UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"UN MODELO ESTOCASTICO DE EQUILIBRIO: DETERMINACION DE PRECIOS DE BIENES Y ACTIVOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

W E N D Y N I E V A P E R E Z

282802

DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ

MEXICO, D. F. 2000

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis.
"Un modelo estocástico de equilibrio: Determinación de precios de bienes y activos".

realizado por WENDY NIEVA PEREZ

con nùmero de cuenta 9326372-0 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Francisco Venegas Martínez	
Propietario	M. en C. Beatriz Eugenia Rodríguez Fernández	
Propietario	Mat. Marco Antonio Esquivel Pichardo	
Suplente	M. en E. Arturo Lorenzo Valdés	
Suplente	Act. Eric Manuel Rodríguez Herrera	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz

A mis padres por su cariño y comprensión

A mi hermana, mi sobrino, mi cuñado y a mi abuelita por su constante soporte

A Gerardo por su amor y paciencia

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Francisco Venegas Martínez por su asesoría, paciencia e incansable apoyo durante la realización del presente trabajo.

A la M. en C. Beatríz E. Rodríguez Fernández por su amistad, enseñanzas y comentarios para la culminación de este trabajo.

OBJETIVO

El objetivo de este trabajo de tesis es desarrollar un modelo macroeconómico estocástico de equilibrio general para una economía cerrada con cuatro sectores: consumidores, empresas, sistema financiero y gobierno. La dinámica del nivel general de precios es conducida por un proceso de difusión con saltos; la tasa de inflación esperada es modelada por un movimiento Browniano geométrico y los movimientos extremos e inesperados en el nivel general de precios son guiados por un proceso de Poisson.

En el modelo se formula el problema de decisión del consumidor. Los activos que forman la riqueza real son: dinero, títulos de deuda y títulos de capital (acciones). El consumidor desea maximizar en todo momento la utilidad del consumo del bien que produce la economía y la tenencia de saldos reales por sus servicios de liquidez[1].

Con el propósito de obtener soluciones analíticas, el problema del consumidor supone una utilidad logarítmica; las decisiones óptimas son encontradas utilizando herramientas de control óptimo estocástico, así como de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Por otra parte, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue una ecuación estocástica donde aparecen los retornos de los activos, el consumo y los impuestos. Se supone que los rendimientos de los activos también siguen procesos de difusión con saltos. En el modelo los rendimientos de equilibrio de los diferentes activos son calculados endógenamente.

En el caso de las empresas, estas tienen una tecnología cuya trayectoria es definida por un proceso de difusión con saltos y su rendimiento también es guiado

---

[1] Modelo macroeconómico estocástico del tipo de Ramsey

por un proceso similar. Finalmente, a fin de cerrar el modelo macroeconómico se introduce el gasto público.

Al igual que las otras variables estocásticas definidas anteriormente, tanto el gasto público como la oferta monetaria siguen una trayectoria conducida por un proceso de difusión con saltos.

Otra parte importante en el modelo son los impuestos que se recaudan, cuyas variables estocásticas están guiadas por procesos de Wiener y los movimientos extremos o atípicos siguen un proceso de Poisson.

Después de obtener las condiciones de equilibrio se determinan endógenamente la tasa de inflación, los rendimientos de los activos, el nivel general de precios y el nivel óptimo de impuestos. Se determinan la tasa de interés nominal y la tasa de expansión monetaria, congruentes con la maximización del bienestar económico de los agentes. Por terminar y con base en el modelo, en las relaciones de equilibrio se analizan diferentes aspectos de las políticas monetaria y fiscal, examinando las implicaciones que puedan tener estas políticas en el bienestar económico por cambios permanentes en las variables exógenas.

CONTENIDO

CONCLUSIONES

APENDICES

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION

En este trabajo de tesis se desarrolla un modelo macroeconómico estocástico del tipo Ramsey con un sector financiero. El nivel general de precios, se determina en forma endógena, evoluciona de acuerdo a un proceso Markoviano de difusión combinado con saltos de Poisson. Más específicamente, el movimiento Browniano geométrico conduce a la tasa de inflación esperada y el proceso de Poisson conduce los movimientos atípicos en el nivel general de precios. Los procesos estocásticos en donde las variables pueden saltar, proporcionan un ambiente más rico para racionalizar dinámicas de precios las cuales no son posibles de generar con modelos que únicamente consideran movimientos Brownianos.

El modelo incorpora la exposición a distintos riesgos financieros en la toma de decisiones de los agentes, además de considerar de manera específica el efecto de la incertidumbre fiscal y monetaria sobre el equilibrio. En este modelo el equilibrio macroeconómico depende de las parámetros de los procesos estocásticos exógenos que guían la dinámica de las variables de política relevantes. De esta forma podemos evaluar el impacto de la incertidumbre sobre el comportamiento de la economía.

Para efectos de modelación se parte del problema de maximización intertemporal de la utilidad de un consumidor representativo con vida infinita. En el modelo se supone utilidad logarítmica a fin de obtener soluciones analíticas que conduzcan a un estudio más simple.

Se examinan los efectos de la política monetaria y fiscal en el desempeño de la economía. Por último, se evalúa el impacto en el bienestar económico de los agentes por cambios permanentes en las variables exógenas.

En la literatura financiera, el supuesto de que los datos tienen una distribución lognormal es muy común. Otro supuesto usual es que las variables financieras siguen un movimiento Browniano geométrico (proceso de difusión). Sin embargo, existe evidencia empírica contundente de que la mayoría de las variables financieras, incluyendo la inflación, no se comportan de acuerdo a una distribución lognormal.

Una de las características que distingue a las variables financieras es que ocasionalmente se presentan movimientos inesperados (auges o caídas). Estos movimientos ocurren con más frecuencia de lo que se esperaría con una distribución lognormal (incluso si se supone una volatilidad razonablemente moderada), lo cual es sumamente importante para la teoría y la investigación empírica.

El modelo propuesto en este trabajo toma en cuenta y evalúa el desempeño de la economía como un todo, cuando dichos cambios extremos y repentinos se presentan. En el análisis de datos, cuando se compara una distribución estandarizada empírica de una variable financiera con una distribución normal estándar, es común observar que la cresta de la distribución empírica es más alta que la de una distribución normal estandar. Dado que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar, es decir, los mismos puntos de inflexión, entonces la colas de la distribución empírica tienen necesariamente que ser más anchas para compensar el área de la cresta, que en ambos casos deben ser igual a uno. Esta diferencia es típica en muchas variables financieras, incluso en la tasa de inflación.

En general, se observa que la distribución empírica diverge notablemente de la distribución normal. Una cresta que es mucho más alta significa que existe una probabilidad más grande, de lo que se esperaría con respecto de la distribución lognormal, de que se presenten movimientos pequeños. Además, debido a las colas más gordas(o más pesadas) de la distribución empírica se tiene una mayor probabilidad de que los valores extremos ocurran, en comparación con la distribución normal.

La mezcla de procesos de difusión con procesos de saltos proporcionan una alternativa para el modelado de colas gordas. Existe una tendencia creciente en la literatura de economía internacional que utiliza la maximización de utilidad esperada con restricciones que incluyen procesos de difusión con saltos para estudiar el comportamiento de la dinámica del tipo de cambio[2].

[2] Algunos ejemplos se encuentran en Venegas-Martínez (2001) y (2000), Svensson (1992), y Penati y Pennacchi (1989).

CAPITULO 1

En los últimos años, la economía mundial ha experimentado una serie de cambios y transformaciones que han impactado tanto la forma de llevar a cabo el análisis económico, como el diseño de la política económica. Estos cambios han generado nuevos paradigmas que resaltan la importancia de la exposición a diferentes tipos de riesgos de las políticas gubernamentales. Estos paradigmas, en general, han abierto nuevos horizontes dentro de la teoría económica y, consecuentemente, al empleo de herramientas más sofisticadas que permitan una mayor comprensión de los fenómenos de naturaleza estocástica.

En el campo del análisis económico, uno de los cambios actuales más importantes es la superación del marco determinista de análisis; no sólo como resultado del riesgo inherente a la mayoría de los instrumentos (sobre todo los financieros), sino como respuesta más amplia a los procesos de decisión de los agentes económicos. Esto se aprecia claramente en los programas de política económica que están diseñando los gobiernos, entre ellos el mexicano, ya que no sólo hacen énfasis en objetivos viables que recuperen las contradicciones presentes en la economía (inflación, desempleo, crecimiento), sino que también plantean dispositivos de gobiernos congruentes, eficaces y creíbles. La independencia del Banco Central, es uno de los principales mecanismos para reducir la inflación y dar solidez a la política moneraria[3]. Esta solidez se alcanza gracias a la restricción impuesta sobre el gobierno para la emisión de dinero y limita la posibilidad de que financie su gasto por esa vía generando procesos inflacionarios. Dado que los agentes conocen la tasa de crecimiento de la oferta monetaria y las decisiones de

[3] Goodhart, 1993.

política (el gasto gubernamental en particular) no la afectan por independencia de decisiones, las desviaciones esperadas son mínimas, provocando un ambiente donde el componente estocástico de la inflación se reduce considerablemente.

A partir de 1987, México desarrolló una política económica de este tipo, el objetivo fue reducir el nivel de inflación, eliminando los componentes inerciales. En los hechos, este mecanismo originó otro análogo, empleando el tipo de cambio como ancla nominal. De esta forma se eliminaron las expectativas hiperinflacionarias y de devaluaciones abruptas que en años anteriores dominaron el mercado. En sentido estricto esto no significa que desaparezca el riesgo.

La adecuada y constante administración de riesgos reduce la varianza de las variables de política, lo que permite alcanzar dispositivos gubernamentales congruentes, eficaces y creíbles. Con esto se minimiza el impacto esperado de los shocks en la economía estrechando las bandas de incertidumbre, además de considerar de manera específica el efecto de la incertidumbre fiscal y monetaria sobre el equilibrio. En el extremo como se verá en el modelo desarrollado, cuando se eliminan estas varianzas y los saltos se llega al caso determinista.

Por otro lado, la discusión permanente sobre la estrategia de política económica, así como los instrumentos y mecanismos para desarrollarla, se han ubicado en un marco de referencia más amplio en donde se incorporan factores estocásticos que lo hacen más rico.

En este marco, los instrumentos de política monetaria (tasa de expansión monetaria y tasa de interés) con instrumentos de política fiscal (gasto público e impuestos) se pueden combinar para reducir la exposición a los diferentes tipos de riesgos que pueden tener impactos considerables en la economía.

La diferencia radica en cual de ellas se emplea como eje y tiene mayor peso en la estrategia general[4]. Aunque ambas hacen énfasis en la necesidad de estabilizar la demanda agregada, el debate radica en el método: ya sea, vía cambios en impuestos y gasto de gobierno, o bien por medio del crecimiento de la oferta de dinero. A este respecto, la política economíca seguida por México desde los años 70 presenta un claro ejemplo de la presencia de procesos aleatorios con saltos ligados a la tasa de inflación y a los precios de los activos.

Al inicio de los años 70, México siguió una estrategia expansiva, centrada fundamentalmente en el crecimiento del gasto de gobierno. De esta forma, al aumentar la demanda se incrementaba el nivel de producción y consecuentemente se esperaba un incremento en los salarios, créditos e inversiones, con lo que se pretendía generar crecimiento y bienestar[5]. Sin embargo, estos programas presentaron una trampa en el corto plazo (los límites se experimentaron al inicio de los 80's), ya que los medios empleados para financiar el gasto fueron la contratación de deuda (en su mayoría externa) y la emisión de dinero. En consencuencia, al periodo de crecimiento le siguió una ola de crisis recurrentes, con espirales inflacionarias y saltos en el nivel general de precios. Por lo que un auge en el consumo creó una trampa en el corto plazo, que finalmente llevó a problemas de deuda y financiamiento del déficit público[6]. En los años 90, la estrategia fue reducir la inflación y consolidar la base de crecimiento como el eje de la política económica. Al mismo tiempo, se aplicó una política monetaria restrictiva, se corregieron las inercias en los precios anclándolos nominalmente y se estabilizaron las finanzas públicas. De esta forma, la consolidación de un crecimiento económico sostenido

[4] Teorías Keynesiana vs. Monetarista.

[5] Cárdenas, 1995.

[6] Aspe, 1993.

y sustentable se planteó como objetivo final, aunado con un proceso de depuración y reestructuración de las relaciones económicas en el país. Sin embargo una debacle financiera interrumpió en diciembre de 1994 y los saltos en el nivel general de precios se hicieron recurrentes.

En síntesis, las condiciones actuales de la evolución de la economía plantean la necesidad de marcos de análisis más sofisticados que incorporen factores estocásticos, capaces de introducir no sólo las relaciones básicas del juego económico, sino que lo hagan a partir de la modelación de agentes complejos, que respondan a saltos aleatorios en las variables económicas.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. La siguiente sección presenta el modelo estocástico que describe el comportamiento del nivel general de precios. El capítulo 3, estudia el problema de decisión de los consumidores. El capítulo 4, desarrolla el problema de decisión de las empresas. A fin de cerrar el modelo, en el capítulo 5 se estudia el comportamiento del gobierno. Los capítulos 6 y 7 presentan los equilibrios real y macroeconómico, respectivamente. El capítulo 8 estudia el bienestar económico. En el capítulo noveno se presenta la tasa óptima de interés consistente con la maximización del bienestar. El capítulo 10 estudia la política monetaria. En el capítulo 11 se encuentra la tasa de expansión monetaria congruente con la tasa óptima del bienestar. El capítulo 12 estudia la política fiscal para posteriormente discutir sobre los instrumentos de política económica y las implicaciones que tienen para el bienestar de los consumidores. Finalmente se presentan las conclusiones.

CAPITULO 2

2. El modelo propuesto

Con el propósito de generar soluciones que sean analíticamente tratables, la estructura de la economía se mantendrá lo más simple posible. Muchos de los supuestos son similares a los que se encuentran en Turnovsky (1993). Suponemos que la economía produce y consume un solo bien de carácter perecedero y que está poblada por consumidores idénticos con vida infinita que maximizan utilidad, o si se prefiere por familias idénticas que maximizan la utilidad de sus hijos, nietos y demás descendientes.

2.1 El nivel general de precios

Se supone que los individuos perciben que el precio del bien que produce la economía, P_t, es conducido por un proceso estocástico de difusión con saltos:

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}W_{P,t} + \nu_P P_t \mathrm{d}Q_{P,t}, \tag{2.1.1}$$

donde π, es el parámetro de tendencia que representa la tasa de inflación promedio esperada condicional de que ningún salto ocurra, σ_P es la volatilidad esperada de la tasa de inflación y $1+\nu_P$ es el tamaño promedio esperado de posibles saltos en el nivel general de precios. El proceso $W_{P,t}$ es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, $W_{P,t}$ presenta incrementos normales independientes con $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{P,t}] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_{P,t}] = \mathrm{d}t$. Suponemos que los saltos en el nivel general de precios siguen un proceso de Poisson $Q_{P,t}$ con parámetro de intensidad λ_P, de tal manera que

$$\Pr\{\text{un salto unitario durante } \mathrm{d}t\} = \Pr\{\mathrm{d}Q_{P,t} = 1\} = \lambda_P \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t), \tag{2.1.2}$$

mientras que[7]

$$\Pr\{\text{ningún salto en d}t\} = \Pr\{\mathrm{d}Q_{P,t} = 0\} = 1 - \lambda_P \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t). \tag{2.1.3}$$

Por lo tanto, $\mathrm{E}[\mathrm{d}Q_{P,t}] = \mathrm{Var}[\mathrm{d}Q_{P,t}] = \lambda_P \mathrm{d}t$. El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $Q_{P,0} = 0$. En todo lo que sigue, se supone que $W_{P,t}$ y $Q_{P,t}$ no están correlacionados entre sí. Observe también que el precio normalizado por saltos, p_t, definido mediante

$$p_t = \frac{P_t}{(1+\nu_P)^{Q_{P,t}}}, \tag{2.1.4}$$

satisface

$$\frac{\mathrm{d}p_t}{p_t} = \frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} - \nu_P \mathrm{d}Q_{P,t}, \tag{2.1.5}$$

de donde

$$\frac{\mathrm{d}p_t}{p_t} = \pi \mathrm{d}t + \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t}, \tag{2.1.6}$$

el cual representa un movimiento Browniano geométrico.

[7] Como siempre, $o(h)$ significa que $o(h)/h \to 0$ cuando $h \to 0$.

