.E+08 | 9.61479  | 9.61479  |
| 1.E+09 | 10.76608 | 10.76608 |
| 1.E+10 | 11.91737 | 11.91737 |
| 1.E+11 | 13.0687  | 13.06866 |

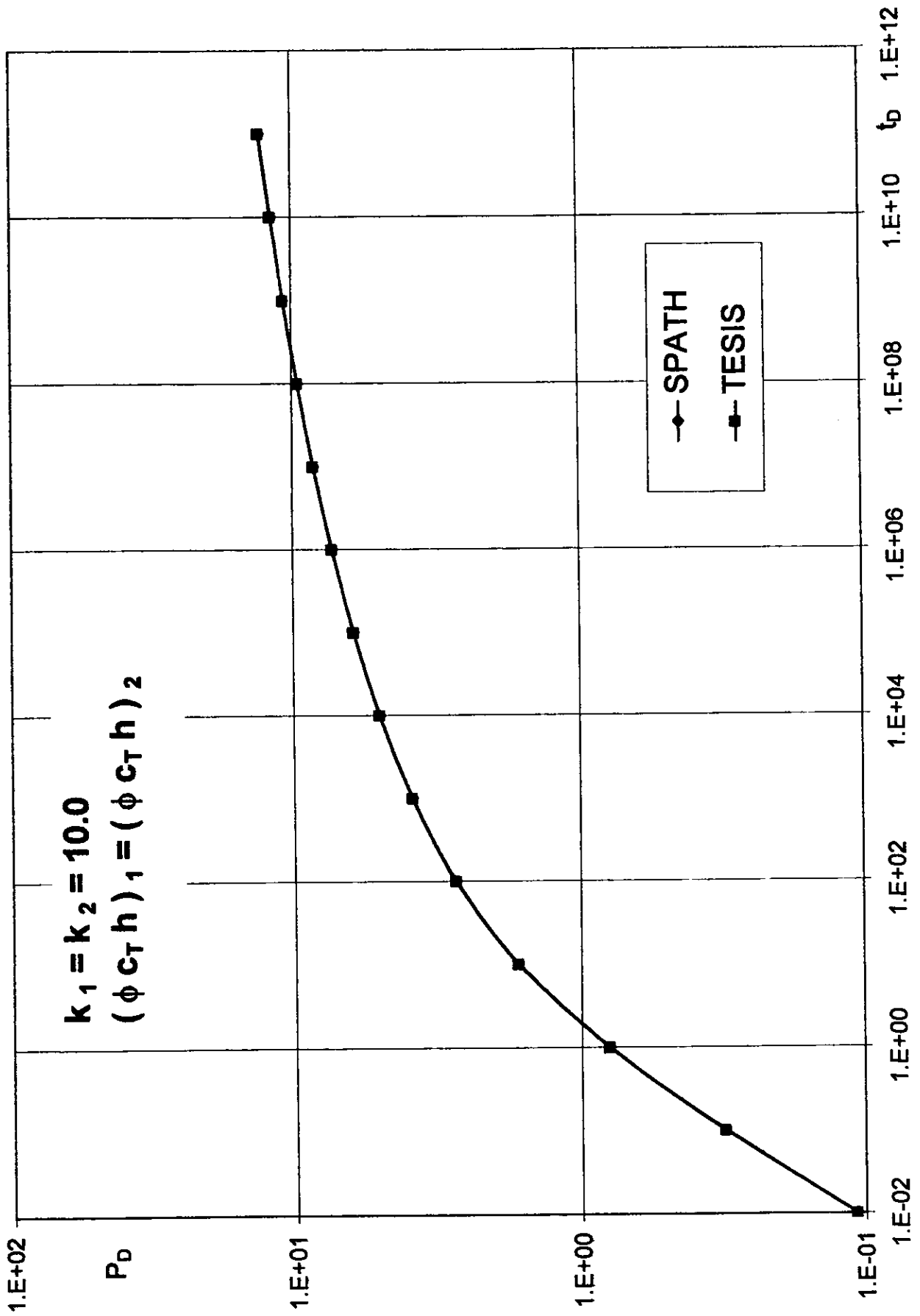


Fig. 6.1.- Gráfica comparativa para dos estratos en un yacimiento infinito con  $k_1 = k_2 = 10$

**TABLA 6.2**

**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO HOMOGÉNEO FINITO ( FLUJO RADIAL )**

$k_1 / k_2 = 2$

$( \phi c_T h )_1 = ( \phi c_T h )_2 = 1$

$r_{eD1} = r_{eD2} = 1,000$

| $t_D$  | COBB       | SPATH      | TESIS      |
|--------|------------|------------|------------|
| 1.E+02 | 2.7260     | 2.7417     | 2.7418     |
| 5.E+02 | 3.5327     | 3.5377     | 3.5366     |
| 1.E+03 | 3.8799     | 3.8822     | 3.8820     |
| 5.E+03 | 4.6858     | 4.6868     | 4.6862     |
| 1.E+04 | 5.0327     | 5.0329     | 5.0329     |
| 5.E+04 | 5.8382     | 5.8395     | 5.8383     |
| 1.E+05 | 6.1852     | 6.1842     | 6.1851     |
| 5.E+05 | 7.2545     | 7.2571     | 7.2551     |
| 1.E+06 | 8.3460     | 8.3470     | 8.3465     |
| 5.E+06 | 16.7433    | 16.7691    | 16.7450    |
| 1.E+07 | 26.8837    | 26.8838    | 26.8852    |
| 5.E+07 | 106.9275   | 107.1826   | 106.9431   |
| 1.E+08 | 206.9275   | 206.9548   | 206.9584   |
| 5.E+08 | 1,006.9270 | 1,009.4501 | 1,007.0825 |

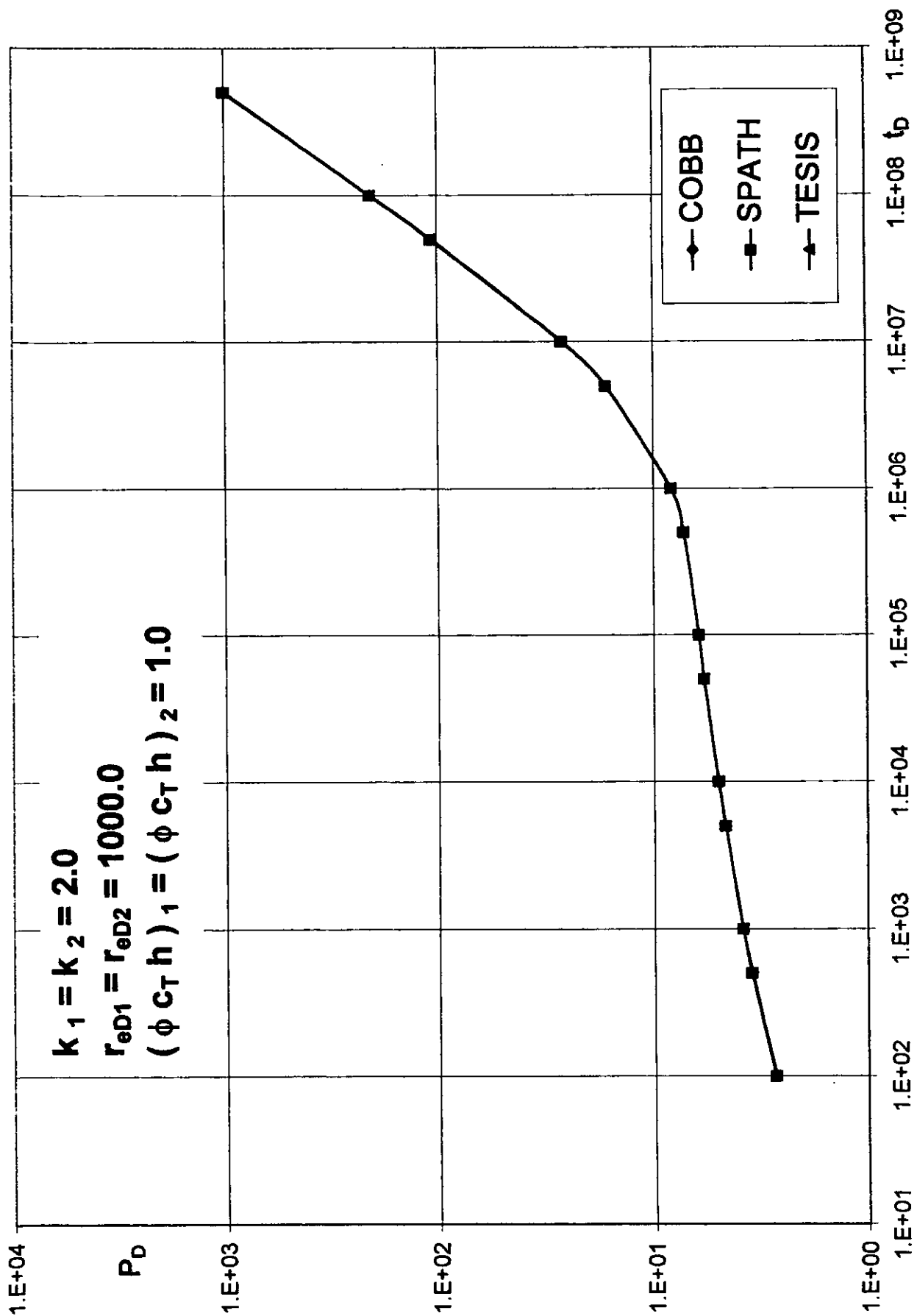


Fig. 6.2.- Gráfica comparativa para dos estratos en un yacimiento cerrado con  $k_1 / k_2 = 2$

**TABLA 6.3**

**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO HOMOGÉNEO FINITO ( FLUJO RADIAL )**

$k_1 / k_2 = 10$

$(\phi c_T h)_1 = (\phi c_T h)_2 = 1$

$r_{eD1} = r_{eD2} = 1,000$

| $t_D$  | COBB       | SPATH      | TESIS      |
|--------|------------|------------|------------|
| 1.E+02 | 2.8521     | 2.8686     | 2.8686     |
| 5.E+02 | 3.6689     | 3.6744     | 3.6730     |
| 1.E+03 | 4.0191     | 4.0218     | 4.0213     |
| 5.E+03 | 4.8302     | 4.8308     | 4.8307     |
| 1.E+04 | 5.1789     | 5.1792     | 5.1791     |
| 5.E+04 | 5.9874     | 5.9888     | 5.9878     |
| 1.E+05 | 6.3381     | 6.3371     | 6.3371     |
| 5.E+05 | 7.7639     | 7.7690     | 7.7643     |
| 1.E+06 | 9.3895     | 9.3894     | 9.3895     |
| 5.E+06 | 21.2943    | 21.3343    | 21.2994    |
| 1.E+07 | 34.3254    | 34.3364    | 34.3371    |
| 5.E+07 | 118.5669   | 118.8325   | 118.5855   |
| 1.E+08 | 218.6272   | 218.6582   | 218.6636   |
| 5.E+08 | 1,018.6260 | 1,021.1560 | 1,018.7818 |

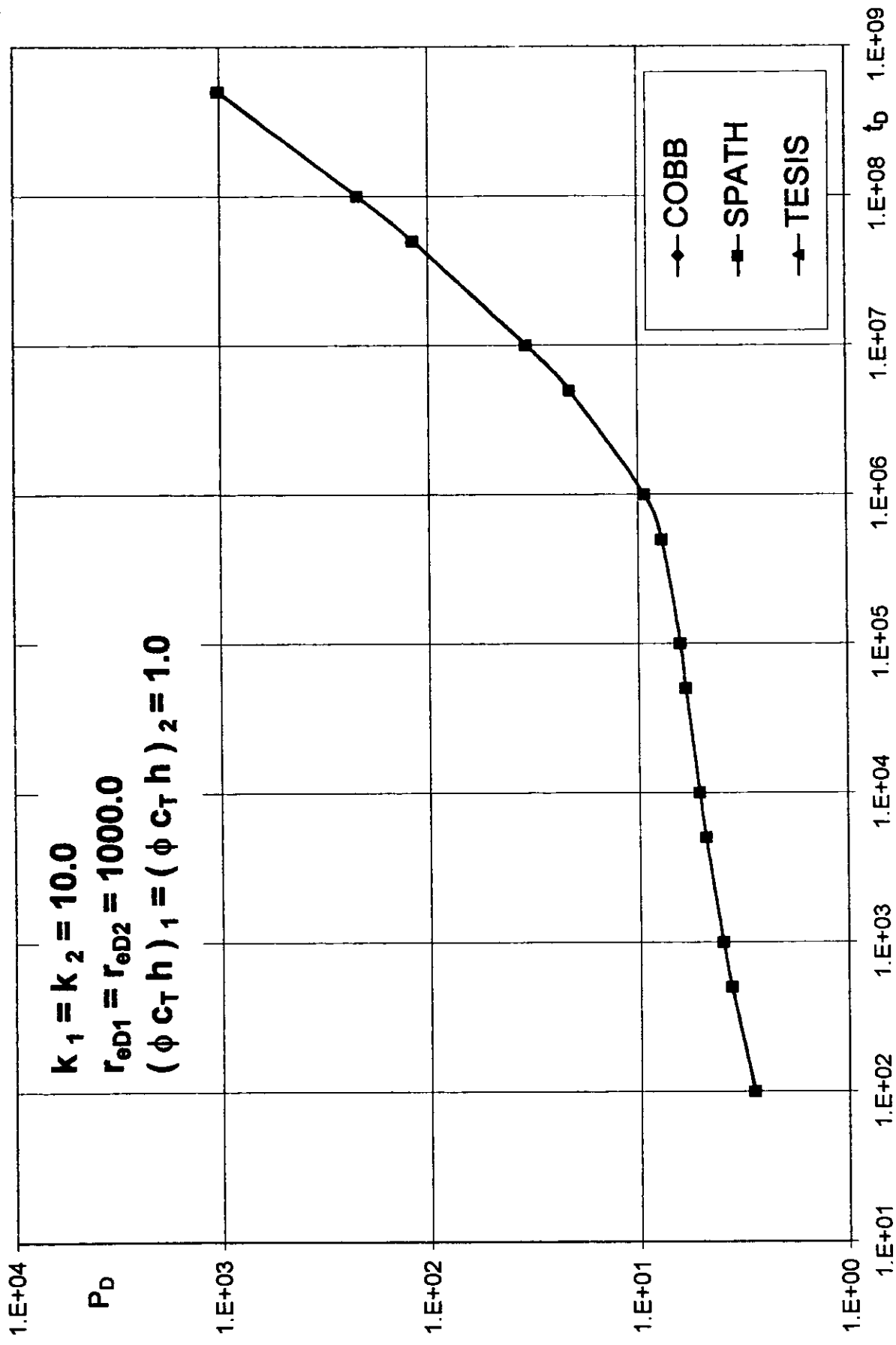


Fig. 6.3.- Gráfica comparativa para dos estratos en un yacimiento cerrado con  $k_1 / k_2 = 10$



**TABLA 6.4**

**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO HOMOGÉNEO FINITO ( FLUJO RADIAL )**

$s_1 = 7$

$k_1 = k_2 = 10$

$(\phi c_T h)_1 = (\phi c_T h)_2 = 1$

$s_2 = 3$

$r_{eD1} = r_{eD2} = 2,000$

| $t_D$  | TARIQ    | SPATH    | TESIS    |
|--------|----------|----------|----------|
| 5.E+02 | 9.9958   | 9.9960   | 9.9945   |
| 1.E+03 | 10.3570  | 10.3573  | 10.3569  |
| 5.E+03 | 11.1958  | 11.1959  | 11.1956  |
| 1.E+04 | 11.5550  | 11.5554  | 11.5552  |
| 5.E+04 | 12.3874  | 12.3874  | 12.3865  |
| 1.E+05 | 12.7430  | 12.7432  | 12.7431  |
| 5.E+05 | 13.5782  | 13.5784  | 13.5763  |
| 1.E+06 | 14.0441  | 14.0442  | 14.0444  |
| 5.E+06 | 17.2022  | 17.2020  | 17.1923  |
| 1.E+07 | 20.9530  | 20.9512  | 20.9525  |
| 5.E+07 | 48.1501  | 48.1542  | 48.0781  |
| 1.E+08 | 77.4070  | 77.4000  | 77.4067  |
| 5.E+08 | 281.5500 | 281.5532 | 280.9526 |

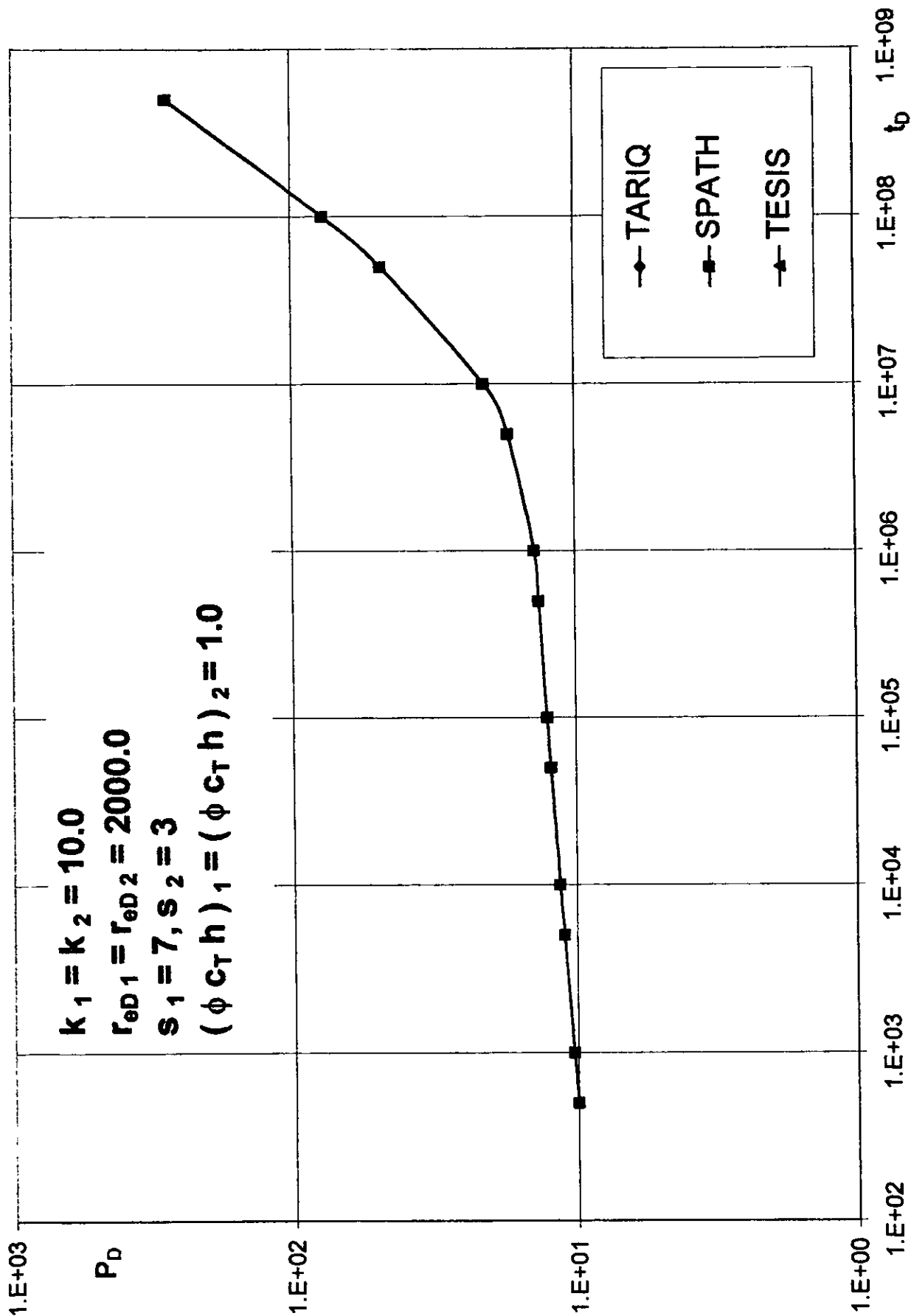


Fig. 6.4.- Gráfica comparativa para dos estratos en un yacimiento cerrado con  $s_1 = 7, s_2 = 3$

**TABLA 6.5**

**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO HOMOGÉNEO FINITO ( FLUJO RADIAL )**

$s_1 = 3$

$k_1 = k_2 = 10$

$(\phi c_T h)_1 = (\phi c_T h)_2 = 1$

$s_2 = 7$

$r_{eD1} = r_{eD2} = 2,000$

| $t_D$  | TARIQ    | SPATH    | TESIS    |
|--------|----------|----------|----------|
| 5.E+02 | 7.0012   | 7.0017   | 7.0018   |
| 1.E+03 | 7.3495   | 7.3499   | 7.3494   |
| 5.E+03 | 8.1571   | 8.1571   | 8.1580   |
| 1.E+04 | 8.5064   | 8.5065   | 8.5064   |
| 5.E+04 | 9.3150   | 9.3151   | 9.3151   |
| 1.E+05 | 9.6634   | 9.6634   | 9.6633   |
| 5.E+05 | 10.4816  | 10.4816  | 10.4807  |
| 1.E+06 | 10.9601  | 10.9601  | 10.9603  |
| 5.E+06 | 14.4277  | 14.4275  | 14.4274  |
| 1.E+07 | 18.6420  | 18.6407  | 18.6422  |
| 5.E+07 | 49.1720  | 49.1709  | 49.1706  |
| 1.E+08 | 81.7970  | 81.7898  | 81.7966  |
| 5.E+08 | 290.7860 | 290.7814 | 290.7946 |

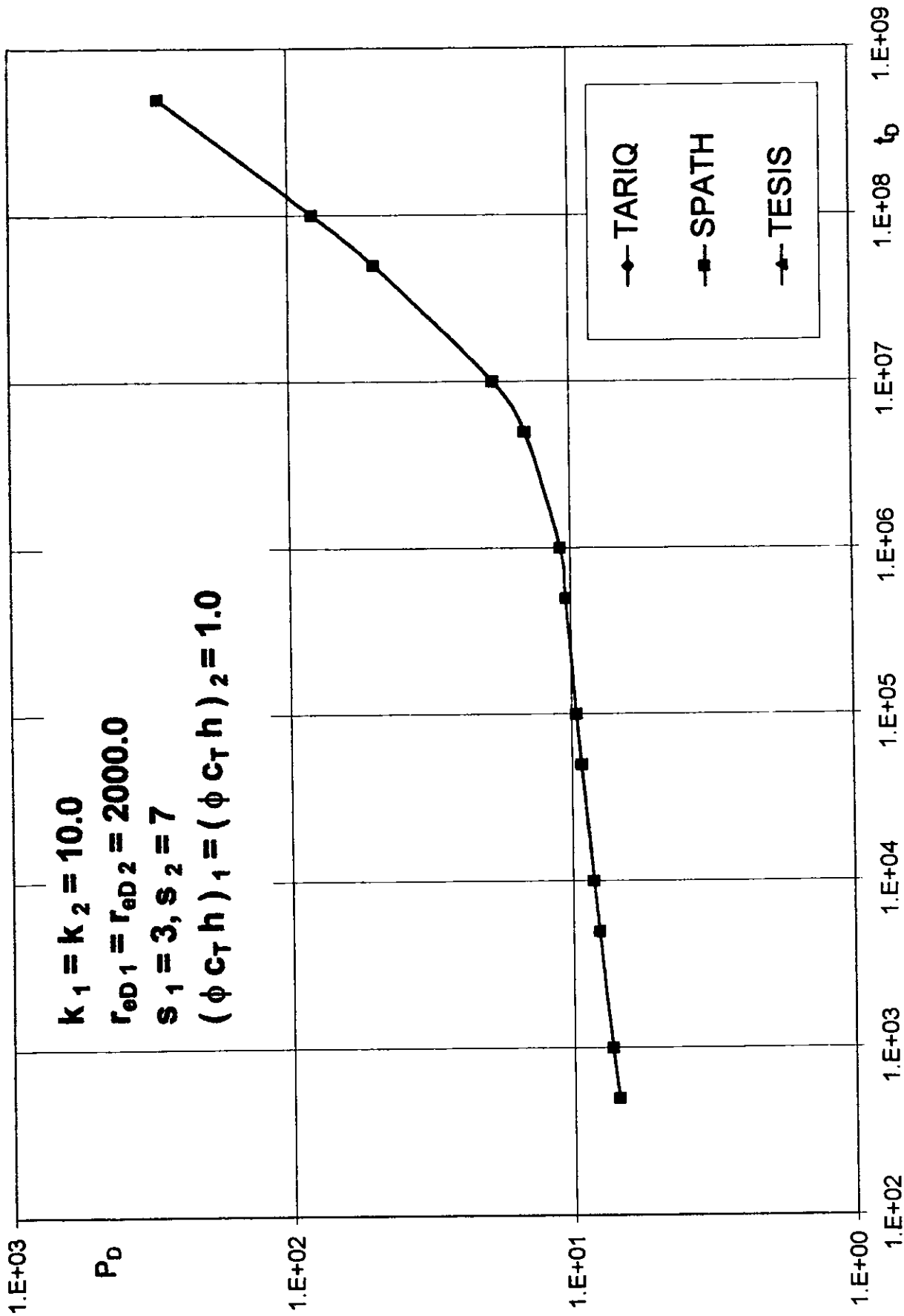


Fig. 6.5.- Gráfica comparativa para dos estratos en un yacimiento cerrado con  $s_1 = 3, s_2 = 7$

**TABLA 6.6**

**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO HOMOGÉNEO FINITO ( FLUJO RADIAL )**

$k_1 = 5.0$

$s_1 = 5.0$

$r_{eD1} = r_{eD2} = 2,000$

$k_2 = 0.1$

$s_2 = - 3.0$

$( \phi c_T h )_1 = ( \phi c_T h )_2 = 1$

| $t_{D2}$ | SPATH   | TESIS   |
|----------|---------|---------|
| 1.E-02   | 1.1220  | 1.1297  |
| 5.E-02   | 1.9318  | 2.4855  |
| 1.E-01   | 2.5117  | 3.3637  |
| 5.E-01   | 4.2289  | 5.1571  |
| 1.E+00   | 5.0671  | 5.7591  |
| 5.E+00   | 6.9732  | 7.2269  |
| 1.E+01   | 7.7111  | 7.8595  |
| 5.E+01   | 9.1793  | 9.2160  |
| 1.E+02   | 9.7224  | 9.7415  |
| 5.E+02   | 10.8420 | 10.8462 |
| 1.E+03   | 11.2821 | 11.2842 |
| 5.E+03   | 12.2431 | 12.2440 |
| 1.E+04   | 12.6396 | 12.6398 |
| 5.E+04   | 13.5327 | 13.5324 |
| 1.E+05   | 13.9086 | 13.9085 |
| 5.E+05   | 14.7684 | 14.7815 |
| 1.E+06   | 15.1344 | 15.2998 |

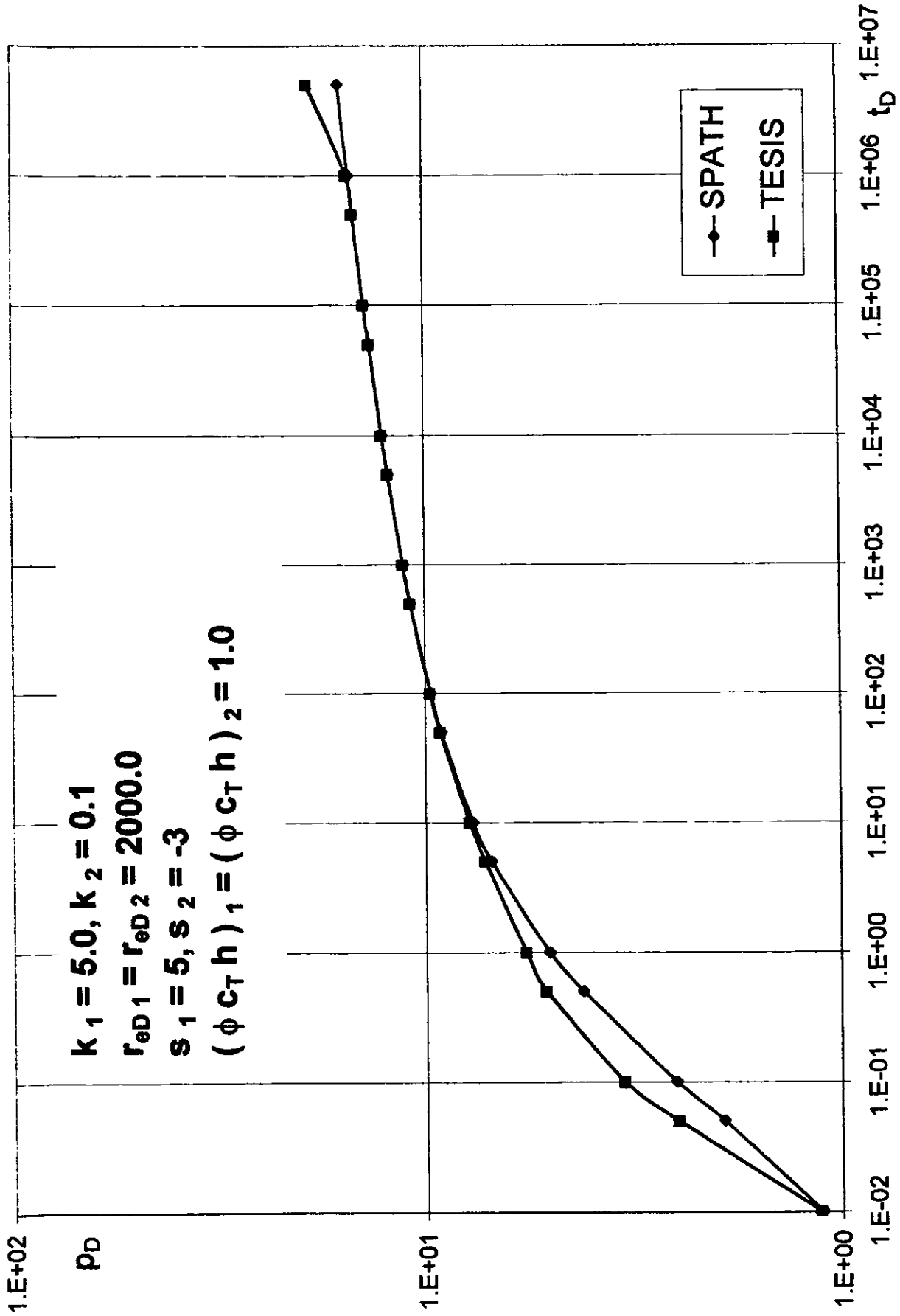


Fig. 6.6.- Gráfica comparativa para dos estratos en un yac. cerrado con daño negativo

**TABLA 6.7**

**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO HOMOGÉNEO FINITO ( FLUJO RADIAL )**

$k_1 = 0.1$   
 $k_2 = 5.0$

$s_1 = 5.0$   
 $s_2 = - 3.0$

$r_{eD1} = r_{eD2} = 2,000$   
 $( \phi c_T h )_1 = ( \phi c_T h )_2 = 1$

| $t_{D2}$ | SPATH  | TESIS  |
|----------|--------|--------|
| 1.E-02   | 0.1518 | 0.1520 |
| 5.E-02   | 0.3174 | 0.3180 |
| 1.E-01   | 0.4285 | 0.4290 |
| 5.E-01   | 0.8104 | 0.8120 |
| 1.E+00   | 1.0328 | 1.0358 |
| 5.E+00   | 1.6685 | 1.6596 |
| 1.E+01   | 1.9800 | 1.9859 |
| 5.E+01   | 2.7514 | 2.7542 |
| 1.E+02   | 3.0926 | 3.0956 |
| 5.E+02   | 3.8985 | 3.8984 |
| 1.E+03   | 4.2467 | 4.2461 |
| 5.E+03   | 5.0555 | 5.0546 |
| 1.E+04   | 5.4030 | 5.4029 |
| 5.E+04   | 6.2116 | 6.2116 |
| 1.E+05   | 6.5590 | 6.5598 |
| 5.E+05   | 7.3699 | 7.3825 |
| 1.E+06   | 7.7142 | 7.8984 |

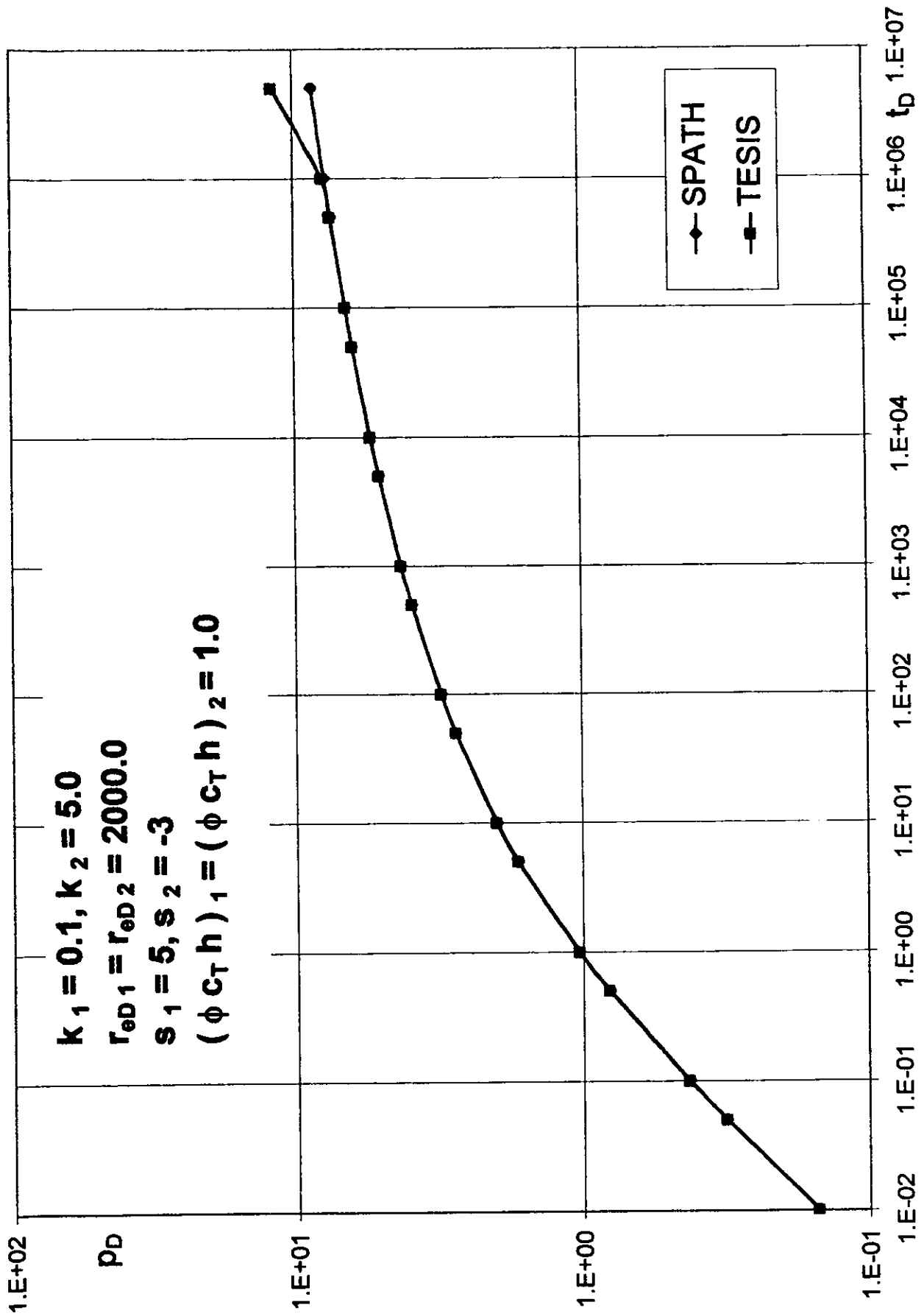


Fig. 6.7.- Gráfica comparativa para dos estratos en un yac. cerrado con daño negativo



