

00382

4



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MATRIZ DE MEZCLAS DE LOS QUARKS  
Y  
SIMETRÍA PERMUTACIONAL DEL SABOR.

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)  
P R E S E N T A :  
EZEQUIEL RODRÍGUEZ JÁUREGUI

147782



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALFONSO MONDRAGÓN BALLESTEROS

2000



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



OFICIO PCF/150/2000  
ASUNTO Designacion de jurado

**ING. LEOPOLDO SILVA GUTIÉRREZ**  
DIRECTOR GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
P R E S E N T E

**At'n: Biol. Francisco Javier Incera Ugalde**  
Jefe de la Unidad de Administración del Posgrado

El Comité Académico del Posgrado en Ciencias Físicas en su sesión del seis de julio de 1999 ha designado como Jurado del M. en C. **EZEQUIEL RODRÍGUEZ JÁUREGUI** con número de cuenta **9181986-4** y número de expediente **3912022**, para dictaminar si el trabajo desarrollado como tesis titulado: "Matriz de mezclas de los quarks y simetría permutacional del sabor", dirigida por el **Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros**, tiene los méritos para obtener el grado de **DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)** conforme al plan de estudios 582.

<b>PRESIDENTE:</b>	<b>DR. ALFONSO MONDRAGÓN BALLESTEROS</b>
<b>SECRETARIO:</b>	<b>DR. JUAN CARLOS D'OLIVO SÁEZ</b>
<b>VOCAL:</b>	<b>DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT</b>
<b>VOCAL:</b>	<b>DR. GERARDO HERRERA CORRAL</b>
<b>VOCAL:</b>	<b>DR. GABRIEL LÓPEZ CASTRO</b>
<b>SUPLENTE:</b>	<b>DR. FERNANDO MATÍAS MORENO YNTRIAGO</b>
<b>SUPLENTE:</b>	<b>DRA. REBECA JUÁREZ WYSOZKA</b>

**A T E N T A M E N T E**  
**"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"**  
Ciudad Universitaria, D.F., a 13 de julio de 2000.  
**EL COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

  
**DR. JOSÉ LUIS BOLDÚ OLAIZOLA**

yhq

c.c.p.- Interesado.  
c.c.p.- Expediente.

# Dedicatoria

Dedico esta tesis a mis padres Lorenzo Rodríguez Jáuregui y Bertina Jáuregui Delgadillo por todo su cariño y por haberme enseñado que no hay nada mas valioso que el conocimiento.

A mi esposa Manuela María Tenorio Guerra por todo su apoyo, confianza, comprensión, cariño y amor.

# Agradecimientos

Agradezco a mi asesor y amigo el Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros por haberme propuesto este excelente, interesante y emocionante tema de tesis de doctorado.

A todos mis maestros de la UNISON y de la UNAM.

A mi comité tutorial de doctorado, formado por los Doctores Alfonso Mondragón Ballesteros, Manuel Torres Labansat y Axel de la Macorra Peterssen por los consejos y recomendaciones que me hicieron para la realización de esta tesis.

Agradezco a los sinodales que revisaron y corrigieron esta tesis por sus atinados comentarios y correcciones

Dr. Juan Carlos D'Olivo Sáez  
Dr. Gerardo Herrera Corral  
Dr. Peter Otto Hess Bechstedt  
Dra. Rebeca Juárez Wysozka  
Dr. Gabriel López Castro  
Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros  
Dr. Fernando Matías Moreno Yntriago.

Asimismo, agradezco al Departamento de Física y al Departamento de Desarrollo Académico de la Universidad de Sonora por todos los apoyos recibidos a través del programa de FOMES.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico que recibí para la realización de mis estudios de Doctorado con la beca CONACyT Ref: 87156 y por el apoyo económico que recibí para la escritura de la Tesis a través de los proyectos; CONACyT Ref:32238-E y CONACyT Ref: 3909P-E9607 y a los responsables de estos proyectos, los Doctores Enriqueta Hernández y Alfonso Mondragón Ballesteros.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM (DGAPA-UNAM) por el apoyo para la realización de esta tesis a través del proyecto No. PAPIIT-IN125298 y a los responsables de estos proyectos, los Doctores Myriam Mondragón Ceballos y Alfonso Mondragón Ballesteros.

A la Fundación UNAM por el apoyo económico que se me otorgó dentro de su Programa de Iniciación Temprana a la Investigación y a la Docencia.

A la Dirección General de Estudios de Posgrado de la UNAM (DGEP-UNAM) por los apoyos que recibí a través del programa PADEP-TESIS DOCTORAL.

Al Instituto de Física de la UNAM y en especial al Departamento de Física Teórica y a la Biblioteca Juan de Oryazábal que me brindaran sus instalaciones y servicios para llevar a cabo este trabajo de tesis, a la Secretaría Académica del IFUNAM por el apoyo recibido para asistir a eventos académicos.

Al Sistema Nacional de Investigadores por el apoyo recibido como Ayudante de Investigador y como Candidato a Investigador.

Agradezco a mis amigos de la Universidad de Sonora, Francisco Rubio, Jorge Ramón Soto, Rosario Dolores Cárdenas, Sonia Sosa, Adolfo Mijares, Enrique Alvarez, Laura Yeomans, Federico Cázares, R. Pedro Duarte, Lorenzo Olgúin, Eduardo Frías, Alfredo Gámez y especialmente a Angelina Uribe A. y a Antonio Jáuregui D. por todo el apoyo y la ayuda que siempre me han dado.

A todos mis amigos de la UNAM y especialmente a Eduardo S. Tútuti, Erika Alvarez, Catalina Hernández, Liliana Esther Velasco, Gabriela Murguía, J. Luis Maldonado, Moisés Martínez, J. Luis Martínez, Hugo Hernández, Erik Vera, Ruben Alfaro, Alfredo del Oso, Gonzalo Viramontes y Sergio Mateos.

Agradezco a mis hermanos, tíos, primos y familiares, especialmente a mi abuelo Juan Jáuregui, a mi tío Jesus Rodríguez J. y a mis padrinos Leandro Catalán S. e Ildelisa Jáuregui D. por el apoyo que me han dado.

A Yvonne y Fiorela Cartín por su cuidadosa corrección de estilo.

Agradezco a las secretarias de Física Teórica: Lizette Ramirez, Maria Luisa Araujo y Martha Tinoco toda la ayuda que me dieron siempre que la necesité.

# Índice General

Introducción	10
<b>1 Masas de los fermiones y violación de CP en el Modelo Estándar</b>	<b>15</b>
1.1 Interacciones electrodébiles y fuertes	15
1.1.1 Contenido de materia del Modelo Estándar	16
1.1.2 La lagrangiana del Modelo Estándar	17
1.2 Generación de las masas de los fermiones por el mecanismo de Higgs	18
1.3 Acoples de Yukawa y violación de CP	19
1.3.1 Matrices de masas de los quarks y violación de CP	21
1.4 Corrientes cargadas y violación de CP	22
1.5 La matriz de mezclas de los quarks	23
1.5.1 Triángulos unitarios	26
1.5.2 El invariante de Jarlskog	27
1.5.3 Determinación experimental de $V$	28
1.5.4 Medidas directas	29
1.5.5 Unitaridad de la matriz de mezclas de los quarks	30
1.5.6 Medidas Indirectas de $V$	32
1.5.7 Matriz de mezclas de los quarks y física nueva	33
1.5.8 Parametrizaciones de la matriz CKM	34
1.6 Mas allá del Modelo Estándar	37
1.6.1 Masas de los neutrinos	42
1.6.2 Corrientes cargadas y Matriz de mezclas de los leptones	44
1.7 Mezclas y oscilaciones de neutrinos	47
1.8 Parametrizaciones de la matriz de mezclas de los neutrinos	49



<b>2</b>	<b>Familias de fermiones</b>	<b>53</b>
2.1	Patrón o jerarquía de las masas de los quarks . . . . .	53
2.2	Jerarquía de mezclas . . . . .	55
2.3	Cancelación de anomalías . . . . .	55
2.4	Simetrías de familias . . . . .	57
2.4.1	Grupos finitos no abelianos . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Simetría del sabor para dos familias de quarks</b>	<b>63</b>
3.1	Simetría permutacional de dos familias . . . . .	63
3.1.1	Representaciones tensoriales de $S(2)$ y matriz de masas	67
3.1.2	Rompimiento de la simetría $S(2)$ y el ángulo de Cabibbo	71
3.1.3	Equivalencia de fase de $\mathbf{V}^{th}$ y $\mathbf{V}^C$ . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Simetría del sabor para tres familias de quarks</b>	<b>79</b>
4.1	Simetría permutacional de tres familias . . . . .	79
4.1.1	Representaciones tensoriales de $S(3)$ y matriz de masas	84
<b>5</b>	<b>La matriz de mezclas a partir del rompimiento de <math>S_L(3) \otimes S_R(3)</math></b>	<b>93</b>
5.1	La matriz de mezclas de las texturas de Fritzsche . . . . .	93
5.2	Simetría permutacional del sabor . . . . .	94
5.3	Textura de Fritzsche modificada . . . . .	98
5.3.1	El patrón del rompimiento de la simetría . . . . .	101
5.4	La matriz de mezclas CKM . . . . .	104
5.5	El mejor valor de $Z_q^{1/2}$ . . . . .	106
5.6	Texturas de masas derivadas del “mejor” esquema de rompimiento de simetría . . . . .	113
5.7	La matriz de mezclas, $V_{CKM}$ , derivada del mejor esquema de rompimiento . . . . .	115
5.8	Resumen y conclusiones . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Angulos de mezcla y fase que viola CP</b>	<b>121</b>
6.1	Equivalencia de $\mathbf{V}^{th}$ con otras parametrizaciones . . . . .	121
6.2	Equivalencia de fase de $\mathbf{V}^{th}$ y $\mathbf{V}^{PDG}$ . . . . .	124
6.3	Angulos de mezcla de la parametrización estándar $\mathbf{V}^{PDG}$ . . . . .	130
6.4	La fase $\delta_{13}$ que viola CP . . . . .	132
6.5	Equivalencia de fase de $\mathbf{V}^{th}$ y $\mathbf{V}^W$ . . . . .	137

6.6	Equivalencia de fase de $V^{th}$ y la parametrización $V^{KM}$ de Kobayashi-Maskawa . . . . .	142
6.7	La fase $\delta_{KM}$ que viola CP. . . . .	144
6.8	Angulos de mezcla de la parametrización de Kobayashi-Maskawa. . . . .	146
6.9	Resumen y Conclusiones . . . . .	149
<b>7</b>	<b>Matriz de mezclas de los leptones derivada del rompimiento de <math>S(3)_L \otimes S(3)_R</math></b>	<b>153</b>
7.1	La matriz de masas de los leptones . . . . .	158
7.2	Matriz de masas leptónica derivada de $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . . . . .	160
7.3	Textura de Fritzsche modificada . . . . .	163
7.4	La matriz de mezclas leptónica $U^{th}$ . . . . .	164
7.4.1	Oscilaciones de Neutrinos . . . . .	169
7.5	Parametrización de la matriz de mezclas $U^{th}$ . . . . .	170
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>175</b>
<b>A</b>	<b>Elementos de la matriz <math>V_q</math></b>	<b>181</b>
A.1	Fases $w_{ij}^{th}$ de la matriz CKM . . . . .	186
A.2	Fases observables y unitaridad . . . . .	188
A.3	Razones de masas de los quarks y fases observables . . . . .	194
<b>B</b>	<b>Artículos publicados</b>	<b>197</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>263</b>



# Introducción

Hasta hoy el Modelo Estándar funciona excepcionalmente bien, no hay hechos experimentales conocidos que demuestren algo en contradicción con sus predicciones. Sin embargo, el Modelo Estándar tiene una serie de propiedades que nos dejan insatisfechos; por ejemplo, se introducen campos de Higgs para romper la simetría electrodébil para poder dar masas a las partículas fundamentales. Además, la simetría de norma y el campo de Higgs garantizan que la teoría sea renormalizable; sin embargo, el Higgs no ha sido observado. Ligado al problema de las masas, tenemos el llamado acertijo de las jerarquías de masas; éste surge porque experimentalmente se observa que fermiones del mismo tipo, pero de diferentes generaciones o familias, tienen una gran diferencia en sus masas; esta diferencia es tan grande que en primera aproximación se pueden tomar como nulas las masas de las dos primeras familias. Otro problema que no está resuelto en el Modelo Estándar es la replicación de los fermiones; en el Modelo Estándar se sabe que los fermiones existen en tres generaciones o familias para explicar el espectro observado de partículas, sin que haya una razón teórica que explique por qué la naturaleza es así. Además, de los experimentos sabemos que las interacciones débiles violan CP, particularmente en los decaimientos de los mesones  $K^0$  y  $B^0$ , este problema tampoco está completamente explicado en el Modelo Estándar.

En el Modelo Estándar la violación de CP se introduce poniendo una fase compleja en la matriz de mezclas de los quarks para tres familias, llamada la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ó  $V_{CKM}$ . La matriz  $V_{CKM}$  acopla campos de quark con diferentes sabores en la representación de las masas. La matriz de masas de los quarks es una matriz hermitiana de tres por tres. El desconocimiento de los elementos de la matriz de masas de los quarks en la representación de norma se refleja en la ausencia de una relación funcional entre las masas de los quarks y los cuatro parámetros libres (tres ángulos de

mezcla y la fase compleja que viola CP) con los que normalmente se parametriza la matriz de mezclas de los quarks  $V_{CKM}$ . La matriz  $V_{CKM}$  es una matriz unitaria de tres por tres, cuyos elementos diagonales son muy cercanos a la unidad, pero con elementos fuera de la diagonal variando en magnitud entre un 20% y hasta 3 partes por millar de la unidad. A esta diferencia tan marcada en el valor que toman los elementos de la matriz de mezclas se le conoce como el problema de la jerarquía de mezclas.

Estos hechos empíricos necesitan una explicación teórica que no se encuentra en el marco del Modelo Estándar tal como está formulado. El desconocimiento de una teoría completa o final se ve reflejado en el gran número de parámetros libres independientes, los cuales exhiben patrones que no se pueden explicar aún y deben obtenerse del experimento. En la literatura se intenta dar respuesta a estas preguntas con extensiones del Modelo Estándar, pero sin mucho éxito; la dificultad estriba en el hecho que hay mucha libertad para trabajar fuera del marco del Modelo Estándar.

Para orientarnos entre las posibles soluciones al problema de la simetría de familias subyacente del Modelo Estándar, nos guiaremos por los principios siguientes: La lagrangiana del Modelo Estándar sin masas tiene todos los campos de materia y las simetrías de norma  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  y quiral exactas. Antes de que los quarks adquieran masa vía el mecanismo de Higgs, los quarks de una misma familia están acoplados de igual manera a todos los campos y la invariancia respecto del intercambio de quarks de la misma familia es una simetría natural exacta del Modelo Estándar sin masas. La simetría de familias del Modelo Estándar es una simetría de los quarks; y una vez que los quarks adquieren masa, la matriz de mezclas de los quarks es la evidencia experimental de la simetría de familias subyacente del Modelo Estándar.

En esta tesis demostramos que la matriz de mezclas de los quarks y los ángulos internos de los triángulos unitarios se pueden obtener a partir de la simetría permutacional de familias  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  del Modelo Estándar y el rompimiento de esta simetría de familias. El ajuste con los datos experimentales actuales de la matriz de mezclas de los quarks y los ángulos internos de los triángulos unitarios favorece un esquema único del rompimiento de la simetría permutacional de familias  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ .

Sin salirnos del marco del Modelo Estándar, ya que no se introducen campos ó fuerzas nuevas, basándonos en la hipótesis de que existe un grupo de simetría de familias finito y no-abeliano  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  que se rompe de una manera única al subgrupo  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ , derivamos las matrices de masas o texturas para los quarks tipo up y tipo down en la representación de norma con sólo dos parámetros libres cada una,  $\phi_q$  y  $Z_q$ . Del conocimiento de las matrices de masas derivadas a partir de la simetría de familias y el rompimiento suave de esta simetría podemos construir la matriz de mezclas teórica  $V^{th}$  de los quarks derivada del grupo de simetría de familias. La comparación de la matriz de mezclas de los quarks con los datos experimentales nos permite escribir la matriz de mezclas  $V^{th}$  con sólo dos parámetros libres, la fase  $\Phi = \phi_u - \phi_d$  responsable de la violación de CP y el parámetro  $Z = Z_u = Z_d$  que mide el rompimiento de la simetría permutacional y cuatro cocientes de los eigenvalores de las masas de los quarks  $m_u/m_t$ ,  $m_c/m_t$ ,  $m_d/m_b$  y  $m_s/m_b$ .

Al comparar con las parametrizaciones fenomenológicas recomendadas por el Particle Data Group, que tienen cuatro parámetros libres, tres ángulos de mezcla y una fase, encontramos la relación funcional entre ángulos de mezcla y masas de los quarks. Una consecuencia de la relación funcional entre ángulos de mezcla y masas de los quarks es que la jerarquía de masas de los quarks induce la jerarquía de mezclas en la matriz de mezclas de los quarks.

Encontramos también que al romper la simetría de familias  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  se mezclan las representaciones irreducibles de singlete y de doblete del grupo de permutaciones  $S(3)$  a las que se asignan los quarks cuando la simetría es exacta, y esta mezcla de representaciones está asociada a la violación de CP y de la asimetría del tiempo.

Finalmente obtenemos que con los cuatro cocientes de las masas de los quarks a la escala del top y sólo dos parámetros  $\Phi = 90^\circ$  y  $Z = 2.53125$ , obtenidos a partir del rompimiento de la simetría y la comparación con los experimentos, se reproducen todos los datos experimentales conocidos hasta ahora para la matriz de mezclas de los quarks con un 90% de nivel de confianza. La hipótesis de simetría de familias y su rompimiento nos permite eliminar dos parámetros libres del Modelo Estándar.



# Capítulo 1

## Masas de los fermiones y violación de CP en el Modelo Estándar

### 1.1 Interacciones electrodébiles y fuertes

El Modelo Estándar [1] de las interacciones electrodébiles y fuertes es una teoría de norma y proporciona un marco teórico consistente y bien definido en el cual se unifican la electrodinámica cuántica y las interacciones débiles y fuertes. El grupo de norma  $G_{MS}$  de la teoría es un grupo local y no abeliano,

$$G_{MS} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \quad (1.1)$$

A diferencia de las interacciones electromagnéticas en las que el alcance de la interacción es infinito, las interacciones débiles son de corto alcance; esto se debe a que los bosones intermedarios de las interacciones débiles tienen masas del orden de 80 GeV. En el límite de masa nula para fermiones, la lagrangiana de las interacciones débiles tiene una estructura quiral; en este límite, sólo los quarks y los leptones izquierdos y los antiquarks y los antileptones derechos se acoplan a los bosones W intermedarios de la interacción débil. Cuando se rompe la simetría de norma se introducen términos de masa y se rompe la simetría quiral, esto implica que se mezclen las componentes de quiralidad izquierda y derecha de los fermiones y haya violación de paridad P y conjugación de carga C en las interacciones débiles.



### 1.1.1 Contenido de materia del Modelo Estándar

En el Modelo Estándar hay tres generaciones ó “familias” de fermiones denotados como  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , donde  $i$  es el índice de familia. Las familias se numeran en orden jerárquico de acuerdo a su masa. La primer familia está formada por los fermiones mas ligeros:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

El Modelo Estándar para una familia es una teoría completamente autocontenida y es autoconsistente. Sin embargo, en la naturaleza se observan otras dos familias más pesadas

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

con propiedades idénticas a las de la primer familia, las cuales simplemente se agregan en el Modelo Estándar sin explicar el origen de esta replicación. De esta manera se obtiene el Modelo Estándar para tres familias, el cual es también una teoría completamente autocontenida y autoconsistente.

Los campos fermiónicos  $\psi$  se describen por sus componentes de quiralidad derecha  $\psi_R$  e izquierda  $\psi_L$

$$\psi_{L,R} = \left( \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \psi, \quad \bar{\psi}_{L,R} = \bar{\psi} \left( \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right). \quad (1.4)$$

En el Modelo Estándar, los fermiones izquierdos y derechos tienen propiedades de transformación diferentes bajo el grupo de norma y cada una de las tres generaciones de fermiones está constituida por cinco representaciones diferentes del grupo de norma del Modelo Estándar:

$$Q_{Li}^I(3, 2)_{+1/6}, \quad u_{Ri}^I(3, 1)_{+2/3}, \quad d_{Ri}^I(3, 1)_{-1/3}, \quad L_{Li}^I(1, 2)_{-1/2}, \quad l_{Ri}^I(1, 1)_{-1}. \quad (1.5)$$

En esta notación, el superíndice  $I$  denota los eigenestados de interacción; los subíndices  $L$  y  $R$  denotan quiralidad izquierda y derecha respectivamente;  $i = 1, 2, 3$  es el índice de sabor o de familias; los términos dentro del paréntesis indican las propiedades de transformación para cada fermión bajo los grupos  $SU(3)_C$  y  $SU(2)_L$  respectivamente; el subíndice del paréntesis es la hipercarga  $Y = Q_{em} - T_3$  del fermión correspondiente. Las interacciones de norma del Model Estándar no distinguen entre las diferentes generaciones

o familias; la magnitud de la interacción de norma depende de los números cuánticos pero no del índice de sabor  $i$ .

En el Modelo Estándar hay además un campo escalar  $\phi$ , conocido como el campo de Higgs,

$$\phi(1, 2)_{+1/2}, \quad (1.6)$$

este campo es un singlete de  $SU(3)$ , doblete de  $SU(2)$ , tiene hipercarga  $+1/2$ , se acopla a todos los fermiones y es el responsable de dar masa a los fermiones y bosones masivos.

### 1.1.2 La lagrangiana del Modelo Estándar

La lagrangiana completa del Modelo Estándar se obtiene de la invariancia de norma bajo el grupo  $G_{MS}$  de la Ec. (1.1) y da lugar a una teoría renormalizable. La lagrangiana completa del Modelo Estándar es la suma de la energía cinética de los campos de norma denotada por  $L_{kn}$ , la energía cinética de los fermiones  $L_{kf}$ , el término de los acoplamientos de Yukawa denotada como  $L_Y$  y finalmente la energía cinética y el potencial del campo de Higgs denotada por  $L_H$ .

$$L = L_{kn} + L_{kf} + L_Y + L_H \quad (1.7)$$

La invariancia de norma del segundo término de esta expresión bajo el grupo de norma  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  se obtiene si simplemente reemplazamos la derivada ordinaria por la derivada covariante,

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_s G_a^\mu L_a + ig A_b^\mu T_b + ig' B^\mu Y. \quad (1.8)$$

En esta expresión,  $G_a^\mu(X)$  son los ocho campos de los gluones,  $A_b^\mu(X)$  son los tres bosones intermediarios de la interacción débil y  $B^\mu(X)$  es el bosón de la hipercarga. Las matrices  $L_a$  son los generadores del grupo  $SU(3)_C$  de las interacciones fuertes y se pueden representar con las matrices  $\lambda_a/2$  de Gell-Mann en el caso de tripletes;  $T_b$  son los generadores del grupo  $SU(2)_L$  y se representan con las matrices de Pauli  $\tau_b/2$  para dobletes; finalmente tenemos las cargas  $Y$  del grupo  $U(1)_Y$ .

El primer término de la Ec. (1.7) es la energía cinética de los campos de norma

$$L_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma, son los siguientes:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{ijk}A_\mu^i A_\nu^k \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{ijk}G_\mu^i G_\nu^k, \end{aligned} \quad (1.10)$$

en estas expresiones,  $F_{\mu\nu}^a$  son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma  $A_\mu^a(X)$ , correspondientes a los tres generadores de  $SU(2)$ ;  $\epsilon^{ijk}$  son las constantes de estructura del grupo  $SU(2)$  y coinciden con el tensor  $\epsilon^{ijk}$  completamente antisimétrico de Levi-Civita;  $B_{\mu\nu}$  son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma  $B_\mu(X)$  asociados con  $U(1)$ ;  $G_{\mu\nu}^a$  son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los ocho campos  $G_\mu^a(X)$  de los gluones, correspondientes a los ocho generadores de  $SU(3)$ ;  $f^{ijk}$  son las constantes de estructura del grupo  $SU(3)$ .

## 1.2 Generación de las masas de los fermiones por el mecanismo de Higgs

Los términos bilineales en los campos fermiónicos no son invariantes de norma, y es por esto que no es posible incluir términos de masa que tengan la simetría de norma  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . En el Modelo Estándar se resuelve este problema agregando a la lagrangiana el término  $L_H$  que genera la dinámica que producirá el rompimiento espontáneo de la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , conocido como el mecanismo de Higgs del rompimiento espontáneo.  $L_H$  es la lagrangiana de Higgs y esta dada por el principio de invariancia de norma y el requisito de renormalizabilidad. Dentro del Modelo Estándar hay doce bosones de norma relacionados a la simetría de norma  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  y un solo escalar de Higgs relacionado al rompimiento espontáneo de la simetría  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{(EM)}$ . La energía cinética y potencial del campo de Higgs  $\phi$

es la siguiente:

$$L_H = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi), \quad (1.11)$$

en esta expresión  $\phi(x)$  incluye todos los campos de Higgs,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{h(x)\mathbf{1} + iw_\alpha(x)\sigma^\alpha\}. \quad (1.12)$$

El término con la derivada covariante representa la interacción de los bosones de norma con el campo de Higgs

$$D^\mu \phi = \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g_T \mathbf{A}_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \phi \quad (1.13)$$

El potencial  $V(\phi^\dagger \phi)$  es invariante bajo  $SU(2) \otimes U(1)$  y contiene a lo más términos cuárticos en  $\phi$ , para garantizar la renormalizabilidad de la teoría:

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (1.14)$$

La hermiticidad de  $L_H$  de la Ec. (1.11) implica que los parámetros  $\mu^2$  y  $\lambda$  sean reales. La lagrangiana  $L_H$ , Ec. (1.11), respeta P, C, y T. El rompimiento espontáneo de la simetría de norma  $G_{MS} \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{EM}$  se induce si el mínimo de V se obtiene para valores de  $\phi$  entre estados del vacío no nulos; esto es, el campo toma el valor

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = v \neq 0 \quad (1.15)$$

### 1.3 Acoples de Yukawa y violación de CP

Por último, debemos agregar la lagrangiana de Yukawa  $L_Y$ , formada por los términos que acoplan el campo de Higgs con los campos de los quarks y los leptones. En la lagrangiana de Yukawa, la renormalizabilidad y la invariancia de norma dan las constricciones más débiles y hay muchas posibilidades para las interacciones permitidas en la teoría. En la representación de interacción las interacciones de norma son diagonales y universales en el sentido de que son descritas por una constante de acoplamiento de norma por cada factor en  $G_{MS}$ :  $g_s$ ,  $g$  y  $g'$ . Por definición, los eigenestados de interacción no tienen acoplamientos de norma entre fermiones de diferentes generaciones y las mezclas entre los fermiones de sabor diferente no están permitidas; sin embargo,

el acoplamiento del campo de Higgs a los fermiones no se sigue del principio de invariancia de norma y en consecuencia las interacciones de Yukawa no son diagonales en esta representación. Por lo tanto los acoplamientos de Yukawa involucran fermiones de diferentes generaciones y, consecuentemente, los eigenestados de interacción se mezclan y no tienen masas definidas. El término de la lagrangiana de Yukawa invariante de norma para una sola familia de fermiones está dado por la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
 L_Y = & -(\bar{\nu}^e \quad \bar{e})_{L,1} \Gamma_{11}^l \phi \frac{(1 - \sigma_3)}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_{R,1} \\
 & - (\bar{u} \quad \bar{d})_{L,1} \Gamma_{11}^u \phi \frac{(1 + \sigma_3)}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{R,1} \\
 & - (\bar{u} \quad \bar{d})_{L,1} \Gamma_{11}^d \phi \frac{(1 - \sigma_3)}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{R,1} + h.c., \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

las cantidades denotadas por  $\Gamma^u$ ,  $\Gamma^d$  y  $\Gamma^l$  son conocidas como acoplamientos de Yukawa en analogía con las constantes del acoplamiento pión-nucleón en la vieja teoría de Yukawa; incluyen todas las constantes de acoplamiento y hacen que los acoplamientos de Yukawa sean invariantes bajo el grupo de Lorentz y los grupos de norma. Si las masas son reales, los acoplamientos de Yukawa  $\Gamma^u$ ,  $\Gamma^d$  y  $\Gamma^l$  son matrices complejas y hermitianas.

En el caso de tres o más familias, esta parte de la lagrangiana puede dar lugar a la violación de CP. Mas aún, toda la violación de CP del modelo electrodébil se origina en este sector.

Una explicación de por qué la violación de CP en este sector se relaciona con acoplamientos de Yukawa complejos se puede ver de la hermiticidad de la lagrangiana, ya que los diferentes términos de la Ec. (1.16) para tres familias de fermiones se pueden asociar en pares de la forma siguiente:

$$\Gamma_{ij} \bar{\psi}_{Li} \phi \psi_{Rj} + \Gamma_{ij}^* \bar{\psi}_{Rj} \phi^\dagger \psi_{Li}, \quad (1.17)$$

en esta expresión el índice  $i$  o  $j$  repetido no implica suma. La acción del operador de CP intercambia los operadores

$$\bar{\psi}_{Li} \phi \psi_{Rj} \leftrightarrow \bar{\psi}_{Rj} \phi^\dagger \psi_{Li}, \quad (1.18)$$

pero deja los coeficientes  $\Gamma_{ij}$  y  $\Gamma_{ij}^*$  invariantes. Esto significa que CP es una simetría del sector de Yukawa del Modelo Estándar si y sólo si  $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^*$  con  $i \neq j$ .

Se viola CP en el Modelo Estándar, si y sólo si [2]:

$$\Gamma_{ij}^f \neq \Gamma_{ij}^{*f} \quad y \quad Im \left\{ \det \left[ \Gamma^d \Gamma^{d\dagger}, \Gamma^u \Gamma^{u\dagger} \right] \right\} \neq 0. \quad (1.19)$$

Es claro que esta explicación es correcta si separamos el mecanismo de violación de CP del mecanismo de Higgs del rompimiento espontáneo de la simetría de norma. Las interacciones de Yukawa son la fuente de las masas de los fermiones y la única fuente de violación de CP del Modelo Estándar.

### 1.3.1 Matrices de masas de los quarks y violación de CP

Cuando la simetría de norma  $G_{MS}$  se rompe espontáneamente, las interacciones de Yukawa dan origen a los términos de masa de los fermiones:

$$\mathcal{L}_{Mass} = \bar{d}_{Li}^I \mathbf{M}_{ij}^d d_{Rj}^I + \bar{u}_{Li}^I \mathbf{M}_{ij}^u u_{Rj}^I + \bar{l}_{Li}^I \mathbf{M}_{ij}^l l_{Rj}^I + h.c.. \quad (1.20)$$

La matriz de masas de los fermiones se obtiene de los acoples de Yukawa cuando se rompe la simetría de norma, simplemente reemplazando  $\phi(X)$  por  $v$  en la Ec. (1.16)

$$\mathbf{M}_{ij}^f = \frac{v}{\sqrt{2}} \Gamma_{ij}^f \quad (1.21)$$

Esto significa que CP es una simetría del sector de Yukawa del Modelo Estándar si las matrices de masas son reales, esto es,  $\mathbf{M}_{ij}^f = \mathbf{M}_{ij}^{f*}$ . En consecuencia, CP se viola en el Modelo Estándar si y sólo si las matrices  $\mathbf{M}^d$  y  $\mathbf{M}^u$  no conmutan y la parte imaginaria de su conmutador no es nula, (ver C. Jarlskog Phys. Rev Lett. 55 (1985) 1039).

$$\mathbf{M}_{ij}^f \neq \mathbf{M}_{ij}^{*f} \quad y \quad Im \left\{ \det \left[ \mathbf{M}^d \mathbf{M}^{d\dagger}, \mathbf{M}^u \mathbf{M}^{u\dagger} \right] \right\} \neq 0. \quad (1.22)$$

Esto es, las matrices de masas de los quarks son complejas; en el caso de matrices de masas hermitianas, CP se viola en el Modelo Estándar si y sólo si [2]:

$$Im \left\{ \det \left[ \mathbf{M}^d, \mathbf{M}^u \right] \right\} \neq 0. \quad (1.23)$$

## 1.4 Corrientes cargadas y violación de CP

En el Modelo Estándar sólo las interacciones débiles violan CP, así que los términos de la energía cinética  $L_{kf}$  de los fermiones son interesantes para estudios de violación de CP ya que incluyen a las corrientes de los fermiones en interacción con los campos de norma del grupo  $SU(2) \times U(1)$ .

La derivada covariante  $D_\mu \psi_{L,R}$  actuando sobre los campos fermiónicos está dada de la manera siguiente:

$$D_\mu \psi_{L,R} = \left( \partial_\mu + ig \mathbf{T}_{L,R} \mathbf{A}_\mu + \frac{ig'}{2} Y_{L,R} \mathbf{B}_\mu \right) \psi_{L,R}, \quad (1.24)$$

donde  $\mathbf{T}_{L,R}$  y  $\frac{1}{2} Y_{L,R}$  son los generadores de  $SU(2)$  y  $U(1)$  respectivamente. Las relaciones de conmutación de los generadores de  $SU(2)$  son:

$$[T_{L,R}^a, T_{L,R}^b] = i\epsilon_{abc} T_{L,R}^c \quad (1.25)$$

El generador  $Q$  de la carga eléctrica e está dado por

$$Q = T^3 + Y \quad (1.26)$$

El acoplamiento de los fermiones de la primer familia a los bosones de norma se deriva directamente del término siguiente:

$$\begin{aligned} L_{kf} = & (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig \mathbf{T} \mathbf{A}_\mu + \frac{ig'}{2} Y \mathbf{B}_\mu \right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ & + (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_L \gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig \mathbf{T} \mathbf{A}_\mu + \frac{ig'}{2} \mathbf{B}_\mu \right) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ & + \bar{u}_R \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ig'}{2} Y \mathbf{B}_\mu \right) u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ig'}{2} Y \mathbf{B}_\mu \right) d_R \\ & + \bar{\nu}_R \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ig'}{2} Y \mathbf{B}_\mu \right) \nu_R + \bar{e}_R \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ig'}{2} Y \mathbf{B}_\mu \right) e_R. \end{aligned} \quad (1.27)$$

En esta expresión se deben tomar los siguientes valores para la hipercarga:  $Y(L_L) = -\frac{1}{2}$ ,  $Y(Q_L) = \frac{1}{6}$ ,  $Y(u_R) = \frac{2}{3}$ ,  $Y(d_R) = -\frac{1}{3}$ ,  $Y(l_R) = -1$ . Es precisamente en este término donde aparecen las corrientes de quarks y leptones. Si hacemos las operaciones indicadas, recordamos que  $\mathbf{T} \mathbf{A}_\mu = \sum_1^3 T_i A_\mu^i$  y sustituimos los valores de las hipercargas, podemos reescribir esta lagrangiana de

la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 L_{kf} &= (\bar{u} \quad \bar{d})_L i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_L i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\
 &+ \bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + \bar{u}_R i\gamma^\mu \partial_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu \partial_\mu d_R \\
 &+ \left( gJ_\mu^1 A_1^\mu + gJ_\mu^2 A_2^\mu \right) + \left( gJ_\mu^3 A_3^\mu + \frac{g'}{2} J_\mu^Y B^\mu \right), \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

aquí hemos denotado a las corrientes cargadas de quarks y leptones como  $J_\mu^1$  y  $J_\mu^2$  y a las corrientes neutras las denotamos como  $J_\mu^3$  y  $J_\mu^Y$ ; en función de los campos se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 J_1^\mu &= \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \\
 J_2^\mu &= -i\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + i\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e - i\bar{u}_L \gamma^\mu d_L + i\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \\
 J_3^\mu &= \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L \\
 J_Y^\mu &= \frac{1}{3} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L - (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\
 &- 2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{2}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

En la ausencia de términos de masa la lagrangiana del Modelo Estándar es quiral, esto es, tiene la propiedad de no mezclar las componentes derechas  $\psi_R$  e izquierdas  $\psi_L$  de los campos, así que en el límite quiral solo hay interacciones vectoriales y vectorial-axial; sin embargo, cuando se rompe espontáneamente la simetría de norma  $G_{MS}$  las interacciones de Yukawa dan origen a las masas de los fermiones y los términos de masa rompen la simetría quiral de la lagrangiana mezclando campos de quiralidad diferente.

## 1.5 La matriz de mezclas de los quarks

Los eigenestados de interacción no tienen acoplamientos de norma entre fermiones de diferentes generaciones, además las interacciones de Yukawa no son diagonales en la base de interacción, así que hay acoplos de Yukawa que involucran fermiones de diferentes generaciones y, consecuentemente, los eigenestados de interacción no tienen masas definidas. En la representación de interacción los términos de masa son matrices  $\mathbf{M}^f$  complejas de tres por tres y no diagonales:

$$\mathcal{L}_{Mass} = \bar{d}_{L_i}^I \mathbf{M}_{ij}^d \mathbf{d}_{R_j}^I + \bar{u}_{L_i}^I \mathbf{M}_{ij}^u \mathbf{u}_{R_j}^I + \bar{l}_{L_i}^I \mathbf{M}_{ij}^l \mathbf{l}_{R_j}^I + \text{h.c.}$$



En la representación de interacción los fermiones en general no son eigenestados de masa, así que los términos de masa pueden mezclar entre sí a los fermiones de la misma carga. Sin embargo, siempre podemos encontrar dos matrices unitarias  $\mathbf{U}_L^f$  y  $\mathbf{U}_R^f$  que diagonalicen a la matriz de masas

$$\bar{\psi}_L^f \mathbf{U}_L^{if} \mathbf{U}_L^f \mathbf{M}^f \mathbf{U}_R^{if} \mathbf{U}_R^f \psi_R^f = \bar{\psi}_L^f \mathbf{M}_{\text{diag}}^f \psi_R^f, \quad (1.30)$$

con  $\mathbf{M}_{\text{diag}}^f$  una matriz diagonal y real. Esta transformación es biunitaria y transforma los campos de los fermiones de la representación de interacción a la representación de masas; los campos en la representación de masas son:

$$\psi_{(L,R),i}^f = \left( \mathbf{U}_{(L,R)}^f \right)_{ij} \psi_{(L,R),j}^f. \quad (1.31)$$

En la literatura es común referirse a los campos en la representación de masas como los campos físicos ya que en esta representación los campos tienen una masa bien definida. La lagrangiana escrita en términos de los campos físicos

$$\mathcal{L}_M = \bar{d}'_L \mathbf{M}_{\text{diag}}^d \mathbf{d}'_R + \bar{u}'_L \mathbf{M}_{\text{diag}}^u \mathbf{u}'_R + \bar{l}'_L \mathbf{M}_{\text{diag}}^l \mathbf{l}'_R + \text{h.c.} \quad (1.32)$$

conserva de manera separada paridad P, carga C y también CP y T. Vemos pues que las propiedades aparentes de simetría de la lagrangiana del Modelo Estándar no tienen una relación directa con la física cuando se expresa con campos no físicos  $\psi_{(L,R),i}^f$ . Si expresamos todos los términos de la lagrangiana del Modelo Estándar en función de los campos físicos  $\psi_{(L,R),i}^f$  en la base de las masas, sólo las corrientes cargadas violan CP y tienen una forma que no es trivial:

$$\mathcal{L}_{W^\pm}^{\text{fis}} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}'_{Li} \gamma^\mu \left( \mathbf{U}_L^u \mathbf{U}_L^{d\dagger} \right)_{ij} d'_{Lj} W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (1.33)$$

La matriz de mezclas de los quarks se define por la expresión

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_L^u \mathbf{U}_L^{d\dagger} \quad (1.34)$$

En el Modelo Estándar tal como está formulado, la matriz de mezclas de los leptones análoga es una matriz unidad ya que se formuló para neutrinos de masa nula; sin embargo, la evidencia experimental de Kamiokande nos da cotas no nulas para las masas de los neutrinos, las cuales se confirmarán en los próximos experimentos. Esta propiedad de los neutrinos tiene como consecuencia que la matriz de mezclas para los leptones no sea trivial.

Por ahora estudiaremos la matriz de mezclas de los quarks. La matriz de mezclas de los quarks es una matriz unitaria con elementos complejos,

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{1}. \tag{1.35}$$

La definición de la matriz de mezclas no es única:

- Al definir la matriz de mezclas tenemos la libertad de permutar las familias de los quarks; esta libertad se restringe ordenando los quarks de acuerdo con la magnitud de sus masas en orden creciente,

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

- Es costumbre utilizar la definición de la matriz de mezclas de los quarks que acopla campos de quark tipo d con diferentes sabores en la representación de las masas ( $d', s', b'$ ) mediante

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}; \tag{1.37}$$

si intercambiamos quarks tipo-up por quarks tipo-down y viceversa, la matriz conecta los enestados ( $u, c, t$ ) y los correspondientes eigenestados de masa ( $u', c', t'$ ). Esta propiedad es la libertad que tenemos para elegir los quarks up o down para definir la matriz de mezclas de los quarks.

- La matriz de masas diagonal  $\mathbf{M}_{\text{diag}}^q$  es invariante, bajo una transformación de refasamiento de los campos de los quarks [2],

$$q_i \rightarrow q'_i = e^{i\chi_i} q_i. \tag{1.38}$$

Las magnitudes  $|\mathbf{V}_{ij}|$  son invariantes; sin embargo, las fases de los elementos de la matriz de mezclas

$$\mathbf{V}_{ij} \rightarrow \mathbf{V}'_{ij} = e^{-i\chi_i} \mathbf{V}_{ij} e^{i\chi_j} \tag{1.39}$$

cambian.

- En el caso en que hay tres generaciones de quarks, la matriz de mezclas de los quarks  $\mathbf{V}$  se escribe con cuatro parámetros libres, tres ángulos de mezcla y una fase, en ausencia de una teoría que permita derivar la matriz  $\mathbf{V}$  de la matriz  $\mathbf{M}$ ; estos parámetros se toman directamente de los experimentos. En el Modelo Estándar se supone que toda la violación de CP observada se relaciona con un valor distinto de cero para la fase que viola CP, así que todos los procesos que violan CP involucran a esta fase.

### 1.5.1 Triángulos unitarios

La unitariedad de la matriz de mezclas de los quarks asegura la ausencia de corrientes neutras que cambian el sabor, este es el mecanismo de Glashow-Iliopoulos y Maiani (GIM) [3]. A las condiciones de ortogonalidad

$$(\mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger)_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j \quad (1.40)$$

se les conoce como triángulos unitarios porque cada una de estas condiciones sobre los elementos de matriz se puede representar gráficamente por medio de un triángulo en el plano complejo. De los seis triángulos que se pueden construir, las condiciones de unitariedad permiten eliminar a tres de ellos y sólo tres son independientes entre sí:

El triángulo formado por la condición de ortogonalidad entre las columnas uno y dos

$$V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0, \quad (1.41)$$

está asociado con la física del mesón K.

El triángulo formado por la condición de ortogonalidad entre las columnas dos y tres nos da

$$V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* = 0. \quad (1.42)$$

Finalmente el triángulo formado por la condición de ortogonalidad entre las columnas uno y tres

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0, \quad (1.43)$$

está asociado con las propiedades de la física del mesón B.

Si conocemos los tres lados de cada triángulo unitario dados en las Ecs. (1.41-1.43), podemos conocer los ángulos internos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  de cada triángulo. Cada

una de las condiciones de unitaridad se puede expresar como una relación de la forma

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad (1.44)$$

en esta ecuación,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos internos del triángulo asociado a los decaimientos del mesón B y se pueden medir directamente de varios decaimientos del mesón B que violan CP. Los ángulos internos son invariantes bajo una redefinición de las fases de los quarks, así que son observables que tienen la propiedad de ser invariantes de fase. En total hay nueve ángulos internos observables de los triángulos unitarios; de estos nueve, sólo cuatro ángulos son independientes entre sí [4], [5]; estos son:

$$\beta = \pi - \arg \left( \frac{-V_{tb}^* V_{td}}{-V_{cb}^* V_{cd}} \right), \quad \alpha = \arg \left( \frac{V_{tb}^* V_{td}}{-V_{ub}^* V_{ud}} \right) \quad (1.45)$$

$$\beta_s = \arg \left( \frac{-V_{cs}^* V_{cb}}{-V_{ts}^* V_{tb}} \right), \quad -\beta_K = \arg \left( \frac{-V_{ud}^* V_{us}}{-V_{cd}^* V_{cs}} \right). \quad (1.46)$$

Si cualquiera de estos ángulos se anula, no hay violación de CP y el triángulo correspondiente se colapsa en una línea. Así que, otra medida de la violación de CP en la naturaleza se obtiene para un valor diferente de cero de estos ángulos y del área de los triángulos unitarios.

### 1.5.2 El invariante de Jarlskog

Con cada triángulo asociamos una medida del área, denotada por  $J_{ij}$ ; la propiedad importante es que todos los triángulos de la matriz de mezclas tienen la misma área [2],

$$|J| = |J_{ij}| = 2 \times Area. \quad (1.47)$$

En esta expresión  $J$  es el invariante de Jarlskog y se define con los elementos de la matriz de mezclas como

$$J \sum_{\gamma, l} \epsilon_{\alpha, \beta, \gamma} \epsilon_{jkl} = Im [V_{\alpha, j} V_{\beta, k} V_{\alpha, k}^* V_{\beta, j}^*]. \quad (1.48)$$

El invariante de Jarlskog mide la violación de CP y su signo depende de la dirección de los vectores complejos que forman los triángulos unitarios. Un

valor diferente de cero para el invariante de Jarlskog es una condición necesaria y suficiente para que haya violación de CP en el Modelo Estándar con tres generaciones de quarks. Esta condición se formula de manera independiente de la parametrización de la matriz de mezclas [2], con el determinante del conmutador de las matrices de masas para los quarks de carga  $2e/3$  y  $-e/3$ ; esto es,

$$J = \frac{\frac{i}{2m_t^2 m_c m_b^2 m_s} \det [\mathbf{M}^u, \mathbf{M}^d]}{\left(1 - \frac{m_c}{m_t}\right) \left(1 - \frac{m_u}{m_c}\right) \left(\frac{m_s}{m_t} - 1\right) \left(1 - \frac{m_s}{m_b}\right) \left(1 - \frac{m_d}{m_s}\right) \left(\frac{m_d}{m_b} - 1\right)} \quad (1.49)$$

así que todas las amplitudes donde se viola CP son proporcionales al invariante de Jarlskog. En un ajuste reciente de la fórmula Ec. (1.48) a los datos experimentales hecho por Buras [13], se obtiene para el invariante de Jarlskog

$$J = 2.7 \pm 1.1 \times 10^{-5} (\pm 40\% \text{incertid.}) \quad (1.50)$$

### 1.5.3 Determinación experimental de V

Las magnitudes de los nueve elementos de la matriz de mezclas se miden en los decaimientos débiles de los quarks y, en algunos casos, de la dispersión inelástica profunda del neutrino por el nucleón. Actualmente se está haciendo un esfuerzo muy grande para medir los elementos de la matriz de mezclas que aún no han sido medidos con suficiente precisión y poder sobredeterminar los parámetros libres. Los parámetros de mezcla de los quarks sólo se pueden obtener de los procesos de interacción débil. Hay tres formas de determinar los parámetros libres de la matriz de mezclas:

- (i) Las medidas directas: Los parámetros se obtienen al comparar los resultados experimentales con los procesos cuyas amplitudes de transición se pueden calcular por gráficas de “árbol” del Modelo Estándar.
- (ii) Unitaridad: Usando las relaciones entre los elementos de la matriz de mezclas que se derivan de la condición  $\mathbf{V}^\dagger \mathbf{V} = 1$
- (iii) Medidas indirectas: Los parámetros se obtienen al comparar los resultados experimentales con los procesos cuyas amplitudes de transición están determinadas por gráficas de rizo del Modelo Estándar.

Se espera encontrar un intervalo de variación para los cuatro parámetros libres que sea consistente con las tres formas de determinar los parámetros

libres de la matriz de mezclas.

La forma más eficiente de investigar los parámetros de mezcla es la siguiente:

1. Medir tantos parámetros como sea posible por medidas directas. Actualmente se tienen  $|V_{ud}|, |V_{us}|, |V_{ub}|, |V_{cd}|, |V_{cs}|, |V_{cb}|$  y  $|V_{tb}|$ .
2. Verificar que los elementos medidos directamente sean consistentes con la unitariedad de  $\mathbf{V}$ . Si son consistentes, determinar los parámetros que faltan usando unitariedad. Actualmente, esto se hace para los elementos  $|V_{td}|, |V_{ts}|, |V_{tb}|$  y  $|V_{cs}|$ .
3. Comprobar o demostrar las predicciones para los procesos de las corrientes neutras que cambian el sabor. Si no se encontrara alguna inconsistencia, se podría mejorar la determinación de los parámetros de la matriz de mezclas menos conocidos. Este es el caso para el producto  $|V_{tb}||V_{td}|$  y para la fase que viola CP.

### 1.5.4 Medidas directas

Siete de los nueve valores absolutos de los elementos de la matriz de mezclas se miden directamente, digamos por procesos de “árbol” [5].

El valor de  $|V_{ud}|$  se obtiene de comparar los decaimientos beta nuclear  $(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e$  que continúan a través de las corrientes vectoriales conservadas a un decaimiento del muón,  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$  [7],

$$|V_{ud}| = 0.9735 \pm 0.0008 \quad (1.51)$$

El decaimiento semileptónico  $K \rightarrow \pi e \nu$  y el decaimiento beta de los hiperones da [8]

$$|V_{us}| = 0.2196 \pm 0.0023 \quad (1.52)$$

La magnitud de  $|V_{cd}|$  se puede obtener de la producción de quarks charm por un neutrino y su antineutrino a partir de los quarks de valencia d de un nucleón en experimentos de dispersión inelástica profunda nucleón neutrino,  $\nu_l + d \rightarrow l^- + c$  [9]. Se obtiene de aquí que

$$|V_{cd}| = 0.224 \pm 0.016. \quad (1.53)$$

De el decaimiento semileptónico de los hadrones con charm  $D^\pm$  y  $D^0$ , involucrando por ejemplo los decaimientos  $D^\pm \rightarrow K^0 l^\pm \nu_l$  [10], se obtiene

$$|V_{cs}| = 1.04 \pm 0.16. \quad (1.54)$$

Los decaimientos semileptónicos inclusivos y exclusivos del mesón B, tales como  $b \rightarrow c + l^- + \nu_l$  y  $\bar{B}^0 \rightarrow D^{*\pm} + l^- + \nu_l$  [11], dan el valor siguiente:

$$|V_{cb}| = 0.0402 \pm 0.0019. \quad (1.55)$$

El extremo final de los decaimientos semileptónicos del mesón B [11] permite obtener

$$|V_{ub}/V_{cb}| = 0.090 \pm 0.025. \quad (1.56)$$

Finalmente  $|V_{tb}|$  se obtiene de la producción y decaimiento del quark top en el proceso  $t \rightarrow bl^+ \nu_l$  [5]:

$$|V_{tb}|^2 / (|V_{tb}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{td}|^2) = 0.99 \pm 0.29. \quad (1.57)$$

### 1.5.5 Unitaridad de la matriz de mezclas de los quarks

La condición de unitaridad de la matriz de mezclas de los quarks  $\mathbf{V}_{CKM}^\dagger \mathbf{V}_{CKM} = 1$  nos lleva a distintas relaciones entre los elementos de la matriz. La condición de ortogonalidad entre cualesquiera dos columnas será de mucha utilidad en la discusión:

La condición de ortogonalidad entre las columnas 1 y 2 está asociada con la física del mesón K

$$V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0 \quad (1.58)$$

La condición de ortogonalidad entre las columnas dos y tres nos da

$$V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* = 0 \quad (1.59)$$

Finalmente, la ortogonalidad entre las columnas uno y tres está asociada con las propiedades de la física del mesón B

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0. \quad (1.60)$$

Como se explicó antes, estas condiciones sobre los elementos de matriz tienen una interpretación geométrica en términos de tres triángulos en el plano complejo. Las constricciones de unitaridad restantes están dadas por

$$\sum_{i=1}^3 |V_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^3 |V_{ij}|^2 = 1 \quad (1.61)$$

La unitaridad de la matriz  $\mathbf{V}$  requiere entre otras cosas que la suma del cuadrado de las magnitudes de los elementos de matriz de cualquier renglón de la matriz de mezclas sumen uno [5], [6],

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 0.997 \pm 0.002, \quad (1.62)$$

$$|V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 = 1.18 \pm 0.33, \quad (1.63)$$

$$|V_{td}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{tb}|^2 = 0.98 \pm 0.30. \quad (1.64)$$

Estas relaciones son especialmente útiles y muestran que, con excepción del primer renglón, la información sobre la unitaridad de la matriz de mezclas de los quarks tiene todavía errores grandes; sin embargo, todos los datos dentro de sus errores son consistentes con una matriz de mezclas unitaria.

Usando las constricciones de la unitaridad, podemos reducir algunos de los intervalos de variación determinados a partir de las medidas directas, (el más notable es el de  $|V_{cs}|$ ) y poner constricciones sobre las mezclas  $|V_{ti}|$  del quark top. Por ejemplo, de la relación anterior Ec. (1.64) y los valores medidos de  $|V_{ub}|$  y  $|V_{cb}|$ , los cuales son tan pequeños que implican

$$|V_{tb}| = 1 \quad (1.65)$$

en una buena aproximación. La relación de ortogonalidad para el triángulo formado por las columnas 2 y 3 y los valores pequeños medidos para el producto  $|V_{us}V_{ub}|$  implican que la relación siguiente sea válida en una excelente aproximación

$$|V_{ts}| \approx |V_{cb}|. \quad (1.66)$$

La relación obtenida del triángulo del mesón B, y las medidas para  $|V_{ub}/V_{cb}| \leq 0.10$  y  $|V_{cd}/V_{ud}| \leq 0.22$  [5], dan

$$|V_{ts}||V_{tb}| \approx 0.0085 \pm 0.0045. \quad (1.67)$$

La información completa sobre los valores absolutos de los elementos de la matriz de mezclas de los quarks para tres familias de quarks obtenidos de las medidas directas y la unitaridad está resumida en la matriz siguiente [5]:

$$|\mathbf{V}| = \begin{pmatrix} 0.9742 - 0.9757 & 0.219 - 0.226 & 0.002 - 0.005 \\ 0.219 - 0.225 & 0.9734 - 0.9749 & 0.037 - 0.043 \\ 0.004 - 0.014 & 0.035 - 0.043 & 0.9990 - 0.9993 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Estos datos son correctos en un intervalo de variación de los parámetros libres dentro del límite de confianza de 90%. El error de los elementos de la



matriz de mezclas de los quarks varía para cada entrada, esto se debe a que cada elemento de la matriz se extrae de un experimento diferente y refleja, tanto las limitaciones experimentales actuales, como las incertezas teóricas asociadas con las cantidades hadrónicas que se necesitan para el análisis de los datos. Podemos ver de la Ec. (1.68) que los errores de los elementos de la matriz de mezclas del tercer renglón y columna con excepción de  $|V_{tb}|$  son todavía muy grandes.

### 1.5.6 Medidas Indirectas de V

En algunos casos el dato primario se obtiene de un experimento en el que la partícula que decae es un hadrón y no es posible aislar un quark para medir directamente su decaimiento, por lo que es necesario desarrollar un método para transcribir a un lenguaje de quarks los datos que se obtienen para hadrones. Para hacer esto se utilizan las técnicas de la Cromodinámica Cuántica, métodos del grupo de renormalización, lattice QCD, reglas de suma, la teoría efectiva de quarks pesados y otros. Esto permite estimar las cantidades hadrónicas, reduciendo así los errores teóricos de los elementos de la matriz de mezclas. Podemos obtener más información acerca de los elementos de la matriz de mezclas a partir de los procesos que cambian el sabor que ocurren a nivel de un rizo. Los rangos de los parámetros de la matriz de mezclas de los quarks se pueden constreñir aún más de lo que se logró con las medidas directas más unitaridad si agregamos la hipótesis siguiente: los diagramas de rizo donde participa un quark top dan la contribución dominante del proceso en cuestión.

Esto se hace por ejemplo para derivar los valores de los elementos de matriz  $|V_{ts}|$  y  $|V_{td}|$  a partir de las mezclas de B o  $b \rightarrow s\gamma$ .

De las mezclas de  $B_d^0 - \bar{B}_d^0$  se obtiene

$$|V_{tb}^* V_{td}| = 0.0083 \pm 0.0016 \quad (1.69)$$

Del cálculo de la razón de las diferencias de masas de  $B_s$  a  $B_d$  y la cota experimental

$$\frac{|V_{td}^*|}{|V_{ts}|} < 0.24, \quad (1.70)$$

para el límite inferior, nos da

$$|V_{ts}| < 0.010, \quad (1.71)$$

esta es una restricción importante por si misma.

Los resultados experimentales de CDF [15] y KTeV [16] de 1999 han fortalecido nuestra confianza en la validez del Modelo Estándar y la matriz de mezclas de los quarks:

- La colaboración CDF [15] ha anunciado un primer resultado significativo de una asimetría no nula obtenido del estudio del decaimiento  $B_d(\bar{B}_d) \rightarrow \psi K_s$ , correspondiente al valor de  $\text{sen}2\beta$  siguiente:

$$\text{sen}2\beta = 0.79_{-0.44}^{+0.41}, \quad (1.72)$$

este resultado es consistente con la información que se tiene de medidas directas y unitariedad, incluso tiene el signo correcto; sabemos que el signo es positivo dentro del rango de 93% del nivel de confianza.

- Recientemente la colaboración de KTeV [16] anunció un nuevo resultado para  $\epsilon'/\epsilon$  obtenido del análisis del 20% de los datos almacenados en los últimos dos años. Su resultado es

$$\text{Re}\epsilon'/\epsilon = (28.0 \pm 4.1) \times 10^{-4}. \quad (1.73)$$

Este resultado establece de manera clara que sí existe la violación directa de CP en la transición débil no leptónica de un kaón neutro a dos piones, es decir el parámetro  $\epsilon'$  no es cero.

Los resultados de las medidas directas y de las medidas indirectas de la matriz de mezclas de los quarks se resumen en los triángulos unitarios.

### 1.5.7 Matriz de mezclas de los quarks y física nueva

Se espera que la unitariedad de la matriz de mezclas sea válida si los únicos quarks de la naturaleza son los de las tres generaciones del Modelo Estándar. Si hubiera quarks adicionales, y si estos quarks extra se mezclaran con los quarks observados, entonces la unitariedad de la matriz de mezclas de  $3 \times 3$  se violaría. Es importante verificar que el valor de los elementos de la matriz de mezclas medidos directamente sean consistentes con la unitariedad de  $\mathbf{V}$ ; si se encontrara alguna inconsistencia, entonces, sería una indicación de la necesidad de extender el sector de quarks mas allá de las tres generaciones del Modelo Estándar.

Las medidas indirectas son muy sensibles a física mas allá del Modelo Estándar,

pero tienen el defecto de que los parámetros que se ajustan del experimento dependen del modelo.

Es importante comprobar o demostrar las predicciones para los procesos de las corrientes neutras que cambian el sabor. Si se encontrara alguna inconsistencia, se podría mejorar la determinación de los parámetros de la matriz de mezclas menos conocidos. Este es el caso para el producto  $|V_{tb}||V_{td}|$  y para la fase que viola CP. Si después de ajustar los parámetros menos conocidos hubiera todavía alguna inconsistencia, entonces se habría descubierto física nueva.

Para buscar posibles efectos de física nueva, se debe medir el invariante de Jarlskog  $J$  en todas las formas posibles; si la unitariedad es válida, se debe cumplir que [2]

$$J = J_{12} = J_{13} = J_{23}. \quad (1.74)$$

En particular, el invariante  $J_{12}$  obtenido del triángulo construido de la ortogonalidad entre las columnas uno y dos, se debe medir de los decaimientos de los Kaones,  $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$ ,  $K \rightarrow \pi e^+e^-$ ; el invariante  $J_{13}$  que se obtiene del triángulo construido de la ortogonalidad entre las columnas uno y tres, se obtiene de las medidas de los decaimientos del mesón B:  $B \rightarrow J/\Psi$ ,  $B \rightarrow \pi\pi\dots$ ; las dos medidas deben ser complementarias, si ocurriese que las medidas obtenidas de los decaimientos del kaón contradijesen las medidas obtenidas del decaimiento del mesón B, esto sería evidencia de la posibilidad de física nueva.

### 1.5.8 Parametrizaciones de la matriz CKM

Hay en la literatura diversas parametrizaciones de la matriz de mezclas de los quarks, la parametrización estándar, propuesta por L.-L Chau y W.-Y Keung ([19]), utiliza los ángulos  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  y una fase  $\delta_{13}$ :

$$V^{\text{PDG}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

En esta expresión,  $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$  y  $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ ; los subíndices  $i, j = 1, 2, 3$  son las etiquetas de las "generaciones". En esta parametrización, los ángulos de mezcla están definidos de tal manera que se describan las mezclas de dos familias específicas y si uno de estos ángulos se anula, la mezcla correspondiente

entre generaciones también se anula; por ejemplo, en el límite  $\theta_{23} = \theta_{13} = 0$  la tercera generación se desacopla y el problema se reduce al de la mezcla usual de Cabbibo para las primeras dos generaciones con el ángulo  $\theta_{12}$  identificado con el ángulo de Cabbibo. Ahora, los valores de estos parámetros se conocen con mucha precisión, la matriz de mezclas se obtiene con un 90% de confianza; si los valores de los intervalos de variación de los senos de los ángulos están en el intervalo  $s_{12} = 0.217$  a  $0.222$   $s_{23} = 0.036$  a  $0.042$  y  $s_{13} = 0.0018$  a  $0.0044$ , el valor de la fase  $\delta_{13}$  que viola CP queda entre  $0$  y  $2\pi$ , esto es, no está constreñida. Sin embargo, los valores más recientes de las oscilaciones de Kaones reportan  $0 \leq \delta_{13} \leq \pi$ .

Desde un punto de vista puramente fenomenológico, las ventajas principales de esta parametrización sobre las otras existentes en la literatura son básicamente dos:

- $s_{12}$ ,  $s_{13}$  y  $s_{23}$  se relacionan de manera muy simple con  $|V_{us}|$ ,  $|V_{ub}|$  y  $|V_{cb}|$  respectivamente, y se pueden medir de manera independiente en tres decaimientos distintos.
- La fase  $\delta_{13}$  que viola CP se encuentra siempre multiplicada por el parámetro pequeño  $s_{13}$ . Esto demuestra de manera clara la supresión de la violación de CP independientemente del valor que  $\delta_{13}$  pueda tomar.

El invariante de Jarlskog en esta parametrización es:

$$J = s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{13}^2c_{23} \sin \delta_{13}. \quad (1.76)$$

Originalmente Kobayashi y Maskawa ([17]) eligieron una parametrización que involucra los cuatro ángulos,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y  $\delta$ :

$$V^{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1c_3 & -s_1s_3 \\ s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3 + s_2c_3e^{i\delta} \\ s_1s_2 & c_1s_2c_3 + c_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3 - c_2c_3e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

en la que  $c_i = \cos\theta_i$  y  $s_i = \sin\theta_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . En el límite  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ , esta expresión se reduce a la mezcla usual de Cabibbo con  $\theta_1$  identificado con el ángulo de Cabbibo hasta un signo. El invariante de Jarlskog en esta parametrización es:

$$J = c_1c_2c_3s_2s_1^2s_3 \sin \delta. \quad (1.78)$$

Harald Fritzsch [18] propuso una parametrización que incluye la jerarquía fuerte de las masas de los quarks, las masas de los leptones y los ángulos de mezcla del sabor,

$$\mathbf{V}^{\text{HF}} = \begin{pmatrix} S_u S_d C + C_u C_d e^{-i\phi} & S_u C_d C - C_u S_d e^{-i\phi} & S_u S \\ C_u S_d C - S_u C_d e^{-i\phi} & C_u C_d C + S_u S_d e^{-i\phi} & C_u S \\ -S_d S & -C_d S & C \end{pmatrix}. \quad (1.79)$$

En esta parametrización, los tres ángulos  $\theta_u$ ,  $\theta_d$  y  $\theta$  tienen un significado físico preciso. El ángulo  $\theta$  describe la mezcla entre la segunda y la tercera familia, el ángulo  $\theta_u$  describe la mezcla  $u - c$ , el ángulo  $\theta_d$  describe la mezcla  $d - s$ ; la fase  $\phi$  puede tomar valores de  $0 - 2\pi$ , y es la fase asociada con la violación de CP. Los tres ángulos  $\theta_u$ ,  $\theta_d$  y  $\theta$  se relacionan de manera muy simple con los observables,

$$\text{sen}\theta = |V_{cb}| \sqrt{1 + \left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right|^2}, \quad \tan\theta_u = \left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right|, \quad \tan\theta_d = \left| \frac{V_{td}}{V_{ts}} \right|. \quad (1.80)$$

El invariante de Jarlskog en esta parametrización es:

$$J = S_u C_u S_d C_d S^2 C \text{sen}\phi. \quad (1.81)$$

La parametrización de Wolfenstein [20] es una aproximación que pone énfasis en la jerarquía de las magnitudes de los ángulos,  $s_{12} \gg s_{23} \gg s_{13}$  [20]; en esta parametrización se pone  $\lambda = s_{12}$ , con lo que  $\lambda$  es el seno del ángulo de Cabibbo, y se escriben los elementos restantes como potencias del parámetro  $\lambda$ :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

con  $A$ ,  $\rho$ , y  $\eta$  números reales de orden uno. Los valores de estos parámetros de acuerdo al análisis de Yosef Nir [12] quedan en los siguientes intervalos de variación:  $\lambda = 0.2205 \pm 0.0018$ ,  $A = 0.826 \pm 0.041$ ,  $-0.15 \leq \rho \leq +0.35$  y  $+0.20 \leq \eta \leq +0.45$ .

La relación entre los parámetros de Wolfenstein y la parametrización estándar está dada por las ecuaciones:

$$s_{12} = \lambda \quad s_{23} = A\lambda^2 \quad s_{13} e^{-i\delta_{13}} = A\lambda^3(\rho - i\eta). \quad (1.83)$$

Esta transformación determina los términos de la expansión en  $\lambda$ . A partir de aquí se obtiene que

$$\rho = \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}} \cos\delta_{13}, \quad \eta = \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}} \text{sen}\delta_{13} \quad (1.84)$$

La parametrización de Wolfenstein [20] es una parametrización aproximada pero es más transparente que la parametrización estándar ya que ofrece junto con el triángulo unitario una representación geométrica de la estructura de la matriz de mezclas de los quarks que es fácil de interpretar. Sin embargo, si uno requiere un nivel de precisión mucho mayor que los errores experimentales, se deben incluir términos de orden mayor en  $\lambda$ .

## 1.6 Mas allá del Modelo Estándar

En la actualidad, hay evidencia experimental que indica que en el sector leptónico puede haber física mas allá del Modelo Estándar; en particular,

- El problema del déficit de los neutrinos solares [21] surge de la observación que el flujo medido de neutrinos del electrón  $\nu_e$  en los experimentos con detectores con cloro [22], [23], [24] agua [25], [26] y galio [27], [28], [29], es sólo una fracción del flujo esperado de los cálculos de los modelos del Sol. Además, como los detectores utilizan sustancias diferentes, esto permite medir separadamente el flujo de neutrinos que participan en diferentes reacciones nucleares con umbrales de energía diferentes. SAGE y Gallex estudian la reacción ( $\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow {}^{71}\text{Ge} + e^-$ ), la cual tiene un umbral de 0.23 MeV. Homestake estudia la reacción ( $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$ ) la cual tiene un umbral de 0.8 MeV. Los detectores Cerenkov de Kamiokande y Superkamiokande estudian la dispersión elástica de  $\nu_e e$  y buscan  $\nu_e \rightarrow \nu_e$ , su umbral está cercano a 6.5 MeV [30]. En cada uno de estos experimentos se observan valores diferentes del déficit del flujo de neutrinos del electrón; de este hecho se infiere que la supresión del flujo de neutrinos depende de la energía. Los déficits de los flujos comparados con el Modelo Solar Estándar son [31]:

<i>Gallex</i>	$R =$	$0.60 \pm 0.06$	
<i>SAGE</i>	$R =$	$0.52 \pm 0.06$	
<i>Homestake</i>	$R =$	$0.33 \pm 0.03$	
<i>SuperK.</i>	$R =$	$0.47 \pm 0.02$	(1.85)

- El problema de los neutrinos atmosféricos se refiere al déficit detectado de neutrinos del muón. Los flujos de los neutrinos del electrón  $\nu_e$  y del muón  $\nu_\mu$ , surgen de las interacciones de los rayos cósmicos con la atmósfera de la tierra. Estos neutrinos se producen principalmente del decaimiento de los piones  $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ ; esta cadena produce dos neutrinos y antineutrinos del muón por cada neutrino y antineutrino del electrón [32]. La razón  $R$  [33], [34] del flujo esperado al observado en el experimento es

$$R = \frac{\left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e}\right)_{\text{observado}}}{\left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e}\right)_{\text{esperado}}} \approx 0.6. \quad (1.86)$$

- El experimento de los Alamos del Liquid Scintillation Neutrino Detector (LSND) mide el flujo de neutrinos del electrón  $\nu_e$  en un rayo de neutrinos del muón  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , producidos en los decaimientos del pión en reposo. En este experimento se reporta un exceso de neutrinos del electrón  $\nu_e$ . [35], [36]. También han buscado oscilaciones de  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ , de los decaimientos del muón  $\mu^+$  en reposo [37], [38]. Los neutrinos del electrón  $\bar{\nu}_e$  son detectados en el proceso cuasielástico  $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$  en correlación con un fotón monocromático de 2.2 MeV que se produce en la reacción de captura del neutrón  $np \rightarrow d\gamma$ . En este experimento se reporta un exceso de neutrinos del electrón  $\bar{\nu}_e$ .

Cada uno de estos problemas se puede resolver o puede ser interpretado como oscilaciones de neutrinos de diferentes sabores; esto nos da la posibilidad de tener tres esquemas diferentes de mezclas de los neutrinos. Si se asocia de manera independiente una diferencia de masas de los neutrinos con cada uno de estos tres experimentos, es necesario incluir en el análisis cuatro sabores de neutrino. Como se sabe que sólo tres sabores de neutrinos participan en la interacciones electrodébiles, [39], [40] el cuarto sabor de neutrino debe ser un singlete de  $SU(2)_L$ . Para poder explicar estos tres experimentos con sólo tres sabores de neutrinos se requiere que al menos dos de los fenómenos compartan una de las dos diferencias de masas independientes que están disponibles. Cardall y Fuller [41] fueron los primeros en notar la posibilidad de tener un esquema con mezclas de tres neutrinos que explique los tres experimentos.

En el esquema actual del Modelo Estándar los campos de los leptones y el

campo escalar de Higgs tienen las siguientes propiedades de transformación bajo el grupo de norma  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ :

$$L_L^I = \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix}_L \rightarrow (1, 2)_{-\frac{1}{2}} \quad l_R^I \rightarrow (1, 1)_{-1} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 2)_{+\frac{1}{2}} \quad (1.87)$$

el segundo número en el paréntesis es igual a las dimensiones de la representación de  $SU(2)$  y el subíndice es la hipercarga  $Y = (Q - T_3)$  de  $U(1)$ . Los neutrinos juegan un papel muy especial en el Modelo Estándar, ya que los neutrinos izquierdos y sus antipartículas correspondientes son parte de los dobletes de  $SU(2)$

$$L_{L_i}^I = \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i^- \end{pmatrix}_L \xleftarrow{CPT} \begin{pmatrix} \nu_i^c \\ l_i^+ \end{pmatrix}_R, \quad i = (e, \mu, \tau). \quad (1.88)$$

De los experimentos sabemos que sólo los neutrinos izquierdos participan en las interacciones electrodébiles, por esto en la literatura se refieren a estos neutrinos izquierdos que junto con un leptón cargado se transforman como dobletes de  $SU(2)_L$  como neutrinos activos o neutrinos ordinarios porque experimentan las interacciones débiles ordinarias.

En el Modelo Estándar las masas de los fermiones son parámetros libres que se extraen del experimento; en la teoría los fermiones adquieren masa por el mecanismo de Higgs cuando se rompe espontáneamente la simetría de norma  $SU(2)_L$ . En las interacciones de Yukawa dos fermiones se acoplan al campo de Higgs. Los términos bilineales en los campos leptónicos que se pueden construir son los siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{L}_L l_R &\rightarrow (2, 1/2) \times (1, -1) = (2, -1/2) \\ \bar{L}_L^c L_L &\rightarrow (2, -1/2) \times (2, -1/2) = (1, -1) + (3, -1) \\ \bar{l}_R^c l_R &\rightarrow (1, -1) \times (1, -1) = (1, -2). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Como el campo de Higgs se transforma como doblete de  $SU(2)_L$  y tiene hipercarga  $Y = 1/2$ , sólo los términos de Yukawa

$$L_{Yf} = \bar{\psi}_L \psi_R \phi + \bar{\psi}_R \psi_L \phi + h.c. \quad (1.90)$$

que acoplan partes izquierdas con derechas están presentes en la teoría. En consecuencia, todos los términos de masa son masas de Dirac y la teoría tiene una simetría global que corresponde a la conservación del número leptónico. En el caso particular de los neutrinos sabemos por la evidencia experimental



obtenida del experimento Troitsk y los resultados obtenidos en PSI y LEP que las cotas para las masas de los neutrinos son diferentes de cero,

$$m_{\nu_e} < 3.9 \text{ eV} \quad m_{\nu_\mu} < 170 \text{ KeV} \quad m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ MeV}. \quad (1.91)$$

Sin embargo, en el Modelo Estándar, tal como está ahora formulado, no se pueden introducir términos de masa para los neutrinos debido a que en el modelo no hay una representación del grupo de norma donde podamos acomodar a los neutrinos derechos de tal modo que se puedan acoplar con sus correspondientes neutrinos izquierdos para formar términos de masa de Dirac; además la estructura simple de la partícula de Higgs lleva a una simetría global que corresponde a la conservación del número leptónico y esta simetría prohíbe los términos de masa en los que se acoplan las componentes izquierdas de los neutrinos con la componente derecha del neutrino conjugado.

Existen varias posibilidades para dar masa a los neutrinos en el Modelo Estándar;

- Extender el sector de Higgs
- Extender el sector de leptones, agregando la parte derecha de los neutrinos.
- Extender tanto el sector de Higgs como el sector leptónico.

Por simplicidad supondremos que la segunda hipótesis es correcta, esto es, que basta con agregar un singlete de  $SU(2)_L$  neutro, de quiralidad derecha  $\nu_{Ri}^I$  para cada sabor  $i = e, \mu, \tau$  de neutrino sin alterar la estructura del resto del Modelo Estándar,

$$\nu_{Ri}^I, \quad i = (e, \mu, \tau). \quad (1.92)$$

Estos neutrinos, que son singletes de  $SU(2)_L$ , se conocen en la literatura como neutrinos estériles porque no experimentan las interacciones débiles ordinarias, únicamente experimentan las interacciones inducidas por las mezclas con los neutrinos activos. Dado que la carga electromagnética y la hipercarga  $Y$  de  $U(1)$  difieren por el valor de la tercer componente del isospín débil y como los neutrinos no tienen carga eléctrica,

$$Q = T_3 + Y = 0 \quad (1.93)$$

vemos que los neutrinos derechos  $\nu_{Ri}^I$  no llevan los números cuánticos de  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ,

$$\nu_{Ri}^I(1, 1)_0. \quad (1.94)$$

El neutrino derecho es singlete de  $SU(3)_C$ , singlete de  $SU(2)_L$  y tiene hipercarga cero, esto tiene dos implicaciones importantes:

1. Los neutrinos que se ven en los experimentos son aquellos producidos por las interacciones débiles; estos neutrinos sólo tienen componente izquierda.
2. Dado que no podemos inferir la existencia de neutrinos derechos a partir de los procesos débiles, la presencia de  $\nu_{Ri}^I$  se puede ver sólo indirectamente, esto es, a través de la existencia de la masa de los neutrinos. Sin embargo, debemos hacer notar que las masas de los neutrinos izquierdos no implican necesariamente la existencia de los neutrinos derechos.

Al agregar los neutrinos derechos  $\nu_{Ri}^I$ , la lagrangiana de Yukawa de los leptones adquiere un término adicional:

$$L_{Yl} = (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_{L1} \Gamma_{11}^I \phi \frac{1 - \sigma_3}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_{R1} + (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_{L1} \Gamma_{11}^\nu \phi \frac{1 + \sigma_3}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_{R1} + h.c. \quad (1.95)$$

Una consecuencia inmediata de esta extensión del Modelo Estándar es la existencia de una matriz de masas de los neutrinos  $\mathbf{M}^\nu$ ,

$$L_{Masa} = \bar{l}_{Li}^I \mathbf{M}_{ij}^l l_{Rj}^I + \bar{\nu}_{Li}^I \mathbf{M}_{ij}^\nu \nu_{Rj}^I + h.c. \quad (1.96)$$

con las masas dadas por el valor de expectación  $v$  entre estados del vacío del campo de Higgs y el acople de Yukawa correspondiente,

$$\mathbf{M}_{ij}^\nu = \frac{v}{\sqrt{2}} \mathbf{\Gamma}_{ij}^\nu \quad (1.97)$$

El problema con las masas de Dirac de los neutrinos está en el hecho de que se requiere un acople de Yukawa muy pequeño  $\Gamma^\nu < 10^{-10}$  para poder explicar la magnitud de las masas de los neutrinos  $m_\nu < 10 \text{ eV}$ , dado que el valor de expectación del doblete de Higgs es del orden de  $v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2} = 246 \text{ GeV}$  y es este mismo valor de expectación del doblete de Higgs el que explica la magnitud de las masas de Dirac de los fermiones

restantes del Modelo Estándar. Esto nos lleva a preguntarnos, ¿por qué las magnitudes de los acoplos de Yukawa de los neutrinos son tan pequeñas? Esta pregunta refleja que uno de los sectores menos conocidos hasta ahora es el sector de Yukawa de los leptones del Modelo Estándar; esto se debe principalmente a que los neutrinos son difíciles de detectar porque sólo participan en la interacción electrodébil y su carga eléctrica es nula y su masa es muy pequeña.

En general la matriz de masas de los neutrinos  $\mathbf{M}^\nu$  no es diagonal y es compleja, por lo que es necesario diagonalizarla al igual que a la matriz de masas de los leptones cargados  $\mathbf{M}^l$ ; puesto que los campos de los quarks y de los leptones se transforman separadamente, las transformaciones unitarias que diagonalizan las matrices de masas de los leptones y de los quarks en general son diferentes. Está claro que la representación en la que las matrices de masas de los leptones son diagonales se determina independientemente de aquella en la que las masas de los quarks son diagonales.

### 1.6.1 Masas de los neutrinos

En esta sección veremos que los términos de masa para los neutrinos se pueden clasificar en tres tipos de acuerdo al acoplamiento de los campos de quiralidad izquierda y derecha del neutrino con el campo de Higgs. En el Modelo Estándar los términos de masa de los fermiones conectan campos izquierdos y campos derechos.

Una masa tipo Dirac es aquella que conecta componentes izquierdas  $\psi_L$  y derechas conjugadas  $\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma^0$  del mismo campo,

$$L_{M_D} = M_D \bar{\psi} \psi = M_D (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L). \quad (1.98)$$

Así que el eigenestado de masa es

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (1.99)$$

donde  $\psi_L$  y  $\psi_R$  son las proyecciones de quiralidad izquierda y derecha usuales. La lagrangiana (1.98) conserva el número fermiónico y da masas iguales a las partículas y las antipartículas. Para las partículas que portan cualquier número cuántico  $U(1)$ , como la carga electromagnética, éste es el único término de masa posible, ya que para preservar estos números cuánticos

$U(1)$  es necesario tener interacción partícula-antipartícula.

Sin embargo, los neutrinos son una excepción a esta regla; debido a que no tienen carga electromagnética, es posible introducir otros tipos de términos de masa además de los términos de masa tipo Dirac. Estos otros términos de masa violan la conservación del número leptónico y en algunos casos  $SU(2) \times U(1)$ , pero están permitidos por la invariancia de Lorentz.

Una masa de tipo Majorana es aquella que conecta componentes izquierdas  $\psi_L$  y derechas  $\psi_R$  de campos conjugados; podemos introducir dos masas de Majorana diferentes, el primer tipo acopla partícula con partícula,

$$L_{M_T} = M_T \left\{ (\bar{\psi}^c)_R \psi_L + \bar{\psi}_L (\psi^c)_R \right\} \quad (1.100)$$

así que viola la conservación del número leptónico por dos unidades. En la expresión anterior (1.100) usamos las siguientes convenciones con respecto a la conjugación de carga  $c$ :

$$\psi^c = C\gamma^0\psi^* = i\gamma^2\psi^* \quad \bar{\psi}^c = \psi^T C \quad \psi_L^c \equiv (\psi_L)^c = (\psi^c)_R. \quad (1.101)$$

Con estas definiciones, reescribimos los términos de las masas de Majorana,

$$L_{M_T} = M_T \left\{ \bar{\psi}_L^c \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_L^c \right\} = M_T \bar{\chi} \chi. \quad (1.102)$$

El segundo tipo de masa de Majorana, acopla antipartícula con antipartícula

$$L_{M_S} = M_S \left\{ \bar{\psi}_R^c \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_R^c \right\} = M_S \omega \omega. \quad (1.103)$$

Este término viola el número leptónico por dos unidades; más aún, este término de masa acopla componentes derechas de neutrino  $\nu_R$  consigo mismas y éstas no portan los números cuánticos del grupo de norma del Modelo Estándar, en consecuencia este término se transforma como un singlete de  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Los eigenestados de masa de las Ecs. (1.102) y (1.103) son los campos autoconjugados:

$$\chi = \psi_L + \psi_L^c, \quad \chi^c = \chi \quad y \quad \omega = \psi_R + \psi_R^c, \quad \omega^c = \omega. \quad (1.104)$$

Una teoría mixta que contenga masas de Dirac y Majorana simultáneamente se obtiene con la lagrangiana

$$L_{DM} = M_D \bar{\psi}_L \psi_R + M_T \bar{\psi}_L^c \psi_L + M_S \bar{\psi}_R^c \psi_R + h.c. \quad (1.105)$$

con los campos autoconjugados se escribe como

$$L_{DM} = (\bar{\chi} \quad \omega) \begin{pmatrix} M_T & \frac{1}{2}M_D \\ \frac{1}{2}M_D & M_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix} + h.c.. \quad (1.106)$$

Una teoría que contenga masas de Majorana viola la conservación de cualquier número aditivo que porten los campos fermiónicos  $\psi$ , por ejemplo la carga eléctrica, así que todos los fermiones fundamentales, excepto los neutrinos, deben tener  $M_T = M_S = 0$ . Para neutrinos de Majorana, se viola el número leptónico por dos unidades y pueden ocurrir los decaimientos doble beta:  $(Z - 1) \rightarrow (Z + 1) + e + e$ , o los decaimientos  $K^- \rightarrow \pi^+ ee$  del Kaón; si ocurren estos decaimientos, ésta será una evidencia experimental clara de que existen neutrinos con masa de Majorana. Hasta hoy las cotas experimentales para que ocurran estos procesos son nulas, por esto restringiremos nuestro estudio sólo a neutrinos de Dirac, en el límite en el que  $M_T$  y  $M_S$  se anulan y recuperamos los fermiones con masas de Dirac.

