UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"FIBRACIONES Y CORREFLEXIONES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

LETICIA MONTOYA GALLARDO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JAVIER PAEZ CARDENAS

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"FIBRACIONES Y CORREFLEXIONES"

realizado por LETICIA MONTOYA GALLARDO

con número de cuenta 8614440-3 , pasante de la carrera de MATEMÁTICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. JAVIER PÁEZ CÁRDENAS
Propietario	DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ
Propietario	DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA
Suplente	DR. SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO SÁNCHEZ
Suplente	M. EN C. FÉLIX CAPULIN PÉREZ

Consejo Departamental de Matemáticas

DR. HÉCTOR MÉNDEZ LANGO

*« O God, I could be bounded in a nutshell
and count myself a King of infinite space »*

HAMLET II, 2

A los Poli-lupis

Índice General

Introducción

En el año de 1942, Eilenberg y MacLane, introducen los conceptos de categoría y de funtor, dando así lugar al nacimiento de una nueva teoría: *la Teoría de Categorías.* Esta teoría ha jugado un papel unificador entre diversas ramas de la matemática contemporánea como son la Topología, el álgebra ó la Teoría de Gráficas. Ya desde la primera década del siglo XX matemáticos encontraron formas de reducir un problema topológico a un problema algebraico más fácil de resolver y logrando preservar su estructura topológica original. El lenguaje categórico ha permitido comprender mejor como ocurren estas relaciones entre la Topología y el álgebra abstracta a tal punto que suele decirse que la topología algebraica es el estudio de funtores de la categoría de los espacios topológicos a una categoría algebraica como la de los grupos.

A partir de entonces la Teoría de Categorías había venido desarrollándose de manera independiente dentro de la Matemática hasta que algunos matemáticos entre los que figuran los Doctores Graciela Salicrup López y Roberto Vázquez García, comenzaron a establecer una conexión mucho más profunda entre la Topología y las Categorías, contribuyendo así a la creación de una nueva rama de las matemáticas: *la Topología Categórica.* En esta teoría los conceptos y construcciones topológicas se estudian con métodos de la Teoría de Categorías y ciertos conceptos topológicos se trasladan a categorías abstractas. De acuerdo con esto se puede decir que la Teoría de Categorías es usada por la topólogos como herramienta. Pero también, en cierta parte de la teoría desarrollada por estos dos matemáticos mexicanos, las Categorías usan a la topología algebraica, es decir, varios conceptos de la topología algebraica pueden ser utilizados como herramienta fundamental para la construcción de ciertas categorías topológicas: las subcategorias reflexivas y correflexivas.

En la década del 60 tuvo un gran auge la teoría de las reflexiones y correflexiones topológicas. Esto llevó a Graciela Salicrup y Roberto Vázquez a contribuir al enriquecimiento de esta teoría, desarrollando un estudio que dieron a conocer en el año de 1970 y que titularon: *"Fibraciones y Correflexiones"* [8]. Dicho artículo trata sobre las relaciones entre el concepto de correflexión en la categoría $\mathfrak{Top}$ y los conceptos topológicos de fibración y de homotopía. El presente trabajo expone en detalle el contenido de sus investigaciones sobre la relación entre el concepto de correflexión y el de fibración; para poder abordarlo se requiere que el lector cuente en su haber con conocimientos de Topología General y que esté familiarizado con los conceptos de *homotopía* y de *aplicación cubriente.* El concepto de *fibración* es de fundamental importancia en el desarrollo de este escrito, y como no se presupone que el lector lo conoce, se ha incluido un apéndice en el que está expuesto todo cuanto con relación a este concepto va a emplearse, esto con la finalidad de que, en la medida de lo posible, el presente trabajo se halle autocontenido. Este apéndice es esencialmente una transcripción del capítulo sobre fibraciones que aparece en la parte tres de la *"Introducción a la Topología"* de Graciela Salicrup [7]; a este libro, así como a las *"Lecciones de Topología"* de Roberto Vázquez [13] van ceñidas las nociones y la terminología que se empleen en el presente documento. Los compiladores de [7] y [13] han señalado en sus respectivas introducciones que con la publicación de estos libros han recobrado su vigencia las cátedras impartidas por sus autores. Con el presente trabajo se pretende dar continuidad a la labor docente de estos dos maestros.

El capítulo preliminar se ha dedicado al repaso de conceptos y resultados propios de la Topología Categórica como son los conceptos de fuentes iniciales, sumideros finales, etc. y se ha expuesto en detalle todo lo referente al coproducto topológico, el cual es un concepto indispensable para la comprensión del texto.

En el capítulo 2 se estudia la teoría de las correflexiones topológicas, en particular las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$, de las cuales se ven varios ejemplos: las subcategorías de los espacios finitamente generados, la de los compactamente generados, la de los conexamente generados y la de los localmente conectables por trayectorias. Al final de este capítulo se da una descripción de la subcategoría bicorreflexiva generada por culaquier subcategoría plena y repleta de $\mathfrak{Top}$, concepto necesario para la comprensión de los últimos capítulos.

Es hasta el capítulo 3 donde se empieza con la parte esencial del trabajo; en este capítulo se relaciona el concepto de fibración con el de correflexión, para ello resulta conveniente considerar las subcategorías de $\mathfrak{Top}$ asociadas a ciertas clases de funciones: las llamadas 1-clases, de tal forma que resultarán ser subcategorías bicorreflexivas. Esto permite desarrollar un método general para obtener subcategorías correflexivas topológicas (método semejante al de operadores límite descrito un año antes por H. Herrlich en [5]). En la parte final de este capítulo comienzan a considerarse las subcategorías asociadas a 1-clases de E-fibraciones suprayectivas, en especial a la 1-clase de las fibraciones suprayectivas de Hurewicz y a la de las fibraciones suprayectivas de Serre. Es en el capítulo 4 en el que se da una descripción precisa de la primera de ellas: $\underline{A}_{\mathcal{H}}$, la subcategoría correflexiva que resulta de la subcategoría asociada a la clase de las fibraciones suprayectivas de Hurewicz, especificando cuáles son sus miembros y cuáles sus correflexiones. Por último, en el capítulo 5 se da, en su segunda y última parte, una nueva descripción de esta misma subcategoría usando ahora algunos resultados acerca de las fibraciones abiertas de Hurewicz; hay que señalar que estos resultados poseen además gran importancia por sí mismos dentro de la Topología (principalmente el que dice que una fibración de Hurewicz es abierta si y sólo si su codominio es localmente conectable por trayectorias). En la primera parte de este último capítulo, por medio del concepto de la subcategoría bicorreflexiva generada por otra subcategoría, se caracterizan las subcategorías asociadas a las fibraciones suprayectivas de Serre: $\underline{A}_{\mathcal{S}}$, donde $\mathcal{S}$ es la categoría de los espacios homeomorfos a los cubos de dimensión finita, y a las C'- fibraciones: $\underline{A}_{C'}$, donde C' es la subcategoría de los espacios contraíbles, así como también se ven las relaciones entre ellas y la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$.

Es importante advertir que a lo largo de este documento se trabaja con las Categorías $\mathfrak{Set}$

(de conjuntos y funciones) y $\mathfrak{Top}$ (de espacios topológicos y funciones continuas) sin que se haya precisado formalmente su significado, es decir, sin haber recurrido a la definición precisa de *categoría*. Para comprender lo expuesto basta tener en mente que $\mathfrak{Set}$ es la colección que engloba a todos los conjuntos y a todas las funciones entre ellos, y que $\mathfrak{Top}$ es la colección de todos los espacios topológicos y de todas las funciones continuas. Tampoco se requiere manejar el concepto preciso de subcategoría; por *subcategoría de* $\mathfrak{Top}$, simplemente se pensará en cualquier familia de espacios topológicos que sea cerrada bajo homeomorfismos, excepto cuando se especifique otra cosa. Cabe aclarar que si se ha insistido en introducir en este texto el enfoque categórico es por dos razones: primera, porque así lo hicieron los autores de *"Fibraciones y Correflexiones"*, y segunda, porque ciertos resultados de su artículo pueden extenderse a otras categorías distintas de $\mathfrak{Top}$, como es el caso de algunos de los resultados expuestos en el capítulo 5. Esta generalización es un trabajo posterior de los autores, que publicaron bajo el nombre de *"Fibraciones y Correflexiones II"* [9].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Fuentes y sumideros, topologías inicial y final

Cuando a los cursos de topología general se les imprime el enfoque categórico, tal como solían hacerlo Graciela Salicrup [7] y Roberto Vázquez [13], se suele hablar de *fuentes cartesianas* y de *fuentes topológicas* así como de sus duales, es decir, los *sumideros cartesianos* y los *sumideros topológicos*. A continuación se recuerdan las definiciones formales de estos conceptos y de otros que les son afines.

1.1 *Una* ***fuente cartesiana*** *ó* ***fuente en*** $\mathfrak{Set}$ *es una pareja*

$$\mathcal{F} = (X, (f_\lambda)_\Lambda)$$

en la que X *es un conjunto arbitrario y* $(f_\lambda)_\Lambda$ *es una clase arbitraria de funciones*

$$f_\lambda : X \to X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$$

con dominio común. Entonces, se dice que X *es el* ***dominio de la fuente*** $\mathcal{F}$, *que la clase de conjuntos* $(X_\lambda)_\Lambda$ *es el* ***codominio de la fuente*** $\mathcal{F}$ *y que las funciones* f_λ *son las* ***flechas de la fuente*** $\mathcal{F}$. *Otra notación empleada para designar fuentes cartesianas es*

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : X \to X_\lambda)_\Lambda \quad ó \quad \mathcal{F} = \left(X \xrightarrow{f_\lambda} X_\lambda\right)_\Lambda$$

1.2 *Un* ***sumidero cartesiano*** *ó* ***sumidero en*** $\mathfrak{Set}$ *es una pareja*

$$\mathcal{S} = ((f_\lambda)_\Lambda, X)$$

en la que X *es un conjunto arbitrario y* $(f_\lambda)_\Lambda$ *es una clase arbitraria de funciones*

$$f_\lambda : X_\lambda \to X,\ \lambda \in \Lambda$$

Entonces, se dice que X *es el* ***codominio del sumidero*** $\mathcal{S}$, *que la clase* $(X_\lambda)_\Lambda$ *es el* ***dominio del sumidero*** *y que las funciones* f_λ *son las* ***flechas del sumidero*** $\mathcal{S}$. *Otra notación empleada para designar sumideros cartesianos es*

$$\mathcal{S} = (f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda \quad ó \quad \mathcal{S} = \left(X_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X\right)_\Lambda$$

1.3 *Una **fuente topológica** ó **fuente** en $\mathfrak{Top}$ es una pareja*

$$\mathcal{F} = ((X, \tau), (f_\lambda)_\Lambda)$$

en la que (X, τ) es un espacio topológico arbitrario y $(f_\lambda)_\Lambda$ es una clase arbitraria de funciones continuas

$$(f_\lambda : (X, \tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

*Al espacio (X, τ) se le llama **el dominio de la fuente**, a la clase de espacios topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ **codominio** de la misma y las funciones continuas f_λ son **las flechas de** $\mathcal{F}$. Otra notación para designar fuentes topológicas es*

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : (X, \tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda \quad \text{ó} \quad \mathcal{F} = \left((X, \tau) \xrightarrow{f_\lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$$

1.4 *Un **sumidero topológico** ó **sumidero** en $\mathfrak{Top}$ es una pareja*

$$\mathcal{S} = ((f_\lambda)_\Lambda, (X, \tau))$$

en la que (X, τ) es un espacio topológico y $(f_\lambda)_\Lambda$ una clase arbitraria de funciones continuas

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau), \ \lambda \in \Lambda$$

*Al espacio (X, τ) se le llama **codominio del sumidero**, a la clase de espacios topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ **dominio** del mismo y las funciones continuas f_λ son **las flechas de** $\mathcal{S}$. Otra notación para designar sumideros topológicos es*

$$\mathcal{S} = (f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda \quad \text{ó} \quad \mathcal{S} = \left((X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X, \tau)\right)_\Lambda$$

En las cuatro definiciones que siguen así como en las dos proposiciones subsecuentes se hablará de fuentes y de sumideros a secas bajo el entendido de que se estará haciendo referencia a fuentes cartesianas y topológicas así como a sumideros cartesianos y topológicos, simultáneamente.

1.5 (*a*) *Se dice que una **fuente** $\mathcal{F}$ **separa puntos** si cualesquiera dos puntos distintos de su dominio poseen imágenes distintas bajo al menos una de las flechas de $\mathcal{F}$.*
(*b*) *Se dice que un **sumidero** $\mathcal{S}$ **cubre puntos** si todo punto de su codominio posee una preimagen bajo al menos una de las flechas de $\mathcal{S}$.*

1.6 (*a*) *Una fuente $\mathcal{F} = (f_\lambda : X \to X_\lambda)_\Lambda$ es una **monofuente** si para ella se verifica la **ley de la cancelación izquierda**, es decir, si siempre que que dos son funciones (continuas)*

$$g, h : Y \to X$$

son tales que

$$f_\lambda g = f_\lambda h, \ \forall \lambda \in \Lambda,$$

entonces, $g = h$.
(*b*) *Un sumidero* $\mathcal{S} = (f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ ***es un episumidero*** *si para él se verifica la ley de* ***la cancelación derecha,*** *es decir, si siempre que dos funciones (continuas)* $g, h : X \to Y$ *son tales que*

$$gf_\lambda = hf_\lambda,\ \forall \lambda \in \Lambda,$$

entonces, $g = h$.

En [7] y [13] se demuestra que:

1.7 (*a*) $\mathcal{F}$ *es una fuente que separa puntos si y sólo si* $\mathcal{F}$ *es monofuente.*
(*b*) $\mathcal{S}$ *es un sumidero que cubre puntos si, y sólo si,* $\mathcal{S}$ *es un episumidero.*

1.8 (*a*) *Cuando para los conjuntos* X_λ, $\lambda \in \Lambda$, *del codominio de una fuente cartesiana* $\mathcal{F} = \left(X \xrightarrow{f_\lambda} X_\lambda\right)_\Lambda$ *existen sendas topologías* τ_λ, *para cada* $\lambda \in \Lambda$, *siempre es posible hallar una única topología* τ *para* X, *llamada* ***inicial,*** *con la cual para toda* $\lambda \in \Lambda$, *la función*

$$f_\lambda : (X, \tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$$

es continua. ***La topología inicial ó débil para*** X ***correspondiente a*** $(f_\lambda)_\Lambda$ ***y a*** $(\tau_\lambda)_\Lambda$ *se define como la topología* τ *generada por la familia*

$$\gamma = \left\{f_\lambda^{-1}(U_\lambda) : U_\lambda \in \tau_\lambda\right\}$$

En tal situación se hablará de la fuente topológica

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$$

como de ***una fuente inicial.***
(*b*) *Cuando para los conjuntos* X_λ, $\lambda \in \Lambda$, *del dominio de un sumidero cartesiano*

$$\mathcal{S} = \left(X_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X\right)_\Lambda$$

existen sendas topologías τ_λ, *para cada* $\lambda \in \Lambda$, *siempre es posible hallar una única topología* τ *para* X, *llamada* ***final,*** *con la cual para toda* $\lambda \in \Lambda$, *la función* $f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau)$ *es continua.* ***La topología final ó fuerte para*** X ***correspondiente a*** $(\tau_\lambda)_\Lambda$ ***y a*** $(f_\lambda)_\Lambda$ *es por definición:*

$$\tau = \left\{U \subseteq X : f_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\right\}$$

En tal caso se dirá que el sumidero topológico

$$\mathcal{S} = (f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$$

es un sumidero final.

También, tanto en [7] como en [13] se describen las topologías iniciales y finales respecto de cualesquiera fuentes ó sumideros

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : X \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda \quad \text{ó} \quad \mathcal{S} = (f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$$

demostrando que:

1.9 *Si* $\mathcal{F} = \left((X,\tau) \xrightarrow{f_\lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$ *es una fuente arbitraria en* $\mathfrak{Top}$*; son equivalentes:*
(*a*) τ *es la topología inicial respecto a* $(f_\lambda)_\Lambda$ *y a* $(\tau_\lambda)_\Lambda$.
(*b*) τ *tiene por subbase a* $\gamma' = \left\{ f_\lambda^{-1}(U_\lambda) : U_\lambda \in \gamma_\lambda, \text{ subbase de } \tau_\lambda \right\}$
(*c*) τ *es tal que para cada* f_λ *es continua, y será continua toda función*

$$g : (Z, \rho) \to (X, \tau)$$

tal que $f_\lambda g : (Z, \rho) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ *es continua, para toda* $\lambda \in \Lambda$. *Además* τ *es la única topología en* X *que satisface esta propiedad.*
(*d*) τ *es la más pequeña de las topologías en* X *para las que* f_λ *es continua para toda* $\lambda \in \Lambda$.

1.10 *Sea* $\mathcal{S} = \left((X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X,\tau)\right)_\Lambda$ *cualquier sumidero en* $\mathfrak{Top}$*; son equivalentes:*
(*a*) τ *es la más grande de las topologías para* X *según la cual cada* f_λ *es continua.*
(*b*) $\mathcal{S}$ *es final.*
(*c*) *Para cualquier espacio* (Y, σ) *y cualquier función*

$$g : X \to Y$$

se cumple que si

$$gf_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (Y, \sigma)$$

es continua para toda $\lambda \in \Lambda$, *entonces* $g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *es continua. Además* τ *es la única topología en* X *que satisface esta propiedad.*

1.2 Productos topológicos

Por los cursos de topología general se sabe que la topología de Tychonoff para el producto cartesiano $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ de la familia de conjuntos subyacentes de una familia cualquiera $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ de espacios topológicos, es la topología generada por la familia

$$\gamma = \left\{ P_\lambda^{-1}(U_\lambda) : U_\lambda \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \right\}$$

donde P_λ denota a la λ-proyección

$$\begin{array}{rccc} P_\lambda : & \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda & \to & X_\lambda \\ & (x_\lambda)_\Lambda & \mapsto & x_\lambda \end{array}$$

Como consecuencia del inciso (*a*) de 1.9 resulta que la topología de Tychonoff es la topología inicial para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ correspondiente a $(P_\lambda)_\Lambda$ y a $(\tau_\lambda)_\Lambda$. Por consiguiente, la fuente topológica de λ-proyecciones

$$\left(P_\lambda : \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \tau\right) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$$

(τ denota a la topología de Tychonoff para $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$) es un caso particular, muy importante, de fuente inicial. Como se prueba en [7] y en [13], a esta fuente la caracteriza una propiedad universal: la llamada *propiedad universal del producto topológico.*

1.11 *Se dice que una fuente en* $\mathfrak{Top}$

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : (X,\tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto topológico *si para cualquier otra fuente topológica con el mismo codominio que* $\mathcal{F}$*, denótesele por:*

$$\mathfrak{G} = (g_\lambda : (Y,\sigma) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

existe una única función continua

$$g : (Y,\sigma) \to (X,\tau)$$

tal que

$$f_\lambda g = g_\lambda, \text{ para toda } \lambda \in \Lambda.$$

En los textos citados se demuestra que:

1.12 *Al darle a* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *la topología de Tychonoff,* τ*, la fuente topológica de* λ*-proyecciones*

$$\left(P_\lambda : \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \tau\right) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto topológico.

1.13 *Salvo homeomorfismos, el dominio de una fuente de codominio* $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ *con la propiedad universal del producto topológico, es esencialmente único. Es decir, que entre cualesquiera dos fuentes en* $\mathfrak{Top}$*,*

$$(f_\lambda : (Y,\sigma) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda \;\; y \;\; (g_\lambda : (Z,\rho) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

con codominio común, que posean ambas la propiedad universal del producto topológico, existe un homeomorfismo $h : (Y,\sigma) \to (Z,\rho)$ *entre sus dominios, al cual se le denomina el* ***homeomorfismo natural****; debido a esto y al hecho de que la familia de* λ*-proyecciones*

$$\left(\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \tau\right) \xrightarrow{P_\lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$$

tiene también la propiedad universal del producto topológico, el dominio de cualquier otra fuente en $\mathfrak{Top}$, *con codominio* $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$, *que tenga la misma propiedad es esencialmente el producto topológico. Esto explica por qué, cuando una fuente topológica*

$$(f_\lambda : (X, \tau) \to (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto topológico, se dice que su dominio (X, τ) *es un* ***producto topológico de la familia*** $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$, ***con proyecciones*** $(f_\lambda)_\Lambda$.

Producto de funciones.

Otro concepto cuyo dual será más adelante, de gran utilidad, es el de *producto de funciones:*

1.14 *Sean* $(X_\lambda)_\Lambda$ *y* $(Y_\lambda)_\Lambda$ *dos familias de subconjuntos de* X *y de* Y, *respectivamente, y supóngase que para toda* $\lambda \in \Lambda$ *existe una función*

$$f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$$

Considérense las λ*-proyecciones* $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ *y* $q_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \to Y_\lambda$. *Entonces se puede tomar la composición*

$$f_\lambda p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y_\lambda$$

y como $(q_\lambda)_\Lambda$ *tiene la propiedad universal del producto cartesiano existe una única función*

$$\Pi f_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$$

tal que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$q_\lambda \Pi f_\lambda = f_\lambda p_\lambda$$

Es decir, tal que conmuta el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
\prod X_\lambda \arrow[r, "\Pi f_\lambda"] \arrow[d, "p_\lambda"'] & \prod Y_\lambda \arrow[d, "q_\lambda"] \\
X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & Y_\lambda
\end{tikzcd}$$

A la función Πf_λ *se le llama* ***producto cartesiano de la familia de funciones*** $(f_\lambda)_\Lambda$.

El concepto dual correspondiente al concepto de producto topológico, es decir, el concepto de *coproducto topológico* puede definirse a partir de la propiedad universal dual a la del producto topológico: *la propiedad universal del coproducto topológico.*

1.3 Coproductos cartesianos y topológicos

Definición 1.1 *Sean, $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de conjuntos y $S = (f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ cualquier sumidero en $\mathfrak{Set}$ con dominio $(X_\lambda)_\Lambda$. Se dice que S tiene* ***la propiedad universal del coproducto cartesiano*** *si para cualquier otro sumidero en $\mathfrak{Set}$ con el mismo dominio que S, denotado por*

$$S' = (f'_\lambda : X_\lambda \to X')_\Lambda$$

existe una única función

$$f : X \to X'$$

tal que

$$f f_\lambda = f'_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

Al ser así, se dice que X ***es un coproducto cartesiano de la familia*** *$(X_\lambda)_\Lambda$, se llaman,* ***cofactores*** *a los miembros X_λ del dominio del coproducto y,* ***coproyecciones*** *a cada una de las funciones f_λ. Por abuso del lenguaje, cuando está claro cuáles son las coproyecciones, se dice que X* ***es el "coproducto" de*** *$(X_\lambda)_\Lambda$, para designarlo se empleará la notación*

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Definición 1.2 *Sean, $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de espacios topológicos y,*

$$S = (f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to X)_\Lambda$$

cualquier sumidero en $\mathfrak{Top}$ con dominio $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$. Se dice que S tiene ***la propiedad universal del coproducto topológico*** *si para cualquier otro sumidero en $\mathfrak{Top}$ con el mismo dominio que S, denotado por*

$$S' = (f'_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X', \tau'))_\Lambda$$

existe una única función continua

$$f : (X, \tau) \to (X', \tau')$$

tal que

$$f f_\lambda = f'_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Al ser así, se dice que (X, τ) ***es un coproducto topológico de la familia*** *$(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$* ***con cofactores*** *$X_\lambda$* ***y coproyecciones*** *f_λ; para designarlo se empleará la notación*

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$$

Cuando se hable de "coproducto" o de "sumidero" (a secas) es que se está pensando cualquiera de los dos casos, cartesiano o topológico.

Ejemplos 1.1 (*a*) *Una biyección $f_1 : X_1 \to X$ es un coproducto cartesiano.*
(*b*) *Un homeomorfismo*

$$f_1 : (X_1, \tau_1) \to (X, \tau)$$

es un coproducto topológico.
En efecto, para ver (a), sea $f_1' : X_1 \to X'$ cualquier función de dominio X_1 y sea $f : X \to X'$ la función $f = f_1' f_1^{-1}$; entonces

$$f f_1 = \left(f_1' f_1^{-1}\right) f_1 = f_1' \left(f_1^{-1} f_1\right) = f_1'$$

Además, si $g : X \to X'$ es tal que $g f_1 = f_1'$, entonces $g = f_1' f_1^{-1}$, es decir, $g = f$. Por lo tanto, f es única y $f_1 : X_1 \to X$ es un coproducto cartesiano.

El siguiente teorema (dual de 1.13) dice que el coproducto cartesiano (topológico) es esencialmente único.

Teorema 1.1 *El coproducto cartesiano (topológico) es único salvo biyecciones (homeomorfismo). Es decir, si*

$$\left(f_\lambda : X_\lambda \to X\right)_\Lambda \quad y \quad \left(f_\lambda' : X_\lambda \to X'\right)_\Lambda$$

son dos coproductos de la misma familia $(X_\lambda)_\Lambda$, entonces existe una biyección (homeomorfismo)

$$h : X \to X' \text{ tal que } h f_\lambda = f_\lambda', \forall \lambda \in \Lambda$$

Y, recíprocamente, si $\left(f_\lambda : X_\lambda \to X\right)_\Lambda$ es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$ y

$$h : X \to X'$$

es una biyección (homeomorfismo) cualquiera; entonces $\left(h f_\lambda : X_\lambda \to X'\right)_\Lambda$ también es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$.

Demostración. Por definición de coproducto existen funciones (continuas)

$$X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X$$

tales que para cada $\lambda \in \Lambda$

$$f f_\lambda = f_\lambda' \quad \text{y} \quad f' f_\lambda' = f_\lambda$$

Entonces

$$(f' f) f_\lambda = f' (f f_\lambda) = f' f_\lambda' = f_\lambda$$

y

$$(f f') f_\lambda' = f (f' f_\lambda') = f f_\lambda = f_\lambda'$$

Pero dado que X y X' son coproductos, las únicas funciones (continuas) para las cuales se tiene que

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl, "f_\lambda"'] \arrow[dr, "f_\lambda"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X \arrow[rr, "1_X"'] & & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl, "f'_\lambda"'] \arrow[dr, "f'_\lambda"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X' & & X' \arrow[ll, "1_{X'}"] \end{tikzcd}$$

son 1_X y $1_{X'}$, respectivamente. Por lo tanto, $f'f = 1_X$ y $ff' = 1_{X'}$; por lo tanto, f y f' son biyecciones (continuas) mutuamente inversas, lo cual demuestra la primera parte del teorema.
Recíprocamente, sea $(f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$ y $h : X \to X'$ una biyección (homeomorfismo) cualquiera. Sea $(f'_\lambda : X_\lambda \to X'')_\Lambda$ un sumidero cualquiera; como X es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$, existe una única función (continua) $f : X \to X''$ tal que $ff_\lambda = f'_\lambda$.

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[rr, "hf_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"] \arrow[ddr, bend right, "f'_\lambda"'] & \circlearrowleft & X' \arrow[ddl, bend left, "f'"] \\ & X \arrow[ur, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ & X'' & \end{tikzcd}$$

Considérese la función inversa $h^{-1} : X' \to X$ y hagamos $f' = fh^{-1}$; entonces

$$f'(hf_\lambda) = f\left(h^{-1}h\right) f_\lambda = ff_\lambda = f'_\lambda$$

Y si $g : X' \to X''$ es una función (continua) tal que $g(hf_\lambda) = f'_\lambda$, entonces $(gh) f_\lambda = f'_\lambda$; $\therefore gh = f$ y $g = fh^{-1} = f'$, es decir, f' es única. Por lo tanto, $(hf_\lambda : X_\lambda \to X')_\Lambda$ es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$.♦

Proposición 1.1 *El* $\coprod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ *siempre es un episumidero.*

Demostración. Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios topológicos y sea

$$\left(S = (X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X, \tau)\right)_\Lambda$$

un coproducto de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$. Si

$$h, k : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$$

son funciones continuas tales que $hf_\lambda = kf_\lambda$, para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces podemos considerar el sumidero de funciones continuas

$$\left(S = (X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{hf_\lambda} (Y, \sigma)\right)_\Lambda$$

Y por la propiedad universal del coproducto topológico existe una única función continua

$$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$$

tal que $ff_\lambda = hf_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Como aquí tanto $f = h$ como $f = k$ satisfacen la igualdad anterior, entonces la unicidad de f implica que $h = k$. Esto prueba que $\mathcal{S}$ es un episumidero.♦

Teorema 1.2 *Sea $(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$ un sumidero en $\mathfrak{Top}$; son equivalentes:*
(a) $(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$ es un coproducto topológico.
(b) $(f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ es un coproducto cartesiano y τ es la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y $(f_\lambda)_\Lambda$.

Demostración
$(a) \Rightarrow (b)$: Sea $(f'_\lambda : X_\lambda \to X')_\Lambda$ cualquier sumidero en $\mathfrak{Set}$ y sea τ' la topología indiscreta para X'; entonces

$$(f'_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X', \tau'))_\Lambda$$

es un sumidero en $\mathfrak{Top}$; por (a) existe una, y sólo una, función continua

$$f : (X, \tau) \to (X', \tau')$$

tal que $ff_\lambda = f'_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Si $g : X \to X'$ fuera otra función tal que $gf_\lambda = f'_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$, entonces

$$g : (X, \tau) \to (X', \tau')$$

sería continua y, por lo tanto, coincidiría con f. Esto prueba que $(f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ es un coproducto cartesiano.
Ahora sea τ' la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y $(f_\lambda)_\Lambda$. Entonces, por el inciso (b) de 1.10,

$$(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau'))_\Lambda$$

es un sumidero en $\mathfrak{Top}$; por hipótesis existe una única función continua

$$f : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

tal que $ff_\lambda = f_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$; obviamente $1_X f_\lambda = f_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$, y, por (c) de esa misma proposición,

$$1_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

es continua, de modo que, por ser $(f_\lambda : X_\lambda \to X)_\Lambda$ un coproducto cartesiano, resulta $f = 1_X$. En consecuencia, $\tau' = \tau$. Por lo tanto, τ es la topología final.
$(b) \Rightarrow (a)$: Sea

$$(f'_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X', \tau'))_\Lambda$$

cualquier sumidero en $\mathfrak{Top}$; por la hipótesis (b) existe una única función $f : X \to X'$ tal que $ff_\lambda = f'_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$. Entonces cada composición ff_λ es continua, de modo que, por (c) de 1.10, también

$$f : (X, \tau) \to (X', \tau')$$

es continua. Por consiguiente, $(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau))_\Lambda$ es un coproducto topológico, tal como se quería probar.♦

Definición 1.3 *Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia de conjuntos tal que*

$$\lambda \neq \lambda' \Rightarrow X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \varnothing$$

Entonces:
(a) ***La suma ajena de*** *$(X_\lambda)_\Lambda$ es, simplemente, $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.*
(b) Si para cada $\lambda \in \Lambda$ es τ_λ una topología para X_λ, ***la suma ajena topológica de la familia de espacios topológicos*** *$(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es el espacio topológico (X, τ) cuyo conjunto subyacente X es $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ y cuya topología τ es tal que restringida a cada X_λ coincide con τ_λ con cada $X_\lambda \in \tau$. La notación que suele emplearse para referirse a la suma ajena de la familia $(X_\lambda)_\Lambda$ es*

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Lema 1.1 *Sean, $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia de espacios topológicos cuyos conjuntos subyacentes son ajenos dos a dos, $X = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ y τ una topología para X tal que*

$$\tau|_{X_\lambda} = \tau_\lambda, \text{ para cada } \lambda \in \Lambda$$

y tal que

$$X_\lambda \in \tau, \text{ para cada } \lambda \in \Lambda,$$

Entonces un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto según τ si y sólo si

$$U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

Demostración. En efecto, si $U \in \tau$ entonces, como

$$U \cap X_\lambda \in \tau|_{X_\lambda}, \forall \lambda \in \Lambda,$$

se tiene, debido a que $\tau|_{X_\lambda} = \tau_\lambda$, que

$$U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda,$$

Recíprocamente, si $U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$, para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces como

$$\tau_\lambda = \tau|_{X_\lambda} = \{V \cap X_\lambda : V \in \tau\}$$

se tiene que para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $W_\lambda \in \tau$ tal que

$$U \cap X_\lambda = W_\lambda \cap X_\lambda$$

de donde, uniendo sobre λ, se tiene

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (U \cap X_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (W_\lambda \cap X_\lambda)$$

Pero, por otro lado

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (U \cap X_\lambda) = U \bigcap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \right) = U$$

Así que

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (W_\lambda \cap X_\lambda)$$

y debido a que $X_\lambda \in \tau$ para cada $\lambda \in \Lambda$, se tiene como consecuencia que

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (W_\lambda \cap X_\lambda) \in \tau$$

es decir,

$$U \in \tau. \; \blacklozenge$$

Proposición 1.2 *Si $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es una familia de espacios topológicos tal que*

$$\lambda \neq \lambda' \Rightarrow X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \varnothing$$

y existe una topología τ para $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tal que

$$\tau|_{X_\lambda} = \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

y tal que

$$X_\lambda \in \tau, \text{ para cada } \lambda \in \Lambda,$$

entonces tal topología es única.

