UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ACERCA DE LAS RETICULAS DE CLASES NATURALES Y CONATURALES EN R-MOD.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

ALEJANDRO ALVARADO GARCIA

DIRECOR DE TESIS: DR. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA

CODIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE RIOS MONTES

2000

A mi esposa Lulú.

A mi hija Alejandra.

A mi Papá.

Quiero expresar mi agradecimiento a todos los integrantes del sínodo, los Doctores: Emilio Lluis Riera, Francisco F. Raggi Cárdenas, José Ríos Montes, Hugo A. Rincón Méjía, Carlos J. E. Signoret Poillon, María José Arroyo Paniagua y Rogelio Fernández Alonso-González, por sus correcciones y sugerencias para éste trabajo.

En especial quisiera agradecer profundamente a mis tutores, Hugo Rincón y Pepe Ríos.

Hugo: Gracias por dejarme ser tu amigo y tu alumno, toda tu paciencia y ayuda han sido la base de éste trabajo.

Pepe: Gracias por todo el apoyo que me has dado, eres un gran amigo y maestro. Tu guía fue indispensable para realizar este trabajo.

También quiero dar las gracias a todos mis familiares y amigos, ya que siempre me han dado ánimos y cariño para poder seguir adelante. Sobre todo a mi esposa e hija que son el motor de mi vida y a Dios y mis Padres que me la han dado.

Índice General

0.1 Introducción

Al estudiar anillos y módulos, algunas clases de retículas de clases de módulos han sido usadas para obtener información acerca de la estructura interna del anillo y de la categoría de módulos asociada a éste.

Una teoría de torsión hereditaria se puede caracterizar por su clase de torsión hereditaria asociada. Una clase de torsión hereditaria es una subclase $\mathbb{T}_\tau$ de R -Mod que es cerrada bajo tomar:

1. Submódulos
2. Cocientes (imágenes homomórficas)
3. Sumas directas
4. Extensiones.

La retícula R-tors de teorías de torsión hereditarias en R-Mod, ha sido extensamente estudiada. Las propiedades de esta retícula han sido usadas para caracterizar importantes clases de anillos y categorías de módulos, se pueden consultar [11] y [17] para detalles acerca de esta retícula.

Otra retícula importante de clases de módulos es la retícula de clases naturales introducidas por el Profesor John Dauns en [6], que nosotros denotaremos por R-Nat. Una clase natural es una subclase $\mathcal{N}$ de R -Mod que es cerrada bajo tomar:

1. Submódulos
2. Sumas directas
3. Cápsulas inyectivas

Además, estas propiedades implican que una clase natural es cerrada bajo tomar extensiones. Un ejemplo importante de clases naturales son las clases libres de torsión hereditarias $\mathbb{F}_\tau$ asociadas a las teorías de torsión hereditarias ya que son cerradas bajo tomar submódulos, productos directos, cápsulas inyectivas y copias isomorfas.

En el primer capítulo de este trabajo, se muestran los resultados preliminares que se tienen acerca de R-Nat. Entre otras cosas se caracterizan a las clases de módulos que representan a las clases naturales generadas por una clase dada de módulos, al igual que se describen a los complementos y dobles complementos de una clase natural y se demuestra que R -Nat es un Álgebra de Bool.

La primer observación que nos llevó a relacionar las clases naturales con las teorías de torsión hereditarias fue el hecho de que si σ es un prerradical exacto izquierdo, entonces:

$$\mathfrak{N}_\sigma = \left\{ M \in R-Mod \mid \sigma(M) \subseteq_{es} M \right\}$$

es una clase natural. El hecho es que toda teoría de torsión hereditaria tiene también asociado un radical exacto izquierdo y todo radical es un prerradical, por lo que dicha clase es una clase natural para cualquier $\sigma \in R$ -tors. De aquí obtuve los primeros teoremas nuevos para esta tesis.

Otros temas estudiados en las clases naturales son los de submódulos de tipo y condición TS. Aquí obtuve generalizaciones de algunos teoremas del profesor Dauns, relacionados con las teorías de torsión espectrales y la descomposición de módulos en ellas.

En otro trabajo, ver [6], el profesor Dauns da una serie de resultados con relación a la descomposición de módulos en sumas directas cuando el módulo es singular. Aquí obtuve también generalizaciones del mismo tipo para módulos que son libres de torsión de una teoría de torsión estable, otros para módulos libres de torsión de una teoría de torsión estable espectral.

Con relación a descomponer a la retícula de las clases naturales en sumas directas de subretículas completas también se generalizaron los resultados del Profesor Dauns en [6]

La última parte del capítulo se relaciona con el cambio de anillo. En [6], el Profesor Dauns estudia como se relacionan $R-$ Nat y $S-$ Nat cuando S es un anillo cociente de R. En este trabajo estudio la misma relación pero cuando entre R y S existe un epimorfismo plano llegando a resultados análogos.

En el segundo capítulo se consideran, en primer lugar, las clases cerradas bajo submódulos denotando a esta retícula por R-Her. Observo que esta es una retícula completa y que, de hecho, es un Álgebra de Heyting, en particular, R-Her es una retícula complementada.

El primer Teorema en esta linea es el demostrar que R-Nat es el esqueleto de R-Her, hecho que nos dió la pauta de estudiar al esqueleto de R -Quot (la retícula de clases cerradas bajo cocientes) que es también un Álgebra de Heyting, definiendo así a las clases Conaturales que denotamos por R -Conat como los elementos de dicho esqueleto.

El segundo Teorema importante es el hecho de que R-Conat es un Álgebra de Bool. Obtuve descripciones de la clase conatural generada por una clase de módulos así como del complemento y doble complemento de una clase conatural. Además demuestro que si $\mathcal{C} \in R$ -Conat, entonces $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar:

1. Imágenes homomórficas.

2. Extensiones.

3. Epimorfismos superfluos (En particular bajo tomar cubiertas proyectivas cuando las hay).

También demuestro algunas relaciones de las clases Conaturales con las Teorías de Torsión Hereditarias cuando las clases conaturales satisfacen algunas condiciones adicionales.

Por último se ven varios ejemplos de átomos en R -Her, R -Quot y en R-Conat tomando el anillo particular de los enteros $\mathbb{Z}$.