## 1.6.2 Corrientes cargadas y Matriz de mezclas de los leptones

En la sección 1.6.1, extendimos el contenido de materia del Modelo Estándar agregando los neutrinos derechos  $\nu_R^i$ ; este campo extra no introduce términos adicionales de las corrientes cargadas  $J_\mu^1$  y  $J_\mu^2$  y neutras  $J_\mu^3$  y  $J_\mu^Y$  dadas en las Ecs. (1.29) en función de los campos:

$$\begin{aligned} J_1^\mu &= \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \\ J_2^\mu &= -i\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + i\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e - i\bar{u}_L \gamma^\mu d_L + i\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \\ J_3^\mu &= \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L \\ J_Y^\mu &= \frac{1}{3} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L - (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ &\quad - 2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{2}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \end{aligned}$$

así que en los términos de las corrientes sólo participan los neutrinos izquierdos. En la representación de interacción los términos de masa son matrices  $\mathbf{M}^f$  complejas de tres por tres y no diagonales. Sin embargo, siempre podemos encontrar dos matrices unitarias  $\mathbf{U}_L^f$  y  $\mathbf{U}_R^f$  que diagonalicen a la matriz de masas

$$\bar{\psi}_L^f \mathbf{U}_L^{f\dagger} \mathbf{U}_L^f \mathbf{M}^f \mathbf{U}_R^{f\dagger} \mathbf{U}_R^f \psi_R^f = \bar{\psi}_L^f \mathbf{M}_{\text{diag}}^f \psi_R^f,$$

con  $\mathbf{M}_{\text{diag}}^f$  una matriz diagonal y real. Esta transformación biunitaria, transforma los campos de los fermiones de la representación de interacción a la representación de masas; los campos en la representación de masas son:

$$\psi'_{(L,R),i} = \left( \mathbf{U}_{(L,R)}^f \right)_{ij} \psi_{(L,R),j}^f.$$

En la literatura es común referirse a los campos en la representación de masas como los campos físicos ya que en esta representación los campos tienen una masa bien definida. En el Modelo Estándar tal como está formulado, la matriz de mezclas de los leptones es una matriz unidad ya que se formuló para neutrinos de masa nula. Con una transformación biunitaria siempre podemos diagonalizar la matriz de masas de los leptones cargados,

$$l'_{(L,R),i} = \left( \mathbf{U}_{(L,R)}^l \right)_{ij} l_{(L,R),j}. \quad (1.107)$$

Después de esta transformación, las corrientes cargadas toman la forma siguiente:

$$\mathcal{L}_{W^\pm}^{\text{lep}} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{Li} \gamma^\mu \left( \mathbf{U}_L^\dagger \right)_{ij} l'_{Lj} W_\mu^\pm + h.c.. \quad (1.108)$$

por convención en la literatura se definen los eigenestados de interacción débil de los neutrinos como,

$$\tilde{\nu}_L = \left( \mathbf{U}^l \right) \nu_L. \quad (1.109)$$

Estos eigenestados de interacción débil se producen en el decaimiento de un bosón  $W^+$  en asociación con un leptón físico cargado  $l'$  de masa definida. Hemos hecho los mismos cambios de variable en las dos componentes del doblete débil  $L_L^i$ ; estos cambios de variables conmutan con las interacciones de  $SU(2)_L$  en la derivada covariante, las matrices unitarias  $\mathbf{U}_{(L,R)}^l$  desaparecen completamente de la teoría y el resultado es una teoría de leptones que conserva CP exactamente y también conserva el número leptónico de cada generación.

Sin embargo, la evidencia experimental del experimento Troisk y la obtenida en PSI y LEP, da cotas no nulas para las masas de los neutrinos; esta propiedad de los neutrinos tiene como consecuencia que la matriz de mezclas para los leptones no sea trivial. El término de masa de la lagrangiana de los leptones escrita en términos de los campos físicos es

$$\mathcal{L}_M = \bar{l}'_L \mathbf{M}_{\text{diag}}^l l'_R + \bar{\nu}'_L \mathbf{M}_{\text{diag}}^\nu \nu'_R + h.c.. \quad (1.110)$$

Estas matrices de masas mezclan leptones de la misma carga y podrían violar CP y T.

Vemos pues que las propiedades aparentes de simetría de la lagrangiana del Modelo Estándar no tienen una relación directa con la física cuando se expresa con campos no físicos  $\psi_{(L,R),i}^f$ . Si expresamos todos los términos de la lagrangiana de los leptones del Modelo Estándar en función de los campos físicos  $\psi_{(L,R),i}^{f'}$  en la base de las masas, sólo las corrientes cargadas podrían violar CP y tienen una forma que no es trivial

$$\mathcal{L}_{W^\pm}^{fis} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}'_{L\alpha} \gamma^\mu \left( \mathbf{U}_L^\nu \mathbf{U}_L^{\dagger\nu} \right)_{ij} l'_{Lj} W_\mu^\pm + h.c.. \quad (1.111)$$

La matriz de mezclas de los leptones se define por la expresión

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_L^\nu \mathbf{U}_L^{\dagger\nu}. \quad (1.112)$$

En la actualidad no hay datos experimentales para la magnitud de los elementos de la matriz de mezclas leptónica  $\mathbf{U}$ ; debido a la estructura jerárquica de las masas de los leptones cargados, esperamos que la matriz unitaria de los leptones cargados  $\mathbf{U}_L^i$  sea casi diagonal con elementos pequeños fuera de la diagonal. Respecto de la matriz unitaria de los neutrinos  $\mathbf{U}_L^\nu$  sólo se sabe que es una matriz distinta de cero y que podría ser una matriz de tres por tres si los neutrinos de Majorana no existen en la naturaleza, así que la forma final de la matriz de mezclas leptónica depende principalmente de la estructura de las masas de los neutrinos.

La matriz que acopla los campos de los neutrinos con diferentes sabores en la representación de las masas es la matriz de mezclas leptónica  $\mathbf{U}$ :

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (1.113)$$

Los campos  $\nu_i$ ,  $i = 1, 3$  denotan a los eigenestados de masa sin mezclas. Para tres familias de leptones, esta matriz debe ser una matriz unitaria de  $3 \times 3$  así que en este sector la magnitud de la violación de CP está relacionada al invariante de Jarlskog  $J$  de  $\mathbf{U}$  independientemente de qué tipo de masa tengan los neutrinos. Si los neutrinos no tienen masas iguales, la matriz de mezclas leptónica  $\mathbf{U}$  es una matriz no trivial, distinta de la matriz unidad y es el análogo de la matriz de mezclas de los quarks. Una implicación fenomenológica de esta matriz de mezclas no trivial es la oscilación de neutrinos. Este fenómeno ocurre cuando se produce un neutrino con un sabor

La probabilidad de que al tiempo  $t$  el estado del neutrino del electrón  $|\nu_e(t)\rangle$  en vuelo sea un neutrino del electrón  $|\nu_e\rangle$  es:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) = |A_{ee}(t)|^2. \quad (1.134)$$

La probabilidad de que al tiempo  $t$  el estado del neutrino del electrón  $|\nu_e(t)\rangle$  en vuelo sea un neutrino del muón  $|\nu_\mu\rangle$  se calcula de igual forma,

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) = |A_{e\mu}(t)|^2. \quad (1.135)$$

Por último, la probabilidad de que al tiempo  $t$  el estado del neutrino del electrón  $|\nu_e(t)\rangle$  en vuelo sea un neutrino del tau  $|\nu_\tau\rangle$  es,

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; t) = |A_{e\tau}(t)|^2 \quad (1.136)$$

$A_{ee}(t)$ ,  $A_{e\mu}(t)$  y  $A_{e\tau}(t)$  están dadas por las Ecs. (1.130), (1.131) y (1.132).





# Capítulo 2

## Familias de fermiones

### 2.1 Patrón o jerarquía de las masas de los quarks

Una propiedad importante de la Naturaleza es que los fermiones aparecen replicados. Sabemos experimentalmente de las medidas de la semianchura  $\Gamma_Z = \Gamma(Z \rightarrow \text{charged}) + N_\nu \Gamma(Z \rightarrow \nu_i \nu_i^c)$  del bosón  $Z$  que el número de familias  $N_\nu$  está limitado a tres  $N_\nu = 2.99 \pm 0.016$  [5].

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Los fermiones experimentan dos tipos de interacciones: Interacciones de norma en las que dos fermiones se acoplan a un bosón de norma e interacciones de Yukawa en las cuales dos fermiones se acoplan a un escalar. Los fermiones de cada familia tienen exactamente las mismas interacciones con los bosones de norma, a saber, las que se derivan del grupo de norma  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , pero tienen masas muy diferentes.

Partícula	Masa	Masa ( $m_e$ )
$m_e$	0.511(Mev)	1
$m_\mu$	105.66(Mev)	207
$m_\tau$	1,777(Mev)	3,478
$m_{\nu_e}$	$< 3.9 eV$	
$m_{\nu_\mu}$	$< 170 KeV$	
$m_{\nu_\tau}$	$< 18.2 MeV$	
$m_u [m_t]$	$3.2 \pm 0.9$ (Mev)	6.3
$m_c [m_t]$	$760 \pm 29$ (Mev)	1,487
$m_t [m_t]$	$171000 \pm 12000$ (Mev)	334,637
$m_d [m_t]$	$4.4 \pm 0.64$ (Mev)	8.6
$m_s [m_t]$	$100 \pm 6$ (Mev)	196
$m_b [M_t]$	$2920 \pm 110$ (Mev)	5714

Del espectro de masas podemos inferir lo siguiente:

1. El espectro de masas de los quarks tipo u, los quarks tipo d y los leptones, está dominado por la masa del tercer miembro de cada familia.
2. La magnitud relativa de las masas de la primera familia es casi nula.
3. El espectro completo de las masas de los quarks y leptones está dominado por el quark top.
4. El espectro de las masas exhibe de manera clara un patrón jerárquico entre las diferentes familias y dentro de cada familia.

Debido a que los quarks no se observan como partículas libres y a que la interacción fuerte que los mantiene confinados también renormaliza sus masas, el valor de las masas de los quarks es función de la energía, es decir, depende de la escala de energía a la cual se mide la masa.

Los leptones no están confinados y, por lo tanto, su masa se puede medir directamente, ya sea en colisiones o en el caso de los leptones cargados por deflexión en un campo magnético externo. Si bien la masa de los leptones también se renormaliza y se corre con la energía, debido a que los leptones no sienten la fuerza fuerte, las masas de éstos se corre mucho menos con la escala de energía que las masas de los quarks.

Dos supuestos dominan las ideas acerca del origen de la replicación de los fermiones: generalmente se piensa en el sabor independientemente del problema de por qué en la naturaleza vemos sólo materia con ciertos números

cuánticos. Esta asignación de materia está gobernada por otra física diferente a la que da la replicación del sabor en familias. El origen de la masa está desacoplado del mecanismo que produce los campos de materia y el sabor; esto es, en el límite en el que la lagrangiana del Modelo Estándar tiene la simetría quiral, ya están presentes en la teoría todos los campos, pero no hay términos de masa y la simetría de norma electrodébil es exacta, así que las masas de los fermiones pueden ser generadas a través de los acoplamientos de Yukawa cuando se rompe la simetría de norma electrodébil.

El origen de las masas y la jerarquía de éstas, están relacionadas a la física que genera los acoplamientos de Yukawa, así como al rompimiento de la simetría de norma electrodébil. Separar el problema de esta manera significa que podemos considerar el origen de las familias de manera independiente del espectro de masas fermiónico, esto es, del origen de los acoples de Yukawa.

## 2.2 Jerarquía de mezclas

La matriz  $V_{CKM}$  es una matriz unitaria de tres por tres que relaciona los campos en la representación de masa con los campos en la representación de norma. Los elementos diagonales de la matriz  $V_{CKM}$  son muy cercanos a la unidad; pero, los elementos fuera de la diagonal varían en magnitud entre un 20% y hasta 3 partes por mil respecto de la unidad. A esta diferencia tan marcada en la magnitud de los elementos de la matriz de mezclas se le conoce como la jerarquía de mezclas entre los quarks up y down.

## 2.3 Cancelación de anomalías

El mecanismo de Higgs da masas a los bosones de norma  $Z$ ,  $W^\pm$  y a los fermiones manteniendo las simetrías de la densidad lagrangiana. En particular se preservan las identidades de norma de Ward y la conservación de las corrientes cargadas. La validéz de estas relaciones es un ingrediente esencial para que la teoría sea renormalizable, 't Hooft demostró, en general, que cualquier teoría de norma con rompimiento espontáneo de la simetría por el mecanismo de Higgs es renormalizable. Para una teoría quiral como el Modelo Estándar surgen complicaciones producidas por las anomalías quirales, pero este problema se salva porque los números cuánticos de los quarks y los

leptones en cada generación producen una cancelación de la anomalía. En la teoría cuántica del campo las anomalías aparecen cuando una simetría de la lagrangiana clásica se rompe por el proceso de cuantización, regularización y renormalización de la teoría. El proceso de regularización y renormalización introducen una escala de energía, la cual es esencialmente la escala a la que se definen las cantidades renormalizadas.

En el caso de una teoría de fermiones  $\psi$  sin masa, la lagrangiana clásica es invariante bajo una transformación quiral del grupo  $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\gamma_5\theta}\psi. \quad (2.2)$$

La corriente axial de Noether asociada a esta simetría se conserva a nivel clásico; pero a nivel cuántico, la simetría quiral se rompe debido a la generación de las masas y la corriente de Noether asociada a esta simetría no se conserva. El rompimiento quiral se introduce por un desacuerdo entre la simetría quiral, la invariancia de norma y el procedimiento de regularización. Este tipo de anomalía la tiene la teoría electrodébil y se le conoce como anomalía de Adler-Bell-Jackiw. La anomalía se produce en los diagramas de rizo para fermiones que tienen forma de triángulo; estos diagramas tienen un vértice axial y dos vértices vectoriales. En el caso de corrientes neutras, el acoplamiento axial es proporcional a la tercer componente del isospín débil  $t_3$ , en tanto que los acoplamientos vectoriales son proporcionales a una combinación lineal de  $t_3$  y la carga eléctrica  $Q$ ; para que la anomalía quiral se cancele, se deben anular todas las trazas de la forma  $tr(t_3QQ)$ ,  $tr(t_3t_3Q)$ ,  $tr(t_3t_3t_3)$ ; si se incluye a las corrientes cargadas, se deben anular también las trazas del tipo  $tr(t_+t_-t_3)$  etc., la traza se extiende sobre todos los fermiones de la teoría que puedan circular en el rizo. En el Modelo Estándar, ocurre que de manera separada todas estas trazas se anulan para cada familia de fermiones. Esta cancelación tan impresionante sugiere una relación entre los números cuánticos de isospín, carga y color. Por ejemplo, si calculamos el término  $tr(t_3QQ)$ , en una familia hay los siguientes campos fermiónicos: con  $t_3 = +1/2$  hay tres colores de quarks tipo up con carga  $Q = +2/3$  y un neutrino con carga  $Q = 0$ , con  $t_3 = -1/2$  hay tres colores de quarks tipo down con carga  $Q = -1/3$  y un leptón  $l^-$  con carga  $Q = -1$ . Con esto obtenemos que  $tr(t_3QQ) = (1/2)3(4/9) - (1/2)3(1/9) - (1/2)1 = 0$ . Como el Modelo Estándar es renormalizable, al tratar de extender la teoría más allá del Modelo Estándar, es particularmente importante no introducir anomalías nuevas o arruinar la cancelación de éstas en el Modelo Estándar tal y como está formulado.

## 2.4 Simetrías de familias

Al tratar de explicar los patrones de las masas de los quarks y los leptones así como los ángulos de mezcla, la física de partículas se encuentra en una situación semejante a la de la química antes de Mendeleev o de la espectroscopía atómica antes de Balmer. Por ejemplo, en el Modelo Estándar hay tres familias de fermiones; las interacciones de norma del Modelo Estándar no distinguen entre las diferentes familias, la magnitud de la interacción de norma depende de los número cuánticos de las partículas fundamentales. Los números cuánticos se llaman sabor, espín, carga, color y se usan para caracterizar los hadrones. En las interacciones débiles cargadas, ocurren transiciones entre hadrones con diferente número cuántico del sabor; los sabores de los quarks son u, c, t, d, s y b, y los sabores de los leptones son e,  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ .

En el Modelo Estándar todos los fermiones adquieren masa via el mecanismo de Higgs, la simetría de norma se rompe espontáneamente y las interacciones de Yukawa dan origen a los términos de masa de los fermiones. El sector de Higgs del Modelo Estándar no es satisfactorio por dos razones: primero, hay un acople de Yukawa diferente para cada fermión y estos acoples suman más de la mitad de los parámetros libres en el Modelo Estándar. Segundo, parece natural que todos estos acoples fueran de la misma magnitud (universales), ya que en el Modelo Estándar no hay razón para que el campo de Higgs prefiera acoplarse mas a un fermion que a otro. Sin embargo, esto no ocurre así, ya que de los experimentos sabemos que hay un rango de acoples de Yukawa desde el quark top con un acople de Yukawa de orden uno hasta el electrón con un acople de Yukawa de orden  $10^{-5}$ .

Independientemente de cómo se generen las familias, el problema del espectro de masas lo podemos estudiar de manera indirecta si comparamos la fenomenología que resulta para la matriz de mezclas de los quarks al imponer ciertas relaciones de simetría ó texturas en las matrices de masas. Las matrices de masas reflejan la física que genera los acoples de Yukawa, el rompimiento de la simetría de norma  $SU(2)_w \otimes U(1)_Y$  y, posiblemente, la presencia de un grupo de familias  $G_f$ ; la única restricción física es que sólo conecte estados de la misma carga.

Para orientarnos entre las posibles soluciones al problema de encontrar cuál es la simetría de familias subyacente del Modelo Estándar, nos guiaremos por los principios siguientes: La lagrangiana del Modelo Estándar sin masas tiene todos los campos de materia y las simetrías de norma  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  y

quiral exactas. Antes de que los fermiones adquieran masa via el mecanismo de Higgs, los fermiones de una misma familia están acoplados de igual manera a todos los campos, y el intercambio entre fermiones de la misma familia es una simetría natural exacta del Modelo Estándar sin masas. La simetría de familias del Modelo Estándar es una simetría de los fermiones; y una vez que los fermiones adquieren masa, la matriz de mezclas de los fermiones es la evidencia experimental de la simetría de familias subyacente del Modelo Estándar. La simetría permutacional del sabor es una simetría natural del Modelo Estándar antes del rompimiento de la simetría de norma; después del rompimiento de la simetría de norma, la simetría permutacional ya no se cumple; y se dice que la simetría se rompe, nos interesa encontrar el patrón de rompimiento de la simetría permutacional de la naturaleza, la textura de la matriz de masas asociada con este grupo de simetría de familias y su rompimiento y las implicaciones fenomenológicas para la matriz de mezclas de los quarks y los leptones. Asignamos el índice de familia o de generación de cada fermión fundamental de acuerdo con su carga eléctrica y con la magnitud de su masa en orden creciente. Los fermiones fundamentales con igual carga eléctrica pero diferente masa, se transforman bajo la acción del mismo grupo de familias; hay dos valores de carga eléctrica para los quarks y dos valores de carga eléctrica para los leptones, así que podemos clasificar a los fermiones en dos grupos de familias de quarks y dos grupos de familias de leptones: la familia de los quarks tipo up está formada por los quarks  $u = \psi_1^u$ ,  $c = \psi_2^u$  y  $t = \psi_3^u$  y la familia de los quarks tipo down, está formada por los quarks  $d = \psi_1^d$ ,  $s = \psi_2^d$  y  $b = \psi_3^d$ ;

$$\psi^u = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \quad y \quad \psi^d = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

podemos escribirlo en componentes como

$$\psi_i^q \quad q = u, d \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

En esta notación el superíndice q denota a los quarks tipo u ó tipo d, clasificándolos de esta manera por su carga eléctrica; el subíndice i es el índice de familias, y clasifica los quarks por la magnitud de su masa en orden creciente. En el sector leptónico tenemos la familia de los leptones tipo electrón formada por los leptones  $e = \psi_1^e$ ,  $\mu = \psi_2^e$  y  $\tau = \psi_3^e$  y la familia de los leptones tipo

neutrino formada por los leptones  $\nu_e = \psi_1^{\nu_e}$ ,  $\nu_\mu = \psi_2^{\nu_e}$  y  $\nu_\tau = \psi_3^{\nu_e}$ ;

$$\psi^e = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} \quad y \quad \psi^{\nu_e} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

podemos escribirlo en componentes como

$$\psi_i^l \quad l = e, \nu_e \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

En esta notación el superíndice  $l$  denota a los leptones tipo  $e$  ó tipo  $\nu_e$ , clasificándolos de esta manera por su carga eléctrica; el subíndice  $i$  es el índice de familias y clasifica los leptones por la magnitud de su masa en orden creciente.

Los tensores invariantes de la simetría de familias y el patrón de rompimiento de la simetría imponen de manera natural ceros exactos en uno o mas de los acoples de Yukawa; a esto se le conoce en la literatura como una textura de los acoples de Yukawa de la teoría. Entonces, la diferencia en las magnitudes de algunos acoples de Yukawa se puede explicar como una consecuencia de la simetría (o falta de ella) de familias . El grupo de simetría de las familias de fermiones, debe incluir las jerarquías observadas en el patrón de masas y mezclas. Como consecuencia de la simetría de familias, algunos de los elementos de las matrices de masas pueden ser ceros exactos. A las matrices de masas con ceros exactos en uno o más de sus elementos se les conoce en la literatura como una textura de la matriz de masas. Así que la diferencia observada en las magnitudes de las masas y la constante de acoplamiento, llamada comunmente una jerarquía, se podría entender sistemáticamente como la manifestación de una simetría de familias o simetría de sabor bajo la cual las familias se transforman de modo no trivial.

A estos patrones de masas y mezclas contribuyen diferentes efectos: efectos del rompimiento de la simetría de norma, efectos del rompimiento de la simetría del sabor.

Las únicas evidencias experimentales que nos pueden servir de guía en la solución de este problema son las razones de masas, así como los ángulos de mezcla observados y el hecho de que no hay corrientes neutras que cambien el sabor.

Las simetrías del sabor que han sido consideradas en la literatura caen en tres categorías:

1. Unificadas; en este caso, el grupo es tal que en el límite simétrico no hay distinción alguna entre las generaciones. Esto ocurre si las tres



generaciones se asignan a una representación irreducible que tenga tres componentes indistinguibles, tal como un triplete de  $SU(3)$ .

2. Asimétricas; en este caso, la acción del grupo es tal que no hay un tratamiento igual de  $N$  objetos, donde  $N$  es el número de generaciones. Existen muchos ejemplos de grupos de sabor con esta propiedad de simetría, por ejemplo  $U(1)^n$ ,  $SU(2)$  y  $O(2)$  [42]-[46].
3. Simétricas; en este caso, el grupo tiene una acción que es igual sobre los tres objetos, pero las representaciones del grupo tiene una estructura que trata las generaciones diferente, ejemplo  $(S_3)^3$  [47].

Un grupo de simetría que dé un tratamiento simétrico a las familias de fermiones, pero que las representaciones del grupo le den un tratamiento diferente a las familias es un buen candidato. Incluiremos ceros de textura en las matrices de masas de los fermiones rompiendo la simetría de familias. En la búsqueda del grupo de familias  $G_F$ , nos guiaremos por los siguientes principios:

- Los campos de materia del Modelo Estándar con tres generaciones de fermiones y un campo de Higgs.
- La simetría de familias del Modelo Estándar es una simetría de los fermiones.
- En ausencia de masas, la simetría exacta de la lagrangiana del MS con tres familias es  $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U(1)_Y$
- El grupo de familias  $G_F$  no es un grupo de norma ya que no hay una nueva fuerza asociada con la simetría de familias.
- $G_F$  no debe producir anomalías
- $G_F$  debe de acomodar la estructura jerárquica observada en el espectro de masas.
- La simetría del sabor se rompe a una escala grande.
- Los ángulos de mezcla observados así como las texturas en las matrices de masas son consecuencia del rompimiento de la simetría del sabor.

Como veremos, estos principios nos llevan de manera natural a considerar teorías con simetrías discretas no abelianas del sabor. Intentaremos pues, encontrar un modelo que nos lleve a una textura fenomenológicamente aceptable. Una simetría de familias podría ser un grupo de Lie continuo o un grupo finito. Un grupo finito de simetría de familias se puede construir como un subgrupo de un grupo de Lie libre de anomalías

$$G_F \subset G_{lie} \quad (2.7)$$

Los criterios para elegir un grupo finito de simetría de Familias  $G_F$  son:

- El grupo de familias  $G_F$  debe ser no abeliano. Entonces tendría representaciones irreducibles que sean dobletes en las cuales se pueden acomodar a los dos quarks o leptones ligeros. El quark o leptón pesado puede ser asignado a un singlete.
- Debe ser de orden mínimo, de tal manera que se puedan acomodar las familias del Modelo Estándar sin que sobren o falten representaciones irreducibles del grupo.
- Debe tener un número de representaciones tal que permita acomodar a todas las familias de fermiones.

### 2.4.1 Grupos finitos no abelianos

Los grupos posibles para una simetría de familias son los grupos finitos no abelianos. El grupo no abeliano de orden menor es el grupo de permutaciones de tres objetos  $S(3)$ . El grupo  $S(3)$  es el inicio de dos series infinitas: la serie formada por los grupos de simetría de  $n$  objetos  $S_n$  y la serie de los grupos de simetría de un polígono de  $n$  lados denotada como  $D_n$ .

Como grupo de simetría de familias, la serie  $S_n$  deja de tener interés rápidamente ya que el orden crece como  $n!$ , y las dimensiones de las representaciones aumenta; por esta razón,  $S_n$  con  $n \geq 4$  ya no es apropiado. Los grupos  $S_n$  que son interesantes para nuestro problema son el grupo natural de simetría de familias del Modelo Estándar; esto es, el grupo  $S_3$  [Pakvasa y Sugawara [59], Harari, Haut y Weyers [61]] y sus extensiones tensoriales  $S_3 \otimes S_3$ ,  $S_3 \otimes S_3 \otimes S_3$  [L. Hall] [47]. Por definición,  $S_3$  actúa de manera simétrica sobre los tres objetos; además, tiene la propiedad de tener sólo dobletes y singletes en sus representaciones irreducibles, y esto lo hace un excelente candidato para el

problema del sabor en el Modelo Estándar.

El orden de  $D_n$  (mínimo de elementos) crece como  $2n$ , y sus representaciones irreducibles son todas de una y dos dimensiones. Por tanto,  $D_6$  ó  $D_7$  [48] podrían ser buenos candidatos; el problema con estos modelos, es que no pueden satisfacer simultáneamente la condición de jerarquía de masas y cancelación de anomalías; además, no hay nada en el Modelo Estándar que nos sirva de guía o indicación para su uso.

Las generalizaciones espinoriales de los grupos de simetría de un polígono llamados grupos dicíclicos  $Q_{2n}$  serían un mejor candidato que  $S_n$ , pero con la misma desventaja de que no aparecen de modo natural en el Modelo Estándar, salvo  $Q_6$ , que es la extensión espinorial de  $S_3$  pero habría que buscar una justificación fenomenológica para su presencia. El contenido de representaciones irreducibles de estos grupos, así como sus reglas de multiplicación, nos pueden orientar en la elección del grupo de familias apropiado, así como la asignación de las familias a estas representaciones.

# Capítulo 3

## Simetría del sabor para dos familias de quarks

### 3.1 Simetría permutacional de dos familias

Con objeto de introducir las ideas y conceptos de la simetría permutacional del sabor en el caso más simple, analizaré primero el caso de dos familias. En el Modelo Estándar, fermiones análogos en diferentes generaciones, digamos u, c y d, s, en el caso de dos familias, están igualmente acoplados a los bosones de norma de las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas. Por consiguiente, antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma y de que adquieran masa los fermiones, el contenido físico del Modelo no cambia si se intercambian los nombres de las familias, es decir, si se intercambian u y c o d y s. Esto significa que, antes del rompimiento de la simetría de norma, la lagrangiana del Modelo Estándar es simétrica respecto del grupo de permutaciones del sabor. En el caso de dos familias, este es el grupo  $S_2$  de permutaciones de dos objetos que son el nombre del sabor de los quarks en diferentes generaciones de cada sector. En el capítulo anterior, el nombre del sabor se denotó con un índice de sabor o índice de familia.

La lagrangiana de Yukawa para dos familias de quarks se escribe de la siguiente manera:

$$L_Y = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\{ \bar{Q}_i \Gamma_{ij}^u \Phi \frac{(1 + \sigma_3)}{2} Q_j + \bar{Q}_i \Gamma_{ij}^d \Phi \frac{(1 - \sigma_3)}{2} Q_j \right\} \quad (3.1)$$

donde  $Q_1$  y  $Q_2$  denotan a los dobletes de isospin débil de los quarks y  $\phi(x)$  es el campo de Higgs,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{h(x)\mathbf{1} + iw_\alpha(x)\sigma^\alpha\} \quad (3.2)$$

Los dobletes de isospín débil se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^u(x) \\ \psi_1^d(x) \end{pmatrix} \\ Q_2(x) &= \begin{pmatrix} c(x) \\ s(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^u(x) \\ \psi_2^d(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Conviene reordenar los términos de (3.1) y escribir  $L_Y$  en función del espinor  $\psi^q$  cuyas componentes se definen en el espacio de familias como se hizo en el capítulo anterior Ecs. (2.3) y (2.4),

$$\begin{aligned} \psi^u(x) &= \begin{pmatrix} u(x) \\ c(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^u(x) \\ \psi_2^u(x) \end{pmatrix} \\ \psi^d(x) &= \begin{pmatrix} d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^d(x) \\ \psi_2^d(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esto equivale a introducir un espacio Euclideano real de dos dimensiones  $L_2$ . Una base ortogonal y normalizada de este espacio está formada por los vectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

El grupo  $S_2$  tiene dos elementos, la identidad y las permutaciones de los índices 1 y 2. La representación matricial del grupo  $S_2$  en el espacio  $L_2$  está constituida por las matrices que intercambian los índices de sabor

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

El espacio  $L_2$  tiene dos subespacios invariantes que corresponden a las dos representaciones irreducibles de  $S_2$ . El conjunto de los vectores de  $L_2$  invariantes bajo la acción del grupo  $S_2$  es el subespacio invariante  $\mathbf{V}_S$ . Este subespacio es unidimensional, sus elementos son los vectores proporcionales al vector  $|v\rangle_S$  definido como

$$|v\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

El vector  $|v\rangle_S$  es un singlete de  $S_2$ , es el singlete simétrico.

El espacio  $L_2$  tiene dos dimensiones; por consiguiente, el subespacio  $\mathbf{V}_A$  ortogonal a  $\mathbf{V}_S$  es el conjunto de los vectores proporcionales al vector  $|v\rangle_A$  ortogonal a  $|v\rangle_S$  y normalizado a la unidad

$$|v\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

El vector  $|v\rangle_A$  es eigenvector de  $\mathbf{E}$  y de  $\mathbf{P}_{12}$ ; por consiguiente, el subespacio de  $S_2$  cuyos elementos son los vectores proporcionales a  $|v\rangle_A$  también es un subespacio invariante de  $L_2$ , éste es el espacio invariante  $\mathbf{V}_A$ . El vector  $|v\rangle_A$  es un singlete de  $S_2$ .

Los vectores  $|v\rangle_S$  y  $|v\rangle_A$  forman una base completa de  $L_2$ .

El acoplamiento de Yukawa en la notación de familias (3.4), es

$$L_y = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left( \bar{\psi}_{Li}^u \Gamma_{ij}^u \phi \psi_{Rj}^u + \bar{\psi}_{Rj}^d \Gamma_{ij}^d \phi \psi_{Li}^d \right) + h.c. \quad (3.9)$$

Antes del rompimiento de la simetría de norma, los quarks no tienen masa y la teoría es quiral. Por lo tanto, los espinores izquierdos y derechos se transforman independientemente. Esto es

$$\psi_L^q(x) \rightarrow \psi_L^{\prime q}(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^q(x) \\ \psi_{2L}^q(x) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

e igualmente para los espinores derechos

$$\psi_R^q(x) \rightarrow \psi_R^{\prime q}(x) = \tilde{\mathbf{g}} \begin{pmatrix} \psi_{1R}^q(x) \\ \psi_{2R}^q(x) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$\mathbf{g} \in S_L(2)$  actúa sobre los espinores izquierdos y  $\tilde{\mathbf{g}} \in S_R(2)$  actúa sobre los espinores derechos.

Así pues, el grupo de la simetría permutacional del sabor de la forma bilineal (3.1) es  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ , cuyos elementos son las parejas  $(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$  con  $\mathbf{g} \in S_L(2)$  y  $\tilde{\mathbf{g}} \in S_R(2)$ .

Bajo la acción del grupo de sabor  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ , las corrientes cargadas se transforman de la siguiente forma:

$$J_\mu^\pm \rightarrow J_\mu^{\prime \pm} = \bar{\psi}_L^{\prime u} \gamma_\mu \psi_L^{\prime d} + h.c.. \quad (3.12)$$

Sustituyendo las expresiones para  $\psi_L^d$  y  $\bar{\psi}_L^u$ , se obtiene

$$J'_\mu{}^\pm = \bar{\psi}_L^u \mathbf{g}_u^{-1} \mathbf{g}_d \gamma_\mu \psi_L^d + h.c.. \quad (3.13)$$

De esta expresión, queda claro que las corrientes cargadas  $J'_\mu{}^\pm$  quedarán invariantes bajo las transformaciones del grupo de simetría de sabor si y sólo si  $\mathbf{g}_u$  y  $\mathbf{g}_d$  son la misma matriz. Esto es, la condición de invariancia de las corrientes cargadas bajo la acción del grupo de simetría de las familias implica que los campos de los quarks tipo u y tipo d se transformen con el mismo grupo y con el mismo elemento del grupo. A esto se debe que no hayamos puesto un índice u o d en los elementos del grupo que aparecen en las ecuaciones (3.10) y (3.11).

Cuando la simetría de norma se rompe espontáneamente, los quarks adquieren masa y la teoría deja de ser quiriral. Por lo tanto, los campos de los quarks tipo u y tipo d se transforman de la siguiente forma:

$$\bar{\psi}^q(x) \rightarrow \bar{\psi}'^q(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^q(x) \\ \psi_{2L}^q(x) \end{pmatrix} + \mathbf{g}' \begin{pmatrix} \psi_{1R}^q(x) \\ \psi_{2R}^q(x) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

en esta notación

$$\psi_L^q = \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi^q \quad y \quad \psi_R^q = \frac{(1 + \gamma_5)}{2} \psi^q. \quad (3.15)$$

Las componentes de quiralidad izquierda y derecha del mismo campo se transforman con el mismo elemento del grupo. El grupo de la simetría del sabor de la forma bilineal (3.13) es el grupo  $S^{diag.}(2)$  cuyos elementos son la parejas  $(\mathbf{g}, \mathbf{g}')$  con primer elemento  $\mathbf{g} \in S_L(2)$  y segundo elemento  $\mathbf{g}' \in S_R(2)$ , y  $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$ . Claramente,  $S^{diag.}(2) \subset S_L(2) \otimes S_R(2)$ .

Bajo la acción del grupo de simetría de familias  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ , el término de masa proveniente del acoplamiento de Yukawa se transforma de la siguiente forma:

$$L_y \rightarrow L'_y = \bar{\psi}_L^u \mathbf{M}^u \psi_R^u + \bar{\psi}_R^d \mathbf{M}^d \psi_L^d + h.c. \quad (3.16)$$

sustituyendo las expresiones para  $\psi'^q$  y  $\bar{\psi}'^q$  obtenemos

$$L'_y = \bar{\psi}_L^u \mathbf{g}^T \mathbf{M}^u \mathbf{g} \psi_R^u + \bar{\psi}_R^d \mathbf{g}^T \mathbf{M}^d \mathbf{g} \psi_L^d + h.c.. \quad (3.17)$$

Por consiguiente, bajo la acción del grupo de sabor  $S^{diag}(2)$ , las matrices de masas  $\mathbf{M}^q$  se transforman de acuerdo con la siguiente regla:

$$\mathbf{M}'^u = \mathbf{g}^T \mathbf{M}^u \mathbf{g} \quad y \quad \mathbf{M}'^d = \mathbf{g}^T \mathbf{M}^d \mathbf{g}. \quad (3.18)$$

Si demandamos que el sector de Yukawa sea invariante, bajo la acción del grupo de familias  $S^{diag}(2)$  se debe cumplir que

$$\mathbf{M}'^q = \mathbf{M}^q; \quad (3.19)$$

esto es, el sector de Yukawa del Modelo Estándar tienen la simetría de familias si la matriz de masas conmuta con todos los elementos del grupo de sabor  $S_2$

$$[\mathbf{M}_S^u, \mathbf{g}] = 0 \quad y \quad [\mathbf{M}_S^d, \mathbf{g}] = 0, \quad (3.20)$$

$\mathbf{M}_S^q$  es la matriz de masas de los quarks tipo u o d que tiene la simetría de familias.

### 3.1.1 Representaciones tensoriales de $S(2)$ y matriz de masas

Con  $|v\rangle_S$  y su dual  $\langle v|_S$  se puede formar un tensor  $\mathbf{T}_S$  de rango 1 invariante bajo la acción de  $S_2$  por la izquierda y por la derecha

$$\mathbf{T}_S = |v\rangle_S \langle v|_S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

De la misma manera, el producto de  $|v\rangle_A$  y su dual  $\langle v|_A$  forman un tensor  $\mathbf{T}_A$  de rango 1 que se representa por la matriz

$$\mathbf{T}_A = |v\rangle_A \langle v|_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Los tensores  $\mathbf{T}_S$  y  $\mathbf{T}_A$  son proyectores ortogonales y satisfacen las relaciones

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{T}_S^\dagger, \quad \mathbf{T}_S^2 = \mathbf{T}_S, \quad \mathbf{T}_A = \mathbf{T}_A^\dagger, \quad \mathbf{T}_A^2 = \mathbf{T}_A, \quad \mathbf{T}_S \mathbf{T}_A = \mathbf{T}_A \mathbf{T}_S = 0. \quad (3.23)$$

Los tensores  $\mathbf{T}_S$  y  $\mathbf{T}_A$  descomponen la unidad

$$\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A = \mathbf{1}. \quad (3.24)$$



Hemos supuesto que el campo de Higgs no tiene índices de sabor y que es un singlete bajo el grupo de simetría de las familias. Si tomamos valores entre estados del vacío del campo  $\phi(x)$  tales que  $\langle 0|h(x)|0 \rangle = v$  y  $\langle 0|w(x)|0 \rangle = 0$ , al romper la simetría de norma obtenemos la matriz hermitiana de masas  $\mathbf{M}$  de  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{M}^q = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^q & \Gamma_{12}^q \\ \Gamma_{12}^{*q} & \Gamma_{22}^q \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Con ayuda de la identidad (3.24)  $\mathbf{M}^q$  se puede descomponer en la suma de un término invariante bajo la acción del grupo  $S_2^{diag}$  y otro que no lo es,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^q &= (\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A) \mathbf{M}^q (\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A) \\ &= (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A \mathbf{M}^q \mathbf{T}_A) + (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_A \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S) \end{aligned} \quad (3.26)$$

El primer término del lado derecho  $(\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A \mathbf{M}^q \mathbf{T}_A)$  es invariante respecto de la acción de  $S_2^{diag}$ ,

$$\mathbf{P}_{12} (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A \mathbf{M}^q \mathbf{T}_A) \mathbf{P}_{12} = (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A \mathbf{M}^q \mathbf{T}_A). \quad (3.27)$$

En forma explícita tendríamos que este término es

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S^q &= \mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A \mathbf{M}^q \mathbf{T}_A = \frac{v}{\sqrt{2}} \left( \frac{\Gamma_{11}^q + \Gamma_{22}^q}{2} + |\Gamma_{12}^q| \cos \phi_{12}^q \right) \mathbf{T}_S \\ &+ \frac{v}{\sqrt{2}} \left( \frac{\Gamma_{11}^q + \Gamma_{22}^q}{2} - |\Gamma_{12}^q| \cos \phi_{12}^q \right) \mathbf{T}_A; \end{aligned} \quad (3.28)$$

aquí,  $\phi_{12}^q$  es el argumento del acoplo complejo de Yukawa  $\gamma_{12}^q$ . Cada uno de los términos en el miembro derecho de la Ec. (3.28) corresponde a una de las dos representaciones irreducibles,  $\mathbf{1}_A$  y  $\mathbf{1}_S$ , de  $S_2$ . El término

$$\mathbf{M}_A^q = (\mathbf{T}_S \mathbf{M} \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_A \mathbf{M} \mathbf{T}_S) \quad (3.29)$$

no es invariante bajo la acción de  $S_2^{diag}$  porque cambia de signo bajo la acción del elemento  $P_{12}$  de  $S_2^{diag}$ ,

$$\mathbf{P}_{12} (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_A \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S) \mathbf{P}_{12} = -\mathbf{M}_A^q. \quad (3.30)$$

El término no-simétrico  $\mathbf{M}_A^q$  se puede escribir como

$$\mathbf{M}_A^q = \mathbf{A} \mathbf{T}^+ + \mathbf{A}' \mathbf{T}^- \quad (3.31)$$

los tensores  $\mathbf{T}^+$  y  $\mathbf{T}^-$  son los siguientes

$$\mathbf{T}^+ = |v\rangle_S \langle v|_A + |v\rangle_A \langle v|_S = \sigma_3, \quad (3.32)$$

y

$$\mathbf{T}^- = i(|v\rangle_S \langle v|_A - |v\rangle_A \langle v|_S) = \sigma_2; \quad (3.33)$$

las constantes  $A$  y  $A'$  se pueden escribir en función de los acoplos de Yukawa

$$A' = \frac{v}{\sqrt{2}} |\Gamma_{12}^q| \text{sen} \phi_{12}^q, \quad A = \frac{v}{2\sqrt{2}} (\Gamma_{11}^q - \Gamma_{22}^q) \quad \text{y} \quad \tan \phi_{12}^q = \frac{\text{Im} \Gamma_{12}^q}{\text{Re} \Gamma_{12}^q} \quad (3.34)$$

En consecuencia, bajo la acción del grupo  $S_2^{diag}$ , el término de masa proveniente de los acoplamientos de Yukawa en el caso de dos familias se puede descomponer en la suma de dos términos

$$L_Y = L_{YS}[(\mathbf{T}_S \mathbf{M} \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A \mathbf{M} \mathbf{T}_A)] + L_{YA}[(\mathbf{T}_S \mathbf{M} \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_A \mathbf{M} \mathbf{T}_S)] \quad (3.35)$$

Los términos proporcionales a los tensores  $\mathbf{T}^+$  y  $\mathbf{T}^-$  mezclan las representaciones irreducibles de  $S_2$ .

El término  $L_{YS}$  es invariante bajo el intercambio del índice de familias

$$\psi \rightarrow \psi' = \mathbf{P}_{12} \psi, \quad (3.36)$$

pero el término  $L_{YA}$  cambia de signo.

La condición de invariancia de  $L_Y$  respecto de  $S_2^{diag}$  se satisface si  $\Gamma_{11}^q = \Gamma_{22}^q$  y la fase  $\phi_{12}^q = 0, \pi$ . Se sigue de aquí que las matrices de masas para los quarks tipo  $u$  y  $d$ , que resultan de la condición de invariancia de  $L_Y$  bajo la acción del grupo de la simetría permutacional del sabor  $S_2^{diag}$ , en la representación de norma, tengan la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S^q &= \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^q & \Gamma_{12}^q \\ \Gamma_{12}^q & \Gamma_{11}^q \end{pmatrix} \\ &= \frac{v}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma_{11}^q + \Gamma_{12}^q}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma_{11}^q - \Gamma_{12}^q}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.37) \end{aligned}$$

con eigenvalores dados por

$$\lambda_{12} = \frac{v}{\sqrt{2}} (\Gamma_{11}^q \pm \Gamma_{12}^q) \quad (3.38)$$

y con los eigenvectores siguientes:

$$|v\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad |v\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

La matriz  $M_S^q$  conmuta con los elementos del grupo  $S(2)$ .

El término de masa proveniente de la parte invariante del acoplamiento de Yukawa toma la forma

$$L_{YS} = \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^u \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^u & \Gamma_{12}^u \\ \Gamma_{12}^u & \Gamma_{11}^u \end{pmatrix} \psi^u + \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^d \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^d & \Gamma_{12}^d \\ \Gamma_{12}^d & \Gamma_{11}^d \end{pmatrix} \psi^d \quad (3.40)$$

Las matrices  $U^u$  y  $U^d$  que transforman a los campos de los quarks de la representación de norma a la representación adaptada a la simetría ó representación jerárquica son:

$$U^q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \mathbf{u}, \mathbf{d}. \quad (3.41)$$

Si llamamos  $\psi'^q = U^{q\dagger} \psi^q$  a los campos en la representación adaptada a la simetría se obtiene:

$$\begin{aligned} c' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u + c) & u' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u - c) \\ s' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (d + s) & d' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (d - s) \end{aligned} \quad (3.42)$$

La lagrangiana en la representación jerárquica o adaptada a la simetría tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_Y^m &= \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}'^u \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^u - \Gamma_{12}^u & 0 \\ 0 & \Gamma_{11}^u + \Gamma_{12}^u \end{pmatrix} \psi'^u \\ &+ \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}'^d \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^d - \Gamma_{12}^d & 0 \\ 0 & \Gamma_{11}^d + \Gamma_{12}^d \end{pmatrix} \psi'^d. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Vemos que en este caso particular, la matriz de masas es diagonal en la representación adaptada a la simetría y, por consiguiente, ésta es también la

representación de masas. Cada uno de los campos de los quarks,  $u'$ ,  $c'$  y  $d'$ ,  $s'$ , queda así asignado a una representación irreducible de  $S_2$ . En el caso general de  $N$  ( $> 2$ ) familias, la representación adaptada a la simetría, en general, no es diagonal.

Las masas de los quarks serán positivas definidas si se cumple que  $\Gamma_{11}^u \geq \Gamma_{12}^u$  y  $\Gamma_{11}^d \geq \Gamma_{12}^d$ . Esta condición establece una jerarquía de familias para el caso de dos familias

$$m_c^2 > m_u^2 \qquad m_s^2 > m_d^2 \qquad (3.44)$$

En el caso particular en el cual  $\Gamma_{11}^q = \Gamma_{12}^q$  solo un quark de cada sector adquiere masa y la jerarquía de masas es máxima.

Como la matrices  $\mathbf{U}^d$  y  $\mathbf{U}^u$  que diagonalizan a los quarks  $u$  y  $d$  respectivamente son iguales,  $\mathbf{U}^d = \mathbf{U}^u$ , la matriz de mezclas de los quarks  $\mathbf{V}_c$  para dos familias conocida como la matriz de Cabibbo,

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{U}^{u\dagger} \mathbf{U}^d \qquad (3.45)$$

es la matriz unidad y no mezcla a los campos de quarks

$$\mathbf{V}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.46)$$

Esto es, la invariancia de  $L_{YS}$  respecto de la simetría permutacional  $S_2^{diag}$  implica que el ángulo de Cabibbo sea nulo. Para obtener un valor no nulo del ángulo de Cabibbo es necesario romper la simetría permutacional  $S_2$ .

### 3.1.2 Rompimiento de la simetría $S(2)$ y el ángulo de Cabibbo

En la subsección anterior, derivamos la matriz de mezclas de los quarks a partir de matrices de masas con simetría permutacional  $S_2^{diag}$  exacta; en este caso, las matrices de masas con simetría  $S_2^{diag}$  tienen dos eigenvalores distintos y diferentes de cero, la matriz de mezclas de los quarks que se obtiene no tiene parámetros libres, y el ángulo de Cabibbo es nulo e independiente de las masas de los quarks. La matriz de mezclas de los quarks para dos familias tiene sólo un parámetro libre, éste es el ángulo de Cabibbo. El valor central experimental del ángulo de Cabibbo es  $12.9^\circ$ , y por lo tanto, diferente de cero. Es claro que con matrices de masas con simetría permutacional  $S_2^{diag}$  exacta,

no se reproducen los valores experimentales conocidos del ángulo de Cabibbo. Si deseamos explicar la jerarquía de mezclas de los quarks como consecuencia de la jerarquía de masas y la simetría del sabor, debemos romper la simetría permutacional del sabor  $S_2^{diag}$  y encontrar un patrón de rompimiento de la simetría permutacional que nos dé una relación no trivial entre el ángulo de Cabibbo y las masas de los quarks que nos permita reproducir los datos experimentales.

La matriz de masas con simetría permutacional exacta  $M_S^q$  de la Ec. (3.37) se puede escribir de la manera siguiente:

$$M_S^q = \frac{v(\Gamma_{11}^q - \Gamma_{12}^q)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{v\Gamma_{12}^q}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

el primer término del lado derecho de esta ecuación es proporcional a la matriz unidad y por lo tanto conmuta con todos los elementos del grupo. Este término tan sólo corre la escala de la masa de los quarks.

Antes de romper la simetría de familias, haré la suposición (ansatz) siguiente: El término proporcional a  $(\Gamma_{11}^q - \Gamma_{12}^q)$  no contribuye a la matriz de masas con simetría permutacional exacta.

esto es, en la parametrización de la Ec. (2.2) tomaré,

$$\Gamma_{11}^q = \Gamma_{12}^q, \quad (3.48)$$

de este modo, eliminamos un parámetro de la matriz de masas de cada sector, la matriz de masas queda como:

$$M_S^q = \frac{v\Gamma_{12}^q}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Cuando la simetría de familias es exacta, esta condición da una masa no nula al quark de la segunda familia en cada sector; el otro quark de cada sector queda sin masa y la jerarquía de masas es máxima.

Rompemos la simetría permutacional del sabor  $S_2^{diag}$  de la matriz  $M_S^q$ , sumando a  $M_S^q$  la matriz  $M_A^q$

$$M_A^q = A\mathbf{T}^+ + A'\mathbf{T}^- = \begin{pmatrix} A & -iA' \\ iA' & -A \end{pmatrix}; \quad (3.50)$$

los tensores  $\mathbf{T}^+$  y  $\mathbf{T}^-$  se definieron en las ecuaciones (3.32), (3.33) en términos de los eigenvectores  $|v\rangle_S$  y  $|v\rangle_A$  que se transforman como los singletes

simétrico y antisimétrico respectivamente; las constantes  $A$  y  $A'$  están dadas en la Ec. (3.34).

La matriz de masas resultante en la representación de norma o débil, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{W}^q &= \mathbf{M}_S^q + \mathbf{M}_{SA}^q \\ &= \frac{D}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & -iA' \\ iA' & -A \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde

$$D = \frac{2}{\sqrt{2}} v \Gamma_{12}^q. \quad (3.52)$$

En la representación adaptada a la simetría, la matriz de masas tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_H^q = \begin{pmatrix} 0 & |A|_q e^{-i\phi_q} \\ |A|_q e^{i\phi_q} & D_q \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

en esta expresión

$$|A|_q = \sqrt{A_q^2 + A_q'^2} \quad y \quad \phi_q = \tan^{-1} \frac{A_q'}{A_q} \quad (3.54)$$

la matriz de masas que se obtiene es hermitiana y tiene tres parámetros libres,  $|A|_q$ ,  $D_q$  y la fase  $\phi_q$ . En la literatura, las formas especiales de las matrices de masa que se obtienen de alguna condición de simetría, se llaman texturas de las matrices de masa; la forma (3.53) de la matriz de masas se conoce como una textura de un cero.

Conviene expresar dos de los tres parámetros libres de la matriz de masas en términos de las masas de los quarks

$$\mathbf{M}_{diag}^q = \begin{pmatrix} m_{1q} & 0 \\ 0 & -m_{2q} \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

los subíndices 1,2 se refieren a los quarks u, c en el sector de quarks tipo u, y a los quarks d,s en el sector de quarks tipo-d. Por conveniencia, tomamos un valor negativo para la masa de los quarks de la segunda familia en cada sector. Para campos fermiónicos, el signo de la masa es irrelevante ya que puede cambiarse por una transformación quirral

$$\psi_{R2} \rightarrow \psi'_{R2} = e^{i\gamma_5\pi/2} \psi_{R2} \quad y \quad \psi_{L2} \rightarrow \psi'_{L2} = e^{-i\gamma_5\pi/2} \psi_{L2} \quad (3.56)$$

esta transformación cambia el signo de la masa  $m_2$  y deja invariante al resto de la lagrangiana.

Del determinante y la traza de  $\mathbf{M}_{diag}^q$  y  $\mathbf{M}_H^q$  obtenemos que

$$|A|_q = m_{1q}m_{2q}, \quad y \quad D_q = m_{1q} - m_{2q}. \quad (3.57)$$

La matriz de masas  $\mathbf{M}_H^q$  se puede escribir como el producto de una matriz de masas  $\bar{\mathbf{M}}_H^q$  real y simétrica, y una matriz diagonal de fases  $\mathbf{P}_q = \text{diag}(1, e^{-i\phi_q})$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}_H^q = \mathbf{P}_q \bar{\mathbf{M}}_H^q \mathbf{P}_q^\dagger. \quad (3.58)$$

La matriz real y simétrica  $\bar{\mathbf{M}}_H^q$  se puede diagonalizar mediante una transformación ortogonal

$$\bar{\mathbf{M}}_H^q = \mathbf{O}_q \mathbf{M}_{diag}^q \mathbf{O}_q^T. \quad (3.59)$$

$\mathbf{M}_{diag}^q$  está dada en la Ec. (3.55) y  $\mathbf{O}_q$  está dada por la expresión siguiente:

$$\mathbf{O}_q = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_{1q}}{m_{2q}}}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{m_{1q}}{m_{2q}}} \\ \sqrt{\frac{m_{1q}}{m_{2q}}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Después de diagonalizar las matrices de masas  $\mathbf{M}_q$ , obtenemos la matriz de mezclas de los quarks  $\mathbf{V}^{th}$  como

$$\mathbf{V}^{th} = \mathbf{O}_u^T \mathbf{P}_{u-d} \mathbf{O}_d \quad (3.61)$$

donde  $\mathbf{P}_{u-d}$  es la matriz diagonal de fases relativas del sector u y d,

$$\mathbf{P}_{u-d} = \text{diag}[1, e^{i\Phi}] \quad y \quad \Phi = \phi_u - \phi_d, \quad (3.62)$$

la fase  $\Phi$  es el único parámetro libre de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$ . La matriz  $\mathbf{V}^{th}$  es la siguiente:

$$\mathbf{V}^{th} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{m_u}{m_c}\right) \left(1 + \frac{m_d}{m_s}\right)}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{\frac{m_u}{m_c} \frac{m_d}{m_s}} e^{i\Phi} & -\sqrt{\frac{m_d}{m_s}} + \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} e^{i\Phi} \\ -\sqrt{\frac{m_u}{m_c}} + \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} e^{i\Phi} & e^{i\Phi} + \sqrt{\frac{m_u}{m_c} \frac{m_d}{m_s}} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Para la magnitud de los elementos de la matriz de mezclas obtenemos,

$$|\mathbf{V}_{ud}^{th}| = \frac{\sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{m_u}{m_c} \frac{m_d}{m_s}} \cos \Phi\right)^2 + \frac{m_u}{m_c} \frac{m_d}{m_s} \text{sen}^2 \Phi}}{\sqrt{\left(1 + \frac{m_u}{m_c}\right) \left(1 + \frac{m_d}{m_s}\right)}} \quad (3.64)$$

y

$$|V_{us}^{th}| = \frac{\sqrt{\left(-\sqrt{\frac{m_d}{m_s}} + \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} \cos \Phi\right)^2 + \frac{m_u}{m_c} \text{sen}^2 \Phi}}{\sqrt{\left(1 + \frac{m_u}{m_c}\right) \left(1 + \frac{m_d}{m_s}\right)}} \quad (3.65)$$

### 3.1.3 Equivalencia de fase de $V^{th}$ y $V^C$

La parametrización de la matriz de mezclas para dos familias de quarks conocida como matriz de mezclas de Cabibbo  $V_C$  es la siguiente:

$$V_C = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \text{sen} \theta_C \\ -\text{sen} \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

esta matriz de mezclas tiene sólo un parámetro libre  $\theta_C$ ; éste es el ángulo de Cabibbo.

En la base en la que las matrices de masas son diagonales, las corrientes cargadas toman la forma siguiente:

$$J_{\pm}^{\mu} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{L_i}^u V_{ij}^{th} \psi_{L_j}^d. \quad (3.67)$$

Una redefinición de las fases de los campos de los quarks

$$\psi_i^q \rightarrow \psi_i^{\prime q} = e^{i\chi_i^q} \psi_i^q \quad (3.68)$$

deja las matrices de masas, las corrientes  $J_{\pm}^{\mu}$  y las magnitudes  $|V_{ij}^{th}|$ , invariantes; pero cambia los argumentos de los elementos de la matriz de mezclas  $V_{ij}^{th}$ ,

$$V_{ij}^{th} \rightarrow \tilde{V}_{ij}^{th} = e^{-i\chi_i^u} V_{ij}^{th} e^{i\chi_j^d}. \quad (3.69)$$

Las fases  $\chi_i^u$  y  $\chi_j^d$  se fijan demandando que las entradas correspondientes en  $V_{ij}^{th}$  y  $\tilde{V}_{ij}^{th}$  sean iguales, esto es:

$$\tilde{V}_{ij}^{th} = |V_{ij}^{th}| e^{i[w_{ij}^{th} - (\chi_i^u - \chi_j^d)]} = |V_{ij}^C| e^{i w_{ij}^C}. \quad (3.70)$$

En esta expresión hemos supuesto que  $\tilde{V}_{ij}^{th} = V_{ij}^C$ . Como las magnitudes  $|V_{ij}^{th}|$  y  $|V_{ij}^C|$  son iguales, los argumentos de los



elementos de matriz en el lugar  $(i, j)$  en las dos parametrizaciones están relacionados por el siguiente conjunto de cuatro ecuaciones:

$$\chi_i^u - \chi_j^d = w_{ij}^{th} - w_{ij}^C \quad \text{con} \quad i, j = 1, 2. \quad (3.71)$$

Estas ecuaciones relacionan las diferencias de las fases no observables de los quarks con las diferencias de los argumentos de las entradas correspondientes en  $\mathbf{V}_{ij}^{th}$  y  $\mathbf{V}_{ij}^C$ . Estas dos parametrizaciones de la matriz de mezclas son representaciones del mismo conjunto de datos experimentales y, por lo tanto, deben ser equivalentes. En  $\mathbf{V}_{ij}^C$  todos los argumentos son conocidos  $w_{11}^C = w_{12}^C = w_{22}^C = 0$  y  $w_{21}^C = \pm\pi$ . Como las fases de los quarks no son observables, podemos fijar una de las fases y resolver para las otras sin pérdida de generalidad. Si tomamos  $\chi_1^d = 0$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \chi_1^d &= 0 \\ \chi_2^d &= w_{11}^{th} - w_{12}^{th} \\ \chi_1^u &= w_{11}^{th} \\ \chi_2^u &= w_{21}^{th} \mp \pi. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Así que las matrices diagonales de fases requeridas para calcular la matriz transformada  $\tilde{\mathbf{V}}_{ij}$  son:

$$\chi_u = \text{diag}[e^{iw_{11}^{th}}, e^{i(w_{21}^{th} \mp \pi)}] \quad y \quad \chi_d = \text{diag}[1, e^{i(w_{11}^{th} - w_{12}^{th})}]. \quad (3.73)$$

Con ayuda de estas ecuaciones, verificamos que la ecuación

$$\chi_u^\dagger \mathbf{V}^{th} \chi_d = \mathbf{V}^C \quad (3.74)$$

se satisface como una identidad si  $|\mathbf{V}_{ij}^{th}| = |\mathbf{V}_{ij}^C|$ .

Las relaciones de fase entre los determinantes de las dos matrices  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^C$  se obtienen de

$$\det \mathbf{V}^{th} = \det [\chi_u \mathbf{V}^C \chi_d^\dagger] \quad (3.75)$$

El determinante de  $\mathbf{V}^C$  es uno, y el determinante de  $\mathbf{V}^{th}$  es  $\Phi$ ; así que esto nos da la ecuación

$$(\chi_i^u - \chi_i^d) = \Phi \quad (3.76)$$

Con ayuda de las ecuaciones (2.2), obtenemos que

$$w_{11}^{th} + w_{22}^{th} = \Phi \quad y \quad w_{12}^{th} + w_{21}^{th} \mp \pi = \Phi. \quad (3.77)$$

De este modo, en el caso de dos familias, hemos demostrado explícitamente en las Ecs. (3.74), la equivalencia hasta un refasamiento de los campos de los quarks de las dos parametrizaciones de la matriz de mezclas. Como ambas parametrizaciones tienen un sólo parámetro libre,  $\theta_C$  y  $\Phi$ , estos dos parámetros no son independientes. Podemos usar la igualdad entre las magnitudes,

$$| \mathbf{V}_{12}^{th} | = | \mathbf{V}_{12}^C | \quad (3.78)$$

para encontrar la relación funcional entre ambos,

$$\cos \Phi = \frac{\left( \frac{m_u}{m_c} + \frac{m_d}{m_s} \right) - \left( 1 + \frac{m_u}{m_c} \right) \left( 1 + \frac{m_d}{m_s} \right) \text{sen}^2 \theta_C}{2 \sqrt{\frac{m_u}{m_c} \frac{m_d}{m_s}}}. \quad (3.79)$$

Si ahora sustituimos en la Ec. (3.79) los valores numéricos de las masas de los quarks de la primera familia de cada sector, tomados del trabajo de Fusaoka y Koide [65] y evaluados a la energía del quark top,

$$m_u = 3.25 \pm 0.09 \text{ Mev}, \quad m_d = 4.40 \pm 0.64 \text{ Mev} \quad (3.80)$$

para la segunda familia de cada sector usamos los valores siguientes:

$$m_c = 760 \pm 0.09 \text{ Mev}, \quad m_s = 100 \pm 6.0 \text{ Mev} \quad (3.81)$$

el valor de  $m_c(m_t)$  se calculó reescalando a  $\mu = m_t$  el cálculo reciente de Pineda e Ynduráin [86] e Ynduráin [66]. El valor de  $m_s(m_t)$  está de acuerdo con la última determinación realizada por la colaboración ALEPH, obtenida del estudio de los decaimientos del  $\tau$  que involucran kaones [87].

El valor numérico del ángulo de Cabibbo es

$$\text{sen} \theta_C = 0.2225 \pm 0.0035. \quad (3.82)$$

Si calculamos el valor de  $\Phi$  manteniendo fijas las masas en sus valores centrales, y tomamos el valor central del ángulo de Cabibbo; obtenemos que  $\Phi = 97^\circ$ . De la ecuación (3.79), se ve claramente que tomando  $m_d$  ligeramente arriba de su valor central  $m_d = 4.6 \text{ Mev}$ , ocurre una cancelación de términos y podemos tomar como solución el caso en el que

$$\cos \Phi^* = 0, \quad y \quad \Phi^* = 90^\circ. \quad (3.83)$$

El valor de la fase  $\Phi^* = 90^\circ$  es compatible con los valores experimentales del ángulo de Cabibbo,  $\text{sen}\theta_C = 0.2225 \pm 0.0035$ .

La matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$  se derivó directamente de la matriz de masas que se obtiene del esquema de rompimiento de la simetría de familias; la simetría supuesta en el *ansatz* da como resultado una relación funcional entre el  $\text{sen}\theta_C$  y los cocientes de masas  $m_u/m_c$ ,  $m_d/m_s$ . Por consiguiente, el ángulo de Cabibbo en función de las masas es

$$\text{sen}\theta_C^* = \sqrt{\frac{\frac{m_u}{m_c} + \frac{m_d}{m_s}}{\left(1 + \frac{m_u}{m_c}\right) \left(1 + \frac{m_d}{m_s}\right)}}. \quad (3.84)$$

En este caso particular de dos familias, la matriz de mezclas de los quarks  $\mathbf{V}^{th}$  derivada de la simetría permutacional tiene un sólo parámetro libre, la fase  $\Phi$ ; como la parametrización de Cabibbo tiene también un sólo parámetro libre, la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$  no tiene un valor predictivo.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## Capítulo 4

# Simetría del sabor para tres familias de quarks

### 4.1 Simetría permutacional de tres familias

Con objeto de extender las ideas y conceptos de la simetría permutacional del sabor que se utilizaron en el caso de dos familias, analizaré en este capítulo el caso de tres familias.

En el Modelo Estándar, fermiones análogos en diferentes generaciones, digamos  $u$ ,  $c$ ,  $t$  y  $d$ ,  $s$ ,  $b$  en el caso de tres familias, están igualmente acoplados a los bosones de norma de las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas. Por consiguiente, antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma y antes de que adquieran masa los fermiones, el contenido físico del Modelo no cambia si se intercambian los nombres de las familias; es decir, si se intercambian  $u$ ,  $c$  y  $t$  ó  $d$ ,  $s$  y  $b$ . Esto significa que, antes del rompimiento de la simetría de norma, la lagrangiana del Modelo Estándar es simétrica respecto del grupo de permutaciones del sabor. En el caso de tres familias, éste es el grupo  $S_3$  de permutaciones de tres objetos que son el nombre del sabor de los quarks en diferentes generaciones de cada sector. En el capítulo, 2 el nombre del sabor se denotó con un índice de sabor o índice de familia.

La lagrangiana de Yukawa para tres familias de quarks se escribe de la siguiente manera:

$$L_Y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \bar{Q}_i \Gamma_{ij}^u \Phi \frac{1 + \sigma_3}{2} Q_j + \bar{Q}_i \Gamma_{ij}^d \Phi \frac{1 - \sigma_3}{2} Q_j \right\} \quad (4.1)$$

donde  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ , denotan los dobletes de isospín débil de los quarks y  $\phi(x)$  es el campo de Higgs

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{h(x)\mathbf{1} + iw_\alpha(x)\sigma^\alpha\} \quad (4.2)$$

Los dobletes de isospín débil se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^u(x) \\ \psi_1^d(x) \end{pmatrix} \\ Q_2(x) &= \begin{pmatrix} c(x) \\ s(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^u(x) \\ \psi_2^d(x) \end{pmatrix} \\ Q_3(x) &= \begin{pmatrix} t(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3^u(x) \\ \psi_3^d(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Conviene reordenar los términos de (4.1) y escribir  $L_Y$  en función del espinor  $\psi^q$ , cuyas componentes se definen en el espacio de familias como se hizo en el capítulo 2 en las Ecs. (2.3) y (2.4),

$$\begin{aligned} \psi^u(x) &= \begin{pmatrix} u(x) \\ c(x) \\ t(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^u(x) \\ \psi_2^u(x) \\ \psi_3^u(x) \end{pmatrix} \\ \psi^d(x) &= \begin{pmatrix} d(x) \\ s(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^d(x) \\ \psi_2^d(x) \\ \psi_3^d(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esto equivale a introducir un espacio Euclideo real de tres dimensiones  $L_3$ . Una base ortogonal y normalizada de este espacio está formada por los vectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

El grupo  $S_3$  tiene seis elementos: la identidad y las permutaciones de los índices 1, 2 y 3. La representación matricial del grupo  $S_3$  en el espacio  $L_3$  está constituida por las matrices que intercambian los índices de sabor. Definimos el grupo  $S_3$  ó  $S(3)$  como el grupo de permutaciones de tres objetos. El grupo  $S(3)$  es un grupo no abeliano y está formado por tres permutaciones pares y tres impares

$$\{e, P_{(12)}, P_{(13)}, P_{(23)}, P_{(13)}P_{(12)}, P_{(13)}P_{(23)}\}. \quad (4.6)$$

La representación matricial real de  $3 \times 3$  está dada por las matrices siguientes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & P_{(12)} \leftrightarrow \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 P_{(13)} \leftrightarrow \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_{(23)} \leftrightarrow \mathbf{A}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 P_{(13)}P_{(1,2)} \leftrightarrow \mathbf{A}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P_{(1,3)}P_{(2,3)} \leftrightarrow \mathbf{A}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Las matrices que representan a los elementos de  $S_3$  son matrices ortogonales; es decir, el transpuesto de cada elemento del grupo es su inverso. En la representación real de matrices de tres por tres de  $S_3$ , el subgrupo formado por los elementos  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{A}_4$  y  $\mathbf{A}_5$  tienen determinante uno y son matrices de rotación; los elementos restantes tienen determinante  $-1$  y no son rotaciones. La tabla de multiplicar de los elementos del grupo  $S(3)$  es la siguiente:

Tabla 4.1: Tabla de multiplicar del grupo  $S(3)$

	$\mathbf{e}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
$\mathbf{e}$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_2$
$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_3$
$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_1$
$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{e}$
$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{e}$	$\mathbf{A}_4$

El espacio  $L_3$  tiene dos subespacios invariantes bajo la acción de  $S_3$  que corresponden a las dos representaciones irreducibles de  $S_3$ : un singlete simétrico y un doblete de simetría mixta. El conjunto de los vectores de  $L_3$  invariantes bajo la acción del grupo  $S_3$  es el subespacio invariante  $\mathbf{V}_S$ . Este subespacio es unidimensional, sus elementos son los vectores proporcionales al vector

$|v\rangle_S$  definido como

$$|v\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

El vector  $|v\rangle_S$  es un singlete de  $S_3$ , es el singlete simétrico.

El espacio  $L_3$  tiene tres dimensiones, por consiguiente, el subespacio  $\mathbf{V}_2$  ortogonal a  $\mathbf{V}_S$  tiene dos dimensiones. También  $\mathbf{V}_2$  es un subespacio invariante bajo la acción de  $S_3$ . Debemos elegir una base apropiada para el subespacio vectorial  $\mathbf{V}_2$ . Tomaremos el conjunto de vectores  $|v\rangle_{2A}$  y  $|v\rangle_{2S}$  ortogonales entre si, ortogonales a  $|v\rangle_S$  y normalizados a la unidad

$$|v\rangle_{2A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad |v\rangle_{2S} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Los vectores  $|v\rangle_S$ ,  $|v\rangle_{2A}$  y  $|v\rangle_{2S}$  forman una base completa de  $L_3$ .

Los vectores de  $\mathbf{V}_2$  son combinaciones lineales de  $|v\rangle_{2A}$  y  $|v\rangle_{2S}$ . Los vectores  $|v\rangle_{2A}$  y  $|v\rangle_{2S}$  son antisimétricos y simétricos respecto de las permutaciones de los dos primeros índices del sabor.

El acoplamiento de Yukawa en la notación de familias (4.4) es

$$L_y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \bar{\psi}_{Li}^u \Gamma_{ij}^u \phi \psi_{Rj}^u + \bar{\psi}_{Rj}^d \Gamma_{ij}^d \phi \psi_{Li}^d \right) + h.c. \quad (4.10)$$

Antes del rompimiento de la simetría de norma, los quarks no tienen masa y la teoría es quiral. Por lo tanto, los espinores izquierdos y derechos se transforman independientemente. Esto es

$$\psi_L^q(x) \rightarrow \psi_L^{\prime q}(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^q(x) \\ \psi_{2L}^q(x) \\ \psi_{3L}^q(x) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

e, igualmente para los espinores derechos

$$\psi_R^q(x) \rightarrow \psi_R^{\prime q}(x) = \tilde{\mathbf{g}} \begin{pmatrix} \psi_{1R}^q(x) \\ \psi_{2R}^q(x) \\ \psi_{3R}^q(x) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$\mathbf{g} \in S_L(3)$  actúa sobre los espinores izquierdos, y  $\tilde{\mathbf{g}} \in S_R(3)$  actúa sobre los espinores derechos.

Así pues, el grupo de la simetría permutacional del sabor de la forma bilineal (4.1) es  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , cuyos elementos son las parejas  $(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$  con  $\mathbf{g} \in S_L(3)$  y  $\tilde{\mathbf{g}} \in S_R(3)$ .

Bajo la acción del grupo de sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , las corrientes cargadas se transforman de la siguiente forma:

$$J_\mu^\pm \rightarrow J_\mu'^\pm = \bar{\psi}_L'^u \gamma_\mu \psi_L'^d + h.c. \quad (4.13)$$

sustituyendo las expresiones para  $\psi_L'^d$  y  $\bar{\psi}_L'^u$ , se obtiene:

$$J_\mu^\pm = \bar{\psi}_L^u \mathbf{g}_u^{-1} \mathbf{g}_d \gamma_\mu \psi_L^d + h.c.. \quad (4.14)$$

De esta expresión, queda claro que las corrientes cargadas  $J_\mu^\pm$  quedarán invariantes bajo las transformaciones del grupo de simetría de sabor si y sólo si  $\mathbf{g}_u$  y  $\mathbf{g}_d$  son la misma matriz. Esto es, la condición de invariancia de las corrientes cargadas bajo la acción del grupo de simetría de las familias implica que los campos de los quarks tipo u y tipo d se transformen con el mismo grupo y con el mismo elemento del grupo. A esto se debe que no hayamos puesto un índice u o d en los elementos del grupo que aparecen en las ecuaciones (4.11) y (4.12).

Cuando la simetría de norma se rompe espontáneamente, los quarks adquieren masa y la teoría deja de ser quiral. Por lo tanto, los campos de los quarks tipo u y tipo d se transforman de la siguiente forma:

$$\bar{\psi}^q(x) \rightarrow \bar{\psi}'^q(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^q(x) \\ \psi_{2L}^q(x) \\ \psi_{3L}^q(x) \end{pmatrix} + \mathbf{g}' \begin{pmatrix} \psi_{1R}^q(x) \\ \psi_{2R}^q(x) \\ \psi_{3R}^q(x) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

las componentes  $\psi_R^q$  y  $\psi_L^q$  se definieron en la Ec. (3.15). Las componentes de quiralidad izquierda y derecha del mismo campo se transforman con el mismo elemento del grupo. El grupo de la simetría del sabor de la forma bilineal (4.14) es el grupo  $S^{diag.}(3)$  cuyos elementos son la parejas  $(\mathbf{g}, \mathbf{g}')$  con primer elemento  $\mathbf{g} \in S_L(3)$  y segundo elemento  $\mathbf{g}' \in S_R(3)$ , y  $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$ . Claramente,  $S^{diag.}(3) \subset S_L(3) \otimes S_R(3)$ .

Bajo la acción del grupo de simetría de familias  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , el término de masa proveniente del acoplamiento de Yukawa se transforma de la siguiente forma:

$$L_y \rightarrow L_y' = \bar{\psi}_L'^u \mathbf{M}^u \psi_R'^u + \bar{\psi}_R'^d \mathbf{M}^d \psi_L'^d + h.c. \quad (4.16)$$



sustituyendo las expresiones para  $\psi'^q$  y  $\bar{\psi}'^q$  obtenemos

$$L'_y = \bar{\psi}_L^u \mathbf{g}^T \mathbf{M}^u \mathbf{g} \psi_R^u + \bar{\psi}_R^d \mathbf{g}^T \mathbf{M}^d \mathbf{g} \psi_L^d + h.c. \quad (4.17)$$

Por consiguiente, bajo la acción del grupo de sabor  $S^{diag}(3)$ , las matrices de masas  $\mathbf{M}^q$  se transforman de acuerdo con la siguiente regla:

$$\mathbf{M}'^u = \mathbf{g}^T \mathbf{M}^u \mathbf{g} \quad y \quad \mathbf{M}'^d = \mathbf{g}^T \mathbf{M}^d \mathbf{g}. \quad (4.18)$$

Si pedimos que el sector de Yukawa sea invariante, bajo la acción del grupo de familias  $S^{diag}(3)$  se debe cumplir que

$$\mathbf{M}'^q = \mathbf{M}^q; \quad (4.19)$$

esto es, el sector de Yukawa del Modelo Estándar tiene la simetría de familias si la matriz de masas conmuta con todos los elementos del grupo de sabor  $S_3$

$$[\mathbf{M}_S^u, \mathbf{g}] = 0 \quad y \quad [\mathbf{M}_S^d, \mathbf{g}] = 0, \quad (4.20)$$

$\mathbf{M}_S^q$  es la matriz de masas de los quarks tipo u ó d que tiene la simetría de familias.

#### 4.1.1 Representaciones tensoriales de $S(3)$ y matriz de masas

Con  $|v\rangle_S$  y su dual  $\langle v|_S$  se puede formar un tensor  $\mathbf{T}_S$  de rango 1 invariante bajo la acción de  $S_3$  por la izquierda y por la derecha

$$\mathbf{T}_S = |v\rangle_S \langle v|_S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

El tensor  $\mathbf{T}_2$  que se define por la ecuación

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{1} - \mathbf{T}_S \quad (4.22)$$

o

$$\mathbf{T}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

conmuta con las matrices de la Ec. (4.7) que representan a los elementos de  $S_3$  y, por consiguiente, es invariante bajo la acción de  $S_3^{diag}$ .

Los tensores  $\mathbf{T}_S$  y  $\mathbf{T}_2$  son proyectores ortogonales y satisfacen las relaciones

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{T}_S^\dagger, \quad \mathbf{T}_S^2 = \mathbf{T}_S, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^\dagger, \quad \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{T}_2, \quad \mathbf{T}_S \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_S = 0. \quad (4.24)$$

El tensor  $\mathbf{T}_2$  proyecta sobre el espacio invariante  $\mathbf{V}_2$ . Los tensores  $\mathbf{T}_S$  y  $\mathbf{T}_2$  descomponen la unidad

$$\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2 = \mathbf{1}. \quad (4.25)$$

El producto de  $|v\rangle_{2A}$  y su dual  $\langle v|_{2A}$  forman un tensor  $\mathbf{T}_{2A}$  que se representa por la matriz

$$\mathbf{T}_{2A} = |v\rangle_{2A} \langle v|_{2A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

De la misma manera, el producto de  $|v\rangle_{2S}$  y su dual  $\langle v|_{2S}$  forman un tensor  $\mathbf{T}_{2S}$  que se representa por la matriz

$$\mathbf{T}_{2S} = |v\rangle_{2S} \langle v|_{2S} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Se verifica que

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_{2S} + \mathbf{T}_{2A} \quad (4.28)$$

donde  $\mathbf{T}_{2S}$  y  $\mathbf{T}_{2A}$  son proyectores ortogonales.

Hemos supuesto que el campo de Higgs no tiene índices de sabor y que es un singlete bajo el grupo de simetría de las familias. Si tomamos valores entre estados del vacío del campo  $\phi(x)$  tales que  $\langle 0|h(x)|0 \rangle = v$  y  $\langle 0|w(x)|0 \rangle = 0$ , al romper la simetría de norma obtenemos la matriz hermitiana de masas  $\mathbf{M}^q$  de  $3 \times 3$ :

$$\mathbf{M}^q = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^q & \Gamma_{12}^q & \Gamma_{13}^q \\ \Gamma_{12}^{*q} & \Gamma_{22}^q & \Gamma_{23}^q \\ \Gamma_{13}^{*q} & \Gamma_{23}^{*q} & \Gamma_{33}^q \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

cada uno de los elementos de la matriz de masas se puede escribir como

$$\mathbf{M}_{ij}^q = \frac{v}{\sqrt{2}} \Gamma_{ij}^q e^{i\phi_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{y}$$

$$\mathbf{M}_{ii}^q = \frac{v}{\sqrt{2}} \Gamma_{ii}^q, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{si} \quad i = j, \quad (4.30)$$

en estas expresiones  $\phi_{ij}$  es la fase del elemento  $\mathbf{M}_{ij}^q$  de la matriz de masas. Con ayuda de la identidad (4.25)  $\mathbf{M}^q$  se puede descomponer en la suma de un término invariante bajo la acción del grupo  $S_3^{diag}$  y otro que no lo es,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^q &= (\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2) \mathbf{M}^q (\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2) \\ &= \mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2 \mathbf{M}^q \mathbf{T}_2 + (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Los dos primeros términos en el miembro derecho de esta ecuación corresponden a una de las dos representaciones irreducibles  $\mathbf{1}_S$  y  $\mathbf{2}$ , de  $S_3$ . El primer término del lado derecho  $\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S$  es invariante respecto de la acción de  $S_L(3) \times S_R(3)$ . En forma explícita tendríamos que este término es

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S^q &= \mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S \\ &= \frac{v}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\Gamma_{11}^q + \Gamma_{22}^q + \Gamma_{33}^q}{3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2|\Gamma_{12}^q| \cos \phi_{12}^q + 2|\Gamma_{13}^q| \cos \phi_{13}^q + 2|\Gamma_{23}^q| \cos \phi_{23}^q}{3} \right\} \mathbf{T}_S. \end{aligned} \quad (4.32)$$

El segundo término en el lado derecho de la Ec. (4.31) nos da las proyecciones de la matriz de masas en el doblete de  $S_3$ , este término se escribe de la manera siguiente:

$$\mathbf{T}_2 \mathbf{M}^q \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_{2A} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2A} + \mathbf{T}_{2S} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2S} + (\mathbf{T}_{2A} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2S} + \mathbf{T}_{2S} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2A}). \quad (4.33)$$

Bajo la acción del grupo de permutaciones de los primeros dos índices de familias,  $S(2)$ , los primeros dos términos en el miembro derecho de esta ecuación se transforman como un singlete antisimétrico y un singlete simétrico con componentes  $\mathbf{2}_A$  y  $\mathbf{2}_S$ , éstos son los elementos del doblete de  $S_3$ .

El término antisimétrico es el siguiente:

$$\mathbf{T}_{2A} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2A} = \frac{1}{2} (\Gamma_{11}^q + \Gamma_{22}^q - 2|\Gamma_{12}^q| \cos \phi_{12}^q) \mathbf{T}_{2A}. \quad (4.34)$$

Para el término simétrico obtenemos

$$\mathbf{T}_{2S} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2S} = \frac{1}{6} \left\{ \Gamma_{11}^q + \Gamma_{22}^q + 4\Gamma_{33}^q + 2|\Gamma_{12}^q| \cos \phi_{12}^q \right.$$

$$- 4 (|\Gamma_{23}^q| \cos \phi_{23}^q + |\Gamma_{13}^q| \cos \phi_{13}^q) \left. \right\} \mathbf{T}_{2S}. \quad (4.35)$$

El tercer término en el miembro derecho de la ecuación (4.33) mezcla las componentes del doblete

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{2A} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2S} + \mathbf{T}_{2S} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2A} = & \left\{ \Gamma_{11}^q - \Gamma_{22}^q - 2|\Gamma_{13}^q| \cos \phi_{13}^q + 2|\Gamma_{23}^q| \cos \phi_{23}^q \right\} \mathbf{T}^+ \\ & - 2 \left\{ |\Gamma_{13}^q| \text{sen} \phi_{13}^q - |\Gamma_{12}^q| \text{sen} \phi_{12}^q - |\Gamma_{23}^q| \text{sen} \phi_{23}^q \right\} \mathbf{T}^-. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Los tensores que ocurren en el lado derecho de la Ec. (4.36) son los siguientes:

$$\mathbf{T}^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |v\rangle_{2S} \langle v|_{2A} + |v\rangle_{2A} \langle v|_{2S} \quad (4.37)$$

y

$$\mathbf{T}^- = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} = i(|v\rangle_{2S} \langle v|_{2A} - |v\rangle_{2A} \langle v|_{2S}) \quad (4.38)$$

Los términos proporcionales a los tensores  $\mathbf{T}^+$  y  $\mathbf{T}^-$  mezclan las componentes del doblete de  $S_3$ . El tercer término de la Ec. (4.31)

$$\mathbf{M}_A^q = (\mathbf{T}_S \mathbf{M} \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 \mathbf{M} \mathbf{T}_S) \quad (4.39)$$

no es invariante bajo la acción de  $S_3^{diag}$ ,

$$\mathbf{A}_i^T (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S) \mathbf{A}_i \neq \mathbf{M}_A^q. \quad (4.40)$$

El término no-simétrico  $\mathbf{M}_A^q$  mezcla las representaciones irreducibles de singlete y de doblete de  $S_3$ . Este término se puede escribir como

$$\mathbf{M}_A^q = (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2A} + \mathbf{T}_{2A} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S) + (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2S} + \mathbf{T}_{2S} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S). \quad (4.41)$$

El primer término en el lado derecho de esta ecuación (4.41) se escribe de la manera siguiente:

$$(\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2A} + \mathbf{T}_{2A} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S) = \frac{1}{6} \left\{ \Gamma_{11}^q - \Gamma_{22}^q - |\Gamma_{23}^q| \cos \phi_{23}^q + |\Gamma_{13}^q| \cos \phi_{13}^q \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{6} \left\{ 2|\Gamma_{12}^q| \text{sen} \phi_{12}^q - |\Gamma_{23}^q| \text{sen} \phi_{23}^q + |\Gamma_{13}^q| \text{sen} \phi_{13}^q \right\} \\
& \times \begin{pmatrix} 0 & -2i & -i \\ 2i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

El segundo término de (4.41) es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_S \mathbf{M}^q \mathbf{T}_{2S} + \mathbf{T}_{2S} \mathbf{M}^q \mathbf{T}_S &= \frac{1}{18} \left\{ \Gamma_{11}^q + \Gamma_{22}^q - 2\Gamma_{33}^q + 2|\Gamma_{12}^q| \cos \phi_{12}^q \right. \\
& - \left. |\Gamma_{23}^q| \cos \phi_{23}^q - |\Gamma_{13}^q| \cos \phi_{13}^q \right\} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ |\Gamma_{13}^q| \text{sen} \phi_{13}^q + |\Gamma_{23}^q| \text{sen} \phi_{23}^q \right\} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i \\ i & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.43}
\end{aligned}$$

los términos proporcionales a estos tensores mezclan las representaciones irreducibles de singlete y doblete de  $S_3$ . El tensor  $\mathbf{T}_Z$  rompe la simetría permutacional  $S_3$  y mezcla la componente simétrica  $\mathbf{2}_S$  del doblete de  $S_3$  con el singlete de  $S_3$

$$\mathbf{T}_Z = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = |v\rangle_S \langle v|_{2S} + |v\rangle_{2S} \langle v|_S. \tag{4.44}$$

Este tensor se puede escribir como la suma de dos términos

$$\mathbf{T}_Z = \frac{2}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

En el capítulo siguiente veremos la utilidad de esta descomposición del tensor  $\mathbf{T}_Z$  ya que esta propiedad de  $\mathbf{T}_Z$  servirá para caracterizar el patrón de rompimiento de la simetría.