**TABLA 6.8**  
**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES ( $p_D$ ) A GASTO CONSTANTE**  
**YACIMIENTO HOMOGÉNEO FINITO ( FLUJO RADIAL )**

|                  | <b>k</b> | <b>h</b> | <b><math>\phi</math></b> | <b><math>C_T</math></b> | <b>s</b> |
|------------------|----------|----------|--------------------------|-------------------------|----------|
| <b>ESTRATO 1</b> | 1.00     | 10.00    | 0.25                     | 5.E-06                  | 2        |
| <b>ESTRATO 2</b> | 10.00    | 10.00    | 0.10                     | 5.E-06                  | 0        |
| <b>ESTRATO 3</b> | 5.00     | 10.00    | 0.10                     | 5.E-06                  | 5        |
| <b>ESTRATO 4</b> | 0.10     | 10.00    | 0.10                     | 5.E-06                  | -3       |

| <b><math>t_{D4}</math></b> | <b>SPATH</b> | <b>TESIS</b> |
|----------------------------|--------------|--------------|
| 1.E-02                     | 2.1581       | 3.3279       |
| 5.E-02                     | 2.3054       | 6.1064       |
| 1.E-01                     | 2.7519       | 5.4031       |
| 5.E-01                     | 3.8415       | 4.8097       |
| 1.E+00                     | 4.3093       | 4.9984       |
| 5.E+00                     | 5.3524       | 5.5994       |
| 1.E+01                     | 5.7809       | 5.9261       |
| 5.E+01                     | 6.728        | 6.7660       |
| 1.E+02                     | 7.119        | 7.1412       |
| 5.E+02                     | 8.0065       | 8.0122       |
| 1.E+03                     | 8.3817       | 8.3841       |
| 5.E+03                     | 9.2388       | 9.2391       |
| 1.E+04                     | 9.6029       | 9.6040       |
| 5.E+04                     | 10.4453      | 10.4454      |
| 1.E+05                     | 10.8056      | 10.8060      |
| 5.E+05                     | 11.6385      | 11.7340      |
| 1.E+06                     | 11.9958      | 12.4949      |

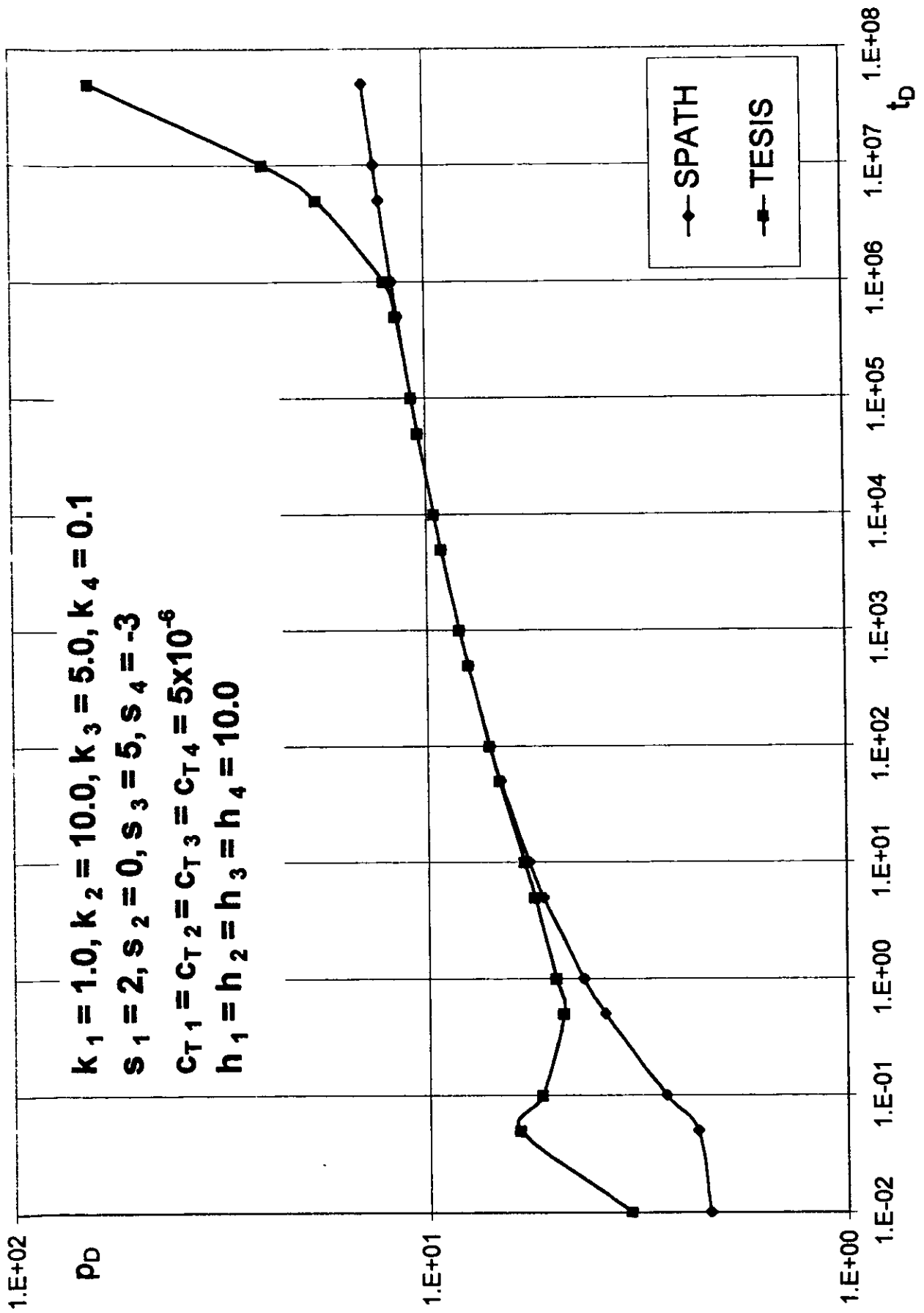


Fig. 6.8.- Gráfica comparativa para cuatro estratos en un yacimiento cerrado

La respuesta de presión para un pozo con una fractura vertical de conductividad infinita o con flujo uniforme en un yacimiento homogéneo, donde se tienen longitudes de fractura diferentes en cada capa está dada por:

$$\bar{p}_{Dj} = \frac{1}{2 u u_j^{1/2}} \left[ \int_0^{x_1} K_0(z) dz + \int_0^{x_2} K_0(z) dz \right] \quad (6.1)$$

donde:

$$X_1 = u_j^{1/2} (L_{xf}/L)(1 + X_{Dj}) \quad y \quad X_2 = u_j^{1/2} (L_{xf}/L)(1 - X_{Dj})$$

Para el caso de longitudes de fractura iguales en las capas se tiene:

$$X_1 = u_j^{1/2} (1 + X_{Dj}) \quad y \quad X_2 = u_j^{1/2} (1 - X_{Dj})$$

En la ecuación 6.1,  $X_{Dj}$  representa la distancia adimensional en la dirección X para la capa j. La respuesta para una fractura de conductividad infinita se obtiene evaluando la ecuación 6.1 para  $X_{Dj} = 0.732$ , y para el caso de flujo uniforme usando  $X_{Dj} = 0$ .

Para este caso, el tiempo adimensional utilizado está basado en una longitud de fractura de referencia  $L_{xf}$ :

$$t_{Dxf} = \frac{0.0002637 k_{avg} t}{(\phi C_T)_{avg} L_{xf}^2} \quad (6.2)$$

La Tabla 6.9 muestra la comparación realizada con Camacho<sup>3</sup> y Spath<sup>1</sup>, para el caso de dos capas fracturadas hidráulicamente en donde se tiene la ausencia de algunos valores para Spath, porque los que se tienen son los únicos reportados, lo cual no es obstáculo para comparar las tendencias de los modelos, como se puede apreciar en la Figura 6.9.

Cabe mencionar en este caso, que los valores que presenta Camacho son obtenidos numéricamente para un sistema de fracturas verticales de conductividad finita, pero debido a que las conductividades adimensionales de fractura en ambas capas son muy altas, 435 y 217,000 respectivamente para cada capa, se consideraron infinitas ya que, para propósitos prácticos, conductividades adimensionales de fractura mayores de 300 se consideran infinitas.

Para el caso de tener un pozo con una fractura de conductividad finita en un yacimiento infinito se utilizó para probar el modelo, una solución semianalítica desarrollada por Blasingame y Poe<sup>5</sup>, la cual es una solución híbrida que combina lo siguiente:

- 1) una solución trilineal de conductividad de fractura finita, que tiene la particularidad de que no modela el flujo radial, y
- 2) la solución de conductividad de fractura infinita presentada en el caso anterior, la cual modela el flujo pseudoradial.

Este modelo es llamado por los autores como Solución Trilineal Pseudoradial.

**TABLA 6.9**

**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES ( $p_D$ ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO FRACTURADO DE CONDUCTIVIDAD INFINITA**

$k_1 = 1.0$   
 $k_2 = 0.001$

$L_{xf1} = 500$   
 $L_{xf2} = 1,000$

$(\phi c_T h)_1 = (\phi c_T h)_2 = 1$

| $t_{D4}$ | CAMACHO | SPATH | TESIS  |
|----------|---------|-------|--------|
| 1.E-04   | 0.021   | 0.021 | 0.0221 |
| 5.E-04   | 0.050   |       | 0.0476 |
| 1.E-03   | 0.069   | 0.063 | 0.0677 |
| 5.E-03   | 0.150   |       | 0.1529 |
| 1.E-01   | 0.580   | 0.540 | 0.5787 |
| 5.E-01   | 1.050   |       | 1.0837 |
| 1.E+00   | 1.400   | 1.350 | 1.4004 |
| 5.E+00   | 2.100   |       | 2.1204 |

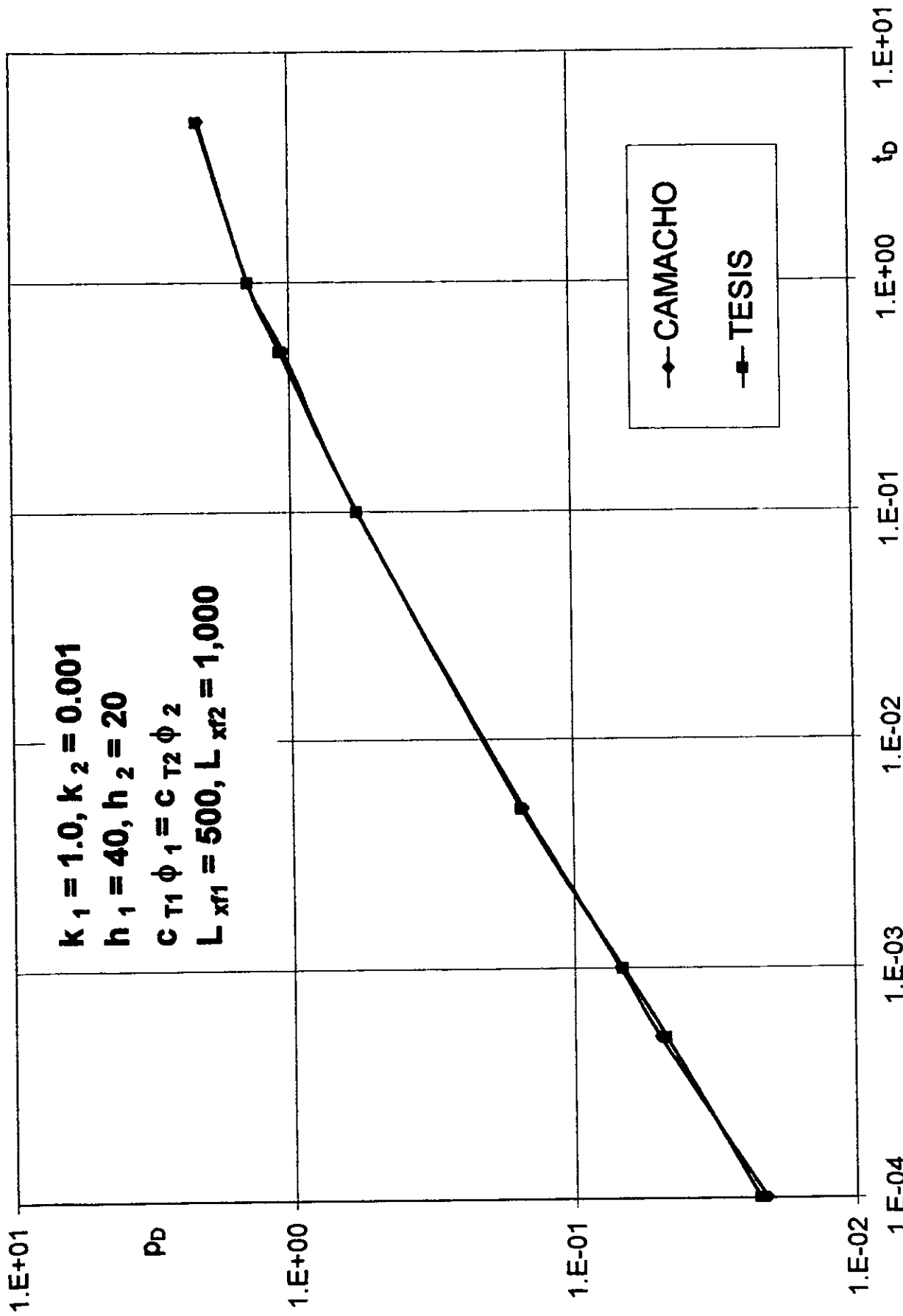


Fig. 6.9.- Gráfica comparativa para dos estratos fracturados de conductividad infinita

La primera solución que se combina, que es la de fractura vertical de conductividad finita, fue desarrollada por Lee y Brockenbrough<sup>36</sup>. Esta solución modela de manera muy precisa el comportamiento de un pozo fracturado hidráulicamente a tiempos muy cortos, pero no lo hace a tiempos más grandes durante el período de flujo pseudoradial. La expresión desarrollada es la siguiente:

$$\bar{p}_{LBD}(F_{cD}, s_f) = (\pi / s F_{cD}) (1 / \psi \tanh(\psi)) \quad (6.3)$$

donde:

$$\psi = [(2 / F_{cD})(\alpha / (1 + \alpha s_f)) + (u / \eta_f)]^{1/2} \quad (6.4)$$

$$\alpha = [u + (u)^{1/2}]^{1/2} \quad (6.5)$$

donde " u " es la variable de Laplace.

La segunda solución que se combina es la desarrollada por Ozkan y Raghavan<sup>6</sup>, ya presentada en la sección anterior.

De acuerdo a lo anterior, la solución trilineal pseudoradial está establecida como:

$$p_{TPR}(F_{cD}, s_f) = p_{LBD}(F_{cD}, s_f) - p_{LBD}(F_{cD} = \infty, s_f = 0) + p_{ORD}(X_D(F_{cD}) < 1, y_D = 0) \quad \dots\dots\dots (6.6)$$

en donde:

$p_{LBD}$  : Solución adimensional de Lee y Brockenbrough.

$p_{ORD}$  : Solución adimensional de Ozkan y Raghavan.

$s_f$  : Factor de daño adimensional en la fractura.

Para propósitos de cálculo, un valor de  $F_{cD} = \pi \times 10^6$  puede usarse como una aproximación para  $F_{cD} = \infty$ .

Al probar esta solución para el caso de  $X_D = 0.732$  ( conductividad de fractura infinita ), Blasingame y Poe observaron un comportamiento deficiente durante los períodos de flujo de transición y pseudoradial para valores de  $F_{cD} < 0.5$ . Este comportamiento les sugirió que el valor de  $X_D$  debía de estar en función de  $F_{cD}$ . Por tal motivo desarrollaron una correlación para  $X_D$  con los valores de  $F_{cD}$  utilizados por otros investigadores, con sus respectivas metodologías de cálculo para fracturas de conductividad finita. Los resultados mostraron que dicha correlación se cumple para toda la gama de valores de  $F_{cD}$ , excepto cuando ésta es menor de 0.5. De tal manera que, para valores de  $F_{cD}$  menores de 0.5 se recomienda utilizar un valor de  $X_D$  de 0.732, ya que aunque se tendrán errores, estos no serán tan grandes.

La correlación desarrollada está definida como:

$$X_D(F_{cD}) = A / B \quad (6.7)$$

donde:



$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \quad (6.8)$$

$$B = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 \quad (6.9)$$

$$x = \ln (F_{cD}) \quad (6.10)$$

$$a_0 = 0.759919$$

$$b_0 = 1.0$$

$$a_1 = 0.465301$$

$$b_1 = 0.994770$$

$$a_2 = 0.562754$$

$$b_2 = 0.896679$$

$$a_3 = 0.363093$$

$$b_3 = 0.430707$$

$$a_4 = 0.0298881$$

$$b_4 = 0.0467339$$

Las Tablas 6.10, 6.11 y 6.12 comparan los resultados obtenidos con los de Bennett<sup>22</sup>. Las primeras dos Tablas se refieren al caso de una sola capa para diferentes conductividades de fractura, por lo que se le dieron los mismos datos de entrada a las dos capas para simular el efecto de una sola. La tercera Tabla muestra la comparación para el caso de dos capas con propiedades diferentes para cada estrato. Como se puede observar en las Figuras 6.10, 6.11 y 6.12, correspondientes a las Tablas mencionadas, la precisión en la comparación es bastante buena a excepción de ciertos

valores que caen precisamente en los períodos de flujo de transición y pseudoradial, en donde supuestamente no debería de existir problema alguno. Al igual que para el caso de fracturas de conductividad infinita, el parámetro N del algoritmo de inversión de Stehfest se tuvo que modificar, optándose por trabajar con un valor de 4, el cual permaneció constante para todo el intervalo de tiempo considerado, que fue con el que se tuvieron las menores inestabilidades. En la Figura 6.10 se incluyó una curva de resultados obtenidos con un valor de N igual a 2. Como se puede apreciar, la tendencia de la curva es mucho más estable que con una N de 4, pero todos los resultados obtenidos son mayores de los verdaderos. Valores de N de 6 en adelante generan una gran cantidad de puntos incongruentes ( valores negativos ), los cuales se incrementan en cantidad conforme es mayor el valor de N.

Durante todo el desarrollo del presente trabajo se ha venido señalando a " u " como la variable de Laplace. En realidad esta variable está definida como:

$$u = s f(s) \quad ( 6.11 )$$

donde:

s: variable del espacio de Laplace.

f(s): función de control en el espacio de Laplace para el comportamiento de flujo interporoso de la matriz a la fractura así como el almacenamiento en la fractura, y está dado, para el caso de flujo interporoso en estado pseudoestacionario, por la expresión<sup>24</sup>:

**TABLA 6.10**  
**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON FRACTURA DE CONDUCTIVIDAD FINITA**

$k_1 = k_2 = 0.1$

$p_{11} = p_{12} = 5,000$

$F_{CD} = 5$

$(\phi c_T h)_1 = (\phi c_T h)_2$

| $t_{Dxf}$ | ANALÍTICA | BENNETT | TESIS N = 4 | TESIS N = 2 |
|-----------|-----------|---------|-------------|-------------|
| 1.E-06    | 0.03466   | 0.03480 | 0.03501     | 0.03990     |
| 2.E-06    | 0.04122   | 0.04135 | 0.04162     | 0.04744     |
| 3.E-06    | 0.04561   | 0.04584 | 0.04606     | 0.05249     |
| 4.E-06    | 0.04902   | 0.04925 | 0.04949     | 0.05640     |
| 5.E-06    | 0.05183   | 0.05209 | 0.05233     | 0.05964     |
| 6.E-06    | 0.05424   | 0.05449 | 0.05477     | 0.06241     |
| 7.E-06    | 0.05638   | 0.05662 | 0.05692     | 0.06486     |
| 8.E-06    | 0.05829   | 0.05855 | 0.05885     | 0.06706     |
| 9.E-06    | 0.06003   | 0.06031 | 0.06061     | 0.06906     |
| 1.E-05    | 0.06163   | 0.06194 | 0.06222     | 0.07090     |
| 2.E-05    | 0.07330   | 0.07357 | 0.07398     | 0.08429     |
| 3.E-05    | 0.08112   | 0.08155 | 0.08186     | 0.09326     |
| 4.E-05    | 0.08716   | 0.08762 | 0.08795     | 0.10020     |
| 5.E-05    | 0.09217   | 0.09269 | 0.09298     | 0.10594     |
| 6.E-05    | 0.09646   | 0.09697 | 0.09731     | 0.11086     |
| 7.E-05    | 0.10025   | 0.10079 | 0.10112     | 0.11521     |
| 8.E-05    | 0.10366   | 0.10424 | 0.10454     | 0.11910     |
| 9.E-05    | 0.10676   | 0.10740 | 0.10766     | 0.12265     |
| 1.E-04    | 0.10960   | 0.11031 | 0.11052     | 0.12592     |
| 2.E-04    | 0.13034   | 0.13114 | 0.13508     | 0.14595     |
| 3.E-04    | 0.14425   | 0.14539 | 0.14544     | 0.16550     |
| 4.E-04    | 0.15501   | 0.15618 | 0.13187     | 0.17986     |
| 5.E-04    | 0.16391   | 0.16517 | 0.16140     | 0.18856     |
| 6.E-04    | 0.17157   | 0.17270 | 0.20159     | 0.19721     |
| 7.E-04    | 0.17832   | 0.17940 | 0.18690     | 0.20501     |
| 8.E-04    | 0.18440   | 0.18545 | 0.17683     | 0.21208     |
| 9.E-04    | 0.18993   | 0.19098 | 0.18807     | 0.21854     |
| 1.E-03    | 0.19503   | 0.19608 | 0.19493     | 0.22451     |
| 2.E-03    | 0.23241   | 0.23281 | 0.23347     | 0.26883     |
| 3.E-03    | 0.25793   | 0.25832 | 0.25910     | 0.29997     |
| 4.E-03    | 0.27807   | 0.27805 | 0.27940     | 0.32469     |
| 5.E-03    | 0.29504   | 0.29476 | 0.31383     | 0.32836     |
| 6.E-03    | 0.30989   | 0.30904 | 0.31520     | 0.36040     |
| 7.E-03    | 0.32322   | 0.32193 | 0.32618     | 0.37939     |
| 8.E-03    | 0.33539   | 0.33373 | 0.33783     | 0.39505     |
| 9.E-03    | 0.34664   | 0.34463 | 0.34898     | 0.40909     |
| 1.E-02    | 0.35714   | 0.35479 | 0.24720     | 0.43067     |

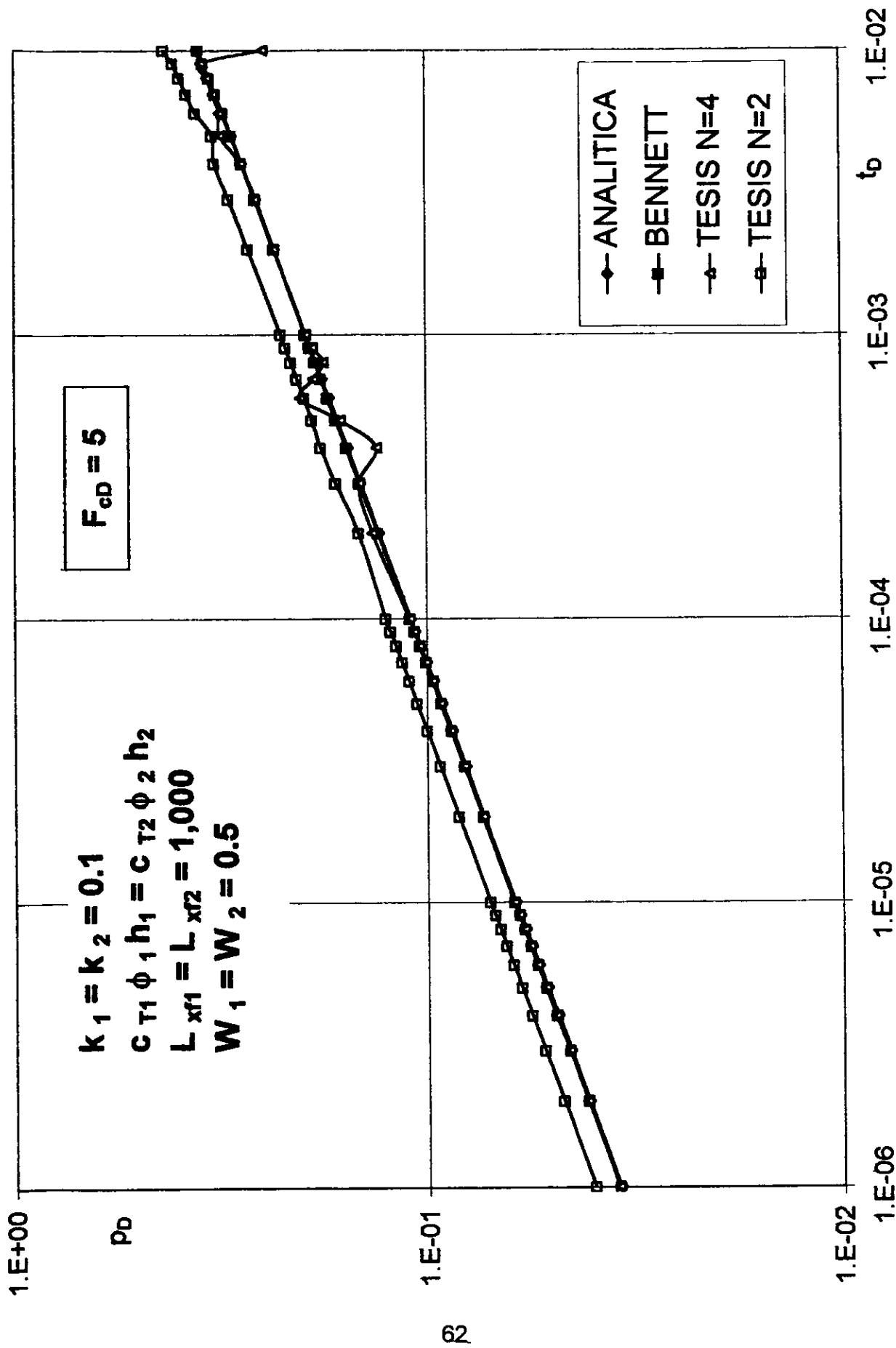


Fig. 6.10.- Gráfica comparativa para dos estratos iguales fracturados de conductividad finita

**TABLA 6.11**  
**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**

**YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON FRACTURA DE CONDUCTIVIDAD FINITA**

$k_1 = k_2 = 0.1$

$p_{11} = p_{12} = 5,000$

$F_{cD} = 500$

$(\phi c_T h)_1 = (\phi c_T h)_2$

| $t_{Dxf}$ | ANALÍTICA | BENNETT | TESIS   |
|-----------|-----------|---------|---------|
| 1.E-06    | 0.00357   | 0.00359 | 0.00360 |
| 2.E-06    | 0.00439   | 0.00440 | 0.00443 |
| 3.E-06    | 0.00499   | 0.00501 | 0.00504 |
| 4.E-06    | 0.00548   | 0.00550 | 0.00554 |
| 5.E-06    | 0.00592   | 0.00594 | 0.00598 |
| 6.E-06    | 0.00631   | 0.00632 | 0.00638 |
| 7.E-06    | 0.00667   | 0.00668 | 0.00674 |
| 8.E-06    | 0.00700   | 0.00701 | 0.00708 |
| 9.E-06    | 0.00731   | 0.00732 | 0.00739 |
| 1.E-05    | 0.00760   | 0.00762 | 0.00769 |
| 2.E-05    | 0.00995   | 0.00995 | 0.01008 |
| 3.E-05    | 0.01174   | 0.01176 | 0.01190 |
| 4.E-05    | 0.01325   | 0.01327 | 0.01344 |
| 5.E-05    | 0.01458   | 0.01461 | 0.01479 |
| 6.E-05    | 0.01578   | 0.01581 | 0.01601 |
| 7.E-05    | 0.01689   | 0.01691 | 0.01713 |
| 8.E-05    | 0.01791   | 0.01795 | 0.01817 |
| 9.E-05    | 0.01888   | 0.01892 | 0.01915 |
| 1.E-04    | 0.01979   | 0.01985 | 0.02008 |
| 2.E-04    | 0.02714   | 0.02722 | 0.02764 |
| 3.E-04    | 0.03278   | 0.03296 | 0.02795 |
| 4.E-04    | 0.03753   | 0.03772 | 0.05569 |
| 5.E-04    | 0.04171   | 0.04193 | 0.04502 |
| 6.E-04    | 0.04550   | 0.04566 | 0.04441 |
| 7.E-04    | 0.04898   | 0.04910 | 0.04926 |
| 8.E-04    | 0.05222   | 0.05231 | 0.05287 |
| 9.E-04    | 0.05526   | 0.05532 | 0.05606 |
| 1.E-03    | 0.05813   | 0.05818 | 0.05903 |
| 2.E-03    | 0.08135   | 0.08074 | 0.08275 |
| 3.E-03    | 0.09917   | 0.09814 | 0.10102 |
| 4.E-03    | 0.11419   | 0.11251 | 0.11643 |
| 5.E-03    | 0.12742   | 0.12517 | 0.12998 |
| 6.E-03    | 0.13938   | 0.13635 | 0.14931 |
| 7.E-03    | 0.15035   | 0.14866 | 0.15536 |
| 8.E-03    | 0.16070   | 0.15624 | 0.16438 |
| 9.E-03    | 0.17011   | 0.16523 | 0.17358 |
| 1.E-02    | 0.17914   | 0.17370 | 0.18245 |

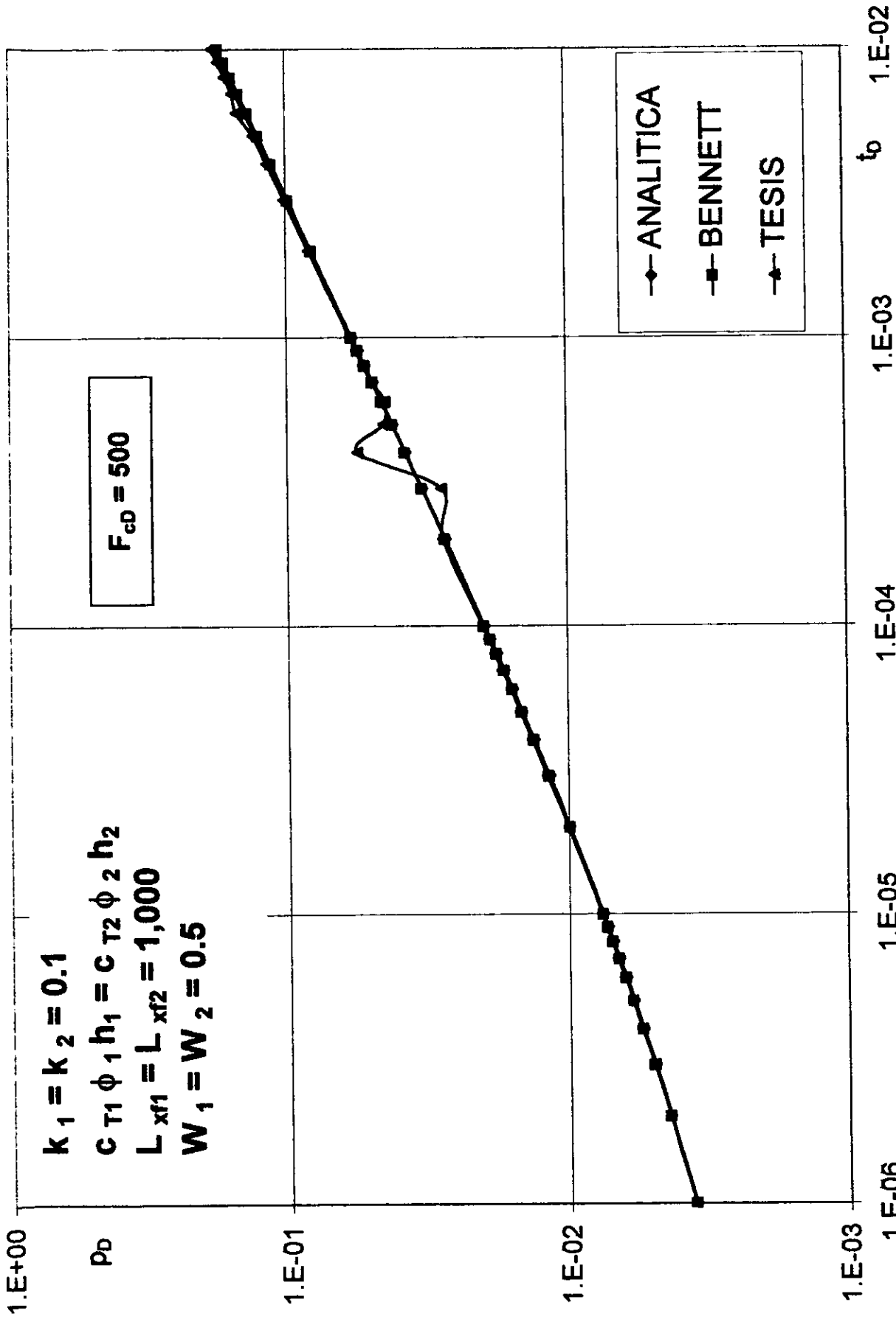


Fig. 6.11.- Gráfica comparativa para dos estratos iguales fracturados de cond. finita

**TABLA 6.12**

**COMPARACIÓN DE SOLUCIONES (  $p_D$  ) A GASTO CONSTANTE**  
**YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON FRACTURA DE CONDUCTIVIDAD FINITA**

$k_1 = 0.35$  md                       $h_1 = 5$  ft                                       $\phi_1 = 0.0125$   
 $k_2 = 0.05$  md                       $h_2 = 25$  ft                                       $\phi_2 = 0.05$   
 $F_{CD} = 50$                                $c_{T1} = c_{T2} = 0.00001$  psi<sup>-1</sup>                                       $p_{11} = p_{12} = 5,000$

| $t_{Dxf}$ | ANALÍTICA | BENNETT | TESIS   |
|-----------|-----------|---------|---------|
| 1.E-06    | 0.01228   | 0.01236 | 0.01069 |
| 2.E-06    | 0.01460   | 0.01467 | 0.01302 |
| 3.E-06    | 0.01616   | 0.01625 | 0.01463 |
| 4.E-06    | 0.01737   | 0.01746 | 0.01591 |
| 5.E-06    | 0.01837   | 0.01846 | 0.01698 |
| 6.E-06    | 0.01923   | 0.01931 | 0.01792 |
| 7.E-06    | 0.01999   | 0.02007 | 0.01875 |
| 8.E-06    | 0.02067   | 0.02075 | 0.01951 |
| 9.E-06    | 0.02130   | 0.02138 | 0.02020 |
| 1.E-05    | 0.02187   | 0.02196 | 0.02084 |
| 2.E-05    | 0.02613   | 0.02619 | 0.02569 |
| 3.E-05    | 0.02907   | 0.02917 | 0.02909 |
| 4.E-05    | 0.03141   | 0.03151 | 0.03185 |
| 5.E-05    | 0.03340   | 0.03351 | 0.03413 |
| 6.E-05    | 0.03515   | 0.03525 | 0.03618 |
| 7.E-05    | 0.03673   | 0.03683 | 0.03802 |
| 8.E-05    | 0.03818   | 0.03828 | 0.03970 |
| 9.E-05    | 0.03953   | 0.03964 | 0.04125 |
| 1.E-04    | 0.04079   | 0.04092 | 0.04271 |
| 2.E-04    | 0.05068   | 0.05078 | 0.05396 |
| 3.E-04    | 0.05805   | 0.05826 | 0.06222 |
| 4.E-04    | 0.06420   | 0.06440 | 0.06984 |
| 5.E-04    | 0.06958   | 0.06981 | 0.07519 |
| 6.E-04    | 0.07443   | 0.07459 | 0.08028 |
| 7.E-04    | 0.07887   | 0.07900 | 0.08882 |
| 8.E-04    | 0.08299   | 0.08310 | 0.08416 |
| 9.E-04    | 0.08686   | 0.08695 | 0.08965 |
| 1.E-03    | 0.09051   | 0.09059 | 0.12644 |
| 2.E-03    | 0.11989   | 0.11911 | 0.12803 |
| 3.E-03    | 0.14236   | 0.14088 | 0.15187 |
| 4.E-03    | 0.16127   | 0.15880 | 0.17131 |
| 5.E-03    | 0.17792   | 0.17456 | 0.18829 |
| 6.E-03    | 0.19297   | 0.18847 | 0.20352 |
| 7.E-03    | 0.20680   | 0.20126 | 0.21745 |
| 8.E-03    | 0.21967   | 0.21315 | 0.23034 |
| 9.E-03    | 0.23176   | 0.22428 | 0.24239 |
| 1.E-02    | 0.24319   | 0.23476 | 0.25373 |

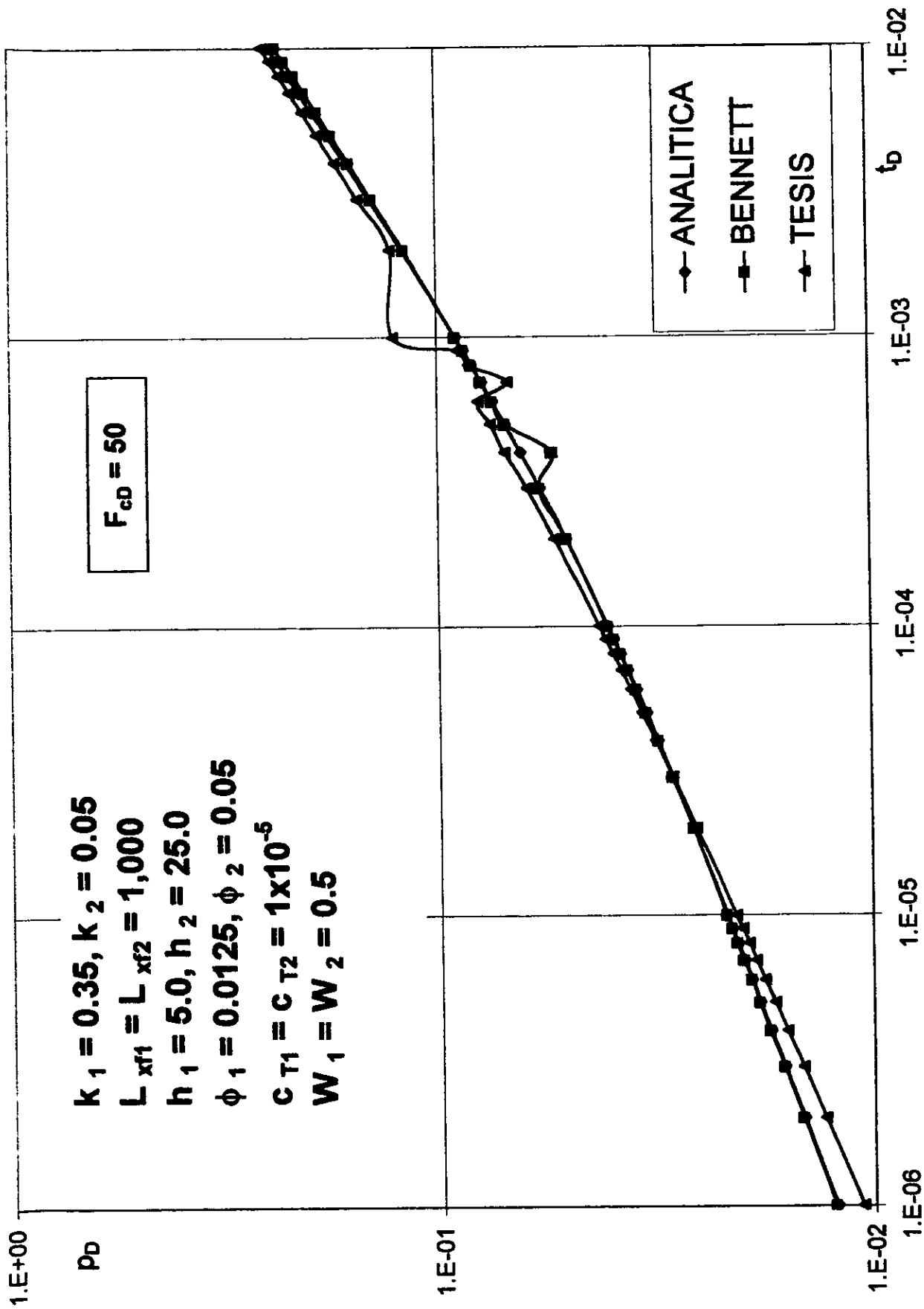


Fig. 6.12.- Gráfica comparativa para dos estratos diferentes fracturados con cond. finita



$$f(s) = \frac{\omega (1 - \omega) s + \lambda}{(1 - \omega) s + \lambda} \quad (6.12)$$

donde:

$\lambda$ : coeficiente de flujo interporoso adimensional.