CAPITULO 3

3. Problema de decisión de los consumidores

3.1 Activos de los consumidores

El consumidor representativo posee tres diferentes acervos de activos: dinero, M_t; títulos de deuda pública, B_t; y títulos de capital (acciones), k_t. En consecuencia, la riqueza real, a_t, del individuo está dada por.

$$a_t = m_t + b_t + k_t, \tag{3.1.1}$$

donde $m_t = M_t/P_t$ es son los saldos monetarios reales y $b_t = B_t/P_t$ es la tenencia de bonos del sector público en términos reales. El consumidor obtiene satisfacción por el consumo del bien que produce la economía y por la tenencia de saldos reales por sus servicios de liquidez. Se supone que la función de utilidad esperada es del tipo Von Neumann-Morgenstern. Específicamente, la función al tiempo $t = 0$, V_0, de un individuo representativo, competitivo y adverso al riesgo tiene la siguiente forma separable:

$$V_0 = \mathrm{E}_0 \left\{ \int_0^\infty \left[u(c_t) + v(m_t) \right] e^{-\delta t} \mathrm{d}t \right\}, \tag{3.1.2}$$

donde E_0 es la esperanza condicional al conjunto información disponible en el tiempo $t = 0$. En particular, se selecciona $u(c_t) = \theta \log(c_t)$ y $v(m_t) = \log(m_t)$ a fin de generar soluciones analíticas que faciliten el análisis. Por otra parte, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación estocástica:

$$\mathrm{d}a_t = a_t[N_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + N_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t} + N_{k,t}\mathrm{d}R_{k,t}] - c_t(1+\tau_c)\mathrm{d}t - \mathrm{d}\tau_t, \tag{3.1.3}$$

donde

$N_{j,t} \equiv \dfrac{j_t}{a_t}$ proporción del portafolio en el activo j, $j = m, b, k$,

$\mathrm{d}R_{j,t} =$ tasa de retorno real después de impuestos sobre el activo j, $j = m, b, k$,

$\mathrm{d}\tau_t =$ impuestos sobre riqueza,

$\tau_t =$ impuesto sobre el consumo.

3.2 Rendimientos de los activos

A continuación determinaremos el rendimiento de los activos. Suponemos que las tasas nominales del dinero y de los bonos son cero e i, respectivamente. El retorno estocástico por la tenencia de saldos reales al tiempo t, $\mathrm{d}R_{m,t}$, es simplemente el cambio porcentual en el precio del dinero en términos de bienes. La aplicación del Lema de Itô[8] al cambio porcentual del inverso del nivel de precios, tomando (2.1.1) como el proceso subyacente, conduce a (véase el Apéndice A):

$$\mathrm{d}R_{m,t} = P_t \mathrm{d}\left(\frac{1}{P_t}\right) = r_m \mathrm{d}t - \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P,t}. \tag{3.2.1}$$

donde $r_m = -\pi + \sigma_P^2$. Y el retorno estocástico por la tenencia de bonos se obtiene en forma similar como:

$$\mathrm{d}R_{b,t} = r_b \mathrm{d}t - \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\right)\mathrm{d}Q_{P,t}, \tag{3.2.2}$$

donde $r_b = i(1-\tau_y) - \pi + \sigma_P^2$. Aquí, τ_y es la tasa de impuesto sobre ingresos por intereses realizados. Es importante observar que los rendimientos del dinero y de los bonos se ven afectados con la volatilidad y posibles saltos en el nivel

[8] véase Apéndice A.

general de precios. La tasa de retorno de las acciones después de impuestos será denotada, por el momento, mediante

$$\mathrm{d}R_{k,t} = r_k \mathrm{d}t + \sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} + \nu_k \mathrm{d}Q_{k,t}, \tag{3.2.3}$$

donde los procesos $\mathrm{d}W_{k,t}$ y $\mathrm{d}Q_{k,t}$ tienen características similares a los procesos definidos en (2.1.1).

Además, de los impuestos τ_y y τ_c que se pagan sobre el ingreso por intereses y por el consumo, respectivamente, el consumidor paga un impuesto sobre la riqueza de la forma

$$\mathrm{d}\tau_t = a_t \bar{\tau} \mathrm{d}t + a_t \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} + a_t \nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t}, \tag{3.2.4}$$

donde $\bar{\tau}$ es la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza real. Al igual que antes, $\mathrm{d}W_{\tau,t}$ y $\mathrm{d}Q_{\tau,t}$ comparten las mismas características que tiene el proceso de Wiener y el proceso de Poisson definidos en (2.1.1). La tendencia $\bar{\tau}$, así como las componentes de difusión y salto, $\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t}$ y $\nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t}$, se determinan endógenamente.

3.3 Decisiones óptimas de los consumidores

El objetivo del consumidor es elegir, en cada momento, el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximicen (3.1.2) sujeto a (3.1.3). Notamos ahora que después de sustituir las expresiones (3.2.1)-(3.2.4) en la ecuación estocástica de acumulación de la riqueza, (3.1.3), ésta se transforma en:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} &= \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \mathrm{d}t \\
&\quad + \left[N_{k,t} \sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} - \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} \right] \\
&\quad + \left[(N_{m,t} + N_{b,t}) \Big(\frac{1}{1+\nu_P} - 1 \Big) \mathrm{d}Q_{P,t} + N_{k,t} \nu_k \mathrm{d}Q_{k,t} - \nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t} \right].
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

La solución del problema de maximización de utilidad total descontada sujeto a (3.3.1) y a la restricción de normalización:

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1, \tag{3.3.2}$$

están dadas por (véase Apéndice B):

$$c_t^* = \frac{\theta}{\beta_1(1+\tau_c)} a_t; \tag{3.3.3}$$

$$0 = \frac{1}{\hat{N}_{m,t}} + \beta_1 \left[r_m - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - \hat{N}_{m,t} - \hat{N}_{b,t})\nu_P} \right] - \phi; \tag{3.3.4}$$

$$0 = \beta_1 \left[r_b - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - \hat{N}_{m,t} - \hat{N}_{b,t})\nu_P} \right] - \phi; \tag{3.3.5}$$

y

$$0 = \beta_1 \left[r_k - \hat{N}_{k,t}\sigma_k^2 + (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} + \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + (1 - \hat{N}_{m,t} - \hat{N}_{b,t})\nu_k} \right] - \phi; \tag{3.3.6}$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (3.3.2). Después de restar (3.3.4) de (3.3.5), encontramos la proporción óptima de la riqueza asignada a la tenencia de saldos reales:

$$\hat{N}_{m,t} = \frac{1}{i(1-\tau_y)\beta_1}. \tag{3.3.7}$$

Asimismo, después de restar (3.3.5) de (3.3.6), tenemos que[9]

$$\hat{N}_{k,t} B - A - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + \hat{N}_{k,t}\nu_P} - \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + \hat{N}_{k,t}\nu_k} = 0, \tag{3.3.8}$$

[9] véase Derivaciones y Demostraciones de los resultados.

donde

$$B \equiv \sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2 > 0 \tag{3.3.9}$$

y

$$A \equiv r_k - r_b + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau}. \tag{3.3.10}$$

Claramente, la ecuación (3.3.8) es cúbica y, por lo tanto, tiene al menos una solución real, la cual denotaremos por $\hat{N}_{k,t}$. En particular si suponemos ν_P y ν_k son cero, equivalentemente, $\lambda_P = \lambda_k = 0$, se obtiene como solución única[10]:

$$\hat{N}_{k,t}|_{\nu_P=\nu_k=0} = \frac{A}{B}. \tag{3.3.11}$$

Si los parámetros de intensidad λ_P y λ_k se ajustan de tal manera que ν_P y ν_k sean de la misma magnitud, entonces (3.3.8) se transforma en una ecuación cuadrática cuyas soluciones están dadas por

$$\hat{N}_{k,t}|_{\nu_P=\nu_k} = \frac{A\nu_P - B \pm \sqrt{(A\nu_P + B)^2 + 4B\nu_P^2(\lambda_P + \lambda_k)}}{2B\nu_P}. \tag{3.3.12}$$

Observamos que el discriminante es positivo y, en consecuencia, ambas raíces son reales. Notemos también que en ningún caso se han impuesto restricciones para que las proporciones de la riqueza asignadas a la tenencia de activos sean estrictamente positivas y menores que la unidad. Por lo tanto, las ventas en corto de activos son permitidas en todo momento. Finalmente, el portafolio óptimo queda entonces completamente determinado con $\hat{N}_{b,t}$, el cual se obtiene a partir de (3.3.2) como

$$\hat{N}_{b,t} = 1 - \frac{1}{i(1-\tau_y)\beta_1} - \hat{N}_{k,t}. \tag{3.3.13}$$

[10] Turnovsky, 1993.

3.4 Costo de oportunidad de saldos reales

A partir de las decisiones óptimas del consumidor, se puede demostrar que $1+\theta-\delta\beta_1=0$ (veáse apéndice C). Observamos también que las condiciones de primer orden se pueden escribir como[11]:

$$u'(c_t)=\frac{(1+\theta)(1+\tau_c)}{\delta a_t}, \tag{3.4.1}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{v'(m_t)}{u'(c_t)}(1+\tau_c) =&\pi-\hat{N}_{k,t}(\sigma_P^2+\sigma_{Pk})+\sigma_{P\tau}+\frac{\lambda_P\nu_P}{1+\hat{N}_{k,t}\nu_P}-\frac{\delta\phi}{1+\theta}\\ =&\, i(1-\tau_y)>0.\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Esta última ecuación iguala la utilidad marginal del dinero, estandarizada por la utilidad marginal del consumo, con el costo marginal de la tenencia de saldos monetarios reales[12]. Esta condición muestra explícitamente como el costo de oportunidad de mantener saldos reales es afectado por la incertidumbre, *i.e.*, por cambios difusos en la tasa de inflación, los cuales están siempre presentes, y por movimientos extremos y repentinos en el nivel general de precios, que ocasionalmente se presentan. Observe que el costo de oportunidad de mantener saldos monetarios reales es positivo. En este caso, cabe destacar que dado que el dinero entra directamente en la función de utilidad, el signo en el costo de oportunidad de mantener saldos monetarios reales es irrelevante, contrario a lo que se tendría en el caso de una economía con una restricción *cash-in-advance*, en donde un costo de oportunidad positivo obliga a los consumidores a mantener el mínimo posible de saldos reales para financiar su consumo. Por último, es importante destacar que la función de utilidad logarítmica implica que los valores óptimos

[11] véase Derivaciones y Demostraciones de los resultados.

[12] *cf* Venegas-Martínez 2001.

de $\hat{N}_{j,t}$, $j = m, b, k$, dependan únicamente de los parámetros que determinan las preferencias y las características estocásticas de la economía, y por lo tanto, las decisiones $\hat{N}_{j,t}$, $j = m, b, k$, se mantendrán constantes a través del tiempo. En otras palabras, la actitud del consumidor hacia el riesgo en los instrumentos de inversión es independiente del nivel de su riqueza, *i.e.*, el nivel resultante de riqueza en cualquier instante no tiene efecto alguno sobre las decisiones en la integración del portafolio.

CAPITULO 4

4. Problema de decisión de las empresas

En este modelo, la empresa representativa produce el único bien que hay en el mercado y el rendimiento que se paga a las acciones emitidas está en función de la producción y de la política de dividendos.

4.1 Especificación de la tecnología

Suponemos que en esta economía, la producción sigue una trayectoría estocástica definida por:

$$dy_t = \gamma k_t dt + \gamma k_t \sigma_y dW_{y,t} + \gamma k_t \nu_y dQ_{y,t}, \tag{4.1.1}$$

donde γ representa el producto marginal promedio esperado del capital. Aquí, como en el caso del consumidor, $dW_{y,t}$ es un proceso Wiener y $dQ_{y,t}$ es un proceso de Poisson.

4.2 Rendimiento de las acciones

En términos generales, el rendimiento que paga la empresa sobre las acciones emitidas se puede definir como:

$$dR_{k,t} = (1-\tau_y)\frac{dv_t}{k_t} + \frac{du_t}{u_t}, \tag{4.2.1}$$

donde dv_t son los dividendos y u_t es el precio de las acciones, en términos del producto. Suponemos que no hay impuestos sobre ganancias de capital[13]. De esta forma, el rendimiento de las acciones tiene dos componentes: los dividendos que se pagan por acción y las ganancias (o pérdidas) de capital que resultan de

[13] En el caso mexicano, no hay impuestos sobre ganancias de capital cuando las operaciones se llevan a cabo en mercados reconocidos por las autoridades financieras, como es el caso de la Bolsa Mexicana de Valores.

diferencias en el precio de los títulos de capital. A continuación examinamos cada componente por separado. Primero, para conocer la trayectoria que sigue $\mathrm{d}u_t/u_t$, es necesario analizar el comportamiento de la producción, el stock de acciones, el capital disponible y la política de inversión de la empresa. Todas estas variables determinan la posible existencia de ganancias de capital. Ahora bien, si suponemos que el stock de acciones en cualquier tiempo, t, permanece constante, digamos igual a N, entonces se cumple que $Nu_t = k_t$. Por lo tanto,

$$\mathrm{d}k_t = N\mathrm{d}u_t. \tag{4.2.2}$$

Por otra parte, la producción después de impuestos puede tener dos usos. el pago de dividendos, $\mathrm{d}v_t$, o el financiamiento de nueva inversión, $\mathrm{d}k_t$, entendida como la adquisición de capital nuevo. De esta forma, la trayectoria que sigue la producción después de impuestos está dada por:

$$(1-\tau_p)\mathrm{d}y_t = \mathrm{d}v_t + \mathrm{d}k_t \tag{4.2.3}$$

donde τ_p es el impuesto sobre ingresos corporativos y v_t representa el pago de dividendos. Combinando las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.3) obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{u_t} = \frac{(1-\tau_p)\mathrm{d}y_t - \mathrm{d}v_t}{k_t} \tag{4.2.4}$$

y sustituyendo esta expresión en la ecuación del rendimiento de las acciones, (4.2.1), se sigue que

$$\mathrm{d}R_{k,t} = -\tau_y\frac{\mathrm{d}v_t}{k_t} + (1-\tau_p)\frac{\mathrm{d}y_t}{k_t}. \tag{4.2.5}$$

4.3 Política de dividendos

En este modelo, suponemos que los dividendos que pagan las empresas son una fracción constante α del ingreso corporativo después de impuestos. Es decir, los dividendos tienen la forma

$$\mathrm{d}v_t = \alpha(1-\tau_p)\mathrm{d}y_t, \qquad 0 \le \alpha \le 1. \tag{4.3.1}$$

Después de sustituir esta expresión en la ecuación (4.2.5), obtenemos la trayectoria estocástica del rendimiento de las acciones, en términos de los procesos de difusión que sigue la producción de bienes:

$$\mathrm{d}R_{k,t} = (1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\frac{\mathrm{d}y_t}{k_t}. \tag{4.3.2}$$

Es importante observar en esta ecuación que el componente estocástico está determinado, $\mathrm{d}y_t$, ya que el resto de las variables son deterministas. Finalmente, de la ecuación (3.2.3) se sigue que:

$$r_k = (1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma, \tag{4.3.3}$$

$$\sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} = (1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t}, \tag{4.3.4}$$

y

$$\nu_k \mathrm{d}Q_{k,t} = (1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma\nu_y \mathrm{d}Q_{y,t}. \tag{4.3.5}$$

De esta forma, la tasa de redimiento de las acciones está en función de la tasa del producto marginal del capital. Similarmente, el componente estocástico $\mathrm{d}R_{k,t}$, depende de los shocks de productividad derivados de cambios en γ y del comportamiento exógeno de $\mathrm{d}W_{y,t}$, además de los posibles saltos, $\mathrm{d}Q_{y,t}$.

CAPITULO 5

5. Comportamiento del gobierno

A fin de cerrar el modelo, se describen las acciones del gobierno. En este modelo, el sector público no genera utilidad para los consumidores. El gobierno tiene el monopolio de la emisión de dinero y, a la vez, emite deuda para financiar su gasto, En esta sección se analizan los tres principales instrumentos de política económica que emplea el gobierno, a saber: gasto público, oferta monetaria y emisión de deuda. La restricción presupuestal que enfrenta el gobierno en términos reales, tiene la forma:

$$\mathrm{d}g_t - \mathrm{d}\tau_{1,t} - \mathrm{d}\tau_{2,t} + m_t \mathrm{d}R_{m,t} + b_t \mathrm{d}R_{b,t} = \mathrm{d}m_t + \mathrm{d}b_t \tag{5.1}$$

donde $\mathrm{d}g_t$ es el cambio en gasto público del gobierno en términos reales; $\mathrm{d}\tau_{1,t}$ es el cambio en el impuesto total recaudado proveniente de los consumidores, en términos reales; $\mathrm{d}\tau_{2,t}$ es el cambio en el impuesto total recaudado proveniente de las empresas, también en términos reales.

