



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**“CÁLCULO DEL MODELO MATEMÁTICO DE LA
ATENUACIÓN DE UN SENSOR REFRACTOMÉTRICO
DE INTENSIDAD EN FIBRA ÓPTICA”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO ELÉCTRICO Y ELECTRÓNICO MODULO
DE ELECTRÓNICA PARA COMUNICACIONES**

PRESENTA

NELSON NESTOR SOLIS OSORNO

DIRECTOR: M. EN I. VLADIMIR A. SVIRID KUZMENKO



MÉXICO, D. F.

SEPTIEMBRE, 2000

282581



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICADADA

A MI KATE

Sin duda el ser humano que más amo, amé y amaré. Dedico esta tesis por su gran ayuda, comprensión, apoyo incondicional, nobleza, ternura, sinceridad, simplemente por tu amor, mi niña hermosa.

Te amo... sabes a que me refiero.

Aun sigo flexionando el meñique, y a la distancia te digo lo que no se puede decir con palabras.

Por ti volare...

AGRADECIMIENTOS

A Dios mi Señor y salvador por darme el don de la vida, la oportunidad de ser **increíblemente feliz** al vivir con mi KATE, y la dicha de esperar con ilusión el alumbramiento de nuestro primogénito. A ti que sabes quien soy.

A Kathia mi hermosa amiga, mi amante divertida, la compañera leal, la esposa que soñé y a la desconocida con quien deseo pasar la eternidad. Gracias por las traducciones de los documentos la disposición para esperarme 23 años para que llegara a tu vida, y gracias por hacerme padre.

A mis padres por el apoyo, la instrucción y cariño que me brindaron para concluir mis estudios. Por las noches de desvelo, las lagrimas y llanto silencioso. Gracias por hacerme parte de la mejor familia en el mundo.

A estos hermanos incomparables con los que Dios me cobijó y me enseñó el compañerismo: es decir, a mis mejores amigos, a los compañeros de juegos: Miguel Angel, Cesar Jiven, José Armando, Dulce Ivette y Aisa Sarai. Nunca jamas, nadie pudo pedir vivir entre seres tan impresionantemente geniales, excepto yo.

A Vladimir Andrevich Svirid Kusmenko mi director de tesis, por la admirable paciencia, el apoyo que dió como resultado este documento, por la amistad demostrada.

A los Franks por la comprensión y su solícita ayuda.

Al jurado, quienes con sus observaciones enriquecieron esta tesis.

A todos nuestros familiares y amigos.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.	1
1.1 MARCO HISTÓRICO.	1
1.2 APLICACIÓN DE LAS FIBRAS ÓPTICAS.	2
1.3 OBJETIVO.	4
1.4 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO DE LOS CAPÍTULOS.	5
2. LAS FIBRAS ÓPTICAS.	6
2.1 COMPORTAMIENTO DE LA LUZ.	6
2.1.1 ONDA ELECTROMAGNÉTICA.	6
2.1.2 PRINCIPIOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA.	11
2.2 PROPAGACIÓN DE LA LUZ DENTRO DE UNA FIBRA ÓPTICA.	14
3. SENSORES DE FIBRA ÓPTICA.	26
3.1 CATEGORÍAS Y TIPOS DE SENSORES.	26
3.1.1 SENSORES DE INTENSIDAD.	28
3.1.2 SENSORES DE FRECUENCIA.	29
3.1.3 SENSORES DE FASE (INTERFERÓMETROS).	31
3.1.3 SENSORES DE POLARIZACIÓN.	33
3.2 SENSORES REFRACTOMÉTRICOS DE INTENSIDAD.	34
3.2.1 ESQUEMA GENERAL.	34
3.2.2 TIPOS DE ELEMENTOS DE SENSIBILIDAD.	35
4. CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN DE UN SENSOR REFRACTOMÉTRICO DE INTENSIDAD.	37
4.1 MODELO DE UN SENSOR REFRACTOMÉTRICO DE INTENSIDAD.	37
4.1.1 DEFINICIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN.	37
4.1.2 ANÁLISIS Y SIMPLIFICACIÓN DEL MODELO DEL SENSOR CON ELEMENTO DE SENSIBILIDAD PRISMÁTICO.	38

4.1.3 ANÁLISIS GENERAL DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN.	42
4.1.4 CONSIDERACIONES PARA EL CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE ILUMINACIÓN	46
4.1.5 DEFINICIÓN DE LAS ZONAS DE SEPARACION DE LAS FIBRAS.	49
4.2 CÁLCULO DE LAS ÁREAS DE TRASLAPE.	55
4.2.1 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS Y PUNTOS PARA EL CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN.	55
4.2.2 CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN CON LOS PARÁMETROS DEL SENSOR.	58
4.2.2.1 ANÁLISIS PARA LA "ZONA CERCANA".	58
4.2.2.2 ANÁLISIS PARA LA "ZONA INTERMEDIA".	63
4.2.2.3 ANÁLISIS PARA LA "ZONA LEJANA".	67
4.2.3 CÁLCULO DE LOS FACTORES DE INTEGRACIÓN.	70
4.3 PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS DEL CÁLCULO ANALÍTICO.	88
4.4 PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS DE UN MÉTODO NUMÉRICO.	93
4.5 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS ENTRE EL CÁLCULO ANALÍTICO Y CÁLCULO NUMÉRICO.	94
5. CONCLUSIONES.	97
<hr/>	
6. BIBLIOGRAFÍA.	98
<hr/>	

1. INTRODUCCIÓN.

1.1 MARCO HISTÓRICO

Las fibras ópticas fueron diseñadas principalmente como medios de transmisión, sin embargo, en la actualidad esta situación ha cambiado, ya que desde hace algunos años se han desarrollado una serie de aplicaciones referentes a la medición, de variación de algunas cantidades físicas como, precisión, temperatura; es decir, se trata de la aplicación de las fibras ópticas como sensores.

En este capítulo no profundizaremos en referencia a esta aplicación, ya que el motivo principal es tener un marco histórico de referencia con respecto a las fibras ópticas, por lo cual, se muestra a continuación algunos de los importantes sucesos que dieron origen y desarrollo a las fibras ópticas [1-3].

330 A.C. El físico griego Demócrito consideraba que la luz consistía de un número de átomos infinitesimalmente pequeños.

120 D.C. Un griego de nombre Hero, escribió un libro acerca de espejos y las leyes de la reflexión, lo cual formó la base de los modelos de la óptica geométrica.

1621 El matemático holandés Snell, descubre la ley que gobierna el ángulo al cual la luz cambia su dirección al pasar de un medio transparente a otro de diferente densidad.

1659 El físico holandés Huygens, propone la teoría ondulatoria de la luz, que se emplea actualmente.

1666 Isaac Newton desarrolló la teoría corpuscular de la luz y también descubre la dispersión.

1870 John Tyndall demuestra durante una conferencia ante la sociedad Real Inglesa, que la luz es capaz de seguir a un medio transparente curvo.

1879 Rayleigh realiza estudios teóricos sobre las guías de onda.

1916 Hondros y Debye publicaron estudios teóricos sobre guías de ondas dieléctricas.

1920 Schiever realiza varios experimentos con guías de ondas dieléctricas.

1928 El físico de Broglie también realiza numerosos estudios acerca de la naturaleza de la luz.

1932 El físico Compton estudia la naturaleza de la luz y descubre el fotón.

1951 Van Heel, Hopkins y Kapany, desarrollan el fibroscopio flexible, con este invento se desarrolló la primera fibra óptica. Dispositivo muy empleado para la inspección dentro de reactores o las cámaras de combustión. También su utilización en el campo de la medicina es trascendental, ya que evita la cirugía para la exploración de muchos órganos internos.

1961 Se inventa el láser He-Ne en los laboratorios Bell y en ese mismo año, Snitzer desarrolla la teoría de modos de las guías de onda dieléctricas.

1965 Karbowiak realiza estudios de guías de onda ópticas con películas delgadas.

1966 Kao y Hockharm desarrolla las guías de onda dieléctricas para frecuencias ópticas. En realidad este es el primer reporte sobre comunicaciones ópticas en el cual ellos sugieren el empleo de fibras ópticas para la transmisión de información.

1967 Nishizawa y Sasaki, sugieren el empleo de fibras con índice gradual. Se reporta una atenuación de 1,000 dB / km.

1970 Kapson, Kerk y Mavren de la compañía Corning reportan en el verano de ese año, la fabricación de fibras con atenuación de 20 dB/km a una longitud de onda de 850nm.

1972 Corning Glass Works desarrolla una fibra con atenuación de 4 dB/km.

1974 Furukawa realiza la primera instalación empleando un cable de fibra óptica.

En los 80's y 90's se han desarrollado nuevas tecnologías en la fabricación de fibras ópticas que tengan atenuaciones mínimas y banda de paso máxima. Además las aplicaciones son vastas.

1.2 APLICACIÓN DE LAS FIBRAS ÓPTICAS.

Es notoria la variedad de aplicaciones de las fibras ópticas, desde la sustitución de los cables convencionales, (cables metálicos), hasta aplicaciones que abarcan los más extensos campos de la vida humana.

Los intensos trabajos a nivel internacional han permitido la reducción constante del costo en estos nuevos vehículos informativos, con lo que se abre la posibilidad a un creciente desarrollo en aplicaciones, donde hasta ahora la electrónica tenía limitantes. Sin embargo con la nueva modalidad de aunar la óptica y la microelectrónica el resultado permite grandes bondades en campos inaccesibles para el empleo de aplicaciones puramente electrónicas.

Seguramente la aplicación de la fibra óptica que goza de mayor popularidad es la referente a la transmisión de información, es decir, la utilización de la fibra óptica como canal o medio de transmisión, el cual puede ser desde el más sencillo, en el caso de una conexión entre dos

terminales de comunicación, hasta los complicados sistemas de redes de fibras ópticas que enlazan los continentes, con tendidos de cable submarino, a su vez, dentro del continente, están comunicados por subredes.

Las aplicaciones inmediatas en este campo permiten un desarrollo en la telefonía dando como resultado sistemas como telefax, teletexto, videotexto, videoteléfono, etc. [4].

La informática es la más favorecida de las aplicaciones con fibra óptica, de principio como medio de comunicación, y después, con la llegada de circuitos integrados en conjunción con la fibra óptica, haciendo de éste un gran sistema de comunicación.

La primera aplicación de la fibra óptica se desarrolló para la inspección de reactores o de cámaras de combustión en motores o turbinas a este se le llamo *fibroscopio* que más adelante dio origen al endoscopio utilizado también en medicina para la observación de órganos internos y con esto evitar la intervención quirúrgica, aunado a éste, una variante del endoscopio permite canalizar un haz de láser capaz de cauterizar secciones lesionadas, con el cual se evitan hemorragias producto de la intervención.

Existen modelos industriales de láser guiado por fibra óptica que permiten ranurar, perforar o cortar materiales como acero, lámina, etc. pudiéndose realizar con estos instrumentos cortes extremadamente precisos.

La fibra óptica ha sido utilizada recientemente en satélites, Aeronáutica y en general en instrumentos de vuelo, orientación y comunicación con tierra.

En los primeros sistemas de este tipo realizados hace unos 15 años el sistema eléctrico era desarrollado con base a conductores de alta conductividad; los que van realizándose actualmente, utilizan las fibras ópticas como elemento conductor, debido a las ventajas que ofrece dada su insensibilidad a las perturbaciones atmosféricas [4].

LA FIBRA ÓPTICA COMO UN SENSOR

La aplicación a la que se referirá este texto, es la concerniente a la utilización de la fibra óptica como *sensor* o *transductor de influencia externa*, que tiene como principio, la exposición de una zona de la fibra a un medio externo; el cual altera alguna de sus características físicas, a fin de que la información transmitida a través de la *zona de exposición* sea alterada o "modulada" por dicha influencia externa, es decir, que en gran medida el parámetro que se alteró en el material de exposición pueda alterar alguna o varias de las características de la luz introducida en dicha zona de exposición.

La "modulación" que sufra la luz, en esa zona específica de exposición, llevará información propia del fenómeno que lo provocó, y la interpretación de estos cambios en la o las características de la luz arrojarán una medida del grado de influencia en la zona de exposición.

Son extensas las aplicaciones de los sensores de fibras ópticas en todas las áreas de desarrollo, como, químico, bioquímico, biológico, médico, etc. siendo su principal y más recurrente empleo, en las aplicaciones donde las tecnologías convencionales no proveen de confiabilidad y seguridad operativa, o donde las tecnologías convencionales son consideradas de alto riesgo; Así como por las virtudes del empleo de fibra óptica, en un sistema basado en este medio que

es inmune a perturbaciones electromagnéticas, insensible a cambios de temperatura, larga duración, bajas pérdidas, etc. (excepto, por supuesto, en la zona de exposición) [5].

La figura 1.1 ilustra un sensor de nivel de líquido, en este caso se indica una fuente de luz que introduce un haz luminoso continuo, en la fibra óptica, que ofrece, a dicho haz luminoso, la trayectoria por donde ha de circular; desde la fuente, en un extremo, hasta el detector, en el otro extremo.

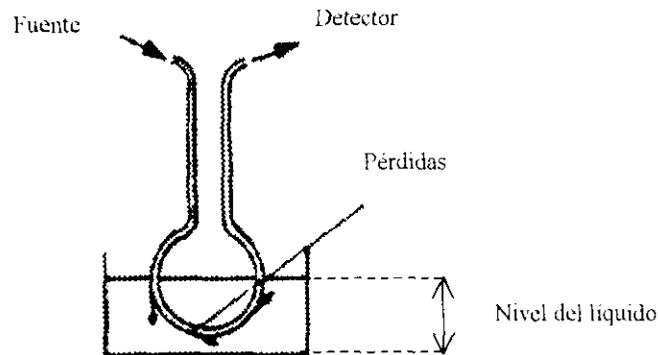


Figura 1.1 Sensor de nivel de líquido, basado en fibra óptica [5].

La detección del nivel del líquido quedara en función de las pérdidas que se presenten, ya que ha determinado nivel de líquido corresponderá cierta intensidad del haz que circula por la fibra óptica. Las pérdidas se presentan al poner en contacto la fibra con el líquido, para la zona de fibra sumergida en el líquido, propaga cierta cantidad de luz dentro del agua, es decir, el haz sale o se fuga de la fibra. El caso de la fibra que se encuentra sobre el nivel del líquido, la luz que viaja en su interior es totalmente conducida sin pérdidas. Esto indica que cuanto mayor este sumergida la fibra en el líquido se presentaran mayores pérdidas [5].

1.3 OBJETIVO:

La importancia de la basta aplicación y el interes como posible alternativa, como medio de transducción de los sensores de fibra óptica, son los motivos del estudio que se realizará en este trabajo, y su razón girará en torno de comparar los resultados del cálculo del coeficiente de transmisión por medio de dos métodos, el primer método será analítico, es decir, se obtendrá resultados "exactos"; el segundo método esta basado en una aproximación numérica y se presupene que los resultados serán aproximados, con esta comparación del coeficiente de transmisión obtenido por dos metodos, para uno de los casos mas sencillos, se podrá concluir que tan bueno es la utilización de resultados numéricos para sensores de fibra óptica con características mas complejas.

1.4 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO DE LOS CAPÍTULOS

Para comprender el procedimiento para el cálculo del coeficiente de transmisión, por el método analítico, es necesario entender la forma en la que la luz se comporta en un medio como la fibra óptica, por lo cual en el capítulo 2 se presentarán el comportamiento de la luz y se utilizará la aproximación que nos ofrece la óptica geométrica y con ello presentar la forma en que se propaga la luz en la fibra óptica. Una clasificación de las fibras ópticas es expuesta, destacando en cada caso sus cualidades y deficiencias.

En el capítulo 3 se expondrán las características básicas de un sensor, y atendiendo a una clasificación de los sensores en base al parámetro de la luz que se puede modular en la zona de exposición de la fibra óptica, se identificarán características específicas de su funcionamiento, también se presentará un ejemplo de la aplicación de cada uno de los tipos de sensores de la clasificación que se presentará previamente.

La descripción del método, que se seguirá para calcular el coeficiente de transmisión, de un tipo específico de sensor, se observará en el capítulo 4, también se presentan los resultados del modelado matemático en comparación con algunos resultados numéricos obtenidos por medio de un programa, así como gráficos comparativos de los dos métodos antes señalados.

En el capítulo 5 se concluye y se hacen breves comentarios sobre los resultados encontrados en el capítulo 4.

2. LAS FIBRAS ÓPTICAS

2.1 COMPORTAMIENTO DE LA LUZ

La luz es la energía electromagnética que emiten los cuerpos cuando se excitan sus átomos, o la que emiten determinados dispositivos electrónicos, se llama energía radiante y ha sido interpretada de muy diversas formas, pero fundamentalmente como ondas (y como corpusculo), es decir, cuando en un espacio en el que está definida una variable física (como campo eléctrico, etc) se produce una modificación de dicha variable en un punto, puede ocurrir que esta perturbación se propague a otros puntos y en ellos se produzca en forma análoga a como sucedió en el punto inicial, en cuyo caso diremos que la perturbación se mueve, a lo cual se le conoce como *movimiento ondulatorio* [3, 7].

2.1.1 ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Una representación matemática de una perturbación electromagnética sinusoidal está dada por la siguiente ecuación del campo eléctrico (y campo magnético).

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_o \cos(\omega t - kz) \\ H_y &= H_o \cos(\omega t - kz) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Donde:

E_o es la amplitud máxima que puede tomar el campo eléctrico E_x .

H_o es la amplitud máxima que toma el campo magnético H_y .

t es la variable de tiempo.

ω es la frecuencia angular; la relación que guarda con el periodo, T , es: $\omega = 2\pi / T$.

k en función de la longitud de onda λ es constante de fase: $k = 2\pi / \lambda$.

z es la dirección de propagación de la onda.

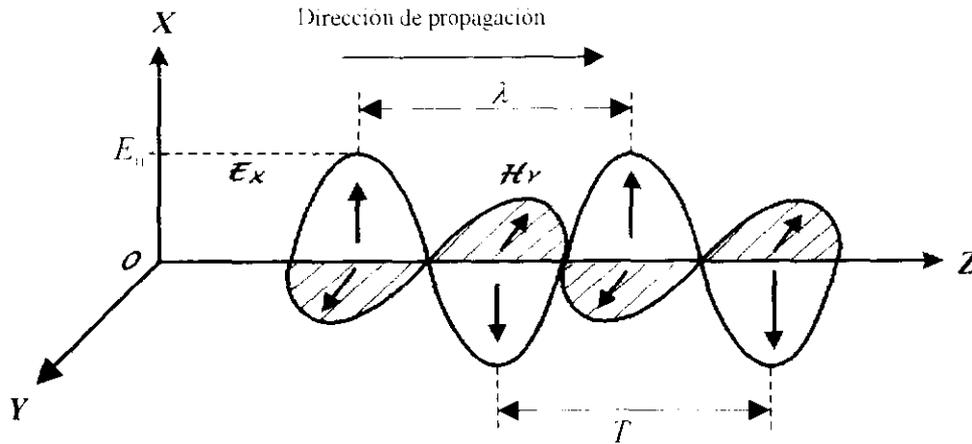


Figura 2.1 Representa una onda electromagnética que se propaga en la dirección z .

En general el lugar geométrico de los puntos del espacio afectados por la perturbación para los cuales en un instante dado la variable perturbada toma el mismo valor se llama *frente de onda*. En el caso de la onda descrita, cualquier plano normal a la dirección de propagación se puede definir como frente de onda.

INTENSIDAD DE ONDA

La intensidad de una onda esta definida como el flujo de energía que atraviesa una unidad de arrea normal a la dirección de propagación por unidad de tiempo. Su expresión es la siguiente:

$$I = v\epsilon(E_0)^2 \quad (2.2)$$

De donde se puede observar que la intensidad I es proporcional al cuadrado de la amplitud E_0 de la onda (figura 2.1). $v\epsilon$ es una constante dependiente del medio de propagación, donde v es la velocidad de la onda en el medio y ϵ es la permitividad del medio.

FRECUENCIA Y LONGITUD DE ONDA

Estos dos parámetros relacionados entre sí, ordenan espacial y temporalmente la señal.

El parámetro espacial, longitud de onda, λ , indica que la propagación es espacialmente periódica; (figura 2.1) la frecuencia, f , es el parámetro encargado de indicar la periodicidad temporal.

$$f = \frac{v}{\lambda}, \quad (2.3)$$

Donde: v , es la velocidad de propagación de la luz en un medio.

FASE DE LA SEÑAL

El termino fase se utiliza en sistemas periódicos, la fase de una señal está dada por el argumento de una función, que representa el fenómeno periódico, en el caso de la ecuación que representa el campo eléctrico. (expresión (2.1)).

$$E_x = E_o \cos(\omega t - kz)$$

Donde: $\phi = (\omega t - kz)$ se le llama fase y varia con respecto al tiempo y la posición.

POLARIZACIÓN

Si tomamos los ejes cartesianos Ox , Oy , y Oz ; Un caso particular de la ecuación de movimiento ondulatorio es la expresión (2.1).

$$E_x = E_o \cos(\omega t - kz)$$

$$H_y = H_o \cos(\omega t - kz)$$

E_x representa el campo eléctrico que oscila sinusoidalmente en el plano XZ y H_y representa el campo magnético que oscila sinusoidalmente en el plano YZ por lo cual es ortogonal al campo eléctrico y se encuentra en fase dado que la fase de E_x es igual a la de H_y para cada instante y cada posición.

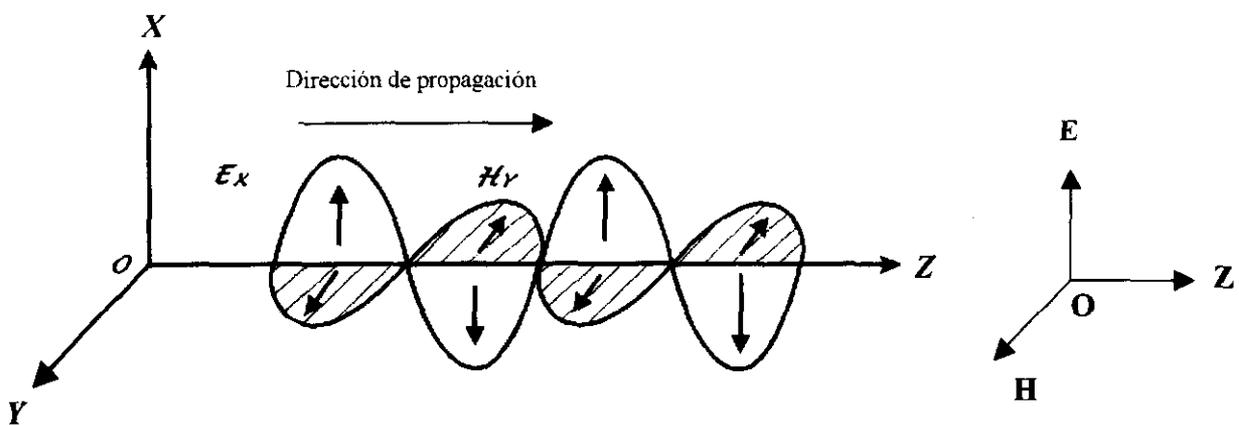


Figura 2.2 Campo Electromagnético.

El plano EZ se llama plano de vibración y el plano HZ plano de polarización. Si suponemos un conjunto de ondas electromagnéticas planas que se propagan en la misma dirección con sus vectores eléctricos orientados al azar; debido a la propagación de las ondas, en cada punto del espacio se superpondrán los vectores eléctricos dando un vector resultante variable en el

tiempo y la posición. Si en cada punto del espacio el extremo del vector resultante describe con el tiempo, una recta en un plano normal a la dirección de propagación, tendremos "luz polarizada linealmente", si describe una elipse tenemos "luz polarizada elíptica" y si describe una circunferencia, tendremos *luz polarizada circular*.

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN

Hemos considerado que la luz se propaga a una velocidad constante, y esto ocurre cuando la luz se mantiene en un medio que no cambia sus características, sin embargo cuando en su trayectoria, la luz cambia de medio experimenta cambios en su dirección y en su velocidad. La velocidad de la onda luminosa esta relacionada con las características del medio, en el cual la onda se propaga vía la relación:

$$v = \frac{l}{\epsilon\mu} = \frac{l}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0} = \frac{c}{\epsilon_r \mu_r} \quad (2.4)$$

Donde: ϵ es la permitividad eléctrica del medio y μ es la permeabilidad, ϵ_r y μ_r son factores de permitividad y permeabilidad relativos del medio, ϵ_0 y μ_0 son características del espacio libre, c es la velocidad de la onda en el vacío.

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}; \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (2.5)$$

Para muchos medios ópticos se tiene $\epsilon_r > 1$ y $\mu_r \approx 1$ que corresponden a materiales dieléctricos y son aisladores eléctricos. Por lo cual tenemos:

$$v \approx \frac{c}{\epsilon_r} \quad (2.6)$$

Y como $v < c$, la relación entre la velocidad de la luz en un medio y la velocidad en el vacío lo definimos como el índice de refracción "n" del medio.

$$n = \frac{c}{v} \approx \sqrt{\epsilon_r} \quad (2.7)$$

CARACTERÍSTICAS ESPECTRALES

En general se llama espectro de una radiación al conjunto de las frecuencias que contiene. Como la frecuencia tiene una relación inversa respecto de la longitud de onda, en base a ambos parámetros se puede definir el *espectro electromagnético*, (figura 2.3).

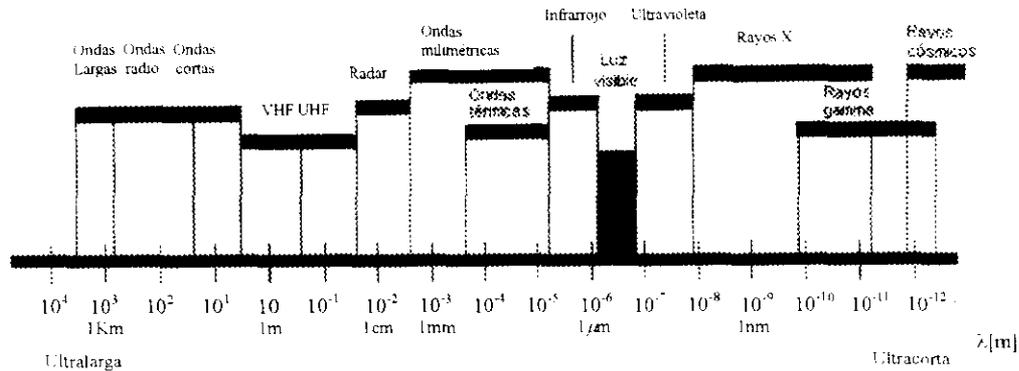


Figura 2.3 Espectro electromagnético [4].

Cuando todas las ondas que componen una radiación de luz tienen la misma frecuencia la luz se llama monocromática [4].

DIVERGENCIA DE LA LUZ

La energía emitida por una fuente luminosa, sufre alteraciones al propagarse en un medio, tomando como modelo la figura 2.4, es posible notar una característica de la luz, llamada *divergencia de la luz*, este hecho se puede observar, considerando que, un orificio circular en la pantalla con un diámetro pequeño, por donde circula cierta cantidad de energía. Si proyectamos el flujo de energía que atraviesa la pantalla en un plano k perpendicular a la pantalla, observamos una zona iluminada en forma circular pero incrementada en tamaño en comparación con el orificio de la pantalla. Conforme se incrementa la distancia entre la pantalla y el plano la diferencia entre la zona iluminada y orificio de la pantalla es creciente [7].

La emisión que circula a través del orificio, la representaremos con una cantidad de rayos luminosos m , y atendiendo a lo antes observado sobre el plano haremos una analogía en figura 2.5.

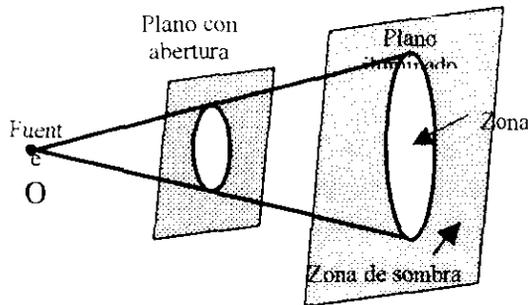


Figura 2.4 Proyección de la luz, que atraviesa una abertura circular, sobre un plano [7].

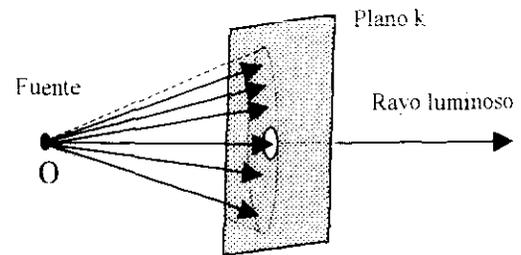


Figura 2.5 Rayo que atraviesa una abertura circular con diámetro tendiendo a cero [7].

De la figura 2.5, podemos observar que los “m” rayos que atraviesan la pantalla divergen entre ellos conforme se alejan del orificio, a esta característica que presenta la luz se le llama *divergencia de la luz*.

RAYO LUMINOSO

Las trayectorias de la energía radiante en su propagación constituyen los rayos de luz. Geométricamente, si un punto emisor, O, (figura 2.4), lo ponemos ante una pantalla opaca con un orificio, el punto O y el orificio determina un cono lleno de luz que recibe el nombre de haz. Si hacemos que el diámetro del orificio tienda a cero, (figura 2.5), llegamos a una abstracción del haz sin realidad física; esta abstracción ideal constituye el rayo de luz. Para la óptica geométrica el haz es considerado como un tubo de luz por el que se conduce un flujo energético, como el conjunto de todos sus rayos definidos por el punto emisor y cada uno de los puntos del orificio o de un elemento de superficie que atraviesen.

2.1.2. PRINCIPIOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA.

La óptica geométrica se ocupa solamente de cuestiones relacionadas con la propagación de la luz. Su problema fundamental es determinar las trayectorias de la energía radiante a través de distintos medios materiales, o disponer los medios de modo que la propagación se ajuste a trayectorias prefijadas.

El uso de la óptica geométrica es correctamente aplicado en el caso, cuando las dimensiones de las guías de luz son mucho mayores que la longitud de la onda de la luz.

En primer lugar, la propagación de la luz en una fibra óptica multimodo puede analizarse mediante el empleo de las leyes de la óptica geométrica. Esta aproximación permite definir simplemente unas características importantes de la fibra óptica. Su apertura numérica, dispersión intermodal, etc.

Si se requiere entender rigurosamente el mecanismo de propagación en el interior de la fibra, hay que recurrir a la resolución de las ecuaciones del campo electromagnético; es decir las ecuaciones de Maxwell.

REFLEXIÓN

La energía radiante se propaga en el vacío a una velocidad constante. La velocidad en los medios materiales, v , varía con la constitución de estos, y cada medio viene caracterizado por su índice de refracción, n , que se define como el cociente de la velocidad de la luz en el vacío a la que lleva en dicho medio, es decir: $n = c / v$.

La luz puede transmitirse, reflejándose (o refractándose) en la superficie de separación que existe, entre dos medios diferentes (aire, vidrio, plásticos, etc.), es decir la dirección inicial sufre una desviación.

Se produce la reflexión cuando la luz que se propaga en un medio encuentra una superficie de separación con otro medio y vuelve por el medio inicial de propagación. El ángulo que forma el haz incidente, (θ_i), es igual al ángulo del haz reflejado (θ_r) y se miden con respecto a la perpendicular a la superficie de separación, (figura 2.6), también llamada, superficie refractora (en el punto de incidencia), y mantiene su velocidad constante.

Ley de la reflexión.

$$\theta_i = \theta_r \quad (2.8)$$

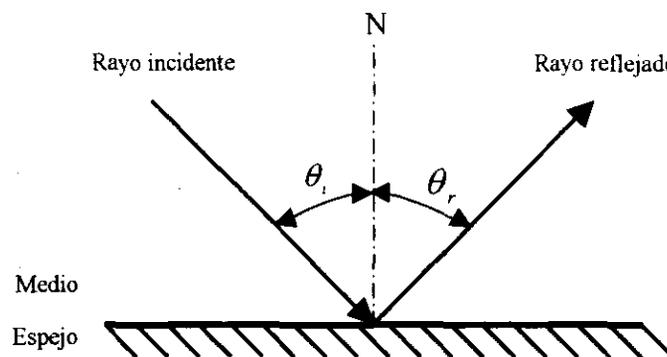


Figura 2.6 Reflexión de la luz.