$\omega$ : almacenamiento de la fractura adimensional.

Para flujo interporoso transitorio en un modelo slab se tiene<sup>37</sup>:

$$f(s) = \omega + [ (\lambda (1 - \omega) / 3 \sigma)^{1/2} \tanh (3 s (1 - \omega) / \lambda)^{1/2} ] \quad (6.13)$$

Para flujo transitorio interporoso en un modelo esférico se tiene<sup>37</sup>:

$$f(s) = \omega + (\lambda / 5 s) [ (15 (1 - \omega) s / \lambda)^{1/2} \coth (15 s (1 - \omega) / \lambda)^{1/2} - 1 ] \quad (6.14)$$

De las tres ecuaciones anteriores, la utilizada para este estudio es la primera, que es la que corresponde al modelo de Warren y Root<sup>24</sup> para un yacimiento fracturado.

### 6.2.- Análisis de sensibilidad.

Con objeto de tener una idea clara del efecto que tiene la variación de algunos parámetros en la respuesta de un sistema estratificado, se efectuó un análisis de sensibilidad.

### 1) Variación de la longitud de fractura.

Durante los cálculos para determinar la respuesta en un sistema estratificado con una fractura vertical, se presentan los casos en que se tienen longitudes de fractura iguales o diferentes en cada estrato. La situación más común consiste en tener longitudes de fractura diferentes debido a varias causas, como las heterogeneidades petrofísicas propias de cada capa, el estar sujetas las capas a diferentes esfuerzos o simplemente el haber sufrido algún tratamiento diferente ( fractura, estimulación, etc. ). Por tal motivo, se analiza esta variación por considerarse la más importante.

Se inicia el análisis para dos estratos con una fractura vertical de conductividad infinita en donde se tienen las mismas propiedades en ambas capas, con excepción de las longitudes de fractura. Se toma como longitud de referencia la correspondiente a la primera capa que es de 500 pies, y se varía la segunda tomando los valores de 100, 500 y 1000 pies. El caso en que coinciden ambas capas ( 500 pies ) es equivalente a tener la solución para un estrato solamente. En la Tabla 6.13 se presentan los resultados obtenidos considerando una relación de difusividades igual a 100. Como se puede observar en las Figuras 6.13, 6.14 y 6.15, la solución para la longitud de fractura más corta es la que tiene la caída de presión más alta y es la que alcanza el flujo pseudoradial en el período de tiempo más corto. En dichas Figuras también se puede apreciar que una vez que se alcanza el flujo pseudoradial en todos los casos, la diferencia en la respuesta de presión de cada capa es muy pequeña.

En la Tabla 6.14 se pueden apreciar los resultados para las mismas longitudes de fractura analizadas anteriormente, pero ahora con una relación de difusividades de 0.01. Las Figuras 6.16, 6.17 y 6.18 muestran las comparaciones de estos resultados con los obtenidos por Spath. Como se puede observar, las respuestas de presión

obtenidas para ambas relaciones de difusividad con las diferentes longitudes de fractura son muy similares.

De aquí se puede determinar la importancia que tiene el no basarse únicamente en la respuesta de presión total del sistema, para proporcionar alguna recomendación o efectuar alguna caracterización del yacimiento.

Para aclarar lo anterior se obtuvieron los gastos fraccionales para todos los sistemas descritos anteriormente, tal y como se muestra en las Figuras 6.19 a 6.30. Todos los gastos se calcularon inicialmente con  $N=4$  ya que con este valor se habían obtenido las respuestas de presión respectivas, pero al igual que con ésta, también se generaron algunos puntos inestables. Se procedió a realizar los cálculos con  $N=2$  en donde para la presión se generaban valores más estables, pero más grandes que los reales; sin embargo para los gastos si se obtuvieron los valores reales con un comportamiento estable. Las gráficas mencionadas presentan todos los escenarios descritos anteriormente y fueron comparadas con las presentadas por Spath.

En las primeras seis Figuras ( 6.19 a 6.24 ) la difusividad de la primera capa es 100 veces mayor con respecto a la segunda, y ambas capas tienen un factor de daño igual a cero. En las Figuras 6.19 y 6.20 se tiene que  $L_{x1} > L_{x2}$  y como  $\eta_1 = 100 \eta_2$ , es lógico esperar que la producción de la primera capa predomine en la producción total, ya sea mientras se sienten los efectos de la longitud de fractura o cuando terminan estos. En la Figuras 6.21 y 6.22 las longitudes de fractura de ambas capas son iguales, por lo tanto, la producción es la misma en ambos estratos mientras se sienten los efectos de la fractura y posteriormente, la producción de la primera capa es mayor que la producción de la segunda debido a la relación de difusividades. Para las Figuras 6.23 y 6.24 se tiene  $L_{x1} < L_{x2}$ , por lo tanto, predomina la producción del segundo estrato

mientras se sienten los efectos de la fractura, y al terminar éstos se revierten las producciones.

En las Figuras 6.25 a 6.30 se presenta la situación inversa en la relación de difusividades ( $\eta_2 = 0.01 \eta_1$ ), mientras que los factores de daño continúan siendo igual a cero. En las Figuras 6.25 y 6.26 se tiene que  $L_{xf1} > L_{xf2}$ , entonces  $q_1 > q_2$  a tiempos previos a que se sienta el extremo de la fractura y terminados estos la producción se invierte. Para las Figuras 6.27 y 6.28 las longitudes de fractura son iguales, por lo tanto,  $q_1 = q_2$  mientras se siente la fractura y posteriormente  $q_2 > q_1$ . Finalmente, se tiene  $L_{xf1} < L_{xf2}$  para las Figuras 6.29 y 6.30, entonces  $q_2 > q_1$  durante y después del flujo transitorio en la fractura.

**TABLA 6.13**

**ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA UN YACIMIENTO CON DOS CAPAS  
HIDRÁULICAMENTE FRACTURADAS**

**LONGITUDES DE FRACTURA DIFERENTES**

$\eta_1 / \eta_2 = 100$

$L_{x1} = 500$

| $t_{Dx1}$ | $L_{x2} = 100$ |        | $L_{x2} = 500$ |        | $L_{x2} = 1,000$ |        |
|-----------|----------------|--------|----------------|--------|------------------|--------|
|           | SPATH          | TESIS  | SPATH          | TESIS  | SPATH            | TESIS  |
| 1.E-04    | 0.0515         | 0.0440 | 0.0309         | 0.0313 | 0.0206           | 0.0209 |
| 5.E-04    | 0.1153         | 0.1172 | 0.0692         | 0.0702 | 0.0461           | 0.0468 |
| 1.E-03    | 0.1623         | 0.1654 | 0.0975         | 0.0991 | 0.0650           | 0.0661 |
| 5.E-03    | 0.3434         | 0.3388 | 0.2112         | 0.1887 | 0.1425           | 0.1623 |
| 1.E-02    | 0.4613         | 0.4651 | 0.2900         | 0.2943 | 0.1974           | 0.2000 |
| 5.E-02    | 0.8811         | 0.8955 | 0.5931         | 0.6039 | 0.4155           | 0.4223 |
| 1.E-01    | 1.1351         | 1.1525 | 0.7916         | 0.8059 | 0.5649           | 0.5752 |
| 5.E-01    | 1.8537         | 1.8702 | 1.4080         | 1.4237 | 1.0868           | 1.0058 |
| 1.E+00    | 2.1891         | 2.2063 | 1.7258         | 1.7446 | 1.3811           | 1.3653 |
| 5.E+00    | 2.9895         | 3.0053 | 2.5681         | 2.5872 | 2.1892           | 2.2097 |
| 1.E+01    | 3.3351         | 3.3521 | 2.9495         | 2.9682 | 2.5825           | 2.6061 |
| 5.E+01    | 4.1427         | 4.1585 | 3.8232         | 3.8395 | 3.5422           | 3.5598 |
| 1.E+02    | 4.4888         | 4.5058 | 4.1892         | 4.5058 | 3.9410           | 3.9591 |
| 5.E+02    | 5.2962         | 5.3119 | 5.0303         | 5.3119 | 4.8341           | 4.8506 |
| 1.E+03    | 5.6421         | 5.6590 | 5.3868         | 5.6590 | 5.2058           | 5.2235 |

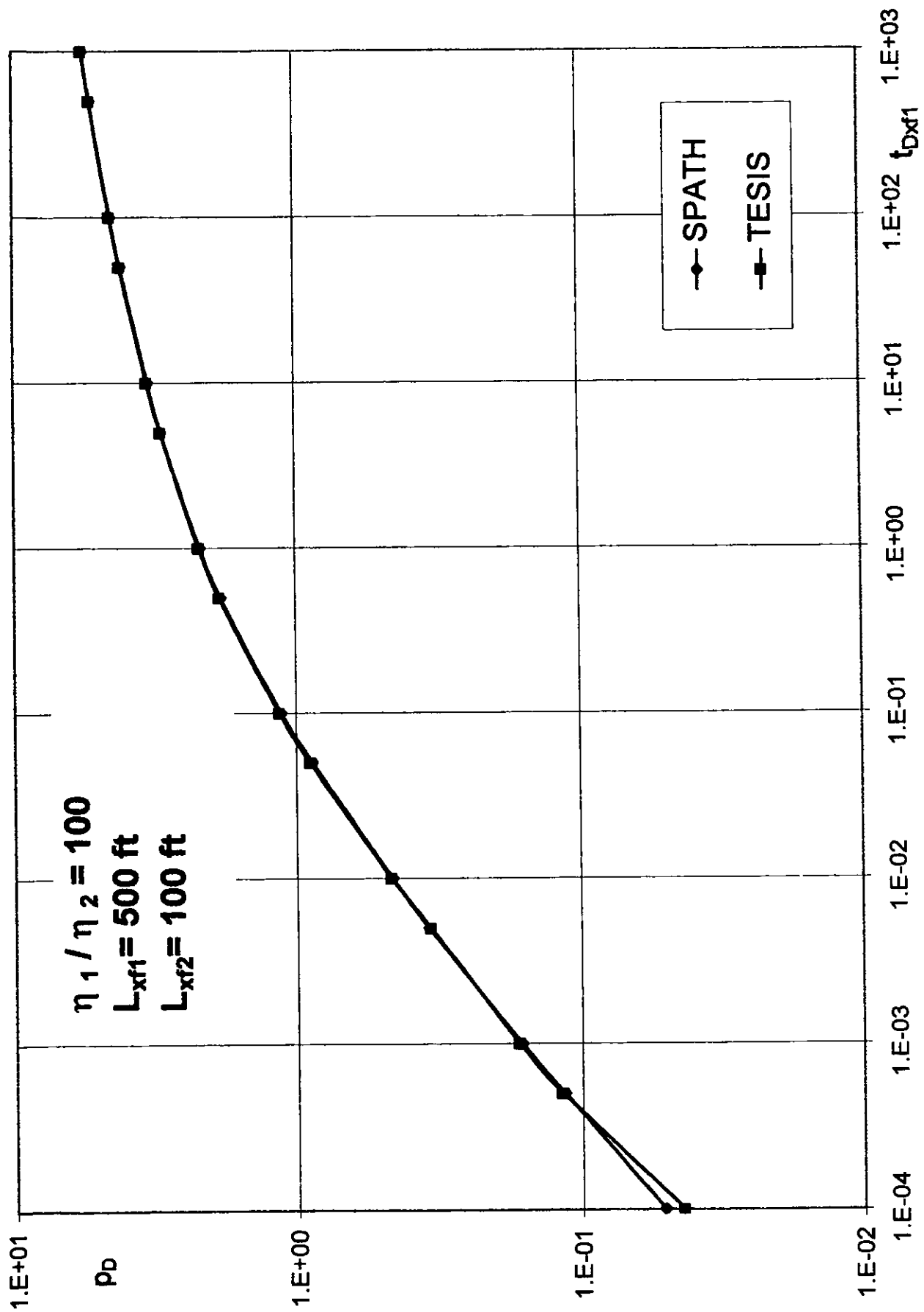


Fig. 6.13.- Gráfica comparativa para dos estratos con longitudes de fractura diferentes

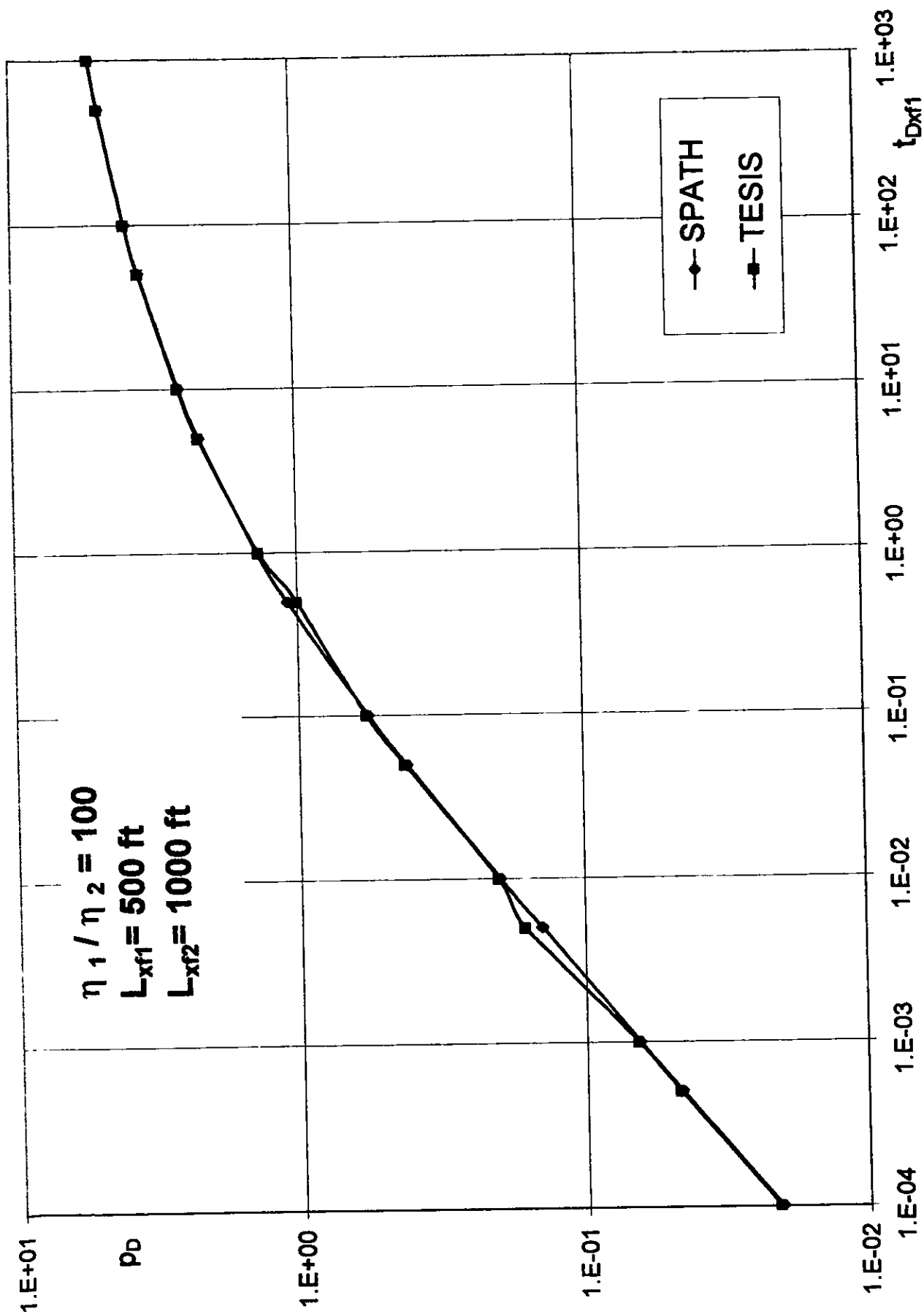


Fig. 6.14.- Gráfica comparativa para dos estratos con longitudes de fractura diferentes

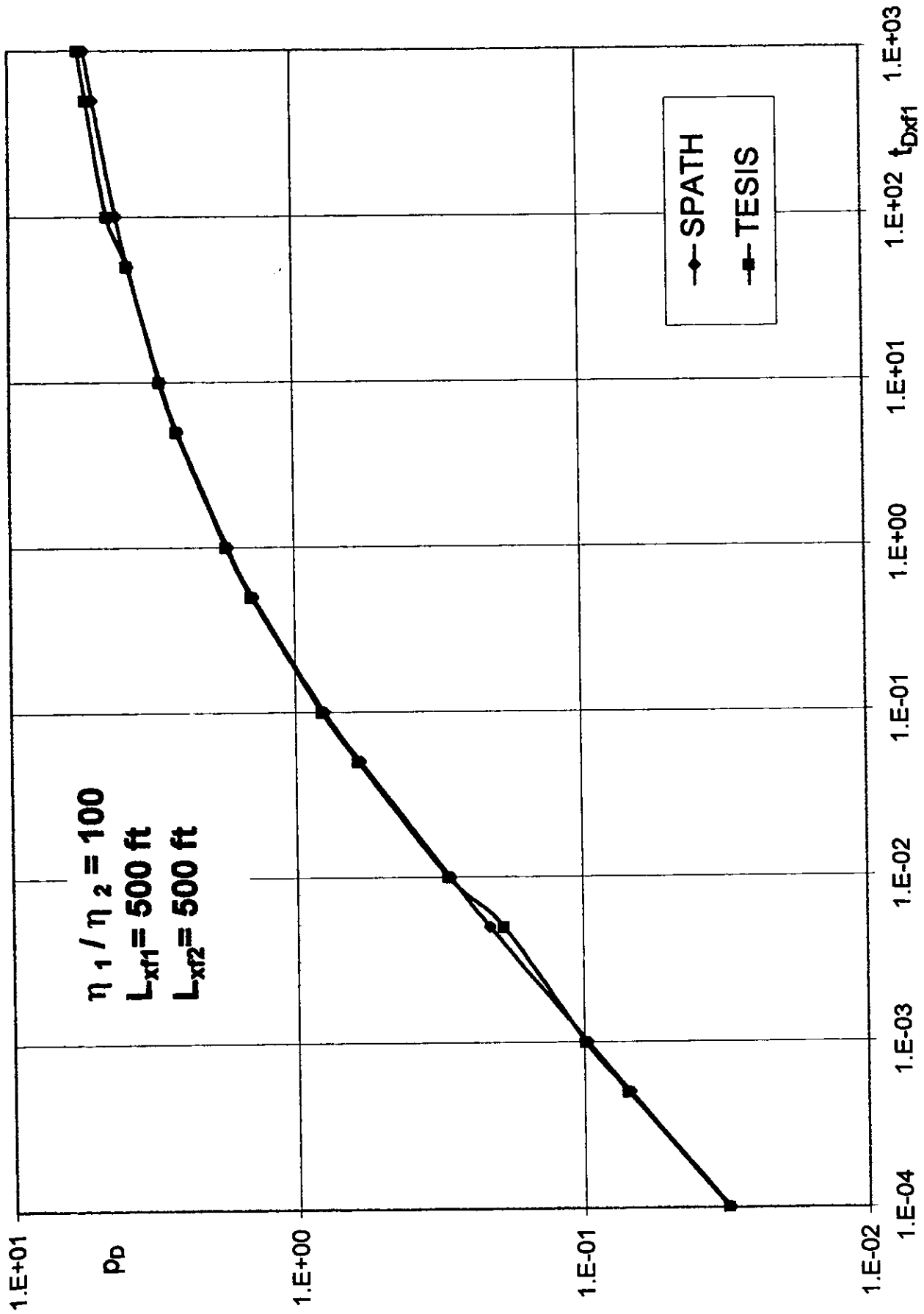


Fig. 6.15.- Gráfica comparativa para dos estratos con longitudes de fractura iguales



**TABLA 6.14**

**ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA UN YACIMIENTO CON DOS CAPAS  
HIDRÁULICAMENTE FRACTURADAS**

**LONGITUDES DE FRACTURA DIFERENTES**

$\eta_1 / \eta_2 = 0.01$

$L_{xf1} = 500$

| $t_{Dxf1}$ | $L_{xf2} = 100$ |        | $L_{xf2} = 500$ |        | $L_{xf2} = 1,000$ |        |
|------------|-----------------|--------|-----------------|--------|-------------------|--------|
|            | SPATH           | TESIS  | SPATH           | TESIS  | SPATH             | TESIS  |
| 1.E-04     | 0.0512          | 0.0516 | 0.0309          | 0.0313 | 0.0206            | 0.0084 |
| 5.E-04     | 0.1125          | 0.1140 | 0.0692          | 0.0702 | 0.0461            | 0.0467 |
| 1.E-03     | 0.1568          | 0.1593 | 0.0975          | 0.0991 | 0.0651            | 0.0661 |
| 5.E-03     | 0.3362          | 0.2782 | 0.2112          | 0.1887 | 0.1451            | 0.1192 |
| 1.E-02     | 0.4607          | 0.4682 | 0.2900          | 0.2943 | 0.2020            | 0.1996 |
| 5.E-02     | 0.9195          | 0.9353 | 0.5931          | 0.6039 | 0.4179            | 0.4244 |
| 1.E-01     | 1.2035          | 1.2235 | 0.7916          | 0.8059 | 0.5622            | 0.5726 |
| 5.E-01     | 2.0344          | 2.0540 | 1.4080          | 1.4237 | 1.0604            | 1.0750 |
| 1.E+00     | 2.4448          | 2.4689 | 1.7258          | 1.7446 | 1.3380            | 1.3551 |
| 5.E+00     | 3.5050          | 3.5278 | 2.5681          | 2.5872 | 2.0986            | 2.1166 |
| 1.E+01     | 3.9652          | 3.9860 | 2.9495          | 2.9682 | 2.4531            | 2.4712 |
| 5.E+01     | 4.9637          | 4.9810 | 3.8232          | 3.8395 | 3.2865            | 3.3025 |
| 1.E+02     | 5.3655          | 5.3840 | 4.1892          | 4.5058 | 3.6415            | 3.6587 |
| 5.E+02     | 6.2665          | 6.2833 | 5.0303          | 5.3119 | 4.4646            | 4.4805 |
| 1.E+03     | 6.6420          | 6.6599 | 5.3868          | 5.6590 | 4.8155            | 4.8326 |

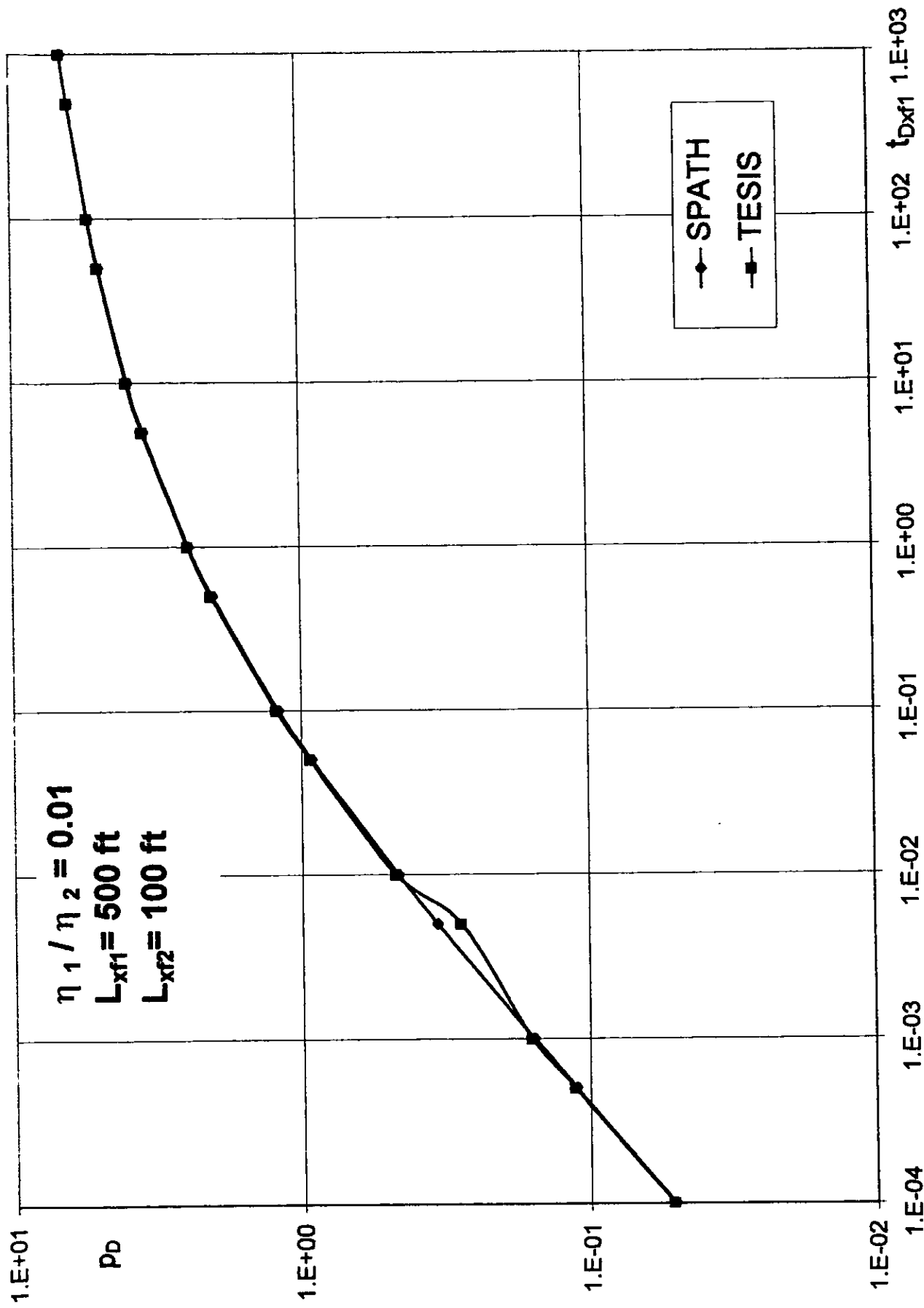


Fig. 6.16.- Gráfica comparativa para dos estratos con longitudes de fractura diferentes

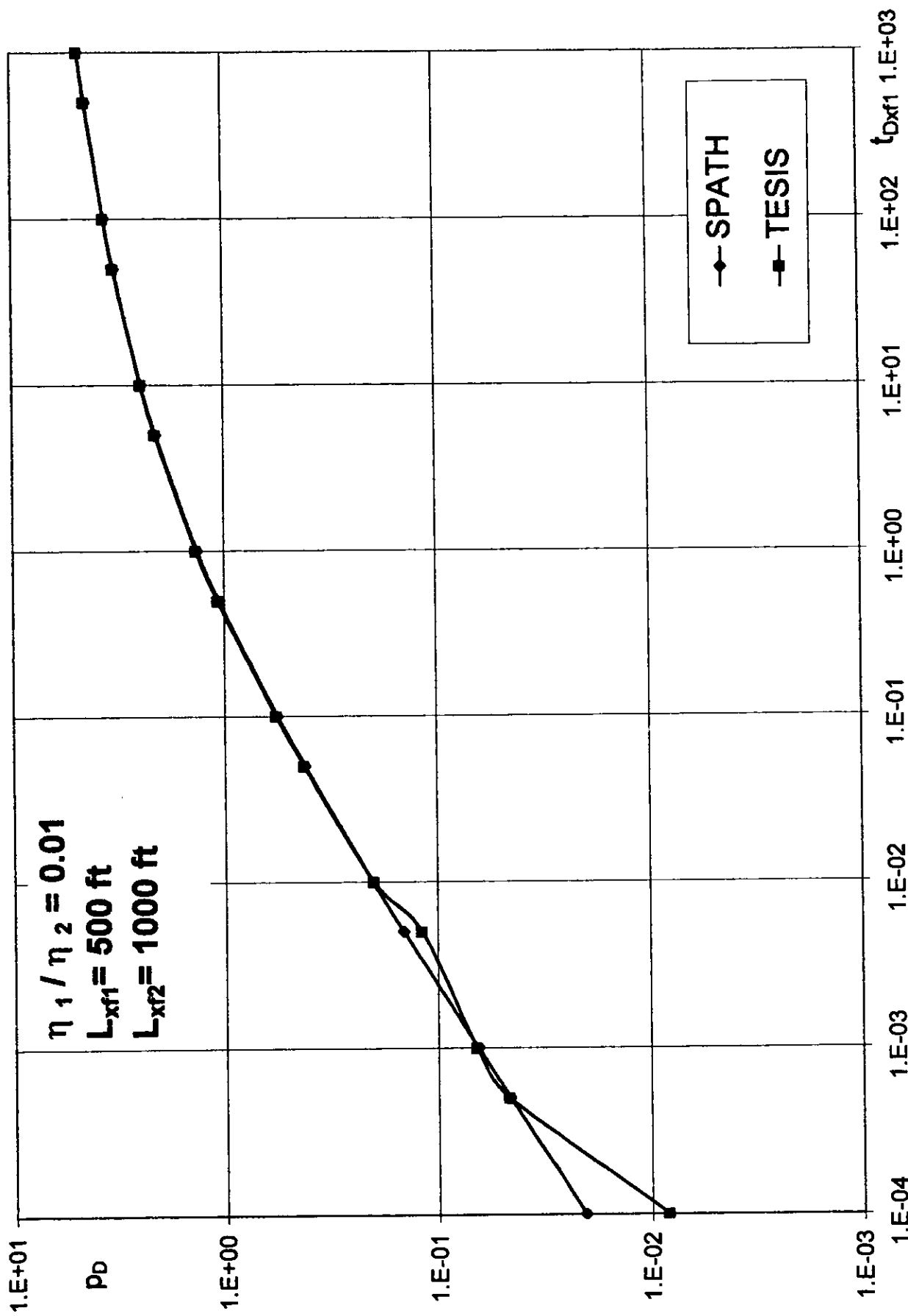


Fig. 6.17.- Gráfica comparativa para dos estratos con longitudes de fractura diferentes

