UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DEL GRUPO SIMETRICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

MAYAM CRISTINA GOMEZ CANO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. ERNESTO VALLEJO RUIZ

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DEL GRUPO SIMETRICO

realizado por MAYAM CRISTINA GOMEZ CANO

con número de cuenta 9251945-7, pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	DR. ERNESTO VALLEJO RUIZ	Ernesto Vallejo R.
Propietario	DR. DIETER VOSSIECK	Dieter Vossieck
Propietario	DRA. MARTHA TAKANE IMAY	Martha Takane
Suplente	DRA. MARIA ALICIA AVIÑO DIAZ	
Suplente	DR. ROBERTO MARTINEZ VILLA	

Consejo Departamental de MATEMATICAS

MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO

A Enrique, Adoración, Pablo y Nuria.

Agradecimientos

A mi maestro Ernesto Vallejo Ruiz.
A mis maestros Dieter Vossieck, Martha Takane, María Alicia Aviñó y Roberto Martínez Villa.
A mi maestra Doris Cetina.
A mis amigos Sergio, Cruz, Diana y Gerardo.

Índice General

1 Representaciones de Grupos. 5

2 Álgebras de Grupo e Idempotentes. 14

3 Simetrizadores de Young. 23

4 Bases generadas por simetrizadores de Young. 52

5 Unidades Seminormales. 60

6 Matrices Seminormales. 72

7 La fórmula de Murnaghan-Nakayama. 94

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar y describir algunos de los resultados más importantes obtenidos por Alfred Young referentes a las representaciones del grupo simétrico.

El problema que ocupó la atención de Young y que inició la teoría desarrollada por él fué el de resolver ciertas ecuaciones que surgieron en su estudio de la Teoría de Invariantes. Estas ecuaciones, referidas en textos de la época como ecuaciones substitucionales, son del tipo $LX = 0$, donde L es un elemento dado en $C[S_n]$ y X es un elemento en $C[S_n]$ por determinar. Young demostró que cada ecuación puede ser reducida a un conjunto de ecuaciones matriciales y en consecuencia gran parte de sus artículos publicados entre 1900 y1935 están dedicados a la presentación de las representaciones irreducibles del grupo simético de una forma explícita.

Esta tesis está basada en su mayor parte en el libro *Substitutional Analysis* de D.E. Rutherford. Como el mismo autor explica, el libro pretende unificar el trabajo de Young usando su lenguaje matemático pero unificando la notación, variando el orden y en ocasiones incluyendo nuevas demostraciones debidas a matemáticos como von Neumann, Robinson y Thrall. El lenguaje de módulos no es usado en este libro.

La forma de abordar el tema en este trabajo será empleando objetos combinatorios, distintos tipos de tablas de Young, y aplicando resultados de la teoría general de representaciones de grupos y de la teoría de módulos sobre un álgebra de grupo. Una apoximación combinatoria al tema se encuentra en el libros como *Young tableaux* de W. Fulton y *The Symmetric Group* de B.E. Sagan, [9]; una aproximación con lenguaje de módulos se encuentra en el libro *The Representation Theory of the Symmetric Group* de

G. D. James y A. Kerber.

Varios de los resultados consultados fueron reescritos con el lenguje de módulos y sus demostraciones fueron sustituidas por demostraciones que utilizan resultados de la teoría correspondiente y son en consecuencia considerablemente más simples. También, algunos resultados expuestos en el libro de Rutherford sin la verificación de ciertos cálculos o sin la explicación de todos los casos posibles, están expuestos en la tesis sin tales omisiones.

El Capítulo 1 es un repaso de resultados generales de la Teoría de Representaciones de Grupos y está basado en los libros *Representations and Characters of Groups* de G. D. James y M. W. Liebeck [7] y *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras* de C. W. Curtis y I. Reiner [2].

En el capítulo 2 estudiamos la descomposición de un álgebra de grupo en ideales minimales y en ideales bilaterales. Está basado en el libro *Representations of Groups with Special Consideration for the Needs of Modern Physics* de H. Boerner [1, Cap. III].

El primer objetivo del Capítulo 3 es construir un conjunto completo de $C[S_n]-$módulos sobre C, un campo de característica cero. Para ello se definen elementos del álgebra de grupo asociados a tablas de Young, los simetrizadores de Young. Estos elementos generan $C[S_n]-$módulos irreducibles isomorfos si y sólo si están generados por simetrizadores asociados a tablas de la misma forma, o dicho de otra manera, a la misma partición de n. Como el número de $C[S_n]-$módulos irreducibles es menor o igual que el número de clases de conjugación de S_n y estas se encuentra en correspondencia biyectiva con las particiones de n, el resultado anterior permite obtener el conjunto completo buscado. Se demuestra también en este capítulo que la dimensión de los $C[S_n]-$módulos generados por los simetrizadores de Young no depende del campo. Es este hecho el que nos permite exponer resultados que generalmente son válidos para campos algebraicamente cerrados suponiendo simplemente C de característica cero.

En el capítulo 4, a través de los simetrizadores de Young definidos en el capítulo 3, se construye una $C-$base del álgebra de grupo $C[S_n]$ y $C-$bases para los $C[S_n]-$módulos generados por ellos. Sin embargo, las representaciones matriciales asociadas son difíciles de calcular pues las fórmulas para multiplicar simetrizadores de Young no son sencillas.

Se introducen en el Capítulo 6 las unidades seminormales, elementos del álgebra de grupo para cuya definición son necesarios los simetrizadores de Young. Estos nuevos elementos nos proporcionarán también una $C-$base de $C[S_n]$ y $C-$bases de los $C[S_n]-$módulos generados por ellos. A diferencia de las relaciones satisfechas por los simetrizadores de Young, las relaciones que satisfacen las unidades seminormales son simples y en consecuencia las representaciones matriciales asociadas son más sencillas de calcular.

Según el teorema de Ramificación, expuesto en su versión matricial en el Capítulo 6, es posible expresar la matriz seminormal de una permutación τ en S_n tal que $\tau(n) = n$, como una suma directa de matrices seminormales de S_{n-1}. Este resultado, junto con el lema de Schur, es utilizado para dar explícitamente las matrices correspondientes a un conjunto de generadores de S_n.

En el último capítulo obtendremos una fórmula combinatoria para calcular los caracteres del grupo simétrico. La demostración estará basada en los resultados obtenidos a través de las unidades seminormales.

Finalmente es importante mencionar que la representación seminormal es aún de gran interés pues es probable que se puedan generalizar las ideas de su construcción para estudiar representaciones irredecibles de álgebras de Hecke afines asociadas a grupos de Coexeter.

Capítulo 1

Representaciones de Grupos.

En este capítulo se exponen las definiciones y los resultados de la Teoría de Representaciones de Grupos que serán usados en el transcurso del trabajo. Las demostaciones se encuentran en los libros [7] y [2].

En todo el trabajo usaremos la siguiente notación.

Notación.

G grupo finito.

C campo de característica cero.

Para los fines de este trabajo es suficiente exponer los resultados de Teoría de Representaciones de Grupos para campos y grupos con las características requeridas en la notación anterior. Sin embargo, algunos de ellos son válidos en casos más generales.

1.1 $C[G]$ −módulos.

Definición 1 *Sea*

$$C[G] := \left\{ \sum_{g\in G} a_g g \mid a_g \in C \right\}.$$

Con las siguientes operaciones $C[G]$ tiene estructura de $C-$álgebra:

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\, g$$

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{g\in G} b_g g\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{\substack{(h,k)\\ hk=g}} a_h b_k\right) g$$

$$c\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} c a_g g, \qquad si\ c \in C$$

Usualmente a esta álgebra se le llama el ***álgebra de grupo de G sobre C.***

Definición 2 *Un* $C[G]$ ***−módulo izquierdo*** *es un grupo abeliano V junto con una multiplicación*

$$\begin{aligned} C[G] \times V &\to V \\ (x, v) &\to xv \end{aligned}$$

que satisface para todo $x, y \in C[G]$, $u, v \in V$

$$\begin{aligned} x(u+v) &= xu + xv \\ (x+y)v &= xv + yv \\ (xy)v &= x(yv) \\ 1_{C[G]}v &= v \end{aligned}$$

Observación. Como $C[G]$ es una $C-$álgebra, V es automáticamente un espacio vectorial sobre C :

$$\alpha v := \left(\alpha 1_{C[G]}\right) v \qquad \alpha \in C,\ v \in V$$

De ahora en adelante $C[G]$ −módulo querrá decir $C[G]$ −módulo izquierdo a menos de que se especifique lo contrario.

Definición 3 *Sean V y W dos $C[G]$ −módulos.Una aplicación $f : V \to W$ es un* $C[G]$ ***−homomorfismo,*** *o equivalentemente un homomorfismo de $C[G]$ −módulos, si*

$f(v+w) = f(v) + f(w)$ *y* $f(xv) = xf(v)$ *para todo* $x \in C[G]$, $v, w \in V$. *En particular,* f *es* $C-$*lineal.*

Definición 4 *Un* C$[G]-$***isomorfismo*** *es un* $C[G]-$*homomorfismo biyectivo.*

Definición 5 V *y* W *son* C[G]$-$***módulos isomorfos*** *si existe un* $C[G]-$*isomorfismo* $f: V \to W$.

Definición 6 *Sea* V *un* $C[G]-$*módulo. Sea* W *un subgrupo aditivo de* V. *Diremos que* W *es un* C$[G]-$***submódulo*** *de* V *si* xw *está en* W *para todo* $x \in C[G]$, $w \in W$. *Si* V *es distinto del espacio nulo, diremos que* V *es* ***irreducible*** *si no tiene* $C[G]-$*submódulos distintos de* V *y del nulo; en caso contrario diremos que* V *es* ***reducible.***

Definición 7 V *es* ***completamente reducible*** *si para cada* $C[G]-$*submódulo* W *de* V *existe otro* $C[G]-$*submódulo* W' *tal que* $V = W \bigoplus W'$.

Nota. A los $C[G]-$módulos irreducibles también se les llama simples.

Teorema 8 *(Maschke). Todo* $C[G]-$*módulo es completamente reducible.*

Notación.

$End_{C[G]}(V)$	anillo de $C[G]-$homomorfismos de V en V.
D	álgebra con división.
$M_n(D)$	anillo de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en D.

Lema 9 *(Schur). Sean* V *y* W *dos* $C[G]-$*módulos irreducibles. Entonces*

1. Si $f: V \to W$ *es un homomorfismo de* $C[G]-$*módulos, entonces* $f = 0$ *ó* f *es un isomorfismo.*

2. Si además C *es algebraicamente cerrado, entonces todo* $C[G]-$*homomorfismo* $f: V \to V$ *es un múltiplo escalar de la transformación identidad de* V *en* V.

Corolario 10 *Si V es un $C[G]$ −módulo irreducible entonces $End_{C[G]}(V)$ es un álgebra con división; y si C es algebraicamente cerrado $End_{C[G]}(V) \cong C$.*

Definición 11 *Diremos que los $C[G]$ −módulos irreducibles $V_1, ..., V_r$ forman un* ***conjunto completo de $C[G]$ −módulos irreducibles*** *si se cumple lo siguiente:*

1. *Si V es un $C[G]$ −módulo irreducible entonces $V \cong V_i$ para alguna i , $1 \leq i \leq r$.*
2. *$V_i \ncong V_j$ si $i \neq j$.*

Por el teorema de Maschke, al $C[G]$ −módulo $C[G]$ es posible descomponerlo en una suma directa de $C[G]$ −submódulos irreducibles.

Teorema 12 *Si $C[G] = U_1 \bigoplus ... \bigoplus U_s$ es una suma directa de $C[G]$ −submódulos irreducibles, entonces todo $C[G]$ −módulo irreducible es isomorfo a uno de los $C[G]$ −módulos U_i, $1 \leq i \leq s$.*

Teorema 13 *Sea $D_i = End_{C[G]}(V_i)$. Si $\{V_1, ..., V_r\}$ es un conjunto completo de $C[G]$ −módulos irreducibles, existe un isomorfismo de C−álgebras $\psi : C[G] \to \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ tal que si $\varphi : C[G] \to V_1^{\oplus n_1} \bigoplus ... \bigoplus V_r^{\oplus n_r}$ es un $C[G]$ −isomorfismo entonces $\psi\varphi^{-1}\left(V_i^{\oplus n_i}\right) = M_{n_i}(D_i)$.*

Corolario 14 *Si $C[G] \cong V_1^{\oplus n_1} \bigoplus ... \bigoplus V_r^{\oplus n_r}$ entonces*

$$r \leq \text{ número de clases de conjugación de } G.$$

Corolario 15 *Si C es algebraicamente cerrado y $C[G] \cong V_1^{\oplus n_1} \bigoplus ... \bigoplus V_r^{\oplus n_r}$, entonces*

1. $C[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(C)$.
2. $n_i = dim_C V_i$.
3. $|G| = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$.

4. $r =$ número de clases de conjugación de G.

1.2 Representaciones lineales y matriciales.

Definición 16 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Una* ***representación lineal*** *de G en V es un homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$, donde $GL(V)$ es el grupo de isomorfismos $C-$lineales de V en V.*

Definición 17 *Sean ρ_1 una representación lineal de G en V y ρ_2 una representación lineal de G en W. Las* ***representaciones*** *ρ_1 y ρ_2 son* ***equivalentes*** *si existe $\phi : V \to W$ isomorfismo lineal tal que*

$$\rho_2(g) = \phi \circ \rho_1(g) \circ \phi^{-1} \qquad \text{para todo } g \in G$$

Proposición 18 *Hay una correspondencia biyectiva entre los $C[G]-$módulos y las representaciones lineales de G:*

Proposición 19 *Si $\rho : G \to GL(V)$ es un homomorfismo, entonces el espacio vectorial V con la multiplicación*

$$C[G] \times V \to V$$
$$\left(\left(\sum_{g\in G} a_g g\right), v\right) \to \sum_{g\in G} a_g \rho(g)(v)$$

es un $C[G]-$módulo.

Si V es un $C[G]-$módulo entonces, la aplicación $\rho_V : G \to GL(V)$ definida por $\rho_V(g) = gv$ es un homomorfismo.

Las dos asociaciones anteriores son inversas una de la otra.

Proposición 20 *Sean V y W $C[G]-$módulos. V y W son isomorfos si y sólo si ρ_V es equivalente a ρ_W.*

Definición 21 *Una* ***representación por matrices*** *de G es un homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL_n(C)$, donde $GL_n(C)$ denota al grupo de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en el campo C. El* ***grado*** *de ρ es n.*

Definición 22 *La representación $\rho : G \to GL_1(C)$ definida por $\rho(g) = [1]$ para toda $g \in G$, se llama la representación* ***trivial*** *de G.*

Sean V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B}$ una base de V. La aplicación $\varepsilon_{\mathcal{B}} : GL(V) \to GL_n(C)$ definida por $\varepsilon_{\mathcal{B}}(T) = [T]_{\mathcal{B}}$, donde $[T]_{\mathcal{B}}$ es la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B}$, es un isomorfismo de grupos. El siguiente resultado es consecuencia de este hecho.

Proposición 23 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Hay una correspondencia biyectiva entre las representaciones lineales de G en V y las representaciones de G por matrices de tamaño $n \times n$, dada por*

$$\left(\rho_V : G \to GL(V)\right) \longleftrightarrow \left(\varepsilon_{\mathcal{B}} \circ \rho_V : G \to GL_n(C)\right)$$

Definición 24 *Dos representaciones por matrices $\rho_1 : G \to GL_m(C)$ y $\rho_2 : G \to GL_n(C)$ son* ***equivalentes*** *si $n = m$ y existe $A \in GL_n(C)$ tal que*

$$\rho_2(g) = A\rho_1(g)A^{-1} \qquad \text{para todo } g \in G$$

Si ρ_1 es equivalente a ρ_2 escribiremos

$$\rho_1 \sim \rho_2$$

La correspondencia de la proposición 23 preserva equivalencias.

Definición 25 *Una representación por matrices $\rho : G \to GL_n(C)$ se llama* ***irreducible, reducible, completamente irreducible*** *si C^n con la estructura heredada de $C[G]-$módulo es irreducible, reducible o completamente irreducible.*

En los capítulos 6 y 7 usaremos las siguiente versión matricial del lema de Schur.

Lema 26 *(Schur) Sean $\rho_1 : G \to GL_n(C)$ y $\rho_2 : G \to GL_m(C)$ representaciones irreducibles de G. Si C es algebraicamente cerrado y A es una matriz de tamaño $n \times m$ tal que*

$$\rho_1(g)A = A\rho_2(g) \qquad \text{para toda } g \in G,$$

entonces

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & si\ \rho_1 \nsim \rho_2 \\ \lambda I_n & si\ \rho_1 \sim \rho_2 \end{array} \right\}$$

donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$ y λ está en C.

1.3 Caracteres

Definición 27 *Si $A = (a_{ij})$ es la matriz de tamaño $n \times n$ cuya entrada (i,j) es a_{ij}, con $a_{ij} \in C$, entonces la **traza** de A, denotada $tr(A)$, se define de la siguiente manera:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Definición 28 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y sea B una base de V.*

$$tr(T) := tr([T]_B)$$

Nota. Como $\mathrm{tr}(MAM^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ para cualesquiera matrices A y M de tamaño $n \times n$, la definición anterior no depende de la elección de la base.

Definición 29 *Sea V un $C[G]$ −módulo y sea $\rho_V : G \to GL(V)$ su representación lineal asociada. El **carácter de** V es la función $\chi : G \to C$ definida por*

$$\chi(g) = tr(\rho_V(g))$$

Se dice también que la función χ es un carácter de G.

Definición 30 *χ es un carácter **irreducible** de G si χ es el carácter de un $C[G]$ −módulo irreducible.*

Proposición 31 *Si g y h son elementos conjugados del grupo G, entonces*

$$\chi(g) = \chi(h)$$

para todo carácter χ de G.

Teorema 32 *Sean V y W dos $C[G]$ −módulos con caracteres χ y ψ respectivamente. Entonces V y W son isomorfos si y sólo si $\chi = \psi$.*

C^G denotará el espacio vectorial de todas las aplicaciones de G en C.

Definición 33 *Sean φ y $\psi \in C^G$.*

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \psi(g^{-1})$$

$\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interior. Si C es el campo de los números complejos entonces

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$$

Teorema 34 *Sean $\chi_1, ..., \chi_k$ los caracteres irreducibles de G. Si ψ es cualquier carácter de G, entonces*

$$\psi = d_1\chi_1 + ... + d_k\chi_k$$

para algunos enteros no negativos $d_1, ..., d_k$. Más aún,

$$d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle \qquad \text{para toda } 1 \leq i \leq k, \text{ y}$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} d_i^2$$

1.4 Restricción de una representación y representaciones inducidas.

Definición 35 *Si H es un subgrupo de G y V es un $C[G]-$módulo, la* **restricción** *de V en H, denotada $Res_H^G(V)$, es el espacio vectorial V con la multiplicación de $C[G]$ en V restringida a $C[H]$.*

Definición 36 *Si H es un subgrupo de G y V un $C[G]-$módulo, la representación* **inducida** *en G desde H, denotada por $Ind_H^G(V)$, es la representación asociada al $C[G]-$módulo $C[G]\bigotimes_{C[H]} V$.*

Teorema 37 *(Reciprocidad de Frobenius) Sean H un subgrupo de G, V un $C[G]-$módulo y W un $C[H]-$módulo. Entonces*

$$\left\langle Ind_H^G(\chi_W), \chi_V\right\rangle = \left\langle \chi_W\ , Res_H^G(\chi_V)\right\rangle$$

Proposición 38 *Si H es un subgrupo de G y C la representación trivial de H, entonces*

$$Ind_H^G(C) \cong C[G/H]$$

Capítulo 2

Álgebras de Grupo e Idempotentes.

En el capítulo anterior vimos que cualquier $C[G]$ –módulo es una suma directa de $C[G]$ –submódulos irreducibles y todo $C[G]$ –módulo irreducible es isomorfo a algún $C[G]$ –submódulo de $C[G]$. En consecuencia, es posible estudiar los $C[G]$ –módulos restringiendo la atención a los $C[G]$ –submódulos irreducibles de $C[G]$, o lo que es equivalente, a los ideales minimales de $C[G]$.

Existe una manera sencilla de obtener ideales izquierdos de un álgebra. Si c es un elemento de $C[G]$, entonces el conjunto de elementos de la forma xc con x arbitraria evidentemente constituye un ideal izquierdo, el ideal izquierdo generado por c, simbólicamente $C[G]c$. Veremos en este capítulo que todo ideal izquierdo de $C[G]$ puede ser generado de esa manera, y más aún, entre sus elementos generadores habrá siempre al menos un elemento e tal que $e^2 = e$, es decir, tal que sea **idempotente**.

Para este capítulo se consultó el libro [1, Cap. III].

Definición 39 *Sea R un anillo. Se dice que I es un* ***ideal izquierdo*** *de R si I cumple las siguientes dos propiedades:*

1. *I es un subgrupo de R bajo la adición.*

2. *Para toda $x \in I$ y toda $a \in R$, ax está en I.*

Nota. Los ideales que estudiaremos serán siempre ideales izquierdos del álgebra de grupo.

Definición 40 *Un* ***ideal izquierdo minimal*** *de R, es un ideal izquierdo I que no contiene ideales de R distintos de I y del ideal nulo.*

De las definiciones anteriores y la definiciones de $C[G]$ –submódulo y $C[G]$ –módulo irreducible del capítulo anterior, se siguen las siguientes equivalencias:

- I es un ideal izquierdo de $C[G]$ si y sólo si I es un $C[G]$ –submódulo de $C[G]$.
- I es un ideal izquierdo minimal de $C[G]$ si y sólo si I es un $C[G]$ –submódulo de $C[G]$ irreducible.

Definición 41 *Sean I, I' ideales izquierdos de $C[G]$. I e I' son* ***equivalentes*** *si son isomorfos como $C[G]$ –módulos. Una* ***equivalencia*** *entre I e I' es un isomorfismo $\phi : I \rightarrow I'$ de $C[G]$ –módulos.*

Teorema 42 *En todo ideal izquierdo I de $C[G]$ existe al menos un idempotente e tal que genera a I.*

Si denotamos con I' a un ideal izquierdo de $C[G]$ entonces de acuerdo al teorema de Maschke 8, existe otro ideal izquierdo I'' tal que $C[G] = I' \bigoplus I''$. Se sigue que el teorema 42 está contenido en el siguiente teorema.

Teorema 43 *Si $C[G] = I' \bigoplus I''$ es una suma directa de dos ideales izquierdos y $1 = e' + e''$ con $e' \in I'$ y $e'' \in I''$, entonces $I' = C[G]e'$ y $I'' = C[G]e''$. Además, los generadores e' y e'' son idempotentes ortogonales, es decir, $e'e'' = e''e' = 0$.*

Demostración. Sea $x \in C[G]$ y sean $x = x' + x''$ y $1 = e' + e''$ con $x', e' \in I'$ y $x'', e'' \in I''$. Entonces multiplicando por x la descomposición del 1 concluimos que $xe' = x'$ y $xe'' = x''$. Si x está en I' entonces $x = xe'$. Además, como e' está en I', para toda x en $C[G]$ se tiene que xe' está en I'. Se sigue que los elementos en I' y sólo estos pueden ser escritos de la forma xe'. Por lo tanto, $I' = C[G]e'$. Análogamente $I'' = C[G]e''$.

Multiplicando por e', por la izquierda y por la derecha, a la descomposición del 1 tenemos que $e' = (e')^2 + e''e' = (e')^2 + e'e''$, lo cual implica que $e' - (e')^2 = e''e' = e'e''$ está en $I' \cap I''$. Por lo tanto, e' es idempotente y $e'e'' = e''e' = 0$. Análogamente, e'' es idempotente. ■

Observación.

El teorema 43 también es válido cuando se reemplaza $C[G]$ por un ideal izquierdo I. En la demostración solamente se debe reemplazar 1 por un elemento generador e de I.

El siguiente teorema generaliza al teorema 43. La demostración es semejante por lo cual se omitirá.

Teorema 44 *Si $C[G] = I_1 \bigoplus I_2 \bigoplus ..... \bigoplus I_k$ es una descomposición de ideales izquierdos, entonces se obtiene un conjunto $e_1, e_2, ...e_k$ de generadores para estos ideales a través de la descomposición del 1. Además, $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$, donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.*

Definición 45 *Sean e y e' elementos idempotentes de un anillo R. Se dice que e y e' son **idempotentes ortogonales** si $ee' = e'e = 0$.*

Definición 46 *Un idempotente se llama **primitivo** si no existe ninguna descomposción $e = e' + e''$, con e', e'' idempotentes ortogonales distintos de cero.*

Teorema 47 *Si e es un idempotente primitivo, entonces el ideal izquierdo $C[G]e$ generado por e es minimal. Si I es un ideal minimal, entonces todo idempotente que genere a I es primitivo.*

Demostración.

Supongamos que e es primitivo y $C[G]e$ no es minimal. Por la observación al teorema 43, es posible descomponer al ideal $C[G]e$ en una suma directa de ideales cuyos generadores contradicen la suposición e primitivo.

Para la segunda parte del teorema, supongamos que e no es primitivo y que genera al ideal minimal I. Entonces existe un par de elementos e' y e'' idempotentes, ortogonales y distintos de cero, tales $e = e' + e''$. Se sigue que la suma $C[G]e' + C[G]e''$ es directa. Si x está en $C[G]e$ entonces $x = xe = x(e' + e'') = xe' + xe''$ y por lo tanto x está en $C[G]e' \bigoplus C[G]e''$. Si x está en $C[G]e' \bigoplus C[G]e''$ entonces $x = x_1e' + x_2e''$ para algunos elementos x_1 y x_2 en $C[G]$ y en consecuencia $x = xe$, es decir, x está en $C[G]e$. Por lo tanto $C[G]e = C[G]e' \bigoplus C[G]e''$ y eso contradice $C[G]e$ minimal. ■

Lema 48 *Sea $\Phi : I \to I'$ tal que $\Phi(ax) = a\Phi(x)$ para toda $a \in C[G]$ y toda $x \in I$. Entonces Φ está definida por $\Phi(x) = xb$ para alguna $b \in C[G]$ con la propiedad $b = ebe'$, donde e y e' son idempotentes generadores de I e I' respectivamente.*

Demostración.

Sean e un idempotente generador de I y b su imagen. Entonces $\Phi(x) = \Phi(xe) = x\Phi(e) = xb$. Como $\Phi(e) = eb$, tenemos que $eb = b$. Por otro lado, si e' es un idempotente generador de I', como b está en I', $be' = b$. Por lo tanto, $b = ebe'$. ■

Lema 49 *Sean I, I' ideales izquierdos minimales de $C[G]$ con idempotentes generadores e y e' respectivamente. Toda aplicación definida de I a I' a través de la multiplicación derecha por cualquier elemento $ece' \neq 0$, es una equivalencia de ideales izquierdos.*

Demostración.

Sea $\phi : I \to I'$ tal que $\phi(x) = xece'$. Para toda $a \in C[G]$ y toda $x \in I$ se tiene que $\phi(ax) = a\phi(x)$. Basta entonces aplicar el lema de Schur (lema 9) pues $\phi(e) = ece' \neq 0$. ■

El siguiente teorema se sigue de los lemas 48 y 49.

Teorema 50 *Sean I, I' dos ideales izquierdos minimales de $C[G]$ con idempotentes generadores e y e' respectivamente. Entonces I e I' son equivalentes si y sólo si existen en $C[G]$ elementos de la forma exe' diferentes de cero. Las equivalencias entre I e I' están definidas a través de la multiplicación derecha por estos elementos.*

Teorema 51 *Sea e un elemento idempotente de $C[G]$. Entonces*

$$End_{C[G]}(C[G]e) \cong [eC[G]e]^{op}$$

como $C-$álgebras.

Demostración.

Sea $\Phi : End_{C[G]}(C[G]e) \to [eC[G]e]^{op}$ tal que $\Phi(f) = f(e)$. Se puede verificar directamente que Φ es un homomorfismo de $C-$álgebras. Si $f \in End_{C[G]}(C[G]e)$ entonces por el lema 48, f se define por $f(x) = x(ece)$ para algún c en $C[G]$. Se sigue que si $\Phi(f) = f(e) = 0$ entonces $f = 0$ y por lo tanto Φ es inyectivo. Como cualquier elemento en $eC[G]e$ define un elemento en $End_{C[G]}(C[G]e)$ a través de la multiplicación derecha, Φ es sobre. ■

A continuación enunciaremos la propiedad más importante de los idempotentes primitivos.

Teorema 52 *Sea e un idempotente en $C[G]$. Si para todo x en $C[G]$, $exe = \xi e$ para algún ξ en C, entonces e es un idempotente primitivo. Además, si C es algebraicamente cerrado y e es un idempotente primitivo entonces para todo x en $C[G]$, $exe = \xi e$ para algún ξ en C.*

Demostración.

Sea $e = e' + e''$ con e' y e'' idempotentes ortogonales. Entonces $ee' = e'e = e'$ y por lo tanto también $ee'e = e'$. Como todos los elementos de la forma exe son múltiplos escalares de e, tenemos que $e' = \lambda e$. Los únicos valores posibles para λ son 0 y 1, por lo tanto no existe una descomposición $e = e' + e''$ con e' y e'' idempotentes ortogonales distintos de cero.