REFRACCIÓN

Se trata de la desviación que experimenta un rayo de luz cuando pasa de un medio a otro de distinto índice de refracción, como consecuencia el rayo en el segundo medio cambia su velocidad, (expresión (2.5)). La desviación de la trayectoria inicial del rayo constituye una función tanto de la relación que existe entre las velocidades de propagación en los medios en los que se produce, como de la inclinación con respecto a la superficie de separación del rayo incidente (figura 2.7). Se le da el nombre de ángulo incidente y refractado al ángulo formado por el rayo incidente y el refractado respectivamente, se miden a partir de la normal a la superficie del medio refractivo. La relación entre el seno del ángulo de incidencia, θ_1 , y el seno, del ángulo de refracción, θ_2 , con respecto a los índices de refracción de los medios n_1 y n_2 se le llama ley de la refracción de la luz (ley de Snell):

$$n_2 \text{sen}(\theta_2) = n_1 \text{sen}(\theta_1) \quad (2.9)$$

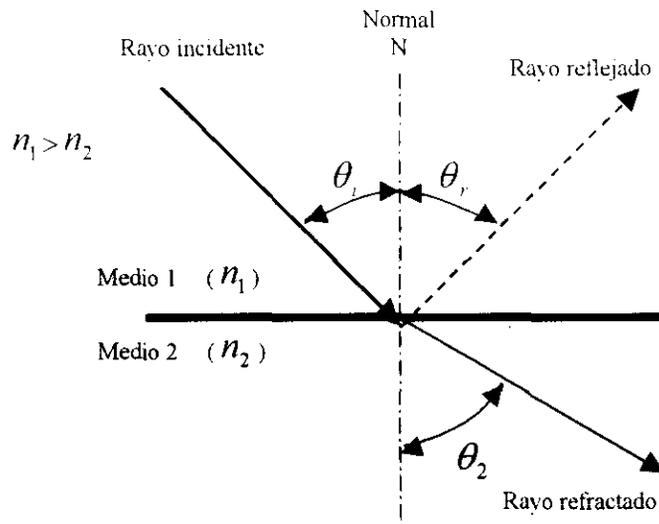


Figura 2.7 Representación de la ley de la refracción de la luz.

ÁNGULO CRÍTICO Y REFLEXIÓN TOTAL INTERNA

Como vimos a cada rayo corresponde un ángulo de incidencia, un ángulo de refracción y ángulo de reflexión, el cual varía en función del salto de índice, que no es otra cosa que la diferencia de índices entre dos medios. crítico

Al aumentar el ángulo de incidencia hasta un valor crítico, θ_{ic} , el rayo ya no atraviesa la superficie separadora, refractándose en el interior del medio 2, sino que se refleja totalmente en la superficie, quedando confinado en el medio 1, este fenómeno también es conocido como reflexión total interna. Para el ángulo crítico y mayores se presenta este fenómeno.

La expresión para calcular el ángulo crítico, θ_{ic} , es:

$$\text{sen}(\theta_{ic}) = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.10)$$

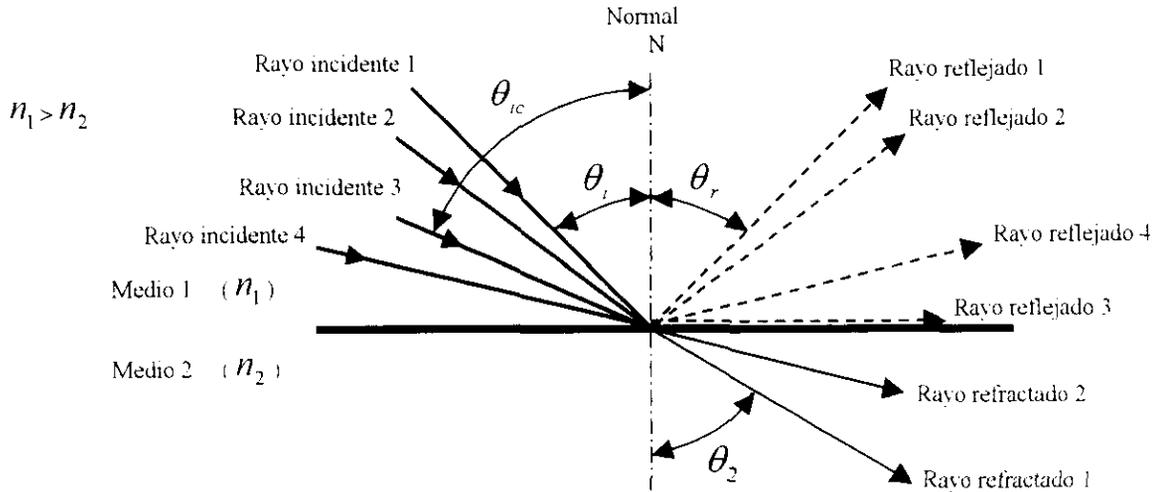


Figura 2.8 Reflexión total interna.

2.2 PROPAGACIÓN DE LA LUZ DENTRO DE UNA FIBRA ÓPTICA.

La fibra óptica por la que ha de circular la luz debe ser extremadamente luminosa, de tal transparencia que, en comparación, los materiales utilizados en ventanas puedan ser calificados de opacos. Los materiales deben ser de extrema finura para evitar problemas de atenuación.

Para entender la forma en que las fibras ópticas de materiales transparentes consiguen guiar la luz, recurriremos a los principios de refracción, reflexión, ángulo crítico y reflexión total interna.

2.2.1. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO

Una fibra óptica típica está constituida, principalmente por dos capas de material, en su mayoría, sílice, cuarzo, silicón, etc. dependiendo del tipo de aplicación; cada capa tiene distinto índice de refracción. El núcleo tiene un índice más elevado que el revestimiento, y a causa de esta diferencia la luz se mantiene dentro de la fibra reflejándose y propagándose en el núcleo, lo que constituye el principio de reflexión total interna. Figura 2.9.

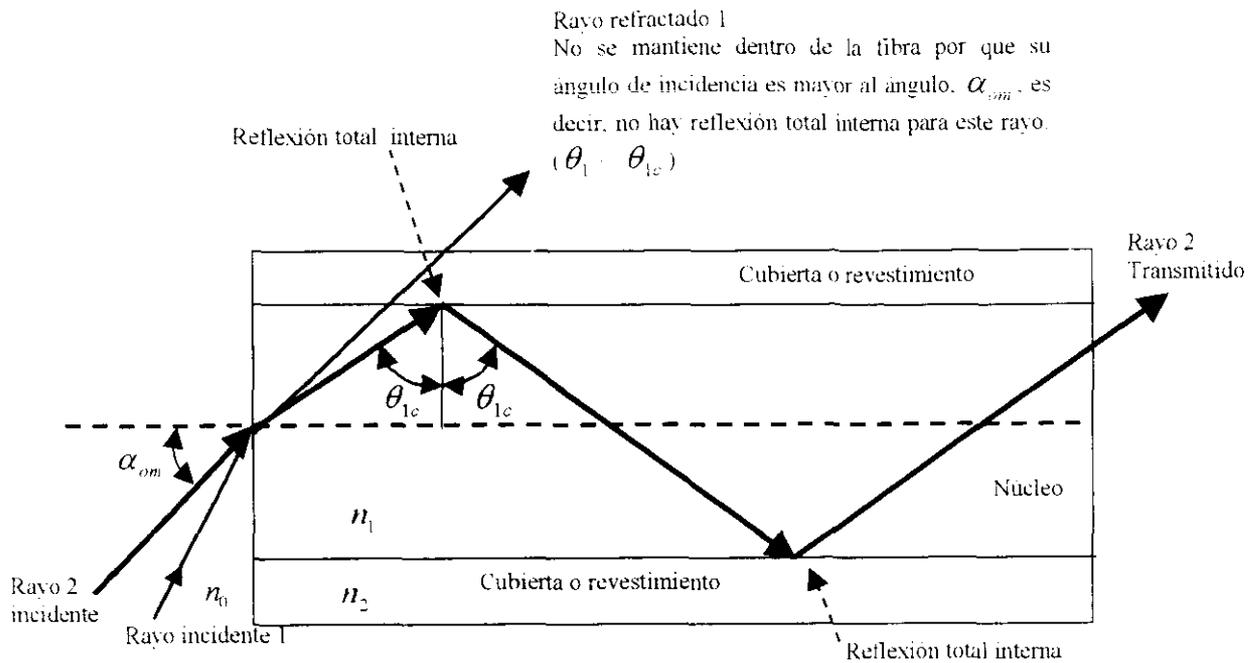


Figura 2.9 Reflexión Total Interna en una Fibra Óptica.

2.2.2. ÁNGULO DE ACEPTACIÓN O CONO DE ADMISIÓN Y APERTURA NUMÉRICA

La luz puede entrar y ser transmitida por la fibra si esta se mantiene dentro de un cierto ángulo o cono de admisión, (figura 2.10), es decir, si consideramos la superficie de admisión como superficie de separación, y recordamos el principio o fenómeno de reflexión total, en el cual más allá de un cierto ángulo crítico se produce una reflexión total, los rayos que incidan a la superficie de admisión tendrán oportunidad de propagarse, solo si su ángulo de incidencia, α_o , es menor que el ángulo crítico, con esto no queda garantizado que los rayos de luz queden confinados dentro de la fibra, es necesario que el ángulo, θ_{1c} , que forma el rayo en su primer reflexión dentro de la fibra produzca una reflexión total esto en el límite del núcleo y el revestimiento de la fibra óptica.

Finalmente el ángulo máximo de admisión, α_{om} , es función de los índices de reflexión, del núcleo, n_1 , de la cubierta, n_2 , y del medio externo, n_o , la expresión para calcular es:

$$\text{sen}(\alpha_{om}) = \frac{1}{n_o} \sqrt{(n_1)^2 - (n_2)^2} \tag{2.11}$$

Este importante ángulo, α_{om} , determina la capacidad de la fibra para propagar la luz. Por analogía con los instrumentos de óptica, se define un parámetro llamado apertura numérica de la fibra:

$$A.N. = n_1 \text{sen}(\alpha_{om}) = \sqrt{(n_1)^2 - (n_2)^2} \quad (2.12)$$

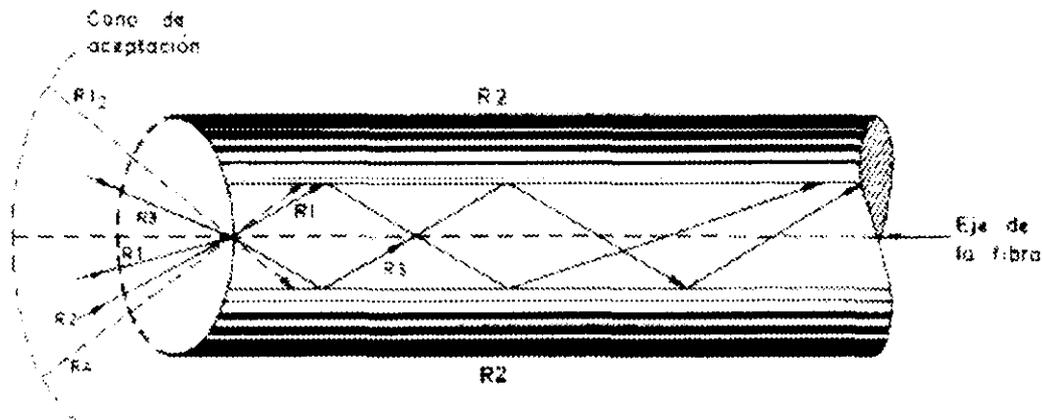


Figura 2.10 Cono de admisión de una fibra óptica.

Todo rayo de luz que entra con un ángulo α_i inferior a α_{om} se propaga dentro del núcleo de la fibra.

2.2.3. PERFIL DE ÍNDICE.

Como sabemos el índice de refracción es una medida de la oposición de un material a que circule a través de él, un haz luminoso, existe una caracterización de los materiales en base a la velocidad y dirección de propagación, por consiguiente también esta en función del índice de refracción; Es decir si el índice de refracción no varía en todos los puntos y en todas direcciones, el medio se llama homogéneo e isótropo; si varía en cada punto con la dirección de propagación se denomina anisotrópico; y si el índice y por tanto la velocidad varía de unos puntos a otros, pero en cada uno de ellos es independiente de la dirección el medio se llama heterogéneo y también medio GRIN, (Gradiente de índice).

El perfil de índice es la variación del índice de refracción en el diámetro de una sección de guía óptica, y la forma en la que varía da origen a las formas de las trayectorias de la luz, así como sus características de transmisión, (ancho de banda), el índice de refracción es función del radio, $n(r)$.

En base a la distribución del índice en las fibras podemos catalogarlos en dos grandes grupos, el primero, las fibras de índice escalonado, y el segundo, las fibras de índice gradual.

ÍNDICE ESCALONADO.

Las fibras de índice escalonado están, (figura 2.11), constituidas por un núcleo con un elevado índice refractor, n_1 , y una capa envolvente con reducido índice de refracción, n_2 , lo que determina una transferencia brusca en la entre ambas partes.

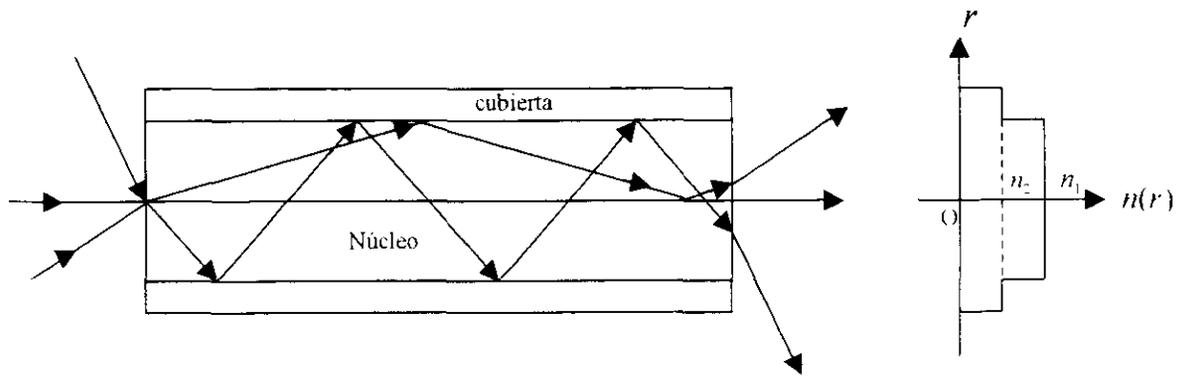


Figura 2.11 Fibra óptica de Índice Escalonado.

ÍNDICE GRADUAL.

En las fibras ópticas de índice gradual, el índice de refracción varía en sentido progresivo a partir de un elevado valor en el centro del núcleo hasta un bajo valor en el recubrimiento. Por lo cual, los haces luminosos sufren una modificación en su trayectoria, volviendo hacia el centro antes de chocar con la envolvente, debido a que la velocidad de la luz es menor en el centro mientras que aumenta conforme se aleja de él. El perfil del índice en este tipo de fibra es de forma parabólica; como se muestra en la figura 2.12.

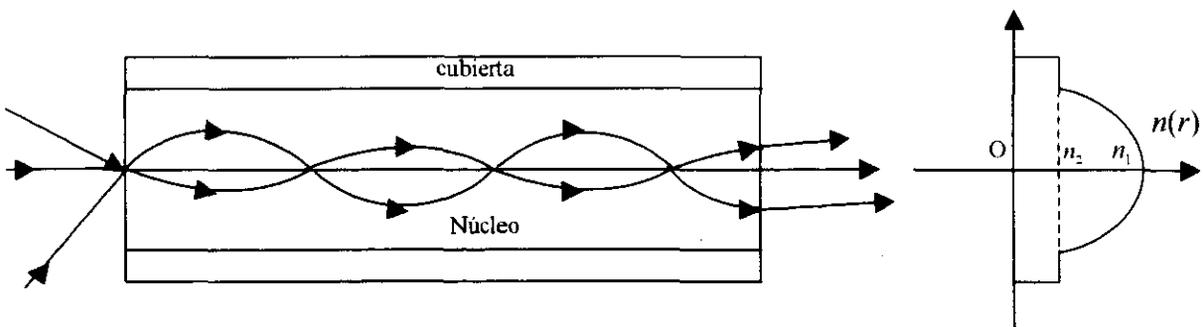


Figura 2.12 Fibra óptica de Índice Gradual. Descripción de la forma en que se propagan los rayos dentro de la fibra, así como, un esquema referente a su perfil de índice.

2.2.4. DISPERSIÓN TEMPORAL EN LAS FIBRAS ÓPTICAS

Los rayos insertados en una fibra disponen de cierto grado de libertad en su propagación en su camino hacia el extremo receptor. Es posible, que sigan diferentes caminos o diferentes modos (como se ve en la figura 2.11), por otra parte, la velocidad en cada punto, y en consecuencia el índice de refracción, depende de la longitud de onda; se producirán ensanchamientos temporales de los impulsos cuyo efecto es acumulativo con la distancia.

Este parámetro define la capacidad máxima de información que se puede transmitir por una fibra, por lo que puede medirse en términos de dispersión temporal o de la máxima frecuencia pasante que admite.

El termino dispersión es usado para describir el efecto de ensanchamiento del pulso por la fibra. En la figura 2.13, se muestra que el pulso que aparece en la salida de la fibra es más ancho que el pulso de entrada.

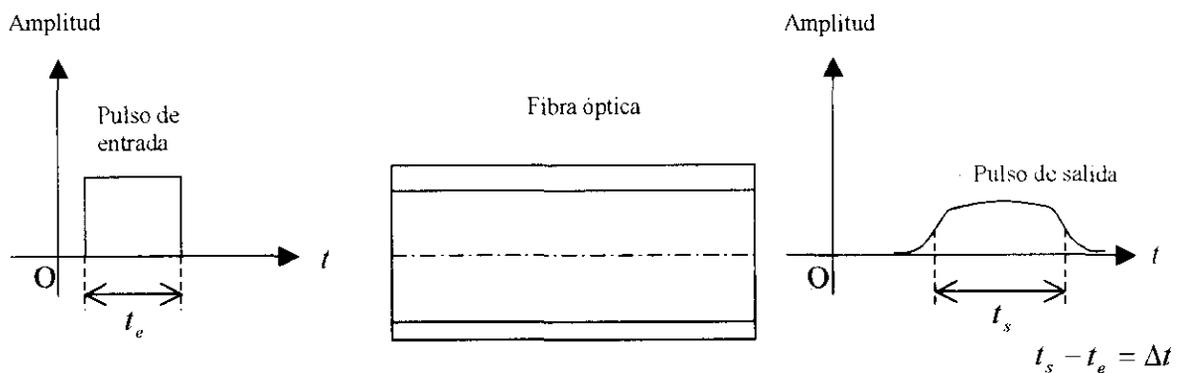


Figura 2.13 Dispersión de un pulso.

La dispersión es un efecto de varios fenómenos de propagación que aquí no veremos. Podemos dividir en dos grandes categorías: dispersión intermodal y dispersión cromática.

DISPERSIÓN INTERMODAL O MODAL

Este tipo de dispersión, (dispersión modal, Δt_m), resulta del hecho que la onda se propaga en diferentes modos o diferentes caminos dentro de la fibra, es decir, es causada por la diferencia en los tiempos de propagación de los diferentes modos.

Para entender este tipo de dispersión consideremos dos modos de propagación, (figura 2.14), extremos entre si, el primero aquel que se propaga por el eje de la fibra o modo cero.

El segundo, el modo crítico de propagación, en el ángulo crítico. Un pulso de luz lanzado dentro de la fibra propagara a ambos modos, de lo cual las trayectorias de los modos estudiados se observa en la figura siguiente.

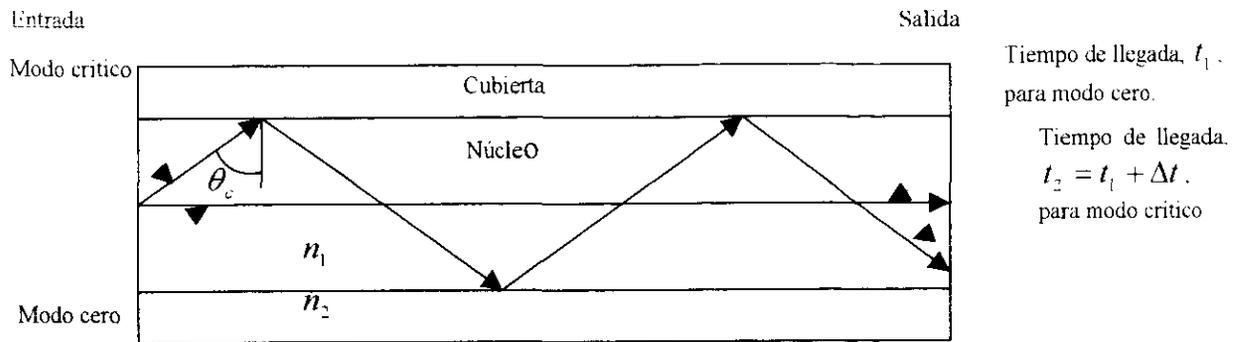


Figura 2.14 Comparación de trayectorias entre el modo crítico y el modo cero.

Para el modo cero el tiempo de viaje de la fibra será mínimo.

Para el modo crítico, el tiempo de viaje será máximo y por consiguiente existirá un retardo o una diferencia entre el modo cero de propagación y el modo crítico. Lo que da lugar a un ensanchamiento del pulso. A este efecto se le da el nombre de dispersión intermodal o dispersión temporal.

Ahora bien, los efectos de este fenómeno ocasionan limitaciones en la fibra, dado que es necesario ampliar el tiempo entre pulso y pulso para evitar combinaciones a la salida, debido al ensanchamiento de los pulsos, (figura 2.15). El efecto funcional es la limitación en la banda de paso.

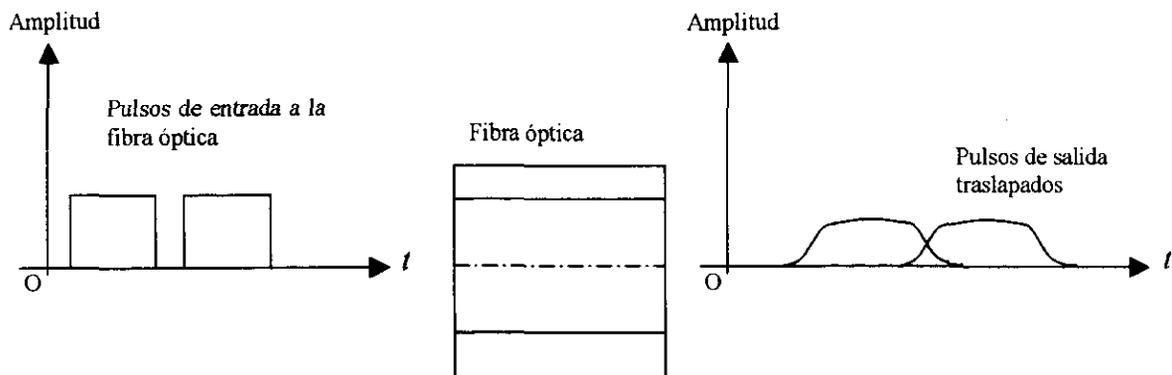


Figura 2.15 Pulsos traslapados.

DISPERSIÓN CROMÁTICA

La dispersión Cromática, es un resultado directo del hecho que la luz en la fibra consiste de un grupo de frecuencias. Las fuentes de la luz nunca son monocromáticas. La luz emitida por estas fuentes esta constituida por la suma de ondas de diversas longitudes.

La suma de los factores producidos por la dispersión espectral y la dispersión por efecto de guía de onda, da como resultado la dispersión cromática:

$$\Delta t_c = \Delta t_e + \Delta t_g \quad (2.13)$$

El índice de refracción del material que forma a la fibra varia con la longitud de onda, lo que da por resultado una velocidad de propagación diferente para cada longitud de onda. Si se inyecta luz de diferentes longitudes de onda en una dirección dada, esta luz se propaga a diferentes velocidades, según sea la longitud de onda, y si se descompone en función del tiempo, da como resultado un retardo entre las diferentes longitudes de onda en el extremo de la fibra, aun cuando se hayan inyectado en el mismo instante. A esta dispersión se le llama "dispersión espectral, (Δt_e), o dispersión material".

La dispersión por efecto de guía de onda, (Δt_g), nace del hecho de que correspondiendo a cada longitud de onda un índice de refracción diferente, el ángulo que forma la trayectoria asociada a ellas será distinto, y también los caminos recorridos por esta componente espectral.

La expresión general para calcular los efectos totales de la dispersión:

$$\Delta t_T = \sqrt{(\Delta t_m)^2 + (\Delta t_c)^2} = \sqrt{(\Delta t_m)^2 + (\Delta t_e + \Delta t_g)^2} \quad (2.14)$$

PÉRDIDAS O ATENUACIÓN.

Hasta este momento hemos supuesto que independiente de la fibra utilizada, se daban condiciones de propagación, de los rayos en el interior de la fibra óptica, que no involucraban pérdidas, sin embargo esta condición no se lleva presenta en la practica, de modo que las características con que originalmente se trasmitió la señal no se ajustan a las obtenidas en el extremo receptor de la fibra óptica.

La relación que guarden, la potencia óptica de salida, (P_s) respecto de la potencia óptica de la entrada, (P_e), expresada en decibeles y calculada para determinada longitud de onda, (λ), se define como las pérdidas o atenuación que sufre una señal al viajar en el interior de la fibra óptica; la forma de calcular este parámetro es:

$$A(\lambda)[dB] = 10 \log \frac{P_s}{P_e} \quad (2.15)$$

Son diversos los mecanismos que contribuyen a la pérdida de energía o a ciertos niveles de atenuación, algunos efectos se enuncian a continuación.

Las pérdidas por efecto Rayleigh: son las de mayor influencia para las longitudes de onda comprendidas entre 400 y 1100 nm .

Pérdidas por materiales: Absorción por el material, esto incluye absorción causada por la interacción de la luz con la estructura molecular del material; así como pérdidas por las impurezas del material.

Las pérdidas causada por la estructura atómica del material: son relativamente pequeñas y se pueden reducir utilizando mejores procesos de manufacturación. La mayor pérdida es causada por iones de hidrogeno. Estos no pueden ser reducidos suficiente, lo que ocasiona pérdidas en bandas particulares de longitud de onda. La peor pérdida, ocurre cerca de $\lambda = 1.4 \mu m$, para una concentración de impurezas de 1ppm.

Estos tipos de pérdidas alcanzan el punto culminante a longitudes de onda de 0.93, 1.25 y 1.40 μm .

Pérdidas por curvas en la fibra: se origina atenuación por efecto de que la interfaz núcleo-revestimiento deja de ser

Geoméricamente uniforme, es decir, la luz se refleja en algunos puntos con ángulos diferentes de los iniciales, en los que deja de presentarse el principio de reflexión total y, en consecuencia, se produce una fuga hacia el revestimiento.

Pérdidas por microcurvaturas: Los defectos que provocan las llamadas pérdidas por microcurvaturas son las irregularidades entre el núcleo y el revestimiento, las fluctuaciones de diámetro y, fundamentalmente, las variaciones del eje de la fibra, (error de concentricidad).

En la figura 2.16, se observa una zona por de bajo de 800 nm , que no conviene utilizar por ser de alta atenuación; la zona por encima de 1600 nm que presenta atenuación y la tecnología de emisores y detectores para estas longitudes de onda es muy reciente.

Existen tres zonas de mínima atenuación, denominadas ventanas, que determinan las longitudes de onda habituales para trabajar. Los primeros sistemas trabajaron en la primera ventana (850 nm). La zona de trabajo que actualmente se utiliza es la segunda ventana (en torno de 1300 nm). La tendencia es utilizar la tercera ventana (1550 nm) [9, 10].

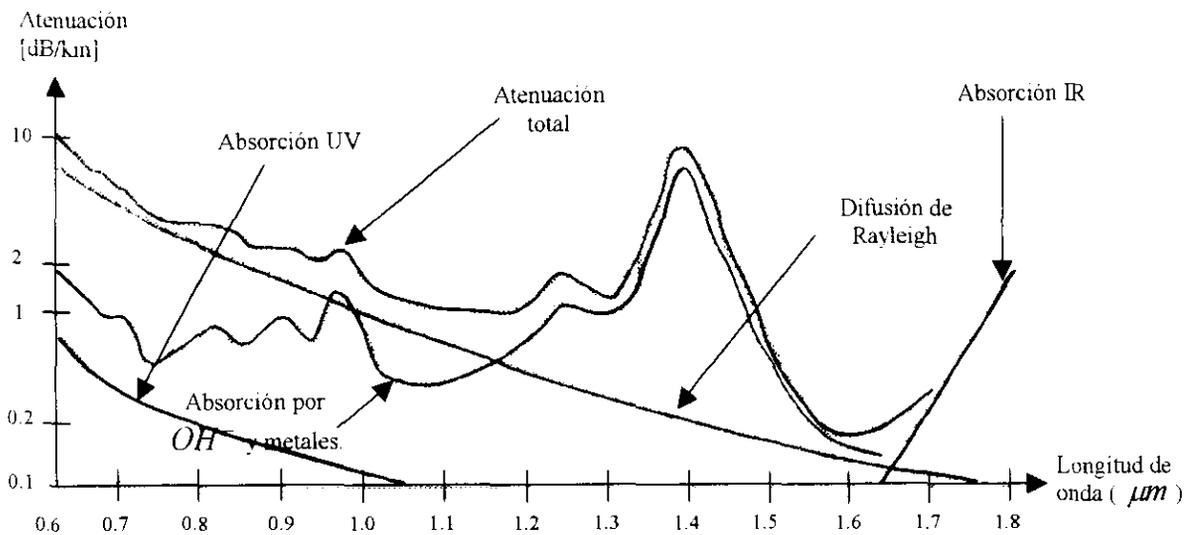


Figura 2.16 Zonas de atenuación [9].

2.2.4 TIPOS DE FIBRA ÓPTICA.

Fundamentalmente podemos dividir a las fibras ópticas dentro de los siguientes tipos básicos.

Fibras de polímeros: tienen relativamente alta atenuación particularmente para longitudes de onda cortas. Ellas son aplicadas solamente para operaciones a corta distancia, pero tienen la ventaja de ser muy robustas.

Fibras de sílice: Son claramente las principales fibras usadas para propósito de comunicación y son usualmente dopadas con germánico, fósforo pentóxido o óxido bórico, en cierto grado, con el propósito de producir los diferentes índices de refracción, necesarios para las guías de la luz ópticas, que son utilizados con grandes ventajas. Adicionalmente las fibras pueden ser expuestas a altas temperaturas presentando gran resistencia con materiales de empaque o protección apropiada.

Fibras de vidrio: Son similares a las fibras de sílice pero generalmente tienen altas pérdidas y núcleos de diámetro grande. Pueden ser apropiadas para iluminación.

Es posible tener una clasificación de las fibras en función de, su modo de propagación, (monomodo, multimodo), y de su perfil de índice, (escalonado o gradual), a continuación se presentan os tres tipos de fibra óptica.

FIBRA MULTIMODO DE ÍNDICE ESCALONADO.

La fibra clásica cuya fabricación es la más sencilla, es la fibra multimodo de índice escalonado.

La fibra de índice escalonado puede no tener cubierta: es lo más simple pero también la de menor eficiencia.

Se caracteriza por el inconveniente de que la distancia total recorrida, por el rayo luminoso es ligeramente distinta total recorrida, por el rayo luminoso es ligeramente distinta para cada modo de propagación, lo que determina que el tiempo necesario para efectuar el recorrido sea también distinto por consiguiente tiene una gran dispersión, (figura 2.11).

Esta fibra puede tener un diámetro, hasta de un milímetro o más. Se mejoran dos características al proveerla de una cubierta: son utilizados por lo general para uniones de corta distancia, el diámetro del núcleo varía de 10 a 200 μm y el de la cubierta de 150 a 250 μm . Su apertura numérica es de alrededor de 0.3. Para un kilómetro de fibra el retraso se encuentra de 20 a 2 ns y la banda pasante de 20 a 200 MHz.

FIBRA MULTIMODO DE ÍNDICE GRADUAL.

Su elaboración es la más complicada y se utiliza en los enlaces de más alta capacidad de información.

La dispersión modal en una fibra óptica típica como se ha visto, se debe a la diferencia entre los tiempos de recorrido de los diferentes modos que se propagan en la fibra. Con el fin de igualar los tiempos de recorrido de los diferentes modos se utilizan fibras para las cuales el índice de refracción disminuye gradualmente del centro hacia la cubierta. Las trayectorias para una fibra de índice gradual tienen una forma como se muestra en la figura 2.16.