Demostración. Considérese el sumidero de inclusiones

$$(\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau))_\Lambda$$

Sea τ' la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(\iota_\lambda)_\Lambda$. Debido a que τ' es la única topología con la propiedad dada en (c) de la prop. 1.10, se probará que τ también tiene esa propiedad, con el fin de demostrar su unicidad. Sean pues, (Y,σ) un espacio arbitrario y $g : X \to Y$ una función arbitraria, tales que,

$$g \circ \iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{\iota_\lambda} (X,\tau) \xrightarrow{g} (Y,\sigma)$$

es continua para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces si $V \in \sigma$ se tiene que

$$(g \circ \iota_\lambda)^{-1}(V) = \iota_\lambda^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) = g^{-1}(V) \cap X_\lambda \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda,$$

Y según el lema anterior el hecho de que

$$g^{-1}(V) \cap X_\lambda \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda,$$

implica que

$$g^{-1}(V) \in \tau.$$

Por lo tanto g es continua, como se quería probar.♦

Lema 1.2 *Sea (X,τ) la suma ajena topológica de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$; entonces:*
(a) Cada inclusión

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X,\tau)$$

es continua.
(b) τ es la topología final para X correspondiente a $(\iota_\lambda)_\Lambda$ y $(\tau_\lambda)_\Lambda$.

Demostración de (a): Sea $\lambda \in \Lambda$; se sabe que

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau|_{X_\lambda}) \hookrightarrow (X,\tau)$$

es continua, ya que si $U \in \tau$, $\iota_\lambda^{-1}(U) = U \cap X_\lambda \in \tau|_{X_\lambda}$; y como $\tau_\lambda = \tau|_{X_\lambda}$, entonces

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X,\tau)$$

es continua.

Demostración de (b): Considérese la topología final para X correspondiente a $(\iota_\lambda)_\Lambda$ y $(\tau_\lambda)_\Lambda$,

$$\tau' = \left\{U \subseteq X : \iota_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\right\}$$

y escójase uno cualquiera de sus abiertos, denótese por U; entonces

$$U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

o sea que

$$\tau'|_{X_\lambda} \subseteq \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

Por otra parte, si $V \in \tau_\lambda$, entonces

$$V \subseteq X \quad \text{y} \quad V \cap X_{\lambda'} = \begin{cases} V, \text{ si } \lambda' = \lambda \\ \varnothing, \text{ si } \lambda' \neq \lambda \end{cases}$$

es decir

$$\iota_{\lambda'}^{-1}(V) \in \tau_{\lambda'}, \forall \lambda' \in \Lambda$$

lo que significa que $V \in \tau'$. Por lo tanto, $V \cap X_\lambda \in \tau'|_{X_\lambda}$; pero $V \cap X_\lambda = V$. Luego,

$$\tau_\lambda \subseteq \tau'|_{X_\lambda}, \forall \lambda \in \Lambda$$

Por lo tanto, τ' es una topología para X tal que $\tau'|_{X_\lambda} = \tau_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Por la proposición anterior, una topología para X con esta propiedad es única; luego, $\tau' = \tau$.♦

Proposición 1.3 *Si (X, τ) es la suma ajena topológica de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$, entonces cada inclusión*

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau)$$

es una inmersión abierta y cerrada.

Demostración. Si (X, τ) es la suma ajena topológica de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ entonces por el lema 1.2 cada inclusión ι_λ es continua y

$$\tau = \left\{U \subseteq X : \iota_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\right\}$$

Sólo falta ver que ι_λ es inyectiva y abierta (cerrada). Sea $\lambda \in \Lambda$, ι_λ es inyectiva, porque si $x, y \in X_\lambda$ y $x \neq y$ entonces $\iota_\lambda(x) \neq \iota_\lambda(y)$; para ver que ι_λ es abierta hay que probar que si $\lambda \in \Lambda$ y $V \in \tau_\lambda$ entonces $\iota_\lambda(V) \in \tau$. Sean entonces $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ y sea $V \in \tau_\lambda$, para que $\iota_\lambda(V) \in \tau$ tiene que suceder que $\iota_{\lambda'}^{-1}(\iota_\lambda(V)) \in \tau_{\lambda'}$, para toda $\lambda' \in \Lambda$. Esto efectivamente ocurre: si $\lambda = \lambda'$ entonces

$$\iota_\lambda^{-1}(\iota_\lambda(V)) = \{x_\lambda \in X_\lambda : \iota_\lambda(x_\lambda) \in \iota_\lambda(V)\} = \{x_\lambda \in X_\lambda : x_\lambda \in V\} = V \cap X_\lambda$$

Como $V \cap X_\lambda = V \in \tau_\lambda$, se tiene que

$$\iota_\lambda^{-1}(\iota_\lambda(V)) \in \tau_\lambda$$

y si $\lambda \neq \lambda'$ entonces

$$\iota_{\lambda'}^{-1}(\iota_\lambda(V)) = \emptyset \in \tau_\lambda\ ,$$

pues X_λ y $X_{\lambda'}$ son ajenos. Por lo tanto

$$\iota_\lambda(V) \in \tau$$

para toda $\lambda \in \Lambda$, como se quería probar. (Análogamente se prueba que ι_λ es cerrada).♦

Definición 1.4 *Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de conjuntos donde hay varios miembros con elementos comunes. Para cada $\lambda \in \Lambda$ se define un conjunto,*

$$X'_\lambda = \{(x, \lambda) : x \in X_\lambda\}$$

y una función

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \xrightarrow{h_\lambda} & X'_\lambda \\ x & \mapsto & (x,\lambda) \end{array}$$

(Obviamente h_λ es una biyección, para toda $\lambda \in \Lambda$). En tal caso:
(a) ***La suma ajena de*** *$(X_\lambda)_\Lambda$ es*

$$\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X'_\lambda$$

(b) Si cada X_λ está topologizado por cierta τ_λ, entonces ***la suma ajena topológica de la familia de espacios topológicos*** *$(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ es la suma ajena topológica de la familia $(X'_\lambda,\tau'_\lambda)_\Lambda$, donde τ'_λ es tal que*

$$h_\lambda : (X_\lambda,\tau_\lambda) \to (X'_\lambda,\tau'_\lambda)$$

resulte un homeomorfismo; es decir,

$$\tau'_\lambda = \{h_\lambda(U) : U \in \tau_\lambda\}$$

Notación: $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda,\tau_\lambda)$.

Observación 1.1 *Por el lema anterior, si (X,τ) es la suma ajena de $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$, entonces τ es la topología final respecto de*

$$(\iota_\lambda h_\lambda : (X_\lambda,\tau_\lambda) \to (X,\tau))_\Lambda$$

Descripción de los coproductos cartesianos y topológicos.

I. Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de conjuntos.
(a) Si los miembros de la familia no tienen puntos en común, entonces su coproducto es el sumidero

$$\left(\iota_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)_\Lambda$$

(b) En el caso restante, el coproducto es el sumidero

$$\left(\iota_\lambda h_\lambda : X_\lambda \to \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)_\Lambda$$

II. Sea $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios topológicos.
(a) Si los miembros de la familia no tienen elementos comunes, entonces un coproducto suyo es

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda,\tau_\lambda) = (\iota_\lambda : (X_\lambda,\tau_\lambda) \hookrightarrow (X,\tau))_\Lambda$$

donde (X, τ) es la suma ajena topológica de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$.
(b) Para el caso restante,

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda) = \left(\iota_\lambda h_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)\right)_\Lambda$$

Coproducto de funciones.

El concepto dual, correspondiente al concepto 1.14, es el siguiente.

Definición 1.5 *Si*

$$(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (Y_\lambda, \sigma_\lambda))_\Lambda$$

es una familia de funciones continuas, el **coproducto de la familia de funciones** $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, *que se denotará por*

$$\amalg f_\lambda$$

es la única función continua que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "\iota_\lambda"'] & (Y_\lambda, \sigma_\lambda)_\Lambda \arrow[d, "\jmath_\lambda"] \\
(\coprod X_\lambda, \tau) \arrow[r, "\amalg f_\lambda"'] & (\coprod Y_\lambda, \sigma)
\end{tikzcd}$$

La descripción de $\amalg f_\lambda$ *quedará completada al indicar cuál es su regla de correspondencia; para ello tómese cualquier punto*

$$(x, \lambda) \in (\coprod X_\lambda, \tau)$$

Debido a la conmutatividad del diagrama se tiene

$$\amalg f_\lambda (x, \lambda) = \amalg f_\lambda \circ \iota_\lambda (x, \lambda) = \jmath_\lambda f_\lambda (x, \lambda) = f_\lambda (x, \lambda)$$

Es decir, si

$$(y, \lambda') = \amalg f_\lambda (x, \lambda)$$

entonces

$$y = f_\lambda (x) \quad y \quad \lambda' = \lambda$$

1.4 Otros conceptos preliminares

Para finalizar este capítulo se verán algunos conceptos que serán necesarios a lo largo de este trabajo y aunque es muy probable que el lector este familiarizado con ellos, pudiera suceder que no los conozca por el nombre que aquí se les asigna.

Definición 1.6 *Una **retracción** en $\mathfrak{Top}$ es una función continua que posee un inverso derecho continuo, es decir, es una función continua $r : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ para la cual existe otra función continua $s : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ tal que*

$$rs = 1_{(Y,\sigma)}.$$

Definición 1.7 *Una **sección** en $\mathfrak{Top}$ es una función continua que posee un inverso izquierdo continuo.*

Obsérvese que con las definiciones anteriores un *homeomorfismo* puede definirse también como cualquier función que sea retracción y sección a la vez.

Definición 1.8 *Una **inmersión** es una función continua e inyectiva*

$$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$$

tal que τ es inicial respecto a f y a σ.

Definición 1.9 *Un **cociente** es una función continua y suprayectiva*

$$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$$

*tal que σ es final respecto a f y a τ, y en tal caso (Y, σ) recibe el nombre de **espacio cociente**.*

Estos conceptos se relacionan entre sí como sigue.

Ejemplo 1.1 *Toda sección es inmersión.*

Demostración. Efectivamente, si $s : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una sección, es decir, s es una función continua, para la cual existe otra función contínua

$$r : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$$

tal que $rs = 1_{(X,\tau)}$. Entonces s es inyectiva, pues si $x, x' \in X$ con $s(x) = s(x')$ entonces

$$x = rs(x) = rs(x') = x'.$$

Para probar que τ es inicial respecto a s y a σ, se hará uso de 1.9, sea

$$g : (Z, \rho) \to (X, \tau)$$

una función arbitraria tal que

$$sg : (Z, \rho) \to (Y, \sigma)$$

es continua; entonces será continua la composición

$$r\,(sg) = (rs)\,g = 1_{(X,\tau)}g = g$$

Por lo que τ es inicial respecto a s y a σ, y además, s es inyectiva, lo que significa que s es inmersión.

Ejemplo 1.2 *Toda retracción es un cociente.*

Demostración. En efecto, si $r : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una retracción, entonces es continua y existe

$$s : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$$

continua tal que $rs = 1_{(Y,\sigma)}$. r es suprayectiva porque para toda $y \in Y$ existe $s\,(y) \in X$ tal que $r\,(s\,(y)) = y$. Para ver que σ es final respecto a r y a τ, se usará 1.10. Sea $g : (Y, \sigma) \to (Z, \rho)$ una función tal que $gr : (X, \tau) \to (Z, \rho)$ es continua; entonces también será continua la composición

$$(gr)\,s = g\,(rs) = g1_{(Y,\sigma)} = g$$

Por lo tanto r es un cociente.♦

Capítulo 2

Subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$

El propósito de este capítulo es estudiar la teoría de las correflexiones topológicas, en particular las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$ junto con algunos de sus ejemplos, como son: la subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias, la de los espacios finitamente generados, compactamente generados, etc. Para motivar el concepto de subcategoría correflexiva, se dará una idea intuitiva de éste.

Por subcategoría de $\mathfrak{Top}$ se entenderá simplemente cualquier familia de espacios topológicos que esté cerrada bajo homeomorfismos. Las *subcategorías correflexivas* se pueden pensar, en forma figurada, como una galería de espejos para $\mathfrak{Top}$; al exponer a la familia de todos los espacios topológicos ante un espejo y al considerar la colección de todas las imágenes (correflejos) que el espejo devuelve de esa familia, puede verse a esta clase como una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$. Esta clase que se denotará $\underline{A}$, debe ser tal, que al anteponer frente a un espejo a cualquier espacio X en $\mathfrak{Top}$, éste devuelve a X una imagen transformada[1] $A \in \underline{A}$ (su correflejo, que según se verá es esencialmente único) a través de una transformación continua $c : A \to X$ (correflexión de X) la cual es tal que si $f : A' \to X$ es otra función continua con $A' \in \underline{A}$ existe una única $g : A' \to A$ tal que $cg = f$.

2.1 Definición y ejemplos de subcategoría correflexiva

Definición 2.1 *Una **subcategoría** de $\mathfrak{Top}$ es una familia $\underline{\mathbf{A}}$ de espacios topológicos que contiene con cada espacio A a todo espacio homeomorfo a A, es decir, la familia $\underline{\mathbf{A}}$ es tal que*

$$(A \in \underline{\mathbf{A}} \ y \ B \cong A) \Rightarrow B \in \underline{\mathbf{A}}$$

Es común referirse a los miembros de la subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$ con el nombre de $\underline{\mathbf{A}}$-espacios.

A partir de este momento y a lo largo de todo el documento, cuando se hable de una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ (a secas) se estará haciendo referencia a la definición anterior, a menos que se especifique otra cosa.

[1] Que es como la que todo espejo brinda, una imagen falsa pero a la vez auténtica.

Definición 2.2 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría arbitraria de $\mathfrak{Top}$. Una **$\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de un espacio topológico X** es una función continua*

$$c : A \to X$$

que satisface las siguientes condiciones:
(i) $A \in \underline{\mathbf{A}}$
(ii) Para toda función continua $f : A' \to X$, con $A' \in \underline{\mathbf{A}}$, existe una y solamente una, función continua $g : A' \to A$ tal que $cg = f$, como se representa en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
A' \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & \circlearrowleft & A \arrow[ul, "c"']
\end{tikzcd}$$

*En tal caso se dice que el espacio X es **$\underline{\mathbf{A}}$-correflejable** y el espacio A recibe el nombre de **$\underline{\mathbf{A}}$-correflector de** X.*

Definición 2.3 *Si la subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$ es tal que cualquier espacio topológico X es $\underline{\mathbf{A}}$-correflejable, es decir, que para todo $X \in \mathfrak{Top}$ existe $A \in \underline{\mathbf{A}}$ y una función continua $c : A \to X$ que es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X, entonces se dice que la **subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$ es correflexiva.***

Como consecuencia de estas definiciones resulta claro que cualquier subcategoría correflexiva $\underline{\mathbf{A}}$ de $\mathfrak{Top}$ queda determinada describiendo dos cosas: los espacios topológicos que la forman y sus $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones.

Una importante propiedad de las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones es su *unicidad salvo homeomorfismos*, que es lo que queda establecido en el siguiente resultado.

Proposición 2.1 *(a) El $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de un espacio X es único salvo homeomorfismos. Es decir, si*

$$c : A \to X \quad y \quad c' : A' \to X$$

son $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones del espacio X, entonces existe un homeomorfismo

$$h : A \to A'$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, "c"] \arrow[rr, "h"'] & \circlearrowleft & A' \arrow[ul, "c'"']
\end{tikzcd}$$

(*b*) *Recíprocamente, todo espacio homeomorfo al* $\underline{\mathbf{A}}$*-correflector del espacio* X *es también un* $\underline{\mathbf{A}}$*-correflector de* X*. Esto es, si*

$$c : A \to X$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$*-correflexión de* X *y* $h' : A' \to A$ *es un homeomorfismo, entonces* $ch' : A' \to X$ *también es una* $\underline{\mathbf{A}}$*-correflexión de* X*.*

Demostración de (*a*)*:* Efectivamente, al ser c y c' $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones de X y al tener que $A, A' \in \underline{\mathbf{A}}$, existen, respectivamente, dos funciones continuas h y h' que hacen conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "c"] \arrow[rr, shift left, "h"] & \circlearrowleft & A' \arrow[ul, "c'"'] \arrow[ll, shift left, "h'"] \end{tikzcd}$$

Siendo así, obsérvese que la composición $h'h$ es una función continua de A en A tal que

$$c\,(h'h) = (ch')\,h = c'h = c$$

Y como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr, "c"'] & & A \arrow[dl, "c"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

o equivalentemente, como 1_A es una función continua que también cumple la igualdad

$$c1_A = c$$

se tiene, de acuerdo con (*ii*), que

$$h'h = 1_A.$$

Análogamente se puede probar que $hh' = 1_{A'}$. Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

Demostración de (*b*)*:* En efecto, sea $f : B \to X$ cualquier función continua, con $B \in \underline{\mathbf{A}}$; entonces existe una única función continua $g : B \to A$ tal que $cg = f$. Sea $g' = h'^{-1}g$; entonces

$$(ch')\,g' = c\left(h'h'^{-1}\right)g = cg = f;$$

y si $g_1' : B \to A'$ fuera otra función continua tal que $(ch')\,g_1' = f$,

$$\begin{tikzcd} & X & \\ B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, shift left, "g'"] \arrow[rr, shift right, "g_1'"'] & \circlearrowleft & A' \arrow[ul, "ch'"'] \end{tikzcd}$$

entonces $h'g'$ y $h'g'_1$ serían dos funciones continuas de B en A tales que

$$c\,(h'g') = f = c\,(h'g'_1)$$

Entonces, debido a (ii), $h'g' = h'g'_1$, por lo que $g' = g'_1$. Por lo tanto, ch' es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X.♦

Observación 2.1 *$\underline{\{\emptyset\}}$ es la mínima subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

En efecto, para cualquier espacio topológico X se tiene que existe una única función continua

$$\emptyset \xrightarrow{\phi} X$$

Esta *función vacía* es la $\underline{\{\emptyset\}}$-correflexión de X, como lo hace constar la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
\emptyset \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rr, leftrightarrow, "\phi"] & \circlearrowleft & \emptyset \arrow[ul, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

También es cierto que sea cual sea la subcategoría correflexiva $\underline{\mathbf{A}}$ de $\mathfrak{Top}$, $\emptyset$ es uno de sus miembros. En efecto, como para cualquier $X \in \mathfrak{Top}$ debe existir una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión $c : A \to X$, con $A \in \underline{\mathbf{A}}$, en particular, cuando X es vacío no puede ser otra que $c = \phi$, con $A = \emptyset$; $\therefore\ \emptyset \in \underline{\mathbf{A}}$. Por lo tanto, $\underline{\{\emptyset\}}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ tal que para cualquier otra subcategoría correflexiva $\underline{A}$, se tiene que

$$\underline{\{\emptyset\}} \subseteq \underline{A}$$

$\underline{\{\emptyset\}}$ es la mínima correflexiva porque antes de ella sólo está $\underline{\emptyset}$: la subcategoría vacía de $\mathfrak{Top}$, que no satisface la definición de ser correflexiva porque ni siquiera para el espacio vacío es posible definir una $\underline{\emptyset}$-correflexión.♦

Obsérvese que en el primer caso ϕ no es, desde luego, necesariamente suprayectiva. El siguiente teorema muestra que cualquier otro ejemplo que se ocurra será distinto del anterior en ese sentido.

2.2 Definiciones de bicorreflexividad y de ciertos espacios

Teorema 2.1 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es cualquier subcategoría correflexiva con elementos no vacíos, entonces toda $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión debe ser biyectiva. En este caso se dice que la subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$* ***es una subcategoría bicorreflexiva.***

Demostración. Sea X cualquier espacio topológico y sea $c_X : A \to X$ una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X. Si $X = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ y $\phi : A \to X$ es biyectiva. Supóngase que $X \neq \emptyset$; entonces c_X es suprayectiva. En efecto, escójase cualquier punto $x \in X$ y defínase para cualquier elemento no vacío $B \in \underline{\mathbf{A}}$

$$B \xrightarrow{f} X$$

como la constante de valor x. De acuerdo con la definición de subcategoría correflexiva debe existir una, y sólo una, función continua $g : B \to A$ que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & A \arrow[dl, "c_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Pero entonces

$$c_X\left(g\left(b\right)\right) = f\left(b\right) = x, \forall b \in B$$

lo cual significa que $g\left(b\right)$ es preimagen de x en A bajo c_X; por lo tanto, c_X es suprayectiva. Finalmente, sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $c_X\left(a_1\right) = c_X\left(a_2\right)$ y reconsidérese la función f anterior para $x = c_X\left(a_1\right)$. Entonces se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X & \\ B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, shift left, "g_1"] \arrow[rr, shift right, "g_2"'] & \circlearrowleft & A \arrow[ul, "c_X"'] \end{tikzcd}$$

en el cual las funciones g_1 y g_2 son las constantes definidas para $i \in \{1,2\}$ por

$$g_i\left(b\right) = a_i$$

Ambas hacen conmutar el diagrama, pero éste sólo conmuta bajo la acción de una función única. En consecuencia se trata de la misma constante, es decir, $a_1 = a_2$. Por lo tanto, c_X es inyectiva.♦

Debido a lo anterior, en adelante se llamarán *subcategorías bicorreflexivas* a las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos ya que, según se ha visto, en ellas todas las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones son biyectivas.

Observación 2.2 *Nótese que aún en el caso de la subcategoría $\underline{\{\emptyset\}}$ las correflexiones son inyectivas (ya que por vacuidad la función ϕ es inyectiva, pues $a_1, a_2 \in \emptyset \Rightarrow \phi\left(a_1\right) \neq \phi\left(a_2\right)$). Por lo tanto en toda subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones son inyectivas.*

Observación 2.3 $\mathfrak{Top}$ *es subcategoría bicorreflexiva de* $\mathfrak{Top}$.

Efectivamente, si $X \in \mathfrak{Top}$, $1_X : X \to X$ es una $\mathfrak{Top}$-correflexión.

Observación 2.4 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y (X,τ) es cualquier espacio topológico, entonces una de las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones de (X,τ) es de la forma 1_X.*

Demostración. Supóngase que

$$c:(A,\xi)\to(X,\tau)$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (X,τ), sea

$$\tau'=\{c(U):U\in\xi\}$$

Como c es biyectiva, τ' es una topología para X y

$$c^{-1}:(X,\tau')\to(A,\xi)$$

se vuelve continua pues τ' es en realidad la topología inicial para X correspondiente a $c^{-1}:X\to(A,\xi)$ y a ξ, es decir,

$$\tau'=\left\{\left(c^{-1}\right)^{-1}(U):U\in\xi\right\}=\{c(U):U\in\xi\}$$

En consecuencia,

$$c^{-1}:(X,\tau')\to(A,\xi)$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto, $(X,\tau')\in\underline{\mathbf{A}}$ y, por (b) de la proposición 2.1,

$$cc^{-1}=1_X$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (X,τ).♦

Subcategoría bicorreflexiva mínima.

Teorema 2.2 *La subcategoría de los espacios discretos es la mínima subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Sea $\mathbb{D}$ la subcategoría de los espacios discretos.

(a) *$\mathbb{D}$ es bicorreflexiva:* Sea (X,τ) cualquier espacio topológico; si τ_d es la topología discreta para X, entonces

$$1_X:(X,\tau_d)\to(X,\tau)$$

es una $\mathbb{D}$-correflexión porque es continua, $(X,\tau_d)\in\mathbb{D}$ y si $f:(W,\xi)\to(X,\tau)$ es continua, con $(W,\xi)\in\mathbb{D}$, entonces $f:(W,\xi)\to(X,\tau_d)$ es la única función continua para la cual se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (X,\tau) & \\
(X,\tau_d) \arrow[ur, "1_X"] & \circlearrowleft & (W,\xi) \arrow[ul, "f"'] \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}$$

Además $\mathbb{D}$ tiene elementos no vacíos; por lo tanto es bicorreflexiva.

(*b*) *$\mathbb{D}$ es la mínima bicorreflexiva:* Sea $\underline{A}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y (X,τ) cualquier espacio discreto. Entonces existe una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión

$$c_{(X,\tau)} : A \longrightarrow (X,\tau)$$

que, como se sabe, es continua y biyectiva. Como (X,τ) es discreto, también $c^{-1}_{(X,\tau)}$ es continua; por lo tanto $c_{(X,\tau)}$ es un homeomorfismo y $(X,\tau) \in \underline{A}$. Por lo tanto, $\mathbb{D} \subseteq \underline{\mathbf{A}}$.♦

En la siguiente sección se verán ejemplos de otras subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$, como serán las subcategorías formadas por los espacios finitamente generados, por los espacios compactamente generados, y por los espacios conexamente generados; para verlos se finaliza ésta sección dando las definiciones de éstos espacios.

Espacios finitamente generados

Definición 2.4 *Un espacio topológico (X,τ) se dice que está **finitamente generado** si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios finitos de (X,τ). Es decir, si $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ es la familia de subespacios finitos de (X,τ) entonces para el sumidero*

$$(\iota_\lambda : (X_\lambda,\tau_\lambda) \hookrightarrow (X,\tau))_\Lambda$$

τ es la topología final correspondiente a $(\iota_\lambda)_\Lambda$ y $(\tau_\lambda)_\Lambda$.

Ejemplo 2.1 *Todo espacio discreto está finitamente generado.*

Demostración. En efecto, si (X,τ) es discreto y $(X_\lambda,\tau_\lambda)_\Lambda$ es la familia de subespacios finitos de (X,τ), entonces el sumidero

$$(\iota_\lambda : (X_\lambda,\tau_\lambda) \hookrightarrow (X,\tau))_\Lambda$$

es final, porque la topología discreta τ es la más grande de las topologías para X que hacen continuas a las inclusiones, ya que es obvio que si $U \in \tau$ entonces

$$(\iota_\lambda)^{-1}(U) = (U \cap X_\lambda) \in \tau|_{X_\lambda} = \tau_\lambda$$

para toda $\lambda \in \Lambda$. ♦

Ejemplo 2.2 *Todo espacio indiscreto está finitamente generado.*

Demostración. Sea τ la topología indiscreta para X y considérese el sumidero

$$(\iota_\lambda : (X_\lambda,\tau_\lambda) \hookrightarrow (X,\tau))_\Lambda$$

de inclusiones de los subespacios finitos de (X,τ). Hay que probar que en este caso la topología final para X, τ', correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(\iota_\lambda)_\Lambda$ es la indiscreta, es decir, hay que ver que los únicos abiertos de τ' son el vacío y el total. Para ello se procederá por reducción al absurdo suponiendo que hay un subconjunto propio de X, no vacío y miembro de τ'. Sea U tal subconjunto de X; entonces

$$\iota_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

Por ser no vacío existe al menos un $x \in U$. Por ser subconjunto propio, tampoco $X - U$ es vacío, por lo que existe $y \in X - U$; entonces $x \neq y$ y el subespacio de X

$$\left(\{x, y\}, \tau\left|_{\{x,y\}}\right.\right)$$

es un subespacio finito (e indiscreto) y miembro de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ de subespacios finitos de (X, τ). Sin embargo, para la inclusión correspondiente

$$\iota : \left(\{x, y\}, \tau\left|_{\{x,y\}}\right.\right) \hookrightarrow (X, \tau)$$

se tiene que

$$\iota^{-1}(U) = \{x\} \notin \tau\left|_{\{x,y\}}\right.$$

lo cual contradice el hecho de que U es miembro de la topología final. Luego $U = X$, lo que significa que τ es la topología final. Por lo tanto

$$(\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau))_\Lambda$$

es final y (X, τ) está finitamente generado.♦

Teorema 2.3 *Sea (X, τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
(a) (X, τ) está finitamente generado.
(b) Las intersecciones arbitrarias de abiertos son abiertas.
(c) Las uniones arbitrarias de cerrados son cerradas.
(d) Si $(A_i)_I$ es cualquier familia de subconjuntos de X, entonces

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de subconjuntos abiertos de (X, τ) y sea $A = \bigcap_{i \in I} A_i$. Por (a),

$$U \in \tau \Leftrightarrow U \cap F \in \tau|_F$$

para todo subconjunto F de X que sea finito. En consecuencia, para cada F que se fije, se tiene que

$$A \cap F = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap F)$$

es una intersección finita de abiertos de F (posiblemente de muchos intersectandos repetidos). Luego,

$$A \cap F \in \tau|_F, \forall F \subseteq X \text{ finito.}$$

Por lo tanto, $A \in \tau$.
$(b) \Rightarrow (a)$: Hay que probar que es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios finitos de (X, τ)

$$\mathcal{S} = (\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow (X, \tau))_{\mathfrak{Fin}_X}$$

donde

$$\mathfrak{Fin}_X = \{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}$$

para lo cual basta demostrar que si $U \subseteq X$ es tal que $U \cap F \in \tau|_F$ para todo $F \in \mathfrak{Fin}_X$, entonces $U \in \tau$. Escójase U con esas características y un punto $x \in U$. Por (b), x posee una vecindad abierta mínima $V(x)$ según τ; a saber:

$$V(x) = \cap \{W \in \tau : x \in W\}$$

Ahora bien, si ocurriese que $V(x) - U \neq \varnothing$, entonces se podría escoger

$$y \in V(x) - U$$

y formar el subespacio finito $\{x, y\}$. Entonces

$$U \cap \{x, y\} = \{x\} \in \tau|_{\{x,y\}}$$

lo cual implicaría que este abierto relativo $\{x\}$ debería producirse también al intersectar el abierto absoluto más chico que contiene a x con $\{x, y\}$. Pero esto sería falso, porque $V(x) \cap \{x, y\} = \{x, y\} \underset{\circ}{\nabla}$. Por lo tanto, $V(x) \subseteq U$; por lo que, $U \in \tau$ y $\mathcal{S}$ es final.
$(b) \Rightarrow (c)$: Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de subconjuntos cerrados de (X, τ) y sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Por (b),

$$X - A = \bigcap_{i \in I} (X - A_i) \in \tau$$

Por lo tanto, A es cerrado.
$(c) \Rightarrow (d)$: Sea $(A_i)_I$ una familia arbitraria de subconjuntos de (X, τ). Claramente,

$$A_i \subseteq \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}, \ \forall i \in I$$

por lo tanto

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

Tomando cerraduras y aplicando (c) se obtiene

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

que es lo que se quería.
$(d) \Rightarrow (b)$: Sea $(A_i)_I$ una familia cualquiera de subconjuntos abiertos de (X, τ) y sea

$$A = \bigcap_{i \in I} A_i$$

Por (d),

$$\overline{X - A} = \bigcup_{i \in I} \overline{X - A_i}$$

pero

$$\overline{X - A_i} = X - A_i$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{i \in I} \overline{X - A_i} = \bigcup_{i \in I} X - A_i = X - A$$

O sea que $X - A$ es cerrado y A es abierto, como se quería probar.♦

Nótese que, debido a que en $\mathbb{R}$ con la topología usual la intersección arbitraria de abiertos no es necesariamente abierta, se tiene, por el teorema anterior, que este espacio no está finitamente generado.

Proposición 2.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Si*

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap F \in \tau|_F \, , \forall F \in \mathfrak{Fin}_X\}$$

donde

$$\mathfrak{Fin}_X = \{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}$$

entonces τ' es una topología para X y es más fina que τ.

Demostración. Considérese el sumidero de inclusiones

$$S = (\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow X)_{\mathfrak{Fin}_X}$$

Si se piensa en X topologizado con τ entonces S es un sumidero topológico porque cada inclusión ι_F se convierte en una función continua (pues $F \subseteq X$). Obsérvese, por otra parte, que τ' es la topología final para X correspondiente a las inclusiones $(\iota_F)_{\mathfrak{Fin}_X}$ y a la familia $(\tau|_F)_{\mathfrak{Fin}_X}$ (esto es, correspondiente al sumidero S), ya que para todo $U \subseteq X$ y para todo $F \in \mathfrak{Fin}_X$

$$\iota_F^{-1}(U) = U \cap F$$

Por lo tanto τ' es una topología para X y es la más grande que hace continuas a estas inclusiones. Por lo tanto

$$\tau \subseteq \tau'.\blacklozenge$$

Proposición 2.3 *Sean (X, τ) un espacio topológico arbitrario y*

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap F \in \tau|_F \, , \forall F \in \mathfrak{Fin}_X\}$$

Entonces:
(*a*) *(X, τ') está finitamente generado.*
(b) *Si $f : (W, \xi) \to (X, \tau)$ es continua y (W, ξ) está finitamente generado, entonces*

$$f : (W, \xi) \to (X, \tau')$$

es continua.

Demostración de (a). (X,τ') está finitamente generado porque el sumidero

$$S = \left(\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow (X,\tau')\right)_{\mathfrak{Fin}_X}$$

(el sumidero de inclusiones de los subespacios finitos de (X,τ)) es final.