En consecuencia, bajo la acción del grupo  $S_3^{diag}$ , el término de masa proveniente de los acoplamientos de Yukawa en el caso de tres familias se puede descomponer en la suma de tres términos:

$$L_Y = L_{YS}[\mathbf{T}_S \mathbf{M} \mathbf{T}_S] + L_{Y2}[\mathbf{T}_2 \mathbf{M} \mathbf{T}_2] + L_{YA}[(\mathbf{T}_S \mathbf{M} \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 \mathbf{M} \mathbf{T}_S)] \quad (4.46)$$

El término  $L_{YS}$  es invariante bajo el intercambio del índice de familias

$$\psi \rightarrow \psi' = \mathbf{A}_i \psi, \quad (4.47)$$

pero los términos  $L_{YA}$  y  $L_{Y2}$  no lo son.

La condición de invariancia de  $L_Y$  respecto de  $S_L(3) \times S_R(3)$  se satisface si se anulan los coeficientes de las ecuaciones (4.34), (4.35), (4.36), (4.42) y (4.43), esto es:

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{11}^q + \Gamma_{22}^q - 2|\Gamma_{12}^q| \cos \phi_{12}^q) = 0 \\ \Gamma_{11}^q + \Gamma_{22}^q + 4\Gamma_{33}^q + 2|\Gamma_{12}^q| \cos \phi_{12}^q - 4(|\Gamma_{23}^q| \cos \phi_{23}^q + |\Gamma_{13}^q| \cos \phi_{13}^q) &= 0 \\ \Gamma_{11}^q - \Gamma_{22}^q - 2|\Gamma_{13}^q| \cos \phi_{13}^q + 2|\Gamma_{23}^q| \cos \phi_{23}^q &= 0 \\ |\Gamma_{13}^q| \text{sen} \phi_{13}^q - |\Gamma_{12}^q| \text{sen} \phi_{12}^q - |\Gamma_{23}^q| \text{sen} \phi_{23}^q &= 0 \\ \Gamma_{11}^q - \Gamma_{22}^q - |\Gamma_{23}^q| \cos \phi_{23}^q + |\Gamma_{13}^q| \cos \phi_{13}^q &= 0 \\ 2|\Gamma_{12}^q| \text{sen} \phi_{12}^q - |\Gamma_{23}^q| \text{sen} \phi_{23}^q + |\Gamma_{13}^q| \text{sen} \phi_{13}^q &= 0 \\ \Gamma_{11}^q + \Gamma_{22}^q - 2\Gamma_{33}^q + 2|\Gamma_{12}^q| \cos \phi_{12}^q - |\Gamma_{23}^q| \cos \phi_{23}^q - |\Gamma_{13}^q| \cos \phi_{13}^q &= 0 \\ & |\Gamma_{13}^q| \text{sen} \phi_{13}^q + |\Gamma_{23}^q| \text{sen} \phi_{23}^q = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Estas condiciones se satisfacen si  $\Gamma_{ij}^q = \Gamma_{ji}^q$  para todos los valores de  $i, j$  de uno a tres y si las fases toman los valores  $\phi_{12}^q = 0, \pi$ , y  $\phi_{13}^q = \phi_{23}^q = 0$ . Se sigue de aquí que las matrices de masas para los quarks tipo  $u$  y  $d$ , que resultan de la condición de invariancia de  $L_Y$  bajo la acción del grupo de la simetría permutacional del sabor  $S_L(3) \times S_R(3)$ , tienen en la representación de norma, la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_S^q = \frac{v}{\sqrt{2}} 3\Gamma_{33}^q \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

con eigenvalores dados por

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad y \quad \lambda_3 = \frac{v}{\sqrt{2}} 3\Gamma_{33}^q, \quad (4.50)$$

y con los eigenvectores siguientes:

$$|v\rangle_{2A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v\rangle_{2S} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad |v\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

La matriz  $M_3^q$  conmuta con los elementos del grupo  $S(3)$ .

Las matrices  $U^u$  y  $U^d$  que transforman los campos de los quarks de la representación de norma a la representación adaptada a la simetría ó representación jerárquica son:

$$U^q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad q = u, d. \quad (4.52)$$

Si llamamos  $\psi'^q = U^{q\dagger} \psi^q$  a los campos en la representación adaptada a la simetría se obtiene:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^u + \psi_2^u + \psi_3^u) & c' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^u + \psi_2^u - 2\psi_3^u) & u' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^u - \psi_2^u) \\ b' &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^d + \psi_2^d + \psi_3^d) & s' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^d + \psi_2^d - 2\psi_3^d) & d' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^d - \psi_2^d) \end{aligned}$$

De este modo, se asigna el quark pesado al singlete y los dos quarks ligeros a cada una de las componentes del doblete de esta manera cada campo de un quark queda en una representación irreducible de  $S_3$ . La lagrangiana en la representación jerárquica o adaptada a la simetría tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_Y^m &= \frac{v}{\sqrt{2}} 3\Gamma_{33}^u \bar{\psi}'^u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi'^u \\ &+ \frac{v}{\sqrt{2}} 3\Gamma_{33}^d \bar{\psi}'^d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi'^d. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Vemos que en este caso particular, la matriz de masas es diagonal en la representación adaptada a la simetría y, por consiguiente, ésta es también la

representación de masas. Cada uno de los campos de los quarks,  $u'$ ,  $c'$ ,  $t'$  y  $d'$ ,  $s'$ ,  $b'$ , queda así asignado a una representación irreducible de  $S_3$ . Como la matrices  $U^d$  y  $U^u$  que diagonalizan a los quarks  $u$  y  $d$  respectivamente son iguales,  $U^d = U^u$ , la matriz de mezclas de los quarks  $V$  para tres familias conocida como la matriz de Cabibbo Kobayashi y Maskawa,

$$V = U^{u\dagger}U^d, \quad (4.55)$$

es la matriz unidad y no mezcla a los campos de quarks

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Esto es, la invariancia de  $L_{YS}$  respecto de la simetría permutacional  $S_3^{diag}$  implica que los ángulos de mezcla sean nulos y que no tengan una relación funcional con las masas de los quarks. Para obtener un valor no nulo de los ángulos de mezcla y encontrar la relación funcional entre ángulos de mezcla y masas de los quarks, es necesario romper la simetría permutacional  $S_3$ . Por analogía con el caso de dos familias de quarks, para obtener la matriz de mezclas de los quarks a partir de la simetría de familias, es necesario romper la simetría permutacional del sabor  $S_3$ . Para romper la simetría permutacional  $S_3$ , basta sumar a la matriz de masas de los quarks de la Ec (4.49) otros tensores con propiedades de transformación definidas bajo la acción del grupo  $S_3$ . Esto se verá en el siguiente capítulo.





# Capítulo 5

## La matriz de mezclas a partir del rompimiento de $S_L(3) \otimes S_R(3)$

### 5.1 La matriz de mezclas de las texturas de Fritzschn

El interés en las simetrías horizontales o del sabor (texturas de las masas) ha sido reavivado recientemente por el valor grande de la masa del quark top y la muy acentuada jerarquía de masas [50]-[57]. Una simetría permutacional del sabor ha sido propuesta por muchos autores con el objetivo de poner constricciones en las matrices de masas de los fermiones y en los parámetros de mezcla [58]-[63]. Recientemente, se han propuesto varios esquemas del rompimiento de la simetría basados en el grupo discreto no-abeliano  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , el cual se rompe de acuerdo a la siguiente cadena:  $S_L(3) \otimes S_R(3) \supset S_L(2) \otimes S_R(2) \supset S_{diag}(2)$ . El grupo  $S(3)$  trata tres objetos simétricamente en tanto que la naturaleza jerárquica de las matrices de Yukawa es una consecuencia de las representaciones  $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$ , de  $S(3)$  que tratan a las tres generaciones de manera diferente. Distintos ansätze para el rompimiento de la simetría permutacional dan origen a diferentes matrices hermitianas de masas  $\mathbf{M}_q$  del mismo tipo modificado de Fritzschn; las cuales, en una base adaptada a la simetría, difieren en el valor numérico de la razón  $Z^{1/2} = \frac{M_{23}}{M_{22}}$ . En ausencia de un argumento físicamente motivado para fijar el valor de  $Z^{1/2}$ , varios autores [50]-[52], [55], [56], [68]-[72] han propuesto diferentes valores para  $Z^{1/2}$ . En este capítulo, se clasifican diferentes esquemas del rompimiento de la simetría en términos de las representaciones irredu-

cibles de un grupo auxiliar  $\tilde{S}(2)$ . Después, diagonalizando las matrices de masas, obtenemos relaciones exactas explícitas para los elementos de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}_{CKM}$ , el invariante de Jarlskog  $J$ , y los tres ángulos internos del triángulo unitario en términos de las razones de masas de los quarks, el parámetro que mezcla la simetría; y una fase que viola  $CP$ . Un ajuste de  $\chi^2$  de las expresiones teóricas a los valores absolutos de los elementos de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}_{CKM}^{exp}$  experimentalmente determinados da una indicación clara y precisa del patrón del rompimiento de la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  que se realiza en la naturaleza. Expresiones explícitas, simples para las correspondientes texturas de masa son obtenidas del “mejor” valor del parámetro de mezcla  $Z^{1/2}$ . De esta manera obtenemos una parametrización explícita de la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa en función de las cuatro razones de masa  $m_u/m_t$ ,  $m_c/m_t$ ,  $m_d/m_b$ ,  $m_s/m_b$  y un parámetro  $Z^{1/2}$  que mide cuanto se mezclan el singlete y el doblete y una fase que viola  $CP$  en excelente acuerdo con la información experimental acerca de las mezclas de los quarks y violación de  $CP$  en el sistema  $K^\circ - \bar{K}^\circ$  y los datos sobre oscilaciones del sistema  $B_s^\circ - \bar{B}_s^\circ$  más recientes. El plan de este capítulo es el siguiente: en la sección 5.2 revisaremos algún trabajo previo sobre el rompimiento de la simetría permutacional del sabor. En la sección 5.3 se hace un análisis breve de teoría de grupos de la textura modificada de Fritzsch. La siguiente sección está dedicada a la derivación de expresiones explícitas para los elementos de la matriz de mezclas  $CKM$  y el invariante de Jarlskog  $J$  en términos de las razones de masas de los quarks y el parámetro de mezcla  $Z^{1/2}$ . En la sección 5.5 extraemos el mejor valor de  $Z^{1/2}$  de un ajuste de  $\chi^2$  de nuestras expresiones teóricas a los valores absolutos de las entradas en  $|\mathbf{V}_{CKM}^{exp}|$  determinados experimentalmente. La interpretación del “mejor” valor de  $Z^{1/2}$  en términos del análisis hecho en las secciones 5.2 y 5.3, y la derivación de las correspondientes “mejores” texturas de masa se hace en la sección 5.6. La parametrización resultante de la matriz  $CKM$  en términos de cuatro razones de masa y una fase que viola  $CP$  es comparada con la información experimental relevante en la sección 5.7. Este capítulo termina con un resumen de resultados y algunas conclusiones.

## 5.2 Simetría permutacional del sabor

En esta sección revisaremos algún trabajo previo del rompimiento de la simetría permutacional del sabor. En el Modelo Estándar, fermiones análogos

en diferentes generaciones, digamos  $u, c$  y  $t$  o  $d, s$  y  $b$ , tienen acoplamientos idénticos a todos los bosones de norma de las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas. Anteriormente a la introducción del boson de Higgs y los términos de masa, la lagrangiana es quiral e invariante con respecto a cualquier permutación de los campos de quarks derechos e izquierdos. La introducción de un bosón de Higgs y de los acoplamientos de Yukawa da masa a los quarks y a los leptones cuando la simetría de norma se rompe espontáneamente. Los términos de masa de los quarks en la lagrangiana, que se obtienen tomando el valor esperado entre estados del vacío del campo de Higgs en el término de acoplamiento de los quarks al campo de Higgs, dan origen a las matrices de masas  $\mathbf{M}_d$  y  $\mathbf{M}_u$  de los quarks

$$\mathcal{L}_Y = \bar{\mathbf{q}}_{d,L} \mathbf{M}_d \mathbf{q}_{d,R} + \bar{\mathbf{q}}_{u,L} \mathbf{M}_u \mathbf{q}_{u,R} + h.c.. \tag{5.1}$$

En esta expresión,  $\mathbf{q}_{d,L,R}(x)$  y  $\mathbf{q}_{u,L,R}(x)$  denotan los campos  $d$ - y  $u$ - de quarks en la base de las corrientes o débil,  $\mathbf{q}_q(x)$  es una matriz columna, y sus componentes  $\mathbf{q}_{q,k}(x)$  son los campos de Dirac de los quarks,  $k$  es el índice del sabor. En esta base, las corrientes hadrónicas cargadas son

$$J_\mu \sim \bar{q}_{u,L} \gamma_\mu q_{d,L}, \tag{5.2}$$

donde

$$\mathbf{q}_{u,W} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix}_W, \quad \mathbf{q}_{d,W} = \begin{pmatrix} d_1(x) \\ d_2(x) \\ d_3(x) \end{pmatrix}_W, \tag{5.3}$$

y el subíndice  $W$  significa base débil. Es evidente de (5.2), que las corrientes hadrónicas cargadas no cambian si tanto los quarks tipo  $d$ - como los tipo  $u$ - se transforman con la misma matriz unitaria.

Algunos autores [58]-[65] han señalado que las matrices de masas realistas de los quarks surgen de la simetría permutacional del sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  y su rompimiento espontáneo o explícito. El grupo  $S(3)$  trata tres objetos de manera simétrica, en tanto que la naturaleza jerárquica de las matrices de masas es una consecuencia de la estructura de las representaciones  $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$  de  $S(3)$ , las cuales tratan a las generaciones de manera diferente. Bajo la simetría exacta  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , el espectro de masas, para los sectores de quarks up o down, consiste de una partícula masiva (quarks top o bottom) en una representación irreducible de singlete y un par de partículas de masa

nula en una representación irreducible de doblete. En la base débil, la matriz de masas con la simetría exacta  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  es

$$\mathbf{M}'_{3q,W} = \frac{m_{3q}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W, \quad (5.4)$$

donde  $m_{3q}$  denota la masa del quark de la tercera familia,  $t$  o  $b$ . Para generar masas para la segunda familia, uno tiene que romper la simetría permutacional  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . Esto se puede hacer sumando a  $\bar{\mathbf{q}}_L(\mathbf{M}'_{3q,W})\mathbf{q}_R$  un término  $\bar{\mathbf{q}}_L(\mathbf{M}'_{2q,W})\mathbf{q}_R$  que es invariante bajo  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  pero rompe la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . La forma más general de una matriz  $\mathbf{M}'_{2q,W}$  que es invariante bajo las permutaciones de los primeros dos renglones o dos columnas es

$$\mathbf{M}'_{2q,W} = m_{3q} \begin{pmatrix} \alpha' & \alpha' & \beta' \\ \alpha' & \alpha' & \beta' \\ \beta' & \beta' & \gamma \end{pmatrix}_W. \quad (5.5)$$

Sin perder generalidad, podemos descomponer esta matriz en la suma de un término invariante bajo  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  más una matriz de traza nula  $\mathbf{M}_{2q,W}$  invariante bajo  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{2q,W} &= \frac{m_{3q}}{3} \left\{ (2\alpha' + \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} \alpha' - \gamma & \alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma \\ \alpha' - \gamma & \alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma \\ 3\beta' - 2\alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma & -2(\alpha' - \gamma) \end{pmatrix}_W \right\}. \quad (5.6) \end{aligned}$$

El primer término en el lado derecho de (5.6) se suma al término  $\mathbf{M}'_{3q,W}$ .

$$\mathbf{M}_{3q,W} = \frac{m_{3q}}{3} (1 - \Delta_q) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W. \quad (5.7)$$

donde  $\Delta_q$  sustituye el factor  $-(2\alpha' + \gamma)$ . El segundo término en el lado derecho de (5.6) da la forma mas general de la matriz de traza nula  $\mathbf{M}_{2q,W}$  que rompe  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  y da masa a la segunda familia,

$$\mathbf{M}_{2q,W} = \frac{m_{3q}}{3} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & -2\alpha \end{pmatrix}_W, \quad (5.8)$$

en esta expresión hemos simplificado la notación nombrando  $\alpha$  y  $\beta$  en (5.8), los términos  $(\alpha' - \gamma)$  y  $(3\beta' - 2\alpha' - \gamma)$  en (5.6).

Es evidente de la expresión (5.8) que  $\mathbf{M}_{2q,W}$  es una combinación lineal de dos matrices numéricas independientes,  $\mathbf{M}_{2q}^A$  y  $\mathbf{M}_{2q}^S$ ,

$$\mathbf{M}_{2q,W} = \frac{m_{3q}}{3} \left( \sqrt{8}\alpha \mathbf{M}_{2q,W}^A + 2\beta \mathbf{M}_{2q,W}^S \right) \quad (5.9)$$

donde

$$\mathbf{M}_{2q,W}^A = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_W \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_{2q,W}^S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_W. \quad (5.10)$$

Posteriormente, esta propiedad servirá para caracterizar el patrón de rompimiento de la simetría

Podemos por ahora enfocar nuestra atención en el rompimiento de la simetría  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . Para dar masa a la primera familia, agregamos otro término  $\mathbf{M}_{q1}$  a la matriz de masas. En analogía con el caso de dos familias, supondremos que  $\mathbf{M}_{q1}$  se transforma como el término de simetría mixta del doblete del subgrupo  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  del grupo  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  que mezcla las representaciones irreducibles en el doblete  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . Poniendo a la primer familia en una representación compleja nos permitirá tener una fase que viola CP en la matriz de mezclas. Entonces, en la base débil,  $\mathbf{M}_{q1}$  está dada por

$$\mathbf{M}_{q1,W} = \frac{m_{3q}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} A_1 & iA_2 & -A_1 - iA_2 \\ -iA_2 & -A_1 & A_1 + iA_2 \\ -A_1 + iA_2 & A_1 - iA_2 & 0 \end{pmatrix}_W. \quad (5.11)$$

Finalmente, sumando los tres términos de masa, (5.7), (5.8) y (5.11), obtenemos la matriz de masas  $\mathbf{M}_q$  en la base débil.

### 5.3 Textura de Fritsch modificada

Para hacer explícita la signación de partículas a las representaciones irreducibles de  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , será conveniente hacer un cambio de base de la base débil a la base jerárquica o adaptada a la simetría. En esta base, los campos de los quarks son

$$q_{1q,H}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_{1q,W}(x) - q_{2q,W}(x)), \quad (5.12)$$

$$q_{2q,H}(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}(q_{1q,W}(x) + q_{2q,W}(x) - 2q_{3q,W}(x)), \quad (5.13)$$

$$q_{3q,H}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_{1q,W}(x) + q_{2q,W}(x) + q_{3q,W}(x)), \quad (5.14)$$

el subíndice  $H$  denota a la base jerárquica. En la base jerárquica los quarks de la tercera familia,  $t$  o  $b$ , están asignados a la representación irreducible invariante del singlete  $q_{3q,H}(x)$ , las otras dos familias están asignadas a  $q_{2q,H}(x)$  y  $q_{1q,H}(x)$ , las dos componentes de la representación irreducible del doblete de  $S_{diag}(3)$ . En la base adaptada a la simetría La matriz de masas  $\mathbf{M}_{q,H}$  en la base adaptada a la simetría está relacionada a la matriz de masas en la base débil por la transformación unitaria

$$\mathbf{M}_{q,H} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{M}_{q,W} \mathbf{U}, \quad (5.15)$$

donde

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

En esta base,  $\mathbf{M}_q$  toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{qH} &= m_{3q} \left[ \begin{pmatrix} 0 & A_q e^{-i\phi_q} & 0 \\ A_q e^{i\phi_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_H + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_q + \delta_q & B_q \\ 0 & B_q & \Delta_q - \delta_q \end{pmatrix}_H \right] \\ &+ m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Delta_q \end{pmatrix}_H = m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & A_q e^{-i\phi_q} & 0 \\ A_q e^{i\phi_q} & -\Delta_q + \delta_q & B_q \\ 0 & B_q & 1 - \delta_q \end{pmatrix}_H \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde

$$\delta_q = \Delta_q - \frac{2}{9}(\alpha + 2\beta) \quad \text{and} \quad B_q = \frac{2}{9}(\sqrt{8}\alpha - \frac{1}{\sqrt{8}}\beta). \quad (5.18)$$

De la jerarquía de masas tan marcada en las familias de los quarks,  $m_{3q} \gg m_{2q} > m_{1q}$ , esperamos que  $1 - \delta_q$  sea muy cercano a la unidad. Las entradas en la matriz de masas se pueden expresar inmediatamente en términos de los eigenvalores de las masas ( $m_{1q}, -m_{2q}, m_{3q}$ ) y el parámetro pequeño  $\delta_q$ . Calculando los invariantes de  $M_q$ ,  $\text{tr}M_q$ ,  $\text{tr}M_q^2$  y  $\text{det}M_q$ , obtenemos

$$A_q^2 = \tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q}(1 - \delta_q)^{-1} \quad , \quad \Delta_q = \tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q} \quad (5.19)$$

$$B_q^2 = \delta_q((1 - \tilde{m}_{1q} + \tilde{m}_{2q} - \delta_q) - \tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q}(1 - \delta_q)^{-1}) \quad (5.20)$$

donde  $\tilde{m}_{1q} = m_{1q}/m_{3q}$  y  $\tilde{m}_{2q} = m_{2q}/m_{3q}$ .

Si cada uno de los posibles patrones de rompimiento de la simetría se caracteriza ahora por la razón

$$Z_q^{1/2} = B_q/(-\Delta_q + \delta_q), \quad (5.21)$$

obtenemos el parámetro pequeño  $\delta_q$  como la solución de la ecuación cúbica

$$\delta_q [(1 + \tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q} - \delta_q)(1 - \delta_q) - \tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q}] - Z_q(1 - \delta_q)(-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q)^2 = 0 \quad (5.22)$$

que se anula cuando  $Z_q$  se anula.

La ecuación (5.22) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \delta_q^3 &- \frac{1}{(Z_q + 1)} [Z_q (2(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 1) + (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 2] \delta_q^2 \\ &+ \frac{1}{Z_q + 1} [Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q} + 2) + (1 - \tilde{m}_{1q}) (1 + \tilde{m}_{2q})] \delta_q \\ &- \frac{Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2}{Z_q + 1} = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

El último término del lado izquierdo de (5.23) es igual al producto de las tres raíces de (5.22). Por lo tanto, la raíz de (5.22) que se anula cuando  $Z_q$  se anula, se puede escribir como

$$\delta_q(Z_q) = \frac{Z_q}{Z_q + 1} \frac{(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2}{W(Z_q)}, \quad (5.24)$$



donde  $W(Z_q)$  es el producto de las dos raíces de (5.23) o (5.22) que no se anulan cuando  $Z_q$  se anula.

El producto  $W(Z_q)$  está dado por

$$\begin{aligned}
 W(Z_q) &= \left[ 2q^2 + p^3 + 2q\sqrt{q^2 + p^3} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ 2q^2 + p^3 - 2q\sqrt{q^2 + p^3} \right]^{\frac{1}{3}} \\
 &+ \frac{1}{3} \frac{1}{Z_q + 1} [Z_q (2(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 1) + (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 2] \\
 &\times \left\{ \left[ q + \sqrt{q^2 + p^3} \right]^{1/3} + \left[ q - \sqrt{q^2 + p^3} \right]^{1/3} \right\} - |p| \\
 &+ \frac{1}{9(Z_q + 1)^2} [Z_q (2(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 1) + (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 2]^2 \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 2q &= -\frac{2}{27} \frac{1}{(Z_q - 1)^3} [Z_q (2(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 1) + (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 2]^3 \\
 &+ \frac{1}{3} \frac{1}{(Z_q + 1)^2} [Z_q (2(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 1) + (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 2] \times \\
 &\{ Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) ((\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 2) + (1 - \tilde{m}_{1q})(1 + \tilde{m}_{2q}) \} \\
 &\quad - \frac{Z_q}{Z_q + 1} (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2, \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 3p &= -\frac{1}{3} \frac{1}{(Z_q + 1)^2} [Z_q (2(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 1) + (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 2]^2 \\
 &+ \frac{1}{(Z_q + 1)} [Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q} + 2) + (1 - \tilde{m}_{1q})(1 + \tilde{m}_{2q})]. \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Entonces, que  $Z_q$  se anule implica que  $\delta_q(Z_q)$  se anule y por lo tanto  $B_q$  también se anula, o equivalentemente, las representaciones irreducibles de singlete y de doblete de  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  no se mezclan y el quark mas pesado en cada sector,  $t$  o  $b$ , está en una representación pura de singlete y los quarks ligeros de cada sector,  $u$  y  $c$  o  $d$  y  $s$ , están en cada una de las dos componentes del doblete de  $S_3$ .

En la fig. (5.1), se muestra  $\delta_q^{1/2}$  como función de  $Z_q$ . Puede verse que, si  $Z_q$  aumenta,  $\sqrt{\delta_q(Z_q)}$  aumenta con curvatura decreciente. Para valores muy grandes de  $Z_q$ ,  $\sqrt{\delta_q(Z_q)}$  se va al límite asintótico  $\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}$ ,

$$\lim_{z_q \rightarrow \infty} \delta_q^{1/2}(Z_q) = \tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}, \quad (5.28)$$

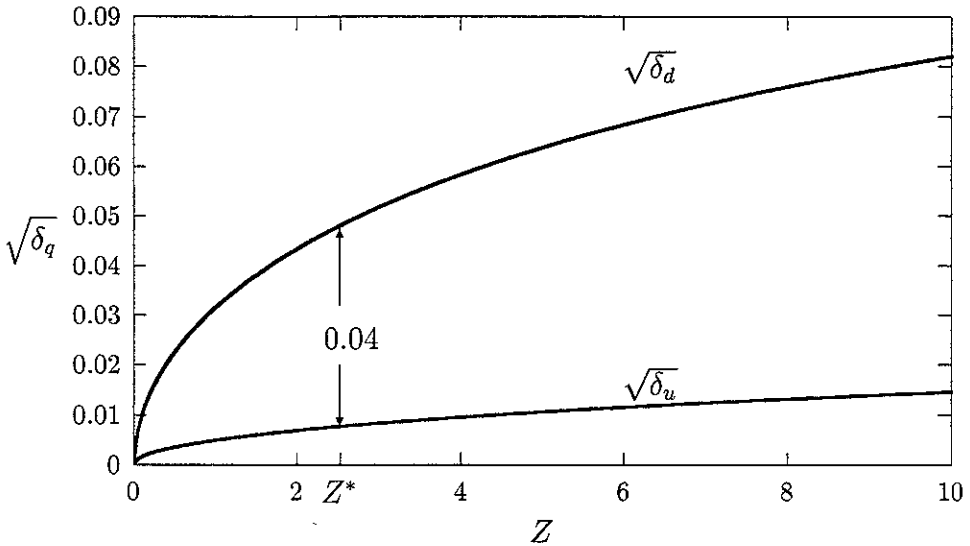


Figura 5.1: Se muestra la raíz cuadrada de los parámetros  $\delta_u$ ,  $\delta_d$  como una función de  $Z_q$ . El valor  $Z \approx 5/2$  que satisfase la condición de constricción (5.65) puede leerse de la figura.

Por lo que,  $\delta_q(Z_q)$  es un parámetro pequeño

$$\delta_q(Z_q) \ll 1, \tag{5.29}$$

para todos los valores de  $Z_q$ . Para valores grandes de  $Z_q$ , digamos  $Z_q \geq 20$ ,  $\delta_q(Z_q)$  no es sensible a cambios pequeños en  $Z_q$ .

De las ecuaciones (5.22) o (5.23) derivamos una solución aproximada para  $\delta_q(Z_q)$  válida para valores pequeños de  $Z_q$  ( $Z_q \leq 10$ ). Calculando en el orden de magnitud dominante obtenemos

$$\delta_q(Z_q) \approx \frac{Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2}{(1 - \tilde{m}_{1q})(1 + \tilde{m}_{2q}) + 2Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})(1 + \frac{1}{2}(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}))} \tag{5.30}$$

### 5.3.1 El patrón del rompimiento de la simetría

En la base adaptada a la simetría,  $\mathbf{M}_{3q,H}$  es una representación tensorial irreducible del singlete de  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ ,

$$\mathbf{M}_{3q,H} = m_{3q}(1 - \Delta_q) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_H. \quad (5.31)$$

En esta misma base, el término  $\mathbf{M}_{2q,H}$  que rompe  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  está dado por

$$\mathbf{M}_{2q,H} = m_{3q}(-\Delta_q + \delta_q(Z_q^{1/2})) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Z_q^{1/2} \\ 0 & Z_q^{1/2} & -1 \end{pmatrix}_H. \quad (5.32)$$

El patrón de rompimiento de la simetría está caracterizado por el parámetro  $Z_q^{1/2}$  el cual es una medida de la mezcla de las representaciones irreducibles de singlete y de doblete de  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . La descomposición de  $\mathbf{M}_{2q,W}$  en una combinación lineal de dos matrices numéricas, dada en las ecs. (5.9) y (5.10), toma ahora la forma

$$\mathbf{M}_{2q,H} = m_{3q}(-\Delta_q + \delta_q) \left[ 3\sqrt{2}N_{Aq}M_{2,H}^A + \frac{3}{2}N_{Sq}M_{2,H}^S \right] \quad (5.33)$$

donde las matrices

$$\mathbf{M}_{2,H}^A = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{8} \\ 0 & -\sqrt{8} & -1 \end{pmatrix}_H, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{M}_{2,H}^S = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & -1 \end{pmatrix}_H, \quad (5.35)$$

son de la misma forma que  $\mathbf{M}_{2q,H}$  con parámetros de mezcla  $-\sqrt{8}$  y  $\frac{1}{\sqrt{8}}$  respectivamente. Los coeficientes  $N_{Aq}$  y  $N_{Sq}$  están dados por

$$N_{Aq} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \left( \frac{1}{\sqrt{8}} - Z_q^{1/2} \right) \quad (5.36)$$

y

$$N_{Sq} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \left( \sqrt{8} + Z_q^{1/2} \right). \quad (5.37)$$

De las ecs. (5.32)-(5.35), es evidente que existe una descomposición correspondiente del parámetro de mezcla  $Z_q^{1/2}$

$$Z_q^{1/2} = N_{Aq} Z_A^{1/2} + N_{Sq} Z_S^{1/2}, \quad (5.38)$$

con

$$1 = N_{Aq} + N_{Sq} \quad (5.39)$$

donde  $Z_A^{1/2} = -\sqrt{8}$  es el parámetro de mezcla en la matriz  $\mathbf{M}_{2,H}^A$ , y  $Z_S^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{8}}$  es el parámetro de mezcla en  $\mathbf{M}_{2,H}^S$ . De esta manera, asociamos una combinación lineal única de  $Z_A^{1/2}$  y  $Z_S^{1/2}$  al patrón de rompimiento de la simetría caracterizado por  $Z_q^{1/2}$ .

Notamos que el término que rompe la simetría en la Lagrangiana de Yukawa  $\bar{\mathbf{q}}_L \mathbf{M}_{2q} \mathbf{q}_R$  depende solo de dos campos. De acuerdo a las ecs. (5.33), (5.34) y (5.35), el término  $\bar{\mathbf{q}}_L \mathbf{M}_{2q,H} \mathbf{q}_R$  se separa en la suma de un término proporcional a  $\bar{\mathbf{q}}_L \mathbf{M}_2^A \mathbf{q}_R$ , el cual cambia de signo bajo el intercambio de esos dos campos, y un término proporcional a  $\bar{\mathbf{q}}_L \mathbf{M}_2^S \mathbf{q}_R$ , el cual permanece invariante bajo el mismo intercambio. Entonces, la descomposición de  $\mathbf{M}_{2q,H}$  dada en la ec. (5.33) es equivalente a la descomposición del término  $\bar{\mathbf{q}}_L \mathbf{M}_{2q} \mathbf{q}_R$  en una parte simétrica y antisimétrica bajo el intercambio de esos dos campos. Así, la caracterización de  $\mathbf{M}_{2q}$  y  $Z_q^{1/2}$  como una combinación lineal de,  $\mathbf{M}_2^A$  y  $\mathbf{M}_2^S$ , y  $Z_A^{1/2}$  y  $Z_S^{1/2}$ , respectivamente, (dadas en (5.33)- (5.39)), es equivalente a una clasificación del patrón de rompimiento de simetría definido por  $\mathbf{M}_{2q,H}$  en términos de las representaciones irreducibles del grupo  $\tilde{S}(2)$  de permutaciones de los dos campos en  $\bar{\mathbf{q}}_L \mathbf{M}_{2q} \mathbf{q}_R$ .

Lehmann, Newton and Wu [52] observaron que en el caso de sólo dos familias ( las primeras dos generaciones), el término que rompe la simetría  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  cambia de signo cuando se permutan los dos campos de quarks. Por analogía, extendieron esta observación al caso de tres familias y postularon que el término que rompe la simetría  $\mathbf{M}_{2q}$  debería cambiar de signo bajo el intercambio de los dos campos en  $\bar{\mathbf{q}}_L \mathbf{M}_{2q} \mathbf{q}_R$ . Esta suposición les permitió elegir un valor fijo para el parámetro de mezcla  $Z_q^{1/2}$  igual a  $-\sqrt{8}$ . En este trabajo, el par de números  $(N_A, N_S)$  entran como una etiqueta matemáticamente conveniente del patrón de rompimiento de simetría sin introducir ninguna suposición acerca del patrón de rompimiento de  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  que se realiza en la naturaleza.

## 5.4 La matriz de mezclas CKM

La matriz de masas Hermitiana  $\mathbf{M}_q$  puede ser escrita en términos de una matriz real simétrica  $\bar{\mathbf{M}}_q$  y una matriz diagonal de fases  $\mathbf{P}_q$  como sigue

$$\mathbf{M}_q = \mathbf{P}_q \bar{\mathbf{M}}_q \mathbf{P}_q^\dagger. \quad (5.40)$$

La matriz real simétrica  $\bar{\mathbf{M}}_q$  puede ponerse en la forma diagonal por medio de una transformación ortogonal

$$\bar{\mathbf{M}}_q = \mathbf{O}_q \mathbf{M}_q \text{diag} \mathbf{O}_q^T, \quad (5.41)$$

donde

$$\mathbf{M}_q \text{diag} = m_{3q} \text{diag} [\tilde{m}_{1q}, -\tilde{m}_{2q}, 1], \quad (5.42)$$

con subíndices 1,2,3 refiriéndose a  $u, c, t$  en el sector tipo  $u$  y  $d, s, b$  en el sector tipo  $d$ . Después de diagonalizar las matrices de masas  $\mathbf{M}_q$ , uno obtiene la matriz de mezclas como

$$\mathbf{V}_{CKM} = \mathbf{O}_u^T \mathbf{P}^{(u-d)} \mathbf{O}_d, \quad (5.43)$$

donde  $\mathbf{P}^{(u-d)}$  es la matriz diagonal de las fases relativas.

En la base jeárquica, donde  $\mathbf{M}_q$  está dada por las ecs. (5.17) -(5.19),  $\mathbf{P}^{(u-d)}$  es

$$\mathbf{P}^{(u-d)} = \text{diag} [1, e^{i\Phi}, e^{i\Phi}], \quad (5.44)$$

donde

$$\Phi = \phi_u - \phi_d, \quad (5.45)$$

y la matriz ortogonal  $\mathbf{O}_q$  está dada por [72],

$$\mathbf{O}_q = \begin{pmatrix} (\tilde{m}_{2q} f_1 / D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{1q} f_2 / D_2)^{1/2} & (\tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q} f_3 / D_3)^{1/2} \\ ((1 - \delta_q) \tilde{m}_{1q} f_1 / D_1)^{1/2} & ((1 - \delta_q) \tilde{m}_{2q} f_2 / D_2)^{1/2} & ((1 - \delta_q) f_3 / D_3)^{1/2} \\ -(\tilde{m}_{1q} f_2 f_3 / D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{2q} f_1 f_3 / D_2)^{1/2} & (f_1 f_2 / D_3)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

donde

$$f_1 = 1 - \tilde{m}_{1q} - \delta_q, \quad f_2 = 1 + \tilde{m}_{2q} - \delta_q, \quad f_3 = \delta_q \quad (5.47)$$

$$D_1 = (1 - \delta_q) (1 - \tilde{m}_{1q}) (\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \quad (5.48)$$

$$D_2 = (1 - \delta_q) (1 + \tilde{m}_{2q}) (\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \quad (5.49)$$

$$D_3 = (1 - \delta_q) (1 + \tilde{m}_{2q}) (1 - \tilde{m}_{1q}). \quad (5.50)$$

De las ecs. (5.40-5.50), todas las entradas en la matriz  $\mathbf{V}_{CKM}$  pueden ser escritas en términos de las cuatro razones de masa:  $(\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s)$  y tres parámetros libres reales:  $\delta_u, \delta_d$  y  $\Phi = \phi_u - \phi_d$ . La fase  $\Phi$  mide el desajuste en el rompimiento de simetría de  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  de los sectores  $u$  y  $d$ . En esta representación de la matriz  $\mathbf{V}_{CKM}$ , es esta fase, y consecuentemente, este mismatch, el que es responsable de la violación de CP.

El invariante de Jarlskog,  $J$ , puede calcularse directamente de el conmutador de las matrices de masas [2]

$$J = -\frac{\det\{-i[\mathbf{M}_{u,H}, \mathbf{M}_{d,H}]\}}{F} \quad (5.51)$$

donde

$$F = (1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d). \quad (5.52)$$

Sustituyendo la expresión (5.17) por  $\mathbf{M}_u$  y  $\mathbf{M}_d$ , en (5.51), con  $Z_u^{1/2} = Z_d^{1/2} = Z^{1/2}$ , da

$$J = \frac{Z \sqrt{\frac{\tilde{m}_u/\tilde{m}_c}{1-\delta_u}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d/\tilde{m}_s}{1-\delta_d}} \sin\Phi}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_u/\tilde{m}_c)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)(1 + \tilde{m}_d/\tilde{m}_s)} \\ \times \left\{ [(-\Delta_u + \delta_u)(1 - \delta_d) - (-\Delta_d + \delta_d)(1 - \delta_u)]^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c}{1 - \delta_u} \right) (-\Delta_d + \delta_d)^2 - \frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_s}{1 - \delta_d} (-\Delta_u + \delta_u)^2 \\
& + 2 \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c}{1 - \delta_u}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_s}{1 - \delta_d}} (-\Delta_u + \delta_u) (-\Delta_d + \delta_d) \cos \Phi \}. \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Expresiones explícitas para  $\Delta_q$  y  $\delta_q$  en términos de las masas de los quarks estan dadas en las ecs. (5.19) y (5.24)-(5.27). De esta manera, obtenemos una expresión cerrada exacta para  $J$  en términos de las masas de los quarks, el parámetro  $Z$  de rompimiento de la simetría y la fase  $\Phi$  que viola  $CP$ . Recordemos que un valor no nulo de  $J$  es una condición nesesaria y suficiente para la violación de  $CP$  [2]. De la ec.(5.53), es evidente que  $J$  se anula cuando  $Z$ ,  $\sin \Phi$  y  $\tilde{m}_u$  o  $\tilde{m}_d$  se anulan. Por lo tanto, la violación de  $CP$  y el consecuente no anulamiento de  $Z$  implica nesesariamente una mezcla de representaciones de singlete y de doblete de  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ .

## 5.5 El mejor valor de $Z_q^{1/2}$

En esta etapa de nuestros argumentos, una pregunta viene a la mente de manera natural. ¿ Puede una comparación de la matriz de mezclas teórica  $\mathbf{V}_{CKM}^{th}$  con la matriz determinada experimentalmente  $\mathbf{V}_{CKM}^{exp}$  dar alguna pista acerca del patrón de rompimiento de la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  que se realiza en la naturaleza? o fraseado de manera diferente: ¿ Cuáles son los mejores valores para  $Z_u$  y  $Z_d$ ?, ¿Cuál es el mejor valor para  $\Phi$ ?, ¿ Estos valores corresponden a algun patrón de rompimiento de simetría bien definido?. Como un primer paso en la dirección de encontrar una respuesta a estas preguntas, hicimos un ajuste de  $\chi^2$  de las expresiones exactas para el valor absoluto de las entradas en la matriz de mezclas, esto es  $|V_{ij}^{th}|$ , el invariante de Jarlskog  $J^{th}$ , y los tres ángulos internos  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  and  $\gamma^{th}$ , del triángulo unitario a los valores determinados experimentalmente de  $|V_{CKM}^{exp}|$ ,  $J^{exp}$ ,  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$  y  $\gamma^{exp}$ . Estos resultados están publicados en [76]. Con el propósito de calcular la matriz de mezclas de los quarks, es conveniente calcular las razones de las masas de los quarks a alguna escala de energía común [65], [64]. En el cálculo que presento aqui, usé los valores de las masas  $m_i(\mu)$   $i = u, c, t, d, s, b$  que corren con la energía  $\mu$  conocidas como *running masses*, las masas están evaluadas a la energía del top  $\mu = m_t$ , siguiendo el trabajo de Peccei [84], Fritsch [64] y el BABAR BOOK [14].

$$\begin{aligned}
m_u &= 3.25 \pm 0.9 \text{ MeV}, & m_c &= 760 \pm 29.5 \text{ MeV}, & m_t &= 171 \pm 12 \text{ GeV} \\
m_d &= 4.4 \pm 0.64 \text{ MeV}, & m_s &= 100 \pm 6 \text{ MeV}, & m_b &= 2.92 \pm 0.11 \text{ GeV}
\end{aligned}
\tag{5.54}$$

Estos valores, con la excepción de  $m_s$ ,  $m_c$  and  $m_b$ , fueron tomados del trabajo de Fusaoka y Koide [65], Fritzsche [64] y Leutwyler [85]. Los valores de  $m_c(m_t)$  y  $m_b(m_t)$  se obtuvieron reescalando a la energía de la masa del quark top  $\mu = m_t$  los cálculos recientes de  $m_c(m_c)$  y  $m_b(m_b)$  hechos por Pineda e Ynduráin [86] e Ynduráin [66]. El valor de  $m_s$  concuerda con la última determinación hecha por la colaboración ALEPH a partir del estudio de los decaimientos del  $\tau$  que involucran kaones [87].

Mantuvimos las razones de las masas  $\tilde{m}_c = m_c/m_t$ ,  $\tilde{m}_s = m_s/m_b$  y  $\tilde{m}_d = m_d/m_b$  fijas a sus valores centrales

$$\tilde{m}_c = 0.0044, \quad \tilde{m}_s = 0.034 \quad \text{and} \quad \tilde{m}_d = 0.0015, \tag{5.55}$$

pero por razones que daremos posteriormente, tomamos el valor

$$\tilde{m}_u = 0.000032, \tag{5.56}$$

el cual está cercano a la cota superior de  $\tilde{m}_u = \frac{m_u}{m_t}$ , y buscamos el mejor valor de los tres parámetros  $\delta_u$ ,  $\delta_d$  y  $\Phi$ . Encontramos los siguientes resultados [74]:

I.- Para una familia continua de valores de los parámetros  $(\delta_u, \delta_d)$  obtuvimos ajustes excelentes. Los ajustes fueron siempre de la misma calidad ya que  $\chi^2$  en todos los casos toma valores de  $\chi^2 \leq 0.33$ .

II.- En cada ajuste de buena calidad el mejor valor de  $\Phi$  permanecía fijo, sin ambigüedades.

III.- El mejor valor de  $\Phi$  permanecía casi estable aún cuando los valores de  $(\delta_u, \delta_d)$  tuvieran grandes cambios pero dando ajustes semejantes de buena calidad.

IV.- En todos los ajustes de buena calidad, la diferencia  $\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}$  toma el mismo valor.

$$\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \simeq 0.040. \tag{5.57}$$

Estos resultados pueden entenderse si notamos que no todas las entradas en la matriz  $\mathbf{V}_{CKM}^{th}$  son igualmente sensitivas a variaciones de los distintos



parámetros. Algunas entradas como,  $V_{us}$ , son muy sensibles a los cambios en  $\Phi$  pero son casi insensibles a los cambios en  $(\delta_u, \delta_d)$  mientras que, algunos otros, como  $V_{cb}$  son casi insensibles a cambios en  $\Phi$  pero dependen críticamente de los parámetros  $\delta_u$  y  $\delta_d$ .

De las ecs. (5.40)-(5.50), obtenemos

$$\begin{aligned}
 V_{us} = & - \left( \frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
 & \times \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \right)^{1/2} \\
 & + \left\{ \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \right. \\
 & + \left. \left( \frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)\delta_u}{1 - \delta_u} \right)^{1/2} \left( \frac{(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)\delta_d}{(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \right\} \\
 & \times \left( \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(\tilde{m}_d + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} e^{i\Phi}. \quad (5.58)
 \end{aligned}$$

En el orden de magnitud dominante,

$$|V_{us}| \approx \left| \sqrt{\tilde{m}_d/\tilde{m}_s} - \sqrt{\tilde{m}_u/\tilde{m}_c} e^{i\Phi} \right| (1 + \tilde{m}_u/\tilde{m}_c + \tilde{m}_d/\tilde{m}_s)^{-1/2}. \quad (5.59)$$

De aquí obtenemos que,

$$\cos \Phi \approx \frac{\tilde{m}_d/\tilde{m}_s + \tilde{m}_u/\tilde{m}_c - |V_{us}|^2 (1 + \tilde{m}_u/\tilde{m}_c + \tilde{m}_d/\tilde{m}_s)}{2\sqrt{(\tilde{m}_d/\tilde{m}_s)(\tilde{m}_u/\tilde{m}_c)}}. \quad (5.60)$$

Sustituyendo  $|V_{us}^{exp}|^2$  [8] por  $|V_{us}|^2$  y el valor numérico de las razones de masas, (5.55) y (5.56), en (5.60) obtenemos

$$87^\circ \leq \Phi \leq 92^\circ \quad (5.61)$$

con un valor medio

$$\bar{\Phi} = 89.5^\circ, \quad (5.62)$$

en muy buen acuerdo con el mejor valor extraído de los ajustes [74] preliminares de  $\chi^2$ .

Similarmente,  $V_{cb}^{th}$  está dado por

$$\begin{aligned}
 V_{cb}^{th} = & - \left( \frac{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)} \frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d}{(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
 & + \left\{ - \left( \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u) \delta_u (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\tilde{m}_c(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)}{(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_c)} \frac{\delta_d}{(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi}. \quad (5.63)
 \end{aligned}$$

Entonces, en el orden de magnitud dominante,  $|V_{cb}|$  es independiente de  $\Phi$  y está dado por

$$|V_{cb}| \approx \sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}. \quad (5.64)$$

Por lo tanto, para tener un buen ajuste con  $|V_{cb}^{exp}| \approx 0.039$  [5] se requiere que

$$\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \approx 0.040, \quad (5.65)$$

al menos para un par de valores de  $(\delta_u, \delta_d)$ .

Finalmente, notemos que los elementos de matriz  $V_{ub}$  y  $V_{td}$ , así como el invariante de Jarlskog ( ver ec. (5.53)), son sensibles a pequeños cambios en las masas de los quarks ligeros  $\tilde{m}_u$  y  $\tilde{m}_d$ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 V_{ub} = & \left( \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)} \frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d}{(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
 & - \left\{ \left( \frac{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \delta_u (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
 & \left. - \left( \frac{\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u) \delta_d}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi}, \quad (5.66)
 \end{aligned}$$

calculando al orden dominante de magnitud, obtenemos

$$V_{ub} \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left( \sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \right) e^{i\Phi}. \quad (5.67)$$

Un cálculo semejante para  $V_{td}$  da lo siguiente

$$V_{td} \approx -\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} \left( \sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \right) e^{i\Phi}. \quad (5.68)$$

Sin embargo, como las masas de los quarks ligeros están menos determinadas y los módulos  $|V_{ub}^{exp}|$  y  $|V_{td}^{exp}|$  tienen las barras más grandes de error, cambios relativamente grandes en los valores de  $\tilde{m}_u$  y  $\tilde{m}_d$  producen únicamente pequeñas variaciones en la bondad del ajuste de la matriz teórica de los módulos  $|V^{th}|$  a la determinada experimentalmente  $|V^{exp}|$ . La sensibilidad de los elementos de matriz  $|V_{ub}|$  y  $|V_{td}|$  a cambios en  $\tilde{m}_u$  y  $\tilde{m}_d$  se refleja en la forma del triángulo unitario el cual cambia apreciablemente cuando las masas de los quarks ligeros cambian dentro del rango de sus barras de incertidumbre, como puede verse de las siguientes expresiones

$$\alpha = \arg \left( -\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{tb}^* V_{td}} \right) \approx \arctan \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} e^{-i\Phi} \right) = \Phi, \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \arg \left( -\frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right) \\ &\approx \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \sin \Phi}{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \cos \Phi} \right\}, \end{aligned} \quad (5.70)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma &= \arg \left( -\frac{V_{cb}^* V_{cd}}{V_{ub}^* V_{ud}} \right) \\ &\approx \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} \sin \Phi}{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} \cos \Phi} \right\}, \end{aligned} \quad (5.71)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos internos del triángulo unitario. Cuando usamos los valores centrales de  $\tilde{m}_u = 0.000019$  y  $\tilde{m}_d = 0.0015$  [64] en el procedimiento de ajuste, el acuerdo de  $|\mathbf{V}^{th}|$  con  $|\mathbf{V}^{exp}|$  es muy bueno,  $\chi^2 = 0.33$ , pero obtenemos de manera sistemática  $\gamma^{th} > \alpha^{th}$  en completo desacuerdo con los datos mas recientes de el sistema  $K^0 - \bar{K}^0$  y los datos mas recientes de las oscilaciones de  $B_{s,d}^0$  [5] y [73]. No es posible cambiar los valores de  $\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}$  sin arruinar el excelente ajuste global de  $|\mathbf{V}^{th}|$  a  $|\mathbf{V}^{exp}|$ . Por lo

tanto, permitimos que las masas de los quarks ligeros variaran dentro de sus rangos de incerteza. Los mejores ajustes simultaneos de  $\chi^2$  para  $|V^{th}|$ ,  $J^{th}$  y  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  y  $\gamma^{th}$  a las cantidades determinadas experimentalmente  $|V^{exp}|$ ,  $J^{exp}$  y  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$  y  $\gamma^{exp}$  [5], [73] se obtubieron cuando tomamos el valor de  $\tilde{m}_u$  cerca de su limite superior,  $\tilde{m}_u \approx 0.000032$ , y el valor de  $\tilde{m}_d \approx 0.0015$ , en su valor central. Note que, el valor grande de  $\tilde{m}_u$  que tomamos da para la razon  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$  el valor

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} = 0.085 \quad (5.72)$$

en muy buen acuerdo con el último promedio mundial [73].

Podemos regresar ahora a nuestra discusión de la determinación del mejor patrón del rompimiento de la simetría. Como se explicó anteriormente, en los ajustes preliminares de  $\chi^2$  a los datos se encontró que  $\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \approx 0.04$ , ec. (5.65), se satisfase casi de manera exacta cuando permitimos que las masas de los quarks ligeros varíen, este buen acuerdo se logra no sólo para un par de valores de  $(\delta_u, \delta_d)$  si no para un rango continuo de valores de  $\delta_u$  y  $\delta_d$  en el cual cambian estos parámetros por más de un orden de magnitud.

Entonces, ec. (5.65) puede ser usada como una condición de constricción sobre los posibles valores de  $(\delta_u, \delta_d)$ . De esta manera, eliminamos un parámetro libre en  $\mathbf{V}_{CKM}^{th}$  sin arruinar la buena calidad del ajuste. Sin embargo, no es suficiente fijar el valor numérico de estos parámetros libres para tener una indicación precisa acerca de cuál es el patron de rompimiento de la simetría del sabor que se realiza en la naturaleza. Esto es así porque de acuerdo a las ecs. (5.22)-(5.27),  $\delta_q$  es una función de las razones de masa  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$  y el parámetro  $Z_q^{1/2}$  el cual caracteriza el patrón de rompimiento de la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  en el sector  $q$ . Una manera conveniente de aislar la información acerca del patrón de rompimiento de la simetría contenida en las ecuaciones de constricción (5.65) de la información de los valores numéricos de las razones de masas de los quarks, es cambiar la parametrización de  $\mathbf{V}_{CKM}^{th}$  escribiendo a  $\delta_q$  como una función de  $Z_q^{1/2}$  con valores fijos de  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$ . De esta manera  $\mathbf{V}_{CKM}^{th}$  pasa a ser una función de los parámetros libres  $(Z_u^{1/2}, Z_d^{1/2})$  en sustitución de  $(\delta_u, \delta_d)$ .

Una expresión aproximada simple para la condición de constricción (5.57), (5.65) en términos de  $(Z_u^{1/2}, Z_d^{1/2})$ , valido para  $0 \leq Z_q \leq 10$ , se obtiene de

(5.65), escribiendo  $\delta_q(Z_q)$  en el orden de magnitud dominante

$$\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \simeq \frac{Z_d^{1/2} (\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d) + 2Z_d(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)}} - \frac{Z_u^{1/2} (\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u) + 2Z_u(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)}} \simeq 0.040 \quad (5.73)$$

Cuando se satisface la condición (5.73), a cada valor de  $Z_u^{1/2}$  le corresponde un valor de  $Z_d^{1/2}$ . Pero, como tenemos solo una condición para fijar el valor de dos parámetros,  $Z_u^{1/2}$  puede seguir siendo un parámetro libre. Para evitar esta ambigüedad continua, supondremos que las matrices de masas de los quarks up y down se generan siguiendo el mismo patrón de ropimiento de la simetría, esto es

$$Z_u^{1/2} = Z_d^{1/2} \equiv Z^{1/2}. \quad (5.74)$$

Entonces, el valor de  $Z$  que satisface las condiciones de constricción (5.65) y (5.73) puede leerse directamente de la Fig. 1. Encontramos que  $Z^* \simeq 2.5$ . Se hizo un cálculo numérico más preciso del mejor valor de  $Z$  usando la solución numérica exacta de la ec. (5.22), dada en las ecs. (5.24) - (5.27), para calcular las entradas de  $V_{CKM}^{th}$  como función de sólo dos parámetros libres,  $\Phi$  y  $Z^{1/2}$ . Como se hizo anteriormente, mantuvimos las razones de masa fijas a los valores dados en (5.55) y (5.56). Después, hicimos otro ajuste de  $\chi^2$  de las expresiones exactas para los valores absolutos de las entradas en las expresiones teóricas de  $|V_{CKM}^{th}|$  y el invariante de Jarlskog  $J^{th}$ , a los valores determinados experimentalmente  $|V_{CKM}^{exp}|$  y  $J^{exp}$ . Encontramos los siguientes mejores valores para  $\Phi$  y  $Z$ ,

$$\Phi = 89.3^\circ, \quad (5.75)$$

y

$$2.40 \leq Z^* \leq 2.55, \quad (5.76)$$

correspondientes a un valor de  $\chi^2 \leq 0.33$ .

Cuando se cambia por un grado el mejor valor de la fase que viola CP  $\Phi = 89.33^\circ$  los valores calculados en todas las entradas de la matriz de los modulos  $|V_{CKM}^{th}|$  cambian en la cuarta cifra decimal, excepto  $|V_{us}^{th}|$  y  $|V_{cd}^{th}|$  las cuales cambian en la tercer cifra decimal por una cantidad que

es aproximadamente un cuarto de la incerteza en los valores determinados experimentalmente de  $|V_{us}^{exp}|$  y  $|V_{cd}^{exp}|$  como se reporta en C. Caso et al [5]. El valor de  $\chi^2$  cambia del valor 0.33 a 0.44 lo cual no es estadísticamente significativo. Por lo cual adoptaremos como el mejor valor de  $\Phi$  el valor siguiente

$$\Phi^* = 90^\circ \quad (5.77)$$

Una vez encontrado el mejor valor de  $Z$ , la pregunta que nos hicimos al inicio de esta sección toma una nueva forma: ¿Cuál es el patrón de rompimiento de la simetría correspondiente a  $Z^* \simeq 2.5$ ?

Podríamos encontrar una respuesta inmediata si  $Z^{*1/2}$  se pudiera escribir como una combinación lineal simple, no-trivial de  $Z_A^{1/2}$  y  $Z_S^{1/2}$ , las cuales son igual a  $-\sqrt{8}$  y  $1/\sqrt{8}$  respectivamente. De estos números, encontramos que  $Z^{*1/2}$  puede efectivamente reescribirse como

$$Z^{*1/2} = \frac{1}{2} [Z_s^{1/2} - Z_A^{1/2}] = \frac{1}{2} [1/\sqrt{8} + \sqrt{8}], \quad (5.78)$$

entonces

$$Z^* = \frac{81}{32} = 2.53125. \quad (5.79)$$

Los valores correspondientes de  $\delta_u(Z)$  y  $\delta_d(Z)$  son

$$\delta_u(Z^*) = 0.000048, \quad \delta_d(Z^*) = 0.0023 \quad . \quad (5.80)$$

Conviene hacer notar una vez mas que el valor numérico de  $Z^{*1/2}$  se obtuvo de un ajuste de  $|V_{CKM}^{th}|$  a los valores absolutos de los elementos de la matriz de mezclas  $CKM$  determinados experimentalmente. La identificación de  $Z^{*1/2}$  con la expresión (5.78) da una indicación clara y precisa acerca del patrón preferido para el rompimiento de la simetría permutacional del sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  por las matrices de masas de los quarks.

## 5.6 Texturas de masas derivadas del “mejor” esquema de rompimiento de simetría

Una vez que se ha determinado el mejor valor de  $Z^{1/2}$ , podemos invertir el argumento, y proponerlo como un ansatz en la forma de la siguiente suposición. La simetría del sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  se rompe a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  de acuerdo a

un patrón mixto de rompimiento de la simetría, el cual, está caracterizado en la base jerárquica por

$$Z^{*1/2} = \frac{1}{2} (Z_S^{1/2} - Z_A^{1/2}). \quad (5.81)$$

Entonces, las matrices de masas con la textura modificada de Fritzsich toman la forma

$$\mathbf{M}_{\tilde{H}}^{*q} = m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q}}{1-\delta_q^*}} e^{-i\phi_q} & 0 \\ \sqrt{\frac{\tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q}}{1-\delta_q^*}} e^{i\phi_q} & -\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^* & \frac{9\sqrt{2}}{8}(-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^*) \\ 0 & \frac{9\sqrt{2}}{8}(-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^*) & 1 - \delta_q^* \end{pmatrix}_H, \quad (5.82)$$

donde  $\delta_q^*$  es la solución de la ecuación cúbica

$$113\delta_q^{*3} - [194(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 145]\delta_q^{*2} - 81(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2 + [81(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2 + 194(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) - 32\tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q} + 32]\delta_q^* = 0, \quad (5.83)$$

obtenida de la ec. (5.23) cuando  $\sqrt{81/32}$  se sustituye por  $Z^{*1/2}$ .

La matriz de masas  $\mathbf{M}_{q,H}$  fue construida sumando tres términos  $\mathbf{M}_{1q,H}$ ,  $\mathbf{M}_{2q}$  y  $\mathbf{M}_{3q,H}$ . El término  $\mathbf{M}_{3q,H}$  es una representación irreducible de singlete del grupo  $S_L(3) \otimes S_R(3)$

$$\mathbf{M}_{3q,H} = (m_{3q} - m_{2q} + m_{1q}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_H. \quad (5.84)$$

La matriz  $\mathbf{M}_{2q,H}$  rompe la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ , mezcla representaciones de singlete y de doblete de  $S_{diag}(3)$  en una proporción precisamente determinada por el parámetro de mezcla  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$ ,

$$\mathbf{M}_{2q,H}^* = m_{3q} (-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{81/32} \\ 0 & \sqrt{81/32} & -1 \end{pmatrix}_H. \quad (5.85)$$

El parámetro de mezcla  $\sqrt{81/32}$  corresponde a lo que se llamó en la sección 5.2 un patrón mixto del rompimiento de la simetría de  $|V_{CKM}^{th}|$ , esto es, puede separarse en la suma de un término  $\mathbf{M}_{2q,H}^A$  correspondiente a un patrón de rompimiento puramente antisimétrico, mas un término  $\mathbf{M}_{2q,H}^S$  correspondiente a un patrón de rompimiento puramente simétrico. Los coeficientes en cada término  $N_S = \frac{25}{18}$  y  $N_A = -\frac{7}{18}$ , se obtuvieron resolviendo el par de ecuaciones acopladas (5.38) y (5.39) cuando  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$ .

Entonces,

$$\mathbf{M}_{2q,H}^* = m_{3q} \left( -\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^* \right) \times \left[ \frac{-7}{18} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{8} \\ 0 & -\sqrt{8} & -1 \end{pmatrix}_H + \frac{25}{18} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & -1 \end{pmatrix}_H \right]. \quad (5.86)$$

La simetría  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  de este término y su descomposición en la suma de un patrón de rompimiento puramente simétrico mas uno puramente antisimétrico es evidente en la representación débil

$$\mathbf{M}_{2q,W}^* = m_{3q} \left( -\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^* \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 14 & -25 \\ 14 & 14 & -25 \\ -25 & -25 & -28 \end{pmatrix}_W. \quad (5.87)$$

Finalmente, el término  $\mathbf{M}_{1q,H}$  rompe la simetría  $S_L(2) \otimes S_R(2)$

$$M_{1q,H}^* = m_{3q} \sqrt{\frac{\tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q}}{1 - \delta_q^*}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi_q} & 0 \\ e^{i\phi_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_H. \quad (5.88)$$

Como  $\delta_q^*$  es una función de las razones de las masas ( $\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q}$ ) la fase  $\phi_q$  es el único parámetro libre que queda en la matriz de masas  $\mathbf{M}_q^*$ .

## 5.7 La matriz de mezclas, $V_{CKM}$ , derivada del mejor esquema de rompimiento

Hemos visto que, una vez que el ansatz de rompimiento de simetría fija el valor del parámetro de mezcla  $Z^{1/2}$  a  $\sqrt{81/32}$ , las entradas en las matrices



de masas  $\mathbf{M}_q$  son funciones de las razones de masa  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$  y la fase  $\phi_q$  que es un parámetro libre.

Después de factorizar las fases como en la ec. (5.40), todas las entradas en las matrices simétricas reales  $\bar{\mathbf{M}}_q$  son funciones de las razones de masa  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$  únicamente. Por lo que las matrices ortogonales  $\mathbf{O}_q$  las cuales diagonalizan a la matriz  $\bar{\mathbf{M}}_q$  también son sólo funciones de  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$ .

De acuerdo a la ec. (5.43),  $\mathbf{V}_{CKM}$  esta dada por  $\mathbf{O}_u^T \mathbf{P}^{(u-d)} \mathbf{O}_d$ , donde  $\mathbf{P}^{(u-d)}$  es la matriz diagonal de fases relativas. En resumen, una vez que el ansatz del rompimiento de la simetría determina el valor de  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$ , las expresiones teóricas para las entradas en la matriz de mezclas,  $\mathbf{V}_{CKM}^{th}$ , se escriben en términos de las cuatro razones de masa  $(\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s)$  y un solo parámetro libre, llamado, la fase  $\Phi$  que viola  $CP$ .

Hicimos un ajuste nuevo de  $\chi^2$  del valor absoluto de las entradas en la matriz de mezclas,  $|V_{CKM}^{th}|$ , a los valores determinados experimentalmente  $|V_{CKM}^{exp}|$ . mantuvimos fijos las razones de las masas a los valores dados en (5.55) y (5.56). Variamos unicamente la fase  $\Phi$  que viola  $CP$ . Encontramos que el mejor valor de  $\Phi$  era  $89.3^\circ$  correspondiente al valor mínimo de  $\chi^2$  igual a 0.33. Como se explico al final de la sección 5.5, podemos redondearlo al valor

$$\Phi^* = 90^\circ \quad (5.89)$$

sin arruinar la buena calidad del ajuste. Antes de dar los resultados numéricos para la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$ , es conveniente señalar los siguientes puntos:

1. Las masas de los quarks ligeros son las menos bien determinadas, en tanto que la magnitud de los elementos de matriz en  $|V_{ij}^{exp}|$  con las barras de error mas grandes, por ejemplo  $|V_{ub}|$  y  $|V_{td}|$ , son los mas sensibles a cambios en las razones de masas  $m_u/m_c$  y  $m_d/m_s$  respectivamente. De aquí que, la calidad del ajuste de  $|V_{ij}^{th}|$  a  $|V_{ij}^{exp}|$  sea buena ( $\chi^2 \leq 0.5$ ) aun cuando se hagan cambios relativamente grandes en las masas de los quarks ligeros. La sensibilidad de  $|V_{ub}|$  y  $|V_{td}|$  a los cambios en  $m_u/m_c$  y  $m_d/m_s$  respectivamente, se ve reflejada en la forma del triángulo unitario, el cual cambia apreciablemente cuando las masas de los quarks ligeros cambian dentro de sus intervalos de error. El mejor ajuste de  $\chi^2$  que se hizo de  $|V_{ij}^{th}|$ ,  $J^{th}$ , y  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  y  $\gamma^{th}$ , a las cantidades determinadas experimentalmente se obtuvo cuando la razón  $\tilde{m}_u = m_u/m_t$  se tomó cerca a su cota superior, dado en la Ec. (5.56).

2. Conforme la escala de energía cambia, digamos de  $\mu = m_t$  a  $\mu = 1 \text{ GeV}$ , las masas de los quarks que corren con la energía cambian apreciablemente, pero como las masas de los quarks ligeros y pesados aumentan casi en la misma proporción, se obtiene que la dependencia que resulta de las razones de masas de los quarks con la energía es muy débil. Cuando la escala de energía cambia de  $\mu = m_t$  a  $\mu = 1 \text{ GeV}$ ,  $\tilde{m}_u$  y  $\tilde{m}_d$  decrecen aproximadamente un 25% y  $\tilde{m}_c$  y  $\tilde{m}_s$  también decrecen, pero por menos de un 16%.
3. En vista de las consideraciones anteriores, un rango de valores apropiado para las razones de las masas de los quarks, evaluadas a  $\mu = m_t = 171 \text{ GeV}$ , es el siguiente

$$\begin{aligned}
 0.000022 &\leq \tilde{m}_u \leq 0.000037 \\
 0.0043 &\leq \tilde{m}_c \leq 0.0046 \\
 0.0013 &\leq \tilde{m}_d \leq 0.0017 \\
 0.032 &\leq \tilde{m}_s \leq 0.036
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

Los resultados de el ajuste de  $\chi^2$  a las expresiones teóricas para  $|V_{ij}^{th}|$ ,  $J^{th}$ ,  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  y  $\gamma^{th}$  a las cantidades determinadas experimentalmente es el siguiente: La matriz de mezclas calculada de la expresión teórica  $\mathbf{V}^{th}$  con los valores numéricos de las razones de las masas de los quarks dados en las Ecs. (5.55) y (5.56) y los mejores valores de el parámetro  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$  que rompe la simetría, y la fase,  $\Phi^* = 90^\circ$ , que viola CP es

$$\mathbf{V}_{CKM}^{th} = \begin{pmatrix} 0.975 + i0.017 & -0.204 + i0.083 & 0.0003 + i0.0034 \\ -0.083 + i0.204 & 0.017 + i0.974 & -0.0000 + i0.0399 \\ -0.0000 - i0.0086 & -0.0000 - i0.039 & 0.0000 + i0.9992 \end{pmatrix} \tag{5.91}$$

La matriz (5.91) escrita como magnitud y fase es

$$\mathbf{V}_{CKM}^{th} = \begin{pmatrix} 0.9753e^{i1^\circ} & 0.221e^{i158^\circ} & 0.0034e^{i84^\circ} \\ 0.220e^{i112^\circ} & 0.9745e^{i89^\circ} & 0.040e^{i90^\circ} \\ 0.0085e^{i270^\circ} & 0.039e^{i270^\circ} & 0.9992e^{i90^\circ} \end{pmatrix}, \tag{5.92}$$

Para poder tener una estimación de la sensibilidad de nuestros resultados numéricos a la incerteza en los valores de las razones de las masas de los

quarks, calculamos el rango de valores de las magnitudes  $|V_{ij}^{th}|$ , que corresponden al rango de valores de las razones de las masas dadas en la Ec. (5.90), pero manteniendo  $\Phi$  y  $Z^{1/2}$  fijos a los valores  $\Phi^* = 90^\circ$  y  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$ . El resultado es el siguiente,

$$|\mathbf{V}^{th}| = \begin{pmatrix} 0.9735 - 0.9771 & 0.2151 - 0.2263 & 0.0028 - 0.0040 \\ 0.2151 - 0.2263 & 0.9726 - 0.9764 & 0.037 - 0.043 \\ 0.0078 - 0.0093 & 0.036 - 0.042 & 0.9991 - 0.9993 \end{pmatrix}, \quad (5.93)$$

la cual debe compararse con los valores de las magnitudes de la matriz de mezclas determinados experimentalmente [5]

$$|V^{exp}_{CKM}| = \begin{pmatrix} 0.9742 - 0.9757 & 0.219 - 0.226 & 0.002 - 0.005 \\ 0.219 - 0.225 & 0.9734 - 0.9749 & 0.037 - 0.043 \\ 0.004 - 0.014 & 0.035 - 0.043 & 0.9990 - 0.9993 \end{pmatrix} \quad (5.94)$$

Vemos que los valores absolutos de las entradas en la matriz de mezclas calculados de las expresiones teóricas para  $\mathbf{V}^{th}_{CKM}$ , con los valores de las razones de las masas dados en (5.55) y (5.56) [64] reproducen los valores centrales de las entradas determinadas experimentalmente en  $|\mathbf{V}^{exp}_{CKM}|$ , casi exactamente, dentro de la banda de error experimental. Se puede ver de (5.92), (5.93) y (5.94), que el acuerdo entre los valores calculados y los experimentales de todas las entradas es muy bueno en la matriz de mezclas. El rango de variación estimado en los valores calculados de las magnitudes de las cuatro entradas de la esquina izquierda superior, de la matriz  $|\mathbf{V}^{th}|$  es mas grande que la banda de error en las entradas correspondientes de los valores determinados experimentalmente de la matriz de las magnitudes  $|\mathbf{V}^{exp}|$ . El intervalo estimado de variación en los valores calculados de las entradas en la tercer columna y en el tercer renglón de  $|V_{ij}^{th}|$  es comparable con la banda de error de las entradas correspondientes en la matriz de los módulos determinados experimentalmente, con la excepción de los elementos  $|V_{ub}^{th}|$  y  $|V_{td}^{th}|$  en cuyo caso el intervalo de variación estimado debido a la incerteza en los valores de las razones de las masas de los quarks es significativamente menor que la banda de error en el valor determinado experimentalmente de  $|V_{ub}^{exp}|$  y  $|V_{td}^{exp}|$ . Para el invariante de Jarlskog  $J$  [2], el valor obtenido es

$$J^{th} = 2.8 \times 10^{-5}, \quad (5.95)$$

en buen acuerdo con los datos actuales de violación de CP en el sistema de mezcla  $K^0 - \bar{K}^0$  [5].

Los tres ángulos internos del triángulo unitario pueden inmediatamente ser calculados de las expresiones (5.69)-(5.71). Encontramos los siguientes valores

$$\alpha = 83^\circ \quad \beta = 22^\circ \quad \gamma = 75^\circ \quad (5.96)$$

Estos tres ángulos serán determinados de las medidas de las asimetrías de  $CP$  en una multiplicidad de decaimientos débiles de  $B$  en las fábricas de  $B$  que pronto estarán operando.

Una estimación del intervalo de variación de los valores de estos ángulos compatible con la información experimental sobre los valores absolutos de la matriz  $V_{CKM}^{exp}$ , ha sido dada por S. Mele [73] y A. Ali [75]. De acuerdo a estos autores,  $79^\circ \leq \alpha \leq 102^\circ$ ,  $21^\circ \leq \beta \leq 28^\circ$  y  $55^\circ \leq \gamma \leq 78^\circ$ . Vemos que el valor de  $\beta$  obtenido en este trabajo esta cercano al límite inferior de acuerdo con S. Mele [73], mientras que nuestro valor de  $\gamma$  esta cerca del límite superior dado por S. Mele [73] y  $\alpha$  esta en el rango permitido dado por estos autores.

## 5.8 Resumen y conclusiones

En este capítulo hemos derivado expresiones teóricas para la matriz de mezclas  $V^{th}_{CKM}$  a partir de las matrices de masas  $M_q$  de los quarks con una textura del tipo de Fritzsch modificada. Las matrices de masas se construyeron sumando tres términos de masa  $M_{3q}$ ,  $M_{2q}$  y  $M_{1q}$  correspondientes a estados de menor simetría en un esquema simple para el rompimiento de la simetría permutacional del sabor.

El patrón de rompimiento de la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  se caracterizó en términos del parámetro  $Z^{1/2} = \frac{(M_{2q,H})_{23}}{(M_{2q,H})_{22}}$  el cuál es una medida de cuanto se mezclan las representaciones irreducibles de singlete y de doblete del grupo  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . Este patrón de rompimiento se clasificó en términos de las representaciones simétrica ( $Z_S^{1/2} = 1/\sqrt{8}$ ), y antisimétrica ( $Z_A^{1/2} = -\sqrt{8}$ ) de un grupo auxiliar  $\tilde{S}(2)$  de permutaciones de dos campos en el término de Yukawa  $\bar{q}_{L,W} M_{2q,W} q_{R,W}$ .

Una comparación cuidadosa de las expresiones para los valores absolutos de los elementos de la matriz  $CKM$  los valores determinados experimentalmente de  $|V_{CKM}^{exp}|$ ,  $J^{exp}$  y los ángulos internos del triángulo unitario  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$  y  $\gamma^{exp}$  da una indicación clara y precisa sobre la existencia de un patrón preferido para el rompimiento de la simetría del sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$

a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . El patrón de rompimiento de simetría preferido ó mejor está caracterizado por

$$Z^{*1/2} = \frac{1}{2} (Z_S^{1/2} - Z_A^{1/2}) = \sqrt{\frac{81}{32}}. \quad (5.97)$$

Una vez que el valor numérico de  $Z^{*1/2}$  se fija a  $\sqrt{\frac{81}{32}}$ , las matrices  $\mathbf{M}_q$  son funciones de las masas de los quarks y sólo una fase. En consecuencia, la mejor matriz  $V_{CKM}$  teórica que resulta, esta parametrizada en términos de las cuatro razones de masas de los quarks ( $\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s$ ) y sólo una fase  $\Phi$  que viola  $CP$ . El mejor valor de  $\Phi$  que se encontró es

$$\Phi = 90^\circ. \quad (5.98)$$

El modulo de los elementos de matriz de la matriz de mezclas calculados de la expresión teórica  $V_{CKM}^{th}$  están en excelente acuerdo con todos los valores absolutos determinados experimentalmente de la matriz  $|V_{CKM}^{exp}|$ . Para el invariante de Jarlskog encontramos el valor  $J = 2.8.00 \times 10^{-5}$  y para los ángulos internos del triángulo unitario encontramos los valores  $\alpha = 83^\circ$ ,  $\beta = 22^\circ$  y  $\gamma = 75^\circ$  también en muy buen acuerdo con los datos actuales de violación de  $CP$  en el sistema de mezcla  $K^0 - \bar{K}^0$  [5] y los datos mas recientes sobre oscilaciones en el sistema  $B_s^0 - \bar{B}_s^0$  [73] y [75].

En el Modelo Estándar de las interacciones electrodébiles, tanto las masas de los quarks como los ángulos de mezcla aparecen como parámetros libres. En este capítulo, hemos demostrado que, a partir de la simetría permutacional del sabor exacta, un ansatz sencillo y explícito acerca del patrón de rompimiento de simetría nos lleva a una parametrización de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}$  que es función de cuatro razones de masa ( $m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b$ ) y tiene sólo dos parámetros libres, el parámetro  $Z$  y la fase  $\Phi$  que viola  $CP$  en muy buen acuerdo con la información experimental disponible sobre mezclas de quarks y violación de  $CP$ .

# Capítulo 6

## Ángulos de mezcla y fase que viola CP

### 6.1 Equivalencia de $V^{th}$ con otras parametrizaciones

En este capítulo encontraremos las relaciones funcionales entre las masas de los quarks y los parámetros libres, ángulos de mezcla y las fases que violan CP con las que se escriben las parametrizaciones fenomenológicas de la matriz de mezclas de los quarks. Estas relaciones funcionales resultan de la equivalencia de las parametrizaciones fenomenológicas y la parametrización derivada de el rompimiento de la simetría permutacional del sabor cuando se hace un refasamiento de los campos de los quarks.

En la teoría estándar electrodébil de las interacciones de las partículas, las mezclas de sabor de los quarks se describen mediante una matriz de mezclas unitaria  $\mathbf{V}$ . Las cantidades medibles de esta matriz, las cuales son invariantes bajo refasamiento de los campos de los quarks, son las magnitudes de sus elementos, *i. e.*, las cantidades  $|\mathbf{V}_{ij}|$ . En el caso de tres familias, la unitariedad de  $\mathbf{V}$  constriñe el número de magnitudes independientes a cuatro. En consecuencia, las parametrizaciones fenomenológicas de la matriz de mezclas de los quarks expresadas en términos de cuatro parámetros se introdujeron sin tomar en cuenta las posibles relaciones funcionales entre las masas de los quarks y los parámetros de mezcla del sabor. Originalmente Kobayashi y Maskawa [17] eligieron como parámetros independientes tres ángulos de ro-

tación y una fase que viola CP. Algunas parametrizaciones de este tipo, pero diferentes a la forma original de la parametrización de Kobayashi-Maskawa han sido propuestas [5], una de las mas comunmente usadas es la parametrización “estándar” [19] recomendada por el Particle Data Group [5].

Desde un punto de vista matemático, dos parametrizaciones diferentes de la matriz unitaria de mezclas de los quarks de  $3 \times 3$  que contienen cuatro parámetros independientes convenientemente definidos, son equivalentes si la magnitud de las entradas correspondientes son iguales. En tal esquema, tanto las masas de los quarks como como los ángulos de mezcla y la fase que viola CP aparecen en la teoría como parámetros independientes.

En contraste, los elementos de la matriz de mezclas de los quarks  $\mathbf{V}^{th}$ , derivada del rompimiento de la simetría permutacional del sabor en el capítulo cinco, son funciones explicitas de las cuatro razones de masas de los quarks  $m_u/m_t$ ,  $m_c/m_t$ ,  $m_d/m_b$ ,  $m_s/m_b$ , y unicamente dos parámetros libres, linealmente independientes, estos son, el parámetro  $Z^{1/2}$  que rompe la simetría permutacional y la fase  $\Phi$  que viola CP. Los valores numéricos de  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$  que caracterizan el patrón de rompimiento de la simetría preferida, se obtuvieron de un ajuste de  $\chi^2$  de las expresiones teóricas para las magnitudes  $|\mathbf{V}_{ij}^{th}|$  a los valores determinados experimentalmente de los elementos de la matriz de mezclas  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$ . Un hecho importante es que la calidad del mejor ajuste de  $\mathbf{V}^{th}$  a los datos experimentales es tan buena como la calidad de los ajustes de las parametrizaciones fenomenológicas a los mismos datos. Mas aún, cuando se usa el mejor conjunto de parámetros de cada parametrización, las magnitudes de las entradas correspondientes en  $\mathbf{V}^{th}$  y las parametrizaciones fenomenológicas son numéricamente iguales y dan una representación igualmente buena de los valores determinados experimentalmente de las magnitudes de los elementos de la matriz de mezclas  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$ . De aquí que, podamos escribir

$$|\mathbf{V}_{ij}^{th}| = |\mathbf{V}_{ij}^{FEN}| \quad (6.1)$$

aun cuando  $\mathbf{V}^{th}$  tenga solo dos parámetros libres, ajustables y linealmente independientes, en tanto que el número de parámetros libres ajustables en  $\mathbf{V}^{FEN}$ , es cuatro.

En lo subsiguiente, demostraremos que haciendo un refasamiento convenientemente elegido para los campos de los quarks, la matriz de mezclas

$V^{th}$  puede cambiar a una forma nueva que denotaremos como  $\tilde{V}^{th}$  tal que todos sus elementos de matriz sean numéricamente iguales a las entradas correspondientes de la parametrización fenomenológica con la cual queremos establecer la equivalencia, tanto en magnitud como en fase. Una vez establecida esta equivalencia, derivaremos expresiones analíticas exactas para los cuatro parámetros libres de las parametrizaciones fenomenológicas de las matrices de mezcla, generalmente tres ángulos de mezcla y una fase que viola CP, en función de las cuatro razones de masa  $m_u/m_t$ ,  $m_c/m_t$ ,  $m_d/m_b$ ,  $m_s/m_b$ , el parámetro que rompe la simetría del sabor  $Z^{1/2}$  y la fase  $\Phi$  que viola CP.

En la representación de las masas, las corrientes cargadas toman la forma

$$J_c^\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{Li}^u \gamma^\mu V_{ij} q_{Lj}^d. \quad (6.2)$$

Una redefinición de las fases de los campos de los quarks que deja invariante la corriente  $J_c^\mu$ , cambiará los argumentos de  $V_{ij}$  de la matriz de mezclas, pero dejará las magnitudes  $|V_{ij}|$  invariantes

$$V_{ij} \rightarrow \tilde{V}_{ij} = e^{-i\chi_i^u} V_{ij} e^{i\chi_j^d}. \quad (6.3)$$

Entonces, los invariantes medibles de la matriz de mezclas de los quarks son las magnitudes de sus elementos; i.e., las cantidades  $|V_{ij}|$ , y el invariante de Jarlskog  $J$ . En el caso de tres familias, la unitariedad de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}$  constriñe a cuatro el número de magnitudes independientes [64]. En consecuencia, en la literatura,  $\mathbf{V}$ , se parametriza generalmente con cuatro parámetros independientes. Desde un punto de vista matemático, todas las parametrizaciones de la matriz de mezclas del sabor que contiene cuatro parámetros independientes definidos de manera apropiada, son equivalentes. En contraste, la parametrización  $\mathbf{V}^{th}$ , derivada en el capítulo 'refchap:4 a partir del rompimiento de la simetría permutacional del sabor, tiene solo dos parámetros libres, estos son, el parámetro  $Z^{1/2}$  que rompe la simetría de sabor y la fase  $\Phi$  que viola CP.

Cuado se usan los mejores valores para los parámetros  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$ , definidos en las Ecs. (5.21) y (5.45) y dados en las Ecs. (5.77) y (5.78), la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$  reproduce los valores centrales de todas las cantidades determinadas experimentalmente, esto es, las magnitudes  $|V_{ij}^{exp}|$ , el invariante  $J^{exp}$  de Jarlskog  $J^{exp}$  y los tres ángulos internos,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  del triángulo de unitariedad. La calidad del ajuste de  $\mathbf{V}^{th}$  a los datos experimentales es la



misma que se obtiene del ajuste de las parametrizaciones fenomenológicas  $\mathbf{V}^{PDG}$  y  $\mathbf{V}^{KM}$  a los mismos datos experimentales. De manera más precisa, podemos decir que cuando el mejor conjunto de parámetros ajustables de cada parametrización  $\mathbf{V}^{th}$ ,  $\mathbf{V}^{PDG}$  y  $\mathbf{V}^{KM}$ , obtenidos de un ajuste de  $\chi^2$  a los mismos datos experimentales, las magnitudes de las entradas correspondientes en las matrices  $\mathbf{V}^{th}$ ,  $\mathbf{V}^{PDG}$  y  $\mathbf{V}^{KM}$ , son numericamente iguales y dan una representación de los valores  $|V^{exp}_{ij}|$  determinados del experimento de la misma calidad. De esta observación, se sigue que la matriz  $\mathbf{V}^{th}$  derivada de la simetría y las parametrizaciones fenomenológicas  $\mathbf{V}^{PDG}$  y  $\mathbf{V}^{KM}$  deben ser equivalentes hasta un refasamiento de los campos de los quarks en la representación de masas. En lo sucesivo, demostraremos que es posible derivar unas nuevas matrices teóricas, las cuales denotaremos como  $\tilde{\mathbf{V}}^{th}$  y  $\hat{\mathbf{V}}^{th}$ , relacionadas a  $\mathbf{V}^{th}$  por transformaciones biunitarias de fase, y de tal manera que todas las entradas correspondientes en  $\tilde{\mathbf{V}}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$  ó  $\hat{\mathbf{V}}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{KM}$  sean iguales en magnitud y en fase. A partir de aquí, obtendremos expresiones exactas explícitas para los tres ángulos de mezcla y la fase que viola CP que aparece en  $\mathbf{V}^{PDG}$  y  $\mathbf{V}^{KM}$  como funciones de las razones de masas de los quarks y los parámetros  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$  que caracterizan el patrón de rompimiento de simetría preferido.

## 6.2 Equivalencia de fase de $\mathbf{V}^{th}$ y $\mathbf{V}^{PDG}$

La parametrización estándar [19] de la matriz de mezclas de los quarks recomendada por el Particle Data Group [5] se escribe en términos de los tres ángulos de mezcla  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{13}$  y una fase  $\delta_{13}$  que viola CP,

$$\mathbf{V}^{PDG} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

donde  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  y  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ .

El rango de valores de las magnitudes determinadas experimentalmente en  $|V^{exp}_{ij}|$ , de acuerdo con Caso *et al* [83], dentro del límite de 90% del valor de confianza corresponde al rango de valores de los ángulos de mezcla siguientes

$$0.219 \leq s_{12} \leq 0.226, \quad (6.5)$$

$$0.037 \leq s_{23} \leq 0.043, \quad (6.6)$$

$$0.002 \leq s_{13} \leq 0.005. \quad (6.7)$$

Siete de los nueve valores absolutos de las entradas de la matriz CKM se han medido de manera directa, por procesos a nivel de árbol. Un rango de valores para los cuatro parámetros,  $s_{12}$ ,  $s_{23}$ ,  $s_{13}$  y  $\delta_{13}$ , que es consistente con las siete medidas directas y los valores de las magnitudes de  $|\mathbf{V}|^{exp}$  [5] determinados experimentalmente, esta dado por Nir [12]

$$0.2173 \leq s_{12} \leq 0.2219, \quad (6.8)$$

$$0.0378 \leq s_{23} \leq 0.0412, \quad (6.9)$$

$$0.00237 \leq s_{13} \leq 0.00395, \quad (6.10)$$

se sabe que  $c_{13}$  se desvía de la unidad hasta la sexta cifra decimal [[5], [12]].

Hasta hoy, la fase  $\delta_{13}$  que viola CP, no está constreñida por medidas directas. Sin embargo, las medidas de violación de CP en decaimientos de kaones [13] constriñe a  $\delta_{13}$  al rango siguiente

$$0 \leq \delta_{13} \leq \pi. \quad (6.11)$$

La parametrización estándar  $V^{PDG}$  se introdujo sin tomar en cuenta las posibles relaciones funcionales entre las masas de los quarks y los parámetros que mezclan el sabor. En contraste, estas relaciones funcionales se exhiben de manera explícita en las expresiones teóricas,  $V_{ij}^{th}$ , derivadas en el capítulo ???. Mas aún, hemos visto que, cuando se usan los mejores valores de los parámetros  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$ , la matriz de mezclas  $V^{th}$  reproduce los valores centrales de las cantidades determinadas experimentalmente, esto es, las magnitudes  $|V_{ij}^{exp}|$ , el invariante  $J^{exp}$  de Jarlskog y los tres ángulos internos,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , del triángulo unitario [77], [2]. Como las dos parametrizaciones reproducen igualmente bien el mismo conjunto de datos experimentales, esto justifica que escribamos que

$$|V_{ij}^{th}| = |V_{ij}^{PDG}| = |V_{ij}^{exp}|. \quad (6.12)$$

No se puede simplemente igualar  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$  porque los argumentos de los elementos de matriz correspondientes en las dos parametrizaciones no son iguales

$$\arg(V_{ij}^{th}) \neq \arg(V_{ij}^{PDG}). \quad (6.13)$$

Esta diferencia no tiene consecuencias físicas, simplemente refleja la libertad de elegir las fases no observables de los campos de los quarks en la representación de masas. Una redefinición de las fases de los quarks que deja invariante a la corriente cargada  $J_c^\mu$ , caviará los argumentos de  $V_{ij}^{th}$  pero dejará invariantes las magnitudes  $|V_{ij}^{th}|$ ,

$$V_{ij}^{th} \rightarrow \tilde{V}_{ij}^{th} = e^{-i\chi_i^u} V_{ij}^{th} e^{i\chi_j^d}. \quad (6.14)$$

Las fases  $\chi_i^u$  y  $\chi_j^d$  que aparecen en la Ecu. (6.3) se determinarán requiriendo que las entradas correspondientes en  $\tilde{\mathbf{V}}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$  sean iguales,

$$|V_{ij}^{th}| e^{i(w_{ij}^{th} - (\chi_i^u - \chi_j^d))} = |V_{ij}^{PDG}| e^{iw_{ij}^{PDG}}, \quad (6.15)$$

en esta expresión  $w_{ij}^{th}$  y  $w_{ij}^{PDG}$  son los argumentos de  $V_{ij}^{th}$  y  $V_{ij}^{PDG}$  respectivamente. Como las magnitudes  $|V_{ij}^{th}|$  y  $|V_{ij}^{PDG}|$  son iguales, los argumentos de las entradas en las dos parametrizaciones están relacionadas por el conjunto de nueve ecuaciones

$$\chi_i^u - \chi_j^d = w_{ij}^{th} - w_{ij}^{PDG}. \quad (6.16)$$

El conjunto de Ecs. (6.16) relaciona las diferencias de las fases no observables de los campos de los quarks con las diferencias de los argumentos de las entradas correspondientes en  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$ .

Notemos que el conjunto de Ecs. (6.16) está sobredeterminado. En el lado izquierdo de las Ecs. (6.16) hay nueve diferencias de fases no observables de los campos de los quarks formadas a partir de seis fases desconocidas de los campos de los quarks. Dado que sólo las diferencias de fase pueden ser determinadas, las fases mismas se definen únicamente hasta una constante aditiva la cual se puede fijar dando el valor de una de las fases desconocidas. Entonces, en las Ecs. (6.16) hay nueve ecuaciones para determinar cinco incógnitas. Esto se puede hacer sólo si se satisface un conjunto de cuatro ecuaciones de consistencia. Las condiciones de consistencia son relaciones no triviales expresando los cinco argumentos no nulos  $w_{ij}^{PDG}$  de  $V_{ij}^{PDG}$  en términos únicamente de los argumentos conocidos  $w_{ij}^{th}$  de  $V_{ij}^{th}$ .

Se puede derivar una primera ecuación de consistencia de la igualdad de

los determinantes de  $\tilde{\mathbf{V}}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$ . De la definición de la transformación de refasamiento, Ecs. (6.3) y (6.15), se sigue que

$$\det \mathbf{V}^{th} = \det [\mathbf{X}_u^\dagger \mathbf{V}^{PDG} \mathbf{X}_d], \quad (6.17)$$

en esta expresión  $\mathbf{X}_u$  y  $\mathbf{X}_d$  son las matrices de fases unitarias diagonales que aparecen en la Ec. (6.3). Como el determinante de  $\mathbf{V}^{PDG}$  es igual a uno, obtenemos

$$\det [\mathbf{X}_u^\dagger \mathbf{V}^{PDG} \mathbf{X}_d] = e^{i \sum_{i=1}^3 (\chi_i^{(u)} - \chi_i^{(d)})}. \quad (6.18)$$

De manera similar, a partir de la definición de  $\mathbf{V}^{th}$ , en la Ec. (5.43), tenemos

$$\det \mathbf{V}^{th} = \det [\mathbf{O}_u^T \mathbf{P}^{u-d} \mathbf{O}_d] = \det (\mathbf{O}_u^T \mathbf{O}_d) \det \mathbf{P}^{u-d}, \quad (6.19)$$

el determinante de las matrices ortogonales es igual a uno, y el determinante de la matriz diagonal de fases  $\mathbf{P}^{u-d}$  es  $e^{i2\Phi}$ . Tomando para  $\Phi$  el mejor valor  $\Phi^* = \pi/2$ , obtenemos

$$\det \mathbf{V}^{th} = e^{i2\Phi^*} = e^{i\pi}. \quad (6.20)$$

Substituyendo la Ec. (6.18) y la Ec. (6.20) en la Ec. (6.17) obtenemos

$$\sum_{i=1}^3 (\chi_i^{(u)} - \chi_i^{(d)}) = 2\Phi^* = \pi. \quad (6.21)$$

Esta relación de fases garantiza la igualdad de los determinantes de  $\tilde{\mathbf{V}}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$ .

La suma de las fases no observables de los campos de los quarks que aparecen en el lado izquierdo de la Ec. (6.21) se pueden calcular de las Ecs. (6.16),

$$\sum_{i=1}^3 (\chi_i^{(u)} - \chi_i^{(d)}) = \sum_{i=1}^3 w_{ii}^{th} - w_{22}^{PDG}. \quad (6.22)$$

Ahora, eliminamos las fases no observables de los campos de los quarks en las Eq. (6.21) y Eq. (6.22), para obtener,

$$w_{22}^{PDG} = \sum_{i=1}^3 w_{ii}^{th} - 2\Phi^*. \quad (6.23)$$

Esta relación demuestra que  $\arg(V_{22}^{PDG})$  está determinado de manera única (*mod*  $2\pi$ ) en términos de los argumentos de las entradas en  $\mathbf{V}^{th}$ .

En forma similar se puede derivar un conjunto de condiciones de consistencia para las soluciones de las Ecs. (6.16) por eliminación de las fases de los quarks. De las Ecs. (6.16), las diferencias de fases del mismo tipo de quark, digamos  $(\chi_j^{(d)} - \chi_{j'}^{(d)})$ , pueden ser calculadas de las Ecs. (6.16) en al menos tres formas diferentes. Esta redundancia implica la existencia de relaciones no triviales entre los argumentos de las entradas de las dos parametrizaciones. Por ejemplo, de las Ecs. (6.16), la diferencia  $(\chi_2^{(u)} - \chi_3^{(d)}) - (\chi_2^{(u)} - \chi_2^{(d)})$  da

$$\chi_2^{(d)} - \chi_3^{(d)} = w_{23}^{th} - w_{22}^{th} + w_{22}^{PDG}, \quad (6.24)$$

y la diferencia  $(\chi_1^{(u)} - \chi_3^{(d)}) - (\chi_1^{(u)} - \chi_2^{(d)})$  da

$$\chi_2^{(d)} - \chi_3^{(d)} = w_{13}^{th} - w_{12}^{th} + \delta_{13}. \quad (6.25)$$

Si la diferencia de fases  $(\chi_2^{(d)} - \chi_3^{(d)})$  se elimina entre las Ecs. (6.24) y (6.25) obtenemos

$$\delta_{13} - w_{22}^{PDG} = w_{12}^{th} - w_{13}^{th} - w_{22}^{th} + w_{23}^{th}. \quad (6.26)$$

Usando el mismo procedimiento de eliminación para todas las posibles combinaciones  $(\chi_i^{(u)} - \chi_j^{(d)}) - (\chi_i^{(u)} - \chi_{j'}^{(d)})$  derivamos un conjunto de nueve ecuaciones, de las cuales sólo cuatro son linealmente independientes. Una de estas es la Eq. (6.26), para las otras tres tomaremos

$$-w_{21}^{PDG} + w_{22}^{PDG} = w_{11}^{th} - w_{12}^{th} - w_{21}^{th} + w_{22}^{th}, \quad (6.27)$$

$$w_{31}^{PDG} - w_{32}^{PDG} = -w_{11}^{th} + w_{12}^{th} + w_{31}^{th} - w_{32}^{th}, \quad (6.28)$$

y

$$-w_{22}^{PDG} + w_{32}^{PDG} = -w_{22}^{th} + w_{23}^{th} + w_{32}^{th} - w_{33}^{th}. \quad (6.29)$$

Dado que, en  $\mathbf{V}^{PDG}$  hay cinco entradas con argumentos no nulos, digamos,  $w_{13}^{PDG} = -\delta_{13}$ ,  $w_{21}^{PDG}$ ,  $w_{22}^{PDG}$ ,  $w_{31}^{PDG}$  y  $w_{32}^{PDG}$ , se necesita una ecuación adicional que relacione los argumentos de las entradas de las dos parametrizaciones. Esto se obtiene de las relaciones de fase entre los determinantes de las dos matrices,  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$ .

Con ayuda de la Ec. (6.23) resolvemos las Ecs. (6.26)-(6.29) para todos los otros argumentos no nulos de  $\mathbf{V}^{PDG}$

$$\delta_{13} = w_{11}^{th} + w_{12}^{th} - w_{13}^{th} + w_{23}^{th} + w_{33}^{th} - 2\Phi^* \quad (6.30)$$

$$w_{21}^{PDG} = w_{21}^{th} + w_{12}^{th} + w_{33}^{th} - 2\Phi^* \quad (6.31)$$

$$w_{31}^{PDG} = w_{31}^{th} + w_{12}^{th} + w_{23}^{th} - 2\Phi^* \quad (6.32)$$

$$w_{32}^{PDG} = w_{32}^{th} + w_{23}^{th} + w_{11}^{th} - 2\Phi^*. \quad (6.33)$$

De esta manera, hemos demostrado que los argumentos  $w_{ij}^{PDG}$  de  $V_{ij}^{PDG}$  están determinados de manera única (mod  $2\pi$ ) por los argumentos  $w_{ij}^{th}$  de  $V_{ij}^{th}$ .

Regresamos ahora a la cuestión de las fases de los campos de los quarks y la transformación de fases de  $V_{ij}^{th}$  a  $V_{ij}^{PDG}$ . Sustituyendo las Ecs. (6.23)-(6.33) en las Ecs. (6.16), obtenemos las diferencias de las fases de los campos de los quarks explícitamente en términos de los argumentos conocidos  $w_{ij}^{th}$  de  $V_{ij}^{th}$ . Las fases de los campos de los quarks están determinadas también sólo hasta una constante aditiva común. Como las fases de los campos de los quarks no son observables, podemos fijar una de ellas, sin pérdida de generalidad y resolver para las otras. De esta manera, si tomamos  $\chi_1^d = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \chi_1^d &= 0^\circ, \\ \chi_2^d &= w_{11}^{th} - w_{12}^{th}, \\ \chi_3^d &= -w_{23}^{th} - w_{33}^{th} - w_{12}^{th} + 2\Phi^*, \\ \chi_1^u &= w_{11}^{th}, \\ \chi_2^u &= -w_{12}^{th} - w_{33}^{th} + 2\Phi^*, \\ \chi_3^u &= -w_{23}^{th} - w_{12}^{th} + 2\Phi^*. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Entonces, las matrices de fases que se requieren para calcular la matriz transformada de fases  $\tilde{V}^{th}$  son

$$\mathbf{X}_u = \text{diag}[e^{i w_{11}^{th}}, e^{i(-w_{12}^{th} - w_{33}^{th} + 2\Phi^*)}, e^{i(-w_{23}^{th} - w_{12}^{th} + 2\Phi^*)}] \quad (6.35)$$

y

$$\mathbf{X}_d = \text{diag}[1, e^{i(w_{11}^{th} - w_{12}^{th})}, e^{i(w_{12}^{th} - w_{23}^{th} - w_{33}^{th} + 2\Phi^*)}]. \quad (6.36)$$

Con la ayuda de las Ecs. (6.30)-(6.33), verificamos que

$$\mathbf{X}_u^\dagger \mathbf{V}^{th} \mathbf{X}_d = \mathbf{V}^{PDG} \quad (6.37)$$

se satisface como una identidad, siempre que  $|V_{ij}^{th}| = |V_{ij}^{PDG}|$ .

### 6.3 Ángulos de mezcla de la parametrización estándar $V^{PDG}$

La parametrización estándar  $V_{ij}^{PDG}$  recomendada por el PDG y la parametrización  $V_{ij}^{th}$  derivada de la simetría, dan una representación igualmente buena de los valores determinados experimentalmente de la magnitud de las entradas en la matriz de mezclas de los quarks  $|V_{ij}^{exp}|$  [5]. Debido a esto, podemos escribir

$$|V_{ij}^{th}| = |V_{ij}^{PDG}|, \quad (6.38)$$

aún cuando  $V_{ij}^{th}$  tenga sólo dos parámetros ajustables ( $Z^{1/2}$ ,  $\Phi$ ) en tanto que el número de parámetros ajustables en  $V_{ij}^{PDG}$  es cuatro, estos son  $(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{13})$ . Todas las entradas en  $|V_{ij}^{th}|$  son funciones explícitas de las cuatro razones de masas de los quarks  $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$  y los dos parámetros  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$ . La igualdad de las magnitudes de las entradas correspondientes de las dos parametrizaciones nos permitirán derivar expresiones explícitas para los ángulos de mezcla en términos de las cuatro razones de masas de los quarks  $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$  y los parámetros  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$ .

De la igualdad de  $|V_{13}^{th}|$  y  $|V_{13}^{PDG}|$ , se sigue que

$$\sin \theta_{13} = |V_{ub}^{th}|, \quad (6.39)$$

si tomamos  $|V_{ub}^{th}|$  de la Ec. (5.66), y tomamos  $\Phi$  y  $Z^{1/2}$  igual a sus mejores valores  $\Phi^* = \pi/2$  y  $Z^{1/2*} = \sqrt{\frac{81}{32}}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \sin \theta_{13} = & \left\{ \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d^*}{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right. \\ & - \left[ \left( \frac{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)\delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\delta_d^*}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (6.40) \end{aligned}$$

El cálculo de  $\sin \theta_{23}$  es un poco más elaborado. De la Ec. (6.4) y la igualdad de  $|V_{ij}^{th}|$  y  $|V_{ij}^{PDG}|$ , obtenemos

$$\sin \theta_{23} = \frac{|V_{cb}^{PDG}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{PDG}|^2}} = \frac{|V_{cb}^{th}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{th}|^2}}. \quad (6.41)$$

Substituyendo las expresiones (5.63) y (5.66) con  $\Phi^* = \pi/2$  y  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$  para  $|V_{cb}^{th}|$  y  $|V_{ub}^{th}|$  en la Ec. (6.41) da

$$\begin{aligned} \sin \theta_{23} = & \sqrt{\frac{1 - \tilde{m}_u}{1 + \tilde{m}_c}} \left\{ \tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d^* \right. \\ & + \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*) \tilde{m}_c(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*) \delta_d^*} \right. \\ & \left. - \sqrt{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) \delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right]^2 \left. \right\}^{1/2} \\ & \times \left\{ - \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*) \tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*) \delta_d^*} \right. \right. \\ & \left. - \sqrt{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) \delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right]^2 \\ & + (1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d) \\ & \left. - \tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d^* \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Similarmente de la Ec. (6.4) y la igualdad de  $|V_{12}^{th}|$  y  $|V_{12}^{PDG}|$ , obtenemos

$$\sin \theta_{12} = \frac{|V_{us}^{PDG}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{PDG}|^2}} = \frac{|V_{us}^{th}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{th}|^2}}. \quad (6.43)$$

Entonces, substituyendo las expresiones (5.58) y (5.66) para  $|V_{us}^{th}|$  y  $|V_{ub}^{th}|$  en (6.43) da

$$\begin{aligned} \sin \theta_{12} = & \sqrt{\frac{1 - \tilde{m}_d}{\tilde{m}_s + \tilde{m}_d}} \left\{ \tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) \tilde{m}_d(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*) \right. \\ & + \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*) \tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*) \tilde{m}_s(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right. \\ & \left. + \sqrt{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) \delta_u^* \tilde{m}_s(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*) \delta_d^*} \right]^2 \left. \right\}^{1/2} \\ & \times \left\{ - \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*) \tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*) \delta_d^*} \right. \right. \\ & \left. - \sqrt{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) \delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right]^2 \\ & + (1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d) \\ & \left. - \tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d^* \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Los valores calculados para  $\sin \theta_{12}$ ,  $\sin \theta_{23}$  y  $\sin \theta_{13}$  que corresponden al mejor ajuste de  $\chi^2$  de  $|V_{ij}^{th}|$ ,  $J^{th}$  y  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  y  $\gamma^{th}$  a las cantidades determinadas



experimentalmente  $|V_{ij}^{exp}|$ ,  $J^{exp}$  y los tres ángulos internos  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$  y  $\gamma^{exp}$  de el triángulo de unitaridad. se obtienen cuando los valores numéricos de  $|V_{us}^{th}|$ ,  $|V_{ub}^{th}|$  y  $|V_{cb}^{th}|$  calculados de las Ecs.(5.58), (5.66), (5.63) y dados en la Ec. (5.92) se sustituyen en las Ecs. (6.39), (6.41) y (6.43). De esta manera, obtenemos

$$\sin \theta_{12}^* = 0.222, \quad (6.45)$$

$$\sin \theta_{23}^* = 0.040, \quad (6.46)$$

$$\sin \theta_{13}^* = 0.0036. \quad (6.47)$$

El valor numérico de  $\cos \theta_{13}^*$  se desvía de la unidad en la quinta cifra decimal.

Notamos que los valores numéricos de los ángulos de mezcla calculados a partir de las masas de los quarks y los mejores valores de los parámetros que rompen la simetría coinciden casi exactamente con los valores centrales de las cantidades determinadas experimentalmente, como era de esperarse de la Ec. (6.38). Esta observación es interesante porque, en el caso de tres familias la forma mas general de la matriz de mezclas tiene a lo más cuatro parámetros libres independientes [66] los cuales pueden ser cuatro magnitudes independientes ó tres ángulos de mezcla y una fase como ocurre en  $\mathbf{V}^{PDG}$ . La matriz  $\mathbf{V}^{th}$  derivada de la simetría tiene sólo dos parámetros reales independientes. A pesar de ésto, la calidad del ajuste de  $\mathbf{V}^{th}$  a los datos experimentales es tan buena como la calidad del ajuste de  $\mathbf{V}^{PDG}$  a los mismos datos. El poder predictivo de  $\mathbf{V}^{th}$  implicado por este hecho se origina en la simetría permutacional de sabor del Modelo Estándar y del patrón de rompimiento del cual la textura en la matrices de masas de los quarks y  $\mathbf{V}^{th}$  fueron derivadas.

## 6.4 La fase $\delta_{13}$ que viola CP

La fase  $\delta_{13}$  que viola CP de la parametrización estándar  $\mathbf{V}^{PDG}$  de la matriz de mezclas de los quarks esta dada en la Ec. (6.30) en términos de los argumentos  $w_{ij}^{th}$  de cinco entradas en las expresiones teóricas para  $V_{ij}^{th}$  y la correspondiente fase  $\Phi$  que viola CP. Tomando de la Ec. (5.92) los valores numéricos de los argumentos  $w_{ij}^{th}$  y tomando  $\Phi$  igual al mejor valor  $\Phi^* = \pi/2$ ,

obtenemos el valor numérico de  $\delta_{13}$  correspondiente al mejor ajuste de  $|V_{ij}^{th}|$  a los datos experimentales

$$\delta_{13}^* = 75.2^\circ. \quad (6.48)$$

Este valor predicho para  $\delta_{13}$  es casi igual al valor numérico del tercer ángulo interno  $\gamma$  del triángulo de unitariedad. La diferencia puede ser calculada en términos de los argumentos  $w_{ij}^{th}$ . De las expresiones para  $\gamma$

$$\gamma = arg \left[ -\frac{V_{cb}^* V_{cd}}{V_{ub}^* V_{ud}} \right] \quad (6.49)$$

tenemos

$$-\gamma = w_{11}^{th} - w_{13}^{th} - w_{21}^{th} + w_{23}^{th} + \pi \quad (6.50)$$

la cual, cuando se compara con la expresión (6.30) para  $\delta_{13}$  da

$$-\gamma = \delta_{13} - (w_{12}^{th} + w_{21}^{th} + w_{33}^{th} - 2\Phi^* - \pi). \quad (6.51)$$

Tomando de la Ec. (5.92) los valores numéricos correspondientes a los mejores valores  $\Phi^* = 90^\circ$  y  $Z^{1/2*} = \sqrt{\frac{81}{32}}$ , obtenemos

$$(w_{12}^{th} + w_{21}^{th} + w_{33}^{th} - 2\Phi^* - \pi) = 0.04^\circ. \quad (6.52)$$

Este es un número muy pequeño y justifica la aproximación

$$-\gamma \approx \delta_{13}^*. \quad (6.53)$$

De acuerdo con esto, el valor de  $|\gamma|$  calculado de las razones de masas de los quarks y los mejores valores de los parámetros  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$  es  $|\gamma| = 75^\circ$ , en buen acuerdo con las cotas extraídas de las medidas precisas de la frecuencia de oscilación de el sistema  $B_d^0$  [88] y las medidas de las razones de los decaimientos hadrónicos exclusivos de  $B^\pm \rightarrow \pi$  y el valor promedio de CP de  $B^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0$  [91]. Es posible obtener expresiones explícitas exactas para la fase  $\delta_{13}$  que viola CP en términos de las cuatro razones de masas y los parámetros  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$ . Tal expresión se puede derivar de la Ec. (6.30) en términos de los argumentos de cinco elementos de matriz de  $\mathbf{V}^{th}$ . Sin embargo, una expresión mas sencilla, que involucra únicamente cuatro elementos de matriz de  $\mathbf{V}^{th}$  se puede obtener del invariante  $J$  de Jarlskog.

El invariante de Jarlskog se puede escribir en términos de cuatro elementos de matriz de  $\mathbf{V}$  como

$$J = Im[V_{12}V_{23}V_{13}^*V_{22}^*]. \quad (6.54)$$

Como  $J$  es un invariante, su valor es independiente de la parametrización particular de  $\mathbf{V}$ . Si escribimos el término derecho de la Ec. (6.54) en términos de la parametrización estándar  $\mathbf{V}^{PDG}$ , obtenemos

$$\sin \delta_{13} = \frac{J^{th}}{s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{13}^2c_{23}}. \quad (6.55)$$

Los términos en el denominador del lado derecho de esta expresión se escribieron en las Ecs. (6.39), (6.41) y (6.43) en términos de los módulos  $|V_{12}^{th}|$ ,  $|V_{13}^{th}|$  y  $|V_{23}^{th}|$ . Entonces,

$$s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{13}^2c_{23} = \frac{|V_{12}^{th}||V_{13}^{th}||V_{23}^{th}|[(1 - |V_{13}^{th}|^2 - |V_{12}^{th}|^2)(1 - |V_{13}^{th}|^2 - |V_{23}^{th}|^2)]^{1/2}}{1 - |V_{13}^{th}|^2}. \quad (6.56)$$

Sustituyendo la Ec. (6.56) en la Ec. (6.55) da

$$\sin \delta_{13} = \frac{(1 - |V_{13}^{th}|^2) \text{Im}[V_{12}^{th}V_{23}^{th}V_{13}^{th*}V_{22}^{th*}]}{|V_{12}^{th}||V_{13}^{th}||V_{23}^{th}|\sqrt{(1 - |V_{13}^{th}|^2 - |V_{12}^{th}|^2)(1 - |V_{13}^{th}|^2 - |V_{23}^{th}|^2)}}, \quad (6.57)$$

el lado derecho de esta ecuación se puede escribir en términos de las razones de masas de los quarks y los parámetros que rompen la simetría  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$  con ayuda de las Ecs. (6.40), (6.42) y (6.44).

Una expresión más simple que nos lleva a una aproximación más precisa para  $\delta_{13}$  se obtiene de la Ec. (6.57) si los elementos de matriz en el paréntesis cuadrado se escriben como magnitudes y argumentos, y hacemos uso de la unitariedad de  $\mathbf{V}^{th}$  para simplificar el denominador,

$$\sin \delta_{13} = \frac{(1 - |V_{13}^{th}|^2)|V_{22}^{th}| \sin(w_{12}^{th} + w_{23}^{th} - w_{13}^{th} - w_{22}^{th})}{|V_{11}^{th}||V_{33}^{th}|}. \quad (6.58)$$

Expresiones explícitas para los argumentos  $w_{ij}^{th}$  en términos de las razones de masas de los quarks están dadas en las Ecs. (A.30)-(A.38) tomando  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$  igual a sus mejores valores  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$  y  $\Phi^* = \pi/2$ , se obtuvo

$$w_{us}^{th} = \pi - \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\delta_u^* \delta_d^* \frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right] \right\}, \quad (6.59)$$

$$w_{ub}^{th} = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} - \sqrt{\frac{\delta_u^*(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{\delta_d^*(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)}} \right] \right\}, \quad (6.60)$$

$$w_{cs}^{th} = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}} \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} + \sqrt{\frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right] \right\}. \quad (6.61)$$

$$w_{cb}^{th} = \pi - \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} - \sqrt{\frac{\delta_u^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{\delta_d^* (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)}} \right] \right\}, \quad (6.62)$$

Calculando el segundo factor en el paréntesis cuadrado al orden de magnitud dominante, obtenemos

$$w_{us}^{th} \approx \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \right), \quad (6.63)$$

$$w_{cb}^{th} \approx \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_u^*}{\delta_d^*}} \right] \right), \quad (6.64)$$

$$w_{ub}^{th} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_u^*}{\delta_d^*}} \right] \right), \quad (6.65)$$

y

$$w_{cs}^{th} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}} \right). \quad (6.66)$$

La magnitud  $|V_{ub}^{th}|$  ya ha sido expresada en términos de las razones de masas de los quarks y los parámetros que caracterizan el patrón de rompimiento de la simetría  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$ , en las Ecs. (6.39) y (6.40). Expresiones similares para las otras magnitudes que aparecen en la Ec. (6.58) se pueden dar también

$$\begin{aligned}
|V_{ud}| &= \left( \frac{\tilde{m}_c (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) \tilde{m}_s (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_u) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \delta_d^*) (1 - \tilde{m}_d) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
&\times \left\{ 1 + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s} \left[ ((1 - \delta_u^*) (1 - \delta_d^*))^{1/2} \right. \right. \\
&\left. \left. + \left( \frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) (1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \right)^{1/2} \right]^2 \right\}, \quad (6.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|V_{cs}| &= \left( \frac{\tilde{m}_c (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) \tilde{m}_s (1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 + \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 + \tilde{m}_s) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
&\times \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*) (1 - \delta_d^*) (1 + \tilde{m}_c - \tilde{m}_u) (1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right)^{1/2} \right]^2 \right. \\
&\left. + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s} \frac{1}{(1 - \delta_u^*) (1 - \delta_d^*)} \right\}^{1/2}, \quad (6.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|V_{tb}| &= \left[ \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*) (1 - \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*) (1 + \tilde{m}_c) (1 - \tilde{m}_u) (1 - \delta_d^*) (1 + \tilde{m}_s) (1 - \tilde{m}_d)} \right]^{1/2} \\
&\times \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 - \delta_u^*) (1 - \delta_d^*)}{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*) (1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right)^{1/2} \right]^2 \right. \\
&\left. + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \delta_u^* \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d^*}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) (1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*) (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \right\}^{1/2}. \quad (6.69)
\end{aligned}$$

Calculando al orden dominante de magnitud, el primer factor en el lado derecho de la Ec. (6.58) da

$$\frac{(1 - |V_{13}^{th}|^2) |V_{22}^{th}|}{|V_{11}^{th}| |V_{33}^{th}|} \approx \frac{(1 - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_u) (1 - \delta_d^*) (1 - \tilde{m}_d)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \left( 1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_d} (\sqrt{\delta_d^*} - \sqrt{\delta_u^*}) \right). \quad (6.70)$$

Insertando en la Ec. (6.70) los valores numéricos de las razones de masas y  $\sqrt{\delta_d^*} - \sqrt{\delta_u^*} = 0.04$ , encontramos que el lado derecho de la Ec.(6.70) difiere de uno en la tercer cifra decimal,

$$\frac{(1 - |V_{13}^{th}|^2) |V_{22}^{th}|}{|V_{11}^{th}| |V_{33}^{th}|} \approx 1. \quad (6.71)$$

En consecuencia,

$$\sin \delta_{13}^* \approx \sin(w_{us}^{th} + w_{cb}^{th} - w_{ub}^{th} - w_{cs}^{th}), \quad (6.72)$$

tomando los valores numéricos de el argumento en el lado derecho de la Ec. (6.72) de (5.92), obtenemos

$$\delta_{13}^* \approx 73^\circ, \quad (6.73)$$

de acuerdo con la Ec. (6.48). La expresión aproximada Ec. (6.72) para  $\sin \delta_{13}^*$  se puede derivar también de la Ec. (6.26) si  $w_{22}^{PDG}$  es despreciada. Calculando  $w_{22}^{PDG}$  de la Ec. (6.23) y (6.59)-(6.61), obtenemos  $w_{22}^{PDG} = -0.0018^\circ$  lo cual muestra que la Ec. (6.72) es una buena aproximación. Como la Ec. (6.23) se derivó de la relación de fases que expresa los argumentos de  $V_{ij}^{PDG}$  en términos de los de  $V_{ij}^{th}$ , en tanto que la Ec. (6.58) se derivó de la expresión Ec. (6.57) para el invariante de Jarlskog, el acuerdo entre las Ecs. (6.23) y (6.58)- (6.72) es una prueba de consistencia de nuestro formalismo.

## 6.5 Equivalencia de fase de $V^{th}$ y $V^W$

La matriz de mezclas de los quarks fue parametrizada por Wolfenstein con  $\lambda$ ,  $A$ ,  $\rho$  y  $\eta$  como parámetros libres. Esta es una parametrización muy útil en aplicaciones fenomenológicas, aún cuando sea sólo una parametrización aproximada. La parametrización de Wolfenstein pone énfasis en la jerarquía de la magnitud de los ángulos,  $s_{12} \gg s_{23} \gg s_{13}$  [20], en esta parametrización  $\eta$  representa la fase que viola CP y  $\lambda = |V_{us}|$  juega el papel de un parámetro de expansión, los elementos de matriz restantes se escriben con potencias de  $\lambda$ ,

$$V_W = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

En esta expresión  $A$ ,  $\rho$ , y  $\eta$  son números reales de orden uno. El invariante de Jarlskog es  $J = \eta A^2 \lambda^6 (1 - \frac{\lambda^2}{2})$ . Debido al valor pequeño de  $\lambda$  en la expansión de cada elemento de la matriz de mezclas se obtiene un buen ajuste a los datos experimentales con el término de orden  $\lambda^2$ . Los rangos de variación de estos parámetros, son los siguientes:

$$\lambda = 0.2205 \pm 0.0018, \quad A = 0.826 \pm 0.041,$$

$$-0.15 \leq \rho \leq +0.35, \quad 0.020 \leq \eta \leq +0.45. \quad (6.75)$$

Si uno requiere más precisión, se tienen que incluir términos de orden mayor en  $\lambda$ . Al incluir estos términos, es importante que se preserven las propiedades de unitaridad e invariancia ante un refasamiento de los campos de los quarks de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}$ . Una manera eficiente y sistemática de hacer esto sin que se pierda la transparencia se obtiene definiendo los parámetros  $\lambda$ ,  $A$ ,  $\rho$  y  $\eta$  a partir de la parametrización estándar, de la manera siguiente

$$\lambda = s_{12}c_{13} \quad A\lambda^2 = s_{23}c_{13} \quad A\lambda^3(\rho - i\eta) = s_{13}e^{-i\delta_{13}} \quad (6.76)$$

Haciendo este cambio de variables en la parametrización estándar, podemos escribir la matriz de mezclas de los quarks como una función de  $\lambda$ ,  $A$ ,  $\rho$  y  $\eta$  y a diferencia de la parametrización original propuesta por Wolfenstein [20], la obtenida con el cambio de variables, es una parametrización que no tiene aproximaciones y satisface la condición de unitaridad de manera exacta.

$$\begin{aligned} V_{ud}^W &= \sqrt{1 - \lambda^2 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2)} \\ V_{us}^W &= \lambda \\ V_{ub}^W &= A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ V_{cd}^W &= -\lambda - \frac{A^2\lambda^5(\rho + i\eta)\sqrt{1 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2) - \lambda^2}}{1 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2)} \\ V_{cs}^W &= \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2))(1 - A^2\lambda^4 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2))}}{1 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2)} \\ &\quad - \frac{A^2\lambda^6(\rho + i\eta)}{1 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2)} \\ V_{cb}^W &= A\lambda^2 \\ V_{td}^W &= A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) \\ &\quad \times \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2))(1 - A^2\lambda^4 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2))}}{1 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2)} \\ V_{ts}^W &= -A\lambda^2 \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2))}}{1 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2)} \end{aligned}$$

$$V_{tb}^W = \frac{A\lambda^4(\rho + i\eta)\sqrt{(1 - A^2\lambda^4 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2))}}{1 - A^2\lambda^6(\rho^2 + \eta^2)} \quad (6.77)$$

De las Ecs. de transformación (6.76) obtenemos los parámetros de Wolfenstein como función de los ángulos de mezcla y la fase que viola CP  $\delta_{13}$  de la parametrización estándar

$$\lambda = s_{12}c_{13}, \quad A = \frac{s_{23}}{s_{12}^2c_{13}}, \quad \rho = \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}c_{13}^2}\cos\delta_{13}, \quad \eta = \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}c_{13}^2}\sin\delta_{13} \quad (6.78)$$

En la sección 6.2 exhibimos de manera explícita la equivalencia de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$  obtenida del rompimiento de la simetría permutacional del sabor y la parametrización estándar  $\mathbf{V}^{PDG}$  recomendada por el Particle Data Group. A partir de aquí, derivamos expresiones explícitas, exactas para el seno de los tres ángulos de mezcla,  $s_{12}$ ,  $s_{23}$ ,  $s_{13}$  y la fase  $\delta_{13}$  que viola CP como función de los cocientes de masas de los quarks y los parámetros  $Z$  y  $\Phi$  que rompen la simetría de sabor. Aquí haremos uso de la equivalencia, entre  $\mathbf{V}^{PDG}$  y  $\mathbf{V}^{th}$  para encontrar la dependencia funcional de los parámetros de Wolfenstein  $\lambda$ ,  $A$ ,  $\rho$  y  $\eta$  con los cocientes de masas de los quarks y los parámetros que rompen la simetría del sabor  $Z$  y  $\Phi$ .

Como explicamos en la sección 6.2, cuando se usa el mejor conjunto de parámetros de cada parametrización, las magnitudes de las entradas correspondientes de las dos parametrizaciones son numéricamente iguales y dan una representación de la misma calidad para los valores de las magnitudes  $|V_{ij}^{exp}|$  de la matriz de mezclas obtenidas de los experimentos. Esto nos permitió escribir la igualdad de las magnitudes correspondientes de las dos parametrizaciones

$$|V_{ij}^{th}| = |V_{ij}^{PDG}|, \quad (6.79)$$

Asímismo, la igualdad de las magnitudes de las entradas correspondientes de las dos parametrizaciones nos permitió derivar expresiones explícitas, para los ángulos de mezcla en función de los cocientes de masas de los quarks y los parámetros que rompen la simetría del sabor  $Z$  y  $\Phi$ .



De la igualdad de  $|V_{13}^{th}|$  y  $|V_{13}^{PDG}|$  encontramos que

$$\sin \theta_{13} = |V_{ub}^{th}| \quad (6.80)$$

Para  $\sin \theta_{23}$  y  $\sin \theta_{12}$  encontramos

$$\sin \theta_{23} = \frac{|V_{cb}^{th}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{th}|^2}} \quad \sin \theta_{12} = \frac{|V_{us}^{th}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{th}|^2}}. \quad (6.81)$$

Sustituyendo las expresiones (6.80) y (6.81) en las Ecs. (6.78) para los parámetros de Wolfenstein encontramos para  $\lambda$  y  $A$

$$\lambda = |V_{us}^{th}| \quad A = \frac{|V_{cb}^{th}|}{|V_{us}^{th}|^2}. \quad (6.82)$$

Los parámetros de Wolfenstein  $\lambda$  y  $A$  escritos de esta manera son funciones de las razones de las masas de los quarks y de los parámetros  $Z$  y  $\Phi$ .

Si sustituimos las Ecs. (5.58) y (5.63) en la expresión para  $\lambda$  obtenemos a orden dominante

$$\lambda^* \approx \sqrt{\frac{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}} \quad (6.83)$$

esta es la expresión que obtuvimos para el seno del ángulo de Cabibbo  $\theta_C$  en el caso de dos familias en el capítulo 3, es claro de aquí que a orden dominante  $\lambda$  no depende de  $Z^*$ .

Como el parámetro  $A$  depende de la magnitud del elemento  $|V_{cb}^{th}|$  de la matriz de mezclas de los quarks, y a orden dominante tenemos que

$$|V_{cb}^{th}| \approx \left( \frac{\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}}{\sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}}} \right)$$

si sustituimos las expresiones (5.30) para  $\delta_u(Z)$  y  $\delta_d(Z)$  respectivamente en el orden dominante de las razones de las masas de los quarks y la Ec. (6.83) para  $\lambda$  en función de las masas y las sustituimos en la Ec. (6.82), obtenemos

$$A \approx \left\{ \frac{\tilde{m}_s \left(1 - \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right)}{\sqrt{1 - (2Z + 1) \tilde{m}_s \left(1 - \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right)}} - \frac{\tilde{m}_c \left(1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}{\sqrt{1 - (2Z + 1) \tilde{m}_c \left(1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}} \right\}$$

$$\times \frac{\left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right) \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}}}{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \sqrt{Z^*} \quad (6.84)$$

esta expresión se obtuvo para los valores óptimos de los parámetros  $Z^*$  y  $\Phi^*$ . Como  $A$  depende directamente de  $Z$  y  $\lambda$  es muy sensible al valor de  $\Phi$ , la parametrización de Wolfenstein es apropiada para estudiar la fenomenología del rompimiento de la simetría del sabor. En el límite de la simetría permutacional exacta, de la Ec. (5.30) se sigue que,

$$\lim_{z_q \rightarrow 0} \delta_q^{1/2}(Z) = 0 \quad (6.85)$$

$\lambda$  no es función de  $Z$ , pero para este límite cuando se restaura la simetría permutacional del sabor  $A$  toma el valor

$$\lim_{Z_q \rightarrow 0} A(Z) = 0 \quad (6.86)$$

esto es, cuando la simetría permutacional se restaura la matriz de mezclas de los quarks es real y diagonal por bloques.

$$V_W = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.87)$$

y la matriz de masas también es diagonal por bloques en este límite,

$$M_H^q = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{m}_2^q \tilde{m}_1^q e^{-i\phi^q} & 0 \\ \tilde{m}_2^q \tilde{m}_1^q e^{i\phi^q} & \tilde{m}_1^q - \tilde{m}_2^q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_H, \quad (6.88)$$

y los quarks del singlete y el doblete de la matriz de masas no se mezclan. Las fases en esta expresión se pueden absorber en los campos de los quarks. Para los parámetros restantes  $\rho$  y  $\eta$  encontramos

$$\rho = \frac{|V_{ub}^{th}| \cos \delta_{13}}{|V_{cb}^{th}| |V_{us}^{th}|} \quad y \quad \eta = \frac{|V_{ub}^{th}| \sin \delta_{13}}{|V_{cb}^{th}| |V_{us}^{th}|}. \quad (6.89)$$

de estas expresiones se sigue que  $\eta$  y  $\rho$  no son independientes,

$$\rho^2 + \eta^2 = \frac{|V_{ub}^{th}|^2}{|V_{cb}^{th}|^2 |V_{us}^{th}|^2} \quad y \quad \tan \delta_{13} = \frac{\eta}{\rho}. \quad (6.90)$$

En la Ec. (6.30) obtuvimos la expresión para  $\delta_{13}$  en función de las fases  $w_{ij}^{th}$  conocidas,

$$\delta_{13} = w_{ud}^{th} + w_{us}^{th} - w_{ub}^{th} + w_{cb}^{th} + w_{tb}^{th} - 2\Phi^*$$

si sustituimos las expresiones (A.30)-(A.38) encontradas en la Sección (A.1) para las fases  $w_{ij}^{th}$  calculadas para los valores optimos de los parámetros  $Z^*$  y  $\Phi^*$ , a orden dominante en los cocientes de las masas encontramos que

$$\begin{aligned} \delta_{13} \approx & \tan^{-1} \sqrt{\frac{m_u}{m_c} \frac{m_d}{m_s}} - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{m_u}{m_c \tilde{m}_s \tilde{m}_d}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_u}{\delta_d}} \right] \right) \\ & - \tan^{-1} \sqrt{\frac{m_u}{m_c} \frac{m_s}{m_d}} - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{m_c}{m_u \tilde{m}_s \tilde{m}_d}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_u}{\delta_d}} \right] \right) \\ & + \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{\tilde{m}_c \tilde{m}_u \tilde{m}_s \tilde{m}_d}} \left[ 1 + \sqrt{\frac{1}{\delta_u \delta_d}} \right] \right) - 2\Phi \end{aligned} \quad (6.91)$$

. Los valores centrales que se obtienen para los parámetros de Wolfenstein calculados con el valor central de las razones de las masas  $Z^*$  y  $\Phi^*$  son,

$$\lambda^* = 0.222, \quad A^* = 0.806, \quad \rho^* = 0.1171 \quad \eta^* = 0.389 \quad (6.92)$$

estos valores están en en el rango de variación permitida para estos parámetros que se obtiene de las medidas experimentales dadas por Josef Nir en [12].

## 6.6 Equivalencia de fase de $V^{th}$ y la parametrización $V^{KM}$ de Kobayashi-Maskawa

La matriz de mezclas de los quarks fué parametrizada por Kobayashi y Maskawa [17] en terminos de los tres ángulos de mezcla,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , y  $\theta_3$ , y una fase  $\delta_{KM}$  que viola CP

$$V^{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} & c_1 c_2 s_3 + s_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} & c_1 s_2 s_3 - c_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} \end{pmatrix} \quad (6.93)$$

donde  $c_i = \cos \theta_i$  y  $s_i = \sin \theta_i$ . El invariante de Jarlskog se escribe de la manera siguiente,  $J = s_1^2 s_2 s_3 c_1 c_2 c_3 s_{\delta_{KM}}$  en función de los parámetros de Kobayashi y Maskawa. Se verifica de manera inmediata que

$$\det \mathbf{V}^{KM} = -e^{i\delta_{KM}} \quad (6.94)$$

Como discutimos en la sección (6.1), la parametrización  $\mathbf{V}^{th}$  derivada del rompimiento de la simetría permutacional del sabor y la parametrización  $\mathbf{V}^{KM}$  de Kobayashi-Maskawa, dan una representación igualmente buena de los valores de las magnitudes  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$  de la matriz de mezclas aún cuando  $\mathbf{V}^{th}$  tenga sólo dos parámetros libres, linealmente independientes. Entonces, las dos parametrizaciones son equivalentes hasta un refasamiento de los campos de los quarks. Por lo tanto, podemos definir hasta una transformación de fase una matriz  $\hat{\mathbf{V}}^{th}$ , tal que todas las entradas en  $\hat{\mathbf{V}}_{ij}^{th}$  sean numéricamente iguales a las entradas correspondientes en  $\mathbf{V}_{ij}^{KM}$ , tanto en magnitud como en fase,

$$\hat{\mathbf{V}}^{th} = \mathbf{X}_{KM}^{u\dagger} \mathbf{V}^{th} \mathbf{X}_{KM}^d = \mathbf{V}^{KM}. \quad (6.95)$$

Las matrices diagonales

$$\mathbf{X}_{KM}^u = \text{diag}[e^{i\phi_1^u}, e^{i\phi_2^u}, e^{i\phi_3^u}] \quad (6.96)$$

y

$$\mathbf{X}_{KM}^d = \text{diag}[e^{i\phi_1^d}, e^{i\phi_2^d}, e^{i\phi_3^d}] \quad (6.97)$$

se determinaron de la igualdad de  $\hat{\mathbf{V}}^{th}$  y  $\mathbf{V}_{ij}^{KM}$ ,

$$\phi_i^u - \phi_j^d = w_{ij}^{th} - w_{ij}^{KM}. \quad (6.98)$$

donde

$$w_{ij}^{KM} = \text{arg}(\mathbf{V}_{ij}^{KM}). \quad (6.99)$$

En el lado izquierdo de las Ecs. (6.98) hay nueve diferencias de fases formadas con sólo seis fases no observables de los campos de los quarks. Diferencias de fases del mismo tipo de quark, digamos  $(\phi_j^d - \phi_{j'}^d)$ , pueden calcularse de las Ecs. (6.98) en al menos tres formas diferentes. Eliminando las diferencias de fases no observables de los campos de los quarks entre estas

expresiones da un conjunto de condiciones de consistencia relacionandque relacionan las fases conocidas  $w_{ij}^{th}$  y  $w_{ij}^{KM}$ .

$$w_{12}^{KM} = \pi, \quad (6.100)$$

$$w_{13}^{KM} = \pi, \quad (6.101)$$

$$w_{22}^{KM} = w_{11}^{th} - w_{12}^{th} - w_{21}^{th} + w_{22}^{th} + \pi, \quad (6.102)$$

$$w_{23}^{KM} = w_{11}^{th} - w_{13}^{th} - w_{21}^{th} + w_{23}^{th} + \pi, \quad (6.103)$$

$$w_{32}^{KM} = w_{11}^{th} - w_{12}^{th} - w_{31}^{th} + w_{32}^{th} + \pi, \quad (6.104)$$

$$w_{33}^{KM} = w_{11}^{th} - w_{13}^{th} - w_{31}^{th} + w_{33}^{th} + \pi, \quad (6.105)$$

Cuando las expresiones (6.100-6.105) se substituyen en las Ecs. (6.98) obtenemos las diferencias de las fases de los quarks como funciones de los argumentos  $w_{ij}^{th}$  de  $\mathbf{V}_{ij}^{th}$ . Las fases de los quarks mismas, estan determinadas únicamente hasta una constante aditiva común la cual se fija dando el valor de una de ellas. Si tomamos  $\chi_i^u = 0$ , obtenemos

$$\mathbf{X}_{KM}^u = \text{diag}[1, e^{-i(w_{11}^{th} - w_{21}^{th})}, e^{-i(w_{11}^{th} - w_{31}^{th})}] \quad (6.106)$$

y

$$\mathbf{X}_{KM}^d = \text{diag}[e^{-iw_{11}^{th}}, e^{-i(w_{12}^{th} - \pi)}, e^{-i(w_{13}^{th} - \pi)}]. \quad (6.107)$$

Con la ayuda de las Ecs. (6.106) y (6.107) se verifica de inmediato que la Ec. (6.95) se satisfase como una identidad.

## 6.7 La fase $\delta_{KM}$ que viola CP.

La fase  $\delta_{KM}$  que viola CP esta determinada de manera implícita por las ecuaciones (6.100 - 6.105). Una expresión explícita para  $\delta_{KM}$  en términos de los argumentos  $w_{ij}^{th}$  de  $\mathbf{V}_{ij}^{th}$  se puede obtener de la identidad

$$\det[\mathbf{V}^{KM}] = \det[\hat{\mathbf{V}}^{th}], \quad (6.108)$$

y

$$\det [\hat{\mathbf{V}}^{th}] = e^{-i \sum_{i=1}^3 (\phi_i^u - \phi_i^d)} e^{i2\Phi^*}. \quad (6.109)$$

Sustituyendo las Ecs. (6.94) y (6.109) en (6.108) obtenemos

$$\delta_{KM} = \sum_{i=1}^3 (\phi_i^d - \phi_i^u) + 2\Phi^* - \pi \quad (6.110)$$

Ahora, de las Ecs. (6.98) y (6.100 - 6.105),

$$\delta_{KM} = w_{ud}^{th} - w_{us}^{th} - w_{ub}^{th} - w_{cd}^{th} - w_{td}^{th}. \quad (6.111)$$

Esta expresión da la fase  $\delta_{KM}$  que viola CP de la parametrización  $\mathbf{V}^{KM}$  de Kobayashi-Maskawa, en términos de los argumentos conocidos de la parametrización  $\mathbf{V}^{th}$  derivada de la simetría.

Tomando los valores numéricos de los argumentos  $w_{ij}^{th}$  que aparecen en (6.111) de la Ec. (5.43), obtenemos

$$\delta_{KM} = 96.4^\circ \quad (6.112)$$

o

$$\delta_{KM} = \pi - 83.6^\circ. \quad (6.113)$$

El valor del ángulo interno  $\alpha$  del triángulo unitario encontrado en nuestro ajuste de  $\chi^2$  de  $\mathbf{V}^{th}$  a los valores de las magnitudes  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$  determinadas experimentalmente es

$$\alpha = 83.6^\circ. \quad (6.114)$$

Por lo tanto, dentro de la precisión de nuestro mejor ajuste a los datos experimentales

$$\delta_{KM} \approx \pi - \alpha. \quad (6.115)$$

Esta es sólo una aproximación, para derivar una relación exacta calcularemos  $\alpha$  de

$$\alpha = \arg \left( -\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{tb}^* V_{td}} \right), \quad (6.116)$$

sustituyendo  $\mathbf{V}_{ij}^{th}$  por  $\mathbf{V}_{ij}$  en la Ec. (6.116) da

$$\alpha = \pi - w_{ub}^{th} + w_{ud}^{th} + w_{tb}^{th} - w_{td}^{th}. \quad (6.117)$$

Comparando (6.117) con (6.111) da

$$\delta_{KM} = -\alpha - (w_{us}^{th} + w_{cd}^{th} - w_{tb}^{th} + \pi). \quad (6.118)$$

Tomando los valores numéricos de los  $w_{ij}^{th}$  de (??) obtenemos

$$w_{us}^{th} + w_{cd}^{th} + w_{tb}^{th} + \pi = 3\pi + 0.04^\circ. \quad (6.119)$$

Entonces,

$$\delta_{KM} = \pi - \alpha - 0.04^\circ \quad \text{mod}(2\pi) \quad (6.120)$$

esto muestra que (6.115) es una excelente aproximación al valor numérico de  $\delta_{KM}$ .

De paso, notemos que

$$\alpha = w_{tb}^{KM} \quad (6.121)$$

es un resultado exacto.

## 6.8 Ángulos de mezcla de la parametrización de Kobayashi-Maskawa.

Una vez que se ha establecido que cuando se usa el mejor conjunto de parámetros de cada parametrización,  $\mathbf{V}^{KM}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta_{KM})$  y  $\mathbf{V}^{th}(\tilde{m}_i, Z^{1/2}, \Phi)$ , la magnitud de las entradas correspondientes en las dos parametrizaciones son numericamente iguales, podemos identificar las entradas correspondientes y resolver para los ángulos de mezcla  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  en términos de las razones de masas de los quarks y los parámetros  $\Phi$  y  $Z$ .

De la identificación de

$$\cos \theta_1 = |\mathbf{V}_{ud}^{th}|, \quad (6.122)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \tilde{m}_d)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_u/\tilde{m}_c)(1 + \tilde{m}_d/\tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s} \left[ ((1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*))^{1/2} \right. \right. \\ &\left. \left. + \left( \delta_u^* \delta_d^* \frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (6.123)$$

El ángulo  $\theta_2$  se obtiene de la identificación

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 = |\mathbf{V}_{td}^{th}| \quad (6.124)$$

el cual da

$$\sin \theta_2 = \frac{|\mathbf{V}_{td}^{th}|}{\sin \theta_1} \quad (6.125)$$

donde

$$\sin \theta_1 = \sqrt{1 - |\mathbf{V}_{ud}^{th}|^2}, \quad (6.126)$$

$|\mathbf{V}_{ud}^{th}|$  está dado en las Ecs. (6.122) y (6.123), y

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{td}^{th} &= \left( \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \delta_u \tilde{m}_s (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\ &+ \left\{ - \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \tilde{m}_d (1 + \tilde{m}_s - \delta_u) \delta_d}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\ &\left. + \left( \frac{\delta_u \tilde{m}_d (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \end{aligned} \quad (6.127)$$

Calculando al orden dominante, obtenemos

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &\approx \sqrt{\frac{1 + m_u/m_c}{1 + \frac{m_u m_s}{m_c m_d}}} Z^{1/2} \\ &\times \left\{ \frac{\tilde{m}_s - \tilde{m}_d}{\sqrt{(1 - \tilde{m}_d)(1 + \tilde{m}_s) + 2Z(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)(1 + \frac{(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)}{2})}} \right. \\ &\left. - \frac{\tilde{m}_c - \tilde{m}_u}{\sqrt{(1 - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_c) + 2Z(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)(1 + \frac{(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)}{2})}} \right\} \end{aligned} \quad (6.128)$$



de forma similar, podemos obtener el ángulo  $\theta_3$  identificando

$$\sin \theta_1 \sin \theta_3 = |\mathbf{V}_{ub}^{th}| \quad (6.129)$$

Entonces,

$$\sin \theta_3 = \frac{|\mathbf{V}_{ub}^{th}|}{\sqrt{1 - |\mathbf{V}_{ud}^{th}|^2}} \quad (6.130)$$

donde  $\mathbf{V}_{ub}^{th}$  está dado en la Ec. (5.66) y  $\sin \theta_1$  está dado en la Ec. (6.126). Calculando al orden dominante de magnitud, encontramos,

$$\begin{aligned} \sin \theta_3 \approx & \sqrt{\frac{1 + m_d/m_s}{1 + \frac{m_d m_c}{m_s m_u}}} Z^{1/2} \\ & \times \left\{ \frac{\tilde{m}_s - \tilde{m}_d}{\sqrt{(1 - \tilde{m}_d)(1 + \tilde{m}_s) + 2Z(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)\left(1 + \frac{(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)}{2}\right)}} \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{m}_c - \tilde{m}_u}{\sqrt{(1 - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_c) + 2Z(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)\left(1 + \frac{(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)}{2}\right)}} \right\} \quad (6.131) \end{aligned}$$

Los valores exactos calculados para  $\sin \theta_1$ ,  $\sin \theta_2$  y  $\sin \theta_3$  que corresponden al mejor ajuste de  $\mathbf{V}_{ij}^{th}$ ,  $J^{th}$  y  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  y  $\gamma^{th}$  a las cantidades determinadas experimentalmente fueron obtenidos de las Ecs. (6.122, 6.125) y (6.130) cuando los valores numéricos de  $\mathbf{V}_{ud}^{th}$ ,  $\mathbf{V}_{td}^{th}$  y  $\mathbf{V}_{ub}^{th}$  calculados de las Ecs. (6.67), (6.123) y (6.127) son substituidos. Obtenemos

$$\sin \theta_1 = 0.222\bar{5} \quad (6.132)$$

$$\sin \theta_2 = 0.0384 \quad (6.133)$$

$$\sin \theta_3 = 0.0162 \quad (6.134)$$

y, de la Ec. (6.112),

$$\sin \delta_{KM} = 0.9938. \quad (6.135)$$

Si los ángulos de mezcla  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  se restringen al primer cuadrante, los valores correspondientes de los ángulos son

$$\theta_1 = 12.86^\circ \quad \theta_2 = 2.2^\circ \quad \text{and} \quad \theta_3 = 0.93^\circ \quad (6.136)$$

los cuales, junto con el valor numérico de la fase  $\delta_{KM}$  que viola CP encontrada en la sección anterior,  $\delta_{KM} = 96.4^\circ$ , dan el mejor conjunto de valores de los parámetros de mezcla en la parametrización de Kobayashi-Maskawa de la matriz de mezclas correspondiente al mejor conjunto de parámetros  $\Phi^* = 90^\circ$  y  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$  de la parametrización de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$  derivada del rompimiento de la simetría de sabor.

Como es de esperarse, de la forma en que fueron obtenidas, los valores numéricos de las magnitudes  $|\mathbf{V}_{ij}^{KM}|$  calculados con la ayuda de estos valores numéricos de los ángulos de mezcla  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , y  $\delta_{KM}$  reproducen los valores centrales de las magnitudes  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$  determinadas experimentalmente, como están dadas en el PDG [5].

En la parametrización de Kobayashi-Maskawa, el invariante de Jarlskog es

$$J = s_1^2 s_2 s_3 c_1 c_2 c_3 s_\delta \quad (6.137)$$

El valor numérico correspondiente es

$$J = 3.0 \times 10^{-5} \quad (6.138)$$

en excelente acuerdo con  $J^{exp}$ .

## 6.9 Resumen y Conclusiones

En la teoría estándar electrodébil de las interacciones de las partículas, tanto las masas de los quarks como los parámetros de mezcla y la fase que viola CP aparecen como parámetros libres independientes. En consecuencia, se introdujeron las parametrizaciones fenomenológicas de la matriz de mezclas de los quarks sin tomar en cuenta las posibles relaciones funcionales entre las masas de los quarks y los parámetros de mezcla de sabor. Estas relaciones funcionales se exhiben de manera explícita en la matriz de mezclas teórica  $\mathbf{V}^{th}$  de los quarks derivada del rompimiento de la simetría permutacional del sabor en el capítulo anterior 5, y publicada en los artículos [76], [77].

En este capítulo, exhibimos de manera explícita la equivalencia de fase de la matriz de mezclas teórica,  $\mathbf{V}^{th}$ , y las parametrizaciones fenomenológicas: la original de Kobayashi-Maskawa [17],  $\mathbf{V}^{KM}$ , y la parametrización estándar y  $\mathbf{V}^{PDG}$  [19] recomendada por el Particle Data Group [84], y la parametrización de Wolfenstein  $\mathbf{V}^W$  [20] las cuales se escriben en términos de cuatro

parámetros libres.

La igualdad de las magnitudes de las entradas correspondientes en  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{KM}$  o  $\mathbf{V}^{PDG}$  nos permitió derivar, expresiones explícitas, exactas para los ángulos de mezcla y la fase que viola CP de las parametrizaciones fenomenológicas como funciones de las razones de masas de los quarks  $m_u/m_t$ ,  $m_c/m_t$ ,  $m_d/m_b$ ,  $m_s/m_b$ , y los parámetros que rompen la simetría del sabor:  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$ .

Los valores numéricos de los parámetros de mezcla  $\sin \theta_{12}^*$ ,  $\sin \theta_{23}^*$ ,  $\sin \theta_{13}^*$  de la parametrización estándar recomendada por el PDG calculados a partir de las razones de las masas de los quarks y los mejores valores de los parámetros  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$ , coinciden casi exactamente con los valores centrales de los mismos parámetros de mezcla determinados de un ajuste a los datos experimentales [12], como era de esperarse de la equivalencia de fase de  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$ , y el buen acuerdo de  $|\mathbf{V}_{ij}^{th}|$  con los correspondientes valores  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$  determinados experimentalmente.

A partir de la parametrización estándar  $\mathbf{V}^{PDG}$  derivamos la parametrización de Wolfenstein exacta y usamos la equivalencia de fase de  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$ , para obtener los valores numéricos de los parámetros de mezcla  $\lambda$ ,  $A$ ,  $\rho$  y  $\eta$  derivados de nuestras expresiones y las razones de masas de los quarks y los valores mejores de los parámetros,  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$ , que rompen la simetría del sabor. De igual manera, de la igualdad de las magnitudes de las entradas correspondientes en  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{KM}$ , derivamos, expresiones explícitas, exactas para los parámetros de mezcla  $\sin \theta_1$ ,  $\sin \theta_2$  and  $\sin \theta_3$  de Kobayashi-Maskawa como funciones de las razones de masas de los quarks y los parámetros  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$  que rompen la simetría permutacional del sabor. Como en el caso anterior, los valores numéricos de los parámetros de mezcla,  $\sin \theta_1^*$ ,  $\sin \theta_2^*$  y  $\sin \theta_3^*$  y la fase que viola CP calculados de nuestras expresiones y las razones de masas de los quarks y los valores mejores de los parámetros,  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$ , que rompen la simetría del sabor, son tales que los valores numéricos de  $|\mathbf{V}_{ij}^{KM}|$  reproduce casi exactamente los valores centrales de los valores determinados experimentalmente de las magnitudes,  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$ , y el invariante de Jarlskog,  $J^{exp}$ , como se reporta en el PDG [5].

El valor numérico de la fase  $\delta_{13} = \arg(\mathbf{V}_{ub}^{*PDG})$  que viola CP calculado de las razones de masas de los quarks y los mejores valores de los parámetros  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$  es  $\delta_{13} = 75.2^\circ$  en buen acuerdo con las cotas extraídas de las medidas precisas de la frecuencia de las oscilaciones de  $B_d^0$  [88] y las medi-

das de las razones exclusivas de decaimiento hadrónico de  $B^\pm \rightarrow \pi K$  [91]. El valor numérico de la fase  $\delta_{KM}$  que viola CP de la parametrización de Kobayashi-Maskawa calculado de las razones de masas de los quarks y los mejores valores de  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$  es  $\delta_{KM}^* = 96.4^\circ$ . No está de mas recalcar que  $\delta_{KM}$  no es un número pequeño como se supone algunas ocasiones [92]-[93].

En conclusión, los tres ángulos de mezcla y la fase que viola CP, los cuales aparecen en la parametrización fenomenológica de la matriz de mezclas de los quarks como parámetros libres linealmente independientes, se expresan en este capítulo como funciones de las cuatro razones de masas de los quarks y los dos parámetros  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$  que rompen la simetría permutacional del sabor. Los valores numéricos de los ángulos de mezcla y la fase que viola CP calculados de las razones de masas de los quarks y el mejor valor de los parámetros  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$  y  $\Phi^* = 90^\circ$  que rompen la simetría coinciden casi exactamente con los valores centrales de los mismos parámetros de mezcla determinados de un ajuste a los datos experimentales. El valor predictivo de la matriz de mezclas teórica  $\mathbf{V}^{th}$  de los quarks implicado por este hecho tiene su origen en la simetría permutacional del sabor del Modelo Estándar y el patrón de rompimiento de simetría supuesto a partir del cual se derivaron las texturas de la matriz de masas de los quarks y la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$ .



# Capítulo 7

## Matriz de mezclas de los leptones derivada del rompimiento de $S(3)_L \otimes S(3)_R$

En este capítulo utilizaremos las ideas de la simetría permutacional del sabor  $S(3)_L \otimes S(3)_R$  y su rompimiento para derivar la matriz de mezclas leptónica  $\mathbf{U}^{th}$ .

Como vimos en el capítulo uno, se ha encontrado evidencia experimental de que los neutrinos tienen masa en las observaciones de neutrinos creados en el interior del Sol, en la atmósfera de la Tierra y en los aceleradores. Los neutrinos con masa diferente de cero se incluyen en el contenido de partículas del Modelo Estándar agregando a la lagrangiana los términos de los singletes derechos  $\nu_{R\ i}$  de los neutrinos. En el Modelo Estándar un neutrino de sabor definido,  $\nu_\alpha$ , no es necesariamente un eigenestado de la masa por lo tanto, un neutrino de sabor definido,  $\nu_\alpha$ , es una superposición lineal coherente de los eigenestados de la masa,

$$\nu_\alpha = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha,i} \nu_i, \quad (7.1)$$

en esta expresión  $\nu_i$  son los eigenestados de masa y los coeficientes  $U_{\alpha,i}$  son los elementos de la matriz de mezclas leptónica.

La matriz de mezclas leptónica es el análogo de la matriz de mezclas de los quarks y también se escribe con cuatro parámetros libres, tres ángulos de mezcla y una fase que viola CP.

En el capítulo 5 encontramos que la matriz de masas de los quarks que se obtiene a partir del rompimiento de la simetría del sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  en la cadena  $S_L(3) \otimes S_R(3) \subset S_L(2) \otimes S_R(2) \subset S_{diag}(2)$  sólo tiene dos parámetros libres: el parámetro de rompimiento de la simetría  $Z$  y la fase que viola CP,  $\phi^q$ . Esto nos permitió construir la matriz de mezclas de los quarks como función de los cocientes de las masas de los quarks y sólo dos parámetros libres  $Z$  y  $\Phi = \phi^u - \phi^d$ . Se obtuvo un ajuste bueno de la matriz de mezclas de los quarks  $V^{th}$  dentro de los límites de un 90% de confianza para un valor de los parámetros de  $Z^* = 2.53125$  y  $\Phi^* = 90^\circ$ .

Es conveniente tener una teoría que nos permita encontrar la matriz de mezclas de los leptones como función de las masas, ya que, como vimos en el caso de los quarks, esto elimina parámetros libres del Modelo Estándar y la teoría es mas predictiva.

En el Modelo Estándar, leptones análogos en diferentes generaciones, digamos  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  y  $e, \mu, \tau$  en el caso de tres familias, están igualmente acoplados a los bosones de norma de las interacciones débiles y electromagnéticas. Por consiguiente, antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma y de que adquieran masa los fermiones, el contenido físico del modelo no cambia si se intercambian los nombres de las familias de los leptones, es decir, si se intercambian  $\nu_e, \nu_\mu$  y  $\nu_\tau$  o  $e, \mu$  y  $\tau$ . Esto significa que, antes del rompimiento de la simetría de norma, la lagrangiana del Modelo Estándar es simétrica respecto del grupo de permutaciones del sabor. En el caso de tres familias, como ya vimos anteriormente, este grupo es el grupo  $S(3)$  de permutaciones de tres objetos que son el nombre del sabor de los leptones en diferentes generaciones de cada sector. En el capítulo 2 el nombre del sabor se denotó con un índice de sabor o índice de familia.

La lagrangiana de Yukawa para tres familias de leptones se escribe de la siguiente manera:

$$L_Y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \bar{L}_{Li} \Gamma_{ij}^\nu \Phi \frac{(1 + \sigma_3)}{2} L_{Rj} + \bar{L}_{Li} \Gamma_{ij}^l \Phi \frac{(1 - \sigma_3)}{2} L_{Rj} \right\} \quad (7.2)$$

donde  $L_1, L_2$  y  $L_3$  denotan los dobletes de isospín débil de los leptones y  $\phi(x)$  es el campo de Higgs,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{h(x)\mathbf{1} + iw_\alpha(x)\sigma^\alpha\} \quad (7.3)$$

Los dobletes de isospín débil se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 L_1(x) &= \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{\nu_e}(x) \\ \psi_1^e(x) \end{pmatrix} \\
 L_2(x) &= \begin{pmatrix} \nu_\mu(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^{\nu_e}(x) \\ \psi_2^e(x) \end{pmatrix} \\
 L_3(x) &= \begin{pmatrix} \nu_\tau(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_3^{\nu_e}(x) \\ \psi_3^e(x) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Conviene reordenar los términos de (7.2) y escribir  $L_Y$  en función del espinor  $\psi^l$  cuyas componentes se definen en el espacio de familias, como se hizo en el capítulo 2 en las Ecs. (2.5) y (2.6), esto es:

$$\begin{aligned}
 \psi^{\nu_e}(x) &= \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \\ \nu_\tau(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{\nu_e}(x) \\ \psi_2^{\nu_e}(x) \\ \psi_3^{\nu_e}(x) \end{pmatrix} \\
 \psi^e(x) &= \begin{pmatrix} e(x) \\ \mu(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^e(x) \\ \psi_2^e(x) \\ \psi_3^e(x) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Esto equivale a introducir un espacio Euclideo real de tres dimensiones  $L_3$ . Como vimos en la Ec (4.6), el grupo  $S_3$  es un grupo no abeliano y tiene seis elementos: la identidad y las permutaciones de los índices 1, 2 y 3. La representación matricial del grupo  $S_3$  en el espacio  $L_3$  está constituida por las matrices que intercambian los índices de sabor, y está formado por tres permutaciones pares y tres impares dadas en las Ecs (4.7). El espacio  $L_3$  tiene dos subespacios invariantes bajo la acción de  $S_3$  que corresponden a las dos representaciones irreducibles de  $S_3$ , un singlete simétrico y un doblete de simetría mixta. El conjunto de los vectores de  $L_3$  invariantes bajo la acción del grupo  $S_3$  es el subespacio invariante  $\mathbf{V}_S$ . Este subespacio es unidimensional, sus elementos son los vectores proporcionales al vector  $|v\rangle_S$  definido como:

$$|v\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

El vector  $|v\rangle_S$  es un singlete de  $S_3$ , es el singlete simétrico.

El espacio  $L_3$  tiene tres dimensiones, por consiguiente, al subespacio  $\mathbf{V}_2$  ortogonal a  $\mathbf{V}_S$  tiene dos dimensiones. También  $\mathbf{V}_2$  es un subespacio invariante



bajo la acción de  $S_3$ . Debemos elegir una base apropiada para el subespacio vectorial  $\mathbf{V}_2$ ; tomaremos a los vectores  $|v\rangle_{2A}$  y  $|v\rangle_{2S}$  ortogonales entre sí, ortogonales a  $|v\rangle_S$  y normalizados a la unidad

$$|v\rangle_{2A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad |v\rangle_{2S} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Los vectores  $|v\rangle_S$ ,  $|v\rangle_{2A}$  y  $|v\rangle_{2S}$  forman una base completa de  $L_3$ .

Los vectores de  $\mathbf{V}_2$  son combinaciones lineales de  $|v\rangle_{2A}$  y  $|v\rangle_{2S}$ . Los vectores  $|v\rangle_{2A}$  y  $|v\rangle_{2S}$  son antisimétricos y simétricos respecto de las permutaciones de los dos primeros índices del sabor.

El acoplamiento de Yukawa en la notación de familias (7.5) es

$$L_y = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \bar{\psi}_{Li}^{\nu_e} \Gamma_{ij}^{\nu_e} \phi \psi_{Rj}^{\nu_e} + \bar{\psi}_{Rj}^e \Gamma_{ij}^e \phi \psi_{Li}^e \right) + h.c. \quad (7.8)$$

Antes del rompimiento de la simetría de norma, los leptones no tienen masa y la teoría es quirral. Por lo tanto, los espinores izquierdos y derechos se transforman independientemente. Esto es

$$\psi_L^l(x) \rightarrow \psi_L'^l(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^l(x) \\ \psi_{2L}^l(x) \\ \psi_{3L}^l(x) \end{pmatrix} \rightarrow l = \nu_e, e \quad (7.9)$$

e igualmente para los espinores derechos

$$\psi_R^l(x) \rightarrow \psi_R'^l(x) = \tilde{\mathbf{g}} \begin{pmatrix} \psi_{1R}^l(x) \\ \psi_{2R}^l(x) \\ \psi_{3R}^l(x) \end{pmatrix} \rightarrow l = \nu_e, e \quad (7.10)$$

$\mathbf{g} \in S_L(3)$  actúa sobre los espinores izquierdos y  $\tilde{\mathbf{g}} \in S_R(3)$  actúa sobre los espinores derechos.

Así pues, el grupo de la simetría permutacional del sabor de la forma bilineal (7.2) es  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , cuyos elementos son las parejas  $(\mathbf{g}, \tilde{\mathbf{g}})$  con  $\mathbf{g} \in S_L(3)$  y  $\tilde{\mathbf{g}} \in S_R(3)$ .

Bajo la acción del grupo de sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , las corrientes cargadas se transforman de la siguiente forma:

$$J_\mu^\pm \rightarrow J_\mu'^\pm = \bar{\psi}_L^{\nu_e} \gamma_\mu \psi_L^e + h.c. \quad (7.11)$$

sustituyendo las expresiones para  $\psi_L^{\prime e}$  y  $\bar{\psi}_L^{\prime \nu_e}$  se obtiene:

$$J_\mu^{\prime \pm} = \bar{\psi}_L^{\nu_e} \mathbf{g}_{\nu_e}^{-1} \mathbf{g}_e \gamma_\mu \psi_L^e + h.c.. \quad (7.12)$$

De esta expresión, queda claro que las corrientes cargadas  $J_\mu^{\prime \pm}$  quedarán invariantes bajo las transformaciones del grupo de simetría de sabor si y sólo si  $\mathbf{g}_{\nu_e}$  y  $\mathbf{g}_e$  son la misma matriz. Esto es, la condición de invariancia de las corrientes cargadas bajo la acción del grupo de simetría de las familias implica que los campos de los leptones neutros y los leptones cargados se transformen con el mismo grupo y con el mismo elemento del grupo. A esto se debe que no hayamos puesto un índice  $\nu_e$  o  $e$  en los elementos del grupo que aparecen en las ecuaciones (7.9) y (7.10).

Cuando la simetría de norma se rompe espontáneamente, los leptones adquieren masa y la teoría deja de ser quiral. Por lo tanto, los campos de los leptones neutros y los leptones cargados se transforman de la siguiente forma:

$$\bar{\psi}^l(x) \rightarrow \bar{\psi}^{\prime l}(x) = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1L}^l(x) \\ \psi_{2L}^l(x) \\ \psi_{3L}^l(x) \end{pmatrix} + \mathbf{g} \begin{pmatrix} \psi_{1R}^l(x) \\ \psi_{2R}^l(x) \\ \psi_{3R}^l(x) \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

Las componentes de quiralidad izquierda y derecha del mismo campo se transforman con el mismo elemento del grupo. El grupo de la simetría del sabor de la forma bilineal (7.12) es el grupo  $S^{diag.}(3)$  cuyos elementos son las parejas  $(\mathbf{g}, \mathbf{g}')$  con primer elemento  $\mathbf{g} \in S_L(3)$  y segundo elemento  $\mathbf{g}' \in S_R(3)$ , y  $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$ . Claramente,  $S^{diag.}(3) \subset S_L(3) \otimes S_R(3)$ .

Bajo la acción del grupo de simetría de familias  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , el término de masa proveniente del acoplamiento de Yukawa se transforma de la siguiente forma:

$$L_y \rightarrow L'_y = \bar{\psi}_L^{\prime \nu_e} \mathbf{M}^{\nu_e} \psi_R^{\prime \nu_e} + \bar{\psi}_R^{\prime e} \mathbf{M}^e \psi_L^{\prime e} + h.c. \quad (7.14)$$

sustituyendo las expresiones para  $\psi^{\prime l}$  y  $\bar{\psi}^{\prime l}$  obtenemos:

$$L'_y = \bar{\psi}_L^{\nu_e} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{\nu_e} \mathbf{g} \psi_R^{\nu_e} + \bar{\psi}_R^e \mathbf{g}^T \mathbf{M}^e \mathbf{g} \psi_L^e + h.c. \quad (7.15)$$

Por consiguiente, bajo la acción del grupo de sabor  $S^{diag}(3)$ , las matrices de masas  $\mathbf{M}^l$  se transforman de acuerdo con la siguiente regla:

$$\mathbf{M}^{\prime \nu_e} = \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{\nu_e} \mathbf{g} \quad y \quad \mathbf{M}^{\prime e} = \mathbf{g}^T \mathbf{M}^e \mathbf{g}. \quad (7.16)$$

Si pedimos que el sector de Yukawa sea invariante bajo la acción del grupo de familias  $S^{diag}(3)$ , se debe cumplir que:

$$\mathbf{M}'^l = \mathbf{M}^l \quad l = \nu_e, e. \quad (7.17)$$

Esto es, el sector de Yukawa del Modelo Estándar tiene la simetría de familias si la matriz de masas conmuta con todos los elementos del grupo de sabor  $S_3$ :

$$[\mathbf{M}_S^{\nu_e}, \mathbf{g}] = 0 \quad y \quad [\mathbf{M}_S^e, \mathbf{g}] = 0, \quad (7.18)$$

$\mathbf{M}_S^l$  denota a la matriz de masas de los leptones cargados y neutros que tiene la simetría de familias.

## 7.1 La matriz de masas de los leptones

Hemos supuesto que el campo de Higgs no tiene índices de sabor y que es un singlete bajo el grupo de simetría de las familias. Si tomamos valores entre estados del vacío del campo  $\phi(x)$  tales que  $\langle 0|h(x)|0 \rangle = v$  y  $\langle 0|w(x)|0 \rangle = 0$ , al romper la simetría de norma obtenemos la matriz hermitiana de masas  $\mathbf{M}^l$  de  $3 \times 3$ :

$$\mathbf{M}^l = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^l & \Gamma_{12}^l & \Gamma_{13}^l \\ \Gamma_{12}^{*l} & \Gamma_{22}^l & \Gamma_{23}^l \\ \Gamma_{13}^{*l} & \Gamma_{23}^{*l} & \Gamma_{33}^l \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Con ayuda de la identidad (4.25)  $\mathbf{M}^l$  se puede descomponer en la suma de un término invariante bajo la acción del grupo  $S_3^{diag}$  y otro que no lo es

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^l &= (\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2) \mathbf{M}^l (\mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2) \\ &= \mathbf{T}_S \mathbf{M}^l \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_2 \mathbf{M}^l \mathbf{T}_2 + (\mathbf{T}_S \mathbf{M}^l \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 \mathbf{M}^l \mathbf{T}_S) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Los dos primeros términos en el miembro derecho de esta ecuación corresponden a cada una de las dos representaciones irreducibles,  $\mathbf{1}_S$  y  $\mathbf{2}$ , de  $S_3$ . En consecuencia, bajo la acción del grupo  $S_3^{diag}$ , el término de masa proveniente de los acoplamientos de Yukawa, en el caso de tres familias se puede descomponer en la suma de tres términos:

$$L_Y = L_{YS}[\mathbf{T}_S \mathbf{M}^l \mathbf{T}_S] + L_{Y2}[\mathbf{T}_2 \mathbf{M}^l \mathbf{T}_2] + L_{YA}[(\mathbf{T}_S \mathbf{M}^l \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 \mathbf{M}^l \mathbf{T}_S)] \quad (7.21)$$

El término  $L_{YS}$  es invariante bajo el intercambio del índice de familias

$$\psi \rightarrow \psi' = \mathbf{A}_i \psi, \quad (7.22)$$

pero los términos  $L_{YA}$  y  $L_{Y2}$  no lo son.

La condición de invariancia de  $L_Y$  respecto de  $S_L(3) \times S_R(3)$  se satisface si  $\Gamma_{11}^l = \Gamma_{ij}^l$  con  $i, j = 1, 2, 3$  y las fases toman los valores  $\phi_{12}^l = 0, \pi$ , y  $\phi_{13}^l = \phi_{23}^q = 0$ . Se sigue de aquí que las matrices de masas para los leptones cargados y neutros que resultan de la condición de invariancia de  $L_Y$  bajo la acción del grupo de la simetría permutacional del sabor  $S_L(3) \times S_R(3)$ , en la representación de norma, tienen la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_S^l = \frac{v}{\sqrt{2}} 3\Gamma_{33}^l \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

La matriz  $\mathbf{M}_S^l$  conmuta con los elementos del grupo  $S(3)$ .

Las matrices  $\mathbf{U}^{\nu e}$  y  $\mathbf{U}^e$  que transforman a los campos de los leptones de la representación de norma a la representación adaptada a la simetría ó representación jerárquica estan dadas en las Ecs. (4.52)

$$\mathbf{U}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \nu_e, \mathbf{e}.$$

Si llamamos  $\psi'^1 = \mathbf{U}^{1\dagger} \psi^1$  a los campos en la representación adaptada a la simetría se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \nu'_\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^{\nu e} + \psi_2^{\nu e} + \psi_3^{\nu e}) \\ \nu'_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^{\nu e} + \psi_2^{\nu e} - 2\psi_3^{\nu e}) \\ \nu'_e = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^{\nu e} - \psi_2^{\nu e}) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau' = \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1^e + \psi_2^e + \psi_3^e) \\ \mu' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^e + \psi_2^e - 2\psi_3^e) \\ e' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^e - \psi_2^e) \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

De este modo se asigna el leptón pesado al singlete y los dos leptones ligeros a cada una de las componentes del doblete así que cada campo de un leptón queda en una representación irreducible de  $S_3$ . La lagrangiana en la representación jerárquica o adaptada a la simetría tiene la siguiente forma:

$$L_Y^m = \frac{v}{\sqrt{2}} 3\Gamma_{33}^{\nu e} \bar{\psi}'^{\nu e} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi'^{\nu e}$$

$$+ \frac{v}{\sqrt{2}} 3\Gamma_{33}^e \bar{\psi}'^e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi'^e. \quad (7.25)$$

Vemos que, en este caso particular, la matriz de masas es diagonal en la representación adaptada a la simetría y, por consiguiente, ésta es también la representación de masas. Cada uno de los campos de los leptones,  $\nu'_e, \nu'_\mu, \nu'_\tau$  y  $e', \mu', \tau'$ , queda así asignado a una representación irreducible de  $S_3$ . Como las matrices  $\mathbf{U}^e$  y  $\mathbf{U}^{\nu_e}$  que diagonalizan a los leptones  $\nu_e$  y  $e$  respectivamente son iguales,  $\mathbf{U}^e = \mathbf{U}^{\nu_e}$ , la matriz de mezclas de los leptones  $\mathbf{U}$  para tres familias

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\nu_e \dagger} \mathbf{U}^e \quad (7.26)$$

es la matriz unidad y no mezcla a los campos de los leptones

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Esto es, la invariancia de  $L_{YS}$  respecto de la simetría permutacional  $S_3^{diag}$  implica que los ángulos de mezcla sean nulos, y que no haya una relación funcional con las masas de los leptones. Para obtener un valor no nulo de los ángulos de mezcla y encontrar la relación funcional entre ángulos de mezcla y masas de los leptones, es necesario romper la simetría permutacional  $S_3$ . Por analogía con el caso de dos familias de quarks, para obtener la matriz de mezclas de los quarks a partir de la simetría de familias, es necesario romper la simetría permutacional del sabor  $S_3$ . Para romper la simetría permutacional  $S_3$ , basta con sumar a la matriz de masas de los leptones de la Ec (7.23) otros tensores con propiedades de transformación definidas bajo la acción del grupo  $S_3$ . Esto se verá en la siguiente sección.