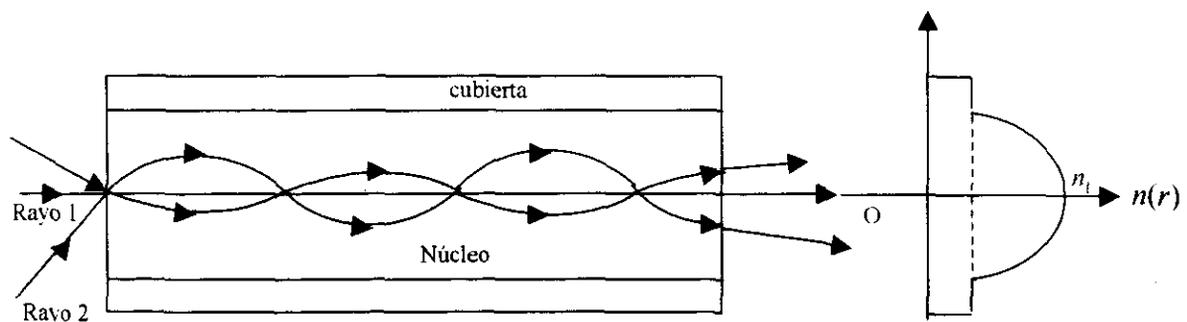


Figura 2.16 Fibra multimodo de índice gradual

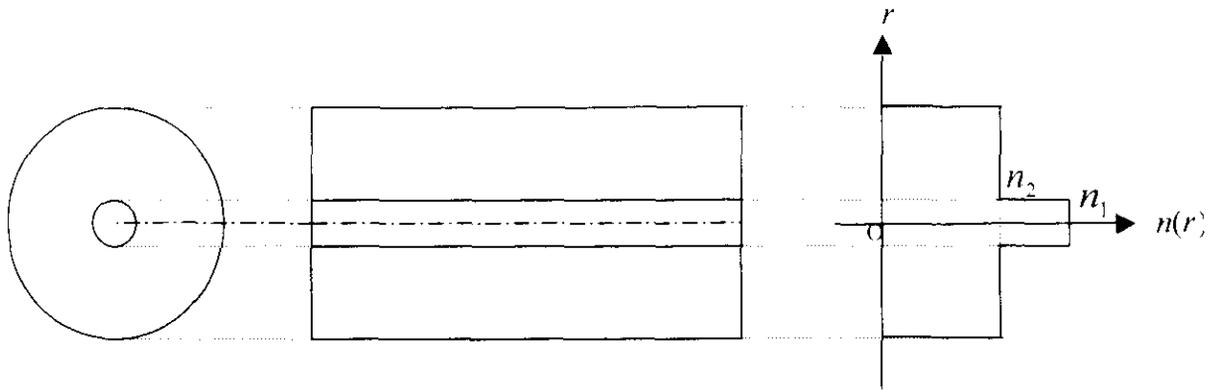


Figura 2.17 Fibra óptica monomodo de índice escalonado.

Este tipo de fibra promete transmisiones a gran distancia con elevada eficiencia, todavía permanece dentro del campo de las investigaciones.

El diámetro del núcleo es de alrededor de 6 a $8 \mu m$, mientras que el diámetro de la cubierta es de $125 \mu m$. Para este tipo de fibra se consideran posibles bandas pasantes superiores a los 50 GHz por kilómetro [3, 4, 7, 8].

3. SENSORES DE FIBRA ÓPTICA

Un sensor de fibra óptica está formado principalmente por una fuente luminosa, fibra óptica (encargada de la emisión luminosa), una zona o elemento de sensibilidad que es el lugar en donde se expone a la luz, (que es guiada por la fibra), con el medio o la influencia externa física, química, bioquímica o influencias similares, lo que provoca cambios en las características de la luz al pasar por esta zona, es decir, la zona de sensibilidad es la región donde se modula la luz para ser, (figura 3.1), en un caso, retransmitida por otra fibra óptica, en otro caso, si la zona de sensibilidad es la propia fibra en el extremo se tiene un detector en cargo de sentir los cambios y variaciones que se presentan, en cuyo caso se hablara de sensores extrínsecos e intrínsecos, respectivamente.

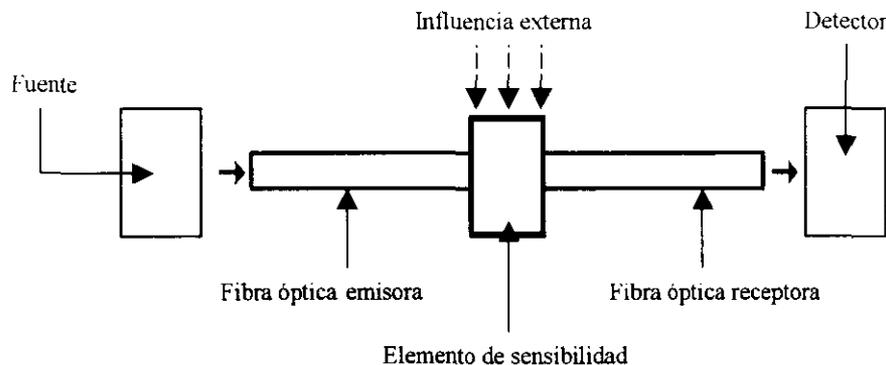


Figura 3.1 Sensor de fibra óptica a bloques.

3.1 CATEGORÍAS Y TIPOS DE SENSORES

Dividir a los sensores en 2 grandes categorías, al hablar de sensores extrínsecos e intrínsecos, es tan solo una forma de catalogar a los sensores. Sin embargo no es la única forma. La siguiente lista enuncia a cuatro tipos de sensores caracterizados en base al tipo de modulación que se presenta en la zona de sensibilidad.

1. Sensores de intensidad (o de amplitud).
2. Sensores de frecuencia.
3. Sensores de fase.
4. Sensores de polarización.

Se llamara sensor de amplitud al sensor que registra la variación de la magnitud de la energía que llega al detector [6].

Existen categorías de los sensores de fibra óptica en base a su aplicación, y a otras características; las cuales requieren listas muy extensas, sin embargo, también podemos hacer

notar este tipo de forma de diferencias en los sensores de fibra óptica, así que, el factor de influencia externa y la característica física que varían en el medio se sienten en el elemento de sensibilidad, dando lugar a una forma de clasificar a los sensores. Se llama sensor refractométrico si la característica que se está monitorizando es el índice de refracción del medio externo.

Podemos mencionar que un sensor de intensidad puede ser utilizado también como sensor de índice de refracción si logra obtener una regla de correspondencia entre el índice de refracción del medio externo y la intensidad de la luz que llega al detector.

También podemos tener un sensor refractométrico de temperatura donde el elemento de sensibilidad cambia su índice de refracción y con ello se realiza una modulación de la luz que en el extremo receptor se puede detectar con el cambio en la intensidad de luz recibida. Es decir se tiene una conexión directa o indirecta de los parámetros que se modulan en la zona de sensibilidad por la acción de las influencias externas, por lo cual un tipo de sensor en particular puede tener diferentes aplicaciones; dentro de los más utilizados están el sensor de intensidad y el sensor de fase (de interferómetro), que se verán con más detalle más adelante.

Un aspecto que cabe enfatizar es la gran variedad de fibras ópticas de manufactura comercial, que han sido desarrolladas con un alto grado de satisfacción para aplicaciones de larga distancia, a pesar de esto, son pocas las fibras especiales para sensores que están disponibles comercialmente. Por lo general, los sensores de fibra óptica aplican fibras de telecomunicaciones como resultado de su gran disponibilidad [6].

Son considerables los alcances que existen para modificar las propiedades de fibra óptica de sílice con la incorporación de técnicas de dopaje para incrementar un efecto dado, que normalmente en fibras con núcleo de sílice puro son pequeños. Consecuentemente, ahora la atención está siendo dada al diseño de sensores de fibras especiales con enorme sensibilidad para mediciones específicas.

Se debe notar que, en general, los grandes avances en sensores, moduladores y otros dispositivos se presentaron con la sustitución de sílice y elementos de dopaje, por la incorporación de vidrios compuestos, vidrios infrarrojo (calcogenoide) o aun polímeros. El incremento en las pérdidas que son resultado del uso de vidrios alternativos no es un problema, por el mejoramiento en dispositivos sensibles que se ha logrado y por que el empleo de estos es de cortas distancias.

Al utilizar fibra óptica como parte del sensor son notorias las ventajas que ofrecen estos tipos de dispositivos: como aislamiento eléctrico, por tratarse de un medio dieléctrico, por lo que no produce problemas por corrientes a tierra. Son insensibles a las interferencias electromagnéticas, químicamente inertes a medios corrosivos o agresivos químicamente, no transmiten perturbaciones caloríficas a las zonas examinadas, por ser malas conductoras de calor, no utilizan señales eléctricas por lo tanto son adecuadas para medios inflamables, tienen reducidas dimensiones, flexibilidad, bajo peso y no requieren de ningún interfaz para su integración en una red de área local para comunicación de datos. Tal vez la principal ventaja de los sensores de fibra óptica es su habilidad para direccionar problemas de medición en los cuales son inaccesibles el uso de tecnologías alternativas [9].

3.1.1 SENSORES DE INTENSIDAD.

Todas las comunicaciones ópticas y los sistemas de telemetría, finalmente están basadas en la detección de intensidad. Para bajas frecuencias, los sensores de fibra óptica basados en intensidad; usualmente tienen la sensibilidad de detección en función del poder óptico recibido y el ancho de banda.

Los sensores de fibra óptica basadas en la detección de intensidad, (al cual posteriormente haremos referencia simplemente como sensores de intensidad), toman su nombre del modo en que se modula una de las propiedades de la señal óptica, en este caso la intensidad, por alguna influencia externa presente en la zona de sensibilidad, dando como resultado una dependencia del nivel de influencia externa con la intensidad que posteriormente es detectada.

La simple modulación de intensidad ha sido empleada en los primeros sensores ópticos experimentales, dadas las virtudes que ofrece, ya que se trata del sensor de mayor simplicidad, confiabilidad y bajo costo, además de las múltiples configuraciones que puede tomar, lo que lo convierte, en el de mayor aplicación [5].

Algunos de los miembros de esta familia de sensores, los cuales varían de un simple apagado - encendido (o switches) de tipo discreto a alguna de carácter analógico debido a pequeños desplazamientos angulares, transversales y longitudinales. Son mostrados en la siguientes figuras.

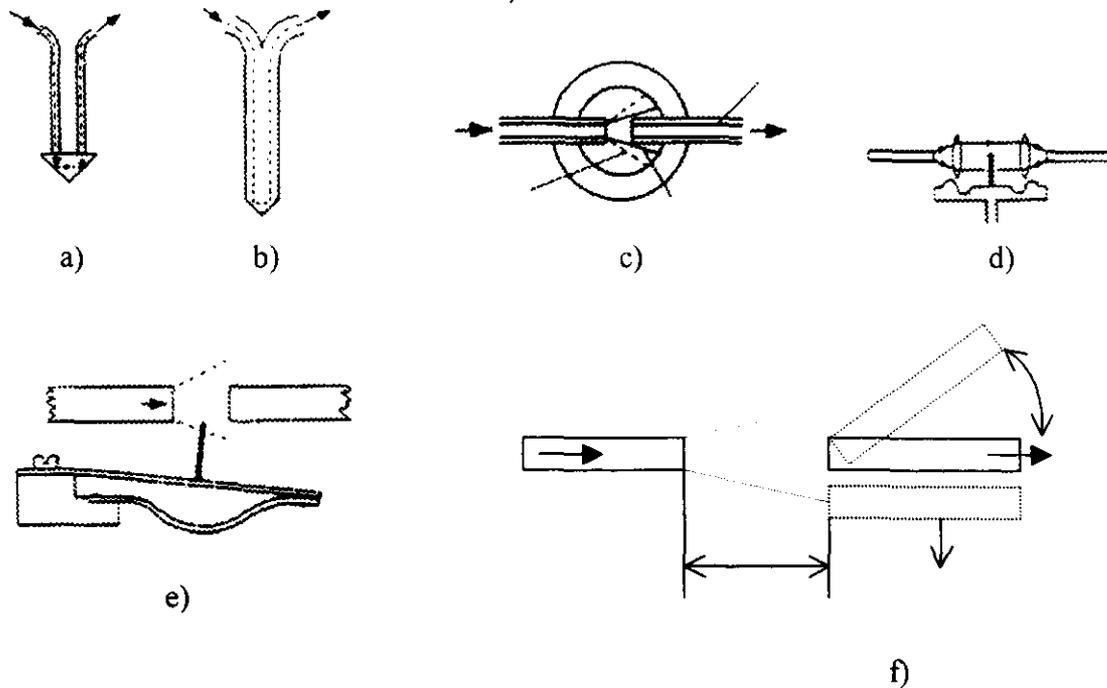


Figura 3.2 Sensores de intensidad [6].

El esquema general de un sensor de intensidad encargada de detectar desplazamientos, (figura 3.3a), es el mismo que se represento en la figura 3.1, con la variante de que el elemento de sensibilidad es el medio, gas o liquido, es decir, no hay un elemento de sensibilidad especifico.

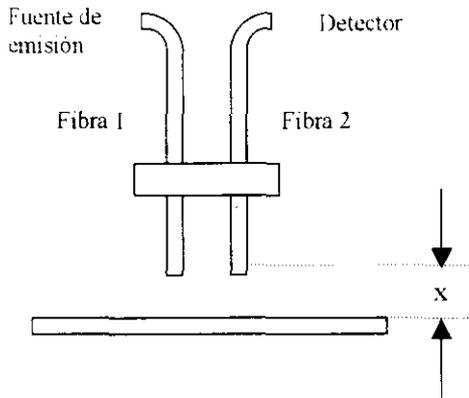


Figura 3.3 a) Modelo de un sensor de desplazamiento [6].

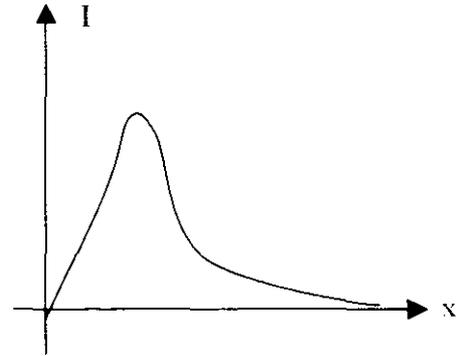


Figura 3.3 b) Características del desplazamiento [6].

El sensor esta formado por una fuente encargada del suministro de luz a la fibra 1 que tiene la encomienda de iluminación a la zona de modulación o zona de sensibilidad que esta conformada por (espacio libre) una superficie reflectora a una distancia variable "x" del plano donde se encuentra la fibra 2 responsable de transmitir, una parte de la luz reflejada, hasta un detector.

El detector registra la intensidad de luz reflejada que es capaz de transmitirse por la fibra 2. La modulación de la intensidad estará en función de la distancia variable "x", es decir, la variación de la intensidad tiene relación directa con el desplazamiento entre la superficie de reflexión y la fibra 2. En la figura 3.3 b) se muestra la característica de intensidad detectada en comparación con la distancia "x" del sensor de desplazamiento.

3.1.2 SENSORES DE FRECUENCIA.

La frecuencia de la luz es una característica que puede ser modulada, y ya que para una onda electromagnética, como la luz, la frecuencia y la longitud de onda guardan una relación directa determinada por la expresión (2.5).

$$f = \frac{v}{\lambda} \tag{2.5}$$

Podemos, decir que, un sensor basado en la modulación de frecuencia, como el que, se basa en la modulación de la longitud de onda de una señal óptica, guardan similitud por lo cual si se modifica en frecuencia se modula la longitud de onda.

Hay numerosos fenómenos dependientes de la longitud de onda en los cuales, puede ser usada, la modulación la luz proveniente de una fuente. La variedad de técnicas de modulación de longitud de onda (reportadas en los textos) es mucho más pequeño que aquellos a la previamente descrita, del tipo de intensidad modulada. Esto es porque el diseño del método de desmodulación requiere mas cuidado y usualmente es necesaria alguna forma de espectrómetro.

En algunos casos, una simple técnica de demodulación puede ser usada con el empleo de filtros ópticos. Por ejemplo en la siguiente figura se muestra un diagrama de un sensor basado en la modulación de la longitud de onda.

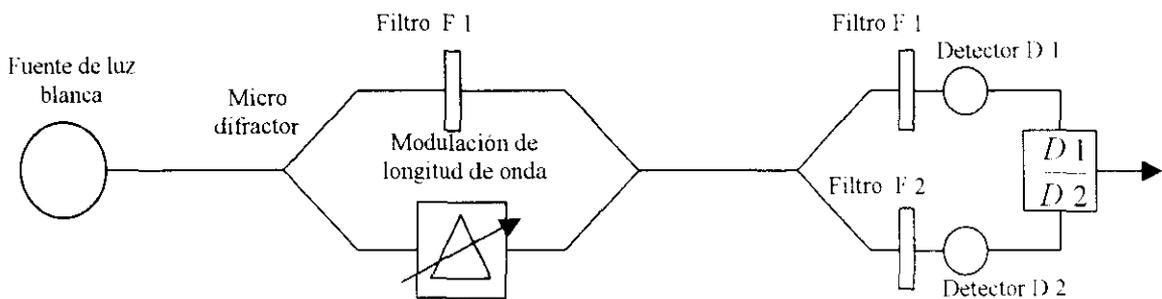


Figura 3.4a Sensor de fase y longitudes de onda [12].

El esquema mostrado corresponde a un sensor que puede ser utilizado para detección de temperatura, (o de desplazamiento, realizado una pequeña modificación).

Este tipo de arreglo esta formado por una fuente de luz blanca guiada por una fibra óptica que se divide tomando, dos direcciones diferentes, la misma ocurre con el rayo luminoso que es ópticamente dividido por medio de un microdifractor.

Una de las fibras lleva al haz, que circula internamente por ella, al filtro F1, de banda angosta, este permite el paso solo a una determinada longitud de onda.

La segunda fibra conduce la parte del haz, que fue previamente dividido, a la zona de sensibilidad donde se llevara acabo la modulación de la longitud de onda en presencia de la influencia externa.

El resultado del filtrado en F1 y la modulación que tubo lugar en la zona de sensibilidad son transmitidos por un tramo de fibra óptica,(tramo2). La señal, resultado de la combinación, contiene la información tanto de la modulación, de la zona de sensibilidad, como la del filtrado en F1. Nuevamente el haz es dividido y guiado por dos nuevas vías, por separado son filtradas.

En un caso; uno de los filtros es idéntico al filtro que anteriormente se presento, (filtro de banda angosta F1), en el extremo un detector, D1, registra la intensidad de la señal filtrada lo que servirá de señal de referencia. En el otro caso, se tiene un filtro de banda angosta pero que

tiene diferente banda de paso y en el diagrama esta representado por F2, este dependerá de las características de la zona de sensibilidad ya que es el encargado de llevar la información modulada al detector de intensidad D2.

El resultado de cociente de las intensidades en D1 y D2 estarán en función de la influencia externa que se presente en la zona de modulación. A continuación se muestra una variante de este tipo de arreglo para un sensor de temperatura.

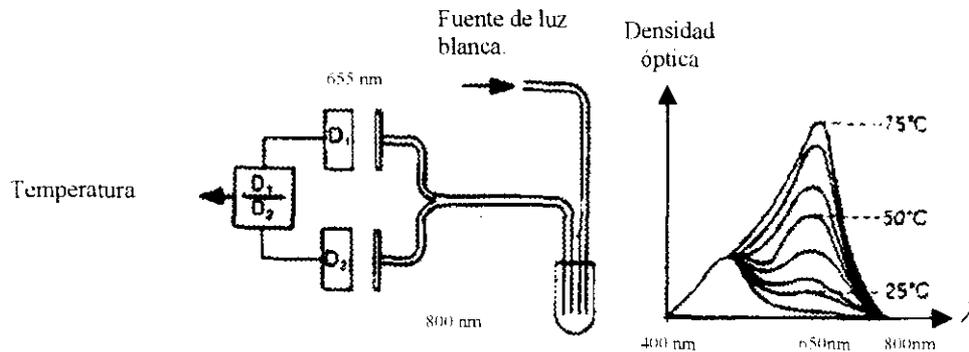


Figura 3.4b Sensor de fase y sus características a diferentes longitudes de onda [12].

Una particular zona de sensibilidad que es una cavidad en la que un material alojado el cual exhibe un cambio de color en respuesta a la variación de temperatura. Un muy marcado efecto ocurre dentro de una solución de cloruro cobalto en una mezcla de alcohol - agua de isopropilo la cual muestra un distinto color al variar la temperatura de 25°C a 75°C. Como lo muestra la figura 3.4b, a 655 nm. Se presentan máximos que facilitaran la medición. Por tal motivo se selecciona el filtro f2 a la longitud de onda de 655nm. Los filtros que están encargados de la señal de referencia se seleccionan a 800 nm (o 500 nm), porque a esta longitud de onda la solución es indiferente al cambio de temperatura.

El resultado de cociente de las intensidades en D1 y D2 estarán en función de la temperatura del sensor [5, 6, 9].

3.1.3 SENSOR DE FASE (INTERFERÓMETRO)

La modulación de fase en fibras ópticas son extremadamente usados en sistemas coherentes, así como en sensores interferométricos, lo que provee un método de estabilidad en contra de variaciones y perturbaciones ambientales.

El principio de giroscopio de fibra óptica de interferómetro muestra como es posible utilizar el cambio de fase de una señal para tener un sensor de giro [9].

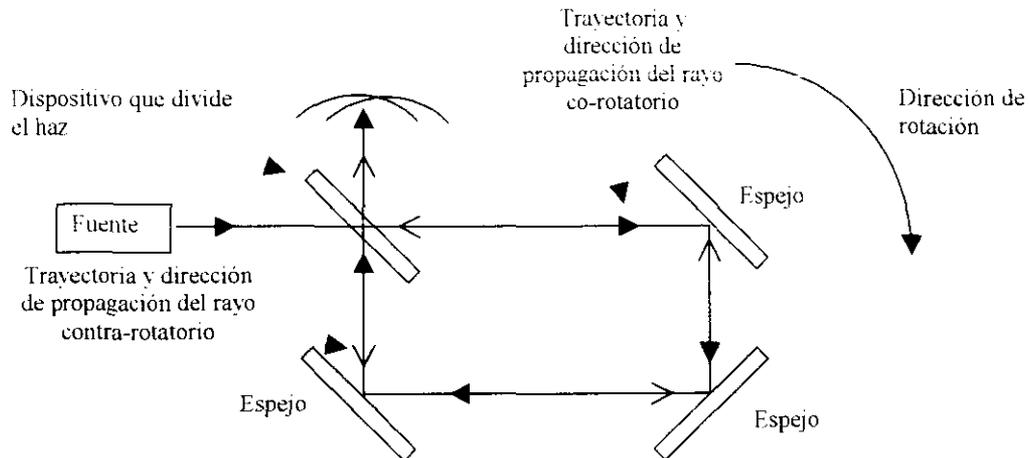


Figura 3.5 Interferómetro de Sagnac.

Un interferómetro de Sagnac es un anillo interferométrico, donde la salida de la onda de luz es insertada y direccionada en sentidos opuestos, la trayectoria cerrada que siguen los rayos es la misma y queda definida por espejos. Por simplicidad la explicación usual del efecto Sagnac, empieza considerando un anillo circular interferométrico, dentro de un vacío, la luz entrante en el sistema es dividida en dos ondas contrapropagadas las cuales regresan con la misma fase después de haber realizado un viaje a través de la misma trayectoria en direcciones opuestas. Ahora cuando el interferómetro está rotando, un observador en descanso dentro de un marco inherente de referencia, ve la luz entrante del interferómetro en el punto M y viajando con la misma velocidad en el vacío C en direcciones opuestas, pero durante el tiempo de tránsito a través del circuito cerrado, el rayo dividido a sido movido a M' y nuestro observador ve que la onda que se propaga en la dirección de la rotación del sistema ha tenido que propagarse a través de una trayectoria mas larga que la onda que se propaga en dirección contraria a la rotación. Esta diferencia produce un cambio de fase el cual puede ser medido por métodos interferométricos.

(Esta explicación es correcta pero no debemos olvidar que el punto fundamental: esto es observado dentro de un marco inherente, pero aun observado dentro de un marco de rotación por que ambos eventos (regreso de las ondas que siguen la dirección de propagación y las que no siguen la dirección de propagación), toman lugar en el mismo punto y el principio de causalidad puede ser aplicado).

Ahora, si la luz se propaga dentro de un medio, (como es el caso de la fibra), puede ser demostrado que el resultado que se obtuvo con el interferómetro de Sagnac no cambia. Por que las ondas viajan n veces mas despacio, (siendo n el índice de refracción), el divisor (diafragma divisor del rayo) a sido movido n veces, después cuando se recombinan.

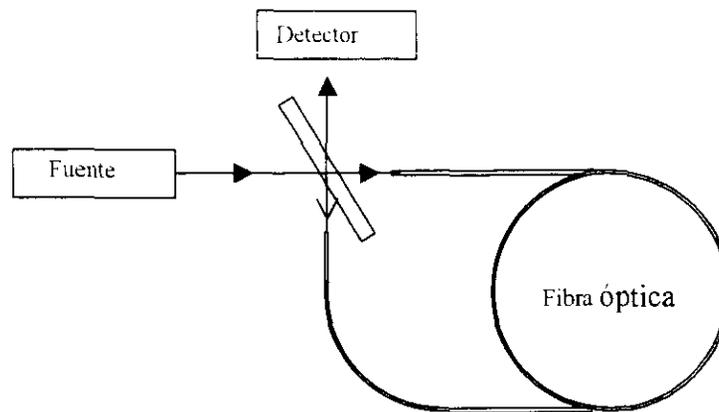


Figura 3.6 Giroscopio [9].

La diferencia en la trayectoria es después más larga que dentro del vacío. Pero el medio también es móvil y existe también un rastreo de Fizeau que incrementa la velocidad para la trayectoria más larga y decrementa para la trayectoria corta. Para la magnitud de este rastreo es como para eliminar completamente el efecto del medio.

3.1.4 SENSOR DE POLARIZACIÓN

Los sensores de polarización, seguramente de los menos utilizados por la complejidad que involucra el hecho de sensar la polarización de una onda luminosa, sin embargo, a continuación se muestra un ejemplo que ilustra tan importante sensor.

La figura 3.7 ilustra un sensor de polarización donde el elemento de sensibilidad constituye la parte primordial del sensor, debido a que el bloque de material empleado exhibe ciertas cualidades al recibir tensión o compresión, es decir se trata de un material fotoelástico. El elemento de sensibilidad estará formado por un polarizador P_1 a la entrada del elemento fotoelástico, y otro polarizador P_2 a la salida. Los polarizadores están ajustados para que bajo las condiciones normales la luz que se polariza en P_1 pueda atravesar libremente el Polarizador P_2 , ya que tienen las mismas características. Una fibra óptica F1 encargada de transportar la energía luminosa desde la fuente hasta el polarizador P_1 a la entrada del elemento de sensibilidad; al atravesar la energía luminosa el polarizador P_1 , la luz insertada dentro del elemento de sensibilidad presentará una polarización determinada por P_1 , donde por acción de una fuerza de compresión o tensión, la luz que se encuentre en el interior del elemento de sensibilidad, cambiará estado de polarización, dando como resultado que una cantidad mínima de energía pueda atravesar el polarizador P_2 , para después enviar esta energía luminosa a un detector de intensidad que censará dicha intensidad.

Lo que este sensor nos permite medir son los esfuerzos mecánicos a los que se ve sometido el elemento de sensibilidad, por lo cual existirá una relación directa de la intensidad recibida en el detector con respecto a la tensión o compresión a que se someta el bloque [6].

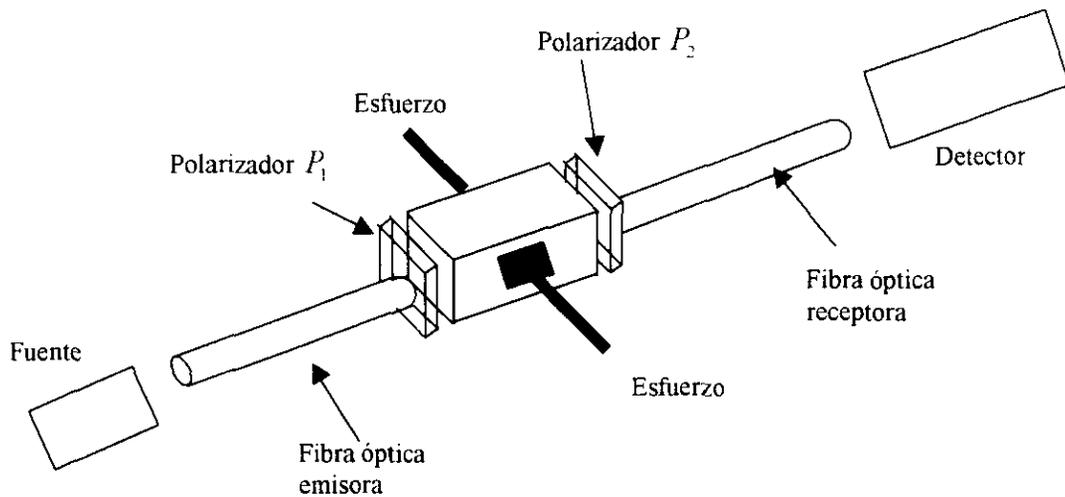


Figura 3.7 Sensor de polarización [6].

3.2 SENSORES REFRACTOMÉTRICOS DE INTENSIDAD.

El sensor refractométrico de intensidad, basa su nombre en el factor de variación física, que es el cambio de índice de refracción y el parámetro que se modula en la zona de sensibilidad, es decir, la intensidad de la luz.

Este tipo de dispositivos varían desde los simples sensores de presencia o ausencia de un medio hasta los sistemas referenciados, que como es de esperarse tienden a incrementar su costo [9].

3.2.1 ESQUEMA GENERAL

El esquema general de un sensor refractométrico de intensidad, está totalmente definido con cinco elementos que lo conforman:

- Fuente luminosa.
- Fibra óptica emisora.
- Elemento de sensibilidad.
- Fibra óptica receptora.
- Detector de intensidad.

El siguiente esquema representa los bloques de un sensor refractométrico de intensidad.

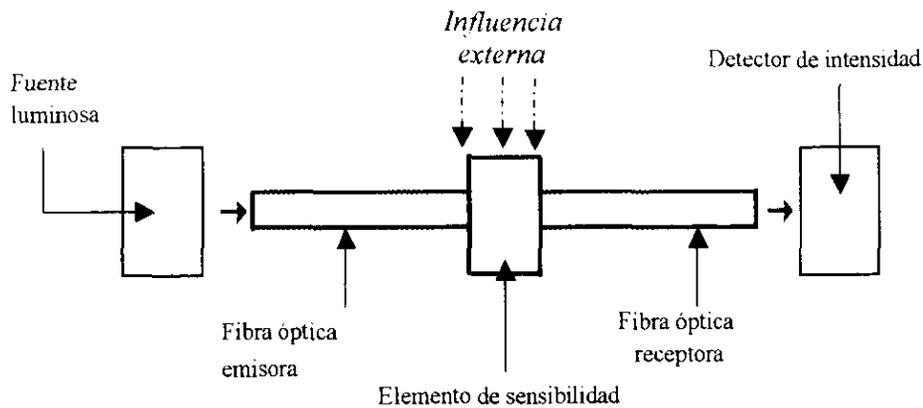


Figura 3.8 Sensor refractométrico de intensidad a bloques.

La luz es inyectada en el núcleo de la fibra emisora, (provista por la fuente luminosa), en cargada de llevar la luz al elemento de sensibilidad, siendo en lo posible, la alteración, de la luz previa a ser inyectada al elemento; lo menos alterada posible, ya que el elemento donde se pretende que la luz sufra cambios en su intensidad, es el elemento de sensibilidad, dichos cambios se generan en base a la influencia externa, que en mayor o menor medida afectara algun parametro de la luz, es decir, la influencia externa modula la luz que circula por el elemento de sensibilidad, antes de ser trasportada por la fibra receptora encargada de llevar la energía luminosa modulada a un dispositivo de sensado, para este caso los dispositivos que se utilizan son sensores de intensidad.