Demostración de (b). Sea $f:(W,\xi)\to(X,\tau)$ una función continua cuyo dominio (W,ξ) está finitamente generado, entonces el sumidero de inclusiones

$$S = \left(\iota_F : (F, \xi|_F) \hookrightarrow (W,\xi)\right)_{\mathfrak{Fin}_W}$$

es final, esto es, (W,ξ) tiene la topología final respecto a $(\iota_F)_{\mathfrak{Fin}_W}$ y a la familia $(\xi|_F)_{\mathfrak{Fin}_W}$ donde

$$\mathfrak{Fin}_W = \{F \subseteq W : F \text{ es finito}\}$$

Por otro lado, debido a la continuidad de la función $f:(W,\xi)\to(X,\tau)$, para toda $F\in\mathfrak{Fin}_W$ resulta continua la restricción

$$f\Big|_F^{f(F)} : (F,\xi|_F) \to \left(f(F), \tau|_{f(F)}\right)$$

Pero $F\in\mathfrak{Fin}_W$ implica $f(F)\in\mathfrak{Fin}_X$; entonces como consecuencia de la definición de τ', para todo $F\in\mathfrak{Fin}_W$ resulta continua la inclusión

$$(\iota)_{f(F)} : \left(f(F), \tau|_{f(F)}\right) \to (X,\tau')$$

Entonces, puesto que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(F,\xi|_F) \arrow[r, "\iota_F"] \arrow[d, "f\big|_F^{f(F)}"'] & (W,\xi) \arrow[d, "f"] \\
\left(f(F), \tau|_{f(F)}\right) \arrow[r, "\iota_{f(F)}"'] & (X,\tau')
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $F\in\mathfrak{Fin}_W$, resulta que la composición

$$\left(f(F), \tau|_{f(F)}\right) \xrightarrow{\iota_F} (W,\xi) \xrightarrow{f} (X,\tau')$$

es continua, para todo $F\in\mathfrak{Fin}_W$. Esto implica, debido a la finalidad de ξ respecto a $(\iota_F)_{\mathfrak{Fin}_W}$ y a $(\xi|_F)_{\mathfrak{Fin}_W}$, y a la proposición 1.10, que

$$f:(W,\xi)\to(X,\tau')$$

es continua, como se quería demostar.♦

Como corolario de los dos últimos resultados se tiene que a un espacio topológico arbitrario (X,τ) se le puede dotar siempre de una nueva topología τ' que lo hace un espacio finitamente generado; este nuevo espacio (X,τ') es llamado **el espacio finitamente generado asociado a (X,τ).**

Espacios compactamente generados.

Definición 2.5 *Un espacio topológico (X,τ) se dice que está **compactamente generado** si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios compactos de (X,τ).*[2]

Proposición 2.4 *Si (X,τ) es cualquier espacio topológico, son equivalentes:*
(a) (X,τ) está compactamente generado.
(b) $U \in \tau \Leftrightarrow U \cap K \in \tau|_K$,$\forall K \subseteq X$ compacto en (X,τ).

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sea $(K_\iota)_I$ la familia de subespacios compactos de (X,τ); por (a), es final el sumidero

$$(\iota_\iota : (K_i, \tau|_{K_\iota}) \hookrightarrow (X,\tau))_I$$

Por lo tanto

$$U \in \tau \Leftrightarrow \iota_\iota^{-1}(U) \in \tau|_{K_\iota}, \forall i \in I$$

es decir

$$U \in \tau \Leftrightarrow U \cap K_\iota \in \tau|_{K_\iota}, \forall i \in I$$

$(b) \Rightarrow (a)$: De acuerdo a la definición de sumidero final, (b) significa que τ es la topología final corespondiente a $(\iota_i)_I$ y $(\tau|_{K_\iota})_I$. Por lo tanto, el sumidero

$$(\iota_i : (K_\iota, \tau|_{K_\iota}) \hookrightarrow (X,\tau))_I$$

es final y (X,τ) está compactamente generado.♦

Ejemplo 2.3 *Todo espacio finitamente generado está compactamente generado.*

Demostración. En efecto, supóngase que (X,τ) está finitamente generado y que $(K_\iota)_I$ es la familia de los subespacios compactos de (X,τ). Sea $U \subseteq X$ tal que $U \cap K_\iota \in \tau|_{K_\iota}, \forall i \in I$. En particular se tiene, dado que cualquier subespacio finito de (X,τ) es compacto, que

$$U \cap F \in \tau|_F, \forall F \subseteq X \text{ finito}$$

y como se trata de un espacio finitamente generado, entonces $U \in \tau$; de modo que, por (b) de la proposición anterior, (X,τ) está compactamente generado.♦

Proposición 2.5 *Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario. Si*

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap K \in \tau|_K, \forall K \subseteq X \text{ compacto en } (X,\tau)\}$$

entonces τ' es una topología para X más fina que τ.

[2]En la terminología antigua este concepto recibía el nombre de K-espacio.

Demostración. Considérese el sumidero de inclusiones

$$S = (\iota_K : (K, \tau|_K) \hookrightarrow X)_{K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

donde

$$\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)} = \{K \subseteq X : K \text{ es compacto en } (X,\tau)\}$$

Si se piensa en X topologizado con τ entonces S es su sumidero topológico porque cada inclusión ι_K se convierte en una función continua (pues $K \subseteq X$). Obsérvese también que τ' es la topología final para X respecto a las inclusiones $(\iota_K)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$ y a la familia $(\tau|_K)_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$, esto es porque dicha topología final es

$$\left\{U \subseteq X : \iota^{-1}(U) = U \cap K \in \tau|_K \text{ , } \forall K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}\right\}$$

Por lo tanto τ' es una topología para el sumidero S y es la más grande que hace continuas a las inclusiones (pues es la final), es decir,

$$\tau \subseteq \tau'. \blacklozenge$$

Corolario 2.1 *Si (X,τ) es cualquier espacio topológico y τ' es la topología para X de la proposición anterior entonces, $K \subseteq X$ es compacto en (X,τ) si, y sólo si, K es compacto en (X,τ').*

Demostración. Si K_0 es compacto en (X,τ) y $(U_j)_J \subseteq \tau'$ es una cubierta de K_0, entonces, de acuerdo con la definición de τ', para toda $j \in J$ se tiene que

$$U_j \cap K \in \tau|_K$$

para todo $K \subseteq X$ compacto; en particular para K_0

$$U_j \cap K_0 \in \tau|_{K_0}$$

En consecuencia, para toda $j \in J$ existe $V_j \in \tau$ tal que

$$V_j \cap K = U_j \cap K$$

Entonces

$$K_0 = \bigcup_{j \in J} (U_j \cap K_0) = \bigcup_{j \in J} (V_j \cap K)$$

esto implica que $(V_j)_J$ es una cubierta abierta de K_0 según τ y, por consiguiente, puede extraerse de ella una subcubierta finita $(U_j)_{J_0}$ de $(U_j)_J$. Pero entonces

$$K_0 = \left(\bigcup_{j \in J_0} V_j\right) \cap K_0 = \bigcup_{j \in J_0} (V_j \cap K_0) \subseteq \bigcup_{j \in J_0} (U_j \cap K_0)$$

lo cual significa que $(U_j)_{J_0}$ es una subcubierta fnita de $(U_j)_J$. Por lo tanto K_0 es compacto en (X, τ').
Recíprocamente, puesto que por la proposición anterior τ' es más fina que τ, se tiene que

$$1_X : (X, \tau') \to (X, \tau);$$

es continua; por lo tanto cualquier compacto K de (X, τ') es aplicado por 1_X en un compacto de (X, τ), pero ese compacto es K; por lo que K es compacto en (X, τ).♦

Proposición 2.6 *Sea (X, τ) cualquier espacio topológico. Si τ' es la topología para X de la proposición 2.5, entonces:*
(a) (X, τ') está compactamente generado.
(b) Si $f : (W, \xi) \to (X, \tau)$ es cualquier función continua, donde (W, ξ) está compactamente generado, entonces $f : (W, \xi) \to (X, \tau')$ es continua.

Demostración de (a). De acuerdo con la definición de τ', es final el sumidero de inclusiones de los subespacios compactos de (X, τ'), es decir:

$$\iota_K : ((K, \tau|_K) \hookrightarrow (X, \tau'))_{K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

es un sumidero final; por lo tanto (X, τ') está compactamente generado.
Demostración de (b). La prueba es análoga a la de la proposición 2.3 ♦
Obsérvese nuevamente la importancia de estos dos últimos resultados al asegurar que a un espacio topológico arbitrario (X, τ) se le puede dotar siempre de una nueva topología τ' que lo haga un espacio compactamente generado, a este nuevo espacio (X, τ') se le suele denotar por $\langle X \rangle$ y es llamado **el espacio compactamente generado asociado a** (X, τ).
Como corolario de la proposición y corolario anteriores se tiene que tanto $\langle X \rangle$, el espacio compactamente generado asociado a (X, τ), como el propio (X, τ) tienen exactamente los mismos compactos.
Enseguida se verán algunos ejemplos de espacios que están compactamente generados.

Ejemplo 2.4 *Todo espacio topológico en el que cada punto posea una vecindad compacta está compactamente generado. (como Ejemplos: Todo espacio compacto y todo espacio localmente compacto.)*

Demostración. En efecto, sea (X, τ) cualquier espacio con la propiedad anterior. Hay que probar que si $U \subseteq X$ es tal que

$$U \cap K \in \tau|_K, \forall K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$$

entonces $U \in \tau$. Sea $x \in U$ y sea K la vecindad compacta que por hipótesis posee x; entonces

$$x \in U \cap K \in \tau|_K$$

o sea que $U \cap K$ es una vecindad relativa de x contenida en la vecindad absoluta K de x, pues $U \cap K \subseteq K$. Ahora bien, se conoce de topología general[3] que: $U \cap K \subseteq K$ es abierto en K (es decir, $U \in \tau|_K$) si y sólo si $U \cap K = K \cap V$ para algún $V \in \tau$, pero entonces $U \cap K$ es la intersección de dos vecindades absolutas K y V, por lo tanto $U \cap K$ es una vecindad absoluta de x contenida en U. Por lo tanto U es abierto en X, es decir, $U \in \tau$.♦

Ejemplo 2.5 *Todo espacio topológico que satisfaga el primer axioma de numerabilidad está compactamente generado.*

Demostración. Sea U un subconjunto de X tal que

$$U \cap K \in \tau|_K \text{ , para todo } K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$$

Se probará que U es abierto valiéndose del siguiente hecho: Si (X,τ) es un espacio primero numerable entonces $A \subseteq X$ es abierto según τ si y sólo si para toda sucesión de puntos de X, $\{x_n\}$ que tenga límite en algún $x \in A$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$, $\forall n \geq n_0$. Sea entonces $x \in U$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X que converge a x; considérese el conjunto

$$K_0 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \quad .$$

K_0 es compacto, pues para toda cubierta abierta arbitraria $(A_r)_R$ de K_0 existe una subcubierta finita de K_0 dada por el abierto A_{r_x} que contiene a x (que ya contiene una infinidad de términos del conjunto K_0) y por el conjunto de abiertos de $(A_r)_R$ que cubren a los que están fuera del abierto A_{r_x} que son un número finito. Por lo tanto

$$U \cap K_0 \in \tau|_{K_0}$$

Y como la propiedad de ser primero numerable es hereditaria, entonces también es espacio primero numerable $(K_0, \tau|_{K_0})$. En consecuencia, para el abierto de K_0, $U \cap K_0$ se cumple la caracterización de abierto enunciada al principio de esta prueba. Por lo tanto, para la sucesión $\{x_n\}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U \cap K_0$, $\forall n \geq n_0$ $\therefore$ $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$. Por lo tanto $U \in \tau$.♦

El siguiente resultado enuncia otra forma de determinar a un espacio compactamente generado.

Teorema 2.4 *Sea (X,τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
a) (X,τ) está compactamente generado.
b) Si $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ es una función tal que $f|_K : K \to (Y,\sigma)$ es continua, para todo subespacio compacto K de (X,τ), entonces f es continua en (X,τ).

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Por (a), es final el sumidero

$$(\iota_K : (K, \tau|_K) \hookrightarrow (X,\tau))_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

[3]El resultado, para el lector que no lo recuerde, es: si $A \subseteq X$ con (X,τ) espacio topológico entonces $B \subseteq A$ es abierto en A si y sólo si $B = A \cap U$ para algún $U \in \tau$.

Como además cada composición

$$f\iota_K : (K, \tau|_K) \to (Y, \sigma)$$

es continua, entonces una caracterización de sumidero final permite asegurar que f es continua.
$(b) \Rightarrow (a)$: Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ cualquier función tal que

$$f\iota_K : (K, \tau|_K) \to (Y, \sigma)$$

es continua, para toda $K \in \mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}$. Por (b), f es continua; por lo tanto

$$(\iota_K : (K, \tau|_K) \hookrightarrow (X, \tau))_{\mathfrak{Comp}_{(X,\tau)}}$$

es un sumidero final. Luego, (X, τ) está compactamente generado.♦

Espacios conexamente generados.

Definición 2.6 *Un espacio topológico (X, τ) se dice que está **conexamente generado** si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios conexos de (X, τ).*

Proposición 2.7 *Sea (X, τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
(a) (X, τ) está conexamente generado.
(b) Toda componente conexa en (X, τ) es abierta.

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sea $x \in X$ y sea $c(x)$ su componente conexa. Se sabe por hipótesis, que los abiertos U en (X, τ) se caracterizan por la propiedad de que $U \cap C \in \tau|_C$, $\forall C \subseteq X$ conexo en (X, τ). Se probará que $c(x)$ satisface la propiedad anterior. Para ello tómese cualquier conexo $C \subseteq X$; para C no hay más que dos posibles casos en relación a x, contenerlo o no: Si $x \in C$, entonces $C \subseteq c(x)$, porque $c(x)$ es el máximo conexo que contiene a x, por lo tanto $C \cap c(x) = C \in \tau|_C$. Si $x \notin C$, entonces ó bien $C \cap c(x) = C$ ó $C \cap c(x) = \emptyset$, en ambos casos resulta $C \cap c(x) \in \tau|_C \therefore c(x) \in \tau$. Por lo tanto toda componente conexa en X es abierta.
$(b) \Rightarrow (a)$: Sea $U \subseteq X$ no vacío tal que $U \cap C \in \tau|_C$, $\forall C \subseteq X$ conexo. Sea $x \in U$ y sea $c(x)$ la componente conexa de x; $c(x)$ es abierta por hipótesis, y también por hipótesis $U \cap c(x)$ es un abierto relativo a $c(x)$. Pero $U \cap c(x) \subseteq c(x)$ es abierto en $c(x)$ si y sólo si $U \cap c(x) = c(x) \cap V$ para algún $V \in \tau$. Por lo tanto $U \cap c(x)$ es la intersección de dos abiertos absolutos y es, por tanto, un abierto absoluto contenido en U que contiene a x. Por lo tanto, $U \in \tau$. Por lo tanto (X, τ) está conexamente generado.♦

Ejemplo 2.6 *Todo espacio localmente conexo está conexamente generado.*

Demostración. Se quiere probar que si (X,τ) es localmente conexo y $U \subseteq X$ es tal que $U \cap C \in \tau|_C$, $\forall C \subseteq X$ conexo en (X,τ) entonces $U \in \tau$. Sea $x \in U$; se tiene por hipótesis que para cualquier $x \in X$ y cualquier vecindad U de X, existe una vecindad V de x conexa tal que $V \subseteq U$. Así, x posee una vecindad conexa C; se tiene entonces que $x \in U \cap C \in \tau|_C$, luego $U \cap C$ es una vecindad relativa de x contenida en C vecindad absoluta; pero, como se vió, $U \cap C$ es abierto en C si y sólo si $U \cap C = C \cap V$ para algún $V \in \tau \therefore U \cap C$ es la intersección de dos vecindades absolutas de $x \therefore U \cap C$ es una vecindad absoluta de x contenida en U y esto significa que U es abierto en X. Por lo tanto (X,τ) está conexamente generado.♦

2.3 Ejemplos de subcategorías bicorreflexivas

La subcategoría de los espacios finitamente generados es bicorreflexiva.

En efecto, debido a los resultados de las proposiciones 2.2 y 2.3, para cualquier espacio topológico (X,τ) se tiene la topología

$$\tau' = \{U \subseteq X : U \cap F \in \tau|_F, \forall F \in \mathfrak{Fin}_X\}$$

según la cual (X,τ') está finitamente generado; entonces, la función

$$1_X : (X,\tau') \to (X,\tau)$$

es continua, porque $\tau \subseteq \tau'$, y si $f : (W,\xi) \to (X,\tau)$ es cualquier función continua y (W,ξ) está finitamente generado, entonces $f : (W,\xi) \to (X,\tau')$ es la única función continua para la cual conmuta en $\mathfrak{Top}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} & (X,\tau) & \\ (X,\tau') \arrow[ur, "1_X"] & \circlearrowleft & (W,\xi) \arrow[ul, "f"'] \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd}$$

Por lo que todo espacio topológico (X,τ) es correflejable en la subcategoría de los finitamente generados. Para designar a esta subcategoría bicorreflexiva se empleará la notación $\underline{\mathbb{F}}$.

La subcategoría de los espacios compactamente generados es bicorreflexiva.

Análogamente, pero apoyándose en los resultados de las proposiciones 2.5 y 2.6, se tiene que la subcategoría de los espacios compactamente generados es bicorreflexiva; para designarla se empleará la notación $\underline{\mathbb{K}}$.

La subcategoría de los espacios conexamente generados es bicorreflexiva.

Probando que a todo espacio topológico (X, τ), se le puede asociar un espacio (X, τ') el cual está conexamente generado, cuya topología

$$\tau' = \left\{U \subseteq X : U \cap C \in \tau|_C \text{ , } \forall C \in \mathfrak{Conex}_{(X,\tau)}\right\}$$

con

$$\mathfrak{Conex}_{(X,\tau)} = \{C \subseteq X : C \text{ es conexo en } (X, \tau)\}$$

resulta ser una topología para X más fina que τ, y probando también que siempre que $f : (W, \xi) \to (X, \tau)$ sea una función continua arbitraria, tal que (W, ξ) esté conexamente generado, entonces $f : (W, \xi) \to (X, \tau')$ será continua; se puede demostrar, de manera análoga a los dos ejemplos anteriores, que la categoría de los espacios conexamente generados, la cual se denotará por $\mathbb{C}$, es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Para ver que la subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias es otro ejemplo no trivial de subcategoría bicorreflexiva, se probarán los resultados siguientes.

Proposición 2.8 *Si (X, τ) es un espacio topológico, son equivalentes:*
(a) (X, τ) es localmente conectable por trayectorias.
(b) Las componentes por trayectorias de cualquier abierto A de X son abiertas.
(c) τ posee una base cuyos elementos son conectables por trayectorias.

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sean $a \in A$ y $A \in \tau$ arbitrarios y sea $x \in c_A(a)$ también arbitrario. Por (a) y puesto que $x \in A$ existe una vecindad N de a que es conectable por trayectorias y tal que $N \subseteq A$. Puesto que el máximo subespacio conectable por trayectorias de $(A, \tau|_A)$ que tiene a x es $c_A(x)$, se tiene que $N \subseteq c_A(x)$. Pero $x \in c_A(x) \cap c_A(a)$. Por lo tanto $N \subseteq c_A(a) = c_A(x)$. Esto significa que $c_A(a)$ es abierto.
$(b) \Rightarrow (c)$: Sea

$$\beta_X = \{c_A(a) : A \in \tau \text{ y } a \in A\}$$

la familia de componentes por trayectorias de abiertos de (X, τ). Por (b) $\beta_X \subseteq \tau$; además se sabe que todo abierto A de X se ve partido en las componentes por trayectorias $c_A(a)$, $a \in A$. Esto implica que β_X es una base de τ cuyos miembros son conectables por trayectorias.
$(c) \Rightarrow (a)$: Si $\beta \subseteq \tau$ es base de conectables por trayectorias es fácil ver que haciendo para todo $x \in X$,

$$\beta_x = \{B \in \beta : x \in B\}$$

se obtienen bases locales de vecindades conectables por trayectorias. Por lo tanto (X, τ) es un espacio localmente conectable por trayectorias.♦

Lema 2.1 *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua y $y \in f(X)$ entonces $f^{-1}(c(y))$ es unión de componentes por trayectorias de (X, τ).*

Demostración. Puesto que $y \in f(X)$, $f^{-1}(c(y)) \neq \emptyset$. Si $x \in f^{-1}(c(y))$ entonces

$$f(c(x)) \cap c(y) \neq \emptyset$$

Pero $f(c(x))$ es conectable por trayectorias; en consecuencia también

$$f(c(x)) \cup c(y)$$

es conectable por trayectorias y, además, tiene a y. Esto y el hecho de ser $c(y)$ el máximo subespacio conectable por trayectorias de (Y, σ) que contiene a y, implica que

$$f(c(x)) \subset c(y)$$

Pero entonces

$$c(x) \subset f^{-1}(c(y))$$

y recuérdese que esto ocurre para toda $x \in f^{-1}(c(y))$, debido a lo cual se tiene que

$$\bigcup_{x \in f^{-1}(c(y))} c(x) \subseteq f^{-1}(c(y))$$

Finalmente, es claro que

$$x \in \bigcup_{x \in f^{-1}(c(y))} c(x) \ , \forall x \in f^{-1}(c(y))$$

Por lo tanto

$$f^{-1}(c(y)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(c(y))} c(x)$$

con lo que el lema queda demostrado.♦

La subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias, $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$, es bicorreflexiva.

Teorema 2.5 *Y si (X, τ) es un espacio topológico arbitrario y τ' es la topología de X cuya base son las componentes por trayectorias de los abiertos de (X, τ) entonces*

$$1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$$

es una correflexión de (X, τ) en los localmente conectables por trayectorias.

Demostración.
(i) Por (c) de la proposición anterior, (X, τ') *es localmente conectable por trayectorias.*
(ii) *Si $f : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ es cualquier función continua y (Y, σ) es localmente conectable por trayectorias entonces $f : (Y, \sigma) \to (X, \tau')$ es continua:* Sea B un abierto básico de τ'. Entonces B es componente por trayectorias de un abierto A de (X, τ). Por ser f continua,

$f^{-1}(A)$ es abierto en (Y, σ). Al ser (Y, σ) localmente conectable por trayectorias, las componentes por trayectorias de $f^{-1}(A)$ son abiertas en (Y, σ). Se sabe, por el lema anterior, que $f^{-1}(B)$ es unión de componentes por trayectorias de $f^{-1}(A)$, pues $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A)$. Por lo que $f^{-1}(B)$ es abierto y por lo tanto $f : (Y, \sigma) \to (X, \tau')$ es continua.
(iii) Por otra parte, puesto que todo $A \in \tau$ es unión de las componentes por trayectorias de A, entonces también es abierto según τ', es decir, *τ' es más fina que τ*. Esto implica que

$$1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$$

es continua; en consecuencia, de acuerdo con (ii), $f : (Y, \sigma) \to (X, \tau')$ es la única función continua para la cual conmuta en $\mathfrak{Top}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& (X,\tau) & \\
(X,\tau') \arrow[ur, "1_X"] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & (Y,\sigma) \arrow[ul, "f"'] \arrow[ll, "f"']
\end{tikzcd}$$

Finalmente,

$$1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$$

es una correflexión de (X, τ) en los localmente conectables por trayectorias.♦

Los siguientes dos resultados, los cuales se desprenden del teorema anterior, serán de gran utilidad en la prueba del teorema 4.1 del capítulo cuarto.

Corolario 2.2 *Si $S = \left((X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X, \tau)\right)_\Lambda$ es un sumidero final en $\mathfrak{Top}$, cuyo dominio $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es una familia de espacios localmente conectables por trayectorias, entonces también (X, τ) es localmente conectable por trayectorias.*

Demostración. Sea τ' una topología cuya base está formada por las componentes por trayectorias de los abiertos de (X, τ); entonces (X, τ') es localmente conectable por trayectorias y $1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$ es una correflexión de (X, τ) en la categoría de los localmente conectables por trayectorias. Por otro lado, puesto que para toda $\lambda \in \Lambda$, el espacio $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ es localmente conectable por trayectorias, entonces para toda flecha del sumidero S existe una única función continua $g_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau')$ tal que $1_X g_\lambda = f_\lambda$. Pero $1_X g_\lambda = g_\lambda$; luego $g_\lambda = f_\lambda$ y, por lo tanto,

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \to (X, \tau')$$

es continua para toda $\lambda \in \Lambda$. En consecuencia, toda composición

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X, \tau) \xrightarrow{1_X^{-1}} (X, \tau')$$

es continua; por la finalidad de S esto implica que también la identidad inversa 1_X^{-1} es continua y, por lo tanto (X, τ) y (X, τ') son homeomorfos. En consecuencia (X, τ) es localmente conectable por trayectorias, como se quería demostrar.♦

Corolario 2.3 *Los coproductos y cocientes de espacios localmente conectables por trayectorias son localmente conectables por trayectorias.*

Demostración. Si $\coprod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$ es el coproducto de una familia $(X_\lambda,\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de espacios localmente conectables por trayectorias entonces las coproyecciones

$$m_\lambda:(X_\lambda,\tau_\lambda)\to\coprod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda,\tau_\lambda)$$

forman un sumidero final[4]. Si $p:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es identificación entonces $\{p\}$ es un sumidero final.♦

2.4 Caracterización de las subcategorías bicorreflexivas

Esta sección se dedicará a dar una importante caracterización de las subcategorías bicorreflexivas que permitirá manejarlas de una manera más simple. El primer lema de esta sección describe una característica importante de estas subcategorías y es que son cerradas bajo la formación de retracciones; para verlo, se requiere antes de las siguientes dos proposiciones.

Proposición 2.9 *Si $r:X\to Y$ es una retracción y $r=gf$, donde*

$$f:X\to Z \quad y \quad g:Z\to Y$$

son continuas, entonces g es una retracción.

Demostración. Como r es retracción existe una función continua $s:Y\to X$ tal que $rs=1_Y$; puesto que $r=gf$, entonces

$$1_Y=rs=gfs$$

es decir, fs es un inverso derecho continuo de la función g. Luego g es retracción.♦

Proposición 2.10 *Toda retracción inyectiva es homeomorfismo.*

Demostración. Sea $r:X\to Y$ una retracción inyectiva arbitraria, por ser retracción existe una función continua $s:Y\to X$ tal que $rs=1_Y$. Obviamente r es suprayectiva ya que si $y\in Y$ es arbitrario, entonces por lo anterior, existe $s(y)\in X$ tal que $r(s(y))=y$. En consecuencia, r es una función continua, biyectiva que posee un inverso derecho (pero entonces también izquierdo) continuo; es decir, r es homeomorfismo.♦.

Se dice que una subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$ de $\mathfrak{Top}$ **está cerrada bajo la formación de retracciones (ó de cocientes)** si el hecho de que $r:A\to B$ sea una retracción (ó un cociente) con $A\in\underline{\mathbf{A}}$ implica que $B\in\underline{\mathbf{A}}$.

[4]Véase el inciso (*b*) del lema 1.2

Lema 2.2 *Toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ está cerrada bajo la formación de retracciones.*

Demostración. Sean, X un espacio topológico, $\underline{\mathbf{A}}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva y

$$r : A \to X, \text{ con } A \in \underline{\mathbf{A}}$$

una retracción arbitraria. Entonces, si $c_X : A' \to X$ es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X, existe una función única y continua $f : A \to A'$ que hace que conmute en $\mathfrak{Top}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "r"] \arrow[rr, "f"'] & \circlearrowleft & A' \arrow[ul, "c_X"'] \end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.9, c_X también es retracción, y al ser inyectiva se tiene, por la proposición anterior, que es un homeomorfismo, de modo que $X \in \underline{\mathbf{A}}$. ♦

Otras formas para determinar *cuándo una* subcategoría de $\mathfrak{Top}$ es o no bicorreflexiva son las que se establecen en los dos siguientes resultados.

Observación 2.5 *Nótese que*

$$\underline{\mathbf{A}} = \{X \in \mathfrak{Top} : X \text{ es discreto ó indiscreto}\}$$

es una subcategoría que no es bicorreflexiva.

Demostración.

(a) $\underline{\mathbf{A}}$ *es una subcategoría de* $\mathfrak{Top}$: Sean $X \in \underline{\mathbf{A}}$ y $h : X \to A$ un homeomorfismo:
(i) Si X es discreto, entonces $\{h(x)\}$ es abierto en A, para toda $x \in X$, porque h es abierta. Pero $\{h(x) : x \in X\} = \{a : a \in A\}$ pues es biyectiva. Luego $\{a\}$ es abierto en A, para toda $a \in A$ $\therefore$ A es discreto y $A \in \underline{\mathbf{A}}$.
(ii) Si X es indiscreto y U es abierto no vacío de A, entonces $h^{-1}(U) = X$ y, debido a la biyectividad de h, $U = A$ $\therefore$ A es indiscreto y $A \in \underline{\mathbf{A}}$.

(b) $\underline{\mathbf{A}}$ *no es bicorreflexiva:* Sea (X, τ) un espacio topológico no vacío que no sea indiscreto. De acuerdo con la observación 2.4, si $\underline{\mathbf{A}}$ fuera bicorreflexiva, para (X, τ) tendría que haber una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de la forma 1_X; por la forma que se ha tomado el espacio (X, τ), el dominio indiscreto para 1_X queda descartado y sólo resta examinar el caso en que

$$1_X : (X, \tau_d) \to (X, \tau)$$

tiene dominio discreto. Sea $B \in \underline{\mathbf{A}}$ un espacio indiscreto y supóngase que $f : B \to (X, \tau)$ es continua sin ser constante; entonces $|f(B)| > 1$, lo cual hace imposible que $f : B \to (X, \tau_d)$

sea continua, siendo f la única función que puede hacer conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} (X,\tau_d) \arrow[rr, "1_X"] & & (X,\tau) \\ & B \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

♦

Antes de ver la otra forma para determinar cuando una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ es bicorreflexiva será necesario contar con el siguiente resultado.

Proposición 2.11 *Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ una función continua y suprayectiva arbitraria. Probar que existen, un cociente $p:(X,\tau)\to(Z,\rho)$ y una función continua y biyectiva $h:(Z,\rho)\to(Y,\sigma)$ tales que $f=hp$ (f y p tienen las mismas fibras).*

Demostración. Sea $\sim_f$ la relación de equivalencia en X definida para cualesquiera puntos $x_1,x_2\in X$ mediante

$$x_1\sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

Denotando por $X/\!\sim_f$ a la familia de clases de equivalencia de esta relación, considérese la proyección canónica

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X/\!\sim_f \\ & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Asignando a $X/\!\sim_f$ la topología final $\widetilde{\tau}$ correspondiente a p y a τ, se obtiene el cociente

$$p:(X,\tau)\to(X/\!\sim_f,\widetilde{\tau})$$

Sea

$$h:(X/\!\sim_f,\widetilde{\tau})\to(Y,\sigma)$$

definida como

$$h[x]=f(x)$$

Entonces h es una función bien definida porque

$$[x]=[y]\Rightarrow x\sim_f y\Rightarrow f(x)=f(y)\Rightarrow h[x]=h[y]$$

Por lo tanto, $f(x)$ es independiente del representante x de la clase $[x]$ que se elija. Por otro lado,

$$(hp)(x)=h(p(x))=h[x]=f(x)$$

para toda $x\in X$.

$$\therefore\ f=hp$$

Ahora se verá que h es inyectiva. Supóngase que $[x],[y]\in X/\!\sim_f$ son tales que

$$h[x]=h[y];$$

entonces $f(x) = f(y)$, lo cual significa que $x \sim_f y$ y, por lo tanto, $[x] = [y]$. Además, h es suprayectiva, pues como f es suprayectiva, para toda $y \in Y$ existe $x \in X$ tal $f(x) = y$, o lo que es lo mismo, $h(p(x)) = y$; es decir, para toda $y \in Y$ existe $p(x) \in X/\sim_f$ tal que $h(p(x)) = y$. Por esto y por lo anterior, h es una función biyectiva. Sólo resta probar que h es continua. En efecto, el hecho de que la composición hp es continua y de que p es un cociente implican que h es continua. En consecuencia, h es continua y biyectiva y p es un cociente tales que:

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (X/\sim_f, \tilde{\tau}) \arrow[dl, "h"] \\
(Y,\sigma) &
\end{tikzcd}$$

♦

Teorema 2.6 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$. Entonces:*
(a) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de cocientes.
(b) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de coproductos.

Demostración de (a). Sea $g : A \to X$ cualquier cociente, con $A \in \underline{\mathbf{A}}$; si

$$c_X : A' \to X$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X, entonces existe $f : A \to A'$ continua tal que

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
A \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift left=6, "\circlearrowleft"] & & A' \arrow[ul, "c_X"']
\end{tikzcd}$$

Pero entonces c_X^{-1} es continua porque lo es $c_X^{-1} g$ y g es un cociente. Por lo tanto, c_X es un homeomorfismo y $X \in \underline{\mathbf{A}}$.

Demostración de (b). Sea $(\eta_i : A_i \to X)_I$ un coproducto, donde $A_i \in \underline{\mathbf{A}}, \forall i \in I$; hay que probar que $X \in \underline{\mathbf{A}}$. Sea $c_X : A \to X$ una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de X; entonces para toda $i \in I$ existe $f_i : A_i \to A$ continua tal que $c_X f_i = \eta_i$. Por la definición de coproducto existe una función continua $g : X \to A$ tal que $g\eta_i = f_i, \forall i \in I$; entonces $c_X g : X \to X$ es una función continua tal que

$$(c_X g)\,\eta_i = c_X(g\eta_i) = c_X f_i = \eta_i$$

Pero al ser $(\eta_i)_I$ un coproducto, 1_X es la única función continua que hace conmutar al triángulo

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, "\eta_i"'] \arrow[dr, "\eta_i"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ X \arrow[rr, "1_X"'] & & X \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $c_X g = 1_X$. Esto implica que g (que es continua) es la función inversa de c_X. Por lo tanto, c_X es un homeomorfismo; por lo tanto, $X \in \underline{\mathbf{A}}$.♦

La más importante caracterización de las subcategorías bicorreflexivas es la enunciada en el siguiente teorema.

Teorema 2.7 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos. Son equivalentes:*
a) $\underline{\mathbf{A}}$ es bicorreflexiva.
b) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de cocientes y coproductos.