Una observación importante es que, tanto R-Her como R-Quot no son conjuntos, en muchos de los casos en los que se toman uniones e intersecciones arbitrarias de sus elementos, se toman sobre una clase propia y no sobre un conjunto de índices. Así que las definiciones acerca de retículas, pseudocomplementos, esqueletos, etcétera, se toman como en conjuntos ya que también se tienen para classes (esto es hecho en [9] y [10]).

En el tercer capítulo demuestro algunas caracterizaciones de anillos usando clases naturales y conaturales. Entre ellas podemos escribir las siguientes:

1. Son equivalentes para un anillo R:

   (a) R es semiartiniano izquierdo.

   (b) Cada clase natural es una clase libre de torsión hereditaria.

   (c) La clase natural

   $$\mathfrak{S} = \left\{ M \in R - Mod \mid soc(M) \underset{es}{\subseteq} M \right\}$$

   es una clase libre de torsión hereditaria.

2. Son equivalentes para un anillo R:

   (a) R es isomorfo a un producto directo finito de anillos perfectos derechos, cada uno de ellos con un módulo simple salvo isomorfismo;

   (b) Toda clase natural de $R - Mod$ es una clase de torsión hereditaria.

3. Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:

   (a) R es MAX izquierdo.

   (b) Toda clase conatural en $R - Mod$ está generada por una familia de R-módulos simples.

4. Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:

   (a) R es un anillo perfecto izquierdo.

   (b) R es semilocal y $|R - Conat| = 2^k$, donde $k \in \mathbb{N}$ es el número de clases de isomorfismo de R-módulos simples.

En todo el trabajo R denotará un anillo asociativo con elemento unitario y R-Mod denotará a la categoría de R-módulos izquierdos con uno. En [1], [11], [13], [14], [17], se pueden consultar todos aquellos conceptos que no se difinen en este trabajo.

Capítulo 1

La retícula $R - Nat$.

En este capítulo desarrollaremos los resultados preliminares acerca de las clases naturales y varios de los conceptos desarrollados en torno a ellas.

Definición 1 *Sea $\mathfrak{N}$ una clase de módulos. Decimos que $\mathfrak{N}$ es una clase natural si:*

1. $\mathfrak{N}$ es cerrada bajo tomar submódulos.

2. $\mathfrak{N}$ es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas.

3. $\mathfrak{N}$ es cerrada bajo tomar sumas directas arbitrarias.

Ejemplo 2 *Estos son algunos ejemplos de clases naturales:*

1. Toda clase libre de torsión hereditaria.

2. Toda clase de torsión hereditaria estable.

3. En particular $R-Mod$ y (0) lo son.

Recordemos que un prerradical en R-mod es un subfuntor del funtor identidad, esto es, un prerradical σ asigna a cada módulo M un submódulo $\sigma(M)$ tal que todo homomorfismo $f: M \to N$ induce un homomorfismo $\overline{f}: \sigma(M) \to \sigma(N)$ por restricción.

Por [[17], *Chapter VI*, Proposition 1.7] sabemos que un prerradical es exacto izquierdo si y sólo si ($N \leq M$ implica que $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$).

Proposición 3 *Sea σ un prerradical exacto izquierdo, entonces:*

$$\mathfrak{N}_\sigma = \left\{ M \in R-Mod \mid \sigma(M) \underset{es}{\subseteq} M \right\}$$

es una clase natural.

Demostración. (a) En general, sabemos que si $0 \neq N \leq M$ y $L \underset{es}{\subseteq} M$, entonces $L \cap N \underset{es}{\subseteq} N$. Y, de la hipótesis, que $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$. Por lo tanto, si $\sigma(M) \underset{es}{\subseteq} M$ tenemos que $\sigma(N) \underset{es}{\subseteq} N$, es decir, $\mathfrak{N}_\sigma$ es cerrada bajo tomar submódulos.

(b) Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in X}$ una familia de $R-$*módulos* en $\mathfrak{N}_\sigma$, y $M=\bigoplus\limits_{\alpha\in X} M_\alpha$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & \sigma(M_\alpha) & \underset{es}{\hookrightarrow} & M_\alpha & \\ & \subseteq\downarrow & = & \subseteq\downarrow & \\ \sigma(M)= & \bigoplus\limits_{\alpha\in X}\sigma(M_\alpha) & \underset{es}{\hookrightarrow} & \bigoplus\limits_{\alpha\in X} M_\alpha & =M \end{array}$$

ya que σ preserva sumas directas.

Por lo tanto $\mathfrak{N}_\sigma$ es cerrada bajo tomar sumas directas

(c) Sea M tal que $\sigma(M)\underset{es}{\subseteq} M$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \underset{es}{\hookrightarrow} & E(M) \\ \uparrow\underset{es}{\subseteq} & & \uparrow\subseteq \\ \sigma(M) & \hookrightarrow & \sigma(E(M)) \end{array}$$

del que vemos que $\sigma(E(M))\underset{es}{\subseteq} E(M)$.

$\therefore \mathfrak{N}_\sigma$ es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas. ■

• Denotamos por $R-Nat$ a la colección de todas las clases naturales de $R-$*módulos*. En la siguiente sección observaremos que $R-Nat$ es de hecho un conjunto.

1.1 La estructura de retícula de $R - Nat$.

Empezaremos nuestro estudio con el siguiente:

Lema 4 *Sea $\{M_i\}_{i\in X}$ una familia de R – módulos y $M = \bigoplus_{i\in X} M_i$. Si $0 \neq N \leq M$ entonces existen $0 \neq N_1 \leq N$ y $0 \neq L \leq M_j$ para alguna $j \in X$, tales que $N_1 \cong L$.*

Demostración. Sea $M = \bigoplus_{i\in X} M_i$ como en el enunciado.

Sean $0 \neq N \leq M$ y $0 \neq x \in N$.

Entonces $Rx \leq N \leq M$ y $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$ con $x_i \in M_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Primero supongamos que $x = x_1 + x_2$, como la suma es directa, si $r \in R$ entonces $rx = 0 \Leftrightarrow rx_1 = 0 \wedge rx_2 = 0$ y por lo tanto $(0 : x) = (0 : x_1) \cap (0 : x_2)$. Si $rx_1 = 0 \Leftrightarrow rx_2 = 0$ se tiene que $(0 : x) = (0 : x_1)$ y así

$$Rx \cong \frac{R}{(0 : x)} = \frac{R}{(0 : x_1)} \cong Rx_1 \leq M_1.$$

Ahora, si $\exists 0 \neq r \in R$ tal que $rx_1 = 0 \wedge rx_2 \neq 0$ entonces $0 \neq rx = rx_2 \in M_2$ Por lo tanto $0 \neq R(rx) \leq M_2 \cap N$.