Supongamos ahora que C es algebraicamente cerrado. Sea e un idempotente primitivo en $C[G]$. Por el teorema 47 , $C[G]e$ es un ideal minimal. Se sigue del lema de Schur (lema 9) y del teorema 51 que $eC[G]e \cong [End_{C[G]}(C[G]e)]^{op} \cong C^{op} \cong C$. Como e está en $eC[G]e$, e genera a $eC[G]e$. Por lo tanto, para toda x en $C[G]$ existe ξ en C tal que $exe = \xi e$. ■

Definición 53 *Sea R un anillo. Se dice que I es un* ***ideal bilateral*** *de R si I cumple las siguientes dos propiedades:*

1. *I es un subgrupo aditivo de R.*
2. *Para todo $x \in I$ y $a, b \in R$, axb está en I.*

Trabajaremos ahora con ideales bilaterales de $C[G]$ y veremos que una descomposición de $C[G]$ en estos ideales producirá cierto orden dentro de la clase de ideales izquierdos.

Teorema 54 *Si $C[G] = A_1 \bigoplus A_2 \bigoplus ... \bigoplus A_k$ es una suma directa de ideales bilaterales, entonces los idempotentes generadores de los ideales en esa descomposición de $C[G]$ se determinan de manera única y se encuentran en el centro de $C[G]$, es decir, son idempotentes centrales. Además, para toda $a_i \in A_i$ y $a_j \in A_j$, se tiene $a_i a_j = a_j a_i = 0$ si $i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$.*

Demostración.

De acuerdo al teorema 44 y tomando en cuenta que también es válido para el caso de ideales derechos, si $1 = e_1 + e_2 + ...e_k$ con $e_i \in A_i$, $1 \leq i \leq k$, entonces

$$e_i C[G] = A_i = C[G] e_i \tag{2.1}$$

y $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, $1 \leq i, j \leq k$. Si ahora x es un elemento arbitrario en $C[G]$ y $x = x_1 + x_2 + ... + x_k$ con $x_i \in A_i, 1 \leq i \leq k$, entonces por 2.1 tenemos las igualdades $xe_i = x_i e_i = e_i x_i = e_i x$ y por lo tanto e_i está en el centro de $C[G]$.

Si $A_i = C[G] e^*$ entonces tanto la multiplicación derecha por e^* como la multiplicación izquierda por e_i dejan invariantes a los elementos de A_i. Como e_i está en el centro de $C[G]$, $e^* = e^* e_i = e_i e^* = e_i$.

Finalmente, para toda $a_i \in A_i$ y $a_j \in A_j$ el producto $a_i a_j$ está en $A_i \cap A_j$ ya que A_i es un ideal derecho y A_j es un ideal izquierdo. Por lo tanto $a_i a_j = 0$. Análogamente $a_j a_i = 0$. ■

Teorema 55 *Si A es un ideal bilateral, I un ideal izquierdo minimal y e un idempotente generador de I, entonces I está contenido en A ó $ae = 0$ para toda $a \in A$.*

Demostración.

Sea $M = \{ae \mid a \in A\}$. M está contenido en I y es un ideal izquierdo ya que A lo es. I tiene la propiedad de ser minimal, lo cual implica que $M = 0$ ó $M = I$. En el primer caso $ae = 0$ para toda $a \in A$ y en segundo $I = M$ está contenido en A por ser éste un ideal derecho. ■

Teorema 56 *Si A es un ideal bilateral y si el ideal izquierdo minimal I está contenido en A, entonces todo ideal izquierdo I' equivalente a I también está contenido en A.*

Demostración.

Por el teorema 50, existe una equivalencia de I en I' definida a través de la multiplicación derecha por algún elemento en $C[G]$. Como A es un ideal derecho, I', la imagen del isomorfismo también está en A. ■

Definición 57 *Un ideal bilateral se llama **simple** si no es el ideal nulo y no contiene ideales bilaterales distintos de él mismo o del nulo.*

Teorema 58 *Si $C[G]$ se descompone en una suma directa de ideales bilaterales simples, $C[G] = A_1 \bigoplus A_2 \bigoplus \ldots\ldots \bigoplus A_r$, entonces esa descomposición es única.*

Demostración.

Sea $C[G] = B_1 \bigoplus B_2 \bigoplus \ldots\ldots \bigoplus B_s$ una segunda descomposición, y sean $e_1, e_2, ..., e_r$ los idempotentes generadores de $A_1, A_2, ...A_r$ respectivamente, entonces por el teorema 54, $1 = e_1 + e_2 + ... + e_r$. Sean $1 \leq j \leq r$ y B_0 el conjunto de elementos $b_1 e_j$ con $b_1 \in B_1$. B_0 es un ideal bilateral contenido en A_j y en B_1. Se sigue que, $B_0 = 0$ ó $B_1 = B_0 = A_j$. El primer caso no puede ocurrir para toda j, $1 \leq j \leq r$, ya que $0 \neq B_1 = B_1 e_1 + B_1 e_2 + ... + B_1 e_r$. Por lo tanto, $B_1 = A_i$ para alguna i, $1 \leq i \leq r$, y análogamente para el resto de los ideales. Se concluye finalmente que $s \leq r$ y de manera análoga, $r \leq s$. ■

Por el teorema de Maschke (teorema 8) , $C[G]$ tiene una descomposición en suma directa de ideales izquierdos minimales:

$$C[G] = \bigoplus_{i,j} I_i^j$$

donde dos ideales izquierdos minimales I_i^j y I_s^l son equivalentes si y sólo si tienen el mismo índice superior. Agrupando los ideales equivalentes:

$$C[G] = \bigoplus_{j=1}^{r} A_j \tag{2.2}$$

donde $A_j = \bigoplus_i I_i^j$ y donde r es la cardinalidad de un conjunto completo de ideales izquierdos minimales.

Teorema 59 *A_j es un ideal bilateral simple,* $1 \leq j \leq r$.

Demostración.

Por el teorema 44, $1 = \sum_{j=1}^{r} e^j$ donde e^j es un idempotente generador de A_j y $e^j = \sum_{i=1}^{k_j} e_i^j$ donde e_i^j es un idempotente generador de I_i^j , $1 \leq i \leq k_j$.

A_j es un ideal izquierdo por ser una suma directa de ideales izquierdos. Demostraremos que A_j es también un ideal derecho. Afirmamos que si $j \neq l$ entonces

$$e^j x e^l = 0 \qquad \text{para todo } x \text{ en } C[G], \tag{2.3}$$

pues por el teorema 50 todos los sumandos en $e^j x e^l = \sum_{s,t} e_s^j x e_t^l$ son cero. Si a_j y a_l están en A_j y A_l respectivamente, entonces $a_j = a_j e^j$ y $a_l = a_l e^l$. Se sigue entonces de (2.3) que $a_j a_l = a_j e^j a_l e^l = 0$. En consecuencia, si $x = x_1 + ... + x_r$ con $x_j \in A_j$, $1 \leq j \leq r$, entonces $a_j x = a_j x_j$ y por lo tanto $a_j x$ está en A_j.

Sea $A_0 \neq 0$ un ideal bilateral contenido en A_j. Se sigue del teorema 55 que I_i^j está contenido en A_0 ó $a_0 e_i^j = 0$ para toda $a_0 \in A_0$. Si $a_0 \neq 0$, no todos los sumandos en la expresión derecha de la siguiente igualdad son cero

$$a_0 = a_0 e^j = a_0 e_1^j + \ldots + a_0 e_{k_j}^j$$

En consecuencia A_0 contiene algún ideal I_i^j. Por el teorema 56, A_0 debe contener todos los ideales I_i^j, $1 \leq i \leq k_j$, y por lo tanto A_0 contiene a A_j. Se sigue que A_j es simple. ■

Capítulo 3

Simetrizadores de Young.

El objetivo de este capítulo es construir un conjunto completo de $C[S_n]$ −módulos irreducibles sobre C, un campo de característica cero, donde S_n es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$.

Como hemos visto en el capítulo anterior, cualquier elemento en $C[S_n]$ con la propiedad de ser idempotente primitivo genera un ideal minimal, es decir, un $C[S_n]$ −submódulo de $C[S_n]$ irreducible. Las tablas de Young, nuestra herramienta fundamental, nos proporcionan una manera de encontrar elementos con esa propiedad; nos referiremos a ellos como simetrizadores de Young.

La tarea a continuación será verificar que del conjunto de $C[S_n]$ −módulos generado por los simetrizadores de Young es posible obtener un subconjunto con la característica buscada de ser completo. Según el corolario 14, si G es un grupo finito y C un campo de característica cero entonces el número de G−módulos irreducibles sobre C es menor o igual al número de clases de conjugación de G. Así es que encontrar tantos $C[S_n]$ −módulos irreducibles como clases de conjugación de S_n significará haber encontrado el conjunto completo.

Como veremos, las distintas formas de tablas de Young están en correspondencia biyectiva con las particiones de n que a su vez están en correspondencia biyectiva con las clases de conjugación de S_n. Además, veremos que dos $C[S_n]$ −módulos irreducibles generados por simetrizadores de Young son isomorfos si y sólo si las tablas asociadas a ellos son de la misma forma. Escogiendo entonces tantos simetrizadores de Young como particiones de n, de tal manera que cada uno esté asociado a una tabla de distinta forma, podremos cumplir el objetivo.

Trabajaremos a continuación con casos particulares de tablas de Young, las tablas estándar. Estas tablas nos proporcionarán, a través de su propiedades combinatorias, una manera de encontrar las dimensiones de los $C[S_n]$ -módulos generados por los simetrizadores de Young. Se podrá concluir entonces que estos $C[S_n]$ −módulos generan una descomposición del álgebra de grupo en módulos irreducibles y más aún, cada uno ellos es isomorfo a un álgebra de matrices con entradas en el campo C.

Al final del capítulo se incluyen tres resultados que responden a preguntas relativas a las direcciones que se fueron tomando en el transcurso del trabajo.

Para este capítulo se consultaron los libros [8] , [6] y [2, cap. IV].

Definición 60 *Una **partición** de n es una sucesión $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ de enteros positivos tal que*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$$

y $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ..... \geq \alpha_k$; k arbitraria. Si α es una partición de n usaremos la siguiente notación

$$\alpha \vdash n$$

Ejemplo 61 $(4,3,3,2)$ *es una partición de 12. También se denotará $(4,3^2,2)$ y una notación similar será usada en general.*

Definición 62 *Cada partición α de n tendrá un diagrama asociado $D(\alpha)$, donde $D(\alpha) := \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \alpha_i\}$. Nos referiremos a $D(\alpha)$ como el **diagrama de forma** α y lo representaremos gráficamente como en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 63 $\alpha = (3, 2^2, 1)$. *$D(\alpha)$ es el diagrama*

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} & \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Definición 64 *Una **tabla** T de forma α es un llenado de $D(\alpha)$ con los números 1,2,...,n de manera que cada número aparece una sola vez, o equivalentemente, es una función biyectiva T: $D(\alpha) \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$.*

Ejemplo 65
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 8 \\ \hline 3 & 1 \\ \cline{1-2} 5 & 7 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

es una tabla de forma $\alpha = (3, 2^2, 1)$. Tendremos entonces $n!$ tablas por cada partición α de n.

Observación.

S_n actúa transitivamente en el conjunto de tablas de forma α. Es decir, si T y T' están en $\{T : D(\alpha) \to \{1, 2, ..., n\} \mid T \textit{ biyectiva}\}$, entonces existe σ en S_n tal que $\sigma T = T'$, donde $\sigma T := \sigma \circ T$.

Ejemplo 66 $\alpha = (3, 2)$ $\sigma = (1234)$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \sigma T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Definición 67 *Sean α y β particiones de n y m respectivamente tales que $D(\beta) \subseteq D(\alpha)$.*

$$D(\alpha/\beta) := \{(i, j) \mid (i, j) \in D(\alpha) \text{ y } (i, j) \notin D(\beta)\}$$

*$D(\alpha/\beta)$ es un **digrama sesgado de forma** α/β .*

Definición 68 *Sea α y β particiones de n y m respectivamente. Una* ***tabla sesgada*** *T de forma α/β es un llenado de $D(\alpha/\beta)$ con $n-m$ números de manera que cada uno aparece una sola vez.*

Ejemplo 69

		9	*3*
		8	*11*
	1	*7*	

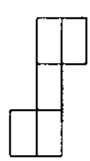
Nota. En el capítulo 7 trabajaremos con tablas sesgadas de forma α/β en las cuales aparecen los números $m+1,...,n$ de manera creciente de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

Definición 70 *Una* ***escuadra sesgada*** *es un diagrama sesgado tal que:*

1. No contiene como subdiagrama a un cuadrado de tamaño 2×2 .

2. Todo cuadrado de 1×1 contenido en $D(\alpha/\beta)$ comparte una arista con otro cuadrado de 1×1 contenido en $D(\alpha/\beta)$.

Ejemplo 71



Definición 72

$$\mathcal{H}_T := \{\sigma \in S_n \mid \sigma \textit{ preserva los renglones de } T\}$$

$$\mathcal{V}_T := \{\sigma \in S_n \mid \sigma \textit{ preserva las columnas de } T\}$$

$\mathcal{H}_T$ y $\mathcal{V}_T$ son subgrupos de S_n cuya intersección es la permutación identidad.

Definición 73

$$H_T := \sum_{p \in \mathcal{H}_T} p \qquad V_T := \sum_{q \in \mathcal{V}_T} sgn\,(q)\, q$$

Observaciones.

Para todo $p \in \mathcal{H}_T$ y $q \in \mathcal{V}_T$

$$pH_T = H_T p = H_T \qquad qV_T = V_T q = sgn\,(q)\, V_T$$

H_T es una suma de elementos en un grupo y por esta razón H_T resulta ser casi idempotente, es decir, $H_T^2 = |\mathcal{H}_T|\, H_T$. De manera similar se concluye que $V_T^2 = |\mathcal{V}_T|\, V_T$.

$\hat{H}_T := \frac{1}{|\mathcal{H}_T|} H_T$ y $\hat{V}_T := \frac{1}{|\mathcal{V}_T|} V_T$ son idempotentes. Veremos más adelante que los $C\,[S_n]$-módulos que generan no son irreducibles y por esta razón nuestra búsqueda continúa.

Definición 74

$$y_T := H_T\, V_T$$

Observación.

Sea ε la permutación identidad. El coeficiente de ε en y_T es $+1$. Además, como $\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = \{\varepsilon\}$, si $g = pq$, $p \in \mathcal{H}_T$, $q \in \mathcal{V}_T$, p y q son únicos con esta propiedad. Se observa entonces que los únicos valores posibles para los coeficientes de los sumandos de y_T son $0, 1$ y -1.

Ejemplo 75

Si $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$

entonces,

$$\mathcal{H}_T = \{\varepsilon, (12)\}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_T &= \{\varepsilon, (13)\} \\
y_T &= (\varepsilon + (12))(\varepsilon - (13)) \\
&= \varepsilon + (12) - (13) - (132)
\end{aligned}
$$

Lema 76 *Sea $T' = gT$ y sea $h \in S_n$. Si consideramos hT como obtenida de T moviendo las entradas de una posición a otra, entonces el mismo conjunto de movimientos transformará T'en $ghg^{-1}T'$. En otras palabras, si la entrada (i, j) de T es la entrada (i', j')de hT, entonces la entrada (i, j) de T' es la entrada (i', j') de $ghg^{-1}T'$.*

Ejemplo 77 $g = (256)\,, h = (124)\,, ghg^{-1} = (154)$

$$
T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \cline{1-2} 6 & & \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad hT = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 5 & \\ \cline{1-2} 6 & & \\ \cline{1-1}\end{array}
$$

$$
gT = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \cline{1-2} 2 & & \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad ghg^{-1}(gT) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 6 & \\ \cline{1-2} 2 & & \\ \cline{1-1}\end{array}
$$

En la entrada $(1, 2)$ está el número 2 en T y el número 5 en gT. Al aplicar h a T encontramos al número 2 en la entrada $(1, 1)$ y en esa misma entrada pero en $ghg^{-1}\,(gT)$ encontramos al número 5.

Demostración.

Si el número μ en la entrada (i, j) de T ocurre en la entrada (i', j') en hT, el número η que está en la entrada (i', j') de T debe satisfacer $h(\eta) = \mu$. El elemento en la entrada (i, j) de gT es $g(\mu)$, y el elemento en la entrada (i', j') de gT es $g(\eta)$. El elemento en la entrada (i', j') en $ghg^{-1}T'$ es $ghg^{-1}(g(\eta)) = g(h(\eta)) = g(\mu)$. Por lo tanto, el número $g(\mu)$ en (i, j) en T' está en la entrada (i', j') en $ghg^{-1}T'$. ∎

Corolario 78 *Sea $g \in S_n$*

$$\mathcal{H}_{gT} = g\mathcal{H}_T g^{-1}$$

$\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$

$y_{gT} = g y_T g^{-1}$

Demostración.

Sea $\rho \in \mathcal{H}_T$. La permutación ρ deja fijas las entradas de T o las mueve a otras distintas pero en el mismo renglón; por el lema anterior $g\rho g^{-1}$ debe mover de la misma manera las entradas en ${}_gT$ y por lo tanto $g\mathcal{H}_T g^{-1} \subseteq \mathcal{H}_{gT}$. Como$|g\mathcal{H}_T g^{-1}| = |\mathcal{H}_T| = |\mathcal{H}_{gT}|$, se concluye que $g\mathcal{H}_T g^{-1} = \mathcal{H}_{gT}$.

Análogamente $\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$ y finalmente,

$$g y_T g^{-1} = g \left(\sum_{\substack{p\in\mathcal{H}_T \\ q\in\mathcal{V}_T}} sgn\,(q)\, pq \right) g^{-1} = \sum_{\substack{p\in\mathcal{H}_T \\ q\in\mathcal{V}_T}} sgn\,(q)\, gpg^{-1}gqg^{-1}$$
$$= \sum_{\substack{p\in\mathcal{H}_T \\ q\in\mathcal{V}_T}} sgn\,(gqg^{-1})\, gpg^{-1}gqg^{-1} = \sum_{\substack{p\in\mathcal{H}_{gT} \\ q\in\mathcal{V}_{gT}}} sgn\,(q)\, pq = y_{gT} \blacksquare$$

Lema 79 *Sea $g \in S_n$ y sea T una tabla. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $g = pq$, con p en $\mathcal{H}_T$ y q en $\mathcal{V}_T$

b) Ningún par de números en el mismo renglón de T está en la misma columna de gT.

c) Existe una tabla L tal que $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_L$ y $\mathcal{V}_{gT} = \mathcal{V}_L$.

d) $H_T V_{gT} \neq 0$

e) $V_{gT}\, H_T \neq 0$.

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) Supongamos que $g = pq$, con p en $\mathcal{H}_T$ y q en $\mathcal{V}_T$. Sean $\mu \neq \eta$ números en el mismo renglón en T, entonces μ, η también están en el mismo renglón en pT. Por el corolario 78 pqp^{-1} está en $\mathcal{V}_{pT}$, el subgrupo de S_n que preserva las columnas de pT, y de aquí que μ y η no estén en la misma columna en $pqp^{-1}pT = gT$.

b)$\Rightarrow$a) y c). Supongamos que ningún par de números en el mismo renglón en T está en la misma columna en gT, entonces todos los números en la primera columna en gT están en distintos renglones en T, y por lo tanto existe p_1 en $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_{p_1T}$ tal que p_1T tiene a todos estos números en su primera columna. Todos los números de la segunda columna en gT están en distintos renglones en T y por lo tanto en distintos renglones en p_1T. Nuevamente, existe p_2 en $\mathcal{H}_T$ tal que la primera columna de p_2p_1T tiene los mismos números que la primera columna de gT y lo mismo pasa con las segundas columnas de estas dos tablas. Continuando de esta manera obtendremos p en $\mathcal{H}_T$ tal que la tabla $pT = L$ tiene en cada columna los mismos números que la correspondiente columna en gT.

Pero entonces $gT = q'pT$ para alguna $q' \in \mathcal{V}_{pT}$ y entonces $q' = pqp^{-1}$para alguna $q \in \mathcal{V}_T$. De aquí que $gT = (pqp^{-1})pT = pqT$, y por lo tanto $g = pq$ con p en $\mathcal{H}_T$ y q en $\mathcal{V}_T$.

c)$\Rightarrow$d) y e) Sea L una tabla tal que $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_L$ y $\mathcal{V}_{gT} = \mathcal{V}_L$. Entonces

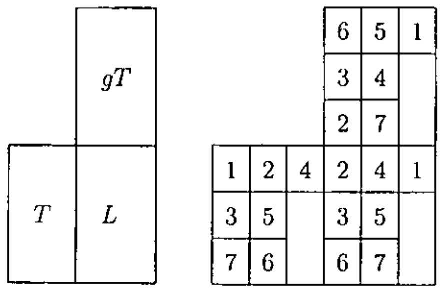
$H_TV_{gT} = H_LV_L \neq 0$ y $V_{gT}\, H_T = V_L\, H_L\, \neq 0$.

d)$\Rightarrow$b) Supongamos que existen dos números μ, η en un mismo renglón de T y en una misma columna de gT, entonces $(\mu\eta)$ está en $\mathcal{H}_T \cap\, \mathcal{V}_{gT}$.

$$H_TV_{gT} = H_T\,(\mu\eta)\,(\mu\eta)\,V_{gT} = -H_TV_{gT}$$

Se sigue que $H_TV_{gT}\; = 0$ con lo cual tenemos una contradicción. Análogamente e)$\Rightarrow$b) ■

Ejemplo. Sean $g = (167254)$ y $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2} 7 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array}$. Como $gT = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} 2 & 7 \\ \cline{1-2}\end{array}$, se cumple el enunciado b) del lema anterior y en consecuencia podemos construir una tabla L con las propiedades mencionadas en c): si el número k aparece en el $i-$ésimo renglón de T y en la $j-$ésima columna de gT, entonces k aparece en el $i-$ésimo renglón y en la $j-$ésima columna de L.



Lema 80 *Sea $x \in C[S_n]$ tal que $pxq = sgn(q)\, x$ para toda p en $\mathcal{H}_T$ y q en $\mathcal{V}_T$. Entonces existe $\theta \in C$ tal que $x = \theta y_T$.*

Demostración.

Sea $x = \sum_{g \in S_n} a_g g$, $a_g \in C$, entonces para cada $p \in \mathcal{H}_T$, $q \in \mathcal{V}_T$.

$$\begin{aligned} x &= sgn(q)\, p^{-1} x q^{-1} = sgn(q) \sum_{g \in S_n} a_g \left(p^{-1} g q^{-1}\right) = \\ &= sgn(q) \sum_{h \in S_n} a_{phq} h. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$a_g = sgn(q)\, a_{pgq} \qquad p \in \mathcal{H}_T , q \in \mathcal{V}_T$$

Haciendo $g = \varepsilon$ en la anterior igualdad se tiene que

$$a_{pq} = sgn(q)\, a_\varepsilon \qquad \text{para todo } p \in \mathcal{H}_T , q \in \mathcal{V}_T \tag{3.1}$$

Es decir, el coeficiente en x de todo elemento en S_n de la forma pq, con p en $\mathcal{H}_T$ y q en $\mathcal{V}_T$, es el coeficiente de ese elemento en y_T multiplicado por a_ε . Basta demostrar entonces que $a_g = 0$ si $g \neq pq$, $p \in \mathcal{H}_T$, $q \in \mathcal{V}_T$.

Supongamos que g no es de esa forma, existe entonces , por el lema 79, $t = (\mu\eta)$ en $\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_{gT}$ y de aquí que $t = gqg^{-1}$ para alguna q en $\mathcal{V}_T$. Conjugar preserva tipos cíclicos, así es que q también es una transposición.

$$\begin{aligned} g &= tgq^{-1} \quad \text{y por la ecuación (3.1)} \\ a_g &= a_{tgq^{-1}} = sgn\,(q)\, a_{t(tgq^{-1})q} = sgn\,(q)\, a_g = -a_g \end{aligned}$$

Lo último implica que $a_g = 0$ y por lo tanto $x = a_\varepsilon\ y_T$. ■

A continuación probaremos que y_T es casi un idempotente.

Lema 81

$$(y_T)^2 = \theta\ y_T$$

donde θ es un entero distinto de cero.

Demostración.

Sean $p \in \mathcal{H}_T$, $q \in \mathcal{V}_T$, entonces $p\,(y_T)^2\, q = py_Ty_Tq = sgn\,(q)\,(y_T)^2$.

Por el lema anterior, $(y_T)^2 = \theta y_T$ donde θ es el coeficiente de ε en $(y_T)^2$, y en consecuencia, θ es un número entero.Veremos ahora que $\theta \neq 0$.

Sea $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\ (C\,[S_n],\, C\,[S_n])$ tal que $\Phi\,(x) = xy_T$.

$B = \{\varepsilon,\ g_2,\ g_3, ..., g_{n!}\}$, la C-base de $C\,[S_n]$ formada por los elementos de S_n.

$$\begin{aligned} y_T &= \varepsilon + a_2 g_2 + ... \\ \varepsilon y_T &= \varepsilon + a_2 g_2 + ... \\ g_2 y_T &= * + g_2 + ... \end{aligned}$$

Por lo que $\mathrm{tr}[\Phi]_B = n!$. Ahora sea $\mathcal{C} = \{v_1,\ v_2,\ \dots\ ,\ v_{d_T},\ \dots\ v_{n!}\}$ una $C-$base de $C\,[S_n]$ tal que $\{v_1,\ .....\ ,\ v_{d_T}\}$ es una C-base de $C\,[S_n]\,y_T$, $d_T = \dim_C\ C\,[S_n]\,y_T$ ($d_T \geq 1$ ya que y_T es un elemento distinto de cero de $C\,[S_n]\,y_T$).

Si x está en $C\,[S_n]\,y_T$ entonces $xy_T = \theta x$. Se sigue que para toda $1 \leq i \leq d_T$, $v_i y_T = \theta v_i$. Por otro lado, para toda $d_T < i \leq n!$ el coeficiente de v_i en $v_i y_T$ es cero ya que $v_i y_T$ es un elemento en $C[S_n]\, y_T$. Tenemos entonces que $\mathrm{tr}[\Phi]_C = \theta d_T$. Por lo tanto, $\theta d_T = n!$ y esta igualdad implica que $\theta \neq 0$. ■

Al elemento θ del lema anterior lo denotaremos por θ_T.

Corolario 82 *Sea T una tabla. Si $d_T = \dim_C C[S_n]\, y_T$, entonces*

$$d_T \mid n!$$

Observación. $d_T = \frac{n!}{\theta_T}$ no depende de C.

Ahora podemos distinguir a un elemento distinto de cero idempotente del álgebra de grupo $C[S_n]$.

Definición 83 *El **simetrizador de Young** asociado a la tabla T se define de la siguiente manera*

$$\hat{y}_T := \frac{1}{\theta_T}\, y_T$$

Observación.

$C[S_n]\, \hat{y}_T = C[S_n]\, y_T$.

Teorema 84 *Si T y T' son de la misma forma α entonces $C[S_n]\, y_T \cong C[S_n]\, y_{T'}$ como $C[S_n]-$ módulos.*

Demostración.

Como S_n actúa transitivamente en el conjunto de tablas de la forma de T y T', existe $g \in S_n$ tal que $T' = gT$. Se sigue del corolario 78 que $C[S_n]\, y_{T'} = C[S_n]\, g y_T g^{-1}$ $= C[S_n]\, y_T g^{-1}$. La aplicación $\Phi : C[S_n]\, y_T \to C[S_n]\, y_T g^{-1}$ definida por $\Phi(x) = xg^{-1}$ es un homomorfismo de $C[S_n]$ –módulos. Además, la aplicación $\Psi : C[S_n]\, y_T g^{-1} \to C[S_n]\, y_T$ definida por $\Psi(z) = zg$ es la aplicación inversa de Φ. Por lo tanto, $C[S_n]\, y_T \cong C[S_n]\, y_{T'}$ como $C[S_n]$- módulos. ■

Corolario 85 *Si T y S son tablas de la misma forma α, entonces $\theta_T = \theta_S$.*

Demostración. Del teorema 84 se sigue que $C[S_n]\, y_T \cong C[S_n]\, y_S$. Entonces por el lema anterior

$$\theta_T = \frac{n!}{d_T} = \frac{n!}{d_S} = \theta_S$$

■

La siguiente notación se justifica por el teorema y corolario anterior.

Notación. Si T es una tabla de forma α,

$$d^\alpha := \dim_C C[S_n]\, \hat{y}_T$$

$$\theta^\alpha := \theta_T$$

Teorema 86 *$C[S_n]\, \hat{y}_T$ es un $C[S_n]$-módulo irreducible.*

Demostración. Sea $x \in C[S_n]$. Como $p(\hat{y}_T x \hat{y}_T)\, q = sgn(q)\, \hat{y}_T x \hat{y}_T$ para todo $p \in \mathcal{H}_T$, $q \in \mathcal{V}_T$, se sigue del lema 80 que $\hat{y}_T x \hat{y}_T = \kappa \hat{y}_T$ donde $\kappa \in C$. Por el teorema 52, $\hat{y}_T$ es un idempotente primitivo y por el teorema 47 $C[S_n]\, \hat{y}_T$ es irreducible. ■

Es necesario para nuestro trabajo posterior definir un orden en el conjunto de particiones de n. Lo haremos de la siguiente manera:

Sean $\alpha \doteq (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$ dos particiones de n. Si el primero de los números $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2$, ... distinto de cero es positivo, entonces diremos que $\alpha > \beta$. Este orden se llama **orden lexicográfico** y es un orden total en el conjunto de particiones de n.

Lema 87 *Sean S y T tablas de forma α y β respectivamente, donde α y β son particiones de n. Supongamos $\alpha > \beta$, entonces $H_S\, V_T = V_T\, H_S = 0$.*

Demostración.