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Es el teorema anterior.
$(b) \Rightarrow (a)$: Sea X cualquier espacio topológico. Si $X = \varnothing$, entonces $X \in \underline{\mathbf{A}}$ porque $\varnothing$ es el coproducto de la familia vacía de $\underline{\mathbf{A}}$. Supóngase X no vacío. Sea $S = (f_i : A_i \to X)_I$ el sumidero de todas las funciones continuas de elementos de $\underline{\mathbf{A}}$ en X. Hay que probar que existe una función continua $h : A \to X$, con $A \in \underline{\mathbf{A}}$, y que para cada miembro de S existe una única función continua $g_i : A_i \to A$ tal que $hg_i = f_i$. Sea $(\eta_i : A_i \to C)_I$ el coproducto de $(A_i)_I$; por (b), $C \in \underline{\mathbf{A}}$, y por tratarse de un coproducto existe una única función continua $f : C \to X$ tal que $f\eta_i = f_i, \forall i \in I$; por lo tanto, f es suprayectiva[5]. Por la proposición 2.11 existen, un cociente $g : C \to Z$ y una biyección continua $h : Z \to X$ tales que $f = hg$; al factorizar a f, que es única, también estas funciones son únicas. Haciendo $A = Z$ se tiene, debido a (b), que $A \in \underline{\mathbf{A}}$, y haciendo $g_i = g\eta_i$ se finaliza porque entonces $f_i = hg_i, \forall i \in I$. ♦

Así, queda hecha la descripción de las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$; son aquéllas que se encuentran cerradas bajo la formación de cocientes y coproductos.

2.5 Descripción de la subcategoría bicorreflexiva generada

Observación 2.6 *Obsérvese que si $(\underline{A_i})_I$ es una familia arbitraria de subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$, entonces la intersección*

$$\underline{\mathbf{A}} = \bigcap \underline{A_i}$$

también es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

[5] Aclárase esto al pensar que en S se hallan cada una de las constantes de valor $x, \forall x \in X$.

Demostración. En efecto, $\underline{\mathbf{A}}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ ya que si para algún $X \in \mathfrak{Top}$ existe $A \in \underline{\mathbf{A}}$ tal que A es homeomorfo a X, entonces $X \in \underline{A_i}$, para toda $i \in I$ y, por lo tanto, $\underline{\mathbf{A}}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$. Además, si $A \in \underline{\mathbf{A}}$ y

$$q : A \to X$$

es una aplicación cociente entonces, para toda $i \in I$, $X \in \underline{A_i}$, por ser $\underline{A_i}$ una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$; por consiguiente, $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de cocientes. Finalmente, si $(A_j)_J$ es una familia cualquiera de miembros de $\underline{\mathbf{A}}$ y $\left(A_j \xrightarrow{\eta_j} X\right)_J$ es un coproducto suyo, entonces $A_j \in \underline{A_i}$, para toda $j \in J$ y para toda $i \in I$, y por lo tanto, $X \in \underline{A_i}$, para toda $i \in I$; o sea que $\underline{\mathbf{A}}$ también está cerrada bajo la formación de coproductos. Por lo tanto, $\underline{\mathbf{A}}$ es correflexiva.♦

Esta observación confirma la existencia de la subcategoría bicorreflexiva más chica.

En vista de que $\mathfrak{Top}$ *misma es una subcategoría correflexiva de* $\mathfrak{Top}$ *y de la observación anterior, toda subcategoría* $\underline{\mathbf{A}}$ *de* $\mathfrak{Top}$ *se encuentra contenida en una correflexiva mínima que es* **la subcategoría correflexiva generada por** $\underline{\mathbf{A}}$:

$$\bigcap \{\underline{B} \in \mathfrak{Top} : \underline{B} \text{ es correflexiva y } \underline{A} \subseteq \underline{B}\}$$

Para una descripción de esta subcategoría en términos de $\underline{\mathbf{A}}$ convendrá contar con el siguiente resultado.

Lema 2.3 *Sean*

$$\left(A_i \xrightarrow{\upsilon_i} A\right)_I \ y \ \left(X_i \xrightarrow{\nu_i} X\right)_I$$

coproductos topológicos arbitrarios. Si para toda $i \in I$ *existe una aplicación cociente*

$$c_i : A_i \to X_i$$

entonces la única función continua $c : A \to X$ *que para toda* $i \in I$ *hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\upsilon_i"] \arrow[d, "c_i"'] & A \arrow[d, "c"] \\ X_i \arrow[r, "\nu_i"'] & X \end{tikzcd}$$

también es una aplicación cociente.

Demostración. La continuidad de c viene dada por la propiedad universal del coproducto topológico que posee $(\upsilon_i)_I$. Por otra parte, puesto que las coproyecciones $(\nu_i)_I$ son flechas de un episumidero, dado cualquier $x \in X$ existen $i \in I$ y $x_i \in X_i$ tales que $\nu_i(x_i) = x$; y puesto que para esa i, c_i es suprayectiva, también existe $a_i \in A_i$ tal que $c_i(a_i) = x_i$. Entonces,

$\upsilon_i(a_i)$ es un punto de A que es preimagen de x bajo c, ya que, en vista de la conmutatividad del diagrama anterior, se tiene que

$$c(\upsilon_i(a_i)) = \nu_i(c_i(a_i)) = \nu_i(x_i) = x$$

lo cual prueba que c es suprayectiva. Supóngase, finalmente, que $g : X \to Y$ es una función tal que la composición $gc : A \to Y$ es continua. Entonces también será continua, para toda $i \in I$, la composición

$$gc\upsilon_i = g\nu_i c_i$$

puesto que c_i es una aplicación cociente, esto implica que $g\nu_i$ es continua, para toda $i \in I$. Pero

$$\left(X_i \xrightarrow{\nu_i} X\right)_I$$

es un sumidero final; en consecuencia, también g es continua, y por lo tanto, c es una aplicación cociente, como se quería demostrar.♦

Teorema 2.8 *Sea* $\underline{\mathbf{A}}$ *una subcategoría de* $\mathfrak{Top}$ *arbitraria. Entonces*

$$\widetilde{\underline{\mathbf{A}}} = \{X \in \mathfrak{Top} : X \text{ es espacio cociente de un coproducto de miembros de } \underline{\mathbf{A}}\}$$

es la subcategoría correflexiva generada por $\underline{\mathbf{A}}$.

Demostración. (*a*) Supóngase que $Y \in \mathfrak{Top}$ es un espacio homeomorfo a algún $X \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$, sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Puesto que para X existe una aplicación cociente

$$c : A \to X$$

de un coproducto A de miembros de $\underline{\mathbf{A}}$, se tiene que

$$hc : A \to Y$$

también es una aplicación cociente, y por lo tanto, también $Y \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$. Esto prueba que $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$. De modo más general: dados $X \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ y una aplicación cociente $q : X \to Y$, puesto que para X existe la aplicación cociente c mencionada arriba, se tiene que

$$qc : A \to Y$$

también es una aplicación cociente, y por lo tanto, también $Y \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$. Esto prueba que $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ está cerrada bajo la formación de cocientes.
Por otro lado, si $(X_i)_I$ es una familia de miembros de $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ y

$$\left(X_i \xrightarrow{\nu_i} X\right)_I$$

es un coproducto suyo, entonces se tiene que para toda $i \in I$ existe una aplicación cociente

$$c_i : A_i \to X_i$$

en la que cada A_i es un coproducto de una familia $(A_{ij})_{j\in J_i}$ de miembros de $\underline{\mathbf{A}}$. Para toda $i \in I$ considérense explícitamente las coproyecciones del coproducto A_i correspondiente:

$$\left(A_{ij} \xrightarrow{u_{ij}} A_i\right)_{J_i}$$

Sea

$$A = \coprod_{\substack{i\in I \\ j\in J_i}} A_{ij}$$

entonces A es un coproducto de miembros de $\underline{\mathbf{A}}$; supóngase que las coproyecciones de este coproducto son

$$\left(A_{ij} \xrightarrow{w_{ij}} A\right)_{J_i,\, I}$$

Si de estas coproyecciones se consideran solamente aquellas w_{ij} con i fija y con $j \in J_i$, se tendrá, aplicando la propiedad universal del coproducto topológico, que para esta i fija (que es cualquiera) existe una única función continua

$$u_i : A_i \to A$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[dr, "u_i"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
A_{ij} \arrow[ur, "u_{ij}"] \arrow[rr, "w_{ij}"] & {} & A
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que

$$\left(A_i \xrightarrow{u_i} A\right)_I$$

es un coproducto. En efecto, dada cualquier familia de funciones continuas

$$\left(A_i \xrightarrow{g_i} B\right)_I$$

puede considerarse la familia de composiciones

$$\left(A_{ij} \xrightarrow{g_i u_{ij}} B\right)_{J_i,\, I}$$

y asegurar que existe una única función continua

$$f : A \to B$$

tal que

$$f w_{ij} = g_i u_{ij}$$

pero entonces se tiene que

$$fu_iu_{ij} = g_iu_{ij}$$

y puesto que $(u_{ij})_{J_i}$ es un episumidero, esto implica que

$$fu_i = g_i$$

y por lo tanto el sumidero $(u_i)_I$ satisface la propiedad universal del coproducto topológico. Así que están dadas las condiciones del lema anterior y, por consiguiente, la única función continua

$$c : A \to X$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "c_i"'] & A \arrow[d, "c"] \\ X_i \arrow[r, "\nu_i"'] & X \end{tikzcd}$$

es una aplicación cociente. Así, X ha venido a ser espacio cociente de un coproducto de miembros de $\underline{\mathbf{A}}$. Por lo tanto $X \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ y $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ está cerrada bajo la formación de coproductos. Esto, aunado a lo anterior, demuestra que $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Por otra parte

$$\underline{\mathbf{A}} \subseteq \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$$

porque para todo $A \in \underline{\mathbf{A}}$, A es espacio cociente del coproducto A de la familia cuyo único miembro es $A \in \underline{\mathbf{A}}$. Además si $\underline{\mathbf{A}} \subseteq \underline{\mathbf{B}}$ y $\underline{\mathbf{B}}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, $\underline{\mathbf{B}}$ contendrá los coproductos de miembros de $\underline{\mathbf{A}}$ y (por estar cerrada bajo la formación de cocientes) también a todos los cocientes de estos coproductos; es decir

$$\widetilde{\underline{\mathbf{A}}} \subseteq \underline{\mathbf{B}}$$

Esto prueba que $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es la mínima subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ que contiene a $\underline{\mathbf{A}}$, tal como se quería probar.♦

2.6 Bicorreflexivas generadas y jerarquía de bicorreflexivas

Ejemplo 2.7 *Como un primer ejemplo de subcategoría correflexiva generada, se tiene a la generada por la subcategoría vacía* $\underline{\emptyset}$. *Puesto que* $\underline{\{\emptyset\}}$ *es la subcategoría correflexiva más chica de* $\mathfrak{Top}$, *y puesto* $\emptyset \in \underline{\{\emptyset\}}$, *resulta que*

$$\widetilde{\underline{\emptyset}} = \underline{\{\emptyset\}}$$

Ejemplo 2.8 *La subcategoría $\underline{\mathbb{D}}$, de los espacios discretos es la subcategoría bicorreflexiva generada por la subcategoría de los espacios singulares.*

Demostración. Sea

$$\underline{A}_m = \{(X_\lambda, \tau_\lambda) \in \mathfrak{Top} : X_\lambda = \{x_\lambda\} \text{ ó } X_\lambda = \emptyset,\ \lambda \in \Lambda\}$$

siendo Λ cierta clase de índices. Sin que se pierda generalidad se puede suponer que si $\lambda \neq \lambda'$ entonces $\{x_\lambda\} \neq \{x_{\lambda'}\}$; esto simplificará la unión ajena sobre subclases de Λ a uniones corrientes. Siendo $\widetilde{\underline{A}_m}$ la subcategoría bicorreflexiva generada por $\underline{A}_m$, se tiene que a $\widetilde{\underline{A}_m}$ la forman cocientes de coproductos de miembros de $\underline{A}_m$. Sea I una subclase arbitraria de Λ y considérese el coproducto

$$(X, \tau) = \coprod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$$

Entonces τ es final para $\{x_i : i \in I\} = X$ con respecto al sumidero de inclusiones

$$\left((X_i, \tau_i) \overset{\iota_i}{\hookrightarrow} X\right)_I$$

En consecuencia, cualquiera que sea $J \in I$, para el subconjunto de X

$$U = \{x_j : j \in J\}$$

para toda $i \in I$ se tiene que

$$\iota_i^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } i \notin J \\ \{x_i\}, & \text{si } i \in J \end{cases}$$

de modo que en cualquier caso $\iota_i^{-1}(U) \in \tau_i$; esto significa, debido a la definición de topología final para un sumidero, que $U \in \tau$. Por lo tanto, (X, τ) es un espacio discreto. Por otra parte, puesto que el espacio cociente de todo espacio discreto también es discreto, resulta que todo miembro de $\widetilde{\underline{A}_m}$ es discreto. Recíprocamente, si (X, τ) es un espacio discreto y haciendo

$$X_\lambda = \{x_\lambda\},\ \forall\, x_\lambda \in X \text{ y } \tau_\lambda = \tau|_{X_\lambda}$$

es claro que

$$\left((X_\lambda, \tau_\lambda) \overset{\iota_\lambda}{\hookrightarrow} (X, \tau)\right)_\Lambda$$

es un sumidero final de inclusiones y, por lo tanto, (X, τ) es un coproducto de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ de miembros de $\underline{A}_m$, y por lo tanto, $(X, \tau) \in \widetilde{\underline{A}_m}$. Esto demuestra que

$$\widetilde{\underline{A}_m} = \underline{\mathbb{D}}. \blacklozenge$$

Ejemplo 2.9 *Sea $\underline{\mathbb{I}_2}$ la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son todos los espacios indiscretos con dos puntos; es claro que se trata de una subcategoría plena y repleta, por lo que tiene sentido pensar en la subcategoría bicorreflexiva $\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$ generada por $\underline{\mathbb{I}_2}$.*

Sea $A \in \widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$; entonces existe una familia $(X_\lambda)_\Lambda$ de miembros de $\underline{\mathbb{I}_2}$ y una aplicación cociente

$$p : \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to A$$

Sea U un abierto arbitrario de A; entonces $p^{-1}(U)$ es abierto en $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, por lo que para toda inclusión ι_λ se tiene que

$$\iota_\lambda^{-1}\left(p^{-1}(U)\right)$$

es abierto en X_λ. Debido a la indiscreción de los espacios X_λ, esto implica que sea cual sea $\lambda \in \Lambda$, sólo hay dos posibles casos:

$$p^{-1}(U) \cap X_\lambda = \varnothing \quad \acute{o} \quad p^{-1}(U) \cap X_\lambda = X_\lambda$$

En caso de darse la primera situación, resulta que

$$p^{-1}(A - U) \cap X_\lambda = \left[\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda - p^{-1}(U)\right] \cap X_\lambda = X_\lambda$$

en tanto que al presentarse el segundo caso, se tiene que

$$p^{-1}(A - U) \cap X_\lambda = \left[\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda - p^{-1}(U)\right] \cap X_\lambda = \varnothing$$

Debido a que la topología de $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es final con respecto al sumidero

$$\left(\iota_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right)_\Lambda$$

lo anterior implica que $p^{-1}(A - U)$ es abierto en $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$; y como también la topología de A es final respecto a p y a la topología de $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, se tiene que $A - U$ también es abierto en A y, por lo tanto, U es cerrado. Queda demostrado, entonces, que en los espacios miembros de $\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$ todo subconjunto abierto es cerrado.

Los espacios que tienen esta propiedad de que todo abierto suyo es cerrado se llaman **espacios localmente indiscretos**. Se puede demostrar que en $\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$ se hallan todos los espacios localmente indiscretos (véase [5]). Estos espacios, por lo tanto, constituyen una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ a la que se suele denotar mediante $\underline{\mathbb{I}_{\mathbf{L}}}$ y que, de acuerdo con todo esto, es

$$\underline{\mathbb{I}_{\mathbf{L}}} = \widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$$

La siguiente proposición es verdadera, pero su demostración no se verá aquí.

Proposición 2.12 *Toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ distinta de $\underline{\mathbb{D}}$ tiene entre sus miembros a los espacios indiscretos de dos puntos.*

Como consecuencia de la proposición anterior se puede asegurar que $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ es la subcategoría bicorreflexiva inmediatamente superior a $\underline{\mathbb{D}}$ según el orden dado por la contención $\subseteq$ entre categorías; esta situación entre $\underline{\mathbb{D}}$ e $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ quedará indicada escribiendo

$$\underline{\mathbb{D}} \sqsubset \underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}. \ \blacklozenge$$

Ejemplo 2.10 *Sea S el espacio de Sierpinski y considérese la clase de espacios*

$$\Sigma = \{A_\lambda \in \mathfrak{Top} : \lambda \in \Lambda \text{ y } A_\lambda \cong S\}$$

siendo Λ una clase de índices tal que si $B \in \mathfrak{Top}$ es homeomorfo a S, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $A_\lambda = B$. No se pierde generalidad si, siendo $A_\lambda = (X_\lambda, \sigma_\lambda)$, con

$$X_\lambda = \{x_\lambda, x'_\lambda\} \quad \text{y} \quad \sigma_\lambda = \{X_\lambda, \{x_\lambda\}, \varnothing\} \quad [6]$$

se supone que

$$X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \varnothing, \forall \lambda \neq \lambda'$$

Es claro que mediante Σ, pensada conjuntamente con todas las posibles funciones continuas entre sus miembros, queda configurada una subcategoría plena y repleta de $\mathfrak{Top}$ que será denotada mediante $\underline{\Sigma}$. Sea I una subclase arbitraria de Λ y considérese el coproducto de la familia $(A_i)_I$

$$\coprod_{i \in I} A_i = (X, \sigma)$$

donde

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i$$

y σ es final para X con respecto al sumidero de inclusiones

$$(\iota_i : (X_i, \sigma_i) \hookrightarrow X)_I$$

Lema 2.4 *Todo abierto $U \in \sigma$ que para cierta $i_0 \in I$ contenga entre sus miembros a $x'_{i_0} \in X_{i_0}$, contendrá también al punto aislado x_{i_0}.*

Demostración. Supóngase que esto no es cierto y que existe $U \in \sigma$ y cierta $i_0 \in I$ tales que

$$x'_{i_0} \in X_{i_0} \quad \text{y} \quad x_{i_0} \notin X_{i_0}$$

Obsérvese que para toda $i \in I$, $X_i \subseteq X$ satisface la condición de membresía de σ; en particular se tiene que

$$X_{i_0} \in \sigma$$

Pero entonces, puesto que U es abierto en X,

$$\{x'_{i_0}\} = U \cap X_{i_0} \in \sigma$$

[6] Nótese que el punto aislado en cada A_λ está siendo designado por la equis correspondiente (x_λ) sin apóstrofe.

lo cual implica (por ser σ final respecto al sumidero $(\iota_i)_I$) que para toda $i \in I$

$$\iota_i^{-1}\left\{x'_{i_0}\right\} \in \sigma_i$$

En particular

$$\left\{x'_{i_0}\right\} = \iota_{i_0}^{-1}\left\{x'_{i_0}\right\} \in \sigma_{i_0}$$

Pero de acuerdo con la definición que se dio de las topologías σ_λ, se tiene que $\{x_{i_0}\} \in \sigma_{i_0}$; entonces (X_{i_0}, σ_{i_0}) es discreto y no de Sierpinski $\underset{\circ}{\nabla}$ ♦

Considérese ahora una familia arbitraria $(U_j)_J$ de abiertos en σ. En cuanto a su intersección $U = \bigcap\limits_{j \in J} U_j$, hay dos posibles casos:

1º Que U sea vacía, en cuyo caso $U \in \sigma$.

2º Supóngase que $U \neq \varnothing$; sea $x \in U$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que

$$x = x_{i_0} \quad \text{ó} \quad x = x'_{i_0}$$

Si $x = x_{i_0}$, entonces

$$\{x\} = \{x_{i_0}\} \in \sigma_{i_0}$$

y se tiene que para toda $i \in I$

$$\iota_i^{-1}\{x\} = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } i \neq i_0 \\ \{x_{i_0}\}, \text{ si } i = i_0 \end{cases}$$

en ambos casos, $\iota_i^{-1}\{x\} \in \sigma_i$. Entonces $\{x\}$ es un abierto de X según σ, enteramente contenido en U y que contiene a x como elemento. Ahora se verá qué ocurre cuando $x = x'_{i_0}$; debido al lema anterior, si $x = x'_{i_0} \in U$, también $x_{i_0} \in U$, de manera que en este caso también hay un abierto de X que contiene a x y que está enteramente contenido en U, a saber: X_{i_0}. Esto demuestra que $U \in \sigma$, lo cual significa que (X, σ) es un espacio cuya topología está cerrada bajo intersecciones arbitrarias, es decir, (X, σ) está finitamente generado. Puesto que $\underline{\mathbb{F}}$, la subcategoría de los espacios finitamente generados, por ser correflexiva está cerrada bajo cocientes (y coproductos), resulta que cualquier cociente de cualquier coproducto de miembros de $\underline{\Sigma}$ es miembro de $\underline{\mathbb{F}}$; en símbolos:

$$\widetilde{\underline{\Sigma}} \subseteq \underline{\mathbb{F}}$$

También es válida la contención en sentido contrario, pero su demostración no se verá en este trabajo. Queda indicado entonces que

$$\widetilde{\underline{\Sigma}} = \underline{\mathbb{F}}$$

Proposición 2.13 *Todo espacio localmente indiscreto está finitamente generado, pero no recíprocamente.*

Demostración. Si A es localmente indiscreto y $(U_j)_J$ es una familia arbitraria de abiertos de A, entonces $U = \bigcap_{j\in J} U_j$ es cerrada en A por ser una intersección de cerrados de A, (en A todo abierto es cerrado). Luego U es abierto en A y queda probado que A está finitamente generado. Para mostrar que lo recíproco es falso, basta pensar en el espacio de Sierpinski que está finitamente generado pero que, claramente, no es localmente indiscreto. ♦

Proposición 2.14 *Toda subcategoría bicorreflexiva que contenga propiamente a* $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ *tiene entre sus miembros al espacio de Sierpinski.*

Demostración. Si $\underline{A}$ es una subcategoría bicorreflexiva que contiene propiamente a $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$, entonces es posible hallar un espacio $A \in \underline{A}$ y un abierto $U \subseteq A$ no cerrado y tal que

$$\varnothing \neq U \neq A$$

Sea

$$p_U : A \longrightarrow \overset{S}{\overset{\shortparallel}{\left\{\begin{matrix}\cdot\\ \cdot\end{matrix}\right\}}}$$

el cociente que identifica en un punto cada uno de los subconjuntos U y $A - U$. Entonces $p_U(U)$ es abierto en S y no es cerrado. Por lo tanto, S es el espacio de Sierpinski; y si $c : A' \to S$ es una $\underline{A}$-correflexión, entonces existe una única $f : A \to A'$ continua y tal que $cf = p_U$. Entonces c^{-1} es una función tal que la composición

$$c^{-1}p_U = f$$

es continua; como todo cociente es un sumidero final, esto implica que también c^{-1} es continua, por lo que c es un homeomorfismo. Por lo tanto, $S \in \underline{A}$. ♦

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores se tiene el siguiente

Corolario 2.4 $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} \sqsubset \underline{\mathbb{F}}$. ♦

Cuando se hizo ver que $\underline{\{\varnothing\}}$ es la subcategoría correflexiva más chica de $\mathfrak{Top}$ y que $\underline{\mathbb{D}}$ es la bicorreflexiva mínima, quedó insinuada la existencia de una jerarquía entre las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ dada por la relación de contención $\subseteq$ entre ellas. Los resultados anteriores no han hecho sino corroborar la existencia de tal jerarquía; si se añade a ello el hecho de que todo espacio finitamente generado está compactamente generado pero no recíprocamente, todo esto puede sintetizarse escribiendo

$$\underline{\{\varnothing\}} \sqsubset \underline{\mathbb{D}} \sqsubset \underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} \sqsubset \underline{\mathbb{F}} \subset \underline{\mathbb{K}}$$

Como ha mostrado Horst Herrlich en [5], entre las subcategorías $\underline{\mathbb{F}}$ y $\underline{\mathbb{K}}$ no puede establecerse la relación $\sqsubset$ ya que entre ellas median otras subcategorías bicorreflexivas bastante más abstractas. En ese documento se hace ver que la jerarquía de que aquí se habla viene dada por una retícula o *lattice* cuyos elementos *cero* y *uno* son $\underline{\{\varnothing\}}$ y $\mathfrak{Top}$, respectivamente.

Capítulo 3

Categorías asociadas a clases de funciones

La meta de este capítulo es encontrar la relación que guardan entre sí los conceptos de correflexión y de fibración. Para ello se ha hallado conveniente considerar ciertas clases de funciones, llamadas 1-clases, y asociarles ciertas subcategorías de $\mathfrak{Top}$ que resultarán ser bicorreflexivas. En particular la clase de las E-fibraciones suprayectivas resultará ser 1-clase y al considerar la subcategoría asociada correspondiente se tendrá así la relación buscada. La maquinaria necesaria para lograr el propósito de este capítulo consta de los conceptos de: producto fibrado, 0-clase, 1-clase y la descripción de la subcategoría asociada a una 0-clase; así como también se requiere el concepto de E-fibración.

3.1 Producto fibrado en $\mathfrak{Top}$

Además de los productos cartesianos y topológicos para familias cualesquiera de conjuntos y de espacios topológicos, se conoce otro extraño producto que ha sido llamado *coproducto* y que se vió en el capítulo primero.

Aún más raro es el llamado *producto fibrado* que en $\mathfrak{Top}$ se define a través de la siguiente propiedad:

Definición 3.1 *Se dice que una pareja de funciones continuas*

$$f_j : A_j \to A,\ j \in \{0,1\}$$

tiene la propiedad universal del producto fibrado si existen un espacio topológico W y dos funciones continuas

$$g_j : W \to A_j,\ j \in \{0,1\}$$

tales que conmutando el diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"'] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\ A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A \end{tikzcd}$$

se tenga que dadas cualesquiera dos funciones continuas

$$\alpha_j : X \to A_j,\ j \in \{0,1\}$$

tales que

$$f_0\alpha_0 = f_1\alpha_1$$

exista una única función continua

$$f : X \to W$$

que haga conmutar los triángulos indicados en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_0"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_1"'] & & \\ & W \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\ & A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A \end{tikzcd}$$

En tal caso se hablará de la pareja $(g_j : W \to A_j)_{j\in\{0,1\}}$ *como de un* ***producto fibrado de la pareja*** $(f_j)_{j\in\{0,1\}}$ *en* $\mathfrak{Top}$.

Observación 3.1 *Si* $(g_j)_{j\in\{0,1\}}$ *es un producto fibrado de una pareja* $(f_j)_{j\in\{0,1\}}$ *de funciones continuas, entonces la pareja*

$$(g_j : W \to A_j)_{j\in\{0,1\}}$$

es una monofuente.[1]

[1]Véase definición 1.6.

Demostración. En efecto, si $h, k : X \to W$ son funciones continuas tales que $g_j h = g_j k$, para toda $j \in \{0,1\}$, entonces haciendo $\alpha_j = g_j h$, para toda $j \in \{0,1\}$, se tiene por la propiedad universal del producto fibrado que existe una única función continua $f : X \to W$ tal que $g_j f = \alpha_j$, para toda $j \in \{0,1\}$,es decir, tal que conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, shift left, "f"] \arrow[dr, shift right, "h"'] \arrow[drr, bend left, "\alpha_0"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_1"'] & & \\
& W \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\
& A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A
\end{tikzcd}
$$

En consecuencia, $h = k$ ya que ambas funciones satisfacen lo que esta función f que es única.♦

Descripción del producto fibrado en $\mathfrak{Top}$.

Proposición 3.1 *En $\mathfrak{Top}$ cualesquiera dos funciones de codominio común tienen un producto fibrado.*

Demostración. En efecto, si $(f_j : A_j \to A)_{j \in \{0,1\}}$ son una pareja de funciones continuas y se restringen las proyecciones $(p_j)_{j \in \{0,1\}}$ del producto topológico

$$\prod_{j \in 2} A_j = A_1 \times A_2$$

al conjunto

$$W = \left\{ (a_0, a_1) \in \prod_{j \in 2} A_j : f_0(a_0) = f_1(a_1) \right\}^{2}$$

[2]Si $W = \varnothing$ la proposición también es cierta porque el cuadrado conmutativo en $\mathfrak{Top}$

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\emptyset"] \arrow[d, "\emptyset"'] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A
\end{tikzcd}
$$

resulta ser cartesiano.

entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "p_0|_W"] \arrow[d, "p_1|_W"'] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\ A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A \end{tikzcd}$$

y si $\alpha_j : X \to A_j$, $j \in \{0,1\}$ son dos funciones continuas tales que $f_0\alpha_0 = f_1\alpha_1$, por la propiedad universal del producto topológico se tiene que existe una única función continua

$$\overline{f} : X \to \prod_{j\in 2} A_j$$

tal que para toda $j \in \{0,1\}$ conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowleft"] & \\ \prod_{j\in 2} A_j \arrow[r, "p_j"'] & A_j \end{tikzcd}$$

Sea $x \in X$ entonces $\overline{f}(x)$ es un miembro del producto $\prod\limits_{j\in 2} A_j$ cuyas componentes son $p_0\overline{f}(x)$ y $p_1\overline{f}(x)$. Se puede escribir

$$\overline{f}(x) = \left(p_0\overline{f}(x), p_1\overline{f}(x)\right)$$

Obsérvese, ahora, que este par ordenado es tal que

$$f_0\left(p_0\overline{f}(x)\right) = f_0\alpha_0(x) = f_1\alpha_1(x) = f_1\left(p_1\overline{f}(x)\right)$$

Por lo tanto

$$\left(p_0\overline{f}(x), p_1\overline{f}(x)\right) \in W$$

para toda $x \in X$, es decir,

$$\overline{f}(X) \subseteq W$$

Por lo tanto, se puede definir

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & W \\ & x & \mapsto & \overline{f}(x) \end{array}$$

y asegurar que f es una función continua tal que

$$\left(p_j|_W\right) f = \alpha_j$$

para toda $j \in \{0,1\}$ y es la única con esta propiedad, ya que si

$$g : X \to W$$

es tal que

$$(p_j|_W)\, g = \alpha_j$$

para toda $j \in \{0,1\}$, entonces

$$\begin{array}{rccc} \overline{g}: & X & \to & \prod\limits_{j\in 2} A_j \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

es tal que

$$p_j \overline{g} = \alpha_j$$

para toda $j \in \{0,1\}$. Y por lo tanto

$$\overline{g} = \overline{f}\ . \ \blacklozenge$$

Por abuso del lenguaje, se dice que W **es el "producto fibrado de la pareja** $(f_j)_{\{0,1\}}$"

Observación 3.2 *El producto fibrado también puede ser definido en* $\mathfrak{Set}$ *mediante una propiedad universal y también se puede probar (en forma exactamente análoga a la anterior) que todo par de funciones de codominio común tiene un producto fibrado en* $\mathfrak{Set}$.

Definición 3.2 *Cuando en general (en* $\mathfrak{Set}$, *en* $\mathfrak{Top}$, *etc...)*

$$(g_j : W \to A_j)_{j\in\{0,1\}}$$

es un producto fibrado de la pareja

$$(f_j : A_j \to A)_{j\in\{0,1\}}$$

entonces se suele hablar del diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"'] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\ A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A \end{tikzcd}$$

como de un ***cuadrado cartesiano*** *(en* $\mathfrak{Set}$, *en* $\mathfrak{Top}$, *etc...).*

Hasta aquí se ha hablado (en $\mathfrak{Top}$) de un producto fibrado para todo par de funciones continuas $(f_j)_{\{0,1\}}$ de codominio común. Enseguida se verá que *un producto fibrado de* $(f_j)_{\{0,1\}}$ *es esencialmente único.*

Proposición 3.2 *El producto fibrado* W *de* $(f_j : A_j \to A)_{j\in\{0,1\}}$ *es único salvo homeomorfismos.*

Demostración. Se sabe que si

$$W = \left\{ (a_0, a_1) \in \prod_{j \in J} A_j : f_0(a_0) = f_1(a_1) \right\}$$

entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "p_0|_W"] \arrow[d, "p_1|_W"'] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano. Si $W' \in \mathfrak{Top}$ y $g_j : W' \to A_j$ también dan lugar al cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"'] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

entonces, aplicando en cada caso la propiedad universal del producto fibrado, se tiene que existen dos únicas funciones continuas

$$h' : W' \to W \text{ y } h : W \to W'$$

tales que para toda $j \in \{0, 1\}$

$$g_j h = p_j|_W \text{ y } p_j|_W h' = g_j$$

En consecuencia se tiene que $h'h$ es una función continua tal que para toda $j \in \{0, 1\}$

$$(p_j|_W)(h'h) = [(p_j|_W) h'] h = g_j h = p_j|_W$$

De acuerdo con la propiedad universal del producto fibrado existe una única función continua de W en W tal que

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr] \arrow[drr, "p_0|_W"] \arrow[ddr, "p_1|_W"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & & \\
& W \arrow[r, "p_0|_W"] \arrow[d, "p_1|_W"'] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\
& A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

Puesto que 1_W y $h'h$ son funciones con esta propiedad, sólo queda reconocer que

$$h'h = 1_W$$

Análogamente,

$$hh' = 1_{W'}$$

Por lo tanto

$$W \overset{h}{\cong} W'$$

Recíprocamente, supóngase que

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"'] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\ A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A \end{tikzcd}$$

es una cuadrado cartesiano y que $W' \overset{h}{\cong} W$. Se probará que

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, "g_0 h"] \arrow[d, "g_1 h"'] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\ A_1 \arrow[r, "f_1"'] & A \end{tikzcd}$$

también es cartesiano. Sean

$$\alpha_j : X \rightarrow A_j,\ j \in \{0,1\}$$

dos funciones continuas tales que

$$f_0\alpha_0 = f_1\alpha_1$$

Por la propiedad universal del producto fibrado se tiene que existe una única función continua

$$f : X \rightarrow W$$

tal que

$$g_j f = \alpha_j$$

para toda $j \in \{0,1\}$. Considérese la composición

$$X \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h^{-1}} W'$$

Entonces $h^{-1}f$ es continua y para toda $j \in \{0,1\}$ se tiene

$$(g_j h)\left(h^{-1}f\right) = g_j\left(hh^{-1}\right)f = g_j f = \alpha_j$$

Finalmente se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "h^{-1}f"] \arrow[drr, "\alpha_0"] \arrow[ddr, swap, "\alpha_1"] & & \\
& W' \arrow[r, "g_0h"] \arrow[d, "g_1h"] & A_0 \arrow[d, "f_0"] \\
& A_1 \arrow[r, swap, "f_1"] & A
\end{tikzcd}$$

como se quería probar.♦

3.2 Definición de *0-clase* y de *1-clase*

Definición 3.3 *Una* ***0-clase*** *es cualquier clase de funciones continuas y suprayectivas.*

Como ejemplos de *0-clases* se pueden mencionar: a la clase de todas las retracciones, la de los cocientes, la de los homeomorfismos, la clase de todas las funciones continuas y suprayectivas, a la que por cierto, se le llamará la **0-clase máxima** y se denotará por $M_{máx}$.