5.1 Gasto público

En este modelo, el gasto que realiza el gobierno sigue un proceso estocástico definido por:

$$\mathrm{d}g_t = \bar{g}\gamma k_t \mathrm{d}t + \gamma k_t \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t} + \gamma k_t \nu_g \mathrm{d}Q_{g,t}. \tag{5.1.1}$$

Al igual que en los casos anteriores, $\mathrm{d}W_{g,t}$ es un proceso estocástico con una distribución normal con media cero y varianza $\mathrm{d}t$ y $\mathrm{d}Q_{g,t}$ es un proceso de Poisson. De esta forma, el gasto de gobierno está definido como una fracción de $\mathrm{d}g_t$ del producto real. Notemos que, en este caso, el factor estocástico del gasto es proporcional al producto.

5.2 Oferta monetaria

La oferta monetaria en esta economía tiene asociada una regla de expansión la cual es conducida por un proceso estocástico de difusión con saltos de la forma·

$$\mathrm{d}M_t = \mu M_t \mathrm{d}t + \sigma_M M_t \mathrm{d}W_{M,t} + \nu_M M_t \mathrm{d}Q_{M,t} \tag{5.2.1}$$

donde μ es la tasa de expansión monetaria media esperada, $\mathrm{d}W_{M,t}$ es el componente de difusión y $\mathrm{d}Q_{M,t}$ es la componente estocástica de saltos.

5.3 Deuda pública

La política de deuda que sigue el gobierno se hace vía emisión de bonos. En este caso, la política de endeudamiento se fija de forma tal que la razón entre el stock de bonos y el stock monetario, se mantenga constante, es decir, se supone que

$$\frac{B_t}{M_t} = \kappa = \text{constante.} \tag{5.3.1}$$

De esta forma, obtenemos la expresión

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = \frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}. \tag{5.3.2}$$

Lo anterior significa que en operaciones de mercado abierto, el cambio porcentual de deuda emitida, es igual al cambio porcentual de los cortos en la economía; o equivalentemente, el cambio porcentual en la cantidad que crece la oferta monetaria es igual al cambio porcentual de la deuda gubernamental que se salda.

5.4 Impuestos directos e indirectos

Los cambios en las cantidades reales de tributación, $d\tau_{1,t}$ y $d\tau_{2,t}$, que provienen de los consumidores y de las empresas, respectivamente, se describen a continuación. Todas las tasas τ_y, τ_p y τ_c, son exógenas en nuestro modelo.

En el caso de los consumidores, el impuesto total tiene cuatro componentes: el gravado sobre los intereses, ganancias de capital, nivel de riqueza y consumo. De esta forma, las cantidades respectivas se agregan como sigue:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau_{1,t} =& i\tau_y \hat{N}_{b,t} a_t \mathrm{d}t + \alpha\tau_y(1-\tau_p)\gamma k_t(\mathrm{d}t + \sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} + \nu_y \mathrm{d}Q_{y,t}) \\ &+ a_t\bar{\tau}\mathrm{d}t + a_t\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} + a_t\nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t} + \tau_c c_t \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Para las empresas, los impuestos se gravan sobre los ingresos corporativos. Es decir,

$$\mathrm{d}\tau_{2,t} = \tau_p\gamma k_t[\mathrm{d}t + \sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} + \nu_y \mathrm{d}Q_{y,t}]. \tag{5.4.2}$$

CAPITULO 6

6. Equilibrio en el sector real

Para encontrar la trayectoria que sigue la acumulación de capital en esta economía $\mathrm{d}k_t/k_t$, partimos de la identidad de la renta (o ingreso) nacional:

$$\mathrm{d}y_t = c_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}k_t + \mathrm{d}g_t. \tag{5.4.2}$$

Al sustitir en (6.1), las ecuaciones (3.3.3), (4.1.1) y (5.1.1), que corresponden la trayectoria óptima del consumo, la dinámica de producción y la política de gasto del sector público, respectivamente, además de sustituir el valor óptimo de β_1, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} = &\left[\gamma(1-\bar{g}) - \frac{\delta\theta}{(1+\theta)(1+\tau_c)\hat{N}_{k,t}}\right]\mathrm{d}t + \gamma(\sigma_y\mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g\mathrm{d}W_{g,t})\\ &+ \gamma(\nu_y\mathrm{d}Q_{y,t} - \nu_g\mathrm{d}Q_{g,t}).\end{aligned} \tag{6.2}$$

De esta forma, la acumulación de capital sigue una trayectoria estocástica derivada de la diferencia entre la producción menos el consumo y el gasto del gobierno. Consecuentemente, el componente no estocástico de esta ecuación, $\mathrm{E}[(\mathrm{d}k_t/k_t)]$, está determinado por

$$\psi \equiv \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right] = \gamma(1-\bar{g}) - \frac{\delta\theta}{(1+\theta)(1+\tau_c)\hat{N}_{k,t}}, \tag{6.3}$$

lo que define la tasa esperada de crecimiento.

Por otro lado, el componente estocástico, $\mathrm{d}k_t$, satisface

$$\gamma(\sigma_y\mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g\mathrm{d}W_{g,t}) + \gamma(\nu_y\mathrm{d}Q_{y,t} - \nu_g\mathrm{d}Q_{g,t}). \tag{6.4}$$

Finalmente, podemos concluir que:

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right)^2\right] = \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) + \gamma^2(\nu_y^2\lambda_y + \nu_g^2\lambda_g). \tag{6.5}$$

Este resultado será utilizado en la determinación del equilibrio.

CAPITULO 7

7. Equilibrio macroecómico

Una vez determinadas las decisiones óptimas de los agentes, el comportamiento de las empresas y las acciones del gobierno, así como el establecimiento de las variables exógenas, lo que resta es obtener el equilibrio macroeconómico general. Dado que en esta economía los saldos monetarios reales y los bonos en términos reales están ligados a los movimientos en el nivel general de precios, es necesario, en primera instancia, especificar el comportamiento que sigue la inflación y cómo ésta es generada endógenamente por el modelo mismo.

7.1 Determinación de la tasa de inflación de equilibrio

Las cantidades $\hat{N}_{j,t}$, $j = m, b, k$, así como la tasa de interés nominal son variables que se han generado de manera endógena. Notemos que podemos expresar el nivel de precios en la forma:

$$P_t = \frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}} \frac{M_t}{k_t}. \tag{7.1.1}$$

Derivando estocásticamente[14] la razón entre el dinero y capital obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} - \frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} - \left(\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right)^2. \tag{7.1.2}$$

Después de sustituir (2.1.1), (5.2.1), (6.2) y (6.5) en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\pi \mathrm{d}t + \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} + \nu_P \mathrm{d}Q_{P,t} =& \mu^* \mathrm{d}t + \sigma_M \mathrm{d}W_{M,t} + \nu_M \mathrm{d}Q_{M,t} \\ & - \left[\gamma(1-\bar{g}) - \frac{c_t(1+\tau_c)}{k_t}\right] \mathrm{d}t \\ & - \gamma(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}) - \gamma(\nu_y \mathrm{d}Q_{y,t} - \nu_g \mathrm{d}Q_{g,t}) \\ & - \gamma\sigma_{My}\mathrm{d}t + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2)\mathrm{d}t + \gamma^2(\nu_y^2\lambda_y + \nu_g^2\lambda_g)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{7.1.3}$$

[14] véase Derivaciones y Demostraciones de los resultados.

Por lo tanto, la tasa esperada de inflación en el equilibrio satisface

$$\pi^* = \mu^* - \left[\gamma(1-\bar{g}) - \frac{c_t^*(1+\tau_c^*)}{k_t}\right] + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2 + \nu_y^2\lambda_y + \nu_g^2\lambda_g) - \gamma\sigma_{My}, \quad (7.1.4)$$

y las componentes de difusión y saltos cumplen

$$\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} = \sigma_M \mathrm{d}W_{M,t} - \gamma(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}), \quad (7.1.5)$$

y

$$\nu_P \mathrm{d}Q_{P,t} = \nu_M \mathrm{d}Q_{M,t} - \gamma(\nu_y \mathrm{d}Q_{y,t} - \nu_g \mathrm{d}Q_{g,t}). \quad (7.1.6)$$

Las ecuaciones anteriores, (7.1.4)-(7.1.6), determinan endógenamente la tasa de inflación esperada consistente con un portafolio cuya integración es constante en el tiempo. Podemos observar en (7.1.4), que la inflación media esperada de equilibrio depende positivamente la tasa de crecimiento de la oferta monetaria, y negativamente de la tasa de acumulación de capital, así como positivamente de la varianzas y de los saltos de los shocks fiscales y productivos. Por otra parte, las ecuaciones (7.1.5) y (7.1.6) determinan endógenamente los componentes estocásticos de difusión y saltos, respectivamente, en la tasa de inflación. Es importante destacar que la componente de saltos en la tasa de inflación está en función de las componentes estocásticas de los saltos en la tasas de expansión monetaria, la producción y el gasto de gobierno.

7.2 Determinación del nivel de impuestos de equilibrio

Para determinar los ajustes endógenos en los impuestos que recauda el gobierno, que son necesarios para satisfacer la restricción presupuestal, primero, sustituimos en la restricción presupuestal del gobierno (5.1) las ecuaciones respectivas a la política de gasto (5.1.1), la regla de crecimiento de la oferta monetaria(5.2.1) y la política de deuda (5.3.1), de donde obtenemos

$$\hat{N}_{m,t}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}}+\hat{N}_{b,t}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{B_t}{P_t}\right)}{\frac{B_t}{P_t}} =\frac{\gamma k_t}{a_t}[\bar{g}\mathrm{d}t+\sigma_g\mathrm{d}W_{g,t}+\nu_g\mathrm{d}Q_{g,t}]-\frac{(\mathrm{d}\tau_{1,t}+\mathrm{d}\tau_{2,t})}{a_t}$$
$$+\hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t}, \tag{7.2.1}$$

equivalentemente

$$(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})\frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}} =\frac{\gamma k_t}{a_t}[\bar{g}\mathrm{d}t+\sigma_g\mathrm{d}W_{g,t}+\nu_g\mathrm{d}Q_{g,t}]-\frac{(\mathrm{d}\tau_{1,t}+\mathrm{d}\tau_{2,t})}{a_t} \tag{7.2.2}$$
$$+\hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t}.$$

Después de emplear el lema de Itô para obtener la diferencial $\mathrm{d}\,(M_t/P_t)$[15]y sustituir las funciones de impuestos $\mathrm{d}\tau_{1,t}$ y $\mathrm{d}\tau_{2,t}$ en (7.2.2), se tiene que las componentes determinista y estocástica de la tasa impositiva están dadas por:

$$\bar{\tau}^* =\gamma\hat{N}_{k,t}\bar{g}-[\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}]\mu+\hat{N}_{b,t}i(1-\tau_y)-[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma\hat{N}_{k,t}$$
$$+[\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}](\sigma_{MP}-\nu_P^2\lambda_P)-\tau_c\frac{c_t}{a_t}-\hat{N}_{b,t}i\tau_y, \tag{7.2.3}$$

$$\sigma_\tau\mathrm{d}W_{\tau,t}=-[\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}]\sigma_M\mathrm{d}W_{M,t}+\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_g\mathrm{d}W_{g,t}-[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_y\mathrm{d}W_{y,t}, \tag{7.2.4}$$

y

$$\nu_\tau\mathrm{d}Q_{\tau,t}=-[\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}]\nu_M\mathrm{d}Q_{M,t}+\gamma\hat{N}_{k,t}\nu_g\mathrm{d}Q_{g,t}-[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\hat{N}_{k,t}\nu_y\mathrm{d}Q_{y,t}. \tag{7.2.5}$$

[15] véase Derivaciones y Demostraciones de los resultados.

De esta forma, la ecuación (7.2.3) describe el ajuste endógeno en el componente determinista, mientras que la ecuación (7.2.4) lo hace en la parte estocástica en función de las fluctuaciones del crecimiento de la oferta monetaria, $\sigma_M \mathrm{d}W_{M,t}$, del gasto de gobierno, $\sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}$, y del sector real, $\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t}$. La componente de saltos está en función del componente estocástico de saltos en la tasa de expansión monetaria, la producción y el gasto de gobierno.

7.3 Relaciones de equilibrio

Para presentar en forma reducida el equilibrio macroeconómico, expresamos las varianzas y covarianzas relevantes en términos de los shocks estocásticos exógenos, $\mathrm{d}W_{M,t}$, $\mathrm{d}W_{y,t}$ y $\mathrm{d}W_{g,t}$. Después, reescribimos las tasas de retorno de los bonos, acciones y dinero en términos de las varianzas y covarianzas encontradas; hacemos el mismo proceso para el compontente estocástico de la riqueza. Así pues, de las ecuaciones (6.2), (7.1.5), (4.3.4) y (7.2.4) obtenemos las expresiones de las perturbaciones estocásticas $\mathrm{d}k_t$, $\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t}$, $\sigma_k \mathrm{d}W_{k,t}$ y $\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t}$ en términos de los shocks estocásticos exógenos $\mathrm{d}W_{M,t}$, $\mathrm{d}W_{y,t}$ y $\mathrm{d}W_{g,t}$. Como en este modelo suponemos que las perturbaciones exógenas no están correlacionadas, las varianzas y covarianzas relevantes se pueden reescribir en términos de parámetros exógenos como:

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right)^2\right] = \gamma^2(\sigma_y^2+\sigma_g^2+\nu_y^2\lambda_y+\nu_g^2\lambda_g), \tag{7.3.1.1}$$

$$\sigma_P^2 = \sigma_M^2 + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) - 2\gamma\sigma_{My}, \tag{7.3.1.2}$$

$$\sigma_k^2 = (1-\tau_p)^2(1-\alpha\tau_y)^2\gamma^2\sigma_y^2, \tag{7.3.1.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\tau^2 &= (1-\hat{N}_{k,t})^2\sigma_M^2 + \gamma^2\hat{N}_{k,t}^2\sigma_g^2 + [\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]^2\gamma^2\hat{N}_{k,t}^2\sigma_y^2 \\ &\quad + 2(1-\hat{N}_{k,t})[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_{My},\end{aligned} \tag{7.3.1.4}$$

$$\sigma_{Pk} = (1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma(\sigma_{My}-\gamma\sigma_y^2), \tag{7.3.1.5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{P\tau} &= -(1-\hat{N}_{k,t})\sigma_M^2 - [\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_{My} \\ &\quad + (1-\hat{N}_{k,t})\gamma\sigma_{My} + [\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma^2\hat{N}_{k,t}\sigma_y^2 + \gamma^2\hat{N}_{k,t}\sigma_g^2,\end{aligned} \tag{7.3.1.6}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{k\tau} &= -(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)(1-\hat{N}_{k,t})\gamma\sigma_{My} \\ &\quad - [\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p](1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma^2\hat{N}_{k,t}\sigma_y^2.\end{aligned} \tag{7.3.1.7}$$

donde $\sigma_{My} = \mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_{M,t}, \mathrm{d}W_{y,t})$. Así por ejemplo, la tercera igualdad indica que la varianza de la tasa de rendimiento de las acciones σ_k^2, depende de la política de dividendos, los impuestos sobre ingresos corporativos y sobre rendimientos por la tenencia de bonos.