Ahora, procedemos por inducción sobre n.

Si $rx_i = 0 \Leftrightarrow rx_j = 0 \; \forall i \neq j$ entonces $Rx \cong Rx_i \leq M_i \; (i = 1, 2, ..., n)$

Si no, entonces existen $i \neq j$ y $0 \neq r \in R$ tales que $rx_i \neq 0$ y $rx_j = 0$, entonces $R(rx) \leq \bigoplus\limits_{i \neq j} M_i$ y de la hipótesis de inducción se tiene el resultado.

■

Del siguiente lema podemos decir que $R-Nat$ tiene estructura de retícula completa.

Lema 5 *Sea $\{\mathfrak{N}_i\}_{i \in X}$ una familia de clases naturales, entonces $\bigcap\limits_{i \in X} \mathfrak{N}_i$ es una clase natural.* ■

Definición 6 *Con base en lo anterior, definimos un orden parcial en $R-Nat$ de la siguiente manera:*

$$\mathfrak{N}_1 \leq \mathfrak{N}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2$$

Y para una familia $\{\mathfrak{N}_\alpha\}_{\alpha \in X}$ de clases naturales

$$\bigwedge_{\alpha \in X} \mathfrak{N}_\alpha = \bigcap_{\alpha \in X} \mathfrak{N}_\alpha ; \; \bigvee_{\alpha \in X} \mathfrak{N}_\alpha = \left\langle \bigcup_{\alpha \in X} \mathfrak{N}_\alpha \right\rangle,$$

donde $\left\langle \bigcup\limits_{\alpha \in X} \mathfrak{N}_\alpha \right\rangle$ denota la clase natural generada por $\bigcup\limits_{\alpha \in X} \mathfrak{N}_\alpha$.

Ahora definiremos dos operadores $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ que jugarán un papel importante en el estudio de las clases naturales:

Definición 7 *Dada $\mathfrak{F}$ una subclase de $R-$módulos definimos:*

1. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} = \{M \mid \forall 0 \neq N \leq M, \exists 0 \neq F \in \mathfrak{F} \wedge 0 \neq K \leq F \wedge K \rightarrowtail N\}$

2. $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} = \{M \mid \forall 0 \neq N \leq M, \nexists N \rightarrowtail F, \forall F \in \mathfrak{F}\}$.

Proposición 8 *$\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ y $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ son clases naturales, además $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} = \langle \mathfrak{F} \rangle$ (la clase natural generada por $\mathfrak{F}$).*

Demostración. Primero veamos que $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \in R-Nat$.

(a) Sean $M \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, y $0 \neq N \leq M$, si $N_1 \rightarrowtail F \in \mathfrak{F}$ para alguna $0 \neq N_1 \leq N$ entonces $M \notin \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \underset{\bullet}{\nabla}$

Por lo tanto $N \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ y en consecuencia $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ es cerrada bajo submódulos.

(b) Sean $M \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, y $E(M)$ la cápsula inyectiva de M, si $M_1 \rightarrowtail F \in \mathfrak{F}$ para alguna $0 \neq M_1 \leq E(M)$, entonces $0 \neq M_1 \cap M \hookrightarrow M_1 \rightarrowtail F$, por lo tanto $M \notin \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \underset{\bullet}{\nabla}$

En consecuencia $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

(c) Sea $\{M_i\}_{i \in X}$ una familia de $R-$*módulos* en $\mathfrak{F}$ y $0 \neq N \leq \bigoplus_{i \in X} M_i$. tal que $N \rightarrowtail F \in \mathfrak{F}$ entonces, por el *Lema* 4 existen $0 \neq N_1 \leq N$ y $M_1 \leq M_j$

para alguna $j \in X$ tales que

$$\begin{array}{ccc} N_1 \cong M_1 & \hookrightarrow & M_j \\ \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq \\ N & \hookrightarrow & \bigoplus_{i \in X} M_i \\ \downarrow \ mono & & \\ F & & \end{array}$$

y por lo tanto $M_j \notin \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ ∇

Así $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ es cerrada bajo sumas directas y por lo tanto es una clase natural.

Un argumento similar demuestra que $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ es también una clase natural.

Veamos que $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} = \langle \mathfrak{F} \rangle$.

1) Es claro que si $F \in \mathfrak{F}$ entonces $F \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$.

2) Sea $\mathfrak{N} \in R - Nat$ tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ y $M \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$. Por demostrar que $M \in \mathfrak{N}$.

Observemos que $M \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} \Rightarrow \exists K \in \mathfrak{N}$ y $K \rightarrowtail M$ ya que

$$
\begin{array}{lccl}
\forall & 0 \neq N & \hookrightarrow & M \\
\exists & \uparrow & & \\
 & 0 \neq K & \hookrightarrow & F \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}
\end{array}
$$

$\therefore K \in \mathfrak{N}$.

Por el lema de Zorn existe una familia independiente máxima $\{K_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ de submódulos de M con la propiedad de que cada $K_\alpha \in \mathfrak{N}$. Y en consecuencia $\bigoplus\limits_{\alpha \in Y} K_\alpha \in \mathfrak{N}$. y $\bigoplus\limits_{\alpha \in Y} K_\alpha \underset{es}{\hookrightarrow} M$ por lo tanto $M \in \mathfrak{N}$. Y así $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{N}$. ∎

Corolario 9 *Para una familia $\{\mathfrak{N}_\alpha\}_{\alpha \in X}$ de clases naturales*

$$\bigvee_{\alpha \in X} \mathfrak{N}_\alpha = \left\langle \bigcup_{\alpha \in X} \mathfrak{N}_\alpha \right\rangle = \mathfrak{D}_{\bigcup\limits_{\alpha \in X} \mathfrak{N}_\alpha}. \blacksquare$$

Definición 10 *Sea $\mathfrak{F}$ una clase de $R-$módulos. Denotamos por $\overline{\mathfrak{F}}$ a la clase de todos los módulos isomorfos a un submódulo de algún elemento de $\mathfrak{F}$. También denotamos por $\langle \mathfrak{F} \rangle$ a la clase natural generada por $\mathfrak{F}$.*