Definición 3.4 *Una 0-clase M se llama* ***1-clase*** *si para todo cuadrado cartesiano (producto fibrado) en $\mathfrak{Top}$,*

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, swap, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

el hecho de tener f en M implica que g pertenece también a M.

Lo que sigue es ver algunos ejemplos que seguramente le serán familiares al lector.

Ejemplos de 1-clases.

Ejemplo 3.1 *Como un primer ejemplo de una 1-clase se tiene el de la 0-clase máxima, es decir, se probará que la más grande 0-clase $M_{máx}$, la clase de todas las funciones continuas y suprayectivas, es una 1-clase.*

Demostración. En efecto, si se tiene un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r, "f'"'] & Y \end{tikzcd}$$

en el que f es suprayectiva, entonces, sea $x_2 \in X_2$ un punto arbitrario y aplíquesele f'; entonces $f'(x_2) \in Y$, y puesto que f es suprayectiva, existe $x_1 \in X_1$ tal que $f(x_1) = f'(x_2)$. Ahora, considérese un espacio singular $\{w\}$ y defínanse las funciones:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \{w\} & \to & X_1 \\ & w & \mapsto & x_1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} \beta: & \{w\} & \to & X_2 \\ & w & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Entonces α y β son funciones continuas tales que

$$f\alpha = f'\beta$$

Como el cuadrado es cartesiano, existe una única función continua

$$h : \{w\} \longrightarrow X$$

tal que $hg' = \alpha$ y $gh = \beta$. En consecuencia, el punto $h(w)$ es preimagen de x_2. Esto demuestra que g es suprayectiva. Por lo tanto, además de ser $M_{máx}$: la clase de las funciones continuas y suprayectivas, la más grande *0-clase*, es también la más grande *1-clase* y se llama **1-clase máxima.**

Ejemplo 3.2 *Como un segundo ejemplo de 1-clase se tiene el de las fibraciones suprayectivas de Hurewicz*[3].

Demostración. Efectivamente, si M es la clase de todas las fibraciones suprayectivas de Hurewicz y

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r, "f'"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano en el que si f es una fibración de Hurewicz entonces g también es fibración de Hurewicz[4]. La prueba de la suprayectividad de g es análoga a la del ejemplo anterior.♦

[3] Véase la definición 2 en el apéndice sobre fibraciones.

[4] Véase, en el mismo apéndice, la proposición 4 la cual quedará demostrada en la proposición 3.6

Observación 3.3 *Es obvio que la unión de 0-clases es una 0-clase.*

Lema 3.1 *La intersección de 1-clases es también 1-clase.*

Demostración. Sea $(M_j)_J$ una familia arbitraria de *1-clases* y sea $M = \bigcap_{j\in J} M_j$; es claro que M es una *0-clase*. Considérese cualquier cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r, "g'"'] & Y \end{tikzcd}$$

tal que $f \in M$. Entonces, $f \in M_j$ para toda $j \in J$; puesto que para toda $j \in J$, M_j es *1-clase*, tenemos que $g \in M_j$, para toda $j \in J$, por lo que $g \in M$. Por lo tanto M es una *1-clase.*♦

Ya se vió que toda *0-clase* está contenida en la más grande *1-clase*, $M_{máx}$, así como también se ha probado que la intersección de *1-clases* es *1-clase*. Esto permite la referencia a *la 1-clase mínima $\widetilde{M}$ que contiene a una 0-clase M arbitraria,* que se verá, en la siguiente descripción.

3.3 *1-clase* generada por una *0-clase* M

Definición 3.5 *$\widetilde{M}$ denotará a la intersección de todas las 1-clases que contienen a una 0-clase arbitraria M y se hablará de $\widetilde{M}$ como de* **la 1-clase generada por la 0-clase** *M.*

Enseguida se probará un lema que describe de manera precisa a los miembros de $\widetilde{M}$.

Lema 3.2 *Los elementos de $\widetilde{M}$ son precisamente, aquellas funciones continuas $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ para las cuales existen cuadrados cartesianos en $\mathfrak{Top}$*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \widetilde{Y} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

donde f está en M.

Demostración. Por un lado es claro que siendo $\widetilde{M}$ la *1-clase* generada por una *0-clase* M entonces para todo cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \widetilde{Y} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

en el que $f \in M$, necesariamente se tendrá que $\widetilde{f} \in \widetilde{M}$. Recíprocamente, si $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ es un miembro de $\widetilde{M}$, entonces existirá un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \widetilde{Y} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

en el que $f \in M$. Para probarlo, sea M' la clase de funciones continuas y suprayectivas f' para las que existe un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

tal que $f \in M$; entonces basta probar dos cosas:
(i) M' es *1-clase*
(ii) Si M'' es *1-clase* y $M \subseteq M''$ entonces $M' \subseteq M''$.
Prueba de (i). Considérese un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ W' \arrow[r, "k'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

tal que $f' \in M'$. Se requiere probar que $g' \in M'$, para lo cual a su vez hay que probar que existe un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & V \arrow[d, "g"] \\ W' \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

tal que $g \in M$. Como $f' \in M'$, existe un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "k"'] & Y \end{tikzcd}$$

tal que $f \in M$. Juntando este último cuadrado con el antepenúltimo, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, hook, "h'"] \arrow[d, "g'"'] & X' \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
W' \arrow[r, "k'"] & Y' \arrow[r, hook, "k"] & Y
\end{tikzcd}$$

Se probará lo que se quiere demostrando que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, "hh'"] \arrow[d, "g'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
W' \arrow[r, "kk'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es cartesiano. Sean

$$\alpha : W \to X \quad \text{y} \quad \beta : W \to W'$$

funciones continuas tales que

$$f\alpha = k(k'\beta)$$

que equivale al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drrrr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & & & \\
& V' \arrow[r, hook, "h'"] \arrow[d, "g'"'] & X' \arrow[rr, hook, "h"] \arrow[d, "f'"'] & & X \arrow[d, "f"] \\
& W' \arrow[r, "k'"] & Y' \arrow[rr, hook, "k"] & & Y
\end{tikzcd}$$

Haciendo $\beta' = k'\beta$, podemos ver el diagrama anterior como:

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rrd, "\alpha"] \arrow[rdd, "\beta'"'] & & \\
& X' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y' \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

Puesto que el cuadrado es cartesiano, existe una única función continua $\gamma' : W \to X'$ tal que $h\gamma' = \alpha$ y $f'\gamma' = \beta'$. En particular, $f'\gamma' = k'\beta$, por lo que se tiene el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rrd, "\gamma'"] \arrow[rdd, "\beta"'] & & \\
& V' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"] & X' \arrow[d, "f'"] \\
& W' \arrow[r, "k'"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

por lo que existe una única $\gamma : W \to V'$ tal que $h'\gamma = \gamma'$ y $g'\gamma = \beta$, o lo que es lo mismo, usando diagramas

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rrd, "\gamma'"] \arrow[rdd, "\beta"'] \arrow[rd, "\gamma"] & & \\
& V' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"] & X' \arrow[d, "f'"] \\
& W' \arrow[r, "k'"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto $h(h'\gamma) = h\gamma' = \alpha$, es decir,

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[drr, "\gamma'"] \arrow[drrr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & & \\
& V \arrow[r, hook, "h'"] \arrow[d, "g'"] & X' \arrow[r, hook, "h"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
& W' \arrow[r, "k'"] & Y' \arrow[r, hook, "k"] & Y
\end{tikzcd}$$

Esto prueba que M' es *1-clase*.

Prueba de (ii). Sea M'' una *1-clase* tal que $M \subseteq M''$ y sea f' un miembro de M'; entonces existe un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

en el que $f \in M$; entonces $f \in M''$ que es *1-clase* y, por lo tanto también $f' \in M''$. Por lo tanto $M' \subseteq M''$. Esto prueba que M' es la *1-clase* generada por M.♦

3.4 Subcategoría asociada a una *0-clase*

Se dijo que por subcategoría de $\mathfrak{Top}$ se está pensando en cualquier familia de espacios topólógicos que sea cerrada bajo homeomorfismos; sin embargo, para comprender a plenitud el concepto de subcategoría de $\mathfrak{Top}$ sería necesario entender qué significa ser *subcategoría* de una categoría, para lo cual se requiere conocer obviamente, el concepto formal de una *categoría*. Sin embargo para comprender las ideas y los razonamientos que siguen puede prescindirse totalmente de esta definición; basta decir que una *categoría* es una colección de *objetos* y *morfismos* sujetos a satisfacer tres propiedades axiomáticas que son las que definen una categoría. $\mathfrak{Top}$ es una categoría porque la colección de objetos (los espacios topológicos) y de morfismos (las funciones continuas) que la forman satisfacen los tres axiomas de la definición de categoría. Una *subcategoría* $\underline{A}$ de cierta categoría $\underline{K}$ es, primero que otra cosa, una categoría; para ser *subcategoría*, esta categoría debe satisfacer dos condiciones:

(i) Todo $\underline{A}$-objeto es un $\underline{K}$-objeto; es decir, al denotar por $|\underline{A}|$ a la clase de los objetos miembros de $\underline{A}$, y por $|\underline{K}|$ a la de los de $\underline{K}$, debe tenerse

$$|\underline{A}| \subseteq |\underline{K}|$$

(*ii*) Todo $\underline{A}$-morfismo debe ser un $\underline{K}$-morfismo; es decir, al denotar mediante $\underline{A}(A_1, A_2)$ al conjunto de $\underline{A}$-morfismos de dominio $A_1 \in |\underline{A}|$ y de codominio $A_2 \in |\underline{A}|$, y por $\underline{K}(A_1, A_2)$ al correspondiente conjunto de $\underline{K}$-morfismos, debe tenerse

$$\underline{A}(A_1, A_2) \subseteq \underline{K}(A_1, A_2)$$

cualesquiera que sean los $\underline{A}$-objetos A_1 y A_2. Desde este punto de vista, una subcategoría $\underline{A}$ de $\mathfrak{Top}$ es una categoría cuyos objetos son espacios topológicos y cuyos morfismos son funciones continuas. *Como se ve, no aparece aquí la condición de que $\underline{A}$ tenga que ser cerrada bajo homeomorfismos; en realidad esta es una propiedad que al satisfacerla una subcategoría de $\mathfrak{Top}$, da a decir de ella que es una* **subcategoría repleta de $\mathfrak{Top}$**. También se ve que no hizo falta saber nada de esto para haber comprendido todo lo anterior; sin embargo; sí es importante para entender lo que sigue. También hay que saber que la condición de membresía de una función continua f para considerarla un $\underline{A}$-morfismo de cierta subcategoría $\underline{A}$ de $\mathfrak{Top}$, puede ajustarse a cierta propiedad adicional (por ejemplo, el ser una aplicación cociente); se entiende que al haber tal propiedad en la definición de los morfismos de $\underline{A}$, no toda función continua entre los espacios miembros de $\underline{A}$ es necesariamente un morfismo de $\underline{A}$, sino solamente aquellas que satisfacen tal propiedad. *Cuando tal propiedad característica se reduce a ser la simple continuidad de los morfismos, es decir cuando toda función continua entre espacios miembros de $\underline{A}$ es un morfismo de $\underline{A}$ se dice que $\underline{A}$ es una* **subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$**.

En lo que respecta a *0-clases*, se puede probar que siendo M una 0-clase arbitraria, entonces la clase $\underline{\mathbf{A}}(\mathrm{M})$ que consta de:
(*i*) todos aquellos espacios topológicos A que siempre que figuran como codominios de miembros de M, tales miembros resultan identificaciones;
(*ii*) todas las posibles funciones continuas entre tales espacios,
es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$. Como se ve, $\underline{\mathbf{A}}(\mathrm{M})$ es plena por definición; en vista de ello, para describirla en cualquier caso específico (a partir de alguna *0-clase* particular), bastará contar con una caracterización de sus espacios miembros, porque entonces los $\underline{\mathbf{A}}(\mathrm{M})$-morfismos son todas las funciones continuas entre los espacios caracterizados. Por lo tanto, en términos generales

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathrm{M}) = \{A \in \mathfrak{Top} : (f : X \to A) \in M \ \Rightarrow f \text{ es identificación}\}$$

donde X es cualquier espacio topológico. En adelante se hablará de $\underline{\mathbf{A}}(\mathrm{M})$ como de la **subcategoría asociada a la *0-clase* M**.

Observación 3.4 *Sin embargo, no siempre es posible asociar a toda 0-clase M una subcategoría repleta de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Un ejemplo para probarlo es el siguiente. Sean $c : X \to A$ una aplicación cociente y sea $B \overset{h}{\cong} A$; sea $f : Y \to B$ continua y suprayectiva pero no un cociente y defínase la *0-clase* M como $M = \{c, f\}$; entonces

$$\underline{\mathbf{A}}(M) = \{Z \in \mathfrak{Top} : (g : W \to Z) \in M \ \Rightarrow \ g \text{ es identificación}\} = \{A\}$$

Por lo tanto $\underline{\mathbf{A}}(M)$ no es repleta pues no contiene con cada espacio $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$ a todos sus homeomorfos, ya que, existe $B \in \mathfrak{Top}$ tal que $B \overset{h}{\cong} A$ y sin embargo $B \notin \underline{\mathbf{A}}(M)$. ♦

Proposición 3.3 *Si M es una 1-clase, entonces $\underline{\mathbf{A}}(M)$ es una subcategoría repleta de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Sea $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$ y sea $B \in \mathfrak{Top}$ tal que $B \overset{h}{\cong} A$; entonces, si $g : Y \to B$ es un miembro de M, tenemos que g y $h^{-1} : A \to B$ son funciones continuas de codominio común por lo que podemos considerar su producto fibrado[5], $(\overline{h^{-1}}, \overline{g})$ de la pareja (h^{-1}, g), es decir, es posible considerar que el diagrama conmutativo en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{h^{-1}}"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "h^{-1}"'] & B \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano. Como M es una *1-clase* y $g \in M$ entonces $\overline{g} \in M$, y al tener $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$, $\overline{g}$ debe ser necesariamente identificación. Por lo tanto si $f : B \to Z$ es una función tal que la composición

$$fg\overline{h^{-1}} = fh^{-1}\overline{g}$$

es continua, como $h^{-1}\overline{g}$ es identificación, (pues es composición de identificaciones), resulta que el hecho de tener $fh^{-1}\overline{g}$ continua implica que f es continua. Por lo tanto g es identificación. Por lo tanto $B \in \underline{\mathbf{A}}(M)$. Por lo tanto $\underline{\mathbf{A}}(M)$ es subcategoría repleta de $\mathfrak{Top}$.♦

Ejemplos de subcategorías asociadas a *0-clases*.

Ejemplo 3.3 *Si M es la clase de todos los homeomorfismos, entonces dado cualquier $A \in \mathfrak{Top}$ y dado cualquier homeomorfismo $f : X \to A$ se tiene que f es una identificación. Por lo tanto $\underline{\mathbf{A}}(M) = \mathfrak{Top}$.*

Ejemplo 3.4 *Si M es la clase de todas las retracciones, entonces M es una 0-clase y para cualquier $A \in \mathfrak{Top}$, cualquier retracción $r : X \to A$ es una identificación. Es decir, $\underline{\mathbf{A}}(M) = \mathfrak{Top}$.*

Ejemplo 3.5 *Sea $\underline{A}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y sea M la clase de todas las $\underline{A}$-correflexiones; entonces $\underline{\mathbf{A}}(M) = \underline{A}$.*

Demostración. En efecto, M es una *0-clase* pues según se vió en el teorema 2.1, al tener $\underline{A}$ miembros no vacíos, todas las $\underline{A}$-correflexiones son biyecciones continuas. Además $\underline{A} \subseteq \underline{\mathbf{A}}(M)$ ya que si $A \in \underline{A}$, se ha visto que hay una $\underline{A}$-correflexión del tipo 1_A y si

[5] Véase la proposición 3.1

$c : X \to A$ es otra $\underline{A}$-correflexión de A (obviamente $c \in M$ y tiene codominio A) existe un homeomorfismo $h : A \to X$ tal que $ch = 1_A$. Por consiguiente si $\alpha : A \to W$ es cualquier función tal que la composición αc es continua, también será continua la composición:

$$(\alpha c)\, h = \alpha\, (ch) = \alpha 1_A = \alpha$$

lo cual significa que c es un cociente. Por lo tanto $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$. Recíprocamente, si $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$, entonces toda $\underline{A}$-correflexión de A, $c : X \to A$, es un cociente. Como $X \in \underline{A}$ y $\underline{A}$ es cerrada bajo la formación de cocientes, se tiene que $A \in \underline{A}$. Esto aunado a lo anterior prueba que $\underline{\mathbf{A}}(M) = \underline{A}$.♦

Ejemplo 3.6 *Si $M = \emptyset$ entonces para toda $A \in \mathfrak{Top}$ es verdadera la implicación:*

$$(f : X \to A) \in M \Rightarrow f \text{ es identificación}$$

Por lo que M es una 0-clase tal que $\underline{\mathbf{A}}(M) = \mathfrak{Top}$.

Observación 3.5 *Obsérvese que si M y M' son 0-clases tales que $M \subseteq M'$ entonces $\underline{\mathbf{A}}(M') \subseteq \underline{\mathbf{A}}(M)$.*

En efecto, si $A \in \underline{\mathbf{A}}(M')$ y $f : X \to A$ es un miembro de M, entonces $f \in M'$ y por lo tanto f es una identificación. Por lo tanto $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$.♦

Nótese que $\underline{\mathbf{A}}(M)$ nunca es ni vacía ni aquella cuyo único miembro es el vacío, porque si M es cualquier *1-clase* entonces $M \subseteq M_{máx}$ y por la observación anterior $\underline{\mathbf{A}}\,(M_{máx}) \subseteq \underline{\mathbf{A}}(M)$, pero $\underline{\mathbf{A}}\,(M_{máx}) \neq \emptyset$.

La observación 3.5 permite afirmar que al ser $(M_j)_J$ una familia de *0-clases*, entonces, como

$$M_j \subseteq \bigcup_{j \in J} M_j, \forall j \in J,$$

se tiene que

$$\underline{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} M_j\right) \subseteq \underline{\mathbf{A}}\,(M_j)\,, \text{ para toda } j \in J.$$

y por consiguiente

$$\underline{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} M_j\right) \subseteq \bigcap_{j \in J} \underline{\mathbf{A}}\,(M_j)$$

Recíprocamente, si

$$A \in \bigcap_{j \in J} \underline{\mathbf{A}}\,(M_j)$$

y $f : X \to A$ es un miembro de $\bigcup_{j \in J} M_j$, entonces existe $j_0 \in J$ tal que $f \in M_{j_0}$; y como para toda $j \in J$ $A \in \underline{\mathbf{A}}\,(M_j)$, en particular se tiene que

$$A \in \underline{\mathbf{A}}\,(M_{j_0})$$

por lo que f es una identificación, que es lo que se tenía que probar. En consecuencia, $A \in \underline{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j\in J} M_j\right)$. Ha quedado probada una afirmación que sólo resta enunciar:

Lema 3.3

$$\underline{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j\in J} M_j\right) = \bigcap_{j\in J} \underline{\mathbf{A}}(M_j) \quad \blacklozenge$$

La propiedad de ser *1-clase* tiene una relación muy estrecha con la correflexividad; para ver cuál es el tipo de relación que guardan, primero se verán los dos siguientes resultados.

Lema 3.4 *Si $(B_j)_J$ es una partición de un conjunto Y y $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces siendo $A_j = f^{-1}(B_j)$, $j \in J$, se tendrá que $(A_j)_J$ es una partición de X.*

Demostración. Se tiene que

$$\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = f^{-1}(Y) = X$$

Debido a la suprayectividad de f tenemos que para cualquier $j \in J$ y cualquier $b \in B_j$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = b$. Por lo tanto, $A_j \neq \varnothing$, para toda $j \in J$. Finalmente, si para $j, k \in J$ con $j \neq k$ se tiene que $x \in A_j \cap A_k$, entonces $x \in [f^{-1}(B_j) \cap f^{-1}(B_k)] = f^{-1}(B_j \cap B_k)$. Por lo tanto $f(x) \in B_j \cap B_k$ ∇. Esto prueba que $(A_j)_J$ es una partición de X.$\blacklozenge$

Proposición 3.4 *Si $(A_j)_J$ es una familia ajena de espacios topológicos no vacíos y*

$$f : (X, \tau) \to \coprod_{j\in J} A_j$$

es una función continua y suprayectiva, entonces, siendo $X_j = f^{-1}(A_j)$ y $\tau_j = \tau|_{X_j}$, se tiene que $(X, \tau) = \coprod_{j\in J} (X_j, \tau_j)$.

Demostración. Por el lema anterior se tiene que $(X_j)_J$ es una partición de X; por lo tanto el sumidero (cartesiano) de inclusiones $(\iota_j : X_j \to X)_J$ es un coproducto cartesiano de la familia $(X_j)_J$. Por otro lado, debido a la continuidad de f y al hecho de que A_j es abierto en $\coprod_{j\in J} A_j$, para toda $j \in J$, resulta que $X_j \in \tau$, $\forall j \in J$; finalmente puesto que $\tau_j = \tau|_{X_j}$, $\forall j \in J$, están dadas las condiciones que permiten aplicar el resultado establecido en la proposición 1.2 y asegurar que: τ es la topología final para X correspondiente a $(\tau_j)_J$ y a $(\iota_j)_J$, y por lo tanto el sumidero

$$(\iota_j : (X_j, \tau_j) \to (X, \tau))_J$$

es un coproducto topológico, es decir, $(X, \tau) = \coprod_{j\in J} (X_j, \tau_j)$.$\blacklozenge$

Ahora sí, ya se puede ver qué relación guardan las *1-clases* con la subcategorías correflexivas.

3.5 *1-clases* y Correflexividad

Teorema 3.1 *Si M es una 1-clase, entonces* $\underline{\mathbf{A}}$(M) *es una subcategoría bicorreflexva de* $\mathfrak{Top}$.

Demostración. Se probarán las siguientes afirmaciones:
(i) $\underline{\mathbf{A}}(M)$ está cerrada bajo la formación de coproductos;
(ii) $\underline{\mathbf{A}}(M)$ está cerrada bajo la formación de cocientes.
(i) Sea $(A_j)_J$ una familia arbitraria de miembros no vacíos de $\underline{\mathbf{A}}(M)$ y supóngase que

$$f : X \to \coprod_{j \in J} A_j$$

es un miembro de M. Para cada $j \in J$ sea

$$X_j = f^{-1}(A_j)^6$$

Debido a la proposición anterior se tiene que

$$X = \coprod_{j \in J} X_j$$

y si para cada $j \in J$, hacemos $f_j = f|_{X_j}^{A_j}$ y además $\iota_j : X_j \hookrightarrow X$ y $\eta_j : A_j \hookrightarrow \coprod_{j \in J} A_j$ son las respectivas inclusiones entonces para toda $j \in J$ el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[d, "f_j"'] & X \arrow[d, "f"] \\
A_j \arrow[r, "\eta_j"'] & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$, ya que si $\alpha_j : W \to X$ y $\beta_j : W \to A_j$, son funciones continuas tales que

$$f\alpha_j = \eta_j \beta_j$$

[6] ***Nota de abuso de notación***: Por abuso de notación se está definiendo a X_j por $f^{-1}(A_j)$ lo cual sólo es permitido si es ajena la familia $(A_j)_J$. Sin el supuesto de ser ajena, habría que definir a X_j como $f^{-1}(\dot{A}_j)$, siendo $\dot{A}_j = A_j \times \{j\}$, $\forall j \in J$ y el coproducto en este caso es $\lfloor \cdots \rfloor$ (véase definición 1.4). Como este abuso no da lugar a equívocos pero sí facilita el desarrollo de la prueba, se ha preferido cometerlo en lugar de complicar la demostración con los añadidos que la evitarían.

o diagramáticamente

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\alpha_j"] \arrow[ddr, "\beta_j"'] & & \\
& X_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[d, "f_j"] & X \arrow[d, "f"] \\
& A_j \arrow[r, "\eta_j"'] & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

entonces se tiene que $f\alpha_j(W) \subseteq A_j$ porque $\eta_j\beta_j(W) \subseteq A_j$; en consecuencia

$$\alpha_j(W) \subseteq f^{-1}(A_j) = X_j$$

por lo que es posible considerar la restricción $\alpha_j|^{X_j}$ y hacer γ_j igual a tal restricción[7], lo cual da lugar al diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\alpha_j"] \arrow[dr, "\gamma_j"] \arrow[ddr, "\beta_j"'] & & \\
& X_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[d, "f_j"] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "f"] \\
& A_j \arrow[r, "\eta_j"'] & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

Y si $\delta_j : W \to X_j$ fuera otra función continua que también hiciera conmutar el diagrama, se tendría en particular para toda $w \in W$ que

$$\delta_j(w) = \iota_j\delta_j(w) = \alpha_j(w) ,$$

o sea que coincidiría con $\alpha_j|^{X_j}$. Por lo tanto el cuadrado es cartesiano. Como $f \in M$ y M es una *1-clase* resulta que $\{f_j : X_j \to A_j\} \in M$, para toda $j \in J$. Y como $(A_j)_J$ son miembros no vacíos de $\underline{\mathbf{A}}(M)$ y en consecuencia todas las f_j son identificaciones, esto implica que f

[7] Recuérdese que si $f : A \to B$ es cualquier función y $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ y $f(A') \subseteq B'$, entonces se puede definir la restricción $f|_{A'}^{B'}$ como $f|_{A'}^{B'}(a) = f(a)$, $\forall a \in A'$.

también es una identificación. En efecto, si se supone que $g : \coprod_{j \in J} A_j \to Z$ es una función tal que gf es continua, entonces para toda $j \in J$ se tiene la continuidad de $gf\iota_j = g\eta_j f_j$, de lo cual se sigue que también $g\eta_j$ es continua para toda $j \in J$ (pues f es identificación); y puesto que es final el sumidero $(\eta_j)_J$, resulta la continuidad de g, que es a lo que se quería llegar. Por lo tanto, $\coprod A_j \in \underline{\mathrm{A}}(M)$ y queda probado que $\underline{\mathrm{A}}(M)$ está cerrada bajo la formación de coproductos.
(*ii*) Sean $A \in \underline{\mathrm{A}}(M)$ y $p : A \to X$ un cociente arbitrario. Se quiere probar que X también está en $\underline{\mathrm{A}}(M)$. Supóngase que $f : Y \to X$ es un miembro arbitrario de M. Considérese el producto fibrado (p, f) de p y f, es decir supóngase que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{p}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano. Como M es una *1-clase* y $f \in M$, entonces también $\overline{f} \in M$ y por consiguiente es una identificación. En consecuencia, si $g : X \to Z$ es una función tal que la composición gf es continua también resulta continua la composición $gf\overline{p} = gp\overline{f}$. Pero $p\overline{f}$ es un cociente; luego, g es continua y por lo tanto, f también es un cociente. Por lo tanto, $X \in \underline{\mathrm{A}}(M)$. Esto demuestra que $\underline{\mathrm{A}}(M)$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.♦

También es válido el recíproco del teorema anterior, es decir toda subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ es de la forma $\underline{\mathrm{A}}(M)$, donde M es una *1-clase*. En el ejemplo 3.5 anterior se mostró que si $\underline{A}$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y M es la *0-clase* de las $\underline{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A} = \underline{A}(M)$. Pues bien, esto lleva a la siguiente:

Proposición 3.5 *Si $\underline{A}$ es bicorreflexiva en $\mathfrak{Top}$ y $\widetilde{M}$ es la 1-clase generada por la clase de las $\underline{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A} = \underline{A}(\widetilde{M})$.*

Demostración. Sea M la clase de las $\underline{A}$-correflexiones y sea $\widetilde{M}$ la *1-clase* generada por M. Puesto que $M \subseteq \widetilde{M}$, se tiene por la observación 3.5, que $\underline{A}(\widetilde{M}) \subseteq \underline{A}(M) = \underline{A}$. Ahora sea $A \in \underline{A}$ y sea $f : X \to A$ un elemento de $\widetilde{M}$. Más arriba, en el lema 3.2, quedaron descritos los elementos de la *1-clase* generada por una *0-clase* arbitraria; de ahí que para f exista un cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ A \arrow[r, "v"'] & A' \end{tikzcd}$$

donde f' es una $\underline{A}$-correflexión de A' es decir, $f' \in M$. Puesto que $A \in \underline{A}$, existe una única

$g : A \to X'$ continua y tal que $f'g = v$. Entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "1_A"'] & & \\
& X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[d, "f'"] \\
& A \arrow[r, "v"'] & A'
\end{tikzcd}$$

Puesto que el cuadrado es cartesiano, existe una única $h : A \to X$ continua tal que $uh = g$ y $fh = 1_A$, entonces h es sección de f y por lo tanto f es una cociente. Esto prueba que $\underline{A} \subseteq \underline{A}(M)$, con lo que la proposición queda demostrada.♦

Como corolario del teorema anterior se tiene que el siguiente resultado.

Corolario 3.1 *Para una 1-clase M arbitraria, si $\underline{A} = \underline{A}(M)$ y si M' es la clase de las $\underline{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A} = \underline{A}(M' \cup M)$.*

Demostración. En efecto por el lema 3.3

$$\underline{A}(M' \cup M) = \underline{A}(M') \cap \underline{A}(M) = \underline{A} \cap \underline{A} = \underline{A}\ .♦$$

En la sección que sigue, se verá que hay un tipo muy especial de *1-clases* que surge a raíz de los siguientes conceptos.

3.6 *1-clases* de E-fibraciones suprayectivas

Definición de E-fibración.

Definición 3.6 *Se dice que una función continua*

$$f : X \to Y$$

tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a un espacio topológico Z *si dado un diagrama conmutativo de funciones continuas:*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \times I \arrow[r, "H"'] & Y
\end{tikzcd}$$

en el que para toda $z \in Z$ $h_0(z) = (z,0)$, existe una función continua

$$\widetilde{H} : Z \times I \to X$$

que hace conmutar los triángulos que determina en el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft" near start] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft" near end] & Y \end{tikzcd}$$

En este caso se dice que $\widetilde{H}$ es un levantamiento de H que empieza con g. Además, si E es una clase no vacía de espacios topológicos, f se ***llama una E-fibración*** *si f tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a todo espacio miembro de la clase E, es decir, si dados cualesquiera $Z \in E$, una función continua $g : Z \to X$ y una homotopía*

$$H : Z \times I \to Y$$

que empieza con fg, existe una elevación $\widetilde{H} : Z \times I \to X$ que empieza en g, es decir tal que $f\widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(z,0) = g(z), \forall z \in Z$.

La clase de las E-fibraciones suprayectivas es *1-clase*.