Demostraremos primero que existen dos números en un mismo renglón de S y en una misma columna de T. Supongamos lo contrario, entonces todos los números en el primer renglón de S deben ocurrir en distintas columnas en T. Que T tenga β_1 columnas implica que $\beta_1 \geq \alpha_1$ y por lo tanto $\alpha_1 = \beta_1$. Ahora apliquemos una permutación de columna a T para obtener una nueva tabla T' tal que tenga en el primer renglón los mismos números que el primer renglón de S. Todo número en el segundo renglón de S ocurre en distintas columnas en T y por lo tanto en distintas columnas en T'. Como T' tiene β_2 columnas en las que pueden estar estos números, tenemos $\beta_2 \geq \alpha_2$ y por lo tanto $\beta_2 = \alpha_2$. Continuando de esta manera llegamos a que $\alpha = \beta$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto existe $\tau = (\mu\ \eta) \in H_S \cap V_T$. Entonces $H_S V_T = H_S \tau\tau V_T = -H_S V_T$ y en consecuencia $H_S V_T = 0$. Análogamante $V_T H_S = 0$. ■

Corolario 88 *Sean S y T tablas de forma α y β respectivamente, donde α y β son particiones de n. Supongamos $\alpha > \beta$, entonces para toda x en $C[S_n]$, $H_S x V_T = V_T x H_S = 0$.*

Demostración.

Basta probarlo para $x = g \in S_n$. Por el corolario 78 y por el lema anterior $H_S\, g V_T\, g^{-1} = H_S V_{gT} = 0$. Por lo tanto, $H_S\, g V_T = 0$. ■

Corolario 89 *Sean S y T tablas de forma α y β respectivamente, donde α y β son particiones de n. Supongamos $\alpha > \beta$, entonces $y_T\, y_S = y_S y_T = 0$.*

Demostración.

Sea τ como en la demostración del lema 87, por lo tanto $y_T y_S = y_T \tau\tau y_S = -y_T y_S$ y entonces $y_T y_S = 0$. Por el corolario 88, $y_S y_T = H_S\ (V_S\, H_T)\, V_T = 0$. ■

Teorema 90 *Sean T y S tablas de distintas formas, entonces $C[S_n]\ \hat{y}_T \not\cong C[S_n]\ \hat{y}_S$ como $C[S_n]$-módulos.*

Demostración.

Por el teorema 50, si no existen elementos en $C[S_n]$ distintos de cero de la forma $\hat{y}_T x\hat{y}_S$ entonces $C[S_n]\,\hat{y}_T \not\cong C[S_n]\,\hat{y}_S$. Basta entonces probar que $\hat{y}_T\, g\hat{y}_S = 0$ para todo $g \in S_n$.

$$\begin{aligned} \hat{y}_T g \hat{y}_S &= \hat{y}_T g \hat{y}_S g^{-1} g \\ &= \hat{y}_T \hat{y}_{gS} g \qquad \text{corolario 78} \\ &= 0 \qquad \text{corolario 89} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Para cada partición α escogemos una tabla T de forma α. Sea

$$V^\alpha := C[S_n]\,\hat{y}_T.$$

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 91 *Sea C un campo de característica cero. Entonces $\{V^\alpha \mid \alpha \vdash n\}$ es un conjunto completo de $C[S_n]-$módulos irreducibles sobre C.*

Demostración.

Sabemos que el número de $C[S_n]-$módulos irreducibles no isomorfos es menor o igual al número de clases de conjugación de S_n (ver corolario 14), es decir, al número de particiones de n. Esta desigualdad y los teoremas 86 y 90 implican el resultado. $\blacksquare$

Ejemplo 92 *1. Sea $\alpha = (n)$ y sea T la única tabla de forma α.*

$$y_T^\alpha = \sum_{g \in S_n} g$$
$$\left(y_T^\alpha\right)^2 = n!\,y_T^\alpha$$

Por el corolario 82, $d^\alpha = 1$. Una $C-$base de $C[S_n]\,y_T^\alpha$ es $\left\{\sum_{g\in S_n} g\right\}$. Para todo $\sigma \in S_n$, $\sigma\left(\sum_{g\in S_n} g\right) = \sum_{g\in S_n} g$. Se sigue que $V^{(n)} = C[S_n]\,y_T^\alpha$ es la representación trivial de S_n sobre C.

2. *Sea $\alpha = (1^n)$ y sea T la única tabla de forma α.*

$$y_T^\alpha = \sum_{g \in S_n} sgn\,(g)\,g$$
$$\left(y_T^\alpha\right)^2 = n! y_T^\alpha$$

Por el corolario 82, $d^\alpha = 1$. Una $C-$base de $C[S_n]\,y_T^\alpha$ es $\left\{ \sum_{g \in S_n} sgn\,(g)\,g \right\}$. Para todo $\sigma \in S_n$, $\sigma \left(\sum_{g \in S_n} g \right) = \sum_{g \in S_n} sgn\,(\sigma)\,g$. Se sigue que $V^{(1^n)} = C[S_n]\,y_T^\alpha$ es la representación alternante de S_n sobre C.

Definición 93 *Diremos que la tabla T es una **tabla estándar** si los números en ella están ordenados de forma creciente de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.*

Denotaremos con $TS(\alpha)$ al conjunto de tablas estándar de forma α, y en este conjunto definimos un orden de la siguiente manera:

De la definición de tabla estándar es evidente que la posición de la letra n estará en el extremo derecho de un renglón y en el extremo inferior de una columna. Todas las tablas que tengan a n en el último renglón serán menores que aquellas en las que n aparezca un renglón más arriba,es decir, en el segundo de abajo hacia arriba. Estas últimas serán menores que aquellas en las que n aparezca en el tercer renglón de abajo hacia arriba y así sucesivamente. Ahora, aquellas tablas que tienen a n en el mismo renglón serán ordenadas con el mismo plan de acuerdo a la posición de la letra $n-1$. Aquellas que tienen a n y $n-1$ en la misma posición serán ordenadas de acuerdo a la posición de $n-2$ y así sucesivamente.

Ejemplo 94 $\alpha = (3,2)$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} < \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} < \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} < \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} < \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Notación.

La cardinalidad de $TS(\alpha)$ la denotaremos con f^{α}.

T_i^{α} denotará una tabla estándar de forma α, donde el subíndice inferior se refiere a su lugar en el orden recién definido. Si $T = T_i^{\alpha}$, entonces

$$y_i^{\alpha} := y_T \qquad H_i^{\alpha} := H_T \qquad V_i^{\alpha} := V_T$$

$\mathrm{T}_i^{\alpha *}$ denotará la tabla que resulta de suprimir la letra n de la tabla T_i^{α}.

Lema 95 *Sean $p_1, p_2, ..., p_r, n$ los elementos en el renglón de n y $q_1, q_2, ..., q_s, n$ los elementos en la columna de n en una tabla estándar T_i^{α}. Entonces*

$$H_i^{\alpha} = H_i^{\alpha *}\left(\varepsilon + (p_1\ n) + ... + (p_r\ n)\right)$$
$$V_i^{\alpha} = \left(\varepsilon - (q_1\ n) - ..... - (q_s\ n)\right) V_i^{\alpha *}$$

Demostración.

Verificaremos primero que todo elemento de S_n aparece en $H_i^{\alpha *}\left(\varepsilon + (p_1\ n) + ... + (p_r\ n)\right)$ con coeficiente 0 o 1. Para la demostración de la primera igualdad, bastará entonces probar que σ aparece con coeficiente 1 en $H_i^{\alpha *}\left(\varepsilon + (p_1\ n) + ... + (p_r\ n)\right)$ si y sólo si σ está en $\mathcal{H}_i^{\alpha}$

Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{H}_i^{\alpha *}$. Supongamos $\sigma\,(p_k\ n) = \tau\,(p_l\ n)$ con $k \neq l$. Entonces $\sigma = \tau\,(p_l\ n)\,(p_k n)$, y eso implica que $\sigma(n) \neq n$, lo cual contradice $\sigma \in \mathcal{H}_i^{\alpha *}$. Por lo tanto, todo elemento de S_n aparece en $H_i^{\alpha *}\left(\varepsilon + (p_1\ n) + ... + (p_r\ n)\right)$ con coeficiente 0 o 1, y como sabemos, lo mismo sucede en H_i^{α}.

Sea $\sigma \in S_n$ tal que σ aparece con coeficiente 1 en $H_i^{\alpha *}\left(\varepsilon + (p_1\ n) + ... + (p_r\ n)\right)$. Entonces σ es un elemento en $\mathcal{H}_i^{\alpha}$ por lo tanto también tendrá coeficiente 1 en H_i^{α}. Para la demostración inversa, sea $\sigma \in \mathcal{H}_i^{\alpha}$. Si σ está en $\mathcal{H}_i^{\alpha}$ y $\sigma(n) = n$, entonces $\sigma = \sigma\varepsilon$ y por lo tanto σ aparece con coeficiente 1 en $H_i^{\alpha *}\left(\varepsilon + (p_1\ n) + ... + (p_r\ n)\right)$. Supongamos $\sigma \in \mathcal{H}_i^{\alpha}$ y $\sigma \notin \mathcal{H}_i^{\alpha *}$, entonces $\sigma^{-1}(n) = p_k$ para alguna $1 \leq k \leq r$. Por lo tanto, si $\tau = \sigma\,(\sigma^{-1}(n)\ \ n\ )$ entonces τ está en $\mathcal{H}_i^{\alpha *}$ y $\sigma = \tau\,(\sigma^{-1}(n)\ \ n)$.

Análogamente se demuestra la segunda igualdad. ■

Lema 96 *Si* $T_i^\alpha < T_k^\alpha$ *entonces* $\hat{y}_k^\alpha \hat{y}_i^\alpha = 0$.

Demostración.

i) Por inducción sobre n se demostrará que$V_k^\alpha H_i^\alpha = 0$.

El caso $n = 3$ es el primero en el que existen dos tablas de la misma forma que pueden ser comparadas con el orden definido.

La base de la inducción: $n = 3, \alpha = (2,\ 1)$

$$T_1^\alpha = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad T_2^\alpha = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$V_2^\alpha = (\varepsilon - \ (12)) \qquad H_1^\alpha = (\varepsilon +\ (12)) \qquad V_2^\alpha H_1^\alpha = 0$

Sea $n \geq 4$ y supongamos $i)$ para $n-1$. Consideraremos dos casos:

a) Si $T_i^{\alpha *}$ y $T_k^{\alpha *}$ son de la misma forma, es decir, si n se encuentra en la misma posición en T_i^α y T_k^α entonces $T_i^{\alpha *} < T_k^{\alpha *}$ y por hipótesis de inducción $V_k^{\alpha *} H_i^{\alpha *} = 0$. Por el lema 95, $V_k^\alpha H_i^\alpha = 0$.

b) $T_i^{\alpha *}$ y $T_k^{\alpha *}$ tablas de distinta forma. $T_i^\alpha < T_k^\alpha$ implica que la forma de $T_i^{\alpha *}$ es mayor que la forma de $T_k^{\alpha *}$ con el orden lexicográfico. Por el lema 87 $V_k^{\alpha *} H_i^{\alpha *} = 0$ y entonces, según el lema anterior, $V_k^\alpha H_i^\alpha = 0$.

ii) De i) se sigue inmediatamente que

$$\hat{y}_k^\alpha \hat{y}_i^\alpha = \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right)^2 H_k^\alpha V_k^\alpha H_i^\alpha V_i^\alpha = 0$$

■

Observación. No siempre es cierto que si $T_i^\alpha > T_k^\alpha$ entonces $\hat{y}_k^\alpha \hat{y}_i^\alpha = 0$. Por ejemplo si $\alpha = (3, 2)\,, T_1^\alpha = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}$ y $T_5^\alpha = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}$, entonces $\hat{y}_1^\alpha \hat{y}_5^\alpha \neq 0$. Una demostración de lo anterior se sigue de un resultado que posteriormente demostraremos, el teorema 128. No es posible hallar un ejemplo para particiones de n donde $n \leq 4$. En estos casos los simetrizadores de Young asociados a tablas de la misma forma son ortogonales.

Lema 97

$$C[S_n] = \bigoplus_{\alpha \vdash n} \bigoplus_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]\,\hat{y}_i^\alpha \bigoplus L$$

donde L es un $C[S_n]$ −módulo.

Demostración.

Sea $I_\alpha = \sum_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]\,\hat{y}_i^\alpha$. Se sigue del corolario 89 que $\sum_{\alpha \vdash n} I_\alpha$ es directa. Por el lema 96, la suma $\sum_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]\,\hat{y}_i^\alpha$ también es directa:

Si $\sum_{i=1}^{f^\alpha} x_i \hat{y}_i^\alpha = 0$, con $x_i \in C[S_n]$ para toda $1 \leq i \leq f^\alpha$, entonces multiplicando por $\hat{y}_1^\alpha$ por la derecha se concluye que $x_1 \hat{y}_1^\alpha = 0$. Supongamos $0 = x_1 \hat{y}_1^\alpha = \ldots = x_k \hat{y}_k^\alpha$; multiplicando por $\hat{y}_{k+1}^\alpha$ por la derecha se concluye que $x_{k+1} \hat{y}_{k+1}^\alpha = 0$ y por lo tanto $x_i \hat{y}_i^\alpha = 0$ para toda $1 \leq i \leq f^\alpha$. ■

A continuación veremos que $L = 0$. Para ello, demostraremos la fórmula

$$\sum_{\alpha \vdash n} (f^\alpha)^2 = n!$$

donde, como hemos visto antes, f^α denota el número de tablas estándar de forma α.

Definición 98 *$P(\alpha+)$ denotará el conjunto de particiones de $n+1$ cuyo diagrama asociado se obtiene de $D(\alpha)$ agregando un cuadrado.*

Definición 99 *Si $n > 1$, $P(\alpha-)$ denotará al conjunto de particiones de $n-1$ cuyo diagrama asociado se obtiene de $D(\alpha)$ quitando un cuadrado.*

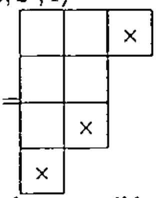
Para las siguientes definiciones, sea $\alpha \vdash n$.

Definición 100 *Un **nodo removible** es un nodo (o entrada) en $D(\alpha)$ tal que al suprimirlo se obtiene un diagrama asociado a alguna partición de $n-1$.*

$r(\alpha)$ denotará el número de nodos removibles en $D(\alpha)$.

Ejemplo.

$\alpha = (3, 2^2, 1)$

$D(\alpha) =$ 

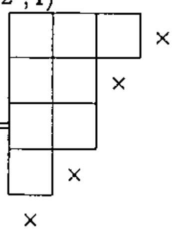
Los nodos removibles en $D(\alpha)$ están marcados con una cruz.

Definición 101 *Un **nodo agregable** es un nodo (o entrada) tal que al agregarlo a $D(\alpha)$ se obtiene un diagrama asociado a alguna partición de $n+1$.*

$a(\alpha)$ denotará el número de nodos agregables en $D(\alpha)$.

Ejemplo.

$\alpha = (3.2^2, 1)$

$D(\alpha) =$ 

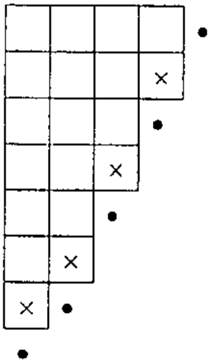
Los nodos agragables a $D(\alpha)$ están marcados con una cruz.

Lema 102

$$a(\alpha) = r(\alpha) + 1$$

Demostración.

Si en $D(\alpha)$ existe un nodo removible en la entrada (i, j), entonces la entrada $(i+1,\ \alpha_{i+1}+1)$ es un nodo agregable de $D(\alpha)$. La entrada $(1, \alpha_1 + 1)$ es también un nodo agregable pero éste no se encuentra por debajo de un nodo removible. Lo anterior se ilustra en el siguiente diagrama en donde los nodos removibles están marcados con $\times$ y los nodos agregables con $\bullet$.



■

Proposición 103

$$f^{\alpha} = \sum_{\beta \in P(\alpha -)} f^{\beta}$$

Demostración.

El conjunto $TS(\alpha)$ es la unión ajena de los subconjuntos formados por las tablas que tienen a la letra n en un mismo nodo. Cada uno de estos subconjuntos se encuentra en correspondencia biyectiva con un conjunto $TS(\beta)$ con $\beta \in P(\alpha -)$, precisamente con el que resulta de suprimir en cada tabla del subconjunto el nodo con la letra n. Como los nodos en cualquier tabla estándar en donde puede estar la letra n son los nodos removibles, a través de la correspondencia anterior obtenemos una correspondencia biyectiva entre el conjunto $TS(\alpha)$ y $\coprod_{\beta \in P(\alpha -)} TS(\beta)$. ■

Corolario 104

$$\sum_{\alpha \vdash n} (f^{\alpha})^2 = \sum_{\alpha \vdash n} \sum_{\beta \in P(\alpha -)} f^{\alpha} f^{\beta} \qquad ■$$

Proposición 105

$$(n+1) f^{\alpha} = \sum_{\beta \in P(\alpha +)} f^{\beta}$$

Demostración.

Por inducción sobre n. Se puede verificar directamente para los casos $n = 1, 2$. Supongamos la proposición para $n-1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta \in P(\alpha+)} f^{\beta} &= \sum_{\beta \in P(\alpha+)} \left(\sum_{\gamma \in P(\beta-)} f^{\gamma} \right) \qquad \text{por la proposición 103} \\
&= \sum_{\beta \in P(\alpha+)} \left(\sum_{\substack{\gamma \in P(\beta-) \\ \gamma \neq \alpha}} f^{\gamma} + f^{\alpha} \right) \\
&= \left(\sum_{\beta \in P(\alpha+)} \sum_{\substack{\gamma \in P(\beta-) \\ \gamma \neq \alpha}} f^{\gamma} \right) + a(\alpha) f^{\alpha}
\end{aligned}$$

Expresaremos ahora de forma distinta el sumando $\sum_{\beta \in P(\alpha+)} \sum_{\substack{\gamma \in P(\beta-) \\ \gamma \neq \alpha}} f^{\gamma}$. Afirmamos que la siguiente ecuación es válida.

$$\sum_{\beta \in P(\alpha+)} \sum_{\substack{\gamma \in P(\beta-) \\ \gamma \neq \alpha}} f^{\gamma} = \sum_{\theta \in P(\alpha-)} \sum_{\substack{\gamma \in P(\theta+) \\ \gamma \neq \alpha}} f^{\gamma}$$

Debido a la restricción $\gamma \neq \alpha$, todo sumando en la expresión del lado izquierdo de la ecuación es un sumando en la expresión del lado derecho de la ecuación y viceversa. Por lo tanto, del lema 102 se sigue que

$$\sum_{\beta \in P(\alpha+)} f^{\beta} = \sum_{\theta \in P(\alpha-)} \sum_{\substack{\gamma \in P(\theta+) \\ \gamma \neq \alpha}} f^{\gamma} + (r(\alpha) + 1) f^{\alpha} \tag{3.2}$$

Por otro lado,

$$\sum_{\theta\in P(\alpha-)}\sum_{\gamma\in P(\theta+)} f^{\gamma} = \sum_{\theta\in P(\alpha-)}\left(\sum_{\substack{\gamma\in P(\theta+)\\ \gamma\neq\alpha}} f^{\gamma}+f^{\alpha}\right) \tag{3.3}$$

$$= \left(\sum_{\theta\in P(\alpha-)}\sum_{\substack{\gamma\in P(\theta+)\\ \gamma\neq\alpha}} f^{\gamma}\right)+r(\alpha)\, f^{\alpha}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\in P(\alpha+)} f^{\beta} &= \sum_{\theta\in P(\alpha-)}\sum_{\gamma\in P(\theta+)} f^{\gamma}+f^{\alpha} && \text{por las ecuaciones (3.2) y (3.3)}\\ &= \left(\sum_{\theta\in P(\alpha-)} nf^{\theta}\right)+f^{\alpha} && \text{por hipótesis de inducción}\\ &= nf^{\alpha}+f^{\alpha} && \text{por la proposición 103}\\ &= (n+1)\, f^{\alpha}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Corolario 106

$$(n+1)\sum_{\alpha\vdash n}(f^{\alpha})^2=\sum_{\alpha\vdash n}\sum_{\beta\in P(\alpha+)} f^{\alpha}f^{\beta}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(n+1)\sum_{\alpha\vdash n}(f^{\alpha})^2 &= \sum_{\alpha\vdash n}((n+1)\, f^{\alpha})\, f^{\alpha}\\ &= \sum_{\alpha\vdash n}\sum_{\beta\in P(\alpha+)} f^{\alpha}f^{\beta} && \text{por la proposición anterior } \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 107

$$\sum_{\alpha\vdash n}(f^{\alpha})^2=n!$$

Demostración. Por inducción sobre n. Los casos $n = 1, 2$ se verifican directamente. Supongamos el teorema para el caso en el que la suma varía sobre particiones de n y probémoslo para el caso $n+1$. Observemos primero que la siguiente ecuación es válida

$$\sum_{\alpha \vdash n} \sum_{\gamma \in P(\alpha +)} f^{\alpha} f^{\gamma} = \sum_{\beta \vdash n+1} \sum_{\theta \in P(\beta -)} f^{\beta} f^{\theta}$$

Todo sumando en la expresión del lado izquierdo de la ecuación es un sumando en la expresión del lado derecho de la ecuación y viceversa. Sustituyendo ambas expresiones por las expresiones idénticas expuestas en los corolarios 104 y 106, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \vdash n+1} \left(f^{\beta}\right)^2 &= (n+1) \sum_{\alpha \vdash n} (f^{\alpha})^2 \qquad \text{por los corolarios 104 y106} \\ &= (n+1)\, n! \qquad \text{por hipótesis de inducción} \\ &= (n+1)! \; \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente corolario nos proporciona una descripción combinatoria de la dimensión de los $C[S_n]$ –módulos irreducibles.

Corolario 108

$$f^{\alpha} = d^{\alpha}$$

Demostración.

Como d^{α} es independiente del campo (ver observación al corolario 82), podemos suponer C algebraicamente cerrado. Por el corolario 15.3, $n! = \sum_{\alpha \vdash n} (d^{\alpha})^2$ y por el lema 97 y el corolario 15.2, $f^{\alpha} \leq d^{\alpha}$. Del teorema anterior se sigue que $\sum_{\alpha \vdash n} (f^{\alpha})^2 = \sum_{\alpha \vdash n} (d^{\alpha})^2$ y por lo tanto $f^{\alpha} = d^{\alpha}$. $\blacksquare$

Mencionamos que existe una demostración combinatoria del teorema anterior basada en un algoritmo que asocia a todo elemento de S_n una pareja de tablas estándar de la misma forma. Este algoritmo es la "correspondencia de Robinson-Schensted".

Teorema 109

$$C[S_n] = \bigoplus_{\alpha\vdash n}\bigoplus_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]\, y_i^\alpha$$

Demostración.

Se sigue del corolario 108 y el teorema 107 que el módulo L en el lema 97 es 0. ∎

Teorema 110

$$C[S_n] \cong \bigoplus_{\alpha\vdash n} M_{f^\alpha}(C)$$

Demostración.

Por el teorema anterior y el teorema 13 $C[S_n] \cong \bigoplus_{\alpha\vdash n} M_{f^\alpha}(D_\alpha)$ donde $D_\alpha = End_{C[S_n]}(C[S_n]\, y_i^\alpha)$. Según el lema de Schur (lema 9) D_α es un álgebra con división. Se sigue entonces del teorema 107 que

$$\sum_{\alpha\vdash n}(f^\alpha)^2 = \dim_C C[S_n] = \dim_C\left(\bigoplus_{\alpha\vdash n} M_{f^\alpha}(D_\alpha)\right) = \sum_{\alpha\vdash n}(f^\alpha)^2\cdot \dim_C D_\alpha.$$

Por lo tanto, $\dim_C D_\alpha = 1$ y en consecuencia $C \cong D_\alpha$. ∎

Lema 111 $\bigoplus_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]\, y_i^\alpha$ *es un ideal bilateral simple de* $C[S_n]$.

Demostración.

Se sigue del teorema 59.

∎

Notación.

$$I_\alpha := \bigoplus_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]\, y_i^\alpha$$

A continuación veremos que para toda $\alpha \vdash n$, el idempotente $\frac{1}{|\mathcal{H}_T^\alpha|}H_T^\alpha$ genera un $C[S_n]$ $-$módulo reducible si $\alpha \neq (n)$. También demostraremos que $C[S_n]\, H_T V_T$ y $C[S_n]\, V_T H_T$ son $C[S_n]$ $-$módulos isomorfos y esto último será utilizado al probar que el $C[S_n]$ $-$módulo

$V^{\alpha} \bigotimes V^{[1^n]}$ es isomorfo a $V^{\alpha'}$, donde α' es cierta partición de n que definiremos en su momento.

Proposición 112 *Sea T una tabla. Entonces $C[S_n]H_T$ y el módulo de permutaciones $C[S_n/\mathcal{H}_T]$ son isomorfos como $C[S_n]$−módulos.*

Demostración.

Veremos que $C[S_n] \bigotimes_{C[\mathcal{H}_T]} C \cong C[S_n]H_T$ y como la proposición 38 afirma que $C[S_n] \bigotimes_{C[\mathcal{H}_T]} C \cong C[S_n/\mathcal{H}_T]$, eso bastará para concluir la demostración.

Sea $\phi : C[S_n]H_T \to C[S_n] \bigotimes_{C[\mathcal{H}_T]} C$ tal que $\phi(a) = a \bigotimes 1$.

$$\phi(a+b) = (a+b) \bigotimes 1 = a \bigotimes 1 + b \bigotimes 1 = \phi(a) + \phi(b)$$

$$\phi(ga) = ga \bigotimes 1 = g(a \bigotimes 1) = g\phi(a)$$

Por lo tanto ϕ es un homomorfismo de $C[S_n]-$ módulos.

Sea $\hat{\psi} : C[S_n] \times C \to C[S_n]H_T$ tal que $\hat{\psi}(x,c) = cxH_T$. Es fácil ver que $\hat{\psi}$ es C−bilineal. Sea $s \in C[\mathcal{H}_T]$, entonces $s = \sum_{h \in \mathcal{H}_T} a_h h$. Si $c \in C$ entonces ya que $C[\mathcal{H}_T]$ actúa trivialmente en C,

$$sc = \sum_{h \in \mathcal{H}_T} a_h(hc) = \sum_{h \in \mathcal{H}_T} a_h c = c\left(\sum_{h \in \mathcal{H}_T} a_h\right)$$

Usando lo anterior

$$\hat{\psi}(xs, c) = cxsH_T = c\left(\sum_{h \in \mathcal{H}_T} a_h\right)xH_T$$

$$\hat{\psi}(x, sc) = \hat{\psi}\left(x, c\left(\sum_{h \in \mathcal{H}_T} a_h\right)\right) = c\left(\sum_{h \in \mathcal{H}_T} a_h\right)xH_T$$

Por lo tanto $\hat{\psi}$ es $C[\mathcal{H}_T]-$ balanceada, así es que existe un único homomorfismo de espacios vectoriales $\psi : C[S_n] \bigotimes_{C[\mathcal{H}_T]} C \to C[S_n] H_T$ tal que $\psi(x \otimes c) = cxH_T$. Además,

$$\phi \circ \psi (x \otimes c) = \phi (cxH_T) = (cxH_T \otimes 1) = (x \otimes H_T c) = |\mathcal{H}_T| (x \otimes c)$$

$$\psi \circ \phi (a) = \psi (a \otimes 1) = aH_T = |\mathcal{H}_T| a$$

Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo de $C[S_n]-$módulos. ■

Corolario 113 *Sea T una tabla de forma $\alpha \vdash n$ tal que $\alpha \neq (n)$. Entonces $C[S_n] H_T$ es un $C[S_n]-$módulo reducible.*

Demostración.

Si $S_n/\mathcal{H}_T = \{x_1, ..., x_{|S_n/\mathcal{H}_T|}\}$ y su dimensión es mayor a 1, entonces $U = \langle x_1 + ... + x_{|S_n/\mathcal{H}_T|}$ es un $C[S_n]-$ submódulo de $C[S_n/\mathcal{H}_T]$ no trivial. Por la proposición anterior, $C[S_n] H_T$ es isomorfo al módulo de permutaciones $C[S_n/\mathcal{H}_T]$ y por lo tanto es un $C[S_n]-$ módulo reducible. ■

Para definir el elemento y_T, para una tabla T cualquiera, no se habló de ningún motivo para el orden de sus factores H_T y V_T. Estamos ahora interesados en saber si una definición con H_T y V_T intercambiados implica resultados análogos.

Proposición 114 *Sea T una tabla de forma α. Entonces*

$$(V_T H_T)^2 = \theta^\alpha V_T H_T$$

Demostración. Sea $\phi : C[S_n] \to C[S_n]$ tal que $\phi\left(\sum_{g \in S_n} a_g g\right) = \sum_{g \in S_n} a_g g^{-1}$. Se verifica directamente que ϕ es una aplicación biyectiva tal que $\phi(xy) = \phi(y)\phi(x)$ para todo x y todo y en $C[S_n]$. Como H_T es la suma de elementos en un grupo, $\phi(H_T) = H_T$. También de la definición de V_T y del hecho $sgn(g) = sgn(g^{-1})$ para toda $g \in S_n$, se tiene que

$\phi(V_T) = V_T$ y en consecuencia $\phi(H_T V_T) = V_T H_T$. Se sigue entonces del lema 81 que

$$\theta^{\alpha} V_T H_T = \phi\left((H_T V_T)^2\right) = \phi(H_T V_T)\,\phi(H_T V_T) = (V_T H_T)^2 \qquad \blacksquare$$

Proposición 115 *Sea T una tabla de forma α. Entonces hay un isomorfismo de $C[S_n]$ −módulos*

$$C[S_n]\,H_T V_T \cong C[S_n]\,V_T H_T$$

Demostración.