Lema 11 *En la situación anterior se tiene:*

1. $\langle \mathfrak{F} \rangle = \left\{ M \in R-Mod \mid \exists P_j \rightarrowtail N_j \in \mathfrak{F}, j \in J \wedge \bigoplus\limits_{j \in J} P_j \underset{es}{\subseteq} M \right\}.$

2. $\langle\mathfrak{F}\rangle = \left\{ M \in R-Mod \mid \exists N_j \in \mathfrak{F}, j \in J \wedge \exists M \rightarrowtail E\left(\bigoplus_{j\in J} N_j\right)\right\}$

3. $\langle\mathfrak{F}\rangle = \left\langle\overline{\mathfrak{F}}\right\rangle = \left\{ M \in R-Mod \mid \forall 0 \neq N \leq M, \exists 0 \neq L \leq N, L \in \overline{\mathfrak{F}}\right\}$

Demostración. Como hemos visto:

$$\langle\mathfrak{F}\rangle = \{M \in R-Mod \mid \forall 0 \neq N \leq M, \exists 0 \neq F \in \mathfrak{F} \wedge 0 \neq K \leq F \wedge K \rightarrowtail N\}$$

(3) Es claro que $\langle\mathfrak{F}\rangle \leq \left\langle\overline{\mathfrak{F}}\right\rangle$. Sea $N \in \left\langle\overline{\mathfrak{F}}\right\rangle$, entonces existe:

$$\begin{array}{lll} W & \hookrightarrow & N \\ \uparrow \ mono & & \\ V' & \hookrightarrow & V \quad V \in \overline{\mathfrak{F}} \end{array}$$

$V \in \overline{\mathfrak{F}} \Rightarrow V \cong T \subseteq U \in \mathfrak{F}$, por lo tanto existe:

$$\begin{array}{lll} W & \hookrightarrow & N \\ \uparrow \ mono & & T_1 \cong V_1 \\ T_1 & \hookrightarrow & T \quad T \in \mathfrak{F} \end{array}$$

$\therefore N \in \langle\mathfrak{F}\rangle$. Lo restante es fácil de ver.

(1) Sea $\mathfrak{A}$ el lado derecho de la igualdad.

($\supseteq$) Sea $M \in \mathfrak{A}$ y $0 \neq N \leq M$. Entonces tenemos que $N \cap \bigoplus_{j \in J} P_j \neq 0$ y por lo tanto $\exists 0 \neq N_1 \leq N$ y $k \in J$ tales que $P_k \geqslant P_k{}' \cong N_1 \rightarrowtail P_k \rightarrowtail N_k$.

Sea $\varphi : N_1 \rightarrowtail N_k$ el monomorfismo anterior, entonces existe:

$$\begin{array}{cccc} & N & \hookrightarrow & M \\ & \uparrow \ mono & & \\ N_1 \cong & \varphi(N_1) & \hookrightarrow & N_k \ \in \mathfrak{F} \end{array}$$

$\therefore M \in \langle \mathfrak{F} \rangle$.

($\subseteq$) Sea $0 \neq M \in \langle \mathfrak{F} \rangle$, entonces $\exists N_1 \in \mathfrak{F}$ y $0 \neq P_1 \rightarrowtail N_1$ con $P_1 \leq M$.

Sea $\{P_\alpha\}_{\alpha \in X}$ una familia independiente máxima de submódulos de M tal que $P_\alpha \rightarrowtail N_\alpha \in \mathfrak{F}$, $\forall \alpha \in X$. Entonces $\bigoplus_{\alpha \in X} P_\alpha \subseteq_{es} M$ y por lo tanto $M \in \mathfrak{A}$.

(2)El lado derecho de (2) satisface la Definición 1(1) y (3) y el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & E(M) & & \\ & & \uparrow \ \subseteq_{es} & \searrow \ mono & \\ 0 & \rightarrow & M & \rightarrowtail & E\left(\bigoplus_{j \in J} N_j\right) \end{array}$$

muestra que es cerrado bajo tomar cápsulas inyectivas. Así que es una clase natural.

Por otra parte, si llamamos $\mathfrak{A}$ a esta clase natural, claramente $\langle\mathfrak{F}\rangle \leq \mathfrak{A}$ y la otra inclusión se tiene porque $\forall M \in \mathfrak{A}$, $M \rightarrowtail E\left(\bigoplus_{j\in J} N_j\right)$, como cada $N_j \in \mathfrak{F}$, $E\left(\bigoplus_{j\in J} N_j\right)$ también y así $M \in \langle\mathfrak{F}\rangle$. ■

Corolario 12 *De la Definición 7 y el Lema 11*(1) *podemos concluír que:*

$$\bigvee_{\alpha\in X} \mathfrak{N}_\alpha = \left\{ M \in R-Mod \mid \exists \bigoplus_{\alpha\in X} N_\alpha \underset{es}{\subseteq} M, N_\alpha \in \mathfrak{N}_\alpha, \forall\alpha \in X \right\} \blacksquare$$

Corolario 13 *Para cualquier familia de módulos* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in X}$,

$$\left\langle \bigoplus_{\alpha\in X} N_\alpha \right\rangle = \bigvee_{\alpha\in X} \langle N_\alpha\rangle$$

Demostración. Sea $M = \bigoplus_{\alpha\in X} N_\alpha$. Como $N_\alpha \leq M$, $\langle N_\alpha\rangle \leq \langle M\rangle$. Así que

$$\bigvee_{\alpha\in X} \langle N_\alpha\rangle \leq \langle M\rangle$$

En el *Lema* 11, tomamos $M_\alpha = N_\alpha \leq M$ y tomamos $\mathfrak{F} = \{\langle N_\alpha\rangle\}_{\alpha\in X}$. Entonces se tiene que $\bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha \underset{es}{\subseteq} M$ (de hecho son iguales). Por lo tanto

$M \in \bigvee_{\alpha \in X} \mathfrak{F}$. ■

Proposición 14 *Si $\mathfrak{N}$. es una clase natural, entonces $\mathfrak{C}_{\mathfrak{N}}$ es un seudocomplemento, que denotaremos por $\mathfrak{N}^{\perp}$, de $\mathfrak{N}$ en $R - Nat$.*

Demostración.