Proposición 3.6 *Sea E cualquier clase no vacía de espacios topológicos y sea M_E la clase de las E-fibraciones suprayectivas. Entonces M_E es una 1-clase.*

Demostración. La prueba de que M_E es *0-clase* resulta obvia, pues sus miembros son funciones continuas y suprayectivas. Se quiere probar que M_E es *1-clase*, es decir, hay que ver que si el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

es cartesiano, entonces $f \in M_E$ implica que $f' \in M_E$ (esto es, que f' es una E-fibración suprayectiva). Primero se verá que f' es E-fibración; para ello tómese un $X \in E$ arbitrario, y supóngase que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & Z \arrow[d, "f'"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Al suponer que estos dos cuadrados son conmutativos, también conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & Z \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
X \times I \arrow[r, "H"] & Y' \arrow[r, "h"] & B
\end{tikzcd}$$

Como por hipótesis f es E-fibración, existe $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ continua tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h'g"] \arrow[d, "h_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start] & Y \arrow[d, "f"] \\
X \times I \arrow[r, "hH"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", near end, shift right=3ex] & B
\end{tikzcd}$$

En particular se tiene del triángulo inferior que

$$f\widetilde{H} = hH$$

ó equivalentemente, es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[drr, "\widetilde{H}"] \arrow[ddr, "H"'] & & \\
& Z \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
& Y' \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

y como el cuadrado es cartesiano, existe una única función continua

$$\widetilde{\widetilde{H}} : X \times I \to Z$$

que hace conmutar los triángulos que determina en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[dr, "\tilde{\tilde{H}}"] \arrow[drr, "\tilde{H}"] \arrow[ddr, "H"'] & & \\
& Z \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& Y' \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ahora obsérvese que las funciones continuas

$$\tilde{\tilde{H}} h_0 : X \to Z \quad \text{y} \quad g : X \to Z$$

son tales que

$$f'\tilde{\tilde{H}} h_0 = H h_0 = f'g \quad \text{y} \quad h'\tilde{\tilde{H}} h_0 = \tilde{H} h_0 = h'g$$

Esto implica que

$$\tilde{\tilde{H}} h_0 = g$$

ya que, de acuerdo con la observación 3.1, la pareja (f', h') es una monofuente. Por lo tanto H puede levantarse a una homotopía $\tilde{\tilde{H}}$ que empieza en g, es decir, tal que

$$f'\tilde{\tilde{H}} = H \quad \text{y} \quad \tilde{\tilde{H}} h_0 = g$$

o sea que se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & Z \arrow[d, "f'"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{\tilde{H}}"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto f' tiene la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto a todo espacio topológico $X \in E$. Por lo tanto f' es una E-fibración. Sólo falta ver que f' es suprayectiva, pero la demostración es completamente análoga a la prueba del ejemplo 3.1. ♦

Definición 3.7 La función f' anterior se llama *E-fibración inducida por f a través de h.*

Como consecuencia de la proposición anterior y del teorema 3.1 se tiene que la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ asociada a cualquier clase M_E de E-fibraciones suprayectivas es correflexiva; para no cargar la notación se escribirá $\underline{A}_E$ en lugar de $\underline{A}(M_E)$ al denotarla.

Se ha cumplido pues con el propósito de este capítulo. Como casos particulares de $\underline{A}_E$ están los siguientes:

Subcategorías correflexivas que resultan de subcategorías asociadas a clases de E-fibraciones suprayectivas.

(1) Cuando E es la clase de todos los espacios topológicos, las E-fibraciones reciben el nombre de **fibraciones de Hurewicz**; debido a esto, la **subcategoría asociada a la clase de las fibraciones suprayectivas de Hurewicz** se denotará como $\underline{A}_{\mathcal{H}}$; sus miembros son aquellos espacios B que siempre que figuran como codominios de fibraciones suprayectivas de Hurewicz es que tales fibraciones son identificaciones.
(2) $\underline{A}_{\mathcal{S}}$, donde $\mathcal{S}$ es la clase de los espacios homeomorfos a los cubos $I^n, n \in \mathbb{N}$. En este caso las $\mathcal{S}$-fibraciones se llaman **fibraciones de Serre**, por lo que $\underline{A}_{\mathcal{S}}$ (**la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ asociada a las $\mathcal{S}$-fibraciones suprayectivas**) es la categoría de los espacios B que siempre que figuran como codominios de fibraciones suprayectivas de Serre es que tales fibraciones resultan identificaciones.
(3) Recuérdese que un espacio X es contraíble si la función 1_X es homotópica a una constante. Se denotará por C' a la clase de los espacios contraíbles; las *C'-fibraciones* no reciben ningún nombre específico. También será objeto de este estudio **la subcategoría correflexiva $\underline{A}_{C'}$ asociada a la clase de las C'-fibraciones suprayectivas.**

Lo que sigue en los capítulos siguientes consistirá de un analísis de estas categorías y de las relaciones entre ellas.

Capítulo 4

Descripción de la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$

La finalidad fundamental de este capítulo es *dar una caracterización de la subcategoría correflexiva, $\underline{A}_{\mathcal{H}}$*: la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ asociada a las fibraciones suprayectivas de Hurewicz, especificando cuáles son sus miembros y cuáles sus correflexiones. Como un primer objetivo, se intentará dar una descripción de los objetos de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$. La herramienta necesaria para alcanzar este objetivo consta de diversos conceptos y resultados; se empezará por recordar los siguientes conceptos.

4.1 Ley exponencial y espacios de funciones continuas

Ley exponencial de los conjuntos

La conocida ley de los exponentes que se ve en los cursos elementales de álgebra y establece que, cualesquiera que sean $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$a^{m \times n} = (a^m)^n$$

es tan sólo un caso particular de un resultado más general llamado ***"Ley exponencial de los conjuntos"***, que establece que si X, Y, Z son conjuntos cualesquiera y si se denota por $Set(A, B)$ ó equivalentemente B^A al conjunto de todas las funciones de dominio el conjunto A y codominio el conjunto B, entonces los conjuntos

$$Set(X \times Y, Z) \quad \text{y} \quad Set(X, Set(Y, Z))$$

son esencialmente el mismo conjunto, es decir, son biyectables, o como suele decirse, son *conjuntos equivalentes.* En símbolos más familiares:

$$Z^{X \times Y} \approx \left(Z^X\right)^Y$$

Demostración. Para probar esta equivalencia hay que definir funciones de un conjunto en otro de manera que cada una de ellas sea la inversa de la otra.
Se tratará de definir en principio una función

$$\varphi : Set(X \times Y, Z) \to Set(X, Set(Y, Z))$$

Obsérvese que siendo $f : X \times Y \to Z$ la función que asocia a cada pareja $(x, y) \in X \times Y$ uno y sólo un elemento $f(x, y)$ en Z, su imagen bajo φ, $\varphi(f)$, deberá ser una función de X en $Set(Y, Z)$, esto es $\varphi(f)$ será la regla que asocia a cada $x \in X$ una y sólo una función de Y en Z que se denotará f_x, así que sólo hay que decir que función $f_x : Y \to Z$ le corresponde a cada $x \in X$ bajo $\varphi(f)$. Resulta entonces natural definirla como

$$f_x(y) = f(x, y)$$

que claramente está bien definida. En resumen

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Set(X \times Y, Z) & \to & Set(X, Set(Y, Z)) \\ & f & \mapsto & [(\varphi(f))(x)](y) = f(x, y) \end{array}$$

Inversamente, se quiere definir una función

$$\psi : Set(X, Set(Y, Z)) \to Set(X \times Y, Z)$$

Para ello, escogiendo $g \in Set(X, Set(Y, Z))$, se tiene que g es la regla que asocia a cada $x \in X$ *una y sólo una función que se denotará* $g_x : Y \to Z$. *En consecuencia siempre que se* tienen cualesquiera elementos $x \in X$ e $y \in Y$ es posible determinar uno y sólo un elemento en Z como $g_x(y)$; y ya que $\psi(g)$ debe ser una función de dominio $X \times Y$ y codominio en Z resulta "natural" definirla como:

$$(\psi(g))(x, y) = g_x(y)$$

Ahora se verá que φ y ψ son funciones inversas. Como $\psi(g)$ es una función de $X \times Y$ en Z, su imagen bajo φ, $\varphi(\psi(g))$, debe ser una función de X en $Set(Y, Z)$ y debe asociar cada $x \in X$ una y sólo una función $(\psi g)_x : Y \to Z$ cuya regla, de acuerdo con la definición de φ, asocia a cada $y \in Y$ precisamente el elemento $\psi(g)(x, y)$. En consecuencia,

$$\varphi(\psi(g))(x) = (\psi g)_x \quad , \text{y} \quad (\psi g)_x(y) = \psi(g)(x, y) = g_x(y), \forall y \in Y.$$

Por lo tanto $(\psi g)_x = g_x$; y se tiene que

$$\varphi(\psi(g))(x) = g_x = g(x), \quad \forall x \in X.$$

Es decir, $\varphi(\psi(g)) = g$.
Recíprocamente, como

$$\varphi(f) : X \to Set(Y, Z)$$

es la función que asocia a cada $x \in X$ la función f_x, su imagen bajo ψ, $\psi(\varphi(f))$, es una función de $X \times Y \to Z$ que asocia a cada pareja $(x, y) \in X \times Y$ un elemento $f_x(y)$ dado anteriormente por $f(x, y)$ y se tiene que

$$\psi(\varphi(f))(x, y) = f(x, y), \forall (x, y) \in X \times Y$$

Por lo tanto $\psi(\varphi(f)) = f$. Esto prueba que φ y ψ son inversas una de la otra, como se quería demostrar.♦

La importancia que estas funciones φ y ψ tienen en Topología se deja ver a lo largo del estudio de los espacios de funciones continuas. Como su nombre lo indica, en ese estudio los dominios y codominios de estas funciones son conjuntos de funciones *continuas* que, al topologizarse, dan lugar a espacios de funciones entre los cuales operan φ y ψ. Entonces caben preguntas acerca de la continuidad, por ejemplo, de φ y de ψ, de lo afectada que puede quedar la biyectabilidad de ambas y de las condiciones que deben satisfacerse para que su biyectabilidad se mantenga. Los resultados que con relación a esto van a emplearse aquí, serán enunciados sin dar de ellos ninguna demostración; todas sus demostraciones se encuentran en el capítulo dedicado al estudio de los espacios de funciones de [7].

Sean $X \in \mathfrak{Top}$ e $I = [0,1]$ con la topología usual; sea $Top(I, X)$ el conjunto de funciones continuas de I en X. Recuérdese que a $Top(I, X)$ se le puede dotar de una topología $\varkappa$ llamada **compacto abierta** que está generada por la familia de conjuntos de la forma

$$(K, U) = \{f \in Top(I, X) : f(K) \subseteq U\}$$

siendo $K \subseteq I$ compacto y U subconjunto abierto de X. El nuevo espacio topológico formado se denotará por X^I; es decir, por definición,

$$X^I = (Top(I, X), \varkappa)$$

Como quedó dicho arriba, las mismas reglas de correspondencias de φ y de ψ van a ser consideradas entre dominios y codominios diferentes; así:

$$\varphi : Top(X \times I, Y) \to Top(X, Y^I)$$

$$\psi : Top(X, Y^I) \to Top(X \times I, Y)$$

También van a emplearse las notaciones:

$$\varphi(f)(x)(t) = f(x,t) \quad \text{y} \quad \psi(g)(x,t) = g(x)(t)^1$$

Siendo A, B y C espacios topológicos arbitrarios, una condición que garantiza la biyectabilidad de la función

$$\varphi : Top(A \times B, C) \to Top(A, Top(B, C))$$

es el que B sea un espacio regular y localmente compacto. Obsérvese que estas condiciones las satisface I; por lo tanto

$$\varphi : Top(X \times I, Y) \to Top(X, Y^I)$$

y, consecuentemente

$$\psi : Top(X, Y^I) \to Top(X \times I, Y)$$

son funciones biyectivas (mutuamente inversas).

Establecido lo anterior se tienen los siguientes resultados:

[1] En adelante se escribirá $g(x)(t)$ en lugar de $g_x(t)$ para evitar los subíndices.

Observación 4.1 *Si $p : E \to B$ es continua, entonces*

$$\begin{array}{rccc} p_\sharp : & E^I & \to & B^I \\ & \omega & \mapsto & p\omega \end{array}$$

es continua.

Demostración. $p_\sharp$ es continua pues $p_\sharp^{-1}(K,U) = (K, p^{-1}(U))$ es abierto en $\varkappa$ para cualquier abierto subbásico (K,U) de B^I. Efectivamente

$$\omega \in p_\sharp^{-1}(K,U) \Leftrightarrow p_\sharp(\omega) \in (K,U) \Leftrightarrow p\omega \in (K,U)$$

$$\Leftrightarrow p\omega(K) \subseteq U \Leftrightarrow \omega(K) \subseteq p^{-1}(U) \Leftrightarrow \omega \in \left(K, p^{-1}(U)\right). \blacklozenge$$

Observación 4.2 *Para todo $X \in \mathfrak{Top}$,*

$$\begin{array}{rccc} p_0 : & X^I & \to & X \\ & \omega & \mapsto & \omega(0) \end{array}$$

es continua.

Demostración. p_0 es continua porque $p_0^{-1}(U) = (\{0\}, U)$, para todo $U \subseteq X$ abierto; pues en efecto

$$\omega \in p_0^{-1}(U) \Leftrightarrow p_0(\omega) \in U \Leftrightarrow \omega(0) \in U \Leftrightarrow \omega \in (\{0\}, U). \blacklozenge$$

En tanto no se preste a confusiones, se abusará de la notación designada con el mismo símbolo p_0 a la función definida en esta observación aunque tenga distintos codominios (y, consecuentemente, distintos dominios) en el mismo contexto.

4.2 Dos caracterizaciones de las fibraciones de Hurewicz

Un resultado fundamental que caracteriza a las fibraciones de Hurewicz es el que sigue.

Proposición 4.1 *Si $p : E \to B$ es continua, son equivalentes:*
(a) p es fibración de Hurewicz.

(b) Si el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "G"'] & & \\
& E^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_I"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "p_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

entonces existe $F : Y \to E^I$ continua, tal que conmuta el nuevo diagrama (con F):

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "G"'] \arrow[dr, "F"] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"'] & & \\
& E^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_I"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "p_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Supóngase que p es fibración de Hurewicz y que conmuta en $\mathfrak{Top}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "G"'] & & \\
& E^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_I"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "p_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

Considerando la biyección

$$\psi : Top(Y, B^I) \to Top(Y \times I, B)$$

sea $H = \psi(G)$; entonces

$$H : Y \times I \to B$$

es una función continua (pues $\psi(G) \in Top(Y \times I, B)$) tal que, al considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & B
\end{tikzcd}$$

resulta que

$$Hh_0(y) = \psi(G)h_0(y) = \psi(G)(y, 0) = G(y)(0) = p_0G(y) = pg(y)$$

Es decir, el diagrama anterior es conmutativo, y como p es fibración de Hurewicz existe $\overline{G} : Y \times I \to E$ continua que hace conmutar los triángulos que determina en el nuevo diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\overline{G}"] & B
\end{tikzcd}$$

Ahora considérese la biyección

$$\varphi : Top(Y \times I, E) \to Top(Y, E^I)$$

y defínase $F = \varphi(\overline{G})$. Entonces, para toda $t \in I$ y para toda $y \in Y$, se tiene que

$$p_\sharp F(y)(t) = p_\sharp\varphi(\overline{G})(y)(t) = p\overline{G}(y, t) = \psi\,(G)\,(y, t) = G(y)(t)$$

Por lo tanto $p_\sharp F = G$. Por otro lado,

$$p_0F(y) = p_0\varphi(\overline{G})(y) = \varphi(\overline{G})(y)(0) = \overline{G}(y, 0) = \overline{G}h_0(y) = g(y),$$

para toda $y \in Y$. Por lo tanto $p_0 F = g$. Esto prueba que

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "F"] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, swap, "G"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowleft"] \arrow[ddr, phantom, shift left=2ex, "\circlearrowleft"] & & \\
& E^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_\sharp"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "p_0"'] & B
\end{tikzcd}
$$

y es lo que había que demostrar.
$(b) \Rightarrow (a)$: Hay que probar que p es fibración de Hurewicz. Sea $Y \in \mathfrak{Top}$ arbitrario y supóngase que

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & B
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo en $\mathfrak{Top}$. Considerando ahora la biyección

$$\varphi : Top(Y \times I, B) \to Top(Y, B^I)$$

sea $G = \varphi(H)$; entonces

$$p_0 G(y) = G(y)(0) = \varphi(H)(y)(0) = H(y, 0) = H h_0(y) = pg(y)$$

Por lo tanto conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, swap, "G"] & & \\
& E^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_\sharp"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "p_0"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Por (*b*) existe $F : Y \to E^I$ continua que hace conmutativo el nuevo diagrama. Considerando la biyección

$$\psi : Top(Y, E^I) \to Top(Y \times I, E)$$

sea $\overline{G} = \psi(F)$; entonces

$$\overline{G}h_0(y) = \overline{G}(y,0) = \psi(F)(y,0) = F(y)(0) = p_0F(y) = g(y)$$

para toda $y \in Y$. Por lo tanto $\overline{G}h_0 = g$. Además

$$p\overline{G}(y,t) = p\psi(F)(y,t) = pF(y)(t) = p_{\sharp}F(y)(t) = G(y)(t) = \varphi(H)(y)(t) = H(y,t)$$

para toda $(y,t) \in Y \times I$. Por lo tanto $p\overline{G} = H$. Diagramáticamente, esto significa que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft" near start] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[ur, "\overline{G}"] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft" near end] & B
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto p es fibración de Hurewicz.♦

A continuación se dará otra caracterización de las fibraciones de Hurewicz, esta vez por medio de cierta aplicación continua conocida como *aplicación de levantamiento de trayectorias.*

Si $p : Y \to B$ es una fibración de Hurewicz, sea

$$W = \{(y,\alpha) \in Y \times B^I : p(y) = \alpha(0)\}$$

Obsérvese que entonces es posible definir una función continua

$$\Gamma : W \to Y^I$$

tal que para cualquier $(y,\alpha) \in W$ y $t \in I$,

$$\Gamma(y,\alpha)(0) = y \quad \text{y} \quad p\Gamma(y,\alpha)(t) = \alpha(t)$$

Demostración. En efecto, como p es fibración de Hurewicz, y conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\pi_1"] \arrow[ddr, "\pi_2"'] & & \\
& Y^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_I"'] & Y \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "p_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

existe, de acuerdo con la proposición anterior, una función continua $\Gamma : W \to Y^I$ tal que

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\pi_1"] \arrow[ddr, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & & \\
& Y^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_I"'] & Y \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "p_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente, dada cualquier función continua $p : Y \to B$, si que existe la aplicación $\Gamma : W \to Y^I$ con la propiedad mencionada entonces p es una fibración de Hurewicz.

Demostración. En efecto, si conmuta en $\mathfrak{Top}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "f"'] & & \\
& Y^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_I"'] & Y \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "p_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

entonces, para toda $z \in Z$ se tiene que

$$(g(z), f(z)) \in W$$

Por lo tanto, puede definirse

$$\begin{array}{rccc} h: & Z & \rightarrow & W \\ & z & \mapsto & (g(z), f(z)) \end{array}$$

que compuesta con Γ da lugar a una función continua

$$\Gamma h : Z \to Y^I$$

tal que, para toda $z \in Z$

$$p_0 \Gamma h(z) = p_0 \Gamma (g(z), f(z)) = \Gamma (g(z), f(z))(0) = g(z)$$

$$\therefore\ p_0 \Gamma h = g$$

y para cualesquiera $z \in Z$ y $t \in I$

$$p_\sharp \Gamma h(z)(t) = p_\sharp \Gamma (g(z), f(z))(t) = p\Gamma (g(z), f(z))(t) = f(z)(t)$$

$$\therefore\ p_\sharp \Gamma h = f$$

Por lo tanto, Γh hace conmutar los triángulos que determina en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "\Gamma h"] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "f"'] & & \\
& Y^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_\sharp"'] & Y \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "p_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

Debido a la proposición anterior, p es una fibración de Hurewicz.♦

A esta aplicación $\Gamma : W \to Y^I$ cuya existencia caracteriza a las fibraciones de Hurewicz, se le llama ***aplicación de levantamiento de trayectorias (ALT).***

4.3 Aproximación a la descripción de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$

No hay que olvidar que el objetivo fundamental de este capítulo es caracterizar a la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$, describiendo, en primer término, a sus miembros; como primer paso para hacerlo obsérvese que:

Observación 4.3 *Toda fibración suprayectiva de Hurewicz $p : E \to B$ que tiene por codominio a un espacio B que es contraíble es una retracción y, consecuentemente, un cociente.*

Demostración. En efecto, si B se contrae a un punto $b_0 \in B$, se tiene una homotopía

$$H : B \times I \to B$$

tal que para toda $b \in B$,

$$H(b,0) = b_0 \quad \text{y} \quad H(b,1) = b$$

Sea $e_0 \in p^{-1}\{b_0\}$ y sea $c : B \to E$ la función constante de valor e_0. Entonces conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Como p es fibración de Hurewicz, existe $\widetilde{H} : B \times I \to E$ continua tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Ahora puede definirse una función $q : B \to E$ haciendo $q(b) = \widetilde{H}(b,1)$, para todo $b \in B$. Entonces

$$pq(b) = p\widetilde{H}(b,1) = H(b,1) = b$$

para todo $b \in B$, lo cual prueba que p es retracción.♦

Como una importante consecuencia de esta observación se tiene que *a la subcategoría bicorreflexiva $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ pertenecen todos los espacios contraíbles.* Además de los espacios contraíbles, resulta que también *son miembros de la subcategoría bicorreflexiva $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ los espacios localmente conectables por trayectorias*, como lo establece el siguiente:

Lema 4.1 *Si $p : E \to B$ es una fibración suprayectiva de Hurewicz y B es un espacio localmente conectable por trayectorias, entonces p es un cociente.*

Demostración. Considérese el subespacio

$$W = \{(e,\omega) \in E \times B^I : \omega(0) = p(e)\}$$

de $E \times B^I$, y defínase, para toda $\sigma \in E^I$,

$$\begin{array}{rccc} r: & E^I & \to & W \\ & \sigma & \mapsto & (\sigma(0), p\sigma) \end{array}$$

Puesto que p es fibración de Hurewicz, existe una aplicación de levantamiento por trayectorias *(ALT)*, es decir, una función

$$\Gamma : W \to Top(I,E)$$

tal que

$$\Gamma(e,\omega)(0) = e \quad \text{y} \quad p\Gamma(e,\omega) = \omega$$

Entonces

$$r\Gamma(e,\omega) = (\Gamma(e,\omega)(0), p\Gamma(e,\omega)) = (e,\omega), \ \forall (e,\omega) \in W$$

lo cual significa que Γ es sección de r y por consiguiente, r es un cociente. Otra función que también es un cociente es

$$\begin{array}{rccc} p_1: & E^I & \to & E \\ & \omega & \mapsto & \omega(1) \end{array}$$

pues tiene por sección a la función

$$\begin{array}{rccc} q_1: & E & \to & E^I \\ & e & \mapsto & \sigma_e \end{array}$$

donde σ_e es el camino constante en e. Si ahora se define

$$\begin{array}{rccc} \pi: & W & \to & B \\ & (e,\omega) & \mapsto & \omega(1) \end{array}$$

resulta el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E^I \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "r"'] & E \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[r, "\pi"'] & B \end{tikzcd}$$

Y puesto que pp_1 es una función continua, resulta que π es una función cuya composición con r es continua; como r es un cociente, π es una función continua. También es suprayectiva porque, debido a la suprayectividad de p, para todo $b \in B$ existe $e \in p^{-1}\{b\}$ y, siendo ω_b la trayectoria constante de valor b, se tiene

$$p(e) = b = \omega_b(0) \quad \text{y} \quad \pi(e,\omega_b) = \omega_b(1) = b$$

por lo tanto

$$(e,\omega_b) \in W \quad \text{y} \quad \pi(e,\omega_b) = b$$

A continuación se probará que π es un cociente. Basta demostrar que la topología de B es final respecto a π y a la topología de W; es decir, hay que probar que es abierto en B todo subconjunto suyo cuya imagen inversa bajo π sea abierta en W.
Sea $A \subseteq B$ tal que $\pi^{-1}(A)$ es abierto en W y sea $b \in A$; según se ha visto, si $e \in p^{-1}\{b\}$ y ω_b es la trayectoria constante de valor b, entonces $(e,\omega_b) \in W$ y $\pi(e,\omega_b) = b \in A$. En consecuencia, (e,ω_b) es punto interior de $\pi^{-1}(A)$ y, por consiguiente, existe un abierto absoluto subbásico $E \times (K,U)$ de $E \times B^I$ tal que

$$(e,\omega_b) \in [E \times (K,U)] \cap W \subseteq \pi^{-1}(A)$$

Por lo tanto $(e,\omega_b) \in E \times (K,U)$. Por lo tanto $\omega_b \in (K,U)$ y puesto que ω_b es constante se tiene que

$$\omega_b \in (I,U) \subseteq (K,U)$$

Por lo tanto, $b \in U$. Por resultados de Topología General se sabe que al ser B localmente conectable por trayectorias, la componente por trayectorias V de U que contiene a b es abierta. Si b' es un punto arbitrario de V, existe una trayectoria ω en U tal que $\omega(0) = b$ y $\omega(1) = b'$, entonces $(e,\omega) \in W$ y todavía más,

$$(e,\omega) \in [E \times (K,U)] \cap W \subseteq \pi^{-1}(A)$$

por lo que

$$b' = \omega(1) = \pi(e,\omega) \in A$$

Por consiguiente $V \subseteq A$, lo cual demuestra que b es punto interior de A. Pero b se escogió arbitrariamente en A; en consecuencia, A es abierto y queda probado que π es un cociente.
Finalmente, si $f : B \to X$ es una función tal que la composición fp es continua, entonces también es continua la composición fpp_1, lo cual implica, debido a la conmutatividad del diagrama anterior $f\pi r$. Pero al haber probado que π es un cociente, resulta que πr también es un cociente y, por lo tanto, f es continua. Esto demuestra que también p es un cociente, que es a lo que se quería llegar.♦

Como penúltimo paso para alcanzar el objetivo de caracterizar la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ se probará lo siguiente.

Lema 4.2 *Si $X \in \mathfrak{Top}$ y $x_0 \in X$, mediante $P(X,x_0)$ se denotará al espacio de trayectorias en X de origen x_0 dotado de la topología compacto abierta. Sea*

$$\varphi : P(X,x_0) \to X$$

la función definida para toda $\omega \in P(X,x_0)$ por

$$\varphi(\omega) = \omega(1)$$

entonces el espacio $P(X,x_0)$ es contraíble y φ es fibración de Hurewicz.

Demostración. Se probará primero que $P(X, x_0)$ es contraíble, para lo cual hay que probar que existe una homotopía $F : P(X, x_0) \times I \rightarrow P(X, x_0)$ que empieza en la identidad $1_{P(X,x_0)}$ y termina con la trayectoria constante de valor x_0, $\omega(t) = \omega_{x_0}$, $\forall t \in I$. Sea

$$F : P(X, x_0) \times I \rightarrow P(X, x_0)$$

definida, para toda $\omega \in P(X, x_0)$ y para toda $t \in I$, como

$$F(\omega, s) = \omega_s$$

donde, para toda $t \in I$,

$$\omega_s(t) = \omega((1-s)t)$$

Es fácil ver que F es una función bien definida. Para verificar que es continua, considérense las funciones

$$\begin{array}{rccc} g_t : & I & \rightarrow & I \\ & s & \mapsto & (1-s)t \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} f_s & I & \rightarrow & I \\ & t & \mapsto & (1-s)t \end{array}$$

Es claro que se trata de funciones continuas bien definidas; a través de ellas se verá que F es una función continua en cada punto de su dominio. Sea

$$(\omega, s) \in P(X, x_0) \times I$$

un punto arbitrario y sea (K, V) un abierto subbásico de $P(X, x_0)$ tal que

$$F(\omega, s) = \omega_s \in (K, V)$$

Entonces, para cualquier $t_0 \in K$ fija

$$(f_s(K), V) \times g_{t_0}^{-1}(\omega^{-1}(V))$$

es abierto en $P(X, x_0) \times I$ y se tiene que

$$(\omega, s) \in (f_s(K), V) \times g_{t_0}^{-1}(\omega^{-1}(V))$$

En efecto, puesto que para cualquier $u \in f_s(K)$ debe haber un $t \in K$ tal que $f_s(t) = u$, se tiene que

$$\omega(u) = \omega(f_s(t)) = \omega((1-s)t) = \omega_s(t) \in V$$

Por lo tanto, $\omega \in (f_s(K), V)$. Por otro lado, puesto que $t_0 \in K$, se tiene que

$$\omega g_{t_0}(s) = \omega((1-s)t_0) = \omega_s(t_0) \in V$$

de manera que $s \in g_{t_0}^{-1}(\omega^{-1}(V))$. Finalmente, dado cualquier

$$(\sigma, u) \in (f_s(K), V) \times g_{t_0}^{-1}(\omega^{-1}(V))$$

se tiene que para cualquier $t \in K$,

$$F(\sigma, u)(t) = \sigma_u(t) = \sigma((1-u)t)$$

Pero $\sigma \in (f_u(K), V)$[2], luego

$$\sigma((1-u)t) = \sigma f_u(t) \in V$$

Por lo tanto $F(\sigma, u) \in (K, V)$ con lo que la continuidad de F queda probada. F es pues una homotopía. Sólo resta verificar que empieza en $1_{P(X,x_0)}$ y termina en ω_{x_0}. Se tiene que

$$F(\omega, 0) = \omega_0$$

pero de acuerdo con la definición

$$\omega_0(t) = (\omega(1-0)t) = \omega(t)$$

por lo tanto

$$F(\omega, 0) = 1_{P(X,x_0)}(\omega)$$

Por otro lado

$$F(\omega, 1) = \omega_1$$

pero

$$\omega_1(t) = (\omega(1-1)t) = \omega(0) = x_0 = \omega_{x_0}(t)$$

Por lo tanto

$$F(\omega, 1) = \omega_{x_0}$$

que es lo que se quería probar. Por lo tanto, $P(X, x_0)$ es un espacio contraíble.
Ahora se verá que

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & P(X, x_0) & \to & X \\ & \omega & \mapsto & \omega(1) \end{array}$$

es fibración de Hurewicz: para ello se empleará la caracterización de las fibraciones de Hurewicz a través de la existencia de una ALT. (La continuidad de φ es clara pues para todo abierto U de X, $\varphi^{-1}(U) = (\{1\}, U)$). Sea

$$W = \left\{(\omega, \alpha) \in P(X, x_0) \times X^I : \varphi(\omega) = \alpha(0)\right\}$$

[2]En efecto, se ha mostrado que para todo punto $(\omega, s) \in P(X, x_0) \times I$ hay un abierto de $P(X, x_0) \times I$

$$(f_s(K), V) \times g_{t_0}^{-1}(\omega^{-1}(V))$$

que lo contiene. Puesto que en particular

$$(\sigma, u) \in P(X, x_0) \times I$$

es perfectamente válido pensar en el abierto de $P(X, x_0) \times I$

$$(f_u(K), V) \times g_{t_0}^{-1}(\sigma^{-1}(V))$$

que contiene a (σ, u).

y sea

$$\Gamma : W \to Top\,(I, P\,(X, x_0))$$

definida por

$$\Gamma\,(\omega,\alpha)\,(t)\,(s) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 4s \leq t \\ \omega\left(\frac{4s-t}{4-2t}\right) & \text{si } t \leq 4s \leq 4-t \\ \alpha\left(\frac{4s+t-4}{2s-1}\right) & \text{si } 4-t \leq 4s \end{cases}$$

Es claro que está bien definida y es continua. Para ver que Γ es una ALT hay que probar que para cualquier $(\omega,\alpha) \in W$, y $\forall t \in I$

$$\Gamma\,(\omega,\alpha)\,(0) = \omega \quad \text{y} \quad \varphi\Gamma\,(\omega,\alpha)\,(t) = \alpha\,(t)$$

Puesto que para $t = 0$ se tiene que $t \leq 4s \leq 4 - t$ entonces de acuerdo con la definición de Γ se tiene que:

$$\Gamma\,(\omega,\alpha)\,(0)\,(s) = \omega\left(\frac{4s-0}{4-2\,(0)}\right) = \omega\left(\frac{4s}{4}\right) = \omega\,(s)$$
$$\therefore\ \Gamma\,(\omega,\alpha)\,(0) = \omega$$

Por otro lado, puesto que para toda $(\omega,\alpha) \in W$ y toda $t \in I$, $\Gamma\,(\omega,\alpha)\,(t)$ es una trayectoria en X de origen x_0[3], entonces, de acuerdo con la definición de φ se tiene que

$$\varphi\Gamma\,(\omega,\alpha)\,(t) = \Gamma\,(\omega,\alpha)\,(t)\,(1)$$

para lo cual hay que evaluar según la tercera parte de la definición de Γ, de modo que se tiene

$$\Gamma\,(\omega,\alpha)\,(t)\,(1) = \alpha\left(\frac{4\,(1)+t-4}{2\,(1)-1}\right) = \alpha\,(t)$$

que es a lo que se quería llegar. Por lo tanto φ es fibración de Hurewicz.♦

Se abre aquí un paréntesis para probar, aunque no sea útil para el objetivo que se persigue ahora, una interesante propiedad de φ, la cual será generalizada en el último capítulo.

Observación 4.4 *Sea $X \in \mathfrak{Top}$ arbitrario; si para todo $x_0 \in X$, $\varphi : P\,(X, x_0) \to X$ es abierta entonces X es localmente conectable por trayectorias.*[4]

Demostración. Se sabe que X es localmente conectable por trayectorias si y sólo si toda componente por trayectorias de todo abierto en X es abierta. Sean U un subconjunto abierto de X, C componente por trayectorias de U y $x_0 \in C$; por hipótesis $\varphi : P\,(X, x_0) \to X$ es una función abierta y en consecuencia $\varphi\,(I, U)$ es abierto en X, siendo (I, U)[5] un subconjunto abierto subbásico de $P\,(X, x_0)$ con la topología $\varkappa$. Si $\omega \in (I, U)$ entonces $\varphi\omega = \omega\,(1) \in U$

[3] $\Gamma\,(\omega,\alpha)$ es una trayectoria en $P\,(X, x_0)$ pero no un miembro del mismo; en cambio $\Gamma\,(\omega,\alpha)\,(t)$ es una trayectoria en X con origen x_0,es decir, $\Gamma\,(\omega,\alpha)\,(t) \in P\,(X, x_0)$.

[4] De hecho el recíproco también es cierto, será un caso particular del corolario 5.1, resultado mucho más general.