Para encontrar las tasas de retorno de equilibrio de los saldos monetarios y bonos en términos reales, sustituimos las expresiones anteriores en los retornos dados en (3.2.1) y (3.2.2), respectivamente, de tal forma que el retorno de los saldos reales está dado por; en el caso particular de Turnovsky para $\hat{N}_{k,t}$ tenemos:

$$r_k^* = r_b^* - \gamma^2\sigma_g^2 - \gamma^2\sigma_y^2[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p] + \gamma\sigma_{My}, \tag{7.3.2}$$

ahora, obtenemos las tasas de retorno real esperado del dinero y los bonos, respectivamente:

$$r_m^* = -\pi^* + \sigma_M^2 + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) - 2\gamma\sigma_{My} \tag{7.3.3}$$

y

$$r_b^* = i(1-\tau_y) - \pi^* + \sigma_M^2 + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) - 2\gamma\sigma_{My}. \tag{7.3.4}$$

En este caso, el componente estocástico de la riqueza satiface:

$$\sigma_a \mathrm{d}W_{a,t} = \gamma(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}), \tag{7.3.5}$$

donde las varianzas y las covarianzas de la riqueza, están dadas por:

$$\sigma_a^2 = \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2), \tag{7.3.6}$$

$$-\sigma_{aP} = \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) - \gamma\sigma_{My}, \tag{7.3.7}$$

$$\sigma_{ak} = (1 - \tau_p)(1 - \alpha\tau_y)\gamma^2\sigma_y^2. \tag{7.3.8}$$

Después de sustituir las expresiones anteriores en las ecuaciones de la tasa de interés, así como en las condiciones de primer orden del consumidor obtenemos:

$$\pi^* = \mu^* - \gamma\left[1 - \frac{c_t^*(1+\tau_c)}{\gamma k_t^*} - \bar{g}\right] + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2 + \nu_y^2\lambda_y + \nu_g^2\lambda_g) - \gamma\sigma_{My}, \tag{7.3.9}$$

$$(1 - \tau_p)(1 - \alpha\tau_y)\gamma(1 - \gamma\sigma_y^2) = i(1 - \tau_y) - \pi + \sigma_M^2, \tag{7.3.10}$$

$$e_t[i(1 - \tau_y)] \equiv \frac{c_t^*(1+\tau_c)}{\gamma k_t^*} = \frac{\theta\delta}{\gamma(1+\theta)\hat{N}_{k,t}}, \tag{7.3.11}$$

$$\hat{N}_{k,t} = 1 - \frac{(1+\kappa)\delta}{i(1-\tau_y)(1+\theta)}. \tag{7.3.12}$$

De esta forma, las cuatro ecuaciones determinan conjuntamente los valores de equilibrio de la tasa esperada de inflación π^*, la tasa de interés nominal i^*, el consumo c_t^* y la proporción del portafolio asignada a la tenencia de acciones $\hat{N}_{k,t}$. Este resultado implica que el aumento en cualquiera de las varianzas, incrementa la varianza del crecimiento del stock de capital, requiriendo así una tasa mayor de inflación para mantener el portafolio en equilibrio. Por otra parte, (7.3.10) describe el mecanismo de transmisión de los impuestos y la política de dividendos sobre la economía, esto a partir de las tasas de retorno esperado de equilibrio de las acciones y los bonos. Las dos ecuaciones restantes expresan las condiciones de equilibrio del consumo, (7.3.11), y la demanda de acciones, (7.3.12), y por ende las condiciones de equilibrio del dinero y los bonos. Es importante observar que las ecuaciones anteriores determinan sólo parte de las condiciones de equilibrio, para obtener el resto de las ecuaciones, es necesario encontrar las tasas reales esperadas de rendimiento de los activos, r_m^*, r_b^* y r_k^*, así como las proporciones del portafolio en saldos reales y bonos, $\hat{N}_{m,t}$ y $\hat{N}_{b,t}$, y la tasa esperada de crecimiento del capital ψ, que se obtienen, respectivamente, de las ecuaciones (7.3.3), (7.3.4), (7.3.2), (3.3.7), (3.3.13) y (6.3). Asimismo, de las ecuaciones (7.3.11) y (7.3.12) podemos eliminar $\hat{N}_{k,t}$ de tal forma que

$$\frac{c_t^*(1+\tau_c)}{\gamma k_t^*} = \frac{\theta\delta}{\gamma(1+\theta)\left[1 - \frac{(1+\kappa)\delta i^{-1}}{(1-\tau_y)(1+\theta)}\right]} \equiv e_t[i(1-\tau_y)], \tag{7.3.13}$$

lo que conjuntamente con la ecuación (6.3), nos conduce a la tasa esperada de crecimiento del capital

$$\psi = \gamma[1 - e_t[i(1-\tau_y)] - \bar{g}]. \tag{7.3.14}$$

Finalmente, las cuatro ecuaciones anteriores se pueden simplificar aún más, al sustituir $\hat{N}_{k,t}$ en $c_t^*(1+\tau_c)/\gamma k_t^*$, y el resultado combinado con la relación de equilibrio se reduce a dos ecuaciones que conjuntamente determinan la tasa de inflación y la tasa de interés nominal. Sin embargo, en virtud de que las cuatro ecuaciones facilitan la comprensión de las relaciones implícitas, se mantendrán las cuatro en todo lo que sigue.

7.4 Nivel inicial de precios

En este modelo, es importante observar que el hecho de alcanzar el equilibrio está relacionado con un nivel inicial de precios, P_0; lo que además es necesario para mantener el portafolio en equilibrio. Para ver esto más claramente, podemos escribir el equilibrio monetario como:

$$\frac{\delta}{i(1-\tau_y)(1+\theta)} = \hat{N}_{m,t} = \frac{M_t/P_0}{k_t + \frac{(M_t+B_t)}{P_0}}. \tag{7.4.1}$$

Al resolver esta ecuación para P_0, obtenemos

$$P_0 = \frac{i(1-\tau_y)(1+\theta)M_t - \delta(M_t + B_t)}{\delta k_t} = \frac{i(1-\tau_y)(1+\theta) - \delta(1+\kappa)}{\delta k_t / M_t}. \quad (7.4.2)$$

De esta forma, cualquier shock que incremente la tasa nominal de interés después de impuestos, implicará una reducción en $\hat{N}_{m,t}$, es decir, lo que a su vez conducirá una disminución en la proporción de saldos reales en el portafolio. Por otro lado, para que $P_0 > 0$, es necesario que

$$i(1-\tau_y)(1+\theta) > \delta(1+\kappa) \quad (7.4.3)$$

Finalmente, se puede demostrar que

$$0 < \hat{N}_{m,t} \leq \frac{1}{(1+\kappa)}, \qquad 0 < \hat{N}_{b,t} \leq \frac{\kappa}{(1+\kappa)}, \qquad 0 < \hat{N}_{k,t} < 1 \quad (7.4.4)$$

que representa una solución viable a la integración del portafolio.

7.5 Comparación con el equilibrio determinista

Dado que uno de los objetivos del modelo es analizar el efecto de la incertidumbre, resulta convincente comparar el equilibrio presentado en las ecuaciones, (7.3.9)-(7 3.12), con el correspondiente al caso determinista. Si suponemos que el caso determinista es lineal en las varianzas y en los saltos, éste se obtiene simplemente igualando todas las varianzas y covarianzas así como los saltos del caso estocástico a cero, de tal forma que sólo se alteran las dos primeras ecuaciones, quedando como sigue

$$\pi^* = \mu^* - \gamma\left[1 - \frac{c_t^*(1+\tau_c)}{\gamma k_t^*}\right] \quad (7.5.1)$$

$$(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma = i(1-\tau_y) - \pi^* \quad (7.5.2)$$

que conjuntamente con las ecuaciones, (7.3.11) y (7.3.12), complementan el equilibrio determinista. Así en la ecuación, (7.5.1), vemos cómo la tasa de inflación de equilibrio, es igual a la diferencia entre las tasas de expansión monetaria y la tasa real de crecimiento ψ; mientras que la ecuación, (7.5.2), representa la condición usual de arbitraje, igualando la tasa de rendimiento de las acciones después de impuestos, con la tasa de rendimiento de los bonos, también después de impuestos.

CAPITULO 8

8. Bienestar económico

Una vez que se han establecido las condiciones de equilibrio, lo que resta es analizar el efecto de cambios en los instrumentos de política económica en el bienestar económico de los consumidores. Para ello, se toma como criterio de bienestar a la función utilidad indirecta del individuo representativo.

De esta forma, el valor óptimo del índice de utilidad correspondiente al nivel inicial de riqueza a_0, está dado por

$$V(a_0) = \beta_0 + \frac{1+\theta}{\delta}\log(a_0), \tag{8.1}$$

donde

$$\begin{aligned}\beta_0 =& \frac{\theta}{\delta}[\log(\delta\theta) - \log(1+\theta)(1+\tau_c)] + \frac{1}{\delta}\log \hat{N}_{m,t} - \frac{\theta}{\delta} \\ &+ \frac{(1+\theta)}{\delta^2}[\hat{N}_{m,t}r_m + \hat{N}_{b,t}r_b + \hat{N}_{k,t}r_k - \bar{r}^*] - \frac{1}{2}\frac{(1+\theta)\hat{\rho}}{\delta^2}.\end{aligned} \tag{8.2}$$

donde ˆ denota el valor óptimo y;

$$\begin{aligned}\hat{\rho} = \lim_{dt\to 0}\frac{\mathrm{E}(da_t)^2}{dt} =& (\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})^2\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} \\ &+ 2(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})\sigma_{P\tau} - 2\hat{N}_{k,t}\sigma_{k\tau} \\ &+ \beta_1\left[\lambda_P\left[\log\left(1-(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})\frac{\nu_P}{1+\nu_P}\right)\right]\right. \\ &\left. + \lambda_k[\log(1+\hat{N}_{k,t}\nu_k)] + \lambda_\tau[\log(1+\nu_\tau)]\right].\end{aligned} \tag{8.3}$$

Las expresiones para $\hat{N}_{j,t}, r_{j,t}^*$ $j = m, b, k,$ y $\bar{r}^*$ junto con las varianzas y covarianzas que aparecen en el término de $\hat{\rho}$ son obtenidas por el equilibrio macroeconómico determinado en la sección anterior. Sustituyendo estas cantidades en la expresión (8.2) para β_0, la utilidad está expresada en términos de los parámetros de política económica.

Vemos que $\hat{\rho}$ toma la forma

$$\hat{\rho} = \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) + \beta_1\left[\lambda_P\left[\log\left(1 - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\frac{\nu_P}{1+\nu_P}\right)\right]\right. \\ \left. + \lambda_k[\log(1 + \hat{N}_{k,t}\nu_k)] + \lambda_\tau[\log(1+\nu_\tau)]\right], \tag{8.4}$$

donde $\hat{}$ denota el valor óptimo y;

$$\hat{\eta} = \lim_{dt\to 0}\frac{\mathrm{E}(da_t)^2}{dt} = (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})^2\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} \\ + 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_{P\tau} - 2\hat{N}_{k,t}\sigma_{k\tau},$$

luego

$$\hat{\eta} = \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) \tag{8.5}$$

y

$$\hat{N}_{m,t}r_m^* + \hat{N}_{b,t}r_b^* + \hat{N}_{k,t}r_k^* - \bar{\tau}^* = \gamma(1-\bar{g}) - \frac{c_t^*(1+\tau_c)}{k_t^*} + \frac{\delta\theta}{(1+\theta)}. \tag{8.6}$$

Por otro lado, el nivel inicial de riqueza a_0 puede expresarse utilizando las ecuaciones en términos del valor óptimo de la tasa nominal de interés después de impuestos, es decir

$$a_0 = \frac{i(1-\tau_y)(1+\theta)k_0}{i(1-\tau_y)(1+\theta) - \delta(1+\kappa)}, \tag{8.7}$$

en consecuencia, las expresiones para evaluar el bienestar se pueden reescribir de la forma

$$V(i(1-\tau_y), k_0) = \beta_0 + \frac{1+\theta}{\delta}(\log[i(1-\tau_y)(1+\theta)] \\ - \log[i(1-\tau_y)(1+\theta) - \delta(1+\kappa)]) + \frac{1+\theta}{\delta}\log k_0, \tag{8.8}$$

ahora

$$
\begin{aligned}
\beta_0 =& \frac{\theta}{\delta}\log(\theta) - \frac{1}{\delta}\log[i(1-\tau_y)(1+\theta)] - \frac{\theta}{\delta}\log[(1+\theta)(1+\tau_c)] + \frac{(1+\theta)}{\delta}\log(\delta) \\
&+ \frac{(1+\theta)\gamma}{\delta^2}[1 - e_t[i(1-\tau_y) - \bar{g}] - \frac{1}{2}\frac{(1+\theta)\hat{\rho}}{\delta^2}.
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

La primera implicación que se desprende de las ecuaciones (8.8) y (8.9), es el papel de la tasa nominal de interés después de impuesto, $i(1-\tau_y)$, como mecanismo de transmisión. Es decir, tanto los cambios en la política económica del gobierno, como en la política de dividendos de las empresas, afectan el bienestar del consumidor únicamente a través de $i(1-\tau_y)$. En consecuencia, esta tasa puede servir como un objetivo intermedio de política.

Por otro lado, en lo que toca al análisis de bienestar, para ver el efecto de los cambios en la tasa nominal de interés después de impuestos, sobre el bienestar $V(a_t)$, diferenciamos las ecuaciones (8.8) y (8.9) respecto de $i(1-\tau_y)$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}[i(1-\tau_y)]} =& -\frac{1}{\delta[i(1-\tau_y)]} - \left(\frac{(1+\theta)\gamma}{\delta^2}\right)\frac{\mathrm{d}e_t[i(1-\tau_y)]}{\mathrm{d}[i(1-\tau_y)]} \\
&+ \frac{(1+\theta)}{\delta}\left[\frac{1}{[i(1-\tau_y)]} - \frac{(1+\theta)}{[i(1-\tau_y)(1+\theta)] - \delta(1+\kappa)}\right].
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

De la ecuación anterior podemos destacar tres efectos: 1) cualquier política que eleve la tasa de interés disminuye la demanda de dinero (esto por la forma de $\hat{N}_{m,t}$), así como la cantidad real de equilibrio de dinero, lo que afecta negativamente el bienestar; 2) los incrementos en $i(1-\tau_y)$ reducen la tasa media de consumo $e_t[i(1-\tau_y)]$ (vía la ecuación 7.3.11), lo que aumenta la proporción del producto destinado a acumular capital e incrementar el ritmo de crecimiento (por definición de ψ) siempre y cuando $\bar{g}$ se mantenga constante. Este efecto aumenta el consumo esperado en el futuro y consecuentemente, incrementa el nivel de bienestar del consumidor; y 3) un incremento en la tasa de interés nominal después de impuestos $i(1-\tau_y)$, produce un aumento del nivel inicial de precios (7.4.2), lo que a su vez impacta negativamente en la riqueza real inicial, a_0. Este efecto deteriora el nivel de bienestar del consumidor representativo.

Como puede observarse, el efecto final en el bienestar, depende de las preferencias del consumidor y de las condiciones de equilibrio del modelo. Lo que sí podemos determinar, es que el efecto de la tasa de interés sobre el bienestar, cuando $0 < \theta < 1$. Esto se puede ver al evaluar la derivada $\mathrm{d}e_t[i(1-\tau_y)]/\mathrm{d}[i(1-\tau_y)]$, se tiene que

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}i_a}\right) = \operatorname{sgn}[-i_a^2(1+\theta)^2 + \delta(1+\kappa)(1+\theta)\theta i_a + \delta^2(1+\kappa)^2\theta]. \tag{8.11}$$

si se define $i_a \equiv [i(1-\tau_y)]$, entonces la tasa óptima de interés nominal después de impuesto $\hat{i}_a$, se obtiene resolviendo la ecuación cuadrática (de hecho, es la raíz positiva de esta ecuación)

$$i_a^2(1+\theta)^2 - \delta(1+\kappa)(1+\theta)\theta i_a - \delta^2(1+\kappa)^2\theta = 0. \tag{8.12}$$

de donde

$$\hat{i}_a = \frac{\delta(1+\kappa)\theta}{2(1+\theta)}\left[1+\left(1+\frac{4}{\theta}\right)^{1/2}\right], \tag{8.13}$$

y por lo tanto es positiva, ya que cumple con

$$\hat{i}_a(1+\theta) \geq \delta(1+\kappa). \tag{8.14}$$

De esta forma, la tasa óptima es económicamente viable, ya que cumple las condiciones de segundo orden de maximización del bienestar y asegura que las $\hat{N}_{j,t}, j = m, b, k$ satisfagan (7.4.3).