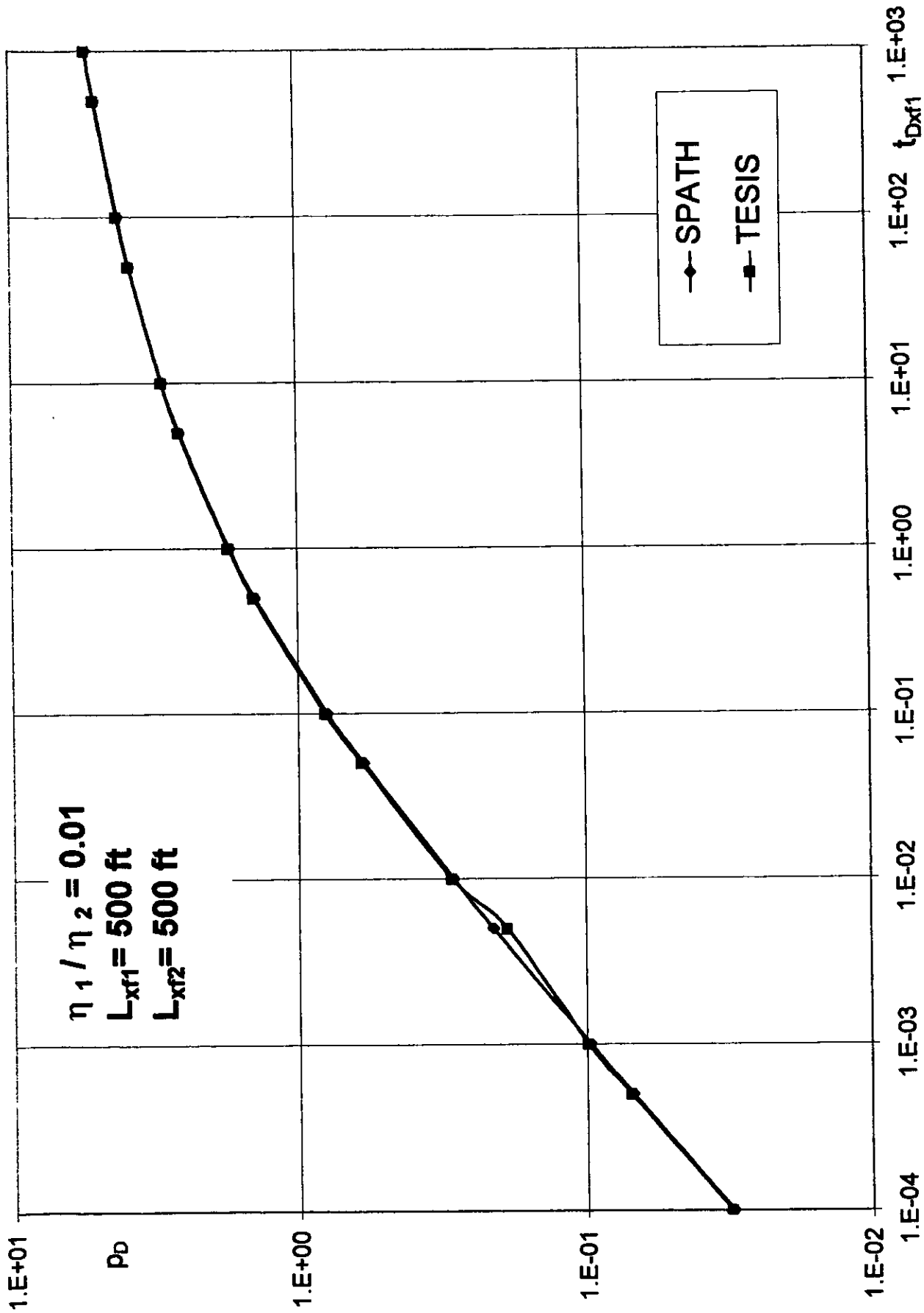


Fig. 6.18.- Gráfica comparativa para dos estratos con longitudes de fractura iguales

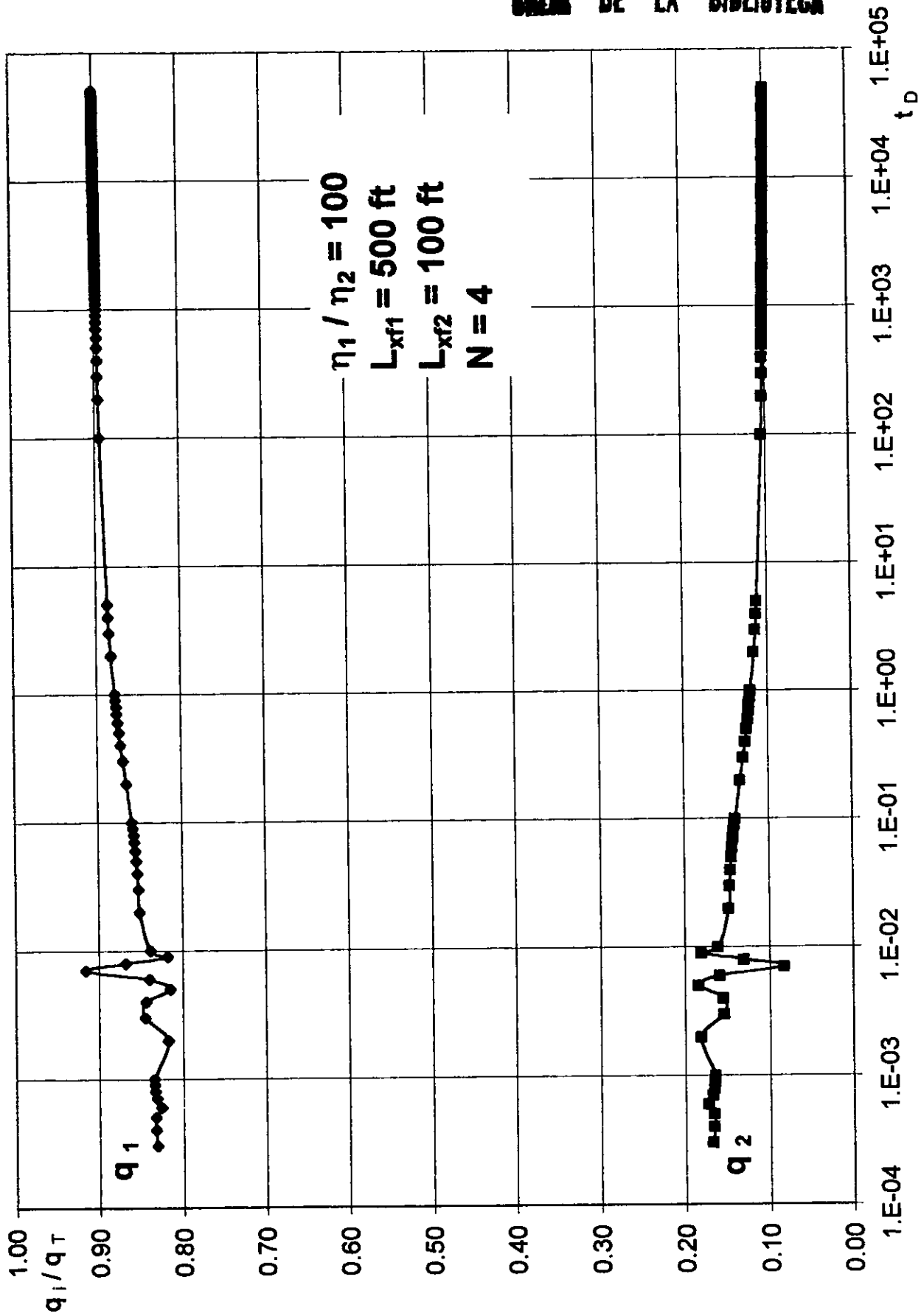


Fig. 6.19.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

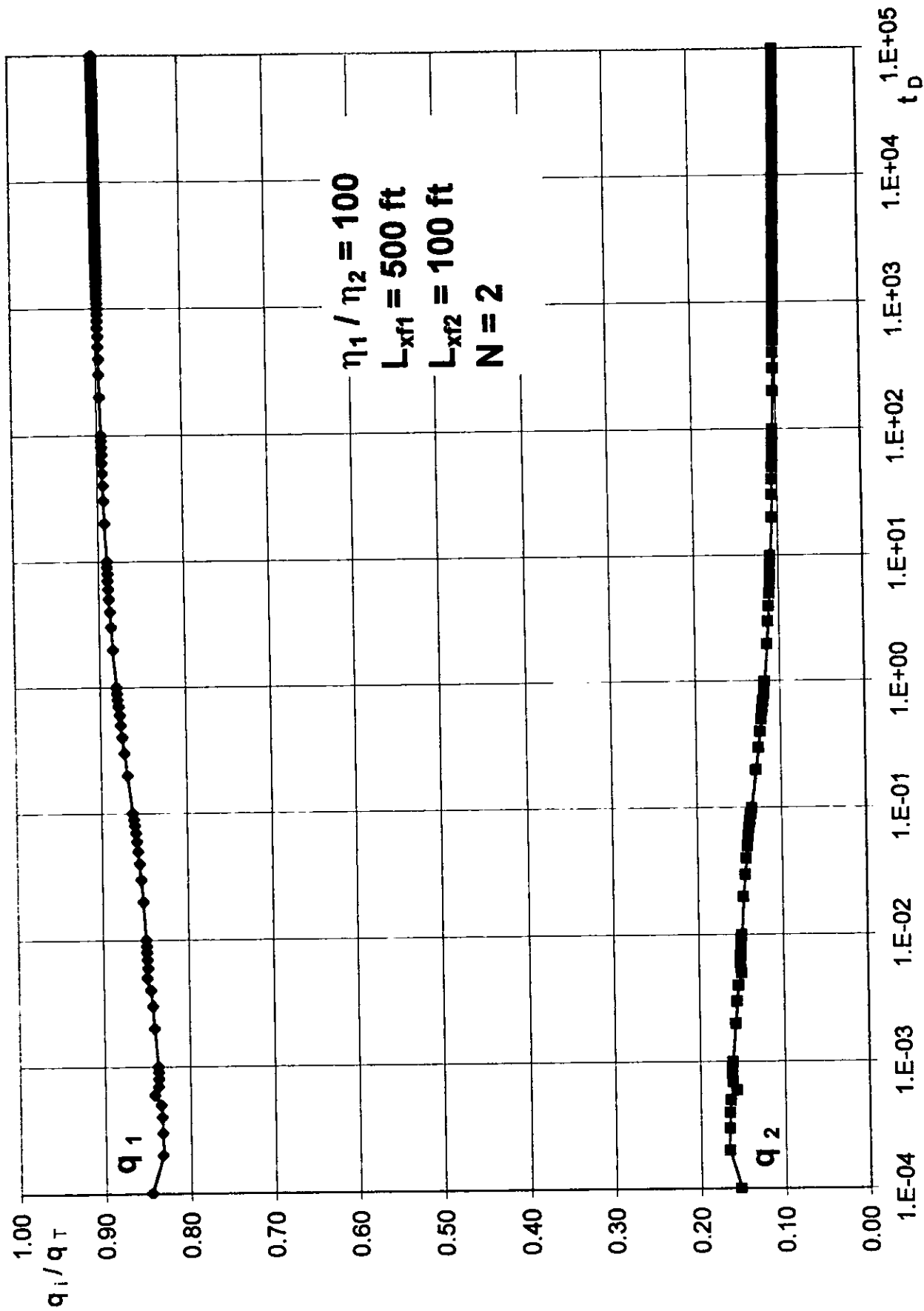


Fig. 6.20.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

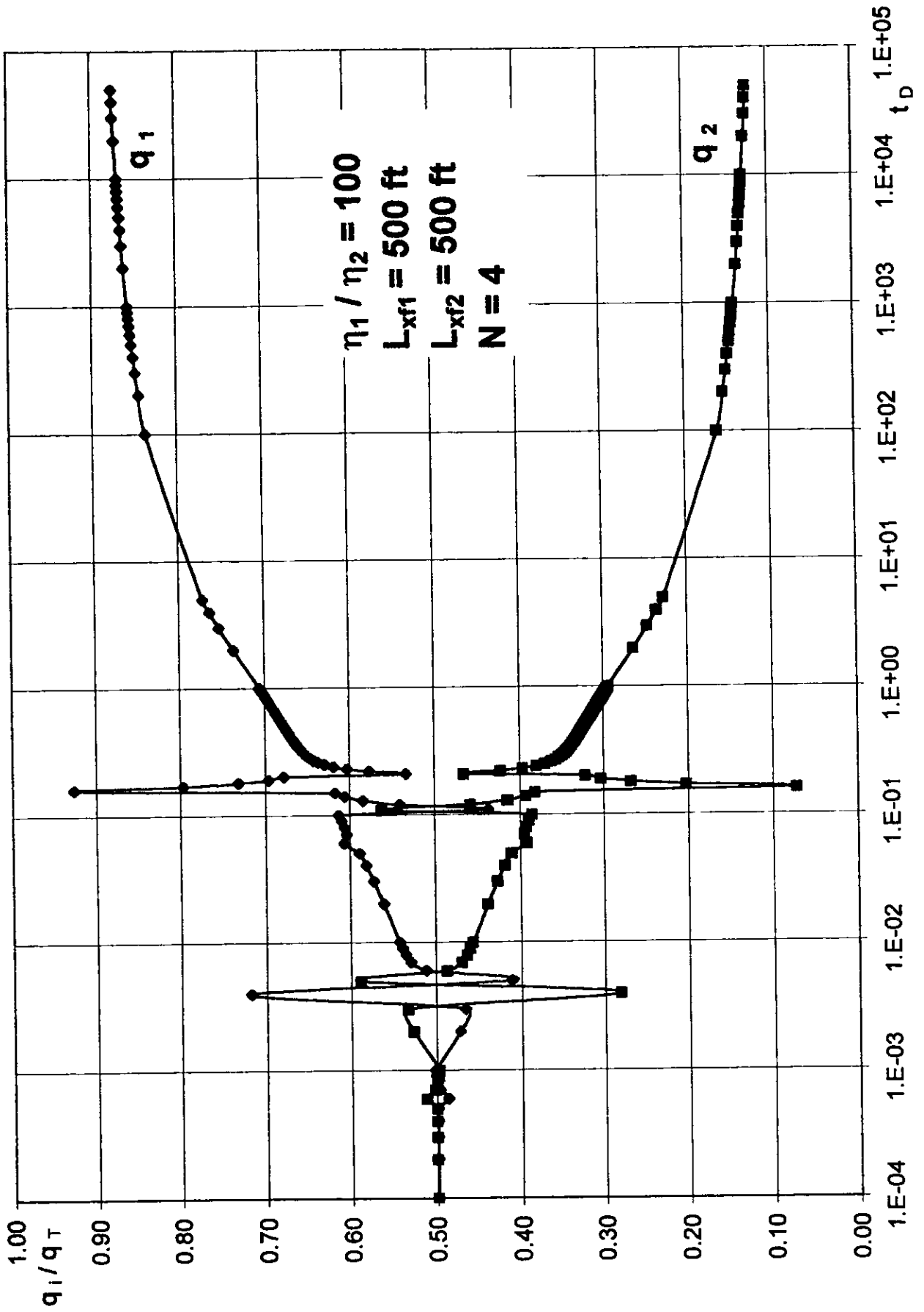


Fig. 6.21.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

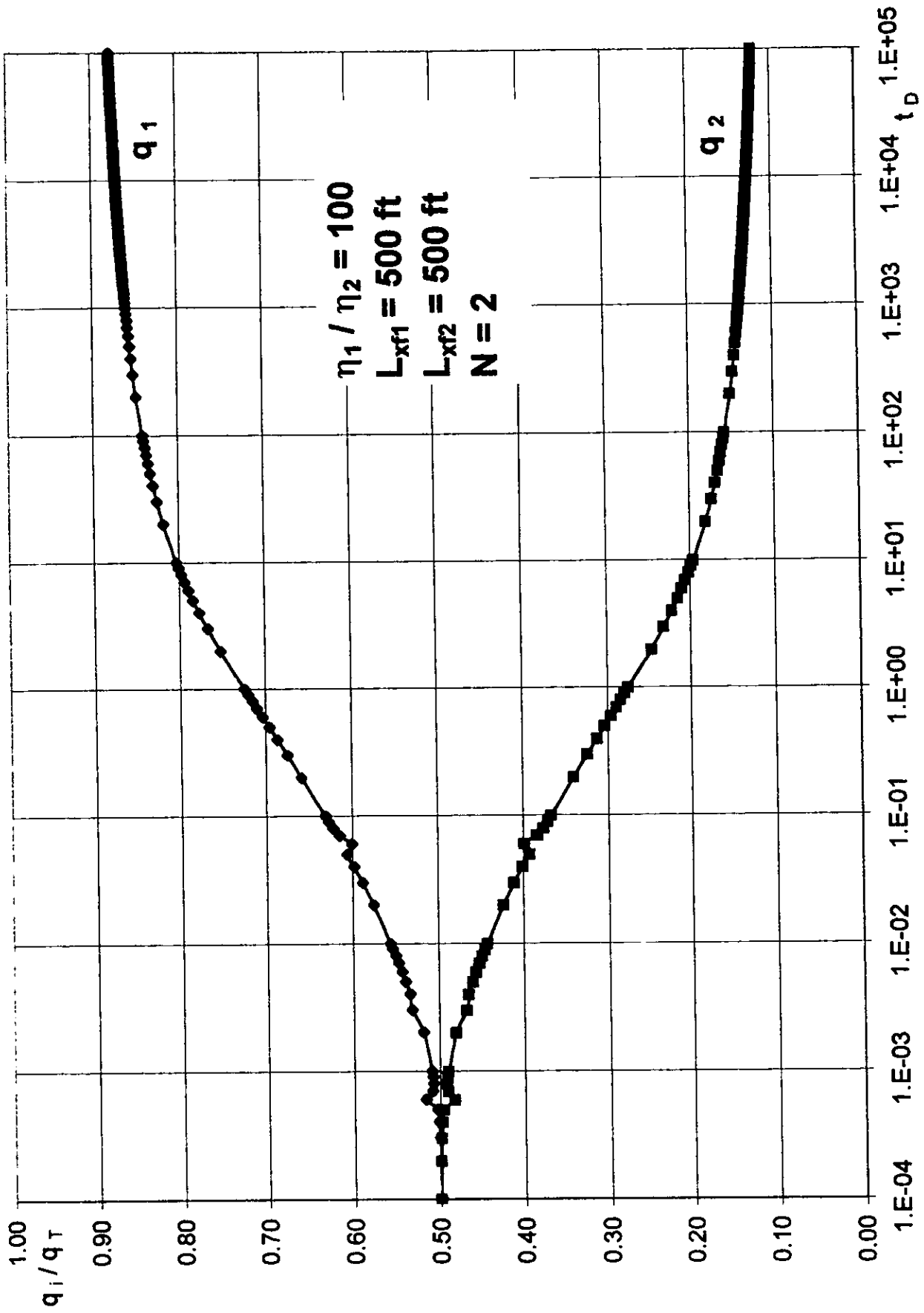


Fig. 6.22.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.