[5] $(I, U) = \{\omega \in P\,(X, x_0) : \omega\,(I) \subseteq U\}$

y $\omega(0) = x_0$. Por lo tanto ω es una trayectoria en U y como C es su componente por trayectorias y contiene a x_0 entonces $\omega(1) \in C$. Por lo tanto

$$\varphi(I,U) \in C$$

Recíprocamente, si $x_1 \in C$, entonces existe $\omega' : I \to U$ tal que $\omega'(0) = x_0$ y $\omega'(1) = x_1$. Por lo tanto $\omega' \in (I,U) \subset P(X,x_0)$ y entonces

$$\varphi\omega' = \omega'(1) = x_1$$

En consecuencia,

$$C \in \varphi(I,U)$$

Por lo tanto,

$$\varphi(I,U) = C$$

Por lo tanto toda componente por trayectorias de todo abierto es abierta. Finalmente, X es localmente conectable por trayectorias.♦

Como último paso se requerirá el siguiente resultado, el cual aparece demostrado en el apéndice como el Teorema 1.

Teorema 1 del apéndice *Si $p : E \to B$ es una función continua y E es un espacio localmente conectable por trayectorias entonces son equivalentes:*
(a) p es fibración de Hurewicz
(b) Para cada componente por trayectorias C de E, la restricción $p\big|_C^{p(C)}$ es fibración de Hurewicz y $p(C)$ es componente por trayectorias de B.

Este teorema aunado a todos los pasos anteriores hace posible una caracterización de los miembros de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$.

4.4 Descripción de la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$

Teorema 4.1 *Sea $X \in \mathfrak{Top}$ un espacio arbitrario. Entonces X es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio si, y sólo si, toda componente por trayectorias de X es un subconjunto abierto de X que es cociente de un espacio contraíble.*

Demostración. Supóngase $X \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$. Sea $(X_j)_J$ la familia de componentes por trayectorias del espacio X. Para cada $j \in J$, escójase un punto x_j de X_j y considérese la fibración

$$\varphi_j : P(X_j, x_j) \to X_j$$

Obsérvese que debido a la conectabilidad por trayectorias de cada X_j, todas estas fibraciones son suprayectivas, pues si $\overline{x} \in X_j$ hay una trayectoria ω en X_j con origen x_j que termina en $\overline{x}$, es decir, tal que $\varphi_j(\omega) = \omega(1) = \overline{x}$. Por esta observación y por el lema 4.1, se tiene como

consecuencia que cada φ_j es un cociente.
Sea

$$p : \coprod_{j\in J} P(X_j, x_j) \to X$$

el coproducto de la familia $(\varphi_j)_J$. Debido al lema 4.2, cada $P(X_j, x_j)$ es contraíble; consecuentemente, $P(X_j, x_j)$ es un espacio conectable por trayectorias[6] y se sabe que el coproducto de espacios localmente conectables por trayectorias *es localmente conectable por trayectorias*[7]. Por lo tanto $\coprod_{j\in J} P(X_j, x_j)$ es un espacio localmente conectable por trayectorias.
Más aún, es claro que al ser $j \neq j'$ se tiene que

$$P(X_j, x_j) \bigcap P(X_{j'}, x_{j'}) = \emptyset$$

por lo que cada $P(X_j, x_j)$ es una componente por trayectorias de $\coprod_{j\in J} P(X_j, x_j)$.
Además, de acuerdo con la definición del coproducto de una familia de funciones[8], para toda $j \in J$ se tiene

$$p\Big|_{P(X_j,x_j)}^{X_j = pP(X_j,x_j)} (\omega, j) = \varphi_j(\omega)$$

para toda $(\omega, j) \in \coprod_{j\in J} P(X_j, x_j)$; por lo tanto, cada una de estas restricciones es una fibración de Hurewicz. Como se ve, se dan las condiciones del teorema 4.3 del apéndice, y en consecuencia puede asegurarse que

$$p : \coprod_{j\in J} P(X_j, x_j) \to X$$

es una fibración de Hurewicz, fibración que claramente es suprayectiva y, puesto que $X \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$, se tiene que p es un cociente.
Recuérdese, por otra parte, que la subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias es bicorreflexiva[9]. Sea (X, τ') un correflector de X en esta subcategoría; como $\coprod_{j\in J} P(X_j, x_j)$ es localmente conectable por trayectorias, se tiene que conmuta en $\mathfrak{Top}$ el

---

[6] *Todo* espacio contraíble X es conectable por trayectorias. Para verlo tómese $\omega = H\sigma$, donde

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & I & \to & X \times I \\ & s & \mapsto & (y, s) \end{array}$$

y $1_X \overset{H}{\simeq} c_x$ *con* c_x la constante en x; entonces ω es una trayectoria en X que une a x, punto al que se contrae el espacio X, con todo punto y de X.

[7] Véase el *corolario* 2.3.

[8] Véase la definición 1.5.

[9] Ver teorema 2.5.

siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod P(X_j, x_j) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
(X, \tau') \arrow[rr, "1_X^{-1}"] & & (X, \tau)
\end{tikzcd}$$

En consecuencia,

$$p : \coprod_{j \in J} P(X_j, x_j) \to (X, \tau')$$

es continua; es decir, es continua la composición

$$\coprod_{j \in J} P(X_j, x_j) \xrightarrow{p} X \xrightarrow{1_X^{-1}} (X, \tau')$$

y como

$$\coprod_{j \in J} P(X_j, x_j) \xrightarrow{p} X$$

es un cociente, entonces

$$1_X^{-1} : X \longrightarrow (X, \tau')$$

también es continua y, por lo tanto, X y (X, τ') son homeomorfos. Por lo tanto X es localmente conectable por trayectorias, y se ha visto que las componentes por trayectorias de un espacio localmente conectable por trayectorias son abiertas (y cerradas) en el espacio. Así X_j es abierto en X, para toda $j \in J$. Por lo tanto, para cada $j \in J$, X_j es un abierto en X que es cociente del espacio contraíble $P(X_j, x_j)$. Esto prueba que toda componente por trayectorias de X es cociente de un espacio contraíble.

Recíprocamente, si cada X_j es cociente de un espacio contraíble, entonces $X_j \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$, para cada $j \in J$, ya que según la observación 4.3, $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ contiene a todos los espacios contraíbles y, por ser bicorreflexiva, es cerrada bajo la formación de cocientes. También es cerrada bajo la formación de coproductos; luego, $X \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$, ya que al ser cada X_j un subconjunto abierto en X, se tiene que

$$X = \coprod_{j \in J} X_j \ .\blacklozenge$$

Luego de la descripción de los miembros de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ dada en el teorema anterior, *sólo resta, para contar con una caracterización completa de esta subcategoría, describir sus correflexiones.* Es lo que sigue.

Sea $X \in \mathfrak{Top}$ un espacio arbitrario y sea $(X_j)_J$ la familia de componentes por trayectorias de X. Otra vez, para cada $j \in J$ se escoje $x_j \in X_j$ y se considera la fibración

$$\varphi_j : P(X_j, x_j) \to X_j$$

Según se ha visto, el coproducto de la familia $(\varphi_j)_J$ da lugar a una fibración suprayectiva de Hurewicz

$$p : \coprod_{j \in J} P(X_j, x_j) \to X$$

A esta fibración se le puede asociar el espacio de identificación $C_H(X)$ correspondiente a la partición $\{p^{-1}\{x\}\}_{x \in X}$ del espacio $\coprod_{j \in J} P(X_j, x_j)$. Entonces la aplicación canónica

$$q : \coprod_{j \in J} P(X_j, x_j) \to C_H(X)$$

es un cociente y, puesto que p es continua y suprayectiva, existe una función

$$c : C_H(X) \to X$$

continua y biyectiva tal que hace conmutativo el diagrama[10]

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod P(X_j, x_j) \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "p"] \\
C_H(X) \arrow[r, "c"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & X
\end{tikzcd}$$

Se probará que esta función $c : C_H(X) \to X$ es una $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión de X. Con ese fin, observése que: *Siempre que para una fibración de Hurewicz $p : E \to B$ existen una función continua e inyectiva $a : B' \to B$ y una función continua $\overline{p} : E \to B'$ tales que*

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "\overline{p}"'] \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, "a"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & B
\end{tikzcd}$$

entonces $\overline{p}$ también es fibración de Hurewicz.

[10] Véase la proposición 2.11.

Demostración. En efecto, si conmuta en $\mathfrak{Top}$ el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "\overline{p}"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & B'
\end{tikzcd}$$

entonces también conmuta

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "\overline{p}"] \arrow[dr, "p"] & \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] & B' \arrow[r, "a"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & B
\end{tikzcd}$$

por lo tanto, existe $\widetilde{H} : Y \times I \to E$ contínua tal que conmuta (con $\widetilde{H}$) el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "\overline{p}"] \arrow[dr, "p"] & \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & B' \arrow[r, "a"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & B
\end{tikzcd}$$

es decir, tal que $\widetilde{H}h_0 = f$ y $p\widetilde{H} = aH$. En consecuencia, se tiene que

$$\widetilde{H}h_0 = f \quad \text{y} \quad a\overline{p}\widetilde{H} = aH$$

puesto que a es inyectiva, puede ser cancelada de la última igualdad, con lo que se concluye que $\overline{p}$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto al espacio Y que se tomó arbitrariamente en $\mathfrak{Top}$; es decir, $\overline{p}$ es una fibración de Hurewicz.♦

Teorema 4.2 *Para todo $X \in \mathfrak{Top}$, la función*

$$c : C_H(X) \to X$$

es una $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión de X.

Demostración. Sea $a : A_X \to X$ una $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión de X. Según quedó establecido en la demostración del teorema anterior, el espacio $\coprod_{j \in J} P(X_j, x_j)$ es localmente conectable por trayectorias, y también se ha probado el lema que establece que la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ contiene a todos los espacios localmente conectables por trayectorias. En consecuencia, existe una y solamente una función continua

$$\overline{p} : \coprod_{j \in J} P(X_j, x_j) \to A_X$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \coprod P(X_j, x_j) \arrow[dl, "\overline{p}"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dl, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowleft"] \\
A_X \arrow[r, hook, "a"'] & X
\end{tikzcd}$$

Por ser a inyectiva se puede aplicar la observación inmediata anterior y asegurar que $\overline{p}$ es una fibración de Hurewicz. Además $\overline{p}$ es suprayectiva; en efecto, sea $y \in A_X$ y sea $(\omega, j) \in p^{-1}\{a(y)\}$; entonces y y $\overline{p}(\omega, j)$ son dos puntos de A_X tales que

$$a(\overline{p}(\omega, j)) = p(\omega, j) = a(y)$$

lo que debido a la inyectividad de a, implica que

$$\overline{p}(\omega, j) = y$$

y esto prueba que $\overline{p}$ es sobre. Por consiguiente $\overline{p}$ es un cociente (pues $A_X \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$).
Por otra parte, si para cualquier $x \in X$ se tienen

$$(\omega, j), (\omega', j) \in p^{-1}\{x\}$$

entonces debido a la conmuatividad del diagrama anterior se tiene que

$$a\overline{p}(\omega, j) = p(\omega, j) = x = p(\omega', j) = a\overline{p}(\omega', j)$$

lo cual, por la inyectividad de a, implica que

$$\overline{p}(\omega, j) = \overline{p}(\omega', j)$$

es decir, $\overline{p}$ identifica dos puntos de la misma fibra en uno sólo, lo que también hace q; esto significa que $\overline{p}$ y la aplicación canónica $q : \coprod_{j \in J} P(X_j, x_j) \to C_H(X)$ son identificaciones correspondientes a la misma partición $\{p^{-1}(x)\}_{x \in X}$ y por lo tanto, existe un homeomorfismo

$$h : C_H(X) \to A_X$$

tal que $ah = c$ es una $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión de X, con lo que el teorema queda demostrado.♦

Capítulo 5

Descripción de $\underline{A}_{\mathcal{S}}$ y $\underline{A}_{C'}$, y otra caracterización de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$

Este último capítulo se ha dedicado en su primera parte a caracterizar, por medio del concepto de la subcategoría bicorreflexiva generada por otra subcategoría (específicamente por $\mathcal{S}$ y por C', descritas al final del capítulo 3), a las subcategorías asociadas a: las fibraciones suprayectivas de Serre, $\underline{A}_{\mathcal{S}}$, y a las C'-fibraciones suprayectivas, $\underline{A}_{C'}$, así como a descubrir las relaciones entre ellas y la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$. En su segunda parte, se da una nueva descripción de esta última subcategoría pero haciendo uso esta vez, a diferencia de la caracterización dada en el capítulo anterior, de algunos resultados sobre las fibraciones abiertas de Hurewicz.

5.1 Descripción de $\underline{A}_{\mathcal{S}}$ y $\underline{A}_{C'}$ a través de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$, $\widetilde{\mathcal{S}}$ y $\widetilde{C'}$

Recuérdese que dada cualquier subcategoría $\underline{A}$ de $\mathfrak{Top}$, mediante $\widetilde{\underline{A}}$ se ha convenido denotar a la mínima subcategoría correflexiva que contiene a $\underline{A}$, también llamada la subcategoría correflexiva generada por $\underline{A}$; (en el capítulo segundo fue dada una descripción general de $\widetilde{\underline{A}}$). En esta primera sección del capítulo van a considerarse las subcategorías $\widetilde{\mathcal{S}}$ (la subcategoría correflexiva generada por la subcategoría $\mathcal{S}$ de los espacios homeomorfos a los cubos de dimensión finita), $\widetilde{C'}$ (la subcategoría correflexiva generada por la subcategoría C' de los espacios contraíbles) con el propósito de determinar a través de ellas a las subcategorías $\underline{A}_{\mathcal{H}}$, $\underline{A}_{\mathcal{S}}$ y $\underline{A}_{C'}$. Con respecto a la subcategoría bicorreflexiva generada por una subcategoría repleta que contiene a otra subcategoría repleta se tiene el siguiente resultado el cual será usado con frecuencia a partir de la observación que le sigue.

Lema 5.1 *Si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son subcategorías repletas de $\mathfrak{Top}$, y $\underline{A} \subset \underline{B}$ entonces $\widetilde{\underline{A}} \subset \widetilde{\underline{B}}$.*

Demostración. Esto es muy fácil de ver, pues al ser $\underline{A} \subset \underline{B}$, y al estar $\underline{B} \subset \widetilde{\underline{B}}$ se tiene que $\underline{A} \subset \widetilde{\underline{B}}$. Pero $\underline{A} \subset \widetilde{\underline{A}}$, esta última la más chica de las subcategorías correflexivas que contienen a $\underline{A}$. Por lo que $\widetilde{\underline{A}} \subset \widetilde{\underline{B}}$. ♦

Obsérvese, para empezar que $C' \subset \underline{A}_{C'}$
En efecto, si

$$p : X \to Y$$

es una C'-fibración suprayectiva con $Y \in C'$ entonces existe una homotopía

$$H : Y \times I \to Y$$

tal que para cierto punto $y_0 \in Y$ y para todo $y \in Y$

$$H(y, 0) = y_0 \quad \text{y} \quad H(y, 1) = y$$

Entonces, siendo $x_0 \in p^{-1}\{y_0\}$ y siendo

$$c : Y \to X$$

la constante de valor x_0, se tiene que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "c"] \arrow[d, "h_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

y por ser p una C'-fibración, existe una función continua

$$\widetilde{H} : Y \times I \to X$$

que hace conmutar los triángulos que determina en el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "c"] \arrow[d, "h_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces se puede definir una función continua

$$q : Y \to X$$

haciendo, para toda $y \in Y$,

$$q(y) = \widetilde{H}(y, 1)$$

En consecuencia, se tiene que para toda $y \in Y$

$$pq(y) = p\widetilde{H}(y,1) = H(y,1) = y = 1_Y(y)$$

lo que significa que p es una retracción, y por lo tanto, p es una aplicación cociente; así

$$Y \in \underline{A}_{C'} .$$

Luego

$$C' \subseteq \underline{A}_{C'} .$$

En consecuencia, por el lema anterior,

$$\widetilde{C'} \subseteq \underline{A}_{C'} .$$

Nótese que, puesto que todo espacio topológico que es homeomorfo a un cubo de dimensión finita es un espacio contraíble, una demostración análoga a la anterior puede darse para probar que $S \subseteq \underline{A}_S$; de aquí que también

$$\widetilde{S} \subseteq \underline{A}_S .$$

Para decir más acerca de esto se requiere el resultado que sigue.

Lema 5.2 *Sea E una clase no vacía de espacios topológicos tal que si X pertenece a E entonces $X \times I$ pertenece a E. Si todo elemento de E es miembro de una subcategoría $\underline{A}$, correflexiva en $\mathfrak{Top}$, entonces toda $\underline{A}$-correflexión es E-fibración.*

Demsotración. Sea $c : X' \to X$ una $\underline{A}$-correflexión de X; sea $Y \in E$ y supóngase que conmuta el siguiente diagrama de funciones continuas

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_0"'] & X' \arrow[d, "c"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"'] & X \end{tikzcd}$$

Por hipótesis, $Y \times I \in \underline{A}$; entonces, por ser c una $\underline{A}$-correflexión de X, existe una única

$$\widetilde{F} : Y \times I \to X'$$

continua y tal que

$$c\widetilde{F} = F$$

de donde

$$c\widetilde{F}h_0 = Fh_0 = cf$$

Puesto que $E \neq \emptyset$, $\underline{A}$ es bicorreflexiva y por lo tanto c es inyectiva, de modo que también

$$\widetilde{F}h_0 = f$$

Esto demuestra que c es una E-fibración.♦

Observación 5.1 *Nótese que S y C' satisfacen las condiciones del lema anterior.*

Proposición 5.1 *Respecto a las subcategorías $\widetilde{C'}$, $\widetilde{S}$, $\underline{A}_{\mathcal{H}}$, $\underline{A}_S$ y $\underline{A}_{C'}$ se tiene:*
(a) $\widetilde{S} = \underline{A}_S$ y las $\underline{A}_S$-correflexiones son fibraciones de Serre.
(b) $\widetilde{C'} = \underline{A}_{C'} = \underline{A}_{\mathcal{H}}$ y las $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexiones son C'-fibraciones.
(c) $\underline{A}_S \subseteq \underline{A}_{\mathcal{H}}$ pero, $\underline{A}_S \neq \underline{A}_{\mathcal{H}}$.

Demostración de (a). Puesto que $S \subseteq \underline{A}_S$, por la observación anterior se tiene que toda $\underline{A}_S$-correflexión es una fibración de Serre. Ahora, sea $X \in \underline{A}_S$ y

$$c : X' \to X$$

una $\widetilde{S}$-correflexión de X. Aplicando el lema anterior se tiene $\left(\text{al estar } S \subseteq \widetilde{S}\right)$ que c es una fibración de Serre (suprayectiva porque c es biyectiva); entonces c es una aplicación cociente y debido a la cerradura de $\widetilde{S}$ bajo la formación de cocientes, se tiene entonces que $X \in \widetilde{S}$. Por lo tanto

$$\widetilde{S} = \underline{A}_S \, .$$

Demostración de (b). Según se ha observado, es válida la contención

$$\widetilde{C'} \subseteq \underline{A}_{C'}$$

Por otro lado, puesto que toda fibración de Hurewicz es una C'-fibración, se tiene que

$$\underline{A}_{C'} \subseteq \underline{A}_{\mathcal{H}}$$

Ahora, sea $X \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$ y sea $(X_j)_J$ la familia de componentes por trayectorias de X; se sabe que la fibración suprayectiva de Hurewicz

$$p : \coprod_{j \in J} P(X_j, x_j) \to X$$

es en este caso una aplicación cociente (por ser $X \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$). En consecuencia, X viene a ser cociente de un coproducto de espacios contraíbles; es decir, $X \in \widetilde{C'}$. Por lo tanto se tiene que

$$\widetilde{C'} \subseteq \underline{A}_{C'} \subseteq \underline{A}_{\mathcal{H}} \subseteq \widetilde{C'}$$

y, por lo tanto

$$\widetilde{C'} = \underline{A}_{C'} = \underline{A}_{\mathcal{H}}$$

Por otra parte, puesto que

$$C' \subseteq \underline{A}_{\mathcal{H}}$$

puede aplicarse el lema anterior para asegurar que toda $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión es una C'-fibración.

Demostración de (c). Puesto que toda fibración de Hurewicz es una fibración de Serre resulta

$$\underline{A}_S \subseteq \underline{A}_{\mathcal{H}}$$

Para probar que $\underline{A}_S \neq \underline{A}_{\mathcal{H}}$ se dará un ejemplo de un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-objeto que no es un $\underline{A}_S$-objeto: Sea X un espacio contraíble que no esté compactamente generado; por ser contraíble,

$$X \in \underline{A}_{\mathcal{H}} \, .$$

Sea

$$c : X' \to X$$

una correflexión de X desde la subcategoría $\underline{\mathbb{K}}$ de espacios topológicos compactamente generados de $\mathfrak{Top}$. Por otra parte, puesto que todo miembro de S es compacto, se tiene que todo miembro de S es miembro de $\underline{\mathbb{K}}$; aplicando el lema anterior, resulta que c es una fibración (suprayectiva) de Serre: sin embargo, c no es una aplicación cociente porque si lo fuera, como $X' \in \underline{\mathbf{K}}$ y $\underline{\mathbf{K}}$ está cerrada bajo la formación de cocientes (pues es correflexiva) se tendría que $X \in \underline{\mathbf{K}}$ pero se supuso que $X \notin \underline{\mathbb{K}}$. Por lo tanto, $X \notin \underline{A}_S$. Sólo resta comprobar que tiene sentido pensar en un espacio contraíble que no esté compactamente generado exhibiendo un ejemplo. Para verlo considérese un espacio B que no esté compactamente generado[1] y sea $X = Con(B)$ el cono sobre B, con la topología cociente; claramente X es contraíble. Además, ya que X contiene subconjuntos cerrados los cuales no están compactamente generados, X mismo no está compactamente generado[2].♦

5.2 Otra caracterización de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ usando fibraciones abiertas.

En esta sección se examinan algunos resultados que permiten dar otra caracterización de la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ de $\mathfrak{Top}$.

Primeramente, reconsidérese el espacio $P(X, x_0)$ de trayectorias en X de origen x_0, provisto de la topología compacto abierta y la fibración

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & P(X,x_0) & \to & X \\ & \omega & \mapsto & \omega(1) \end{array}$$

Sea ω_{x_0} la trayectoria constante de valor x_0 y para $W \subseteq X$ abierto considérese el abierto subbásico de $P(X, x_0)$

$$(I, W) = \{\omega \in P(X, x_0) : \omega(I) \subseteq W\}$$

Lema 5.3 *Si φ aplica toda vecindad de ω_{x_0} en una vecindad de x_0, entonces X es localmente conectable por trayectorias en x_0.*

Demostración. Denotando mediante $\mathcal{N}_{x_0}$ al sistema de vecindades de x_0, sea

$$\mathcal{B}_{\omega_{x_0}} = \{(I, W) : W \in \mathcal{N}_{x_0}\}$$

[1] No resulta fácil corroborar la existencia un espacio así, para ello véase el ejemplo 2.3 de [11] (pág. 135)

[2] Véase [2].

Entonces $\mathcal{B}_{\omega_{x_0}}$ es una base local de vecindades de ω_{x_0}; para probarlo basta mostrar que todo abierto subbásico (K,V) de $P(X,x_0)$ tal que $\omega_{x_0} \in (K,V)$, siempre contiene un miembro de $\mathcal{B}_{\omega_{x_0}}$. Pero es que si (K,V) es un abierto así, entonces $V \in \mathcal{N}_{x_0}$, pues ω_{x_0} es la constante de valor x_0; en consecuencia

$$\omega_{x_0} \in (I,V) \in \mathcal{B}_{\omega_{x_0}}$$

y claramente

$$(I,V) \subseteq (K,V)$$

Por consiguiente, debido a que $\mathcal{B}_{\omega_{x_0}}$ es base local de vecindades de ω_{x_0}, se tiene que para toda $U \in \mathcal{N}_{x_0=\varphi(\omega_{x_0})}$, existe $W \in \mathcal{N}_{x_0}$ tal que

$$(I,W) \subseteq \varphi^{-1}(U)$$

ya que, por la continuidad de φ,

$$\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{N}_{\omega_{x_0}}$$

Por hipótesis

$$V = \varphi(I,W) \in \mathcal{N}_{x_0}$$

En consecuencia, para toda $x \in V$ existe $\omega \in (I,W)$ tal que $x = \varphi(\omega)$. Pero

$$\varphi(\omega) = \omega(1) \quad y \quad \omega(0) = x_0$$

Esto implica que V es conectable por trayectorias, con lo cual queda demostrado que X es localmente conectable por trayectorias en x_0.♦

Cuando en el lema 4.2 se probó que el espacio $P(X,x_0)$ es contraíble, se empleó en la demostración la homotopía

$$F : P(X,x_0) \times I \to P(X,x_0)$$

definida por

$$F(\omega,s) = \omega_s$$

donde

$$\omega_s(t) = \omega((1-s)t)$$

Esta homotopía puede componerse con la fibración φ y resulta que *la composición*

$$\varphi F : P(X,x_0) \times I \to X$$

aplica vecindades de (ω_{x_0}, t) *en vecindades de* x_0, *siempre que el espacio* X *es localmente conectable por trayectorias.*

Demostración. Sea $\mathcal{N}^T_{x_0}$ la familia de vecindades conectables por trayectorias de x_0. Entonces, por ser X un espacio localmente conectable por trayectorias, la familia

$$\mathcal{B}^T_{\omega_{x_0}} = \left\{(I,W) : W \in \mathcal{N}^T_{x_0}\right\}$$

es una base local de vecindades de ω_{x_0} ya que sí (K, B) es cualquier abierto subbásico y $\omega_{x_0} \in (K, B)$, entonces $B \in \mathcal{N}_{x_0}$ y, por lo tanto, existe $W \in \mathcal{N}_{x_0}^{\mathcal{T}}$ tal que $W \subseteq B$; así se tiene que $(I, W) \in \mathcal{B}_{\omega_{x_0}}^{\mathcal{T}}$ y es claro que

$$(I, W) \subseteq (K, B)$$

Como consecuencia, para todo abierto básico $V \times U$ de $P(X, x_0) \times I$ tal que

$$(\omega_{x_0}, t) \in V \times U$$

existe $(I, W) \in \mathcal{B}_{\omega_{x_0}}^{\mathcal{T}}$ tal que

$$(I, W) \times U \subseteq V \times U$$

por lo que

$$\varphi F((I, W) \times U) \subseteq \varphi F(V \times U)$$

Para probar que $\varphi F(V \times U)$ es vecindad de x_0, basta mostrar que lo es

$$\varphi F((I, W) \times U),$$

para lo cual es suficiente demostrar la contención

$$W \subseteq \varphi F((I, W) \times U)$$

Sea $x \in W$ y sea $\gamma \in (I, W)$ tal que

$$\gamma(1) = x$$

Debido a la densidad de $\mathbb{Q}$ en I puede escogerse $s_0 \in U$ tal que $s_0 = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $p < q$. Sea $\omega \in (I, W)$ definida por

$$\omega(t) = \begin{cases} \gamma(tq) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{q} \\ x & \text{si } \frac{1}{q} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

entonces

$$\varphi F(\omega, s_0) = \varphi(\omega_{s_0}) = \omega_{s_0}(1) = \omega(1 - s_0) = \omega\left(1 - \frac{p}{q}\right)$$

Pero $p < q$ implica que $q - p > 0$; de lo cual se tiene que $1 \geq \frac{1}{q-p}$; de donde $q \geq \frac{q}{q-p}$; por lo que

$$\frac{1}{q} \leq \frac{q-p}{q}$$

Por lo tanto

$$\varphi F(\omega, s_0) = \omega\left(1 - \frac{p}{q}\right) = x$$

de donde, finalmente,

$$x \in \varphi F(I, W) \times U \ .\blacklozenge$$

En el lema 4.1 se probó que cuando el codominio de una fibración suprayectiva de Hurewicz es localmente conectable por trayectorias, tal fibración es una aplicación cociente. El resultado siguiente es aún más general.

Teorema 5.1 *Si X es localmente conectable por trayectorias entonces toda fibración de Hurewicz*

$$f : E \to X$$

es abierta

Demostración. Sea $V \subseteq E$ abierto y sea $x_0 \in f(V)$ arbitrario; entonces existe $e \in V$ tal que $x_0 = f(e)$. Siendo

$$g : P(X, x_0) \to E$$

la función constante de valor e se tiene que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P(X,x_0) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_1"'] & E \arrow[d, "f"] \\
P(X,x_0) \times I \arrow[r, "\varphi F"'] & X
\end{tikzcd}$$

donde $h_1(\omega) = (\omega, 1)$, para toda $\omega \in P(X, x_0)$[3]; puesto que f es fibración de Hurewicz, existe una función continua

$$G : P(X, x_0) \times I \to E$$

tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P(X,x_0) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_1"'] & E \arrow[d, "f"] \\
P(X,x_0) \times I \arrow[r, "\varphi F"'] \arrow[ur, "G"] & X
\end{tikzcd}$$

Como V es vecindad abierta de e, debido a la continuidad de G, existe una vecindad U de $(\omega_{x_0}, 1)$ tal que

$$G(U) \subseteq V$$

Entonces

$$fG(U) \subseteq f(V)$$

pero

$$fG(U) = \varphi F(U)$$

lo cual, por el resultado anterior, es vecindad de x_0 Esto prueba que $f(V)$ es abierto.♦

Como corolario de estos resultados se tiene la siguiente caracterización de los espacios localmente conectables por trayectorias; es por consiguiente, un resultado que dentro de $\mathfrak{Top}$ tiene importancia en sí mismo.

[3] Véase la observación hecha en la definición 2 del apéndice.

Corolario 5.1 *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(a) Toda fibración de Hurewicz $f : E \to X$ es abierta.
(b) Para todo $x_0 \in X$, $\varphi : P(X, x_0) \to X$ aplica vecindades de ω_{x_0} en vecindades de x_0.
(c) X es localmente conectable por trayectorias.

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Es inmediato.
$(b) \Rightarrow (c)$: Es el lema anterior.
$(c) \Rightarrow (a)$: Es el teorema anterior.♦
Como un caso especial del corolario anterior se vió, en el capítulo tercero, observación 4.4, que la fibración de Hurewicz $\varphi : P(X, x_0) \to X$ es abierta sólo si X es localmente conectable por trayectorias.

Para alcanzar la descripción de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ que se espera, aún hacen falta un par de resultados. Son los siguientes.

Lema 5.4 *Si en $\mathfrak{Top}$ se tiene un cuadrado cartesiano*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

en el que la función f es abierta, entonces f' también es abierta.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede considerar que

$$X' = \{(y', x) \in Y' \times X : g(y') = f(x)\}$$

ya que, según se prueba en la proposición 3.2, existe un homeomorfismo entre ambos espacios y, entonces, f' y g' son las restricciones a X' de las proyecciones de $Y' \times X$, es decir, f' y g' vienen dadas, para toda $(y', x) \in X'$, por

$$f'(y', x) = y \quad \text{y} \quad g'(y', x) = x$$

Sea $(y', x) \in X'$ y sean V y U vecindades abiertas de y' y de x respectivamente; entonces

$$X' \cap (V \times U)$$

es un abierto básico de (y', x) en X'; y si

$$y' \in f'(X' \cap (V \times U))$$

entonces existe $x_0 \in X$ tal que

$$(y', x_0) \in X' \cap (V \times U) \quad y \quad f'(y', x_0) = y'$$

A consecuencia de la hipótesis resulta que $f(U)$ es vecindad abierta de $g(y')$, por lo que $g^{-1}(f(U))$ es vecindad abierta de y' y, por lo tanto, también lo es

$$V' = V \cap g^{-1}(f(U))$$

Debido a que es clara la contención

$$f'(X' \cap (V' \times U)) \subseteq f'(X' \cap (V \times U))$$

si se tuviera la igualdad

$$f'(X' \cap (V' \times U)) = V'$$

se tendría terminada la prueba. Efectivamente, esta igualdad se cumple; sea

$$z \in f'(X' \cap (V' \times U))$$

entonces existe

$$(y'', x) \in X' \cap (V' \times U)$$

tal que $f'(y'', x) = z$; pero $f'(y'', x) = y''$, y $y'' \in V'$. Por lo tanto $z \in V'$. Recíprocamente, si $z \in V'$, entonces $z \in g^{-1}(f(U))$, por lo que existe $u \in U$ tal que

$$g(z) = f(u)$$

de donde

$$(z, u) \in X' \cap (V' \times U)$$

y se tiene

$$z = f'(z, u) \in f'(X' \cap (V' \times U))$$

En consecuencia, $f'(X' \cap (V' \times U))$ es vecindad abierta de y' y como está contenida en $f'(X' \cap (V \times U))$, esto prueba que $f'(X' \cap (V \times U))$ es vecindad abierta de y' en Y', como se quería probar.♦

Proposición 5.2 *Sea $p : E \to B$ una fibración de Hurewicz y sean*

$$f_0 \text{ , } f_1 : X \to B$$

dos funciones continuas homotópicas. Entonces, entre los dominios E_0 y E_1 de las fibraciones p_0 y p_1 respectivamente inducidas por p a través de f_0 y de f_1[4]*, se puede definir una función continua*

$$h : E_0 \to E_1$$

de manera que conmute el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p_0"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & E_1 \arrow[dl, "p_1"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

[4]Véase la definición 3 7

Demostración. Considérense los cuadrados cartesianos

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "f_0'"] \arrow[d, "p_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f_0"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f_1'"] \arrow[d, "p_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f_1"'] & B \end{tikzcd}$$

Siendo F una homotopía de f_0 a f_1, llámese F_0 a la composición

$$E_0 \times I \stackrel{p_0 \times 1_I}{\longrightarrow} X \times I \stackrel{F}{\longrightarrow} B$$

Entonces se tiene que conmuta

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "f_0'"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E_0 \times I \arrow[r, "F_0"'] & B \end{tikzcd}$$

Puesto que p es fibración de Hurewicz, existe una función continua

$$F_0' : E_0 \times I \to E$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "f_0'"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E_0 \times I \arrow[r, "F_0"'] \arrow[ur, "F_0'"] & B \end{tikzcd}$$

Mediante F_0' se puede definir la función que se quiere haciendo, para toda $(x, e) \in E_0$,

$$h(x, e) = (x, F_0'(x, e, 1)) \in E_1$$

Es claro que h es continua y que

$$p_1 h = p_0,$$

como se quería demostrar.♦

Obsérvese que de modo exactamente análogo se puede llegar a que existe una función continua

$$F_1' : E_1 \times I \to E$$

y mediante ella definir

$$h' : E_1 \to E_0$$

como

$$h'(x,e) = (x, F_1'(x,e,0))$$

La razón de estas fórmulas para h y h' está en que se puede demostrar que una es inversa homotópica de la otra y, por lo tanto, que E_0 y E_1 tienen el mismo tipo de homotopía[5]. Probar esto es más elaborado de lo que aquí se hizo y va más allá de lo requerido para establecer el teorema que sigue.