CAPITULO 9

9. Tasa óptima de interés

En la sección anterior se determinó, la tasa $\hat{i}_a$ que maximiza el bienestar del consumidor representativo, para $0 < \theta < 1$. El punto importante, es que esta tasa depende sólo de los parámetros de preferencias θ y δ, así como de la política de deuda κ. Sin embargo, es independiente de todos los factores de riesgo en la tasa de interés, en la política monetaria y en la política de dividendos. Por lo anterior, se puede establecer que la tasa óptima de interés nominal después de impuestos, existe, es estrictamente positiva y coincide con la tasa del equilibrio determinista, en virtud de ser independiente de los factores de incertidumbre. En este punto es importante destacar dos características del modelo; primero, el énfasis en el crecimiento del consumo futuro (indicado por θ), como consecuencia de la linealidad en la tecnología y la tasa endógena de crecimiento del modelo, ya que una mayor tasa de interés lleva a una mayor consumo futuro, vía el fortalecimiento del ahorro e inversión. Segundo, el efecto de la función de utilidad logarítmica sobre la tasa óptima de interés, ya que en el caso de una función de utilidad de elasticidad constante, la razón de equilibrio entre consumo y bienestar depende de las varianzas y de las tasas de impuestos, de tal forma que la tasa óptima de interés dependería de estos factores y dejaría de ser determinista. Finalmente, eliminando π^* de las ecuaciones (7.3.9) y (7.3.10), se tiene que[16]

$$\begin{aligned}\hat{i}_a =&(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma(1-\gamma\sigma_y^2)+\mu-\sigma_M^2-\gamma[1-e_t(\hat{i}_a)-\bar{g}]\\&+\gamma^2(\sigma_y^2+\sigma_g^2+\nu_y^2\lambda_y+\nu_g^2\lambda_g)-\gamma\sigma_{My},\end{aligned}\tag{9.1}$$

lo que hace manifiesto el "trade-off"entre las diferentes políticas de gobierno, para alcanzar la tasa óptima. La conclusión directa del punto anterior y de la

[16] En el caso particular de la solución de Turnovsky, 1993.

ecuación (8.12), es que existe un número infinito de formas de alcanzar la tasa de interés óptima, debido a que $\hat{\imath}_a$ depende de parámetros tales como $\bar{g}$, γ, σ_g^2, σ_y^2, σ_{My}, ν_y^2, λ_y, ν_g^2 y λ_g que se toman como dados; pero al mismo tiempo está en función de los instrumentos de política monetaria μ y σ_M^2, así como de los instrumentos de política fiscal τ_y, τ_c, τ_p; todos ellos bajo control gubernamental. De forma tal que las combinaciones entre los parámetros anteriores para alcanzar la tasa óptima, son infinitas. Sin embargo, es importante mencionar que la fuente y magnitud del riesgo, afecta el "trade-off". Además, la posibilidad de emplear estos instrumentos puede estar restringida en función del rango de valores que pueden tomar. Estos aspectos se discuten en las secciones siguientes.

CAPITULO 10

10. Política monetaria

Los cambios en la media y la varianza de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria, μ y σ_M^2, afectan de manera simultánea la tasa de crecimiento esperada, ψ, la tasa de inflación esperada, π^*, la tasa nominal de interés después de impuestos, $i(1-\tau_y)$, y al bienestar económico, $V(a_t)$. Veamos cada caso.

Como se mencionó anteriormente, la tasa de crecimiento de la economía puede afectarse mendiante cambios en μ y/o en σ_M^2. En el primer caso, un incremento en μ eleva la tasa de nominal de interés después de impuesto, de tal forma que reduce la tasa de consumo $e_t[i(1-\tau_y)]$, a su vez que aumenta el crecimiento esperado del capital, vía aumentos en el nivel de ahorro e inversión siempre y cuando $\bar{g}$ permanezca constante. Sin embargo, dado que el incremento en la tasa de crecimiento económico es menor al incremento en μ, la inflación, π^*, se eleva para mantener el equilibrio. De esta forma, la manipulación de la tasa de expansión monetaria involucra un "trade-off"entre tasa real de crecimiento y la inflación. En el segundo caso, los incrementos en la varianza de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria, σ_M^2, elevan la tasa real de retorno de los bonos en comparación a la tasa de retorno de las acciones. De esta forma, para mantener el equilibrio en los activos, es necesario reducir la tasa de retorno de los bonos vía una disminución en la tasa nominal de interés, acompañada con aumento en la tasa de inflación esperada. De esta forma, una reducción en la incertidumbre monetaria estimula el crecimiento y reduce la inflación. Estos efectos, se estudian a continuación con mayor detalle.

CAPITULO 11

11. Tasa óptima de expansión monetaria

Como se vió en la ecuación (8.10), el efecto de la política monetaria sobre el bienestar es ambiguo. Depende de cual efecto resulte dominante. Por ello, para precisar el impacto, es mejor analizarlo a partir de la relación entre tasa óptima de crecimiento monetario, μ^*, e $\hat{i}_a$. Para enfocarnos en la política monetaria consideramos tres casos: en ausencia de impuestos. Como se muestra en la ecuación (9.1) (caso Turnovsky), la tasa óptima μ^* está en función de las tasas de impuestos τ_y y τ_p. Si las hacemos cero, se reduce a:

$$\mu^* - \sigma_M^2 = \hat{i}_a - \gamma[e_t(\hat{i}_a) + \bar{g} + \gamma\sigma_g^2 + \gamma\nu_y^2\lambda_y + \gamma\nu_g^2\lambda_g - \sigma_{My}]. \qquad (11.1)$$

Ahora, como el lado izquierdo es una combinación de los dos primeros momentos de la política monetaria, y en virtud de que $\bar{g}$, σ_g^2, σ_y^2, σ_{My}, ν_y^2, λ_y, ν_g^2 y λ_g están determinados exógenamente, la expresión permite determinar la tasa de interés óptima, $\hat{i}_a$. Esta ecuación destaca la relación entre la tasa óptima de crecimiento monetario, μ^*, y las varianzas de la política monetaria, σ_M^2, y fiscal, σ_g^2, así como, los saltos de las variables del gasto público y la tecnología, esto se da bajo el resultado de la incertidumbre que genera el gobierno en ambos casos. Ya que al modificarse las varianzas de estas políticas, la tasa μ^* se debe afectar a fin de mantener la tasa de interés $\hat{i}_a$ en su nivel óptimo. De esta forma, los incrementos de la varianza junto con los saltos de la política monetaria, σ_M^2, generan incrementos en μ, mientras que al incrementarse la varianza de la política fiscal, σ_g^2, o bien existiendo un salto $\nu_y^2\lambda_y$, se produce el efecto inverso, μ^* disminuye.

En general, μ^* puede tomar valores positivos o negativos. Esto se puede ver haciendo $\bar{g} = 0$ y empleando la ecuación (7.3.13), de donde obtenemos

$$\mu^* = \frac{\hat{i}_a[\hat{i}_a(1+\theta) - \delta[\theta + (1+\kappa)]]}{[\hat{i}_a(1+\theta) - \delta(1+\kappa)]}, \tag{11.2}$$

donde $\hat{i}_a$ es la tasa óptima determinada por (8.13). De lo anterior se desprende que

$$\mathrm{sgn}(\mu^*) = \mathrm{sgn}\left[\frac{\kappa(1+\kappa)}{\kappa(1+\kappa)+1} - \theta\right]. \tag{11.3}$$

En esta ecuación, μ^* toma valores negativos cuando κ es suficientemente pequeña, es decir, cuando la cantidad de bonos en relación al dinero circulante es baja. En esta situación, la tasa $\hat{i}_a$ de equilibrio no sólo es pequeña, sino que la relación de equilibrio que se establece implica que las tasas óptimas de inflación, π^*, y de crecimiento real de la economía, ψ^*, son negativas. En consecuencia, al incrementarse κ, el resto de las tasas, μ^*, π^* y ψ^*, se toman positivas.

Cuando se emplea la varianza de la política monetaria, σ_M^2, y no μ^*, como el instrumento de política para alcanzar la tasa $\hat{i}_a$ óptima, se llega a las mismas condiciones de óptimalidad presentadas. La diferencia consiste en las restricciones que enfrenta este mecanismo, ya que por definición no puede ser negativa, lo que reduce ampliamente su eficacia. Por ello es que la generación de incertidumbre, como forma práctica del mecanismo, siempre se acompaña del empleo simultáneo de otros instrumentos de política.

CAPITULO 12

12. Política fiscal

El impacto que generan en la economía los cambios en las tasas impositivas, τ_c, τ_y y τ_p, ocurre a través de la condición de arbitraje (7.3.2), que vincula las tasas de rendimiento r_m^* y r_b^*. Este patrón de comportamiento se cumple en general para todas las políticas de dividendos e inclusive en presencia del riesgo monetario y fiscal (cuando σ_M^2 y σ_g^2 son positivas). Sin embargo, se puede modificar sustancialmente si el riesgo proviene del lado de la oferta, es decir, cuando $\sigma_y^2 \geq 0$, ya que a partir de (7.3.10)(caso Turnovsky, 1993) las respuestas son proporcionales a $(1 - \gamma\sigma_y^2)$. De hecho, si se cumple $\sigma_y^2 > 1/\gamma$, el incremento de cualquiera de los impuestos estimularía el crecimiento y reduciría la inflación por (7.3.8).

El impacto de los impuestos sobre el bienestar económico, se asemeja al que genera la tasa de crecimiento monetario y depende de dos factores: el impacto sobre $\hat{i}_a$, derivado de un cambio en los impuestos, y el efecto de $\hat{i}_a$, sobre el bienestar. Para efectos del análisis, se emplean las tasas de impuestos congruentes con $\hat{i}_a$, que se obtienen del "trade-off"planteado en la ecuación (11.1), y de la relación de equilibrio en (9.1)(caso Turnovsky, 1993). Para ello hacemos cuatro supuestos: 1) la política monetaria no genera distorciones, $\mu = \sigma_M^2 = \nu_M^2 = 0$; 2) la política de gasto gubernamental tampoco genera distorsiones, $\bar{g} = \sigma_g^2 = \nu_g^2 = 0$; 3) no hay shocks de oferta, $\sigma_{My} = \sigma_y^2 = \nu_y^2 = 0$; y 4) cuando el impuesto sobre ingresos corporativos es cero, $\tau_p = 0$. En estas condiciones, la tasa óptima de impuesto sobre capital, $\hat{\tau}_y$, se obtiene de

$$(1 - \alpha\hat{\tau}_y)\gamma = \hat{i}_a - \pi^* = \hat{i}_a + \gamma[1 - e_t(\hat{i}_a)]. \tag{12.1}$$

Por lo tanto el impuesto óptimo sobre capital, debe ser tal que mantenga el equilibrio con el rendimiento real después de impuestos del capital, y el rendimiento real después de impuestos de los bonos. Notemos también que

$$\alpha\hat{\tau}_y = \hat{i}_a = \frac{\delta[\theta + (1+\kappa)] - \hat{i}_a}{\gamma[\hat{i}_a(1+\theta) - \delta(1+\kappa)]}, \tag{12.2}$$

lo cual combinado con (8.13) implica

$$\operatorname{sgn}(\alpha\hat{\tau}_y) = \operatorname{sgn}\left[\theta - \frac{\kappa(1+\kappa)}{\kappa(1+\kappa)+1}\right]. \tag{12.3}$$

De esta forma, el impuesto óptimo sobre capital puede ser positivo o negativo, es decir, pueden existir subsidios. Sin embargo, si se impone una restricción para que sea no negativo y se combinan las condiciones de equilibrio de la política monetaria y de la política fiscal, tenemos que cuando $\mu^* > 0$, $\alpha\hat{\tau}_y$ es igual a cero. Regresando al caso general planteado por (9.1)(caso Turnovsky, 1993), pero bajo el supuesto $\tau_p = 0$, la solución para $\alpha\hat{\tau}_y$ está dada por

$$\alpha\hat{\tau}_y = \frac{-\hat{i}_a + \gamma[e_t(\hat{i}_a) + \bar{g}] + \mu^* - \sigma_M^2 + \gamma^2(\sigma_g^2 + \nu_y^2\lambda_y + \nu_g^2\lambda_g) - \gamma\sigma_{My}}{\gamma(1-\gamma\sigma_y^2)}. \tag{12.4}$$

Considerando el caso cuando $1 > \gamma\sigma_y^2$, las relaciones importantes que se desprenden de estas ecuaciones, son: 1) para valores grandes de $\bar{g}$ o de μ^*, el impuesto óptimo sobre capital será estrictamente positivo. Esto se ve en (8.12), ya que los incrementos en cualquiera de estos dos instrumentos de política, elevarán $\hat{i}_a$ por encima del nivel óptimo, de tal forma que para mantenerla en su nivel óptimo se debe elevar el impuesto sobre capital; 2) un incremento en la varianza de la política fiscal, σ_g^2, eleva la tasa $\hat{i}_a$, por lo que para mantenerla en su nivel óptimo, debe elevarse el impuesto sobre capital, $\alpha\hat{\tau}_y$, de forma similar al caso anterior; y 3) de forma contraria a los casos anteriores, los incrementos en la varianza de la política monetaria, σ_M^2, tienden a disminuir el valor de $\hat{i}_a$, lo que lleva a una reducción del impuesto $\alpha\hat{\tau}_y$, para alcanzar el óptimo. En particular, la solución $\alpha\hat{\tau}_y = 0$ puede o no presentarse como la mejor política en condiciones de incertidumbre. Esto dependerá de la magnitud y factor del riesgo.

Finalmente, en lo que respecta al "trade-off" entre $\alpha\hat{\tau}_y$ y μ^*, cualquier combinación de $\alpha\hat{\tau}_y \geq 0$ y μ^*, será óptima. Ya que los cambios relativos entre ellas están dados por

$$\frac{\mathrm{d}\alpha\hat{\tau}_y}{\mathrm{d}\mu^*} = \frac{1}{\gamma(1-\gamma\sigma_y^2)}. \tag{12.5}$$

La elección del óptimo se hará en términos de la tasa óptima de interés nominal después de impuesto.

CAPITULO 13

13. El caso de una economía abierta y pequeña

El modelo presentado puede ser llevado al caso de una economía abierta y pequeña con ajustes menores. Suponga que el precio de la economía doméstica, P_t, satisface la condición de poder de paridad de compra $P_t = P_t^* E_t$, en donde P_t^* es el precio (en dólares) de los bienes en el resto del mundo y E_t es el tipo de cambio. Por simplicidad, supongamos que $P_t^* \equiv 1$, entonces el nivel general de precios, P_t, es igual al tipo de cambio, E_t. De esta manera $(\mathrm{d}P_t/P_t) = (\mathrm{d}E_t/E_t)$ y la tasa de depreción del tipo de cambio tendría el comportamiento estocástico definido en (2.1.1). Por otro lado, si se incluyen bonos internacionalmente comerciables denominados en moneda extranjera B_t^* o en términos reales, $b_t^* = E_t B_t^*/P_t$, la riqueza del individuo estaría dada por $a_t = m_t + b_t + b_t^* + k_t$ y el portafolio de inversión contemplaría la tenencia de bonos internacionales, los cuales estarían en poder tanto de los particulares como del sector público. Lo anterior requiere modificaciones en las restricciones presupuestales tanto de los consumidores como del gobierno, así como consideraciones sustanciales en la balanza de pagos de las cuentas nacionales. En este caso, las complicaciones técnicas serían mayores. Sin embargo, los resultados sobre política monetaria y fiscal no difieren en esencia de los que abastece el modelo aquí desarrollado.

CONCLUSIONES

14. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo de equilibrio macroeconómico en un ambiente estocástico. Las variables exógenas incluyen los parámetros de política económica (crecimiento monetario, μ; gasto público, $\bar{g}$; y política de deuda, κ); y las tasas de impuesto τ_y, τ_c y τ_p. De igual forma, los procesos estocásticos exógenos son los respectivos al crecimiento monetario, $\mathrm{d}W_{M,t}$, el gasto público, $\mathrm{d}W_{g,t}$, y la producción, $\mathrm{d}W_{y,t}$, los cuales se supone no están correlacionados al igual que los saltos respectivos. El resto de los procesos estocásticos son endógenos y pueden ser expresados como funciones simples de los shocks exógenos.

Por otro lado, se discutieron los efectos de política económica sobre la acumulación de capital y la inflación, obteniendo que la relación entre ambas depende de la política empleada. Los resultados obtenidos fueron tres. Primero, la reducción de la incertidumbre económica, $\mathrm{d}W_{M,t}$, estimula el crecimiento, al tiempo que reduce la inflación. Segundo, el aumento de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria, μ^*, estimula el crecimiento, pero aumenta también la tasa de inflación. Tercero, vía impuestos se puede elevar la tasa de crecimiento de la economía, al tiempo que se disminuye la inflación.

En lo que respecta al bienestar, el modelo presenta tres resultados relevantes. Primero, el papel de la tasa de interés nominal después de impuesto como mecanismo de transmisión. A partir de ella, cualquier política que incremente esta tasa tiene un efecto ambiguo sobre el crecimiento económico; ya que por un lado eleva el ahorro, la inversión y el consumo futuro, pero por otro lado, disminuye la demanda de saldos reales y modifica la integración de portafolio. Segundo, la tasa óptima de interés es independiente del riesgo. Finalmente, las tasas óptimas de crecimiento monetario e intereses recaudados, se eligen en función del nivel óptimo de bienestar y existe un sin fin de combinaciones posibles. En consecuencia, este modelo presenta un marco de discusión importante para la elección de instrumentos de política económica.