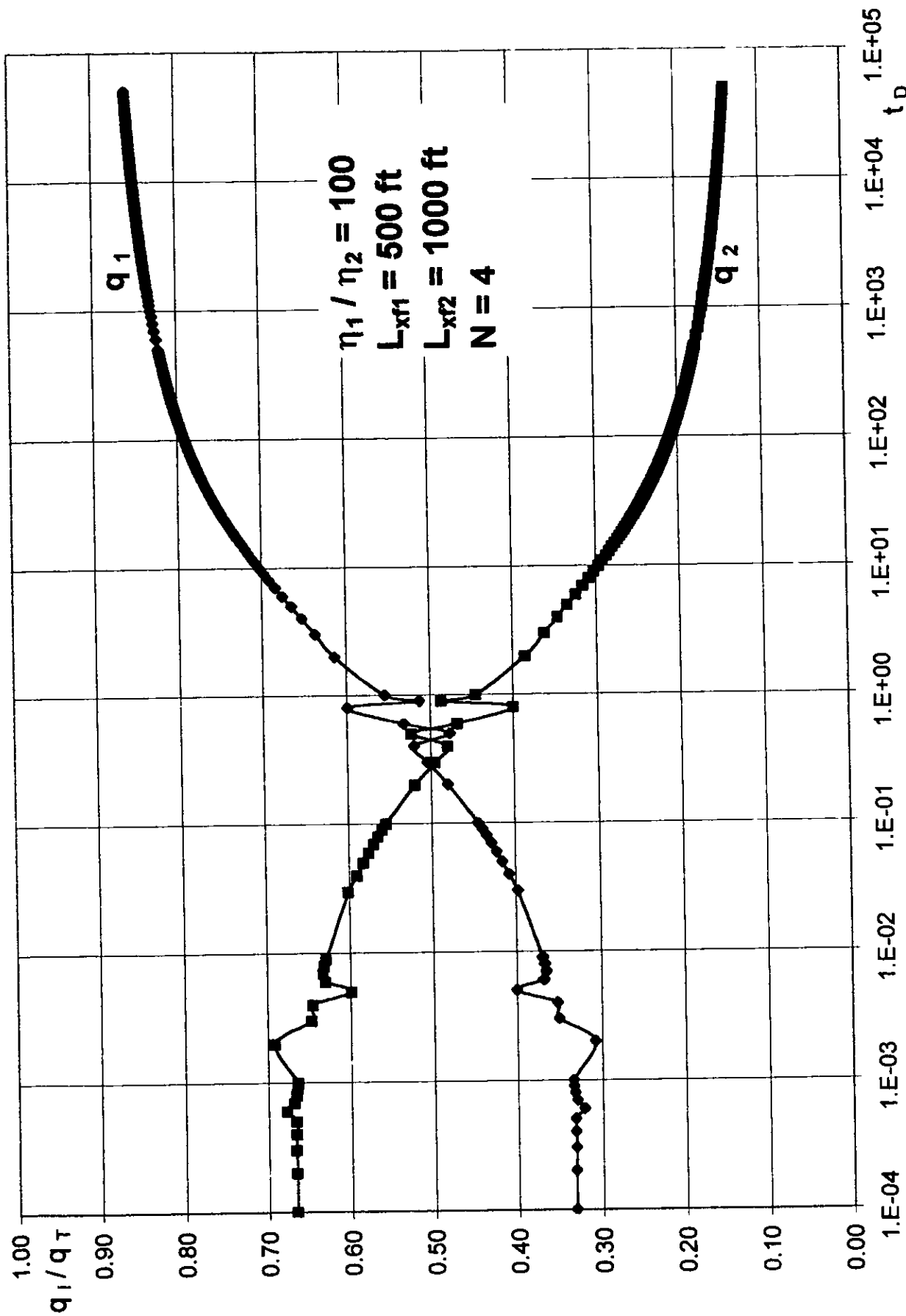


Fig. 6.23.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

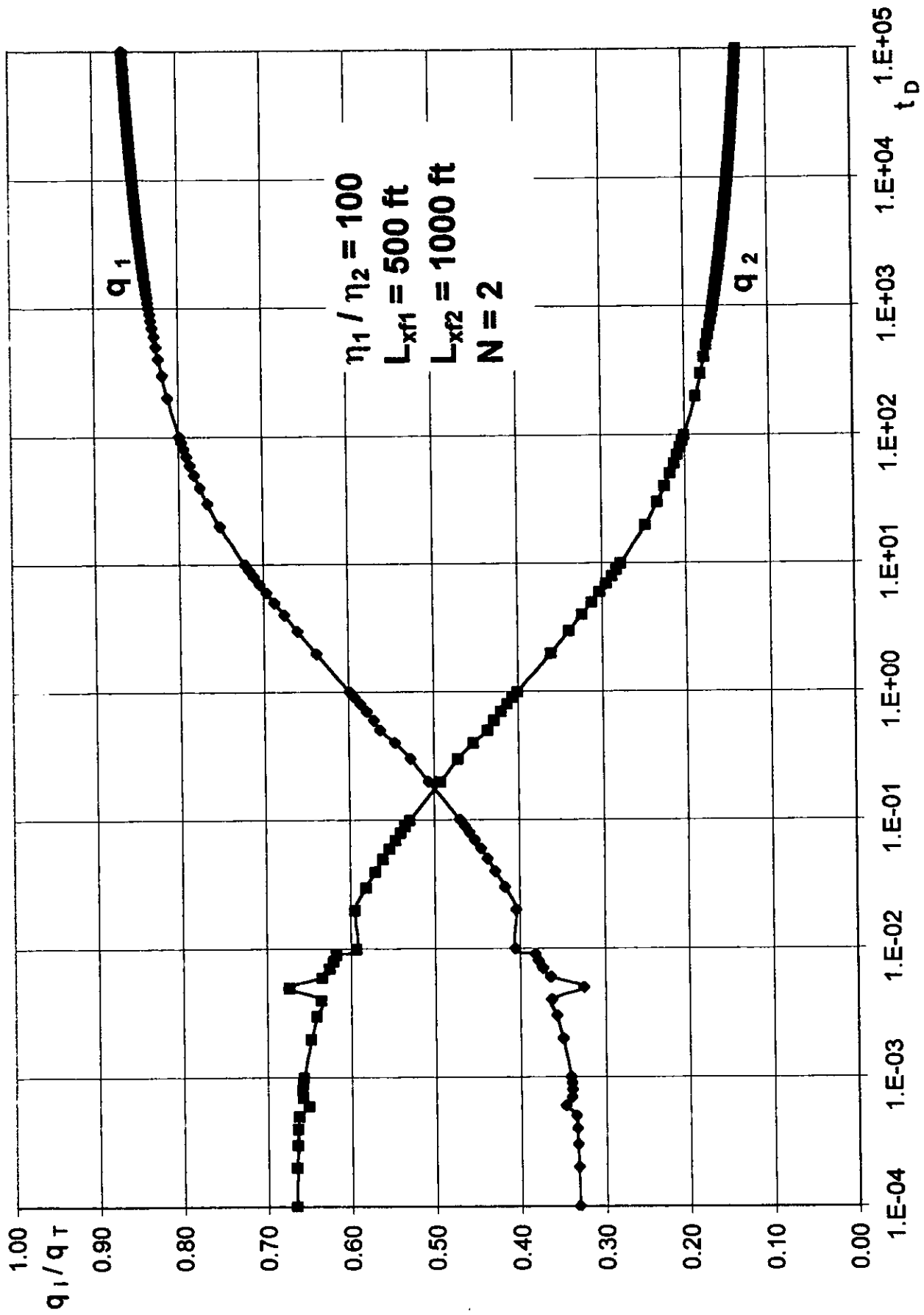


Fig. 6.24.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

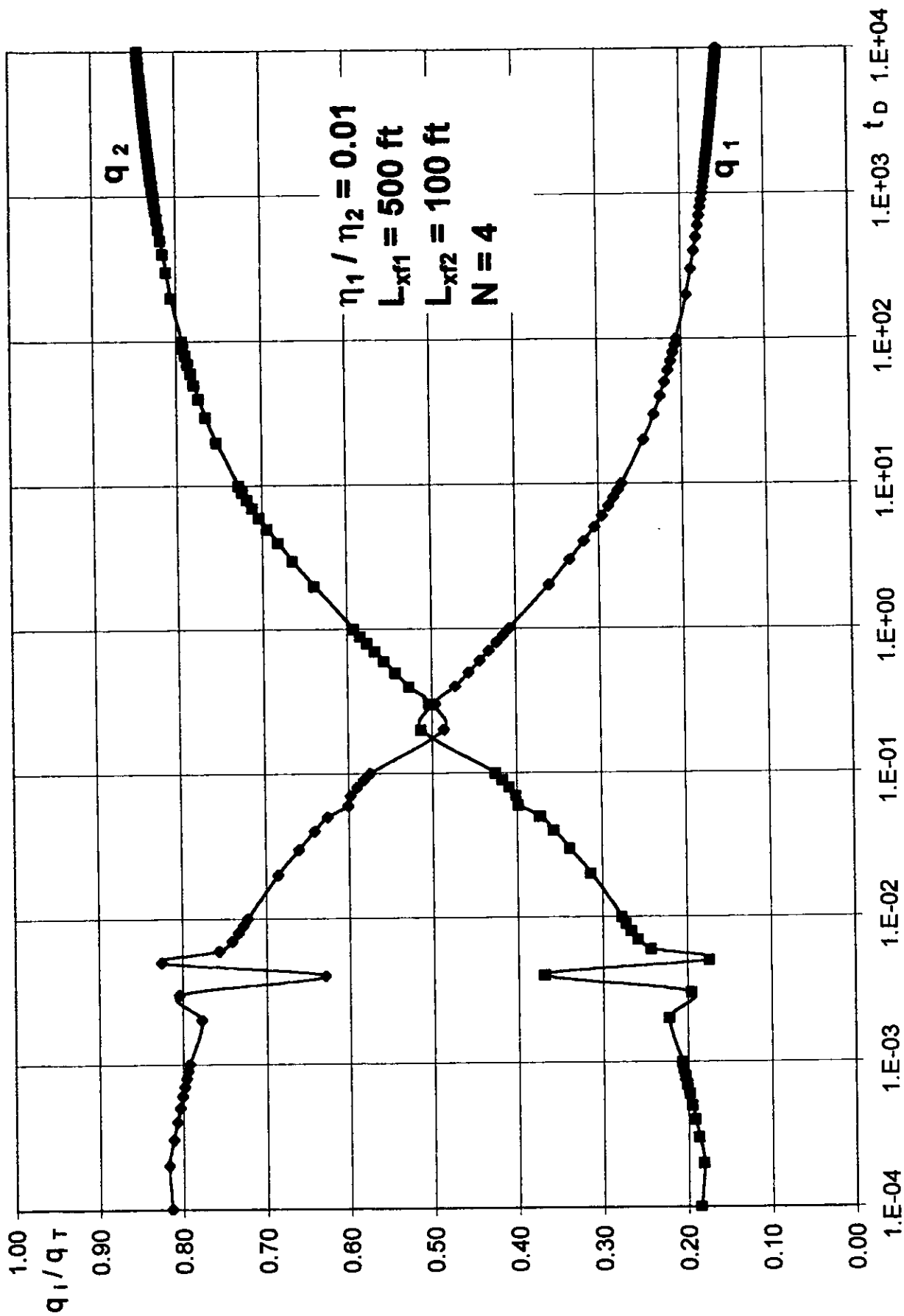


Fig. 6.25.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

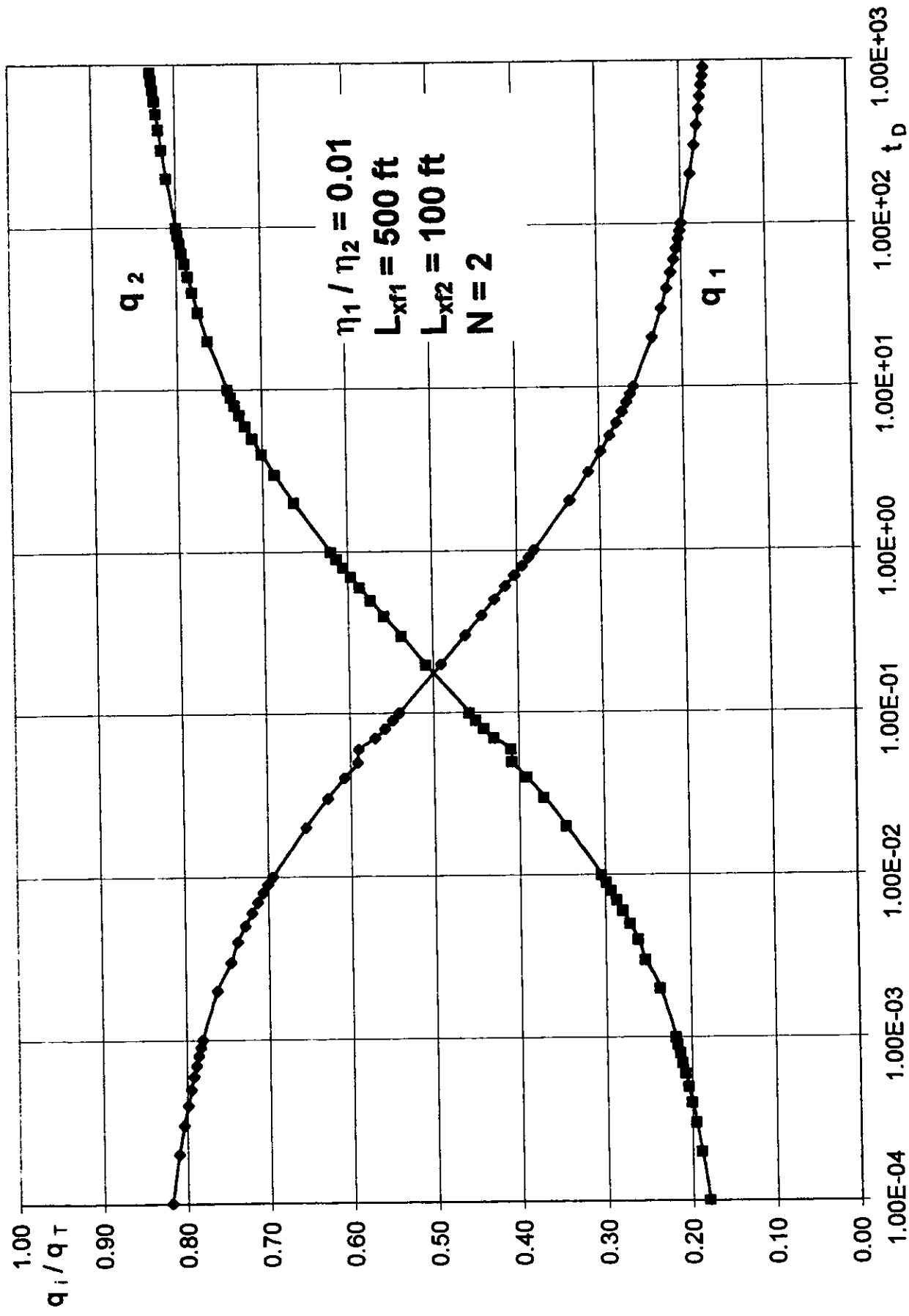


Fig. 6.26.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

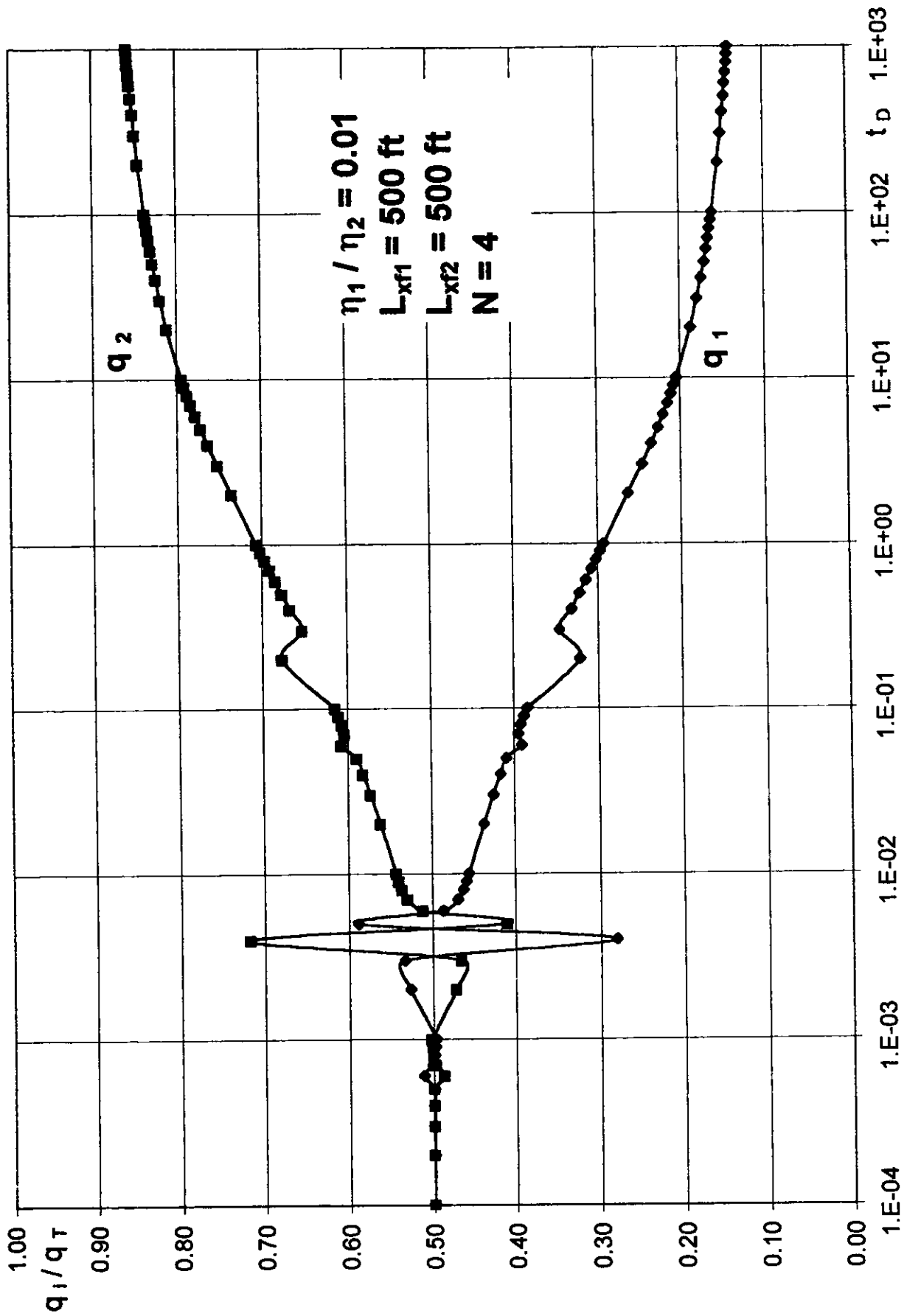


Fig. 6.27.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

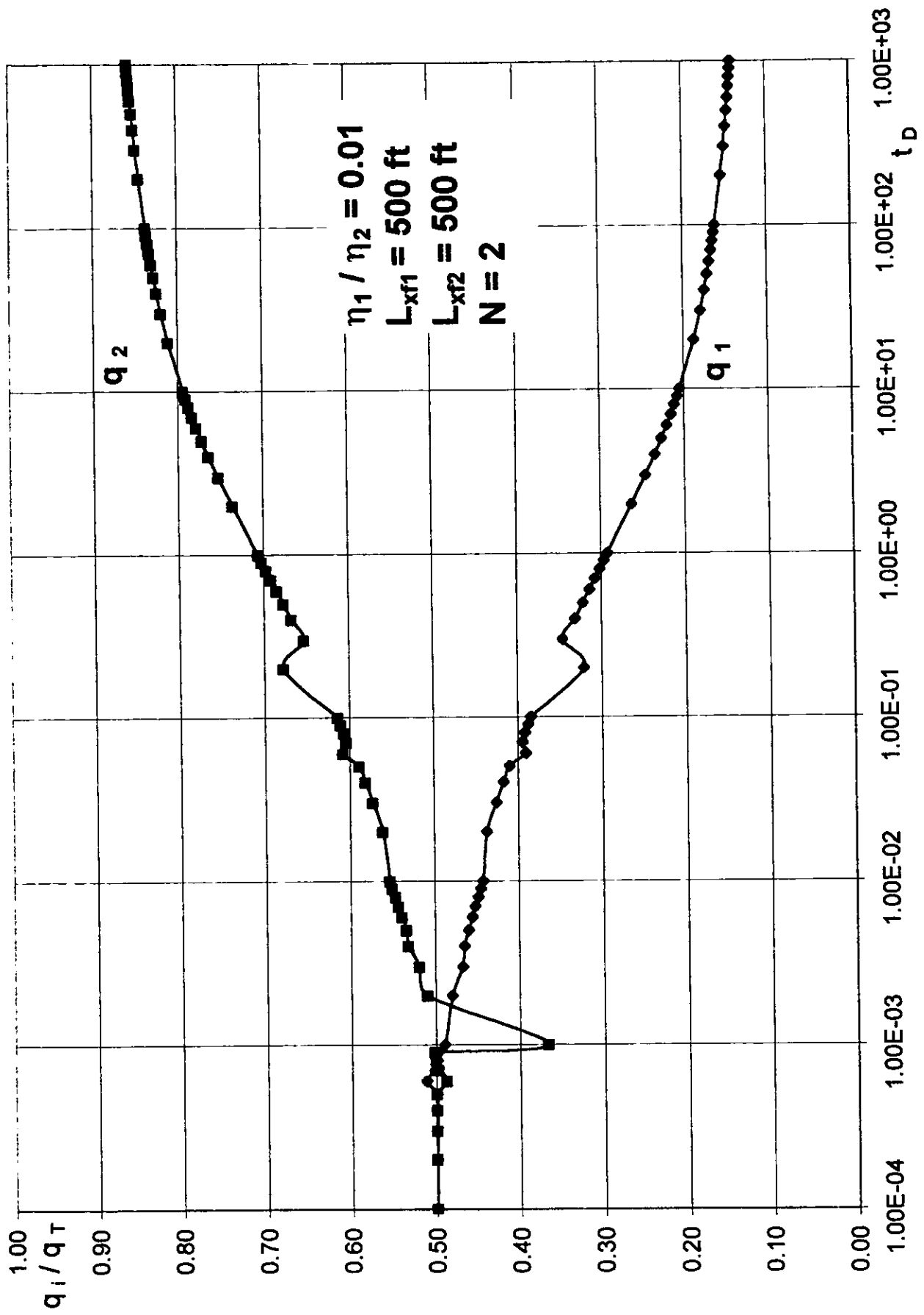


Fig. 6.28.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

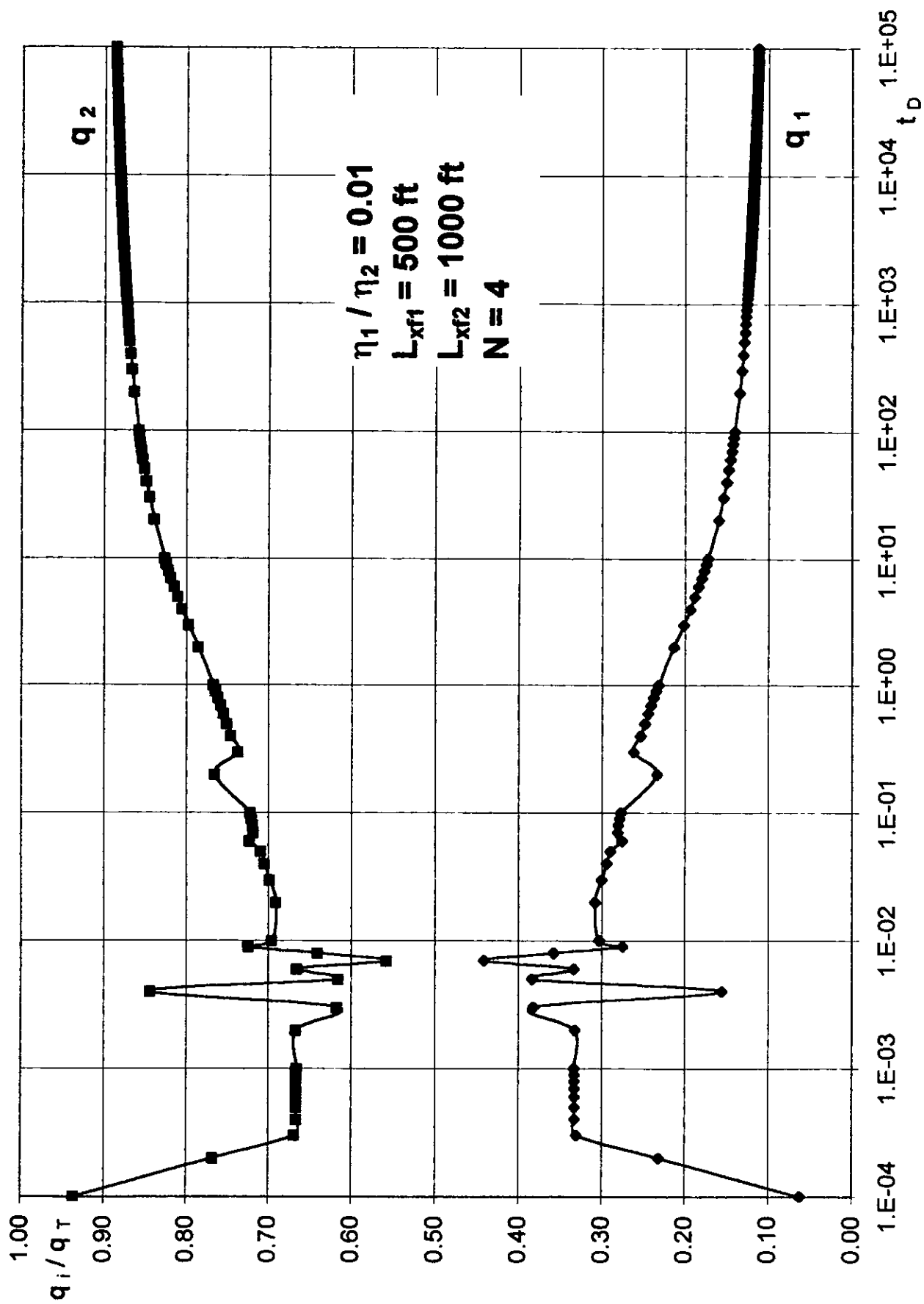


Fig. 6.29.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.

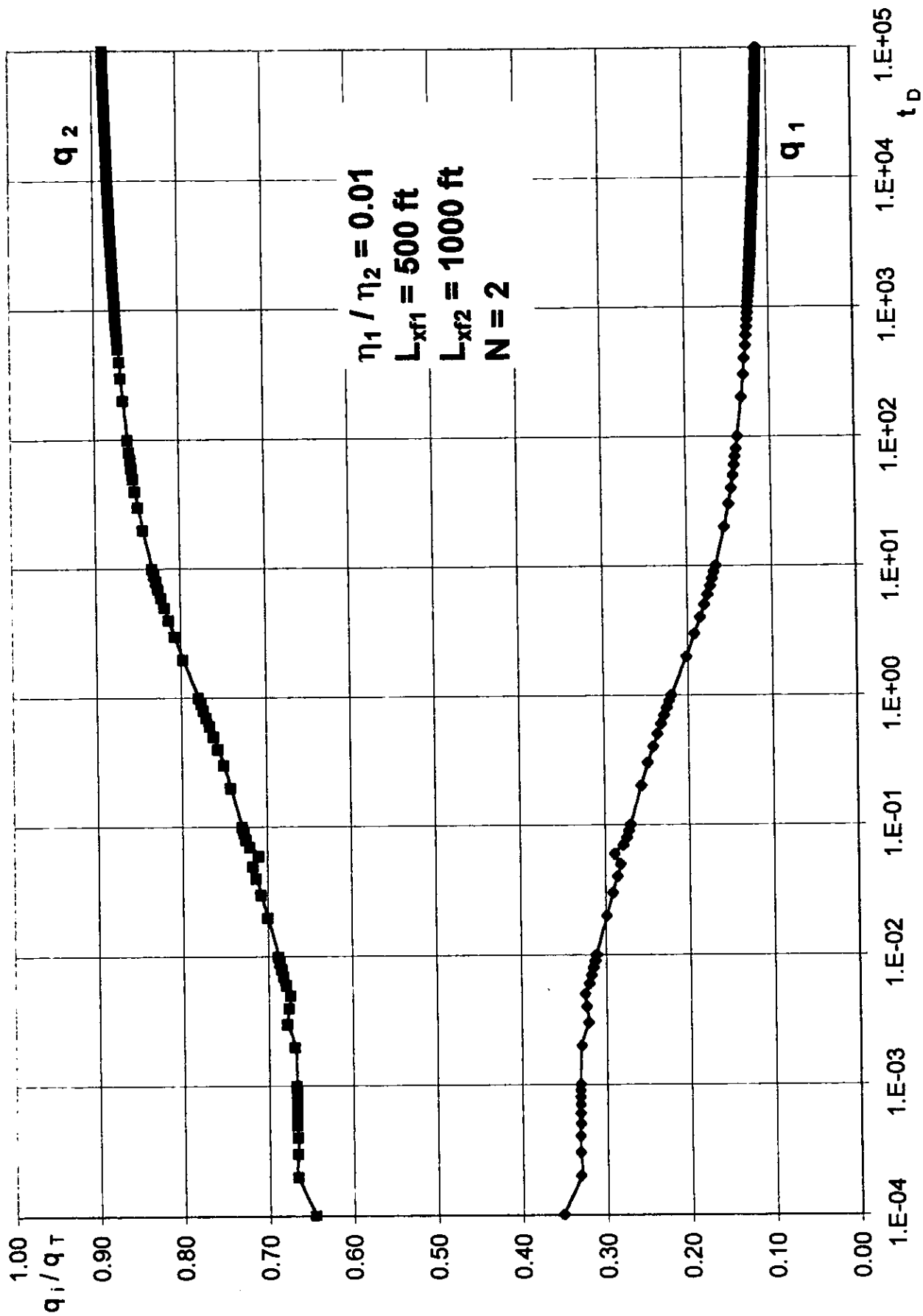


Fig. 6.30.- Gastos fraccionales para dos estratos fracturados de conductividad infinita.



## 2) Constante de Euler.

Otro parámetro analizado para fracturas de conductividad infinita fue la constante de Euler. Para estos casos, como ya se analizó en el Capítulo V, para poder determinar la respuesta de presión se utiliza una serie de expansión dentro de la cual aparece la constante de Euler ( $\gamma = 0.57721565$ ):

$$\int_0^x K_0(z) dz = -x (\ln(x/2) + \gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!) (2k+1)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!) (2k+1)^2} + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!) (2k+1)} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \quad (6.15)$$

La primera modificación realizada a la constante fue en relación a las milésimas, trabajando con un valor de 0.57221565. Utilizando diferentes valores de "x" siempre menores que 20 (hay que recordar que la serie se utiliza para  $x < 20$ ), nunca se pudo lograr que las sumatorias convergieran, obteniéndose en todos los casos resultados incongruentes, muy disparados de los valores esperados, los cuales deben tender a  $\pi/2$  conforme el valor de "x" se aproxima a 20. Se cambió nuevamente la constante dejándola ahora en 0.57521565 y realizando los cálculos nuevamente para diferentes valores de "x", sin embargo los resultados fueron los mismos que los anteriores. Se efectuaron más cambios (0.57711565, 0.57731565, 0.57725565, y así sucesivamente) resultando siempre divergentes los valores de las sumatorias, sin lograrse de esta manera calcular la respuesta de presión del sistema.

Con base en lo anterior, es recomendable trabajar siempre con el máximo posible de decimales que forman la constante de Euler.

### 6.3.- OPTIMIZACIÓN

Una vez elaborado el simulador con el que se determina la respuesta de un sistema estratificado, se procedió a buscar un algoritmo de optimización que se pudiera adaptar a este simulador y que a la vez fuera sumamente confiable y poderoso. El objetivo fundamental era que con la respuesta de presión total del sistema y con algunos valores conocidos de una o varias capas, se pudieran determinar con precisión el resto de las propiedades desconocidas en esas capas.

El primer optimizador utilizado fue el llamado FMIN<sup>38</sup>. Este optimizador realiza un proceso de minimización ( el cual obviamente tiene que ser iterativo ) de acuerdo a la función que se le proporciona, dentro de una tolerancia fijada de antemano. Es un algoritmo sumamente sencillo donde se requiere un mínimo de valores de entrada, como son los límites inferior y superior de la variable desconocida así como la tolerancia permitida al resultado, los cuales son adicionales a los ya solicitados de antemano por el simulador. La única limitante que se tiene es que se obtienen resultados para una sola incógnita, es decir, sólo se puede determinar una propiedad específica de alguna capa.

La función utilizada para realizar la optimización es la siguiente:

$$F = \sum_{i=1}^n (p_{Dri} - p_{Dci})^2 \quad (6.16)$$

donde:

$p_{Dr}$  : Respuesta de presión adimensional real.

$p_{Dc}$  : Respuesta de presión adimensional calculada.

La expresión anterior es la de una función donde se minimiza el error por mínimos cuadrados. Cuando el valor de la función sea igual a cero o muy cercano a él, de acuerdo a la tolerancia que se necesite, entonces se tendrá la raíz de la misma, esto es, el valor de la incógnita.

En la Tabla 6.15 se observan los resultados obtenidos para algunas de las variables seleccionadas. Como se puede apreciar, la precisión de los resultados es excelente.

El segundo optimizador utilizado, llamado COMPLEX<sup>39</sup>, es un algoritmo que encuentra el máximo ( lo inverso de FMIN ) de una función multivariable no lineal, la cual se encuentra sujeta a restricciones de desigualdades no lineales. Esto quiere decir que se pueden conocer los valores de más de una incógnita; asimismo, es un algoritmo más robusto por el simple hecho de poder manejar restricciones implícitas o explícitas para las incógnitas.

Otros algoritmos de optimización pueden ser más eficientes si se tienen restricciones lineales o restricciones de igualdad.

El algoritmo COMPLEX maneja una serie de parámetros de entrada, los cuales se muestran a continuación, que se encuentran definidos dentro de un rango específico cada uno, y cuyos valores numéricos son proporcionados por el usuario:

**TABLA 6.15**  
**OPTIMIZADOR FMIN**

**PRIMER JUEGO DE VALORES REALES:**

|             |              |               |                |                             |                    |                |
|-------------|--------------|---------------|----------------|-----------------------------|--------------------|----------------|
| $s_1 = 7.0$ | $k_1 = 10.0$ | $h_1 = 100.0$ | $\phi_1 = 0.1$ | $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$ | $r_{eD1} = 2000.0$ | $r_{D1} = 1.0$ |
| $s_2 = 3.0$ | $k_2 = 1.0$  | $h_2 = 100.0$ | $\phi_2 = 0.1$ | $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$ | $r_{eD2} = 2000.0$ | $r_{D2} = 1.0$ |

| <u>INCÓGNITA</u> | <u>VALOR CALCULADO</u> |
|------------------|------------------------|
| $k_1$            | 9.999                  |
| $k_2$            | 1.000                  |
| $h_1$            | 99.999                 |
| $h_2$            | 100.000                |
| $\phi_1$         | 0.099                  |
| $\phi_2$         | 0.100                  |

**SEGUNDO JUEGO DE VALORES REALES:**

|              |              |               |                 |                             |                    |                |
|--------------|--------------|---------------|-----------------|-----------------------------|--------------------|----------------|
| $s_1 = 10.0$ | $k_1 = 28.0$ | $h_1 = 200.0$ | $\phi_1 = 0.40$ | $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$ | $r_{eD1} = 3500.0$ | $r_{D1} = 1.0$ |
| $s_2 = 1.0$  | $k_2 = 7.0$  | $h_2 = 70.0$  | $\phi_2 = 0.16$ | $c_{T2} = 2 \times 10^{-6}$ | $r_{eD2} = 1000.0$ | $r_{D2} = 1.0$ |

| <u>INCÓGNITA</u> | <u>VALOR CALCULADO</u> |
|------------------|------------------------|
| $k_1$            | 28.000                 |
| $k_2$            | 6.999                  |
| $h_1$            | 200.000                |
| $h_2$            | 69.999                 |
| $\phi_1$         | 0.400                  |
| $\phi_2$         | 0.159                  |

**K** : número de puntos de búsqueda del máximo.

$\alpha$  : factor de reflexión.

$\beta$  y  $\gamma$  : parámetros de convergencia.

**ITMAX** : número máximo de iteraciones.

Estos parámetros fijan los puntos esenciales del algoritmo, de tal manera que la selección correcta de estos parámetros define la calidad de los resultados a obtener. En la literatura se recomiendan algunos valores supuestamente óptimos para algunos de estos parámetros como son:

$$\alpha = 1.3$$

$$\beta = \text{alrededor de } 10^{-4}$$

$$\gamma = 5$$

Las diferentes pruebas realizadas indican que los valores anteriores dependen del tipo de función a optimizar. Se realizaron muchas corridas para los casos de una y dos incógnitas hasta que se escogió un juego de valores con los cuales se obtuvieron los mejores resultados, esto es, los valores reales de las variables. Los valores óptimos obtenidos fueron:

$$\alpha = 1.0$$

$$\beta = 10^{-7}$$

$$\gamma = 5$$

En lo que respecta al número de iteraciones, es un parámetro totalmente variable para cada caso que se analice.

Como se mencionó líneas arriba, éste algoritmo es un maximizador por lo que la función que se le proporcionó fue la inversa de la trabajada con FMIN:

$$F = 1 / \sum_{i=1}^n (p_{Dri} - p_{Dci})^2 \quad (6.17)$$

Asímismo, a diferencia de FMIN, éste algoritmo requiere que se le proporcionen valores iniciales supuestos a cada incógnita para poder iniciar los cálculos.

En la Tabla 6.16 se presentan los resultados obtenidos con este algoritmo considerando dos estratos homogéneos cerrados, para el caso de tener una sola incógnita la cual, como se puede observar, no siempre fue la misma. Para el primer arreglo de valores siempre se inició con un valor supuesto de la incógnita igual a 1.0, mientras que para el segundo arreglo se inició con diferentes valores para cada caso. Para una incógnita se puede concluir que los resultados son excelentes.

Para el caso de dos incógnitas se presentaron algunas situaciones especiales que requirieron un análisis más detallado.

**TABLA 6.16**  
**OPTIMIZADOR COMPLEX**

**PRIMER JUEGO DE VALORES REALES:**

$s_1 = 7.0$        $k_1 = 50.0$        $h_1 = 100.0$        $\phi_1 = 0.1$        $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD1} = 2000.0$        $r_{D1} = 1.0$   
 $s_2 = 3.0$        $k_2 = 1.0$        $h_2 = 100.0$        $\phi_2 = 0.1$        $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD2} = 2000.0$        $r_{D2} = 1.0$

| <u>INCÓGNITA</u> | <u>VALOR INICIAL DE SIMULACIÓN</u> | <u>VALOR CALCULADO</u> |
|------------------|------------------------------------|------------------------|
| $k_1$            | 1.00                               | 50.00                  |
| $k_2$            | 1.00                               | 1.00                   |
| $h_1$            | 1.00                               | 100.00                 |
| $h_2$            | 1.00                               | 100.00                 |
| $\phi_1$         | 0.10                               | 0.10                   |
| $\phi_2$         | 0.10                               | 0.10                   |

**SEGUNDO JUEGO DE VALORES REALES:**

$s_1 = 7.0$        $k_1 = 50.0$        $h_1 = 100.0$        $\phi_1 = 0.1$        $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD1} = 2000.0$        $r_{D1} = 1.0$   
 $s_2 = 3.0$        $k_2 = 1.0$        $h_2 = 100.0$        $\phi_2 = 0.1$        $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD2} = 2000.0$        $r_{D2} = 1.0$

| <u>INCÓGNITA</u> | <u>VALOR INICIAL DE SIMULACIÓN</u> | <u>VALOR CALCULADO</u> |
|------------------|------------------------------------|------------------------|
| $k_1$            | 10.00                              | 49.99                  |
| $k_2$            | 10.00                              | 1.00                   |
| $h_1$            | 50.00                              | 100.00                 |
| $h_2$            | 30.00                              | 99.99                  |
| $\phi_1$         | 0.50                               | 0.099                  |
| $\phi_2$         | 0.70                               | 0.099                  |

Como primer punto los resultados obtenidos presentaron un porcentaje mayor de desviación con respecto a los valores reales de las incógnitas. En el caso en que se trabajó con dos variables del mismo género como incógnitas ( permeabilidad de dos capas, porosidad de dos capas, etc. ), el resultado fue prácticamente el mismo, es decir, se llegó a valores muy cercanos a los reales, pero su comportamiento era asintótico, ya no mejoraban sin importar que se cambiaran los valores reales de las incógnitas, que se incrementara el número de iteraciones a realizar o que se modificaran los valores iniciales necesarios para comenzar el cálculo. En el caso en que las variables fueron diferentes ( porosidad y permeabilidad por ejemplo ), los resultados mejoraron al incrementarse el número de iteraciones a realizar, alcanzándose inclusive los valores reales; de igual manera mejoraron al emplearse valores iniciales supuestos más cercanos a los reales ( los cuales se conocen para estos ejemplos hipotéticos ). Todo lo anterior se puede apreciar mejor en la Tabla 6.17.

Posteriormente se modificaron los valores iniciales supuestos para las incógnitas, observándose que cuando éstas eran del mismo género ( nuevamente ) los resultados obtenidos eran diferentes, pero no en todos los casos, esto es, mientras los valores iniciales se cambiaran cayendo siempre dentro una cierta zona en especial los resultados tendían a ser los mismos, pero si estos valores salían de esa zona los resultados eran diferentes. Con ayuda de la Tabla 6.18 se puede entender mejor lo anteriormente explicado. Para valores iniciales de 1.0 en las dos incógnitas ( permeabilidades de ambas capas ), los valores calculados tienden a 12.31 md y 18.46 md respectivamente, conforme se incrementa el número de iteraciones; manteniendo constante este último valor en 200, al cambiar los valores iniciales a 5.0 para ambas permeabilidades, los resultados son 7.13 y 10.69; al cambiar a 10.0 también cambian



los resultados, y así sucesivamente. Esto pareciera indicar que el optimizador encuentra varios máximos. Sin embargo, cuando las variables son de diferente género no se presenta esta anomalía ( como puede apreciarse en la misma tabla ). Es decir, se obtienen valores calculados muy cercanos a los reales.

El comportamiento anterior indicó que existían ciertas irregularidades cuando se pretendían conocer dos propiedades del mismo género. Por tal motivo se procedió a graficar estos comportamientos. Primero se elaboró un programa para calcular la función para diferentes valores de las dos incógnitas. Los valores asignados a las incógnitas correspondían a los espaciamientos de malla ( eje X y Y ) que se quisieran tener al generar las superficies. Para esto se elaboró un programa de cómputo en FORTRAN que proporciona los valores de las dos incógnitas y la función de manera tabular. Trasladando éste archivo de datos al paquete SURFER se generaron las superficies, utilizando como método de interpolación el llamado " Distancia Inversa a una Potencia ". El método " Kriging " también generó de manera correcta las superficies, pero la definición fue mejor en el mencionado primeramente. Los otros métodos de interpolación del paquete no resultaron de mucha utilidad por los tipos de superficies generadas.

La primera superficie generada ( Figura 6.31 ) fue para las permeabilidades de dos capas, de acuerdo al primer juego de valores de la Tabla 6.18 ( dos estratos homogéneos cerrados ). Se utilizó el mismo espaciamiento de malla para los ejes X y Y: 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, 6.4, 12.8, 25.6, 51.2 y 102.4. En dicha superficie se puede observar que se generan una serie de máximos absolutos, los cuales se encuentran alineados. La Figura 6.32 es una representación en planta de la superficie anterior, y en ella se pueden justificar los resultados obtenidos en la Tabla 6.18 para el caso de las

permeabilidades con 200 iteraciones. El máximo que se encuentre más cerca de los valores iniciales supuestos para las incógnitas provoca que los resultados se inclinen hacia el. De esta manera, si los valores iniciales proporcionados se encuentran alejados de los reales, resultará muy difícil obtener los resultados reales.

Se procedió a cambiar el espaciamiento de malla quedando para ambos ejes: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Se obtuvo el mismo comportamiento, solo que ahora cambiaron las posiciones de los máximos, tal y como se observa en las Figuras 6.33 y 6.34.

En los dos casos anteriores se trabajó con espaciamientos muy grandes y además, los valores reales no coincidieron con ningún punto de dichos espaciamientos. Por lo tanto se procedió a cambiar nuevamente el tamaño de la malla para hacerla menos espaciada quedando como sigue:

- eje X ( $k_1$ ) : 2, 5, 8, ...,  $n + 3$ .

- eje Y ( $k_2$ ) : 2, 6, 10, ...,  $n + 4$ .

También se cambiaron los valores de las propiedades de las capas. En este caso tampoco coinciden los valores reales de las incógnitas con los de la malla. La Figura 6.35 muestra la superficie generada, en la cual se obtuvo un máximo únicamente en  $k_1 = 50$  md y  $k_2 = 30$  md, el cual corresponde al doble de los valores reales. Se trató de encontrar explicación a esto, ya que en todo caso se esperaba que el máximo se encontrara cercano a los puntos  $k_1 = 23$  y  $k_2 = 38$  que corresponden al espaciamiento considerado, los cuales casi coinciden con los valores reales  $k_1 = 22$  y  $k_2 = 38$ ; sin embargo, se encontraron otros juegos de valores para  $k_1$  y  $k_2$  que generaban

respuestas de presión todavía más cercanas a los valores reales. Por lo tanto, si los valores del espaciamiento no coinciden con los valores reales de las variables, no se puede garantizar que el máximo se encuentre en una zona muy próxima, ya que otras combinaciones pueden generar respuestas de presión más cercanas a las reales.

Posteriormente se generó otra superficie donde únicamente se modificaron los valores de  $k_1$  y  $k_2$ , de manera tal que ya coincidieron en valor con puntos del espaciamiento, lográndose con esto obtener el resultado buscado: un sólo máximo que cae en los valores reales ( Figura 6.36 ). Se cambiaron nuevamente los valores de  $k_1$  y  $k_2$  y además los de  $h_1$  y  $h_2$ . En la Figura 6.37 se aprecia que se generó un máximo en los valores reales, pero no es el máximo absoluto, el cual se encuentra más alejado.

Se generó otra superficie más, modificando también ahora la porosidad en ambas capas, lográndose el máximo absoluto en los valores reales ( Figura 6.38 ).

Para el caso en que las dos incógnitas eran los espesores de ambas capas, se siguió el mismo procedimiento que para las permeabilidades. Con el mismo primer juego de valores de la Tabla 6.18, cambiando solamente  $h_1 = h_2 = 32$  ft, se generaron nuevamente superficies con varios máximos alineados para diferentes espaciamientos de malla, como se aprecia en las Figuras 6.39, 6.40 y 6.41. Al hacer cambios tanto en los valores restantes de las propiedades de las capas como en los correspondientes a las incógnitas, así como en los espaciamientos de malla, se pueden generalizar 3 casos diferentes de superficies:

- a ) aquellas que presentan un máximo absoluto que coincide con los valores reales,
- b ) aquellas que generan superficies que presentan varios máximos incluyendo el que coincide con los valores reales, y
- c ) aquellas que generan superficies con máximos que nada tienen que ver con los

valores reales.

Todo lo anterior se puede apreciar en las Figuras 6.42 a 6.46.

Cuando las incógnitas fueron las porosidades en ambas capas se obtuvieron resultados similares a los ya descritos ( Figuras 6.47 a 6.49 ). Con base en los resultados anteriores, se observa que se tiene una gran incertidumbre en los resultados cuando se trabaja con incógnitas del mismo género.

Sin embargo, cuando se quisieron determinar los valores de propiedades de diferentes géneros, no se presentó problema alguno. En las Figuras 6.50 a 6.52 se presentan algunos casos en los cuales se observa que el máximo absoluto no coincidió exactamente con los valores reales, debido solamente a que los espaciamientos de malla con que se generaron las superficies no coincidieron con dichos valores. No importa los valores iniciales que se proporcionen al inicio de los cálculos, los resultados tienden siempre a sus valores reales, tal y como se puede observar en la Tabla 6.19.

De acuerdo a lo analizado anteriormente, se puede concluir que mientras se requieran calcular propiedades diferentes de las capas, el software presentado genera excelentes resultados. Para el caso de querer determinar propiedades del mismo género, es recomendable generar un tamaño de malla ( espaciamiento ) sumamente pequeño, para tratar de abarcar prácticamente todos los valores posibles que pudieran tener las incógnitas, ya que al coincidir estas con el espaciamiento las probabilidades de tener el máximo absoluto en los valores reales es muy alta. Sin embargo todavía es necesario trabajar en este sentido, ya que aunque se logren generar las superficies con el máximo real, el optimizador COMPLEX sigue generando resultados erróneos en algunos casos.

**TABLA 6.17**  
**OPTIMIZADOR COMPLEX**

**PRIMER JUEGO DE VALORES REALES:**

$s_1 = 7.0$        $k_1 = 50.0$        $h_1 = 100.0$        $\phi_1 = 0.1$        $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD1} = 2000.0$        $r_{D1} = 1.0$   
 $s_2 = 3.0$        $k_2 = 10.0$        $h_2 = 100.0$        $\phi_2 = 0.1$        $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD2} = 2000.0$        $r_{D2} = 1.0$

| INCÓGNITA | VALOR INICIAL | ITERACIONES | VALOR CALCULADO |
|-----------|---------------|-------------|-----------------|
| $k_1$     | 1.00          | 100         | 42.610          |
| $k_2$     | 1.00          |             | 11.009          |
| $k_1$     | 1.00          | 200         | 44.870          |
| $k_2$     | 1.00          |             | 8.970           |
| $k_1$     | 1.00          | 500         | 44.890          |
| $k_2$     | 1.00          |             | 8.990           |

**SEGUNDO JUEGO DE VALORES REALES:**

$s_1 = 7.0$        $k_1 = 10.0$        $h_1 = 100.0$        $\phi_1 = 0.1$        $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD1} = 2000.0$        $r_{D1} = 1.0$   
 $s_2 = 3.0$        $k_2 = 1.0$        $h_2 = 100.0$        $\phi_2 = 0.1$        $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD2} = 2000.0$        $r_{D2} = 1.0$

| INCÓGNITA | VALOR INICIAL | ITERACIONES | VALOR CALCULADO |
|-----------|---------------|-------------|-----------------|
| $k_1$     | 1.00          | 100         | 12.370          |
| $\phi_1$  | 0.50          |             | 0.660           |
| $k_1$     | 1.00          | 150         | 12.410          |
| $\phi_1$  | 0.50          |             | 0.600           |
| $k_1$     | 1.00          | 250         | 12.430          |
| $\phi_1$  | 0.50          |             | 0.500           |
| $k_1$     | 1.00          | 500         | 12.300          |
| $\phi_1$  | 0.50          |             | 0.350           |
| $k_1$     | 1.00          | 100         | 11.830          |
| $\phi_1$  | 0.20          |             | 0.230           |

**TABLA 6.17**

**OPTIMIZADOR COMPLEX ( continuación )**

**SEGUNDO JUEGO DE VALORES REALES:**

$s_1 = 7.0$        $k_1 = 10.0$        $h_1 = 100.0$        $\phi_1 = 0.1$        $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD1} = 2000.0$        $r_{D1} = 1.0$   
 $s_2 = 3.0$        $k_2 = 1.0$        $h_2 = 100.0$        $\phi_2 = 0.1$        $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD2} = 2000.0$        $r_{D2} = 1.0$

| INCÓGNITA | VALOR INICIAL | ITERACIONES | VALOR CALCULADO |
|-----------|---------------|-------------|-----------------|
| $k_1$     | 1.00          | 200         | 11.420          |
| $\phi_1$  | 0.20          |             | 0.180           |
| $k_1$     | 1.00          | 500         | 10.660          |
| $\phi_1$  | 0.20          |             | 0.130           |
| $k_1$     | 1.00          | 1000        | 10.027          |
| $\phi_1$  | 0.20          |             | 0.101           |

**TABLA 6.18**

**VARIACIÓN DE LOS RESULTADOS PARA DIFERENTES VALORES INICIALES**

**PRIMER JUEGO DE VALORES REALES:**

$s_1 = 7.0$        $k_1 = 10.0$        $h_1 = 100.0$        $\phi_1 = 0.1$        $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD1} = 2000.0$        $r_{D1} = 1.0$   
 $s_2 = 3.0$        $k_2 = 15.0$        $h_2 = 100.0$        $\phi_2 = 0.1$        $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD2} = 2000.0$        $r_{D2} = 1.0$

| ITERACIONES | VALORES INICIALES |       | VALORES CALCULADOS |         |
|-------------|-------------------|-------|--------------------|---------|
|             | $k_1$             | $k_2$ | $k_1$              | $k_2$   |
| 50          | 1.00              | 1.00  | 12.2854            | 18.4278 |
| 100         | 1.00              | 1.00  | 12.3136            | 18.4705 |
| 200         | 1.00              | 1.00  | 12.3121            | 18.4682 |
| 200         | 5.00              | 5.00  | 7.1302             | 10.6953 |
| 200         | 10.00             | 10.00 | 11.0465            | 16.5697 |
| 200         | 20.00             | 20.00 | 17.8389            | 26.7584 |
| 200         | 40.00             | 40.00 | 26.9845            | 40.4767 |
| 200         | 99.00             | 99.00 | 66.6666            | 99.9999 |

**SEGUNDO JUEGO DE VALORES REALES:**

$s_1 = 7.0$        $k_1 = 50.0$        $h_1 = 100.0$        $\phi_1 = 0.5$        $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD1} = 2000.0$        $r_{D1} = 1.0$   
 $s_2 = 3.0$        $k_2 = 10.0$        $h_2 = 100.0$        $\phi_2 = 0.1$        $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD2} = 2000.0$        $r_{D2} = 1.0$

| ITERACIONES | VALORES INICIALES |          | VALORES CALCULADOS |          |
|-------------|-------------------|----------|--------------------|----------|
|             | $k_1$             | $\phi_1$ | $k_1$              | $\phi_1$ |
| 200         | 1.00              | 0.10     | 50.0000            | 0.4999   |
| 200         | 80.00             | 0.10     | 50.0000            | 0.4999   |
| 200         | 25.00             | 0.25     | 49.9999            | 0.5000   |