## 7.2 Matriz de masas leptónica derivada de $S_L(3) \otimes S_R(3)$

Los términos de masa de los leptones en la lagrangiana, que se obtienen tomando el valor esperado del campo de Higgs entre estados del vacío en el término de acoplamiento de Yukawa de los leptones, dan origen a las matrices de masas  $\mathbf{M}_e$  y  $\mathbf{M}_{\nu_e}$  de los leptones,

Algunos autores [1-3] han señalado que las matrices de masas realistas de los leptones se obtienen de la simetría permutacional del sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  y su rompimiento espontaneo o explícito. Bajo la simetría exacta  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , el espectro de masas para los sectores de leptones cargados o neutros, consiste de una partícula masiva (leptones  $\tau$  o  $\nu_\tau$ ) en una representación irreducible de singlete y un par de partículas de masa nula en una representación irreducible de doblete. En la base débil, la matriz de masas con la simetría exacta  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  es:

$$\mathbf{M}'_{3l,W} = \frac{m_{3l}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W, \quad (7.28)$$

donde  $m_{3l}$  denota la masa del leptón de la tercera familia,  $\tau$  o  $\nu_\tau$ . Para generar masas para la segunda familia, uno tiene que romper la simetría permutacional  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . Esto se puede hacer sumando a  $\bar{\mathbf{L}}_L(\mathbf{M}'_{3l,W})\mathbf{L}_R$  un término  $\bar{\mathbf{L}}_L(\mathbf{M}'_{2l,W})\mathbf{L}_R$  que es invariante bajo  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ , pero rompe la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . La forma más general de una matriz  $\mathbf{M}'_{2l,W}$  que es invariante bajo las permutaciones de los primeros dos renglones o dos columnas es:

$$\mathbf{M}'_{2l,W} = m_{3l} \begin{pmatrix} \alpha' & \alpha' & \beta' \\ \alpha' & \alpha' & \beta' \\ \beta' & \beta' & \gamma \end{pmatrix}_W. \quad (7.29)$$

Sin perder generalidad, podemos descomponer esta matriz en la suma de un término invariante bajo  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  más una matriz de traza nula  $\mathbf{M}_{2l,W}$  invariante bajo  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{2l,W} &= \frac{m_{3l}}{3} \left\{ (2\alpha' + \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W \right. \\ &+ \left. \begin{pmatrix} \alpha' - \gamma & \alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma \\ \alpha' - \gamma & \alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma \\ 3\beta' - 2\alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma & -2(\alpha' - \gamma) \end{pmatrix}_W \right\} \quad (7.30) \end{aligned}$$

El primer término en el lado derecho de (7.30) se suma al término  $\mathbf{M}'_{3l,W}$ .

$$\mathbf{M}_{3l,W} = \frac{m_{3l}}{3} (1 - \Delta_l) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W. \quad (7.31)$$

donde  $\Delta_l$  sustituye el factor  $-(2\alpha' + \gamma)$ . El segundo término en el lado derecho de (7.30) da la forma mas general de la matriz de traza nula  $\mathbf{M}_{2l,W}$  que rompe  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  y da masa a la segunda familia,

$$\mathbf{M}_{2l,W} = \frac{m_{3l}}{3} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & -2\alpha \end{pmatrix}_W, \quad (7.32)$$

en esta expresión hemos simplificado la notación nombrando  $\alpha$  y  $\beta$  en (7.32), los términos  $(\alpha' - \gamma)$  y  $(3\beta' - 2\alpha' - \gamma)$  en (7.30).

De la expresión (7.32) es evidente que  $\mathbf{M}_{2l,W}$  es una combinación lineal de dos matrices numéricas independientes,  $\mathbf{M}_{2l,W}^A$  y  $\mathbf{M}_{2l,W}^S$ ,

$$\mathbf{M}_{2l,W} = \frac{m_{3l}}{3} \left( \sqrt{8}\alpha \mathbf{M}_{2l,W}^A + 2\beta \mathbf{M}_{2l,W}^S \right) \quad (7.33)$$

donde

$$\mathbf{M}_{2l,W}^A = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_W \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_{2l,W}^S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_W. \quad (7.34)$$

Esta propiedad se utilizó para caracterizar el patrón de rompimiento de la simetría del sabor de los quarks, y por analogía, la utilizaré también para los leptones.

Podemos, por ahora, enfocar nuestra atención en el rompimiento de la simetría  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . Para dar masa a la primera familia, agregamos otro término  $\mathbf{M}_{1l}$  a la matriz de masas. En analogía con el caso de dos familias de quarks, supondremos que  $\mathbf{M}_{1l}$  se transforma como el tensor de simetría mixta del doblete del subgrupo  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  del grupo  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  que mezcla las representaciones irreducibles en el doblete de  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . Poner a la primer familia en una representación compleja nos permitirá tener una fase que viola CP en la matriz de mezclas. Entonces, en la base débil,  $\mathbf{M}_{1l}$  está dada por

$$\mathbf{M}_{1l,W} = \frac{m_{3l}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} A_1 & iA_2 & -A_1 - iA_2 \\ -iA_2 & -A_1 & A_1 + iA_2 \\ -A_1 + iA_2 & A_1 - iA_2 & 0 \end{pmatrix}_W. \quad (7.35)$$

Finalmente, sumando los tres términos de masa, (7.31), (7.32) y (7.35), obtenemos la matriz de masas  $\mathbf{M}_l$  en la base débil.

### 7.3 Textura de Fritzsich modificada

En la base adaptada a la simetría, la matriz de masas  $M_{l,H}$  en la base adaptada a la simetría está relacionada a la matriz de masas en la base débil por la transformación unitaria

$$M_{l,H} = U^\dagger M_{l,W} U, \tag{7.36}$$

donde

$$U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{7.37}$$

En esta base,  $M_l$  toma la forma

$$\begin{aligned} M_{lH} &= m_{3l} \left[ \begin{pmatrix} 0 & A_l e^{-i\phi_l} & 0 \\ A_l e^{i\phi_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_H + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_l + \delta_l & B_l \\ 0 & B_l & \Delta_l - \delta_l \end{pmatrix}_H \right] \\ &+ m_{3l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Delta_l \end{pmatrix}_H = m_{3l} \begin{pmatrix} 0 & A_l e^{-i\phi_l} & 0 \\ A_l e^{i\phi_l} & -\Delta_l + \delta_l & B_l \\ 0 & B_l & 1 - \delta_l \end{pmatrix}_H \end{aligned} \tag{7.38}$$

donde

$$\delta_l = \Delta_l - \frac{2}{9}(\alpha + 2\beta) \quad \text{and} \quad B_l = \frac{2}{9}(\sqrt{8}\alpha - \frac{1}{\sqrt{8}}\beta). \tag{7.39}$$

De la jerarquía de masas tan marcada en las familias de los leptones cargados y si suponemos que el espectro de masas de los neutrino es jerárquico,  $m_{3l} \gg m_{2l} > m_{1l}$ , esperamos que  $1 - \delta_l$  sea muy cercano a la unidad. Los elementos de la matriz de masas se pueden expresar inmediatamente en términos de los eigenvalores de las masas ( $m_{1l}, -m_{2l}, m_{3l}$ ) y el parámetro pequeño  $\delta_l$ . Al calcular los invariantes de  $M_l$ ,  $tr M_l$ ,  $tr M_l^2$  y  $det M_l$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} A_l^2 &= \tilde{m}_{1l} \tilde{m}_{2l} (1 - \delta_l)^{-1} \quad , \quad \Delta_l = \tilde{m}_{2l} - \tilde{m}_{1l} \\ B_l^2 &= \delta_l ((1 - \tilde{m}_{1l} + \tilde{m}_{2l} - \delta_l) - \tilde{m}_{1l} \tilde{m}_{2l} (1 - \delta_l)^{-1}) \end{aligned} \tag{7.40}$$

donde  $\tilde{m}_{1l} = m_{1l}/m_{3l}$  y  $\tilde{m}_{2l} = m_{2l}/m_{3l}$ .

Si cada uno de los posibles patrones de rompimiento de la simetría se caracteriza ahora por la razón

$$Z_l^{1/2} = B_l / (-\Delta_l + \delta_l), \tag{7.41}$$



obtenemos el parámetro pequeño  $\delta_l$  como la solución de la ecuación cúbica

$$\delta_l [(1 + \tilde{m}_{2l} - \tilde{m}_{1l} - \delta_l)(1 - \delta_l) - \tilde{m}_{1l}\tilde{m}_{2l}] - Z_l(1 - \delta_l)(-\tilde{m}_{2l} + \tilde{m}_{1l} + \delta_l)^2 = 0 \quad (7.42)$$

que se anula cuando  $Z_l$  se anula.

La ecuación (7.42) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \delta_l^3 &- \frac{1}{(Z_l + 1)} [Z_l (2(\tilde{m}_{2l} - \tilde{m}_{1l}) + 1) + (\tilde{m}_{2l} - \tilde{m}_{1l}) + 2] \delta_l^2 \\ &+ \frac{1}{Z_l + 1} [Z_l (\tilde{m}_{2l} - \tilde{m}_{1l}) (\tilde{m}_{2l} - \tilde{m}_{1l} + 2) + (1 - \tilde{m}_{1l}) (1 + \tilde{m}_{2l})] \delta_l \\ &- \frac{Z_l(\tilde{m}_{2l} - \tilde{m}_{1l})^2}{Z_l + 1} = 0. \end{aligned} \quad (7.43)$$

## 7.4 La matriz de mezclas leptónica $U^{th}$

Por analogía con el sector de los quarks del Modelo Estándar, usamos la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  como la simetría de familias del sector leptónico y rompemos la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  siguiendo un esquema de rompimiento semejante y ponemos la fase que viola CP en el término que mezcla las componentes del doblete. Cuando se rompe la simetría de norma, y la simetría permutacional de las familias no está rota, sólo adquieren masa los fermiones de la tercer familia. Para generar la masa de los leptones de las primeras dos familias, debemos romper la simetría de familias  $S_L(3) \otimes S_R(3) \subset S_L(2) \otimes S_R(2) \subset S_{diag}(2)$ . Es este rompimiento y la consecuente mezcla de las representaciones irreducibles de singlete y doblete del grupo de simetría de familias el que genera la textura de la matriz de masas de los leptones. Las masas que se generan de esta manera son masas de Dirac.

La matriz de masas Hermitiana  $M_l$  puede ser escrita en términos de una matriz real simétrica  $\bar{M}_l$  y una matriz diagonal de fases  $P_l$  como sigue:

$$M_l = P_l \bar{M}_l P_l^\dagger. \quad (7.44)$$

La matriz real simétrica  $\bar{M}_l$  puede ponerse en la forma diagonal por medio de una transformación ortogonal

$$\bar{M}_l = O_l M_l^{diag} O_l^T, \quad (7.45)$$

donde

$$M_l \text{ diag} = m_{3l} \text{ diag} [\tilde{m}_{1l}, -\tilde{m}_{2l}, 1], \quad (7.46)$$

con subíndices 1,2,3 refiriéndose a  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  en el sector neutro y  $e, \mu, \tau$  en el sector cargado. Después de diagonalizar las matrices de masas  $M_l$ , uno obtiene la matriz de mezclas como:

$$U^{th} = O_{\nu_e}^T P^{(\nu_e-e)} O_e, \quad (7.47)$$

donde  $P^{(\nu_e-e)}$  es la matriz diagonal de las fases relativas.

En la base jerárquica, donde  $M_l$  está dada por las ecs. (7.38) -(7.40),  $P^{(\nu_e-e)}$  es

$$P^{(\nu_e-e)} = \text{diag} [1, e^{i\Phi}, e^{i\Phi}], \quad (7.48)$$

donde

$$\Phi = \phi_{\nu_e} - \phi_e, \quad (7.49)$$

y la matriz ortogonal  $O_l$  está dada por [72],

$$O_l = \begin{pmatrix} (\tilde{m}_{2l}f_1/D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{1l}f_2/D_2)^{1/2} & (\tilde{m}_{1l}\tilde{m}_{2l}f_3/D_3)^{1/2} \\ ((1-\delta_l)\tilde{m}_{1l}f_1/D_1)^{1/2} & ((1-\delta_l)\tilde{m}_{2l}f_2/D_2)^{1/2} & ((1-\delta_l)f_3/D_3)^{1/2} \\ -(\tilde{m}_{1l}f_2f_3/D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{2l}f_1f_3/D_2)^{1/2} & (f_1f_2/D_3)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (7.50)$$

donde

$$f_1 = 1 - \tilde{m}_{1l} - \delta_l, \quad f_2 = 1 + \tilde{m}_{2l} - \delta_l, \quad f_3 = \delta_l \quad (7.51)$$

$$D_1 = (1 - \delta_l) (1 - \tilde{m}_{1l}) (\tilde{m}_{2l} + \tilde{m}_{1l}), \quad (7.52)$$

$$D_2 = (1 - \delta_l) (1 + \tilde{m}_{2l}) (\tilde{m}_{2l} + \tilde{m}_{1l}), \quad (7.53)$$

$$D_3 = (1 - \delta_l) (1 + \tilde{m}_{2l}) (1 - \tilde{m}_{1l}). \quad (7.54)$$

De las ecs. (7.44-7.54), los elementos de la matriz  $\mathbf{U}^{th}$  pueden ser escritos en términos de las cuatro razones de masa:  $(\tilde{m}_{\nu_e}, \tilde{m}_{\nu_\mu}, \tilde{m}_e, \tilde{m}_\mu)$  y tres parámetros libres reales:  $\delta_{\nu_e}, \delta_e$  y  $\Phi = \phi_{\nu_e} - \phi_e$ . La fase  $\Phi$  mide el desajuste en el rompimiento de simetría de  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  de los sectores  $\nu_e$  y  $e$ . En esta representación de la matriz  $\mathbf{U}^{th}$ , es esta fase y, consecuentemente, este desajuste, el que es responsable de la violación de CP.

Como no hay datos suficientes para estudiar el patrón de rompimiento de la simetría del sabor en el caso de los leptones, por simplicidad supondré que el rompimiento es semejante al que identificamos en el sector de quarks. Esto es,

$$Z_u^{1/2} = Z_d^{1/2} = Z_{\nu_e}^{1/2} = Z_e^{1/2} = Z^{*1/2} = \frac{1}{2}(\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{8}}), \quad (7.55)$$

Sustituyendo en la expresión (7.44) a  $M_{\nu_e}$  y  $M_e$ , dadas en (7.38), con  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$ , podemos calcular la matriz de mezclas  $\mathbf{U}^{th}$  como función de las masas de los leptones. En el cálculo de  $\mathbf{U}^{th}$  usaré la masa de los neutrino fija a los valores de la cota dada por Peccei [30]

$$\begin{aligned} m_{\nu_e} &< 3.9 \text{ eV (90\%N.C.)} \\ m_{\nu_\mu} &< 170 \text{ KeV (90\%N.C.)} \\ m_{\nu_\tau} &< 18.2 \text{ MeV (95\%N.C.)}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

las masas de los electrones fueron tomadas del PDG [5], los valores para las masas de los leptones cargados son

$$\begin{aligned} m_e &= 0.51099907 \pm 0.00000015 \text{ MeV}, \\ m_\mu &= 105.658389 \pm 0.000034 \text{ MeV}, \\ m_\tau &= 1777.05_{-0.29}^{+0.29} \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (7.57)$$

La matriz de mezclas de los leptones que resulta de tomar los valores centrales de las masas es:

$$\mathbf{U}^{th} = \begin{pmatrix} 0.9976 & 0.0695e^{i179.9} & 0.0004e^{i0.8} \\ 0.0695e^{i178.5} & 0.9955e^{i1.6} & 0.065e^{i178.4} \\ 0.0048e^{i358.4} & 0.065e^{i271.6} & 0.998e^{i88.4} \end{pmatrix} \quad (7.58)$$

Se obtiene un valor del invariante de Jarlskog  $J = 0.000001$  y para el triángulo unitario obtenemos dos ángulos iguales,  $\alpha = 47^\circ$ ,  $\gamma = 47^\circ$  y  $\beta = 86^\circ$ .

En el caso en el cual  $\Phi = \Phi^* = 90^\circ$  y no hay rompimiento de la simetría permutacional  $Z = 0$ , esto es, cuando el  $\tau$  y el  $\nu_\tau$  se encuentran en las representaciones irreducibles de singlete del grupo de familias, y las partículas asociadas al doblete no están mezcladas con el singlete, obtenemos la matriz de mezclas siguiente:

$$|U^{th}| = \begin{pmatrix} 0.9976e & 0.0695 & 0.0000 \\ 0.0695 & 0.9976 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (7.59)$$

con el término equivalente al ángulo de Cabibbo igual a  $\theta_C = 4.0^\circ$ . Encontramos que en esta representación de la matriz de mezclas de los leptones, los elementos de la diagonal tienen valores muy cercanos a la unidad; esto nos indica que el electrón y su correspondiente neutrino casi no se mezclan y lo mismo ocurre para las otras dos familias de leptones. Esto se ve de los valores numéricos que obtuvimos para la matriz de mezclas leptónica; por ejemplo, cuando un neutrino del electrón absorbe o atrapa un bosón  $W^-$  se transforma con 99% de probabilidad en un electrón, y la probabilidad de que se transforme en un muón o en un tau es consecuentemente muy pequeña. Encontramos también, que en el caso en el cual la fase  $\Phi$  que viola CP es nula, los valores absolutos de los elementos de la matriz de mezclas para tres familias son los mismos que con  $\Phi^*$ ; esto es,

$$|U^{th}| = \begin{pmatrix} 0.998 & 0.065 & 0.0006 \\ 0.064 & 0.996 & 0.065 \\ 0.005 & 0.065 & 0.998 \end{pmatrix} \quad (7.60)$$

de acuerdo con este resultado, de la medida de las magnitudes de los elementos de la matriz de mezclas no es posible distinguir si hay o no violación de CP en el sector leptónico, ya que los resultados numéricos con  $\Phi^*$  y  $\Phi = 0$  son muy parecidos.

Para tres familias con  $\Phi = \Phi^*$ ,  $Z = Z^*$  y masa del neutrino del electrón cero obtenemos la matriz de mezclas siguiente:

$$|U^{th}| = \begin{pmatrix} 0.9976 & 0.0694 & 0.0003 \\ 0.0692 & 0.9955 & 0.065 \\ 0.0048 & 0.065 & 0.998 \end{pmatrix} \quad (7.61)$$

con un valor de  $J = 0$  y, en consecuencia, un triángulo de unitaridad colapsado a una línea. De comparar las dos expresiones para la matriz de mezclas,

vemos que ambas matrices son casi iguales; por lo cual, no podemos inferir de estos valores de la matriz de mezclas si la masa del neutrino del electrón es o no nula. Podemos decir que esta masa es distinta de cero solamente si se mide el triángulo unitario.

El invariante de Jarlskog,  $J$ , puede calcularse directamente del conmutador de las matrices de masas [2]

$$J = -\frac{\det\{-i[\mathbf{M}_{\nu_e,H}, \mathbf{M}_{e,H}]\}}{F} \quad (7.62)$$

donde

$$F = (1 + \tilde{m}_{\nu_\mu})(1 - \tilde{m}_{\nu_e})(\tilde{m}_{\nu_\mu} + \tilde{m}_{\nu_e})(1 + \tilde{m}_\mu)(1 - \tilde{m}_e)(\tilde{m}_\mu + \tilde{m}_e). \quad (7.63)$$

Sustituyendo la expresión (7.38) por  $\mathbf{M}_{\nu_e}$  y  $\mathbf{M}_e$ , en (7.62), con  $Z_{\nu_e}^{1/2} = Z_e^{1/2} = Z^{1/2}$ , da

$$\begin{aligned} J = & \frac{Z \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_e}/\tilde{m}_{\nu_\mu}}{1-\delta_{\nu_e}}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_e/\tilde{m}_\mu}{1-\delta_e}} \sin\Phi}{(1 + \tilde{m}_{\nu_\mu})(1 - \tilde{m}_{\nu_e})(1 + \tilde{m}_{\nu_e}/\tilde{m}_{\nu_\mu})(1 + \tilde{m}_\mu)(1 - \tilde{m}_e)(1 + \tilde{m}_e/\tilde{m}_\mu)} \\ & \times \left\{ [(-\Delta_{\nu_e} + \delta_{\nu_e})(1 - \delta_e) - (-\Delta_e + \delta_e)(1 - \delta_{\nu_e})]^2 \right. \\ & - \left( \frac{\tilde{m}_{\nu_e}\tilde{m}_{\nu_\mu}}{1 - \delta_{\nu_e}} \right) (-\Delta_e + \delta_e)^2 - \frac{\tilde{m}_e\tilde{m}_\mu}{1 - \delta_e} (-\Delta_{\nu_e} + \delta_{\nu_e})^2 \\ & \left. + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_e}\tilde{m}_{\nu_\mu}}{1 - \delta_{\nu_e}}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_e\tilde{m}_\mu}{1 - \delta_e}} (-\Delta_{\nu_e} + \delta_{\nu_e})(-\Delta_e + \delta_e) \cos\Phi \right\}. \quad (7.64) \end{aligned}$$

Expresiones explícitas para  $\Delta_l$  y  $\delta_l$  en términos de las masas de los leptones están dadas en las ecs. (7.40) y (7.43). De esta manera, obtenemos una expresión cerrada exacta para  $J$  en términos de las masas de los leptones, el parámetro  $Z$  de rompimiento de la simetría y la fase  $\Phi$  que viola  $CP$ . Recordemos que un valor no nulo de  $J$  es una condición necesaria y suficiente para la violación de  $CP$  [2]. De la ec.(7.64), es evidente que  $J$  se anula cuando  $Z$ ,  $\sin\Phi$  y  $\tilde{m}_{\nu_e}$  o  $\tilde{m}_e$  se anulan. Por lo tanto, la violación de  $CP$  y el consecuente no anulamiento de  $Z$  implica necesariamente una mezcla de representaciones de singlete y de doblete de  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ .

### 7.4.1 Oscilaciones de Neutrinos

En el capítulo uno vimos que la probabilidad de encontrar un neutrino de sabor  $\nu_\beta$  en un rayo de neutrinos de sabor  $\nu_\alpha$  está dada por la matriz de mezclas,

$$\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(X) \rangle = |U_{\alpha,i}^{th}|^2 |U_{\beta,i}^{th}|^2 + \sum_{i \neq j} U_{\alpha,i}^{th} U_{\beta,i}^{th*} U_{\alpha,j}^{th*} U_{\beta,j}^{th} \cos\left(\frac{2\pi x}{l_{ij}}\right) \quad (7.65)$$

$x$  es el punto en el que se observa al  $\nu_\beta$  medido a partir de la fuente, y  $l_{ij}$  es la longitud de oscilación definida en el capítulo uno como:

$$l_{ij} = \frac{2\pi}{E_i - E_j}. \quad (7.66)$$

En un rayo de neutrinos que se preparan con un sabor definido  $\nu_\alpha$ , la oscilación de neutrinos se puede ver de dos maneras: primero, podemos buscar que en el rayo de neutrinos aparezca un neutrino de sabor diferente  $\nu_\beta$ . Segundo, uno puede buscar que desaparezca alguno de los neutrinos del flujo original, o buscar una dependencia de este flujo con la distancia de oscilación  $l$ . El punto principal del argumento es que la oscilación de neutrinos ocurre si las masas de los neutrinos no son iguales y, en consecuencia, la matriz de mezclas tiene ángulos de mezcla no nulos.

Para ilustrar los resultados que se obtienen de la matriz de mezclas leptónica  $U^{th}$ , tomaremos los datos del experimento K2K de KEK a SuperKamiokande; en este experimento se usan neutrinos del muón con una energía de 1.4 GeV; la longitud de la línea de base es de 250 Km. En la figura (7.1) se muestra la probabilidad de encontrar un neutrino del electrón en el rayo de neutrinos del muón; de esta figura se puede ver que sólo dos de cada cien neutrinos detectados podrían ser neutrinos del electrón.

En la figura (7.2) podemos ver cómo cambia la probabilidad de encontrar un neutrino del muón en el rayo de neutrinos del muón para distancias grandes.

La probabilidad de encontrar un neutrino del muón en el rayo de neutrinos del muón para distancias pequeñas se muestra en la figura (7.3)

Por último, en la figura (7.4), se muestra la probabilidad de encontrar un  $\nu_\tau$  en un rayo de neutrinos de  $\nu_\mu$  con energía definida de 1400 Mev que se utilizarán en KEK para distancias pequeñas.

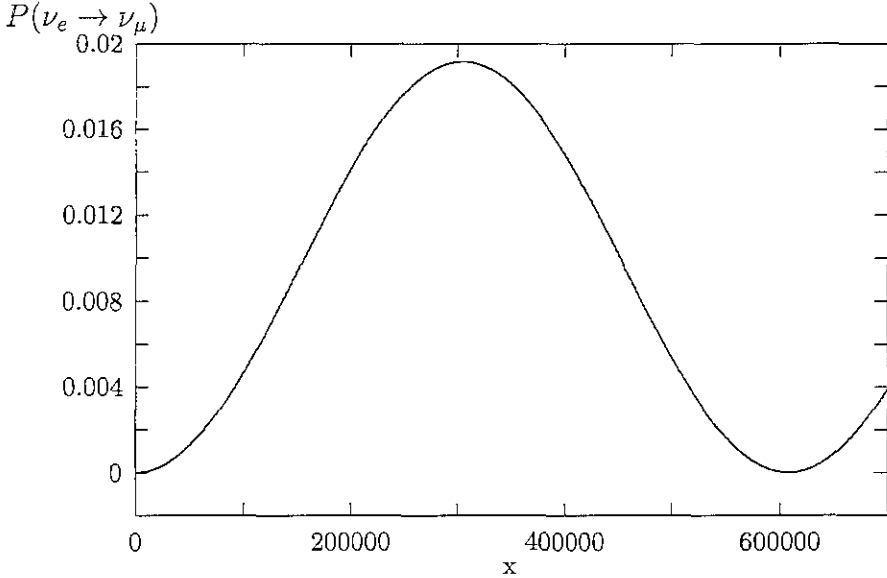


Figura 7.1: En esta figura se muestra la probabilidad de encontrar un  $\nu_e$  en un rayo de neutrinos de  $\nu_\mu$  con energía definida de  $1400 \text{ Mev}$  que se utilizarán en KEK.

## 7.5 Parametrización de la matriz de mezclas $\mathbf{U}^{th}$

La matriz de mezclas de los leptones para tres familias es una matriz unitaria  $\mathbf{U}$  de  $3 \times 3$  que se puede parametrizar con tres ángulos generalizados de Cabbibo y una fase que viola CP; en particular, se puede parametrizar como la parametrización de Kobayashi y Maskawa para la matriz de mezclas de los quarks,

$$\mathbf{U}^{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta_{KM}} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 s_3 + c_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta_{KM}} \end{pmatrix}. \quad (7.67)$$

Cuando se usa el mejor conjunto de parámetros en la parametrización,  $\mathbf{U}^{KM}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta_{KM})$  y  $\mathbf{U}^{th}(\tilde{m}_i, Z^{1/2}, \Phi)$ , la magnitud de las entradas correspondientes en las dos parametrizaciones son numéricamente iguales y podemos identificar las entradas correspondientes y resolver para los ángulos

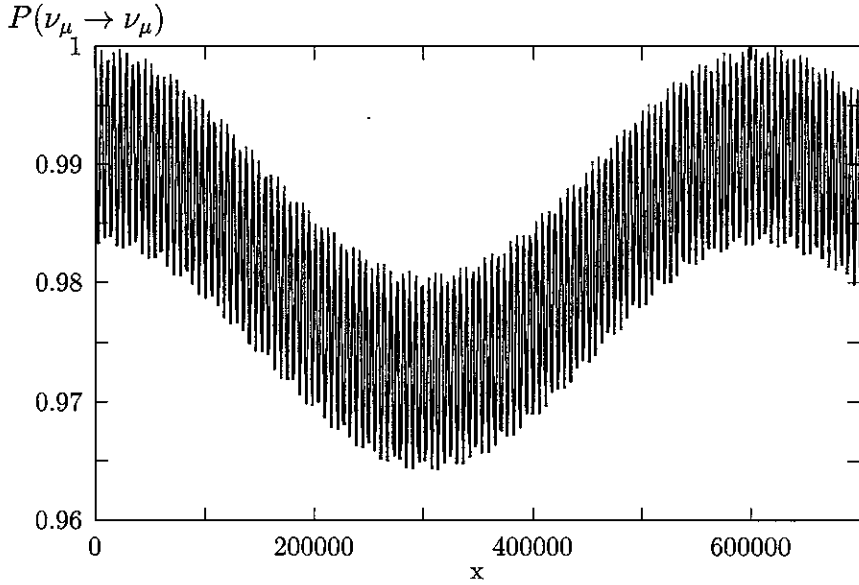


Figura 7.2: En esta figura se muestra la probabilidad de encontrar un  $\nu_{\mu}$  en un rayo de neutrinos de  $\nu_{\mu}$  con energía definida de  $1400 \text{ Mev}$  los cuales se utilizarán en KEK.

de mezcla  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  en términos de las razones de masas de los leptones y los parámetros  $\Phi^*$  y  $Z^*$ .

De la identificación de:

$$\cos \theta_1 = |\mathbf{U}_{11}^{th}|, \quad (7.68)$$

obtenemos:

$$\theta_1 = 4^\circ, \quad (7.69)$$

El ángulo  $\theta_2$  se obtiene de la identificación:

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 = |\mathbf{U}_{31}^{th}| \quad (7.70)$$

la cual da:

$$\sin \theta_2 = \frac{|\mathbf{U}_{31}^{th}|}{\sin \theta_1} \quad (7.71)$$



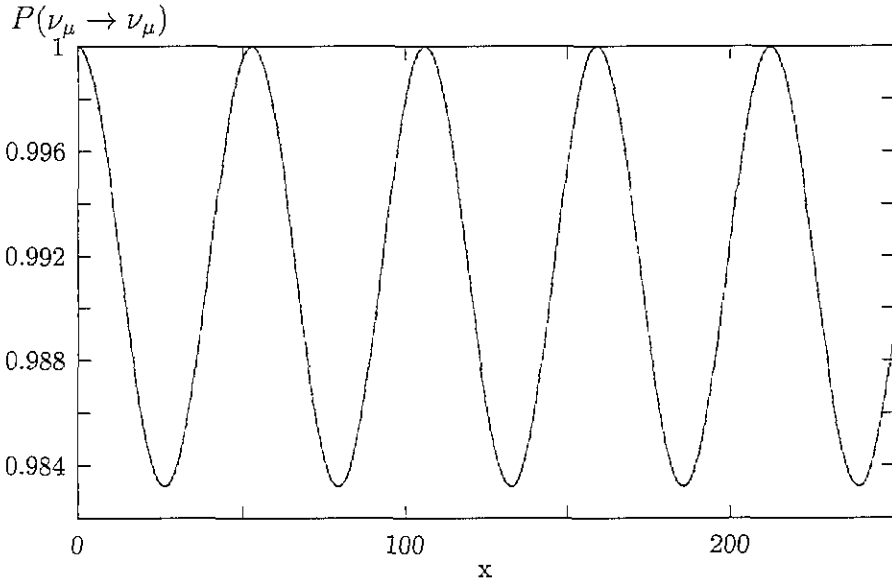


Figura 7.3: En esta figura se muestra la probabilidad de encontrar un  $\nu_\mu$  en un rayo de neutrinos de  $\nu_\mu$  con energía definida de  $1400 \text{ Mev}$  los cuales se utilizarán en KEK.

donde:

$$\sin \theta_1 = \sqrt{1 - |\mathbf{U}_{11}^{th}|^2}, \quad (7.72)$$

$|\mathbf{U}_{11}^{th}|$  está dado en la Ec. (7.58). Sustituyendo el valor de  $|\mathbf{U}_{11}^{th}|$ , obtenemos:

$$\theta_2 = 4^\circ \quad (7.73)$$

de forma similar, podemos obtener el ángulo  $\theta_3$  identificando

$$\sin \theta_1 \sin \theta_3 = |\mathbf{U}_{13}^{th}| \quad (7.74)$$

Entonces,

$$\sin \theta_3 = \frac{|\mathbf{U}_{13}^{th}|}{\sqrt{1 - |\mathbf{U}_{11}^{th}|^2}} \quad (7.75)$$

donde  $\mathbf{U}_{13}^{th}$  está dado en la Ec. (7.58) y  $\sin \theta_1$  está dado en la Ec. (7.72). Sustituyendo  $\mathbf{U}_{13}^{th}$  y  $\sin \theta_1$ , encontramos:

$$\theta_3 = 0.3^\circ \quad (7.76)$$

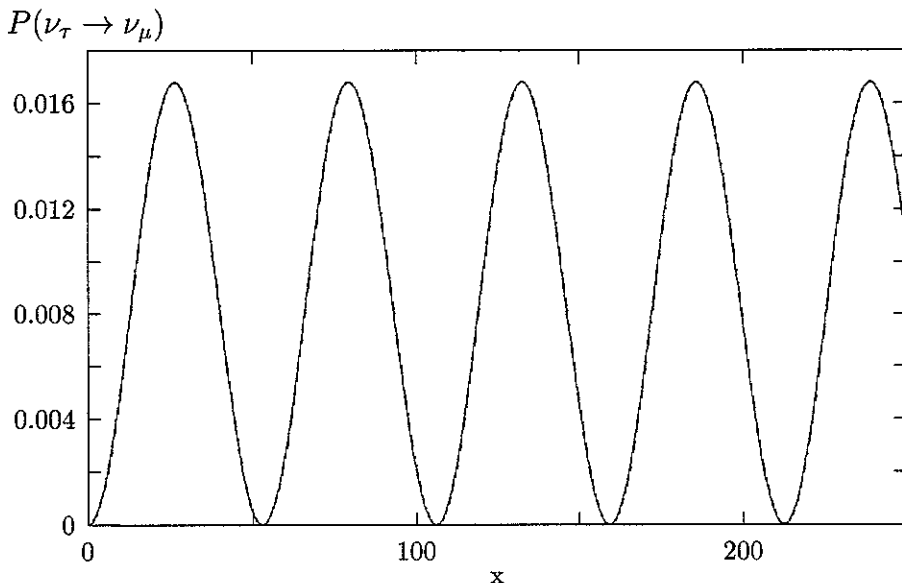


Figura 7.4: En esta figura se muestra la probabilidad de encontrar un  $\nu_\tau$  en un rayo de neutrinos de  $\nu_\mu$  con energía definida de  $1400 \text{ Mev}$ , los cuales se utilizarán en KEK.

Los valores calculados para  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  que se obtubieron de la equivalencia de  $\mathbf{U}_{ij}^{th}$  y  $\mathbf{U}_{ij}^{KM}$  corresponden a la solución al problema de la oscilación de los neutrinos conocida en la literatura como la solución de ángulos pequeños. En esta solución hemos restringido al primer cuadrante los ángulos de mezcla  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . La fase que viola CP se obtiene de la igualdad siguiente:

$$\delta_{KM} = u_{11}^{th} - u_{12}^{th} - u_{13}^{th} - u_{21}^{th} - u_{31}^{th}. \quad (7.77)$$

en esta expresión  $u_{ij}^{th}$  son las fases de los elementos de la matriz de mezclas de los leptones que están dadas en la ec. (??). Sustituyendo estos valores en la ec. (7.77) obtenemos,

$$\delta_{KM} = -2.4^\circ. \quad (7.78)$$

el valor de los ángulos de mezcla, junto con el valor numérico de la fase  $\delta_{KM}$  que viola CP, dan el conjunto de valores de los parámetros de mezcla en la parametrización de Kobayashi-Maskawa de la matriz de mezclas correspondiente al conjunto de parámetros  $\Phi^* = 90^\circ$  y  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$  de la parametrización de la matriz de mezclas  $\mathbf{U}^{th}$  derivada del rompimiento de la simetría de sabor.

Es importante señalar que es necesario hacer un estudio más completo de los datos observacionales de las oscilaciones de los neutrinos y de la evidencia experimental sobre los valores de las masas de estos leptones para poder determinar con seguridad cuál es el esquema del rompimiento de la simetría permutacional de los leptones. Sólo entonces se podría hacer un cálculo seguro de la probabilidad de oscilación de los neutrinos.

En este capítulo, simplemente quise ilustrar con un ejemplo el poder de la teoría desarrollada para el caso de los quarks y cómo se podría aplicar al caso de los leptones. En particular, la necesidad de obtener una matriz de mezclas a partir de la matriz de masas de los leptones para interpretar los datos observacionales de las oscilaciones de los neutrinos en el vacío.

# Capítulo 8

## Conclusiones

En el Modelo Estándar de las interacciones electrodébiles y fuertes, antes de que los fermiones adquieran masa via el mecanismo de Higgs, los quarks de una misma carga están acoplados de igual manera a todos los campos. En consecuencia, la invariancia respecto del intercambio de quarks de la misma familia es un simetría natural exacta del Modelo Estándar sin masas. En esta tesis se demostró que si se impone que la simetría permutacional subyacente del Modelo Estándar se rompe siguiendo un patrón simple, esta simetría permutacional y su rompimiento pueden imponer relaciones de simetría en la matriz de masas que se manifiestan como ceros de textura. De este modo, un ansatz sencillo y explícito acerca del patrón de rompimiento de la simetría permutacional del sabor nos lleva a una expresión para la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{\text{th}}$  que es función de cuatro razones de masa ( $m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b$ ) y con sólo dos parámetros libres, el parámetro  $Z$  y la fase  $\Phi$  que viola  $CP$ . La comparación con los experimentos permite fijar el valor de estos parámetros y nos da un muy buen acuerdo con la información experimental disponible sobre mezclas de quarks y violación de  $CP$ .

En el capítulo cinco derivamos expresiones teóricas para la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{\text{th}}$  a partir de las matrices de masas  $\mathbf{M}_q$  de los quarks con una textura del tipo de Fritzsch modificada. Las matrices de masas se construyeron sumando tres términos de masa  $\mathbf{M}_{3q}, \mathbf{M}_{2q}$  y  $\mathbf{M}_{1q}$  correspondientes a estados de menor simetría en un esquema simple para el rompimiento de la simetría permutacional del sabor.

El patrón de rompimiento de la simetría  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  se caracterizó en términos del parámetro  $Z^{1/2} = \frac{(M_{2q,H})_{23}}{(M_{2q,H})_{22}}$  el cual es una medida

de que tanto se mezclan las representaciones irreducibles de singlete y de doblete del grupo  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . Este patrón de rompimiento se etiquetó en términos de las representaciones simétrica ( $Z_S^{1/2} = 1/\sqrt{8}$ ), y antisimétrica ( $Z_A^{1/2} = -\sqrt{8}$ ) de un grupo auxiliar  $\tilde{S}(2)$  de permutaciones de dos campos en el término de Yukawa  $\bar{\mathbf{q}}_{L,W} \mathbf{M}_{2q,W} \mathbf{q}_{R,W}$ .

Una comparación cuidadosa de las expresiones para los valores absolutos de los elementos de la matriz  $\mathbf{V}^{th}$  con los valores determinados experimentalmente de  $|V^{exp}|$ ,  $J^{exp}$  y los ángulos internos del triángulo unitario  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$  y  $\gamma^{exp}$  nos dió una indicación clara y precisa sobre la existencia de un patrón preferido para el rompimiento de la simetría del sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  a  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . El patrón de rompimiento de simetría preferido o mejor está caracterizado por el siguiente valor de  $Z$ ,

$$Z^{*1/2} = \frac{1}{2} (Z_S^{1/2} - Z_A^{1/2}) = \sqrt{\frac{81}{32}}. \quad (8.1)$$

Una vez que el valor numérico de  $Z^{*1/2}$  se fijó a  $\sqrt{\frac{81}{32}}$ , las matrices  $\mathbf{M}_q$  son funciones de las masas de los quarks y la fase  $\Phi$ . En consecuencia, la mejor matriz  $\mathbf{V}^{th}$  teórica que resulta es función de las cuatro razones de masas de los quarks ( $\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s$ ) y sólo una fase  $\Phi$  que viola  $CP$ .

En el capítulo tres demostramos, en el caso de dos familias de quarks, que cuando se rompe la simetría permutacional del sabor  $S_2^{diag}$ , el ángulo  $\theta_C$  de Cabibbo es una función de los cocientes de los eigenvalores de las masas de los quarks  $m_u/m_c$ ,  $m_d/m_s$  y sólo un parámetro libre la fase  $\Phi = \phi_u - \phi_d$ . Esto nos permite fijar la fase  $\Phi = \phi_u - \phi_d$  usando el valor experimental del ángulo de Cabibbo y los eigenvalores de las masas de los quarks.

El mejor valor de  $\Phi$  que se encontró es:

$$\Phi^* = 90^\circ. \quad (8.2)$$

El módulo de los elementos de matriz de la matriz de mezclas calculados de la expresión teórica  $V^{th}$  están en excelente acuerdo con todos los valores absolutos determinados experimentalmente de la matriz  $|V^{exp}|$ . Para el invariante de Jarlskog encontramos el valor  $J = 2.8.00 \times 10^{-5}$ , y para los ángulos

internos del triángulo unitario encontramos los valores  $\alpha = 83^\circ$ ,  $\beta = 22^\circ$  y  $\gamma = 75^\circ$  también en muy buen acuerdo con los datos actuales de violación de  $CP$  en el sistema de mezcla  $K^\circ - \bar{K}^\circ$  [5] y los datos más recientes sobre oscilaciones en el sistema  $B_s^\circ - \bar{B}_s^\circ$  [73] y [75].

En el capítulo 5 obtuvimos expresiones exactas de la matriz de mezclas teórica  $\mathbf{V}^{th}$ , los ángulos internos del triángulo unitario y el invariante de Jarlskog que exhiben de manera explícita las relaciones funcionales con las masas de los quarks y los parámetros  $Z$  y  $\Phi$ . Estas expresiones se derivaron del rompimiento de la simetría permutacional del sabor y fueron publicadas en los artículos [76], [77]. En la teoría estándar electrodébil de las interacciones de las partículas, tanto las masas de los quarks como los parámetros de mezcla y la fase que viola  $CP$  aparecen como parámetros libres independientes y, en consecuencia, se introdujeron las parametrizaciones fenomenológicas de la matriz de mezclas de los quarks sin tomar en cuenta las posibles relaciones funcionales entre las masas de los quarks y los parámetros de mezcla de sabor. De este modo, en esta tesis hemos demostrado que a partir de la simetría permutacional del sabor y un ansatz sencillo y explícito del patrón de rompimiento de simetría podemos eliminar dos parámetros libres del Modelo Estándar. Esto es, el Modelo Estándar tiene dos parámetros de mezcla menos y, en consecuencia, la teoría tiene un mayor poder predictivo.

En el capítulo seis exhibimos de manera explícita la equivalencia de fase de la matriz de mezclas teórica  $\mathbf{V}^{th}$  y las parametrizaciones fenomenológicas más usadas en la literatura: la original de Kobayashi-Maskawa [17],  $\mathbf{V}^{KM}$ , la parametrización estándar  $\mathbf{V}^{PDG}$  [19] y la parametrización de Wolfenstein  $\mathbf{V}^W$  [20]. Las tres se escriben en términos de cuatro parámetros libres.

Usando la igualdad de las magnitudes de los elementos correspondientes en las matrices  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{KM}$  o  $\mathbf{V}^{PDG}$  derivamos expresiones explícitas, exactas para los ángulos de mezcla y la fase que viola  $CP$  de las parametrizaciones fenomenológicas  $\mathbf{V}^{KM}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$  como funciones de las razones de masas de los quarks  $m_u/m_t$ ,  $m_c/m_t$ ,  $m_d/m_b$ ,  $m_s/m_b$ , y los parámetros que rompen la simetría del sabor,  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$ .

Derivamos también la parametrización de Wolfenstein que satisface unitaridad de manera exacta y usamos la equivalencia de fase de  $\mathbf{V}^{th}$  y  $\mathbf{V}^{PDG}$  para obtener los valores numéricos de los parámetros de mezcla  $\lambda$ ,  $A$ ,  $\rho$  y  $\eta$ . Los parámetros de mezcla  $\lambda$ ,  $A$ ,  $\rho$  y  $\eta$  fueron derivadas en función de las

razones de masas de los quarks y los valores mejores de los parámetros  $Z^{*1/2}$  y  $\Phi^*$  que rompen la simetría del sabor.

En conclusión, en esta tesis se expresan los tres parámetros de mezcla y la fase que viola CP, los cuales aparecen en las parametrizaciones fenomenológicas de la matriz de mezclas de los quarks como parámetros libres linealmente independientes, como funciones de las cuatro razones de masas de los quarks y sólo dos parámetros libres  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$ .

Los valores numéricos de la fase  $\delta_{13} = \arg(\mathbf{V}_{ub}^{*PDG})$  que viola CP y de los parámetros de mezcla  $\sin\theta_{12}$ ,  $\sin\theta_{23}$  y  $\sin\theta_{13}$  calculados de las razones de masas de los quarks y los mejores valores de los parámetros  $Z^{*1/2}$ ,  $\Phi^*$  son  $\delta_{13}^* = 75^\circ$  y  $\sin\theta_{12}^* = 0.222$ ,  $\sin\theta_{23}^* = 0.040$  y  $\sin\theta_{13}^* = 0.0036$ .

Los valores numéricos de la fase  $\delta_{KM}$  que viola CP de la parametrización de Kobayashi-Maskawa calculada de las razones de masas de los quarks y los mejores valores de  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$  es  $\delta_{KM}^* = 96.4^\circ$ . No está de mas insistir en que  $\delta_{KM}$  no es un número pequeño como se supone en algunos trabajos publicados [92]-[93]. De igual forma obtuvimos los valores numéricos para los parámetros de mezcla de la parametrización de Kobayashi-Maskawa  $\sin\theta_1^* = 0.222$ ,  $\sin\theta_2^* = 0.038$  y  $\sin\theta_3^* = 0.016$ .

Para los parámetros de Wolfenstein obtuvimos los siguientes valores  $\lambda^* = 0.222$ ,  $A^* = 0.806$ ,  $\rho^* = 0.117$  y  $\eta^* = 0.389$ .

Los valores numéricos de los parámetros de mezcla y la fase que viola CP calculados de las razones de masas de los quarks y el mejor valor de los parámetros  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$  y  $\Phi^* = 90^\circ$  que rompen la simetría coinciden casi exactamente con los valores centrales de los mismos parámetros de mezcla determinados de un ajuste a los datos experimentales. El valor predictivo de la matriz de mezclas teórica  $\mathbf{V}^{th}$  de los quarks implicado por este hecho tiene su origen en la simetría permutacional del sabor del Modelo Estándar y el patrón de rompimiento de simetría supuesto a partir del cual se derivaron las texturas de la matriz de masas de los quarks y la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$ .

Finalmente en el capítulo siete, obtuvimos la matriz de mezclas leptónica a partir de la matriz de masas de los leptones derivada del rompimiento de la simetría permutacional del sabor  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  del Modelo Estándar, para interpretar los datos observacionales de las oscilaciones de los neutrinos en

el vacío. Con este ejemplo ilustramos el poder de la teoría desarrollada para el caso de los quarks y como se aplica esta misma teoría al caso de los leptones.

Un aspecto importante del problema que no se estudió en este trabajo, es la evolución con la energía de los elementos de la matriz de masas  $\mathbf{M}^{th}$  y de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}^{th}$ . También falta estudiar cuál es la realización del rompimiento de la simetría permutacional de familias en el contexto del Modelo mínimo supersimétrico.

Es necesario desarrollar una teoría de la violación de CP, pues en este trabajo de tesis obtenemos que la fase  $\Phi$  que viola CP toma el valor  $\Phi^* = 90^\circ$  sin tener una explicación de porque esto es así.





# Apéndice A

## Elementos de la matriz $V_q$

[?] La matriz de masas Hermitiana  $M_q$  puede ser escrita en términos de una matriz real simétrica  $\bar{M}_q$  y una matriz diagonal de fases  $P_q$  como sigue:

$$M_q = P_q \bar{M}_q P_q^\dagger. \quad (\text{A.1})$$

La matriz real simétrica  $\bar{M}_q$  puede ponerse en la forma diagonal por medio de una transformación ortogonal

$$\bar{M}_q = O_q M_q \text{diag} O_q^T, \quad (\text{A.2})$$

donde

$$M_q \text{diag} = m_{3q} \text{diag} [\tilde{m}_{1q}, -\tilde{m}_{2q}, 1], \quad (\text{A.3})$$

con subíndices 1,2,3 refiriéndose a  $u, c, t$  en el sector tipo  $u$ ; y  $d, s, b$  en el sector tipo  $d$ . Después de diagonalizar las matrices de masas  $M_q$ , uno obtiene la matriz de mezclas como:

$$V_{CKM} = O_u^T P^{(u-d)} O_d, \quad (\text{A.4})$$

donde  $P^{(u-d)}$  es la matriz diagonal de las fases relativas.

En la base jerárquica, donde  $M_q$  está dada por las ecs. (5.17) -(5.19),  $P^{(u-d)}$  es

$$P^{(u-d)} = \text{diag} [1, e^{i\Phi}, e^{i\Phi}], \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\Phi = \phi_u - \phi_d, \quad (\text{A.6})$$

y la matriz ortogonal  $\mathbf{O}_q$  esta dada por [72],

$$\mathbf{O}_q = \begin{pmatrix} (\tilde{m}_{2q}f_1/D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{1q}f_2/D_2)^{1/2} & (\tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q}f_3/D_3)^{1/2} \\ ((1-\delta_q)\tilde{m}_{1q}f_1/D_1)^{1/2} & ((1-\delta_q)\tilde{m}_{2q}f_2/D_2)^{1/2} & ((1-\delta_q)f_3/D_3)^{1/2} \\ -(\tilde{m}_{1q}f_2f_3/D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{2q}f_1f_3/D_2)^{1/2} & (f_1f_2/D_3)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

donde

$$f_1 = 1 - \tilde{m}_{1q} - \delta_q, \quad f_2 = 1 + \tilde{m}_{2q} - \delta_q, \quad f_3 = \delta_q \quad (\text{A.8})$$

$$D_1 = (1 - \delta_q)(1 - \tilde{m}_{1q})(\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \quad (\text{A.9})$$

$$D_2 = (1 - \delta_q)(1 + \tilde{m}_{2q})(\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \quad (\text{A.10})$$

$$D_3 = (1 - \delta_q)(1 + \tilde{m}_{2q})(1 - \tilde{m}_{1q}). \quad (\text{A.11})$$

De las ecs. (A.1-A.11), todos los elementos de la matriz  $\mathbf{V}_{CKM}$  pueden ser escritos en términos de las cuatro razones de masa:  $(\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s)$ , y dos parámetros libres reales:  $\delta_u(Z)$ ,  $\delta_d(Z)$  y  $\Phi = \phi_u - \phi_d$ .

$$\begin{aligned} V_{ud} &= \left( \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)\tilde{m}_s(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\ &+ \left\{ \left( \frac{\tilde{m}_u(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)\tilde{m}_d(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\ &+ \left. \left( \frac{\tilde{m}_u\delta_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)\tilde{m}_d\delta_d(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned}
V_{us} = & - \left( \frac{\tilde{m}_c (1 - \tilde{m}_u - \delta_u) \tilde{m}_d (1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u) (1 - \tilde{m}_u) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \delta_d) (1 + \tilde{m}_s) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
& + \left( \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{(1 - \tilde{m}_u) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (\tilde{m}_d + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \left\{ \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u) (1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \right. \\
& \left. + \left( \frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \delta_u (1 - \tilde{m}_d - \delta_d) \delta_d}{(1 - \delta_u) (1 - \delta_d) (1 + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{ub} = & \left( \frac{\tilde{m}_c (1 - \tilde{m}_u - \delta_u) \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d}{(1 - \delta_u) (1 - \tilde{m}_u) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \delta_d) (1 + \tilde{m}_s) (1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
& + \left\{ - \left( \frac{\tilde{m}_u (1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \delta_u (1 - \tilde{m}_d - \delta_d) (1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u) (1 - \tilde{m}_u) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \delta_d) (1 + \tilde{m}_s) (1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
& \left. + \left( \frac{\tilde{m}_u (1 - \tilde{m}_u - \delta_u) \delta_d}{(1 - \tilde{m}_u) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 + \tilde{m}_s) (1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{cd} = & - \left( \frac{\tilde{m}_u (1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \tilde{m}_s (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 - \delta_u) (1 + \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \delta_d) (1 - \tilde{m}_d) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
& + \left\{ \left( \frac{\tilde{m}_c \delta_u (1 - \tilde{m}_u - \delta_u) \tilde{m}_d \delta_d (1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u) (1 + \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \delta_d) (1 - \tilde{m}_d) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
& \left. + \left( \frac{\tilde{m}_c (1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \tilde{m}_d (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \tilde{m}_d) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{cs} = & \left( \frac{\tilde{m}_u (1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \tilde{m}_d (1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u) (1 + \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \delta_d) (1 + \tilde{m}_s) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
& + \left\{ \left( \frac{\tilde{m}_c \delta_u (1 - \tilde{m}_u - \delta_u) \tilde{m}_s \delta_d (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 - \delta_u) (1 + \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \delta_d) (1 + \tilde{m}_s) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
& \left. + \left( \frac{\tilde{m}_c (1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \tilde{m}_s (1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_c) (1 - \tilde{m}_u) (1 + \tilde{m}_s) (1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

$$V_{cb} = - \left( \frac{\tilde{m}_u (1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d}{(1 - \delta_u) (1 + \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_u) (1 - \delta_d) (1 + \tilde{m}_s) (1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ - \left( \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)\delta_u(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
& + \left. \left( \frac{\tilde{m}_c(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)}{(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_c)} \frac{\delta_d}{(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi}. \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{td} & = \left( \frac{\tilde{m}_u\tilde{m}_c\delta_u\tilde{m}_s(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
& + \left\{ - \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)\tilde{m}_d(1 + \tilde{m}_s - \delta_u)\delta_d}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
& + \left. \left( \frac{\delta_u\tilde{m}_d(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{ts} & = - \left( \frac{\tilde{m}_u\tilde{m}_c\delta_u\tilde{m}_d(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
& + \left\{ - \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)\tilde{m}_s(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)\delta_d}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
& + \left. \left( \frac{\delta_u\tilde{m}_s(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)(1 + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi}. \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{tb} & = - \left( \frac{\tilde{m}_u\tilde{m}_c\delta_u\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
& + \left\{ \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)(1 - \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
& + \left. \left( \frac{\delta_u\delta_d}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \tilde{m}_d)(1 + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi}. \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

si se calcula al orden dominante en  $\tilde{m}_u$  y  $\tilde{m}_d$  obtenemos los elementos de la matriz como función de los cocientes de las masas de los quarks; de la fase  $\Phi$  que viola CP, y los parámetros  $\delta_u(Z)$  y  $\delta_d(Z)$  donde  $Z$  es el parámetro que mide la cantidad de mezcla entre singlete y doblete,

$$V_{ud} \approx \frac{1 + e^{i\Phi} \sqrt{\frac{\tilde{m}_u\tilde{m}_d}{\tilde{m}_c\tilde{m}_s}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}} \quad (\text{A.21})$$

$$V_{us} \approx \frac{-\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} e^{i\Phi}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}} \quad (\text{A.22})$$

$$V_{ub} \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left(\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}\right) e^{i\Phi}}{\sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right) (1 + \tilde{m}_s) (1 - \tilde{m}_d) (1 - \delta_d)}} \quad (\text{A.23})$$

$$V_{cd} \approx \frac{-\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} e^{i\Phi}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}} \quad (\text{A.24})$$

$$V_{cs} \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}} + e^{i\Phi} \sqrt{\frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_c)(1 + \tilde{m}_s)}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}} \quad (\text{A.25})$$

$$V_{cb} \approx \frac{\left(\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}\right) e^{i\Phi}}{\sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}}} \quad (\text{A.26})$$

$$V_{td} \approx -\frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}}}{\sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}}} \left(\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}\right) e^{i\Phi} \quad (\text{A.27})$$

$$V_{ts} \approx -\sqrt{\frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_s + \tilde{m}_d}} \left(\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}\right) e^{i\Phi} \quad (\text{A.28})$$

$$V_{tb} \approx \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_d}{1 + \tilde{m}_c} + \frac{\delta_u}{1 + \tilde{m}_s}\right)} + \frac{\delta_u \delta_d}{(1 + \tilde{m}_c)(1 + \tilde{m}_s)} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\delta_u \delta_d}{(1 + \tilde{m}_c)(1 + \tilde{m}_s)}} \right\} e^{i\Phi} \quad (\text{A.29})$$

## A.1 Fases $w_{ij}^{th}$ de la matriz CKM

Expresiones explícitas, exactas para los argumentos  $w_{ij}^{th}$  en términos de las razones de masas de los quarks se pueden derivar de las expresiones anteriores, si en las Ecs. (A.12)-(A.20), se pone  $Z^{1/2}$  y  $\Phi$  igual a sus mejores valores  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$  y  $\Phi^* = \pi/2$ , se obtiene:

$$w_{ud}^{th} = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}} \left\{ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right\} \right\}, \quad (\text{A.30})$$

$$w_{us}^{th} = \pi - \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \left\{ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right\} \right\}, \quad (\text{A.31})$$

$$w_{ub}^{th} = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left\{ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{\delta_u^* (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{\delta_d^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)}} \right\} \right\}, \quad (\text{A.32})$$

$$w_{cd}^{th} = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_c}{\tilde{m}_s \tilde{m}_u}} \left\{ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)}{(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)}} \right\} \right\}, \quad (\text{A.33})$$

$$w_{cs}^{th} = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}} \left\{ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right\} \right\}. \quad (\text{A.34})$$

$$w_{cb}^{th} = \pi - \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left\{ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{\delta_u^*(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{\delta_d^*(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)}} \right\} \right\}, \quad (\text{A.35})$$

$$w_{td}^{th} = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_s}} \left\{ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{\delta_d^*(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{\delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}} \right\} \right\}, \quad (\text{A.36})$$

$$w_{ts}^{th} = \tan^{-1} \left\{ -\sqrt{\frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \left\{ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{\delta_d^*(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{\delta_u^*(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right\} \right\}, \quad (\text{A.37})$$

$$w_{tb}^{th} = \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{1}{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_s \tilde{m}_d}} \left\{ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{\delta_d^* \delta_u^*}} \right\} \right\} \quad (\text{A.38})$$

Calculando el segundo factor en el paréntesis cuadrado al orden dominante de magnitud, obtenemos:

$$w_{ud}^{th} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}} \right), \quad (\text{A.39})$$

$$w_{us}^{th} \approx \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \right), \quad (\text{A.40})$$

$$w_{ub}^{th} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_u^*}{\delta_d^*}} \right] \right), \quad (\text{A.41})$$



$$w_{cd}^{th} \approx \tan^{-1} \left( -\sqrt{\frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}} \right), \quad (\text{A.42})$$

$$w_{cs}^{th} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}} \right). \quad (\text{A.43})$$

$$w_{cb}^{th} \approx \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_u^*}{\delta_d^*}} \right] \right), \quad (\text{A.44})$$

$$w_{td}^{th} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_s}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_d^*}{\delta_u^*}} \right] \right), \quad (\text{A.45})$$

$$w_{ts}^{th} \approx \tan^{-1} \left( -\sqrt{\frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_d^*}{\delta_u^*}} \right] \right), \quad (\text{A.46})$$

$$w_{tb}^{th} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ 1 + \sqrt{\frac{1}{\delta_d^* \delta_u^*}} \right] \right), \quad (\text{A.47})$$

## A.2 Fases observables y unitaridad

La matriz de mezclas de los quarks para tres familias es una matriz unitaria de  $3 \times 3$

$$[\mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger]_{ij} = [\mathbf{V}^\dagger\mathbf{V}]_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{A.48})$$

la condición de unitaridad de la matriz de mezclas nos permite encontrar relaciones *no triviales* entre sus elementos.

La constricción de que el producto del renglón  $i$  con la columna  $j$  sea cero, se le conoce genéricamente con el nombre de “triángulo unitario” porque el resultado de cada uno de estos productos son tres números complejos que suman a cero, de aquí que puedan ser representados por triángulos en el plano complejo. Existen seis de estas relaciones y, por lo tanto, seis triángulos unitarios, pero sólo tres de estos son independientes .

$$V_{us}V_{ud}^* + V_{cs}V_{cd}^* + V_{ts}V_{td}^* = 0 \quad (\text{A.49})$$

$$V_{ub}V_{us}^* + V_{cb}V_{cs}^* + V_{tb}V_{ts}^* = 0 \quad (\text{A.50})$$

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (\text{A.51})$$

La condición de unitaridad se traduce en que los ángulos internos de cada triángulo suman  $\pi$ ; así que de los nueve ángulos internos, la condición de unitaridad nos permite eliminar tres; esto reduce a seis los ángulo independientes. Las relaciones entre los lados de los triángulos nos permiten eliminar otros dos ángulos, lo que hace un total de cuatro ángulos linealmente independientes. La condición de unitaridad utilizada más comúnmente en la literatura es la dada en la Ec. (A.51), que se relaciona con los decaimientos del mesón B; para este triángulo se cumple:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (\text{A.52})$$

y los ángulos están definidos de la manera siguiente:

$$\phi_1 = \pi - \arg \left( \frac{-V_{td}V_{tb}^*}{-V_{cd}V_{cb}^*} \right) = \beta \quad (\text{A.53})$$

$$\phi_2 = \arg \left( \frac{V_{td}V_{tb}^*}{-V_{ud}V_{ub}^*} \right) = \alpha \quad (\text{A.54})$$

$$\phi_3 = \arg \left( \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{-V_{cd}V_{cb}^*} \right) = \gamma \quad (\text{A.55})$$

de estos tres ángulos, sólo dos son linealmente independientes. Los dos ángulos linealmente independientes restantes que se obtienen de las otras dos condiciones de unitaridad se definen como:

$$\chi = \arg \left( \frac{-V_{cb}V_{cs}^*}{V_{tb}V_{ts}^*} \right) = \beta_s \quad (\text{A.56})$$

$$\chi' = \arg \left( \frac{-V_{us}V_{ud}^*}{V_{cs}V_{cd}^*} \right) = -\beta_K \quad (\text{A.57})$$

El objetivo principal de los estudios de violación de CP de los decaimientos de B es hacer la mayor cantidad de medidas independientes entre sí de los ángulos y de los lados del triángulo unitario para que este triángulo unitario

quede sobredeterminado y esto pruebe la validez de las predicciones del Modelo Estándar que relaciona varias medidas con aspectos de este triángulo. Estos ángulos son invariantes bajo refasamiento de las fases no observables de los campos de los quarks, así que no dependen de la parametrización que elijamos para la matriz de mezclas de los quarks. La ventaja de nuestra parametrización es que nos permite encontrar relaciones funcionales entre estas fases observables y los cocientes de las masas de los quarks; las que, debido al confinamiento de los quarks, no se pueden medir directamente. De la definición de  $\beta$  dada en la Ec. (A.53) se sigue que

$$\beta = \pi - (w_{td} - w_{tb} + w_{cb} - w_{cd}) \quad (\text{A.58})$$

pero, dado que las expresiones para las fases Ecs. (A.53)-(A.57) nos permiten encontrar con relativa facilidad relaciones entre los cocientes de masas de los quarks y la tangente de las fases, es más conveniente trabajar con la tangente de los ángulos internos, así que

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \pi) &= \tan \beta \\ \tan \beta &= -\frac{\tan(w_{td} - w_{tb}) + \tan(w_{cb} - w_{cd})}{1 - \tan(w_{td} - w_{tb}) \tan(w_{cb} - w_{cd})}. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

A partir de las Ecs. (A.31)-(A.38) podemos calcular las fases en función de los cocientes de las masas de los quarks y los parámetros que rompen la simetría permutacional del sabor  $Z^*$  y  $\Phi^*$ , de donde se sigue que

$$\tan(w_{td} - w_{tb}) \approx 0 \quad (\text{A.60})$$

con esto tenemos que

$$\tan \beta \approx -\tan(w_{cb} - w_{cd}) \quad (\text{A.61})$$

calculando a orden dominante obtenemos:

$$\tan \beta \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \left( \frac{1 - \tilde{m}_d}{1 + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c}} \right) \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \quad (\text{A.62})$$

Usando el mismo procedimiento, obtenemos para las fases restantes lo siguiente:

$$\alpha = \text{arg} \left( \frac{V_{td}V_{tb}^*}{-V_{ud}V_{ub}^*} \right) \quad (\text{A.63})$$

$$\alpha = \pi - w_{tb} + w_{td} - w_{ud} + w_{ub} \quad (\text{A.64})$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan(w_{td} - w_{tb}) + \tan(w_{ub} - w_{ud})}{1 - \tan(w_{td} - w_{tb}) \tan(w_{ub} - w_{ud})}. \quad (\text{A.65})$$

A partir de las Ecs. (2.2)-(2.2) podemos calcular las fases en función de los cocientes de las masas de los quarks y los parámetros que rompen la simetría permutacional del sabor  $Z^*$  y  $\Phi^*$ , como:

$$\tan(w_{td} - w_{tb}) \approx 0 \quad (\text{A.66})$$

con esto tenemos que

$$\tan \alpha \approx \tan(w_{ub} - w_{ud}) \quad (\text{A.67})$$

calculando a orden dominante en  $\tilde{m}_u$  y  $\tilde{m}_d$ , obtenemos finalmente una relación para la fase  $\alpha$  como función de las masas de los quarks

$$\tan \alpha \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left( \frac{1 - \tilde{m}_d}{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}} \right) \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left( \frac{1}{1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}} \right) \quad (\text{A.68})$$

el cálculo para  $\gamma$  se hace de manera directa, de su definición Ec. (A.55)

$$\gamma = \text{arg} \left( \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{-V_{cd}V_{cb}^*} \right)$$

esto es:

$$\gamma = \pi - [(w_{ub} - w_{ud}) + (w_{cd} - w_{cb})]. \quad (\text{A.69})$$

De aquí se sigue que

$$\tan \gamma = -\frac{\tan(w_{ub} - w_{ud}) + \tan(w_{cd} - w_{cb})}{1 - \tan(w_{ub} - w_{ud}) \tan(w_{cd} - w_{cb})}. \quad (\text{A.70})$$

Esta es la condición de unitaridad,

$$-\tan \gamma = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{A.71})$$

o de manera más explícita:

$$\pi - \gamma = \alpha + \beta. \quad (\text{A.72})$$

Para  $\beta_s$  obtenemos que

$$\beta_s = \text{arg} \left( \frac{-V_{cb}V_{cs}^*}{V_{tb}V_{ts}^*} \right) \quad (\text{A.73})$$

como función de las fases es

$$\beta_s = \pi + (w_{cb} - w_{cs}) + (w_{ts} - w_{tb}) \quad (\text{A.74})$$

$$\tan \beta_s = \frac{\tan(w_{cb} - w_{cs}) + \tan(w_{ts} - w_{tb})}{1 - \tan(w_{cb} - w_{cs}) \tan(w_{ts} - w_{tb})}. \quad (\text{A.75})$$

De las Ecs. (A.31)-(A.38) podemos calcular las fases en función de los cocientes de las masas de los quarks y los parámetros que rompen la simetría permutacional del sabor  $Z^*$  y  $\Phi^*$ , como:

$$\tan(w_{ts} - w_{tb}) \approx 0 \quad (\text{A.76})$$

con esto tenemos que:

$$\tan \beta_s \approx \tan(w_{cb} - w_{cs}). \quad (\text{A.77})$$

Calculando a orden dominante, obtenemos finalmente una relación para la fase  $\beta_s$  como función de las masas de los quarks

$$\tan \beta_s \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}} \left( \frac{1 + \tilde{m}_s}{1 - \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c}} \right) \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}}. \quad (\text{A.78})$$

Se sabe que el ángulo  $\beta_k$  es pequeño; esta propiedad se refleja en nuestras expresiones exactas para  $\beta_k$ , ya que lo obtenemos de una cancelación de fases,

$$-\beta_K = \arg \left( \frac{-V_{us} V_{ud}^*}{V_{cs} V_{cd}^*} \right) \quad (\text{A.79})$$

esto es:

$$-\beta_K = \pi + (w_{us} - w_{ud}) + (w_{cd} - w_{cs}) \quad (\text{A.80})$$

$$-\tan \beta_k = \frac{\tan(w_{us} - w_{ud}) + \tan(w_{cd} - w_{cs})}{1 - \tan(w_{us} - w_{ud}) \tan(w_{cd} - w_{cs})}. \quad (\text{A.81})$$

De las Ecs. (2.2)-(2.2) podemos calcular las fases en función de los cocientes de las masas de los quarks y los parámetros que rompen la simetría permutacional del sabor  $Z^*$  y  $\Phi^*$ ; esto es:

$$\tan(w_{us} - w_{ud}) \approx \frac{-\left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}}\right) \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} + \sqrt{\delta_u \delta_d}\right)}{1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} + \sqrt{\delta_u \delta_d}\right)^2} \quad (\text{A.82})$$

$$\tan(w_{cd} - w_{cs}) \approx \frac{\left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}}\right) \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} + \sqrt{\delta_u \delta_d}\right)}{-\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} + \left(\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} + \sqrt{\delta_u \delta_d}\right)^2} \quad (\text{A.83})$$

Con estos resultados obtenemos finalmente una relación para la fase  $\beta_K$  como función de las masas de los quarks y  $Z^*$

$$\begin{aligned} -\tan \beta_k &\approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_d}}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)^2 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \left(2 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_d}\right)} \\ &\times \left(1 - \left[\sqrt{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} + \sqrt{\delta_u \delta_d}\right]^2\right), \quad (\text{A.84}) \end{aligned}$$

esto es:

$$-\tan \beta_k \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left(\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_d}}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}{1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \left(2 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_d}\right)} \left(1 + \frac{\delta_u}{\delta_d} - 2\sqrt{\frac{\delta_u}{\delta_d}}\right) \delta_d \quad (\text{A.85})$$

### A.3 Razones de masas de los quarks y fases observables

Las expresiones derivadas en la sección anterior para los ángulos internos de los triángulos unitarios como función de los cocientes de las masas de los quarks nos permiten invertir la relación funcional de manera relativamente fácil, y encontrar expresiones para los cocientes de masas de los quarks como función de los ángulos internos de los triángulos unitarios. Estas expresiones nos relacionan los cocientes de masas de los quarks que no se pueden medir experimentalmente de manera directa debido al confinamiento de los quarks, y los ángulos invariantes de fase de los triángulos unitarios de la matriz de mezclas de los quarks que sí se pueden medir.

De la Ec. (A.62) para  $\tan \beta$  obtenemos a orden dominante:

$$\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \approx \tan \beta \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}}. \quad (\text{A.86})$$

De igual manera, de la expresión (2.2) para  $\tan \beta_s$ , obtenemos a orden dominante:

$$\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \approx \tan \beta_s \sqrt{\frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_d}}. \quad (\text{A.87})$$

De estas expresiones es claro que los dos sectores de masas de los quarks no son independientes entre sí; es claro también, que los ángulos internos de los triángulos unitarios son las constantes de proporcionalidad entre los dos sectores. Que la naturaleza elija el mismo rompimiento de la simetría permutacional del sabor para los dos sectores de quarks, esto es, que los experimentos se ajusten bien para  $Z_u = Z_d = Z^*$  con  $\Phi^* = 90^\circ$ , tiene como consecuencia estas relaciones no triviales entre los dos sectores de masas de los quarks.

Del cociente de las expresiones (A.86) y (A.87) encontramos:

$$\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} \approx \frac{\tan \beta_s}{\tan \beta} \quad (\text{A.88})$$

sustituyendo la Ec. (A.88) en la Ec. (A.86) obtenemos:

$$\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \approx \tan \beta_s \tan \beta. \quad (\text{A.89})$$

Si usamos la Ec. (A.68) para  $\tan \alpha$  y sustituimos la Ecs. (A.88) y (A.89) para los cocientes de masas, obtenemos una expresión para  $\tilde{m}_s$ :

$$\tilde{m}_s \approx \frac{\tan \beta}{\tan(\alpha + \beta_s)}. \quad (\text{A.90})$$

Si sustituimos esta expresión en la Ec. (A.88) para el cociente  $\tilde{m}_d/\tilde{m}_s$ , obtenemos para  $\tilde{m}_d$  lo siguiente:

$$\tilde{m}_d \approx \frac{\tan \beta_s}{\tan(\alpha + \beta_s)} \quad (\text{A.91})$$

estas expresiones nos permiten, en principio, parametrizar la matriz de mezclas de los quarks con cuatro fases observables  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta_s$  y  $\beta_K$ .





# Apéndice B

## Artículos publicados



**CP violating phase  $\delta_{13}$  and the quark mixing angles  $\theta_{13}$ ,  $\theta_{23}$ , and  $\theta_{12}$  from flavor permutational symmetry breaking**

A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui

*Instituto de Física, UNAM, Apdo. Postal 20-364, 01000 México, D.F. México*

(Received 9 July 1999, revised manuscript received 4 November 1999, published 28 April 2000)

The phase equivalence of the theoretical mixing matrix  $V^{\text{th}}$  derived from breaking of flavor permutational symmetry and the standard parametrization  $V^{\text{PDG}}$  advocated by the Particle Data Group is explicitly exhibited. From here, we derive exact explicit expressions for the three mixing angles  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$ ,  $\theta_{23}$ , and the CP violating phase  $\delta_{13}$  in terms of the quark mass ratios  $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$  and the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  characterizing the preferred symmetry breaking pattern. The computed values for the CP violating phase and the mixing angles are  $\delta_{13}^* = 75^\circ$ ,  $\sin \theta_{12}^* = 0.221$ ,  $\sin \theta_{13}^* = 0.0034$ , and  $\sin \theta_{23}^* = 0.040$ , which coincide almost exactly with the central values of the experimentally determined quantities.

PACS number(s) 12.15 Ff, 11.30 Er, 11.30 Hv, 12.15 Hb

**I. INTRODUCTION**

In this paper we are concerned with the functional relations between flavor mixing angles  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$ ,  $\theta_{23}$ , the CP violating phase  $\delta_{13}$  and the quark masses resulting from breaking flavor permutational symmetry.

In a previous paper [1] different Hermitian mass matrices  $M_q$  of the same modified Fritzsch type were derived from breaking flavor permutational symmetry according to the symmetry breaking scheme  $S_L(3) \otimes S_R(3) \supset S_L(2) \otimes S_R(2) \supset S_{\text{diag}}(2)$ . In a symmetry adapted basis, different patterns for the breaking of the permutational symmetry give rise to different mass matrices which differ in the ratio  $Z^{1/2} = M_{23}/M_{22}$ , and are labeled in terms of the irreducible representations of an auxiliary  $S(2)$  group. Then, diagonalizing the mass matrices, we obtain exact, explicit expressions for the elements of the mixing matrix  $V^{\text{th}}$ , the Jarlskog invariant  $J$ , and the three inner angles  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  of the unitarity triangle in terms of the quark mass ratios, the symmetry breaking parameter  $Z^{1/2}$  and one CP violating phase  $\Phi$ . The numerical values of  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$  which characterize the preferred symmetry breaking pattern were extracted from a  $\chi^2$  fit of the theoretical expressions  $|V^{\text{th}}|$  to the experimentally determined values of the moduli of the elements of the mixing matrix  $|V^{\text{exp}}|$ . In this way, we obtained an explicit parametrization of the quark mixing matrix in terms of four quark mass ratios  $m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b$ , and the parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$  in excellent agreement with the experimental information about quark mixings and CP violation in the  $K^0-\bar{K}^0$  system and the most recent data on oscillations in the  $B^0-\bar{B}^0$  system. These same experimental data are usually represented by means of the standard parametrization of the mixing matrix [2]  $V^{\text{PDG}}$ , recommended by the Particle Data Group [3], which is written in terms of three mixing angles  $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$  and one CP violating phase  $\delta_{13}$ . The standard parametrization  $V^{\text{PDG}}$ , was introduced without taking the functional relations between the quark masses and the flavor mixing parameters into account. In contrast, these functional relations are exactly and explicitly exhibited in the theoretical expressions for  $V^{\text{th}}$  derived in our previous work [1]. When the best set of parameters of each parametrization is

used, the moduli of corresponding entries of the two parametrizations are numerically equal and give an equally good representation of the experimentally determined values of the moduli of the mixing matrix  $|V_{ij}^{\text{exp}}|$ . Hence, we are justified in writing

$$|V_{ij}^{\text{th}}| = |V_{ij}^{\text{PDG}}|, \tag{1.1}$$

even though  $V^{\text{th}}$  has only two free, real linearly independent parameters while the number of adjustable parameters in  $V^{\text{PDG}}$  is four.

The invariant measurables of the quark mixing matrix are the moduli of its elements, i.e., the quantities  $|V_{ij}|$ , and the Jarlskog invariant  $J$ . But even  $J$ , up to a sign, is a function of the moduli [4]. Hence, two different parametrizations, such as  $V^{\text{th}}$  and  $V^{\text{PDG}}$ , are equivalent if the moduli of corresponding entries are equal even if the arguments of corresponding entries are different. This difference is of no physical consequence, it reflects the freedom in choosing the unobservable phases of the quark fields.

In this paper, it is shown that a suitable rephasing of the quark fields changes  $V^{\text{th}}$  into a new, phase transformed  $\bar{V}^{\text{th}}$  such that all the matrix elements  $\bar{V}_{ij}^{\text{th}}$  are numerically equal to the corresponding  $V_{ij}^{\text{PDG}}$ , both in modulus and phase. Once this equality is established, we solve the equations of transformation for  $\sin \theta_{12}$ ,  $\sin \theta_{23}$  and  $\sin \theta_{13}$  in terms of the moduli  $|\bar{V}_{ij}^{\text{th}}|$ . We also derive exact explicit expressions for the phases of the matrix elements  $V_{ij}^{\text{PDG}}$  in terms of the phases of the matrix elements of  $V_{ij}^{\text{th}}$ . In this way, we derive exact explicit analytical expressions for the mixing parameters  $\sin \theta_{12}$ ,  $\sin \theta_{23}$ ,  $\sin \theta_{13}$  and the CP violating phase  $\delta_{13}$  of the standard parametrization of the mixing matrix [2] in terms of the quark mass ratios  $m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b$ , the flavor symmetry breaking parameter  $Z^{*1/2}$ , and the CP violating phase  $\Phi^*$ .

The plan of this paper is as follows. In Sec. II, we introduce some basic concepts and fix the notation by way of a very brief sketch of the group theoretical derivation of mass matrices with a modified Fritzsch texture. Section III is devoted to the derivation of exact, explicit expressions for the elements of the mixing matrix  $V^{\text{th}}$  in terms of the quark mass

ratios and the parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$  characterizing the symmetry breaking pattern. In Sec. IV, the phase equivalence of  $V^{\text{th}}$  and  $V^{\text{PDG}}$  is explicitly exhibited, and a set of equations expressing the nonvanishing arguments  $v_{ij}^{\text{PDG}}$  of  $V_{ij}^{\text{PDG}}$  in terms of the arguments  $v_{ij}^{\text{th}}$  of  $V_{ij}^{\text{th}}$  is derived. Explicit expressions for the mixing parameters  $\sin \theta_{12}$ ,  $\sin \theta_{23}$ ,  $\sin \theta_{13}$ , and the  $CP$  violating phase  $\delta_{13}$  as functions of the quark mass ratios and the parameters  $Z^{*/2}$  and  $\Phi^*$  characterizing the preferred symmetry breaking scheme are obtained in Secs. V and VI. Our paper ends in Sec. VII with a summary of results and some conclusions

II. MASS MATRICES FROM THE BREAKING OF  $S_L(3) \otimes S_R(3)$

In the standard model, analogous fermions in different generations, say  $u, c,$  and  $t$  or  $d, s,$  and  $b$ , have completely identical couplings to all gauge bosons of the strong, weak, and electromagnetic interactions. Prior to the introduction of the Higgs boson and mass terms, the Lagrangian is chiral and invariant with respect to any permutation of the left and right quark fields. The introduction of a Higgs boson and the Yukawa couplings give mass to the quarks and leptons when the gauge symmetry is spontaneously broken. The quark mass term in the Lagrangian, obtained by taking the vacuum expectation value of the Higgs field in the quark Higgs coupling, gives rise to quark mass matrices  $M_d$  and  $M_u$ ,

$$L_f = \bar{q}_{d,L} M_d q_{d,R} + \bar{q}_{u,L} M_u q_{u,R} + \text{H.c.} \tag{2.1}$$

In this expression,  $q_{L,R}(x)$  and  $q_{u,d,L,R}(x)$  denote the left and right quark  $d$  and  $u$  fields in the current or weak basis,  $q_i(x)$  is a column matrix, its components  $q_{i,k}(x)$  are the quark Dirac fields,  $k$  is the flavor index. In this basis, the charged hadronic currents,

$$J_{\mu} = \bar{q}_{u,L} \gamma_{\mu} q_{d,L}, \tag{2.2}$$

are not changed if both, the  $d$ -type and  $u$ -type fields are transformed with the same unitary matrix

A. Modified Fritzsch texture

A number of authors [15–23] have pointed out that realistic quark mass matrices result from the flavor permutational symmetry  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  and its spontaneous or explicit breaking. The group  $S(3)$  treats three objects symmetrically, while the hierarchical nature of the mass matrices is a consequence of the representation structure  $\mathbf{1} \otimes \mathbf{2}$  of  $S(3)$ , which treats the generations differently. Under exact  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry, the mass spectrum for either up or down quark sectors consists of one massive particle in a singlet irreducible representation and a pair of massless particles in a doublet irreducible representation, the corresponding quark mass matrix with the exact  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry will be denoted by  $M_{3q}$ . In order to generate masses for the first and second families, we add the terms  $M_{2q}$  and  $M_{1q}$  to  $M_{3q}$ . The term  $M_{2q}$  breaks the permutational symmetry

$S_L(3) \otimes S_R(3)$  down to  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  and mixes the singlet and doublet representation of  $S(3)$ .  $M_{1q}$  transforms as the mixed symmetry term in the doublet complex tensorial representation of  $S_{\text{diag}}(3) \subset S_L(3) \otimes S_R(3)$ . Putting the first family in a complex representation will allow us to have a  $CP$  violating phase in the mixing matrix. Then, in a symmetry adapted basis,  $M_q$  takes the form

$$M_q = m_{3q} \left[ \begin{pmatrix} 0 & A_q e^{-i\phi_q} & 0 \\ A_q e^{i\phi_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_q - \delta_q & B_q \\ 0 & B_q & \Delta_q - \delta_q \end{pmatrix} \right] - m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Delta_q \end{pmatrix} = m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & A_q e^{-i\phi_q} & 0 \\ A_q e^{i\phi_q} & -\Delta_q + \delta_q & B_q \\ 0 & B_q & 1 - \delta_q \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

From the strong hierarchy in the masses of the quark families,  $m_{3q} \gg m_{2q} \gg m_{1q}$ , we expect  $1 - \delta_q$  to be very close to unity. The entries in the mass matrix may be readily expressed in terms of the mass eigenvalues ( $m_q, -m_{2q}, m_{3q}$ ) and the small parameter  $\delta_q$ . Computing the invariants of  $M_q, \text{tr} M_q, \text{tr} M_q^2$ , and  $\det M_q$ , we get

$$A_q^2 = \tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q} (1 - \delta_q)^{-1}, \quad \Delta_q = \tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}. \tag{2.4}$$

$$B_q^2 = \delta_q [(1 - \tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{2q} - \delta_q) - \tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q} (1 - \delta_q)^{-1}], \tag{2.5}$$

where  $\tilde{m}_q = m_q / m_{3q}$  and  $\tilde{m}_{2q} = m_{2q} / m_{3q}$ .