Sea $\varphi : C[S_n]\,H_T V_T \to C[S_n]\,V_T H_T$ tal que $\varphi(x) = xH_T$. Se verifica sin problemas que φ es un homomorfismo de $C[S_n]$− módulos. Veremos que φ es un homomorfismo suprayectivo. Sea $z \in C[S_n]\,V_T H_T$. Entonces por la proposición anterior,

$$\begin{aligned} z &= xV_T H_T \qquad\qquad x \in C[S_n] \\ &= \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}} xV_T H_T\, V_T\right) H_T \end{aligned}$$

y por lo tanto $\varphi\left(\frac{1}{\theta^{\alpha}} xV_T H_T\, V_T\right) = z$.

Ahora sea $\psi : C[S_n]\,V_T H_T \to C[S_n]\,H_T V_T$ tal que $\psi(y) = yV_T$.

ψ es un homomorfismo de $C[S_n]$− módulos y además

$$\psi \circ \varphi(x) = \psi(xH_T) = xH_T V_T = \theta^{\alpha} x$$

implica que φ es inyectivo. $\blacksquare$

Definición 116 $D(\alpha)^t := \{(i,j) \mid (j,i) \in D(\alpha)\}$

Definición 117 α' *es la* ***partición conjugada*** *de α si $D(\alpha)^t = D(\alpha')$.*

Definición 118 T^t *es la* ***tabla transpuesta*** *de T si T^t es una función biyectiva $T^t : D(\alpha') \to \{1, 2, ...n\}$ tal que $T^t((i,j)) = T((j,i))$.*

La siguiente proposición y el siguiente teorema se encuentran en el libro [4].

Proposición 119

$$C[S_n] V_T H_T \bigotimes_C V^{(1^n)} \cong C[S_n] H_{T^t} V_{T^t}$$

Demostración.

i) Sea $f : C[S_n] \to C[S_n]$ tal que $f\left(\sum_{g\in S_n} a_g g\right) = \sum_{g\in S_n} a_g sgn(g) g$.

f es un isomorfismo de álgebras que además cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} (f)^2 &= I_{C[S_n]} \\ f(H_{T^t}V_{T^t}) &= V_T H_T \end{aligned}$$

ii) Sea $h : C[S_n] H_{T^t} V_{T^t} \to C[S_n] V_T H_T \bigotimes_C V^{(1^n)}$ tal que $h(x) = f(x) \bigotimes_C z$, donde z genera a $V^{(1^n)}$. Como f es un homomorfismo de espacios vectoriales, h también lo es. Que h sea un $C[S_n]-$ homomorfismo se sigue de lo siguiente:

Para toda $g \in S_n, x \in C[S_n]$

$$\begin{aligned} h(gx) &= f(gx) \otimes z \\ &= sgn(g) g f(x) \otimes z \\ &= g f(x) \otimes sgn(g) z \\ &= g f(x) \otimes gz \qquad \text{por } 92 \\ &= g(f(x) \otimes z) \\ &= g h(x) \end{aligned}$$

Por la proposición anterior, $\dim_C C[S_n] H_T V_T = \dim_C C[S_n] V_T H_T$. Además, si T es una tabla estándar de forma α, entonces T^t es también una tabla estándar, por lo cual

$f^\alpha = f^{\alpha'}$. Se sigue que

$$\dim_C \left(C[S_n] V_T H_T \bigotimes_C V^{[1^n]} \right) = f^\alpha = f^{\alpha'} = \dim_C C[S_n] H_{T^t} V_{T^t}$$

Basta entonces demostrar que h es suprayectiva. Para ello, sea $s \in C[S_n] V_T H_T \bigotimes_C V^{[1^n]}$. Entonces $s = xV_T H_T \bigotimes \lambda z$, con $x \in C[S_n]$, $\lambda \in C$. Ya que f es un isomorfismo de álgebras con la propiedad $f(H_{T^t} V_{T^t}) = V_T H_T$, tenemos que $h(f^{-1}(\lambda x)(H_{T^t} V_{T^t})) = \lambda x V_T H_T \bigotimes z = xV_T H_T \bigotimes \lambda z = s$. ■

De las proposiciones 115 y 119 se sigue el siguiente teorema. Recordemos que $V^\alpha = C[S_n]\hat{y}_T$, donde T es una tabla de forma α.

Teorema 120

$$V^\alpha \bigotimes V^{[1^n]} \cong V^{\alpha'}$$

Capítulo 4

Bases generadas por simetrizadores de Young.

En este capítulo se definirán nuevos elementos de los cuales los definidos anteriormente serán un caso especial. La descomposición del álgebra de grupo $C[S_n]$ en ideales bilaterales encontrada en el capítulo anterior será de gran ayuda para verificar algunas de las relaciones que satisfacen, es decir, para encontrar el elemento del álgebra de grupo que se obtiene al multiplicar dos de ellos. Veremos también que estos elementos forman una base de $C[S_n]$ y más aún, es posible obtener de ellos bases para cada uno de los $C[S_n]$ −módulos irreducibles encontrados en el capítulo anterior.

La descripción de las representaciones matriciales en términos de las bases generadas por los simetrizadores de Young implica gran cantidad de cálculos inclu- so en los casos más sencillos. Sin embargo, el estudio de estos simetrizadores nos conducirá a la definición de distintos idempotentes del álgebra de grupo.

Para este capítulo se consultó el libro [8].

El símbolo σ^{α}_{TS} denotará la permutación en S_n que transforma la tabla S de forma α en la tabla T.

Observación. $\left(\sigma^{\alpha}_{ST}\right)^{-1} = \sigma^{\alpha}_{TS}$

Notación. Sean T una tabla fija de forma α y x_T^α en $C[S_n]$.

$$x_S^\alpha := \sigma_{ST}^\alpha x_T^\alpha \sigma_{TS}^\alpha \qquad \text{para toda tabla } S \text{ de forma } \alpha$$

Ejemplo 4.1 $\alpha = (3,2,1)$ $\quad \sigma_{ST}^\alpha = (2143)(56)$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 6 & \\ \cline{1-2} 5 & & \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \cline{1-2} 6 & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Si $x_T^\alpha = (346) + (12)$ *entonces* $x_S^\alpha = (235) + (14)$.

Notación. En este capítulo será necesario, en algunas ocasiones, hacer explícita la forma de una tabla T en las expresiones y_T, H_T y V_T. Cuando surja tal necesidad agregaremos un índice en nuestra anterior notación:

Sea T una tabla de forma α

$$\begin{aligned} y_T^\alpha &:= y_T = H_T V_T \\ H_T^\alpha &:= H_T \\ V_T^\alpha &:= V_T \end{aligned}$$

Definición 121

$$y_{ST}^\alpha := \sigma_{ST}^\alpha y_T^\alpha = y_S^\alpha \sigma_{ST}^\alpha$$

Cuando no haya motivo de confusión también omitiremos el índice α en y_{ST}^α y en σ_{ST}^α.

El siguiente lema es una generalización del lema 80.

Lema 122 *Sea $x \in C[S_n]$. Si $x = sgn(q_T) p_S x q_T$ para toda p_S en $\mathcal{H}_S$ y para toda q_T en $\mathcal{V}_T$, entonces $x = \lambda y_{ST}$, donde λ es el coeficiente de σ_{ST} en x.*

Demostración.

Sea $x \in C[S_n]$ tal que $x = sgn(q_T) p_S x q_T$ para toda p_S en $\mathcal{H}_S$ y para toda q_T en $\mathcal{V}_T$, entonces $x\sigma_{TS} = sgn(q_T) p_S x q_T \sigma_{TS}$ y como $\sigma_{ST} q_T \sigma_{TS} = q_S$, tenemos que $x\sigma_{TS} =$

$sgn\,(q_T)\,p_S x\sigma_{TS} q_S = sgn\,(q_S)\,p_S x\sigma_{TS} q_S$ para toda p_S en $\mathcal{H}_S$ y para toda q_s en $\mathcal{V}_S$. Por el lema 80 $x\sigma_{TS} = \lambda y_S$, donde λ es el coeficiente de ε en $x\sigma_{TS}$, es decir, el coeficiente de σ_{ST} en x. Por lo tanto $x = \lambda y_S \sigma_{ST} = \lambda y_{ST}$ ■

Corolario 123 *Para todo $x \in C\,[S_n]$ se tiene que*

(*i*) $H_S x V_T = \lambda y_{ST}$

(*ii*) $y_{SU} x y_{WT} = \lambda y_{ST}$

donde en cada caso λ es el coeficiente de σ_{ST} en el lado izquierdo de la ecuación.

Demostración.

De las observaciones siguientes a la definición de los elementos H_S y V_T, se sigue que para toda p_S en $\mathcal{H}_S$ y para toda q_T en $\mathcal{V}_T$

$$\begin{aligned} p_S\,(H_S x V_T)\,q_T &= sgn\,(q_T)\,H_S x V_T \\ p_S\,(y_{SU} x y_{WT})\,q_T &= sgn\,(q_T)\,y_{SU} x y_{WT} \end{aligned}$$

Se sigue del lema anterior la afirmación del corolario. ■

Lema 124 *Los coeficientes de ε en los productos x_1x_2 y x_2x_1 de cualesquiera dos elementos en $C\,[S_n]$ son iguales.*

Demostración.

La suma de términos de la forma $(\xi_1\sigma)(\xi_2\sigma^{-1})$, donde $\xi_1,\ \xi_2 \in C$, determinará el coeficiente de ε en x_1x_2, pero precisamente esa suma también determinará el coeficiente de ε en x_2x_1. ■

Lema 125 *Para cualesquiera tablas S, U, W, T de forma α, y para cualquier elemento x en $C\,[S_n]$*

$$y_{SU} x y_{WT} = \theta^{\alpha} \rho y_{ST}$$

donde ρ es el coeficiente de ε en $y_{WU}x$.

Demostración.

Hemos visto ya que $y_{SU}xy_{WT} = \lambda y_{ST}$ donde λ es el coefieciente de σ_{ST} en el lado izquierdo de la ecuación (corolario 123). Así es que

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{coeficiente de } \sigma_{ST} \text{ en } \sigma_{SU}y_U xy_W\sigma_{WT} \\ &= \text{coeficiente de } \varepsilon \text{ en } \sigma_{TS}\sigma_{SU}y_U xy_W\sigma_{WT} \end{aligned}$$

Por el lema anterior

$$\lambda = \text{ coeficiente de } \varepsilon \text{ en } (y_W\sigma_{WT})(\sigma_{TS}\sigma_{SU}y_U x).$$

Además $(y_W\sigma_{WT})(\sigma_{TS}\sigma_{SU}y_U x) = y_W\sigma_{WU}y_U x = y_W y_W\sigma_{WU}x = \theta^\alpha y_W\sigma_{WU}x = \theta^\alpha y_{WU}x$. Por lo tanto $\lambda = \theta^\alpha\rho$ donde ρ es el coeficiente de ε en $y_{WU}x$. ■

Lema 126 *Si $\alpha \neq \beta$, entonces para cualesquiera tablas S, U, W, T y para cualquier elemento x en $C[S_n]$*

$$y^\alpha_{SU}xy^\beta_{WT} = 0$$

Demostración. Del lema111 , $I_\gamma = \bigoplus_{i=1}^{f^\gamma} C[S_n]\, y_i^\gamma$ es un ideal bilateral. Podemos afirmar que $y^\alpha_{SU} = \sigma^\alpha_{SU}y^\alpha_U$ está en I_α pues por el teorema 56, $C[S_n]\,y^\alpha_U \subseteq I_\alpha$. En consecuencia, $y^\alpha_{SU}\left(xy^\beta_{WT}\right)$ está en I_α. Análogamente, $\left(y^\alpha_{SU}x\right)y^\beta_{WT}$ está en I_β. Se sigue del teorema 54 que si $\alpha \neq \beta$ entonces $y^\alpha_{SU}xy^\beta_{WT} = 0$. ■

De la definición de las expresiones y^α_{ST}, podemos observar que el coeficiente de cualquier permutación g en y^α_{ST} debe ser $1, -1$ ó 0. Se describirá ahora un método para evaluar y^α_{ST} en términos de las permutaciones de S_n.

- Caso 1

Sean $p_S \in \mathcal{H}_S$, $q_T \in \mathcal{V}_T$. Si g es de la forma $p_S \sigma_{ST} q_T = p_S q_S \sigma_{ST}$, es decir, si g ocurre con coeficiente distinto de cero en y_{ST} entonces por el corolario 78

$$\begin{aligned} V_{gT} H_S = g V_T g^{-1} H_S &= p_S \sigma_{ST} q_T V_T q_T^{-1} \sigma_{TS} p_S^{-1} H_S \\ &= p_S \sigma_{ST} V_T \sigma_{TS} p_S^{-1} H_S \\ &= p_S V_S H_S \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $V_{gT} H_S = 0$ entonces el coeficiente de g en y_{ST} debe ser cero.

- **Caso 2**

  Supongamos $V_{gT} H_S \neq 0$. Se sigue del lema 79 $(e) \Rightarrow (c)$, que es posible construir una tabla L tal que $H_S = H_L$ y $V_{gT} = V_L$, luego $\sigma_{SL} = p_S$ y $\sigma_{L(gT)} = q_{gT}$, donde $p_S \in \mathcal{H}_S$ y $q_{gT} \in \mathcal{V}_{gT}$. Además,

$$\sigma_{ST} = \sigma_{S(gT)} \sigma_{(gT)T} = \sigma_{S(gT)} g = \left(\sigma_{SL} \sigma_{L(gT)}\right) g = p_S q_{gT} g = p_S g q_T$$

Así es que

$$g = p_S^{-1} \sigma_{ST} q_T^{-1}$$

Como permutaciones conjugadas tienen el mismo signo, lo anterior implica que g ocurre en y_{ST} con el coeficiente $sgn\left(q_T^{-1}\right) = sgn\left(q_T\right) = sgn\left(q_{gT}\right) = sgn\left(\sigma_{L(gT)}\right)$.

Resumimos estos resultados en el siguiente lema:

Lema 127 *Si $V_{gT} H_S = 0$, el coeficiente de g en y_{ST} es cero. Si $V_{gT} H_S (= V_L H_L) \neq 0$ el coeficiente de g en y_{ST} es ± 1 dependiendo del signo de q_{gT}, o lo que es lo mismo, del signo de $\sigma_{(gT)L}$.*

Ejemplo. Vamos a encontrar para todo elemento en S_3, su coeficiente en y_{ST}, donde S y T son las siguietes tablas:

$$S = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \sigma_{ST} = \sigma_{TS} = (23)$$

g	ε	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
gT	$\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}$	$\begin{matrix}2&3\\1&\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&2\\3&\end{matrix}$	$\begin{matrix}3&1\\2&\end{matrix}$	$\begin{matrix}2&1\\3&\end{matrix}$	$\begin{matrix}3&2\\1&\end{matrix}$
L	•	•	$\begin{matrix}1&2\\3&\end{matrix}$	$\begin{matrix}2&1\\3&\end{matrix}$	$\begin{matrix}2&1\\3&\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&2\\3&\end{matrix}$
$\sigma_{(gT)L}$	•	•	ε	(23)	ε	(13)
coef. de g en y_{ST}	0	0	$+1$	-1	$+1$	-1

Para las tablas εT y $(12)T$ es posible encontrar un par de números en la misma columna que esté en un mismo renglón de S; por el lema 79, eso implica $V_{\varepsilon T}H_S = V_{(12)T}H_S = 0$ y por el lema 127, el coeficiente de ε y de (12) en y_{ST} es cero. Las tablas L, en la tabla anterior, son aquellas para las que se cumple $H_S = H_L$ y $V_{gT} = V_L$ y una vez construidas, se calcula sencillamente el signo de las permutaciones $\sigma_{(gT)L}$ para obtener inmediatamente del lema 127 que

$$y_{ST} = (23) - (13) + (123) - (132)\,.$$

Observación Los cálculos del lema 127 se hacen a partir de las tablas y sin hacer cálculos en el álgebra de grupo .

Si en los lemas 125 y 126 tomamos $x = \varepsilon$, y en el lema 127 $g = \varepsilon$ obtenemos el siguiente resultado importante.

Teorema 128 *Las expresiones y^{α}_{ST} satisfacen las siguientes relaciones:*

a) $y^{\alpha}_{SU}y^{\beta}_{WT} = 0$, si $\alpha \neq \beta$.

b) $y^\alpha_{SU} y^\alpha_{WT} = 0$, si $V^\alpha_U H^\alpha_W = 0$.

c) $y^\alpha_{SU} y^\alpha_{WT} = \pm\theta^\alpha y^\alpha_{ST}$, si $V^\alpha_U H^\alpha_W \left(= V^\alpha_L H^\alpha_L\right) \neq 0$, dependiendo del signo de σ^α_{UL}.

■

De ahora en adelante trabajaremos únicamente con tablas estándar.

Definición 129

$$y^\alpha_{ij} := \sigma^\alpha_{ij} y^\alpha_j = y^\alpha_i \sigma^\alpha_{ij}$$

donde σ^α_{ij} denota la permutación que transforma la tabla T^α_j en la tabla T^α_i.

Teorema 130

$$\left\{ y^\alpha_{ij} \mid \alpha \vdash n,\ 1 \leq i, j \leq f^\alpha \right\}$$

es una C base de $C[S_n]$.

Demostración.

Supongamos $\sum\limits_{\alpha,i,j} \lambda^\alpha_{ij} y^\alpha_{ij} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 &= y^\beta_{f^\beta}\left(\sum_{\alpha,i,j} \lambda^\alpha_{ij} y^\alpha_{ij}\right) y^\beta_1 = y^\beta_{f^\beta}\left(\sum_{\alpha,i,j} \lambda^\alpha_{ij} y^\alpha_i \sigma^\alpha_{ij}\right) y^\beta_1 \\
&= \theta^\beta \left(\sum_j \lambda^\beta_{f^\beta j} y^\beta_{f^\beta} \sigma^\beta_{f^\beta j}\right) y^\beta_1 \qquad \text{por el lema 96} \\
&= \theta^\beta \left(\sum_j \lambda^\beta_{f^\beta j} \sigma^\beta_{f^\beta j} y^\beta_j\right) y^\beta_1 \qquad \text{por el corolario 108} \\
&= \left(\theta^\beta\right)^2 \left(\lambda^\beta_{f^\beta 1} \sigma^\beta_{f^\beta 1} y^\beta_1\right) \qquad \text{por el lema 96} \\
&= \left(\theta^\beta\right)^2 \lambda^\beta_{f^\beta 1} y^\beta_{f^\beta 1},
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\lambda^\beta_{f^\beta 1} = 0$. De manera análoga $\lambda^\beta_{f^\beta 2} = \lambda^\beta_{f^\beta 3} = \ldots\ldots = \lambda^\beta_{f^\beta f^\beta} = 0$, para toda β partición de n. Por lo tanto, los elementos y^α_{ij} forman un conjunto linealmente independiente de cardinalidad $\sum\limits_{\alpha \vdash n} (f^\alpha)^2$ ó, por el teorema 107, de cardinalidad $n!$. ■

Teorema 131

$$\left\{y_{ji}^{\alpha} \mid 1 \leq j \leq f^{\alpha}\right\}$$

es una C base de $C\left[S_n\right] y_i^{\alpha}$.

Demostración.

y_{ji}^{α} está en $C\left[S_n\right] y_i^{\alpha}$ pues por definición $y_{ji}^{\alpha} = \sigma_{ji}^{\alpha} y_i^{\alpha}$; y ya que estas f^{α} expresiones son linealmente independientes, forman una base del $C\left[S_n\right]-$módulo $C\left[S_n\right] y_i^{\alpha}$ de dimensión f^{α} (teorema 108). ■

Sabemos ahora que las expresiones y_{ij}^{α} no sólo generan un conjunto completo de $C\left[S_n\right]$-módulos irreducibles sino que además nos proporcionan bases para cada uno de ellos.

Ahora lo único que falta para la obtención de las representaciones matriciales de S_n es realizar algunos cálculos, sólo que éstos resultan ser demasiado complicados incluso para $n = 5$:

Sea $\rho : S_n \to GL\left(C\left[S_n\right] y_i^{\alpha}\right)$ tal que $\rho\left(\tau\right)\left(x\right) = \tau x$

Estamos interesados en la obtención de la matriz asociada a la transformación lineal $\rho\left(\tau\right)$ en la base $B_i = \left\{y_{1i}^{\alpha}, \ldots\ldots, y_{f^{\alpha}i}^{\alpha}\right\}$, o dicho de otra forma, en expresar τy_{ji}^{α} como una combinación lineal de los elementos en B_i . Como hemos visto que las expresiones y_{pq}^{β} forman una base de $C\left[S_n\right]$, $\tau = \sum_{\beta,p,q} \lambda_{pq}^{\beta} y_{pq}^{\beta}$ para algunos escalares λ_{pq}^{β} en C. Así es que por el teorema 128, τy_{ji}^{α} es una combinación lineal de elementos y_{pi}^{α} cuyos coeficientes son $\sum sgn\left(\sigma_{qL(q,j)}\right) \theta^{\alpha} \lambda_{pq}^{\alpha}$ donde la suma corre sobre las q's tales que $V_q^{\alpha} H_j^{\alpha} \neq 0$ y donde $L\left(q, j\right)$ es la tabla tal que $\mathcal{V}_q^{\alpha} = \mathcal{V}_L^{\alpha}$ y $\mathcal{H}_j^{\alpha} = \mathcal{H}_L^{\alpha}$. La dificultad se encuentra entonces en determinar para qué tablas $V_q^{\alpha} H_j^{\alpha} \neq 0$ y en calcular el signo de $\sigma_{qL(q,j)}$.

Capítulo 5

Unidades Seminormales.

En el capítulo anterior obtuvimos una base del álgebra de grupo $C[S_n]$, la formada por los elementos y_{ij}^{α}. Desafortunadamente las fórmulas para multiplicar a estos elementos no son sencillas y en consecuencia sus representaciones matriciales asociadas son difíciles de calcular. Buscamos ahora una base de $C[S_n]$ más sencilla.

En el capítulo 3 vimos que el álgebra de grupo $C[S_n]$ tiene una descomposición única en ideales bilaterales I_α y además I_α y $M_{f^\alpha}(C)$ son isomorfos como $C-$álgebras. En el álgebra $M_{f^\alpha}(C)$ la base más sencilla es la formada por las matrices, que denotaremos E_{ij}^{α}, con 1 en la entrada (i,j) y cero en las demás entradas. Si para toda α partición de n pensamos a la matriz E_{ij}^{α} como elemento de $\bigoplus_{\alpha\vdash n} M_{f^\alpha}(C)$ entonces se satisface la siguiente igualdad:

$$E_{ik}^{\alpha}E_{lj}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{kl}E_{ij}^{\alpha}.$$

Se sigue que para cada isomorfismo de $C-$álgebras $\Phi : C[S_n] \rightarrow \bigoplus_{\alpha\vdash n} M_{f^\alpha}(C)$ tal que $\Phi(I_\alpha) = M_{f^\alpha}(C)$ debe existir una base de $C[S_n]$ formada por elementos e_{ij}^{α} que satisfagan la igualdad

$$e_{ik}^{\alpha}e_{lj}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{kl}e_{ij}^{\alpha}. \tag{5.1}$$

Afirmamos que al encontrar tal base será más fácil encontrar las representaciones matriciales asocidas a los elementos e_{ij}^{α} :

Sea $\rho : S_n \to GL\left(C\left[S_n\right] e_i^{\alpha}\right)$ tal que $\rho\left(g\right)\left(x\right) = gx$. Escribiendo g como combinación lineal de los elementos e_{ij}^{α} tenemos que

$$\begin{aligned} ge_{ji}^{\alpha} &= \left(\sum_{\beta,p,q} u_{pq}^{\beta} e_{pq}^{\beta}\right) e_{ji}^{\alpha} \\ &= \sum_{p} u_{pj}^{\alpha} e_{pi}^{\alpha} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $C = \left\{e_{ji}^{\alpha} \mid 1 \leq j \leq f^{\alpha}\right\}$, $\left[\rho\left(g\right)\right]_C$ denota la matriz asociada a $\rho\left(g\right)$ en la base C y $\left(u_{ij}^{\alpha}\right)_{i,j}$ denota la matriz de tamaño $f^{\alpha} \times f^{\alpha}$ con u_{ij}^{α} en la entrada $\left(i, j\right)$, entonces $\left[\rho\left(g\right)\right]_C = \left(u_{ij}^{\alpha}\right)_{i,j}$.

Para este capítulo se consultó el libro [8].

Alfred Young definió tres conjuntos distintos de expresiones que satisfacen la ecuación 5.1. Estudiaremos uno de ellos, el formado por las llamadas unidades seminormales:

Definición 132

$$\begin{aligned} e_i^{\alpha} &:= \frac{1}{\theta^{\alpha}} e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *} \\ e_i^{\alpha *} &:= \frac{1}{\theta^{\alpha *}} e_i^{\alpha **} y_i^{\alpha *} e_i^{\alpha **} \\ &\vdots \\ e_i^{[1]} &:= \varepsilon \end{aligned}$$

donde $\alpha *$ es la partición que se obtiene al quitar la letra n de la tabla $T_i^{\alpha *}$.

Ejemplo 133 $n = 3$, $\alpha = (2, 1)$

$T_1^{\alpha} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array}$ $\qquad T_1^{\alpha *} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ $\qquad T_1^{\alpha **} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$

$\theta^{\alpha *} = 2, \theta^{\alpha} = 3$

$e_1^{\alpha**} = \varepsilon$
$e_1^{\alpha*} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + (12)\right)$
$e_1^{\alpha} = \frac{1}{12}\left(\varepsilon + (12)\right)\left(\varepsilon + (12)\right)\left(\varepsilon - (13)\right)\left(\varepsilon + (12)\right)$
$\quad = \frac{1}{12}\left[4\varepsilon + 4\,(12) - 2\,(13) - 2\,(23) - 2\,(123) - 2\,(132)\right]$

El siguiente lema será esencial para demostrar las relaciones que satisfacen las unidades seminormales.

Lema 134

$$y_i^{\alpha} e_i^{\alpha*} y_i^{\alpha} = \theta^{\alpha} y_i^{\alpha}$$

$$y_i^{\alpha*} e_i^{\alpha*} y_i^{\alpha*} = \theta^{\alpha*} y_i^{\alpha*}$$

Demostración.

Por el lema 125,

$$y_i^{\alpha} e_i^{\alpha*} y_i^{\alpha} = \theta^{\alpha} \rho_1 y_i^{\alpha}$$

$$y_i^{\alpha*} e_i^{\alpha*} y_i^{\alpha*} = \theta^{\alpha*} \rho_2 y_i^{\alpha*}$$

donde ρ_1 es el coeficiente de ε en $y_i^{\alpha} e_i^{\alpha*}$ y ρ_2 es el coeficiente de ε en $y_i^{\alpha*} e_i^{\alpha*}$. Demostraremos primero que $\rho_1 = \rho_2$. Del lema 95 sabemos que

$$H_i^{\alpha} = H_i^{\alpha*}\left(\varepsilon + (a_1 n) + \ldots.. + (a_r n)\right)$$

$$V_i^{\alpha} = \left(\varepsilon - (b_1 n) - \ldots.. - (b_s n)\right) V_i^{\alpha*}$$

donde $a_1, \ldots, a_r$ son los símbolos de la tabla T_i^{α} que están en el mismo renglón que n y $b_1, \ldots, b_s$ son los símbolos de la misma tabla que están en la misma columna que n. De esto último

$$y_i^{\alpha} \;=\; H_i^{\alpha*}\left(\varepsilon - \sum_t (b_t n) + \sum_u (a_u n) + \sum_{t,u} (a_u n b_t)\right) V_i^{\alpha*}$$

$$
\begin{aligned}
&= H_i^{\alpha *} V_i^{\alpha *} + \text{ términos que involucran la letra } n \\
&= y_i^{\alpha *} + \text{ términos que involucran la letra } n.
\end{aligned}
$$

Como $e_i^{\alpha *}$ no involucra la letra n, entonces el coeficiente de ε en $y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *}$ es igual al coeficiente de ε en $y_i^{\alpha *} e_i^{\alpha *}$ y por lo tanto $\rho_1 = \rho_2$.

Ahora demostraremos por inducción sobre n que $\rho_2 = 1$. La validez del caso $n = 2$ se sigue de las siguientes igualdades.

$$y_i^{(1)} e_i^{[1]} y_i^{(1)} = \varepsilon\varepsilon\varepsilon = \varepsilon = y_i^{(1)} = \theta^{(1)} y_i^{(1)}$$

Supongamos cierto para el caso $n-1$, entonces $y_i^{\alpha *} e_i^{\alpha **} y_i^{\alpha *} = \theta^{\alpha *} y_i^{\alpha *}$

$$\theta^{\alpha *} \rho_2 y_i^{\alpha *} = y_i^{\alpha *} e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha *} = \frac{1}{\theta^{\alpha *}} y_i^{\alpha *} e_i^{\alpha **} y_i^{\alpha *} e_i^{\alpha **} y_i^{\alpha *} = y_i^{\alpha *} e_i^{\alpha **} y_i^{\alpha *} = \theta^{\alpha *} y_i^{\alpha *}$$

Por lo tanto, $\rho_1 = \rho_2 = 1$. ■

Proposición 135 e_i^{α} *es idempotente.*

Demostración.