3.2.2 TIPOS DE ELEMENTOS DE SENSIBILIDAD

La escala de materiales la cual ha sido usada o podría ser usada como elementos de sensibilidad de un sistema de fibra óptica es generalmente muy costoso, no existe un criterio exacto para escoger un material en particular de sensibilidad, esto dependerá de la aplicación, sin embargo, algunos puntos importantes como el tiempo de vida, la capacidad de respuesta a influencias externas, costo y forma, nos dan un primer criterio para proponer un tipo de elemento de sensibilidad.

A continuación se muestran los tipos de elementos de sensibilidad que pueden ser utilizados en las diferentes aplicaciones de los sensores de fibra óptica.

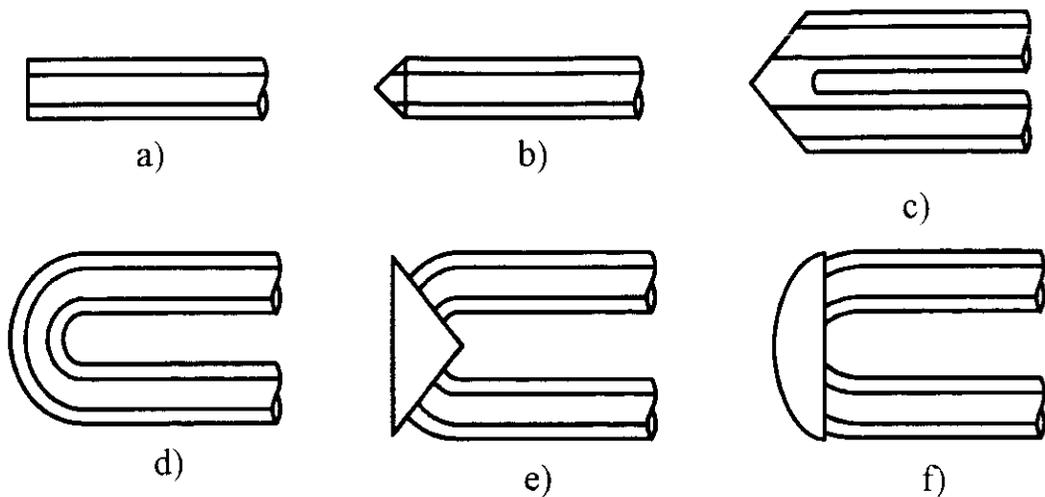


Figura 3.9 Ejemplos de elementos de sensibilidad [8].

La figura a) muestra un fibra y como elemento de sensibilidad el extremo de la fibra pulida, La figura b) se observa uno de los extremos con forma de cono que representa el elemento de sensibilidad donde se ha de modular la luz, La figura c) presenta un elemento de sensibilidad a partir de dos fibras ópticas que fueron fusionadas en uno de sus extremos, teniendo como característica adicional un tallado a 45° en la forma como se observa la figura.

La figura d) Es uno de los elemento de sensibilidad más sencillo en elaborar, se observa que la fibra fue curvada, siendo la misma curva que forma la fibra la zona de modulación, este tipo de elemento de sensibilidad puede presentar algunas variantes, es decir, puede ser que la curva que forma la fibra óptica tenga o no cubierta.

En la figura e) se tiene un par de fibras ópticas empotradas a las caras de un prisma, este tipo de elemento de sensibilidad puede tener también variaciones, una de ellas es el sistema propuesto para el análisis del capítulo siguiente. Los tipos de materiales del prisma variaran de acuerdo con la aplicación particular de cada sensor.

La figura f) muestra un elemento de sensibilidad en forma de semiesfera en cuya parte plana se empotraron dos fibras ópticas, una para la entrada de la luz al elemento de sensibilidad y la otra para captar la luz que fue modulada dentro de dicho elemento de sensibilidad.

Los tipos de elementos de sensibilidad son tan variados como las formas tridimensionales que se puedan realizar, es decir un elemento de sensibilidad puede tomar cualquier forma, sin embargo la aplicación juega un papel muy importante en el diseño del elemento de sensibilidad así como de su composición, es decir, el material con que esta constituido.

4. CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN DE UN SENSOR REFRACTOMÉTRICO DE INTENSIDAD

4.1 MODELO DE UN SENSOR REFRACTOMÉTRICO DE INTENSIDAD.

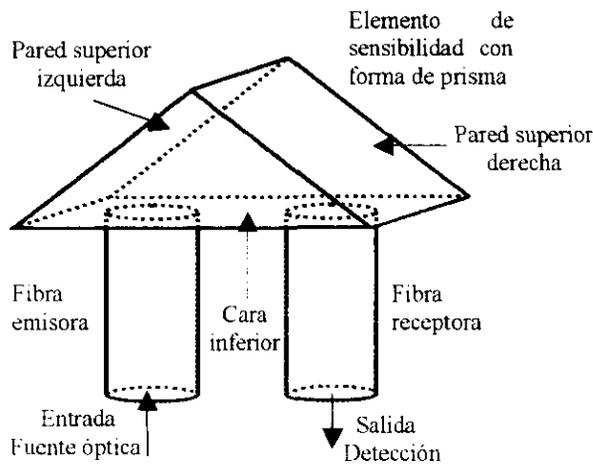


Figura 4.1 Modelo de un sensor refractométrico de intensidad con elemento de sensibilidad en forma de prisma.

El modelo que se estudiará, en este apartado, es el que se muestra en la figura 4.1, de donde es posible apreciar que el elemento de sensibilidad es un prisma, la fibra óptica que transporta la luz de la fuente óptica hasta el interior del elemento de sensibilidad, llamada "fibra emisora", se encuentra fijada con la cara inferior del prisma en posición ortogonal; la fibra, llamada "fibra receptora", tiene la función de captar la luz y trasmitirla a un equipo de detección. Para todo el análisis solo trataremos con el núcleo de la fibra para reducir la complejidad de los esquemas.

4.1.1 DEFINICIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN.

Calcularemos el coeficiente de transmisión del sensor para el caso donde se presenta reflexión total interna, de la luz que ingresa al prisma, sobre las paredes superiores. No estudiaremos el caso donde el coeficiente de transmisión en función del índice de refracción del medio externo, porque este análisis es muy complicado en forma analítica. Delimitaremos nuestro cálculo solo para obtener las pérdidas propias del elemento de sensibilidad prismático. Después vamos a estudiar el coeficiente de transmisión en función de un parámetro de construcción del sensor.

Se utilizan estas condiciones para poder obtener de forma analítica del coeficiente de transmisión para un sensor como el que se muestra en la figura 4.1. A continuación se presenta una forma en que se calculará el coeficiente de transmisión del sensor. El coeficiente de transmisión en un sistema está dada por la relación de las potencias de salida y entrada, en nuestro caso será:

$$T = \frac{P_r}{P_e} \quad (4.1a)$$

Donde:

P_e - potencia óptica en la fibra emisora.

P_r - potencia óptica en la fibra receptora.

4.1.2 ANÁLISIS Y SIMPLIFICACIÓN DEL MODELO DEL SENSOR CON ELEMENTO DE SENSIBILIDAD PRISMÁTICO

Basándose en algunas características generales del elemento de sensibilidad, que serán definidas posteriormente, (figura 4.3 y 4.4), es posible transformar nuestro modelo general del sensor y simplificarlo, con el motivo de simplificar el cálculo del coeficiente de transmisión.

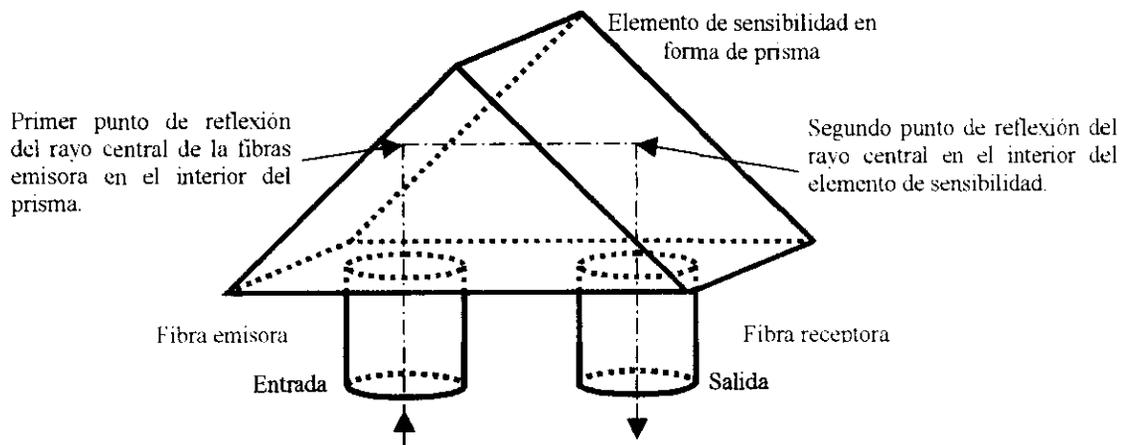


Figura 4.2 Proyección de un rayo central emitido por la fibra emisora, en el interior del elemento de sensibilidad.

Partamos del análisis de la figura 4.2, la cual muestra un rayo luminoso que se transmite por la fibra emisora en el centro del núcleo, es decir, sobre el eje de la fibra, hasta el interior del elemento de sensibilidad, donde el rayo es reflejado totalmente en las superficies de las paredes superiores del prisma, por efecto de la diferencia de índices de reflexión del medio externo y el del prisma. El rayo que es reflejado dos veces en el interior del elemento de sensibilidad se proyecta en el eje de la fibra receptora transmitiéndose por ella hacia la zona de detección.

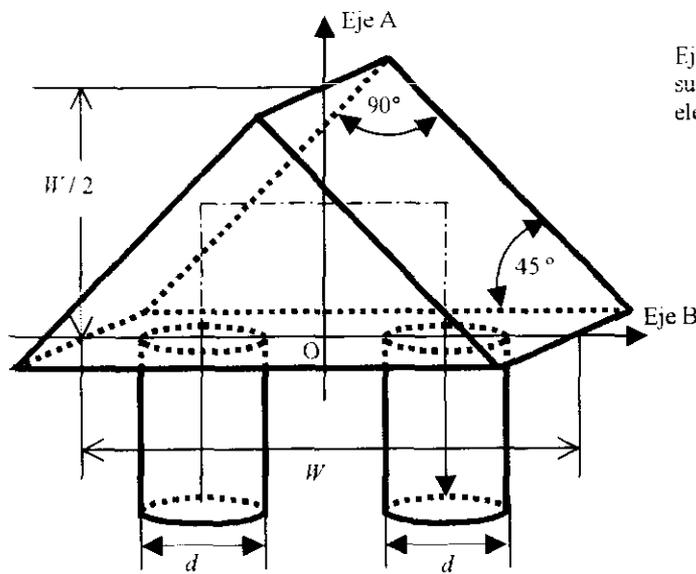


Figura 4.3 Parámetros del elemento de sensibilidad

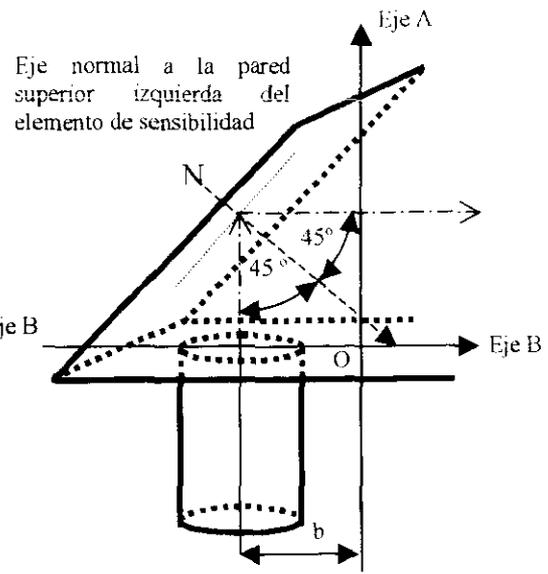


Figura 4.4 Reflexión total del rayo central sobre la pared superior izquierda del elemento de sensibilidad.

Es posible verificar geoméricamente, que la proyección de la superficie de la fibra emisora, dentro del elemento o zona de sensibilidad, se comporta de la forma en que describe la figura 4.5; haciendo algunas consideraciones que se utilizarán en todo el proceso del cálculo; para tal motivo, observemos la figura 4.3 y la figura 4.4.

De la figura 4.3, el prisma cuenta con un ángulo recto, (90°), entre la paredes superiores y ángulos de 45° formados por las paredes superiores y la cara inferior del prisma; los ejes de las fibras están situados a la misma distancia, b , del origen, O , del sistema de referencia, (A , B) en direcciones contrarias; la fibra emisora se sitúa a la izquierda del origen y la fibra receptora a la derecha. La relación entre la ancho, W , del elemento de sensibilidad y el diámetro, d , del núcleo de las fibras es un parámetro importante de construcción del sensor. Por lo cual podemos hacer un estudio del coeficiente de trasmisión, T en función de la ancho normalizado del elemento de sensibilidad, W/d :

$$T(W/d) = \frac{P_r(W/d)}{P_e} \tag{4.1b}$$

Por otro lado, en la figura 4.4, observamos como se cumple el principio de reflexión total para el rayo que incide sobre la pared del prisma, con un ángulo de 45° con respecto al eje normal, tal eje es normal al plano de incidencia o pared superior izquierda del prisma, como consecuencia el ángulo del rayo reflejado es igual al de incidencia.

Como la pared superior izquierda del prisma, donde se realiza la primera reflexión, está a 45° respecto de la horizontal, el ángulo correspondiente al rayo reflejado es de 0° con respecto a la horizontal, (eje B). El rayo realiza el mismo proceso en la pared superior derecha del prisma, con la diferencia de que ahora el rayo se reflejará en el eje de la fibra receptora (figura 4.5).

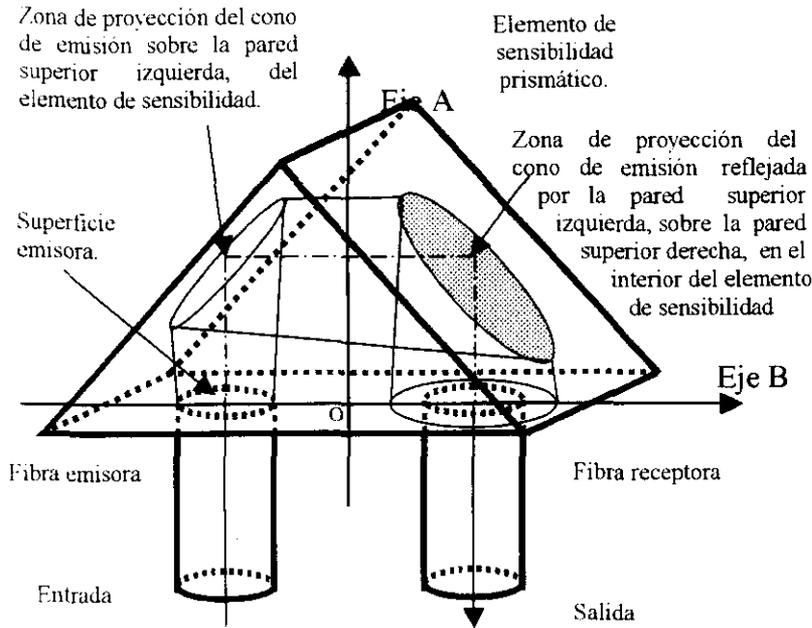


Figura 4.5 Proyección del cono de emisión de la fibra emisora en el interior del elemento de sensibilidad.

misma cara, las cuales representan las proyecciones de la superficie de emisión en las paredes superiores del elemento de sensibilidad. La figura 4.7 es la vista frontal del sensor con la imagen de los bordes del cono que describe la iluminación de la superficie de emisión, en el interior del la zona de sensibilidad.

En general, para la superficie del extremo de la fibra emisora, considerando que la emisión se propaga dentro del elemento de sensibilidad, formando una sección de cono, la representación de nuestro esquema quedaría como se observa en la figura 4.5.

El cono tiene como eje la proyección del eje de las fibras.

Una vista de perfil, de la figura 4.5, nos ayudará a tener una mejor idea sobre el esquema; en la figura 4.6 se muestra una vista de perfil, donde se observan dos formas ovaladas en una

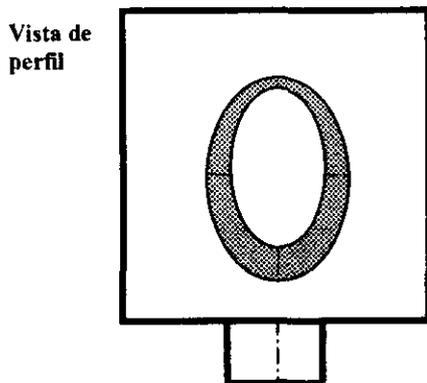


Figura 4.6 Vista de perfil del sensor, proyección del cono de emisión sobre las paredes superiores del sensor.

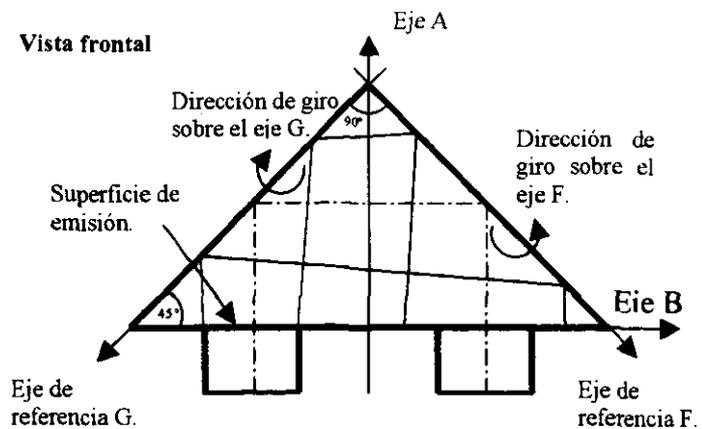


Figura 4.7 Vista frontal del sensor con trazado del cono de emisión.

Posteriormente, en la figura 4.8, se presentan tres imágenes coincidentes que corresponden a tres secciones del elemento de sensibilidad, distinguiendo en cada una de ellas, una sección de la proyección de la superficie de emisión, (o “cono de emisión”). Las imágenes punteadas representan secciones del elemento de sensibilidad que se hicieron girar sobre los ejes de referencia F y G, (figura 4.7), con el proposito de ver claramente la sección de cono que forma la proyección de la superficie emisora dentro del elemento de sensibilidad; estas imágenes contienen la sección correspondiente del cono, formado por la superficie de emisión, en su trayecto hacia la pared superior izquierda, en un caso, y en otro caso, la sección del cono que forma la emisión desde la pared superior derecha hacia la zona de admisión, como se apresia en la figura 4.8.

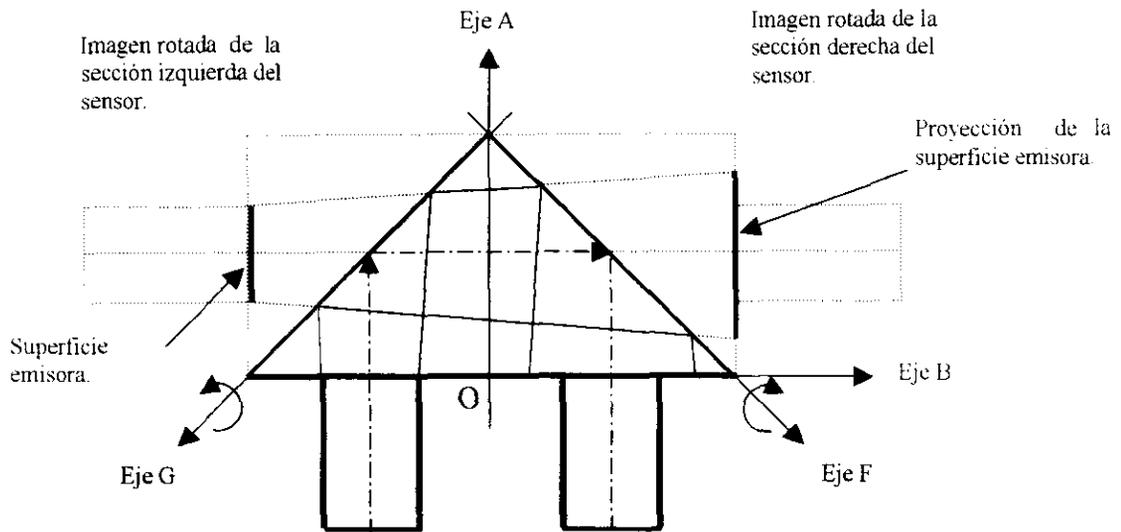


Figura 4.8 Muestra las tres imágenes del cono de emisión donde la luz, proveniente de la fibra óptica emisora, se propaga en el interior del elemento de sensibilidad.

El resultado del proceso anterior es ejemplificado en la figura 4.9, donde se ve, expuesta, la sección de cono que es producto de la superficie emisora en el interior del elemento de sensibilidad.

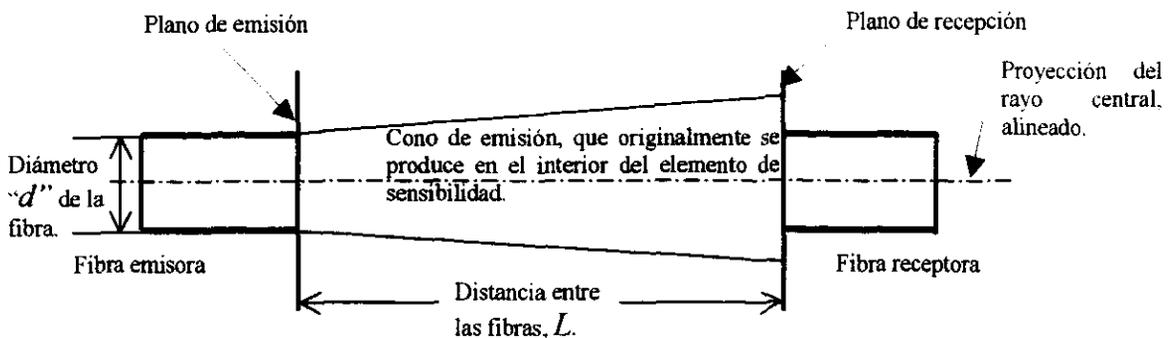


Figura 4.9 Sección de cono que se forma por la propagación de luz en el interior del elemento de sensibilidad.

En esta figura se muestra la distancia, L , que representa la distancia entre los planos de emisión y recepción; sin embargo, la hemos llamado distancia entre las fibras para tener congruencia con la transformación y simplificación del modelo del sensor. Es posible hacer notar, que en el caso del prisma con el ángulo recto existe una relación directa entre el ancho normalizado, Wd , y la distancia normalizada, Ld , y por lo cual, también es posible rescribir la ecuación (4.1b) en función de la distancia normalizada, Ld .

$$T(L, d) = \frac{P_r(L, d)}{P_e} \quad (4.1c)$$

La vista en perspectiva permite observar con detalle las características de la emisión, figura 4.10.

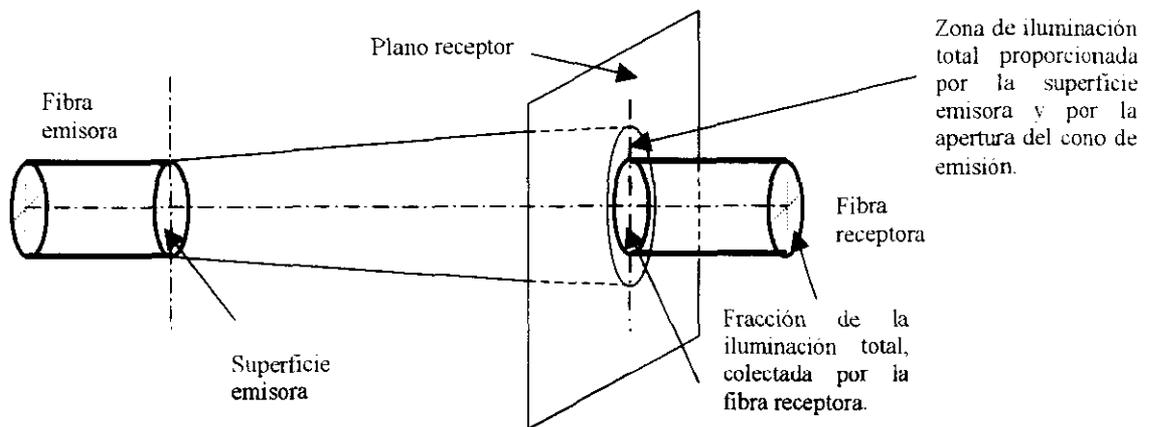


Figura 4.10 Perspectiva del cono formado por la emisión la superficie emisora.

4.1.3 ANÁLISIS GENERAL DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN

Es posible considerar que la superficie de emisión S_e , (núcleo de la fibra emisora), sea un conjunto de muchas pequeñas superficies de emisión, ds_e , (superficie elemental de emisión), que emiten potencia con un patrón en forma de cono, con la misma apertura 2θ de la fibra ($\theta = \arcsen NA$), hacia el plano receptor, figura 4.11. Una expresión que define la potencia que proporciona una superficie elemental, ds_e , se presenta a continuación:

$$dP_e = E \cdot ds_e \quad (4.2)$$

Donde:

dP_e - Es un diferencial de la potencia total, que es emitida por la superficie elemental.

ds_e , en el cono de apertura numérica 2θ (potencia elemental emitida).

E - Es la emitancia de la superficie emisora, se puede considerar constante siempre y cuando se tengan fibras ópticas de índice escalonado.

ds_e - Representa un diferencial de la superficie emisora, (superficie elemental de emisión).

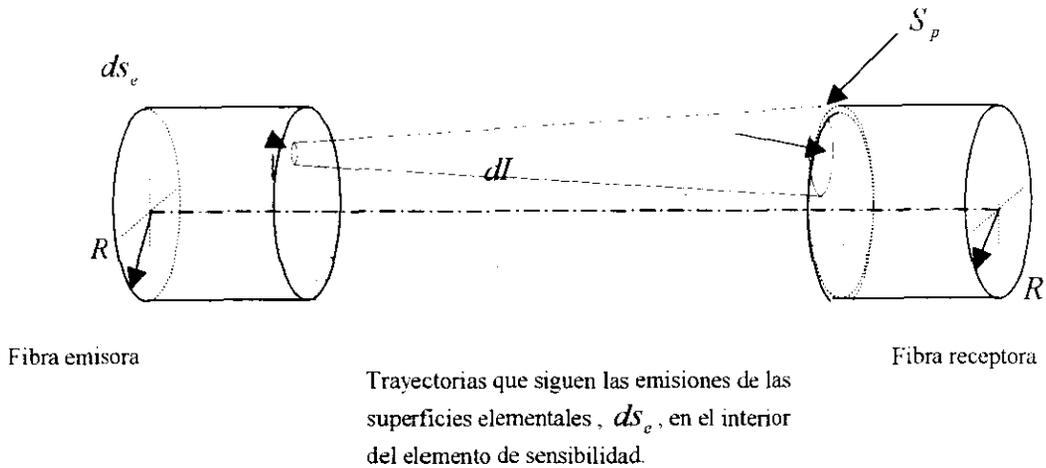


Figura 4.11 Emisión de las superficies elementales, ds_e , de la superficie de emisión hacia la superficie de recepción.

Si consideramos que las pequeñas superficies de emisión, ds_e , tiende a cero y además el número, "m", de estas, tiende a infinito, ($m \rightarrow \infty$), y que la distribución de la emitancia sobre la superficie emisora es homogénea; (condición válida cuando se consideran fibras ópticas de índice escalonado), tendremos una superficie de emisión conformada por puntos de emisión, ($ds_e \rightarrow 0$), que proyectan cierta cantidad de iluminación sobre el plano de recepción, en forma de "circunferencias de iluminación" con área S_p . Este análisis está esquematizado en la figura 4.12.

De la ecuación (4.2) podemos obtener la potencia total emitida, P_e , por la fibra óptica emisora, integrando esa expresión; el resultado se muestra en la expresión (4.3); el análisis se realizará sobre el plano de emisión, figura 4.11.

$$P_e = \int dP_e = E \int_{S_e} ds_e = ES_e = E\pi R^2 \quad (4.3)$$

Donde:

P_e - Potencia total emitida por la superficie emisora.

S_e - Es la superficie total de emisión, que equivale a la superficie del núcleo de la fibra emisora, con área igual a πR^2 .

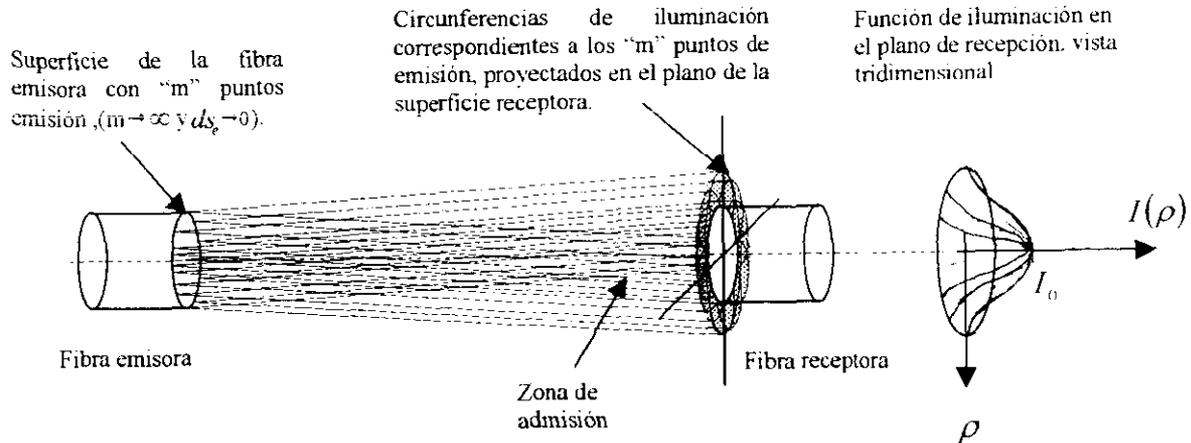


Figura 4.12 Representación de la zona iluminada por puntos de emisión y la función de iluminación en plano de recepción.

La figura 4.12 muestra la distribución de la iluminación que se presenta en la proximidad de la zona de recepción. Siendo $I(\rho)$ la función de iluminación, que corresponde a cada punto del plano de recepción. I_0 es el valor máximo que toma la función de iluminación; ρ Representa la distancia radial variable, del eje de las fibras sobre el plano de recepción.

La función de iluminación varía, en su forma, de acuerdo con la distancia entre las fibras, emisora y receptora, más adelante, (figura 4.32) se mostraran algunos formas características de la función de iluminación.

La expresión que nos proporciona la iluminación elemental, dI , que proyecta una superficie elemental de emisión, ds_e , sobre el plano de recepción estará definido en la expresión siguiente, por lo cual el análisis se lleva acabo en el plano de recepción.

$$dI = \frac{dP_e}{S_p} = \frac{E ds_e}{S_p} \quad (4.4)$$

Donde:

- dI - Representa la iluminación elemental que proporciona una superficie ds_e , del plano de emisión, sobre el plano de recepción.
- dP_e - Potencia elemental proporcionada por una superficie elemental de emisión, ds_e .
- S_p - Área de la proyección del haz divergente sobre el plano de recepción, emitido por la superficie elemental de emisión, ds_e ; es decir, S_p es el área de la iluminación elemental dI . En realidad S_p es circunferencia del cono de emisión sobre la superficie de recepción. En lo posterior nos referiremos a este termino como *circunferencia de emisión*.

La iluminación que percibe un punto, P_i , del plano de recepción con coordenada ρ estará afectado o influenciado por las superficies elementales ds_e , que estén contenidas en la circunferencia, S'_p , en el plano de emisión, como lo muestra la figura 4.13 (capítulo 4.1.4.). El área S'_p en general es función de la variable radial porque en la periferia de la superficie de recepción los puntos P_i se encuentran iluminados una fracción de las circunferencias de iluminación proyectadas. La expresión para calcular este efecto se desprende de la integral de la expresión anterior, teniendo como límites la superficie S'_p .

$$I(\rho) = \frac{1}{S_p} \int_{S'_p} E ds_e = \frac{E}{S_p} S'_p(\rho) \quad (4.5)$$

Donde:

$I(\rho)$ - Es la función de iluminación o la iluminación captada por un punto, P_i , de la superficie receptora con la coordenada ρ , por el efecto de los puntos emisores que están contenidos dentro de la superficie, S'_p .