**TABLA 6.18**

**VARIACIÓN DE LOS RESULTADOS PARA DIFERENTES VALORES INICIALES**  
**( continuación )**

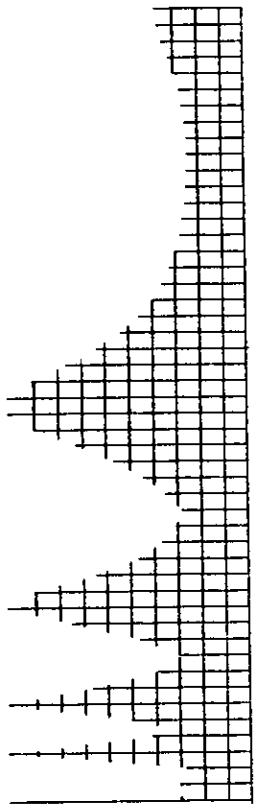
**SEGUNDO JUEGO DE VALORES REALES:**

$s_1 = 7.0$        $k_1 = 50.0$        $h_1 = 100.0$        $\phi_1 = 0.5$        $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD1} = 2000.0$        $r_{D1} = 1.0$   
 $s_2 = 3.0$        $k_2 = 10.0$        $h_2 = 100.0$        $\phi_2 = 0.1$        $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD2} = 2000.0$        $r_{D2} = 1.0$

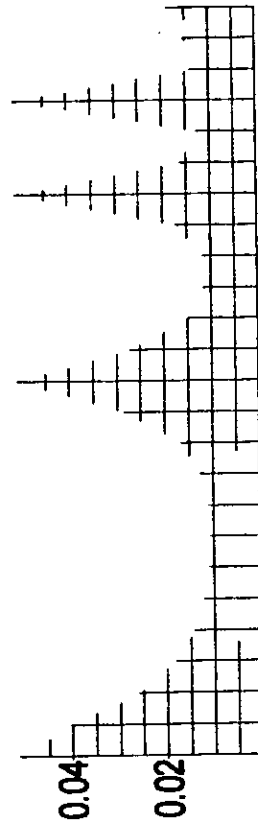
| ITERACIONES | VALORES INICIALES |          | VALORES CALCULADOS |          |
|-------------|-------------------|----------|--------------------|----------|
|             | $k_1$             | $\phi_2$ | $k_1$              | $\phi_2$ |
| 200         | 1.00              | 0.10     | 50.0000            | 0.1000   |
| 200         | 10.00             | 0.10     | 50.0000            | 0.1000   |
| 200         | 1.00              | 0.25     | 50.0000            | 0.1000   |



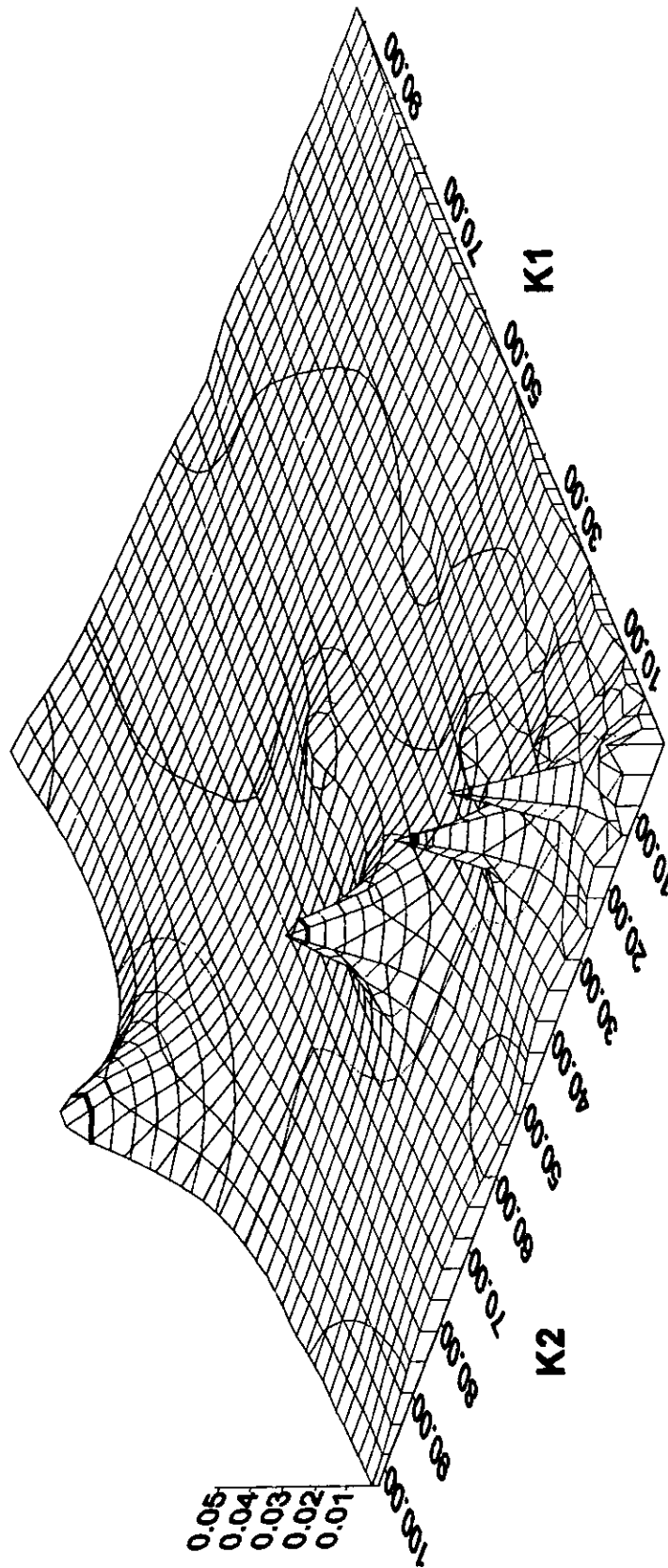
VISTA FRONTAL "X"



VISTA FRONTAL "Y"



VALORES BUSCADOS ( k1, k2 ) = ( 10, 15 )



**FIGURA 6.31.- Espaciamientos iguales en X y Y: 0.1, 0.2, 0.4, ..., 102.4**

VALORES BUSCADOS ( k1, k2 ) = ( 10, 15 )

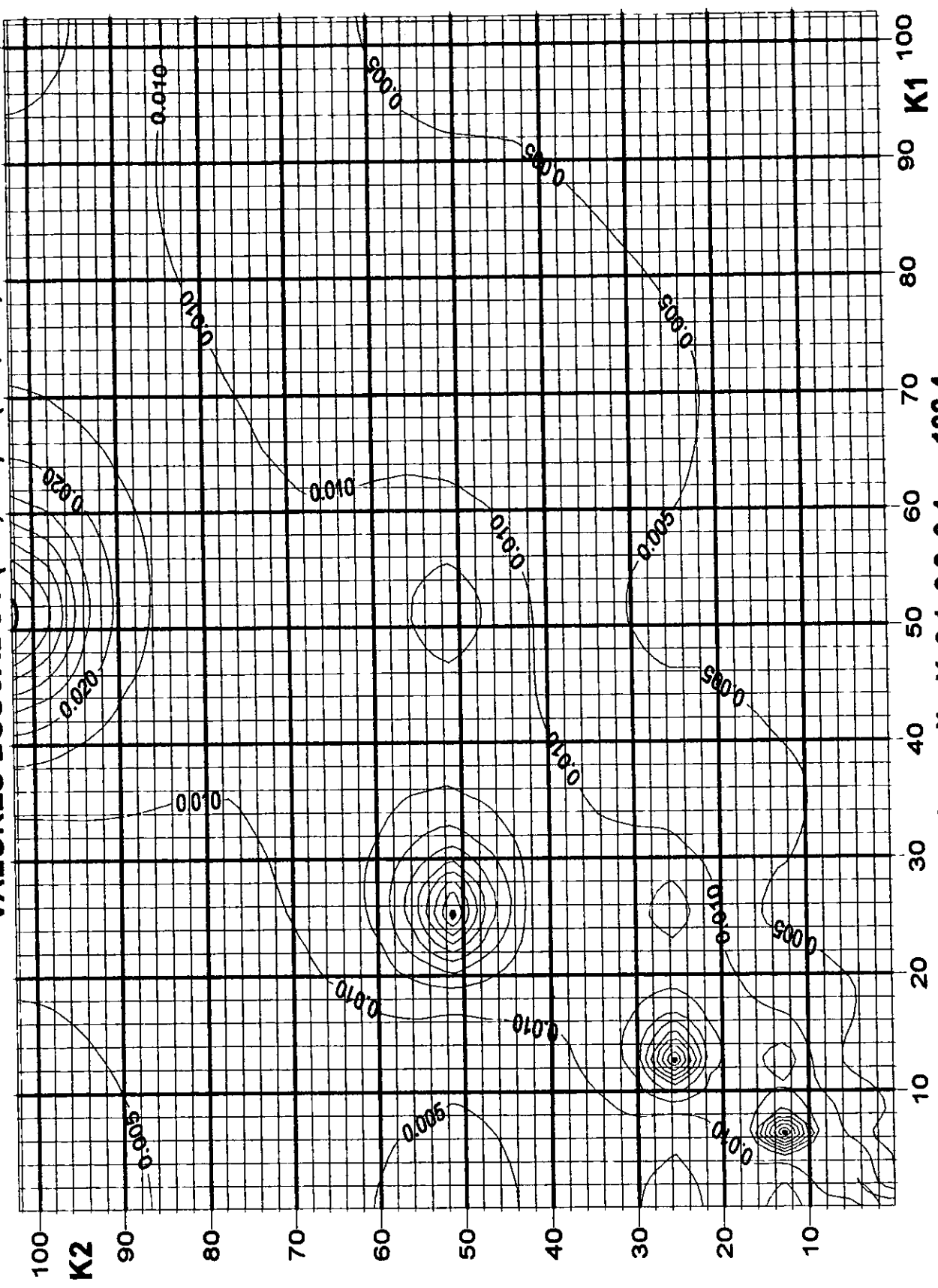
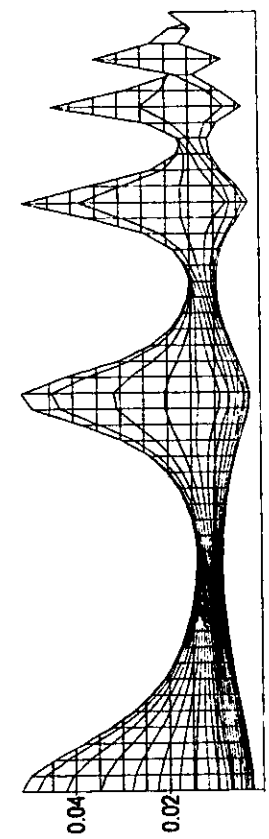
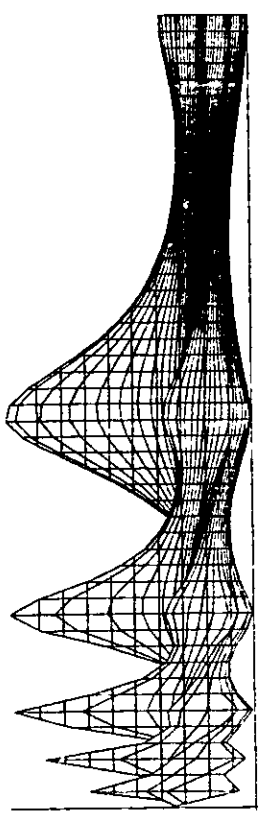


FIGURA 6.32.- Espaciamientos iguales en X y Y: 0.1, 0.2, 0.4, ..., 102.4

VISTA FRONTAL "Y"



VISTA FRONTAL "X"



VALORES BUSCADOS ( k1, k2 ) = ( 10, 15 )

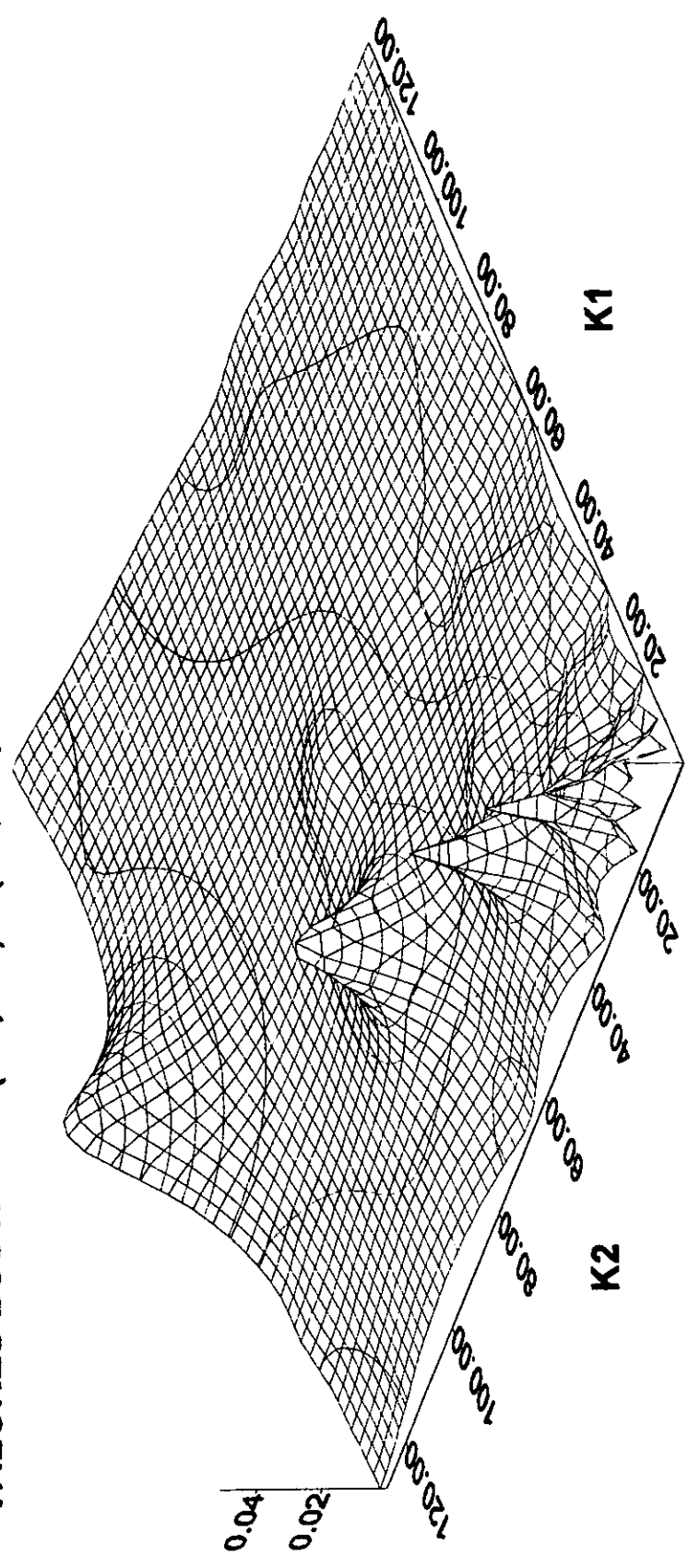
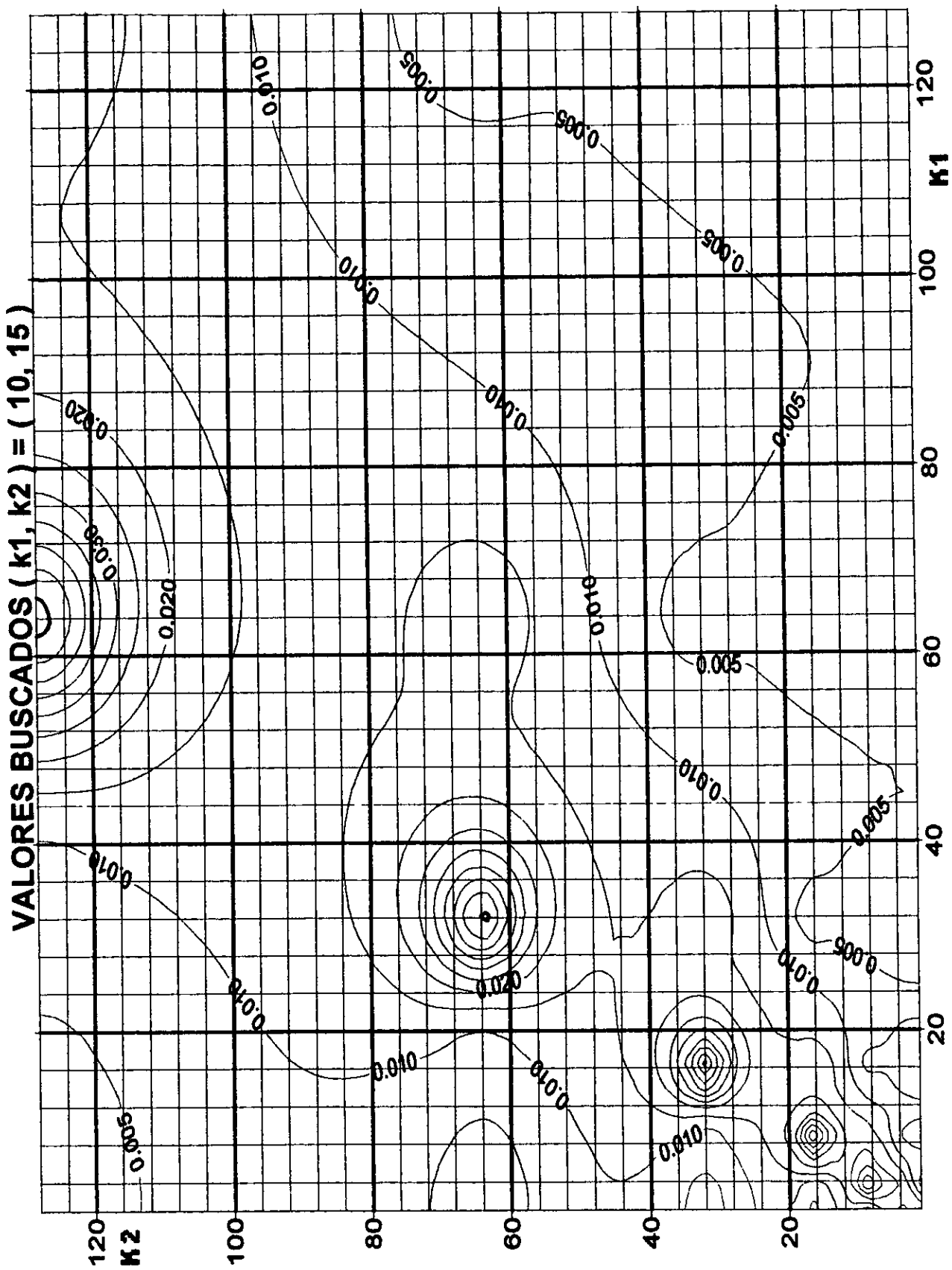


FIGURA 6.33.- Espaciamientos iguales en X y Y: 1, 2, 4, ..., 128.



**FIGURA 6.34.- Espaciamentos iguales en X Y: 1, 2, 4, ..., 128.**

VALORES BUSCADOS ( k1, k2 ) = ( 25, 15 )

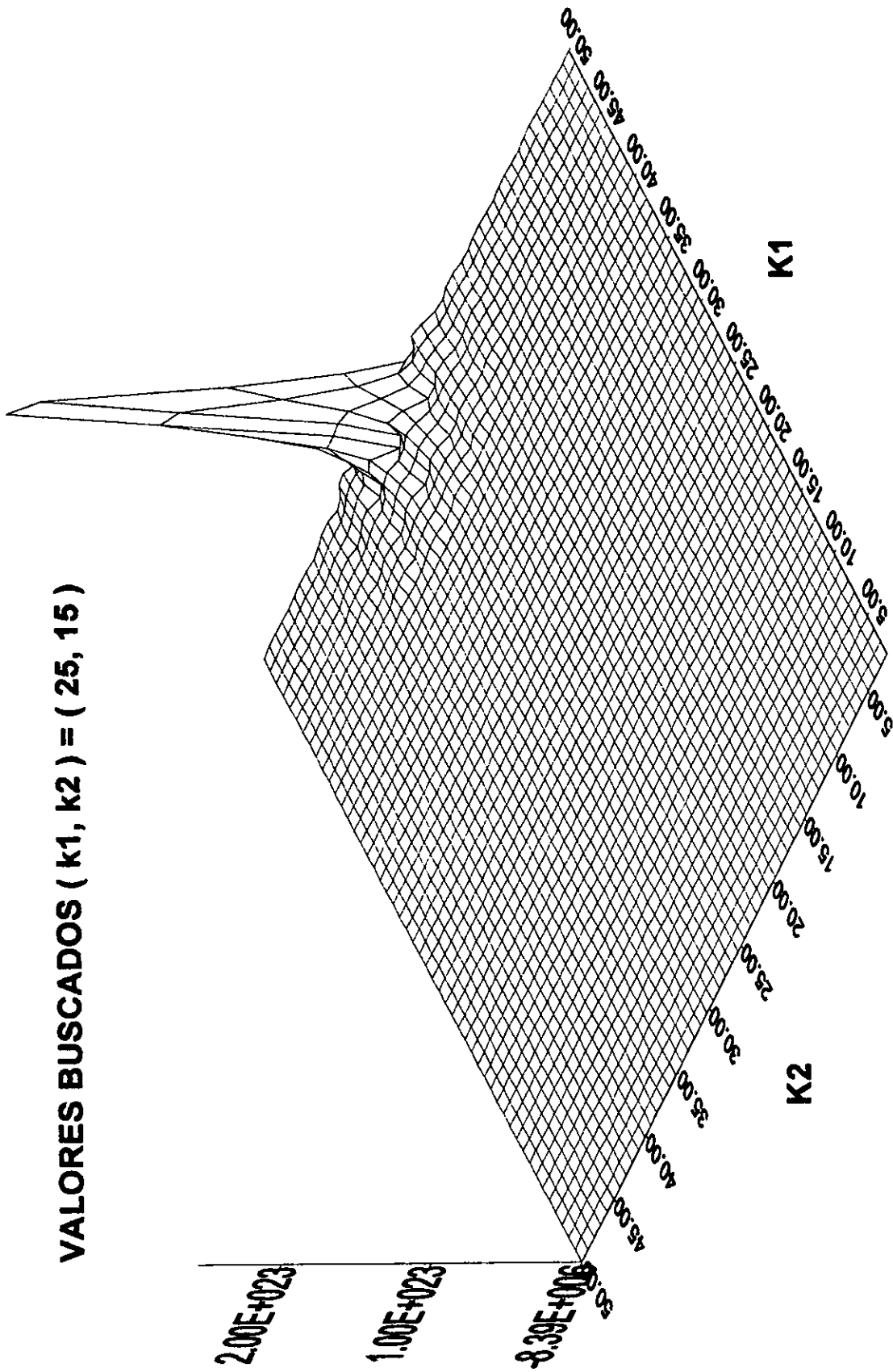
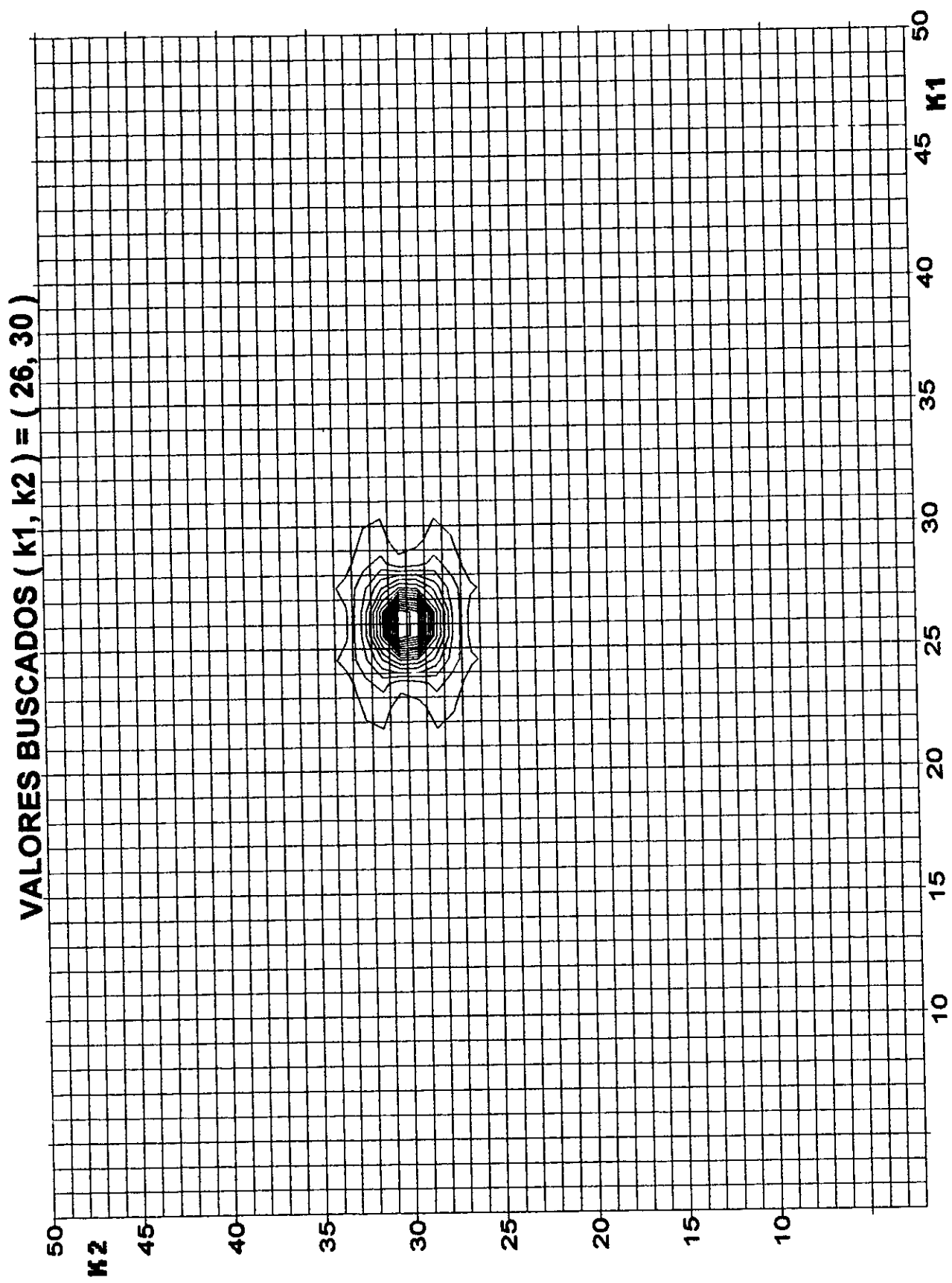
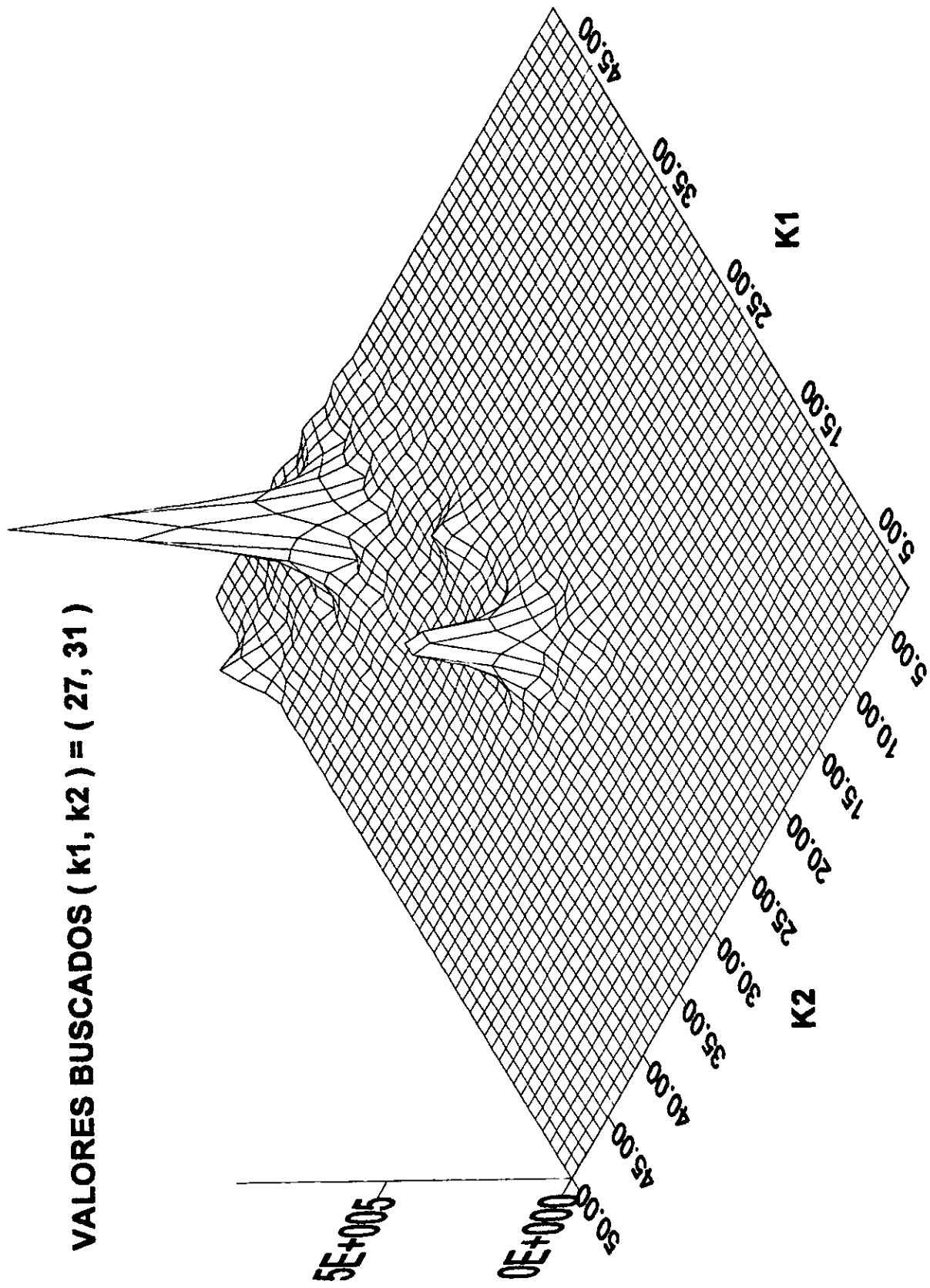


FIGURA 6.35.- Espaciamientos diferentes en X ( 2, 5, 8, ..., 50 ) y Y ( 2, 6, 10, ..., 50 ).



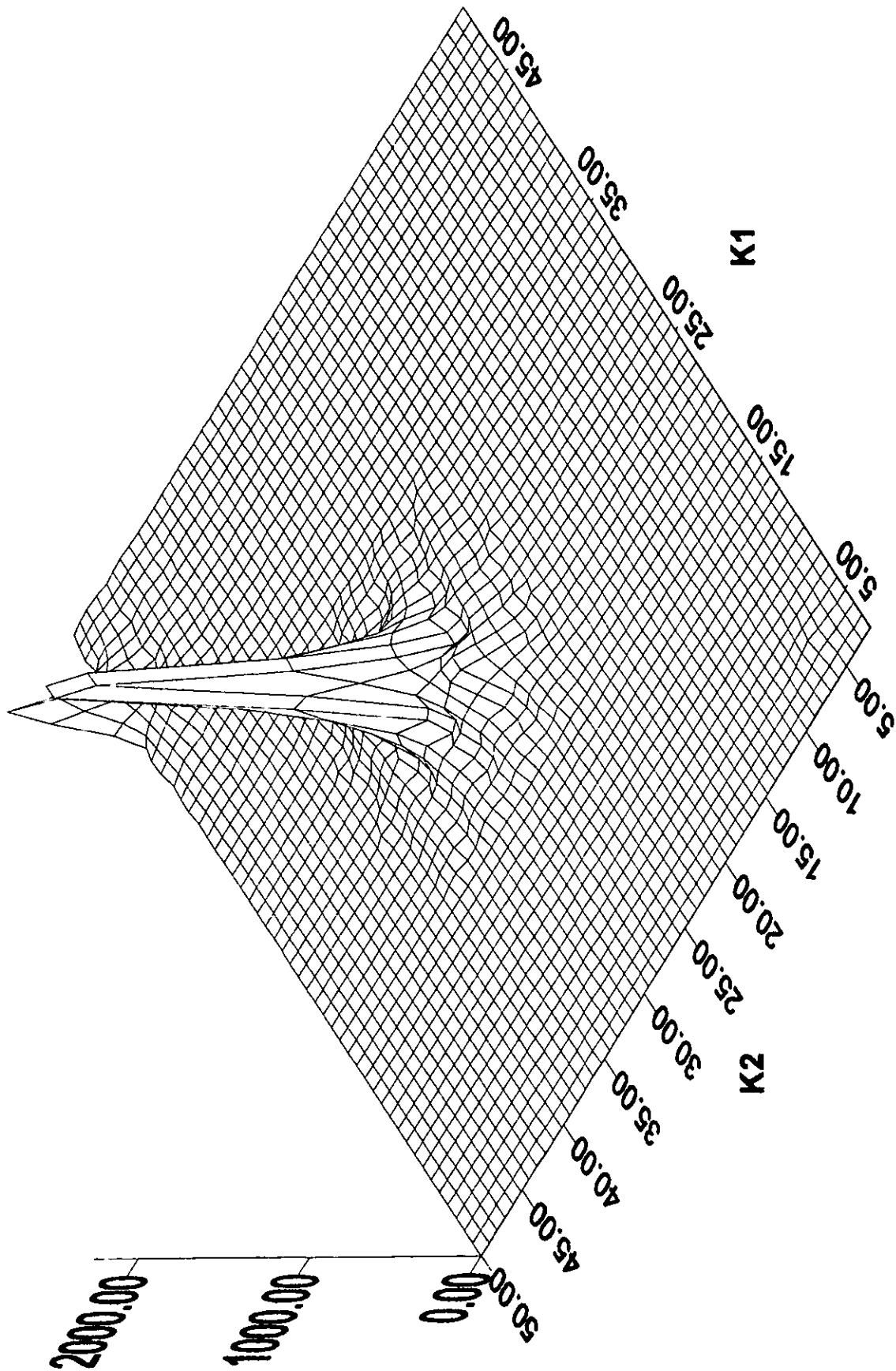
**FIGURA 6.36.- Espaciamientos diferentes en X ( 2, 5, 8, ..., 50 ) y Y ( 2, 6, 10, ..., 50 ).**

**VALORES BUSCADOS ( k1, k2 ) = ( 27, 31 )**



**FIGURA 6.37.- Espaciamientos diferentes en X ( 2, 5, 8, ..., 50 ) y Y ( 2, 6, 10, ..., 50 ).**

VALORES BUSCADOS ( k1, k2 ) = ( 27, 31 )



**FIGURA 6.38.- Espaciamientos diferentes en X ( 2, 5, 8, ..., 50 ) y Y ( 2, 6, 10, ..., 50 ).**



VALORES BUSCADOS (h1, h2) = (32, 32)