APENDICE A

En este apéndice se muestra como el Lema de Itô puede ser visto como una extensión natural del cálculo diferencial e intregral utilizando resultados ya conocidos.

Consideremos una función continua y diferenciable f de una variable x. Si Δx es un incremento pequeño en x y Δf es el resultado de dicho cambio en f, entonces, esto es conocido como:

$$\Delta f \approx \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x. \tag{A.1}$$

En otras palabras, Δf es aproximadamente igual a la tasa de cambio de f con respecto de x multiplicada por Δx. El error involucra términos del orden Δx^2. Utilizando la expansión en serie de Taylor para Δf esto nos lleva a:

$$\Delta f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\Delta x^3 + ... \tag{A.2}$$

Para una función f continua y diferenciable de dos variables, x y y, el resultado es análogo a la ecuación $(A.1)$

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y, \tag{A.3}$$

ahora la expansión en serie de Taylor para Δf;

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 + ... \tag{A.4}$$

Y el límite de $(A.4)$ cuando Δx y Δy tienden a cero, tenemos

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y. \tag{A.5}$$

Ahora si extendemos este resultado, ($A.5$), para aquellas variables que siguen un proceso estocástico, la ecuación resulta

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mu(x,t)\mathrm{d}t + \sigma(x,t)\mathrm{d}W, \tag{A.6}$$

donde dW es un proceso de Wiener estandarizado, *i.e*, presenta incrementos normales independientes con E[dW] = 0 y Var[dW] = dt. Análogamente con la ecuación, ($A.4$), la expansión en serie de Taylor para $f = f(x,t)$ es

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 + \ldots \tag{A.7}$$

Tomando los límites de Δx y Δt cuando estas tienden a cero

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\mathrm{d}t^2. \tag{A.8}$$

Como $f = f(x,t)$ sustituimos dx, ($A.6$), en ($A.8$);

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x\mu(x,t)\mathrm{d}t + x\sigma(x,t)\mathrm{d}W) + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2. \tag{A.9}$$

El término dx^2 se deriva como;

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^2 &= (x\mu \mathrm{d}t + x\sigma \mathrm{d}W)^2 \\ &= (x\mu)\mathrm{d}t^2 + 2(x^2\mu\sigma \mathrm{d}t\mathrm{d}W) + (x\sigma)^2\mathrm{d}W^2 = (x\sigma)^2\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{A.10}$$

agrupando términos semejantes la ecuación, ($A.9$), toma la forma,

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}x\mu + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\sigma)^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial}{\partial x}x\sigma\mathrm{d}W, \tag{A.11}$$

Para el caso de procesos Markovianos de difusión con saltos, el lema de Itô opera de la misma manera, bajo ciertas observaciones para con los saltos*.

* Robert A. Jarrow y Eric R. Rosenfeld, 1984

Sea la ecuación $(A.12)$ un proceso markoviano de difusión con saltos

$$dx_t = x_t(\mu dt + \sigma dt + \nu dq_t), \tag{A.12}$$

entonces

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_t}x_t\mu + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_t\sigma)^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}x\sigma dW + [f((x_t(1+\nu)) - f(x_t)], \tag{A.13}$$

donde dW es un proceso de Wiener estandarizado, *i.e*, presenta incrementos normales independientes con $E[dW] = 0$ y $Var[dW] = dt$ y los saltos siguen un proceso de Poisson q_t, con parámetro λ, de tal manera que

$$Pr\{\text{un salto unitario durante } dt\} = Pr\{dq_t = 1\} = \lambda dt + o(dt),$$

mientras que*

$$Pr\{\text{ningún salto en } dt\} = Pr\{dq_t = 0\} = 1 - \lambda dt + o(dt).$$

Por lo tanto, $E[dq_t]= Var[dq_t] = \lambda dt$. Por lo que los saltos serán cuantificados como la distancia entre dos puntos cualesquiera.

Derivación de la ecuación (3.2.1)

Utilizando la teoría antes presentada, la ecuación, (3.2.1), del capítulo 2 se deriva de la siguiente manera, si $f(P_t)= 1/P_t$, entonces

$$\begin{aligned} df =& \frac{\partial f}{\partial P_t}dP_t + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial P_t^2}dP_t{}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial P_t \partial t}dP_t dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2 \\ & - [f(P_t(1+\nu_P)) - f(P_t)], \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} df(P_t) =& \left(\frac{\partial f(P_t)}{\partial P_t}\pi P_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(P_t)}{\partial P_t^2}(P_t\sigma_P)^2\right)dt + \frac{\partial f(P_t)}{\partial P_t}\sigma_P P_t dW_{P,t} \\ & + [f(P_t(1+\nu_P)) - f(P_t)], \end{aligned} \tag{A.15}$$

---

* Como siempre, $o(h)$ significa que $o(h)/h \to 0$ cuando $h \to 0$.

y

$$\mathrm{d}R_{m,t} = \mathrm{d}\Big(\frac{1}{P_t}\Big) = \frac{1}{P_t}\left[(-\pi + \sigma_P^2)\mathrm{d}t - \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} + \Big(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\Big)\mathrm{d}Q_{P,t}\right], \quad (A.16)$$

equivalentemente,

$$\mathrm{d}R_{m,t} = P_t \mathrm{d}\Big(\frac{1}{P_t}\Big) = r_m \mathrm{d}t - \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} + \Big(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\Big)\mathrm{d}Q_{P,t}, \qquad (3.2.1)$$

donde $r_m = -\pi + \sigma_P^2$.

APENDICE B

Para resolver un problema de control óptimo estocástico del tipo:

$$\max_{\bar{u}} \mathrm{E}\left\{ \int_0^\infty F(x,\bar{u})e^{-\delta t}\mathrm{d}t \right\} \tag{$B.1$}$$

sujeto a

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W + \nu \mathrm{d}Q. \tag{$B.2$}$$

donde dW es un proceso de Wiener estandarizado, *i.e*, presenta incrementos normales independientes con E[dW] = 0 y Var[dW] = dt y los saltos siguen un proceso de Poisson, con parámetro λ, de tal manera que

$$\Pr\{\text{un salto unitario durante d}t\} = \Pr\{\mathrm{d}Q = 1\} = \lambda \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t), \tag{$B.3$}$$

mientras que*

$$\Pr\{\text{ningún salto en d}t\} = \Pr\{\mathrm{d}Q = 0\} = 1 - \lambda \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t). \tag{$B.4$}$$

Se utiliza la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) de la programación dinámica continua:

$$0 = \max_{\bar{u}} \left\{ F(x,\bar{u}) - \delta V(x) + xV'(x)\mu + \frac{1}{2}x^2V''(x)\sigma^2 \right\} + \lambda[V(x(1+\nu)) - V(x)], \tag{$B.5$}$$

Por lo tanto, E[dQ] = Var[dQ] = λdt. Por lo que los saltos serán cuantificados como la distancia entre dos puntos cualesquiera.

* Como siempre, $o(h)$ significa que $o(h)/h \to 0$ cuando $h \to 0$.

Si $f(P_t) = 1/P_t$, entonces para el salto $\mathrm{d}Q_{P,t}$ tenemos;

$$\lambda_P[V(P_t(1+\nu_P) - V(P_t)] = \frac{\lambda_P}{P_t}\left[\frac{1}{(1+\nu_P)} - 1\right]. \tag{B.6}$$

En nuestro modelo se tiene,

$$\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} V_0 = \max \mathrm{E}_0 \left\{ \int_0^\infty [\theta \log(c_t) + \log(N_{m,t} a_t)]\, e^{-\delta t} \mathrm{d}t \right\} \tag{B.7}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} &= \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau}\right] \mathrm{d}t \\ &+ [N_{k,t}\sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} - \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t}] \\ &+ \left[(N_{m,t} + N_{b,t})\Big(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\Big)\mathrm{d}Q_{P,t} + N_{k,t}\nu_k \mathrm{d}Q_{k,t} - \nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t}\right] \end{aligned} \tag{B.8}$$

y

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1 \tag{B.9}$$

donde i, π, τ_c, τ_y, $\bar{\tau}$ junto con las varianzas y covarianzas correspondientes se toman como dadas. En este caso la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B), $(B.5)$, conduce a:

$$\begin{aligned} &\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) \equiv \\ &\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \Big\{\theta \log(c_t) + \log(N_{m,t} a_t) - \delta V(a_t) \\ &+ a_t V'(a_t)[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau}]\mathrm{d}t \\ &+ \tfrac{1}{2} a_t^2 V''(a_t)\Big[(N_{m,t} + N_{b,t})^2\sigma_P^2 + N_{k,t}^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\ &- 2(N_{m,t} + N_{b,t})N_{k,t}\sigma_{Pk} + 2(N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_{P\tau} - 2N_{k,t}\sigma_{k\tau}\Big]\Big\} \\ &+ \lambda_P \left(V\left(a_t\left[1 - (N_{m,t} + N_{b,t})\frac{\nu_P}{1+\nu_P}\right]\right) - V(a_t)\right) \\ &+ \lambda_k[V(a_t(1 + N_{k,t}\nu_k)) - V(a_t)] \\ &+ \lambda_\tau[V(a_t(1 - \nu_\tau)) - V(a_t)] \\ &+ \phi(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}) = 0. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Esta condición evaluada en el máximo es una ecuación diferencial (determinista) de segundo orden en $V(a_t)$. Para resolver esta ecuación diferencial, postulamos a $V(a_t)$ de la forma: $V(a_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(a_t)$. Consecuentemente, las dos primeras derivadas son:

$$V'(a_t) = \frac{\beta_1}{a_t} \qquad \text{y} \qquad V''(a_t) = -\frac{\beta_1}{a_t^2}. \tag{B.11}$$

Después de sustituir estas expresiones en la la condición de H-J-B obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) \equiv \\
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \Big\{ \theta \log(c_t) + \log(N_{m,t} a_t) - \delta[\beta_0 + \beta_1 \log(a_t)] \\
&+ \beta_1 [N_{m,t}(-\pi + \sigma_P^2) + N_{b,t}(i(1-\tau_y) - \pi + \sigma_P^2) + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau}]\mathrm{d}t \\
&- \tfrac{1}{2}\beta_1 \Big[(N_{m,t} + N_{b,t})^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
&- 2(N_{m,t} + N_{b,t}) N_{k,t} \sigma_{Pk} + 2(N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_{P\tau} - 2N_{k,t} \sigma_{k\tau} \Big] \Big\} \\
&+ \beta_1 \Bigg[\lambda_P \left[\log\left(1 - (N_{m,t} + N_{b,t}) \frac{\nu_P}{1+\nu_P} \right) \right] + \lambda_k [\log(1 + N_{k,t} \nu_k)] \\
&+ \lambda_\tau [\log(1 - \nu_\tau)] \Bigg] + \phi(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}) = 0.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Las condiciones de primer orden (necesarias) para una solución interior son:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial N_{m,t}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial N_{b,t}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial N_{k,t}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0. \tag{B.13}$$

Estas condiciones conducen en forma inmediata las ecuaciones:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial c_t} = \frac{\theta}{c_t^*} - \frac{\beta_1(1+\tau_c)}{a_t}; \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial H}{\partial \hat{N}_{m,t}} &= \frac{1}{\hat{N}_{m,t}} + \beta_1 \Big[r_m - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}) \sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t} \sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} \Big] \\
&\quad - \beta_1 \Big[\frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - \hat{N}_{m,t} - \hat{N}_{b,t}) \nu_P} \Big] - \phi;
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial H}{\partial \hat{N}_{b,t}} =& \beta_1 \Big[r_b - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{Pr} \Big] \\
& - \beta_1 \Big[\frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - \hat{N}_{m,t} - \hat{N}_{b,t})\nu_P} \Big] - \phi;
\end{aligned} \tag{B.16}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial H}{\partial \hat{N}_{k,t}} =& \beta_1 \Big[r_k - \hat{N}_{k,t}\sigma_k^2 + (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_{Pk} + \sigma_{kr} \Big] \\
& + \beta_1 \Big[\frac{\lambda_k \nu_k}{1 + (1 - \hat{N}_{m,t} - \hat{N}_{b,t})\nu_k} \Big] - \phi;
\end{aligned} \tag{B.17}
$$

$$
0 = \frac{\partial H}{\partial \phi} = 1 - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t} + \hat{N}_{k,t}). \tag{B.18}
$$

Las cuales concuerdan con (3.3.2)-(3.3.6).

APENDICE C

Para demostrar la ecuación, $1 + \theta - \delta\beta_1 = 0$, sustituimos en, $(B.12)$,

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) \equiv \\
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \Bigg\{ \theta \log(c_t) + \log(N_{m,t} a_t) - \delta[\beta_0 + \beta_1 \log(a_t)] \\
&+ \beta_1 \left[N_{m,t}(-\pi + \sigma_P^2) + N_{b,t}(i(1-\tau_y) - \pi + \sigma_P^2) + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \mathrm{d}t \\
&- \tfrac{1}{2}\beta_1 \Big[(N_{m,t} + N_{b,t})^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
&- 2(N_{m,t} + N_{b,t}) N_{k,t} \sigma_{Pk} + 2(N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_{P\tau} - 2N_{k,t}\sigma_{k\tau} \Big] \Bigg\} \\
&+ \beta_1 \Bigg[\lambda_P \left[\log \left(1 - (N_{m,t} + N_{b,t}) \frac{\nu_P}{1+\nu_P} \right) \right] + \lambda_k [\log(1 + N_{k,t}\nu_k)] \\
&+ \lambda_\tau [\log(1 - \nu_\tau)] \Bigg] + \phi(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}) = 0,
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

los valores óptimos de c_t^*, $\hat{N}_{m,t}$, $\hat{N}_{b,t}$ y $\hat{N}_{k,t}$, la ecuación anterior se transforma como:

$$
\begin{aligned}
0 = &\Bigg\{ \theta \log \left(\frac{\theta}{\beta_1(1+\tau_c)} a_t \right) + \log \left(\frac{a_t}{i(1-\tau_y)\beta_1} \right) - \delta[\beta_0 + \beta_1 \log(a_t)] \\
&+ \beta_1 \left[\hat{N}_{m,t}(-\pi + \sigma_P^2) + \hat{N}_{b,t}(i(1-\tau_y) - \pi + \sigma_P^2) + \hat{N}_{k,t} r_k - \frac{c_t^*(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\
&- \tfrac{1}{2}\beta_1 \Big[(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})^2 \sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
&- 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}) \hat{N}_{k,t} \sigma_{Pk} + 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}) \sigma_{P\tau} - 2\hat{N}_{k,t}\sigma_{k\tau} \Big] \Bigg\} \\
&+ \beta_1 \Bigg[\lambda_P \left[\log \left(1 - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}) \frac{\nu_P}{1+\nu_P} \right) \right] + \lambda_k [\log(1 + \hat{N}_{k,t}\nu_k)] \\
&+ \lambda_\tau [\log(1 - \nu_\tau)] \Bigg] + \phi(1 - \hat{N}_{m,t} - \hat{N}_{b,t} - \hat{N}_{k,t}),
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
0 = \Bigg\{ & [1+\theta-\delta\beta_1]\log(a_t) + \theta[\log(\theta) - \log(\beta_1(1+\tau_c)] - \log(\beta_1 i[1-\tau_y]) - \delta\beta_0 \\
& + \beta_1[\hat{N}_{m,t}(-\pi+\sigma_P^2) + \hat{N}_{b,t}(i(1-\tau_y) - \pi + \sigma_P^2) + \hat{N}_{k,t}r_k - \frac{c_t^*(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau}] \\
& - \tfrac{1}{2}\beta_1\Big[(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})^2\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
& - 2(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} + 2(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})\sigma_{P\tau} - 2\hat{N}_{k,t}\sigma_{k\tau}\Big]\Bigg\} \\
& + \beta_1\Bigg[\lambda_P\left[\log\left(1-(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})\frac{\nu_P}{1+\nu_P}\right)\right] + \lambda_k[\log(1+\hat{N}_{k,t}\nu_k)] \\
& + \lambda_\tau[\log(1-\nu_\tau)]\Bigg] + \phi(1-\hat{N}_{m,t}-\hat{N}_{b,t}-\hat{N}_{k,t}).
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

Ahora, si hacemos

$$1+\theta-\beta_1\delta = 0, \tag{C.3}$$

despejando, β_1 de $(C.3)$

$$\beta_1 = \frac{(1+\theta)}{\delta}. \tag{C.4}$$

DERIVACIONES Y DEMOSTRACIONES DE LOS RESULTADOS

Derivación de la ecuación (3.3.8)