$S'_p(\rho)$ - Es el área de la circunferencia (completa o incompleta) con su centro en la coordenada ρ de la superficie emisora que ilumina el punto P_i con la misma coordenada ρ en la superficie receptora. En realidad S'_p es la circunferencia del cono de admisión sobre la superficie de emisión. En lo posterior nos referiremos a este termino como *circunferencia de admisión*.

Una expresión que nos permite obtener la potencia que se presenta en el plano de recepción a partir de la función de iluminación, $I(\rho)$, ecuación (4.5), se muestra en la expresión (4.6).

$$dP_r = I(\rho) ds_r \quad (4.6)$$

Donde:

dP_r - Potencia elemental recibida por una superficie elemental de recepción, ds_r .

ds_r - Representa un diferencial de la superficie receptora, (superficie elemental de recepción).

Integrando la expresión (4.6) se obtiene la potencia total por efecto de la iluminación $I(\rho)$.

$$P_r = \int_{S_r} I(\rho) ds_r = 2\pi \int_0^R I(\rho) \rho d\rho \quad (4.7)$$

Es así que podemos tener una forma alternativa de expresar la ecuación (4.1), del coeficiente de transmisión, en función del resultado de la ecuación (4.7).

$$T = \frac{P_r}{P_e} = \frac{2\pi \int_0^R I(\rho) \rho d\rho}{E\pi R^2} \quad (4.8)$$

Donde:

P_e - Es la potencia emitida por la fibra emisora, calculada en la ecuación (4.3).

R - Es el radio del núcleo de las fibras emisora y receptora.

Ahora bien, el siguiente paso para encontrar el coeficiente de transmisión será encontrar la función de iluminación, $I(\rho)$, en el plano receptor.

4.1.4 CONSIDERACIONES PARA EL CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE ILUMINACIÓN.

El proceso del cálculo de la iluminación, se realizará en base al método antes planteado, con algunas variantes que facilitarán el cálculo, es decir, nuestro cálculo girará en torno a encontrar el modelo matemático que define la función de iluminación en el plano de recepción de un sensor refractométrico de intensidad con un elemento de sensibilidad prismático.

El cálculo a realizar, consistirá en el análisis en el plano de la superficie de la fibra receptora, (plano de recepción), calculando el área de traslape entre las circunferencias, producto de un punto de recepción, con la superficie circular del núcleo de la fibra emisora. El análisis antes mostrado no fue tan riguroso, por que su motivo principal fue plantear, de manera gráfica, que un punto receptor, en la superficie receptora, recibe la luz de una circunferencia de emisión (completa o incompleta), que colabora con una fracción de iluminación proporcional a la emisión total de la superficie de emisión. Y que una forma de calcularla es por medio de la integración de las áreas de traslape.

El radio de la circunferencia de iluminación proyectada en el plano de la superficie receptora, dependerá de la distancia entre la fibra emisora, la fibra receptora y además de la anchura del cono de emisión o apertura numérica de la fibra. Si variamos la anchura relativa, W/d , del elemento de sensibilidad o equitativamente la distancia relativa, L/d , entre las fibras (figura 4.3), la superficie de traslape variará también, (figura 4.13).

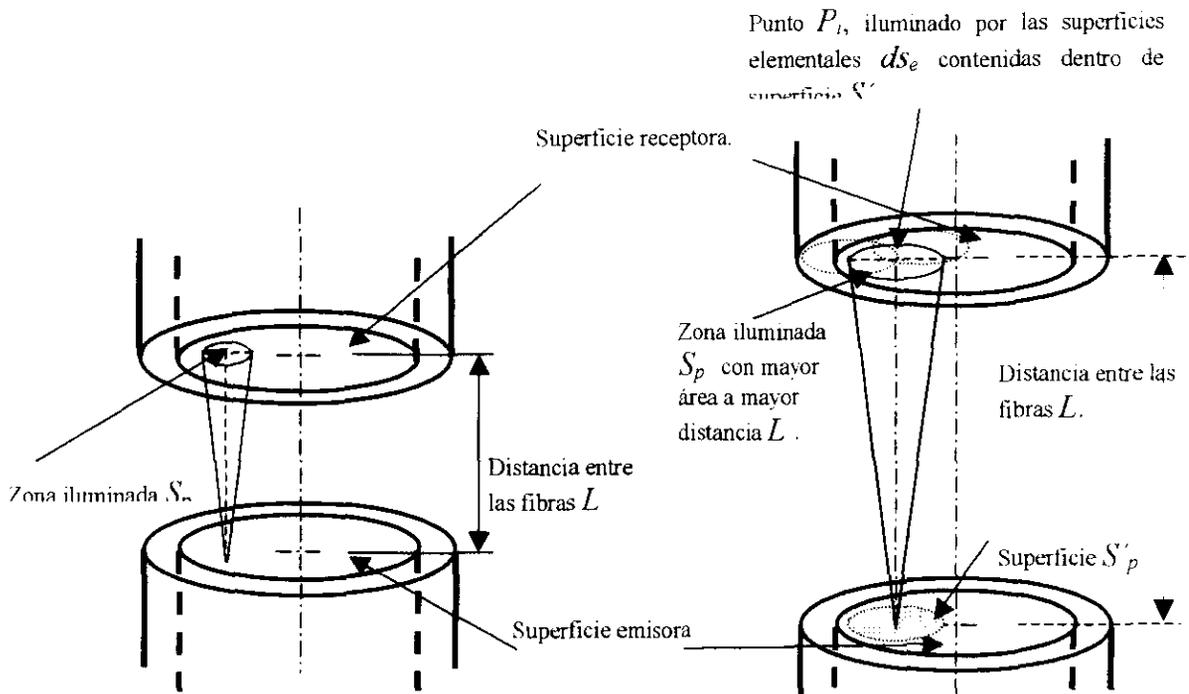


Figura 4.13 Proyección de un punto emisor sobre la fibra receptora. con diferentes valores de la distancia L . El efecto del aumento de la distancia L es el incremento del radio de la circunferencia de emisión S_p , y simultáneamente la circunferencia de admisión S'_p , desde la cual se ilumina el punto P_i .

A continuación se enunciarán las consideraciones que fueron echas y su justificación para poderlas utilizar sin que, dichas aproximaciones, provoquen errores graves.

Consideraremos fibras ópticas multimodo de índice escalonado para nuestro estudio, por lo cual, podemos aproximar la distribución de los rayos emisores elementales, ds_e (figura 4.11), en la superficie de la fibra emisora como homogénea. Por lo cual los conos que forma cada ds_e , tiene la misma apertura angular, equivalente a la apertura numérica de fibra óptica; y en conjunto todas las ds_e que forman la superficie de emisión generan un cono con la misma apertura (figura 4.12).

Aproximamos la iluminación en el plano de la fibra óptica receptora ó la iluminación del cono de cada punto elemental, en el plano receptor, como iluminación homogénea, pero esta aproximación se puede utilizar para ángulos pequeños donde: $\text{sen } \theta \approx \theta$.

Estas aproximaciones se utilizan para simplificar la complejidad de los cálculos.

Como punto inicial definiremos el sistema principal (x, y) cartesiano, en el centro del núcleo de la fibra receptora, que está representado como la superficie apta para captar la iluminación provista por la superficie de emisión (figura 4.14). El sistema subordinada (x', y') , es paralelo al sistema principal, situado en el origen de la fibra emisora. El núcleo de la fibra óptica emisora será definido como la circunferencia de radio R , que se encuentra situada en el origen de este sistema subordinada.

Un punto receptor, P_i , orientado en el sistema principal (x, y) , (figura 4.14), observa una circunferencia de emisión con el radio r (cuyo centro coincide con este punto receptor P_i), que está en el plano del sistema subordinada (x', y') .

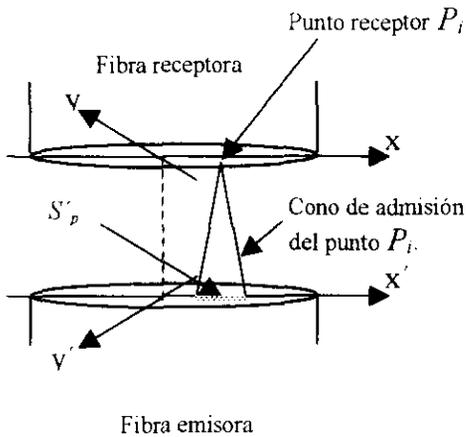


Figura 4.14. Dos sistemas de coordenadas: el sistema principal (x, y) en el plano de recepción y el sistema subordinado (x', y') en el plano de emisión.

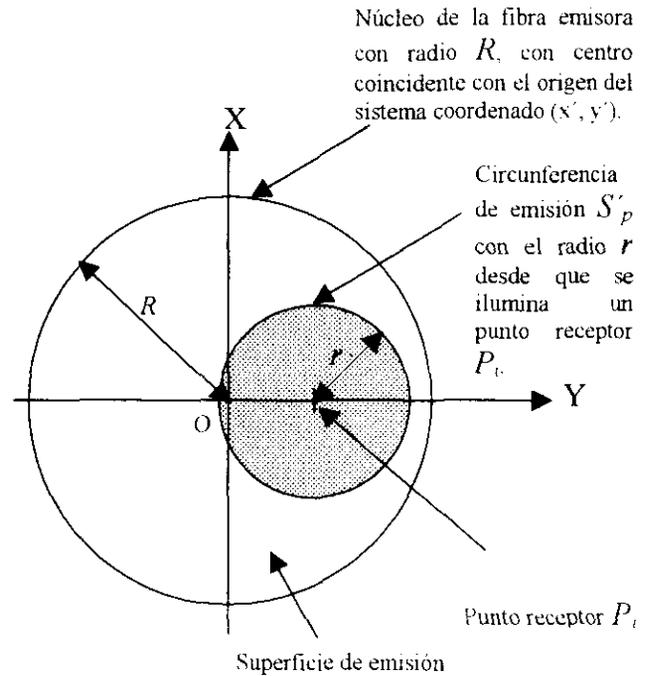


Figura 4.15 Representación en el sistema de referencia (X, Y) una circunferencia de emisión que ilumina un punto receptor (que está en el plano de recepción).

Se ha recurrido al uso de un sistema de coordenadas cartesianas por que después de la investigación de varias opciones como, coordenadas polares u otra variante, se llegó a la conclusión de que el sistema de coordenadas que facilita este cálculo son la coordenadas cartesianas; es decir las expresiones resultan menos "complejas" utilizando coordenadas cartesianas.

La figura 4.15 provee el diagrama que se observaría si estuviéramos situados desde la fibra receptora, en dirección de la fibra emisora; con lo cual hacemos coincidir los ejes de dos sistemas principal (x, y) y subordinaria (x', y') , en un mismo sistema de referencia (X, Y) . Entonces podemos observar, en un plano, dos circunferencias; una por efecto de la proyección del cono de admisión de un punto receptor y la otra que corresponde a la sección del núcleo la fibra emisora. El área de traslape entre las dos circunferencias representa la magnitud de emisión que puede captar un punto receptor desde la superficie emisora, y que está en proporción directa con la magnitud de iluminación en este punto.

4.1.5 DEFINICIÓN DE ZONAS DE SEPARACIÓN ENTRE LAS FIBRAS.

Para obtener la expresión general que nos proporcione la función de iluminación, trataremos este problema en tres partes, representadas en tres intervalos, que simplificarán el manejo de las expresiones. A continuación se describe cada parte con sus características y la forma de calcular la expresión correspondiente de la función de iluminación general por intervalos.

- **zona cercana:** trata el intervalo donde el radio de la circunferencia de emisión, r , varía en el intervalo: $0 \leq r \leq R$; es decir, la distancia L entre las fibras varía desde cero hasta que la circunferencia de emisión S_p , que observa un elemento de superficie receptora será igual al radio del núcleo la fibra receptora, R .

- **zona intermedia:** se analiza el intervalo donde el radio r varía en el intervalo: $R \leq r \leq 2R$.

- **zona lejana:** atiende el intervalo donde el radio r varía en el limite de: $2R \leq r$.

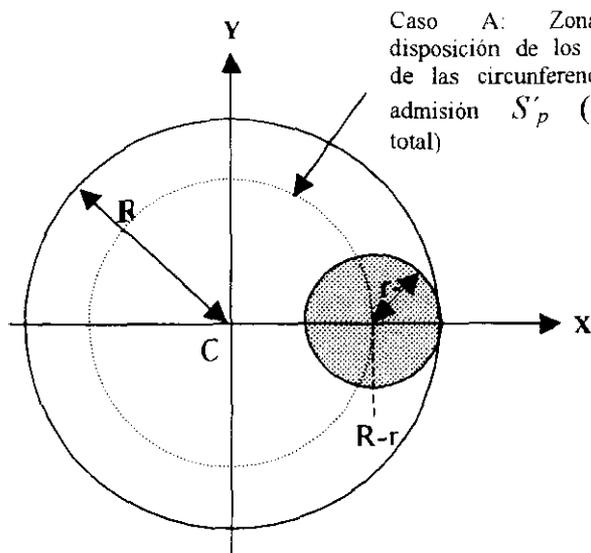
ZONA CERCANA.**CASO A**

El caso A, (figura 4.16), muestra como calculamos la iluminación, y en consecuencia la potencia, que proporcionan las superficies elementales ds_e , situadas en las circunferencias S'_p del plano emisor cuyos centros se encuentran en el intervalo 0 a $R-r$. De la ecuación (4.5) y apoyándonos en la figura 4.16 se tiene lo siguiente:

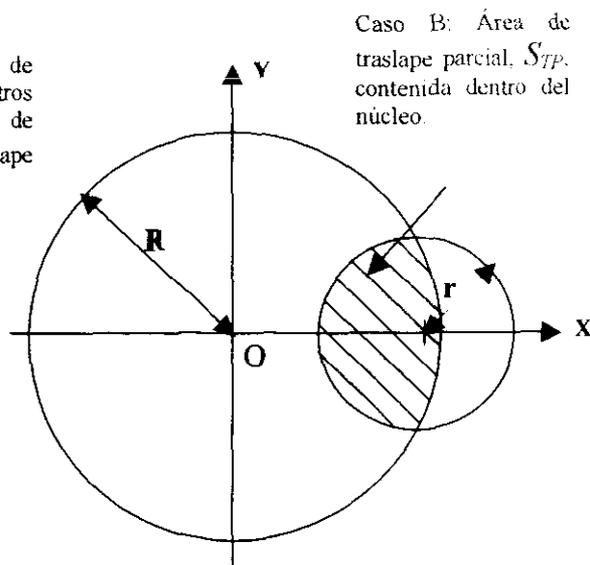
$$I(\rho) = \frac{E}{S_p} \int_{S'_p} ds_e = E \frac{S'_p}{S_p} = E \frac{\pi r^2}{\pi r^2} = E \quad \text{Si } 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \rho \leq R-r \quad (4.9)$$

La función de iluminación de las superficies elementales ds_e situadas en las circunferencias S'_p que tienen centro entre 0 y $R-r$, es una constante, como era de esperarse, ya que para cada punto emisor se presenta el mismo valor de iluminación que es igual a E .

Las figuras 4.16 y 4.17, muestran los casos donde el punto de recepción varía su posición sobre el eje X.



Caso A: Zona de disposición de los centros de las circunferencias de admisión S'_p (traslape total)



Caso B: Área de traslape parcial, S_{TP} , contenida dentro del núcleo.

Figura 4.16 Se muestra el área de una circunferencia S'_p totalmente contenida en la zona de emisión.

Figura 4.17 Se muestra el área de traslape parcial contenida en la zona de emisión.

CASO B

La figura 4.17 muestra el caso B donde la circunferencia de emisión S_p , está parcialmente iluminando, (o traslapando), a la circunferencia de recepción que, representa el núcleo de la fibra receptora. La iluminación que proporcionan el conjunto de todas las superficies elementales ds_e que están en una circunferencia de admisión S'_p con centro dentro del intervalo $R-r$ a R se calcula de manera general de la siguiente forma:

Utilizando nuevamente la ecuación (4.5):

$$I(\rho) = \frac{E}{S_p} \int_{s'_p} ds_e = E \frac{S_{TP}}{S_p} \quad \text{Si } 0 \leq r \leq R, \quad \rho \geq R-r \quad (4.10)$$

Donde:

S_{TP} - Es una función de la variable radial, ρ , que representa el área de traslape parcial de una circunferencia de admisión S'_p con el núcleo de la fibra emisora, cuando la coordenada radial, ρ , de su centro está en el intervalo $R-r$ a R . En lo posterior nos referiremos a este termino como *traslape parcial*.

A partir de las ecuaciones (4.9, 4.10) y recurriendo a la ecuación (4.8) se puede calcular la expresión general de la potencia sobre la superficie de recepción S_r , es decir la potencia recibida, P_r , para la zona cercana ($0 \leq r \leq R$), como se muestra a continuación.

$$P_r = 2\pi \int_{S_r} I(\rho) \rho d\rho = 2\pi E \left[\int_0^{R-r} \rho d\rho + \frac{1}{S_p} \int_{R-r}^R S_{TP} \rho d\rho \right] = E\pi \left[(R-r)^2 + \frac{2}{S_p} \int_{R-r}^R S_{TP} \rho d\rho \right]$$

$$P_r = E\pi(R-r)^2 + \frac{2E\pi}{S_p} \int_{R-r}^R S_{TP} \rho d\rho$$

Si $0 \leq r \leq R$, $\rho \geq 0$ (4.11)

ZONA INTERMEDIA

La zona intermedia se presenta cuando la distancia, L , entre las fibras, emisora y receptora, es tal que un punto P_i en el plano receptor acepta la luz de una circunferencia de emisión S_p con radio r en el intervalo: $R \leq r \leq 2R$, del plano emisor. El análisis se divide en dos casos: caso C ($0 \leq \rho \leq r - R$) y caso D ($r - R \leq \rho \leq R$).

CASO C

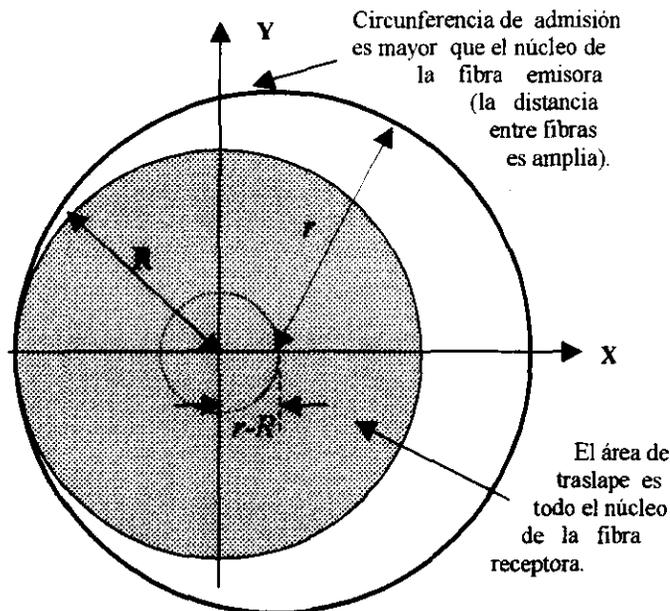


Figura 4.18 El núcleo de la fibra emisora es menor que circunferencia de admisión y está completamente dentro de ella.

El caso C se encuentra representado gráficamente en la figura 4.18. La circunferencia de admisión S'_p siempre es mayor que la circunferencia que representa el núcleo de la fibra emisora, con lo cual, el núcleo de la fibra emisora puede estar contenido dentro de la circunferencia de admisión, siempre y cuando, el centro de esa circunferencia mantenga su centro dentro del intervalo, 0 a $r-R$, por lo cual podemos calcular la iluminación proporcionada por las superficies elementales, ds_e , que están en esa circunferencia a partir de la expresión (4.5) y con apoyo en la figura 4.18.

$$I(\rho) = \frac{E}{S_p} \int_{S'_p} ds_e = E \frac{S_{TP}}{S_p} = E \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = E \frac{R^2}{r^2} \quad \text{Si } R \leq r \leq 2R, \quad 0 \leq \rho \leq r - R \quad (4.12)$$

CASO D

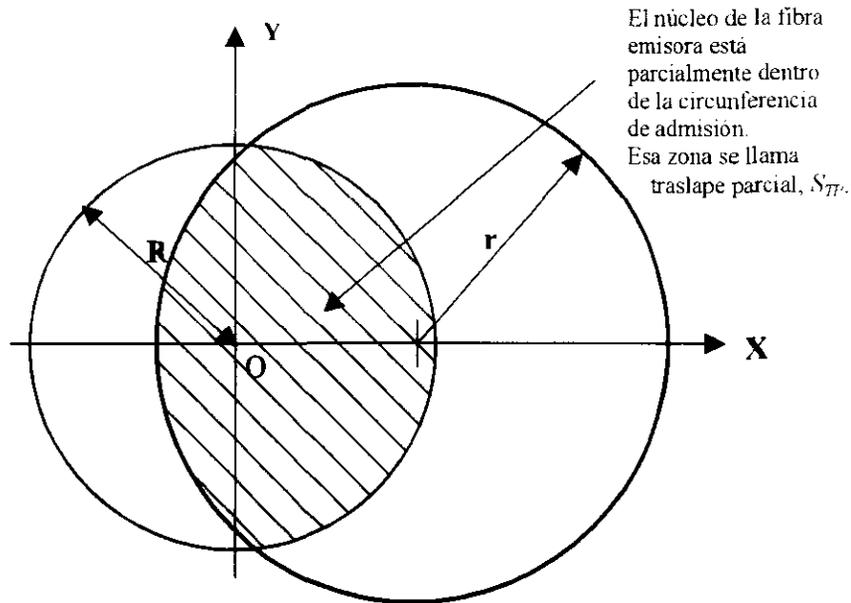


Figura 4.19 El núcleo de la fibra emisora es menor que circunferencia de admisión y está parcialmente dentro de ella.

El caso D se encuentra representado gráficamente en la figura 4.19. La circunferencia de admisión S'_p como en caso pasado es mayor que la circunferencia que representa el núcleo de la fibra emisora, pero, el núcleo de la fibra emisora está contenido parcialmente dentro de la circunferencia de admisión. Eso significa que esa circunferencia mantenga su centro desde $r-R$ y mas, por lo cual podemos calcular la iluminación proporcionada por las superficies elementales, ds_e , que están en esa circunferencia a partir de la expresión (4.5) y con apoyo en la figura 4.19.

$$I(\rho) = \frac{E}{S_p} \int_{s_p}^{s_p'} ds_e = E \frac{S_{TP}}{S_p} \quad \text{Si } R \leq r \leq 2R, \quad \rho \geq r - R \quad (4.13)$$

A partir de las ecuaciones (4.12, 4.13) y recurriendo a la ecuación (4.8) se puede calcular la expresión general de la potencia óptica sobre la superficie de recepción, S_r , es decir la potencia recibida o captada, P_r , en el núcleo de la fibra receptora para la zona intermedia, como se muestra a continuación.

$$P_r = 2\pi \int_{S_r} I(\rho) \rho d\rho = 2\pi E \left[\int_0^{r-R} \frac{R^2}{r^2} \rho d\rho + \frac{1}{S_p} \int_{r-R}^R S_{TP} \rho d\rho \right] = \pi E \frac{R^2}{r^2} (r-R)^2 + \frac{2\pi E}{\pi r^2} \int_{r-R}^R S_{TP} \rho d\rho$$

$$\boxed{P_r = E\pi \frac{R^2}{r^2} (r-R)^2 + \frac{2E}{r^2} \int_{r-R}^R S_{TP} \rho d\rho} \quad \text{Si } R \leq r \leq 2R, \quad \rho \geq r - R \quad (4.14)$$

ZONA LEJANA.

Se presenta cuando la distancia entre las fibras, es tal que, cualquier punto del núcleo de la fibra receptora superficie capta la luz de todo el núcleo de la fibra emisora. Eso es posible cuando el radio de la circunferencia de admisión, r , es en dos veces mayor que el radio del núcleo de la fibra emisora. A continuación se tiene la forma en que se calcula la función de iluminación para este análisis.

De la ecuación (4.5) podemos obtener la iluminación captada por la fibra receptora cuando se cumple el radio de la circunferencia de admisión varía en el intervalo $r \geq 2R$.

$$I(\rho) = \frac{E}{S_p} \int_{s_p}^{s_p'} ds_e = E \frac{S_{TP}}{S_p} = E \frac{R^2}{r^2} \quad \text{Si } r \geq 2R, \quad \rho \geq 0 \quad (4.14)$$

A partir de la ecuación (4.14) y recurriendo a la ecuación (4.8) se puede calcular la expresión general de la potencia óptica sobre la superficie de recepción S_r , es decir la potencia recibida o captada, P_r , en el núcleo de la fibra receptora para la zona cercana, como se muestra a continuación.

$$P_r = 2\pi \int_{S_r} I(\rho) \rho d\rho = 2\pi E \frac{R^2}{r^2} \int_0^R \rho d\rho = E\pi \frac{R^2}{r^2}$$

$$\boxed{P_r = E\pi \frac{R^2}{r^2}} \quad \text{Si } r \geq 2R, \quad \rho \geq 0 \quad (4.15)$$

LAS TRES ZONAS DE SEPARACIÓN EN CONJUNTO

Finalmente es posible tener una ecuación general del coeficiente de transmisión en tres intervalos, correspondientes a cada análisis por partes que se realizó. Se puede obtener el coeficiente de transmisión con base en las ecuaciones (4.11), (4.13), y (4.15) para cada intervalo, sustituyéndolas en la ecuación (4.8), de lo cual se obtiene la siguiente ecuación general:

$$T = \begin{cases} \frac{E\pi(R-r)^2 + \frac{2E\pi}{S_p} \int_{R-r}^R S_{TP} \rho d\rho}{E\pi R^2} = \frac{(R-r)^2}{R^2} + \frac{2}{\pi R^2 r^2} \int_{R-r}^R S_{TP} \rho d\rho & \text{Si } 0 \leq r \leq R \\ \frac{E\pi \frac{R^2}{r^2} (r-R)^2 + \frac{2E}{r^2} \int_{r-R}^R S_{TP} \rho d\rho}{E\pi R^2} = \frac{(r-R)^2}{r^2} + \frac{2}{\pi R^2 r^2} \int_{r-R}^R S_{TP} \rho d\rho & \text{Si } R \leq r \leq 2R \\ \frac{E\pi \frac{R^4}{r^2}}{E\pi R^2} = \frac{R^2}{r^2} & \text{Si } r \geq 2R \end{cases} \quad (4.16)$$

4.2 CÁLCULO DE LAS ÁREAS DE TRASLAPE

4.2.1 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS Y PUNTOS PARA EL CÁLCULO.

Ahora definiremos algunos puntos importantes dentro de la figura, que nos ayudaran a simplificar el cálculo.

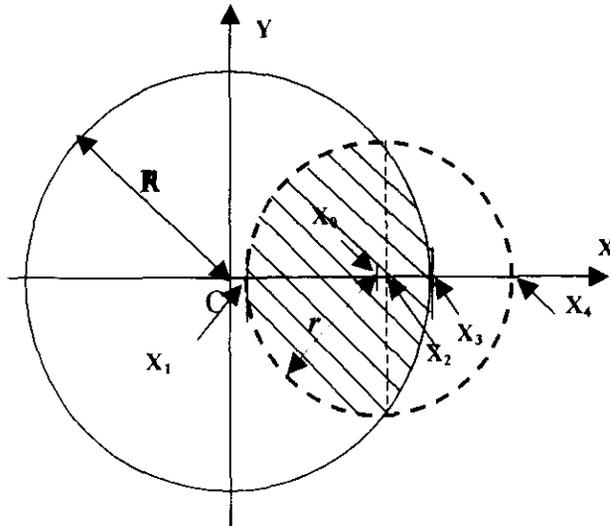


Figura 4.25 Definición de puntos de interés para nuestro cálculo.

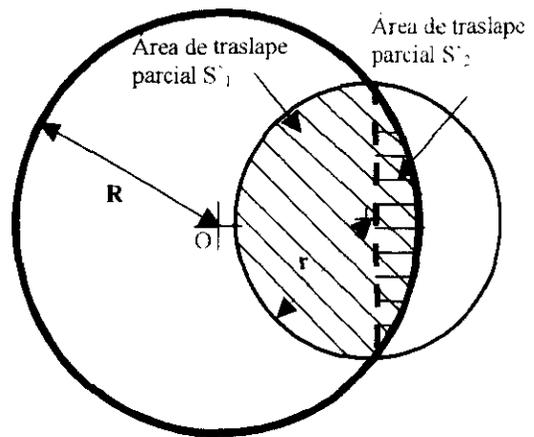


Figura 4.26 Se muestra un área de traslape seccionada.

De la figura 4.25, las ecuaciones de las circunferencias correspondientes, al núcleo de la fibra receptora o zona de recepción y la zona de iluminación de un punto emisor se muestran a continuación:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{Ecuación de la circunferencia con radio, } R, \text{ constante, que representa la superficie de la zona de admisión.} \quad (4.20)$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \quad \text{Ecuación de la circunferencia con radio, } r, \text{ variable; que representa la proyección de un punto emisor sobre el plan o receptor, de tal manera que su centro, } (x_0, 0), \text{ cambia de posición sobre el eje X, figura 4.25.} \quad (4.21)$$

CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE INTERÉS

Cálculo de x_0 :

x_0 es el centro de la circunferencia, que representa la iluminación que un punto emisor proyecta sobre el plano receptor. De la figura 4.25 se puede obtener la expresión siguiente:

$$\boxed{x_0 = R + r} \quad (4.22)$$

Cálculo de x_1 :

De la figura 4.25 se observa

$$\boxed{x_1 = x_0 - r} \quad (4.23)$$

Cálculo de x_2 :

x_2 es la intersección de la circunferencia de iluminación, $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$, y la circunferencia que representa la zona de admisión, $x^2 + y^2 = R^2$.

De las ecuaciones (4.20) y (4.21) despejamos "y" e igualamos las expresiones, de lo cual se tiene:

Para la ecuación (4.20)

$$y^2 = R^2 - x^2 \quad (4.24)$$

Para la ecuación (4.21)

$$y^2 = r^2 - (x - x_0)^2 \quad (4.25)$$

Igualando las expresiones (4.24) y (4.25) se tiene:

$$r^2 - (x - x_0)^2 = R^2 - x^2$$

Reduciendo términos y despejando x queda:

$$x = \frac{(x_0)^2 + R^2 - r^2}{2x_0} \quad \text{que originalmente se definió como } x_2$$

$$\boxed{x_2 = \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0}} \quad (4.26)$$

Intersección entre la circunferencia que representa la zona de iluminación de un punto emisor y la circunferencia que representa la zona de admisión.

Cálculo de x_3 :

x_3 es la intersección de la circunferencia que representa la zona de admisión y el eje x.

$$\boxed{x_3 = R} \quad (4.27)$$

Cálculo de x_4 :

De la figura 4.25 se observa que x_4 se define como:

$$\boxed{x_4 = x_0 + r} \quad (4.28)$$

CÁLCULO DE LA EXPRESIÓN GENERAL DE LAS ÁREAS DE TRASLAPE PARCIAL S'_1 y S'_2

Queda claro de la figura 4.26 que el área de iluminación que está contenida dentro del núcleo de la fibra receptora es la suma de S'_1 y S'_2 , esta suma es igual a S_{TP} de la sección anterior (figuras 4.17).

$$S_{TP} = S'_1 + S'_2$$

S'_1 se puede calcular como el área de la circunferencia de iluminación en intervalo: $[x_1, x_2]$, figura 4.26. De la ecuación (4.24) se obtiene:

$$y = \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \quad \text{Describe la semicircunferencia de iluminación que proyecta una superficie elemental } ds, \text{ o punto emisor, sobre el plano receptor, localizándola sobre el eje x.} \quad (4.29)$$

S'_1 se calcula de la siguiente forma:

$$S'_1 = 2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} dx \quad \text{Ecuación para calcular el área de traslape parcial } S'_1. \quad (4.30)$$

S'_2 se puede calcular como el área de la circunferencia que representa la zona de admisión en el intervalo $[x_2, x_3]$, de la figura 4.26.