Por inducción sobre n

$$\left(e_1^{[1]}\right)^2 = \varepsilon^2 = \varepsilon = e_1^{[1]}$$

Asumimos $\left(e_i^{\alpha *}\right)^2 = e_i^{\alpha *}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left(e_i^{\alpha}\right)^2 &= \frac{1}{\left(\theta^{\alpha}\right)^2} e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *} \\
&= \frac{1}{\theta^{\alpha}} e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *} = e_i^{\alpha}
\end{aligned}
$$

■

Definimos ahora la forma más general de las unidades seminormales:

Definición 136

$$e_{ij}^{\alpha} := \frac{1}{\theta^{\alpha}} e_i^{\alpha *} y_{ij}^{\alpha} e_j^{\alpha *}$$

En particular e_{ii}^{α} es el idempotente anteriormente denotado por e_i^{α}.

Teorema 137 *Las expresiones e_{ij}^{α} satisfacen la siguiente relación.*

$$e_{ik}^{\alpha} e_{lj}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{kl} e_{ij}^{\alpha}$$

Demostración.

Se verifica directamente para el caso $n = 2$.

Asumamos que la fórmula se satisface para el caso de $n-1$ letras o menos.

$$e_{ik}^{\alpha} e_{lj}^{\beta} = \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right)\left(\frac{1}{\theta^{\beta}}\right) e_i^{\alpha *} y_{ik}^{\alpha} e_k^{\alpha *} e_l^{\beta *} y_{lj}^{\beta} e_j^{\beta *}$$

Si $\alpha \neq \beta$ por el lema 126, $y_{ik}^{\alpha} e_k^{\alpha *} e_l^{\beta *} y_{lj}^{\beta} = 0$ y por lo tanto la fórmula se satisface.

Si $k \neq l$ y $\alpha = \beta$, por hipótesis de inducción, $e_k^{\alpha *} e_l^{\beta *} = 0$ y esto hace que también se satisfaga la fórmula.

Si $k = l$ y $\alpha = \beta$, como $e_k^{\alpha *}$ es idempotente,

$$\begin{aligned}
e_{ik}^{\alpha} e_{kj}^{\alpha} &= \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right)^2 e_i^{\alpha *} y_{ik}^{\alpha} e_k^{\alpha *} y_{kj}^{\alpha} e_j^{\alpha *} \\
&= \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right)^2 e_i^{\alpha *} \sigma_{ik}^{\alpha} \left(y_k^{\alpha} e_k^{\alpha *} y_k^{\alpha}\right) \sigma_{kj}^{\alpha} e_j^{\alpha *} \\
&= \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right) e_i^{\alpha *} \sigma_{ik}^{\alpha} y_k^{\alpha} \sigma_{kj}^{\alpha} e_j^{\alpha *} \qquad \text{por el lema 134} \\
&= \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right) e_i^{\alpha *} \sigma_{ik}^{\alpha} \sigma_{kj}^{\alpha} y_j^{\alpha} e_j^{\alpha *} \\
&= \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right) e_i^{\alpha *} y_{ij}^{\alpha} e_j^{\alpha *} = e_{ij}^{\alpha}
\end{aligned}$$

y por lo tanto el teorema queda demostrado. ■

Lema 138 $e_i^\alpha y_{ij}^\alpha e_j^\alpha = e_i^{\alpha *} y_{ij}^\alpha e_j^{\alpha *} = \theta^\alpha e_{ij}^\alpha$;

Demostración.

$$\begin{aligned}
e_i^\alpha y_{ij}^\alpha e_j^\alpha &= \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right) e_i^{\alpha *} y_i^\alpha e_i^{\alpha *} y_{ij}^\alpha e_j^\alpha \\
&= \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right) e_i^{\alpha *} \left(y_i^\alpha e_i^{\alpha *} y_i^\alpha\right) \sigma_{ij}^\alpha e_j^\alpha \\
&= e_i^{\alpha *} y_i^\alpha \sigma_{ij}^\alpha e_j^\alpha \qquad \text{por el lema 134} \\
&= \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right) e_i^{\alpha *} y_i^\alpha \sigma_{ij}^\alpha e_j^{\alpha *} y_j^\alpha e_j^{\alpha *} \\
&= \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right) e_i^{\alpha *} \sigma_{ij}^\alpha \left(y_j^\alpha e_j^{\alpha *} y_j^\alpha\right) e_j^{\alpha *} \\
&= e_i^{\alpha *} \sigma_{ij}^\alpha y_j^\alpha e_j^{\alpha *} \qquad \text{por el lema 134} \\
&= e_i^{\alpha *} y_{ij}^\alpha e_j^{\alpha *} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 139 *El coeficiente de ε en e_{ij}^α es igual a $\left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right)\delta_{ij}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\text{el coeficiente de } \varepsilon \text{ en } e_{ij}^\alpha \\
= &\text{ " \quad " \quad " \quad " } \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right) e_i^\alpha y_{ij}^\alpha e_j^\alpha \qquad \text{por el lema 138} \\
= &\text{ " \quad " \quad " \quad " } \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right) e_j^\alpha e_i^\alpha y_{ij}^\alpha \qquad \text{por el lema 124} \\
= &\text{ " \quad " \quad " \quad " } \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right) \delta_{ij} e_i^\alpha y_i^\alpha \qquad \text{por el teorema 137} \\
= &\text{ " \quad " \quad " \quad " } \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right)^2 \delta_{ij} e_i^\alpha y_i^\alpha y_i^\alpha \ \text{por el lema 81} \\
= &\text{ " \quad " \quad " \quad " } \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right)^2 \delta_{ij} y_i^\alpha e_i^\alpha y_i^\alpha \ \text{por el lema 124} \\
= &\text{ " \quad " \quad " \quad " } \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right) \delta_{ij} y_i^\alpha \qquad \text{por el lema 134} \\
= &\left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right) \delta_{ij} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

El siguiente resultado es una generalización del lema 134.

Lema 140 $y_i^\alpha e_{ij}^\alpha y_j^\alpha = \theta^\alpha y_{ij}^\alpha$

Demostración.

$$\begin{aligned}
y_i^\alpha e_{ij}^\alpha y_j^\alpha &= \frac{1}{\theta^\alpha} y_i^\alpha e_i^{\alpha *} y_{ij}^\alpha e_j^{\alpha *} y_j^\alpha \\
&= \frac{1}{\theta^\alpha}\left(y_i^\alpha e_i^{\alpha *} y_i^\alpha\right) \sigma_{ij}^\alpha e_j^{\alpha *} y_j^\alpha \\
&= y_i^\alpha \sigma_{ij}^\alpha e_j^{\alpha *} y_j^\alpha \qquad \text{por el lema 134} \\
&= \sigma_{ij}^\alpha y_j^\alpha e_j^{\alpha *} y_j^\alpha \\
&= \theta^\alpha y_{ij}^\alpha \qquad \text{por el lema 134} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Observemos que como $y_i^\alpha e_{ij}^\alpha y_j^\alpha = \theta^\alpha y_{ij}^\alpha \neq 0$, las expresiones e_{ij}^α son distintas de cero .

Proposición 141 *Las unidades seminormales* $\left\{e_{ij}^\alpha \mid \alpha \vdash n,\ 1 \leq i,j \leq f^\alpha\right\}$ *forman una base de* $C\left[S_n\right]$.

Demostración.

Puesto que hay $n!$ unidades seminormales basta ver que son linealmente independientes. Supongamos $\sum_{\alpha,i,j} \lambda_{ij}^\alpha e_{ij}^\alpha = 0$, entonces por el teorema 137

$$0 = e_r^\beta \left(\sum_{\alpha,i,j} \lambda_{ij}^\alpha e_{ij}^\alpha\right) e_s^\beta = e_r^\beta \sum_i \lambda_{is}^\beta e_{is}^\beta = \lambda_{rs}^\beta e_{rs}^\beta$$

y por lo tanto $\lambda_{rs}^\beta = 0$. $\blacksquare$

Proposición 142 *Las unidades* e_i^α *son idempotentes primitivos para toda* $\alpha \vdash n$, $1 \leq i \leq f^\alpha$.

Demostración.

Supongamos $e_i^\alpha = e' + e''$, donde e' y e'' son idempotentes ortogonales distintos de cero. Por la proposición anterior $e' = \sum_{\beta,p,q} \lambda_{pq}^\beta e_{pq}^\beta$ y entonces por el teorema 137

$$e' = e_i^\alpha e' e_i^\alpha = e_i^\alpha \left(\sum_{\beta,p,q} \lambda_{pq}^\beta e_{pq}^\beta \right) e_i^\alpha = \lambda_{ii}^\alpha e_i^\alpha$$

Además

$$e' = \left(e'\right)^2 = \left(\lambda_{ii}^\alpha e_i^\alpha\right)^2 = \left(\lambda_{ii}^\alpha\right)^2 e_i^\alpha$$

Así es que $\lambda_{ii}^\alpha = 1$ ó 0. Si $\lambda_{ii}^\alpha = 0$, entonces $e' = 0$ y si $\lambda_{ii}^\alpha = 1$, entonces $e' = e_i^\alpha$ y $e'' = 0$. ■

Notación. Sea $\beta \vdash n-1$. Denotaremos con $TS(\beta+, r)$ al conjunto de tablas estándar T_k^α tales que $T_k^{\alpha *} = T_r^\beta$.

Observación. De la definición 98 se sigue que $|TS(\beta+, r)| = |P(\beta+)|$.

Proposición 143

$$e_r^\beta = \sum_{T_k^\alpha \in TS(\beta+,r)} e_k^\alpha$$

Demostración.

Sea $\beta \vdash n-1$.Como e_r^βestá en $C[S_n]$, según la proposición 141 existen escalares $\lambda_{ij}^\gamma \in C$ tales que $e_r^\beta = \sum_{\gamma\vdash n} \sum_{i,j=1}^{f^\gamma} \lambda_{ij}^\gamma e_{ij}^\gamma$.

Usando el teorema 137

$$\frac{1}{(\theta^\alpha)^2}\left(e_k^{\alpha *} y_k^\alpha e_k^{\alpha *}\right) e_r^\beta \left(e_l^{\alpha *} y_l^\alpha e_l^{\alpha *}\right) = e_k^\alpha e_r^\beta e_l^\alpha = e_k^\alpha \left(\sum_{\gamma \vdash n} \sum_{i,j=1}^{f^\gamma} \lambda_{ij}^\gamma e_{ij}^\gamma \right) e_l^\alpha = \lambda_{kl}^\alpha e_{kl}^\alpha,$$

y como $e_k^{\alpha *} e_r^\beta = 0$ si $\mathrm{T}_k^{\alpha *} \neq \mathrm{T}_r^\beta$ y $e_r^\beta e_l^{\alpha *} = 0$ si $\mathrm{T}_r^\beta \neq \mathrm{T}_l^{\alpha *}$, $\lambda_{kl}^\alpha = 0$ en estos dos casos.

Si $\mathrm{T}_k^{\alpha *} = \mathrm{T}_r^\beta = \mathrm{T}_l^{\alpha *}$ entonces $k = l$ y

$$\lambda_{kk}^\alpha e_{kk}^\alpha = e_k^\alpha e_r^\beta e_k^\alpha = \frac{1}{\theta^\alpha} e_k^{\alpha *} y_k^\alpha \left(e_k^{\alpha *} e_r^\beta\right) e_k^\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\theta^{\alpha}} e_k^{\alpha *} y_k^{\alpha} e_k^{\alpha *} e_k^{\alpha} \\
&= e_k^{\alpha} e_k^{\alpha} = e_k^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Se sigue que $\lambda_{kk}^{\alpha} = 1$ y por lo tanto $e_r^{\beta} = \sum_{T_k^{\alpha} \in TS(\beta+,r)} e_k^{\alpha}$ ■.

Corolario 144

$$\sum_{\alpha \vdash n} \sum_{i=1}^{f^{\alpha}} e_i^{\alpha} = 1$$

Demostración.

Por lo anterior, se cumple que

$$\sum_{\alpha \vdash n} \sum_{k=1}^{f^{\alpha}} e_k^{\alpha} = \sum_{\beta \vdash n-1} \sum_{r=1}^{f^{\beta}} e_r^{\beta}$$

Por inducción $\sum_{\alpha,k} e_k^{\alpha} = \sum_{\beta,r} e_r^{\beta} = ... = e_1^{[1]} = \varepsilon$ ■

Resumimos en el siguiente teorema los resultados probados en la proposición 141, en el corolario 143 y en el teorema 137.

Teorema 145 *Las unidades seminormales e_{ij}^{α}, $\alpha \vdash n$, $1 \leq i,j \leq f^{\alpha}$, forman una base de $C[S_n]$ y satisfacen las siguientes relaciones:*

$$e_{ik}^{\alpha} e_{lj}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{kl} e_{ij}^{\alpha}$$

$$\sum_{\alpha \vdash n} \sum_{i=1}^{f^{\alpha}} e_i^{\alpha} = 1$$

Además, cada unidad seminormal e_i^{α} es un idempotente primitivo.

Teorema 146 *$C[S_n] e_i^{\alpha}$ es un $C[S_n]-$ módulo irreducible isomorfo a $C[S_n] \hat{y}_i^{\alpha}$ con base $\mathcal{B} = \left\{ e_{ji}^{\alpha} \mid 1 \leq j \leq f^{\alpha} \right\}$.*

Demostración.

Por la proposición 142, e_i^α es un idempotente primitivo. Se sigue de la proposición 47 que $C[S_n]e_i^\alpha$ es irreducible.

Según el teorema 50, basta encontrar elementos distintos de cero en $C[S_n]$ de la forma $e_i^\alpha x \hat{y}_i^\alpha$ para asegurar que los $C[S_n]-$ módulos $C[S_n]e_i^\alpha$ y $C[S_n]\hat{y}_i^\alpha$ son isomorfos. Afirmamos que $e_i^\alpha e_i^{\alpha *}\hat{y}_i^\alpha \neq 0$. Si $e_i^\alpha e_i^{\alpha *}\hat{y}_i^\alpha = 0$ entonces $(e_i^\alpha e_i^{\alpha *}\hat{y}_i^\alpha)e_i^{\alpha *} = e_i^\alpha = 0$, lo cual contradice el hecho $e_i^\alpha \neq 0$.

Se sigue del teorema 137 que $e_{ji}^\alpha = e_{ji}^\alpha e_i^\alpha$ y por lo tanto e_{ji}^α está en $C[S_n]e_i^\alpha$. $\mathcal{B}$ es una base de $C[S_n]e_i^\alpha$ puesto que es un conjunto de elementos en $C[S_n]e_i^\alpha$ linealmente independientes y tiene cardinalidad igual a la dimensión de $C[S_n]e_i^\alpha$. ■

Corolario 147 *$C[S_n]e_i^\alpha$ y $C[S_n]e_j^\beta$ son $C[S_n]-$módulos isomorfos si y sólo si $\alpha = \beta$.* ■

Corolario 148

$$C[S_n] = \bigoplus_{\alpha \vdash n} \bigoplus_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]e_i^\alpha \quad \blacksquare$$

Teorema 149

$$I_\alpha = \bigoplus_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]e_i^\alpha$$

Demostración.

Se sigue del teorema anterior y del teorema 59 que $\bigoplus_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]e_i^\alpha$ es un ideal bilateral simple. Según la proposición 134, $y_i^\alpha e_i^\alpha y_i^\alpha = \theta^\alpha y_i^\alpha$ y esta igualdad asegura que y_i^αestá en $\bigoplus_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]e_i^\alpha \cap \bigoplus_{i=1}^{f^\alpha} C[S_n]y_i^\alpha$. Por el teorema 58, la descomposición de $C[S_n]$ en ideales bilaterales es única y por lo tanto se cumple el teorema. ■

Teorema 150 *(de Ramificación).*

$$Ind_{S_{n-1}}^{S_n}(V^\beta) \cong \bigoplus_{\alpha \in P(\beta+)} V^\alpha$$

donde $Ind_{S_{n-1}}^{S_n}\left(V^{\beta}\right)$ *denota al* $C\left[S_n\right]$ *−módulo* $C\left[S_n\right] \bigotimes\limits_{C\left[S_{n-1}\right]} V^{\beta}$.

Demostración.

Se sigue del teorema 146 que

$$\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}\left(V^{\beta}\right) = C\left[S_n\right] \bigotimes_{C\left[S_{n-1}\right]} V^{\beta} = C\left[S_n\right] \bigotimes_{C\left[S_{n-1}\right]} C\left[S_{n-1}\right] e_r^{\beta}.$$

Sea $\Phi : C\left[S_n\right] \bigotimes\limits_{C\left[S_{n-1}\right]} C\left[S_{n-1}\right] e_r^{\beta} \to C\left[S_n\right] e_r^{\beta}$ tal que $\Phi\left(x \bigotimes z e_r^{\beta}\right) = x z e_r^{\beta}$. Se verifica directamente que Φ es un isomorfismo de $C\left[S_n\right]$ −módulos. De la proposición 143 se sigue que

$$C\left[S_n\right] e_r^{\beta} = C\left[S_n\right]\left(\sum_{T_k^{\alpha} \in TS(\beta+,r)} e_k^{\alpha}\right) = \bigoplus_{T_k^{\alpha} \in TS(\beta+,r)} C\left[S_n\right] e_k^{\alpha}.$$

y como $|TS\left(\beta+, r\right)| = |P\left(\beta+\right)|$ entonces

$$\bigoplus_{T_k^{\alpha} \in TS(\beta+,r)} C\left[S_n\right] e_k^{\alpha} \cong \bigoplus_{\alpha \in P(\beta+)} V^{\alpha}$$

■

Corolario 151 *Sea* $Res_{S_{n-1}}^{S_n}\left(V^{\alpha}\right)$ *el espacio vectorial* V^{α} *con la multiplicación de* $C\left[S_n\right]$ *en* V^{α} *restringida a* $C\left[S_{n-1}\right]$. *Entonces*

$$Res_{S_{n-1}}^{S_n}\left(V^{\alpha}\right) \cong \bigoplus_{\beta \in P(\alpha-)} V^{\beta}.$$

Demostración. Sea $\chi^{\delta} = \chi_{V^{\delta}}$. Entonces por los teoremas 37, ?? y 34,

$$\left\langle \chi^{\beta}, \mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \chi^{\alpha} \right\rangle = \left\langle \mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \chi^{\beta}, \chi^{\alpha} \right\rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \alpha \in P\left(\beta+\right) \\ 0 & \text{si } \alpha \notin P\left(\beta+\right) \end{array} \right\}.$$

Como β está en $P(\alpha-)$ si y sólo si α está en $P(\beta+)$,

$$\left\langle \chi^{\beta}, \mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} \chi^{\alpha} \right\rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \beta \in P(\alpha-) \\ 0 & \text{si } \beta \notin P(\alpha-) \end{array} \right\}.$$

Se sigue del teorema 32 que

$$\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} (V^{\alpha}) \cong \bigoplus_{\beta \in P(\alpha-)} V^{\beta} \qquad \blacksquare$$

Capítulo 6

Matrices Seminormales.

Cada $C[S_n]$ $-$módulo generado por una unidad seminormal induce un homomorfismo de grupos

$$\rho_i^\alpha : S_n \to GL\left(C[S_n]\, e_i^\alpha\right)$$

definido por $\rho_i^\alpha(\tau)(x) = \tau x$. En este capítulo estudiaremos las matrices asociadas a los isomorfismos lineales $\rho_i^\alpha(\tau)$ en las bases $\mathcal{B}_i = \left\{e_{ji}^\alpha \mid 1 \leq j \leq f^\alpha\right\}$ encontradas en el capítulo anterior. La matriz asociada a $\rho_i^\alpha(\tau)$ en la base $\mathcal{B}_i$ es también la matriz asociada a $\rho_j^\alpha(\tau)$ en la base $\mathcal{B}_j$ y por lo tanto nos referiremos a ella simplemente como la matriz seminormal de τ asociada a la representación α.

En el capítulo anterior vimos que las unidades seminormales forman una $C-$base de $C[S_n]$. Veremos en este capítulo que si $\sum\limits_{\gamma,p,q} u_{pq\tau}^\gamma e_{pq}^\gamma$ es la expresión de τ como combinación lineal de las unidades seminormales entonces la entrada (i,j) de la matriz seminormal de τ asociada a la representación α es $u_{ij\tau}^\alpha$. Avanzando más, daremos explícitamente los elementos del campo que componen a las matrices asociadas a las permutaciones generadoras de S_n, $(k-1k)$, $2 \leq k \leq n$.

El lema de Schur y el estudio de matrices seminormales de permutaciones τ tales que $\tau(n) = n$ serán la herramienta que conducirá el desarrollo del capítulo.

Para este capítulo se consultó el libro [8] .

Enumeraremos los elementos de S_n por $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{n!}$ de manera que $\tau_1 = \varepsilon$. Así $\{\tau_s \mid 1 \leq s \leq n!\}$ es la base canónica de $C[S_n]$. Usando la base seminormal y la base canónica de $C[S_n]$,

$$\begin{aligned} \tau_s &= \sum_{\alpha,i,j} u^{\alpha}_{ij\tau_s} e^{\alpha}_{ij} \\ e^{\alpha}_{ij} &= \sum_{\tau_s} v^{\alpha}_{ij\tau_s} \tau_s \end{aligned}$$

De ahora en adelante, los símbolos $u^{\alpha}_{ij\tau_s}$ y $v^{\alpha}_{ij\tau_s}$ tendrán el significado que de arriba se infiere.

Sea $\rho^{\alpha}_i : S_n \to GL(C[S_n]e^{\alpha}_i)$ tal que $\rho^{\alpha}_i(\tau_k)(x) = \tau_k x$. A continuación se describirá la matriz asociada a la transformación lineal $\rho^{\alpha}_i(\tau_k)$ en la base $\mathcal{B}_i = \left\{e^{\alpha}_{ji} \mid 1 \leq j \leq f^{\alpha}\right\}$.

$$\begin{aligned} \tau_k e^{\alpha}_{ji} &= \left(\sum_{\beta,p,q} u^{\beta}_{pq\tau_k} e^{\beta}_{pq}\right) e^{\alpha}_{ji} \\ &= \sum_{p} u^{\alpha}_{pj\tau_k} e^{\alpha}_{pi} \end{aligned}$$

Se sigue que $[\rho^{\alpha}_i(\tau_k)]_{\mathcal{B}_i}$ es la matriz de tamaño f^{α} x f^{α} tal que en su entrada (i,j) tiene el coeficiente $u^{\alpha}_{ij\tau_k}$.

Observación.

Sean $\mathcal{B}_s = \left\{e^{\alpha}_{js} \mid 1 \leq s \leq f^{\alpha}\right\}$ y $\rho^{\alpha}_s : S_n \to GL(C[S_n]e^{\alpha}_s)$ tal que $\rho^{\alpha}_s(\tau_k)(x) = \tau_k x$. Entonces

$$[\rho^{\alpha}_s(\tau_k)]_{\mathcal{B}_s} = [\rho^{\alpha}_i(\tau_k)]_{\mathcal{B}_i}$$

Definición 152

$$U^{\alpha}_{\tau_k} := [\rho^{\alpha}_i(\tau_k)]_{\mathcal{B}_i}$$

*se llama la **matriz seminormal** de τ_k en la representación asociada a α.*

Definimos ahora las matrices seminormales U_x^α para toda x en $C[S_n]$.

Sea $\rho : S_n \rightarrow GL_{f^\alpha}(C)$ tal que $\rho(\tau) = U_\tau^\alpha$. Entonces existe un único homomorfismo de $C-$álgebras $\bar{\rho} : C[S_n] \rightarrow M_{f^\alpha}(C)$ tal que $\tilde{\rho}\mid_{S_n} = \rho$.

Si $x = \sum\limits_{g \in S_n} a_g g$, con $a_g \in C$, entonces

$$\tilde{\rho}(x) = \sum_{g \in S_n} a_g U_g^\alpha$$

Definición 153

$$U_x^\alpha := \tilde{\rho}(x)$$

Ejemplo 154

1. Las matrices $U_{(12)}^\alpha$ donde α es una partición de 2.

Sean $\beta = (2)$ y $\gamma = (1,1)$. Las únicas particiones de 2 son γ y β y para cada una de ellas existe una única tabla estándar:

$$T_1^\beta = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} \qquad T_1^\gamma = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}$$

Las unidades seminormales en $C[S_2]$ son:

$$\begin{aligned} e_{11}^\beta &= \frac{1}{\theta^\beta} e^{[1]} y_1^\beta e^{[1]} = \frac{1}{2}(\varepsilon + (12)) \\ e_{11}^\gamma &= \frac{1}{\theta^\gamma} e^{[1]} y_1^\gamma e^{[1]} = \frac{1}{2}(\varepsilon - (12)) \end{aligned}$$

Escribiendo la permutación (12) como combinación lineal de las unidades seminormales,

$$(12) = e_{11}^\beta - e_{11}^\gamma.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} U^{\beta}_{(12)} &= [1\,] \\ U^{\gamma}_{(12)} &= [-1] \end{aligned}$$

2. Las matrices $U^{\alpha}_{(12)}$ y $U^{\alpha}_{(23)}$ donde α es una partición de 3.

Sean $\eta = (3)$, $\beta = (2,1)$ y $\gamma = (1,1,1)$. Las tablas estándar para η, β y γ son las siguientes:

$$\begin{aligned} T^{\eta}_{1} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \\ T^{\beta}_{1} &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad T^{\beta}_{2} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \\ T^{\gamma}_{1} &= \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

Las unidades seminormales de $C[S_3]$ son:

$$\begin{aligned} e^{\eta}_{11} &= \frac{1}{6}\left(\varepsilon + (12) + (23) + (13) + (123) + (132)\right) \\ e^{\beta}_{11} &= \frac{1}{3}\left(\varepsilon + (12) - \frac{1}{2}(23) - \frac{1}{2}(13) - \frac{1}{2}(123) - \frac{1}{2}(132)\right) \\ e^{\beta}_{21} &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}(23) - \frac{3}{4}(13) - \frac{3}{4}(123) + \frac{3}{4}(132)\right) \\ e^{\alpha}_{12} &= \frac{1}{3}\left((23) - (13) + (123) - (132)\right) \\ e^{\beta}_{22} &= \frac{1}{3}\left(\varepsilon - (12) + \frac{1}{2}(23) + \frac{1}{2}(13) - \frac{1}{2}(123) - \frac{1}{2}(132)\right) \\ e^{\gamma}_{11} &= \frac{1}{6}\left(\varepsilon - (12) - (23) - (13) + (123) + (132)\right) \end{aligned}$$

Escribiendo las permutaciones (12) y (23) como combinación lineal de las unidades seminormales,

$$
\begin{aligned}
(12) &= e_{11}^{\eta} - e_{11}^{\gamma} + e_{11}^{\beta} - e_{22}^{\beta} \\
(23) &= e_{11}^{\eta} - \frac{1}{2}e_{11}^{\beta} + \frac{3}{4}e_{12}^{\beta} + e_{21}^{\beta} + \frac{1}{2}e_{22}^{\beta} - e_{11}^{\gamma}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{array}{ll}
U_{(12)}^{\eta} = [1] & U_{(23)}^{\eta} = [1] \\
U_{(12)}^{\gamma} = [-1] & U_{(23)}^{\gamma} = [-1] \\
U_{(12)}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & U_{(23)}^{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A continuación probaremos ciertas fórmulas importantes para nuestro trabajo posterior.

Sean V la matriz de cambio de la base $\left\{e_{ij}^{\alpha} \mid \alpha \vdash n, 1 \leq i, j \leq f^{\alpha}\right\}$ a la base $\{\tau_s \mid \tau \in S_n\}$ y U la matriz de cambio de la base $\{\tau_s \mid \tau \in S_n\}$ a la base $\left\{e_{ij}^{\alpha} \mid \alpha \vdash n, 1 \leq i, j \leq f^{\alpha}\right\}$. Ya que U y V son matrices inversas

$$
\sum_{\tau_s} u_{kl\tau_s}^{\beta} v_{ij\tau_s}^{\alpha} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ki}\delta_{lj} \tag{6.1}
$$

Por otro lado, como $e_{ij}^{\alpha} e_{kl}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{kj}e_{il}^{\alpha}$ debemos tener

$$
e_{ij}^{\alpha}e_{kl}^{\beta} = \sum_{\tau_s,\tau_r} v_{ij\tau_s}^{\alpha} v_{kl\tau_r}^{\beta} \tau_s\tau_r = \delta_{\alpha\beta}\delta_{kj} \sum_{\tau_h} v_{il\tau_h}^{\alpha}\tau_h
$$

o

$$
\sum_{\tau_s,\tau_h} v_{ij\tau_s}^{\alpha} v_{kl\left(\tau_s^{-1}\tau_h\right)}^{\beta} \tau_h = \delta_{\alpha\beta}\delta_{kj} \sum_{\tau_h} v_{il\tau_h}^{\alpha}\tau_h
$$

Por lo tanto,

$$
\sum_{\tau_s} v_{ij\tau_s}^{\alpha} v_{kl\left(\tau_s^{-1}\tau_h\right)}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{kj} v_{il\tau_h}^{\alpha}
$$

Poniendo $\tau_h = \varepsilon$ en la última ecuación y recordando que $v_{il\varepsilon}^{\alpha} = \delta_{il}\left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right)$

(lema 139), obtenemos

$$\sum_{\tau_s} v^{\alpha}_{ij\tau_s} v^{\beta}_{kl\tau_s^{-1}} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{kj}\delta_{il}\left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right)$$

Así es que intercambiando las letras k y l

$$\sum_{\tau_s} v^{\alpha}_{ij\tau_s} v^{\beta}_{lk\tau_s^{-1}} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{lj}\delta_{ik}\left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right) \tag{6.2}$$

Se sigue de 6.1 y de 6.2 que el renglón en U determinado por los índices β, k, l es θ^{β} veces la columna en V determinada por los índices β, l, k, es decir,

$$u^{\beta}_{kl\tau_i} = \theta^{\beta} v^{\beta}_{lk\tau_i^{-1}} \tag{6.3}$$

Finalmente de esta última ecuación obtenemos

$$e^{\alpha}_{ij} = \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right) \sum_{\tau_s} u^{\alpha}_{ji\tau_s^{-1}} \tau_s \tag{6.4}$$

Sea $x = \sum_{\tau \in S_n} \lambda_\tau \tau$. De la definición de la matriz U^{α}_x se observa que su entrada (i, j) es $\sum_{\tau \in S_n} \lambda_\tau u^{\alpha}_{ij\tau}$, donde para toda $\tau \in S_n$, los índices i, j en $u^{\alpha}_{ij\tau}$ se refieren a tablas estándar con el orden explicado inmediatamente después de su definición (93). Lo que queremos hacer notar es que cada entrada (i, j) de U^{α}_x está asociada a la pareja de tablas estándar $(T^{\alpha}_i, T^{\alpha}_j)$ y el orden en cuestión genera naturalmente una división de la matriz U^{α}_x. Las submatrices generadas por dicha división serán estudiadas a continuación.