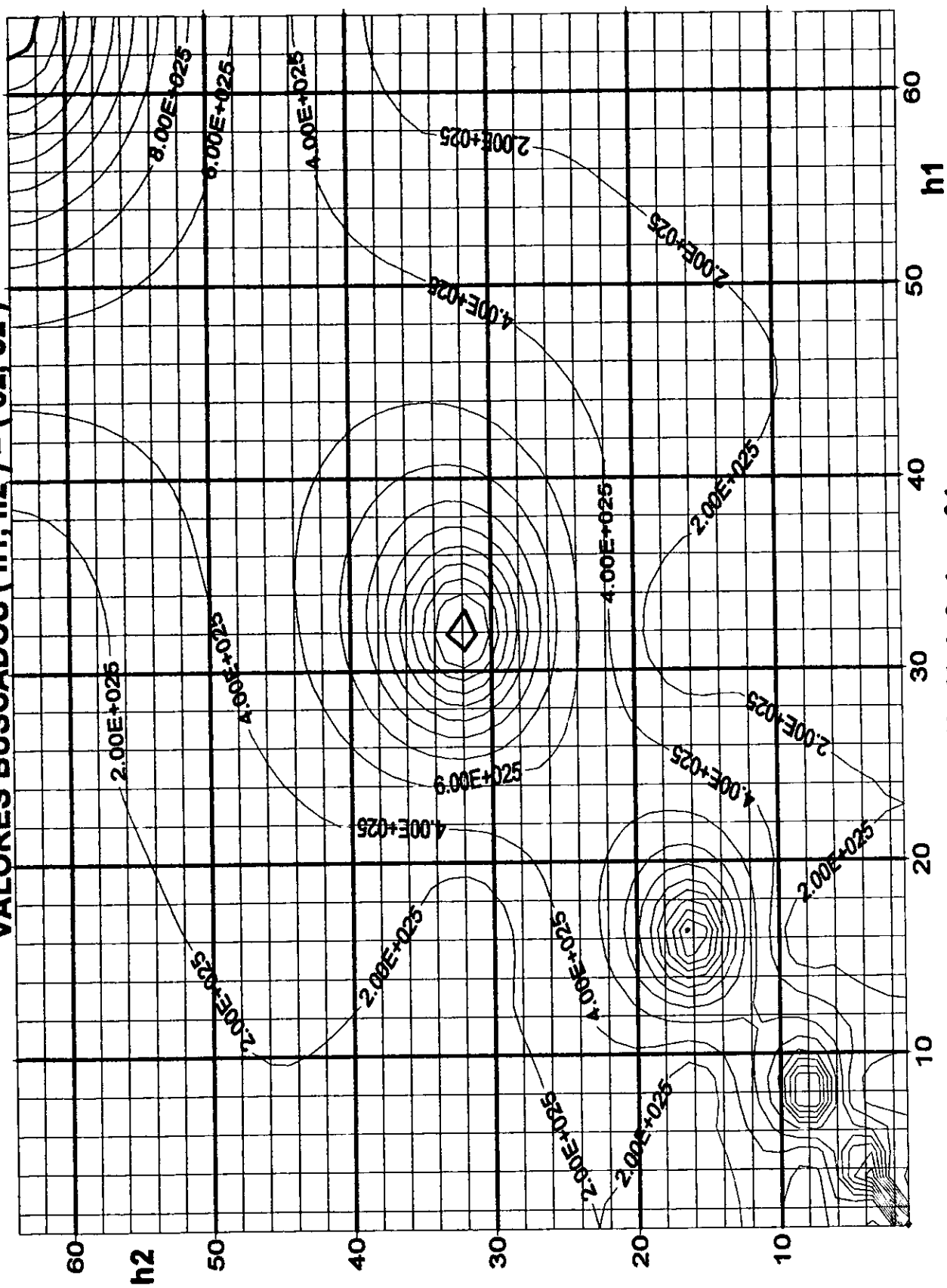
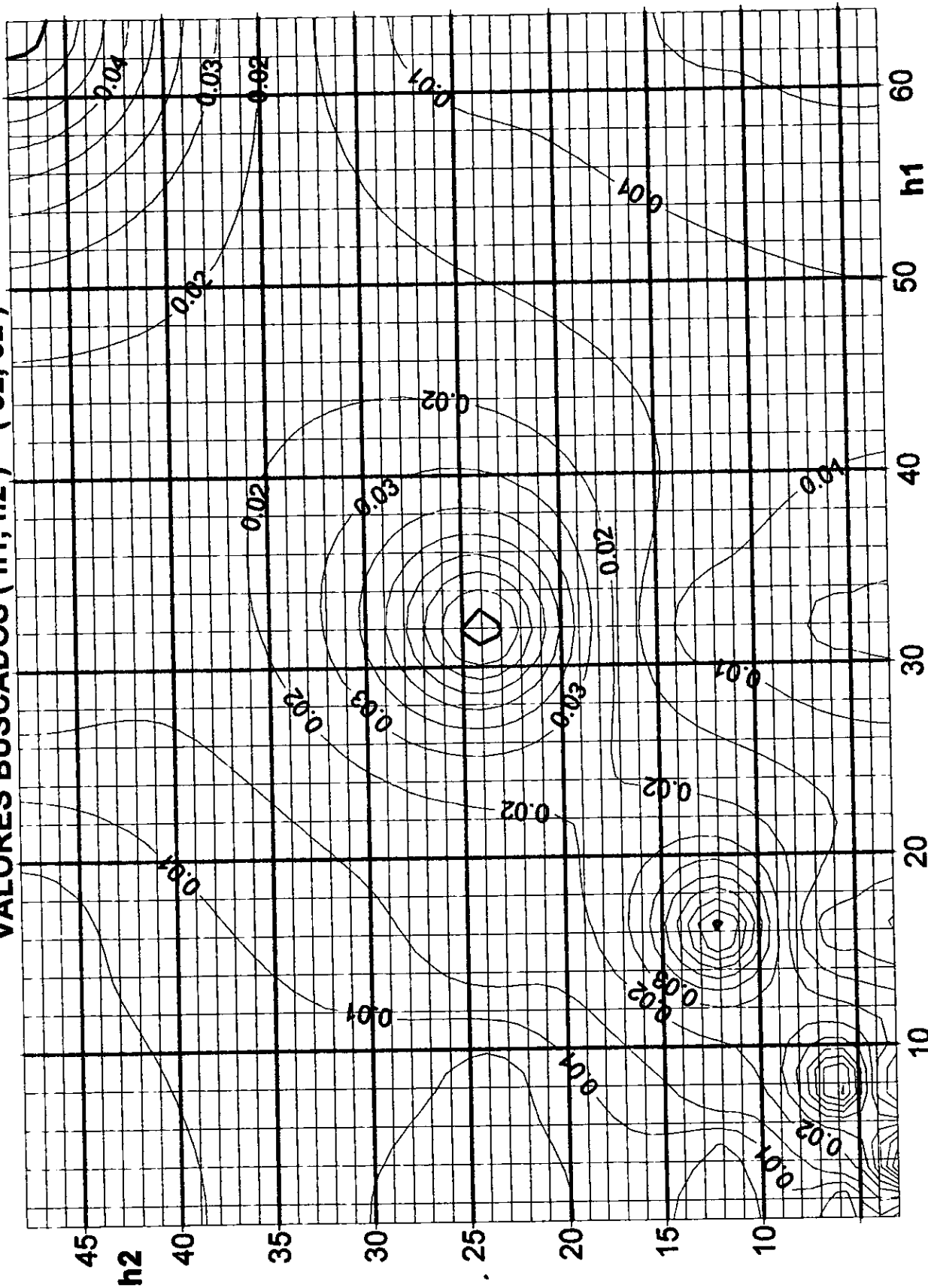


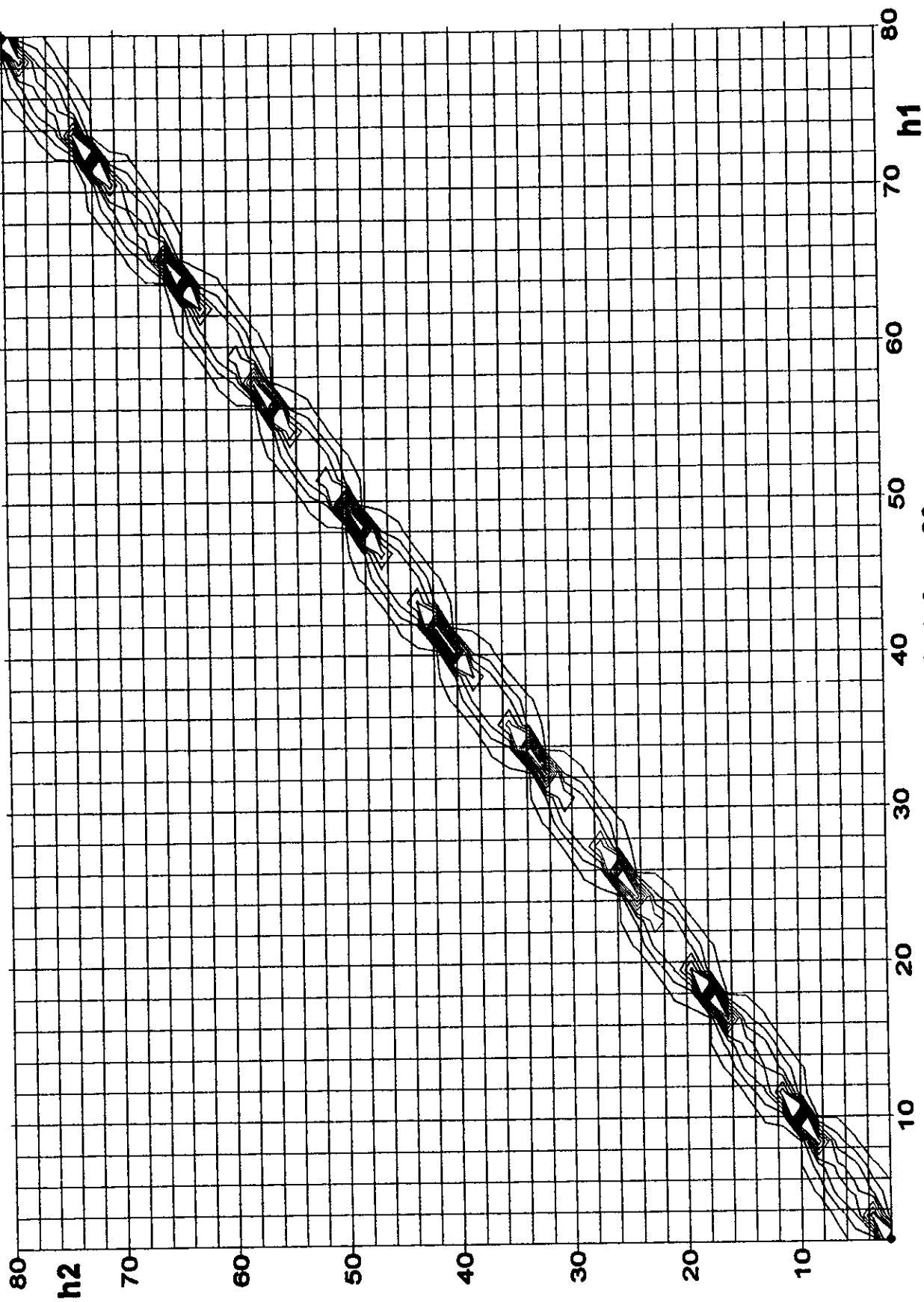
FIGURA 6.39.- Espaciamientos iguales en X y Y: 1, 2, 4, ..., 64

VALORES BUSCADOS (  $h_1, h_2$  ) = ( 32, 32 )



**FIGURA 6.40.- Espaciamientos diferentes en X ( 1, 2, 4, ..., 64 ) y Y ( 3, 6, ..., 48 ).**

VALORES BUSCADOS ( h1, h2 ) = ( 32, 32 )



**FIGURA 6.41.- Espaciamientos iguales en X y Y: 2, 4, 6, ..., 80.**

VALORES BUSCADOS (  $h_1, h_2$  ) = ( 32, 62 )

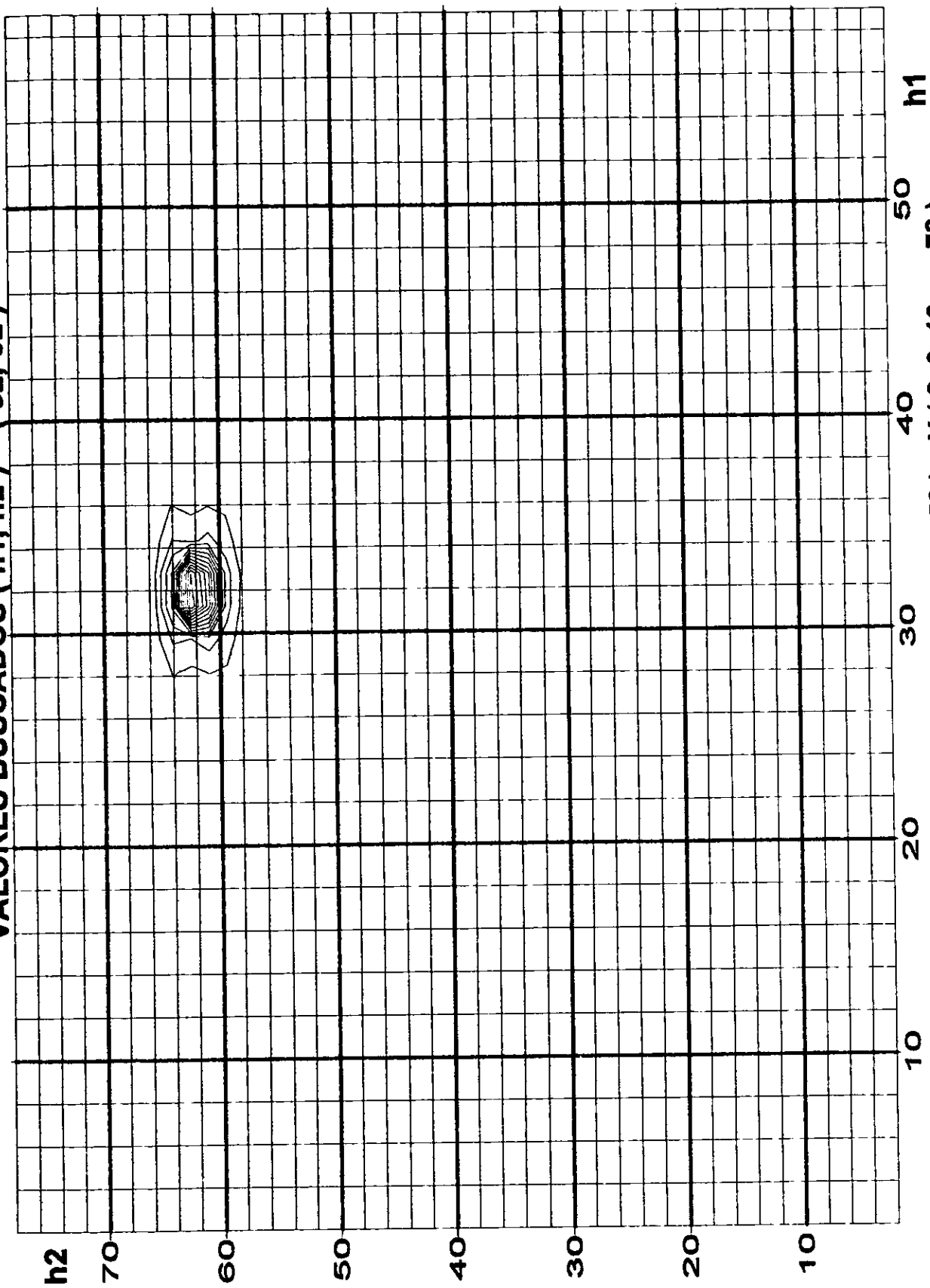
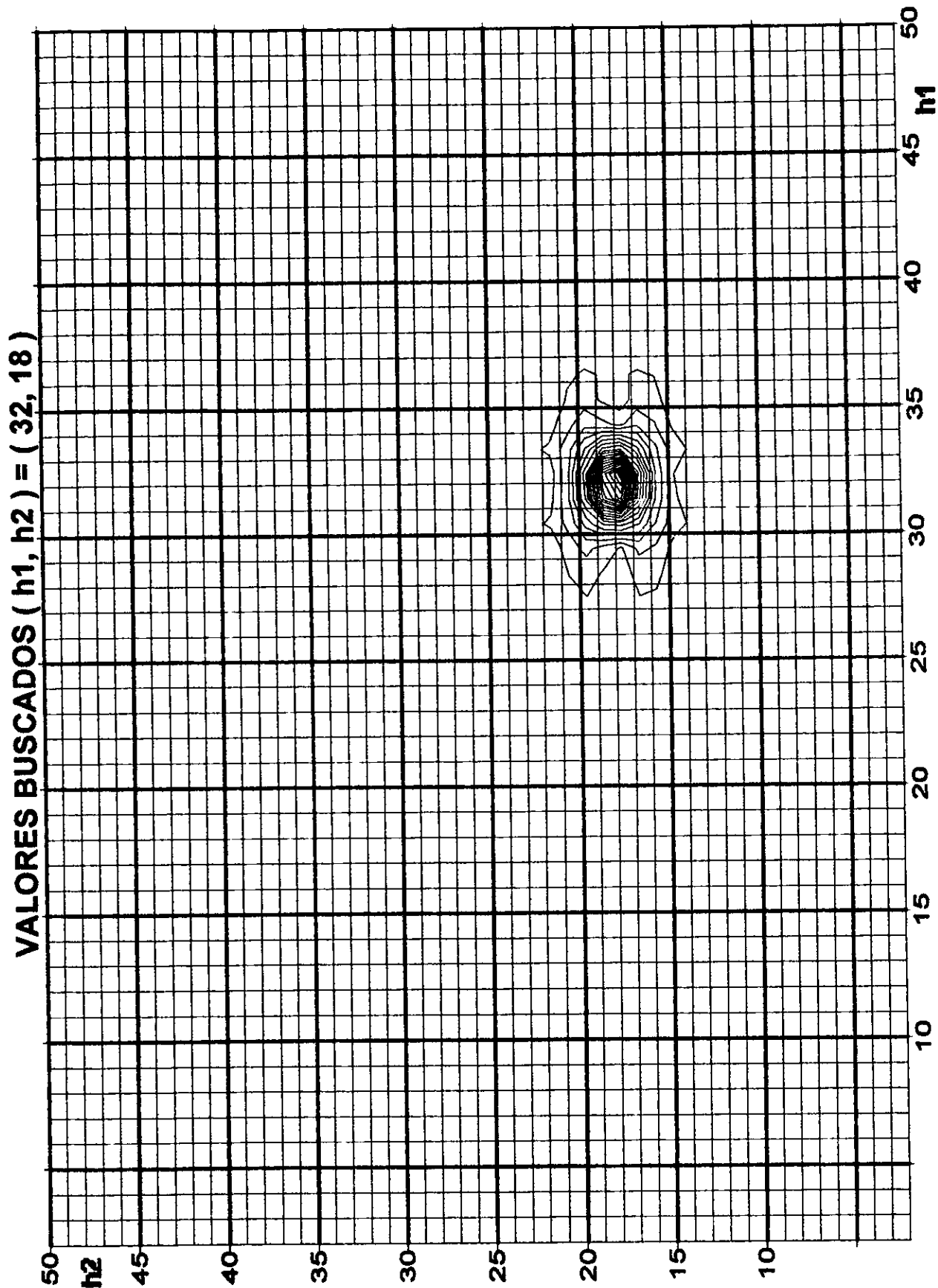
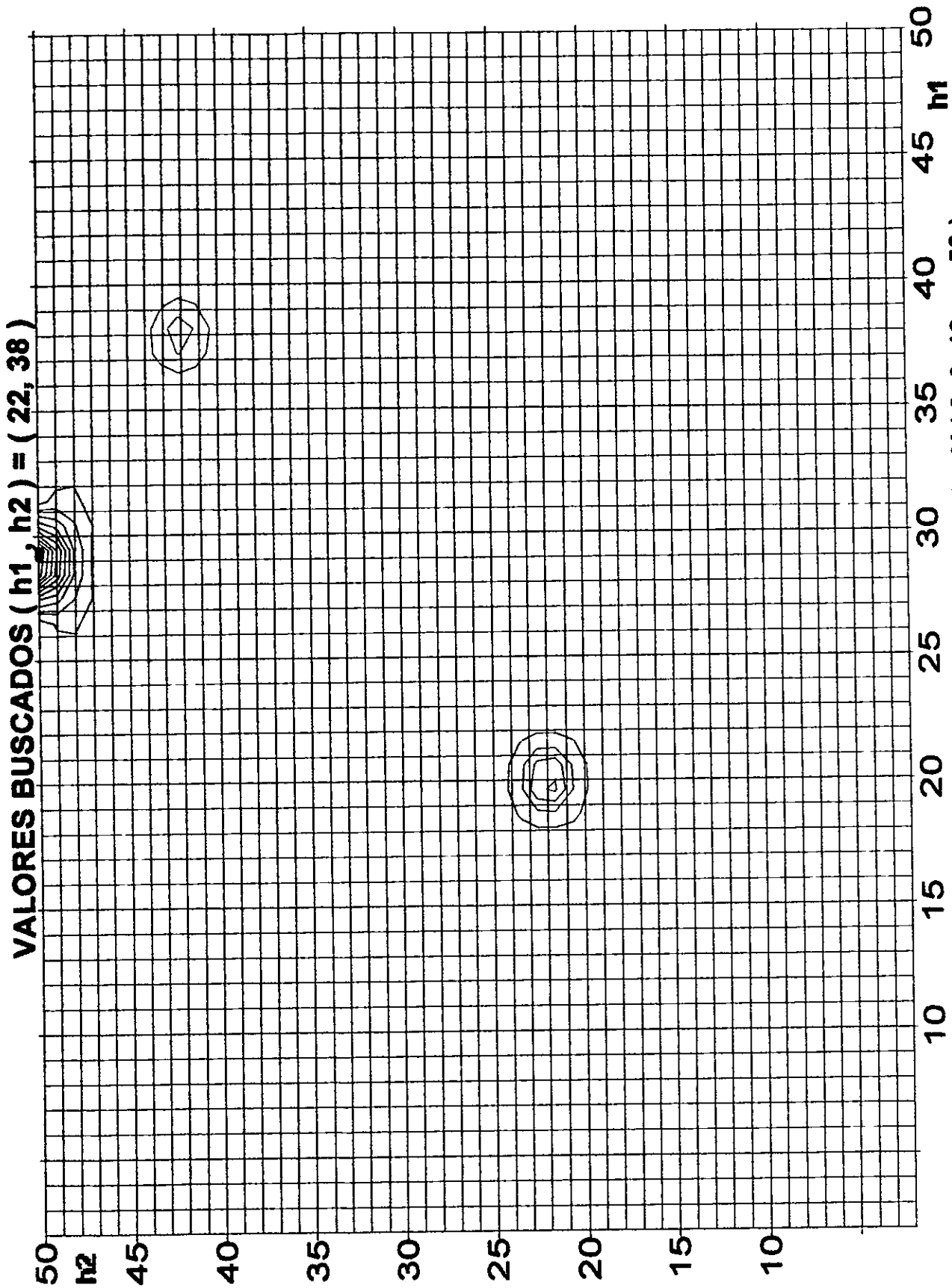


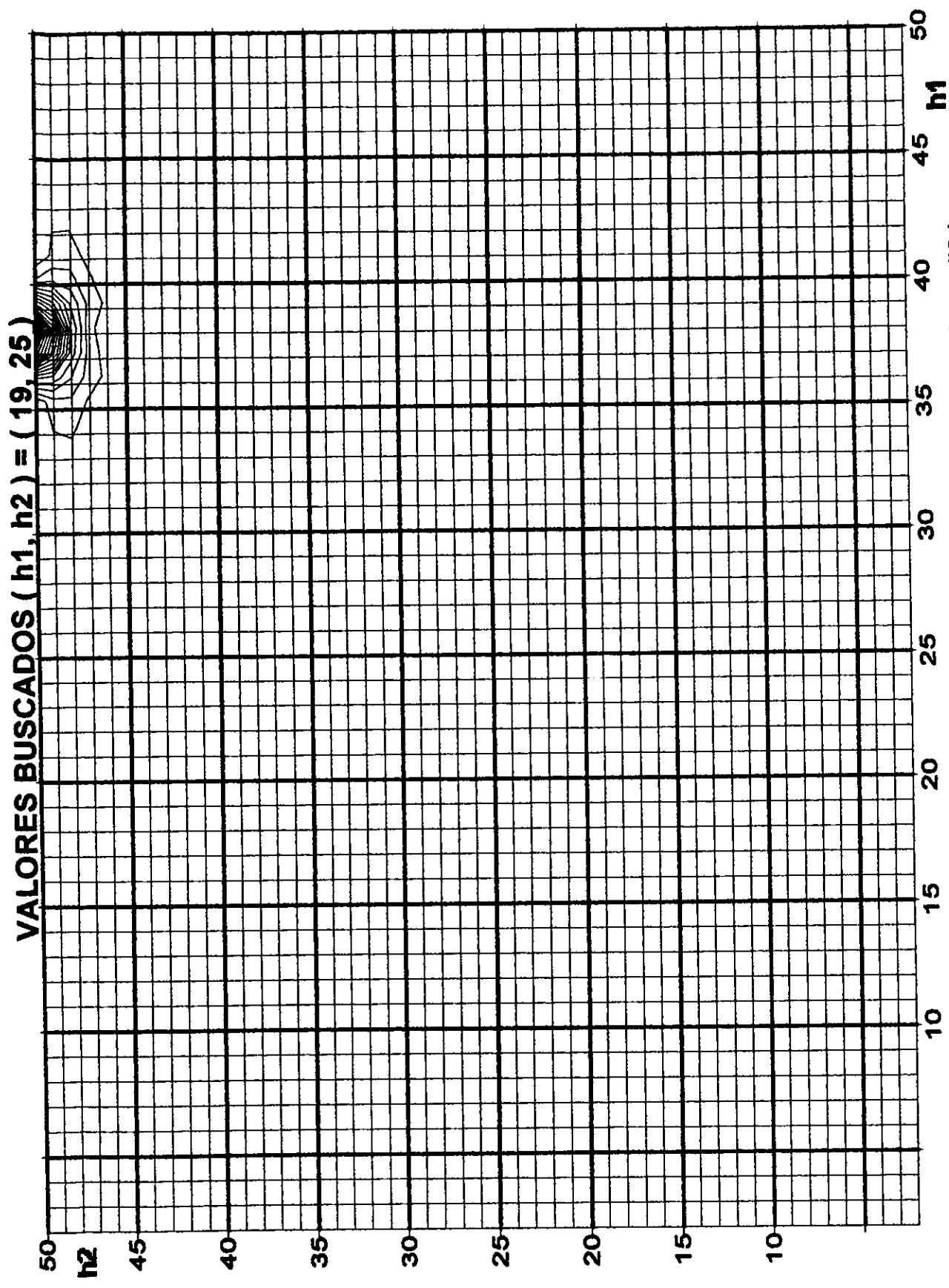
FIGURA 6.42.- Espaciamientos diferentes en X ( 2, 5, 8, ..., 59 ) y Y ( 2, 6, 10, ..., 78 ).



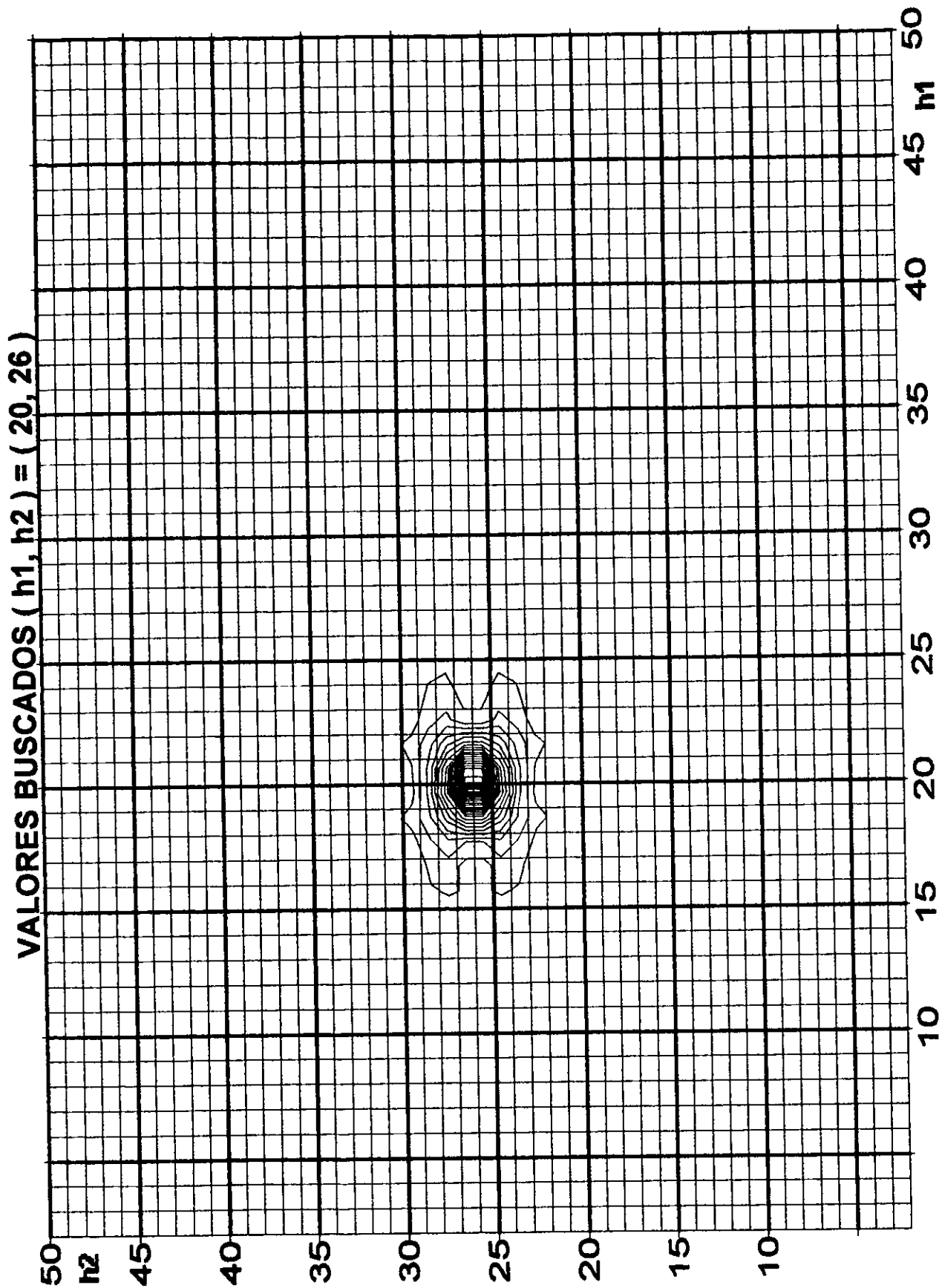
**FIGURA 6.43.- Espaciamientos diferentes en X ( 2, 5, 8, ..., 50 ) y Y ( 2, 6, 10, ..., 50 ).**



**FIGURA 6.44.- Espaciamientos diferentes en X ( 2, 5, 8, ..., 50 ) y Y ( 2, 6, 10, ..., 50 ).**



**FIGURA 6.45.- Espaciamientos diferentes en X ( 2, 5, 8, ..., 50 ) y Y ( 2, 6, 10, ..., 50 ).**



**FIGURA 6.46.- Espaciamientos diferentes en X ( 2, 5, 8, ..., 50 ) y Y ( 2, 6, 10, ..., 50 ).**



VALORES BUSCADOS (  $\phi_1, \phi_2$  ) = ( 0.4, 0.6 )

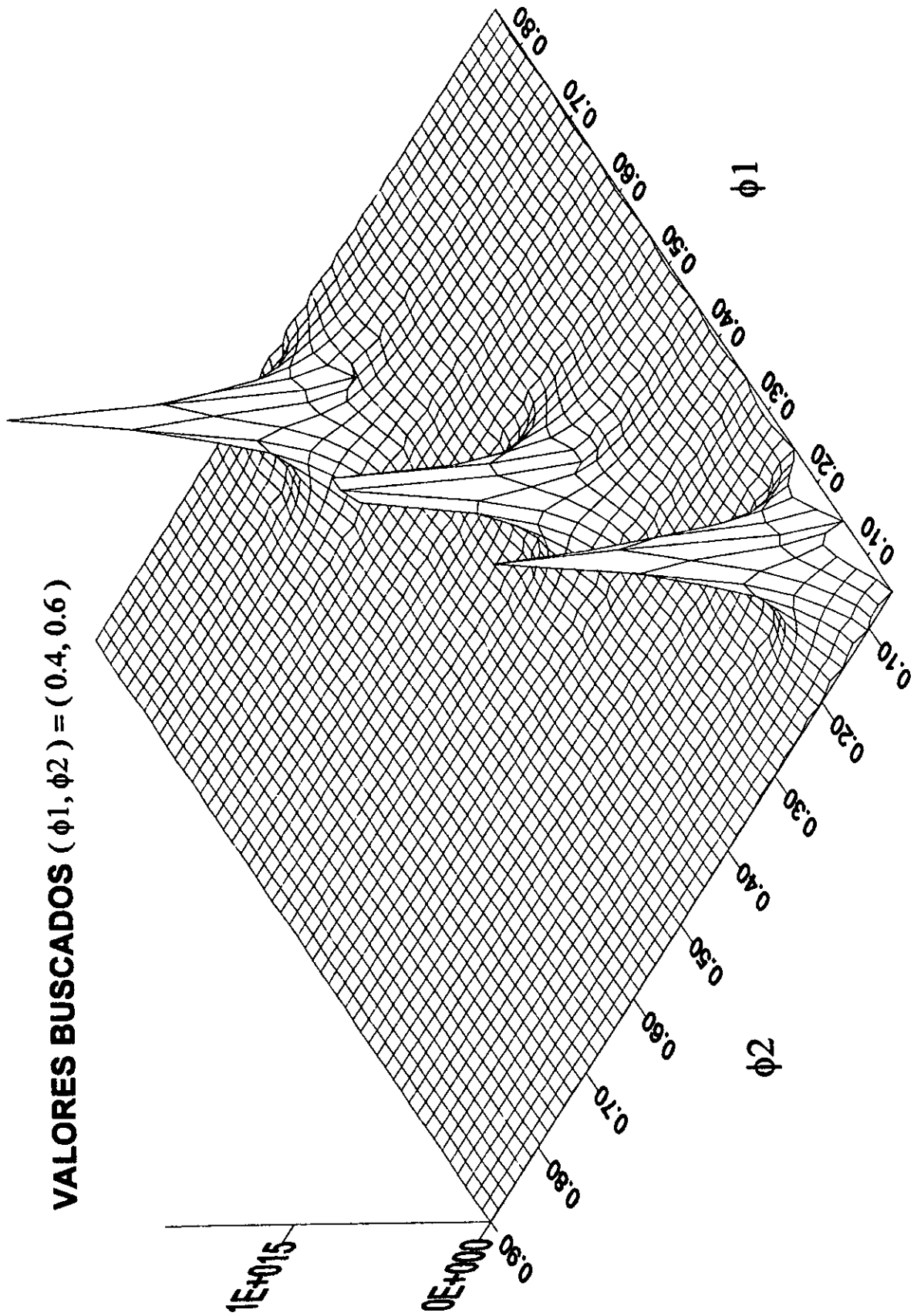


FIGURA 6.47.- Espaciamientos diferentes en X ( 0.05, 0.15, 0.25, ..., 0.95 ) y Y ( 0.05, 0.1, 0.15, ..., 0.95 )

VALORES BUSCADOS ( $\phi_1, \phi_2$ ) = (0.4, 0.6)