De la ecuación (4.23)

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{Describe la semicircunferencia, ubicada en el origen del sistema (X, Y), que representa la zona de admisión de la fibra receptora equivalente a su núcleo.} \quad (4.31)$$

S_2' se calcula de la siguiente forma:

$$S_2' = 2 \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad \text{Ecuación para calcular el área de traslape parcial } S_2'. \quad (4.32)$$

4.2.2 CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN CON LOS PARÁMETROS DEL SENSOR.

Utilizaremos tres casos para obtener el coeficiente de transmisión del sensor, el caso 1 cuando r es menor que R , que llamaremos *zona cercana* por la relación que guarda la distancia, L , entre las fibras, con el radio de la circunferencia de iluminación, (o también llamada proyección de un punto emisor); el segundo caso cuando r es mayor que R y además, r menor que $2R$ que nos referiremos a este intervalo como "*zona intermedia*"; y caso tres si r mayor de $2R$ que se le llamará *zona lejana*.

Esta distinción por intervalos tiene total correlación con los análisis anteriores definidos en el apartados pasados de este capítulo, tan es así que, los casos en cada intervalo se definen bajo los mismos criterios.

4.2.2.1 ANÁLISIS PARA LA ZONA CERCANA: $0 \leq r \leq R$.

Se divide en caso a y caso b; donde el caso a representa el área de traslape cuando existe traslape total; el centro, x_0 , de la circunferencia de radio r expresión (4.21), varía en el intervalo $0 \leq x_0 \leq R-r$. Como se ve en la figura 4.27.

El caso b representa el área de traslape cuando solo se tiene una fracción de traslape o traslape parcial, es decir, cuando la circunferencia de iluminación, con radio r , ilumina fuera del núcleo de la fibra receptora, por tanto no tenemos traslape total, el intervalo en donde varía es: $R-r < x_0 \leq R$.

El límite inferior se define ya que cuando el círculo de radio r o circunferencia de iluminación, tiene su centro en $R-r$, y más adelante, ya no existe área de traslape total; el límite superior se define a partir de la consideración de que los planos de emisión y recepción los hacemos coincidir, (en perspectiva), y como los núcleos de las fibras son iguales, el punto emisor, (también llamado superficie elemental cuando $ds \rightarrow 0$), más separado del centro de la fibra que puede emitir energía luminosa, esta situado en el borde del núcleo, es decir, sobre la línea de la circunferencia de radio " R " que representa el núcleo de las fibras, expresión (4.20).

De la adición de los casos a y b se obtiene la función de iluminación en el intervalo $0 \leq r \leq R$.

Caso a: $0 \leq r \leq R; 0 \leq x_0 \leq R-r$.

Caso b: $0 \leq r \leq R; R-r < x_0 \leq R-r$

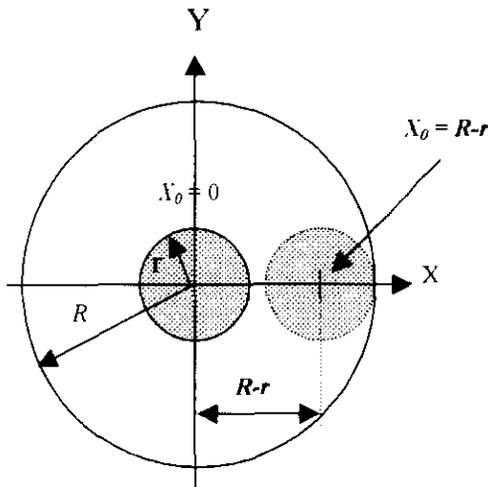


Figura 4.27 Área de traslape total.

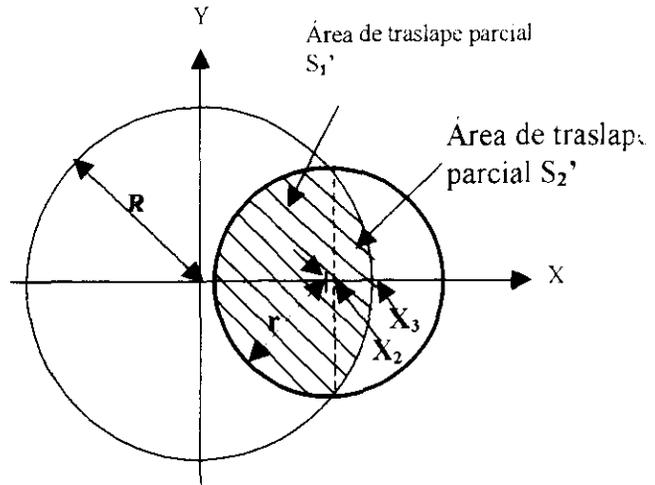


Figura 4.28 Área de traslape parcial.

CASO A

Condiciones del cálculo: $0 \leq r \leq R; 0 \leq x_0 \leq R-r$.

El área de traslape según la ecuación (4.4); cuando el punto emisor proyecta una circunferencia de iluminación que esta totalmente contenida en el interior de la circunferencia que representa el núcleo de la fibra receptora, (figura 4.27), puede ser calculada a partir de la integral de la circunferencia de radio, r , ecuación (4.29) que a su vez deriva de la expresión (4.20), (circunferencia que representa la iluminación que proyecta un punto emisor en la superficie de admisión). Si integramos la ecuación (4.29), correspondiente a la semicircunferencia que proyecta un punto emisor, se obtiene la mitad del área de traslape para un punto emisor, por lo cual multiplicando por 2 esa integral y así se obtiene el área total de traslape, como se muestra a continuación.

Pero como sabemos, el área de traslape para este intervalo, es constante por lo cual podemos generalizar la expresión siguiente para todo el intervalo analizado.

$$S_{T1}(x_0) = 2 \int_{x_0-r}^{x_0+r} \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} dx = \pi r^2$$

Ecuación para calcular el área de traslape de los puntos emisores, que proyecta una circunferencia de iluminación que esta totalmente contenida en la zona de admisión. (4.33)

La expresión (4.33), es el efecto de un punto emisor sobre la zona de admisión, para el intervalo de $0 \leq x_0 \leq R-r$, para obtener la función de iluminación para este caso recurriremos a la expresión (4.9).

$$I(x_0) = \frac{E}{S_p} [S_{T1}(x_0)] = \frac{E}{\pi r^2} \pi r^2 = E$$

La función que describe la potencia recibida para la ecuación anterior es:

$$P_r = 2\pi \int_0^{R-r} [I(x_0)] x_0 dx_0$$

$$P_r = 2\pi \int_0^{R-r} [E] x_0 dx_0 \quad \text{Ecuación para calcular la potencia recibida de los puntos con centro contenido en el intervalo } 0 \leq r \leq R. \quad (4.34)$$

(figura 4.27).

Resolviendo la ecuación (4.34) tenemos:

$$P_r = 2\pi \int_0^{R-r} [E] x_0 dx_0 = \pi(R-r)^2 \quad (4.35)$$

$$\boxed{P_r = \pi(R-r)^2} \quad \text{Potencia recibida por la emisión de los puntos emisores con centro contenido en el intervalo } 0 \leq r \leq R. \quad (4.36)$$

Solución caso A.

CASO B

Condiciones del cálculo: $R-r < x_0 \leq R$; $0 \leq r \leq R$

El área de traslape, cuando se tiene traslape parcial, S_{TP} , puede ser calculada tomando en cuenta la figura 4.28, donde el área de traslape que provee un punto de emisión, es la suma de las áreas de traslape parcial S_1' + S_2' ; para obtener el efecto de los puntos cuando $R-r < x_0 \leq R$, se recurre a la siguiente expresión.

$$S_{TP}(x_0) = S_1'(x_0) + S_2'(x_0) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} dx + 2 \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Por simplicidad y manejo de expresiones solo usaremos los términos S_1' y S_2' .

$$S_{TP}(x_0) = S_1' + S_2' \quad \text{Ecuación para calcular el área de traslape parcial de los puntos contenidos en la superficie de emisión, entre las circunferencias de radio } R-r \text{ y } R. \quad (4.37)$$

Para calcular la iluminación de para este caso recurrimos a la ecuación (4.10) sustituyendo en ésta, el valor de la ecuación (4.37), de lo cual se obtiene:

$$I(x_0) = \frac{E}{S_p} S_{TP}(x_0) = \frac{E}{\pi r^2} (S'_1 + S'_2)$$

Si llamamos a $2S_1 = 2S'_1$ y $2S_2 = S'_2$ sustituyendo en la ecuación (4.37) se tiene:

$$I(x_0) = \frac{E}{\pi r^2} (S'_1 + S'_2) = \frac{2E}{\pi r^2} (S_1 + S_2) \quad \text{Ecuación para calcular la función de iluminación de los puntos con centro contenido en el intervalo } R-r < x_0 \leq R: \text{ solución del caso B.} \quad (4.38)$$

A partir de la función de iluminación descrita para este caso, expresión (4.38), podemos calcular la potencia recibida para la zona entre $R-r$ y R , con apoyo en la expresión (4.12), que da por resultado la siguiente expresión.

$$P_r = \frac{E}{S_p} S_{TP} = \frac{E}{\pi r^2} 2\pi \int_{R-r}^R (S'_1 + S'_2) x_0 dx_0$$

reduciendo términos tenemos:

$$P_r = \frac{E}{\pi r^2} 2\pi \int_{|R-r|}^R (S'_1 + S'_2) x_0 dx_0 = \frac{E}{\pi r^2} 2\pi \int_{|R-r|}^R 2(S_1 + S_2) x_0 dx_0 = \frac{4}{r^2} \int_{|R-r|}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0$$

De donde el valor absoluto que es aplicado en $R-r$, se justificará posteriormente, sin embargo no afecta nuestro cálculo en este momento, por que las condiciones del cálculo descritas para este caso nos indican que $R-r < x_0 \leq R$ y $0 \leq r \leq R$, por lo que $|R-r| = R-r$, es decir, r siempre es menor que R , (para estas condiciones de cálculo), por lo tanto $R-r$ es siempre positivo.

Finalmente:

$$P_r = \frac{4}{r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 \quad (4.39)$$

La ecuación general que describe la potencia recibida, para la zona cercana, estará dada, por la adición de los resultados de caso A y caso B, correspondientes a las expresiones (4.36) y (4.39).

$$P_r = \pi(R-r)^2 + \frac{4}{r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 \quad (4.40)$$

Ecuación para calcular la potencia
recibida para la ZONA
CERCANA

La ecuación (4.40), representa la potencia recibida por la fibra receptora cuando, $0 \leq r \leq R$, pero recordemos que las expresiones, S_1 y S_2 , son funciones de x_0 , como se ve en la expresión (4.37).

$$P_r = \pi(R-r)^2 + \frac{4}{r^2} \int_{R-r}^R [S_1(x_0) + S_2(x_0)] x_0 dx_0 \quad \text{para } 0 \leq r \leq R \quad (4.41)$$

De la ecuación (4.3), P_e , (potencia emitida por la fibra emisora) y el área emisora está dada por la superficie de la del núcleo de la fibra emisora, como se muestra a continuación.

$$P_e = \pi R^2 \quad \text{Ecuación para calcular la potencia provista por el núcleo de la fibra emisora.} \quad (4.42)$$

Ahora bien, sustituyendo la ecuación (4.41) y la ecuación (4.42) en la ecuación (4.1) obtendremos el modelo matemático para calcular el coeficiente de transmisión del sensor para la zona cercana, cuando se cumple que, $0 \leq r \leq R$.

$$T = \frac{P_r}{P_e} = \frac{\pi(R-r)^2 + \frac{4}{r^2} \int_{R-r}^R [S_1(x_0) + S_2(x_0)] x_0 dx_0}{\pi R^2} \quad \text{para } 0 \leq r \leq R$$

$$T = \frac{\pi(R-r)^2}{\pi R^2} + \frac{4}{\pi R^2 r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 \quad \text{si } 0 \leq r \leq R \quad (4.43)$$

**ECUACIÓN PARA CALCULAR EL
COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN EN
LA ZONA CERCANA.**

4.2.2.2 ANÁLISIS PARA LA ZONA INTERMEDIA: $R < r \leq 2R$.

Dividiremos el caso 2 en caso C y caso D, de los cuales el caso C se presenta cuando el punto emisor esta a una distancia dada, que su efecto sobre la zona de admisión es una circunferencia de iluminación mayor que el área o zona de admisión, (es decir el núcleo de la fibra receptora), la circunferencia de radio r , al ser mayor que la circunferencia R , es capaz de albergar en su interior, completamente, a esta última, cuando el centro, x_0 , de la circunferencia de radio, r , o zona de admisión esta en el intervalo $0 \leq x_0 \leq r - R$, como se ve en la figura 4.29. El caso D lo definimos, a partir de que la circunferencia de radio r , no alberga totalmente en su interior a la circunferencia de radio R , esto se puede analizar siguiendo el mismo procedimiento que el realizado para el caso B, en donde: $r - R < x_0 \leq R$, figura 4.30.

Sumando el resultado del caso C y caso D se obtiene la atenuación en el sensor en el intervalo: $R < r \leq 2R$

Caso C: $R < r \leq 2R$; $0 \leq x_0 \leq r - R$.

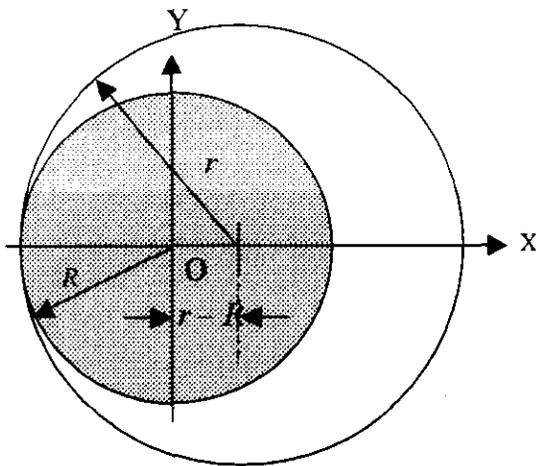


Figura 4.29 Área de traslape total, núcleo de la fibra receptora totalmente contenido dentro de la proyección de la iluminación de un punto emisor.

Caso D: $R < r \leq 2R$; $r - R < x_0 \leq R$.

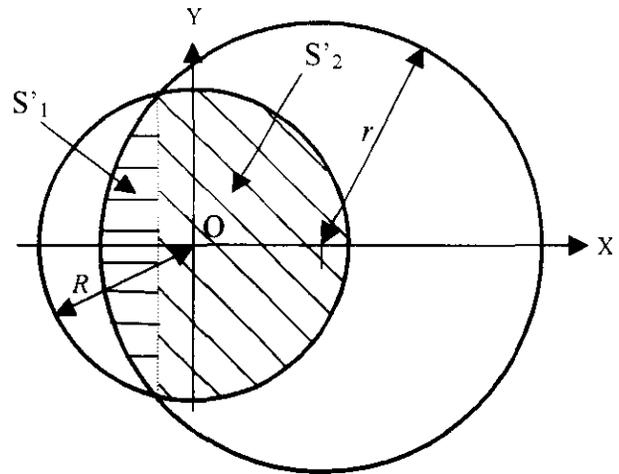


Figura 4.30 Área de traslape parcial. Núcleo de la fibra receptora menor que la proyección de iluminación de un punto emisor

CASO C

Condiciones del cálculo: $R < r \leq 2R$; $0 \leq x_0 \leq r - R$.

Para calcular el área de traslape, bajo las condiciones del caso C, es necesario apoyarnos en la figura 4.29 que ilustra este caso. Podemos notar que la circunferencia de iluminación, (circunferencia de radio r), es siempre mayor que la circunferencia que representa la zona de admisión o núcleo de la fibra receptora, por tal motivo la superficie de traslape es exactamente

la circunferencia de la zona de admisión o núcleo de la fibra receptora, (circunferencia de radio, R). La superficie de traslape que estamos buscando, es S_{T_2} , a la que ya nos referimos, pero para este caso, (en coordenadas cartesianas), podemos calcular la expresión general de acuerdo con la siguiente ecuación.

$$S_{T_2} = 2 \int_{x_0-r}^{x_0+r} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

O bien, teniendo en cuenta que la zona de traslape es la circunferencia de radio R o núcleo de la fibra receptora la integral puede tener los siguientes límites.

$$S_{T_2} = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$S_{T_2} = \pi R^2 \quad \text{Área de traslape de los punto emisores, que proyecta una circunferencia de iluminación que contiene totalmente en su interior la zona de admisión o núcleo de la fibra receptora. (figura 4.29)} \quad (4.44)$$

Tenemos la función que representa el área de traslape para el intervalo de, $0 \leq x_0 \leq r - R$, ahora podemos calcular la expresión general que describa la función de iluminación para el mismo intervalo a partir de la ecuación general, calculada para bajo las misma consideraciones, expresión (4.13), y sustituyendo la expresión (4.44) en (4.13) tenemos la función de iluminación.

$$I(\rho) = \frac{E}{\pi r^2} S_{T_2} = \frac{E}{\pi r^2} \pi R^2$$

$$I(\rho) = \frac{E}{r^2} R^2 \quad \text{Ecuación general para calcular la iluminación de los puntos con centro contenido en el intervalo } R < r \leq 2R. \text{ (figura 4.29)} \quad (4.45)$$

La expresión (4.45) sustituida en la ecuación (4.6), nos proporciona la potencia que reciben los puntos receptores para el intervalo de 0 a $R-r$; la siguiente ecuación lo muestra:

$$P_r = \int Ids = 2\pi \int_0^{r-R} \left(\frac{ER^2}{r^2} \right) x_0 dx_0 \quad (4.46)$$

Resolviendo la ecuación (4.46), obtenemos la potencia recibida

$$\boxed{P_r = \frac{\pi ER^2}{r^2} (R-r)^2} \quad \text{Ecuación para el cálculo de la potencia recibida por los puntos con centro contenido en el intervalo, } 0 \leq x_0 \leq r - R. \text{ (figura 4.29)} \quad (4.47)$$

CASO D

Condiciones del cálculo: $R < r \leq 2R$, $r - R < x_0 \leq R$.

El área de traslape, bajo estas condiciones, se puede calcular tomando en cuenta la figura 4.30, donde el área de traslape de los punto emisores, es la suma de $S_{TP} = (S_1' + S_2')$. Este caso guarda total relación con el caso b, descrito anteriormente.

La superficie de traslape entre la circunferencia de iluminación y la circunferencia que representa el núcleo de la fibra receptora es parcial y es la misma expresión que fue utilizada en la ecuación (4.14), es decir, S_{TP} , pero en coordenadas cartesianas se tiene:

$$S_{TP}(x_0) = S_1'(x_0) + S_2'(x_0) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} dx + 2 \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Por simplicidad y manejo de expresiones, nuevamente, usaremos los términos S_1' y S_2' , dando por entendido que la expresiones son funciones de x_0 .

$$S_{TP}(x_0) = S_1' + S_2' \quad \text{Ecuación para calcular el área de traslape de los puntos contenidos en la superficie de emisión entre las circunferencias de radio } r - R \text{ y } R. \quad (4.48)$$

Para calcular la iluminación, en este caso, recurrimos a la ecuación (4.14) sustituyendo en ésta, el valor de la ecuación (4.48), de lo cual se obtiene:

$$I(x_0) = \frac{E}{S_p} S_{TP}(x_0) = \frac{E}{\pi r^2} (S_1' + S_2')$$

Si llamamos a $2S_1 = 2S_1'$ y $2S_2 = S_2'$ sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$I(x_0) = \frac{E}{\pi r^2} (S_1' + S_2') = \frac{2E}{\pi r^2} (S_1 + S_2) \quad (4.49)$$

A partir de la función de iluminación descrita para este caso, expresión (4.49), podemos calcular la potencia recibida para la zona entre $r - R$ a R , que da por resultado la siguiente expresión siguiente.

$$P_r = \frac{E}{S_p} S_{TP} = \frac{E}{\pi r^2} 2\pi \int_{|R-r|}^R (S_1' + S_2') x_0 dx_0$$

reduciendo términos tenemos:

$$P_r = \frac{E}{\pi r^2} 2\pi \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 = \frac{E}{\pi r^2} 2\pi \int_{R-r}^R 2(S_1 + S_2) x_0 dx_0 = \frac{4E}{r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0$$

Donde el valor absoluto que es aplicado a $r - R$, se justificará posteriormente, sin embargo, no afecta nuestro cálculo, por que las condiciones del cálculo descritas anteriormente nos indican que $R < r \leq 2R$, además $r - R < x_0 \leq R$, por lo que $r - R = r - R$, es decir, r , es siempre es, para las condiciones de este caso, mayor que “ R ”, por lo que, $r - R$, como también es positivo $R - r$, es siempre positivo, por lo cual utilizaremos $R - r$, por analogía con el caso b.

Finalmente:

$$P_r = \frac{4E}{r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 \quad \text{Ecuación para calcular la potencia de los puntos con centro contenido en el intervalo } r - R < x_0 \leq R; \text{ cuando } R < r \leq 2R, \text{ solución caso D. (figura 4.30).} \quad (4.50)$$

La ecuación general que describe la potencia recibida, para la zona cercana, estará dada, por la adición de los resultados de caso C y caso D, correspondientes a las expresiones (4.47) y (4.50).

$$P_r = \frac{\pi ER^2}{r^2} (R - r)^2 + \frac{4E}{r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 \quad \text{para } R \leq r \leq 2R \quad (4.51)$$

De la ecuación (4.1), I_e , (Intensidad que provista por la fibra emisora) y el área emisora esta dada por la superficie de la del núcleo de la fibra emisora, como se muestra a continuación.

$$P_e = \pi ER^2 \quad \text{Ecuación para calcular la potencia provista por el núcleo de la fibra.} \quad (4.42)$$

Ahora bien sustituyendo la ecuación (4.51) y la ecuación (4.42) en la ecuación (4.1) obtendremos el modelo matemático para calcular el coeficiente de transmisión del sensor, cuando se cumple que $R < r \leq 2R$.

$$T = \frac{P_r}{P_e} = \frac{\frac{\pi ER^2}{r^2} (R - r)^2 + \frac{4E}{r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0}{\pi R^2} \quad \text{para } R < r \leq 2R$$

$$T = \frac{(R-r)^2}{r^2} + \frac{4}{\pi R^2 r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 \quad \text{si } R < r \leq 2R \quad (4.52)$$

ECUACIÓN PARA CALCULAR EL
COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN EN
LA ZONA INTERMEDIA.

4.2.2.3 ANÁLISIS PARA LA ZONA LEJANA: $2R < r$

El mas sencillo en de los tres análisis, es éste; ya que en todo momento el área de traslape entre las dos circunferencias es el área de del núcleo de la fibra, esto se puede entender debido a que la distancia entre las fibras es tal que, la circunferencia de iluminación, (con radio r), que se proyecta en el plano de recepción, tiene, para todos los puntos emisores, el doble del radio de la circunferencia que representa el núcleo de la fibra o zona de admisión, (de radio R). (Figura 4.31).

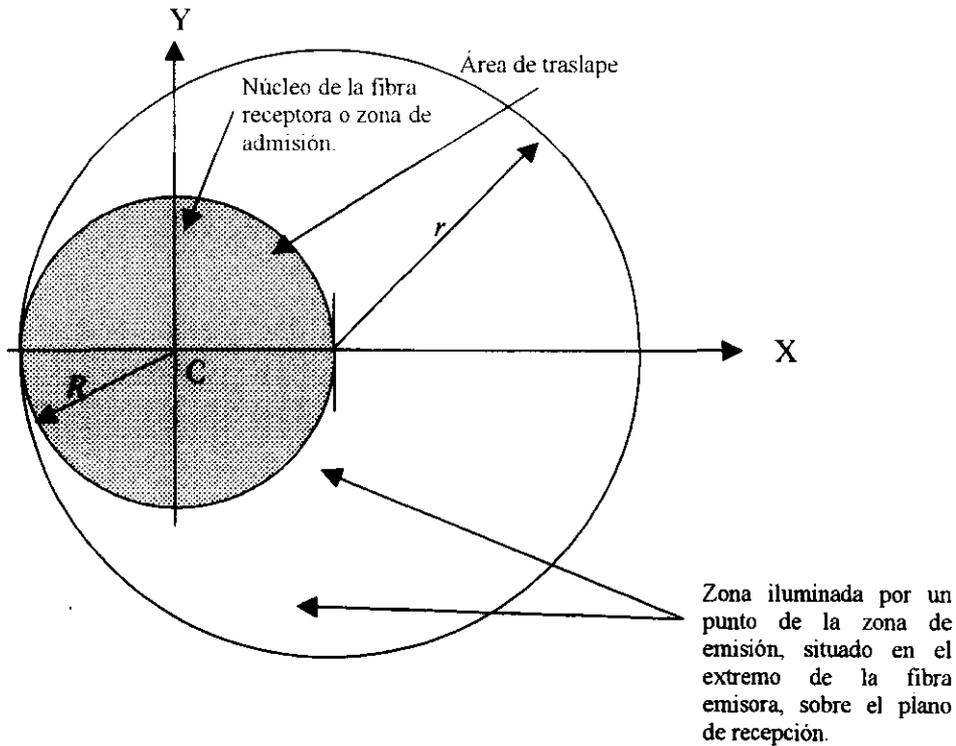


Figura 4.31 Las fibras. (emisora y receptora). se encuentran distantes una de la otra.

ZONA LEJANA

Condiciones del cálculo: $2R \leq r$; $0 \leq x_0 \leq R$

Con auxilio en la figura 4.31 es posible obtener el área de traslape entre el núcleo de la fibra receptora y la circunferencia de radio R , que es la proyección de un punto emisor de la fibra emisora, (figura 4.31), para cualquier punto emisor, el radio de la proyección de dicho punto albergará, totalmente, al núcleo de la fibra receptora, es decir, el área de traslape para cada punto emisor de la superficie emisora es: πR^2 , la cual hemos llamado S_{T3} , cuyo cálculo fue sustituido en la ecuación (4.17); para este caso se presenta a continuación la expresión para calcular S_{T3} .

$$S_{T3} = 2 \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Hemos mencionado que cualquier punto emisor, independiente de su posición en la superficie emisora, La circunferencia de iluminación, que proyecta sobre el plano de recepción, contendrá en su interior al núcleo de la fibra receptora; por lo cual el área de traslape, es siempre igual a la circunferencia que representa el núcleo de la fibra y en consecuencia, los límites de la integral de la expresión anterior van de, $-R$ a R , como lo muestra la siguiente expresión.

$$S_{T3} = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \pi R^2 \tag{4.53}$$

Ecuación para calcular el área de traslape zona lejana.

Sustituyendo (4.53) en la expresión (4.17), que representa la función de iluminación para la zona lejana, tenemos:

$$I(x_0) = \frac{E}{S_p} S_{T3} = \frac{E}{\pi r^2} \pi R^2 = E \frac{R^2}{r^2}$$

$$I(x_0) = E \frac{R^2}{r^2} \tag{4.54}$$

Ecuación para calcular la función de iluminación para la zona lejana.

A partir de la función de iluminación calculada para la zona lejana, ecuación (4.54), podemos obtener la potencia recibida, P_r , para cada punto de la zona de admisión o núcleo de la fibra receptora, sustituyendo la ecuación (4.54) en la ecuación (4.8).

$$P_r = 2\pi \int_{S_r} I(x_0) x_0 dx_0 = 2\pi \int_0^R E \frac{R^2}{r^2} x_0 dx_0$$

$$P_r = \pi E \frac{R^4}{r^2}$$

Ecuación para calcular la potencia recibida para la zona lejana

(4.54-a)

Sustituyendo la ecuación (4.54-a) en la expresión (4.8), obtenemos el coeficiente de transmisión.

$$T = \frac{\pi E \frac{R^4}{r^2}}{\pi E R^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$T = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

ECUACIÓN PARA CALCULAR EL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN EN LA ZONA LEJANA

(4.55)

Recopilando las ecuaciones, (4.43),(4.52) y (4.55) del coeficiente de transmisión para cada zona, podemos tener la ecuación general del coeficiente de transmisión en la expresión siguiente:

MODELO MATEMÁTICO PARA CALCULAR EL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN DE UN SENSOR REFRACTOMÉTRICO DE INTENSIDAD.

$$T = \begin{cases} \frac{(R-r)^2}{R^2} + \frac{4}{\pi R^2 r^2} \int_{|R-r|}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 & \text{Si } 0 \leq r \leq R \\ \frac{(R-r)^2}{r^2} + \frac{4}{\pi R^2 r^2} \int_{|R-r|}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 & \text{Si } R \leq r \leq 2R \\ \frac{R^2}{r^2} & \text{Si } 2R \leq r \end{cases} \quad (4.56)$$

4.2.3 CÁLCULO DE LOS FACTORES DE INTEGRACIÓN

CÁLCULO DE LA EXPRESIÓN S_1 :

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} dx, \quad (4.57)$$

donde los límites x_1 y x_2 según las ecuaciones (4.23) y (4.26) son:

$$x_1 = x_0 - r,$$

$$x_2 = \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0}.$$

Integrando por cambio de variable. Se define, u , de la siguiente forma:

$$u = x - x_0. \quad (4.58)$$

Derivando la ecuación (4.58)

$$du = dx. \quad (4.59)$$

Sustituyendo la ecuación (4.58) y (4.59) en la ecuación (4.57)

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r^2 - u^2} du. \quad (4.60)$$

De tablas de integrales [10]

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}. \quad (4.61)$$

Utilizando la ecuación (4.61), sustituyendo en (4.60):

$$S_1 = \left| \frac{u}{2} \sqrt{r^2 - u^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{u}{r} \right|_{x_1}^{x_2}. \quad (4.62)$$

Regresando a las variables iniciales, es decir, de las ecuaciones (4.58) y (4.59) en la ecuación (4.62)

$$S_1 = \left| \frac{x-x_0}{2} \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x-x_0}{r} \right|_{x_1}^{x_2}. \quad (4.63)$$

Evaluando los límites en la ecuación (4.63). La reducción de términos comunes se muestra a continuación.

$$S_1 = \frac{\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0} - x_0}{2} \sqrt{r^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0} - x_0 \right)^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0} - x_0}{r} \dots$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{x_0 - r - x_0}{2} \sqrt{r^2 - (x_0 - r - x_0)^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x_0 - r - x_0}{r} \right] = \\
 & = \frac{x_0^2 + R^2 - r^2 - 2x_0^2}{2(2x_0)} \sqrt{r^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2 - 2x_0^2}{2x_0} \right)^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2 - 2x_0^2}{2rx_0} \dots \\
 & - \left[-\frac{r}{2} \sqrt{r^2 - (-r)^2} \right] - \frac{r^2}{2} \arcsin \left(-\frac{r}{r} \right) = \\
 & = \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{4x_0} \sqrt{r^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0} \right)^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2rx_0} - \frac{r^2}{2} \frac{\pi}{2} = \\
 & = \frac{-x_0^2 + R^2 - r^2}{4x_0} \sqrt{r^2 - \left(\frac{-1(x_0^2 + R^2 - r^2)}{2x_0} \right)^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2rx_0} + \frac{r^2}{4} \pi. \tag{6.64}
 \end{aligned}$$

Reduciendo la ecuación anterior se tiene la solución de S_1 .

$$\boxed{S_1 = \frac{\pi}{4} r^2 - \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2rx_0} + \frac{-x_0^2 + R^2 - r^2}{4x_0} \sqrt{r^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0} \right)^2}} \tag{4.65}$$

CÁLCULO DE LA EXPRESIÓN S_2 :

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{R^2 - x^2} dx. \tag{4.66}$$

Donde los límites x_1 y x_2 segun las ecuaciones (4.26) y (4.27) son:

$$x_2 = \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0},$$

$$x_3 = R.$$

Utilizando la ecuación (4.61), sustituyendo en (4.66):

$$S_2 = \left| \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} \right|_{x_2}^{x_3}. \tag{4.67}$$

A continuación se muestra la evaluación de los límites en la ecuación (4.67) y la reducción de términos comunes.

$$\begin{aligned}
 S_2 & = \frac{R}{2} \sqrt{R^2 - R^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{R}{R} - \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2(2x_0)} \sqrt{R^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0} \right)^2} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} = \\
 & = \frac{R^2}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{-x_0^2 + R^2 + r^2}{4x_0} \sqrt{R^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0} \right)^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0}.
 \end{aligned}$$

La siguiente ecuación muestra la solución de S_2 .

$$S_2 = \frac{\pi}{4} R^2 - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} + \frac{-x_0^2 - R^2 - r^2}{4x_0} \sqrt{R^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0}\right)^2} \quad (4.68)$$

Antes de sumar S_1 y S_2 demostraremos que:

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2x_0}\right)^2}$$

por que:

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0}\right)^2} = \frac{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 - r^2) - (R^2 - r^2)^2}{4x_0^2}$$

y

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2x_0}\right)^2} = \frac{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 - r^2) - (R^2 - r^2)^2}{4x_0^2}$$

CÁLCULO DE LA EXPRESIÓN ($S_1 + S_2$):

De las ecuaciones (4.64) y (4.68) se puede obtener ($S_1 + S_2$).