If each possible symmetry breaking pattern is now characterized by the ratio

$$Z_q^{1/2} = B_q / (-\Delta_q - \delta_q), \tag{2.6}$$

the small parameter  $\delta_q$  is obtained as the solution of the cubic equation

$$\delta_q [(1 + \tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q} - \delta_q)(1 - \delta_q) - \tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q}] - Z_q (-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q)^2 = 0, \tag{2.7}$$

which vanishes when  $Z_q$  vanishes. An exact explicit expression for  $\delta_q$  as function of the quark mass ratios and  $Z_q$  is given in Ref. [1]. An approximate solution to Eq. (2.7) for  $\delta_q(Z_q)$ , valid for small values of  $Z_q$  ( $Z_q \ll 10$ ), is

$$\delta_q(Z_q) \approx \frac{Z_q(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2}{(1 - \tilde{m}_{1q})(1 + \tilde{m}_{2q}) + 2Z_q(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) \left[ 1 + \frac{1}{2}(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) \right]} \quad (2.8)$$

**B. Symmetry breaking pattern**

In the symmetry adapted basis, the matrix  $M_{2q}$ , written in terms of  $Z_q^{1/2}$ , takes the form

$$M_{2q} = m_{3q}(-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Z_q^{1/2} \\ 0 & Z_q^{1/2} & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

when  $Z_q^{1/2}$  vanishes,  $M_{2q}$  is diagonal and there is no mixing of singlet and doublet representations of  $S(3)$ . Therefore, in the symmetry adapted basis, the parameter  $Z_q^{1/2}$  is a measure of the amount of mixing of singlet and doublet irreducible representations of  $S_{diag}(3) \subset S_L(3) \otimes S_R(3)$

We may easily give a meaning to  $Z_q^{1/2}$  in terms of permutations. From Eqs (2.1) and (2.9), we notice that the symmetry breaking term in the Yukawa Lagrangian  $\bar{q}_L M_{2q} q_R$  is a functional of only two fields:  $1/\sqrt{3}[q_2(X) + \sqrt{2}q_3(X)]$  and  $1/\sqrt{3}[-\sqrt{2}q_2(X) + q_3(X)]$ . Under the permutation of these fields,  $\bar{q}_L M_{2q} q_R$  splits into the sum of an antisymmetric term  $\bar{q}_L M_{2q}^A q_R$  which changes sign, and a symmetric term  $\bar{q}_L M_{2q}^S q_R$ , which remains invariant,

$$M_{2q} = -\frac{2}{9}m_{3q} \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{8} \\ 0 & -\sqrt{8} & -1 \end{pmatrix} + 2b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.10)$$

where  $a = (\delta_q - \Delta_q)(\sqrt{2}Z_q^{1/2} - \frac{1}{2})$  and  $b = (\delta_q - \Delta_q)[(\sqrt{2}/2)Z_q^{1/2} + 2]$ . It is evident that there is a corresponding decomposition of the mixing parameter  $Z_q^{1/2}$ ,

$$Z_q^{1/2} = N_{Aq}Z_A^{1/2} + N_{Sq}Z_S^{1/2} \quad (2.11)$$

with

$$1 = N_{Aq} + N_{Sq}, \quad (2.12)$$

where  $Z_A^{1/2} = -\sqrt{8}$  is the mixing parameter of the matrix  $M_{2q}^A$ , and  $Z_S^{1/2} = 1/\sqrt{8}$  is the mixing parameter of  $M_{2q}^S$ . In this way, a unique linear combination of  $Z_A^{1/2}$  and  $Z_S^{1/2}$  is associated to the symmetry breaking pattern characterized by  $Z_q^{1/2}$ . Thus, the different symmetry breaking patterns defined by  $M_{2q}$  for different values of the mixing parameter  $Z_q^{1/2}$  are labeled in terms of the irreducible representations of the group  $\tilde{S}(2)$  of permutations of the two fields in  $\bar{q}_L M_{2q} q_R$ . The pair of numbers  $(N_A, N_S)$  enters as a convenient mathematical label of the symmetry breaking pattern without introducing any assumption about the actual pattern of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry breaking realized in nature

**C. The Jarlskog invariant**

The Jarlskog invariant,  $J$ , may be computed directly from the commutator of the mass matrices [4]

$$J = -\frac{\det\{-i[M_u, M_d]\}}{2F}, \quad (2.13)$$

where

$$F = (1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d) \quad (2.14)$$

Substitution of the expression (2.3) for  $M_u$  and  $M_d$ , in Eq (2.13), with  $Z_u^{1/2} = Z_d^{1/2} = Z^{1/2}$  gives

$$J = \frac{Z \sqrt{\frac{\tilde{m}_u/\tilde{m}_c}{1 - \delta_u}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d/\tilde{m}_s}{1 - \delta_d}} \sin\Phi}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s/\tilde{m}_c)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)(1 + \tilde{m}_d/\tilde{m}_s)} \left\{ [(-\Delta_u + \delta_u)(1 - \delta_d) - (-\Delta_d + \delta_d)(1 - \delta_u)]^2 - \frac{(\tilde{m}_u \tilde{m}_c)}{1 - \delta_u} (-\Delta_d + \delta_d)^2 - \frac{(\tilde{m}_d \tilde{m}_s)}{1 - \delta_d} (-\Delta_u + \delta_u)^2 + 2 \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c}{1 - \delta_u}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_s}{1 - \delta_d}} (-\Delta_u + \delta_u)(-\Delta_d + \delta_d) \cos\Phi \right\}, \quad (2.15)$$

where  $\Delta_r$  and  $\delta_i$  are defined in Eqs. (2.4) and (2.7). In this way, an exact closed expression for  $J$  in terms of the quark mass ratios, the  $CP$  violating phase  $\Phi$ , and the parameter  $Z$  that characterizes the symmetry breaking pattern is derived.

### III. THE MIXING MATRIX

The Hermitian mass matrix  $\tilde{M}_q$  may be written in terms of a real symmetric matrix  $\tilde{M}_q$  and a diagonal matrix of phases  $\mathbf{P}_q$  as follows:

$$\mathbf{M}_q = \mathbf{P}_q \tilde{M}_q \mathbf{P}_q^\dagger \quad (3.1)$$

The real symmetric matrix  $\tilde{M}_q$  may be brought to a diagonal form by means of an orthogonal transformation

$$\tilde{M}_q = \mathbf{O}_q \mathbf{M}_{q,d,u,c} \mathbf{O}_q^T, \quad (3.2)$$

where

$$\mathbf{O}_q = \begin{pmatrix} (\tilde{m}_{2,q} f / D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{1,q} f_2 / D_2)^{1/2} & (\tilde{m}_{1,q} \tilde{m}_{2,q} f_3 / D_3)^{1/2} \\ [(1 - \delta_q) \tilde{m}_{1,q} f / D_1]^{1/2} & [(1 - \delta_q) \tilde{m}_{2,q} f_2 / D_2]^{1/2} & [(1 - \delta_q) f_3 / D_3]^{1/2} \\ -(\tilde{m}_{1,q} f_2 f_3 / D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{2,q} f_2 f_3 / D_2)^{1/2} & (f_3 f_2 / D_3)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

where

$$f_1 = 1 - \tilde{m}_{1,q} - \delta_q, \quad f_2 = 1 - \tilde{m}_{2,q} - \delta_q, \quad f_3 = \delta_q, \quad (3.8)$$

$$D_1 = (1 - \delta_q)(1 - \tilde{m}_{1,q})(\tilde{m}_{2,q} + \tilde{m}_{1,q}), \quad (3.9)$$

$$D_2 = (1 - \delta_q)(1 - \tilde{m}_{2,q})(\tilde{m}_{2,q} + \tilde{m}_{1,q}), \quad (3.10)$$

$$D_3 = (1 - \delta_q)(1 + \tilde{m}_{2,q})(1 - \tilde{m}_{1,q}) \quad (3.11)$$

In these expressions,  $\delta_u$  and  $\delta_d$  are, in principle, functions of the quark mass ratios and the parameters  $Z_u^{1/2}$  and  $Z_d^{1/2}$ , respectively. However, in Ref. [1] we found that keeping  $Z_u^{1/2}$  and  $Z_d^{1/2}$  as free, independent parameters gives rise to a continuous ambiguity in the fitting of  $|V_{ij}^{cb}|$  to the experimental

$$\mathbf{M}_{r,d,q} = m_{3,r} \text{diag}[\tilde{m}_{1,r}, -\tilde{m}_{2,r}, 1], \quad (3.3)$$

with subscripts 1,2,3 referring to  $u,c,t$  in the  $u$ -type sector and  $d,s,b$  in the  $d$ -type sector. After diagonalization of the mass matrices  $\mathbf{M}_q$ , one obtains the mixing matrix  $\mathbf{V}^{\text{th}}$  as

$$\mathbf{V}^{\text{th}} = \mathbf{O}_d^T \mathbf{P}^{\text{rel}} \mathbf{O}_u, \quad (3.4)$$

where  $\mathbf{P}^{\text{rel}}$  is the diagonal matrix of relative phases

$$\mathbf{P}^{\text{rel}} = \text{diag}[1, e^{i\Phi}, e^{i\Phi}], \quad (3.5)$$

and

$$\Phi = (\phi_u - \phi_c). \quad (3.6)$$

The orthogonal matrix  $\mathbf{O}_q$  is given by

data. To avoid this ambiguity we further assumed that the up and down mass matrices are generated following the same symmetry breaking pattern, that is,

$$Z_u^{1/2} = Z_d^{1/2} = Z^{1/2} \quad (3.12)$$

Then, from Eqs. (3.4)–(3.12) all matrix elements in  $\mathbf{V}^{\text{th}}$  may be written in terms of four quark mass ratios and only two free, real parameters the parameter  $Z^{1/2}$  which characterizes the symmetry breaking pattern in the  $u$  and  $d$  sectors and the  $CP$  violating phase  $\Phi$ . The computation of  $V_{ij}^{\text{th}}$  is quite straightforward. Here, we will give, in explicit form, only those elements of  $\mathbf{V}^{\text{th}}$  which will be of use later. From Eqs. (3.4)–(3.12) we obtain

$$V_{11}^{\text{th}} = - \left[ \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_d - \delta_u) \tilde{m}_d(1 + \tilde{m}_c - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_d)} \right]^{1/2} - \left[ \frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(\tilde{m}_d + \tilde{m}_c)} \right]^{1/2} \\ \times \left\{ \left[ \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_c)} \right]^{1/2} + \left[ \frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \delta_u(1 - \tilde{m}_d - \delta_d) \delta_d}{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_c)} \right]^{1/2} \right\} e^{i\Phi}, \quad (3.13)$$

$$V_{ub}^{\text{th}} = \left\{ \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)} \frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d}{(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_d)} \right\}^{1/2} \\ + \left\{ - \left[ \frac{\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_c - \delta_u) \delta_u(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)(1 + \tilde{m}_c - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_d)} \right]^{1/2} \right. \\ \left. - \left[ \frac{\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u) \delta_d}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_d)} \right]^{1/2} \right\} e^{i\Phi}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
 V_{cs}^{\text{th}} = & \left( \frac{\tilde{m}_u(1+\tilde{m}_c-\delta_u)\tilde{m}_d(1+\tilde{m}_s-\delta_d)}{(1-\delta_u)(1+\tilde{m}_c)(\tilde{m}_c+\tilde{m}_u)(1-\delta_d)(1+\tilde{m}_s)(\tilde{m}_s+\tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
 & + \left\{ \left( \frac{\tilde{m}_c\delta_u(1-\tilde{m}_u-\delta_u)\tilde{m}_s\delta_d(1-\tilde{m}_d-\delta_d)}{(1-\delta_u)(1+\tilde{m}_c)(\tilde{m}_c+\tilde{m}_u)(1-\delta_d)(1+\tilde{m}_s)(\tilde{m}_s+\tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\tilde{m}_c(1+\tilde{m}_c-\delta_u)\tilde{m}_s(1+\tilde{m}_s-\delta_d)}{(1+\tilde{m}_c)(1-\tilde{m}_u)(1+\tilde{m}_s)(1-\tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi}, \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 V_{cb}^{\text{th}} = & - \left( \frac{\tilde{m}_u(1+\tilde{m}_c-\delta_u)}{(1-\delta_u)(1+\tilde{m}_c)(\tilde{m}_c+\tilde{m}_u)} \frac{\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d}{(1-\delta_d)(1+\tilde{m}_s)(1-\tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\
 & + \left\{ - \left( \frac{\tilde{m}_c(1-\tilde{m}_u-\delta_u)\delta_u(1-\tilde{m}_d-\delta_d)(1+\tilde{m}_s-\delta_d)}{(1-\delta_u)(1+\tilde{m}_c)(\tilde{m}_c+\tilde{m}_u)(1-\delta_d)(1+\tilde{m}_s)(1-\tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\tilde{m}_c(1+\tilde{m}_c-\delta_u)}{(\tilde{m}_c+\tilde{m}_u)(1+\tilde{m}_c)} \frac{\delta_d}{(1+\tilde{m}_s)(1-\tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

The “best” symmetry breaking pattern. In order to find the actual pattern of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry breaking realized in nature, we made a  $\chi^2$  fit of the exact expressions for the moduli of the entries in the mixing matrix  $|V_{ij}^{\text{th}}|$ , the Jarlskog invariant  $J^{\text{th}}$ , and the three inner angles of the unitarity triangle  $\alpha^{\text{th}}$ ,  $\beta^{\text{th}}$ , and  $\gamma^{\text{th}}$ , to the experimentally determined values of  $|V_{ij}^{\text{exp}}|$ ,  $J^{\text{exp}}$ ,  $\alpha^{\text{exp}}$ ,  $\beta^{\text{exp}}$ , and  $\gamma^{\text{exp}}$ . A detailed account of the fitting procedure is given in Ref. [1]. Here, we will give only a brief relation of the main points in the fitting procedure.

For the purpose of calculating quark mass ratios and computing the mixing matrix, it is convenient to give all quark masses as running masses at some common energy scale [24,25]. In the present calculation, following Peccei [24], Fritzsche [26], and the Ba-Bar book [27], we used the values of the running quark masses evaluated at  $\mu = m_t$ ,

$$\begin{aligned}
 m_u &= 3.25 \pm 0.9 \text{ MeV}, & m_c &= 760 \pm 29.5 \text{ MeV}, \\
 m_s &= 171.0 \pm 12 \text{ GeV}, & m_d &= 4.4 \pm 0.64 \text{ MeV}, \\
 m_b &= 100 \pm 6 \text{ MeV}, & m_\tau &= 2.92 \pm 0.11 \text{ GeV}. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

These values, with the exception of  $m_s$ ,  $m_c$ , and  $m_b$ , were taken from the work of Fusaoka and Koide [25] see also Fritzsche [26] and Leutwyler [28]. The values of  $m_c(m_c)$  and  $m_b(m_b)$  were obtained by rescaling to  $\mu = m_t$ , the recent calculations of  $m_c(m_c)$  and  $m_b(m_b)$  by Pineda and Ynduráin [29] and Ynduráin [30]. The value of  $m_s$  agrees with the latest determination made by the ALEPH collaboration from a study of  $\tau$  decays involving kaons [31].

We kept the mass ratios  $\tilde{m}_c = m_c/m_t$ ,  $\tilde{m}_s = m_s/m_b$  and  $\tilde{m}_d = m_d/m_b$  fixed at their central values

$$\tilde{m}_c = 0.0044, \quad \tilde{m}_s = 0.034, \quad \text{and} \quad \tilde{m}_d = 0.0015, \tag{3.18}$$

but we took the value

$$\tilde{m}_u = 0.000032, \tag{3.19}$$

which is close to its upper bound. We found the following best values for  $\Phi$  and  $Z^{1/2}$ ,

$$\Phi^* = 90^\circ, \quad Z^{*/2} = \frac{1}{2} [Z_S^{1/2} - Z_A^{1/2}] = \sqrt{\frac{81}{32}} \tag{3.20}$$

corresponding to a value of  $\chi^2 \leq 0.32$ . The values of the parameters  $\delta_u(Z)$  and  $\delta_d(Z)$  obtained from Eqs. (3.18), (3.19), and (3.20) are

$$\delta_u(Z^{*/2}) = 0.000048, \quad \delta_d(Z^{*/2}) = 0.00228. \tag{3.21}$$

Before proceeding to give the numerical results for the mixing matrix  $V^{\text{th}}$ , it will be convenient to stress the following points

(1) The masses of the lighter quarks are the less well determined, while the moduli of the entries in  $|V_{ij}^{\text{exp}}|$  with the largest error bars, namely  $|V_{ub}|$  and  $|V_{td}|$ , are the most sensitive to changes in the ratios  $m_u/m_c$  and  $m_d/m_s$ , respectively. Hence, the quality of the fit of  $|V_{ij}^{\text{th}}|$  to  $|V_{ij}^{\text{exp}}|$  is good ( $\chi^2 \leq 0.5$ ) even if relatively large changes in the masses of the lighter quarks are made. The sensitivity of  $|V_{ub}|$  and  $|V_{td}|$  to changes in  $m_u/m_c$  and  $m_d/m_s$  respectively, is reflected in the shape of the unitarity triangle which changes appreciably when the masses of the lighter quarks change within their uncertainty ranges. The best simultaneous  $\chi^2$  fit of  $|V_{ij}^{\text{th}}|$ ,  $J^{\text{th}}$  and  $\alpha^{\text{th}}$ ,  $\beta^{\text{th}}$ , and  $\gamma^{\text{th}}$ , to the experimentally de-



termined quantities was obtained when the ratio  $\bar{m}_s = m_s/m_c$  is taken close to its upper bound, as given in Eq (3.19). Furthermore, the chosen high value of  $\bar{m}_s$  gives for the ratio  $|V_{ub}/V_{cb}|$  the value

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \approx \sqrt{\frac{\bar{m}_s}{m_c}} = 0.085 = 0.009 \quad (3.22)$$

in very good agreement with its latest world average [32-34].

(2) As the energy scale changes, say from  $\mu = m_t$  to  $\mu = 1$  GeV, the running quark masses change appreciably, but since the masses of light and heavy quarks increase almost in the same proportion, the resulting dependence of the quark mass ratios on the energy scale is very weak. When the energy scale changes from  $\mu = m_t$  to  $\mu = 1$  GeV,  $\bar{m}_s$  and  $\bar{m}_c$  decrease by about 25% and  $\bar{m}_c$  and  $\bar{m}_s$  also decrease but by less than 16%.

(3) In view of the previous considerations, a reasonable range of values for the running quark mass ratios, evaluated at  $\mu = m_t = 171$  GeV, would be as follows

$$0.000022 \leq \bar{m}_s \leq 0.000037,$$

$$0.0043 \leq \bar{m}_c \leq 0.0046.$$

$$|V^{th}| = \begin{pmatrix} 0.9735 - 0.9771 & 0.2151 - 0.2263 & 0.0028 - 0.0040 \\ 0.2151 - 0.2263 & 0.9726 - 0.9764 & 0.037 - 0.043 \\ 0.0078 - 0.0093 & 0.036 - 0.042 & 0.9991 - 0.9993 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

which is to be compared with the experimentally determined values of the matrix of moduli [3],

$$|V^{exp}| = \begin{pmatrix} 0.9745 - 0.9760 & 0.217 - 0.224 & 0.0018 - 0.0045 \\ 0.217 - 0.224 & 0.9737 - 0.9753 & 0.036 - 0.042 \\ 0.004 - 0.015 & 0.035 - 0.042 & 0.9991 - 0.9994 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

As is apparent from Eqs (3.24), (3.25), and (3.26), the agreement between computed and experimental values of all entries in the mixing matrix is very good. The estimated range of variation in the computed values of the moduli of the four entries in the upper left corner of the matrix  $|V^{th}|$  is larger than the error band in the corresponding entries of the matrix of the experimentally determined values of the moduli  $|V^{exp}|$ . The estimated range of variation in the computed values of the entries in the third column and the third row of  $|V^{th}|$  is comparable with the error band of the corresponding entries in the matrix of experimentally determined values of the moduli, with the exception of the elements  $|V_{ub}^{th}|$  and  $|V_{cb}^{th}|$  in which case the estimated range of variation due to the uncertainty in the values of the quark mass ratios is significantly smaller than the error band in the experimentally determined value of  $|V_{ub}^{exp}|$  and  $|V_{cb}^{exp}|$ .

$$0.0013 \leq \bar{m}_c \leq 0.0017,$$

$$0.032 \leq \bar{m}_c \leq 0.036 \quad (3.23)$$

The results of the  $\chi^2$  fit of the theoretical expressions for  $|V_{ij}^{th}|$ ,  $J^{th}$ ,  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$ , and  $\gamma^{th}$  to the experimentally determined quantities is as follows. The quark mixing matrix computed from the theoretical expression  $V^{th}$  with the numerical values of quark mass ratios given in Eqs. (3.18) and (3.19) and the corresponding best values of the symmetry breaking parameter  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$ , and the CP-violating phase,  $\Phi^* = 90^\circ$ , is

$$V^{th} = \begin{pmatrix} 0.9753 e^{i^\circ} & 0.221 e^{i158^\circ} & 0.0034 e^{i82^\circ} \\ 0.220 e^{i112^\circ} & 0.9745 e^{i39^\circ} & 0.040 e^{i90^\circ} \\ 0.0085 e^{-76^\circ} & 0.039 e^{-270^\circ} & 0.9992 e^{90^\circ} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

In order to have an estimation of the sensitivity of our numerical results to the uncertainty in the values of the quark mass ratios, we computed the range of values of the matrix of moduli  $|V_{ij}^{th}|$ , corresponding to the range of values of the mass ratios given in Eq (3.23), but keeping  $\Phi$  and  $Z^{1/2}$  fixed at the values  $\Phi^* = 90^\circ$  and  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$ . The result is

The value obtained for the Jarlskog invariant is

$$J^{th} = 2.8 \times 10^{-5} \quad (3.27)$$

in good agreement with the value  $|J^{exp}| = (3.0 \pm 1.3) \times 10^{-5} \sin \delta$  obtained from current data on CP violation in the  $K^s - \bar{K}^0$  mixing system [3] and the  $B^0 - \bar{B}^0$  mixing system [27].

For the inner angles of the unitarity triangle, we found the following central values:

$$\alpha = 85^\circ, \quad \beta = 22^\circ, \quad \gamma = 75^\circ. \quad (3.28)$$

An estimation of the range of values of the three inner angles of the unitarity triangle, compatible with the experimental

information on the absolute values of the matrix elements  $V^{\text{exp}}$ , is given by Mele [32] and Ali [33]. According to this authors,  $79^\circ \leq \alpha \leq 102^\circ$ ,  $21^\circ \leq \beta \leq 28^\circ$ , and  $55^\circ \leq \gamma \leq 78^\circ$ . We see that the central value of  $\beta$  obtained in this work is close to the lower limit according to Mele [32], while  $\gamma$  is close to the upper limit given by Mele [32] and  $\alpha$  is in the allowed range given by these authors.

IV. PHASE EQUIVALENCE OF  $V^{\text{th}}$  AND THE STANDARD PARAMETRIZATION  $V^{\text{PDG}}$

The standard parametrization [2] of the mixing matrix recommended by the Particle Data Group [3] is written in terms of three mixing angles  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  and one CP violating phase  $\delta_{13}$ ,

$$V^{\text{PDG}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

where  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  and  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ .

The range of values of the experimentally determined moduli in  $|V_{ij}^{\text{exp}}|$ , as given by Caso *et al.* [3], corresponds to 90% confidence limits on the range of values of the mixing angles of

$$0.217 \leq s_{12} \leq 0.222, \quad (4.2)$$

$$0.036 \leq s_{23} \leq 0.042, \quad (4.3)$$

$$0.0018 \leq s_{13} \leq 0.0044. \quad (4.4)$$

Seven of the nine absolute values of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) entries have been measured directly, by tree level processes. A range of values for the four parameters  $s_{12}, s_{23}, s_{13}$ , and  $\delta_{13}$  which is consistent with the seven direct measurements and the experimentally determined values of the moduli of  $|V|^{\text{exp}}$  [3], is given by Nir [35]:

$$0.2173 \leq s_{12} \leq 0.2219, \quad (4.5)$$

$$0.0378 \leq s_{23} \leq 0.0412, \quad (4.6)$$

$$0.00237 \leq s_{13} \leq 0.00395, \quad (4.7)$$

$c_{13}$  is known to deviate from unity only in the sixth decimal place [3,35]

The CP violating phase  $\delta_{13}$ , at present, is not constrained by direct measurements. However, the measurements of CP violation in K decays [36] force  $\delta_{13}$  to lie in the range

$$0 \leq \delta_{13} \leq \pi \quad (4.8)$$

The standard parametrization  $V^{\text{PDG}}$  was introduced without taking the possible functional relations between the quark masses and the flavor mixing parameters into account. In contrast, these functional relations are explicitly exhibited in the theoretical expressions  $V_{ij}^{\text{th}}$ , derived in the previous sections. Furthermore, we have seen that, when the best values of the parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$  are used, the mixing matrix  $V^{\text{th}}$  reproduces the central values of all experimentally determined quantities, that is, the moduli  $|V_{ij}^{\text{exp}}|$ , the Jarlskog in-

variant  $J^{\text{exp}}$  and the three inner angles  $\alpha, \beta$ , and  $\gamma$ , of the unitarity triangle [1]. Since the two parametrizations reproduce the same set of experimental data equally well, we are justified in writing

$$|V_{ij}^{\text{th}}| = |V_{ij}^{\text{PDG}}| = |V_{ij}^{\text{exp}}|. \quad (4.9)$$

We cannot simply equate  $V^{\text{th}}$  and  $V^{\text{PDG}}$  because the arguments of corresponding matrix elements in the two parametrizations are not equal

$$\arg(V_{ij}^{\text{th}}) \neq \arg(V_{ij}^{\text{PDG}}) \quad (4.10)$$

This difference is of no physical consequence, it reflects the freedom in choosing the unobservable phases of the quark fields in the mass representation. In the following, we will take advantage of this freedom to derive a phase transformed, theoretical mixing matrix  $\tilde{V}^{\text{th}}$ , related to  $V^{\text{th}}$  by a biunitary phase transformation, such that all corresponding entries in  $\tilde{V}^{\text{th}}$  and  $V^{\text{PDG}}$  are equal in modulus and phase. We will also derive exact, explicit expressions for the phases of the matrix elements  $V_{ij}^{\text{PDG}}$  in terms of the phases of the matrix elements  $V_{ij}^{\text{th}}$ , which, together with Eq (4.9), will be enough to show that  $V^{\text{PDG}}$  may be obtained from  $V^{\text{th}}$  by means of a suitable rephasing of the quark fields in the mass representation.

*Phase relations* In the mass basis, the quark charged currents take the form

$$J_c^\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_L^\mu \gamma^\mu V_{ij}^{\text{th}} q_L^d. \quad (4.11)$$

A redefinition of the phases of the quark fields which leaves  $J_c^\mu$  invariant, will change the argument of  $V_{ij}^{\text{th}}$  but leave the moduli  $|V_{ij}^{\text{th}}|$  invariant,

$$V_{ij}^{\text{th}} \rightarrow \tilde{V}_{ij}^{\text{th}} = e^{-i\chi_i^*} V_{ij}^{\text{th}} e^{i\chi_j^d} \quad (4.12)$$

The phases  $\chi_i^*$  and  $\chi_j^d$  occurring in Eq (4.12) will be determined from the requirement that corresponding entries in  $\tilde{V}^{\text{th}}$  and  $V^{\text{PDG}}$  be equal,

A MONDRAGÓN AND E. RODRÍGUEZ-JÁUREGUI

PHYSICAL REVIEW D 61 113002

$$|V_{ij}^{\text{th}} e^{i(\chi_i^{\text{th}} - \chi_j^{\text{th}} - \chi_i^{\text{d}} - \chi_j^{\text{d}})}| = |V_{ij}^{\text{PDG}}| e^{i\omega_{ij}^{\text{PDG}}}, \quad (4.13)$$

In this expression  $\omega_{ij}^{\text{th}}$  and  $\omega_{ij}^{\text{PDG}}$  are the arguments of  $V_{ij}^{\text{th}}$  and  $V_{ij}^{\text{PDG}}$ , respectively. Since the moduli  $|V_{ij}^{\text{th}}|$  and  $|V_{ij}^{\text{PDG}}|$  are equal, the arguments of the entries in the two parametrizations are related by the set of nine equations

$$\chi_i^{\text{u}} - \chi_j^{\text{d}} = \omega_{ij}^{\text{th}} - \omega_{ij}^{\text{PDG}} \quad (4.14)$$

The set of Eqs (4.14) relate the differences of the unobservable quark field phases to the differences of the arguments of corresponding entries in  $V^{\text{th}}$  and  $V^{\text{PDG}}$ . These two parametrizations of the mixing matrix are representations of the same set of experimental data. Therefore, it should be possible to derive, from Eqs. (4.14), a new set of equations, expressing the five non-vanishing arguments  $\omega_{ij}^{\text{PDG}}$  of  $V_{ij}^{\text{PDG}}$  in terms only of the arguments  $\omega_{ij}^{\text{th}}$  of  $V_{ij}^{\text{th}}$  without making reference to the unobservable phases of the quark fields. With this purpose in mind, we notice that, in the left hand side of Eqs (4.14), there are nine differences of unobservables phases  $(\chi_i^{\text{u}} - \chi_j^{\text{d}})$ , formed from only six different quark field phases. Differences of phases of the same quark field type, say  $(\chi_1^{\text{u}} - \chi_2^{\text{u}})$ , may be computed from Eqs (4.14) in at least three different ways. This redundancy implies the existence of nontrivial relations among the arguments of the entries of the two parametrizations. For example, from Eqs (4.14), the difference  $(\chi_2^{\text{u}} - \chi_3^{\text{d}}) - (\chi_2^{\text{u}} - \chi_3^{\text{d}})$  gives

$$\chi_2^{\text{d}} - \chi_3^{\text{d}} = \omega_{23}^{\text{u}} - \omega_{22}^{\text{u}} + \omega_{22}^{\text{PDG}}, \quad (4.15)$$

and the difference  $(\chi_1^{\text{u}} - \chi_3^{\text{d}}) - (\chi_1^{\text{u}} - \chi_3^{\text{d}})$  gives

$$\chi_2^{\text{d}} - \chi_3^{\text{d}} = \omega_{13}^{\text{u}} - \omega_{12}^{\text{u}} + \delta_{13} \quad (4.16)$$

If the phase difference  $(\chi_2^{\text{d}} - \chi_3^{\text{d}})$  is eliminated between Eqs. (4.15) and (4.16) we get

$$\delta_{13} - \omega_{22}^{\text{PDG}} = \omega_{12}^{\text{u}} - \omega_{13}^{\text{u}} - \omega_{22}^{\text{u}} + \omega_{22}^{\text{th}} \quad (4.17)$$

Using the same elimination procedure for all possible combinations  $(\chi_i^{\text{u}} - \chi_j^{\text{d}}) - (\chi_i^{\text{u}} - \chi_j^{\text{d}})$  we derive a set of nine equations, only four of which are linearly independent. One of these is Eq (4.17), for the other three we may take

$$-\omega_{21}^{\text{PDG}} + \omega_{22}^{\text{PDG}} = \omega_{11}^{\text{u}} - \omega_{12}^{\text{u}} - \omega_{21}^{\text{u}} + \omega_{22}^{\text{th}}, \quad (4.18)$$

$$\omega_{31}^{\text{PDG}} - \omega_{32}^{\text{PDG}} = -\omega_{11}^{\text{u}} + \omega_{12}^{\text{u}} + \omega_{31}^{\text{u}} - \omega_{32}^{\text{th}}, \quad (4.19)$$

and

$$-\omega_{22}^{\text{PDG}} + \omega_{32}^{\text{PDG}} = -\omega_{22}^{\text{u}} - \omega_{23}^{\text{u}} + \omega_{32}^{\text{th}} - \omega_{33}^{\text{th}} \quad (4.20)$$

Since, in  $V^{\text{PDG}}$  there are five entries with non-vanishing arguments, namely,  $\omega_{13}^{\text{PDG}} = -\delta_{13}$ ,  $\omega_{21}^{\text{PDG}}$ ,  $\omega_{22}^{\text{PDG}}$ ,  $\omega_{31}^{\text{PDG}}$ , and  $\omega_{32}^{\text{PDG}}$ , we require still one more equation relating the arguments of the entries of the two parametrizations. This is obtained from the phase relations between the determinants of the two matrices  $V^{\text{th}}$  and  $V^{\text{PDG}}$ . From Eqs. (4.12) and (4.13), it follows that

$$\det V^{\text{th}} = \det[\mathbf{X}_u^* V^{\text{PDG}} \mathbf{X}_d], \quad (4.21)$$

In this expression  $\mathbf{X}_u$  and  $\mathbf{X}_d$  are the diagonal unitary matrices of phases occurring in Eq (4.12). The determinant of  $V^{\text{PDG}}$  is one, hence,

$$\det[\mathbf{X}_u^* V^{\text{PDG}} \mathbf{X}_d] = e^{i\delta_{13}^{\text{u}}(\chi_1^{\text{u}} - \chi_3^{\text{d}})}. \quad (4.22)$$

Similarly, from the definition of  $V^{\text{th}}$ , Eq (3.4), we get

$$\det V^{\text{th}} = \det[\mathbf{O}_u^* \mathbf{P}^{u-d} \mathbf{O}_d] = \det(\mathbf{O}_u^* \mathbf{O}_d) \det \mathbf{P}^{u-d}, \quad (4.23)$$

the determinant of the orthogonal matrices is one, and the determinant of the diagonal matrix of phases  $\mathbf{P}^{u-d}$  is  $e^{i2\Phi}$ . Taking for  $\Phi$  the best value  $\Phi^* = \pi/2$ , we obtain

$$\det V^{\text{th}} = e^{i2\Phi^*} = e^{i\pi}. \quad (4.24)$$

Substitution of Eqs. (4.22) and (4.24) in Eq (4.21) gives

$$\sum_{i=1}^3 (\chi_1^{\text{u}} - \chi_i^{\text{d}}) = 2\Phi^* = \pi. \quad (4.25)$$

This phase relation guarantees the equality of the determinants of  $V^{\text{th}}$  and  $V^{\text{PDG}}$ . The sum of the unobservable quark field phases occurring in the left hand side of Eq. (4.25) may be computed from Eqs (4.14),

$$\sum_{i=1}^3 (\chi_1^{\text{u}} - \chi_i^{\text{d}}) = \sum_{i=1}^3 \omega_{1i}^{\text{th}} - \omega_{22}^{\text{PDG}}. \quad (4.26)$$

Now, we eliminate the unobservable quark field phases between Eqs (4.25) and (4.26), to get

$$\omega_{22}^{\text{PDG}} = \sum_{i=1}^3 \omega_{1i}^{\text{th}} - 2\Phi^*. \quad (4.27)$$

This relation shows that  $\arg(V_{22}^{\text{PDG}})$  is uniquely determined (mod  $2\pi$ ) in terms of the arguments of the entries in  $V^{\text{th}}$ .

With the help of Eq (4.27) we solve Eqs (4.17)–(4.20) for all the other nonvanishing arguments of  $V^{\text{PDG}}$ :

$$\delta_{13} = \omega_{11}^{\text{th}} + \omega_{12}^{\text{th}} - \omega_{13}^{\text{th}} + \omega_{23}^{\text{th}} + \omega_{33}^{\text{th}} - 2\Phi^*, \quad (4.28)$$

$$\omega_{21}^{\text{PDG}} = \omega_{21}^{\text{th}} - \omega_{12}^{\text{th}} - \omega_{33}^{\text{th}} - 2\Phi^*, \quad (4.29)$$

$$\omega_{31}^{\text{PDG}} = \omega_{31}^{\text{th}} + \omega_{12}^{\text{th}} + \omega_{23}^{\text{th}} - 2\Phi^*, \quad (4.30)$$

$$\omega_{32}^{\text{PDG}} = \omega_{32}^{\text{th}} + \omega_{23}^{\text{th}} + \omega_{11}^{\text{th}} - 2\Phi^* \quad (4.31)$$

In this way, we have shown that the arguments  $\omega_{ij}^{\text{PDG}}$  of  $V_{ij}^{\text{PDG}}$  are uniquely determined (mod  $2\pi$ ) by the arguments  $\omega_{ij}^{\text{th}}$  of  $V_{ij}^{\text{th}}$ .

We now return to the question of the quark field phases and the phase transformation from  $V_{ij}^{\text{th}}$  to  $V_{ij}^{\text{PDG}}$ . Substitution of Eqs (4.27)–(4.31) into Eq (4.14), gives the differences of the quark field phases explicitly in terms of the known arguments  $\omega_{ij}^{\text{th}}$  of  $V_{ij}^{\text{th}}$ . The quark field phases themselves are de-

terminated only up to a common additive constant. Since the quark field phases are unobservable, without loss of generality, we may fix one of them, and solve for the others. In this way, if we set  $\chi_1^d=0$ , we get

$$\begin{aligned} \chi_1^d &= 0^\circ, \\ \chi_2^d &= w_{11}^{\text{th}} - w_{12}^{\text{th}}, \\ \chi_3^d &= -w_{23}^{\text{th}} - w_{33}^{\text{th}} - w_{12}^{\text{th}} + 2\Phi^*, \\ \chi_1^u &= w_{11}^{\text{th}}, \\ \chi_2^u &= -w_{12}^{\text{th}} - w_{33}^{\text{th}} + 2\Phi^*, \\ \chi_3^u &= -w_{23}^{\text{th}} - w_{12}^{\text{th}} + 2\Phi^*. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Then, the diagonal matrices of phases required to compute the phase transformed  $\tilde{V}^{\text{th}}$  are

$$\mathbf{X}_u = \text{diag}[e^{i w_{11}^{\text{th}}}, e^{i(-w_{12}^{\text{th}} - w_{33}^{\text{th}} + 2\Phi^*)}, e^{i(-w_{23}^{\text{th}} - w_{12}^{\text{th}} + 2\Phi^*)}] \quad (4.33)$$

and

$$\mathbf{X}_d = \text{diag}[1, e^{i(w_{11}^{\text{th}} - w_{12}^{\text{th}})}, e^{i(w_{12}^{\text{th}} - w_{23}^{\text{th}} - w_{33}^{\text{th}} + 2\Phi^*)}] \quad (4.34)$$

Hence, with the help of Eqs (4.28)–(4.31), we verify that

$$\mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{V}^{\text{th}} \mathbf{X}_i = \mathbf{V}^{\text{PDG}} \quad (4.35)$$

is satisfied as an identity, provided that  $|\mathbf{V}_{ij}^{\text{th}}| = |\mathbf{V}_{ij}^{\text{PDG}}|$ .

V. THE MIXING ANGLES

The invariant measurables of the quark mixing matrix are the moduli of its elements, i.e., the quantities  $|V_{ij}|$ , and the

Jarlskog invariant  $J$ . But even  $J$ , up to a sign, is a function of the moduli [4]. Hence, two different parametrizations, are equivalent if the moduli of the corresponding entries are equal. In the case of  $V_{ij}^{\text{th}}$  and  $V_{ij}^{\text{PDG}}$ , when the best set of adjustable parameters of each parametrization ( $Z^{1/2}, \Phi$ ) and  $(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{13})$ , respectively, is used to fit the experimental data, the moduli of corresponding entries of the two parametrizations are numerically equal and give an equally good representation of the experimentally determined values of the moduli of the mixing matrix  $|\mathbf{V}_{ij}^{\text{exp}}|$  [3]. Therefore we are justified in writing

$$|\mathbf{V}_{ij}^{\text{th}}| = |\mathbf{V}_{ij}^{\text{PDG}}|, \quad (5.1)$$

even though  $V_{ij}^{\text{th}}$  has only two adjustable parameters ( $Z^{1/2}, \Phi$ ) while the number of adjustable parameters in  $V_{ij}^{\text{PDG}}$  is four, namely,  $(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{13})$ . All entries in  $|\mathbf{V}_{ij}^{\text{th}}|$  are explicit functions of the four quark mass ratios  $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$  and the two parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ . The equality of the moduli of corresponding entries of the two parametrizations will allow us to derive explicit expressions for the mixing angles in terms of the four quark mass ratios  $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$  and the parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ .

From the equality of  $|\mathbf{V}_{13}^{\text{th}}|$  and  $|\mathbf{V}_{13}^{\text{PDG}}|$ , it follows that

$$\sin \theta_{13} = |\mathbf{V}_{ub}^{\text{th}}|, \quad (5.2)$$

if we take  $|\mathbf{V}_{ub}^{\text{th}}|$  from Eq (3.14), and we set  $\Phi = \pi/2$  and  $Z^{1/2}$  equal to their best values  $\Phi^* = \pi/2$  and  $Z^{1/2*} = \sqrt{\frac{81}{32}}$  we get

$$\begin{aligned} \sin \theta_{13} = & \left\{ \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d^*}{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} + \left[ \left( \frac{\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\delta_d^*}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)\delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

The computation of  $\sin \theta_{23}$  is slightly more involved. From Eq (4.1) and the equality of  $|\mathbf{V}_{ij}^{\text{th}}|$  and  $|\mathbf{V}_{ij}^{\text{PDG}}|$ , we obtain

$$\sin \theta_{23} = \frac{|\mathbf{V}_{cb}^{\text{PDG}}|}{\sqrt{1 - |\mathbf{V}_{ub}^{\text{PDG}}|^2}} = \frac{|\mathbf{V}_{cb}^{\text{th}}|}{\sqrt{1 - |\mathbf{V}_{ub}^{\text{th}}|^2}} \quad (5.4)$$

Substitution of the expressions (3.16) and (3.14) with  $\Phi^* = \pi/2$  and  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$  for  $|\mathbf{V}_{cb}^{\text{th}}|$  and  $|\mathbf{V}_{ub}^{\text{th}}|$  in Eq. (5.4) gives

$$\begin{aligned} \sin \theta_{23} = & \sqrt{\frac{1 - \tilde{m}_u}{1 + \tilde{m}_c}} \{ \tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d^* + [ \sqrt{(1 - \delta_u^*)\tilde{m}_c(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)\delta_d^*} \\ & - \sqrt{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} ]^2 \}^{1/2} \{ - [ \sqrt{(1 - \delta_u^*)\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)\delta_d^*} \\ & - \sqrt{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)\delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} ]^2 + (1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d) \\ & - \tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d^* \}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

A MONDRAGÓN AND E RODRÍGUEZ-JÁUREGUI

PHYSICAL REVIEW D 61 113002

Similarly from Eq. (4.1) and the equality of  $|V_{cb}^{th}|$  and  $|V_{cb}^{PDG}|$ , we obtain

$$\sin \theta_{12} = \frac{|V_{ub}^{PDG}|}{\sqrt{1 - |V_{cb}^{PDG}|^2}} = \frac{|V_{ub}^{th}|}{\sqrt{1 - |V_{cb}^{th}|^2}} \quad (5.6)$$

Then, substitution of the expressions (3.13) and (3.14) for  $|V_{cb}^{th}|$  and  $|V_{ub}^{th}|$  in Eq. (5.6) gives

$$\begin{aligned} \sin \theta_{12} = & \sqrt{\frac{1 - \bar{m}_c}{\bar{m}_c + \bar{m}_\mu}} \{ \bar{m}_c (1 - \bar{m}_d - \delta_d^*) \bar{m}_e (1 + \bar{m}_i - \delta_i^*) + [ \sqrt{(1 - \delta_u^*) \bar{m}_u (1 - \bar{m}_d - \delta_d^*) (1 - \delta_d^*) \bar{m}_s (1 - \bar{m}_i - \delta_i^*)} \\ & + \sqrt{\bar{m}_u (1 - \bar{m}_c - \delta_c^*) \delta_u^* \bar{m}_s (1 - \bar{m}_e - \delta_e^*) \delta_d^{*2}} ]^{1/2} - [ \sqrt{(1 - \delta_u^*) \bar{m}_d (1 - \bar{m}_a - \delta_a^*) (1 - \delta_d^*) \delta_u^*} \\ & - \sqrt{\bar{m}_u (1 + \bar{m}_c - \delta_c^*) \delta_u^* (1 - \bar{m}_\mu - \delta_\mu^*) (1 + \bar{m}_s - \delta_s^*)} ]^{1/2} - (1 - \delta_u^*) (1 - \bar{m}_d) (\bar{m}_i - \bar{m}_a) (1 - \delta_c^*) (1 + \bar{m}_s) (1 - \bar{m}_d) \\ & - \bar{m}_c (1 - \bar{m}_d - \delta_d^*) \bar{m}_e \bar{m}_s \delta_c^* ]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.7)$$

The computed values for  $\sin \theta_{12}$ ,  $\sin \theta_{23}$ , and  $\sin \theta_{13}$  corresponding to the best  $\chi^2$  fit of  $|V_{ij}^{th}|$ ,  $J^{th}$  and  $\alpha^d$ ,  $\beta^{th}$  and  $\gamma^{th}$  to the experimentally determined quantities  $|V_{ij}^{exp}|$ ,  $J^{exp}$  and the three inner angles of the unitarity triangle  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$ , and  $\gamma^{exp}$  are obtained when the numerical values of  $|V_{ub}^{th}|$ ,  $|V_{cb}^{th}|$ , and  $V_{ub}^{th}$ , computed from Eqs (3.13), (3.14), (3.16) and given in Eq (3.24) are substituted in to Eqs (5.2), (5.4), and (5.6) In this way, we get

$$\sin \theta_{12}^* = 0.221, \quad (5.8)$$

$$\sin \theta_{23}^* = 0.040, \quad (5.9)$$

$$\sin \theta_{13}^* = 0.0034 \quad (5.10)$$

The numerical value of  $\cos \theta_{13}^*$  deviates from unity in the sixth decimal place

We notice that the numerical values of the mixing angles computed from quark masses and the best values of the symmetry breaking parameters coincide almost exactly with the central values of the experimentally determined quantities, as could be expected from Eq (5.1). This observation is interesting because, in the case of three families, the most general form of the mixing matrix has at most four free, independent parameters [4] which could be four independent moduli or three mixing angles and one phase as occurs in  $V^{PDG}$ . The symmetry derived  $V^{th}$  has only two free, real independent parameters. In spite of that, the quality of the fit of  $V^{th}$  to the experimental data is as good as the quality of the fit of  $V^{PDG}$  to the same data. The predictive power of  $V^{th}$  implied by this fact originates in the flavor permutational symmetry of the standard model and the assumed symmetry breaking pattern from which the texture in the quark mass matrices and  $V^{th}$  were derived

## VI. THE CP VIOLATING PHASE $\delta_{13}$

The CP violating phase  $\delta_{13}$  of the standard parametrization  $V^{PDG}$  of the quark mixing matrix is given in Eq. (4.28)

in terms of the arguments  $w_j^{th}$  of five entries in the theoretical expression for  $V_j^{th}$  and the corresponding CP violating phase  $\Phi$ . Taking from Eq (3.24) the numerical values of the arguments  $w_j^{th}$  and setting  $\Phi$  equal to the best value  $\Phi^* = \pi/2$ , we obtain the numerical value of  $\delta_{13}$  corresponding to the best fit of  $|V_{cb}^{th}|$  to the experimental data

$$\delta_{13}^* = 75^\circ \quad (6.1)$$

This predicted value of  $\delta_{13}$  is very close to the numerical value of the third inner angle  $\gamma$ , of the unitarity triangle. The difference may readily be computed in terms of the arguments  $w_j^{th}$ . From the expression for  $\gamma$

$$\gamma = \arg \left[ - \frac{V_{cb}^* V_{ca}}{V_{ub}^* V_{ua}} \right] \quad (6.2)$$

we get

$$-\gamma = w_{tl}^{th} - w_{ts}^{th} - w_{21}^{th} + w_{23}^{th} + \pi \quad (6.3)$$

which, when compared with the expression (4.28) for  $\delta_{13}$  gives

$$-\gamma = \delta_{13} - (w_{22}^{th} + w_{21}^{th} + w_{33}^{th} - 2\Phi^* - \pi) \quad (6.4)$$

Taking from Eq (3.24) the numerical values of the arguments corresponding to the best values  $\Phi^* = 90^\circ$  and  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$ , we obtain

$$(w_{12}^{th} + w_{21}^{th} + w_{33}^{th} - 2\Phi^* - \pi) = 0.04^\circ \quad (6.5)$$

This is, indeed, a very small number, and justifies the approximation

$$-\gamma \approx \delta_{13}^*. \quad (6.6)$$

According to this, the value of  $|\gamma|$  computed from quark mass ratios and the best values of the parameters  $Z^{*1/2}$  and

$\Phi^*$  is  $|\gamma|=75^\circ$ , in agreement with the bounds extracted from the precise measurements of the  $B_d^0$  oscillation frequency [32] and the measurements of the rates of the exclusive hadronic decays  $B^\pm \rightarrow \pi K$  and the  $CP$  averaged  $B^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0$  [37]. Exact explicit expressions for the  $CP$  violating phase  $\delta_{13}$  in terms of the four quark mass ratios and the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  may readily be found; such an expression could be derived from Eq. (4.28) in terms of the arguments of five matrix elements of  $V^{\text{th}}$ . However, a simpler expression, involving only four matrix elements of  $V^{\text{th}}$  may be obtained from the Jarlskog invariant  $J$ .

The Jarlskog invariant may be written in terms of four matrix elements of  $V$  as

$$J = \text{Im}[V_{12}V_{23}V_{13}^*V_{22}^*]. \quad (6.7)$$

Since  $J$  is an invariant, its value is independent of the particular parametrization of  $V$ . If we write the right hand side of Eq. (6.7) in terms of the standard parametrization  $V^{\text{PDG}}$ , we obtain

$$\sin \delta_{13} = \frac{J^{\text{th}}}{s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{13}c_{23}}. \quad (6.8)$$

The terms in the denominator in the right hand side of this expression were written in Eqs. (5.2), (5.4), and (5.6) in terms of the moduli  $|V_{12}^{\text{th}}|$ ,  $|V_{13}^{\text{th}}|$ , and  $|V_{23}^{\text{th}}|$ . Hence,

$$s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{13}c_{23} = \frac{|V_{12}^{\text{th}}||V_{13}^{\text{th}}||V_{23}^{\text{th}}|[(1-|V_{13}^{\text{th}}|^2-|V_{12}^{\text{th}}|^2)(1-|V_{13}^{\text{th}}|^2-|V_{23}^{\text{th}}|^2)]^{1/2}}{1-|V_{13}^{\text{th}}|^2} \quad (6.9)$$

Substitution of Eq. (6.9) in Eq. (6.8) gives

$$\sin \delta_{13} = \frac{(1-|V_{13}^{\text{th}}|^2)\text{Im}[V_{12}^{\text{th}}V_{23}^{\text{th}}V_{13}^{\text{th}*}V_{22}^{\text{th}*}]}{|V_{12}^{\text{th}}||V_{13}^{\text{th}}||V_{23}^{\text{th}}|\sqrt{(1-|V_{13}^{\text{th}}|^2-|V_{12}^{\text{th}}|^2)(1-|V_{13}^{\text{th}}|^2-|V_{23}^{\text{th}}|^2)}}, \quad (6.10)$$

the right hand side of this equation may be written in terms of the quark mass ratios and the symmetry breaking parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  with the help of Eqs. (5.3), (5.5), and (5.7). A simpler expression which leads to a very accurate approximation for  $\delta_{13}$  is obtained from Eq. (6.10) if the matrix elements in the square brackets are written as modulus and argument, and use is made of the untagness of  $V^{\text{th}}$  to simplify the denominator,

$$\sin \delta_{13} = \frac{(1-|V_{13}^{\text{th}}|^2)|V_{22}^{\text{th}}|\sin(w_{12}^{\text{th}}+w_{23}^{\text{th}}-w_{13}^{\text{th}}-w_{22}^{\text{th}})}{|V_{11}^{\text{th}}||V_{33}^{\text{th}}|} \quad (6.11)$$

Explicit expressions for the arguments  $w_{12}^{\text{th}}$ ,  $w_{23}^{\text{th}}$ ,  $w_{13}^{\text{th}}$ , and  $w_{22}^{\text{th}}$  in terms of the quark mass ratios may be derived from Eqs. (3.13)–(3.16) setting  $Z^{1/2}$ , and  $\Phi$  equal to their best values  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$  and  $\Phi^* = \pi/2$ , we get

$$w_{13}^{\text{th}} = \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \left[ \sqrt{(1-\delta_u^*)(1-\delta_d^*)} + \sqrt{\delta_u^* \delta_d^* \frac{(1+\tilde{m}_c - \delta_u^*)(1-\tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1-\tilde{m}_c - \delta_u^*)(1+\tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right] \right), \quad (6.12)$$

$$w_{cb}^{\text{th}} = \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ \sqrt{(1-\delta_u^*)(1-\delta_d^*)} - \sqrt{\delta_u^* (1-\tilde{m}_u - \delta_u^*)(1-\tilde{m}_d - \delta_d^*)(1+\tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right] \right), \quad (6.13)$$

$$w_{ub}^{\text{th}} = \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ \sqrt{(1-\delta_u^*)(1-\delta_d^*)} - \sqrt{\delta_u^* (1+\tilde{m}_c - \delta_u^*)(1-\tilde{m}_d - \delta_d^*)(1+\tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right] \right), \quad (6.14)$$

$$w_{cs}^{\text{th}} = \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}} \left[ \sqrt{(1-\delta_u^*)(1-\delta_d^*)} + \sqrt{\delta_u^* \delta_d^* \frac{(1-\tilde{m}_u - \delta_u^*)(1-\tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1+\tilde{m}_c - \delta_u^*)(1+\tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right] \right) \quad (6.15)$$

Computing the second factor in square brackets in the leading order of magnitude, we get

A MONDRAGÓN AND E RODRÍGUEZ-JÁUREGUI

PHYSICAL REVIEW D 61 113002

$$\kappa_{cb}^h \approx \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}} \right), \quad (6.16)$$

$$w_{cb}^{\text{th}} \approx \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left( 1 - \sqrt{\frac{\delta_u^*}{\delta_c^*}} \right) \right), \quad (6.17)$$

$$w_{cb}^{\text{th}} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left( 1 - \sqrt{\frac{\delta_u^*}{\delta_c^*}} \right) \right). \quad (6.18)$$

and

$$w_{cb}^{\text{th}} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}} \right) \quad (6.19)$$

The modulus  $|V_{cb}^{\text{th}}|$  has already been expressed in terms of quark mass ratios and the parameters characterizing the symmetry breaking pattern  $Z^{*12}$  and  $\Phi^*$ , in Eqs. (5.2) and (5.3). Similar expressions for the other moduli occurring in Eq. (6.11) may also be given

$$|V_{ud}| = \left\{ \frac{\tilde{m}_c (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) \tilde{m}_s (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_d)(1 - \delta_d^*)(1 - \tilde{m}_c)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right\}^{1/2} \\ \times \left\{ 1 + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d} \left[ (1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*) \right]^{1/2} + \left( \delta_u^* \delta_d^* \frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \right)^{1/2} \right\}^2, \quad (6.20)$$

$$|V_{cs}| = \left\{ \frac{\tilde{m}_c (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*) \tilde{m}_s (1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right\}^{1/2} \\ \times \left\{ \left[ 1 + \frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_c - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right]^{1/2} + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s} \frac{1}{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} \right\}^{1/2}, \quad (6.21)$$

$$|V_{cd}| = \left\{ \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 - \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right\}^{1/2} \\ \times \left\{ \left[ 1 + \frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)}{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right]^{1/2} \right. \\ \left. + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \delta_u^* \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d^*}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \right\}^{1/2}. \quad (6.22)$$

Computing in the leading order of magnitude, the first factor in the right hand side of Eq. (6.11) gives

$$\frac{(1 - |V_{31}^{\text{th}}|^2) |V_{23}^{\text{th}}|}{|V_{11}^{\text{th}}| |V_{33}^{\text{th}}|} \approx \frac{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 - \tilde{m}_d)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \\ \times \left\{ 1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_d} (\sqrt{\delta_d^*} - \sqrt{\delta_u^*}) \right\} \quad (6.23)$$

Inserting in to Eq. (6.23) the numerical values of the mass ratios and  $\sqrt{\delta_u^*} \sim \sqrt{\delta_d^*} = 0.04$ , we find that the right hand side of Eq. (6.23) differs from one in the third decimal place

$$\frac{(1 - |V_{31}^{\text{th}}|^2) |V_{23}^{\text{th}}|}{|V_{11}^{\text{th}}| |V_{33}^{\text{th}}|} \approx 1 \quad (6.24)$$

Therefore,

$$\sin \delta_{13}^* \approx \sin(w_{cb}^{\text{th}} + w_{cb}^{\text{th}} - w_{cb}^{\text{th}} - w_{cb}^{\text{th}}), \quad (6.25)$$

taking the numerical values of the argument in the right hand side of Eq. (6.25) from (3.22), we obtain

$$\delta_{13}^* \approx 75^\circ, \quad (6.26)$$

in agreement with Eq. (6.1). The approximate expression Eq. (6.25) for  $\sin \delta_{13}^*$  could also be derived from Eq. (4.17) if  $w_{22}^{\text{PDG}}$  is neglected. Computing  $w_{22}^{\text{PDG}}$  from Eq. (4.27) and (6.12)–(6.15), we obtain  $w_{22}^{\text{PDG}} = -0.0018^\circ$  which shows that Eq. (6.25) is a very good approximation. Since Eq. (4.27) was derived from the phase relations expressing the arguments of  $V_{ij}^{\text{PDG}}$  in terms of those of  $V_{ij}^{\text{th}}$ , while Eq. (6.11) was derived from the expression Eq. (6.10) for the Jarlskog invariant, the agreement found between Eqs. (4.27) and (6.11)–(6.25) is a consistency check of our formalism

VII. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In this work, we explicitly exhibit the phase equivalence of the theoretical mixing matrix  $V^{th}$ , derived from the breaking of the flavor permutational symmetry in a previous work [1], and the standard parametrization [2]  $V^{PDG}$  advocated by the Particle Data Group [3]. More precisely, we show that when the best set of adjustable parameters of each parametrization is obtained from a  $\chi^2$  fit to the same experimental data, the moduli of corresponding entries in the matrices are numerically equal and give an equally good representation of experimentally determined values of the moduli of the mixing matrix  $V^{exp}$ . Hence we are justified in writing

$$|V_{ij}^{th}| = |V_{ij}^{PDG}| \quad (7.1)$$

even though  $V^{th}$  has only two adjustable parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ , while the number of adjustable parameters in  $V^{PDG}$  is four, the three mixing angles  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  and the CP violating phase  $\delta_{13}$ . From this result, we proceed to formulate and solve the equations of the rephasing transformation which acting on  $V^{th}$  gives a phase transformed  $\tilde{V}^{th}$  such that the corresponding entries in  $\tilde{V}^{th}$  and  $V^{PDG}$  are equal in modulus and phase. As part of the solution, we obtain a set of equations expressing the nonvanishing arguments  $w_{ij}^{PDG}$  of the matrix elements  $V_{ij}^{PDG}$  of the standard parametrization in terms of the arguments  $w_{ij}^{th}$  of the entries in the flavor symmetry derived  $V^{th}$ . Since the matrix elements of  $V^{th}$  are known functions of the quark mass ratios and the parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ , we obtain exact, explicit, analytical expressions for the arguments  $w_{ij}^{PDG}$  as functions of the quark mass ratios and the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  which characterize the best or preferred symmetry breaking pattern. In particular, we derive an exact, explicit expression for the CP violating phase  $\delta_{13}^*$  written as a linear combination of the arguments of five entries in  $V^{th}$ . Similarly, from the equality of the moduli of the corresponding entries in the two parametrizations, we solve for the mixing parameters  $\sin \theta_{12}, \sin \theta_{13}, \sin \theta_{23}$ , occurring in the standard parametrization, in terms of the moduli  $|V_{ij}^{th}|$ . Then, using the explicit expressions found for  $V_{ij}^{th}$  in our previous work [1], we obtain exact, explicit expressions for the mixing parameters  $\sin \theta_{12}^*, \sin \theta_{13}^*, \sin \theta_{23}^*$ , in terms of the quark mass ratios and the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$ . From these results and an expression for the Jarlskog invariant, written in terms of four matrix elements of  $V^{th}$ , we derive an alternative, explicit, analytical expression for  $\sin \delta_{13}^*$  as function of the quark mass ratios and the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$ .

In conclusion, in the standard electroweak model of particle interactions, both the masses of the quarks as well as the mixing parameters and the CP violating phase appear as free,

independent parameters. In this work we have given explicit expressions for the mixing parameters  $\sin \theta_{12}, \sin \theta_{13}, \sin \theta_{23}$  and the CP violating phase  $\delta_{13}$  of the standard parametrization of the mixing matrix [2] as functions of the four quark mass ratios  $m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b$ , and two parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ . These expressions were obtained from a simple and explicit ansatz for the pattern of the breaking of quark flavor symmetry and a rephasing transformation of the quark fields in the mass representation.

The numerical values of the mixing parameters  $\sin \theta_{12}^*, \sin \theta_{13}^*$ , and  $\sin \theta_{23}^*$  computed from quark mass ratios and the best values of the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$ , coincide almost exactly with the central values of the same mixing parameters, determined from the experimental data [35], as could be expected from the phase equivalence of  $V^{th}$  and  $V^{PDG}$ , expressed in Eq. (7.1). This observation is interesting because, in the case of three families, the most general form of the mixing matrix has at most four free, independent parameters [4] which could be four independent moduli or three mixing angles and one phase as occurs in  $V^{PDG}$ . The symmetry derived  $V^{th}$  has only two free, real independent parameters. In spite of that, the quality of the fit of  $V^{th}$  to the experimental data is as good as the quality of the fit of  $V^{PDG}$  to the same data. The predictive power of  $V^{th}$  implied by this fact originates in the flavor permutational symmetry of the standard model and the assumed symmetry breaking pattern from which the texture in the quark mass matrices and  $V^{th}$  were derived.

The value of  $\delta_{13} = \arg(V_{ub}^{*PDG})$  computed from quark mass ratios and the best values of the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  is  $\delta_{13}^* = 75^\circ$  in agreement with the bounds extracted from the precise measurements of the  $B_s^0$  oscillation frequency [32] and the measurements of the rates of the exclusive hadronic decays  $B^\pm \rightarrow \pi K$  and the CP averaged  $B^\pm \rightarrow \pi^\mp \pi^0$  [37]. It is interesting to notice that, in the flavor symmetry breaking parametrization of the mixing matrix, the best value of the symmetry breaking parameter  $Z^{1/2}$  may be written as a purely algebraic number,

$$Z^{*1/2} = \frac{1}{2}(Z_S^{1/2} - Z_A^{1/2}) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{8}} + \sqrt{8} \right) \quad (7.2)$$

and the best value of the CP violating phase  $\Phi$  is consistent with  $\Phi^* = \pi/2$ .

ACKNOWLEDGMENTS

We are indebted to Dr. M. Mondragón for a careful reading of the manuscript. This work was partially supported by DGAPA-UNAM under Contract No. PAPIIT-IN125298 and by CONACYT (México) under Contract No. 3909P-E9607

[1] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, Phys. Rev. D 59, 093009 (1999).

[2] L.L. Chau and W.-Y. Keung, Phys. Rev. Lett. 53, 1802 (1984).

[3] Particle Data Group, C. Caso et al. Eur. Phys. J. C 3, 1 (1998).

[4] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. 55, 1039 (1985), see also C. Jarlskog, in CP Violation, edited by C. Jarlskog, Vol. 3 of Advanced Series on Directions in High Energy Physics (World Scientific, Singapore, 1989).



- [5] H Fritzsch, *Phys Lett* **70B**, 436 (1977)
- [6] S Pakvasa and H Sugawara, *Phys Lett* **73B**, 61 (1978)
- [7] H Fritzsch, *Phys Lett* **73B**, 317 (1978)
- [8] H Haran, H Haut and J Weyers, *Phys Lett* **78B**, 459 (1978)
- [9] Y Chikashige, G Gelmini, R P Peccei, and M. Roncadelli, *Phys Lett* **94B**, 494 (1980)
- [10] Y Yamnaka, H Sugawara, and S Pakvasa *Phys Rev D* **25**, 1895 (1982).
- [11] P Kaus and S. Mesh'kov, *Phys. Rev D* **42**, 1863 (1990)
- [12] G C Branco, J I Silva-Marcos and M N Rebelo, *Phys Lett B* **237**, 446 (1990)
- [13] H Fritzsch and J Plankl *Phys Lett B* **237**, 451 (1990)
- [14] H Fritzsch and D Holtmanspotter, *Phys Lett B* **338**, 290 (1994)
- [15] G C Branco, and J I Silva-Marcos, *Phys Lett B* **359**, 166 (1995)
- [16] H Fritzsch and Z Z Xing, *Phys Lett B* **372**, 265 (1996)
- [17] H Lehmann, C Newton, and T Wu *Phys Lett. B* **384**, 249 (1996)
- [18] Z Z Xing, *J Phys G* **23**, 1563 (1997)
- [19] K Kang and S K Kang, *Phys Rev. D* **56**, 1511 (1997)
- [20] H Fritzsch and Z Z Xing *Phys Lett B* **440**, 313 (1998)
- [21] J I Silva-Marcos, *Phys Lett B* **443**, 276 (1998)
- [22] T Shinohara, H Tanaka, and I S Sogami, *Prog Theor Phys* **100**, 615 (1998)
- [23] S L Adler, *Phys Rev D* **59**, 015012 (1999)
- [24] R D Peccei and K Wang, *Phys Rev D* **53**, 2712 (1996)
- [25] H Fusaoka and Y Koide, *Phys. Rev D* **57**, 3986 (1998).
- [26] H. Fritzsch "Mass Hierarchies Hidden Symmetry and Maximal CP-violation." hep-ph/9807551
- [27] The BABAR Collaboration. The Babar Physics Book *Physics At An Asymmetric B Factory*, edited by P F Harrison *et al.*, Report No SLAC-R-0504, 1998. See also the BOOKS subfile under the following call number: QCD201 B3 1998. Papers from Workshop on Physics at an Asymmetric B Factory (*Babar Collaboration Meeting*) Rome, Italy, 1996, Princeton, NJ 1997, Orsay, France, 1997, and Pasadena, CA, 1997
- [28] H Leutwyler, *Phys Lett B* **378**, 313 (1996).
- [29] A Pineda and F J Ynduráin *Phys Rev D* **61**, 077505 (2000)
- [30] F Ynduráin, *Nucl Phys B* **517**, 324 (1998)
- [31] ALEPH Collaboration, R Barate *et al.*, "Study of tau decays involving kaons, spectral functions and determination of the strange quark mass." CERN-EP/99-026, hep-ex/9903015
- [32] S Mele, *Phys Rev D* **59**, 113011 (1999)
- [33] A Ali and D London *Eur Phys J C* **9**, 687 (1999)
- [34] Zoltan Ligeti, Invited talk at Kaon'99, 1999, Chicago Report No. FERMILAB-Conf-99/213-T, hep-ph/9908432
- [35] Y Nir, Lectures given at the 1998 European School of High Energy Physics, University of St Andrews Scotland, 1998, hep-ph/9810520, WIS-98/29/Oct-DPP
- [36] A J Buras, "Weak Hamiltonian, CP-violation and Rare Decays." TUM-HEP-316/98 hep-ph/9806471
- [37] M Neubert, "Exploring the weak phase  $\gamma$  in  $B^{\pm} \rightarrow \pi K$  Decays." hep-ph/9904321

**Breaking of the flavor permutational symmetry: Mass textures and the CKM matrix**

A Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregu  
*Instituto de Física, UNAM, Apartado Postal 20-364, 01000 México, Distrito Federal, México*  
 (Received 6 November 1998, published 12 April 1999)

Different *Ansätze* for the breaking of flavor permutational symmetry according to  $S_L(3) \otimes S_R(3) \supset S_L(2) \otimes S_R(2)$  give different Hermitian mass matrices of the same modified Fritzsch type, which differ in the symmetry breaking pattern. In this work we obtain a clear and precise indication on the preferred symmetry breaking scheme from a fit of the predicted  $|V^{cb}|$  to the experimentally determined absolute values of the elements of the CKM matrix. The preferred scheme leads to simple mass textures and allows us to compute the CKM mixing matrix, the Jarlskog invariant  $J$ , and the three inner angles of the unitarity triangle in terms of four quark mass ratios and only one free parameter the  $CP$  violating phase  $\Phi$ . Excellent agreement with the experimentally determined absolute values of the entries in the CKM matrix is obtained for  $\Phi = 90^\circ$ . The corresponding computed values of the Jarlskog invariant and the inner angles are  $J = 3.00 \times 10^{-5}$ ,  $\alpha = 84^\circ$ ,  $\beta = 24^\circ$ , and  $\gamma = 72^\circ$  in very good agreement with current data on  $CP$  violation in the neutral kaon-antikaon system and oscillations in the  $B_s^0$ - $\bar{B}_s^0$  system [S0556-2821(99)01309-0]

PACS number(s): 12.15.Ff, 11.30.Er, 11.30.Hv, 12.15.Hh

I. INTRODUCTION

Recent interest in flavor or horizontal symmetry building (mass textures) has been spurred mainly by the large top quark mass and hence, the strong hierarchy in the quark masses [1–8]. A permutational flavor symmetry has been advocated by many authors in order to constrain the fermion mass matrices and mixing parameters [9–14]. Recently, various symmetry breaking schemes have been proposed based on the discrete non-Abelian group  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , which is broken according to  $S_L(3) \otimes S_R(3) \supset S_L(2) \otimes S_R(2) \supset S_{diag}(2)$ . The group  $S(3)$  treats three objects symmetrically while the hierarchical nature of the Yukawa matrices is a consequence of the representation structure,  $1 \oplus 2$ , of  $S(3)$  which treats the generations differently. Different *Ansätze* for the breaking of the permutational symmetry give rise to different Hermitian mass matrices  $M_q$  of the same modified Fritzsch type which, in a symmetry adapted basis, differ in the numerical value of the ratio  $Z^{1/2} = M_{23}/M_{22}$ . In the absence of a physically motivated argument to fix the value of  $Z^{1/2}$ , different values for  $Z^{1/2}$  have been proposed by various authors [1–3, 6, 7, 15–19].

In this paper, different symmetry breaking schemes are classified in terms of the irreducible representations of an auxiliary  $\tilde{S}(2)$  group. Then, diagonalizing the mass matrices, we obtain exact explicit expressions for the elements of the mixing matrix,  $V_{CKM}$ , the Jarlskog invariant  $J$ , and the inner angles of the unitarity triangle in terms of the quark mass ratios, the symmetry mixing parameter, and one  $CP$  violating phase. A  $\chi^2$  fit of the theoretical expressions to the experimentally determined absolute values of the elements of the  $V_{CKM}^{exp}$  mixing matrix gives a clear and precise indication on the preferred pattern for the breaking of the  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry. Simple, explicit expressions for the corresponding best mass textures are obtained from the best value of the mixing parameter  $Z^{1/2}$ . In this way we obtain an explicit parametrization of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) matrix in terms of the four quark mass

ratios  $m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b$  and one  $CP$  violating phase in good agreement with the experimental information about quark mixings and  $CP$  violation in the  $K^0$ - $\bar{K}^0$  system and the most recent data on oscillations of the  $B_s^0$ - $\bar{B}_s^0$  system.

The plan of this paper is as follows. In Sec. II we review some previous work on the breaking of the permutational flavor symmetry. A brief group theoretical analysis of the modified Fritzsch texture is made in Sec. III. The next section is devoted to the derivation of explicit expressions for the elements of the CKM mixing matrix and the Jarlskog invariant  $J$  in terms of the quark mass ratios and the mixing parameter  $Z^{1/2}$ . In Sec. V, we extract the best value of  $Z^{1/2}$  from a  $\chi^2$  fit of our theoretical expressions to the experimentally determined absolute values of the entries in  $|V_{CKM}^{exp}|$ . The interpretation of the best value of  $Z^{1/2}$  in terms of the analysis made in Secs. II and III and the derivation of the corresponding best mass textures is made in Sec. VI. The resulting parametrization of the CKM matrix in terms of four mass ratios and one  $CP$  violating phase is compared with the relevant experimental information in Sec. VII. Our paper ends with a summary of results and some conclusions.

II. FLAVOR PERMUTATIONAL SYMMETRY

In this section, we review some previous work on the breaking of the permutational flavor symmetry.

In the standard model, analogous fermions in different generations, say  $u, c$ , and  $t$  or  $d, s$ , and  $b$ , have completely identical couplings to all gauge bosons of the strong, weak, and electromagnetic interactions. Prior to the introduction of the Higgs boson and mass terms, the Lagrangian is chiral and invariant with respect to any permutation of the left and right quark fields. The introduction of a Higgs boson and the Yukawa couplings give mass to the quarks and leptons when the gauge symmetry is spontaneously broken. The quark mass term in the Lagrangian, obtained by taking the vacuum expectation value of the Higgs field in the quark Higgs coupling, gives rise to quark mass matrices  $M_d$  and  $M_u$ .

$$\mathcal{L}_2 = \bar{q}_{a,L} i \mathcal{M}_{d,R} q_{d,R} + \bar{q}_{u,L} i \mathcal{M}_{u,R} q_{u,R} + \text{H.c.} \quad (2.1)$$

In this expression,  $q_{d,L,R}(x)$  and  $q_{u,L,R}(x)$  denote the left and right quark  $d$  and  $u$  fields in the current or weak basis.  $q_{a,k}(x)$  is a column matrix, its components  $q_{i,k}(x)$  are the quark Dirac fields,  $k$  is the flavor index. In this basis, the charged hadronic currents are

$$J_{\mu} \sim \bar{q}_{a,L} \gamma_{\mu} q_{d,L}, \quad (2.2)$$

where

$$q_{d,W} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix}_W, \quad q_{u,W} = \begin{pmatrix} d_1(x) \\ d_2(x) \\ d_3(x) \end{pmatrix}_W \quad (2.3)$$

and the subindex  $W$  means weak basis

As is evident from Eq (2.2), the charged hadronic currents are not changed if both, the  $d$ -type and the  $u$ -type fields are transformed with the same unitary matrix

A number of authors [9–14,20] have pointed out that realistic quark mass matrices result from the flavor permutational symmetry  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  and its spontaneous or explicit breaking. The group  $S(3)$  treats three objects symmetrically, while the hierarchical nature of the mass matrices is a consequence of the representation structure  $1 \oplus 2$  of  $S(3)$ , which treats the generations differently. Under exact  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry, the mass spectrum, for either up or

down quark sectors, consists of one massive particle (top and bottom quarks) in a singlet irreducible representation and a pair of massless particles in a doublet irreducible representation. In the weak basis, the mass matrix with the exact  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry reads

$$M_{2q,W}^t = \frac{m_{3q}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W, \quad (2.4)$$

where  $m_{3q}$  denotes the mass of the third family quark,  $t$  or  $b$ .

To generate masses for the second family, one has to break the permutational symmetry  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  down to  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . This may be done by adding to  $\bar{q}_L(M_{2q,W}^t)q_R$  a term  $\bar{q}_L(M_{2q,W}^b)q_R$  which is invariant under  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  but breaks  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . The most general form of a matrix  $M_{2q,W}^b$  which is invariant under the permutations of the first two rows or two columns is

$$M_{2q,W}^b = m_{3q} \begin{pmatrix} \alpha' & \alpha' & \beta' \\ \alpha' & \alpha' & \beta' \\ \beta' & \beta' & \gamma \end{pmatrix}_W \quad (2.5)$$

Without loss of generality, this matrix may be decomposed in the sum of a  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  invariant term plus a traceless matrix  $M_{2q,W}$  invariant under  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ :

$$M_{2q,W}^b = \frac{m_{3q}}{3} \left\{ (2\alpha' - \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W - \begin{pmatrix} \alpha' - \gamma & \alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma \\ \alpha' - \gamma & \alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma \\ 3\beta' - 2\alpha' - \gamma & 3\beta' - 2\alpha' - \gamma & -2(\alpha' - \gamma) \end{pmatrix}_W \right\} \quad (2.6)$$

The first term in the right hand side of Eq (2.6) is added to the term  $M_{3q,W}^t$

$$M_{2q,W}^t = \frac{m_{3q}}{3} (1 - \Delta_c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W, \quad (2.7)$$

where  $\Delta_c$  stands for the factor  $-(2\alpha' - \gamma)$

The second term on the right hand side of Eq. (2.6) gives the most general form of the traceless matrix  $M_{2q,W}$  that breaks  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  down to  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  and gives mass to the second family

$$M_{2q,W} = \frac{m_{3q}}{3} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & -2\alpha \end{pmatrix}_W, \quad (2.8)$$

In this expression we have simplified the notation by calling  $\alpha$  and  $\beta$  in Eq (2.8), the terms  $(\alpha' - \gamma)$  and  $(3\beta' - 2\alpha' - \gamma)$  in Eq. (2.6)

From expression (2.8) it is evident that  $M_{2q,W}$  is a linear combination of two linearly independent numerical matrices,  $M_{2q}^A$  and  $M_{2q}^C$ ,

$$M_{2q,W} = \frac{m_{3q}}{3} (\sqrt{8}\alpha M_{2q,W}^A + 2\beta M_{2q,W}^C), \quad (2.9)$$

where

$$M_{2q,W}^A = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_W$$

$$\text{and } M_{2q,w}^S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_w \quad (2.10)$$

Later on, this property will be used to characterize the symmetry breaking pattern

We may now turn our attention to the question of breaking the  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  symmetry. In order to give mass to the first family, we add another term  $M_{q_1}$  to the mass matrix. It will be assumed that  $M_{q_1}$  transforms as the mixed symmetry term of the doublet complex tensorial representation of the  $S(3)_d$  diagonal subgroup of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . Putting the first family in a complex representation will allow us to have a  $CP$  violating phase in the mixing matrix. Then, in the weak basis,  $M_{q_1}$  is given by

$$M_{q_1,w} = \frac{m_{3q}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} A_1 & iA_2 & -A_1 - iA_2 \\ -iA_2 & -A_1 & A_1 + iA_2 \\ -A_1 + iA_2 & A_1 - iA_2 & 0 \end{pmatrix}_w \quad (2.11)$$

Finally, adding the three mass terms, (2.7), (2.8), and (2.11), we get the mass matrix  $M_q$  in the weak basis.

### III. MODIFIED FRITZSCH TEXTURE

To make explicit the assignment of particles to irreducible representations of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ , it will be convenient to make a change of basis from the weak basis to a symmetry adapted or hierarchical basis. In this basis, the quark fields are

$$q_{1q,H}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_{1q,w}(x) - q_{2q,w}(x)), \quad (3.1)$$

$$q_{2q,H}(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}(q_{1q,w}(x) + q_{2q,w}(x) - 2q_{3q,w}(x)), \quad (3.2)$$

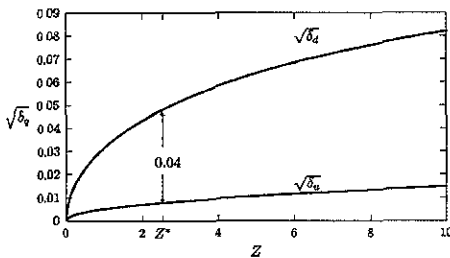


FIG. 1 The square root of the parameters  $\delta_u, \delta_d$  is shown as a function of the ratio  $Z_q$ . The value  $Z=5/2$  which satisfies the constraining condition (5.11) may be read from the figure.

$$q_{3q,H}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_{1q,w}(x) + q_{2q,w}(x) + q_{3q,w}(x)), \quad (3.3)$$

the subindex  $H$  denotes the hierarchical basis. In the hierarchical basis the third family quarks,  $t$  or  $b$ , are assigned to the invariant singlet irreducible representation  $q_{3q,H}(x)$ , the other two families are assigned to  $q_{2q,H}(x)$  and  $q_{1q,H}(x)$ , the two components of the doublet irreducible representation of  $S_{d,eq}(3)$ .

The mass matrix  $M_{q,H}$  in the symmetry adapted basis is related to the mass matrix in the weak basis by the unitary transformation

$$M_{q,H} = U^\dagger M_{q,w} U, \quad (3.4)$$

where

$$U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Then, in this basis,  $M_q$  takes the form

$$M_{q,H} = m_{3q} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_q e^{-i\phi_q} & 0 \\ A_q e^{i\phi_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_H \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_q + \delta_q & B_q \\ 0 & B_q & \Delta_q - \delta_q \end{pmatrix}_H \end{bmatrix} \\ + m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Delta_q \end{pmatrix}_H \\ = m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & A_q e^{-i\phi_q} & 0 \\ A_q e^{i\phi_q} & -\Delta_q + \delta_q & B_q \\ 0 & B_q & 1 - \delta_q \end{pmatrix}_H, \quad (3.6)$$

where

$$\delta_q = \Delta_q - \frac{2}{9}(\alpha + 2\beta) \quad \text{and} \quad B_q = \frac{2}{9} \left( \sqrt{8} \alpha - \frac{1}{\sqrt{8}} \beta \right). \quad (3.7)$$

From the strong hierarchy in the masses of the quark families,  $m_{3q} \gg m_{2q} > m_{1q}$ , we expect  $1 - \delta_q$  to be very close to unity

The entries in the mass matrix may be readily expressed in terms of the mass eigenvalues  $(m_{1q}, -m_{2q}, m_{3q})$  and the small parameter  $\delta_q$ . Computing the invariants of  $M_q$ ,  $\text{tr } M_q$ ,  $\text{tr } M_q^2$ , and  $\det M_q$ , we get

$$A_q^2 = \tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q} (1 - \delta_q)^{-1}, \quad \Delta_q = \tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}, \quad (3.8)$$

$$B_q^2 = \delta_q ((1 - \tilde{m}_{1c} + \tilde{m}_{2q} - \delta_q) - \tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q} (1 - \delta_q)^{-1}). \tag{3.9}$$

where  $\tilde{m}_{1c} = m_{1c}/m_{3c}$ , and  $\tilde{m}_{2q} = m_{2q}/m_{3q}$

If each possible symmetry breaking pattern is now characterized by the ratio

$$Z_q^{-2} = B_q / (-\Delta_o + \delta_q), \tag{3.10}$$

the small parameter  $\delta_q$  is obtained as the solution of the cubic equation

$$\delta_q [(1 + \tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c} - \delta_q)(1 - \delta_q) - \tilde{m}_{1c} \tilde{m}_{2q}] - Z_q (1 - \delta_q) (-\tilde{m}_{2c} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q)^2 = 0. \tag{3.11}$$

which vanishes when  $Z_q$  vanishes

Equation (3.11) may be written as

$$\begin{aligned} \delta_q^3 - \frac{1}{(Z_q + 1)} [Z_q (2(\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1q}) - 1) + (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c}) + 2] \delta_q^2 \\ - \frac{1}{Z_q + 1} [Z_c (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c}) (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1q}) + 2] \\ + (1 - \tilde{m}_{1c}) (1 + \tilde{m}_{2q}) \delta_q - \frac{Z_c (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c})^2}{Z_q - 1} = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

The last term in the left hand side of Eq. (3.12) is equal to the product of the three roots of Eq. (3.11). Therefore, the root of Eq. (3.11) which vanishes when  $Z_q$  vanishes may be written as

$$\delta_q(Z_c) = \frac{Z_c}{Z_q + 1} \frac{(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1c})^2}{W(Z_c)}, \tag{3.13}$$

where  $W(Z_c)$  is the product of the two roots of Eq. (3.12) or Eq. (3.11) which do not vanish when  $Z_q$  vanishes

The product  $W(Z_q)$  is given by

$$\begin{aligned} W(Z_q) = \{ [2q^2 + p^3 - 2q\sqrt{q^2 + p^3}]^{1/2} + [2q^2 - p^3 - 2q\sqrt{q^2 - p^3}]^{1/2} \} + \frac{1}{3} \frac{1}{Z_q - 1} [Z_c (2(\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1q}) + 1) + (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c}) + 2] \\ \times \{ [q + \sqrt{q^2 - p^3}]^{1/3} + [q - \sqrt{q^2 - p^3}]^{1/3} \} - |p| - \frac{1}{9} \frac{1}{(Z_c - 1)^2} [Z_q (2(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1c}) + 1) + (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1q}) + 2]^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

where

$$\begin{aligned} 2q = -\frac{2}{27} \frac{1}{(Z_q + 1)^3} [Z_q (2(\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c}) + 1) - (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1q}) + 2]^3 + \frac{1}{3} \frac{1}{(Z_c + 1)^2} [Z_c (2(\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1q}) + 1) + (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c}) + 2] \\ \times \{ Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1c}) ((\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1c}) + 2) + (1 - \tilde{m}_{1q}) (1 - \tilde{m}_{2q}) \} - \frac{Z_q}{Z_c + 1} (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1c})^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

and

$$\begin{aligned} 3p = -\frac{1}{3} \frac{1}{(Z_c + 1)^2} [Z_c (2(\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1q}) + 1) + (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c}) + 2]^2 - \frac{1}{(Z_c + 1)} [Z_c (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c}) (\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1q}) + 2] \\ + (1 - \tilde{m}_{1q}) (1 + \tilde{m}_{2q}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Then the vanishing of  $Z_q$  implies that  $\delta_q(Z_c)$  vanishes and so does  $B_q$ , or equivalently, there is no mixing of singlet and doublet irreducible representations of  $S_t(3) \otimes S_b(3)$  and the heaviest quark in each sector,  $t$  or  $b$ , is in a pure singlet representation

In Fig. 1,  $\delta_q^{1/2}$  is shown as function of  $Z_c$ . It may be seen that, as  $Z_c$  increases,  $\sqrt{\delta_q(Z_c)}$  increases with decreasing curvature. For very large values of  $Z_c$ ,  $\sqrt{\delta_q(Z_c)}$  goes to the asymptotic limit  $\tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c}$ ,

$$\lim_{Z_c \rightarrow \infty} \delta_q^{1/2}(Z_c) = \tilde{m}_{2c} - \tilde{m}_{1c} \tag{3.17}$$

Hence,  $\delta_q(Z_c)$  is a small parameter

$$\delta_q(Z_c) \ll 1, \tag{3.18}$$

for all values of  $Z_c$ . For large values of  $Z_c$ , say  $Z_c \geq 20$ ,  $\delta_q(Z_c)$  is not sensitive to small changes in  $Z_q$

From Eqs. (3.11) or (3.12) we derive an approximate solution for  $\delta_q(Z_q)$  valid for small values of  $Z_q$  ( $Z_q \leq 10$ ). Computing in the leading order of magnitude we obtain

$$\delta_q(Z_q) \approx \frac{Z_q(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2}{(1 - \tilde{m}_{1q})(1 + \tilde{m}_{2q}) + 2Z_q(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) \left(1 + \frac{1}{2}(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})\right)}. \quad (3 19)$$

**A. Symmetry breaking pattern**

In the symmetry adapted basis,  $M_{3q,H}$  is a singlet tensorial irreducible representation of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ ,

$$M_{3q,H} = m_{3q}(1 - \Delta_q) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_H. \quad (3 20)$$

In this same basis, the term  $M_{2q,H}$  which breaks  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  down to  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  is given by

$$M_{2q,H} = m_{3q}(-\Delta_q + \delta_q(Z_q^{1/2})) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Z_q^{1/2} \\ 0 & Z_q^{1/2} & -1 \end{pmatrix}_H. \quad (3 21)$$

The symmetry breaking pattern is characterized by the parameter  $Z_q^{1/2}$  which is a measure of the mixing of singlet and doublet irreducible representations of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . The decomposition of  $M_{2q,W}$  in a linear combination of two numerical matrices, given in Eqs (2.9) and (2.10), now takes the form

$$M_{2q,H} = m_{3q}(-\Delta_q + \delta_q) \left[ 3\sqrt{2}N_{Aq}M_H^A + \frac{3}{2}N_{Sq}M_H^S \right], \quad (3 22)$$

where the matrices

$$M_{2,H}^A = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{8} \\ 0 & -\sqrt{8} & -1 \end{pmatrix}_H, \quad (3 23)$$

$$M_{2,H}^S = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & -1 \end{pmatrix}_H, \quad (3 24)$$

are of the same form as  $M_{2q,H}$  with mixing parameters  $-\sqrt{8}$  and  $1/\sqrt{8}$ , respectively. The coefficients  $N_A$  and  $N_S$  are given by

$$N_A = \frac{2\sqrt{2}}{9} \left( \frac{1}{\sqrt{8}} - Z_q^{1/2} \right) \quad (3 25)$$

and

$$N_S = \frac{2\sqrt{2}}{9} (\sqrt{8} + Z_q^{1/2}) \quad (3 26)$$

From Eqs. (3.21)–(3.24), it is evident that there is a corresponding decomposition of the mixing parameter  $Z_q^{1/2}$

$$Z_q^{1/2} = N_{Aq}Z_A^{1/2} + N_{Sq}Z_S^{1/2}, \quad (3 27)$$

with

$$1 = N_{Aq} + N_{Sq}, \quad (3 28)$$

where  $Z_A^{1/2} = -\sqrt{8}$  is the mixing parameter in the matrix  $M_{2,H}^A$ , and  $Z_S^{1/2} = 1/\sqrt{8}$  is the mixing parameter in  $M_{2,H}^S$ . In this way, a unique linear combination of  $Z_A^{1/2}$  and  $Z_S^{1/2}$  is associated to the symmetry breaking pattern characterized by  $Z_q^{1/2}$ .