Definición 155 *Diremos que U^{α}_x está dividida de acuerdo a la posición de la última letra n si se divide en submatrices para las cuales se cumple que las tablas asociadas a sus índices de renglón forman el conjunto de tablas estándar con la última letra n en una posición fija y lo mismo es cierto para las tablas asociadas a sus índices de columna.*

Ejemplo Sean $\alpha = (3, 2)$ y $x \in C[S_n]$.

$$U_x^\alpha = \begin{array}{|ccc|cc|c}
\multicolumn{1}{c}{\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5\end{smallmatrix}} & \begin{smallmatrix}1&2&4\\3&5\end{smallmatrix} & \multicolumn{1}{c}{\begin{smallmatrix}1&3&4\\2&5\end{smallmatrix}} & \begin{smallmatrix}1&2&5\\3&4\end{smallmatrix} & \multicolumn{1}{c}{\begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4\end{smallmatrix}} & \\ \hline
u_{11x}^\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & u_{51x}^\alpha & \begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5\end{smallmatrix} \\
\cdot & & & & \cdot & \begin{smallmatrix}1&2&4\\3&5\end{smallmatrix} \\
\cdot & & & & \cdot & \begin{smallmatrix}1&3&4\\2&5\end{smallmatrix} \\ \hline
\cdot & & & & \cdot & \begin{smallmatrix}1&2&5\\3&4\end{smallmatrix} \\
u_{51x}^\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & u_{55x}^\alpha & \begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4\end{smallmatrix} \\ \hline
\end{array}$$

Si cada submatriz generada por esta división es de nuevo dividida por la posición de la letra $n-1$, entonces diremos que U_x^α está dividida de acuerdo a la posición de las dos últimas letras.

Puesto que las tablas T_i^α y T_j^α tienen la letra n en una misma posición si y sólo si la forma de $T_i^{\alpha *}$ es igual a la forma de $T_j^{\alpha *}$, la definición anterior es equivalente si se sustituye "con la última letra n en una posición fija " por "de forma β, donde $\beta \in P(\alpha -)$, al suprimir la última letra de cada una de ellas".

Sea $\tau \in S_n$ tal que $\tau(n) = n$, entonces τ puede ser expresada como combinación lineal de las unidades seminormales e_{kl}^β de S_{n-1} o en términos de las unidades e_{ij}^α de S_n.

$$\tau = \sum_{\alpha \vdash n} \sum_{i,j} u_{ij\tau}^\alpha e_{ij}^\alpha = \sum_{\beta \vdash n-1} \sum_{k,l} u_{kl\tau}^\beta e_{kl}^\beta.$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores por e_i^α por la izquierda y por e_j^α por la derecha

$$u_{ij\tau}^\alpha e_{ij}^\alpha = e_i^\alpha \tau e_j^\alpha = \left(\frac{1}{\theta^\alpha}\right)^2 \sum_{\beta,k,l} \left(e_i^{\alpha *} y_i^\alpha e_i^{\alpha *}\right) u_{kl\tau}^\beta e_{kl}^\beta \left(e_j^{\alpha *} y_j^\alpha e_j^{\alpha *}\right).$$

Si $T_i^{\alpha *}$y $T_j^{\alpha *}$ son de distintas formas, $e_i^{\alpha *} e_{kl}^{\beta} e_j^{\alpha *} = 0$ y por lo tanto $u_{ij\tau}^{\alpha} = 0$. Se sigue que todas las submatrices que resultan de la división de acuerdo a la última letra y que no están sobre la diagonal principal son cero.

Si en cambio, $T_i^{\alpha *}$y $T_j^{\alpha *}$ son de la misma forma entonces T_i^{α} y T_j^{α} tienen a n en la misma posición; así es que σ_{ij}^{α}, la permutación que transfoma T_j^{α} en T_i^{α}, no involucra la letra n y es también la permutación que transforma $T_j^{\alpha *}$ en $T_i^{\alpha *}$.

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha} e_{ij}^{\alpha} &= e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha} \sigma_{ij}^{\alpha} e_j^{\alpha *} = e_i^{\alpha *} \left(y_i^{\alpha *} + N\right) \sigma_{ij}^{\alpha} e_j^{\alpha *} = e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha *} \sigma_{ij}^{\alpha} e_j^{\alpha *} + e_i^{\alpha *} N \sigma_{ij}^{\alpha} e_j^{\alpha *} \qquad (6.5) \\ &= e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha *} \sigma_{ij}^{\alpha *} e_j^{\alpha *} + e_i^{\alpha *} N \sigma_{ij}^{\alpha} e_j^{\alpha *} \end{aligned}$$

donde N es como en el lema 95, es decir, cierto elemento del álgebra de grupo cuyos términos involucran la letra n. Por la ecuación 6.4, $u_{ji\tau}^{\alpha}$ es el coeficiente de τ^{-1} en $\theta^{\alpha} e_{ij}^{\alpha}$ y ya que $\tau(n) = n$, se sigue de 6.5 que $u_{ji\tau}^{\alpha}$ es el coeficiente de τ^{-1} en $\theta^{\alpha *} e_{ij}^{\alpha *} = e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha *} \sigma_{ij}^{\alpha *} e_j^{\alpha *}$ (lema 138), y éste, de nuevo por 6.4, es precisamente $u_{ji\tau}^{\alpha *}$. Esto quiere decir que la submatriz de U_{τ}^{α} que se encuentra en la diagonal principal en la posición correspondiente a aquellas tablas que al suprimirles la letra n resulta una tabla de forma β, es precisamente U_{τ}^{β}. Así es que

$$U_{\tau}^{\alpha} = \bigoplus_{\beta \in P(\alpha -)} U_{\tau}^{\beta}$$

donde $P(\alpha -)$ (definición 99) está ordenado con el orden lexicográfico inverso, pues con este orden, si $T_i^{\alpha *}$y $T_j^{\alpha *}$ son de forma β_1 y β_2 respectivamente, entonces $\beta_1 < \beta_2$ si y sólo si $T_i^{\alpha} < T_j^{\alpha}$.

Este resultado también debe ser válido para cualquier combinación lineal x de permutaciones que no involucren la letra n. Tenemos entonces el siguiente teorema que es la versión matricial del corolario 151.

Teorema 156 *(de Ramificación) Si $x \in C[S_n]$ no involucra la letra n, entonces*

$$U_x^{\alpha} = \bigoplus_{\beta \in P(\alpha -)} U_x^{\beta}$$

■

Ejemplo. Sea $\tau \in S_9$ tal que $\tau(9) = 9$, entonces

$$U_\tau^{[4,2^2,1]} = \begin{bmatrix} U_\tau^{[4,2^2]} & 0 & 0 \\ 0 & U_\tau^{[4,2,1^2]} & 0 \\ 0 & 0 & U_\tau^{[3,2^2,1]} \end{bmatrix}$$

Para conocer la estructura de las matrices $U^\alpha_{(n-1,n)}$ será necesario estudiar primero las estructuras de las matrices seminormales para y_i^α y $e_i^{\alpha *}$.

Proposición 157 *Todo elemento debajo o sobre la digonal principal de la matriz $U^\alpha_{y_i^\alpha}$ es cero excepto el elemento en la entrada (i,i) cuyo valor es θ^α.*

Demostración.

Usando la base canónica y la base seminormal de $C[S_n]$ para escribir y_i^α:

$$y_i^\alpha = \sum_{\tau_j} \lambda_j \tau_j = \sum_{\tau_j} \lambda_j \left(\sum_{\beta,k,l} u^\beta_{kl\tau_j} e^\beta_{kl} \right)$$

De aquí que el elemento en la posición (r,s) de la matriz $U^\alpha_{y_i^\alpha}$ sea

$$u^\alpha_{rsy_i^\alpha} = \sum_j \lambda_j u^\alpha_{rs\tau_j}$$

De las relaciones que satisfacen las unidades seminormales (Teorema 137)

$$e_r^\alpha y_i^\alpha e_s^\alpha = u^\alpha_{rsy_i^\alpha} e^\alpha_{rs} \tag{6.6}$$

lo cual implica que $u^\alpha_{rsy_i^\alpha}$ también es el coeficiente de e^α_{rs} en la expresión de $e_r^\alpha y_i^\alpha e_s^\alpha$ como combinación lineal de las unidades seminormales.

$$
\begin{aligned}
u^{\alpha}_{rsy^{\alpha}_{i}} e^{\alpha}_{rs} &= e^{\alpha}_{r} y^{\alpha}_{i} e^{\alpha}_{s} = \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right)^{2} e^{\alpha *}_{r} y^{\alpha}_{r} e^{\alpha *}_{r} y^{\alpha}_{i} e^{\alpha *}_{s} y^{\alpha}_{s} e^{\alpha *}_{s} \\
&= \left(\frac{1}{\theta^{\alpha}}\right)^{2} \left(\frac{1}{\theta^{\alpha *}_{r}}\right) \left(\frac{1}{\theta^{\alpha *}_{s}}\right) e^{\alpha *}_{r} y^{\alpha}_{r} \left(e^{\alpha **}_{r} y^{\alpha *}_{r} e^{\alpha **}_{r}\right) H^{\alpha *}_{i} x V^{\alpha *}_{i} \left(e^{\alpha **}_{s} y^{\alpha *}_{s} e^{\alpha **}_{s}\right) y^{\alpha}_{s} e^{\alpha *}_{s}
\end{aligned}
$$

donde $x = (\varepsilon + (p_1 n) + \ldots + (p_r n))(\varepsilon - (q_1 n) - \ldots - (q_s n))$y p_i, q_i son como en el lema 95.

Por el corolario 88, la ecuación 6.6 es igual a cero si se cumple uno de los siguientes enunciados:

1. La forma de $T^{\alpha *}_{r}$ es menor que la forma de $T^{\alpha *}_{i}$.

2. La forma de $T^{\alpha *}_{i}$ es menor que la forma de $T^{\alpha *}_{s}$.

Por lo tanto $u^{\alpha}_{rsy^{\alpha}_{i}} = 0$ si se cumple **1** ó **2**.

Observemos que el corolario 88 no se puede aplicar para afirmar que la ecuación 6.6 es igual a cero si la forma de $T^{\alpha *}_{r}$ es mayor que la forma de $T^{\alpha *}_{i}$. Una expresión de la forma $H^{\alpha *}_{r} z V^{\alpha *}_{i}$ aparece en 6.6 pero el elemento z intermedio está en $C[S_n]$ y no en $C[S_{n-1}]$.

Por otro lado, observemos que los últimos enunciados implican los siguientes, y viceversa en el caso en que las tablas comparadas no tengan a n en la misma posición.

1′. La tabla T^{α}_{r} es mayor que la tabla T^{α}_{i}.

2′. La tabla T^{α}_{i} es mayor que la tabla T^{α}_{s}.

Por lo anterior se afirma que si la matriz $U^{\alpha}_{y^{\alpha}_{i}}$ se divide de acuerdo a la posición de la última letra, todas las submatrices a la izquierda o debajo de la submatriz que contiene la posición (i, i) son cero ya que son matrices de entradas $u^{\alpha}_{rsy^{\alpha}_{i}}$, donde T^{α}_{r} y T^{α}_{s} tienen la letra n en una posición distinta a la que tiene en T^{α}_{i} y además se cumple **1′** ó **2′**. Escribiendo $e^{\alpha}_{r} y^{\alpha}_{i} e^{\alpha}_{s}$ de tal forma que se pueda usar de manera análoga para $n-2$ el corolario 88, es posible mostrar que las submatrices generadas por la división de acuerdo a la letra $n-1$ y que se encuentran a la izquierda o debajo de la submatriz generada por la misma división que contiene la posición (i, i) son cero. Aplicando este argumento a las letras $n-2, n-3, \ldots$, notamos que todo elemento debajo o sobre la diagonal principal es cero excepto posiblemente el elemento (i,i). Como $e_i^\alpha y_i^\alpha e_i^\alpha = \theta^\alpha e_i^\alpha$ por el lema 138, es claro que este elemento tiene el valor θ^α. ■

Proposición 158 *La matriz $U^\alpha_{e_i^\alpha \cdot}$ tiene un elemento +1 en la entrada (i,i) y cero en las demás entradas.*

Demostración.

Se demostró en la proposición 143 que $e_i^{\alpha *} = \sum e_{k \cdot}^\beta$, donde la suma corre sobre todas las tablas T_k^β tales que al suprimirles la letra n resultan ser iguales a $T_i^{\alpha *}$. De estas tablas sólo T_i^α es de forma α. Se sigue que la matriz $U^\alpha_{e_i^\alpha \cdot}$ tiene un elemento $+1$ en la posición (i,i) y cero en las demás posiciones. ■

Definición 159 *Sea T una tabla. Supongamos que la letra p aparece en el i_p-ésimo renglón y j_p-ésima columna y que la letra q aparece en el i_q-ésimo renglón y j_q-ésima columna. La **distancia axial** de p a q es*

$$d_T(p,q) := (i_q - j_q) - (i_p - j_p) = (i_q - i_p) + (j_p - j_q)$$

De acuerdo a la definición tenemos que $d_T(p,q) = -d_T(q,p)$.

La distancia axial de p a q tiene una interpretación gráfica simple. Empezando en la posición p en la tabla T, tracemos una ruta rectangular hasta alcanzar la posición de q. Contando +1 por cada paso hecho hacia abajo o hacia la izquierda y -1 por cada paso hacia arriba o hacia la derecha; el número resultante de pasos será la distancia axial de p a q.

Ejemplo 160 *Sea* $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$. *Entonces* $d_T(3,4) = -3$.

Lema 161 *Sea T una tabla. Entonces*

$$d_T(p,q) + d_T(q,r) = d_T(p,r)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} d_T(p,q)+d_T(q,r) &= (i_q-j_q)-(i_p-j_p)+(i_r-j_r)-(i_q-j_q) \\ &= (i_r-j_r)-(i_p-j_p) \\ &= d_T(p,r) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Enunciamos ahora el resultado más importante del capítulo.

Teorema 162 *Sea $\alpha \vdash n$. Si u_{ij} denota la entrada (i,j) de la matriz $U^{\alpha}_{(k-1\ k)}$, con $1 < k \leq n$, entonces u_{ij} es cero salvo en los siguientes casos:*

1. $u_{ii} = \frac{1}{d_{T_i^{\alpha}}(k,k-1)}$

2. *Si $i < j$ y $T_i^{\alpha} = (k-1\ k)\, T_j^{\alpha}$ entonces $u_{ij} = 1 - \left(\frac{1}{d_{T_i^{\alpha}}(k,k-1)}\right)^2$ y $u_{ji} = 1$.*

Los siguientes lemas serán utilizados en la demostración del teorema.

Necesitamos ahora una notación para referirnos a las submatrices generadas por la división de acuerdo a la posición de las dos últimas letras de las matrices U_z^{α}, donde z es cualquier elemento de $C[S_n]$.

Notación. Sea $\alpha \vdash n$. Usando el orden lexicográfico inverso sean $P(\alpha-) = \{\beta_1, ..., \beta_r\}$ y $P(\beta_a-) = \{\gamma_{a1}, \gamma_{a2}, ..., \gamma_{as_a}\}$. Denotaremos con $U_z^{\alpha(a,b;c,d)}$ a la submatriz de U_z^{α} generada por la división de acuerdo a las dos últimas letras tal que sus índices de renglón están asociados a la partición γ_{ab} y sus índices de columna están asociados a la partición γ_{cd}.

Ejemplo Sean $\alpha = (3,2)$ y $z \in C[S_5]$.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (3,1) \qquad \beta_2 = (2,2) \\ \gamma_{11} &= (3) \qquad \gamma_{12} = (2,1) \qquad \gamma_{21} = (2,1) \end{aligned}$$

$$U_x^{\alpha} = \begin{array}{|c|c|c|l}
\multicolumn{1}{c}{\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5\end{smallmatrix}} & \multicolumn{1}{c}{\begin{smallmatrix}1&2&4\\3&5\end{smallmatrix}\quad\begin{smallmatrix}1&3&4\\2&5\end{smallmatrix}} & \multicolumn{1}{c}{\begin{smallmatrix}1&2&5\\3&4\end{smallmatrix}\quad\begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4\end{smallmatrix}} & \\
\hline
U_x^{\alpha(1,1;1,1)} & U_x^{\alpha(1,1;1,2)} & U_x^{\alpha(1,1;2,1)} & \begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5\end{smallmatrix} \\
\hline
U_x^{\alpha(1,2;1,1)} & U_x^{\alpha(1,2;1,2)} & U_x^{\alpha(1,2;2,1)} & \begin{smallmatrix}1&2&4\\3&5\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}1&3&4\\2&5\end{smallmatrix} \\
\hline
U_x^{\alpha(2,1;1,1)} & U_x^{\alpha(2,1;1,2)} & U_x^{\alpha(2,1;2,1)} & \begin{smallmatrix}1&2&5\\3&4\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}1&3&5\\2&4\end{smallmatrix} \\
\hline
\end{array}$$

Observación. Si x está en $C[S_n]$ y no involucra las últimas dos letras entonces aplicando dos veces el teorema 156 tenemos que

$$U_x^{\alpha} = \bigoplus_{a=1}^{r} U_x^{\beta_a} = \bigoplus_{a=1}^{r} \bigoplus_{b=1}^{s_a} U_x^{\gamma_{ab}}$$

y en este caso $U_x^{\alpha(a,b;a,b)} = U_x^{\gamma_{ab}}$.

Lema 163 *Si* $n \geq 3$

$$U_{(n-1\ n)}^{\alpha(a,b;c,d)} = \left\{ \begin{array}{ll} \kappa I & con\ \kappa \in C,\ si\ \gamma_{ab} = \gamma_{cd} \\ 0 & \qquad\qquad si\ \gamma_{ab} \neq \gamma_{cd} \end{array} \right\}.$$

Demostración. Sean $\alpha \vdash n$ y $x \in C[S_n]$ tal que no involucre las letras $n-1$ y n. Aplicando dos veces el teorema 156, $U_x^{\alpha(a,b;c,d)} = 0$ si $a \neq c$ o $b \neq d$, es decir, si $U_x^{\alpha(a,b;c,d)}$ no se encuentra sobre la diagonal principal de U_x^{α}. Se sigue entonces que para las matrices $U_{x(n-1\ n)}^{\alpha(a,b;c,d)}$ y $U_{(n-1\ n)x}^{\alpha(a,b;c,d)}$ se cumple lo siguiente:

$$U_{x(n-1\ n)}^{\alpha(a,b;c,d)} = U_x^{\alpha(a,b;a,b)} U_{(n-1\ n)}^{\alpha(a,b;c,d)}$$

$$U^{\alpha(a,b;c,d)}_{(n-1\ n)x} = U^{\alpha(a,b;c,d)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(c,d;c,d)}_x$$

Además, $x(n-1\ n) = (n-1\ n)x$ de nuevo por que x no involucra las letras $n-1$ y n, y en consecuencia tenemos un conjunto de ecuaciones del siguiente tipo:

$$U^{\alpha(a,b;a,b)}_x U^{\alpha(a,b;c,d)}_{(n-1\ n)} = U^{\alpha(a,b;c,d)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(c,d;c,d)}_x$$

Ejemplo. (ver también ejemplo 6) Sea $\alpha = (3,2)$

$$U^{\alpha}_{x(n-1\ n)} = \begin{bmatrix} U^{\alpha(1,1;1,1)}_x & 0 & 0 \\ 0 & U^{\alpha(1,2;1,2)}_x & 0 \\ 0 & 0 & U^{\alpha(2,1;2,1)}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{\alpha(1,1;1,1)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,1;1,2)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,1;2,1)}_{(n-1\ n)} \\ U^{\alpha(1,2;1,1)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,2;1,2)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,2;2,1)}_{(n-1\ n)} \\ U^{\alpha(2,1;1,1)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(2,1;1,2)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(2,1;2,1)}_{(n-1\ n)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} U^{\alpha(1,1;1,1)}_x U^{\alpha(1,1;1,1)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,1;1,1)}_x U^{\alpha(1,1;1,2)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,1;1,1)}_x U^{\alpha(1,1;2,1)}_{(n-1\ n)} \\ U^{\alpha(1,2;1,2)}_x U^{\alpha(1,2;1,1)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,2;1,2)}_x U^{\alpha(1,2;1,2)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,2;1,2)}_x U^{\alpha(1,2;2,1)}_{(n-1\ n)} \\ U^{\alpha(2,1;2,1)}_x U^{\alpha(2,1;1,1)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(2,1;2,1)}_x U^{\alpha(2,1;1,2)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(2,1;2,1)}_x U^{\alpha(2,1;2,1)}_{(n-1\ n)} \end{bmatrix}$$

$$U^{\alpha}_{(n-1\ n)x} = \begin{bmatrix} U^{\alpha(1,1;1,1)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,1;1,2)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,1;2,1)}_{(n-1\ n)} \\ U^{\alpha(1,2;1,1)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,2;1,2)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(1,2;2,1)}_{(n-1\ n)} \\ U^{\alpha(2,1;1,1)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(2,1;1,2)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(2,1;2,1)}_{(n-1\ n)} \end{bmatrix} \begin{matrix} U^{\alpha(1,1;1,1)}_x & 0 & 0 \\ 0 & U^{\alpha(1,2;1,2)}_x & 0 \\ 0 & 0 & U^{\alpha(2,1;2,1)}_x \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} U^{\alpha(1,1;1,1)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(1,1;1,1)}_x & U^{\alpha(1,1;1,2)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(1,2;1,2)}_x & U^{\alpha(1,1;2,1)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(2,1;2,1)}_x \\ U^{\alpha(1,2;1,1)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(1,1;1,1)}_x & U^{\alpha(1,2;1,2)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(1,2;1,2)}_x & U^{\alpha(1,2;2,1)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(2,1;2,1)}_x \\ U^{\alpha(2,1;1,1)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(1,1;1,1)}_x & U^{\alpha(2,1;1,2)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(1,2;1,2)}_x & U^{\alpha(2,1;2,1)}_{(n-1\ n)} U^{\alpha(2,1;2,1)}_x \end{bmatrix}.$$

Por el lema de Schur 26, si $\gamma_{ab} = \gamma_{cd}$ entonces $U^{\alpha(a,b;c,d)}_{(n-1\ n)} = \kappa I$ para alguna $\kappa \in C$; y si $\gamma_{ab} \neq \gamma_{cd}$ entonces $U^{\alpha(a,b;c,d)}_{(n-1\ n)} = 0$. Dicho de otra forma, las matrices $U^{\alpha(a,b;c,d)}_{(n-1\ n)}$ con la posibilidad de ser distintas de cero, y en consecuencia ser un múltiplo de la matriz identidad, son aquellas para las cuales las tablas que caracterizan sus índices de renglón son las mismas que caracterizan sus índices de columna o sólo difieren en que las posiciones de n y $n-1$ están intercambiadas. ■

Observación. Supongamos que la entrada (i,i) de $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$ es también una entrada de la submatriz $U^{\alpha(a,b;a,b)}_{(n-1\ n)}$. Si T^{α}_i es una tabla estándar con $n-1$ y n en el mismo renglón o columna, entonces para cada pareja (c,d) , $\gamma_{ab} = \gamma_{cd}$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. En otras palabras, la entrada (i,i) de $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$ es la única entrada distinta de cero en el $i-$ésimo renglón e $i-$ésima columna de $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$.

Lema 164 *Si $n \geq 3$ entonces las submatrices de $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$ generadas por la división de acuerdo a la posición de las últimas dos letras son cero salvo en los siguientes casos:*

1. $U^{\alpha(a,b;a,b)}_{(n-1\ n)} = I$ *si las tablas que caracterizan sus renglones y columnas tienen a $n-1$ y n en el mismo renglón.*

2. $U^{\alpha(a,b;a,b)}_{(n-1\ n)} = -I$ *si las tablas que caracterizan sus renglones y columnas tienen a $n-1$ y n en la misma columna.*

3. $\begin{bmatrix} U^{\alpha(a,b;a,b)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(a,b;c,d)}_{(n-1\ n)} \\ U^{\alpha(c,d;a,b)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(c,d;c,d)}_{(n-1\ n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho I & (1-\rho^2)\, I \\ I & \rho I \end{bmatrix}$ *con $\rho \in C$, si $\gamma_{ab} = \gamma_{cd}$, es decir, si las tablas que caracterizan a la matriz $U^{\alpha(a,b;a,b)}_{(n-1\ n)}$ sólo difieren de las tablas que caracterizan a la matriz $U^{\alpha(c,d;c,d)}_{(n-1\ n)}$ en que las posiciones de $n-1$ y n están intercambiadas.*

Demostración. Según el lema anterior,

1. $U^{\alpha(a,b;a,b)}_{(n-1\ n)} = \lambda I$ si las tablas que caracterizan sus renglones y columnas tienen a $n-1$ y n en el mismo renglón.

2. $U^{\alpha(a,b;a,b)}_{(n-1\ n)} = \kappa I$ si las tablas que caracterizan sus renglones y columnas tienen a $n-1$ y n en la misma columna.

3. $\begin{bmatrix} U^{\alpha(a,b;a,b)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(a,b;c,d)}_{(n-1\ n)} \\ U^{\alpha(c,d;a,b)}_{(n-1\ n)} & U^{\alpha(c,d;c,d)}_{(n-1\ n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}I & c_{12}I \\ c_{21}I & c_{22}I \end{bmatrix}$, si $\gamma_{ab} = \gamma_{cd}$,

para algunos escalares $\lambda, \kappa, c_{11}, c_{12}, c_{21}$ y c_{22} en C. Veremos ahora que estos escalares cumplen lo afirmado por el lema.

Como $(n-1\ n)^2 = \varepsilon$, $\left(U^{\alpha}_{(n-1,n)}\right)^2 = U^{\alpha}_{\varepsilon} = I$ y de esta ecuación matricial se deducen las siguientes relaciones (ver observación anterior) :

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 1 \\ \kappa^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}c_{21} &= c_{22}^2 + c_{12}c_{21} = 1 \\ c_{12}(c_{11} + c_{22}) &= c_{21}(c_{11} + c_{22}) = 0 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Ahora obtendremos más información acerca de estos escalares operando con las matrices $U^{\alpha}_{y_i^{\alpha}}$ y $U^{\alpha}_{e_i^{\alpha *}}$ cuya estructura, por las proposiciones 157 y 158, ya conocemos.

1. Sean T_i^{α} una tabla con $n-1$ y n en el mismo renglón y λ el elemento en la entrada (i,i) de $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$. El lema anterior asegura que la única entrada distinta de cero en el $i-$ésimo renglón de $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$ es la entrada diagonal. Se sigue entonces que todas las entradas en la matriz $U^{\alpha}_{e_i^{\alpha *}(n-1\ n)} = U^{\alpha}_{e_i^{\alpha *}} . U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$ son cero excepto la entrada (i,i) cuyo valor es λ . Se afirma también que todas las entradas en $U^{\alpha}_{y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *}} = U^{\alpha}_{y_i^{\alpha}} U^{\alpha}_{e_i^{\alpha *}}$ son cero excepto la entrada (i,i) cuyo valor es θ^{α} y posiblemente las entradas en la $i-$ésima columna con índice de renglón menor a i . Por lo tanto, la matriz $U^{\alpha}_{e_i^{\alpha *}(n-1\ n) y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *}}$ tiene al elemento $\lambda\theta^{\alpha}$ en la entrada (i,i) . Por otro lado, como la transposición $(n-1\ n)$ está en $\mathcal{H}_{T_i^{\alpha}}$; el grupo de permutaciones que preservan los renglones de T_i^{α}, $e_i^{\alpha *}(n-1n)\, y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *} = e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *}$ y, por el lema 138, $e_i^{\alpha *} y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *} = \theta^{\alpha} e_i^{\alpha}$ lo cual implica que la matriz $U^{\alpha}_{e_i^{\alpha *}(n-1n) y_i^{\alpha} e_i^{\alpha *}} = U^{\alpha}_{\theta^{\alpha} e_i^{\alpha}}$ tiene el elemento θ^{α} en la entrada (i,i) y cero en las demás entradas. Por lo tanto $\lambda = 1$.