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{4} r^2 + \frac{\pi}{4} R^2 - \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 + r^2}{2rx_0} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} \dots$$

$$+ \frac{-x_0^2 + R^2 - r^2}{4x_0} \sqrt{R^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0}\right)^2} + \frac{-x_0^2 - R^2 - r^2}{4x_0} \sqrt{R^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0}\right)^2} \quad (4.69)$$

El proceso de reducción y simplificación de la ecuación (4.69) se muestra a continuación.

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{4} (R^2 + r^2) - \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 + r^2}{2rx_0} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} \dots$$

$$+ \left(\frac{-x_0^2 + R^2 - r^2}{4x_0} + \frac{-x_0^2 + R^2 - r^2}{4x_0} \right) \sqrt{R^2 - \left(\frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2x_0}\right)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} (R^2 + r^2) + \left(\frac{-2x_0^2}{4x_0} \right) \sqrt{\frac{4R^2x_0^2 - [x_0^4 + 2x_0^2(R^2 - r^2) + (R^2 - r^2)^2]}{(2x_0)^2}} \dots$$

$$- \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 + r^2}{2rx_0} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} \quad (4.70)$$

La siguiente ecuación expresa la suma de S_1 y S_2 .

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{4} (R^2 + r^2) - \frac{x_0}{2(2x_0)} \sqrt{4R^2x_0^2 - x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) + (R^2 + r^2)^2} \dots$$

$$- \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 + r^2}{2rx_0} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} \quad (4.71)$$

CÁLCULO DE LA INTEGRAL $\int_{R-r}^R (S_1 + S_2)x_0 dx_0$:

Es integral de la ecuación (4.71), que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2)x_0 dx_0 &= \int_{R-r}^R \frac{\pi}{4} (R^2 + r^2)x_0 dx_0 \dots \\ &- \int_{R-r}^R \frac{x_0}{4} \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) + (R^2 + r^2)^2} dx_0 \dots \\ &- \int_{R-r}^R \frac{x_0 r^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2rx_0} dx_0 - \int_{R-r}^R \frac{x_0 R^2}{2} \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} dx_0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

De la ecuación (4.72), para mejor manejo de las expresiones nombraremos a cada uno de sus términos, como se muestra a continuación.

$$A = \int_{R-r}^R \frac{\pi}{4} (R^2 + r^2)x_0 dx_0. \quad (4.73)$$

$$B = \int_{R-r}^R -\frac{x_0}{4} \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) + (R^2 + r^2)^2} dx_0. \quad (4.74)$$

$$C = \int_{R-r}^R -\frac{r^2}{2} x_0 \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2rx_0} dx_0. \quad (4.75)$$

$$D = \int_{R-r}^R -\frac{R^2}{2} x_0 \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} dx_0. \quad (4.76)$$

Y la expresión

$$\boxed{\int_{R-r}^R (S_1 + S_2)x_0 dx_0 = A + B + C + D} \quad (4.77)$$

CÁLCULO DEL TÉRMINO A.

Tomando la expresión (4.73).

$$A = \int_{R-r}^R \frac{\pi}{4} (R^2 + r^2)x_0 dx_0.$$

Integrando se obtiene:

$$A = \left| \frac{\pi}{4} (R^2 + r^2) \frac{x_0^2}{2} \right|_{R-r}^R. \quad (4.78)$$

Evaluando los límites de la integral y reduciendo los términos se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{\pi}{8} (R^2 + r^2) x_0^2 \right|_{R-r}^R = \\ &= \frac{\pi}{8} (R^2 + r^2) [R^2 - (R - r)^2] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{8}(R^2 + r^2)(R^2 - R^2 + 2Rr - r^2).$$

La solución del término A , se muestra a continuación:

$$\boxed{A = \frac{\pi}{8}(R^2 + r^2)(2Rr - r^2)} \quad (4.79)$$

CÁLCULO DEL TÉRMINO B .

Tomando la expresión (4.74)

$$B = \int_{|R-r|}^R -\frac{x_0}{4} \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) + (R^2 - r^2)^2} dx_0.$$

Completando el binomio cuadrado perfecto dentro del radical se tiene:

$$\begin{aligned} B &= \int_{|R-r|}^R -\frac{x_0}{4} \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 + r^2)^2 + (R^2 + r^2)^2 - (R^2 - r^2)^2} dx_0 = \\ &= \int_{|R-r|}^R -\frac{x_0}{4} \sqrt{[x_0^2 - (R^2 + r^2)]^2 + R^4 + 2R^2r^2 + r^4 - R^4 + 2R^2r^2 - r^4} dx_0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Reduciendo la expresión (4.80), se tiene:

$$B = \int_{|R-r|}^R -\frac{x_0}{4} \sqrt{4R^2r^2 - (x_0^2 - R^2 - r^2)^2} dx_0. \quad (4.81)$$

Utilizando sustitución trigonométrica con un el triangulo rectangulo que tiene hipotenusa a , y catetos b y c .

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (4.82)$$

Si despejamos b , de la ecuación (4.82) se tiene:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad (4.83)$$

Donde, por analogía podemos definir:

$$a^2 = 4R^2r^2, \quad a = 2Rr, \quad (4.84)$$

$$c^2 = (x_0^2 - R^2 - r^2)^2, \quad c = x_0^2 - R^2 - r^2; \quad (4.85)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.84) y (4.24) en la ecuación (4.83)

$$b = \sqrt{a^2 - (x_0^2 - R^2 - r^2)^2}. \quad (4.86)$$

Podemos expresar a B , en términos de a , ecuación (4.84), b , ecuación (4.86),

y c. ecuación (4.85).

$$B = \int_{R-r}^R -\frac{x_0}{4} \sqrt{a^2 - (x_0^2 - R^2 - r^2)^2} dx_0. \quad (4.87)$$

Por leyes trigonométricas de los triangulo rectangulo se tiene:

$$\sin \theta = \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{a}. \quad (4.88)$$

Despejando x_0 , de la ecuación (4.88),

$$x_0^2 = a \sin \theta + R^2 + r^2, \quad (4.89)$$

$$x_0 = \sqrt{a \sin \theta + R^2 + r^2}. \quad (4.90)$$

De la ecuación (4.90), se tiene:

$$a \cos \theta = \sqrt{a^2 - (x_0^2 - R^2 - r^2)^2}. \quad (4.91)$$

Derivando la ecuación (4.90),

$$\frac{dx_0}{d\theta} = \frac{d(a \sin \theta + R^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{d\theta}, \quad (4.92)$$

utilizando regla de la cadena para derivar la ecuación (4.92).

$$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx},$$

$$\frac{dx_0}{d\theta} = \frac{1}{2} (a \sin \theta + R^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d(a \sin \theta + R^2 + r^2)}{d\theta},$$

$$\frac{dx_0}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{a \cos \theta}{\sqrt{a \sin \theta + R^2 + r^2}}. \quad (4.93)$$

Despejando dx_0 , de la ecuación (4.93) se tiene:

$$dx_0 = \frac{1}{2} \frac{a \cos \theta}{\sqrt{a \sin \theta + R^2 + r^2}} d\theta \quad (4.94)$$

Sustituyendo (4.90), (4.91) y (4.94) en $B = \int_{|R-r|}^R -\frac{x_0}{4} \sqrt{4R^2r^2 - (x_0^2 - R^2 - r^2)^2} dx_0$ o ecuación (4.87) se tiene:

$$B = \int_{|R-r|}^R -\frac{1}{4} \left(\sqrt{a \sin \theta + R^2 + r^2} a \cos \theta \frac{a \cos \theta}{2 \sqrt{a \sin \theta + R^2 + r^2}} d\theta \right) = \int_{|R-r|}^R -\frac{1}{4} \frac{1}{2} a^2 \cos^2 \theta d\theta. \quad (4.95)$$

$$B = \int_{|R-r|}^R -\frac{1}{8} a^2 \cos^2 \theta d\theta. \quad (4.96)$$

Aplicando integral de tablas [10] a la ecuación (4.96)

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}. \quad (4.97)$$

$$B = \int -\frac{1}{8} a^2 \cos^2 \theta d\theta = -\frac{a^2}{8} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right). \quad (4.98)$$

$$B = -\frac{a^2}{16} \theta - \frac{a^2}{32} \sin 2\theta. \quad (4.99)$$

Aplicando la identidad trigonométrica: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, a la ecuación (4.99)

$$B = -\frac{a^2}{16} \theta - \frac{a^2}{32} \sin 2\theta = -\frac{a^2}{16} \theta - \frac{a^2}{32} (2 \sin \theta \cos \theta).$$

Reduciendo la expresión anterior:

$$B = -\frac{a^2}{16} \theta - \frac{a^2}{16} \sin \theta \cos \theta \quad (4.100)$$

Regresando a las expresiones en términos de x . De la expresión (4.88), despejando θ .

$$\theta = \arcsin \frac{x^2 - R^2 - r^2}{a}. \quad (4.101)$$

De la misma ecuación (4.88), despejando $a \sin \theta$.

$$a \sin \theta = x^2 - R^2 - r^2. \quad (4.102)$$

Por trigonometría se puede obtener la siguiente expresión:

$$a \cos \theta = \sqrt{a^2 - (x^2 - R^2 - r^2)^2}. \quad (4.103)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.84), (4.101), (4.102) y (4.103) en (4.100)

$$B = \left[-\frac{4R^2 r^2}{16} \arcsin \frac{x^2 - R^2 - r^2}{2Rr} - \frac{1}{16} (x^2 - R^2 - r^2) \sqrt{4R^2 r^2 - (x^2 - R^2 - r^2)^2} \right] \Big|_{|R-r|}^R \quad (4.104)$$

Evaluando la integral con sus límites

$$B = -\frac{4R^2 r^2}{16} \arcsin \frac{R^2 - R^2 - r^2}{2Rr} - \frac{1}{16} (R^2 - R^2 - r^2) \sqrt{4R^2 r^2 - (R^2 - R^2 - r^2)^2} \dots$$

$$- \left[-\frac{4R^2 r^2}{16} \arcsin \frac{|R-r|^2 - R^2 - r^2}{2Rr} - \frac{1}{16} (|R-r|^2 - R^2 - r^2) \sqrt{4R^2 r^2 - (|R-r|^2 - R^2 - r^2)^2} \right].$$

Simplificando la expresión anterior el resultado de la ecuación (4.74) se observa a continuación

$$\boxed{B = -\frac{\pi}{8} R^2 r^2 + \frac{r^3}{16} \sqrt{4R^2 - r^2} + \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R}} \quad (4.105)$$

CÁLCULO DEL TÉRMINO C.

Tomando la expresión (4.75)

$$C = \int_{|R-r}^R -\frac{r^2}{2} x_0 \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2rx_0} dx_0.$$

Integrando por partes: $\int u dv = uv - \int v du$, la ecuación (4.75). Para locula definiremos:

$$\frac{dv}{dx_0} = -\frac{r^2}{2} x_0, \tag{4.106}$$

$$u = \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2rx_0}. \tag{4.107}$$

Despejando v, de la ecuación (4.106):

$$v = -\frac{r^2}{2} \frac{x_0^2}{2} = -\frac{1}{4} r^2 x_0^2. \tag{4.108}$$

Aplicando la derivada de la ecuación (4.110), a la ecuación (4.107):

$$\frac{d}{dx_0} (\arcsin z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{dz}{dx_0}. \tag{4.109}$$

$$\frac{du}{dx_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2rx_0}\right)^2}} \frac{2x(2rx_0) - 2r(x_0^2 - R^2 - r^2)}{(2rx_0)^2}.$$

$$\frac{du}{dx_0} = \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{x_0 \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}}. \tag{4.110}$$

Substituyendo en C :

$$C = \int u dv = uv - \int v du.$$

$$C = -\frac{1}{4} r^2 x_0^2 \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2rx_0} - \int_{|R-r}^R -\frac{1}{4} r^2 x_0^2 \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{x_0 \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} dx_0.$$

$$C = \left| -\frac{r^2}{4} x_0^2 \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2rx_0} \right|_{|R-r}^R + \int_{|R-r}^R \frac{r^2}{4} \frac{x_0(x_0^2 + R^2 - r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} dx_0. \tag{4.111}$$

Por facilidad en el manejo de expresiones llamaremos: C_1 al intengrando de la ecuación anterior:

$$C = \left| -\frac{r^2}{4} x_0^2 \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2rx_0} \right|_{|R-r}^R + C_1 \tag{4.112}$$

$$C_1 = \int_{|R-r}^R \frac{r^2}{4} \frac{x_0(x_0^2 + R^2 - r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} dx_0 = \int_{|R-r}^R \frac{r^2}{4} \frac{x_0^3 + x_0(R^2 - r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} dx_0. \tag{4.113}$$

Utilizando cambio de variable para la ecuación anterior.

$$W = -x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2. \quad (4.114)$$

Derivando la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx_0} &= -4x_0^3 + 4x_0(R^2 + r^2) = -4[x_0^3 + x_0(R^2 + r^2)], \\ -\frac{1}{4} \frac{dw}{dx_0} &= x_0^3 - x_0(R^2 + r^2). \end{aligned} \quad (4.115)$$

La ecuación (4.113) se puede expresar, en términos de las ecuaciones (4.114) y (4.115) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{|R-r|}^R \frac{r^2}{4} \left[\frac{x_0^3 - x_0(R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} + \frac{x_0(R^2 + r^2) - x_0(R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0 = \\ &= \int_{|R-r|}^R \frac{r^2}{4} \left[\frac{x_0^3 - x_0(R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0 + \int_{|R-r|}^R \frac{r^2}{4} \left[\frac{2R^2 x_0}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0. \end{aligned}$$

Por manejo de expresiones se utilizarán las siguientes expresiones, donde γ y ϕ son los factores con integral.

$$\gamma = \int_{|R-r|}^R \frac{r^2}{4} \left[\frac{x_0^3 - x_0(R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0, \quad (4.116)$$

$$\phi = \int_{|R-r|}^R \frac{r^2}{4} \left[\frac{2R^2 x_0}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0, \quad (4.117)$$

$$\boxed{C_1 = \gamma + \phi.} \quad (4.118)$$

Calculando γ de ecuación (4.116).

$$\gamma = \int_{|R-r|}^R \frac{r^2}{4} \left[\frac{x_0^3 - x_0(R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0.$$

Substituyendo (4.114) y (4.115) en (4.116)

$$\gamma = \int \frac{r^2}{4} \left(\frac{dw}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{w}} = \int -\frac{r^2}{4} \frac{dw}{\sqrt{w}} = -\frac{r^2}{4} 2\sqrt{w}.$$

$$\boxed{\gamma = \left[-\frac{r^2}{8} \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \right]_{|R-r|}^R} \quad (4.119)$$

Calculando ϕ , de ecuación (4.117)

$$\phi = \int_{R-r}^R \frac{r^2}{4} \left[\frac{2R^2 x_0}{\sqrt{-x_0^4 - 2x_0^2(R^2 - r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0 = \int_{R-r}^R \frac{R^2 r^2}{2} \frac{x_0}{\sqrt{-x_0^4 - 2x_0^2(R^2 - r^2) - (R^2 - r^2)^2}} dx_0.$$

Por cambio de variable se tiene:

$$\Omega = x_0^2. \tag{4.120}$$

$$d\Omega = 2x_0 dx_0.$$

$$\frac{d\Omega}{2} = x_0 dx_0. \tag{4.121}$$

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

Sustituyendo (4.120) y (4.121) en (4.117) se obtiene (4.122):

$$\phi = \int_{|R-r|}^R \frac{R^2 r^2}{2} \frac{\frac{d\Omega}{2}}{\sqrt{-\Omega^2 - 2(R^2 + r^2)\Omega - (R^2 - r^2)^2}} dx_0. \tag{4.122}$$

De tablas de integrales se tiene la expresión (4.123)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}. \tag{4.123}$$

Aplicando la ecuación (4.123) a la ecuación (4.122) se tiene:

$$\phi = \int_{R-r}^R \frac{R^2 r^2}{2} \frac{d\Omega}{\sqrt{-\Omega^2 + 2(R^2 + r^2)\Omega - (R^2 - r^2)^2}}.$$

Donde por analogía entre la ecuación (4.123) y (4.122) se tiene:

$$a = -1,$$

$$b = 2(R^2 + r^2),$$

$$c = -(R^2 - r^2)^2.$$

Resolviendo (4.122) de la integral de tablas, ecuación (4.123).

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{R^2 r^2}{4} \left[\frac{-1}{\sqrt{(-1)(-1)}} \arcsin \frac{-2\Omega + 2(R^2 + r^2)}{\sqrt{-\Omega^2 + 2(R^2 + r^2)\Omega - (R^2 - r^2)^2}} \right] = \\ &= -\frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \left[\frac{2(-\Omega + R^2 + r^2)}{2\sqrt{R^2 + 2R^2 r^2 + r^4 - (R^4 - 2R^2 r^2 + r^4)}} \right]. \end{aligned} \tag{4.124}$$

$$\phi = -\frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-\Omega + R^2 + r^2}{\sqrt{4R^2 r^2}} = -\frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-\Omega + R^2 + r^2}{2Rr}. \tag{4.125}$$

Regresando a las expresiones originales se tiene:

$$\phi = \left| -\frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-x_0^2 + R^2 + r^2}{2Rr} \right|_{|R-r|}^R. \tag{4.126}$$

Tambien se puede escribir como se tiene en la siguiente ecuación:

$$\phi = \left| \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2Rr} \right|_{R-r}^R \quad (4.127)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.119) y (4.127) en (4.118) se tiene:

$$C_1 = \gamma + \phi$$

$$C_1 = \left| -\frac{r^2}{8} \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \right|_{R-r}^R + \left| \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2Rr} \right|_{R-r}^R \quad (4.128)$$

Sustituyendo la ecuación (4.128) en la ecuación (4.112) se tiene:

$$C = \left| -\frac{r^2}{4} x_0^2 \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2rx_0} \right|_{R-r}^R - \left| \frac{r^2}{8} \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \right|_{R-r}^R \dots$$

$$+ \left| \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2Rr} \right|_{R-r}^R \quad (4.129)$$

Evaluando los limites de la ecuación (4.129) se tiene (4.130)

$$C = -\frac{r^2 R^2}{4} \arcsin \frac{R^2 - R^2 - r^2}{2rR} - \frac{r^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} + \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{R^2 - R^2 - r^2}{2Rr} \dots$$

$$+ \frac{r^2}{4} (R^2 - r^2)^2 \arcsin \frac{(R-r)^2 - R^2 + r^2}{2rR-r} + \frac{r^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots$$

$$- \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{(R-r)^2 - R^2 - r^2}{2Rr} =$$

$$= -\frac{r^2 R^2}{4} \arcsin \frac{r^2}{2rR} - \frac{r^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} + \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-r^2}{2Rr} \dots$$

$$+ \frac{r^2 (R-r)^2}{4} \arcsin \frac{R^2 - 2Rr + r^2 - R^2 + r^2}{2rR-r} + \frac{r^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots$$

$$- \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{R^2 - 2Rr + r^2 - R^2 - r^2}{2Rr} =$$

$$= -\frac{r^2 R^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R} - \frac{r^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} - \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R} \dots$$

$$+ \frac{r^2 (R-r)^2}{4} \arcsin \frac{-2Rr + 2r^2}{2rR-r} + \frac{r^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots$$

$$- \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-2Rr}{2Rr}$$

$$C = -2 \frac{r^2 R^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R} - \frac{R^2 r^2}{4} \left(\frac{-\pi}{2} \right) - \frac{r^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots$$

$$+ \frac{r^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} + \frac{r^2(R-r)^2}{4} \arcsin \frac{2r(R-r)}{2rR-r}. \quad (4.130)$$

Reduciendo la expresión (4.130) se obtiene la solución de la ecuación (4.75):

$$C = \frac{\pi}{8} R^2 r^2 - \frac{r^2 R^2}{2} \arcsin \frac{r}{2R} - \frac{r^2(R-r)^2}{4} \arcsin \frac{R-r}{R-r} \dots$$

$$- \frac{r^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots$$

$$+ \frac{r^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}. \quad (4.131)$$

CÁLCULO DEL TÉRMINO D.

Tomando la expresión (4.76).

$$D = \int_{R-r}^R -\frac{R^2}{2} x_0 \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2R x_0} dx_0.$$

Integral por partes sobre la ecuación (4.76).

$$D = \int u dv = uv - \int v du, \quad (4.132)$$

Donde se definen las expresiones siguientes para resolver la expresión (4.76) por medio de la ecuación (4.132):

$$\frac{dv}{dx_0} = -\frac{R^2}{2} x_0, \quad (4.133)$$

Integrando la ecuación (4.133):

$$v = -\frac{R^2}{2} \frac{x_0^2}{2} = -\frac{R^2}{4} x_0^2, \quad (4.134)$$

$$u = \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2R x_0}. \quad (4.135)$$

Derivando (4.135) se tiene en terminos generales:

$$\frac{d}{dx} \arcsin(k) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \frac{dk}{dx}. \quad (4.136)$$

Derivando la ecuación (4.135) en base a la ecuación general (4.136)

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2Rx_0}\right)^2}} \frac{(2x_0)(2Rx_0) - (2R)(x_0^2 - R^2 - r^2)}{(2x_0R)^2}, \quad (4.137)$$

Reduciendo la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{du}{dx} = \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{x_0 \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}}, \quad (4.138)$$

Sustituyendo la ecuación (4.134), (4.135) y (4.138) en la expresión (4.132) queda:

$$D = -\frac{R^2}{4} x_0^2 \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2Rx_0} - \int_{R-r}^R -\frac{R^2}{4} x_0^2 \left[\frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{x_0 \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0. \quad (4.139)$$

Reduciendo la expresión (4.139)

$$D = -\frac{R^2}{4} x_0^2 \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} + \int_{R-r}^R \frac{R^2}{4} x_0 \left[\frac{x_0^2 - R^2 + r^2}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0. \quad (4.140)$$

Para mejor manejo de expresión llamaremos D_1 a la siguiente expresión:

$$D_1 = \int_{R-r}^R \frac{R^2}{4} x_0 \left[\frac{x_0^2 - R^2 + r^2}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0, \quad (4.141)$$

$$D = -\frac{R^2}{4} x_0^2 \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2Rx_0} + D_1. \quad (4.142)$$

De la expresión (4.141) se puede escribir como se observa a continuación:

$$D_1 = \int_{R-r}^R \frac{R^2}{4} \left[\frac{x_0^3 + x_0(-R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0. \quad (4.143)$$

Trabajando la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_{R-r}^R \frac{R^2}{4} \left[\frac{x_0^3 - x_0(R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} + \frac{x_0(R^2 + r^2) + x_0(-R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0 = \\ &= \int_{R-r}^R \frac{R^2}{4} \left[\frac{x_0^3 - x_0(R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0 + \int_{R-r}^R \frac{R^2}{4} \left[\frac{2x_0r^2}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0. \end{aligned} \quad (4.144)$$

Para tener un mejor manejo de las expresiones se renombran los términos de la expresión (4.144)

$$\alpha = \int_{R-r}^R \frac{R^2}{4} \left[\frac{x_0^3 - x_0(R^2 + r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx, \quad (4.145)$$

$$\beta = \int_{R-r}^R \frac{R^2}{4} \left[\frac{2x_0r^2}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx_0, \quad (4.146)$$

Es decir la suma de las ecuaciones (4.145) y (4.146) da como resultado D_1 expresión (4.144)

$$D_1 = \alpha + \beta. \tag{4.147}$$

Calculando α de la ecuación (4.145).

$$\alpha = \int_{R-r}^R \frac{R^2}{4} \left[\frac{x_0^3 - x_0(R^2 - r^2)}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx. \tag{4.145}$$

Utilizando cambio de variable par R^2 a resolver la ecuación (4.145) tenemos:

$$W = -x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2. \tag{4.148}$$

Derivando la ecuación (4.148).

$$\frac{dW}{dx} = -4x_0^3 + 4x_0^2(R^2 + r^2), \tag{4.149}$$

$$- \frac{dW}{4} = [x_0^3 - x_0^2(R^2 + r^2)] dx. \tag{4.150}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.148) y (4.150) en la ecuación (4.145) se obtiene:

$$\alpha = \int \frac{R^2}{4} \left(-\frac{dW}{4} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{W}} \right) = \int -\frac{R^2}{16} \frac{1}{\sqrt{W}} dW, \tag{4.151}$$

Resolviendo se tiene:

$$\alpha = \left[-\frac{R^2}{16} (2) \sqrt{W} \right] = \left(-\frac{R^2}{8} \sqrt{W} \right), \tag{4.152}$$

Regresando a las expresiones originales.

$$\alpha = \left[-\frac{R^2}{8} \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \right]_{|R-r|}^R \tag{4.153}$$

Calculando β de la expresión (4.146)

$$\beta = \int_{|R-r|}^R \frac{R^2}{4} \left[\frac{2x_0 r^2}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx. \tag{4.146}$$

La expresión (4.146) se puede expresar como se indica a continuación:

$$\beta = \int_{|R-r|}^R \frac{R^2 r^2}{2} \left[\frac{x_0}{\sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}} \right] dx, \tag{4.154}$$

Aplicando cambio de variable

$$\gamma = x_0^2, \tag{4.155}$$

Derivando la expresión (4.155)

$$d\gamma = 2x_0 dx_0.$$

$$\frac{d\gamma}{2} = x_0 dx_0. \tag{4.156}$$

Sustituyendo la ecuaciones (4.155) y (4.156) en la ecuación (4.154) se tiene:

$$\beta = \frac{R^2 r^2}{2} \int_{R-r}^R \frac{1}{2} \frac{d\gamma}{\sqrt{-\gamma^2 + 2(R^2 + r^2)\gamma - (R^2 - r^2)^2}}. \tag{4.157}$$

$$\beta = \frac{R^2 r^2}{4} \int_{R-r}^R \frac{d\gamma}{\sqrt{-\gamma^2 + 2(R^2 + r^2)\gamma - (R^2 - r^2)^2}}. \tag{4.158}$$

Aplicando de tablas de integrales la expresión (4.159) :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 - bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, \tag{4.159}$$

Sustituyendo (4.159) en β expresión (4.158) tenemos:

$$a = -1,$$

$$b = 2(R^2 + r^2),$$

$$c = -(R^2 - r^2)^2,$$

$$\beta = \frac{R^2 r^2}{4} \left[\frac{-1}{\sqrt{(-1)(-1)}} \arcsin \frac{-2\gamma + 2(R^2 + r^2)}{\sqrt{4(R^2 + r^2)^2 - 4(-1)[-(R^2 - r^2)^2]}} \right]. \tag{4.160}$$

Reduciendo la expresión anterior se tiene:

$$\beta = -\frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{2(-\gamma + R^2 + r^2)}{2\sqrt{R^4 + 2R^2 r^2 + r^4 - (R^4 - 2R^2 r^2 + r^4)}},$$

$$= -\frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-\gamma + R^2 + r^2}{\sqrt{4R^2 r^2}}$$

$$= \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{\gamma - R^2 - r^2}{2Rr}$$

$$\beta = \left| \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2Rr} \right|_{R-r}^R. \tag{4.161}$$

Sustituyendo las expresiones (4.153) y (4.161) en D expresión (4.142) tenemos:

$$D = \left| -\frac{R^2}{4} x_0^2 \arcsin \frac{x_0^2 + R^2 - r^2}{2R x_0} - \frac{R^2}{8} \sqrt{-x_0^4 + 2x_0^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \right|_{R-r}^R \dots$$

$$\left| + \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{x_0^2 - R^2 - r^2}{2Rr} \right|_{R-r}^R$$

Evaluando los límites se tiene:

$$\begin{aligned} D = & -\frac{R^4}{4} \arcsin \frac{R^2 - R^2 - r^2}{2R^2} - \frac{R^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} + \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{R^2 - R^2 - r^2}{2Rr} \dots \\ & + \frac{R^2}{4} (R-r)^2 \arcsin \frac{(R-r)^2 + R^2 - r^2}{2R(R-r)} - \frac{R^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots \\ & - \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{(R-r)^2 - R^2 - r^2}{2Rr}. \end{aligned} \quad (4.162)$$

Simplificando la expresión (4.162).

$$\begin{aligned} D = & -\frac{R^4}{4} \arcsin \frac{2R^2 - r^2}{2R^2} - \frac{R^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} + \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-r^2}{2Rr} \dots \\ & + \frac{R^2}{4} (R-r)^2 \arcsin \frac{R^2 - 2Rr + r^2 - R^2 - r^2}{2R(R-r)} - \frac{R^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots \\ & - \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{R^2 - 2Rr - r^2 - R^2 - r^2}{2Rr}. \\ = & -\frac{R^4}{4} \arcsin \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} \right) - \frac{R^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} + \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-r}{2R} \dots \\ & + \frac{R^2}{4} (R-r)^2 \arcsin \frac{2R^2 - 2Rr}{2R|R-r|} - \frac{R^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots \\ & - \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-2Rr}{2Rr}. \\ D = & -\frac{R^4}{4} \arcsin \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} \right) - \frac{R^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} + \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R} \\ & + \frac{R^2}{4} (R-r)^2 \arcsin \frac{2R(R-r)}{2R|R-r|} - \frac{R^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots \\ & - \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{-\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.163)$$

$\begin{aligned} D = & \frac{\pi}{8} R^2 r^2 - \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R} + \frac{R^2}{4} (R^2 - r^2)^2 \arcsin \frac{R-r}{ R-r } \dots \\ & - \frac{R^2}{4} \arcsin 1 - \frac{r^2}{2R^2} - \frac{R^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \\ & + \frac{R^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \end{aligned}$	(4.164)
---	---------

Como ya hemos calculado las expresiones A, B, C y D recordando la expresión (4.77)

$$\int_{|R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 = A + B + C + D.$$

La solución de la ecuación (4.77) es la suma de las ecuaciones (4.79), (4.105), (4.131) y (4.164).

$$\begin{aligned}
 \int_{R-r}^R (S_1 + S_2)x_0 dx_0 &= \frac{\pi}{8} (R^2 + r^2)(2Rr - r^2) - \frac{\pi}{8} R^2 r^2 + \frac{r^3}{16} \sqrt{4R^2 - r^2} + \dots \\
 &+ \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R} + \frac{\pi}{8} R^2 r^2 - \frac{r^2 R^2}{2} \arcsin \frac{r}{2R} - \dots \\
 &- \frac{r^2 (R-r)^2}{4} \arcsin \frac{R-r}{R-r} - \frac{r^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots \\
 &+ \frac{r^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} + \frac{\pi}{8} R^2 r^2 \dots \\
 &- \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R} + \frac{R^2}{4} (R^2 - r^2)^2 \arcsin \frac{R-r}{|R-r|} - \frac{R^2}{4} \arcsin 1 \dots \\
 &- \frac{R^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots \\
 &+ \frac{R^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2}. \quad (4.165)
 \end{aligned}$$

De la ecuación (4.56), multiplicamos la expresión anterior con el factor $\frac{4}{\pi R^2 r^2}$ se obtiene la solución de dicha expresión:

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{\pi R^2 r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2)x_0 dx_0 &= \frac{4}{\pi R^2 r^2} \left[\frac{\pi}{8} (R^2 + r^2)(2Rr - r^2) - \frac{\pi R^2 r^2}{8} + \frac{r^3}{16} \sqrt{4R^2 - r^2} + \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R} \right. \\
 &+ \frac{\pi R^2 r^2}{8} - \frac{r^2 R^2}{2} \arcsin \frac{r}{2R} - \frac{r^2 (R-r)^2}{4} \arcsin \frac{R-r}{|R-r|} \dots \\
 &- \frac{r^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots \\
 &+ \frac{r^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} + \frac{\pi R^2 r^2}{8} \dots \\
 &- \frac{R^2 r^2}{4} \arcsin \frac{r}{2R} + \frac{R^2 (R^2 - r^2)^2}{4} \arcsin \frac{R-r}{|R-r|} - \frac{R^2}{4} \arcsin 1 - \frac{r^2}{2R^2} \dots \\
 &- \frac{R^2}{8} \sqrt{-R^4 + 2R^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \dots \\
 &\left. + \frac{R^2}{8} \sqrt{-(R-r)^4 + 2(R-r)^2(R^2 + r^2) - (R^2 - r^2)^2} \right]. \quad (4.166)
 \end{aligned}$$

Reduciendo la expresión (4.166):

La siguiente ecuación representa la solución del término con integral de la ecuación (4.56).