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{N}} = \{M \in R - Mod \mid \forall 0 \neq N \leq M, \nexists N \rightarrowtail F, \forall F \in \mathfrak{N}\}$$

por la Definición 7.

Claramente $\mathfrak{C}_{\mathfrak{N}} \wedge \mathfrak{N} = (0)$. Sea $\mathfrak{L} \in R - Nat$ tal que $\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{N} = (0)$ y sea $M \in \mathfrak{L}$, si $M \notin \mathfrak{C}_{\mathfrak{N}}$ entonces $\exists 0 \neq N \leq M$ tal que $N \in \mathfrak{N}$. Por lo tanto $N \in \mathfrak{N} \wedge \mathfrak{L} = (0)$ $\underset{\bullet}{\nabla}$. Así $M \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{N}}$ y $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{C}_{\mathfrak{N}}$. ■

Observación 15 *Note que en la Proposición 14 como $\mathfrak{N}$ es una clase natural, entonces*

$$\mathfrak{N}^{\perp} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{N}} = \{M \in R - Mod \mid \forall 0 \neq N \leq M, N \notin \mathfrak{N}\} \ ■$$

Teorema 16 *$R - nat$ es un álgebra de Bool completa (así que $\mathfrak{N}^{\perp}$ es el complemento de $\mathfrak{N}$ en $R - nat$) y tiene las siguientes propiedades:*

1. $\mathbf{0} = (0)$ y $\mathbf{1} = R - Mod$.

2. $\mathfrak{N}_1 \leq \mathfrak{N}_2 \Rightarrow \mathfrak{N}_2^{\perp} \leq \mathfrak{N}_1^{\perp}$.

3. $(\mathfrak{N}^{\perp})^{\perp} = \mathfrak{N}$.

4. $\mathfrak{N} \wedge \mathfrak{N}^{\perp} = \mathbf{0}$, $\mathfrak{N} \vee \mathfrak{N}^{\perp} = \mathbf{1}$.

Demostración. Es claro que $\mathbf{0} = (0)$ y que $\mathbf{1} = R-Mod$.

Supongamos que $\mathfrak{N}_1 \leq \mathfrak{N}_2$. Sea $M \in \mathfrak{N}_2^{\perp}$, entonces $\forall 0 \neq N \leq M, \nexists N \rightarrowtail K, \forall K \in \mathfrak{N}_2$, en particular $\nexists N \rightarrowtail K, \forall K \in \mathfrak{N}_1 \therefore M \in \mathfrak{N}_1^{\perp}$ y se tiene 2.

Como $\mathfrak{N}$ es clase natural, tenemos que:

$$\mathfrak{N}^{\perp} = \{M \in R-Mod \mid \forall 0 \neq N \leq M, N \notin \mathfrak{N}\}$$

$(\subseteq)$ Sea $0 \neq M \in (\mathfrak{N}^{\perp})^{\perp}$, entonces $M \notin \mathfrak{N}^{\perp}$ y por lo tanto existe un submódulo distinto de cero N' de N tal que $N' \in \mathfrak{N}$.

Sea$\{N_{\alpha}\}_{\alpha \in X}$ una familia independiente máxima de submódulos de N que pertenecen a $\mathfrak{N}$, entonces $\bigoplus_{\alpha \in X} N\alpha \in \mathfrak{N}$ y $\bigoplus_{\alpha \in X} N\alpha \subseteq_{es} N$, por lo tanto $N \in \mathfrak{N}$. Así que $(\mathfrak{N}^{\perp})^{\perp} \leq \mathfrak{N}$.

$(\supseteq)$ Sea $0 \neq M \in \mathfrak{N} \setminus (\mathfrak{N}^{\perp})^{\perp}$ entonces $\exists 0 \neq N \leq M$ y $L \in \mathfrak{N}^{\perp}$ tal que $N \rightarrowtail L$, por lo tanto $N \in \mathfrak{N}^{\perp} \cap \mathfrak{N} = 0 \nabla$ Así que $M \in (\mathfrak{N}^{\perp})^{\perp}$ y en consecuencia $(\mathfrak{N}^{\perp})^{\perp} = \mathfrak{N}$.

Como es claro que $\mathfrak{N} \wedge \mathfrak{N}^{\perp} = \mathbf{0}$, veamos que $\mathfrak{N} \vee \mathfrak{N}^{\perp} = \mathbf{1}$.

Sea $0 \neq M \in R - Mod$. Si $\forall 0 \neq N \leq M$, $N \notin \mathfrak{N}$ entonces $M \in \mathfrak{N}^{\perp}$ y por lo tanto en $\mathfrak{N} \vee \mathfrak{N}^{\perp}$, así que podemos suponer que hay un submódulo distinto de cero N de M tal que $N \in \mathfrak{N}$ entonces sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in X}$ una familia independiente máxima de dichos submódulos tales que cada uno está en $\mathfrak{N}$.

Tomamos $\bigoplus\limits_{\alpha \in X} N_\alpha \in \mathfrak{N}$ y C un seudocomplemento de $\bigoplus\limits_{\alpha \in X} N_\alpha$ en M.

Si $C = 0$ entonces $\bigoplus\limits_{\alpha \in X} N_\alpha \underset{es}{\subseteq} M \Rightarrow M \in \mathfrak{N}$. Así que supongamos que $C \neq 0$.

$C \in \mathfrak{N}^{\perp}$ ya que, de lo contrario, existiría un submódulo distinto de cero C_1 de C y un monomorfismo $C_1 \rightarrowtail K$ para alguna $K \in \mathfrak{N}$. Por lo tanto C_1 sería un elemento de $\mathfrak{N}$ y $\{N_\alpha\}_{\alpha \in X} \cup \{C_1\}$ sería una familia independiente, llegando a una contradicción.

En consecuencia

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in X} N_\alpha\right) \oplus C \in \mathfrak{N} \vee \mathfrak{N}^{\perp} \Rightarrow M \in \mathfrak{N} \vee \mathfrak{N}^{\perp}.$$

Para finalizar, demostraremos que $R - Nat$ es distributiva.

Sean $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3 \in R - Nat$. Siempre se tiene la desigualdad:

$$(\mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_2) \vee (\mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_3) \leq \mathfrak{N}_1 \wedge (\mathfrak{N}_2 \vee \mathfrak{N}_3)$$

Veamos la otra: Sea $0 \neq M \in \mathfrak{N}_1 \wedge (\mathfrak{N}_2 \vee \mathfrak{N}_3)$.