2. Sean T_i^{α} una tabla con $n-1$ y n en la misma columna y κ el elemento en la entrada

(i,i) de $U^\alpha_{(n-1\ n)}$. Con un procedimiento similar al del inciso 1 , es posible concluir que la matriz $U^\alpha_{e_i^{\alpha*} y_i^\alpha (n-1n) e_i^{\alpha*}}$ tiene al elemento $\kappa\theta^\alpha$ en la entrada (i,i). También, como $(n-1\ n)$ está en $\mathcal{V}_{T_i^\alpha}$, el grupo de permutaciones que preservan las columnas de T_i^α, $y_i^\alpha\,(n-1\ n) = -y_i^\alpha$, lo cual implica junto con el lema 138 que la matriz $U^\alpha_{e_i^{\alpha*} y_i^\alpha (n-1n) e_i^{\alpha*}} = U^\alpha_{-\theta^\alpha e_i^\alpha}$ tiene al elemento $-\theta^\alpha$ en la entrada (i,i) y cero en las demás entradas. Por lo tanto, $\kappa = -1$.

3. Sea T_i^α una tabla con n y $n-1$ en distintos renglones y columnas. Entonces $(n-1n)T_i^\alpha$ también es una tabla estándar. Sean $T_j^\alpha = (n-1\ n)T_i^\alpha$ y c_{11} , c_{21} las entradas (j,j) y (i,j) respectivamente de $U^\alpha_{(n-1\ n)}$. Supongamos $T_i^\alpha > T_j^\alpha$. Por el lema anterior, las únicas entradas distintas de cero en la $j-$ésima columna de $U^\alpha_{(n-1\ n)}$ son c_{11} y c_{21}. Se sigue que las matrices $U^\alpha_{e_i^{\alpha*} y_i^\alpha}$ y $U^\alpha_{\sigma_{ij}^\alpha e_j^{\alpha*}}$ tienen ceros en todas las entradas excepto en las entradas indicadas en los siguientes diagramas.

$$U^\alpha_{e_i^{\alpha*} y_i^\alpha} = \begin{array}{c} \quad i \\ \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & \theta^\alpha & * \ldots * \\ & & \\ & & \end{array}\right] \end{array} i \qquad U^\alpha_{\sigma_{ij}^\alpha e_j^{\alpha*}} = \begin{array}{c} j \\ \left[\begin{array}{c} \\ c_{11} \\ c_{21} \\ \\ \end{array}\right] \end{array} i$$

Por lo tanto, la matriz $U^\alpha_{e_i^{\alpha*} y_i^\alpha} U^\alpha_{\sigma_{ij}^\alpha e_j^{\alpha*}} = U^\alpha_{e_i^{\alpha*} y_i^\alpha \sigma_{ij}^\alpha e_j^{\alpha*}} = U^\alpha_{e_i^{\alpha*} y_{ij}^\alpha e_j^{\alpha*}} = U^\alpha_{\theta^\alpha e_{ij}^\alpha}$ tiene al elemento $\theta^\alpha c_{21}$ en la entrada (i,j) y cero en las demás entradas. Por otro lado $U^\alpha_{\theta^\alpha e_{ij}^\alpha}$ tiene un elemento θ^α en la entrada (i,j) y cero en las demás entradas. Se concluye entonces que $c_{21} = 1$.

Sea $\rho = c_{22}$. Entonces de las ecuaciones 6.7

$$-c_{11} = c_{22} = \rho$$

$$c_{12} = 1 - \rho^2 \quad \blacksquare$$

Lema 165 *Sea $\alpha \vdash n$. En cualquier renglón o columna de la matriz $U^\alpha_{(k-1\ k)}$, $1 \le k \le n$,* *hay a lo más dos elementos distintos de cero. Además, si el renglón o columna tiene entradas distintas de cero entonces la entrada diagonal es distinta de cero.*

Demostración.

Caso $k = n$.

Se sigue del lema 164.

Caso $k < n$.

Por inducción sobre n . Del ejemplo 154 se siguen los casos $n = 2, 3$. Podemos por lo tanto asumir la validez del lema para matrices $U^{\beta}_{(k-1\ k)}$, donde β es una partición de $n-1$. Según la proposición 156,

$$U^{\alpha}_{(k-1\ k)} = \bigoplus_{\beta \in P(\alpha-)} U^{\beta}_{(k-1\ k)} \tag{6.8}$$

Afirmamos que para cada submatriz $U^{\beta}_{(k-1\ k)}$ vale el lema : si $k < n-1$ por hipótesis de inducción y si $k = n-1$ por el lema 164. De la ecuación 6.8 se sigue el lema. ■

Demostración del teorema 162.

Por inducción sobre n . Del ejemplo 154 se siguen los casos $n = 2, 3$.

Caso k < n, n ≥ 4

Según la proposición 156, $U^{\alpha}_{(k-1\ k)} = \bigoplus_{\beta \in P(\alpha-)} U^{\beta}_{(k-1\ k)}$. Por hipótesis de inducción para cada submatriz $U^{\beta}_{(k-1\ k)}$ vale el teorema. Si β está en $P(\alpha-)$ entonces $d_{T^{\beta}_{i}}(k, k-1) = d_{T^{\alpha}_{s}}(k, k-1)$, donde $T^{\alpha *}_{s} = T^{\beta}_{i}$. Además, $T^{\beta}_{i} = (k-1\ k) T^{\beta}_{j}$ con $i < j$ implica $T^{\alpha}_{s} = (k-1\ k) T^{\alpha}_{r}$ donde $T^{\alpha *}_{r} = T^{\beta}_{j}$ y $s < r$. Por lo tanto, el teorema también es cierto para la matriz $U^{\alpha}_{(k-1 k)}$.

Caso k = n, n ≥ 4

Si la tabla T^{α}_{i} tiene a $n-1$ y n en el mismo renglón entonces, por el lema 164, $u_{ii} = 1 = \frac{1}{d_{T^{\alpha}_{i}}(n, n-1)}$.

Si la tabla T^{α}_{i} tiene a $n-1$ y n en la misma columna entonces, por el lema 164, $u_{ii} = -1 = \frac{1}{d_{T^{\alpha}_{i}}(n, n-1)}$.

Falta entonces demostrar que el escalar ρ del lema 164 es el inverso de $d_{T_j^\alpha}(n, n-1)$. Para ello necesitaremos la siguiente observación y el siguiente lema.

Observación. Como $(n-2\ n-1)(n-1\ n)(n-2\ n-1) = (n-1\ n)(n-2\ n-1)(n-1\ n)$ en S_n, lo mismo debe ser cierto para las matrices seminormales, es decir,

$$U^\alpha_{(n-2\ n-1)}U^\alpha_{(n-1\ n)}U^\alpha_{(n-2\ n-1)} = U^\alpha_{(n-1\ n)}U^\alpha_{(n-2\ n-1)}U^\alpha_{(n-1\ n)}.$$

Lema 166 *Sean T_i^α y T_j^α tablas tales que $(n-1\ n)T_i^\alpha = T_j^\alpha$ y $T_i^\alpha < T_j^\alpha$. Si p y q denotan las entradas (i,i) y (j,j) de $U^\alpha_{(n-2\ n-1)}$ respectivamente y ρ denota la entrada (j,j) de $U^\alpha_{(n-1\ n)}$, entonces*

1. *La entrada (j,i) del producto $U^\alpha_{(n-2\ n-1)}U^\alpha_{(n-1\ n)}U^\alpha_{(n-2\ n-1)}$ es igual a pq*

2. *La entrada (j,i) del producto $U^\alpha_{(n-1\ n)}U^\alpha_{(n-1\ n-2)}U^\alpha_{(n-1\ n)}$ es igual a $\rho q - \rho p$,*

es decir, $pq = \rho q - \rho p$.

Demostración. Sean T_i^α y T_j^α tablas tales que $(n-1\ n)T_i^\alpha = T_j^\alpha$ y $T_i^\alpha < T_j^\alpha$. Por el lema 164 los elementos en la matriz $U^\alpha_{(n-1\ n)}$ en las posiciones $(i,i), (i,j), (j,i), (j,j)$ son

$$\begin{matrix} -\rho & 1-\rho^2 \\ 1 & \rho \end{matrix},$$

y por el lema 165, estos elementos son los únicos distintos de cero en los renglones y columnas i y j de $U^\alpha_{(n-1\ n)}$. De acuerdo al caso anterior, como $T_i^\alpha \neq (n-1\ n-2)T_j^\alpha$, los elementos en la matriz $U^\alpha_{(n-1\ n-2)}$ en las posiciones $(i,i), (i,j), (j,i)\ (j,j)$ son

$$\begin{matrix} p & 0 \\ 0 & q \end{matrix},$$

donde $\frac{1}{p}$ es la distancia axial de $n-1$ a $n-2$ en T_i^α y $\frac{1}{q}$ es la distancia axial de $n-1$ a $n-2$ en T_j^α o equivalentemente, la distancia axial de n a $n-2$ en T_i^α.

Para la primera parte del lema, usando de nuevo el lema 164 y el lema 165, encontraremos las entradas distintas de cero en el $j-$ésimo renglón del producto $U^{\alpha}_{(n-1\ n-2)}U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$. En el $j-$ésimo renglón de la matriz $U^{\alpha}_{(n-1\ n-2)}$ existe, además del elemento q, a lo más otro elemento distinto de cero. Supongamos que tal elemento existe en la posición (j,k) y denotémoslo con s. Entonces $T^{\alpha}_{j} = (n-1\ n-2)\,T^{\alpha}_{k}$.

Supongamos también que los únicos elementos distintos de cero en el $k-$ésimo renglón de $U^{\alpha}_{(n-1n)}$ se encuentran en las posiciones (k,k) y (k,l) y denotémoslos con t y r respectivamente. Entonces en la posición (l,k) existe también un elemento distinto de cero. Además, $T^{\alpha}_{k} = (n-1\ n)\,T^{\alpha}_{l}$.

Afirmamos ahora que $l \neq j$ y $l \neq i$ pues $(n-1\ n)\,T^{\alpha}_{i} = T^{\alpha}_{j} = (n-1\ n-2)\,T^{\alpha}_{k} = (n-1\ n\ n-2)\,T^{\alpha}_{l}$. Entonces en las posiciones $(j,k)\,,(j,i)\,,(j,l)\,,(j,j)$ del producto $U^{\alpha}_{(n-1n-2)}U^{\alpha}_{(n-1n)}$ tenemos los elementos st, q, sr y $q\rho$ respectivamente y estas son las únicas entradas distintas de cero en el $j-$ésimo renglón. En los siguientes diagramas escogemos un posible orden para las posiciones.

$$st \quad q \quad sr \quad q\rho \qquad \text{en las posiciones} \qquad (j,k) \quad (j,i) \quad (j,l) \quad (j,j)$$

Para finalmente calcular la entrada (j,i) en $U^{\alpha}_{(n-1\ n-2)}U^{\alpha}_{(n-1\ n)}U^{\alpha}_{(n-1\ n-2)}$, observemos que en la $i-$ésima columna de $U^{\alpha}_{(n-1\ n-2)}$ además del elemento p existe a lo más otro elemento distinto de cero , digamos en la entrada (m,i) . Entonces $T^{\alpha}_{m} = (n-1\ n-2)\,T^{\alpha}_{i}$. Afirmamos que $m \neq l$ y $m \neq k$:

$$\begin{aligned} T^{\alpha}_{l} &= (n\ n-1\ n-2)\,T^{\alpha}_{j} = (n\ n-1\ n-2)\,(n\ n-1)\,T^{\alpha}_{i} = (n\ n-2)\,T^{\alpha}_{i} \neq T^{\alpha}_{m} \\ T^{\alpha}_{k} &= (n-1\ n-2)\,T^{\alpha}_{j} = (n\ n-2\ n-1)\,T^{\alpha}_{i} \neq T^{\alpha}_{m}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} & & & \\ st & q & sr & q\rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & pq & \end{pmatrix}$$

es decir, la entrada (j,i)en $U^{\alpha}_{(n-1\ n-2)}U^{\alpha}_{(n-1\ n)}U^{\alpha}_{(n-1\ n-2)}$ es igual a pq.

Demostraremos ahora la segunda parte del lema. Como 1 y ρ son las únicas entradas distintas de cero en el $j-$ésimo renglón de $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$, los elementos en las entradas (j,i)y (j,j) de la matriz $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}U^{\alpha}_{(n-1\ n-2)}$ son p y ρq; y ya que $-\rho$ y 1 son las únicas entradas distintas de cero en la $i-$ésima columna de $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$, la entrada (j,i) de la matriz $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}U^{\alpha}_{(n-1\ n-2)}U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$ es igual a $\rho q-\rho p$. ■

Por el lema anterior, $pq=\rho q-\rho p$. Se sigue que $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$. Finalmente, por el lema 161 tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} &= \frac{1}{p}-\frac{1}{q} \\
&= d_{T_i^{\alpha}}(n-1,n-2)-d_{T_i^{\alpha}}(n,n-2) \\
&= d_{T_i^{\alpha}}(n-1,n) \\
&= d_{T_j^{\alpha}}(n,n-1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto el teorema es válido para la matriz $U^{\alpha}_{(n-1\ n)}$. ■

Veremos a continuación que a través del teorema 162 se puede obtener una fórmula para los caracteres del grupo simétrico en términos de distacias axiales.

Proposición 167 *Sea* $\tau=s_{k_1}s_{k_2}...s_{k_m}$ *donde* $s_{k_r}=(k_r-1\ k_r)$*y* $k_r\neq k_s$, $1\leq r,s\leq m$. *Si* u_{ii} *denota la entrada* (i,i) *de* U^{α}_{τ} *entonces*

$$u_{ii}=u_{iis_{k_1}}u_{iis_{k_2}}.....u_{iis_{k_m}}=\prod_{r=1}^{m}\frac{1}{d_{T_i^{\alpha}}(k_r,k_r-1)}$$

Demostración. De acuerdo a las reglas de multiplicación de matrices, el elemento en la entrada (i,i) de la matriz U^{α}_{τ} es

$$\sum_{j,\ldots,h}u_{ijs_{k_1}}u_{jks_{k_2}}.....u_{his_{k_m}} \tag{6.9}$$

Supongamos que $u_{cds_{k_r}}\neq 0$. Por el teorema 162, si $c\neq d$ entonces s_{k_r} es la permutación que transforma la tabla T_c^α en la tabla T_d^α , con la notación que hemos usado, $s_{k_r} = \sigma_{cd}$; y si $c = d$ entonces $\sigma_{cd} = \sigma_{cc} = \varepsilon$. Por otro lado,

$$\sigma_{ij}\sigma_{jk}.....\sigma_{hi} = \varepsilon$$

pues $\sigma_{ij}\sigma_{jk}.....\sigma_{hi}T_i^\alpha = T_i^\alpha$. Como ε no puede expresarse como un producto de distintas transposiciones s_{k_r}, $i = j = ... = h$. Se sigue que el único término distinto de cero en 6.9 es $u_{iis_{k_1}}u_{iis_{k_2}}.....u_{iis_{k_m}}$. Finalmente, sabemos por el teorema 162 que $u_{iis_{k_r}} = \frac{1}{d_{T_i^\alpha}(k_r, k_r-1)}$. ■

El siguiente teorema se sigue de la proposición anterior.

Teorema 168 *Sea $\tau = s_{k_1}s_{k_2}...s_{k_m}$ donde $s_{k_r} = (k_r - 1\ k_r)$y $k_r \neq k_s$, $1 \leq r, s \leq m$. Entonces*

$$\chi_{C[S_n]e_j^\lambda}(\tau) = \sum_{i=1}^{f^\lambda}\prod_{r=1}^{m}\frac{1}{d_{T_i^\lambda}(k_r, k_r - 1)} \quad ■$$

Sea C una clase de conjugación de S_n. Podemos escoger una permutación τ en C cuyos ciclos ajenos contengan números consecutivos en forma creciente de izquierda a derecha. Afirmamos que τ se puede escribir como un producto de transposiciones $(k-1\ k)$ todas distintas. Como los caracteres son constantes en clases de conjugación, el carácter del $C[S_n]-$módulo $C[S_n]e_j^\lambda$ queda determinado por el teorema anterior.

Capítulo 7

La fórmula de Murnaghan-Nakayama.

El estudio de los caracteres de un grupo es importante pues gran parte de la información del grupo contenida en sus representaciones se puede obtener a través de sus caracteres. En este capítulo demostraremos una fórmula para evaluar los caracteres del grupo simétrico, la fórmula de Murnaghan-Nakayama. La demostración que daremos se basa en resultados obtenidos en el capítulo sobre matrices seminormales y en la definición de nuevos tipos de tablas de Young. También en esta ocasión la manera de obtener la información deseada será combinatoria, es decir, el problema se traducirá en contar uno de los tipos de tablas introducidos.

Para este capítulo se consultaron los libros [8] y [9].

Usaremos el resultado que afirma que los caracteres son constantes en clases de conjugación. En consecuencia, debemos explicar cómo están constituidas las clases de conjugación de S_n:

Toda permutación τ en S_n tiene una expresión como producto de ciclos ajenos, única salvo el orden de los ciclos. La sucesión formada por las longitudes de estos ciclos ordenada de forma no creciente de izquierda a derecha es una partición de n , usualmente referida como el **tipo cíclico** de τ. Como para cualquier partición α de n existe al menos una permutación en S_n con tipo cíclico α , el conjunto de particiones de n es también el conjunto de tipos cíclicos en S_n.

Las clases de conjugación en S_n están constituidas por permutaciones con un mismo tipo cíclico y por esta razón existe una correspondencia biyectiva entre tipos cíclicos y clases de conjugación de S_n, dicho de otra forma , entre clases de conjugación en S_n y particiones de n. (Este último hecho lo hemos usado ya al calcular todas las representaciones irreducibles de S_n.)

Notación.

Sean $\alpha, \beta \vdash n$. χ^{α} denotará el carácter del $C[S_n]-$módulo $C[S_n]\, e_i^{\alpha}$, es decir, la aplicación $\chi^{\alpha} : S_n \to C$ definida por $\chi^{\alpha}(g) = \operatorname{tr}(U_g^{\alpha})$. (ver definición 152)

Denotaremos con C_{β} a la clase de conjugación de S_n formada por las permutaciones con tipo cíclico β. Si τ está en C_{β} entonces

$$\chi_{\beta}^{\alpha} := \chi^{\alpha}(\tau)$$

Sea $\beta \vdash n$ tal que $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{h-1}, 1)$, y sea $\beta' = (\beta_1, ..., \beta_{h-1})$. Entonces todo elemento en C_{β} se puede pensar como elemento de la clase $C_{\beta'}$ de S_{n-1}. Existe además en C_{β} al menos una permutación σ tal que $\sigma(n) = n$. Se sigue del teorema 156 que

$$U_{\sigma}^{\alpha} = \bigoplus_{\gamma \in P(\alpha-)} U_{\sigma}^{\gamma}$$

y por lo tanto,

$$\chi_{\beta}^{\alpha} = \sum_{\gamma \in P(\alpha-)} \chi_{\beta'}^{\gamma}.$$

La fórmula anterior permite calcular el carácter χ_{β}^{α} de S_n en términos de caracteres $\chi_{\beta'}^{\gamma}$ de S_{n-1} en el caso en que C_{β} contiene al menos un ciclo de longitud 1. Buscamos ahora una fórmula análoga para permutaciones β de S_n con cualquier tipo cíclico.

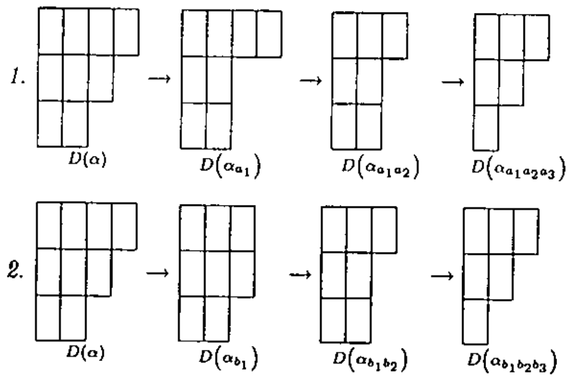
Notación. Sean $\alpha \vdash n$ y $\gamma \vdash m$.

$P(\alpha-, m)$ denota el conjunto de particiones obtenidas de $D(\alpha)$ al suprimir $n - m$

entradas.

$\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$ denota la partición en $P(\alpha-, m)$ que se obtiene quitando sucesivamente una entrada de los diagramas $D(\alpha), D(\alpha_{a_1}), D(\alpha_{a_1 a_2}), \ldots, D\left(\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m-1}}\right)$, donde $\alpha_{a_1 \ldots a_i} \in P\left(\alpha_{a_1 \ldots a_{i-1}}-\right)$ y a_i indica un lugar en $P\left(\alpha_{a_1 \ldots a_{i-1}}-\right)$ con el orden lexicográfico inverso.

Ejemplo 169 $\alpha = (4,3,2), m = 6$



En el ejemplo anterior $\alpha_{a_1 a_2 a_3}$ y $\alpha_{b_1 b_2 b_3}$ se obtuvieron de distintas formas pero denotan el mismo elemento en $P(\alpha-, 6)$.

Sean α y γ particiones de n y m respectivamente tales que $D(\gamma) \subsetneq D(\alpha)$. Consideraremos en el resto del trabajo **únicamente tablas sesgadas de forma α/γ** (definición 68) **obtenidas de tablas estándar de forma α**, en otras palabras, tablas de forma sesgada α/γ con contenido $m+1, \ldots, n$ en orden creciente de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

Lema 170 *Sean α y γ particiones de n y m respectivamente tales que $D(\gamma) \subseteq D(\alpha)$. Entonces existe una correspondecia biyectiva entre las distintas maneras $\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$ de obtener γ en $P(\alpha-, m)$ y las tablas de forma α/γ.*

Demostración.

Todas las tablas estándar de forma α para las cuales es posible suprimir en orden decreciente las $n-m$ últimas letras y sucesivamente de tablas con diagramas

$$D(\alpha), D(\alpha_{a_1}), D(\alpha_{a_1 a_2}), ..., D\left(\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m-1}}\right),$$

las tablas asociadas a $\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$, tienen las $n-m$ últimas letras en una tabla sesgada S de forma $\alpha/\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$. La correspondencia $\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}} \rightarrow S$ es biyectiva, pues dos elementos $\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$ y $\alpha_{b_1 b_2 \ldots b_{n-m}}$ distintos tienen asociadas tablas con las $n-m$ últimas letras en distintas tablas sesgadas y además, cualquier tabla de forma $\alpha/\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$ se obtiene de tablas estándar asociadas a algún elemento $\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$. ■

Definición 171 *Sea S una tabla sesgada. Diremos que S es la tabla asociada a $\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$ si bajo la correspondencia del lema anterior $\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$ se corresponde con S.*

Ejemplo 172 $\alpha = (3,2); \alpha_1 = (3,1), \alpha_2 = (2,2), \alpha_{11} = (3)$, *α_{12} y α_{21} denotan el elemento* $(2,1)$ *en* $P(\alpha-,3)$. *Los subíndices i en α_i y j en α_{ij} se determinan con el orden lexicográfico inverso en los conjuntos $P(\alpha-)$ y $P(\alpha,-)$ para toda $1 \leq i,j \leq 2$.*

tabla estándar	$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & \end{array}$ $\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{array}$
$\alpha_{a_1 a_2}$	α_{11}	α_{12}	α_{21}
tabla sesgada	$\begin{array}{ccc} & & \\ 4 & 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & & 4 \\ & 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & & 5 \\ & 4 & \end{array}$

Sea $\beta \vdash n$ tal que $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{h-1}, \beta_h)$, y sea $\beta' = (\beta_1, ..., \beta_{h-1})$. Supongamos que $\beta_h = n-m$. Existe entonces al menos una permutación en C_β de la forma $\sigma\tau$, donde σ está en $C_{\beta'}$ e involucra solamente las letras $1, 2, ..., m$ y donde $\tau = (m+1\ m+2\ \cdots\ n)$.

Aplicando $n-m$ veces el teorema 156, se concluye que la matriz U_σ^α es una suma directa de submatrices $U_\sigma^{\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}}$ entre las cuales puede haber repeticiones, pues como vimos en el ejemplo 169 , una partición γ de m se puede obtener quitando de distintas maneras $n-m$ entradas de $D(\alpha)$.

Como τ conmuta con toda permutación en S_m, por un argumento similar al usado en el teorema 163, si la matriz U_τ^α se divide de acuerdo a la posición de las últimas $n-m$ letras, las submatrices diagonales son un múltiplo escalar de la identidad, y puesto que $\tau = (m+1\ m+2\ \cdots\ n) = (m+1\ m+2)(m+2\ m+3)\cdots(n-1\ n)$ los escalares de cada submatriz pueden ser evaluados según la proposición 167, es decir,

$$U_\tau^{\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}} = \frac{1}{d_S(n,n-1)\,d_S(n-1,n-2)\cdots d_S(m+2,m+1)} I$$

donde S es la tabla sesgada asocida a $\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$.

El siguiente lema es consecuencia de lo anterior y del lema 156

Lema 173 *Sean $\alpha \vdash n$, $\tau = (m+1\ m+2\ \cdots\ n)$ y σ una permutación que no involucra las letras $m+1, m+2, ..., n$. Entonces*

$$U_{\sigma\tau}^{\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}} = \frac{1}{d_S(n,n-1)\,d_S(n-1,n-2)\cdots d_S(m+2,m+1)} U_\sigma^{\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}}$$

donde S es la tabla sesgada asociada a $\alpha_{a_1 a_2 \ldots a_{n-m}}$.

Corolario 174 *Sean $\gamma \in P(\alpha-, m)$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{h-1}, (n-m))$, $\beta' = (\beta_1, ..., \beta_{h-1})$, y τ, σ como en el lema anterior, $\sigma \in C_{\beta'}$. Si $\kappa^\gamma = \sum_{S \text{ tabla de forma } \alpha/\gamma} \frac{1}{d_S(n,n-1)d_S(n-1,n-2)\cdots d_S(m+2,m+1)}$, entonces*

$$\chi_\beta^\alpha = \sum_{\gamma \in P(\alpha-,m)} \kappa^\gamma \chi_{\beta'}^\gamma \ . \blacksquare$$

Observación 1 *Si en el lema anterior $m=0$ y si*

$$\kappa^0 = \sum_{T \text{ tabla estandar de forma } \alpha} \frac{1}{d_T(n,n-1)\,d_T(n-1,n-2)\cdots d_T(m+2,m+1)}$$

entonces por el teorema 168 ,

$$\chi^\alpha(\tau) = \kappa^0.$$

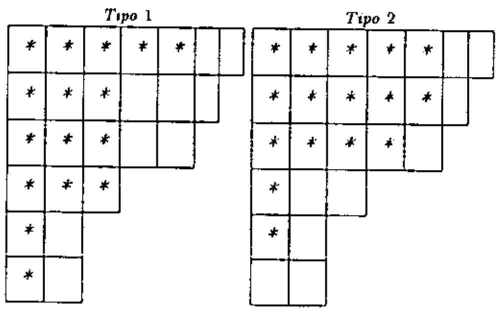
El siguiente propósito es determinar los escalares κ^γ del corolario anterior . Para ello necesitaremos las siguientes definiciones.

Distinguiremos dos tipos de diagramas sesgados (definición 67) :

- **Tipo 1.** $D(\alpha/\gamma)$ es de tipo 1 si contiene un bloque cuadrado de cuatro entradas.

- **Tipo 2.** $D(\alpha/\gamma)$ es de tipo 2 si no es de tipo 1, o en otras palabras, si es una unión ajena de escuadras sesgadas (definición 70)

Ejemplo 175



Cada entrada de un diagrama de tipo 2 se especifica de manera única por medio de su distancia axial a la entrada inferior izquierda, es decir, la entrada con índice de renglón mayor e índice de columna menor. Observemos que esto no es cierto para diagramas de tipo 1, pues las entradas superior izquierda e inferior derecha de un bloque cuadrado de 2×2 están a la misma distancia axial de la entrada inferior izquierda del diagrama sesgado.

Ejemplo 176 *Sean* $\alpha = (7,6,5,3,2^2)$ *y* $\gamma = (5^2,4,1^2)$. *En el siguiente diagrama de forma* α/γ *las entradas están marcadas con su distancia axial a la entrada inferior iz-*

quierda.

*	*	*	*	*	10	11
*	*	*	*	*	9	
*	*	*	*	7		
*	3	4				
*	2					
0	1					

Definición 177 *Sean α y γ particiones de n y m respectivamente tales que $D(\gamma) \subseteq D(\alpha)$. Los* ***nodos superiores*** *de $D(\alpha/\gamma)$ son las entradas de $D(\alpha/\gamma)$ en donde es posible que aparezca la letra $m+1$ de manera que se obtenga una tabla sesgada. Los* ***nodos inferiores*** *de $D(\alpha/\gamma)$ son las entradas de $D(\alpha/\gamma)$ que no se encuentran en algún extremo de una escuadra sesgada y en donde es posible que aparezca la letra n de manera que se obtenga una tabla sesgada.*

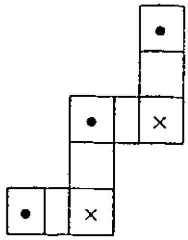
En el diagrama anterior los nodos superiores son las entradas marcadas con $0, 3, 7, 10$ y el único nodo inferior está marcado con el número 1.

Notación. Los nodos superiores e inferiores de $D(\alpha/\gamma)$ los denotaremos con $v_1, ..., v_k$ y $w_1, ..., w_l$ respectivamente.

Definición 178 *Los valores asociados a los nodos superiores e inferiores de $D(\alpha/\gamma)$ son las correspondientes distancias axiales a la entrada inferior izquierda de $D(\alpha/\gamma)$. Los valores asociados a los nodos v_i y w_s los denotaremos con a_i y b_s respectivamente.*

Lema 179 *El número de nodos superiores excede en 1 al número de nodos inferiores en una escuadra sesgada.*

Demostración. En cada renglón de una escuadra sesgada hay un nodo superior y un nodo inferior, o sólo un nodo superior; el último caso sólo sucede en un renglón.