Teorema 5.2 *Si X es un espacio topológico que tiene el mismo tipo de homotopía de un espacio localmente conectable por trayectorias, entonces $X \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$.*

Demostración. Sea B un espacio localmente conectable por trayectorias y sean

$$f : X \to B \quad \text{y} \quad g : B \to X$$

funciones continuas tales que

$$gf \simeq 1_X \quad \text{y} \quad fg \simeq 1_B$$

Ahora sea

$$p : E \to X$$

una fibración suprayectiva de Hurewicz. Considérese el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p''"'] & E' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

donde cada cuadrado es cartesiano (esto es posible al efectuar el producto fibrado (p', g') de la pareja (p, g) y luego, tomando a su vez, el producto fibrado (p'', f') de la pareja (p', f)). Ya se ha visto que por ser p suprayectiva lo es también p'; por el teorema anterior p' es una aplicación abierta. Por el lema anterior p'' también es abierta; luego, puesto que también es continua y suprayectiva, p'' es un cociente. Debido a que las funciones

$$1_X : X \to X \quad \text{y} \quad gf : X \to X$$

son homotópicas se tiene, como consecuencia de la proposición anterior, que entre los dominios de las fibraciones inducidas por p a través de ellas se puede definir una función continua

[5] De hecho, para el lector que conozca el concepto, tienen el mismo tipo de *homotopía fibrada*. Véase el teorema 2.8.14 del libro de Spanier [10].

que haga conmutar el diagrama correspondiente; pero la fibración inducida por 1_X es p misma, en tanto que la inducida por gf es p'', esto es porque al ser cada cuadrado cartesiano en el diagrama anterior, también es cartesiano el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "g'f'"] \arrow[d, "p''"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "gf"'] & X \end{tikzcd}$$

Por lo tanto existe

$$h : E'' \to E$$

tal que

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p''"'] & \circlearrowleft & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, para ver que p es una aplicación cociente, sean $Y \in Top$ y $k : X \to Y$ una función cualquiera tal que la composición kp sea continua, entonces también será continua la composición

$$(kp)\,h = k\,(ph) = kp''$$

esto implica, por ser p'' un cociente, que k es continua, lo que prueba que p es cociente. Esto demuestra que

$$X \in \underline{A}_{\mathcal{H}}\,. \blacklozenge$$

El siguiente corolario, que se desprende del teorema anterior, finaliza con la caracterización de $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ y con este trabajo.

Corolario 5.2 *$\underline{A}_{\mathcal{H}}$ es la subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ generada por la subcategoría, $\underline{\mathcal{L}}_T^C$, de los espacios que tienen el mismo tipo de homotopía de un espacio localmente conectable por trayectorias.*

Demostración. Ya que todo espacio contraíble es localmente conectable por trayectorias y debido al hecho de que todo contraíble tiene el mismo tipo de homotopía de un localmente conectable por trayectorias se tienen, por el teorema anterior, las contenciones

$$C' \subseteq \underline{\mathcal{L}}_T^C \subseteq \underline{A}_{\mathcal{H}}$$

Entonces, según el lema 5.1,

$$\widetilde{C'} \subseteq \widetilde{\underline{\mathcal{L}}_T^C} \subseteq \widetilde{\underline{A}_{\mathcal{H}}}$$

Y como es claro que $\widetilde{\underline{A}_{\mathcal{H}}} = \underline{A}_{\mathcal{H}}$, se tiene que

$$\widetilde{C'} \subseteq \widetilde{\underline{\mathcal{L}}_T^{\mathcal{C}}} \subseteq \underline{A}_{\mathcal{H}}$$

Pero se probó en la proposición 5.1 que

$$\widetilde{C'} = \underline{A}_{\mathcal{H}}$$

Por lo tanto

$$\widetilde{\underline{\mathcal{L}}_T^{\mathcal{C}}} = \underline{A}_{\mathcal{H}} \,.\blacklozenge$$

Apéndice sobre Fibraciones de Hurewicz

Definición 1 *Se dice que una función continua*

$$f : X \to Y$$

***tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a un espacio topológico** Z si dado un diagrama conmutativo de funciones continuas:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

en el que para toda $z \in Z$ $h_0(z) = (z, 0)$, existe una función continua

$$\widetilde{H} : Z \times I \to X$$

que hace conmutar los triángulos que determina en el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft" near end] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"' near start] & Y \end{tikzcd}$$

en este caso se dice que $\widetilde{H}$ es un levantamiento de H que empieza con g.

Definición 2 *Una función continua*

$$p : E \to B$$

*se dice que es una **fibración de Hurewicz** si p tiene la propiedad de levantamiento de homotopía respecto a cualquier espacio topológico Z; es decir, si dados $Z \in \mathfrak{Top}$ arbitrario,* *una función continua $g : Z \to E$ y una homotopía $H : Z \times I \to B$ que empieza con pg, entonces existe un levantamiento*

$$\widetilde{H} : Z \times I \to E$$

de H, que empieza en g, es decir, tal que $p\widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(z,0) = g(z)$, $\forall z \in Z$. Obsérvese, por otra parte, que son equivalentes las siguientes afirmaciones:
(a) p es fibración de Hurewicz.
(b) Si para cualquier $Z \in \mathfrak{Top}$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "F"'] & B \end{tikzcd}$$

donde para toda $z \in Z$, $h_1(z) = (z,1)$, entonces, existe

$$\widetilde{F} : Z \times I \to E$$

tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, "\widetilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

Muy frecuentemente, y sin hacer aclaración alguna, se suele tomar como definición de fibración de Hurewicz al inciso (b) pues, como se acaba de observar, son conceptos equivalentes.

Definición 3 *Sea $f : X \to Y$ una función continua y $y_0 \in Y$; se define la* **fibra de f sobre** *y_0 como el espacio $f^{-1}(y_0)$.*

Definición 4 *Si B y F son espacios topológicos, la proyección natural*

$$p : B \times F \to B$$

es una fibración de Hurewicz que se llama **fibración trivial**. *(para corroborarlo véase el ejemplo 3).*

Observación 1 *Las fibras de la fibración trivial $p : B \times F \to B$, la proyección canónica ó natural, son homeomorfos al espacio F, pues si $y_0 \in B$ entonces*

$$p^{-1}(y_0) = \{(y,f) \in B \times F : p(y,f) = y_0\} = \{(y_0,f) \in B \times F : f \in F\} = \{y_0\} \times F \cong F$$

Se verán enseguida algunos ejemplos de fibraciones de Hurewicz, del primero, que es un *teorema, se generalizarán sus corolarios a resultados importantes.*

Ejemplo 1 *Toda aplicación cubriente es fibración. (Teorema de levantamiento único de homotopías para aplicaciones cubrientes). Para la demostración véase 19.20 de [7].*

Como consecuencia del ejemplo anterior, se tienen los siguientes dos corolarios, el primero es sobre la unicidad del levantamiento de un camino en X con origen x_0 sobre cada punto de la fibra $p^{-1}\{x_0\}$ en el espacio cubriente $\widetilde{X}$; y el segundo es llamado *Monodromía* que establece que caminos equivalentes tienen levantamientos equivalentes y que es llamado así, debido a que es una generalización del caso especial para la aplicación cubriente $e : \mathbb{R} \to S^1$ que dice que caminos (cerrados) equivalentes ω y ω' en S^1 tienen el mismo *grado*, siempre que sus levantamientos correspondientes $\widetilde{\omega}$ y $\widetilde{\omega}'$ sean de origen común, donde el **grado** de ω se define como $\widetilde{\omega}(1)$ y representa el número de vueltas (el cual resulta ser entero) que da ω alrededor de la circunferencia.

Corolario 1 *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación cubriente y $\omega : I \to X$ es un camino (ó trayectoria) de origen x_0, entonces para todo $\widetilde{x_0} \in p^{-1}\{x_0\}$ existe un único levantamiento $\widetilde{\omega} : I \to \widetilde{X}$ con origen $\widetilde{x_0}$.*

Demostración de la existencia. Sea $\omega : I \to X$ un camino con $\omega(0) = x_0$, y sea

$$\widetilde{x_0} \in p^{-1}\{x_0\}$$

arbitrario, se aplicará el teorema anterior al caso en que Z es el espacio singular $\{z_0\}$ y $g : Z \to \widetilde{X}$ es la función definida como $g(z_0) = \widetilde{x_0}$. Siendo $Z = \{z_0\}$ es claro que $Z \times I \overset{p_I}{\cong} I$, con homeomorfismo la I proyección p_I, así que se puede considerar al camino ω como una función de $\{z_0\} \times I \to X$; de manera más precisa, al considerar la homotopía

$$\{z_0\} \times I \xrightarrow{p_I} I \xrightarrow{\omega} X$$

se tiene que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\{z_0\} \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
\{z_0\} \times I \arrow[r, "p_I"'] & I \arrow[r, "\omega"'] & X
\end{tikzcd}$$

donde $h_0(z) = (z, 0)$, para toda $z \in \{z_0\}$; por el teorema de levantamiento único de homotopías para aplicaciones cubrientes existe una homotopía

$$\widetilde{H} : \{z_0\} \times I \to \widetilde{X}$$

tal que

$$p\widetilde{H} = \omega p_I \quad \text{y} \quad \widetilde{H}(z_0, 0) = g(z_0) = \widetilde{x}_0$$

es decir, $\widetilde{H}$ es la única función continua que hace conmutar los triángulos que determina en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\{z_0\} \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
\{z_0\} \times I \arrow[r, "p_I"'] \arrow[urr, "\widetilde{H}"] & I \arrow[r, "\omega"'] & X
\end{tikzcd}$$

Sea

$$\widetilde{\omega}(t) = \widetilde{H} p_I^{-1}(t) = \widetilde{H}(z_0, t)$$

entonces

$$p\widetilde{\omega}(t) = p\widetilde{H}(z_0, t) = \omega p_I(z_0, t) = \omega(t)$$

y

$$\widetilde{\omega} p_I h_0(z_0) = \widetilde{\omega} p_I(z_0, 0) = \widetilde{\omega}(0) = \widetilde{H}(z_0, 0) = g(z_0) = \widetilde{x}_0$$

es decir, se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\{z_0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
\{z_0\} \times I \cong I \arrow[r, "\omega"'] \arrow[ur, "\widetilde{\omega}"] & X
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\widetilde{\omega}$ es un levantamiento de ω con origen $\widetilde{x}_0$, como se quería probar.

Demostración de la unicidad. La unicidad de $\widetilde{\omega}$ se sigue de la unicidad de $\widetilde{H}$. Supóngase que existe $\widetilde{\omega'} : I \to \widetilde{X}$, con $\widetilde{\omega'} \neq \widetilde{\omega}$, tal que $p\widetilde{\omega'} = \omega$ y $\widetilde{\omega'}(0) = \widetilde{x}_0$, entonces la función continua

$$\widetilde{\omega'} p_I : \{z_0\} \times I \to \widetilde{X}$$

es tal que

$$p \circ \widetilde{\omega'} p_I(z_0, t) = p\widetilde{\omega'}(t) = p\widetilde{\omega}(t) = p\widetilde{H}(z_0, t) = \omega p_I(z_0, t)$$

y que

$$\widetilde{\omega'} p_I \circ h_0(z_0) = \widetilde{\omega'} p_I(z_0, 0) = \widetilde{\omega'}(0) = \widetilde{x}_0 = g(z_0)$$

lo que contradice el hecho de que $\widetilde{H}$ es la única función continua con esta propiedad ∇ ♦

Definición 5 *Un espacio topológico (X, τ) es* ***totalmente inconexo por trayectorias*** *si la componente por trayectorias de cada punto $x \in X$ es $\{x\}$.*

Definición 6 *Sea (X, τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
(a) (X, τ) es totalmente inconexo por trayectorias.
(b) Si $\omega : I \to (X, \tau)$ es continua entonces ω es constante.

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b) : \neg(b) \Rightarrow \neg(a)$ Supóngase que existe $\omega : I \to (X,\tau)$ continua pero no constante, entonces, existiría un $t_0 \in I$ tal que $\omega(0) \neq \omega(t_0)$. Haciendo $x = \omega(0)$ e $y = \omega(t_0)$, al ser I conectable por trayectorias, su imagen bajo ω también es conectable por trayectorias y está totalmente contenida en la componente por trayectorias que tiene al punto x, es decir,

$$\omega(I) \subset c(x) \ ;$$

pero el punto $y \in \omega(I) \subset c(x)$ entonces, como $x \neq y$,

$$c(x) \neq \{x\}$$

Por lo tanto (X,τ) no es totalmente inconexo por trayectorias.
$(b) \Rightarrow (a) : \neg(a) \Rightarrow \neg(b)$ Supóngase que (X,τ) no es totalmente inconexo por trayectorias, entonces existen $x, y \in X$ distintos, tales que el punto y pertenece a la componente por trayectorias de x. Por lo tanto existe $\omega : I \to (X,\tau)$ tal que $\omega(0) = x$ y $\omega(1) = y$ continua pero no constante.♦

En particular, como todo espacio discreto es totalmente inconexo por trayectorias, toda $\omega : I \to (X,\tau)$ con (X,τ) discreto que sea continua deberá ser constante, esto último se usará en el siguiente corolario.

Corolario 2 *(Monodromía: caminos equivalentes tienen levantamientos equivalentes). Si $\omega_1 \overset{H}{\simeq} \omega_2$ rel $\dot{I}$ siendo $\omega_1, \omega_2 : I \to X$ entonces $\widetilde{\omega_1} \overset{\widetilde{H}}{\simeq} \widetilde{\omega_2}$ rel $\dot{I}$, donde $\widetilde{H}$ es el levantamiento que tiene la homotopía H respecto a la aplicación cubriente p arbitraria, y $\widetilde{\omega_1}, \widetilde{\omega_2}$ son dos levantamientos respectivos de origen común de ω_1 y ω_2.*

Demostración. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación cubriente arbitraria, sean

$$\omega_1, \omega_2 : I \to X$$

tales que $\omega_1 \overset{H}{\simeq} \omega_2$ *rel* $\dot{I}$ y sean $\widetilde{\omega_1}, \widetilde{\omega_2}$ dos levantamientos respectivos de ω_1 y ω_2 tales que $\widetilde{\omega_1}(0) = \widetilde{\omega_2}(0)$. Sea $h_0 : I \to I \times I$ definida por $h_0(t) = (t,0)$ para toda $t \in I$, entonces por la hipótesis

$$Hh_0(t) = H(t,0) = \omega_1(t) = p\widetilde{\omega_1}(t)$$

para toda $t \in I$, que es la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\widetilde{\omega_1}"] \arrow[d, "h_0"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
I \times I \arrow[r, "H"'] & X
\end{tikzcd}$$

por ésta y debido al teorema anterior, p tiene la propiedad de levantamiento único de homotopías con respecto a I, es decir, existe una única

$$\widetilde{H} : I \times I \to \widetilde{X}$$

levantamiento de H que empieza en $\widetilde{\omega_1}$, esto es,

$$p\widetilde{H}(t,s) = H(t,s) \quad \text{y} \quad \widetilde{H}(t,0) = \widetilde{\omega_1}(t)$$

para toda $t \in I$. Sólo falta ver que $\widetilde{H}(t,1) = \widetilde{\omega_2}(t)$: Considerando que la función $\widetilde{H}$ da lugar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\widetilde{\omega_1}"] \arrow[d, "h_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft" near end] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft" near start] \\
I \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & X
\end{tikzcd}$$

se tiene, fijando s en 1, que $p\widetilde{H}(t,1) = H(t,1) = \omega_2(t)$ para toda $t \in I$, es decir, $\widetilde{H}(t,1)$ es un levantamiento de ω_2 que empieza en $\widetilde{H}(0,1)$; además se tiene que el levantamiento $\widetilde{\omega_2}$ empieza en $\widetilde{\omega_2}(0) = \widetilde{\omega_1}(0) = \widetilde{H}(0,0)$. Se quisiera probar que $\widetilde{\omega_2}$ y $\widetilde{H}(t,1)$ son dos levantamientos de ω_2 que empiezan en un mismo punto

$$\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{H}(0,1)$$

de la fibra $p^{-1}\{\omega_2(0)\}$ y así, por el corolario anterior, tendrían que ser iguales con lo cual terminaría la demostración. Debido a que $\omega_1 \overset{H}{\simeq} \omega_2 \ rel\ \dot{I}$ resulta claro que

$$\widetilde{H}(0,s) \in p^{-1}\{\omega_2(0)\}.$$

Por el lema anterior toda función con dominio I y codominio discreto que es continua es constante. De acuerdo con esto, considérese la restricción $\widetilde{H}\Big|_{\{0\}\times I}^{p^{-1}\{\omega_2(0)\}}$, como

$$\{0\} \times I \cong I$$

podemos pensarla como una función de continua de I en $p^{-1}\{\omega_2(0)\}$; ya que la fibra $p^{-1}\{\omega_2(0)\}$ es un subespacio discreto en $\widetilde{X}$[6], entonces $\widetilde{H}\Big|_{\{0\}\times I}^{p^{-1}\{\omega_2(0)\}} = \widetilde{H}(0,s)$ es constante para toda $s \in I$ (es decir, no depende de s). Por lo que se tiene

$$\widetilde{H}(0,1) = \widetilde{H}(0,0) = \widetilde{\omega_1}(0) = \widetilde{\omega_2}(0)$$

[6]Si $p : \widetilde{X} \to X$ es cualquier aplicación cubriente, entonces p es suprayectiva y para toda $x \in X$, la fibra de p sobre x, $p^{-1}\{x\}$ es un subespacio discreto de $\widetilde{X}$.

Por lo tanto $\widetilde{H}(t,1)$ y $\widetilde{\omega_2}(t)$ son dos levantamientos de ω_2 que empiezan en el mismo punto y por consiguiente son iguales, es decir,

$$\widetilde{H}(t,1) = \widetilde{\omega_2}(t)$$

para toda $t \in I$. En consecuencia

$$\widetilde{\omega_1} \overset{\widetilde{H}}{\simeq} \widetilde{\omega_2}$$

Sólo falta ver que $\widetilde{H}(1,s) = \widetilde{\omega_1}(1) = \widetilde{\omega_2}(1)$, para ello, considérese la restricción $\widetilde{H}\Big|_{\{1\}\times I}^{p^{-1}\{\omega_1(1)\}}$ entonces $\widetilde{H}(1,s)$ puede ser vista como un camino de I en $p^{-1}\{\omega_1(1)\}$ (subespacio discreto de $\widetilde{X}$). Por ser $\widetilde{H}(1,s)$ continua debe ser constante, para toda $s \in I$, por lo que

$$\widetilde{\omega_1}(1) = \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{H}(1,1) = \widetilde{\omega_2}(1)$$

y entonces

$$\widetilde{H}(1,s) = \widetilde{\omega_1}(1) = \widetilde{\omega_2}(1)$$

para toda $s \in I$. Por consiguiente

$$\widetilde{\omega_1} \overset{\widetilde{H}}{\simeq} \widetilde{\omega_2} \; rel \; \dot{I} \qquad \blacklozenge$$

A continuación se verán dos ejemplos más de fibraciones de Hurewicz.

Ejemplo 2 *Si B es totalmente inconexo por trayectorias y $b \in B$, entonces la inclusión*

$$\iota : \{b\} \to B$$

es fibración de Hurewicz.

En efecto, supóngase que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & \{b\} \arrow[d, "\iota"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Luego, si $y_0 \in Y$, entonces, ya que $\{y_0\} \times I \cong I$, la restricción $H|_{\{y_0\}\times I}^{H(\{y_0\}\times I)}$ puede considerarse como un camino en B. Por el lema anterior $H(\{y_0\} \times I)$ es constante. Pero

$$Hh_0(y) = H(y,0) = \iota g(y) = \iota(b) = b$$

para toda $y \in Y$. Por lo cual $H(\{y_0\} \times I) = \{b\}$. Por lo tanto

$$H(Y \times I) = \{b\}$$

pues y_0 se tomó arbitrario en Y. Finalmente, la constante

$$\widetilde{H} : Y \times I \to \{b\}$$

hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & \{b\} \arrow[d, "\iota"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

♦

Ejemplo 3 *Sea* $(X_\lambda)_\Lambda$ *una familia arbitraria de espacios topológicos y considérese su producto topológico* $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. *Entonces toda* λ*-proyección es fibración de Hurewicz.*

Demostración. En efecto, sea $\lambda_0 \in \Lambda$ y supóngase que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "h_0"'] & \prod X_\lambda \arrow[d, "p_{\lambda_0}"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & X_{\lambda_0} \end{tikzcd}$$

Entonces, desde el espacio $Y \times I$ en el λ_0-factor X_{λ_0} se tiene la función continua H y para cualquier otra $\lambda \in \Lambda$ desde $Y \times I$ tenemos la función continua

$$Y \times I \xrightarrow{p_Y} Y \xrightarrow{g} \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \xrightarrow{p_\lambda} X_\lambda$$

Ahora bien, haciendo

$$f_\lambda = \begin{cases} p_\lambda g p_Y, & \text{si } \lambda \neq \lambda_0 \\ H, & \text{si } \lambda = \lambda_0 \end{cases}$$

se tiene que

$$(f_\lambda : Y \times I \to X_\lambda)_\Lambda$$

es una fuente de funciones continuas; por tener $(p_\lambda)_\Lambda$ la propiedad universal del producto topológico, existe una única función continua

$$\widetilde{H} : Y \times I \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

tal que para toda $\lambda \in \Lambda$, $p_\lambda \widetilde{H} = f_\lambda$, es decir, que

$$\begin{tikzcd} & \prod X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"] \\ Y \times I \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "f_\lambda"'] & X_\lambda \end{tikzcd}$$

en particular, para $\lambda = \lambda_0$ se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \prod X_\lambda \arrow[d, "p_{\lambda_0}"] \\ Y \times I \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "f_{\lambda_0} = H"'] & X_\lambda \end{tikzcd}$$

Además, para toda $\lambda \neq \lambda_0$ se tiene que

$$(p_\lambda g p_Y) h_0 = p_\lambda g (p_Y h_0) = p_\lambda g 1_Y = p_\lambda g$$

Ahora, por el penúltimo diagrama se obtiene, para $\lambda \neq \lambda_0$, que

$$p_\lambda \left(\widetilde{H} h_0 \right) = \left(p_\lambda \widetilde{H} \right) h_0 = (p_\lambda g p_Y) h_0$$

Por lo tanto

$$p_\lambda \left(\widetilde{H} h_0 \right) = p_\lambda g$$

para toda $\lambda \in \Lambda$. Ahora bien, según se vió en el capítulo preliminar $(p_\lambda)_\Lambda$ es monofuente, por cual se vale cancelar por la izquierda en la igualdad anterior y obtener que

$$\widetilde{H} h_0 = g$$

Por lo tanto la función continua $\widetilde{H}$ es tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & \prod X_\lambda \arrow[d, "p_{\lambda_0}"] \\ Y \times I \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & X_{\lambda_0} \end{tikzcd}$$

Por lo tanto toda λ-proyección es fibración.♦

Observación 2 *Por la observación 1, si F no es un espacio discreto entonces las fibras de la fibración trivial $p : B \times F \to B$ no son un subespacio discreto del producto $B \times F$; en consecuencia, por el pie de página anterior, p no es una aplicación cubriente.*

Definición 7 *Se dice que una fibración $p : E \to B$ tiene la* ***propiedad de levantamiento único de trayectorias****, si el que $\omega, \omega' : I \to E$ sean trayectorias de origen común tales que $p\omega = p\omega'$, implica que $\omega = \omega'$. Es decir, p tiene esta propiedad, si cualesquiera dos levantamientos de origen común de una misma trayectoria en B son iguales.*

Como un ejemplo de lo anterior, si $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación cubriente, p tiene la propiedad de levantamiento único de trayectorias, pues es bien conocido en la teoría de cubrientes, que dos levantamientos, con origen común, de una misma trayectoria son iguales. Es de interés saber, como se dijo anteriormente, que el corolario 2: *monodromía* puede generalizarse al corolario que abajo sigue y que se desprende de la proposición que se enuncia a continuación. Sus pruebas no se dan aquí, debido a que no son usados en este texto, pero pueden encontrarse en la sección 20 de [7].

Proposición 1 *Si $p : E \to B$ fibración, entonces son equivalentes:*
(a) p tiene la propiedad de levantamiento único de trayectorias.
(b) Si Y es conectable por trayectorias y $f, g : Y \to E$ son continuas tales que existe $y_0 \in Y$ con $f(y_0) = g(y_0)$ y $pf = pg$ entonces $f = g$.
(c) p tiene la propiedad de levantamiento único de homotopías.
(d) Para toda $b \in B$, $p^{-1}\{b\}$ es totalmente inconexo por trayectorias.

Proposición 2 *(Generalización de monodromía) Si $p : E \to B$ es fibración con la propiedad de levantamiento único de trayectorias y $\omega, \omega' : I \to E$ son trayectorias de origen común tales que $p\omega \overset{H}{\simeq} p\omega'$ rel $\dot{I}$ entonces $\omega \overset{\widetilde{H}}{\simeq} \omega'$ rel $\dot{I}$.*

Proposición 3 *La composición de fibraciones es fibración.*

Demostración. Sean
$$p : E \to B \quad \text{y} \quad p' : B \to B'$$
fibraciones que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & E \\ & & \downarrow p \\ \Big\downarrow h_0 & & B \\ & & \downarrow p' \\ Y \times I & \xrightarrow[H]{} & B' \end{array}$$

Este diagrama puede verse también como el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{pg} & B \\ h_0 \Big\downarrow & & \Big\downarrow p' \\ Y \times I & \xrightarrow[H]{} & B' \end{array}$$

por lo que, al ser p' fibración, existe $\widetilde{H'} : Y \times I \to B$ continua tal que

$$p'\widetilde{H'} = H \quad \text{y} \quad \widetilde{H'}h_0 = pg$$

Por la última igualdad anterior es conmutativo el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "\widetilde{H'}"'] & B
\end{tikzcd}$$

Por lo que al ser p fibración existe $\widetilde{H} : Y \times I \to E$ tal que

$$p\widetilde{H} = \widetilde{H'} \quad \text{y} \quad \widetilde{H}h_0 = g$$

Como

$$(p'p)\,\widetilde{H} = p'\left(p\widetilde{H}\right) = p'\widetilde{H'} = H \text{ y } \widetilde{H}h_0 = g$$

se tiene que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[dd, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B \arrow[d, "p'"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[uur, "\widetilde{H}"] & B'
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $p'p$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopías. Es decir, $p'p$ es fibración.♦

Teorema 1 *Si $p : E \to B$ es continua y E es localmente conectable por trayectorias, entonces son equivalentes:*
(a) p es fibración.
(b) Para cada componente por trayectorias C de E, $p|_C^{pC}$ es fibración y pC es componente por trayectorias de B.

Demostración. Sea C' la componente por trayectorias de B que contiene a pC. Sean $b \in pC$, $b' \in C'$ y $\omega : I \to C'$ una trayectoria tal que $\omega(0) = b$ y $\omega(1) = b'$. Por (a), si $e \in p^{-1}\{b\} \cap C$, existe $\widetilde{\omega}$ continua tal que se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\{e\} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\{e\} \times I \arrow[r, "\omega P_I"'] \arrow[ur, "\widetilde{\omega}"] & B
\end{tikzcd}$$

Puesto que $\widetilde{\omega}\,(e,0) = e \in C$ y $\{e\} \times I$ es conectable por trayectorias, $\omega\,(\{e\} \times I) \subset C$. Por lo cual se tiene que $\widetilde{\omega}\,(e,1) \in C$; pero

$$p\widetilde{\omega}\,(e,1) = \omega P_I\,(e,1) = \omega\,(1) = b'$$

Por lo que $b' \in pC$ y por lo tanto $C' = pC$. Ahora bien, si conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & C \arrow[d, "p|_C^{pC}"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & pC \end{tikzcd}$$

entonces conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & C \arrow[r, "\iota"] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & pC \arrow[r, "\jmath"'] & B \end{tikzcd}$$

Por lo tanto existe $\widetilde{H} : Y \times I \to E$ que hace conmutativo el nuevo diagrama. Ahora, para toda $y \in Y$,

$$\widetilde{H}\,(y,0) = g\,(y) \in C,$$

pero C es componente por trayectorias de E. Por lo tanto para toda $y \in Y$, $\widetilde{H}\,(\{y\} \times I) \subset C$. Por lo tanto $\widetilde{H}\,(Y \times I) \subset C$ y, finalmente, se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & C \arrow[d, "p|_C^{pC}"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}\big|_{Y\times I}^{C}"'] & pC \end{tikzcd}$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Supóngase que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Sea $\{C_\iota\}_I$ la familia de componentes por trayectorias de E; puesto que

$$E = \coprod_{\iota \in I} C_\iota$$

entonces

$$Y = \coprod_{i \in I} g^{-1}(C_i)\text{[7]}$$

y entonces

$$Y \times I = \coprod_{i \in I} \left(g^{-1}(C_i) \times I\right)$$

Si $y \in g^{-1}(C_i)$ entonces, debido a la conmutatividad del diagrama anterior,

$$H(y,0) = Hh_0(y) = pg(y)$$

pero $g(y) \in C_i$ y por hipótesis, pC_i es componente por trayectorias de B, por lo tanto

$$H(\{y\} \times I) \subset pC_i$$

En consecuencia, para toda $i \in I$ se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(C_i) \arrow[r, "g|"] \arrow[d, "h_0"'] & C_i \arrow[d, "p|"] \\ g^{-1}(C_i) \times I \arrow[r, "H|"] & pC_i \end{tikzcd}$$

y como para toda C componente por trayectorias de E, $p|_C^{pC}$ es fibración, existe

$$\widetilde{H_i} : g^{-1}(C_i) \times I \to C_i$$

que hace conmutar el nuevo diagrama

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(C_i) \arrow[r, "g|"] \arrow[d, "h_0"'] & C_i \arrow[d, "p|"] \\ g^{-1}(C_i) \times I \arrow[r, "H|"'] \arrow[ur, "\widetilde{H_i}"] & pC_i \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, si $\widetilde{H} : Y \times I \to E$ es la función definida por $\left(\widetilde{H_i}\right)_I$ entonces conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Y por lo tanto p es fibración.♦

[7]Pues $\{C_i\}_I$ es una partición de E, (véase la proposición 3.4)

Proposición 4 *Si $p : E \to B$ es fibración y el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

es cartesiano entonces p' es fibración. (Este resultado quedó demostrado en la proposición 3.6) ♦

Bibliografía

[1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Topología Algebraica: Un enfoque homotópico*, McGraw Hill, México (1998).

[2] G. Allaud, *On an example of R. Brown*, Archiv der Mathematik, Vol. 19 (1969), pp. 654-655.

[3] H. Herrlich and G.E. Strecker, *Coreflective subcategories*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 157, (June 1971), pp. 205-226.

[4] H. Herrlich and G.E. Strecker, *Coreflective subcategories in General Topology*, Fundamenta Mathematicae LXXIII, (1972), pp. 199-218.

[5] H. Herrlich and G.E. Strecker, *Limit-operatores and topological coreflections*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 146, (December 1969), pp. 203-210.

[6] C. Kosniowski, *Topología Algebraica*, Editorial Reverté, S.A., Barcelona, España (1989).

[7] Graciela B. Salicrup, *Introducción a la Topología*, Aportaciones Matemáticas, Textos 1, SMM (1993).

[8] G. B. Salicrup y R. Vazquez, *Fibraciones y Correflexiones*, Anales del Instituto de Matemáticas, Vol. 10 (1970).

[9] G. B. Salicrup y R. Vazquez, *Fibraciones y Correflexiones II*, Anales del Instituto de Matemáticas, Vol. 11 (1971).

[10] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, (1966).

[11] Steenrod, N.E., *A convenient category of topological spaces*, Revista Michigan Math. J., Vol. 14 (1967) pp. 133-152

[12] A. Strøm, *Note on cofibrations II*, Math. Scand., Vol. 22 (1968), pp. 130-142.

[13] Roberto Vazquez, *Lecciones de Topología*, Foro RedMat, Vol. 2, No. 5 (1996), http://www.red-mat.unam.mx.

[14] ROBERTO VAZQUEZ, *Reflexividad y Correflexividad*, Foro RedMat (1997), http://www.red-mat.unam.mx.

Índice de Materias