Del Corolario 12 y el inciso 4 sabemos que existen $U, V \leq M$ tales que $U \oplus V \underset{es}{\subseteq} M$ con $U \in \mathfrak{N}_2$ y $V \in \mathfrak{N}_2^{\perp}$. En consecuencia $U \in \mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_2$.

Por otra parte, tenemos que $V \in \mathfrak{N}_2 \vee \mathfrak{N}_3$. Veamos que $V \in \mathfrak{N}_3$.

Sea $0 \neq H \leq V$, entonces $\exists 0 \neq L_1 \in \mathfrak{N}_2 \cup \mathfrak{N}_3$ tal que:

$$L_1 \rightarrowtail H \leq V \in \mathfrak{N}_2^{\perp} \Rightarrow L_1 \notin \mathfrak{N}_2 \text{ así que } L_1 \in \mathfrak{N}_3$$

$\therefore V \in \mathfrak{N}_3 = \langle \mathfrak{N}_3 \rangle$ y en consecuencia $V \in \mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_3$.

$\therefore M \in (\mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_2) \vee (\mathfrak{N}_1 \wedge \mathfrak{N}_3)$. ■

Proposición 17 *Sea σ un prerradical exacto izquierdo, sabemos que*

$$\mathfrak{N}_\sigma = \left\{ M \in R-Mod \mid \sigma(M) \underset{es}{\subseteq} M \right\}$$

es una clase natural (Vea la Proposición 3). Entonces

$$\mathfrak{N}_\sigma^{\perp} = \{M \in R-Mod \mid \sigma(M) = 0\}$$

Demostración. Sea $\mathcal{L} = \{M \in R-Mod \mid \sigma(M) = 0\}$. De la Proposición 15 sabemos que

$$\mathfrak{N}_\sigma^\perp = \{M \in R-Mod \mid \forall 0 \neq N \leq M, \sigma(N) \text{ no es esencial en } N\}$$

Sea $M \in \mathfrak{N}_\sigma^\perp$, entonces $\sigma(M)$ no es esencial en M. Supongamos que $\sigma(M) \neq 0$, entonces $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$, por lo que $\sigma(\sigma(M)) \underset{es}{\subseteq} \sigma(M)$ contradiciendo la hipótesis. Así que $\sigma(M) = 0$.

Por lo tanto $\mathfrak{N}_\sigma^\perp \subseteq \mathcal{L}$. La otra inclusión es clara. ■

Corolario 18 *Sea $\mathfrak{N} \in R-Nat$. Son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{N}$ es cerrada bajo tomar productos.*

2. *Existe un prerradical exacto izquierdo σ tal que $\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}^\perp$.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Por 1, $\mathfrak{N}$ es una clase libre de torsión hereditaria y por lo tanto $[[17], \textit{Chapter VI}, \text{Proposition } 3.1]$ existe un radical exacto izquierdo σ tal que su clase libre de torsión asociada

$$\mathbb{F}_\sigma = \{M \in R-Mod \mid \sigma(M) = 0\}$$

es igual a $\mathfrak{N}$. Así que $\mathfrak{N}^\perp = \mathfrak{N}_\sigma$ por la Proposición 17.

$(2 \Rightarrow 1)$ Si

$$\mathfrak{N}_{\sigma} = \left\{ M \in R-Mod \mid \sigma(M) \underset{es}{\subseteq} 0 \right\} = \mathfrak{N}^{\perp},$$

entonces

$$\mathfrak{N}_{\sigma}^{\perp} = \mathbb{F}_{\sigma} = \{M \in R-Mod \mid \sigma(M) = 0\} = \mathfrak{N}^{\perp\perp} = \mathfrak{N}$$

Así que $\mathfrak{N}$ es una clase libre de pretorsión y por lo tanto cerrada bajo tomar productos. ■

Recordemos que una teoría de torsión hereditaria en R-Mod es estable si la clase de módulos de torsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas o si se cumple cualquiera de las condiciones equivalentes en [[17], *Chapter VI*, Proposition 7.1].

Corolario 19 *Sea $\tau \in R-tors$. Son equivalentes:*

1. τ es estable.

2. El complemento de $\mathbb{T}_{\tau}$ en $R-Nat$ es $\mathbb{F}_{\tau}$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 17 y del hecho que $\mathbb{T}_{\tau}$ es una clase natural si y sólo si τ es estable. ■

También podemos demostrar la siguiente:

Proposición 20 *Toda clase natural es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Sea $\mathfrak{N} \in R - Nat$. Entonces $\mathfrak{N} = \mathfrak{L}^{\perp}$ donde $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}^{\perp}$.

Sea $0 \to N \to M \to \frac{M}{N} \to 0$ exacta, con $N \in \mathfrak{N}$ y $\frac{M}{N} \in \mathfrak{N}$

Si $M \notin \mathfrak{N}$ entonces $\exists 0 \neq N_1 \leq M$ tal que $N_1 \rightarrowtail L \in \mathfrak{L}$. Como $N \in \mathfrak{N}$, $N \cap N_1 = 0$. Por lo tanto existe:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & \frac{M}{N} \arrow[r] & 0 \\ & & N_1 \arrow[u] \arrow[ur, "mono"'] & & \\ & & 0 \arrow[u] & & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \frac{M}{N} \notin \mathfrak{N} \nabla.$$

∎

Corolario 21 *Sea $\mathfrak{N} \in R - Nat$. Son equivalentes:*

1. $\mathfrak{N}$ es cerrada bajo tomar cocientes.

2. $\mathfrak{N}^{\perp}$ es cerrada bajo tomar productos.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Como $\mathfrak{N}$ es cerrada bajo tomar cocientes, es una clase de torsión hereditaria estable ya que es cerrada bajo extensiones por la Proposición 20. Así que $\mathbb{F}_\tau = \mathfrak{N}^\perp$ (donde τ es el radical exacto izquierdo asociado a $\mathfrak{N}$) por el Corolario 19 y por lo tanto cerrada bajo tomar productos.