■

Definición 180 *Sea* $\gamma \in P(\alpha-, m)$. *Para* $1 \leq i \leq k$,

$$q_i^\gamma := \sum_{\substack{S \text{ tabla de forma } \alpha/\gamma \\ \text{con } m+1 \text{ en } v_i}} \frac{1}{d_S(n, n-1)\, d_S(n-1, n-2) \cdots d_S(m+2, m+1)}$$

Observación. Si $\kappa^\gamma = \sum_{S \text{ tabla de forma } \alpha/\gamma} \frac{1}{d_S(n,n-1) d_S(n-1,n-2) \cdots d_S(m+2,m+1)}$, entonces

$$\kappa^\gamma = \sum_{i=1}^{k} q_i^\gamma$$

donde k es el número de nodos superiores de $D(\alpha/\gamma)$.

La demostración del siguiente teorema se encuentra en el libro [3, pgs. 307 y 308]

Teorema 181 *Sean* $g(x)$ *y* $f(x)$ *polinomios con coeficientes reales;* $g(x) = (r_1 - x) \cdots (r_n - x)$ *con* $r_i \neq r_j$ *si* $i \neq j$, *y el grado de* $f(x)$ *menor que* n. *Entonces,*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c_1}{r_1 - x} + \cdots + \frac{c_n}{r_n - x}$$

donde $c_i = \frac{f(r_i)}{\prod_{j \neq i} (r_j - r_i)}$.

Lema 182 *Sean* $\{a_1, ..., a_k\}$ *y* $\{b_1, ..., b_t\}$ *dos conjuntos de números reales tales que* $\{a_1, ..., a_k\} \cap \{b_1, ..., b_t\} = \emptyset$ *y* $t < k - 1$. *Entonces para toda* $1 \leq i \leq k$,

$$\sum_{j \neq i} \frac{1}{(a_j - a_i)} \frac{\prod_{s=1}^{t} (b_s - a_j)}{\prod_{r \neq j, i} (a_r - a_j)} = \frac{\prod_{s=1}^{t} (b_s - a_i)}{\prod_{r \neq i} (a_r - a_i)}$$

Demostración. Sea i un número entero tal que $1 \leq i \leq k$ y sean $g_i(x) = \prod_{j \neq i} (a_j - x)$ y $f(x) = \prod_{s=1}^{t} (b_s - x)$. Por el teorema anterior,

$$\frac{f(x)}{g_i(x)} = \sum_{j \neq i} \frac{c_j}{a_j - x} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{a_j - x} \frac{\prod_{s=1}^{t} (b_s - a_j)}{\prod_{r \neq i, j} (a_r - a_j)}$$

Se obtiene lo afirmado por el lema al evaluar las ecuaciones anteriores en a_i. ■

Definición 183 ***La altura*** *de una escuadra sesgada es el número de renglones que aparecen en ella menos uno. Si* $D(\alpha/\gamma)$ *es de tipo* 2, *entonces la altura de* $D(\alpha/\gamma)$ *es la suma de las alturas de sus escuadras constituyentes; la denotaremos con* $ht(\alpha/\gamma)$.

En el diagrama de tipo 2 del ejemplo 175 , $ht(\alpha/\gamma) = 2 + 0 + 1 = 3$.

Teorema 184 *Sean* α *y* γ *particiones de* n *y* m *respectivamente tales que* $D(\gamma) \subseteq D(\alpha)$ *y sean* $a_1, ..., a_k$, $b_1, ..., b_t$ *como en la definición 178.*

1. *Si* $D(\alpha/\gamma)$ *es de tipo* 1 *entonces* $q_i^\gamma = 0$.

2. *Si* $D(\alpha/\gamma)$ *es de tipo* 2 *entonces*

$$q_i^\gamma = (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} \frac{\prod_{s=1}^{t} (b_s - a_i)}{\prod_{r \neq i} (a_r - a_i)} \tag{7.1}$$

Demostración. Por inducción sobre $n-m$.

Caso $n-m=1$.

Sea $S = \boxed{n}$, entonces S es la única tabla de forma α/γ. Además, $D(\alpha/\gamma)$ es de tipo 2, no tiene nodos inferiores, el único nodo superior es v_1 y $ht(\alpha/\gamma)=0$. Se sigue que la expresión derecha en (7.1) , con $a_i = a_1$, es igual a 1. Usando ahora la definición 180. como el producto $d_S(n,n-1)\,d_S(n-1,n-2)\cdots d_S(m+2,m+1)$ es vacío, $q_1^\gamma = 1$ y por lo tanto el lema es válido en este caso.

Caso $n-m=2$.

Si $D(\alpha/\gamma) = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline\end{array}$ entonces existe una única tabla S de forma α/γ , $D(\alpha/\gamma)$ no tiene nodos inferiores, sólo un nodo superior v_1 y $ht(\alpha/\gamma)=0$.

$$S = \begin{array}{|c|c|}\hline n-1 & n \\ \hline\end{array} \qquad D(\alpha/\gamma) = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline\end{array}$$
$$\uparrow$$
$$v_1$$

Se sigue que la expresión derecha en (7.1) con $a_i = a_1$, es igual a 1. Por la definición 180 , $q_1^\gamma = \frac{1}{d_S(n,n-1)} = 1$.

Si $D(\alpha/\gamma) = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}$, entonces existe una única tabla S de forma α/γ , $D(\alpha/\gamma)$ no tiene nodos inferiores, sólo un nodo superior v_1 y $ht(\alpha/\gamma)=1$.

$$S = \begin{array}{|c|}\hline n-1 \\ \hline n \\ \hline\end{array} \qquad D(\alpha/\gamma) = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array} \;\leftarrow\; v_1$$

Se sigue que la expresión derecha en (7.1) con $a_i = a_1$ es igual a -1. Por la definición 180 , $q_1^\gamma = \frac{1}{d_S(n,n-1)} = -1$.

Si $D(\alpha/\gamma) = \begin{array}{cc} & \boxed{} \\ \boxed{} & \end{array}$, entonces existen dos tablas de forma α/γ :

$$S_1 = \begin{array}{cc} & \boxed{n-1} \\ \boxed{n} & \end{array} \qquad S_2 = \begin{array}{cc} & \boxed{n} \\ \boxed{n-1} & \end{array}$$

$$D(\alpha/\gamma) = \begin{array}{cc} & \boxed{} \\ \boxed{} & \uparrow \\ \uparrow & v_2 \\ v_1 & \end{array}$$

Los nodos superiores de $D(\alpha/\gamma)$ son v_1 y v_2, $D(\alpha/\gamma)$ no tiene nodos inferiores y $ht(\alpha/\gamma) = 0$. Por lo tanto, la expresión derecha en (7.1) , con $a_i = a_1$, es igual a $\frac{1}{a_2-a_1}$. Se sigue de la definición 180 que $q_1^\gamma = \frac{1}{d_{S_2}(n,n-1)} = \frac{1}{d_{D(\alpha/\gamma)}(v_2,v_1)} = \frac{1}{a_2-a_1}$.

Se procede análogamente con q_2^γ.

Caso $n - m > 2$

Agruparemos a los sumandos de q_i^γ de acuerdo a la posición de $m+2$ en las tablas S. Obtendremos de esa manera una expresión de q_i^γ en términos de sumas $q_j^{\gamma \bigcup \{v_i\}}$.

Sean $z_1^i, \ldots, z_l^i$ los nodos superiores de $\alpha/(\gamma \bigcup \{v_i\})$. Entonces

$$\begin{aligned} q_i^\gamma &= \sum_{\substack{S \text{ tabla de forma } \alpha/\gamma \\ \text{con } m+1 \text{ en } v_i}} \frac{1}{d_S(n,n-1)\, d_S(n-1,n-2)\cdots d_S(m+2,m+1)} \\ &= \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{d_{D(\alpha/\gamma)}\left(z_j^i, v_i\right)} \left(\sum \frac{1}{d_S(n,n-1)\, d_S(n-1,n-2)\cdots d_S(m+3,m+2)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{d_{D(\alpha/\gamma)}\left(z_j^i, v_i\right)} q_j^{\gamma \bigcup \{v_i\}} \qquad (7.2) \end{aligned}$$

donde la suma en el segundo renglón corre sobre todas las tablas S de forma α/γ con

$m+1$ en v_i y $m+2$ en z_j^i.

Consideraremos varios subcasos.

- $D(\alpha/\gamma)$ de tipo 2, v_i un nodo superior aislado de $D(\alpha/\gamma)$, es decir, un nodo que forma una escuadra sesgada de tamaño 1.

En este caso $\left\{z_j^i \mid 1 \leq j \leq l\right\} = \{v_j,\ j \neq i\}$ y los nodos inferiores de $D(\alpha/\gamma)$ y $D(\alpha/(\gamma \bigcup \{v_i\}))$ son los mismos. Usando la igualdad (7.2) y la hipótesis de inducción,

$$q_i^\gamma = (-1)^{ht\left(\alpha/\left(\gamma\bigcup\{v_i\}\right)\right)} \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{d_{D(\alpha/\gamma)}\left(z_j^i, v_i\right)} \frac{\prod_{s=1}^{t} (b_s - a_j)}{\prod_{r \neq i,j} (a_r - a_j)}.$$

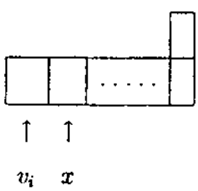
Además, si $z_j^i = v_e$ entonces $d_{D(\alpha/\gamma)}\left(z_j^i, v_i\right) = a_e - a_i$. Por el lema 179 , $t < k-1$ y por lo tanto se sigue del lema 182 que

$$q_i^\gamma = (-1)^{ht\left(\alpha/\left(\gamma\bigcup\{v_i\}\right)\right)} \frac{\prod_{s=1}^{t} (b_s - a_i)}{\prod_{r \neq i} (a_r - a_i)}.$$

Como $ht(\alpha/\gamma) = ht(\alpha/(\gamma \bigcup \{v_i\}))$, el lema es cierto en este caso.

- $D(\alpha/\gamma)$ de tipo 2 , v_i nodo superior en extremo inferior de una escuadra de $D(\alpha/\gamma)$.

  (a) v_i se encuentra en la siguiente escuadra sesgada, donde x no es un nodo infe- riror.



Como v_i tiene el valor asociado a_i, entonces el valor asociado de x es igual a $a_i + 1$. Por hipótesis de inducción y ya que los nodos superiores e inferiores de

$D(\alpha/(\gamma\bigcup\{v_i\}))$ son $\{v_j \mid j \neq i\}\bigcup\{x\}$ y $\{w_s \mid 1 \leq s \leq t\}$ respectivamente.

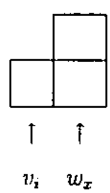
$$q_j^{\gamma\bigcup\{v_i\}} = (-1)^{ht\left(\alpha/\left(\gamma\bigcup\{v_i\}\right)\right)}\left((a_i+1)-a_j\right)\frac{\prod\limits_{s=1}^{t}(b_s-a_j)}{\prod\limits_{r\neq i,j}(a_r-a_j)}$$

Usando la igualdad 7.2 , el lema 182 ($k > t$ por el lema 179) y el hecho $ht(\alpha/\gamma) = ht(\alpha/(\gamma\bigcup\{v_i\}))$, se concluye que

$$\begin{aligned} q_i^{\gamma} &= (-1)^{ht\left(\alpha/\left(\gamma\bigcup\{v_i\}\right)\right)}\left((a_i+1)-a_i\right)\frac{\prod\limits_{s=1}^{t}(b_s-a_i)}{\prod\limits_{r\neq i}(a_r-a_i)} \\ &= (-1)^{ht(\alpha/\gamma)}\frac{\prod\limits_{s=1}^{t}(b_s-a_i)}{\prod\limits_{r\neq i}(a_r-a_i)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el teorema es cierto en este caso.

(b) v_i se encuentra en la siguiente escuadra sesgada, donde w_x está pegado a v_i y es nodo inferior.



Los nodos superiores e inferiores de $D(\alpha/(\gamma\bigcup\{v_i\}))$ son los nodos superiores e inferiores de $D(\alpha/\gamma)$ excepto por v_i y w_x respectivamente. Además, w_x tiene el valor asociado a_i+1, es decir $b_x = a_i + 1$, y $ht(\alpha/\gamma) = ht(\alpha/(\gamma\bigcup\{v_i\}))$. En este caso $t-1 < k-1$ por el lema 179 y por lo tanto,

$$q_i^{\gamma} = (-1)^{ht\left(\alpha/\left(\gamma\bigcup\{v_i\}\right)\right)}\frac{\prod\limits_{s\neq x}(b_s-a_i)}{\prod\limits_{r\neq i}(a_r-a_i)}$$

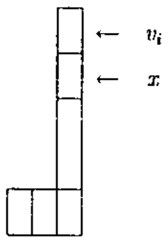
$$= \quad (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} (a_i + 1 - a_i) \frac{\prod\limits_{s \neq x} (b_s - a_i)}{\prod\limits_{r \neq i} (a_r - a_i)}$$

$$= \quad (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} \frac{\prod\limits_{s \neq x} (b_s - a_i)}{\prod\limits_{r \neq i} (a_r - a_i)}$$

Se procede de manera similar en los siguientes casos. Sólo especificaremos en cada caso los nodos superiores adicionales de $D(\alpha/(\gamma \bigcup \{v_i\}))$, los nodos inferiores de $D(\alpha/\gamma)$ que dejan de serlo en $D(\alpha/(\gamma \bigcup \{v_i\}))$, y su exclusiva contribución en el signo que establece el teorema.

- $D(\alpha/\gamma)$ de tipo 2 , v_i nodo superior en extremo superior de una escuadra de $D(\alpha/\gamma)$.

  1. v_i se encuentra en la siguiente escuadra sesgada.

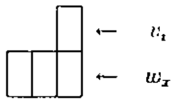


Los nodos superiores e inferiores de $D(\alpha/(\gamma \bigcup \{v_i\}))$ son $\{v_j \mid j \neq i\} \bigcup \{x\}$ y $\{w_s \mid 1 \leq s \leq t\}$ respectivamente. El valor asociado de x es $a_i - 1$ y $ht(\alpha/\gamma) = ht(\alpha/(\gamma \bigcup \{v_i\})) - 1$. Por lo tanto,

$$q_i^\gamma \quad = \quad (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} (-1) \frac{\prod\limits_{s=1}^{t} (b_s - a_i)}{\prod\limits_{r \neq i} (a_r - a_i) ((a_i - 1) - a_i)}$$

$$= \quad (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} \frac{\prod\limits_{s=1}^{t} (b_s - a_i)}{\prod\limits_{r \neq i} (a_r - a_i)}$$

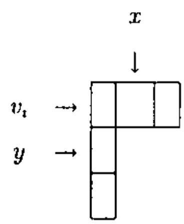
2. v_i se encuentra en la siguiente escuadra sesgada.



Los nodos superiores e inferiores de $D\left(\alpha/\left(\gamma \bigcup \{v_i\}\right)\right)$ son $\{v_j \mid j \neq i\}$ y $\{w_s \mid s \neq x\}$ respectivamente. El valor asociado de w_x es $a_i - 1$ y $(-1)^{ht(\alpha/\gamma)}(-1) = (-1)^{ht\left(\alpha/\left(\gamma \bigcup \{v_i\}\right)\right)}$. Por lo tanto, el factor $((a_i - 1) - a_i) = -1$ en el denominador de la expresión final de q_i^γ cancela un factor (-1) en $(-1)^{ht\left(\alpha/\left(\gamma \bigcup \{v_i\}\right)\right)}$.

- $D(\alpha/\gamma)$ de tipo 2 , v_i nodo superior que no está en ningún extremo de una escuadra sesgada.

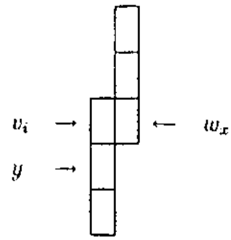
1. v_i se encuentra en la siguiente tabla sesgada, donde x y y no son nodos inferiores.



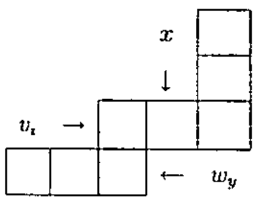
Los nodos superiores e inferiores de $D\left(\alpha/\left(\gamma \bigcup \{v_i\}\right)\right)$ son $\{v_i \mid j \neq 1\} \bigcup \{x, y\}$ y $\{w_s \mid 1 \leq s \leq t\}$. Los valores asociados a x y y son $a_i + 1$ y $a_i - 1$ respectivamente y $(-1)\, ht\left(\alpha/\left(\gamma \bigcup \{v_i\}\right)\right) = (-1)^{ht(\alpha/\gamma)}(-1)$. Por lo tanto, en el denominador de la expresión final de q_i^γ el factor $((a_i - 1) - a_i)$ cancela un factor (-1) en $(-1)^{ht\left(\alpha/\left(\gamma \bigcup \{v_i\}\right)\right)}$.

Análogamente se demuestran los siguientes subcasos.

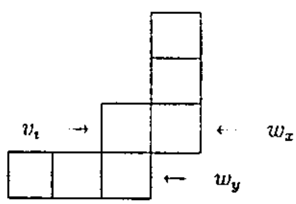
2. v_i se encuentra en la siguiente tabla sesgada.



3. v_i se encuentra en la siguiente tabla sesgada.



4. v_i se encuentra en la siguiente tabla sesgada.



- $D(\alpha/\gamma)$ de tipo 1.

  1. v_i no se encuentra en un cuadrado de 2×2 o v_i se encuentra en un cuadrado de 2×2 pero $D(\alpha/\gamma)$ tiene más de un cuadrado de 2×2.

     En ambos casos $D(\alpha/(\gamma \bigcup \{v_i\}))$ es de tipo 1. Por hipótesis de inducción $q_j^{\gamma \bigcup \{v_i\}} = 0$ para toda $j \neq i$ y por lo tanto, $q_i^{\gamma} = 0$.

2. $D(\alpha/\gamma)$ tiene un sólo cuadrado de 2×2 y v_i se encuentra en él.

$$\begin{array}{ccccc} v_i & \longrightarrow & \square & \square & \longleftarrow & s \\ r & \longrightarrow & \square & \square & \longleftarrow & w_x \end{array}$$

$D\left(\alpha/\left(\gamma\bigcup\{v_i\}\right)\right)$ es de tipo 2 y por lo tanto para cada $q_j^{\gamma\bigcup\{v_i\}}$ vale el lema. Los nodos marcados con r y s pueden o no ser nodos superiores de $D\left(\alpha/\left(\gamma\bigcup\{v_i\}\right)\right)$ pero sólo es necesario observar que en cualquier caso w_x también es nodo inferior de $D\left(\alpha/\left(\gamma\bigcup\{v_i\}\right)\right)$. Como el valor de w_x es igual al valor de v_i, el factor $b_x - a_i$ en la expresión de q_i^γ dada por 7.2 y 182 se anula y por lo tanto, $q_i^\gamma = 0$. ■

Corolario 185 *Si $D(\alpha/\gamma)$ contiene un cuadrado de 2×2 entonces $\kappa^\gamma = 0$. Si $D(\alpha/\gamma)$ no contiene ningún cuadrado de 2×2 entonces*

$$\kappa^\gamma = (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} \sum_{i=1}^{k} \frac{\prod_{s=1}^{t}(b_s - a_i)}{\prod_{r \neq i}(a_r - a_i)} . \ ■$$

Teorema 186 *Sean $\{a_1, ..., a_k\}$ y $\{b_1, ..., b_t\}$ dos conjuntos de números reales distintos con $t < k$ y $\{a_1, ..., a_k\} \cap \{b_1, ..., b_t\} = \emptyset$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\prod_{s=1}^{t}(b_s - a_i)}{\prod_{r \neq i}(a_r - a_i)} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ t = k-1 \\ 0 & si\ t < k-1 \end{array} \right\}$$

Demostración. Para $1 \leq i \leq k$ consideraremos los polinomios

$$L_i(x) := \frac{\prod_{j \neq i}(a_j - x)}{\prod_{j \neq i}(a_j - a_i)}.$$

Sea $f(x) := \prod_{s=1}^{t} (b_s - x)$. Como $t < k$, por la fórmula de interpolación de Lagrange [5] ,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i) L_i(x) ,$$

es decir,

$$\prod_{s=1}^{t} (b_s - x) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i) \frac{\prod_{j \neq i} (a_j - x)}{\prod_{j \neq i} (a_j - a_i)} .$$

El coeficiente de x^{k-1} del lado izquierdo de la ecuación anterior es $(-1)^{k-1}$ si $t = k - 1$ y 0 si $t < k - 1$. Por comparación de coeficientes se sigue el resultado. ■

Lema 187 *Sean* $\alpha, \beta \vdash n$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_h)$, $\gamma \vdash n - \beta_h$ *y* $\beta' = (\beta_1, ..., \beta_{h-1})$. *Entonces*

$$\kappa^{\gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} & \text{si } D(\alpha/\gamma) \text{ es una escuadra sesgada} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

Demostración. Recordemos que $a_1, ..., a_k$ y $b_1, ...b_t$ denotan respectivamente los valores asociados a los nodos superiores e inferiores de $D(\alpha/\gamma)$. Si $D(\alpha/\gamma)$ es una escuadra sesgada entonces por el corolario 185

$$\kappa^{\gamma} = (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} \sum_{i=1}^{k} \frac{\prod_{s=1}^{t} (b_s - a_i)}{\prod_{r \neq i} (a_r - a_i)} ,$$

y por el lema 182 , $k - 1 = t$. El teorema 186 asegura entonces que $\kappa^{\gamma} = (-1)^{ht(\alpha/\gamma)}$.

Si $D(\alpha/\gamma)$ es de tipo 1, entonces por el corolario 185 , $\kappa^{\gamma} = 0$. Si $D(\alpha/\gamma)$ es de tipo 2 pero no es una escuadra sesgada entonces por el lema 179 , $t < k - 1$ y por el corolario 185 ,

$$\kappa^{\gamma} = (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} \sum_{i=1}^{k} \frac{\prod_{s=1}^{t} (b_s - a_i)}{\prod_{r \neq i} (a_r - a_i)} .$$

Se sigue del teorema 186 que $\kappa^{\gamma} = 0$. ■

Teorema 188 *Sean $\alpha, \beta \vdash n$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_h)$, $\gamma \vdash n - \beta_h$ y $\beta' = (\beta_1, ..., \beta_{h-1})$*

$$\chi^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\substack{\gamma \in P(\alpha -, n-\beta_h) \\ D(\alpha/\gamma) \text{ una escuadra} \\ \text{sesgada de tamaño } \beta_h}} (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} \chi^{\gamma}_{\beta'}$$

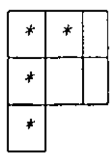
Demostración. Se sigue del lema anterior y corolario 174. ■

Corolario 189 *Sean $\alpha \vdash n$ y $\tau = (12 \cdots n)$. Entonces*

$$\chi^{\alpha}(\tau) = \left\{ \begin{array}{cc} (-1)^{ht(\alpha)} & \text{si } \alpha \text{ es un escuadra sesgada} \\ 0 & \text{si } \alpha \text{ no es una escuadra sesgada} \end{array} \right\} \blacksquare$$

Ejemplo 190 *1. La evaluación de $\chi^{(3^2,1)}_{(4,3)}$.*

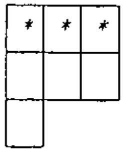
$\gamma = (2, 1^2)$ es la única partición de 4 tal que $D(\alpha/\gamma)$ es una escuadra sesgada .



Por lo tanto, aplicando dos veces el teorema 188,

$$\chi^{(3^2,1)}_{(4,3)} = -\chi^{(2,1^2)}_{(4)} = -1$$

Como no es necesaria la condición $\beta_1 \geq ... \geq \beta_h$ en la demostración del teorema 188, podemos evaluar $\chi^{(3^2,1)}_{(4,3)}$ removiendo primero 4 entradas de $D(3^2, 1)$ de todas las formas posibles. $\eta = (3)$ es la única partición de 3 tal que $D(\alpha/\eta)$ es una *escuadra sesgada.*



Por lo tanto,

$$\chi^{(3^2,1)}_{(4,3)} = -\chi^{(3)}_{(3)} = -1$$

Las siguientes definiciones serán de utilidad para escribir la última expresión de χ^{α}_{β} usando repetidas veces el teorema 188.

Definición 191 *Sean α y β particiones de n y m respectivamente tales que $D(\beta) \subseteq D(\alpha)$. Una **tabla de Young generalizada** de forma α/β, T, es un llenado de $D(\alpha/\beta)$ con enteros positivos posiblemente repetidos. El **contenido** de T es $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_h)$ si $\gamma_1 + ... + \gamma_h = n$ y γ_i es el número de i's en T.*

Definición 192 *Una **tabla de escuadras sesgadas** es una tabla de Young generalizada tal que:*

1. *Las columnas y renglones de T no son decrecientes.*

2. *El número de i's en T aparece en una sola escuadra sesgada.*

Notación. $\xi^{(i)}$ denota una escuadra sesgada con contenido $(\beta_1, ..., \beta_i)$ donde $\beta_j = 0$ si $j \neq i$ y β_i es el tamaño de $\xi^{(i)}$, es decir , el número de cuadros que tiene $\xi^{(i)}$.

Definición 193 *El **signo** de una tabla de escuadras sesgadas T, denotado con $(-1)^T$, se define de la siguiente manera.*

$$(-1)^T := \prod_{\xi^{(i)} \in T} (-1)^{ht(\xi^{(i)})}$$

Ejemplo 194

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 2 & \\ \cline{1-3} 1 & 3 & & \\ \cline{1-2} 3 & 3 & & \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad (-1)^T = (-1)^{2+1+1} = 1$$

T es una tabla de escuadras sesgadas de forma $(4,3,2^2)$ y contenido $(4^2,3)$.

Teorema 195 *(Murnaghan-Nakayama) Sean $\alpha, \beta \vdash n$. Entonces*

$$\chi^{\alpha}_{\beta} = \sum_{T} (-1)^T$$

donde la suma corre sobre todas las tablas de escuadras sesgadas de forma α y contenido β.

Demostración. Por el teorema 188 ,

$$\chi^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\substack{\gamma \in P(\alpha-, n-\beta_h) \\ D(\alpha/\gamma) \text{ una escuadra} \\ \text{sesgada de tamaño } \beta_h}} (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} \chi^{\gamma}_{\beta'}$$

Si ahora aplicamos el teorema 188 a $\chi^{\gamma}_{\beta'}$ obtenemos la siguiente expresión.

$$\chi^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\substack{\gamma \in P(\alpha-, (n-\beta_h)) \\ D(\alpha/\gamma) \text{ una escuadra} \\ \text{sesgada de tamaño } \beta_h}} (-1)^{ht(\alpha/\gamma)} \sum_{\substack{\lambda \in P(\gamma-, (n-\beta_h-\beta_{h-1})) \\ D(\gamma/\lambda) \text{ una escuadra} \\ \text{sesgada de tamaño } \beta_{h-1}}} \chi^{\lambda}_{\beta''}$$

donde $\beta'' = (\beta_1, ..., \beta_{h-2})$.

Aplicando h veces el teorema 188 se concluye que χ_{β}^{α} es una suma de elementos de la forma $(-1)^{x}$ donde x es una suma de alturas de escuadras sesgadas de tamaño $\beta_h, ..., \beta_1$ que pueden ser removidas sucesivamente de la frontera diagonal de $D(\alpha)$. En consecuencia, a cada sumando de χ_{β}^{α} le corresponde una forma de construir $D(\alpha)$ agregando sucesivamente a una escuadra sesgada de tamaño β_1 escuadras de tamaño $\beta_2, ..., \beta_h$ de manera que en cada paso se obtenga un diagrama de forma reconocida. Si a cada una de estas construcciones la pensamos con escuadras sesgadas de tamaño β_i y contenido $(0, .., \beta_i)$, obtenemos el conjunto de tablas de escuadras sesgadas de forma α y contenido β. ■

Ejemplo 196 *1. La evaluación de* $\chi_{(4,2^2)}^{(4,2^2)}$.

Las tablas de escuadras sesgadas de forma $(4, 2^2)$ *y contenido* $(4, 2^2)$ *son:*

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

$$T_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 2 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad T_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} 3 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\chi_{(4,2^2)}^{(4,2^2)} = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{T} = (-1)^{2+1+0} + (-1)^{2+0+1} + (-1)^{0+1+1} + (-1)^{0+0+0} = 0$$

2. La evaluación de $\chi_{(3^2,2)}^{(4,2^2)}$

Las tablas de escuadras sesgadas de forma $(4,2^2)$ *y contenido* $(3^2,2)$ *son:*

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 2 & 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Por lo tanto,

$$\chi^{(4,2^2)}_{(3^2,2)} = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{T_i} = (-1)^{2+2+0} + (-1)^{1+1+0} = 2.$$

Bibliografía

[1] H. Boerner, *Representations of Groups with Special Consideration for the Needs of Modern Physics,* North-Holland, New York, NY, 1970.

[2] C. W. Curtis y I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras,* Pure and Applied Science, Vol. 11, Wiley-Interscience, New York, NY, 1966.

[3] R. Courant y F. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático,* Vol. 1, Editorial Limusa, 1987.

[4] W. Fulton y J. Harris, *Representation Theory : a first course,* Springer (GTM), New York, 1991.

[5] K. Hoffman y R. Kunze, *Álgebra Lineal,* Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.

[6] G. D. James y A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 16, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.

[7] G. D. James y M. W. Liebeck, *Representations and Characters of Groups,* Cambridge University Press, 1993.

[8] D. E. Rutherford, *Substitutional Analysis,* Hafner, New York, NY, 1968.

[9] B. E. Sagan, *The Symmetric Group,* Wadworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1991.