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{\pi R^2 r^2} \int_{R-r}^R (S_1 + S_2) x_0 dx_0 = & -\frac{1}{4\pi R^2 r^2} [-4Rr^3 \pi + 2r^4 \pi - 4R^3 r \pi + 2\pi R^2 r^2 + \frac{1}{2} \dots \\
 & - \frac{r}{4\pi R^2} \sqrt{4R^2 - r^2} - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{r}{2R} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{-R+r}{R-r} \dots \\
 & - \frac{2r}{\pi R} \arcsin \frac{-R+r}{R-r} + \frac{r^2}{\pi R^2} \arcsin \frac{-R+r}{R-r} - \frac{R^4}{\pi r^2} \arcsin \frac{-R+r}{R-r} \dots \\
 & + \frac{2R^2}{\pi} \arcsin \frac{-R+r}{R-r} - \frac{r^2}{\pi} \arcsin \frac{-R+r}{R-r} + \frac{1}{\pi r^2} \arcsin \frac{-2R^2+r^2}{2R^2} \\
 & - \frac{1}{2\pi r} \sqrt{4R^2 - r^2}].
 \end{aligned} \tag{4.167}$$

4.3 PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS DEL CÁLCULO ANALÍTICO.

El cálculo del integrando que aparece en la ecuación (4.56), se realizó en la sección 4.2.3, que aparece al final de este capítulo, de donde el resultado se presenta en la ecuación (4.167).

Sustituyendo la ecuación (4.167) en la ecuación (4.56), se tiene el coeficiente de transmisión para cada intervalo, correspondientes a la zona cercana, zona intermedia y zona lejana.

Ahora haremos un cambio de variable para reducir las expresiones, que en general son muy extensas, llamaremos z a la siguiente relación:

$$z = \frac{r}{R} = \frac{\tan(\arcsin(NA))L}{R}$$

Donde:

L - Es la distancia absoluta entre las superficies de las fibras, emisora y receptora.

z - Es la distancia relativa entre las fibras, ya que guarda relación con la distancia, L , entre las fibras.

AN - Es la apertura numérica de las fibras, la expresión para calcularla se presenta en el capítulo 2.

r - Representa el radio de la circunferencia de iluminación que es proyectada por un punto emisor sobre el plano de recepción.

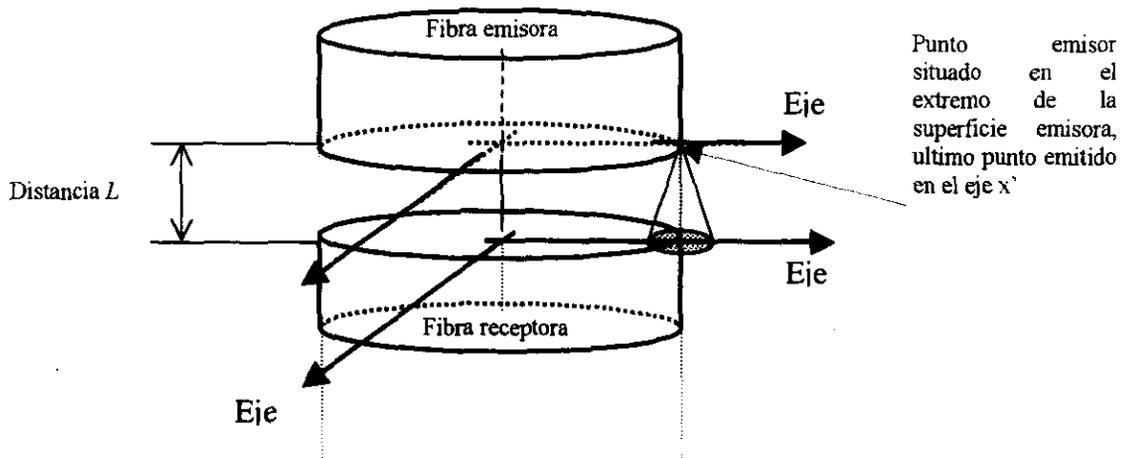
R - Representa el radio de la zona de admisión que es el núcleo de la fibra receptora.

Realizando esta sustitución en las expresiones correspondientes a los intervalos de las zonas, cercana, intermedia y lejana se obtienen las siguientes expresiones.

COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN EN FUNCIÓN DE LA DISTANCIA RELATIVA "z"

$$T(z) = \begin{cases} (1-z)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+z^2)\left(\frac{2}{z}-1\right) + \frac{1}{4\pi} z\sqrt{4-z^2} - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{z^2} \arcsin\left(1-\frac{z^2}{2}\right) \dots \\ + \frac{1}{\pi} (1-z)^2 \left(\frac{1}{z^2}-1\right) \arcsin\left(\frac{1-z}{|1-z|}\right) - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{z^2}+1\right) \sqrt{-1+2(1+z^2)-(1-z^2)^2} \dots \\ + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{z^2}+1\right) \sqrt{-(1-z)^4 + 2(1-z)^2(1+z)^2 - (1-z^2)^2}, \quad \text{Si } 0 \leq r \leq R \\ \\ \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+z^2)\left(\frac{2}{z}-1\right) + \frac{1}{4\pi} z\sqrt{4-z^2} - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{z^2} \arcsin\left(1-\frac{z^2}{2}\right) \dots \\ + \frac{1}{\pi} (1-z)^2 \left(\frac{1}{z^2}-1\right) \arcsin\left(\frac{1-z}{|1-z|}\right) - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{z^2}+1\right) \sqrt{-1+2(1+z^2)-(1-z^2)^2} \dots \\ + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{z^2}+1\right) \sqrt{-(1-z)^4 + 2(1-z)^2(1+z)^2 - (1-z^2)^2}, \quad \text{Si } R \leq r \leq 2R \\ \\ \frac{1}{z^2}, \quad \text{si } r \geq 2R \end{cases} \quad (4.168)$$

Podemos suponer un resultado a partir de los análisis antes descritos, tal se muestra en las figuras siguientes, atendiendo a cada uno de los intervalos correspondientes.



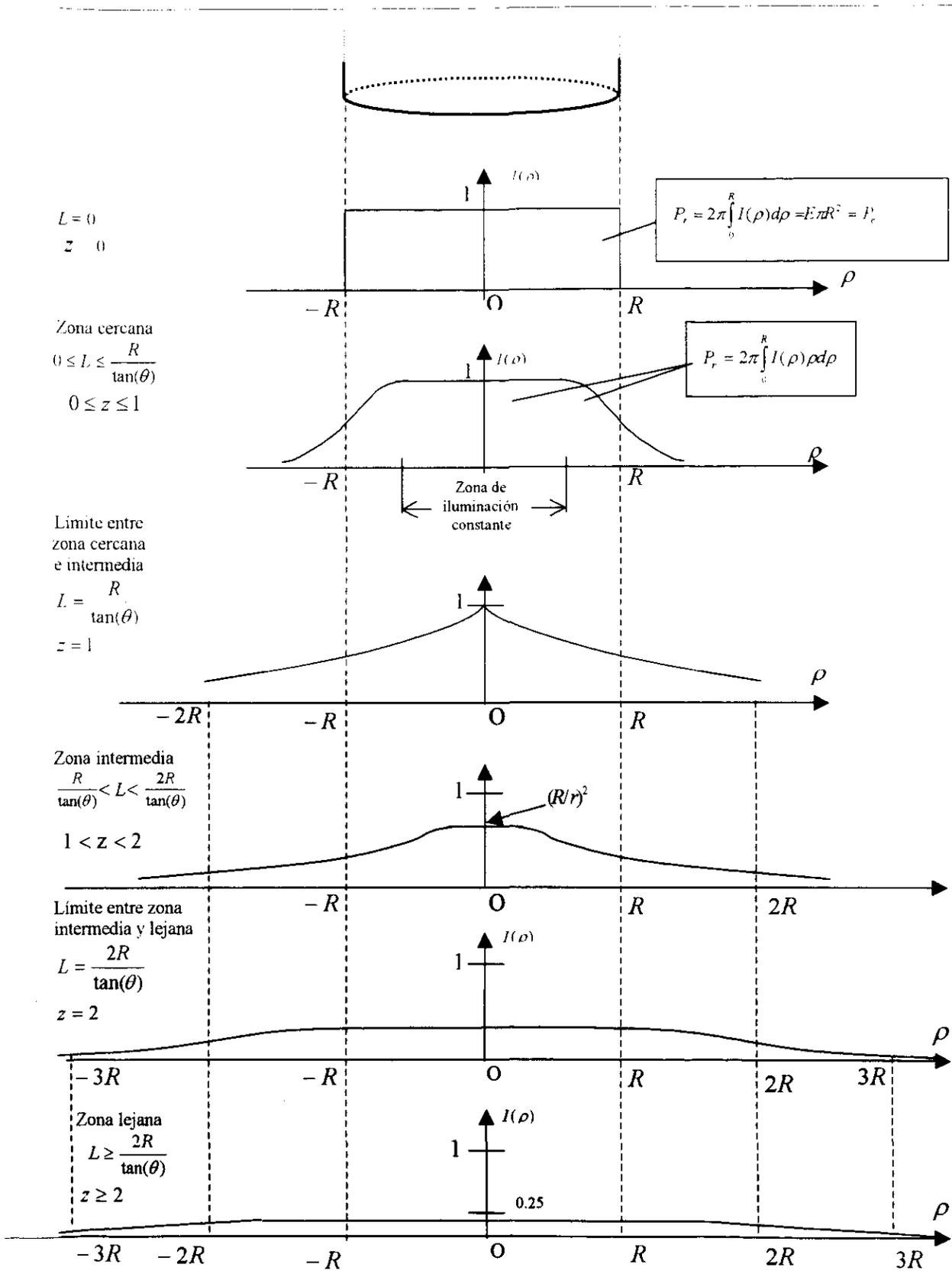


Figura 4.32 Formas características de la función de iluminación para los diferentes intervalos.

GRÁFICA DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN

La siguiente figura muestra la representación gráfica del cálculo obtenido por el método analítico, antes descrito, donde se seccionó la gráfica en tres partes que corresponden a las zonas descritas en el cálculo, es decir, la zona cercana, zona intermedia y la zona lejana, correspondientes a la ecuación (4.168).

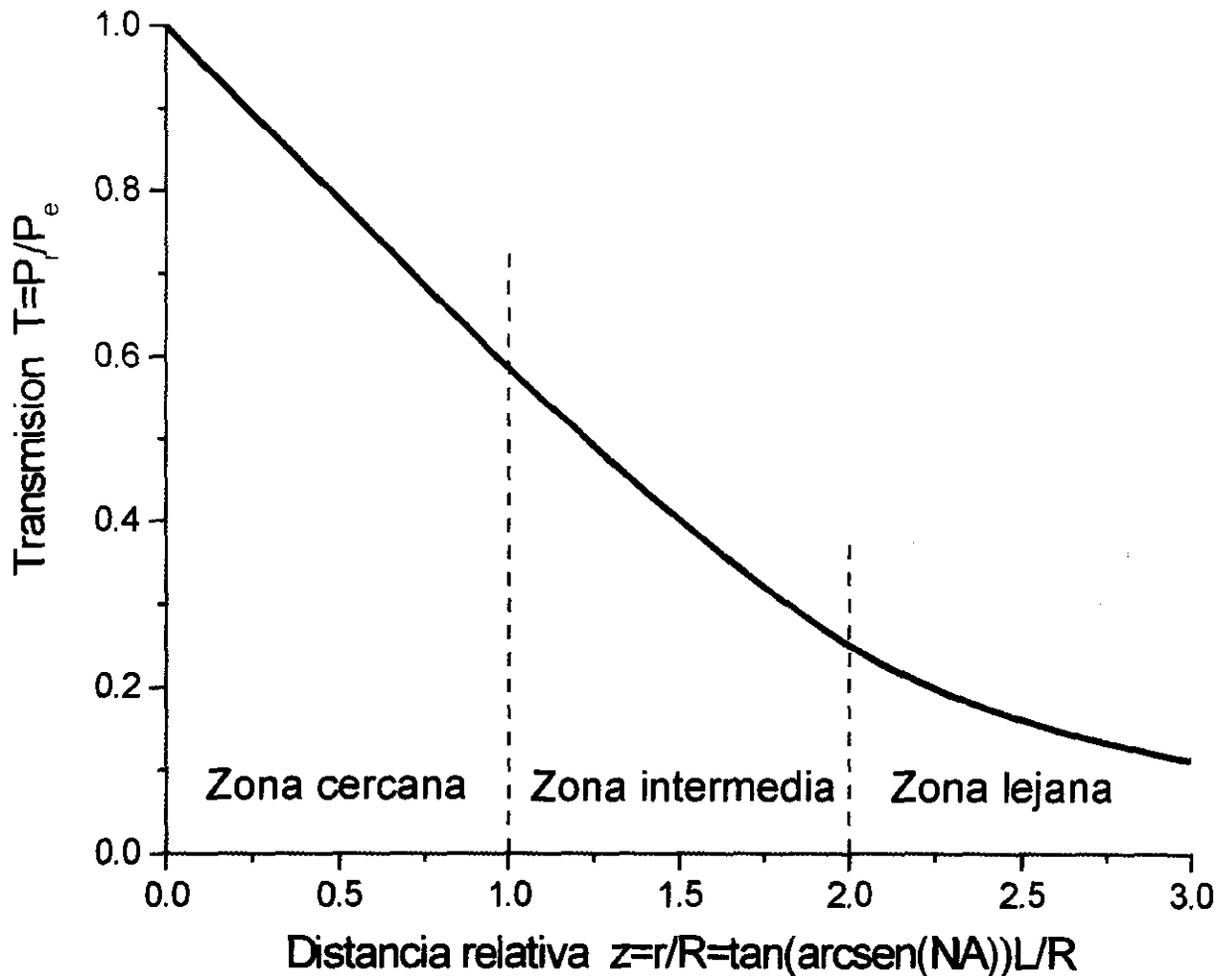


Figura 4.33 Gráfica de los resultados del cálculo analítico del coeficiente de transmisión en función de la distancia relativa "z" entre las fibras.

De la ecuación (4.168), se obtiene la siguiente tabla de resultados:

z	T
0.0	1.00000000
0.1	0.95756929
0.2	0.91520233
0.3	0.87296321
0.4	0.83091673
0.5	0.78912873
0.6	0.74766659
0.7	0.70659959
0.8	0.66599949
0.9	0.62594117
1.0	0.58650332
1.1	0.54776946
1.2	0.50982908
1.3	0.47277924
1.4	0.43672675
1.5	0.40179127
1.6	0.36810997
1.7	0.33584513
1.8	0.30519787
1.9	0.27643778
2.0	0.25000000
2.1	0.22675736
2.2	0.20661157
2.3	0.18903591
2.4	0.17361111
2.5	0.16000000
2.6	0.14792899
2.7	0.13717421
2.8	0.12755102
2.9	0.11890606
3.0	0.11111111

Tabla 1: Resultados del método analítico.

4.4 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS DE UN MÉTODO NUMÉRICO.

Ahora se presenta un método numérico [11] para calcular el coeficiente de transmisión, T , tomando en cuenta las mismas condiciones utilizadas para el método anterior; a continuación se muestra el diagrama de flujo que nos dará un panorama más claro de la temática se sugiere para este cálculo.

Para entender el proceso que se muestra en el diagrama de flujo se puede apoyar en la figura 4.34.

El proceso del cálculo numérico girará en torno de elaborar un programa a partir del diagrama de flujo, figura 4.34 que nos permita calcular el coeficiente de transmisión.

El diagrama de flujo se puede explicar de la siguiente forma:

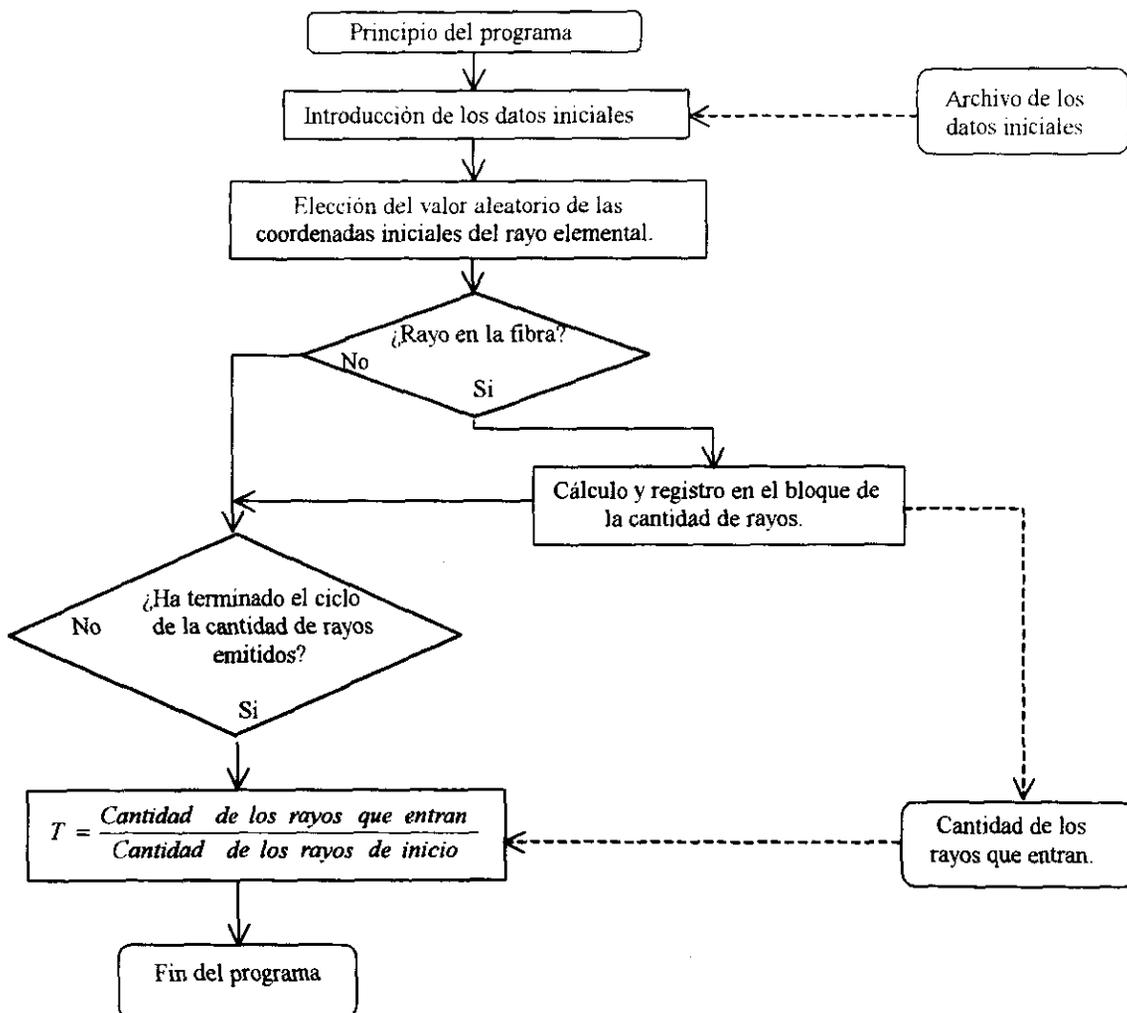


Figura 4.34 Diagrama de flujo del método numérico para calcular el coeficiente

Se genera un rayo de forma, aleatoria con dirección y sentido, que inicialmente está alojado en la zona de emisión, se proyecta dicho rayo sobre la superficie receptora, es decir se compara la dirección del rayo generado con el cono de admisión, para saber si el rayo es insertado dentro de la fibra receptora, de lo cual se pueden presentar dos opciones, número uno que el rayo sea insertado en la fibra receptora y opción número dos que el rayo no entre en la fibra receptora. Si se presenta la opción número uno, es decir el rayo es insertado en la superficie de la fibra receptora, se procede registrar tal hecho realizando una suma en el archivo de los rayos insertados en la fibra, después regresando al punto de generación de otro nuevo rayo. Si en caso contrario el rayo no fue insertado en la fibra receptora, hablamos de la opción dos de nuestro diagrama de flujo, y en consecuencia se compara el número de ciclos que se lleva hasta el momento con el número de ciclos que se desea realizar, si el número de ciclos realizados es menor el programa se regresa al punto de generación de otro rayo. Si el número de ciclos realizados y requeridos es igual, se realiza el cociente de el número de los rayos insertados en la fibra con el número de los rayos generados, dándonos por resultado el coeficiente de transmisión, T , que inicialmente se buscaba.

4.5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DEL CÁLCULO ANALÍTICO Y NUMÉRICO.

El cálculo del coeficiente de transmisión numérico generado por éste, u otro programa similar, arroja los datos de la columna T numérico y los datos obtenidos por el método analítico se muestran en la columna T analítico.

z	T_a analítico	T_n numérico	$\Delta = T_a - T_n$	$(\Delta / T_a) \cdot 100\%$
0	1	1	0	0
0.1	0.9575	0.9571	0.0004	0.042
0.2	0.9152	0.9153	- 0.0001	- 0.011
0.3	0.8729	0.8729	0	0
0.4	0.8309	0.8316	- 0.0007	- 0.084
0.5	0.7891	0.7892	- 0.0001	- 0.013
0.6	0.7476	0.7480	- 0.0004	- 0.054
0.7	0.7065	0.7073	- 0.0008	- 0.113
0.8	0.6659	0.6657	0.0002	0.030
0.9	0.6259	0.6268	- 0.0009	- 0.144
1.0	0.5865	0.5879	- 0.0014	- 0.239
1.1	0.5477	0.5483	- 0.0006	- 0.110
1.2	0.5098	0.5102	- 0.0004	- 0.079
1.3	0.4727	0.4729	- 0.0002	- 0.042
1.4	0.4367	0.4366	0.0001	0.023
1.5	0.4017	0.4018	- 0.0001	- 0.025
1.6	0.3681	0.3674	0.0007	0.190

1.7	0.3358	0.3351	0.0007	0.209
1.8	0.3051	0.3042	0.0009	0.295
1.9	0.2764	0.2762	0.0002	0.072
2.0	0.2500	0.2501	- 0.0001	- 0.040
2.1	0.2267	0.2271	- 0.0004	- 0.176
2.2	0.2066	0.2066	0	0
2.3	0.1890	0.1889	0.0001	0.053
2.4	0.1736	0.1738	- 0.0002	- 0.115
2.5	0.1600	0.1599	0.0001	0.063
2.6	0.1479	0.1481	- 0.0002	- 0.135
2.7	0.1371	0.1375	- 0.0004	- 0.292
2.8	0.1275	0.1280	- 0.0005	- 0.392
2.9	0.1189	0.1191	- 0.0002	- 0.168
3.0	0.1111	0.1116	- 0.0005	- 0.450

Tabla 2: Resultados de los cálculos numérico y analítico: porcentaje de error.

Como se puede notar de la tabla de comparación del coeficiente de transmisión obtenido por el método numérico y analítico, es notorio que existe una sensible discrepancia entre los resultados, sin embargo este error no es realmente importante, ya que se tendría cierta discrepancia en la cuarta cifra decimal, error que es posible atribuir al número de dígitos que se utilizo en el cálculo. Por lo tanto es sin lugar a dudas una aproximación muy buena.

La figura 4.35, muestra una gráfica comparativa de los resultados que nos proveen el método o cálculo numérico y el cálculo analítico; Tomando como abscisa la distancia relativa z , y como ordenada el coeficiente de transmisión T . La diferencia que se presenta en los resultados del cálculo analítico y numérico, expuesta en la gráfica comparativa, sobre la posición vertical de estos es tan pequeña que es difícil poder notarla en la gráfica, sin embargo recurriendo a la tabla 2, en la columna de porcentaje de error, el valor máximo de error es menor de 0.5%; es por esto, que podemos considerar que los resultados de los métodos analítico y numérico, son iguales, ya que el porcentaje de error es insignificante.

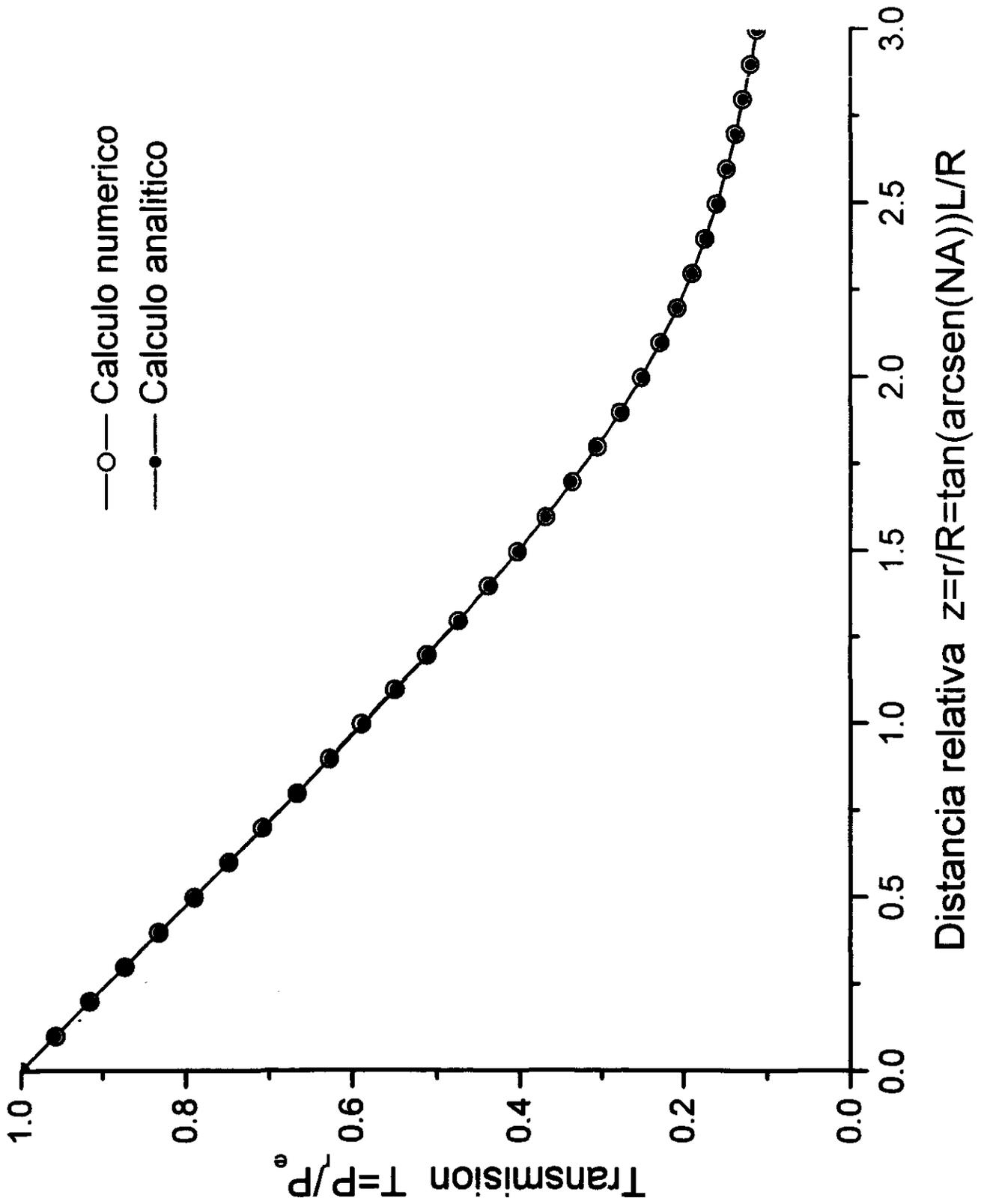


Figura 4.35 Gráfica de comparación de los resultados del cálculo numérico y el cálculo analítico.

5. CONCLUSIONES

Esta tesis es un trabajo de introducción a los sensores de fibra óptica, en general, y en particular el trabajo previo de una investigación más profunda que se antoja interesante sobre los sensores refractométricos de intensidad con base en fibras ópticas.

Es de resaltar la importancia, que dicha aplicación de las fibras ópticas, tienen en los sistemas de influencia externa, y con mejores beneficios en aplicaciones donde los medios de transducción convencionales son muy costosos y sobre todo de alto riesgo, es el caso de la electrónica, sin embargo, el gran campo que se ha abierto con la aplicación de las fibras ópticas, como medios de influencia externa, es fascinante e incalculable.

Los resultados obtenidos en este trabajo de investigación, aunque modestos, son reveladores ya que el objetivo principal se cumplió al obtener un modelo matemático del coeficiente de transmisión para un sensor refractométrico de intensidad con elemento de sensibilidad en forma de prisma. La comparación de estos resultados con un método simulado en un programa de cómputo, nos da la pauta para utilizar los resultados de la simulación numérica, sin tener errores graves, teniendo como ventaja la simplicidad de utilizar métodos simulados, ya que fue muy notorio que el proceso de resolución de algunas expresiones que intervienen en el cálculo analítico del modelo matemático, no son del todo simples ni mucho menos prácticas. La simulación y creación de programas que modelen comportamientos de los sistemas, como los sensores de fibra óptica, ahorraran tiempo y esfuerzo, así como recursos, que son factores importantes para el desarrollo de un sistema de este tipo. El error máximo encontrado en la tabla 2 del capítulo 4, en la sección de comparación de resultados resulto ser 0.5% siendo esto realmente bajo, lo que nos alienta a intentar la simulación numérica para sensores de mayor complejidad en los cuales no es posible utilizar el cálculo analítico.

El método analítico utilizado para el análisis del sensor refractométrico se puede aplicar también a sensores de otros tipos, (sensores de desplazamiento, posición, etc.), es decir, los resultados de esta tesis abarcan a una gran gama de sensores.

Es muy posible que el total de las investigaciones teóricas se basen en la simulación o elaboración de programas que generen aproximaciones excelentes, tanto que, los métodos analíticos sean obsoletos o de enfoques en el sentido de justificación de métodos numéricos.

La implementación de uno de estos sistemas de transducción es, como puede esperarse, de elaboración meticulosa y de requerimientos que para el momento en que se realizó este trabajo el alcance económico y factores de tiempo no lo permitieron, pero proporciona una brecha para la elaboración de estudios más intensos en este ramo de la ingeniería. Siendo las aplicaciones desde las más sencillas, hasta las más complejas.

Finalmente un estudio interesante, de mas alcance, podría basarse en la obtención de un modelo matemático que permita obtener el índice de refracción de un medio externo a partir del sensor propuesto para este estudio.

6. BIBLIOGRAFIA.

- [1] CURSO DE FIBRAS OPTICAS
Ricardo Sánchez
Editado por PEMEX
México, 1997.
- [2] FÍSICA PRINCIPIOS Y PROBLEMAS
James T. Murphy, Robert C. Soote
Compañía editorial continental
México, 1981.
- [3] OPTICA
7a edición
Justiniano Casas Peláez
PONS Fernando Católico, 37.50009
Zaragoza España, 1994.
- [4] TODO SOBRE LAS FIBRAS OPTICAS.
Marcombo, BOIXAREU EDITORES
Juan Tur Terrasa, Ma. Rosario Martínez Jiménez.
Barcelona-México, 1989.
- [5] OPTICAL FIBER SENSORS
Principles and components
Edited By JHON DAKIN Y & BRIAN CULSHAW
Volumen 1
Artech House, INC.
685 canton Street Norwood, MA 02062
Boston and London, 1988.
- [6] OPTICAL FIBER SENSORS
Principles and components
Edited By JHON DAKIN Y & BRIAN CULSHAW
Volumen 2
Artech House, INC.
685 canton Street Norwood, MA 02062
Boston and London, 1988.
- [7] OPTIC
Principles and aplicaciones
Mc Graw Hill
Richard Thornton
Boston, 1980.
- [8] COMUNICACIONES OPTICAS
Apuntes del curso de comunicaciones ópticas, semestre 1999-1, UNAM, FI
Vladimir A. Svirid Kuzmenko
- [9] FUNDAMENTALS OF FIBER OPTICS
In Telecommunication and Sensors Systems
Bishnu P. Pal
John Wiley Limited
New York, 1992.
- [10] MANUAL DE FORMULAS MATEMATICAS
Murria R Spiegel, Ph. D.
Traducción y adaptación: Orlando Guerrero Ribero
McGraw-Hill Book Co, U. S. A.
México, 1984.
- [11] TESIS DOCTORAL
"SENSORES REFRACTOMÉTRICOS EN FIBRAS OPTICAS" (Manuscrito).
M. en I. Vladimir A. Svirid Kuzmenko.
UNAM, México D. F., 2000.