$(2 \Rightarrow 1)$ Como $\mathfrak{N}^\perp$ es cerrada bajo tomar productos, es una clase libre de torsión hereditaria, Así que $\mathfrak{N}^\perp = \mathbb{F}_\tau$ para algún τ radical exacto izquierdo. Por lo tanto $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^{\perp\perp} = \mathbb{T}_\tau$ por la Proposición 17 y en consecuencia cerrada bajo tomar cocientes. ■

Denotaremos por $\mathfrak{L}(R)$ a la retícula de ideales izquierdos de R.

Definición 22 *Dada $\mathfrak{N} \in R{-}Nat$ definimos $H_\mathfrak{N}(R) \subseteq \mathfrak{L}(R)$, de la siguiente manera: $H_\mathfrak{N}(R) \doteq \left\{ I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \mathfrak{N} \right\}$.*

Proposición 23 *La asignación*

$$\begin{array}{rccc} f: & R - Nat & \rightarrow & \wp(\mathfrak{L}(R)) \\ & \mathfrak{N} & \mapsto & H_\mathfrak{N}(R) \end{array}$$

donde $\wp(\mathfrak{L}(R))$ es el conjunto potencia de $\mathfrak{L}(R)$, es inyectiva.

Demostración. Supongamos que $H_\mathfrak{N}(R) = H_\mathfrak{L}(R)$ para $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L} \in R{-}Nat$. Sea $M \in \mathfrak{N}$. Podemos hacer $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}^\perp$ donde $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}^\perp$.

Si $M \notin \mathfrak{L}$ entonces existe un submódulo distinto de cero, N, de M tal que $N \in \mathfrak{F}$, en particular uno cíclico, Rx con $0 \neq x \in N$, pero se tiene que $Rx \cong \frac{R}{(0:x)} \in \mathfrak{F} \Rightarrow (0:x) \notin H_{\mathfrak{L}}(R)$.

Por otra parte, $M \in \mathfrak{N} \Rightarrow Rx \in \mathfrak{N} \Rightarrow (0:x) \in H_{\mathfrak{N}}(R)\underset{\bullet}{\nabla}$

Por lo tanto $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}$. Análogamente $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}$. ■

Definición 24 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}(R)$ *se llama conjunto natural si:*

1. $I \in \mathfrak{A}$, $J \in \mathfrak{A} \Rightarrow I \cap J \in \mathfrak{A}$.
2. $I \in \mathfrak{A} \Rightarrow (\forall r \in R, (I:a) \in \mathfrak{A})$.
3. $I \notin \mathfrak{A} \Rightarrow (\exists J \leq R$, tal que $I \subsetneqq J \wedge (I:a) \notin \mathfrak{A}\ \forall a \in J \setminus I$.

Proposición 25 *Son equivalentes para* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}(R)$.

1. $\mathfrak{A} = H_{\mathfrak{N}}(R)$ para alguna $\mathfrak{N} \in R-Nat$.
2. $\mathfrak{A}$ es un conjunto natural.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Del hecho de que

$$\frac{R}{I \cap J} \rightarrowtail \frac{R}{I} \oplus \frac{R}{J} \text{ y } \frac{R}{(I:a)} \cong \frac{Ra+I}{I} \subseteq \frac{R}{I},$$

podemos concluir que $I \cap J$ y $(I:a)$ están en $H_{\mathfrak{N}}(R)$, si I, $J \in H_{\mathfrak{N}}(R)$.

Sea $I \notin H_{\mathfrak{N}}(R)$, entonces $\frac{R}{I} \notin \mathfrak{N}$. Tomamos $\mathfrak{N} = \mathfrak{F}^{\perp}$ donde $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^{\perp}$. Entonces $\exists \bar{0} \neq \frac{J}{I} \subseteq \frac{R}{I}$, tal que $\frac{J}{I} \in \mathfrak{F}$. Sea $a \in J \setminus I$, entonces

$$\frac{R}{(I:a)} \cong \frac{Ra+I}{I} \in \mathfrak{F}, \left(\frac{Ra+I}{I} \subseteq \frac{J}{I}\right),$$

por lo tanto $(I:a) \notin H_{\mathfrak{N}}(R)$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea $\mathfrak{K} = \{M \in R-Mod \mid (0:x) \in \mathfrak{A}, \forall x \in M\}$, entonces $\mathfrak{K}$ es una clase natural. En efecto, claramente es cerrada bajo tomar submódulos. Sea $M = \bigoplus_{\alpha \in X} M_{\alpha}$ tal que cada $M_{\alpha} \in \mathfrak{K}$ y $x_1 + \ldots + x_n = x \in M$ con $x_i \in M_i$, entonces $(0:x) = \bigcap_{i=1}^{n} (0:x_i)$, como cada $(0:x_i) \in \mathfrak{A}$, se tiene que $(0:x) \in \mathfrak{A}$. Por último, supongamos que existe $M \in \mathfrak{K}$ y $x \in E(M)$ con $(0:x) \notin \mathfrak{A}$. Entonces $\exists J \leq R$ tal que $(0:x) \subsetneq J$ y $((0:x):a) \notin \mathfrak{A} \forall a \in J \setminus (0:x)$. Sea $Y \leq Rx$ tal que

$$0 \neq Y \cong \frac{J}{(0:x)} \text{ y } 0 \neq y \in Y \cap M \neq (0),$$

entonces

$$\frac{R}{(0:y)} \cong Ry \cong \frac{Ra+(0:x)}{(0:x)} \cong \frac{R}{((0:x):a)}$$

para alguna $a \in J \setminus (0:x)$.

Como $((0:x):a) \notin \mathfrak{A}$ entonces $(0:y) \notin \mathfrak{A}$. Así que $Y \cap M \notin \mathfrak{K} \Rightarrow M \notin \mathfrak{K}$.

Para finalizar, veamos que $\mathfrak{A} = H_{\mathfrak{N}}(R)$.

En esta situación

$$H_{\mathfrak{K}}(R) = \left\{ I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \mathfrak{K} \right\} = \left\{ I \leq R \mid \forall \overline{x} \in \frac{R}{I}, (\overline{0} : \overline{x}) \in \mathfrak{A} \right\}$$

Así que:

$$\begin{aligned} I &\in H_{\mathfrak{N}}(R) \Leftrightarrow \frac{R}{I} \in \mathfrak{K} \Leftrightarrow \overline{x} \in \frac{R}{I}, (\overline{0} : \overline{x}) \in \mathfrak{A} \\ &\Leftrightarrow (I : x) \in \mathfrak{A}, \forall x \in R \Leftrightarrow I \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

■

Corolario 26 *$R-Nat$ es un conjunto.* ■

Definición 27 *Un $R-$módulo distinto de cero M, se llama atómico si para cualquier submódulo distinto de cero N, $\langle M \rangle = \langle N \rangle$.*

Observación 28 *$M \in R-Mod$ es atómico $\Leftrightarrow$ $\langle M \rangle$ es un átomo en $R-Nat$.*

Demostración. $(\Leftarrow)$ Es clara.