Para obtener la ecuación (3.3.8), restamos la ecuación (3.3.5) de la (3.3.6)

$$
\begin{aligned}
0 =&\beta_1 \left[r_b - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - \hat{N}_{m,t} - \hat{N}_{b,t})\nu_P} \right. \\
&\left. - r_k + \hat{N}_{k,t}\sigma_k^2 - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_{Pk} - \sigma_{k\tau} - \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + (1 - \hat{N}_{m,t} - \hat{N}_{b,t})\nu_k} \right],
\end{aligned} \tag{D.1}
$$

utilizando la ecuación, (3.3.2),

$$
N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1, \tag{3.3.2}
$$

la ecuación, (D.1), toma la forma

$$
\begin{aligned}
0 =&\beta_1 \left[r_b - (1 - \hat{N}_{k,t})\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + \hat{N}_{k,t}\nu_P} \right. \\
&\left. - r_k + \hat{N}_{k,t}\sigma_k^2 - (1 - \hat{N}_{k,t})\sigma_{Pk} - \sigma_{k\tau} - \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + \hat{N}_{k,t}\nu_k} \right],
\end{aligned} \tag{D.2}
$$

finalmente

$$
0 = -\beta_1 \left[r_k - r_b + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau} \right] + \beta_1 \hat{N}_{k,t} \left[\sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2 \right], \tag{D.3}
$$

si denotamos a

$$
B \equiv \sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2 > 0, \tag{3.3.9}
$$

y

$$
A \equiv r_k - r_b + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau}. \tag{3.3.10}
$$

La ecuación (D.2) se transforma como;

$$
\beta_1 \left[\hat{N}_{k,t} B - A - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + \hat{N}_{k,t}\nu_P} - \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + \hat{N}_{k,t}\nu_k} \right] = 0. \tag{3.3.8}
$$

Derivación de la ecuación (3.4.1)

Notemos que las condiciones de primer orden se pueden escribir como:

$$u'(c_t) = \frac{(1+\theta)(1+\tau_c)}{\delta a_t}, \tag{$D.4$}$$

para comprobar esta ecuación hacemos:

$$v(m_t) = \log(\hat{N}_{m,t} a_t). \tag{$D.5$}$$

Sabemos que $m_t = M_t/P_t$; y $N_{m,t} = m_t/a_t$, derivando, $(D.5)$, obtenemos

$$a_t v'(m_t) = \frac{1}{\hat{N}_{m,t}}, \tag{$D.6$}$$

pero

$$\begin{aligned} u(c_t) &= \theta \log(c_t) \\ &= \theta \log\left(\frac{\theta}{\beta_1(1+\tau_c)} a_t\right). \end{aligned} \tag{$D.7$}$$

De acuerdo al Apéndice C, sustituyendo el valor óptimo de β_1 tenemos

$$u(c_t) = \theta \log\left(\frac{\theta\delta}{(1+\theta)(1+\tau_c)} a_t\right), \tag{$D.8$}$$

la derivada de $u(c_t)$ es

$$u'(c_t) = \frac{(1+\theta)(1+\tau_c)}{\delta a_t}, \tag{$D.9$}$$

entonces,

$$\frac{v'(m_t)}{u'(c_t)} = \frac{\delta}{(1+\theta)(1+\tau_c)\hat{N}_{m,t}}. \tag{$D.10$}$$

Finalmente la ecuación (3.4.2) se deriva de manera automática

$$\frac{v'(m_t)}{u'(c_t)} = \frac{i(1-\tau_y)}{(1+\tau_c)} > 0. \tag{$D.11$}$$

Derivación de la ecuación (3.4.2)

Consecuentemente la ecuación, (3.4.2), se deriva de manera automática de la ecuación, (3.3.4),

$$\frac{1}{\hat{N}_{m,t}} = -\beta_1\left[r_m-(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t})\sigma_P^2+\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk}-\sigma_{P\tau}-\frac{\lambda_P\nu_P}{1+(1-\hat{N}_{m,t}-\hat{N}_{b,t})\nu_P}+\frac{\phi}{\beta_1}\right], \tag{D.12}$$

sustituyendo el valor de β_1 en la ecuación, $(D.12)$,

$$\frac{1}{\hat{N}_{m,t}} = \frac{(1+\theta)}{\delta}\left[-r_m+(1-\hat{N}_{k,t})\sigma_P^2-\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk}+\sigma_{P\tau}+\frac{\lambda_P\nu_P}{1+\hat{N}_{k,t}\nu_P}-\frac{\phi\delta}{(1+\theta)}\right], \tag{D.13}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{v'(m_t)}{u'(c_t)} &= \frac{\delta}{(1+\theta)(1+\tau_c)\hat{N}_{m,t}}\\ &= \frac{1}{(1+\tau_c)}\Bigg[-r_m+(1-\hat{N}_{k,t})\sigma_P^2-\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk}+\sigma_{P\tau} \qquad (D.14)\\ &\quad+\frac{\lambda_P\nu_P}{1+\hat{N}_{k,t}\nu_P}-\frac{\phi\delta}{(1+\theta)}\Bigg],\end{aligned}$$

claramente se llega a la expresión, (3.4.2),

$$\begin{aligned}\frac{v'(m_t)}{u'(c_t)}(1+\tau_c) &= \pi-\hat{N}_{k,t}(\sigma_P^2+\sigma_{Pk})+\sigma_{P\tau}+\frac{\lambda_P\nu_P}{1+\hat{N}_{k,t}\nu_P}-\frac{\delta\phi}{1+\theta} \qquad (3.4.2)\\ &= i(1-\tau_y)>0.\end{aligned}$$

Derivación de la ecuación (4.2.4)

Para la derivación de la ecuación, (4.2.4), se necesitan las ecuaciones, (4.2.2) y la (4.2.3),

$$\mathrm{d}k_t = N\mathrm{d}u_t, \tag{4.2.2}$$

y

$$(1-\tau_p)\mathrm{d}y_t = \mathrm{d}v_t+\mathrm{d}k_t, \tag{4.2.3}$$

sustituyendo la ecuación, (4.2.2), en la ecuación, (4.2.3),

$$(1-\tau_p)\mathrm{d}y_t = \mathrm{d}v_t + N\mathrm{d}u_t, \tag{D.15}$$

pero $Nu_t = k_t$, entonces

$$Nu_t\frac{\mathrm{d}u_t}{u_t} = \mathrm{d}k_t, \tag{D.16}$$

la ecuación, (4.2.4), aparece de manera natural

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{u_t} = \frac{(1-\tau_p)\mathrm{d}y_t - \mathrm{d}v_t}{k_t}. \tag{4.2.4}$$

Derivación de la ecuación (5.3.2)

Para la obtención de dicha ecuación aplicamos logarítmo de ambas partes,

$$\log B_t - \log M_t = \log k_t. \tag{D.17}$$

Si derivamos la ecuación $(D.17)$ obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = \frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}. \tag{5.3.2}$$

Derivación de la ecuación (7.1.2)

Utilizando el lema de Itô* para la derivación de la ecuación, (7.1.2), tenemos que si

$$P_t = \frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}}\frac{M_t}{k_t}, \tag{7.1.1}$$

entonces, la derivada, $\mathrm{d}P_t$, es

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P_t = &\left[\frac{\partial P_t}{\partial M_t}\mathrm{d}M_t + \frac{\partial P_t}{\partial k_t}\mathrm{d}k_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_t}{\partial M_t^2}\mathrm{d}M_t{}^2 + \frac{\partial^2 P_t}{\partial M_t \partial k_t}\mathrm{d}M_t\mathrm{d}k_t\right.\\ &\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_t}{\partial k_t^2}\mathrm{d}k_t{}^2\right]\frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}};\end{aligned} \tag{D.18}$$

* véase el Apéndice A.

si utilizamos la función descrita en la ecuación (7.1.1)

$$\mathrm{d}P_t = \left[\frac{1}{k_t}\mathrm{d}M_t - \frac{M_t}{k_t^2}\mathrm{d}k_t - \frac{1}{k_t^2}\mathrm{d}M_t\mathrm{d}k_t + \frac{M_t}{k_t^3}\mathrm{d}k_t^2\right]\frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}}, \tag{$D.19$}$$

factorizando $1/k_t$, resulta

$$\mathrm{d}P_t = \left[\frac{1}{k_t}\left(\mathrm{d}M_t - M_t\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} - \mathrm{d}M_t\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} + M_t\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right)^2\right)\right]\frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}}, \tag{$D.20$}$$

entonces,

$$\mathrm{d}P_t = \left[\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} - \frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} - \left(\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right)^2\right]\frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}}\frac{M_t}{k_t}, \tag{$D.21$}$$

que de manera natural obtenemos;

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} - \frac{\mathrm{d}k_t}{k_t} - \left(\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}k_t}{k_t}\right)^2 \tag{7.1.2}$$

Derivación de la ecuación (7.2.1)

Sustituyendo las ecuaciones, (5.1.1), (5.2.1), (5.3.1) en (5.1)

$$\bar{g}\gamma k_t\mathrm{d}t + \gamma k_t\sigma_g\mathrm{d}W_{g,t} + \gamma k_t\nu_g\mathrm{d}Q_{g,t} - (\mathrm{d}\tau_{1,t} + \mathrm{d}\tau_{2,t}) + m_t\mathrm{d}R_{m,t} + b_t\mathrm{d}R_{b,t} = \mathrm{d}m_t + \mathrm{d}b_t, \tag{$D.22$}$$

factorizando $1/a_t$

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma k_t}{a_t}(\bar{g}\mathrm{d}t + \sigma_g\mathrm{d}W_{g,t} + \nu_g\mathrm{d}Q_{g,t}) - \frac{(\mathrm{d}\tau_{1,t} + \mathrm{d}\tau_{2,t})}{a_t} \\ &+ \frac{m_t}{a_t}\mathrm{d}R_{m,t} + \frac{b_t}{a_t}\mathrm{d}R_{b,t} = \frac{\mathrm{d}m_t}{a_t} + \frac{\mathrm{d}b_t}{a_t}, \end{aligned} \tag{$D.23$}$$

recordando la ecuación $N_{j,t} = m_t/a_t$ para $j = m, b, k$, la ecuación ($D.23$) toma la forma

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma k_t}{a_t}(\bar{g}\mathrm{d}t + \sigma_g\mathrm{d}W_{g,t} + \nu_g\mathrm{d}Q_{g,t}) - \frac{(\mathrm{d}\tau_{1,t} + \mathrm{d}\tau_{2,t})}{a_t} \\ &+ \hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)\frac{M_t}{P_t}}{\frac{M_t}{P_t}a_t} + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{B_t}{P_t}\right)\frac{B_t}{P_t}}{\frac{B_t}{P_t}a_t}, \end{aligned} \tag{$D.24$}$$

lo que resulta es la ecuación, (7.2.1),

$$
\begin{aligned}
\hat{N}_{m,t}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}} + \hat{N}_{b,t}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{B_t}{P_t}\right)}{\frac{B_t}{P_t}} =& \frac{\gamma k_t}{a_t}[\bar{g}\mathrm{d}t + \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t} + \nu_g \mathrm{d}Q_{g,t}] - \frac{(\mathrm{d}\tau_{1,t} + \mathrm{d}\tau_{2,t})}{a_t} \\
&+ \hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t},
\end{aligned}
\tag{7.2.1}
$$

si utilizamos la ecuación, (5.3.1), para dejar todo en términos de M_t entonces obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\frac{\mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}} =& \frac{\gamma k_t}{a_t}[\bar{g}\mathrm{d}t + \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t} + \nu_g \mathrm{d}Q_{g,t}] - \frac{(\mathrm{d}\tau_{1,t} + \mathrm{d}\tau_{2,t})}{a_t} \\
&+ \hat{N}_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t}.
\end{aligned}
\tag{7.2.2}
$$

Para obtener la diferencial de $\mathrm{d}\left(M_t/P_t\right)$ utilizamos el lema de Itô, después las funciones de impuestos se sustituyen $\mathrm{d}\tau_{1,t}$ y $\mathrm{d}\tau_{2,t}$ y finalmente se obtienen las ecuaciones, (7.2.3), (7.2.4), (7.2.5), si la $f(M_t, P_t) = M_t/P_t$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f = \mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right) =& \left[\frac{\partial f}{\partial M_t}\mathrm{d}M_t + \frac{\partial f}{\partial P_t}\mathrm{d}P_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial M_t^2}\mathrm{d}M_t{}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial M_t \partial P_t}\mathrm{d}M_t\mathrm{d}P_t\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial P_t^2}\mathrm{d}P_t{}^2\right];
\end{aligned}
\tag{D.25}
$$

obteniendo la derivada

$$
\mathrm{d}f = \mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right) = \left[\frac{1}{P_t}\mathrm{d}M_t - \frac{M_t}{P_t^2}\mathrm{d}P_t - \frac{1}{P_t^2}\mathrm{d}M_t\mathrm{d}P_t + \frac{M_t}{P_t^3}\mathrm{d}P_t^2\right], \tag{D.26}
$$

factorizando M_t/P_t

$$
\mathrm{d}f = \mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right) = \left[\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t} - \frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} - \left(\frac{\mathrm{d}M_t}{M_t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t}\right)^2\right]\frac{M_t}{P_t}, \tag{D.27}
$$

sustituyendo las ecuaciones, (2.1.1) y (5.2.1) e igualando, tenemos

$$
\begin{aligned}
\bar{\tau}^* =& \gamma\hat{N}_{k,t}\bar{g} - [\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}]\mu + \hat{N}_{b,t}i(1-\tau_y) - \hat{N}_{b,t}i\tau_y \\
&- [\alpha\tau_y(1-\tau_p) + \tau_p]\gamma\hat{N}_{k,t} + [\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}](\sigma_{MP} - \nu^2\lambda_P) - \tau_c\frac{c_t}{a_t},
\end{aligned}
\tag{7.2.3}
$$

$$\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} = -[\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}]\sigma_M \mathrm{d}W_{M,t}+\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}-[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t}, \tag{7.2.4}$$

y

$$\nu_\tau \mathrm{d}Q_{\tau,t} = -[\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}]\nu_M \mathrm{d}Q_{M,t}+\gamma\hat{N}_{k,t}\nu_g \mathrm{d}Q_{g,t}-[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\hat{N}_{k,t}\nu_y \mathrm{d}Q_{y,t}. \tag{7.2.5}$$

Derivación de la ecuación (7.3.1)

Para la derivación de las varianzas se necesitan las ecuaciones, (7.1.5), (4.3.4) y (7.2.4). en particular la obtención de la ecuación, (7.3.1.2)

$$\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} = \sigma_M \mathrm{d}W_{M,t} - \gamma(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}), \tag{7.1.5}$$

si elevamos al cuadrado lo que resulta es

$$\sigma_P^2 = \sigma_M^2 + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) - 2\gamma\sigma_{My}, \tag{7.3.1.2}$$

para la varianza que se obtiene en, (7.3.1.3) se necesita elevar al cuadrado la ecuación, (4.3.4), lo que resulta

$$\sigma_k^2 = (1-\tau_p)^2(1-\alpha\tau_y)^2\gamma^2\sigma_y^2, \tag{7.3.1.3}$$

ahora, para la varianza que resulta de la ecuación, (7.3.1.4), ésta es obtenida al elevar al cuadrado la ecuación, (7.2.4) y se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_\tau^2 = {} & (1-N_{k,t})^2\sigma_M^2 + \gamma^2 N_{k,t}^2\sigma_g^2 + [\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]^2\gamma^2 N_{k,t}^2\sigma_y^2 \\ & + 2(1-N_{k,t})[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma N_{k,t}\sigma_{My}.\end{aligned} \tag{7.3.1.4}$$

Ahora para las covarianzas, (7.3.1.5)-(7.3.1.7), se necesitan las ecuaciones, (7.1.5), (4.3.4) y (7.2.4)

$$\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} = \sigma_M \mathrm{d}W_{M,t} - \gamma(\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t} - \sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}), \tag{7.1.5}$$

$$(1-\tau_p)\mathrm{d}y_t = \mathrm{d}v_t + \mathrm{d}k_t \tag{4.2.3}$$

$$\sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t} = -[\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}]\sigma_M \mathrm{d}W_{M,t}+\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_g \mathrm{d}W_{g,t}-[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma\hat{N}_{k,t}\sigma_y \mathrm{d}W_{y,t}, \tag{7.2.4}$$

de manera inmediata la covarianza de σ_{Pk} se obtiene del producto de las ecuaciones, (7.1.5), (4.3.4),

$$\sigma_{Pk} = (1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma(\sigma_{My}-\gamma\sigma_y^2), \tag{7.3.1.5}$$

luego al igual que la covarianza anterior, ésta se obtiene del producto de la ecuaciones, (7.1.5), (7.2.4) lo que resulta

$$\begin{aligned}\sigma_{P\tau} &= -(1-N_{k,t})\sigma_M^2 - [\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma N_{k,t}\sigma_{My}\\ &\quad + (1-N_{k,t})\gamma\sigma_{My} + [\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p]\gamma^2 N_{k,t}\sigma_y^2 + \gamma^2 N_{k,t}\sigma_g^2,\end{aligned} \tag{7.3.1.6}$$

finalmente la última covarianza es obtenida de las ecuaciones (4.3.4) y (7.2.4)

$$\begin{aligned}\sigma_{k\tau} &= -(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)(1-N_{k,t})\gamma\sigma_{My}\\ &\quad - [\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p](1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma^2 N_{k,t}\sigma_y^2.\end{aligned} \tag{7.3.1.7}$$