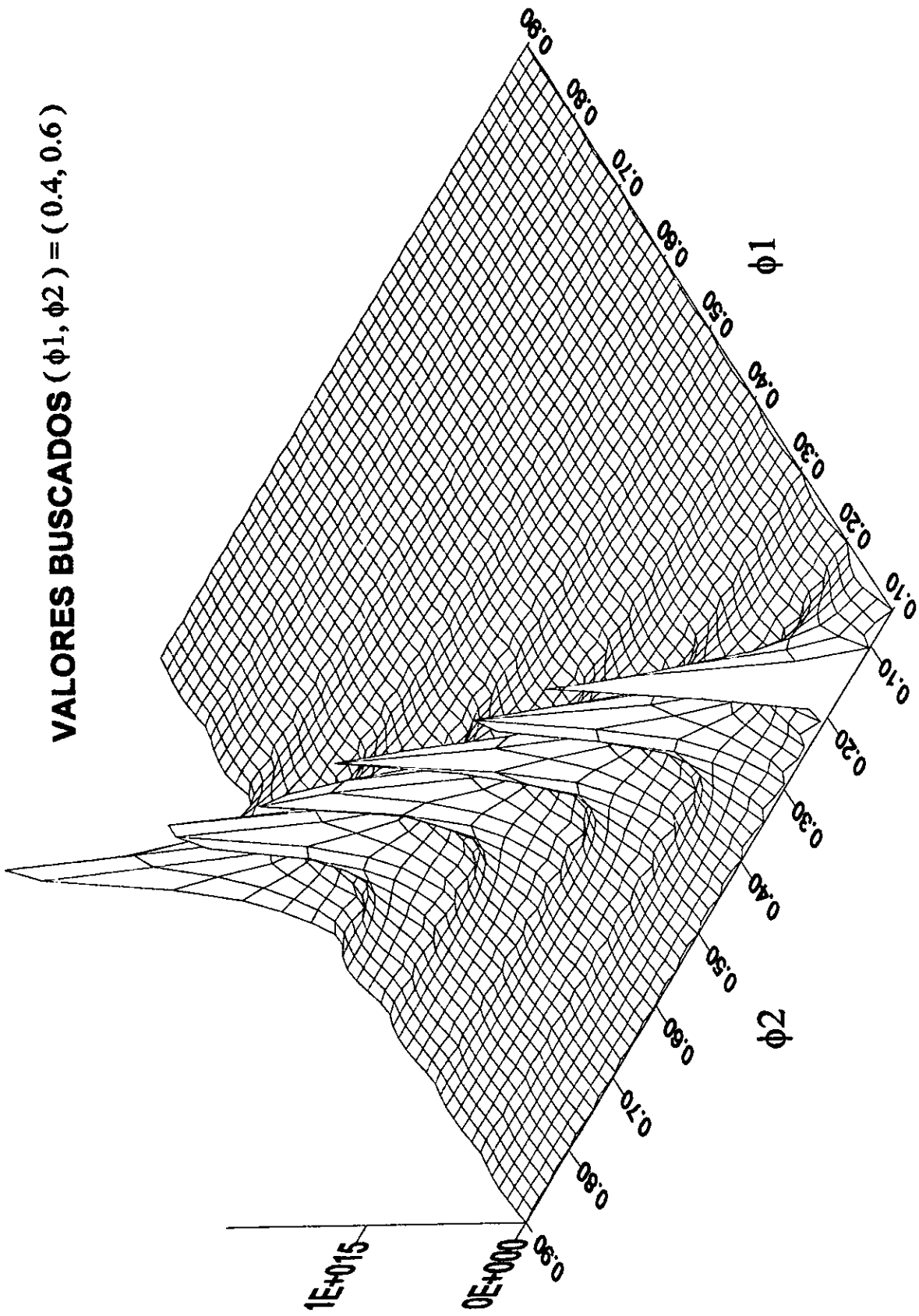
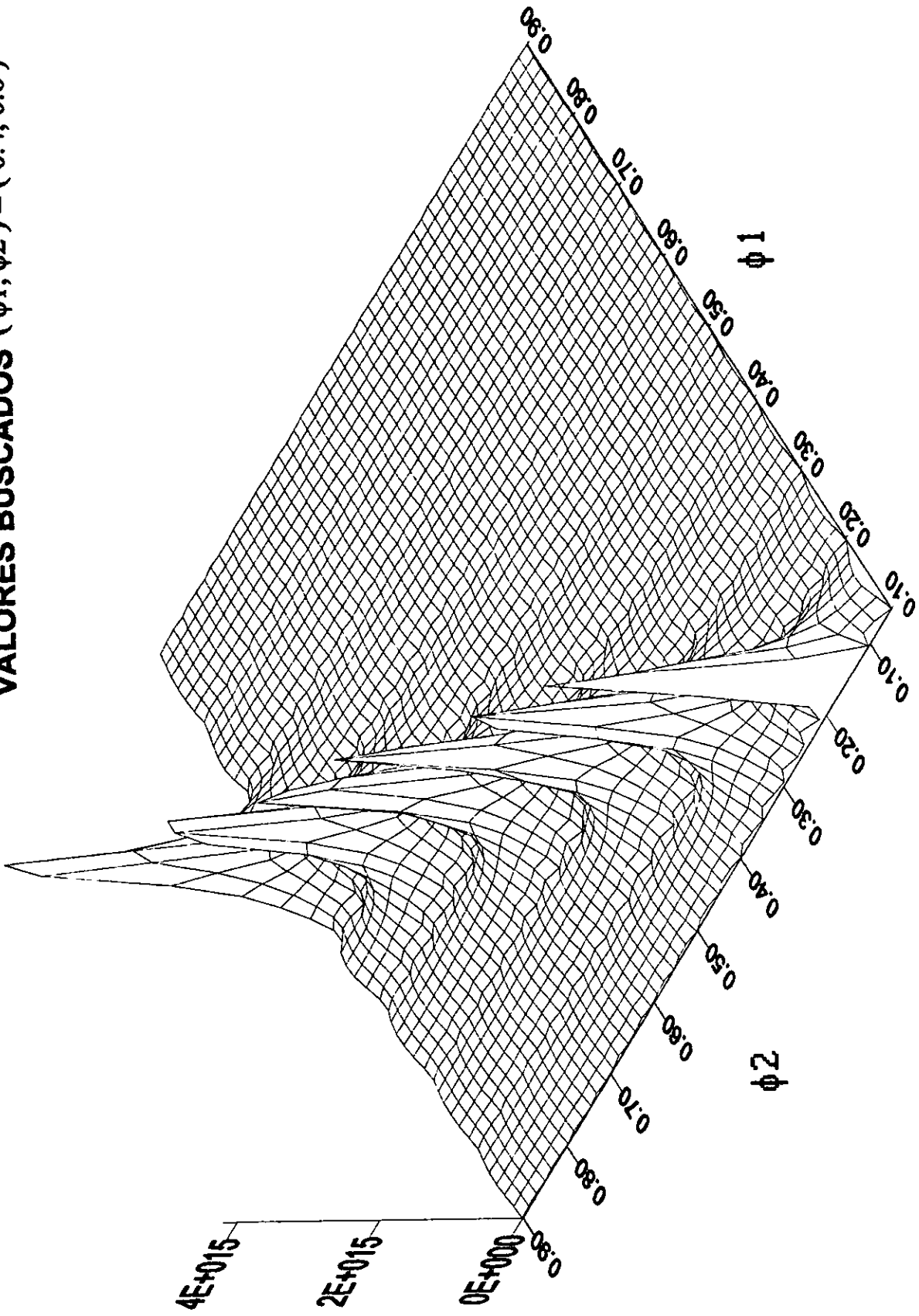


FIGURA 6.48.- Espaciamientos diferentes en X ( 0.1, 0.2, 0.3, ..., 0.9 ) y Y ( 0.05, 0.1, 0.15, ..., 0.95 ).

VALORES BUSCADOS ( $\phi 1, \phi 2$ ) = (0.4, 0.6)



**FIGURA 6.49.- Espaciamientos diferentes en X (0.1, 0.2, 0.3, ..., 0.9) y Y (0.05, 0.1, 0.15, ..., 0.95).**

**TABLA 6.19**

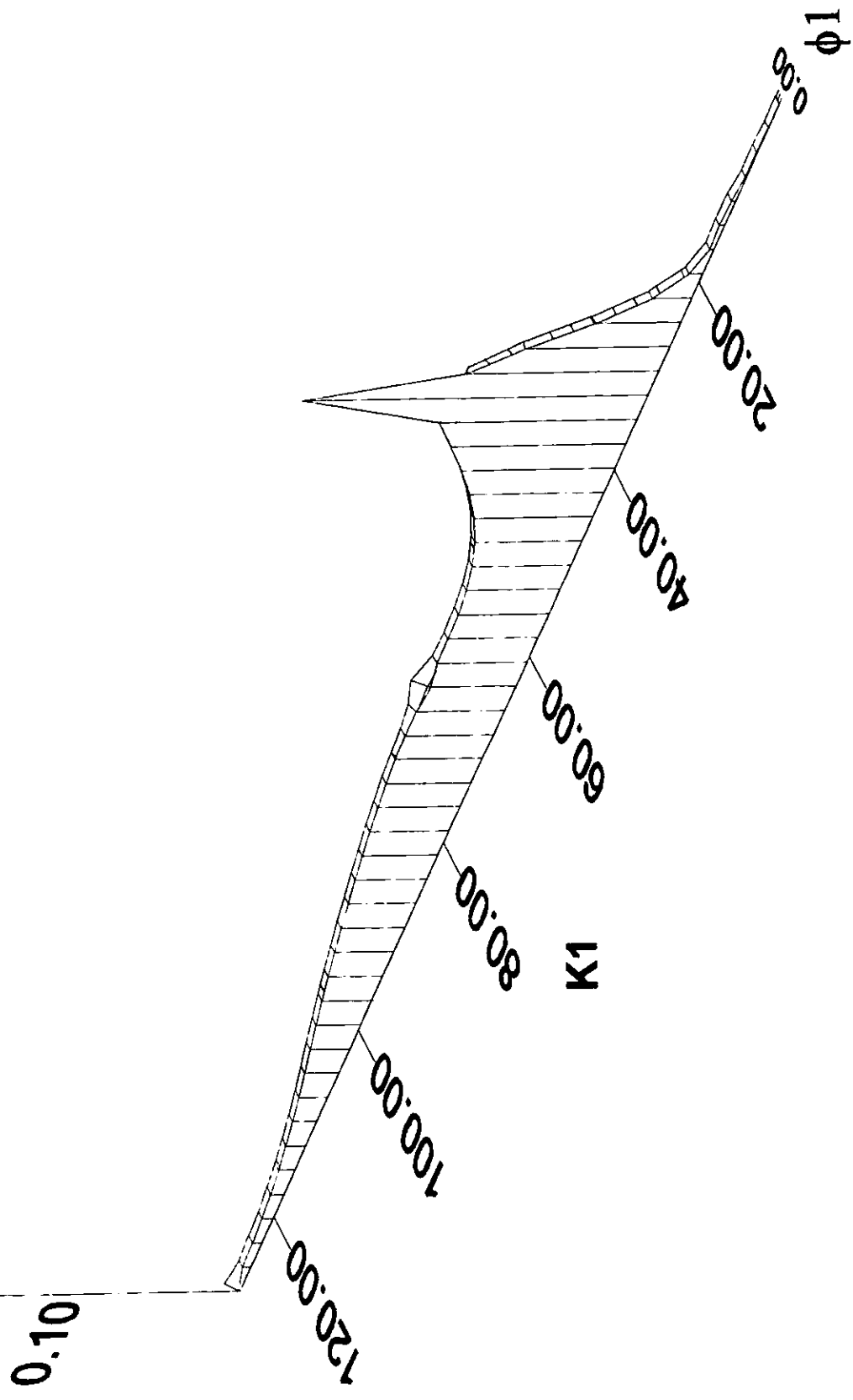
**RESULTADOS PARA VARIABLES DIFERENTES**

**JUEGO DE VALORES REALES:**

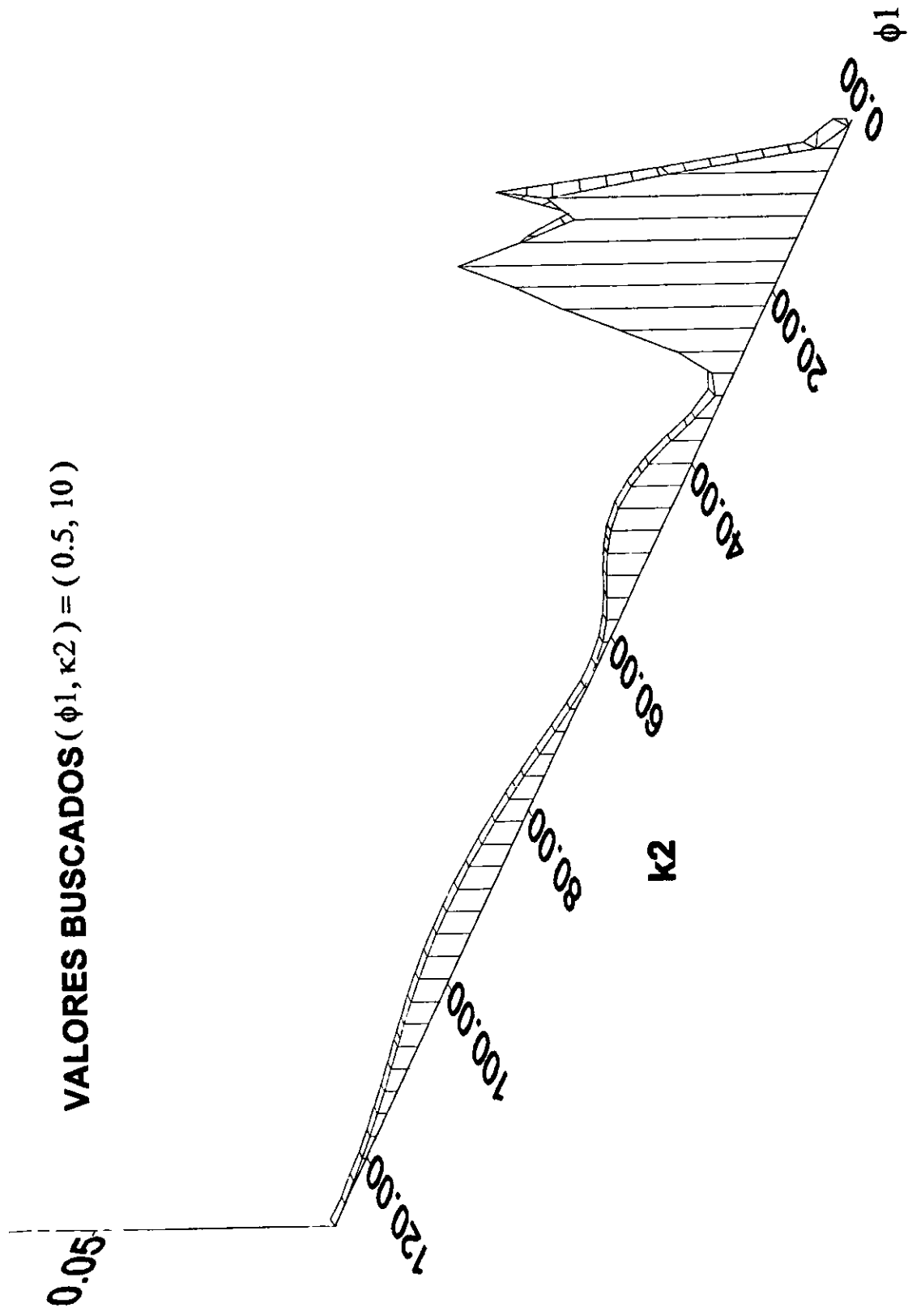
$s_1 = 7.0$        $k_1 = 50.0$        $h_1 = 100.0$        $\phi_1 = 0.5$        $c_{T1} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD1} = 2000.0$        $r_{D1} = 1.0$   
 $s_2 = 3.0$        $k_2 = 10.0$        $h_2 = 100.0$        $\phi_2 = 0.1$        $c_{T2} = 5 \times 10^{-6}$        $r_{eD2} = 2000.0$        $r_{D2} = 1.0$

| ITERACIONES | VALORES INICIALES |          | VALORES CALCULADOS |          |
|-------------|-------------------|----------|--------------------|----------|
|             | $k_1$             | $\phi_1$ | $k_1$              | $k_2$    |
| 200         | 1.00              | 0.10     | 50.0000            | 0.4999   |
| 200         | 80.00             | 0.10     | 50.0000            | 0.4999   |
| 200         | 25.00             | 0.25     | 49.9999            | 0.5000   |
|             | $k_2$             | $\phi_1$ | $k_2$              | $\phi_1$ |
| 200         | 1.00              | 0.10     | 10.0000            | 0.5000   |
| 200         | 10.00             | 0.10     | 9.5908             | 0.1600   |
| 600         | 10.00             | 0.10     | 9.5307             | 0.2116   |
| 1500        | 10.00             | 0.10     | 9.5937             | 0.2936   |
| 3500        | 10.00             | 0.10     | 9.8599             | 0.4365   |
|             | $k_1$             | $\phi_2$ | $k_1$              | $\phi_2$ |
| 200         | 1.00              | 0.10     | 50.0000            | 0.1000   |
| 200         | 10.00             | 0.10     | 50.0000            | 0.1000   |
| 200         | 25.00             | 0.25     | 50.0000            | 0.1000   |

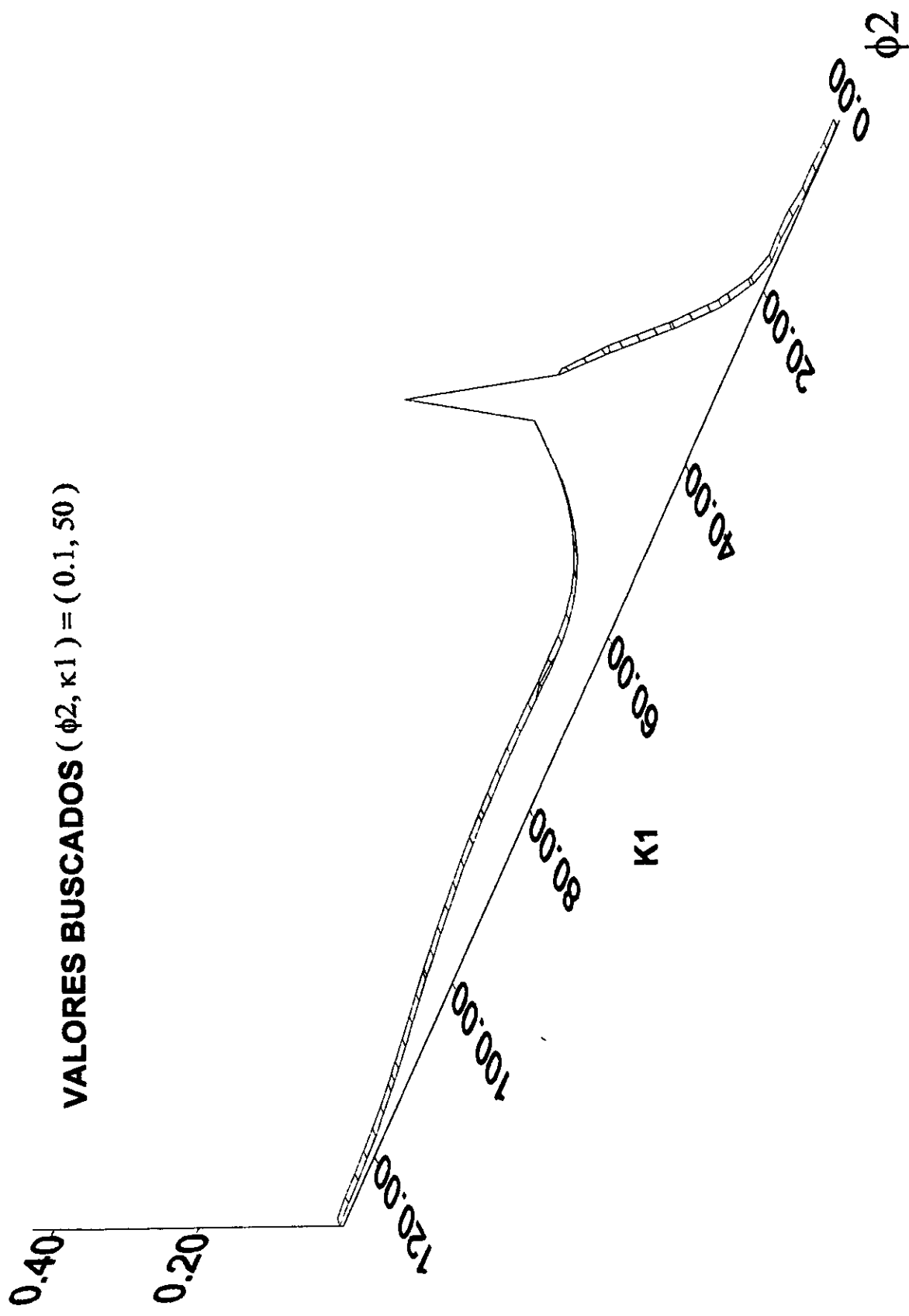
VALORES BUSCADOS ( $\phi_1, \kappa_1$ ) = (0.5, 50)



**FIGURA 6.50.- Espaciamientos diferentes en X ( 0.01, 0.02, 0.04, ..., 0.64 ) y Y ( 1, 2, 4, ..., 128 ).**



**FIGURA 6.51.- Espaciamientos diferentes en X ( 0.01, 0.02, 0.04, ..., 0.64 ) Y Y ( 1, 2, 4, ..., 128 ).**



**FIGURA 6.52.- Espaciamientos diferentes en X ( 0.01, 0.02, 0.04, ..., 0.64 ) y Y ( 1, 2, 4, ..., 128 ).**

TABLA 6.20

VALORES DE LAS VARIABLES UTILIZADAS PARA LAS FIGURAS 6.31 A 6.52.

| Figura | s <sub>1</sub> | s <sub>2</sub> | k <sub>1</sub> | k <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | φ <sub>1</sub> | φ <sub>2</sub> | C <sub>T1</sub>    | C <sub>T2</sub>    | F <sub>e01</sub> | F <sub>e02</sub> | Γ <sub>D1</sub> | Γ <sub>D2</sub> |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------|--------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| 6.31   | 7              | 3              | 10             | 15             | 100            | 100            | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.32   | 7              | 3              | 10             | 15             | 100            | 100            | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.33   | 7              | 3              | 10             | 15             | 100            | 100            | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.34   | 7              | 3              | 10             | 15             | 100            | 100            | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.35   | 3              | 3              | 25             | 15             | 50             | 50             | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.36   | 3              | 3              | 26             | 30             | 50             | 50             | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.37   | 3              | 3              | 27             | 31             | 80             | 35             | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.38   | 3              | 3              | 27             | 31             | 80             | 35             | 0.5            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.39   | 7              | 3              | 50             | 10             | 32             | 32             | 0.5            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.40   | 7              | 3              | 50             | 10             | 32             | 32             | 0.5            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.41   | 7              | 3              | 50             | 10             | 32             | 32             | 0.5            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.42   | 7              | 3              | 50             | 10             | 32             | 62             | 0.5            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 6x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.43   | 3              | 3              | 25             | 15             | 32             | 18             | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.44   | 3              | 3              | 25             | 15             | 22             | 38             | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.45   | 3              | 3              | 25             | 15             | 19             | 25             | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |



**TABLA 6.20**

**VALORES DE LAS VARIABLES UTILIZADAS PARA LAS FIGURAS 6.31 A 6.52.  
( continuación )**

| Figura | s <sub>1</sub> | s <sub>2</sub> | k <sub>1</sub> | k <sub>2</sub> | h <sub>1</sub> | h <sub>2</sub> | φ <sub>1</sub> | φ <sub>2</sub> | C <sub>T1</sub>    | C <sub>T2</sub>    | r <sub>ed1</sub> | r <sub>ed2</sub> | r <sub>D1</sub> | r <sub>D2</sub> |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------|--------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| 6.46   | 3              | 3              | 25             | 15             | 20             | 26             | 0.1            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.47   | 3              | 3              | 10             | 10             | 50             | 50             | 0.4            | 0.6            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.48   | 3              | 3              | 10             | 10             | 80             | 35             | 0.4            | 0.6            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.49   | 3              | 3              | 27             | 31             | 80             | 35             | 0.4            | 0.6            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.50   | 7              | 3              | 50             | 10             | 100            | 100            | 0.5            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.51   | 7              | 3              | 50             | 10             | 100            | 100            | 0.5            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |
| 6.52   | 7              | 3              | 50             | 10             | 100            | 100            | 0.5            | 0.1            | 5x10 <sup>-6</sup> | 5x10 <sup>-6</sup> | 2000             | 2000             | 1               | 1               |

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este estudio se tuvieron dos objetivos fundamentales los cuales fueron el desarrollar un algoritmo analítico para determinar la respuesta de un sistema estratificado, comunicado solamente por el pozo, sujeto a cualquier tipo de condición, y el determinar las propiedades de las capas que componen al sistema mediante un proceso de optimización.

( 1 ) .- El utilizar una metodología analítica en vez de un esquema numérico, permite una reducción sustancial en el tiempo de cómputo, obteniéndose resultados con mucha precisión.

( 2 ) .- Una ventaja de la metodología desarrollada es que permite utilizar cualquier tipo de solución existente para una capa simple, para determinar la respuesta de un sistema complejo como es el estratificado.

( 3 ) .- Se tuvieron algunos problemas en el uso del algoritmo de inversión de Stehfest, por lo cual en algunos casos específicos y bajo ciertas condiciones, se recomienda el manejo de algún otro algoritmo, como el de Crump, para poder resolver los problemas que se presenten, ya sea de inestabilidad o de funciones complejas o mal definidas para el uso de Stehfest.

( 4 ) .- Los análisis de sensibilidad realizados demostraron que no es conveniente efectuar una caracterización o alguna recomendación concluyente, basándose solamente en la respuesta de presión del sistema, ya que se pueden tener comportamientos muy similares para propiedades o características diferentes. Como se

pudo comprobar, el poder determinar los gastos fraccionales resultó fundamental para poder establecer diferencias en dos sistemas estratificados con propiedades distintas, pero con respuestas de presión sumamente parecidas.

( 5 ) .- Se recomienda tener cuidado con el manejo de algunas constantes, ya que se demostró la sensibilidad que presentan algunas soluciones, para cambios que aparentemente son mínimos.

( 6 ) .- El contar con una herramienta de evaluación como la desarrollada en este trabajo, representa una gran ventaja para afrontar las dificultades que se presentan actualmente en los trabajos de campo. Cada vez son más complejos los métodos utilizados en el campo para la explotación de los pozos: terminaciones multilaterales, fracturamientos masivos, incorporación de horizontes productores en combinación con los que están en explotación, y así sucesivamente, por lo que la parte evaluatoria es cada vez más compleja. Este algoritmo es de fácil aplicación, y de resultados rápidos y precisos en la gran mayoría de los casos.

## NOMENCLATURA

- $B$  = Factor de volumen,  $bl @ cy / bl @ cs$ .
- $C_D$  = Coeficiente de almacenamiento del pozo, adimensional.
- $c_T$  = Compresibilidad total del sistema,  $psi^{-1}$
- $c_{Tj}$  = Compresibilidad total de la capa  $j$ ,  $psi^{-1}$
- $h$  = Espesor total, pie.
- $h_j$  = Espesor de la capa  $j$ , pie.
- $I_0(u)$  = Función Bessel de segundo orden, grado cero, adimensional.
- $I_1(u)$  = Función Bessel de segundo orden, grado uno, adimensional.
- $K_0(u)$  = Función Bessel de primer orden, grado cero, adimensional.
- $K_1(u)$  = Función Bessel de primer orden, grado uno, adimensional.
- $k_{avg}$  = Permeabilidad promedio, md.
- $k$  = Permeabilidad, md.
- $k_j$  = Permeabilidad de la capa  $j$ , md.
- $L$  = Longitud, pie.
- $L_{xfj}$  = Longitud de una ala de fractura en la capa  $j$ , pie.
- $p_{wD}$  = Presión del pozo, adimensional.
- $p_j$  = Presión en la capa  $j$ , psi.
- $p_{Dj}$  = Presión en la capa  $j$ , adimensional.
- $q$  = Ritmo de producción, BPD.
- $q_D$  = Ritmo de producción, adimensional.
- $q_{Dj}$  = Ritmo de producción en la capa  $j$ , adimensional.
- $q_{Dj}^{\wedge}$  = Ritmo de producción fraccional, adimensional

- $r$  = Radio, pie.
- $r_w$  = Radio del pozo, pie.
- $r_D$  = Radio, adimensional
- $s$  = Factor de película, adimensional.
- $s_j$  = Factor de película en la capa  $j$ , adimensional.
- $s_f$  = Factor de película en la fractura, adimensional.
- $t$  = Tiempo, hr.
- $t_D$  = Tiempo, adimensional.
- $t_j$  = Tiempo en la capa  $j$ , hr.
- $t_{Dj}$  = Tiempo en la capa  $j$ , adimensional.
- $u$  = Variable de Laplace
- $u_j$  = Variable de Laplace al tiempo  $t_{Dj}$
- $W$  = Ancho de fractura, pie.
- $X_D$  = Distancia en la dirección  $x$ , adimensional.
- $\eta_{avg}$  = Difusividad promedio, md/psi<sup>-1</sup>.
- $\eta$  = Difusividad, md/psi<sup>-1</sup>.
- $\eta_j$  = Difusividad en la capa  $j$ , md/psi<sup>-1</sup>.
- $\phi$  = Porosidad, fracción.
- $\phi_j$  = Porosidad de la capa  $j$ , fracción.
- $\mu$  = Viscosidad, cp.

## REFERENCIAS

- \* 1.- Spath J. B., Ozkan E. y Raghavan R. : " An Efficient Algorithm for Computation of Well Responses in Commingled Reservoirs ", SPEFE, Junio 1994.
- \* 2.- Spath J. B. : " Solutions for Vertically fractured Injection Wells in Heterogeneous Reservoirs ", MS thesis, Texas A&M U., College Station ( Abril 1989 ).
- \* 3.- Camacho V. , R. C. , Raghavan, R. y Reynolds, A. C. : " Response of Fractured Wells Producing Layered Reservoirs: Unequal Fracture Length. ", SPEFE ( Marzo 1987 ) 9.
- \* 4.- Chao Gao, B. S. : " Modeling Commingled Reservoirs With Pressure Dependent Properties and Unequal Initial Pressures in Diferent Layers: Analytical Solutions and Software Development ", PhD Thesis, Texas A & M University, Mayo 1996.
- \* 5.- Blasingame T. A. y Poe Jr. B. D. : " Semianalytic Solutions for a Well With a Single Finite-Conductivity Vertical Fracture ", SPE 26424 presented at the 1993 Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, ( Octubre 1993 ) 3-6.
- \* 6.- Ozkan E. y Raghavan R. : " New Solutions for Well Test Analysis Problems: Part I - Analytical Considerations ", SPEFE ( Septiembre 1991 ) 359-368.

- \* 7.- Ozkan E. y Raghavan R. : " New Solutions for Well Test Analysis Problems: Part II - Computational Considerations and Applications", SPEFE ( Septiembre 1991 ) 369-378.
- \* 8.- Lefkovits, H. C. : " A Study of The Behavior of Bounded Reservoirs Composed of Stratified Layers ", SPEJ ( Marzo 1961 ) 43-58.
- \* 9.- Cobb W. : " Transient Flow in Two-Layer Reservoirs With Commingled Fluid Production ", PhD dissertation , Stanford U., Stanford, CA ( Diciembre 1970 ).
- \* 10.- Tariq, S. M. : " A Study of the Behavior of Layered Reservoirs With Wellbore Storage and Skin Effect ", PhD dissertation , Stanford U., Stanford, CA ( Diciembre 1970 ).
- \* 11.- Larsen, L. : " Wells Producing Commingled Zones With Unequal Initial Pressures and Reservoir Properties ", artículo SPE 10325 presentado en el 1981 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio, Texas, ( Octubre 1981 ) 5-7.
- \* 12.- Ehlig-Economides, C. A. y Joseph, J. A. : " A New Test for Determination of Individual Layer Properties in a Multilayered Reservoir ", SPEFE ( Septiembre 1987 ) 261-283.
- \* 13.- Mavor, M. J. y Walkup, G. W. Jr. : " Application of the Parallel Resistance

Concept to Well Test Analysis of Multilayered Reservoirs ", artículo SPE 15117 presentado en el 1986 SPE California Regional Meeting, Oakland, CA, ( Abril 1986 ) 2-4.

- \* 14.- Kuchuk, F. J. y Wilkinson, D. J. : " Transient Pressure Behavior of Commingled Reservoirs. ", SPEFE ( Marzo 1991 ) 111 - 120.
- \* 15.- Al-Hussainy, R., Ramey, H. J. Jr. y Crawford, P. D. : " The Flow of Real Gases Through Porous Media ", JPT ( Mayo 1966 ) 324-363.
- \* 16.- Agarwal, R. B. : " Real Gas Pseudo-Time - A New Function for Pressure Buildup Analysis of MHS Gas Wells ", artículo SPE 10325 presentado en el 1979 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Las Vegas, NV, ( Septiembre 1979 ) 23-26.
- \* 17.- Frain, m. L. y Wattenbarger, R. A. : " Gas Reservoir Decline-Curve Analysis Using Type Curves With Real Gas Pseudo-pressure and Normalized Time ", SPEFE ( Diciembre 1987 ) 671-682.
- \* 18.- Ding, W., Mustafa, O. y Reynolds, A. C. : " Analysis of Gas Well Late-Time Pressure and Rate Data ", JPSE 4 ( 1990 ) 293-370.
- \* 19.- Stehfest, H. : " Numerical Inversion of Laplace Transforms. ", Communication of The ACM ( Enero 1970 ) 13, No. 1,47.



- \* 20.- van Everdingen, A. F. y Hurst, W. : " The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs ", Trans. AIME ( 1949 ) 186, 305.
- \* 21.- Onur, M., Reynolds, A. C. y Raghavan, R. : " Interference Testing in Commingled Multilayered Reservoirs ", artículo SPE 15132 presentado en el 56th California Regional Meeting of the SPE, Oakland, CA, ( Abril 1986 ) 2-4.
- \* 22.- Bennet, C. O., Raghavan, R. y Reynolds, A. C. : " Analysis of Finite Conductivity Fractures Intercepting Multilayered Reservoirs ", artículo SPE 11030 presentado en el 57th Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, LA, ( Septiembre 1982 ) 26-29.
- \* 23.- de Swaan-O., A. : " Analytical Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by Well Testing ", SPEJ ( Junio 1976 ) 117, Trans. AIME, 261.
- \* 24.- Warren, J. E. y Root, P. J. : " The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs ", SPEJ ( Septiembre 1963 ) 245, Trans. AIME, 228.
- \* 25.- Vásquez Cruz, M. A. y Camacho Velázquez, R. C. : " Analysis of Short Transient Tests Affected by Changing Wellbore Storage ", SPEREE ( Junio 1998 ).
- \* 26.- Chen Z. y Economides M. J. : " Fracturing Pressures and Near - Well Fracture Geometry of Arbitrarily Oriented and Horizontal Wells ", SPE 30531, Octubre 1995.

- \* 27.- Yew, C. H. y Li. Y. : " On Fracture Design of Deviated Wells ", artículo SPE 19722, presentado en el 1989 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio, Texas, ( Octubre 1989 ) 8-11.
- \* 28.- Yew, C. H. y Li. Y. : " Fracturing of a Deviated Well ", SPEFE, ( Noviembre 1988 ) 429-437.
- \* 29.- Hallam, S. D. y Last, N. C. : " Geometry of Hidraulic Fractures From Modestly Deviated Wellbores ", artículo SPE 20656 presentado en el 65th SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, LA, ( Septiembre 1990 ) 23-26.
- \* 30.- Deily, F. H. y Owens, T. C. : " Stress Around a Wellbore ", artículo SPE 2557, 1969.
- \* 31.- Richardson, R. M. : " Hydraulic Fracture in Arbitrarily Oriented Boreholes: an Analytic Solution ", Proc., Workshop on Hydraulic Fracturing Stress Measurements, Monterey, California ( Diciembre 1981 ).
- \* 32.- Perkins, T. K. y Kern, L. R. : " Widths of Hydraulic Fractures ", JPT, ( Septiembre 1961 ) 937-49; Trans., AIME, 222.
- \* 33.- Valko, P. y Economides, M. J. : Hydraulic Fracture Mechanics, John Wiley y Sons Ltd, 1995.

- \* 34.- Abramowitz, M. y Stegun, I. A. : " Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications Inc., New York City ( 1972 ) 480,483,486.
- \* 35.- Lee , S. T. y Brockenbrough, J. R. : " A New Aproximate Analytic Solution for Finite Conductivity Vertical Fractures ", SPEFE ( Febrero 1986) 75 - 88.
- \* 36.- Crump, K. S. : " Numerical Inversion of the Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation ", J. Assn. Comp. Machinery ( 1976 ) 23,89.
- \* 37.- Stewart, G. y Ascharsobbi, F. : " Well Test Interpretation for Naturally Fractured Reservoirs ", artículo SPE 18173 presentado en el 1988 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, TX, ( Octubre 1988 ) 2 - 5.
- \* 38.- Kahaner D., Moler C. y Nash S. : " Numerical Methods and Software ", Prentice Hall, 1998.
- \* 39.- Richardson A. Joel, Arizona State University, Tempe, Arizona.