We notice that the symmetry breaking term in the Yukawa Lagrangian  $\bar{q}_L M_{2q} q_R$  depends only on two fields. According to Eqs. (3.22), (3.23), and (3.24), the term  $\bar{q}_L M_{2q,H} q_R$  splits into the sum of a term proportional to  $\bar{q}_L M_{2q}^S q_R$ , which changes sign under the exchange of those two fields, and a term proportional to  $\bar{q}_L M_{2q}^A q_R$ , which remains invariant under the same exchange. Therefore, the decomposition of  $M_{2q,H}$  given in Eq (3 22) is equivalent to a decomposition of the term  $\bar{q}_L M_{2q} q_R$  into its symmetric and antisymmetric parts under the exchange of those two fields. Thus, the characterization of  $M_{2q}$  and  $Z_q^{1/2}$  as a linear combination, of  $M_{2q}^A$  and  $M_{2q}^S$ , and  $Z_A^{1/2}$  and  $Z_S^{1/2}$ , respectively [given in Eqs. (3.22)–(3 28)], is equivalent to a classification of the symmetry breaking pattern defined by  $M_{2q,H}$  in terms of the irreducible representations of the group  $\tilde{S}(2)$  of permutations of the two fields in  $\bar{q}_L M_{2q} q_R$ .

Lehmann, Newton, and Wu [3] observed that in the case of only two families (the first two generations), the term that breaks the  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  symmetry changes sign when permuting the two quark fields. By analogy, they extended this observation to the case of three families and postulated that the symmetry breaking term  $M_{2q}$  should change sign under the exchange of the two fields in  $\bar{q}_L M_{2q} q_R$ . This assumption amounts to choosing a fixed value for the mixing parameter  $Z_q^{1/2}$  equal to  $-\sqrt{8}$ . In this paper, the pair of numbers  $(N_A, N_S)$  enters as a convenient mathematical label of the

symmetry breaking pattern without introducing any assumption about the actual pattern of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry breaking realized in nature

#### IV. THE CKM MIXING MATRIX

The Hermitian mass matrix  $\mathbf{M}_q$  may be written in terms of a real symmetric matrix  $\tilde{\mathbf{M}}_q$  and a diagonal matrix of phases  $\mathbf{P}_q$  as follows

$$\mathbf{M}_q = \mathbf{P}_q \tilde{\mathbf{M}}_q \mathbf{P}_q^\dagger \quad (4.1)$$

The real symmetric matrix  $\tilde{\mathbf{M}}_q$  may be brought to diagonal form by means of an orthogonal transformation

$$\tilde{\mathbf{M}}_q = \mathbf{O}_q \mathbf{M}_q \text{diag}[\tilde{m}_{1q}, -\tilde{m}_{2q}, 1] \mathbf{O}_q^\dagger, \quad (4.2)$$

where

$$\mathbf{M}_q \text{diag}[\tilde{m}_{1q}, -\tilde{m}_{2q}, 1] \quad (4.3)$$

with subscripts 1,2,3 referring to  $u,c,t$  in the  $u$ -type sector and  $d,s,b$  in the  $d$ -type sector. After diagonalization of the mass matrices  $\mathbf{M}_q$ , one obtains the CKM mixing matrix as

$$\mathbf{V}_{CKM} = \mathbf{O}_u^\dagger \mathbf{P}^{(u-d)} \mathbf{O}_d, \quad (4.4)$$

where  $\mathbf{P}^{(u-d)}$  is the diagonal matrix of the relative phases

In the hierarchical basis, where  $\mathbf{M}_q$  is given by Eqs (3.6)–(3.8),  $\mathbf{P}^{(u-d)}$  is

$$\mathbf{P}^{(u-d)} = \text{diag}[1, e^{i\Phi}, e^{i\Phi}], \quad (4.5)$$

where

$$\Phi = \phi_u - \phi_c, \quad (4.6)$$

and the orthogonal matrix  $\mathbf{O}_q$  is given by [21]

$$\mathbf{O}_q = \begin{pmatrix} (\tilde{m}_{2q} f_1 / D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{1q} \tilde{f}_2 / D_2)^{1/2} & (\tilde{m}_q \tilde{m}_{2q} \tilde{f}_3 / D_3)^{1/2} \\ ((1 - \delta_q) \tilde{m}_{1q} \tilde{f}_1 / D)^{1/2} & ((1 - \delta_q) \tilde{m}_{2q} \tilde{f}_2 / D_2)^{1/2} & ((1 - \delta_q) \tilde{f}_3 / D_3)^{1/2} \\ -(\tilde{m}_{1q} \tilde{f}_2 \tilde{f}_3 / D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{2q} \tilde{f}_1 \tilde{f}_3 / D_2)^{1/2} & (f_1 \tilde{f}_2 / D_3)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

where

$$f_1 = 1 - \tilde{m}_{1q} - \delta_q, \quad f_2 = 1 + \tilde{m}_{2q} - \delta_q, \quad f_3 = \delta_q, \quad (4.8)$$

$$D_1 = (1 - \delta_q)(1 - \tilde{m}_{1q})(\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \quad (4.9)$$

$$D_2 = (1 - \delta_q)(1 + \tilde{m}_{2q})(\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \quad (4.10)$$

$$D_3 = (1 - \delta_q)(1 + \tilde{m}_{2q})(1 - \tilde{m}_{1q}). \quad (4.11)$$

From Eqs (4.1)–(4.11), all entries in the  $\mathbf{V}_{CKM}$  matrix may be written in terms of four mass ratios,  $(\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s)$  and three free real parameters  $\delta_u, \delta_c,$  and  $\Phi = \phi_u - \phi_c$ . The phase  $\Phi$  measures the mismatch in the  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  symmetry breaking in the  $u$ - and  $d$ -sectors. In this picture of the  $\mathbf{V}_{CKM}$  matrix, it is this phase, and consequently, that mismatch, which is responsible for the violation of  $CP$ .

The Jarlskog invariant,  $J$ , may be computed directly from the commutator of the mass matrices [22]

$$J = -\frac{\det\{-i[\mathbf{M}_{u,H}, \mathbf{M}_{d,H}]\}}{F}, \quad (4.12)$$

where

$$F = (1 - \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \tilde{m}_d)(1 - \tilde{m}_s)(\tilde{m}_c - \tilde{m}_d) \quad (4.13)$$

Substitution of the expression (3.6) for  $\mathbf{M}_u$  and  $\mathbf{M}_d$ , in Eq (4.12), with  $Z_u^{1/2} = Z_d^{1/2} = Z^{1/2}$ , gives

$$J = \frac{Z \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{1 - \delta_u}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{1 - \delta_c}} \sin \Phi}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_u / \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_d)(1 - \tilde{m}_s)(1 + \tilde{m}_d / \tilde{m}_c)} \left\{ [(-\Delta_u + \delta_u)(1 - \delta_c) - (-\Delta_d + \delta_d)(1 - \delta_u)]^2 \right. \\ \left. - \left[ \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c}{1 - \delta_u} \right] (-\Delta_d + \delta_d)^2 - \left[ \frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_s}{1 - \delta_c} \right] (-\Delta_u + \delta_u)^2 + 2 \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c}{1 - \delta_u}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d \tilde{m}_s}{1 - \delta_c}} (-\Delta_u + \delta_u)(-\Delta_d + \delta_d) \cos \Phi \right\} \quad (4.14)$$

Explicit expressions for  $\Delta_q$  and  $\delta_q$  in terms of the quark masses are given in Eqs (3.8) and (3.13)–(3.16).

In this way, an exact closed expression for  $J$  in terms of the quark masses, the symmetry breaking parameter  $Z$  and the  $CP$  violating phase  $\Phi$  is obtained. Let us recall that the non-vanishing of  $J$  is a necessary and sufficient condition for the violation of  $CP$  [22]. From Eq. (4.14), it is apparent that  $J$  vanishes when  $Z$ ,  $\sin \Phi$  and  $\bar{m}_u$  or  $\bar{m}_d$  vanish. Therefore, the violation of  $CP$  and the consequent non-vanishing of  $Z$  necessarily implies a mixing of singlet and doublet representations of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ .

V. THE BEST VALUE OF  $Z_q^{1/2}$

At this stage in our argument, a question comes naturally to mind: Does a comparison of the theoretical mixing matrix  $V_{CKM}^h$  with the experimentally determined  $V_{CKM}^{exp}$  give any clue about the actual pattern of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry breaking realized in nature? or phrased differently: What are the best values for  $Z_u$  and  $Z_d$ ? What is the best value for  $\Phi$ ? Do these values correspond to some well defined symmetry breaking pattern?

As a first step in the direction of finding an answer to these questions, we made a  $\chi^2$  fit of the exact expressions for the absolute value of the entries in the mixing matrix, that is  $|V_{CKM}^h|$  and the Jarlskog invariant  $J^{th}$  to the experimentally determined values of  $|V_{CKM}^{exp}|$  and  $J^{exp}$ . Since the value of the observed CKM matrix parameters  $|V_{CKM}^{exp}|$  are given at  $\mu = m_t$ , in the calculation we used the values of the running quark masses evaluated at  $m_t$ . These values were taken from the work of Fritzsche [20], see also Fusaoka and Koide [23]

and Ynduráin [24]. We kept the mass ratios  $\bar{m}_c = m_c/m_t$  and  $\bar{m}_s = m_s/m_b$  fixed at their central values

$$\bar{m}_c = 0.0048 \quad \text{and} \quad \bar{m}_s = 0.03437, \quad (5.1)$$

but, for reasons which will be apparent later, we took the values

$$\bar{m}_u = 0.000042 \quad \text{and} \quad \bar{m}_d = 0.00148, \quad (5.2)$$

which are close to the upper and lower bounds of  $\bar{m}_u = m_u/m_t$  and  $\bar{m}_d = m_d/m_b$  respectively, and we looked for the best values of the three parameters  $\delta_u, \delta_d$ , and  $\Phi$ . We found the following results [25]: (I) excellent fits of similar quality,  $\chi^2 \leq 0.33$ , were obtained for a continuous family of values of the parameters  $(\delta_u, \delta_d)$ ; (II) in each good quality fit, the best value of  $\Phi$  was fixed without ambiguity; (III) the best value of  $\Phi$  was nearly stable against large changes in the values of  $(\delta_u, \delta_d)$  which produced fits of the same good quality; (IV) in all good quality fits, the difference  $\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}$  takes the same value

$$\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \approx 0.040 \quad (5.3)$$

These results may be understood if we notice that not all entries in  $V_{CKM}^h$  are equally sensitive to variations of the different parameters. Some entries, like  $V_{us}$ , are very sensitive to changes in  $\Phi$  but are almost insensitive to changes in  $(\delta_u, \delta_d)$  while, some others, like  $V_{cb}$  are almost insensitive to changes in  $\Phi$  but depend critically on the parameters  $\delta_u$  and  $\delta_d$ .

From Eqs. (4.1)–(4.11), we obtain

$$V_{us} = - \left( \frac{\bar{m}_c \bar{m}_d}{(1 - \bar{m}_d)(\bar{m}_c + \bar{m}_u)(1 + \bar{m}_s)(\bar{m}_s + \bar{m}_d)} \right)^{1/2} \left( \frac{(1 - \bar{m}_u - \delta_u)(1 + \bar{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)} \right)^{1/2} + \left( \frac{(1 - \bar{m}_u - \delta_u)(1 + \bar{m}_s - \delta_d)}{(1 + \bar{m}_s)} \right)^{1/2} + \left( \frac{(1 + \bar{m}_c - \delta_u)\delta_u}{1 - \delta_u} \right)^{1/2} \left( \frac{(1 - \bar{m}_d - \delta_d)\delta_d}{(1 - \delta_d)(1 + \bar{m}_s)} \right)^{1/2} \left( \frac{\bar{m}_u \bar{m}_s}{(1 - \bar{m}_u)(\bar{m}_c + \bar{m}_u)(\bar{m}_d + \bar{m}_s)} \right)^{1/2} e^{i\Phi}. \quad (5.4)$$

In the leading order of magnitude,

$$|V_{us}| \approx \left| \sqrt{\bar{m}_d/\bar{m}_s} - \sqrt{\bar{m}_u/\bar{m}_c} e^{i\Phi} \right| (1 + \bar{m}_u/\bar{m}_c + \bar{m}_d/\bar{m}_s)^{-1/2}. \quad (5.5)$$

Hence,

$$\cos \Phi \approx \frac{\bar{m}_d/\bar{m}_s + \bar{m}_u/\bar{m}_c - |V_{us}|^2 (1 + \bar{m}_u/\bar{m}_c + \bar{m}_d/\bar{m}_s)}{2 \sqrt{(\bar{m}_d/\bar{m}_s)(\bar{m}_u/\bar{m}_c)}} \quad (5.6)$$

Substitution of  $|V_{us}^{exp}|^2$  for  $|V_{us}|^2$  and the numerical value of the mass ratios, (5.1) and (5.2), in Eq. (5.6) gives

$$37^\circ \leq \Phi \leq 92^\circ \quad (5.7)$$

with a mean value

$$\Phi = 89.5^\circ, \quad (5.8)$$

in good agreement with the best value extracted from the preliminary  $\chi^2$  fits [25]



A MONDRAGÓN AND E RODRÍGUEZ-JÁUREGUI

PHYSICAL REVIEW D 59 093009

Similarly,  $V_{cb}^n$  is given by

$$V_{cb}^{n*} = - \left[ \frac{\tilde{m}_s(1+\tilde{m}_c-\delta_u)}{(1-\delta_u)(1-\tilde{m}_c)(\tilde{m}_r+\tilde{m}_s)} \frac{\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d}{(1-\delta_s)(1+\tilde{m}_r)(1-\tilde{m}_c)} \right]^{1/2} + \left[ \frac{\tilde{m}_r(1-\tilde{m}_c-\delta_s)}{(\tilde{m}_c-\tilde{m}_r)(1+\tilde{m}_c)} \frac{\delta_d}{(1+\tilde{m}_r)(1-\tilde{m}_d)} \right]^{1/2} - \left[ \frac{\tilde{m}_c(1-\tilde{m}_u-\delta_u)\delta_u(1-\tilde{m}_u-\delta_d)(1+\tilde{m}_c-\delta_d)}{(1-\delta_s)(1+\tilde{m}_c)(\tilde{m}_c+\tilde{m}_u)(1-\delta_d)(1+\tilde{m}_s)(1-\tilde{m}_d)} \right]^{1/2} e^{i\Phi} \quad (5.9)$$

Therefore, in the leading order of magnitude,  $|V_{cb}|$  is independent of  $\Phi$  and given by

$$|V_{cb}| \approx \sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_s} \quad (5.10)$$

Hence, good agreement with  $|V_{cb}^{exp}| \approx 0.039$  [26] requires that

$$\sqrt{\delta_s} - \sqrt{\delta_u} \approx 0.040, \quad (5.11)$$

at least for one pair of values  $(\delta_u, \delta_s)$ .Finally, let us notice that the matrix elements  $V_{ub}$  and  $V_{ub}$ , as well as the Jarlskog invariant [see Eq. (4.14)], are sensitive to small changes in the masses of the light quarks  $\tilde{m}_d$  and  $\tilde{m}_s$ . For instance,

$$V_{ub} = \left[ \frac{\tilde{m}_s(1-\tilde{m}_u-\delta_u)}{(1-\delta_s)(1-\tilde{m}_d)(\tilde{m}_c+\tilde{m}_u)} \frac{\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d}{(1-\delta_s)(1+\tilde{m}_r)(1-\tilde{m}_c)} \right]^{1/2} + \left[ \frac{\tilde{m}_u(1-\tilde{m}_u-\delta_u)\delta_u}{(1-\tilde{m}_u)(\tilde{m}_c+\tilde{m}_u)(1+\tilde{m}_r)(1-\tilde{m}_c)} \right]^{1/2} - \left[ \frac{\tilde{m}_s(1+\tilde{m}_c-\delta_u)\delta_u(1-\tilde{m}_c-\delta_d)(1+\tilde{m}_c-\delta_d)}{(1-\delta_s)(1-\tilde{m}_d)(\tilde{m}_c+\tilde{m}_u)(1-\delta_d)(1-\tilde{m}_s)(1-\tilde{m}_d)} \right]^{1/2} e^{i\Phi} \quad (5.12)$$

computing in the leading order of magnitude, we get

$$V_{ub} \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} (\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_s}) e^{i\Phi}, \quad (5.13) \quad \beta = \arg \left( -\frac{V_{ub}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right) \approx \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \sin \Phi}{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_c}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \cos \Phi} \right\}, \quad (5.16)$$

A similar computation gives for  $V_{td}$ 

$$V_{td} \approx -\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} (\sqrt{\delta_s} - \sqrt{\delta_u}) e^{i\Phi} \quad (5.14)$$

and

$$\gamma = \arg \left( -\frac{V_{cb}^* V_{cd}}{V_{ub}^* V_{ud}} \right) \approx \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} \sin \Phi}{\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_c}} \cos \Phi} \right\}, \quad (5.17)$$

However, since the masses of the light quarks are the less well determined, and the moduli  $|V_{ub}^{exp}|$  and  $|V_{td}^{exp}|$  have the largest error bars, relatively large changes in the values of  $\tilde{m}_u$  and  $\tilde{m}_c$  produce only very small variations in the goodness of fit of the theoretical matrix of moduli  $|V^{th}|$  to the experimentally determined  $|V^{exp}|$ . The sensitivity of the matrix elements  $|V_{ub}|$  and  $|V_{td}|$  to changes in  $\tilde{m}_u$  and  $\tilde{m}_s$  is reflected in the shape of the unitarity triangle which changes appreciably when the masses of the light quarks change within their uncertainty bounds as may be seen from the following expressions

$$\alpha = \arg \left( -\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right) \approx \arg \left\{ \left( \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}_d} \right)^{1/2} e^{-i\Phi} \right\} = \Phi, \quad (5.15)$$

$\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  are the inner angles of the unitarity triangle. When the central values of  $\tilde{m}_u = 0.000018$  and  $\tilde{m}_d = 0.0019$  [20] are used in the fitting procedure, the agreement of  $|V^{th}|$  with  $|V^{exp}|$  is very good,  $\chi^2 = 0.33$ , but we systematically obtain  $\gamma^n > \alpha^n$  in stark disagreement with the most recent data on the  $K^0$ - $\bar{K}^0$  system and the most recent data on the  $B_{s,d}^0$  oscillations [26] and [27]. We could not change the values of  $\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_s}$  without spoiling the good overall agreement of  $|V^{th}|$  to  $|V^{exp}|$ . Therefore, we let the masses of the light quarks vary within their uncertainty ranges. The best

simultaneous  $\chi^2$  fit of  $|V^{th}|$ ,  $J^{th}$  and  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  and  $\gamma^{th}$  to the experimentally determined quantities  $|V^{exp}|$ ,  $J^{exp}$  and  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$  and  $\gamma^{exp}$  [26,27] was obtained when the value of  $\tilde{m}_u$  is taken close to its upper bound,  $\tilde{m}_u \approx 0.000042$ , and the value of  $\tilde{m}_d \approx 0.00148$ , which is close to its lower bound. Notice that, the chosen high value of  $\tilde{m}_u$  gives for the ratio  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$  the value

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} = 0.093 \tag{5 18}$$

in very good agreement with its latest world average [27].

We may now return to our discussion of the determination of the best pattern of symmetry breaking. As explained above, in the preliminary  $\chi^2$  fit to the data it was found that  $\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \approx 0.04$ , Eq. (5.11), is satisfied almost exactly even when we let the masses of the light quarks vary, not just for one pair of values  $(\delta_u, \delta_d)$  but for a continuous range of values of  $\delta_u$  and  $\delta_d$  in which these parameter change by more than one order of magnitude.

Therefore, Eq (5.11) may be used as a constraining condition on the possible values of  $(\delta_u, \delta_d)$ . In this way, we eliminate one free parameter in  $V_{CKM}^{th}$  without spoiling the good quality of the fit. However, fixing the numerical value of this free parameter is not enough to get a clear indication on what is the actual pattern of flavor symmetry breaking realized in nature. This is so because according to Eqs. (3.11)–(3.16),  $\delta_q$  is a function of the mass ratios  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$  and the parameter  $Z_q^{1/2}$  which characterizes the pattern of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry breaking in the  $q$  sector. Hence, a convenient way to isolate the information about the pattern of symmetry breaking carried by the constraining conditions (5.11) from the information on the numerical values of the quark mass ratios, is to change the parametrization of  $V_{CKM}^{th}$  by writing  $\delta_q$  as function of  $Z_q^{1/2}$  with fixed values of  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$ . In this way  $V_{CKM}^{th}$  becomes a function of the two free parameters  $(Z_u^{1/2}, Z_d^{1/2})$  instead of  $(\delta_u, \delta_d)$ .

A simple approximate expression for the constraining condition (5.3), (5.11) in terms of  $(Z_u^{1/2}, Z_d^{1/2})$ , valid for  $0 \leq Z_q \leq 10$ , is obtained from Eq. (5.11), writing  $\delta_q(Z_q)$  in the leading order of magnitude

$$\begin{aligned} \sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \approx & \frac{Z_d^{1/2}(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_d)(1 - \tilde{m}_d) + 2Z_d(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)}} \\ & - \frac{Z_u^{1/2}(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_c) + 2Z_u(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)}} \approx 0.040 \end{aligned} \tag{5.19}$$

When the condition (5.19) is satisfied, to each value of  $Z_u^{1/2}$  corresponds one value of  $Z_d^{1/2}$ . But, since we have only one condition to fix the value of two parameters,  $Z_u^{1/2}$  would still be a free parameter. Therefore, to avoid this continuous am-

biguity, we will further assume that the up and down mass matrices are generated following the same symmetry breaking pattern, that is,

$$Z_u^{1/2} = Z_d^{1/2} \equiv Z^{1/2} \tag{5.20}$$

Then, the value of  $Z$  which satisfies the constraining conditions (5.11) and (5.19) may be read directly from Fig 1. We find  $Z^* \approx 2.5$ .

A more precise numerical computation of the best value of  $Z$  was made using the exact numerical solution of Eq. (3.11), given in Eqs (3.13)–(3.16), to compute the entries in  $V_{CKM}^{th}$  as functions of only two free parameters,  $\Phi$  and  $Z^{1/2}$ . As previously, we kept the mass ratios fixed at the values given in Eqs (5.1) and (5.2). Then, we made a new  $\chi^2$  fit of the exact expressions for the absolute values of the entries in the theoretical expressions for  $|V_{CKM}^{th}|$  and the Jarlskog invariant  $J^{th}$ , to the experimentally determined values of  $|V_{CKM}^{exp}|$  and  $J^{exp}$ . We found the following best values for  $\Phi$  and  $Z$ ,

$$\Phi = 89.3^\circ \tag{5.21}$$

and

$$2.40 \leq Z^* \leq 2.55, \tag{5.22}$$

corresponding to a value of  $\chi^2 \approx 0.33$ .

When the best value of the  $CP$  violating phase  $\Phi = 89.33^\circ$  is changed by one degree, the computed values of all entries in the matrix of moduli  $|V_{CKM}^{th}|$  change in the fourth decimal place, except  $|V_{ub}^{th}|$  and  $|V_{cd}^{th}|$  which change in the third decimal place by an amount which is about one fourth of the uncertainty in the experimentally determined values of  $|V_{ub}^{exp}|$  and  $|V_{cd}^{exp}|$  as reported in Caso *et al.* [26]. The value of  $\chi^2$  changes from 0.33 to 0.44 which is not statistically significant. Therefore, we will adopt as the best value of  $\Phi$  the simple figure

$$\Phi^* = 90^\circ \tag{5.23}$$

Once the best value of  $Z$  has been found, the question posed at the beginning of this section takes a new form. What is the symmetry breaking pattern corresponding to  $Z^* \approx 2.5$ ?

An answer would be readily found if  $Z^{*1/2}$  could be written as a simple, non-trivial, linear combination of  $Z_A^{1/2}$  and  $Z_S^{1/2}$ , which, are equal to  $-\sqrt{8}$  and  $1/\sqrt{8}$ , respectively. From these numbers, we find that  $Z^{*1/2}$  may indeed be written as

$$Z^{*1/2} = \frac{1}{2}[Z_s^{1/2} - Z_A^{1/2}] = \frac{1}{2}[1/\sqrt{8} + \sqrt{8}], \tag{5.24}$$

then

$$Z^* = \frac{81}{32} = 2.53125 \tag{5.25}$$

The corresponding values of  $\delta_u(Z)$  and  $\delta_d(Z)$  are

$$\delta_u(Z^*) = 0.000056, \quad \delta_d(Z^*) = 0.0023. \tag{5.26}$$

Let us remark again that the numerical value of  $Z^{*1/2}$  was extracted from a fit of  $|V_{CKM}^h|$  to the experimentally determined absolute values of the elements of the  $CKM$  mixing matrix. The identification of  $Z^{*1/2}$  with the expression (5.24) gives a clear and precise indication about the preferred pattern for the breaking of the  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  permutational flavor symmetry by the quark mass matrices

breaking ansatz in the form of the following assumption. The  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  flavor symmetry is broken down to  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  according to a mixed symmetry breaking pattern, which, in the hierarchical basis, is characterized by

$$Z^{*1/2} = \frac{1}{2} (Z_S^{1/2} - Z_A^{1/2}). \tag{6.1}$$

VI MASS TEXTURES FROM THE “BEST” SYMMETRY BREAKING SCHEME

Once the best value of  $Z^{1/2}$  has been determined, we may turn the argument around, and propose it as a symmetry

Then, the mass matrix with the modified Fritzsch texture takes the form

$$M_{q,ij}^* = m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q}}{1 - \delta_q^*}} e^{-i\phi_q} & 0 \\ \sqrt{\frac{\tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q}}{1 - \delta_q^*}} e^{i\phi_q} & -\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^* & \frac{9\sqrt{2}}{8} (-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^*) \\ 0 & \frac{9\sqrt{2}}{8} (-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^*) & 1 - \delta_q^* \end{pmatrix}_H. \tag{6.2}$$

where  $\delta_q^*$  is the solution of the cubic equation

$$113 \delta_q^{*3} - [194(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) + 145] \delta_q^{*2} + [81(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2 - 194(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) - 32\tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q} - 32] \delta_q^* - 81(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2 = 0. \tag{6.3}$$

obtained from Eq. (3.12) when  $\sqrt{81/32}$  is substituted for  $Z^{*1/2}$ .

The mass matrix  $M_{q,ij}$  was built up adding three terms,  $M_{1q,H}$ ,  $M_{2q,H}$ , and  $M_{3q,H}$ . The term  $M_{3q,H}$  is a singlet irreducible representation of  $S_L(3) \otimes S_R(3) \supset S_{\rho\sigma R}(3)$

$$M_{3q,H} = (m_{3q} - m_{2q} - m_{1q}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_H. \tag{6.4}$$

The matrix  $M_{2q,H}$  breaks  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  down to  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ , mixing the singlet and doublet representation of  $S_{\rho\sigma R}(3)$  in a proportion precisely determined by the mixing parameter  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$ ,

$$M_{2q,H}^* = m_{3q} (-\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q} + \delta_q^*) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{81/32} \\ 0 & \sqrt{81/32} & -1 \end{pmatrix}_H. \tag{6.5}$$

The mixing parameter  $\sqrt{81/32}$  corresponds to what was called in Sec. II, a mixed symmetry breaking pattern, that is, it may be split in the sum of a term  $M_{2q,H}^*$  corresponding to a purely antisymmetric, plus a term  $M_{2q,H}$  corresponding to a purely symmetric breaking pattern. The coefficients in each term,  $N_S = \frac{25}{18}$  and  $N_A = -\frac{1}{18}$ , are obtained solving the pair of coupled equations (3.27) and (3.28) when  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$ .

Hence,

$$M_{2q,H}^* = m_{3q} (-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} - \delta_q^*) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{18} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{8} \\ 0 & -\sqrt{8} & -1 \end{pmatrix}_H \\ + \frac{25}{18} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & -1 \end{pmatrix}_H \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

The  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  symmetry of this term and its splitting in

the sum of a purely symmetric plus a purely antisymmetric breaking pattern term is evident in the weak representation

$$M_{2q,w}^* = m_{3q}(-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q^*) \left( \frac{1}{24} \right) \times \begin{pmatrix} 14 & 14 & -25 \\ 14 & 14 & -25 \\ -25 & -25 & -28 \end{pmatrix}_w \quad (6.7)$$

Finally, the term  $M_{1q,H}$  breaks the  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  symmetry

$$M_{1q,H}^* = m_{3q} \sqrt{\frac{\tilde{m}_{1q}\tilde{m}_{2q}}{1-\delta_q^*}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi_q} & 0 \\ e^{i\phi_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_H \quad (6.8)$$

Since  $\delta_q^*$  is a function of the mass ratios  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$  the phase  $\phi_q$  is the only free parameter left in the mass matrix  $M_q^*$ .

VII. THE MIXING MATRIX,  $V_{CKM}$ , FROM THE BEST SYMMETRY BREAKING SCHEME

We have seen that, once the symmetry breaking *Ansatz* fixes the value of the mixing parameter  $Z^{1/2}$  at  $\sqrt{81/32}$ , the

entries in the mass matrices  $M_q$  are functions of the mass ratios  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$  and the phase  $\phi_q$  which is a free parameter.

After factorizing the phases, as in Eq (4.1), all entries in the real symmetric matrices  $\bar{M}_q$  are functions of the mass ratios  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$  only. Hence, the orthogonal matrices  $O_q$  which bring  $\bar{M}_q$  to diagonal form are also functions of  $(\tilde{m}_{1q}, \tilde{m}_{2q})$  only.

According to Eq (4.4),  $V_{CKM}$  is given by  $O_u^T P^{(u-d)} O_d$ , where  $P^{(u-d)}$  is the diagonal matrix of the relative phases. Therefore, once the symmetry breaking *Ansatz* determines the value of  $Z^{1/2} = \sqrt{81/32}$ , the theoretical expressions for the entries in the mixing matrix,  $V_{CKM}^{th}$ , are written in terms of the four mass ratios  $(\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s)$  and only one free parameter, namely, the CP violating phase  $\Phi$ .

We made a new  $\chi^2$  fit of the absolute value of the entries in the mixing matrix,  $|V_{CKM}^{th}|$ , to the experimentally determined values  $|V_{CKM}^{exp}|$ . We kept the mass ratios fixed at the values given in Eqs. (5.1) and (5.2). We varied only the CP violating phase  $\Phi$ . The best value of  $\Phi$  was found to be  $89.3^\circ$  corresponding to a minimum value of  $\chi^2$  equal to 0.33 As explained at the end of Sec V, we may round off to

$$\Phi^* = 90^\circ \quad (7.1)$$

without spoiling the good quality of the fit

The mixing matrix  $V_{CKM}^{th}$ , computed with this value of  $\Phi$  is

$$V_{CKM}^{th} = \begin{pmatrix} 0.9750 + i0.0188 & -0.2020 + i0.0906 & 0.0003 + i0.0037 \\ -0.0907 + i0.2019 & 0.0188 + i0.9742 & -0.0000 + i0.0396 \\ -0.0000 - i0.0084 & -0.0000 - i0.0388 & 0.0000 + i0.9992 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

The matrix of the moduli, computed from Eq (7.2), is

$$|V_{CKM}^{th}| = \begin{pmatrix} 0.9752 & 0.2214 & 0.0037 \\ 0.2213 & 0.9744 & 0.0396 \\ 0.0084 & 0.0388 & 0.9992 \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

which is to be compared with the experimental value [26]

$$|V_{CKM}^{exp}| = \begin{pmatrix} 0.9745 - 0.9760 & 0.217 - 0.224 & 0.0018 - 0.0045 \\ 0.217 - 0.224 & 0.9737 - 0.9753 & 0.036 - 0.042 \\ 0.004 - 0.013 & 0.035 - 0.042 & 0.9991 - 0.9994 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

We see that the absolute values of the entries in the mixing matrix computed from the theoretical expressions for  $V_{CKM}^h$ , with the values of the mass ratios given in Eqs. (5.1) and (5.2) [20] reproduce the central values of the experimentally determined entries in  $|V_{CKM}^{exp}|$ , almost exactly, well within the bounds of experimental error.

We also computed the Jarlskog invariant  $J$  [22]. The value obtained from Eq. (4.14) is

$$J^h = 3.00 \times 10^{-5}. \quad (7.5)$$

in good agreement with current data on  $CP$  violation in the  $K^b$ - $\bar{K}^b$  mixing system [26].

The three inner angles of the unitarity triangle may now be readily computed from the expressions (5.15)–(5.17). We found the following values:

$$\alpha = 84^\circ, \quad \beta = 24^\circ, \quad \gamma = 72^\circ \quad (7.6)$$

These three angles will be determined from  $CP$  asymmetries in a variety of weak  $B$  decays at the forthcoming  $B$  factories.

An estimation of the range of values of these angles compatible with the experimental information on the absolute values of the matrix elements of  $V_{CKM}^{exp}$  is given by Mele [27] and Ali [28]. According to these authors,  $79^\circ \leq \alpha \leq 102^\circ$ ,  $21^\circ \leq \beta \leq 28^\circ$  and  $55^\circ \leq \gamma \leq 78^\circ$ . We see that the value of  $\beta$  obtained in this work coincides almost exactly with the central value of  $\beta$  according to Mele [27], while our  $\gamma$  is close to the upper limit given by Mele [27] and  $\alpha$  is in the allowed range given by these authors.

### VIII. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In this work we derived theoretical expressions for the mixing matrix  $V_{CKM}^h$  from quark mass matrices  $M_q$  with a modified Fritzsch texture. The mass matrices were built up adding three terms  $M_{3q}$ ,  $M_{2q}$ , and  $M_{1q}$ , corresponding to stages of less symmetry in a simple scheme for breaking the flavor permutational symmetry.

The breaking pattern of the  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry down to  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  was characterized in terms of the parameter  $Z^{1/2} = (M_{2q,4})_{23} / (M_{2q,H})_{22}$  which is a measure of the amount of mixing of singlet and doublet irreducible representations of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$ . This breaking pattern was classified in terms of the symmetric ( $Z_S^{1/2} = 1/\sqrt{8}$ ) and antisymmetric ( $Z_A^{1/2} = -\sqrt{8}$ ) representations of an auxiliary group  $\tilde{S}(2)$  of permutations of the two fields in the Yukawa term  $\bar{Q}_L W_{2q} q_R$ .

A careful comparison of the theoretical expression for the

absolute values of the elements of the CKM matrix with the experimentally determined values of  $|V_{CKM}^{exp}|$ ,  $J^{exp}$  and the inner angles of the unitarity triangle  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$ , and  $\gamma^{exp}$  gives a clear and precise indication on the existence of a preferred pattern for breaking the  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  flavor symmetry down to  $S_L(2) \otimes S_R(2)$ . The preferred or best symmetry breaking pattern is characterized by

$$Z^{*1/2} = \frac{1}{2} (Z_S^{1/2} - Z_A^{1/2}) = \sqrt{\frac{81}{32}}. \quad (8.1)$$

Once the numerical value of  $Z^{*1/2}$  is fixed at  $\sqrt{81/32}$ , the mass matrices  $M_q$  are functions of the quark masses and only one phase. In consequence, the resulting best theoretical  $V_{CKM}$  matrix is parametrized in terms of the four quark mass ratios ( $\bar{m}_u, \bar{m}_c, \bar{m}_d, \bar{m}_s$ ) and only one  $CP$  violating phase  $\Phi$ . The best value of  $\Phi$  was found to be

$$\Phi = 90^\circ \quad (8.2)$$

The moduli of the matrix elements of the mixing matrix computed from the theoretical expression  $V_{CKM}^h$  are in excellent agreement with all the experimentally determined absolute values of the CKM matrix  $|V_{CKM}^{exp}|$ . For the Jarlskog invariant we found the value  $J = 3.00 \times 10^{-5}$  and for the inner angles of the unitarity triangle we found the values  $\alpha = 84^\circ$ ,  $\beta = 24^\circ$ , and  $\gamma = 72^\circ$  also in very good agreement with current data on  $CP$  violation in the  $K^0$ - $\bar{K}^0$  mixing system [26] and the most recent data on oscillations in the  $B_s^0$ - $\bar{B}_s^0$  system [27] and [28].

In the standard electroweak model both the masses of the quarks as well as the weak mixing angles appear as free parameters. In this work, we have shown that, starting from the flavor permutational symmetry, a simple and explicit Ansatz about the pattern of symmetry breaking leads to a parametrization of the CKM mixing matrix in terms of four quark mass ratios ( $m_u/m_c, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b$ ) and one  $CP$  violating phase in very good agreement with all the available experimental information on quark mixings and  $CP$  violation.

### ACKNOWLEDGMENTS

We gratefully acknowledge many useful discussions with Professor P. K. Kabir and Dr. M. Mondragón. One of us, E.R.-J. is indebted to Dr. J. R. Soto for help in the numerical calculations. This work was partially supported by DGAPA-UNAM under contract No. PAPIIT-IN110296 and by CONACYT, (México) under contract No. 3909P-E9607.

- [1] H. Fritzsch and D. Holmanna-Spöcker, Phys. Lett. B 338, 290 (1994).  
 [2] H. Fritzsch and Z. Xing, Phys. Lett. B 353, 114 (1995).  
 [3] H. Lehmann, C. Newton, and T. Wu, Phys. Lett. B 384, 249 (1996).

- [4] H. Fritzsch and Z. Xing, Phys. Lett. B 372, 265 (1996).  
 [5] P. S. Gill and M. Gupta, J. Phys. G 23, 355 (1997).  
 [6] Z. Xing, J. Phys. G 23, 1563 (1997).  
 [7] K. Kang and S. K. Kang, Phys. Rev. D 56, 1511 (1997).  
 [8] K. Kang and S. K. Kang, "New Class of Quark Mass Matrices

- and the Flavor Mixing Matrix," BROWN-HET-1109, hep-ph/9802330
- [9] H. Fritzsch, *Phys Lett* **70B**, 436 (1977)
- [10] S. Pakvasa and H. Sugawara, *Phys. Lett.* **73B**, 61 (1978)
- [11] H. Fritzsch, *Phys Lett* **73B**, 317 (1978)
- [12] H. Harari, H. Haut, and J. Weyers, *Phys. Lett* **78B**, 459 (1978)
- [13] H. Fritzsch, *Nucl Phys* **B155**, 189 (1979)
- [14] Y. Yamanaka, H. Sugawara, and S. Pakvasa, *Phys. Rev D* **25**, 1895 (1982)
- [15] P. Kaus and S. Meshkov, *Phys. Rev D* **42**, 1863 (1990)
- [16] G.C. Branco, J.I. Silva-Marcos, and M.N. Rebelo, *Phys. Lett. B* **237**, 446 (1990)
- [17] H. Fritzsch and J. Plankl, *Phys. Lett. B* **237**, 451 (1990)
- [18] P.F. Harrison and W.G. Scott, *Phys. Lett. B* **333**, 471 (1994).
- [19] For a brief review of other relevant references, see S. Meshkov, in *Proceedings of the Global Foundation International Conference on Unified Symmetry in the Small and in the Large*, Coral Gables, FL, 1993, edited by B.N. Kursunoglu and A. Perlmutter (Nova Science, New York, 1993)
- [20] H. Fritzsch, "Mass Hierarchies Hidden Symmetry and Maximal CP-violation," hep-ph/9807551. See also H. Fritzsch, *The Symmetry and the Problem of Mass Generation*, Proceedings of the XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (Group 21), Goslar, Germany, 1996, edited by H.-D. Doebner, W. Scherer, and C. Schutte (World Scientific, Singapore, 1997), Vol II, p. 543
- [21] P.S. Gill and M. Gupta, *J. Phys. G* **A21**, 1 (1995).
- [22] C. Jarlskog, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039 (1985), see also C. Jarlskog, in *CP Violation*, edited by C. Jarlskog, Advanced Series on Directions on High Energy Physics Vol. 3 (World Scientific, Singapore, 1989)
- [23] H. Fusaoka and Y. Koide, *Phys. Rev. D* **57**, 3986 (1998).
- [24] F. Ynduran, *Nucl. Phys.* **B517**, 324 (1998)
- [25] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, *Rev. Mex. Fis.* **44(S1)**, 33 (1998); see also hep-ph/9804267
- [26] Particle Data Group, C. Caso *et al.*, *Eur. Phys. J. C* **3**, 1 (1998)
- [27] Salvatore Mele, "Indirect Measurements of the Vertex Angles of the Unitary Triangle," CERN-EP/98-133, hep-ph/9810333, see also S. Mele, "Experimental constraints on the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix," hep-ph/9808411
- [28] Ahmed Ali and Boris Kayser, "Quark Mixing and CP Violation," hep-ph/9806230



### A. Modified Fritzsch texture

A number of authors [1]- [2], [ [7]- [25]] have pointed out that realistic quark mass matrices result from the flavour permutational symmetry  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  and its spontaneous or explicit breaking. The group  $S(3)$  treats three objects symmetrically, while the hierarchical nature of the mass matrices is a consequence of the representation structure  $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$  of  $S(3)$ , which treats the generations differently. Under exact  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry, the mass spectrum for either up or down quark sectors consists of one massive particle in a singlet irreducible representation and a pair of massless particles in a doublet irreducible representation, the corresponding quark mass matrix with the exact  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry will be denoted by  $\mathbf{M}_{3q}$ . In order to generate masses for the first and second families, we add the terms  $\mathbf{M}_{2q}$  and  $\mathbf{M}_{1q}$  to  $\mathbf{M}_{3q}$ . The term  $\mathbf{M}_{2q}$  breaks the permutational symmetry  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  down to  $S_L(2) \otimes S_R(2)$  and mixes the singlet and doublet representation of  $S(3)$ .  $\mathbf{M}_{1q}$  transforms as the mixed symmetry term in the doublet complex tensorial representation of  $S_{diag}(3) \subset S_L(3) \otimes S_R(3)$ . Putting the first family in a complex representation will allow us to have a CP violating phase in the mixing matrix. Then, in a symmetry adapted basis ,  $\mathbf{M}_q$  takes the form

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_q = m_{3q} & \left[ \begin{pmatrix} 0 & A_q e^{-i\phi_q} & 0 \\ A_q e^{i\phi_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_q + \delta_q & B_q \\ 0 & B_q & \Delta_q - \delta_q \end{pmatrix} \right] \\ & + m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Delta_q \end{pmatrix} = m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_q e^{-i\phi_q} & -\Delta_q + \delta_q & B_q \\ 0 & B_q & 1 - \delta_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

From the strong hierarchy in the masses of the quark families,  $m_{3q} \gg m_{2q} > m_{1q}$ , we expect  $1 - \delta_q$  to be very close to unity. The entries in the mass matrix may be readily expressed in terms of the mass eigenvalues ( $m_{1q}, -m_{2q}, m_{3q}$ ) and the small parameter  $\delta_q$ . Computing the invariants of  $\mathbf{M}_q$ ,  $\text{tr} \mathbf{M}_q$ ,  $\text{tr} \mathbf{M}_q^2$  and  $\det \mathbf{M}_q$ , we get

$$A_q^2 = \tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q} (1 - \delta_q)^{-1}, \quad \Delta_q = \tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}, \quad (2.4)$$

$$B_q^2 = \delta_q ((1 - \tilde{m}_{1q} + \tilde{m}_{2q} - \delta_q) - \tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q} (1 - \delta_q)^{-1}), \quad (2.5)$$

where  $\tilde{m}_{1q} = m_{1q}/m_{3q}$  and  $\tilde{m}_{2q} = m_{2q}/m_{3q}$ .

If each possible symmetry breaking pattern is now characterized by the ratio

$$Z_q^{1/2} = B_q / (-\Delta_q + \delta_q), \quad (2.6)$$

the small parameter  $\delta_q$  is obtained as the solution of the cubic equation

$$\delta_q [(1 + \tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q} - \delta_q)(1 - \delta_q) - \tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q}] - Z_q (-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q)^2 = 0, \quad (2.7)$$

which vanishes when  $Z_q$  vanishes. An exact explicit expression for  $\delta_q$  as function of the quark mass ratios and  $Z_q$  is given in [1]. An approximate solution to Eq. (2.7) for  $\delta_q(Z_q)$ , valid for small values of  $Z_q$  ( $Z_q \leq 10$ ), is

$$\delta_q(Z_q) \approx \frac{Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2}{(1 - \tilde{m}_{1q})(1 + \tilde{m}_{2q}) + 2Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) (1 + \frac{1}{2}(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}))}. \quad (2.8)$$



### B. Symmetry breaking pattern

In the symmetry adapted basis, the matrix  $\mathbf{M}_{2q}$ , written in term of  $Z_7^{1/2}$ , takes the form

$$\mathbf{M}_{2q} = m_{3q} (-\tilde{m}_{2v} + \tilde{m}_{\nu,7} + \delta_q) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Z_7^{1/2} \\ 0 & Z_7^{1/2} & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

when  $Z_7^{1/2}$  vanishes,  $\mathbf{M}_{2v}$  is diagonal and there is no mixing of singlet and doublet representations of  $S(3)$ . Therefore, in the symmetry adapted basis, the parameter  $Z_7^{1/2}$  is a measure of the amount of mixing of singlet and doublet irreducible representations of  $S_{2q}(3) \subset S_L(3) \otimes S_R(3)$

We may easily give a meaning to  $Z_7^{1/2}$  in terms of permutations. From Eqs. (2.1) and (2.9), we notice that the symmetry breaking term in the Yukawa Lagrangian,  $\bar{q}_L \mathbf{M}_{2v} q_R$  is a functional of only two fields:  $\frac{1}{\sqrt{8}}(q_2(X) + \sqrt{2}q_3(X))$  and  $\frac{1}{\sqrt{8}}(-\sqrt{2}q_2(X) + q_3(X))$ . Under the permutation of these fields,  $\bar{q}_L \mathbf{M}_{2v} q_R$  splits into the sum of an antisymmetric term  $\bar{q}_L \mathbf{M}_{2v}^A q_R$  which changes sign, and a symmetric term  $\bar{q}_L \mathbf{M}_{2v}^S q_R$ , which remains invariant.

$$\mathbf{M}_{2q} = -\frac{2}{9} m_{3q} \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{8} \\ 0 & -\sqrt{8} & -1 \end{pmatrix} + 2b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.10)$$

where  $a = (\delta_v - \Delta_v)(\sqrt{2}Z_7^{1/2} - \frac{1}{2})$  and  $b = (\delta_v - \Delta_v)(\frac{\sqrt{2}}{2}Z_7^{1/2} + 2)$ . It is evident that there is a corresponding decomposition of the mixing parameter  $Z_7^{1/2}$ ,

$$Z_7^{1/2} = N_{Aq} Z_A^{1/2} + N_{Sq} Z_S^{1/2} \quad (2.11)$$

with

$$1 = N_{Av} + N_{Sv}. \quad (2.12)$$

where  $Z_A^{1/2} = -\sqrt{8}$  is the mixing parameter of the matrix  $\mathbf{M}_{2v}^A$ , and  $Z_S^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{8}}$  is the mixing parameter of  $\mathbf{M}_{2v}^S$ . In this way, a unique linear combination of  $Z_A^{1/2}$  and  $Z_S^{1/2}$  is associated to the symmetry breaking pattern characterized by  $Z_7^{1/2}$ . Thus, the different symmetry breaking patterns defined by  $\mathbf{M}_{2q}$  for different values of the mixing parameter  $Z_7^{1/2}$  are labeled in terms of the irreducible representations of the group  $\hat{S}(2)$  of permutations of the two fields in  $\bar{q}_L \mathbf{M}_{2v} q_R$ . The pair of numbers  $(N_A, N_S)$  enters as a convenient mathematical label of the symmetry breaking pattern without introducing any assumption about the actual pattern of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry breaking realized in nature.

### C. The Jarlskog invariant

The Jarlskog invariant,  $J$ , may be computed directly from the commutator of the mass matrices [26]:

$$J = -\frac{\det\{-i[\mathbf{M}_u, \mathbf{M}_d]\}}{2F} \quad (2.13)$$

where

$$F = (1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d). \quad (2.14)$$

Substitution of the expression (2.3) for  $\mathbf{M}_u$  and  $\mathbf{M}_d$ , in Eq. (2.13), with  $Z_u^{1/2} = Z_d^{1/2} = Z^{1/2}$  gives

$$J = \frac{Z \sqrt{\frac{\tilde{m}_u/\tilde{m}_c}{1-\delta_u}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d/\tilde{m}_s}{1-\delta_d}} \sin\Phi}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_u/\tilde{m}_c)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)(1 + \tilde{m}_d/\tilde{m}_s)} \\ \times \left\{ [(-\Delta_u + \delta_u)(1 - \delta_d) - (-\Delta_d + \delta_d)(1 - \delta_u)]^2 - \left(\frac{\tilde{m}_u\tilde{m}_c}{1-\delta_u}\right)(-\Delta_d + \delta_d)^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{\tilde{m}_d\tilde{m}_s}{1-\delta_d}\right)(-\Delta_u + \delta_u)^2 + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_u\tilde{m}_c}{1-\delta_u}} \sqrt{\frac{\tilde{m}_d\tilde{m}_s}{1-\delta_d}}(-\Delta_u + \delta_u)(-\Delta_d + \delta_d)\cos\Phi \right\}. \quad (2.15)$$

where  $\Delta_q$  and  $\delta_q$  are defined in Eqs. (2.4) and (2.7). In this way, an exact closed expression for  $J$  in terms of the quark mass ratios, the CP violating phase  $\Phi$ , and the parameter  $Z$  that characterizes the symmetry breaking pattern is derived.

### III. THE MIXING MATRIX

The Hermitian mass matrix  $\mathbf{M}_q$  may be written in terms of a real symmetric matrix  $\tilde{\mathbf{M}}_q$  and a diagonal matrix of phases  $\mathbf{P}_q$  as follows

$$\mathbf{M}_q = \mathbf{P}_q \tilde{\mathbf{M}}_q \mathbf{P}_q^\dagger, \quad (3.1)$$

The real symmetric matrix  $\tilde{\mathbf{M}}_q$  may be brought to a diagonal form by means of an orthogonal transformation

$$\tilde{\mathbf{M}}_q = \mathbf{O}_q \mathbf{M}_{q,diag} \mathbf{O}_q^T, \quad (3.2)$$

where

$$\mathbf{M}_{q,diag} = m_{3q} \text{diag} [\tilde{m}_{1q}, -\tilde{m}_{2q}, 1], \quad (3.3)$$

with subscripts 1, 2, 3 referring to  $u, c, t$  in the u-type sector and  $d, s, b$  in the d-type sector. After diagonalization of the mass matrices  $\mathbf{M}_q$ , one obtains the mixing matrix  $\mathbf{V}^{th}$  as

$$\mathbf{V}^{th} = \mathbf{O}_u^T \mathbf{P}^{u-d} \mathbf{O}_d, \quad (3.4)$$

where  $\mathbf{P}^{u-d}$  is the diagonal matrix of relative phases

$$\mathbf{P}^{u-d} = \text{diag}[1, e^{i\Phi}, e^{i\Phi}], \quad (3.5)$$

and

$$\Phi = (\phi_u - \phi_d). \quad (3.6)$$

The orthogonal matrix  $\mathbf{O}_q$  is given by

$$\mathbf{O}_q = \begin{pmatrix} (\tilde{m}_{2q} f_1 / D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{1q} f_2 / D_2)^{1/2} & (\tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q} f_3 / D_3)^{1/2} \\ ((1 - \delta_q) \tilde{m}_{1q} f_1 / D_1)^{1/2} & ((1 - \delta_q) \tilde{m}_{2q} f_2 / D_2)^{1/2} & ((1 - \delta_q) f_3 / D_3)^{1/2} \\ -(\tilde{m}_{1q} f_2 f_3 / D_1)^{1/2} & -(\tilde{m}_{2q} f_1 f_3 / D_2)^{1/2} & (f_1 f_2 / D_3)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

where

$$f_1 = 1 - \tilde{m}_{1q} - \delta_u, \quad f_2 = 1 - \tilde{m}_{2q} - \delta_q, \quad f_3 = \delta_v \quad (3.8)$$

$$D_1 = (1 - \delta_q)(1 - \tilde{m}_{1q})(\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \quad (3.9)$$

$$D_2 = (1 - \delta_q)(1 - \tilde{m}_{2q})(\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \quad (3.10)$$

$$D_3 = (1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_{2q})(1 - \tilde{m}_{2q}) \quad (3.11)$$

In these expressions,  $\delta_u$  and  $\delta_d$  are, in principle, functions of the quark mass ratios and the parameters  $Z_u^{1/2}$  and  $Z_d^{1/2}$  respectively. However, in [1] we found that keeping  $Z_u^{1/2}$  and  $Z_d^{1/2}$  as free, independent parameters gives rise to a continuous ambiguity in the fitting of  $|V_{ij}^{1/2}|$  to the experimental data. To avoid this ambiguity we further assumed that the up and down mass matrices are generated following the same symmetry breaking pattern that is,

$$Z_u^{1/2} = Z_d^{1/2} = Z^{1/2} \quad (3.12)$$

Then, from Eqs. (3.4) - (3.12) all matrix elements in  $\mathbf{V}^{1/2}$  may be written in terms of four quark mass ratios and only two free, real parameters: the parameter  $Z^{1/2}$  which characterizes the symmetry breaking pattern in the u- and d-sectors and the CP violating phase  $\Phi$ . The computation of  $V_{ij}^{1/2}$  is quite straightforward. Here, we will give, in explicit form, only those elements of  $\mathbf{V}^{1/2}$  which will be of use later. From Eqs. (3.4)-(3.12) we obtain,

$$\begin{aligned} V_{us}^{1/2} = & - \left( \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u) \tilde{m}_d(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\ & + \left( \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \left\{ \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_u)} \right)^{1/2} \right. \\ & \left. + \left( \frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \delta_u (1 - \tilde{m}_d - \delta_d) \delta_d}{(1 - \delta_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} V_{ub}^{1/2} = & \left( \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\ & + \left\{ - \left( \frac{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \delta_u (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)\delta_d}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \} e^{i\Phi} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} V_{cs}^{th} = & \left( \frac{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)\tilde{m}_d(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\ & + \left\{ \left( \frac{\tilde{m}_c\delta_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)\tilde{m}_s\delta_d(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\ & \left. + \left( \frac{\tilde{m}_c(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)\tilde{m}_s(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \end{aligned} \quad (3.15)$$

and

$$\begin{aligned} V_{cb}^{th} = & - \left( \frac{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\ & + \left\{ - \left( \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)\delta_u(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\ & \left. + \left( \frac{\tilde{m}_c(1 + \tilde{m}_c - \delta_u)\delta_d}{(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \end{aligned} \quad (3.16)$$

### A. The “best” symmetry breaking pattern

In order to find the actual pattern of  $S_L(3) \otimes S_R(3)$  symmetry breaking realized in nature, we made a  $\chi^2$  fit of the exact expressions for the moduli of the entries in the mixing matrix,  $|V_{ij}^{th}|$ , the Jarlskog invariant,  $J^{th}$ , and the three inner angles of the unitarity triangle,  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  and  $\gamma^{th}$ , to the experimentally determined values of  $|V_{ij}^{exp}|$ ,  $J^{exp}$ ,  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$  and  $\gamma^{exp}$ . A detailed account of the fitting procedure is given in [1]. Here, we will give only a brief relation of the main points in the fitting procedure.

For the purpose of calculating quark mass ratios and computing the mixing matrix, it is convenient to give all quark masses as running masses at some common energy scale [27], [28]. In the present calculation, following Peccei [27], Fritzsche [29] and the Ba-Bar book [30], we used the values of the running quark masses evaluated at  $\mu = m_t$ .

$$\begin{aligned} m_u &= 3.25 \pm 0.9 \text{ MeV} & m_c &= 760 \pm 29.5 \text{ MeV} & m_t &= 171.0 \pm 12 \text{ GeV} \\ m_d &= 4.4 \pm 0.64 \text{ MeV} & m_s &= 100 \pm 6 \text{ MeV} & m_b &= 2.92 \pm 0.11 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (3.17)$$

These values, with the exception of  $m_s$ ,  $m_c$  and  $m_b$ , were taken from the work of Fusaoka and Koide [28] see also Fritzsche [29] and Leutwyler [31]. The values of  $m_c(m_t)$  and  $m_b(m_t)$  were obtained by rescaling to  $\mu = m_t$  the recent calculations of  $m_c(m_c)$  and  $m_b(m_b)$  by Pineda and Ynduráin [32] and Ynduráin [33]. The value of  $m_s$  agrees with the latest determination made by the ALEPH collaboration from a study of  $\tau$  decays involving kaons [34].

We kept the mass ratios  $\tilde{m}_c = m_c/m_t$ ,  $\tilde{m}_s = m_s/m_b$  and  $\tilde{m}_d = m_d/m_b$  fixed at their central values

$$\tilde{m}_c = 0.0044, \quad \tilde{m}_s = 0.034 \quad \text{and} \quad \tilde{m}_d = 0.0015. \quad (3.18)$$

but we took the value

$$\tilde{m}_u = 0.000036, \quad (3.19)$$

which is close to its upper bound. We found the following best values for  $\Phi$  and  $Z^{1/2}$ ,

$$\Phi^* = 90^\circ, \quad Z^{*/2} = \frac{1}{2} [Z_S^{1/2} - Z_A^{1/2}] = \sqrt{\frac{81}{32}}, \quad (3.20)$$

corresponding to a value of  $\chi^2 \leq 0.32$ . The values of the parameters  $\delta_u(Z)$  and  $\delta_s(Z)$  obtained from (3.18), (3.19) and (3.20) are

$$\delta_u(Z^{*/2}) = 0.000048 \quad \delta_s(Z^{*/2}) = 0.00228 \quad (3.21)$$

Before proceeding to give the numerical results for the mixing matrix  $V^{th}$ , it will be convenient to stress the following points

1. The masses of the lighter quarks are the less well determined, while the moduli of the entries in  $|V_{ij}^{cp}|$  with the largest error bars, namely  $|V_{ub}|$  and  $|V_{cb}|$ , are the most sensitive to changes in the ratios  $m_u/m_c$  and  $m_d/m_s$ , respectively. Hence, the quality of the fit of  $|V_{ij}^{th}|$  to  $|V_{ij}^{cp}|$  is good ( $\chi^2 \leq 0.5$ ) even if relatively large changes in the masses of the lighter quarks are made. The sensitivity of  $|V_{ub}|$  and  $|V_{cb}|$  to changes in  $m_u/m_c$  and  $m_d/m_s$ , respectively, is reflected in the shape of the unitarity triangle which changes appreciably when the masses of the lighter quarks change within their uncertainty ranges. The best simultaneous  $\chi^2$  fit of  $|V_{ij}^{th}|$ ,  $J^n$ , and  $\alpha^n$ ,  $\beta^{th}$  and  $\gamma^{th}$ , to the experimentally determined quantities was obtained when the ratio  $\tilde{m}_u = m_u/m_c$  is taken close to its upper bound, as given in (3.19). Furthermore, the chosen high value of  $\tilde{m}_u$  gives for the ratio  $|V_{ub}|/|V_{cb}|$  the value

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \approx \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{m_c}} = 0.09 \pm 0.025 \quad (3.22)$$

in very good agreement with its latest world average [ [35], [36], [37]].

2. As the energy scale changes, say from  $\mu = m_t$  to  $\mu = 1 \text{ GeV}$ , the running quark masses change appreciably, but since the masses of light and heavy quarks increase almost in the same proportion, the resulting dependence of the quark mass ratios on the energy scale is very weak. When the energy scale changes from  $\mu = m_t$  to  $\mu = 1 \text{ GeV}$ ,  $\tilde{m}_u$  and  $\tilde{m}_d$  decrease by about 25% and  $\tilde{m}_c$  and  $\tilde{m}_s$  also decrease but by less than 16%.
3. In view of the previous considerations, a reasonable range of values for the running quark mass ratios, evaluated at  $\mu = m_t = 171 \text{ GeV}$ , would be as follows

$$\begin{aligned} 0.000022 &\leq \tilde{m}_u \leq 0.000037 \\ 0.0043 &\leq \tilde{m}_c \leq 0.0046 \\ 0.0013 &\leq \tilde{m}_d \leq 0.0017 \\ 0.032 &\leq \tilde{m}_s \leq 0.036 \end{aligned} \quad (3.23)$$

The results of the  $\chi^2$  fit of the theoretical expressions for  $|V_{ij}^{th}|$ ,  $J^{th}$ ,  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  and  $\gamma^{th}$  to the experimentally determined quantities is as follows:

The quark mixing matrix computed from the theoretical expression  $\mathbf{V}^{th}$  with the numerical values of quark mass ratios given in (3.18) and (3.19) and the corresponding best values of the symmetry breaking parameter,  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$ , and the CP-violating phase,  $\Phi^* = 90^\circ$ , is

$$V^{th} = \begin{pmatrix} 0.9749 e^{i1^\circ} & 0.2225 e^{i157^\circ} & 0.0036 e^{i85^\circ} \\ 0.2223 e^{i113^\circ} & 0.9742 e^{i89^\circ} & 0.040 e^{i90^\circ} \\ 0.0086 e^{i270^\circ} & 0.0392 e^{i270^\circ} & 0.9992 e^{i90^\circ} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

In order to have an estimation of the sensivity of our numerical results to the uncertainty in the values of the quark mass ratios, we computed the range of values of the matrix of moduli  $|V_{ij}^{th}|$ , corresponding to the range of values of the mass ratios given in (3.23), but keeping  $\Phi$  and  $Z^{1/2}$  fixed at the values  $\Phi^* = 90^\circ$  and  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$ . The result is

$$|V^{th}| = \begin{pmatrix} 0.9735 - 0.9771 & 0.2151 - 0.2263 & 0.0028 - 0.0040 \\ 0.2151 - 0.2263 & 0.9726 - 0.9764 & 0.037 - 0.043 \\ 0.0078 - 0.0093 & 0.036 - 0.042 & 0.9991 - 0.9993 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

which is to be compared with the experimentally determined values of the matrix of moduli [6],

$$|V^{exp}| = \begin{pmatrix} 0.9742 - 0.9757 & 0.219 - 0.226 & 0.002 - 0.005 \\ 0.219 - 0.225 & 0.9734 - 0.9749 & 0.037 - 0.043 \\ 0.004 - 0.014 & 0.035 - 0.043 & 0.9990 - 0.9993 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

As is apparent from (3.24), (3.25) and (3.26), the agreement between computed and experimental values of all entries in the mixing matrix is very good. The estimated range of variation in the computed values of the moduli of the four entries in the upper left corner of the matrix  $|V^{th}|$  is larger than the error band in the corresponding entries of the matrix of the experimentally determined values of the moduli  $|V^{exp}|$ . The estimated range of variation in the computed values of the entries in the third column and the third row of  $|V_{ij}^{th}|$  is comparable with the error band of the corresponding entries in the matrix of experimentally determined values of the moduli, with the exception of the elements  $|V_{ub}^{th}|$  and  $|V_{td}^{th}|$  in which case the estimated range of variation due to the uncertainty in the values of the quark mass ratios is significantly smaller than the error band in the experimentally determined value of  $|V_{ub}^{exp}|$  and  $|V_{td}^{exp}|$ .

The value obtained for the Jarlskog invariant is

$$J^{th} = 3.0 \times 10^{-5} \quad (3.27)$$

in good agreement with the value  $|J^{exp}| = (3.0 \pm 1.3) \times 10^{-5} \sin \delta$  obtained from current data on CP violation in the  $K^0 - \bar{K}^0$  mixing system [6] and the  $B^0 - \bar{B}^0$  mixing system [30].

For the inner angles of the unitarity triangle, we found the following central values:

$$\alpha = 83.6^\circ \quad \beta = 23.2^\circ \quad \gamma = 73.2^\circ \quad (3.28)$$

An estimation of the range of values of the three inner angles of the unitarity triangle, compatible with the experimental information on the absolute values of the matrix elements  $V^{exp}$ , is given by Mele [35] and Ali [36]. According to these authors,  $75^\circ \leq \alpha \leq 121^\circ$ ,  $16^\circ \leq \beta \leq 34^\circ$  and  $38^\circ \leq \gamma \leq 81^\circ$ . We see that the central value of  $\beta$  obtained in this work is close to the lower limit according to Mele [35], while  $\gamma$  is close to the upper limit given by Mele [35], and  $\alpha$  is in the allowed range given by these authors.

#### IV. PHASE EQUIVALENCE OF $V^{TH}$ AND THE PHENOMENOLOGICAL PARAMETRIZATIONS $V^{PDG}$ AND $V^{KM}$

In the mass basis, the quark charged currents take the form

$$J_c^\pm = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{Lc}^\pm \gamma^\mu V_{ij} q_{Lj}^\pm \quad (4.1)$$

A redefinition of the phases of the quark fields which leaves  $J_c^\pm$  invariant, will change the arguments of  $V_{ij}$ , but leave the moduli  $|V_{ij}|$  invariant

$$V_{ij} \rightarrow \tilde{V}_{ij} = e^{-i\chi_j} V_{ij} e^{i\chi_i^*} \quad (4.2)$$

Hence, the invariant measurable of the quark mixing matrix are the moduli of its elements, i.e., the quantities  $|V_{ij}|$ , and the Jarlskog invariant  $J$ . But even  $J$  up to a sign is a function of the moduli [26]. In the case of three families, unitarity of  $\mathbf{V}$  constrains the number of independent moduli to four [26].

In consequence, in the current literature,  $\mathbf{V}$  is usually parametrized in terms of four independent parameters. Kobayashi and Maskawa [3] originally chose as independent parameters three rotation angles and one CP-violating phase. A number of parametrizations of this kind, different from the original Kobayashi-Maskawa form have been proposed [4]. One of the most commonly used is the "standard" parametrization [5] advocated by the Particle Data Book [6]. From a mathematical point of view all parametrizations of the flavour mixing matrix containing four, suitably defined, independent parameters are equivalent. In contrast, the parametrization  $\mathbf{V}^{th}$ , derived in the previous sections from the breaking of the flavour permutational symmetry, has only two free, linearly independent parameters, namely, the symmetry breaking parameter  $Z^{1/2}$  and the CP-violating phase  $\Phi$ . When the best values of the parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$  are used, the mixing matrix  $\mathbf{V}^{th}$  reproduces the central values of all experimentally determined quantities, that is, the moduli  $|V_{ij}^{exp}|$ , the Jarlskog invariant  $J^{exp}$  and the three inner angles,  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  of the unitarity triangle. The quality of the fit of  $\mathbf{V}^{th}$  to the experimental data is as good as the quality of the fit of the phenomenological parametrizations  $\mathbf{V}^{PDG}$  and  $\mathbf{V}^{KM}$  to the same data. More precisely, when the best set of adjustable parameters of each parametrization  $\mathbf{V}^{th}$ ,  $\mathbf{V}^{PDG}$  and  $\mathbf{V}^{KM}$ , obtained from a  $\chi^2$  fit to the same experimental data, the moduli of corresponding entries in the matrices  $\mathbf{V}^{th}$ ,  $\mathbf{V}^{PDG}$  and  $\mathbf{V}^{KM}$ , are numerically equal and give an equally good representation of the experimentally determined values  $|V_{ij}^{exp}|$ . From this observation, it follows that the symmetry derived  $\mathbf{V}^{th}$  and the phenomenological parametrizations  $\mathbf{V}^{PDG}$

and  $\mathbf{V}^{\text{KM}}$  should be equivalent up to a rephasing of the quark fields in the mass representation. In the following, we will show that it is possible to derive new theoretical mixing matrices  $\hat{\mathbf{V}}^{\text{th}}$  and  $\hat{\mathbf{V}}^{\text{th}}$ , related to  $\mathbf{V}^{\text{th}}$  by biunitary rephasing transformations, and such that all corresponding entries in  $\hat{\mathbf{V}}^{\text{th}}$  and  $\mathbf{V}^{\text{PDG}}$  or  $\hat{\mathbf{V}}^{\text{th}}$  and  $\mathbf{V}^{\text{KM}}$  are equal in modulus and phase. From here, we will obtain exact, explicit expressions for the three mixing angles and the CP-violating phase occurring in  $\mathbf{V}^{\text{PDG}}$  and  $\mathbf{V}^{\text{KM}}$  as functions of the quark mass ratios and the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  characterizing the preferred symmetry breaking pattern.

## V. PHASE EQUIVALENCE OF $\mathbf{V}^{\text{TH}}$ AND $\mathbf{V}^{\text{PDG}}$

The standard parametrization [5] of the mixing matrix recommended by the Particle Data Group [6] is written in terms of three mixing angles  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  and one CP violating phase  $\delta_{13}$ ,

$$\mathbf{V}^{\text{PDG}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

where  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  and  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,

The range of values of the experimentally determined moduli in  $|V_{ij}^{\text{exp}}|$ , as given by Caso *et al* [6], corresponds to 90% confidence limits on the range of values of the mixing angles of

$$0.219 \leq s_{12} \leq 0.226, \quad (5.2)$$

$$0.037 \leq s_{23} \leq 0.043, \quad (5.3)$$

$$0.002 \leq s_{13} \leq 0.005. \quad (5.4)$$

Seven of the nine absolute values of the CKM entries have been measured directly, by tree level processes. A range of values for the four parameters,  $s_{12}, s_{23}, s_{13}$  and  $\delta_{13}$  which is consistent with the seven direct measurements and the experimentally determined values of the moduli of  $|V|^{exp}$  [6], is given by Nir [38]

$$0.2173 \leq s_{12} \leq 0.2219, \quad (5.5)$$

$$0.0378 \leq s_{23} \leq 0.0412, \quad (5.6)$$

$$0.00237 \leq s_{13} \leq 0.00395, \quad (5.7)$$

$c_{13}$  is known to deviate from unity only in the sixth decimal place [ [6], [38]].

The CP violating phase  $\delta_{13}$ , at present, is not constrained by direct measurements. However, the measurements of CP violation in  $K$  decays [39] force  $\delta_{13}$  to lie in the range



$$0 \leq \delta_{13} \leq \pi \quad (5.8)$$

The standard parametrization  $\mathbf{V}^{PDG}$  was introduced without taking the possible functional relations between the quark masses and the flavour mixing parameters into account. In contrast, these functional relations are explicitly exhibited in the theoretical expressions,  $V_j^{ik}$ , derived in the previous sections. Furthermore, we have seen that, when the best values of the parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$  are used, the mixing matrix  $\mathbf{V}^{ik}$  reproduces the central values of all experimentally determined quantities, that is, the moduli  $|V_j^{exp}|$ , the Jarlskog invariant  $J^{exp}$  and the three inner angles,  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ , of the unitarity triangle [2]. Since the two parametrizations reproduce the same set of experimental data equally well, we are justified in writing

$$|V_j^{ik}| = |V_j^{PDG}| = |V_j^{exp}|. \quad (5.9)$$

We cannot simply equate  $\mathbf{V}^{ik}$  and  $\mathbf{V}^{PDG}$  because the arguments of corresponding matrix elements in the two parametrizations are not equal

$$\text{arg}(V_j^{ik}) \neq \text{arg}(V_j^{PDG}). \quad (5.10)$$

This difference is of no physical consequence, it reflects the freedom in choosing the unobservable phases of the quark fields in the mass representation. A redefinition of the phases of the quark fields which leaves  $J_j^{exp}$  invariant, will change the argument of  $V_j^{ik}$  but leave the modulus  $|V_j^{ik}|$  invariant.

$$V_j^{ik} \rightarrow \tilde{V}_j^{ik} = e^{-i\chi_i^u} V_j^{ik} e^{i\chi_j^d} \quad (5.11)$$

The phases  $\chi_i^u$  and  $\chi_j^d$  occurring in Eq. (4.2) will be determined from the requirement that corresponding entries in  $\tilde{\mathbf{V}}^{ik}$  and  $\mathbf{V}^{PDG}$  be equal,

$$|V_j^{ik}| e^{i(u_i^{ik} - (x_i^u - x_j^d))} = |V_j^{PDG}| e^{i w_j^{PDG}} \quad (5.12)$$

in this expression  $u_i^{ik}$  and  $w_j^{PDG}$  are the arguments of  $V_j^{ik}$  and  $V_j^{PDG}$  respectively. Since the moduli  $|V_j^{ik}|$  and  $|V_j^{PDG}|$  are equal, the arguments of the entries in the two parametrizations are related by the set of nine equations

$$\chi_i^u - \chi_j^d = u_i^{ik} - w_j^{PDG} \quad (5.13)$$

The set of Eqs. (5.13) relate the differences of the unobservable quark field phases to the differences of the arguments of corresponding entries in  $\mathbf{V}^{ik}$  and  $\mathbf{V}^{PDG}$ .

We notice that the set of Eqs. (5.13) is overdetermined. In the left hand side of Eqs. (5.13) there are nine differences of unobservable quark field phases formed from only six different unknown quark field phases. Since only differences of phases may be determined, the phases themselves are defined only up to an additive constant which may be fixed by giving the value of one of the unknown quark phases. Therefore, in Eqs. (5.13) there are nine equations to determine five unknowns. This is possible only if a set of 4 consistency conditions is satisfied. The consistency conditions are non trivial relations expressing the five non-vanishing arguments  $w_j^{PDG}$  of  $V_j^{PDG}$  in terms only of the known arguments  $w_j^{ik}$  of

$V_{ij}^{th}$ .

A first consistency condition may be derived from the equality of the determinants of  $\tilde{V}^{th}$  and  $V^{PDG}$ . From the definition of the rephasing transformation, Eqs. (4.2) and (5.12), it follows that

$$\det \mathbf{V}^{th} = \det [\mathbf{X}_u^\dagger \mathbf{V}^{PDG} \mathbf{X}_d], \quad (5.14)$$

in this expression  $\mathbf{X}_u$  and  $\mathbf{X}_d$  are the diagonal unitary matrices of phases occurring in Eq. (4.2). The determinant of  $\mathbf{V}^{PDG}$  is one, hence,

$$\det [\mathbf{X}_u^\dagger \mathbf{V}^{PDG} \mathbf{X}_d] = e^{i \sum_{i=1}^3 (\chi_i^{(u)} - \chi_i^{(d)})}. \quad (5.15)$$

Similarly, from the definition of  $\mathbf{V}^{th}$ , Eq. (3.4), we get

$$\det \mathbf{V}^{th} = \det [\mathbf{O}_u^T \mathbf{P}^{u-d} \mathbf{O}_d] = \det (\mathbf{O}_u^T \mathbf{O}_d) \det \mathbf{P}^{u-d}, \quad (5.16)$$

the determinant of the orthogonal matrices is one, and the determinant of the diagonal matrix of phases  $\mathbf{P}^{u-d}$  is  $e^{i2\Phi}$ . Taking for  $\Phi$  the best value  $\Phi^* = \pi/2$ , we obtain

$$\det \mathbf{V}^{th} = e^{i2\Phi^*} = e^{i\pi}. \quad (5.17)$$

Substitution of Eq. (5.15) and Eq. (5.17) in Eq. (5.14) gives

$$\sum_{i=1}^3 (\chi_i^{(u)} - \chi_i^{(d)}) = 2\Phi^* = \pi. \quad (5.18)$$

This phase relation guarantees the equality of the determinants of  $\tilde{V}^{th}$  and  $\mathbf{V}^{PDG}$ .

The sum of the unobservable quark field phases occurring in the left hand side of Eq. (5.18) may be computed from Eqs. (5.13),

$$\sum_{i=1}^3 (\chi_i^{(u)} - \chi_i^{(d)}) = \sum_{i=1}^3 w_{1i}^{th} - w_{22}^{PDG}. \quad (5.19)$$

Now, we eliminate the unobservable quark field phases between Eq. (5.18) and Eq. (5.19), to get,

$$w_{22}^{PDG} = \sum_{i=1}^3 w_{1i}^{th} - 2\Phi^*. \quad (5.20)$$

This relation shows that  $\arg(V_{22}^{PDG})$  is uniquely determined (*mod*  $2\pi$ ) in terms of the arguments of the entries in  $\mathbf{V}^{th}$ .

A set of consistency conditions for the solution of Eqs. (5.13) may be derived in a similar way by elimination of the quark field phases. From Eqs. (5.13), differences of phases of the same quark field type, say  $(\chi_j^{(d)} - \chi_{j'}^{(d)})$ , may be computed from Eqs. (5.13) in at least three different ways. This redundancy implies the existence of non-trivial relations among the arguments of the entries of the two parametrizations. For example, from Eqs. (5.13), the difference  $(\chi_2^{(u)} - \chi_3^{(d)}) - (\chi_2^{(u)} - \chi_2^{(d)})$  gives

$$\chi_2^{(d)} - \chi_3^{(d)} = w_{23}^{ih} - w_{22}^{ih} + w_{22}^{PDG}, \quad (5.21)$$

and the difference  $(\chi_1^{(n)} - \chi_3^{(d)}) - (\chi_1^{(n)} - \chi_2^{(d)})$  gives

$$\chi_2^{(d)} - \chi_3^{(d)} = w_{13}^{ih} - w_{12}^{ih} + \delta_{13} \quad (5.22)$$

If the phase difference  $(\chi_2^{(d)} - \chi_3^{(d)})$  is eliminated between Eqs. (5.21) and (5.22) we get

$$\delta_{13} - w_{22}^{PDG} = w_{12}^{ih} - w_{13}^{ih} - w_{22}^{ih} + w_{23}^{ih}. \quad (5.23)$$

Using the same elimination procedure for all possible combinations  $(\chi_i^{(n)} - \chi_j^{(d)}) - (\chi_i^{(n)} - \chi_k^{(d)})$  we derive a set of nine equations, only four of which are linearly independent. One of these is Eq. (5.23), for the other three we may take

$$-w_{21}^{PDG} + w_{22}^{PDG} = w_{11}^{ih} - w_{12}^{ih} - w_{21}^{ih} + w_{22}^{ih}. \quad (5.24)$$

$$w_{31}^{PDG} - w_{32}^{PDG} = -w_{11}^{ih} + w_{12}^{ih} + w_{31}^{ih} - w_{32}^{ih}, \quad (5.25)$$

and

$$-w_{22}^{PDG} + w_{32}^{PDG} = -w_{22}^{ih} + w_{23}^{ih} + w_{32}^{ih} - w_{33}^{ih}. \quad (5.26)$$

Since, in  $\mathbf{V}^{PDG}$  there are five entries with non-vanishing arguments, namely,  $w_{13}^{PDG} = -\delta_{13}$ ,  $w_{21}^{PDG}$ ,  $w_{22}^{PDG}$ ,  $w_{31}^{PDG}$  and  $w_{32}^{PDG}$ , we require still one more equation relating the arguments of the entries of the two parametrizations. This is obtained from the phase relations between the determinants of the two matrices,  $\mathbf{V}^{ih}$  and  $\mathbf{V}^{PDG}$ .

With the help of Eq. (5.20) we solve Eqs. (5.23)-(5.26) for all the other non-vanishing arguments of  $\mathbf{V}^{PDG}$

$$\delta_{13} = w_{11}^{ih} + w_{12}^{ih} - w_{13}^{ih} + w_{23}^{ih} + w_{33}^{ih} - 2\Phi^* \quad (5.27)$$

$$w_{21}^{PDG} = w_{21}^{ih} + w_{12}^{ih} + w_{33}^{ih} - 2\Phi^* \quad (5.28)$$

$$w_{31}^{PDG} = w_{31}^{ih} + w_{12}^{ih} + w_{23}^{ih} - 2\Phi^* \quad (5.29)$$

$$w_{32}^{PDG} = w_{32}^{ih} + w_{23}^{ih} + w_{11}^{ih} - 2\Phi^* \quad (5.30)$$

In this way, we have shown that the arguments  $w_{ij}^{PDG}$  of  $V_{ij}^{PDG}$  are uniquely determined (mod  $2\pi$ ) by the arguments  $w_{ij}^{ih}$  of  $V_{ij}^{ih}$ .

We now return to the question of the quark field phases and the phase transformation from  $V_{ij}^{ih}$  to  $V_{ij}^{PDG}$ . Substitution of Eqs. (5.20)-(5.30) into Eqs. (5.13), gives the differences of the quark field phases explicitly in terms of the known arguments  $w_{ij}^{ih}$  of  $V_{ij}^{ih}$ . The quark field phases themselves are determined only up to a common additive constant. Since the

quark field phases are unobservable, without loss of generality, we may fix one of them, and solve for the others. In this way, if we set  $\chi_1^d = 0$ , we get

$$\begin{aligned}
 \chi_1^d &= 0^\circ, \\
 \chi_2^d &= w_{11}^{th} - w_{12}^{th}, \\
 \chi_3^d &= -w_{23}^{th} - w_{33}^{th} - w_{12}^{th} + 2\Phi^*, \\
 \chi_1^u &= w_{11}^{th}, \\
 \chi_2^u &= -w_{12}^{th} - w_{33}^{th} + 2\Phi^*, \\
 \chi_3^u &= -w_{23}^{th} - w_{12}^{th} + 2\Phi^*.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Then, the diagonal matrices of phases required to compute the phase transformed  $\tilde{\mathbf{V}}^{th}$  are

$$\mathbf{X}_u = \text{diag}[e^{i w_{11}^{th}}, e^{i(-w_{12}^{th} - w_{33}^{th} + 2\Phi^*)}, e^{i(-w_{23}^{th} - w_{12}^{th} + 2\Phi^*)}] \tag{5.32}$$

and

$$\mathbf{X}_d = \text{diag}[1, e^{i(w_{11}^{th} - w_{12}^{th})}, e^{i(w_{12}^{th} - w_{23}^{th} - w_{33}^{th} + 2\Phi^*)}] \tag{5.33}$$

Hence, with the help of Eqs. (5.27)-(5.30), we verify that

$$\mathbf{X}_u^\dagger \mathbf{V}^{th} \mathbf{X}_d = \mathbf{V}^{PDG} \tag{5.34}$$

is satisfied as an identity, provided that  $|V_{ij}^{th}| = |V_{ij}^{PDG}|$ .

## VI. THE MIXING ANGLES OF THE STANDARD PARAMETRIZATION $\mathbf{V}^{PDG}$

The standard parametrization  $V_{ij}^{PDG}$  advocated by the PDG and the symmetry derived parametrization  $V_{ij}^{th}$ , give an equally good representation of the experimentally determined values of the moduli of the entries in the quark mixing matrix  $|V_{ij}^{exp}|$  [6]. Hence, we may write

$$|V_{ij}^{th}| = |V_{ij}^{PDG}|, \tag{6.1}$$

even though  $V_{ij}^{th}$  has only two adjustable parameters ( $Z^{1/2}$ ,  $\Phi$ ) while the number of adjustable parameters in  $V_{ij}^{PDG}$  is four, namely,  $(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_{13})$ . All entries in  $|V_{ij}^{th}|$  are explicit functions of the four quark mass ratios  $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$  and the two parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ . The equality of the moduli of corresponding entries of the two parametrizations will allow us to derive explicit expressions for the mixing angles in terms of the four quark mass ratios  $(m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b, m_s/m_b)$  and the parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ .

From the equality of  $|V_{13}^{th}|$  and  $|V_{13}^{PDG}|$ , it follows that

$$\sin \theta_{13} = |V_{ub}^{th}|, \tag{6.2}$$

if we take  $|V_{ub}^{th}|$  from (3.14), and we set  $\Phi$  and  $Z^{1/2}$  equal to their best values  $\Phi^* = \pi/2$  and  $Z^{1/2*} = \sqrt{\frac{81}{32}}$ , we get

$$\sin \theta_{13} = \left\{ \frac{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d^*}{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} + \left[ \left( \frac{\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_c - \delta_u^*)\delta_d^*}{(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} - \left( \frac{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)\delta_d^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (6.3)$$

The computation of  $\sin \theta_{23}$  is slightly more involved. From Eq. (5.1) and the equality of  $|V_{cb}^{th}|$  and  $|V_{cb}^{PDG}|$ , we obtain

$$\sin \theta_{23} = \frac{|V_{cb}^{PDG}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{PDG}|^2}} = \frac{|V_{cb}^{th}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{th}|^2}}. \quad (6.4)$$

Substitution of the expressions (3.16) and (3.14) with  $\Phi^* = \pi/2$  and  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{31}{32}}$  for  $|V_{cb}^{th}|$  and  $|V_{ub}^{th}|$  in Eq. (6.4) gives

$$\begin{aligned} \sin \theta_{23} = & \sqrt{\frac{1 - \tilde{m}_u}{1 + \tilde{m}_c}} \left\{ \tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d^* + \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)\tilde{m}_c(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)\delta_d^*} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right]^2 \right\}^{1/2} \\ & \times \left\{ - \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)\delta_d^*} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)\delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right]^2 \right. \\ & \left. + (1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d) - \tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d^* \right\}^{-1/2} \quad (6.5) \end{aligned}$$

Similarly from Eq. (5.1) and the equality of  $|V_{12}^{th}|$  and  $|V_{12}^{PDG}|$ , we obtain

$$\sin \theta_{12} = \frac{|V_{ub}^{PDG}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{PDG}|^2}} = \frac{|V_{ub}^{th}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}^{th}|^2}} \quad (6.6)$$

Then, substitution of the expressions (3.13) and (3.14) for  $|V_{ub}^{th}|$  and  $|V_{ub}^{th}|$  in (6.6) gives

$$\begin{aligned} \sin \theta_{12} = & \sqrt{\frac{1 - \tilde{m}_d}{\tilde{m}_s + \tilde{m}_d}} \left\{ \tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\tilde{m}_d(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*) \right. \\ & \left. + \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)\tilde{m}_s(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)\delta_u^*\tilde{m}_s(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)\delta_d^*} \right]^2 \right\}^{1/2} \\ & \times \left\{ - \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)\tilde{m}_u(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)\delta_d^*} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\tilde{m}_u(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)\delta_u^*(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)} \right]^2 \right. \\ & \left. + (1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(\tilde{m}_c + \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d) \right. \\ & \left. - \tilde{m}_c(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)\tilde{m}_d\tilde{m}_s\delta_d^* \right\}^{-1/2}. \quad (6.7) \end{aligned}$$

The computed values for  $\sin \theta_{12}$ ,  $\sin \theta_{23}$  and  $\sin \theta_{13}$  corresponding to the best  $\chi^2$  fit of  $|V_{ij}^{th}|$ ,  $J^{th}$  and  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  and  $\gamma^{th}$  to the experimentally determined quantities  $|V_{ij}^{exp}|$ ,  $J^{exp}$  and the three inner angles of the unitarity triangle  $\alpha^{exp}$ ,  $\beta^{exp}$  and  $\gamma^{exp}$  are obtained when the numerical values of  $|V_{us}^{th}|$ ,  $|V_{ub}^{th}|$  and  $|V_{cb}^{th}|$  computed from Eqs (3.13), (3.14), (3.16) and given in Eq. (3.24) are substituted in to Eqs. (6.2), (6.4) and (6.6). In this way, we get

$$\sin \theta_{12}^* = 0.222, \quad (6.8)$$

$$\sin \theta_{23}^* = 0.040, \quad (6.9)$$

$$\sin \theta_{13}^* = 0.0036. \quad (6.10)$$

The numerical value of  $\cos \theta_{13}^*$  deviates from unity in the sixth decimal place.

We notice that the numerical values of the mixing angles computed from quark masses and the best values of the symmetry breaking parameters coincide almost exactly with the central values of the experimentally determined quantities, as could be expected from Eq. (6.1). This observation is interesting because, in the case of three families, the most general form of the mixing matrix has at most four free, independent parameters [26] which could be four independent moduli or three mixing angles and one phase as occurs in  $\mathbf{V}^{PDG}$ . The symmetry derived  $\mathbf{V}^{th}$  has only two free, real independent parameters. In spite of that, the quality of the fit of  $\mathbf{V}^{th}$  to the experimental data is as good as the quality of the fit of  $\mathbf{V}^{PDG}$  to the same data. The predictive power of  $\mathbf{V}^{th}$  implied by this fact originates in the flavour permutational symmetry of the Standard Model and the assumed symmetry breaking pattern from which the texture in the quark mass matrices and  $\mathbf{V}^{th}$  were derived.

## VII. THE CP VIOLATING PHASE $\delta_{13}$

The CP violating phase  $\delta_{13}$  of the standard parametrization  $\mathbf{V}^{PDG}$  of the quark mixing matrix is given in Eq. (5.27) in terms of the arguments  $w_{ij}^{th}$  of five entries in the theoretical expression for  $V_{ij}^{th}$  and the corresponding CP violating phase  $\Phi$ . Taking from Eq. (3.24) the numerical values of the arguments  $w_{ij}^{th}$  and setting  $\Phi$  equal to the best value  $\Phi^* = \pi/2$ , we obtain the numerical value of  $\delta_{13}$  corresponding to the best fit of  $|V_{ij}^{th}|$  to the experimental data

$$\delta_{13}^* = 73.2^\circ. \quad (7.1)$$

This predicted value of  $\delta_{13}$  is very close to the numerical value of the third inner angle  $\gamma$ , of the unitarity triangle. The difference may readily be computed in terms of the arguments  $w_{ij}^{th}$ . From the expression for  $\gamma$

$$\gamma = \arg \left[ -\frac{V_{cb}^* V_{cd}}{V_{ub}^* V_{ud}} \right] \quad (7.2)$$

we get

$$-\gamma = w_{11}^{t_h} - w_{13}^{t_h} - w_{21}^{t_h} + w_{23}^{t_h} + \pi \quad (7.3)$$

which, when compared with the expression (5.27) for  $\delta_{13}$  gives

$$-\gamma = \delta_{13} - (w_{12}^{t_h} + w_{21}^{t_h} + w_{33}^{t_h} - 2\Phi^* - \pi). \quad (7.4)$$

Taking from Eq. (3.24) the numerical values of the arguments corresponding to the best values  $\Phi^* \approx 90^\circ$  and  $Z^{1/2*} = \sqrt{\frac{81}{32}}$ , we obtain

$$(w_{12}^{t_h} + w_{21}^{t_h} + w_{33}^{t_h} - 2\Phi^* - \pi) = 0.04^\circ. \quad (7.5)$$

This is, indeed, a very small number, and justifies the approximation

$$-\gamma \approx \delta_{13}. \quad (7.6)$$

According to this, the value of  $|\gamma|$  computed from quark mass ratios and the best values of the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  is  $|\gamma| = 73.2^\circ$ , in agreement with the bounds extracted from the precise measurements of the  $B_s^0$  oscillation frequency [35] and the measurements of the rates of the exclusive hadronic decays  $B^\pm \rightarrow \pi K$  and the CP averaged  $B^\pm \rightarrow \pi^\pm \tau^0$  [40]. Exact explicit expressions for the CP violating phase  $\delta_{13}$  in terms of the four quark mass ratios and the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  may readily be found; such an expression could be derived from Eq. (5.27) in terms of the arguments of five matrix elements of  $\mathbf{V}^{t_h}$ . However, a simpler expression involving only four matrix elements of  $\mathbf{V}^{t_h}$  may be obtained from the Jarlskog invariant  $J$

The Jarlskog invariant may be written in terms of four matrix elements of  $\mathbf{V}$  as

$$J = \text{Im}[V_{12}V_{23}V_{13}^*V_{22}^*]. \quad (7.7)$$

Since  $J$  is an invariant, its value is independent of the particular parametrization of  $\mathbf{V}$ . If we write the right hand side of Eq. (7.7) in terms of the standard parametrization  $\mathbf{V}^{PDG}$ , we obtain

$$\sin \delta_{13} \approx \frac{J^{th}}{s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{13}^2c_{23}}. \quad (7.8)$$

The terms in the denominator in the right hand side of this expression were written in Eqs. (6.2), (6.4) and (6.6) in terms of the moduli  $|V_{12}^{t_h}|$ ,  $|V_{13}^{t_h}|$  and  $|V_{23}^{t_h}|$ . Hence,

$$s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{13}^2c_{23} = \frac{|V_{12}^{t_h}| |V_{13}^{t_h}| |V_{23}^{t_h}| [(1 - |V_{12}^{t_h}|^2 - |V_{13}^{t_h}|^2)(1 - |V_{13}^{t_h}|^2 - |V_{23}^{t_h}|^2)]^{1/2}}{1 - |V_{13}^{t_h}|^2}. \quad (7.9)$$

Substitution of Eq. (7.9) in Eq. (7.8) gives

$$\sin \delta_{13} = \frac{(1 - |V_{13}^{t_h}|^2) \text{Im}[V_{12}^{t_h} V_{23}^{t_h} V_{13}^{t_h*} V_{22}^{t_h*}]}{|V_{12}^{t_h}| |V_{13}^{t_h}| |V_{23}^{t_h}| \sqrt{(1 - |V_{13}^{t_h}|^2 - |V_{12}^{t_h}|^2)(1 - |V_{13}^{t_h}|^2 - |V_{23}^{t_h}|^2)}}. \quad (7.10)$$

The right hand side of this equation may be written in terms of the quark mass ratios and the symmetry breaking parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  with the help of Eqs. (6.3), (6.5) and (6.7).

A simpler expression which leads to a very accurate approximation for  $\delta_{13}$  is obtained from Eq. (7.10) if the matrix elements in the square brackets are written as modulus and argument, and use is made of the unitarity of  $\mathbf{V}^{th}$  to simplify the denominator,

$$\sin \delta_{13} = \frac{(1 - |V_{13}^{th}|^2)|V_{22}^{th}| \sin(w_{12}^{th} + w_{23}^{th} - w_{13}^{th} - w_{22}^{th})}{|V_{11}^{th}||V_{33}^{th}|}. \quad (7.11)$$

Explicit expressions for the arguments  $w_{12}^{th}$ ,  $w_{23}^{th}$ ,  $w_{13}^{th}$  and  $w_{22}^{th}$  in terms of the quark mass ratios may be derived from Eqs. (3.13)-(3.16) setting  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$  equal to their best values  $Z^{*1/2} = \sqrt{\frac{81}{32}}$  and  $\Phi^* = \pi/2$ , we get

$$w_{us}^{th} = \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} + \sqrt{\frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right] \right), \quad (7.12)$$

$$w_{cb}^{th} = \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} - \sqrt{\frac{\delta_u^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{\delta_d^* (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)}} \right] \right), \quad (7.13)$$

$$w_{ub}^{th} = \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} - \sqrt{\frac{\delta_u^* (1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{\delta_d^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)}} \right] \right), \quad (7.14)$$

$$w_{cs}^{th} = \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}} \left[ \sqrt{(1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)} + \sqrt{\frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}} \right] \right). \quad (7.15)$$

Computing the second factor in square brackets in the leading order of magnitude, we get

$$w_{us}^{th} \approx \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_s}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}} \right), \quad (7.16)$$

$$w_{cb}^{th} \approx \pi - \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_u^*}{\delta_d^*}} \right] \right), \quad (7.17)$$

$$w_{ub}^{th} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c \tilde{m}_d \tilde{m}_s}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\delta_u^*}{\delta_d^*}} \right] \right), \quad (7.18)$$

and



$$w_{\tilde{c}s}^{in} \approx \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}} \right) \quad (7.19)$$

The modulus  $|V_{ij}^{th}|$  has already been expressed in terms of quark mass ratios and the parameters characterizing the symmetry breaking pattern  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  in Eqs. (6.2) and (6.3). Similar expressions for the other moduli occurring in Eq. (7.11) may also be given

$$|V_{us}| = \left( \frac{\tilde{m}_c (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) \tilde{m}_s (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_u) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_s) (1 - \delta_d^*) (1 - \tilde{m}_d) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\ \times \left\{ 1 + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_s \tilde{m}_c} \left[ ((1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*))^{1/2} + \left( \delta_u^* \delta_d^* \frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \right)^{1/2} \right]^2 \right\} \quad (7.20)$$

$$|V_{cs}| = \left( \frac{\tilde{m}_c (1 + \tilde{m}_c - \delta_c^*) \tilde{m}_s (1 + \tilde{m}_s - \delta_s^*)}{(1 + \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_s) (1 + \tilde{m}_s) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \\ \times \left\{ 1 + \left( \frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*) (1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*) (1 - \delta_d^*) (1 + \tilde{m}_c - \tilde{m}_u) (1 + \tilde{m}_s - \delta_s^*)} \right)^{1/2} \right\}^2 \\ + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_s \tilde{m}_c} \frac{1}{(1 - \delta_c^*) (1 - \delta_s^*)} \Bigg\}^{1/2} \quad (7.21)$$

$$|V_{cb}| = \left[ \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_c - \delta_c^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 - \tilde{m}_s - \delta_s^*)}{(1 - \delta_c^*)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right]^{1/2} \\ \times \left\{ 1 + \left( \frac{\delta_u^* \delta_d^* (1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*)}{(1 + \tilde{m}_c - \delta_c^*)(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_s^*)} \right)^{1/2} \right\}^2 \\ + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \delta_u^* \tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_s^*}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_c - \delta_c^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_s^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \Bigg\}^{1/2} \quad (7.22)$$

Computing in the leading order of magnitude, the first factor in the right hand side of Eq. (7.11) gives

$$\frac{(1 - |V_{13}^{th}|^2) |V_{22}^{th}|}{|V_{11}^{th}| |V_{33}^{th}|} \approx \frac{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d^*)(1 - \tilde{m}_d)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \left( 1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_d} (\sqrt{\delta_d^*} - \sqrt{\delta_u^*}) \right). \quad (7.23)$$

Inserting in to Eq. (7.23) the numerical values of the mass ratios and  $\sqrt{\delta_d^*} - \sqrt{\delta_u^*} = 0.04$ , we find that the right hand side of Eq.(7.23) differs from one in the third decimal place.

$$\frac{(1 - |V_{13}^{th}|^2) |V_{22}^{th}|}{|V_{11}^{th}| |V_{33}^{th}|} \approx 1. \quad (7.24)$$

Therefore,

$$\sin \delta_{13}^* \approx \sin(w_{us}^{th} + w_{cs}^{th} - w_{ub}^{th} - w_{cb}^{th}), \quad (7.25)$$

taking the numerical values of the argument in the right hand side of Eq. (7.25) from (3.24), we obtain

$$\delta_{13}^* \approx 73^\circ, \quad (7.26)$$

in agreement with Eq. (7.1). The approximate expression Eq. (7.25) for  $\sin \delta_{13}^*$  could also be derived from Eq. (5.23) if  $w_{22}^{PDG}$  is neglected. Computing  $w_{22}^{PDG}$  from Eq. (5.20) and (7.12)-(7.15), we obtain  $w_{22}^{PDG} = -0.0018^\circ$  which shows that Eq. (7.25) is a very good approximation. Since Eq. (5.20) was derived from the the phase relations expressing the arguments of  $V_{ij}^{PDG}$  in terms of those of  $V_{ij}^{th}$ , while Eq. (7.11) was derived from the expression Eq. (7.10) for the Jarlskog invariant, the agreement found between Eqs. (5.20) and (7.11)-(7.25) is a consistency check of our formalism.

### VIII. PHASE EQUIVALENCE OF $\mathbf{V}^{TH}$ AND THE KOBAYASHI-MASKAWA PARAMETRIZATION $\mathbf{V}^{KM}$

The quark mixing matrix was parametrized by Kobayashi and Maskawa [3] in terms of the three mixing angles,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , and  $\theta_3$ , and one CP violating phase  $\delta_{13}$

$$\mathbf{V}^{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} & c_1 c_2 s_3 + s_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} & c_1 s_2 s_3 - c_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

where  $c_i = \cos \theta_i$  and  $s_i = \sin \theta_i$ .

It is readily verified that

$$\det \mathbf{V}^{KM} = -e^{i\delta_{KM}} \quad (8.2)$$

As discussed in section IV, the parametrization  $\mathbf{V}^{th}$  derived from the breaking of the flavour symmetry and the Kobayashi-Maskawa parametrization  $\mathbf{V}^{KM}$ , give an equally good representation of the values of the moduli  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$  of the mixing matrix even if  $\mathbf{V}^{th}$  has only two free, linearly independent parameters. Hence, the two parametrizations are equivalent up to a rephasing of the quark fields. Therefore, we may define a phase transformed  $\hat{\mathbf{V}}^{th}$ , such that all entries in  $\hat{\mathbf{V}}_{ij}^{th}$  are numerically equal to the corresponding entries in  $\mathbf{V}_{ij}^{KM}$  both in modulus and phase,

$$\hat{\mathbf{V}}^{th} = \mathbf{X}_{KM}^{u\dagger} \mathbf{V}^{th} \mathbf{X}_{KM}^d = \mathbf{V}^{KM}. \quad (8.3)$$

The diagonal matrices

$$\mathbf{X}_{KM}^u = \text{diag}[e^{i\phi_1^u}, e^{i\phi_2^u}, e^{i\phi_3^u}] \quad (8.4)$$

and

$$\mathbf{X}_{KM}^d = \text{diag}[e^{i\phi_1^d}, e^{i\phi_2^d}, e^{i\phi_3^d}] \quad (8.5)$$

are determined from the equality of  $\hat{\mathbf{V}}^{th}$  and  $\mathbf{V}_{ij}^{KM}$ ,

$$\phi_i^u - \phi_j^d = w_{ij}^{th} - w_{ij}^{KM} \quad (8.6)$$

where

$$w_{ij}^{KM} = \arg(\mathbf{V}_{ij}^{KM}) \quad (8.7)$$

In the left hand side of Eqs. (8.6) there are nine differences of phases formed from only six unobservables quark field phases. Differences of phases of the same quark field type, say  $(\phi_j^i - \phi_i^j)$  may be computed from Eqs. (8.6) in at least three different ways. Elimination of the unobservables differences of quark field phases between these expressions gives a set of consistency conditions relating the known  $w_{ij}^{th}$  and  $w_{ij}^{KM}$ .

$$w_{12}^{KM} = \pi, \quad (8.8)$$

$$w_{13}^{KM} = \pi. \quad (8.9)$$

$$w_{22}^{KM} = w_{11}^{th} - w_{12}^{th} - w_{21}^{th} + w_{22}^{th} + \pi. \quad (8.10)$$

$$w_{23}^{KM} = w_{11}^{th} - w_{13}^{th} - w_{21}^{th} + w_{23}^{th} + \pi. \quad (8.11)$$

$$w_{32}^{KM} = w_{11}^{th} - w_{12}^{th} - w_{31}^{th} - w_{32}^{th} + \pi. \quad (8.12)$$

$$w_{33}^{KM} = w_{11}^{th} - w_{13}^{th} - w_{31}^{th} + w_{33}^{th} + \pi. \quad (8.13)$$

when the expressions (8.8-8.13) are substituted in Eqs. (8.6) we obtain the differences of the quark field phases as functions of the arguments  $w_{ij}^{th}$  of  $\mathbf{V}_{ij}^{th}$ . The quark field phases themselves are determined only up to a common additive constant which is fixed by giving the value of one of them. If we set  $\chi_i^u = 0$ , we get

$$\mathbf{X}_{KM}^u = \text{diag}[1, e^{-i(w_{11}^{th} - w_{21}^{th})}, e^{-i(w_{11}^{th} - w_{31}^{th})}] \quad (8.14)$$

and

$$\mathbf{X}_{KM}^d = \text{diag}[e^{-i(w_{11}^{th})}, e^{-i(w_{12}^{th} - \pi)}, e^{-i(w_{13}^{th} - \pi)}] \quad (8.15)$$

With the help of (8.14) and (8.15) it is readily verified that (8.3) is satisfied as an identity.

#### IX. THE CP VIOLATING PHASE $\delta_{KM}$ OF THE KOBAYASHI-MASKAWA PARAMETRIZATION.

The CP violating phase  $\delta_{KM}$  is implicitly determined by the equations (8.8 - 8.13). An explicit expression for  $\delta_{KM}$  in terms of the arguments  $w_{ij}^{th}$  of  $\mathbf{V}_{ij}^{th}$  may be obtained from the identity

$$\det[\mathbf{V}^{KM}] = \det[\hat{\mathbf{V}}^{th}], \quad (9.1)$$

and

$$\det[\hat{\mathbf{V}}^{th}] = e^{-i \sum_{i=1}^3 (\phi_i^u - \phi_i^d)} e^{i2\Phi^*} \quad (9.2)$$

Substitution of (8.2) and (9.2) in (9.1) gives

$$\delta_{KM} = \sum_{i=1}^3 (\phi_i^d - \phi_i^u) + 2\Phi^* - \pi \quad (9.3)$$

Now, from Eqs. (8.6) and (8.8 - 8.13),

$$\delta_{KM} = w_{ud}^{th} - w_{us}^{th} - w_{ub}^{th} - w_{cd}^{th} - w_{td}^{th}. \quad (9.4)$$

This expression gives the CP-violating phase  $\delta_{KM}$  of the Kobayashi-Maskawa parametrization,  $\mathbf{V}^{KM}$ , in terms of the known arguments of the symmetry derived parametrization  $\mathbf{V}^{th}$ .

Taking the numerical values of the arguments  $w_{ij}^{th}$  occurring in (9.4) from Eq (3.24), we obtain

$$\delta_{KM} = 96.4^\circ \quad (9.5)$$

or

$$\delta_{KM} = \pi - 83.6^\circ. \quad (9.6)$$

The value of the inner angle  $\alpha$  of the unitarity triangle found in our  $\chi^2$  fit of  $\mathbf{V}^{th}$  to the experimentally determined values of the moduli  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$  is

$$\alpha = 83.6^\circ. \quad (9.7)$$

Therefore, within the accuracy of our best fit to the experimental data

$$\delta_{KM} \approx \pi - \alpha \quad (9.8)$$

This is only an approximation, to derive an exact relation we compute  $\alpha$  from

$$\alpha = \arg \left( -\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{tb}^* V_{td}} \right), \quad (9.9)$$

substitution of  $\mathbf{V}_{ij}^{th}$  for  $\mathbf{V}_{ij}$  in Eq. (9.9) gives

$$\alpha = \pi - w_{ub}^{th} + w_{ud}^{th} + w_{tb}^{th} - w_{td}^{th}. \quad (9.10)$$

Comparing (9.10) with (9.4) gives

$$\delta_{KM} = -\alpha - (w_{us}^{th} + w_{cd}^{th} - w_{tb}^{th} + \pi). \quad (9.11)$$

Taking the numerical values of the  $w_{ij}^{th}$  from (3.24) we get

$$w_{us}^{th} + w_{cd}^{th} + w_{tb}^{th} + \pi = 3\pi + 0.04^\circ. \quad (9.12)$$

Hence,

$$\delta_{KM} = \pi - \alpha - 0.04^\circ \quad \text{mod}(2\pi) \quad (9.13)$$

which shows that (9.8) is an excellent approximation to the numerical value of  $\delta_{KM}$ . In passing, we notice that

$$\alpha = w_{tb}^{KM} \quad (9.14)$$

is an exact result.

**X. THE MIXING ANGLES IN THE PARAMETRIZATION OF  
KOBAYASHI-MASKAWA.**

Once it is established that when the best set of parameters of each parametrization,  $\mathbf{V}^{KM}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta_{KM})$  and  $\mathbf{V}^{ih}(\tilde{m}_i, Z^{1/2}, \Phi)$  is used, the moduli of corresponding entries in the two parametrizations are numerically equal, we may identify corresponding entries and solve for the mixing angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  and  $\theta_3$  in terms of the quark mass ratios and the parameters  $\Phi$  and  $Z$ .

From the identification

$$\cos \theta_1 = |\mathbf{V}_{ud}^{ih}|, \quad (10.1)$$

we obtain

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 = & \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_d - \delta_d^*)}{(1 - \delta_u^*)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \tilde{m}_d)(1 - \delta_d^*)(1 + \tilde{m}_u/\tilde{m}_c)(1 + \tilde{m}_d/\tilde{m}_s)} \right)^{1/2} \\ & \times \left[ 1 + \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_d}{\tilde{m}_c \tilde{m}_s} \left( ((1 - \delta_u^*)(1 - \delta_d^*))^{1/2} + \left( \delta_u^* \delta_d^* \frac{(1 + \tilde{m}_c - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d^*)}{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u^*)(1 + \tilde{m}_d - \delta_d^*)} \right)^{1/2} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (10.2)$$

The angle  $\theta_2$  is obtained from the identification

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 = |\mathbf{V}_{td}^{ih}| \quad (10.3)$$

which gives

$$\sin \theta_2 = \frac{|\mathbf{V}_{td}^{ih}|}{\sin \theta_1} \quad (10.4)$$

where

$$\sin \theta_1 = \sqrt{1 - |\mathbf{V}_{ud}^{ih}|^2}. \quad (10.5)$$

$|\mathbf{V}_{td}^{ih}|$  is given in Eqs (10.1) and (10.2), and

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{td}^{ih} = & \left( \frac{\tilde{m}_u \tilde{m}_c \delta_u \tilde{m}_s (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_a)} \right)^{1/2} \\ & + \left\{ - \left( \frac{(1 - \tilde{m}_u - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c - \delta_u) \tilde{m}_a (1 + \tilde{m}_s - \delta_s) \delta_d}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \delta_d)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right. \\ & \left. + \left( \frac{\delta_u \tilde{m}_d (1 - \tilde{m}_d - \delta_d)}{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u)(1 - \tilde{m}_d)(\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right)^{1/2} \right\} e^{i\Phi} \end{aligned} \quad (10.6)$$

Computing in the leading order, we obtain

$$\sin \theta_2 \approx \sqrt{\frac{1 + m_u/m_c}{1 + \frac{m_u \tilde{m}_s}{m_c \tilde{m}_d}}} Z^{1/2} \left\{ \frac{\tilde{m}_s - \tilde{m}_d}{\sqrt{(1 - \tilde{m}_d)(1 + \tilde{m}_s) + 2Z(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)(1 + \frac{\tilde{m}_s - \tilde{m}_d}{2})}} \right\}$$

$$- \frac{\tilde{m}_c - \tilde{m}_u}{\sqrt{(1 - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_c) + 2Z(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)(1 + \frac{\tilde{m}_c - \tilde{m}_u}{2})}} \} \quad (10.7)$$

similarly the mixing angle  $\theta_3$  may be obtained from the identification

$$\sin \theta_1 \sin \theta_3 = |\mathbf{V}_{ub}^{th}| \quad (10.8)$$

Then,

$$\sin \theta_3 = \frac{|\mathbf{V}_{ub}^{th}|}{\sqrt{1 - |\mathbf{V}_{ud}^{th}|^2}} \quad (10.9)$$

where  $\mathbf{V}_{ub}^{th}$  is given in Eq. (3.14) and  $\sin \theta_1$  is given in Eq (10.5). Computing in the leading order of magnitude, we find,

$$\sin \theta_3 \approx \sqrt{\frac{1 + m_d/m_s}{1 + \frac{m_d m_c}{m_s m_u}}} Z^{1/2} \left\{ \frac{\tilde{m}_s - \tilde{m}_d}{\sqrt{(1 - \tilde{m}_d)(1 + \tilde{m}_s) + 2Z(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)(1 + \frac{\tilde{m}_s - \tilde{m}_d}{2})}} - \frac{\tilde{m}_c - \tilde{m}_u}{\sqrt{(1 - \tilde{m}_u)(1 + \tilde{m}_c) + 2Z(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)(1 + \frac{\tilde{m}_c - \tilde{m}_u}{2})}} \right\} \quad (10.10)$$

The exact values computed for  $\sin \theta_1$ ,  $\sin \theta_2$  and  $\sin \theta_3$  corresponding to the best fit of  $\mathbf{V}_{ij}^{th}$ ,  $J^{th}$  and  $\alpha^{th}$ ,  $\beta^{th}$  and  $\gamma^{th}$  to the experimentally determined quantities are obtained from Eqs. (10.1, 10.4) and (10.9) when the numerical values of  $\mathbf{V}_{ud}^{th}$ ,  $\mathbf{V}_{td}^{th}$  and  $\mathbf{V}_{ub}^{th}$  computed from Eqs. (7.20), (10.2) and (10.6) are substituted. We obtain

$$\sin \theta_1 = 0.2225 \quad (10.11)$$

$$\sin \theta_2 = 0.0384 \quad (10.12)$$

$$\sin \theta_3 = 0.0162 \quad (10.13)$$

and, from Eq. (9.5),

$$\sin \delta_{KM} = 0.9938. \quad (10.14)$$

If the mixing angles  $\theta_1, \theta_2$  and  $\theta_3$  are restricted to lie in the first quadrant, the corresponding numerical values of the angles are

$$\theta_1 = 12.86^\circ \quad \theta_2 = 2.2^\circ \quad \text{and} \quad \theta_3 = 0.93^\circ \quad (10.15)$$

which together with the numerical value of the CP-violating phase  $\delta_{KM}$  found in the previous section,  $\delta_{KM} = 96.4^\circ$ , gives the best set of values of mixing parameters in the Kobayashi-Maskawa parametrization of the mixing matrix corresponding to the best set of parameters  $\Phi^* = 90^\circ$  and  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$  of the flavour symmetry breaking derived parametrization  $\mathbf{V}^{th}$  of the mixing matrix.

As expected, from the way they were obtained, the numerical values of the moduli  $|\mathbf{V}_{ij}^{KM}|$

computed with the help of these numerical values of the mixing angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , and  $\delta_{KM}$  reproduce the central values of the experimentally determined  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$ , given in Caso *et al.* [6]

In the Kobayashi-Maskawa parametrization, the Jarlskog invariant is

$$J = s_1^2 s_2 s_3 c_1 c_2 c_3 s_5 \quad (10.16)$$

The corresponding numerical value is

$$J = 3.0 \times 10^{-5} \quad (10.17)$$

in excellent agreement with  $J^{exp}$ .

## XI. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In the Standard Electroweak model of particle interactions, both, the masses of the quarks as well as the mixing parameters and the CP-violating phase appear as free independent parameters. In consequence, phenomenological parametrizations of the quark mixing matrix were introduced without taking the possible functional relations between the quark masses and the flavour mixing parameters into account. These functional relations are explicitly exhibited in the theoretical quark mixing matrix  $\mathbf{V}^{th}$  derived from the breaking of the flavour permutational symmetry in previous works [1], [2] and reviewed in sections II and III of this paper.

In this work, we explicitly exhibit the phase equivalence of the theoretical mixing matrix,  $\mathbf{V}^{th}$ , and two phenomenological parametrizations: the original Kobayashi-Maskawa [3],  $\mathbf{V}^{KM}$  and the standard parametrization  $\mathbf{V}^{PDG}$  advocated by the Particle Data Group [5], [6], which are written in terms of three mixing angles and one CP-violating phase. The equality of the moduli of corresponding entries in  $\mathbf{V}^{th}$  and  $\mathbf{V}^{KM}$  or  $\mathbf{V}^{PDG}$  allowed us to derive, exact explicit expressions for the mixing angles and the CP-violating phase of the two phenomenological parametrizations as functions of four quark mass ratios  $m_u/m_t$ ,  $m_c/m_t$ ,  $m_d/m_s$ ,  $m_s/m_b$ , and the flavour symmetry breaking parameters:  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ .

The numerical values of the mixing parameters of the PDG advocated standard parametrization  $\sin \theta_{12}^*$ ,  $\sin \theta_{23}^*$ ,  $\sin \theta_{13}^*$  computed from the quark mass ratios and the best values of the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$ , coincide almost exactly with the central values of the same mixing parameters determined from a fit to the experimental data [38], as could be expected from the phase equivalence of  $\mathbf{V}^{th}$  and  $\mathbf{V}^{PDG}$ , and the good agreement of  $|\mathbf{V}_{ij}^{th}|$  with the corresponding experimentally determined values  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$ . Similarly from the equality of the moduli of corresponding entries in  $\mathbf{V}^{th}$  and  $\mathbf{V}^{KM}$ , we derived exact, explicit expressions for the Kobayashi-Maskawa mixing parameters,  $\sin \theta_1$ ,  $\sin \theta_2$  and  $\sin \theta_3$  as functions of the four quark mass ratios and the flavour symmetry breaking parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ . As in the previous case, the numerical values of the mixing parameters,  $\sin \theta_1^*$ ,  $\sin \theta_2^*$  and  $\sin \theta_3^*$  and the CP-violating phase computed from our expressions and the quark mass ratios and the best values,  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$ , of the symmetry breaking parameters, are such that the numerical values of  $|\mathbf{V}_{ij}^{KM}|$  reproduce almost exactly the central values

of the experimentally determined values of the moduli,  $|\mathbf{V}_{ij}^{exp}|$ , and the Jarlskog invariant,  $J^{exp}$ , as given in Caso *et. al.* [6].

The numerical values of the CP-violating phase  $\delta_{13} = \arg(\mathbf{V}_{ub}^{*PDG})$  computed from quark mass ratios and the best values of the parameters  $Z^{*1/2}$  and  $\Phi^*$  is  $\delta_{13} = 73.2^\circ$  in good agreement with the bounds extracted from the precise measurements of the  $B_d^0$  oscillations frequency [35] and the measurements of the rates of the exclusive hadronic decays  $B^\pm \rightarrow \pi K$  [40]. The numerical values of the CP-violating phase  $\delta_{KM}$  of the Kobayashi-Maskawa parametrization computed from quark mass ratios and the best values of  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$  is  $\delta_{KM}^* = 96.4^\circ$ . It may be worth to remark that  $\delta_{KM}$  is not a small number as it is sometimes assumed [41]- [42].

In conclusion, the three mixing angles and the CP-violating phase which appear in the phenomenological parametrization of the quark mixing matrix as free, linearly independent parameters are expressed in this work as functions of four quark mass ratios and two flavours symmetry breaking parameters  $Z^{1/2}$  and  $\Phi$ . The numerical values of the mixing angles and CP-violating phase computed from quark mass ratios and the best values of the symmetry breaking parameters  $Z^{*1/2} = \sqrt{81/32}$  and  $\Phi^* = 90^\circ$  coincide almost exactly with the central values of the same mixing parameters determined from a fit to the experimental data. The predictive power of the theoretical quark mixing matrix  $\mathbf{V}^{th}$  implied by this fact has its origin in the flavour permutational symmetry of the Standard Model and the assumed symmetry breaking pattern from which the texture in the quark mass matrices and the quark mixing matrix  $\mathbf{V}^{th}$  were derived.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We are indebted to Prof. M. D. Scadron for some useful discussions and critical remarks. This work was partially supported by DGAPA-UNAM under contract No. PAPIIT-IN125298 and by CONACYT (México) under contract 32238E



## REFERENCES

- [1] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, *Phys. Rev.* **D59**, 093009, (1999).
- [2] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, *Phys. Rev.* **D61**, 0730XX, (2000)
- [3] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652, (1973)
- [4] H. Fritzsch and Z. Z. Xing, *Phys. Rev.* **D57**, 594 (1998).
- [5] L.L. Chau and W.-Y. Keung, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1802, (1984).
- [6] Particle Data Group, C. Caso *et al. Eur. Phys. J. C* **3**, 1, (1998).
- [7] H. Fritzsch, *Phys. Lett* **70B**, 436, (1977).
- [8] S. Pakvasa and H. Sugawara, *Phys. Lett.* **73B**, 61, (1978).
- [9] H. Fritzsch, *Phys. Lett.* **73B**, 317, (1978)
- [10] H. Harari, H. Haut and J. Weyers, *Phys. Lett.* **78B**, 459, (1978).
- [11] Y. Chikashige, G. Gelmini, R. P. Peccei and M. Roncadelli, *Phys. Lett.* **B94**, 494, (1980).
- [12] Y. Yamanaka, H. Sugawara, and S. Pakvasa, *Phys. Rev.* **D25**, 1895, (1982).
- [13] P. Kaus and S. Meshkov, *Phys. Rev.* **D42**, 1863, (1990).
- [14] G. C. Branco, J. I. Silva-Marcos and M. N. Rebelo, *Phys. Lett.* **B237**, 446, (1990).
- [15] H. Fritzsch and J. Plankl, *Phys. Lett* **B237**, 451, (1990).
- [16] H. Fritzsch and D. Holtmanspötter, *Phys. Lett* **B338**, 290, (1994).
- [17] G. C. Branco, and J. I. Silva-Marcos, *Phys. Lett.* **B359**, 166, (1995).
- [18] H. Fritzsch and Z.Z. Xing, *Phys. Lett.* **B372**, 265, (1996)
- [19] H. Lehmann, C. Newton and T. Wu, *Phys. Lett.* **B384**, 249, (1996).
- [20] Z.Z. Xing, *J. Phys* **G23**, 1563, (1997).
- [21] K. Kang and S. K. Kang, *Phys. Rev* **D56**, 1511, (1997).
- [22] H. Fritzsch and Z. Z. Xing, *Phys. Lett.* **B440**, 313, (1998).
- [23] J. I. Silva-Marcos, *Phys. Lett.* **B443**, 276, (1998).
- [24] T. Shinohara, H. Tanaka and I. S. Sogami, *Prog. Theor. Phys.* **100**, 615, (1998).
- [25] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **D59**, 015012, (1999).
- [26] C. Jarlskog, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039 (1985). see also C. Jarlskog, in "CP Violation". edited by C. Jarlskog, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol 3. (World Scientific, Singapore, 1989)
- [27] R. D. Peccei and K. Wang, *Phys. Rev.* **D53**, 2712, (1996).
- [28] H. Fusaoka and Y. Koide, *Phys. Rev* **D57**, 3986, (1998).
- [29] H. Fritzsch, "Mass Hierarchies Hidden Symmetry and Maximal CP-violation". hep-ph/9807551.
- [30] THE BABAR PHYSICS BOOK: PHYSICS AT AN ASYMMETRIC B FACTORY By BABAR Collaboration (P.F. Harrison, ed. et al.), SLAC-R-0504, Oct 1998. 1056pp. See also the BOOKS subfile under the following call number: QCD201:B3:1998. Papers from Workshop on Physics at an Asymmetric B Factory (BaBar Collaboration Meeting). Rome, Italy, 11-14 Nov 1996, Princeton, NJ, 17-20 Mar 1997, Orsay, France, 16-19 Jun 1997 and Pasadena, CA, 22-24 Sep 1997.
- [31] H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B378**, 313, (1996).
- [32] A. Pineda and F.J. Yndurain "Comment on Calculation of Quarkonium Spectrum and  $m_s, m_c$  to order  $\alpha_s^4$ ". hep-ph/9812371.
- [33] F. Ynduráin, *Nucl. Phys.* **B517**, 324, (1998).
- [34] ALEPH Collaboration, Study of tau decays involving kaons, spectral functions and determination of the strange quark mass CERN-EP/99-026, hep-ex/9903015.

- [35] S. Mele, *Phys. Rev.* **D59**, 113011, (1999).
- [36] A. Ali and D. London, *Eur.Phys.J.* **C9**, 687-703, (1999), see also A. Ali and D. London "CP violation and quark mixing", hep-ph/0002167.
- [37] Zoltan Ligeti, Invited talk at Kaon'99, June 21-26, 1999, Chicago, Report-no: FERMILAB-Conf-99/213-T, hep-ph/9908432
- [38] Y. Nir, "Flavor Physics and CP Violation"  
Lectures given at the 1998 European School of High Energy Physics University of St. Andrews. Scotland, August 23-september, 1998  
hep-ph/9810520  
WIS-98/29/Oct-DPP.
- [39] A. J. Buras, "Weak Hamiltonian, CP-violation and Rare Decays" TUM-HEP-316/98; hep-ph/9806471.  
To appear in "Probing the Standard Model of Particle Interactions"  
F. David and R. Gupta, eds. 1998 Elsevier.
- [40] M. Neubert, "Exploring the weak phase  $\gamma$  in  $B^\pm \rightarrow \pi K$  Decays", hep-ph/9904321.
- [41] S. R. Choudhury and M. D. Scadron, *Phys. Rev.* **D53**, 2421, (1996), see also M. D. Scadron, "Kaon CP violation and radiative corrections", hep-ph/9910549v3, 16 nov. 1999.
- [42] Jing-Ling Chen, Mo-Lin Ge, Xue-Qian Li and Yong Liu *Eur. Phys. J.* **C9**, 437, (1999), hep-ph/9910234



## A parametrization of the CKM mixing matrix from a scheme of $S(3)_L \otimes S(3)_R$ symmetry breaking

A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México

Apartado postal 20-364, 01000 Mexico D.F., Mexico

Recibido el 9 de febrero de 1998; aceptado el 20 de abril de 1998

Recent interest in flavour or horizontal symmetry building (mass textures) has been spurred mainly by the large top mass and, hence, the strong hierarchy in quark masses. Recently, various symmetry breaking schemes have been proposed based on the discrete, non-Abelian group  $S(3)_L \otimes S(3)_R$ , which is broken according to  $S(3)_L \otimes S(3)_R \supset S_{\text{diag}}(3) \supset S_{\text{diag}}(2)$ . The group  $S(3)$  treats three objects symmetrically, while the hierarchical nature of the Yukawa matrices is a consequence of the representation structure,  $1 \oplus 2$ , of  $S(3)$ , which treats the generations differently. Different ansätze for the breaking of the sub-nuclear democracy give different Hermitian mass matrices,  $M$ , of the same modified Fritzsch type which differ in the numerical value of the ratio  $M_{23}/M_{22}$ . A fit to the experimentally determined absolute values of the elements of the CKM matrix gives bounds on the possible values of the CP violating phase and gives a clear indication on the preferred symmetry breaking scheme. A parametrization of the CKM mixing matrix in terms of four quark mass ratios and one CP violating phase in very good agreement with the absolute value of the experimentally determined values of the CKM matrix elements is obtained.

*Keywords* Change conjugation, parity, time reversal and other discrete symmetries; quark and lepton masses mixings

El interés en la simetría horizontal o del sabor (textura de las masas) ha sido reavivado recientemente por el valor grande de la masa del quark top y a partir de aquí, la muy acentuada jerarquía de masas. Recientemente, varios esquemas del rompimiento de la simetría han sido propuestos a partir del grupo no abeliano y discreto  $S(3)_L \otimes S(3)_R$ , el cual se rompe de acuerdo con  $S(3)_L \otimes S(3)_R \supset S_{\text{diag}}(3) \supset S_{\text{diag}}(2)$ . El grupo  $S(3)$  trata a tres objetos simétricamente en tanto que la naturaleza jerárquica de las matrices de Yukawa es una consecuencia de la naturaleza de las representaciones,  $1 \oplus 2$  de  $S(3)$ , que trata a las generaciones de manera diferente. Distintos ansätze para el rompimiento de la democracia subnuclear dan diferentes matrices de masas Hermitianas del mismo tipo de Fritzsch modificado, que difieren entre sí por el valor numérico de la razón  $M_{23}/M_{22}$ . Un ajuste de los valores absolutos de los elementos de la matriz CKM acota los valores posibles de la fase que viola CP y aclara la cuestión de cual es el esquema preferido de rompimiento de la simetría. Se obtiene así una parametrización de la matriz CKM de mezclas en términos de cuatro razones de las masas de los quarks y una fase, así como un acuerdo excelente con los valores absolutos de los elementos de la matriz CKM experimentalmente determinados.

*Descriptores.* Conjugación de carga, paridad, inversión del tiempo y otras simetrías discretas; masas de los quarks y leptones

PACS 12.15.Ft; 11.30.Er; 11.30.Hv; 12.15.Hh

### 1. Introduction

In this paper we try to express the entries in the  $V_{\text{CKM}}$  mixing matrix in terms of the ratios of the quark masses and one CP violating phase. Our approach is guided by the experimental information on  $V_{\text{CKM}}$  and a desire to have a simple pattern of flavour symmetry breaking.

### 2. Flavour permutational symmetry

In this section, we review some previous work on the breaking of the permutational flavour symmetry.

In the standard model, analogous fermions in different generations, say  $u$ ,  $c$  and  $t$  or  $d$ ,  $s$  and  $b$ , have completely identical couplings to all gauge bosons of the strong, weak and electromagnetic interactions. Prior to the introduction of the Higgs boson and mass terms, the Lagrangian is chiral and invariant with respect to any permutation of the left and right quark fields. The introduction of a Higgs boson

and the Yukawa couplings give mass to the quarks and leptons when the gauge symmetry is spontaneously broken. The quark mass term in the Lagrangian, obtained by taking the vacuum expectation value of the Higgs field in the quark Higgs coupling, gives rise to quark mass matrices  $M(d)$  and  $M(u)$ ,

$$\mathcal{L}_Y = \bar{d}_L M(d) d_R + \bar{u}_L M(u) u_R + \text{h.c.} \quad (1)$$

In this expression,  $d_{L,R}(X)$  and  $u_{L,R}(X)$  denote the left and right quark  $d$ - and  $u$ -fields in the weak or coherent basis. A number of authors [1-8] have pointed out that realistic quark mass matrices result from the flavour permutational symmetry  $S(3)_L \otimes S(3)_R$  and its spontaneous or explicit breaking. The group  $S(3)$  treats three objects symmetrically, while the hierarchical nature of the mass matrices is a consequence of the representation structure  $1 \oplus 2$  of  $S(3)$ , which treats the generations differently. Under exact  $S(3)_L \otimes S(3)_R$  symmetry the mass spectrum for either up or down quark sectors consists of one massive particle in a singlet irreducible representation and a pair of massless parti-

cles in a doublet irreducible representation. To make explicit this assignment of particles to irreducible representations of  $S(3)_L \otimes S(3)_R$ , it will be convenient to make a change of basis from the weak basis to a symmetry adapted or heavy basis through the unitary transformation

$$M_H^q = U^\dagger M_W^q U. \tag{2}$$

where

$$U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

In the weak basis, the mass matrix with the exact  $S(3)_L \otimes S(3)_R$  symmetry reads

$$M_{2W}^q = \frac{m_{3q}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_W, \tag{4}$$

where  $m_{3q}$  denotes the mass of the third family quark,  $t$  or  $b$ . In the symmetry adapted, or heavy basis,  $M_{2H}^q$  takes the form

$$M_{2H}^q = m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_H, \tag{5}$$

$M_{3H}^q$  is a singlet tensorial irreducible representation of  $S(3)_L \otimes S(3)_R$ .

To generate masses for the second family, one has to break the permutational symmetry  $S(3)_L \otimes S(3)_R$  down to  $S(2)_L \otimes S(2)_R$ . This may be done adding a term  $M_{2W}^q$  to  $M_{2W}^q$ , such that

$$M_{2W}^q = m_{3q} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \gamma \end{pmatrix}_W. \tag{6}$$

Still in the weak basis, the corresponding symmetry breaking term in the Lagrangian is

$$\begin{aligned} \bar{q}_L (M_{2W}^q) q_R = & \left\{ 2\alpha \left( \frac{\bar{q}_{1L} + \bar{q}_{2L}}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{q_{1R} + q_{2R}}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ & + \beta \sqrt{2} \left[ \left( \frac{\bar{q}_{1L} + \bar{q}_{2L}}{\sqrt{2}} \right) q_{3R} + \bar{q}_{3L} \left( \frac{q_{1R} + q_{2R}}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ & \left. + \gamma \bar{q}_{3L} q_{3R} + h.c. \right\} \tag{7} \end{aligned}$$

Notice that the symmetry breaking term depends only on the fields  $[q_1(X) + q_2(X)]/\sqrt{2}$  and  $q_3(X)$ . Thus, the symmetry breaking pattern is defined by requiring a well defined behavior of  $\bar{q}_L (M_{2W}^q) q_R$  under the exchange of the fields  $[q_1(X) + q_2(X)]/\sqrt{2}$  and  $q_3(X)$ . There are only two possibilities, either  $\bar{q}_L (M_{2W}^q) q_R$  is symmetric or antisymmetric under the exchange of  $[q_1(X) + q_2(X)]/\sqrt{2}$  and  $q_3(X)$ .

In the antisymmetric breaking pattern [9],  $M_{2W}^q$  takes the form

$$M_{2A,W}^q = m_{3q} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}_W, \tag{8}$$

in the heavy basis  $M_{2A,H}^q$  takes the form

$$M_{2A,H}^q = \frac{2m_{3q}}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2\sqrt{2}\alpha \\ 0 & 2\sqrt{2}\alpha & \alpha \end{pmatrix}_H. \tag{9}$$

$M_{2A}^q$  has only one free parameter,  $\alpha$ , which is a measure of the amount of mixing of the singlet and doublet irreducible representations of  $S(3)_L \otimes S(3)_R$ .

In the symmetric breaking pattern [1],  $M_{2W}^q$  is given by

$$M_{2S,W}^q = m_{3q} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & 2\alpha \end{pmatrix}_W, \tag{10}$$

and in the heavy basis  $M_{2S,H}^q$  becomes

$$M_{2S,H}^q = \frac{2m_{3q}}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(3\alpha - 2\beta) & -\sqrt{2}\beta \\ 0 & -\sqrt{2}\beta & 2(3\alpha - 2\beta) \end{pmatrix}_H. \tag{11}$$

In this case  $M_{2S}^q$  has two free parameters,  $\alpha$ , which is a shift in the masses of the second and third families, and  $\beta$ , which produces a mixing of the singlet and doublet irreducible representations.

In the heavy basis the symmetry breaking pattern is usually characterized in terms of

$$\beta = -\frac{(3\sqrt{2})}{4m_{3q}} (M_{2S,H}^q)_{23}$$

and the ratio

$$(Z_q)^{1/2} = \frac{(M_{2S,H}^q)_{22}}{(M_{2S,H}^q)_{22}}. \tag{12}$$

In the antisymmetric breaking pattern there is no shift of the masses and  $Z_q$  takes the value 8. In the symmetric pattern,  $Z_q$  is a continuous parameter. Different values for  $Z_q$  have been proposed in the literature by various authors. If no shifting is allowed [1],  $\alpha = 0$ , and  $Z_q = 1/8$ . Fritzsch and Holtsmark [7] put  $\alpha = \beta$  which gives  $Z_q = 1/2$ ; Z. Z. Xing [10] takes  $Z_q = 2$  which is equivalent to setting  $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ . In the absence of a symmetry motivated argument to fix the value of  $Z_q$ , other choices are possible. In this paper, we will look for the best value of  $Z_q$  by comparison with the experimental data on the CKM mixing matrix and the Jarlskog invariant.

In order to give mass to the first family, we add another term  $M_1^q$  to the mass matrix. It will be assumed that  $M_1^q$

transforms as the mixed symmetry term of the doublet complex tensorial representation of the  $S(3)_{\text{diag}}$  diagonal subgroup of  $S(3)_L \otimes S(3)_R$ . Putting the first family in a complex representation allows us to have a CP violating phase. Then, in the weak basis,  $M_1^q$  is given by

$$M_{1W}^q = \frac{m_2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} A_1 & iA_2 & -A_1 - iA_2 \\ -iA_2 & -A_1 & A_1 + iA_2 \\ -A_1 + iA_2 & A_1 - iA_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

In the symmetry adapted or heavy basis,  $M_1^q$  takes the form

$$M_{1H}^q = m_3 \begin{pmatrix} 0 & A_q e^{-i\phi_q} & 0 \\ A_q e^{+i\phi_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Finally, adding the three mass terms, we get the mass matrix  $M^q$ .

### 3. Modified Fritzsch texture

In the heavy basis,  $M_H^q$  has a modified Fritzsch texture of the form

$$M_H^q = m_{3q} \begin{pmatrix} 0 & A_q e^{-i\phi_q} & 0 \\ A_q e^{+i\phi_q} & D_q & B_q \\ 0 & B_q & C_q \end{pmatrix}. \quad (15)$$

From the strong hierarchy in the quark masses,  $m_{3q} \gg m_{2q} \gg m_{1q}$ , we expect  $C_q$  to be very close to unity. Therefore, it will be convenient to introduce a small parameter  $\delta_q$  through the expression

$$C_q \equiv 1 - \delta_q \quad (16)$$

The other entries in the mass matrix, namely  $A_q$ ,  $B_q$ , and  $D_q$ , may readily be expressed in terms of the mass ratios

$$\tilde{m}_{1q} = \frac{m_{1q}}{m_{3q}} \quad \text{and} \quad \tilde{m}_{2q} = \frac{m_{2q}}{m_{3q}} \quad (17)$$

and the parameter  $\delta_q$ . Computing the invariants of  $M_H^q$ ,  $\text{tr}(M_H^q)$ ,  $\text{tr}(M_H^q)^2$  and  $\det(M_H^q)$  from (15) and comparing with the corresponding expressions in terms of the mass eigenvalues ( $m_{\lambda_1}$ ,  $-m_{\lambda_2}$ ,  $m_{\lambda_3}$ ), we get

$$A_q^2 = \frac{\tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q}}{1 - \delta_q}, \quad (18)$$

$$B_q^2 = \delta_q \left[ (1 - \tilde{m}_{1q} + \tilde{m}_{2q} - \delta_q) - \frac{\tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q}}{1 - \delta_q} \right], \quad (19)$$

and

$$D_q = \tilde{m}_{1q} - \tilde{m}_{2q} + \delta_q \quad (20)$$

It each possible symmetry breaking pattern is now characterized by the parameter  $Z_q$ ,

$$Z_q^{1/2} = \frac{B_q}{D_q}, \quad (21)$$

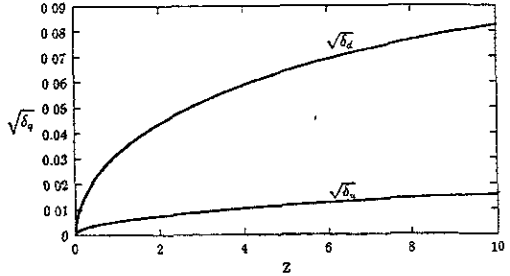


FIGURE 1. The square root of the parameters  $\delta_q$ ,  $\delta_q$  is shown as function of the ratio  $Z_q$ . The value  $Z \approx 5/2$  which satisfies the constraining condition (34) may be read from the figure.

we obtain the following cubic equation for  $\delta_q$

$$\delta_q \{ (1 + \tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q} - \delta_q)(1 - \delta_q) - \tilde{m}_{1q} \tilde{m}_{2q} \} - Z_q (1 - \delta_q)(-\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q} + \delta_q)^2 = 0. \quad (22)$$

The small parameter  $\delta_q$  in Eqs. (16) and (19) is the solution of (22) which vanishes when  $Z_q$  vanishes. Then, the vanishing of  $Z_q$  implies that  $B_q = 0$  and  $C_q = 1$ , or equivalently, there is no mixing of singlet and doublet irreducible representations of  $S(3)_L \otimes S(3)_R$ , and the heaviest quark in each sector is in a pure singlet representation.

In Fig 1,  $\sqrt{\delta_q}$  is shown as function of  $Z_q$ . It may be seen that, as  $Z_q$  increases,  $\sqrt{\delta_q(Z_q)}$  increases with decreasing curvature. For very large values of  $Z_q$ ,  $\sqrt{\delta_q(Z_q)}$  goes to the asymptotic limit  $\delta_q^{1/2}(\infty) = (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q}) Z_q^{1/2}$ . Hence,  $\delta_q(Z_q)$  is a small parameter,  $\delta_q(Z_q) \ll 1$ , for all values of  $Z_q$ . For large values of  $Z_q$ , say  $Z_q \geq 20$ ,  $\delta_q(Z_q)$  is not sensitive to small changes in  $Z_q$ .

From Eq. (22), we derive an approximate solution for  $\delta_q(Z_q)$  valid for small values of  $Z_q$  ( $Z_q \leq 10$ ). Computing in the leading order of magnitude

$$\delta_q(Z_q) \approx \frac{Z_q (\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})^2}{(1 - \tilde{m}_{1q})(1 + \tilde{m}_{2q}) + 2Z_q(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})[1 + \frac{1}{2}(\tilde{m}_{2q} - \tilde{m}_{1q})]} \quad (23)$$

### 4. The CKM mixing matrix

The Hermitian mass matrix  $M_q$  may be written in terms of a real symmetric matrix  $\bar{M}_q$  and a diagonal matrix of phases  $P_q$  as follows

$$M^{(q)} = P_q \bar{M}^{(q)} P_q^\dagger. \quad (24)$$

The real symmetric matrix  $\bar{M}_q$  may be brought to diagonal form by means of an orthogonal transformation

$$\bar{M}^{(q)} = O_q M_{\text{diag}}^{(q)} O_q^T, \quad (25)$$

where

$$M_{\nu}^{(q)} = m_{sq} \text{diag} [\tilde{m}_1, -\tilde{m}_2, 1] \quad (26)$$

with subscripts 1,2,3 referring to  $u, c, t$  in the  $u$ -type sector and  $d, s, b$  in the  $d$ -sector. After the diagonalization of the mass matrices  $M^{(q)}$  one obtains the CKM mixing matrix as

$$V_{\text{CKM}} = O_u^T P^{(u-d)} O_d, \quad (27)$$

where  $P^{(u-d)}$  is the diagonal matrix of the relative phases.

In the heavy basis, where  $M^{(q)}$  is given by (15)–(22),  $P^{(u-d)}$  is

$$P^{(u-d)} = \text{diag} [e^{-i\alpha}, 1, 1], \quad (28)$$

$\alpha = \phi_u - \phi_d$ , and the orthogonal matrix  $O_q$  is given by [11, 12],

$$O^u = \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} (\tilde{m}_2 f_1 / \Delta_1)^{\frac{1}{2}} & -(\tilde{m}_1 f_2 / \Delta_2)^{\frac{1}{2}} & (\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 f_3 / \Delta_3)^{\frac{1}{2}} \\ (C^u \tilde{m}_1 f_1 / \Delta_1)^{\frac{1}{2}} & (C^u \tilde{m}_2 f_2 / \Delta_2)^{\frac{1}{2}} & (C^u f_3 / \Delta_3)^{\frac{1}{2}} \\ -(\tilde{m}_1 f_2 f_3 / \Delta_2)^{\frac{1}{2}} & -(\tilde{m}_2 f_1 f_3 / \Delta_2)^{\frac{1}{2}} & (f_1 f_2 / \Delta_3)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

where

$$f_1 = 1 - \tilde{m}_{1q} - \delta_q, \quad f_2 = 1 + \tilde{m}_{2q} - \delta_q, \quad f_3 = \delta_q, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (1 - \delta_q) (1 - \tilde{m}_{1q}) (\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \\ \Delta_2 &= (1 - \delta_q) (1 - \tilde{m}_{2q}) (\tilde{m}_{2q} + \tilde{m}_{1q}), \\ \Delta_3 &= (1 - \delta_q) (1 - \tilde{m}_{2q}) (1 - \tilde{m}_{1q}). \end{aligned} \quad (31)$$

From Eqs (24)–(30), all entries in the  $V_{\text{CKM}}$  matrix may be written in terms of four mass ratios:  $(\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s)$  and three free real parameters:  $\delta_u, \delta_d$  and  $\alpha = \phi_u - \phi_d$ . The phase  $\alpha$  measures the mismatch in the  $\tilde{S}_{\text{diag}}(2)$  symmetry breaking in the  $u$ - and  $d$ -sectors. It is this phase, and consequently, that mismatch, which is responsible for the weak violation of CP.

### 5. The best value of $Z_q$

At this stage in our argument, a question comes naturally to mind. Does a comparison of the theoretical mixing matrix  $V_{\text{CKM}}^{\text{th}}$  with the experimentally determined  $V_{\text{CKM}}^{\text{exp}}$  give any clue about the actual pattern of  $S(3)_L \otimes S(3)_R$  symmetry breaking realized in nature? or phrased differently: What are the best values for  $Z_u$  and  $Z_d$ ? What is the best value for  $\alpha$ ? Do these values correspond to some well defined symmetry breaking pattern?

As a preliminary step in the direction of finding an answer to these questions, we made a  $\chi^2$  fit of the exact expressions for the absolute value of the entries in the mixing matrix that is  $|V_{\text{CKM}}^{\text{th}}|$  and the Jarlskog invariant  $J^{\text{th}}$  to the experimentally determined values of  $|V_{\text{CKM}}^{\text{exp}}|$  and  $J^{\text{exp}}$ . We left the mass ratios fixed at the values [13]

$$\tilde{m}_u = 0.00002, \quad \tilde{m}_c = 0.00517, \quad (32)$$

$$\tilde{m}_d = 0.0019, \quad \tilde{m}_s = 0.035, \quad (33)$$

and we looked for the best values of the three parameters  $\delta_u, \delta_d$  and  $\alpha$ . We found the following results

I- Excellent fits of similar quality,  $\chi^2 \leq 0.3$ , were obtained for a continuous family of values of the parameters  $(\delta_u, \delta_d)$ .

II- In each good quality fit, the best value of  $\alpha$  was fixed without ambiguity.

III- The best value of  $\alpha$  was nearly stable against large changes in the values of  $(\delta_u, \delta_d)$  which produced fits of the same good quality.

IV- In all good quality fits, the difference  $\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u}$  takes the same value

$$\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \simeq 0.040. \quad (34)$$

These results may be understood if we notice that not all entries in  $V_{\text{CKM}}^{\text{th}}$  are equally sensitive to variations of the different parameters. Some entries, like  $V_{cs}$  are very sensitive to changes in  $\alpha$  but are almost insensitive to changes in  $(\delta_u, \delta_d)$  while some others, like  $V_{cb}$  are almost insensitive to changes in  $\alpha$  but depend critically on the parameters  $\delta_u$  and  $\delta_d$ .

From Eqs (27)–(29) and (30) we obtain

$$\begin{aligned} V_{cs} &= - \left[ \frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_d}{(1 - \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_s) (1 - \tilde{m}_s) (\tilde{m}_s + \tilde{m}_d)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{(1 - \tilde{m}_c - \delta_c) (1 + \tilde{m}_c - \alpha_d)}{(1 - \delta_c) (1 - \delta_d)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\alpha} \\ &- \left[ \frac{\tilde{m}_c \tilde{m}_s}{(1 - \tilde{m}_c) (\tilde{m}_c + \tilde{m}_s) (\tilde{m}_c - \tilde{m}_s)} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(1 - \tilde{m}_c - \delta_c)^{\frac{1}{2}} (1 + \tilde{m}_s - \delta_d)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \tilde{m}_d)^{\frac{1}{2}} (1 - \delta_d)^{\frac{1}{2}}} - \left[ \frac{(1 - \tilde{m}_c - \delta_c) \delta_u}{1 - \delta_u} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - \tilde{m}_d - \delta_d) \delta_d}{1 - \delta_d} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

In the leading order of magnitude,

$$|V_{us}| \approx \left| \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} e^{i\alpha} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \right| \left( 1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} \right)^{1/2} \quad (36)$$

Hence,

$$\cos \alpha \approx \frac{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} |V_{us}|^2 \left( 1 - \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} \right)}{2 \sqrt{\left( \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} \right) \left( \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \right)}} \quad (37)$$

Substitution of  $|V_{us}^{exp}|^2$  for  $|V_{us}|^2$  and the numerical value of the mass ratios, obtained from (32) and (34), in (37) gives

$$72^\circ \leq \alpha \leq 82^\circ \quad (38)$$

with a mean value

$$\bar{\alpha} = 77^\circ, \quad (39)$$

in good agreement with the best values extracted from the preliminary  $\chi^2$  fit.

Similarly,  $V_{cb}^{th}$  is given by

$$V_{cb}^{th} = - \left[ \frac{\tilde{m}_u (1 + \tilde{m}_c - \delta_u)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_u + \tilde{m}_c)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{(\tilde{m}_d \tilde{m}_s \delta_d)}{(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\alpha} + \left[ \frac{\tilde{m}_c (1 + \tilde{m}_c - \delta_u)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_u + \tilde{m}_c)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[ \frac{\delta_d}{(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_u)} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ \frac{\tilde{m}_c \delta_u (1 - \tilde{m}_u - \delta_u)}{(1 - \delta_u)(1 + \tilde{m}_c)(\tilde{m}_u + \tilde{m}_c)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{(1 - \tilde{m}_d - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s - \delta_d)}{(1 - \delta_d)(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

Therefore, in the leading order of magnitude,  $|V_{cb}|$  is independent of  $\alpha$  and given by

$$|V_{cb}| \approx \sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \quad (41)$$

Hence, good agreement with  $|V_{cb}^{exp}| \approx 0.039$  [13] requires that

$$\sqrt{\delta_d} - \sqrt{\delta_u} \approx 0.039 \quad (42)$$

at least for one pair of values  $(\delta_u, \delta_d)$ . As explained above, in the preliminary  $\chi^2$  fit to the data, it was found that (42) is satisfied almost exactly, not just for one pair of values of  $\delta_u$  and  $\delta_d$ , but for a continuous range of values of these parameters in which  $\delta_u$  and  $\delta_d$  change by more than one order of magnitude.

Therefore, Eq. (34) may be used as a constraining condition on the possible values of  $(\delta_u, \delta_d)$ . In this way, we eliminate one free parameter in  $V_{CKM}^{th}$  without spoiling the good quality of the fit.

If instead of taking  $(\delta_u, \delta_d)$  as free parameters, we use the parameters  $(Z_u, Z_d)$  to characterize the pattern of symmetry breaking, we should write  $\delta_q$  as function of  $Z_q$  in (34) to restrict the possible values of  $(Z_u, Z_d)$ . A simple approximate expression, valid for  $0 \leq Z_q \leq 10$ , is obtained by writing  $\delta_q(Z_q)$  in the leading order of magnitude

$$\frac{Z_d^{\frac{1}{2}} (\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_s)(1 - \tilde{m}_d) + 2Z_d(\tilde{m}_s - \tilde{m}_d)}} - \frac{Z_u^{\frac{1}{2}} (\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_c)(1 - \tilde{m}_u) + 2Z_u(\tilde{m}_c - \tilde{m}_u)}} \approx 0.040 \quad (43)$$

In this way, to each value of  $Z_u$  corresponds one value of  $Z_d$ . Since  $Z_u$  is still a free parameter, to avoid ambiguities, we may further assume that the up and down mass matrices are generated following the same symmetry breaking pattern, that is,

$$Z_u = Z_d \equiv Z \quad (44)$$

Conditions (34) and (44) fix the value of  $Z$ .

The numerical computation of  $Z$  was made using the exact numerical solutions of Eq. (22). We found,

$$Z = 5/2 \quad (45)$$

The corresponding values of  $(\delta_u, \delta_d)$  are

$$\delta_u = 0.000064 \quad \delta_d = 0.002300 \quad (46)$$

A discussion of the meaning of  $Z_q \approx 5/2$  in terms of the symmetry breaking pattern  $S(3)_L \otimes S(3)_R \supset S(2)_L \otimes S(2)_R$  and explicit expressions for the corresponding mass matrices (textures) will be published elsewhere [15]

## 6. Computation of $V_{CKM}$

Once the value of  $Z$  is fixed at  $5/2$ , the theoretical expression for the entries in  $V_{CKM}^{th}$ , obtained from the exact expressions for  $O_u$  and  $O_d$ , are written in terms of the four mass ratios  $(\tilde{m}_u, \tilde{m}_c, \tilde{m}_d, \tilde{m}_s)$  and only one free parameter, namely the CP violating phase  $\alpha$



We kept the mass ratios fixed at the values given in (32) and (33) and made a new  $\chi^2$  fit of  $|V_{CKM}^{th}|$  to the experimental values  $|V_{CKM}^{exp}|$ . The best value of  $\alpha$  was found to be

$$\alpha = 76.77^\circ, \tag{47}$$

with  $\chi^2 = 0.23$ . The corresponding best value of  $|V_{CKM}^{th}|$  is

$$|V_{CKM}^{th}| = \begin{pmatrix} 0.97531 & 0.22081 & 0.00254 \\ 0.22063 & 0.97457 & 0.03913 \\ 0.00928 & 0.03810 & 0.999231 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

which is to be compared with

$$|V_{CKM}^{exp}| = \begin{pmatrix} 0.9745 - 0.9760 & 0.217 - 0.224 & 0.0018 - 0.0045 \\ 0.217 - 0.224 & 0.9737 - 0.9753 & 0.036 - 0.042 \\ 0.004 - 0.013 & 0.035 - 0.042 & 0.9991 - 0.9994 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

we see that the agreement between computed and experimental values of all entries in  $|V_{CKM}|$  is very good. For the Jarlskog [14] invariant we found the value

$$J = -2.128 \times 10^{-5}, \tag{50}$$

in good agreement with current data on CP violation in the  $K^0 - \bar{K}^0$  mixing system.

### 7. Concluding remarks

In this work we made a detailed comparison of the experimentally determined  $V_{CKM}^{exp}$  mixing matrix with a theoretic-

cal  $V_{CKM}^{th}$  derived from quark mass matrices obtained from a simple scheme for breaking the flavour permutational symmetry. The entries in  $V_{CKM}^{th}$  are, in principle, functions of the four mass ratios  $m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b,$  and  $m_s/m_b,$  one CP violating phase, and two small parameters  $\delta_u$  and  $\delta_d$ . To avoid a continuous ambiguity in the numerical fitting procedure, we impose a phenomenologically motivated constraining condition on the possible values of  $\delta_u$  and  $\delta_d$ . By further assuming that the symmetry breaking pattern is the same in both,  $u$ - and  $d$ -sectors, we fix the numerical value of the ratio  $Z = (M_{22}/M_{23})^2$  at  $5/2$ . In this way, we arrive at an expression for  $V_{CKM}^{th}$  written in terms of the four mass ratios  $m_u/m_t, m_c/m_t, m_d/m_b$  and  $m_s/m_b,$  and only one free parameter, namely, the CP violating phase  $\alpha$ . A  $\chi^2$  fit of the matrix of the absolute values  $|V_{CKM}^{th}|$  to the experimentally determined  $|V_{CKM}^{exp}|$  gives the best value of  $\alpha = 76.7^\circ$  and the value  $J^{th} = -2.128 \times 10^{-5}$  for the Jarlskog invariant, in good agreement with experiment. The agreement between  $|V_{CKM}^{th}|$  and  $|V_{CKM}^{exp}|$  is also very good with  $\chi^2 = 0.23$ .

### Acknowledgments

One of us, E R-J is indebted to Dr. J.R. Soto for help in the numerical calculations. This work was partially supported by DGAPA-UNAM under contract No. PAPIIT-IN10296.

---

1. H. Harari, H. Haut, and J. Weyers, *Phys. Lett. B* **78** (1978) 459  
 2. H. Fritzsch, *Phys. Lett. B* **73** (1978) 317.  
 3. H. Fritzsch, *Nucl. Phys. B* **155** (1979) 189  
 4. Y. Koide, *Phys. Rev. D* **28** (1983) 252.  
 5. H. Fritzsch, *Proc. European Topical Conf. on Flavour Mixing in Weak Interactions (Erice)*, edited by J. Lemonne, C. van der Velde, and F. Verbeure, (World Scientific, Singapore, 1984), p. 181  
 6. P. Kaus and S. Meshkov, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 1563.  
 7. H. Fritzsch and D. Hoitmannspotter, *Phys. Lett. B* **338** (1994) 290  
 8. H. Fritzsch and Z. Xing, *Phys. Lett. B* **353** (1995) 114  
 9. H. Lehmann, C. Newton and T. Wu, *Phys. Lett. B* **384** (1996) 249  
 10. Z.Z. Xing, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys.* **23** (1997) 1563.  
 11. P.S. Gill and M. Gupta, *J. Phys. A* **21** (1995) 1  
 12. P.S. Gill and M. Gupta, *J. Phys. A* **23** (1997) 335  
 13. R.M. Barnett *et al.*, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 1; PDG Particle Data Group, 1997, WWW Review of Particle Properties update Dec. 1997  
 14. C. Jarlskog, "CP Violation", *Advanced Series on Directions in High Energy Physics* Vol. 3, edited by C. Jarlskog, (World Scientific, 1989)  
 15. A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, preprint IFUNAM FT98-8 hep-ph/9807214

# Bibliografía

- [1] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder “ An Introduction to Quantum Field Theory”, Adison Wesley, (1995), ISBN 0-201-50397-2.
- [2] C. Jarlskog, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039 (1985), see also C. Jarlskog, “Introduction to CP Violation” in “CP Violation”, Advanced Series on Directions on High Energy Physics, Vol 3, Ed. C. Jarlskog, World Scientific 1989.
- [3] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li “Gauge theory of elementary particle physics”, Oxford University Press, (1984), ISBN 0-19-851961-3.
- [4] I. I. Bigi and A. I. Sanda, “CP Violation”, Cambridge University Press, Cambridge (1999), ISBN 0-521-44349-0.
- [5] Review of Particle Physics, D. E. Groom et al., *Eur. Phys. J.* **C15**, 1 (2000).
- [6] A. Ali, B. Kayser, Invited article; ‘The Particle Century’, Institute of Physics Publishing Inc., Bristol and Philadelphia, (1998); Editor: Gordon Fraser. hep-ph/9806230
- [7] H. Abele et al., *Phys. Lett.* **B407**, 212 (1997); J. Reich et al., ILL Workshop, October 1998; P. Liaud, *Nucl. Phys.* **A612**, 53 (1997).
- [8] R. Flores-Mendieta, A. García and G. Sanchez-Colón, *Phys. Rev.* **D54**, 6855 (1996)
- [9] H. Abramowicz et al., *Z. Phys.* **C15**, 19 (1982); S. Rabinowitz et al., *Phys. Rev. Lett.* **70**, 134 (1993).
- [10] C. Caso et al., Review of Particle Physics *Eur. Phys. J.* **C3**, 1 (1998); P. Abreu et al., *Phys. Lett.* **B439**, 209 (1998).

- [11] R. Poling, Plenary talk at the XIX International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies (Stanford, August 9-14, 1999). Z. Ligeti, invited talk at KAON'99 (Chicago, June 21-26, 1999), Fermilab preprint FERMILAB-Conf-99/213-T, and hep-ph/9908432.
- [12] Y. Nir, "Flavor Physics and CP Violation"  
Lectures given at the 1998 European School of High Energy Physics. University of St. Andrews. Scotland, August 23-september, 1998  
hep-ph/9810520  
WIS-98/29/Oct-DPP. Ver también Y. Nir, hep-ph/9911321v2
- [13] A. J. Buras, "Weak Hamiltonian, CP-violation and Rare Decays" TUM-HEP-316/98; hep-ph/9806471.  
To appear in "Probing the Standard Model of Particle Interactions"  
F. David and R. Gupta, eds. 1998 Elsevier.
- [14] THE BABAR PHYSICS BOOK: PHYSICS AT AN ASYMMETRIC B FACTORY. By BABAR Collaboration (P.F. Harrison, ed. et al.). SLAC-R-0504, Oct 1998. 1056pp. Veá también los siguientes archivos de libros con las siguientes tarjetas: QCD201:B3:1998. Los artículos del Workshop on Physics at an Asymmetric B Factory (BaBar Collaboration Meeting), Rome, Italy, 11-14 Nov 1996, Princeton, NJ. 17-20 Mar 1997, Orsay, France, 16-19 Jun 1997 and Pasadena, CA, 22-24 Sep 1997.
- [15] M. Paulini, plenary talk at the XIX International Conference on Lepton and Photon Interactions at High Energies (Stanford, August 9-14, 1999); CDF Collab: T. Affolder et al., hep-ex/9909003
- [16] A. Alavi-Harati et al., KTeV collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **83**, (1999) 22 [hep-ex/9905060].
- [17] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652, (1973).
- [18] H. Fritzsch and Z. Z. Xing, *Phys. Rev.* **D57**, 594, (1998).
- [19] L.L. Chau and W.-Y. Keung, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1802, (1984).
- [20] L. Wolfenstein, *Phys. Rev. Lett.* **51** 1945 (1983).
- [21] J. N. Bahcall, *Astrophysics.J.* **467** (1996) 475)

- [22] B. T. Cleveland et al., *Nucl. Phys.B* (Proc Suppl.) 31 (1995) 47;
- [23] R. Davis, *Prog. Part. Nucl. Phys.***32** (1994) 13.
- [24] Homestake Collaboration, R. Davis Jr., *Prog. part. Nucl. Phys.***32** (1994) 13.
- [25] Y. Fukuda et al. (Kamiokande Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1683.
- [26] SuperKamiokande Collaboration, Y. Fukuda et al., *Phys. Rev. Lett.***81** (1998) 1158; Erratum 81 (1998) 4279.
- [27] W. Hampel et al. (GALLEX Collaboration), *Phys. Lett.* **B388** (1996) 384; J. N.,
- [28] Gallex Collaboration, W. Hampel et al., *Phys. Lett.***B447** (1999) 127.,
- [29] Abdurashitov et al. (SAGE Collaboration), *Phys. Rev. Lett.***77** (1996) 4708.)
- [30] R. D. Peccei, "Neutrino Physics", 80, (1999), hep-ph/9906509. AIP Conference Proceedings de la Octava Escuela Mexicana de Partículas y Campos, Oaxaca, México (1998), Ed. Juan Carlos D'Olivo, Gabriel López Castro y Myriam Mondragón.
- [31] hep-ph/0005011, V. Barger, Overview of neutrino oscillation physics.
- [32] T. K. Gaisser, F. Halzen, and T. Stanev, *Phys. Rep.***258** (1995) 173)
- [33] Kamiokande [K. S. Hirata et al. *Phys. Lett* **B205** (1998) 416, B280 (1992) 145;
- [34] Y. Fukuda et al. *Phys. Lett.***B335** (1994) 237]
- [35] C. Athanassopoulos et al. (LSND Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 2650.,
- [36] C. Athanassopoulos et al. (LSND Collaboration), *Phys. Rev. Lett.***77** (1996) 3082.
- [37] C. Athanassopoulos, *Phys. Rev. Lett.***75**, 2650 (1995);

- [38] *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3082 (1996); *Phys. Rev. Lett.***81**, 1774 (1998).
- [39] D. Buskulic et al. (ALEPH Collaboration), *Z. Phys.C* **60** (1993) 71;
- [40] B. Adeva et al. (L3 Collaboration), *Phys. Lett.B* **237** (1990) 136.
- [41] C. Y. Cardall and G. M. Fuller, *Phys. Rev.D* **53** (1996) 4421
- [42] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, *Nucl. Phys.B***147**, 277(1979)
- [43] L. Ibañes and G. G. Ross, *Phys. Lett. B* **332**, 100, (1994)
- [44] M. Dine, A. Kagan and R. Laight, *Phys Rev. D* **48**, 4269, (1993)
- [45] A. Pomatol and D. Tommasini, *Report No. CERN-TH/95-207*, 1995
- [46] P. Pouliot and N. Seiberg, *Phys. Lett.B* **318**, 169, (1993).
- [47] L. Hall and Hitoshi Murayama, *Phy. Rev. Lett.***75**, number 22, 3985, (1995).
- [48] P. H. Frampton *Phys. Rev. D* **51**, R1, (1995).
- [49] W.K. Tung: *Group Theory in Physics* (World Scientific, Singapore 1985), Capítulo 5.
- [50] H. Fritzsch and D. Holtmannspötter, *Phys. Lett.* **B338**, 290, (1994).
- [51] H. Fritzsch and Z. Xing, *Phys. Lett.* **B353**, 114, (1995).
- [52] H. Lehmann. C. Newton and T. Wu, *Phys. Lett.* **B384**, 249, (1996).
- [53] H. Fritzsch and Z. Xing *Phys. Lett.* **B372**, 265, (1996).
- [54] P.S. Gill and M. Gupta , *J. Phys. G. Nucl. Part. Phys.* **23**, 335, (1997).
- [55] Z.Z. Xing *J. Phys. G.; Nucl. Part. Phys.* **23**, 1563, (1997).
- [56] K.Kang and S.K. Kang *Phys. Rev. D***56**, 1511, (1997).
- [57] K. Kang and S.K. Kang, preprint BROWN-HET-1109, "New Class of Quark Mass matrices and the Flavor Mixing Matrix", hep-ph/9802330.
- [58] H. Fritzsch *Phys. Lett.* **B70**, 436, (1977).

- [59] S. Pakvasa and H. Sugawara *Phys. Lett.* **B73**, 61, (1978).
- [60] H. Fritzsch, *Phys. Lett.* **B73**, 317, (1978).
- [61] H. Harari, H. Haut and J. Weyers, *Phys. Lett.* **B78**, 459, (1978).
- [62] H. Fritzsch, *Nucl. Phys.* **B155**, 189, (1979).
- [63] Y. Yamanaka, H. Sugawara and S. Pakvasa, *Phys. Rev.* **D25**, 1895, (1982).
- [64] H. Fritzsch. "Mass Hierarchies Hidden Symmetry and Maximal CP-violation". hep-ph/9807551. see also H. Fritzsch, The Symmetry and the Problem of Mass Generation in Proc. XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (Group 21), Goslar, Germany, 15-20 July 1996. Eds. H.-D. Doebner, W. Scherer and C. Schutte, World Scientific, Singapore 1997. Vol. II p. 543
- [65] H. Fusaoka and Y. Koide, *Phys. Rev.* **D57**, 3986, (1998).
- [66] F. Yndurain, *Nucl. Phys.* **B517**, 324, (1998).
- [67] P. Kaus and S. Meshkov, *Phys. Rev.* **D42**, 1863, (1990).
- [68] G.C. Branco, J.I. Silva-Marcos and M.N. Rebelo, *Phys. Lett.* **B237**, 446, (1990).
- [69] H. Fritzsch and J. Plankl, *Phys. Lett.* **B237**, 451, (1990).
- [70] P.F. Harrison and W.G. Scott, *Phys. Lett.* **B333**, 471, (1994).
- [71] For a brief review of other relevant references, see: S. Meshkov, "Quark and Lepton Masses" in Proc. Global Foundation Int. Conf. on Unified Symmetry in the Small and in The Large. (Coral Gables, Fla. 1993) Ed. B.N. Kursunoglu and A. Perlmutter.
- [72] P. S. Gill and M. Gupta, *J. Phys. G.: Nucl. Part. Phys.* **A21**, 1, (1995).
- [73] Salvatore Mele, CERN-EP/98-133, "Indirect Measurements of the Vertex Angles of the Unitary Triangle", hep-ph/9810333 see also S. Mele, "Experimental constraints on the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix", hep-ph/9808411.

- [74] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, *Rev. Mex. Fis.* **44**, (S1), 33, (1998), see also hep-ph/9804267.
- [75] Ahmed Ali and Boris Kayser, “Quark Mixing and CP Violation”, hep-ph/9806230
- [76] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, *Phys. Rev.* **D59**, 093009, (1999).
- [77] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, *Phys. Rev.* **D61**, 0730XX, (2000).
- [78] Y. Chikashige, G. Gelmini, R. P. Peccei and M. Roncadelli, *Phys. Lett.* **B94**, 494, (1980).
- [79] G.C. Branco, and J.I. Silva-Marcos, *Phys. Lett.* **B359**, 166, (1995).
- [80] H. Fritzsch and Z. Z. Xing, *Phys. Lett.* **B440**, 313, (1998).
- [81] J.I. Silva-Marcos, *Phys. Lett.* **B443**, 276, (1998).
- [82] T. Shinohara, H. Tanaka and I. S. Sogami, *Prog. Theor. Phys.* **100**, 615, (1998).
- [83] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **D59**, 015012, (1999).
- [84] R. D. Peccei and K. Wang, *Phys. Rev.* **D53**, 2712, (1996).
- [85] H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B378**, 313, (1996).
- [86] A. Pineda and F.J. Yndurain “Comment on Calculation of Quarkonium Spectrum and  $m_b$ ,  $m_c$  to order  $\alpha_s^4$ ”. hep-ph/9812371.
- [87] ALEPH Collaboration, Study of tau decays involving kaons, spectral functions and determination of the strange quark mass CERN-EP/99-026, hep-ex/9903015.
- [88] S. Mele, *Phys. Rev.* **D59**, 113011, (1999).
- [89] A. Ali and D. London, *Eur.Phys.J.* **C9**, 687-703, (1999), see also A. Ali and D. London “CP violation and quark mixing”, hep-ph/0002167.

- [90] Zoltan Ligeti, Invited talk at Kaon'99, June 21-26, 1999, Chicago, Report-no: FERMILAB-Conf-99/213-T, hep-ph/9908432.
- [91] M. Neubert, "Exploring the weak phase  $\gamma$  in  $B^\pm \rightarrow \pi K$  Decays", hep-ph/9904321.
- [92] S. R. Choudhury and M. D. Scadron, *Phys. Rev.* **D53**, 2421, (1996), see also M. D. Scadron, "Kaon CP violation and radiative corrections", hep-ph/9910549v3, 16 nov. 1999.
- [93] Jing-Ling Chen, Mo-Lin Ge, Xue-Qian Li and Yong Liu *Eur. Phys. JC9*, 437, (1999), hep-ph/9910234