Derivación de la ecuación (7.3.2)

Como se menciona en la ecuación, (7.3.2), este resultado se obtiene para el caso particular de Turnovsky cuando la

$$\hat{N}_{k,t}|_{\nu_P=\nu_k=0} = \frac{A}{B}, \tag{3.3.11}$$

luego

$$\hat{N}_{k,t}|_{\nu_P=\nu_k=0} = \frac{A}{B} = \frac{r_k^* - r_b^* + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau}}{\sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2}, \tag{D.28}$$

y

$$\hat{N}_{k,t}(\sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2) = r_k^* - r_b^* + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau}, \tag{D.29}$$

sustituyendo las varianzas y covarianzas obtenidas en la serie de ecuaciones, (7.3.1), tenemos,

$$\begin{aligned} r_k^* - r_b^* = \hat{N}_{k,t}\gamma^2\sigma_y^2\Big[&(1-\tau_p)^2(1-\alpha\tau_y)^2 - 2(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y) \\ &- (\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p) + (\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p)(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\Big] \\ &- \gamma^2\sigma_y^2((1-\hat{N}_{k,t}) + (1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)) - \gamma^2\sigma_g^2 + \gamma\sigma_{My}, \end{aligned} \quad (D.30)$$

agrupando términos semejantes

$$r_k^* - r_b^* = -\gamma^2\sigma_y^2[\alpha\tau_y(1-\tau_p)+\tau_p] - \gamma^2\sigma_g^2 + \gamma\sigma_{My}. \quad (7.3.2)$$

Derivación de la ecuación (7.3.10)

Para esta derivación necesitamos la ecuación, (7.3.2), que como lo mencionamos en parte anterior esta ecuación también resulta del caso particular de Turnovsky, si sustituimos las varianzas y covarianzas que aparecen en las ecuaciones, (7.3.1),

$$(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma = i(1-\tau_y) - \pi^* + \sigma_M^2 + \gamma_2\sigma_y^2(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y) - \gamma\sigma_{My}, \quad (D.31)$$

entonces

$$(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma(1-\gamma\sigma_y^2) = i(1-\tau_y) - \pi^* + \sigma_M^2. \quad (7.3.10)$$

Derivación de la ecuación (7.3.12)

Recordemos que

$$N_{k,t} = 1 - (N_{m,t} + N_{b,t}), \quad (D.32)$$

al sustituir $N_{j,t}$, $j = m, b, k$

$$\begin{aligned} N_{k,t} &= 1 - \left(\frac{M_t/P_t}{a_t} + \frac{B_t/P_t}{a_t}\right); \\ &= 1 - \frac{M_t/P_t}{a_t}(1+\kappa); \\ &= 1 - \hat{N}_{m,t}(1+\kappa); \end{aligned} \quad (D.33)$$

al sustituir el valor de $\hat{N}_{m,t}$ cuando se ha alcanzado el equilibrio en $(D.33)$, se obtiene

$$\hat{N}_{k,t} = 1 - \frac{(1+\kappa)\delta}{i(1-\tau_y)(1+\theta)}. \tag{7.3.12}$$

Derivación de la ecuación (7.4.1)

La derivación proviene de la manera de $N_{m,t} = m_t/a_t$, donde $m_t = M_t/P_t$ y $a_t = m_t + b_t + k_t$, entonces

$$\hat{N}_{m,t} = \frac{M_t/P_0}{k_t + \frac{(M_t + B_t)}{P_0}}. \tag{D.34}$$

Derivación de la ecuación (7.4.2)

Tomando en cuenta la derivación anterior y factorizando, M_t/P_0

$$\frac{\delta}{i(1-\tau_y)(1+\theta)} k_t P_0 = -\frac{\delta}{i(1-\tau_y)(1+\theta)}(M_t + B_t) + M_t, \tag{D.35}$$

y

$$P_0 = \frac{\delta}{i(1-\tau_y)(1+\theta)}(M_t + B_t) + \frac{M_t i(1-\tau_y)(1+\theta)}{\delta k_t}, \tag{D.36}$$

obteniendo la ecuación, (7.4.2),

$$P_0 = \frac{i(1-\tau_y)(1+\theta)M_t - \delta(M_t + B_t)}{\delta k_t} = \frac{i(1-\tau_y)(1+\theta) - \delta(1+\kappa)}{\delta k_t/M_t}. \tag{7.4.2}$$

Derivación de la ecuación (7.4.4)

Las ecuaciones en, (7.4.4), resultan de manera inmediata por (7.4.3), tenemos

$$i(1-\tau_y)(1+\theta) > \delta(1+\kappa), \tag{7.4.3}$$

entonces

$$0 < \hat{N}_{m,t} \leq \frac{1}{(1+\kappa)}; \tag{D.37}$$

luego para $\hat{N}_{b,t} = B_t/P_t a_t$ o bien,

$$\hat{N}_{b,t} = \kappa \frac{M_t/P_t}{a_t}, \tag{D.38}$$

y

$$0 < \hat{N}_{b,t} \leq \frac{\kappa}{(1+\kappa)}. \tag{D.39}$$

Para la $\hat{N}_{k,t}$ utilizamos la ecuación, (3.3.2),

$$0 < \hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t} < 1, \tag{D.40}$$

y

$$0 < 1 - \hat{N}_{k,t} < 1, \tag{D.41}$$

finalmente se obtiene

$$0 < \hat{N}_{k,t} < 1. \tag{D.42}$$

Derivación de la ecuación (8.2)

Para la derivación de esta ecuación hacemos,

$$\begin{aligned} 0 =& \theta \log(c_t) - \log(N_{m,t} a_t) - \delta\beta_0 - \delta\beta_1 \log(a_t) - \beta_1 \left(\frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} \right) \\ &+ \frac{(1+\theta)}{\delta^2} [\hat{N}_{m,t} r_m + \hat{N}_{b,t} r_b + \hat{N}_{k,t} r_k - \bar{r}^*] - \frac{1}{2} \frac{(1+\theta)\hat{\rho}}{\delta^2}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

donde $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = \lim_{dt \to 0} \frac{\mathrm{E}(\mathrm{d}a_t)^2}{\mathrm{d}t} =& (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})^2 \sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}) \hat{N}_{k,t} \sigma_{Pk} \\ &+ 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}) \sigma_{P,\tau} - 2\hat{N}_{k,t} \sigma_{k\tau} \\ &+ \beta_1 \Bigg[\lambda_P \left[\log\left(1 - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}) \frac{\nu_P}{1+\nu_P} \right) \right] \\ &+ \lambda_k [\log(1 + \hat{N}_{k,t} \nu_k)] + \lambda_\tau [\log(1 - \nu_\tau)] \Bigg]. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Derivación de la ecuación (8.5)

Para la derivación de esta ecuación elevamos al cuadrado la ecuación (3.3.1)

$$
\begin{aligned}
\beta_0 =& \frac{\theta}{\delta}[\log(\delta\theta) - \log{(1+\theta)(1+\tau_c)}] + \frac{1}{\delta}\log \hat{N}_{m,t} - \frac{\theta}{\delta} \\
&+ \frac{(1+\theta)}{\delta^2}[\hat{N}_{m,t}r_m + \hat{N}_{b,t}r_b + \hat{N}_{k,t}r_k - \bar{\tau}^*] - \frac{1}{2}\frac{(1+\theta)\hat{\rho}}{\delta^2}.
\end{aligned} \tag{8.2}
$$

donde denota el valor óptimo y;

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} = \lim_{dt\to 0}\frac{\mathrm{E}(da_t)^2}{dt} =& (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})^2\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} \\
&+ 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_{P\tau} - 2\hat{N}_{k,t}\sigma_{k\tau} \\
&+ \beta_1\left[\lambda_P\left[\log\left(1 - (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\frac{\nu_P}{1+\nu_P}\right)\right]\right. \\
&\left. + \lambda_k[\log(1 + \hat{N}_{k,t}\nu_k)] + \lambda_\tau[\log(1-\nu_\tau)]\right],
\end{aligned} \tag{8.3}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\hat{\eta} = \lim_{dt\to 0}\frac{\mathrm{E}(da_t)^2}{\cdot\, dt} =& (\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})^2\sigma_P^2 + \hat{N}_{k,t}^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\hat{N}_{k,t}\sigma_{Pk} \\
&+ 2(\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t})\sigma_{P\tau} - 2\hat{N}_{k,t}\sigma_{k\tau},
\end{aligned}
$$

sustituyendo las varianzas y covarianzas obtenidas en las ecuaciones, (7.3.1), y agrupando términos semejantes lo que resulta

$$
\hat{\eta} = \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) \tag{8.5}
$$

Derivación de la ecuación (8.7)

$$
\hat{N}_{k,t} = 1 - \frac{(1+\kappa)\delta}{i(1-\tau_y)(1+\theta)}. \tag{7.3.12}
$$

entonces

$$
\hat{N}_{k,t} = \frac{i(1-\tau_y)(1+\theta) - \delta(1+\kappa)}{i(1-\tau_y)(1+\theta)k_0}, \tag{$D.43$}
$$

recordando que $N_{k,t} = k_t/a_t$ y $a_t = k_t/N_{k,t}$, la ecuación, (8.7), es obtenida

$$a_0 = \frac{i(1-\tau_y)(1+\theta)k_0}{i(1-\tau_y)(1+\theta) - \delta(1+\kappa)}. \tag{8.7}$$

Derivación de la ecuación (8.11)

La demostración se hace utilizando la ecuación, (7.3.13),

$$e_t[i(1-\tau_y)] = \frac{\theta\delta}{\gamma(1+\theta)\left[1 - \dfrac{(1+\kappa)\delta i^{-1}}{(1-\tau_y)(1+\theta)}\right]}, \tag{D.44}$$

si definimos $i_a \equiv [i(1-\tau_y)]$ y obtenemos la derivada $\mathrm{d}e_t[i(1-\tau_y)]/\mathrm{d}[i(1-\tau_y)]$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e_t[i(1-\tau_y)]}{\mathrm{d}[i(1-\tau_y)]} &= \frac{\gamma\theta\delta(1+\theta)(i_a(1+\theta) - (1+\kappa)\delta) - \gamma\theta\delta i_a(1+\theta)^2}{(\gamma(1+\theta))^2(i_a - (1+\theta) - (1+\kappa)\delta))^2} \\ &= -\frac{(1+\kappa)\delta^2\theta}{\gamma(i_a - (1+\theta) - (1+\kappa)\delta))^2},\end{aligned} \tag{D.45}$$

al sustituir la ecuación, $(D.45)$, en la ecuación, (8.10), $V(a_t)$, diferenciamos las ecuaciones, (8.8) y (8.9) respecto de $i(1-\tau_y)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}[i(1-\tau_y)]} &= -\frac{1}{\delta[i(1-\tau_y)]} + \left(\frac{(1+\theta)\gamma}{\delta^2}\right)\left[\frac{(1+\kappa)\delta^2\theta}{\gamma(i_a - (1+\theta) - (1+\kappa)\delta))^2}\right] \\ &\quad + \frac{(1+\theta)}{\delta}\left[\frac{1}{[i(1-\tau_y)]} - \frac{(1+\theta)}{[i(1-\tau_y)(1+\theta)] - \delta(1+\kappa)}\right] = 0,\end{aligned} \tag{D.46}$$

equivalentemente,

$$-i_a^2(1+\theta)^2 + \delta(1+\kappa)(1+\theta)\theta i_a + \delta^2(1+\kappa)^2\theta. \tag{D.47}$$

Derivación de la ecuación (8.13)

La derivación radica en la solución de la ecuación, (8.12), que se puede reescribir aplicando la función signo como

$$i_a^2(1+\theta)^2 - \delta(1+\kappa)(1+\theta)\theta i_a - \delta^2(1+\kappa)^2\theta = 0, \tag{8.12}$$

cuya solución es

$$\hat{i}_a = \frac{\delta(1+\kappa)\theta}{2(1+\theta))}\left[1 + \left(1 + \frac{4}{\theta}\right)^{1/2}\right]. \tag{8.13}$$

Derivación de la ecuación (11.1)

Para la derivación de la ecuación, (11.1), se necesitan las ecuaciones, (7.3.9) y (7.3.10)

$$\pi^* = \mu^* - \gamma\left[1 - \frac{c_t^*(1+\tau_c)}{\gamma k_t^*} - \bar{g}\right] + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2 + \nu_y^2\lambda_y + \nu_g^2\lambda_g) - \gamma\sigma_{My}, \tag{7.3.9}$$

y

$$(1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma(1-\gamma\sigma_y^2) = i(1-\tau_y) - \pi^* + \sigma_M^2, \tag{7.3.10}$$

sustituyendo en (7.3.10), la ecuación (7.3.9) tenemos

$$\begin{aligned}\hat{i}_a &= (1-\tau_p)(1-\alpha\tau_y)\gamma(1-\gamma\sigma_y^2) + \mu^* - \sigma_M^2 - \gamma[1 - e_t(\hat{i}_a) - \bar{g}] \\ &+ \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2 + \nu_y^2\lambda_y + \nu_g^2\lambda_g),\end{aligned} \tag{D.48}$$

lo que finalmente resulta

$$\mu^* - \sigma_M^2 = \hat{i}_a - \gamma[e_t(\hat{i}_a) + \bar{g} + \gamma\sigma_g^2 + \gamma\nu_y^2\lambda_y + \gamma\nu_g^2\lambda_g - \sigma_{My}]. \tag{11.1}$$

Bibliografía

Aspe Armella, Pedro, "El camino de la transformación económica ", FCE., 1993.

Bernanke B and Gertler, M., "The Credit Chanel: The Black Box ", Journal of Monetary Economics, 1986.

Blanchard, J. O. and Fisher S., "Lectures on Macroeconomics ", MIT Press, 1985.

Brainnard, W., "Uncertainty and the Effectiveness of Policy ", American Economic Review, 1967.

Cárdenas, Enrique, "La política económica en México ", FCE, 1996.

Goodhart, C., "What Central Bank Should Do? ", American Economic Review, 1988.

Hafer, R., "The Monetary and Fiscal Policy Debate: Lessons from two Decades ", Allanheld, 1986.

Hall, P., "Governing the Economy ", Oxford University Press,1986.

Kamien, M. I.,Hall, P., "Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management ", North Holland, 1981.

Edwards, S. y Cox, A., "Monetarismo y Liberalización ", FCE, 1992.

Feldestein, M., "Inflations, Income Taxes and the Rate of Interest: A Theoretical Analysis ", American Economic Review, 1976.

Jarrow Robert A. and Rosenfeld Eric R., "Jump Risks and the Intertemporal Capital Asset Pricing Model ". Journal of Bussines, 1984 vol. 57, no. 3, pp. 337-351

Mishkin, F., "Transmition Mecanisms ". Journal of Monetary Economics, 1989.

Ormerod, P., "Por una Nueva Economía ", Anagrama, 1994.

Penati, A. and G. Pennacchi, 1989, "Optimal Portafolio Choice and the Collapse of a Fixed-Exchange Rate Regime ". Journal of International Economics, 27, pp. 1-24

Svensson, L. E. O., 1992, "The Foreign Exchange Risk Premium in a Target Zone with Devaluation Risk ", Journal of International Economics, 33, pp. 21-40.

Taylor. J., "An Appeal for Rationality in the Policy Activism Debate ", Allanheld, 1986

Tinbergen. J., "On the Theory of Economic Policy ", North Holland, 1952

Turnovsky, S. J., 1993, "Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy", 34, No. 4, pp. 953-981.

Venegas-Martínez, F., 2000, "On Consumption, Investment, and Risk, Economía Mexicana, Nueva Epoca ", 9, No. 2, pp. 227-244

Venegas-Martínez, F., 2000, "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis, Journal of Economic Dynamics and Control ", vol. 24 forthcoming.