($\Rightarrow$) Sean $0 \neq \mathfrak{N} \leq \langle M \rangle$ y $0 \neq N \in \mathfrak{N}$, entonces $N \in \langle M \rangle$ y $\exists N_1 \rightarrowtail N$ con $N_1 \leq M$. Entonces tenemos que $\mathfrak{N} \leq \langle M \rangle = \langle N_1 \rangle \leq \langle N \rangle \leq \mathfrak{N}$. Por lo tanto $\langle M \rangle$ es un átomo en $R-Nat$. ■

Proposición 29 *$M \in R-Mod$ es atómico $\Leftrightarrow$ para cualquier par de submódulos distintos de cero, N_1 y N_2, existen $0 \neq P_1 \leq N_1$ y $0 \neq P_2 \leq N_2$ tales que $P_1 \cong P_2$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean N_1 y N_2 submódulos distintos de cero de M. Entonces $\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle$ así que $N_1 \in \langle N_2 \rangle$ y $\exists 0 \neq P_2 \leq N_2$ tal que $P_2 \overset{\theta}{\rightarrowtail} N_1$. Hacemos $P_1 = \theta(P_2) \cong P_2$ y obtenemos la conclusión.

($\Leftarrow$) Sean N_1 y N_2 submódulos distintos de cero de M. Demostraremos que $\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle$. Basta demostrar que $N_1 \in \langle N_2 \rangle$

Sean $0 \neq L \leq N_1$ y $0 \neq P_1 \leq L$ y $0 \neq P_2 \leq N_2$ tales que $P_1 \cong P_2$.

Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 0 \neq L & \hookrightarrow & N_1 \\ \subseteq \uparrow & & \\ P_1 & & \\ \cong \uparrow & & \\ P_2 & \hookrightarrow & N_2 \end{array}$$

Por lo tanto $N_1 \in \langle N_2 \rangle$. ■

Ejemplo 30 *Veamos un poco de la estructura de retícula de $\mathbb{Z}-Nat$.*

Cada grupo abeliano $\mathbb{Z}_p$ genera un átomo de la retícula ya que es un campo. Como cada $n\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}-módulos$, tenemos que $\mathbb{Z}$ es atómico. Por otra parte, si G es un grupo abeliano, entonces siempre incluye una copia de algún $\mathbb{Z}_p$ o una copia de $\mathbb{Z}$, por lo tanto, $\left\{\langle\mathbb{Z}\rangle, \{\mathbb{Z}_p\}_{p\in\mathbb{P}}\right\}$ donde $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los números primos positivos, son todos los átomos de $\mathbb{Z}-Nat$.

Ahora bien, es fácil ver que la clase de los $\mathbb{Z}-módulos$ de torsión,$\mathbb{T}$, es una clase natural; de hecho es la clase de torsión de la teoría de torsión de Goldie (que es estable) y como cada $\mathbb{Z}_p$ es de torsión, $\bigvee_{p\in\mathbb{P}} \langle\mathbb{Z}_p\rangle \leq \mathbb{T}$. Recíprocamente todo $\mathbb{Z}$ − *módulo* de torsión incluye una copia de algún $\mathbb{Z}_p$, por lo tanto $\bigvee_{p \in \mathbb{P}} \langle \mathbb{Z}_p \rangle = \mathbb{T}$.

Si $\mathbb{F}$ denota la clase de los $\mathbb{Z}$ − *módulos* libres de torsión, entonces $\mathbb{F} = \langle \mathbb{Z} \rangle$ y se tiene que $\mathbb{F} \vee \mathbb{T} = \mathbb{Z} - Mod$ por la observación de arriba.

Los demás puntos de la retícula quedan en términos de estas. ■

1.2 Submódulos de Tipo.

Sea $\mathfrak{N} \in R - Nat$ y $M \in R - Mod$, como $(0) \leq M$ y $0 \in \mathfrak{N}$, la familia de los submódulos de M que están en $\mathfrak{N}$ es no vacía y por el lema de Zorn, podemos tomar una familia independiente máxima $\{N_i\}_{i \in I}$, de submódulos de M, con la propiedad de que cada $N_i \in \mathfrak{N}$.

Tomamos $N = E(\bigoplus_{i \in I} N_i) \cap M$, entonces $N \in \mathfrak{N}$.

Observación 31 *$N \leq M \in R - Mod$ es esencialmente cerrado en M $\Leftrightarrow$ $N = M \cap E$ donde E es un sumando directo de $E(M)$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Tenemos que $N \leq M$ y $N \underset{es}{\subseteq} E(N)$. Por lo tanto $N \underset{es}{\subseteq} M \cap E(N) \leq E(N)$ y $N \underset{es}{\subseteq} M \cap E(N) \leq M$. Como N es cerrado en M, $N = M \cap E(N)$. Además, $E(N)$ es un sumando de $E(M)$.

$(\Leftarrow)$ Sea $N \underset{es}{\subseteq} L \leq M$ con $N = M \cap E$ y E un sumando directo de $E(M)$.

$E(M \cap E) = E(L)$ y tenemos que $E(L) = E(M \cap E) \leq E(M) \cap E(E) = E(M) \cap E \leq E$. Así que, $(L \underset{es}{\subseteq} E(L) \leq E) \Rightarrow L = L \cap M \leq E(L) \cap M \leq E \cap M = N$. Por lo tanto $L = N$ y N es esencialmente cerrado en M. ■

De esta observación podemos concluir que $N = E(\bigoplus_{i \in I} N_i) \cap M$, construido como arriba, es un submódulo esencialmente cerrado de M que, además, está en $\mathfrak{N}$.

Lema 32 *Sea $\mathfrak{N} \in R-Nat$ y $M \in R-Mod$. Entonces existe un submódulo N de M, máximo con la propiedad de que $N \in \mathfrak{N}$.*

Demostración. Sea $N = E(\bigoplus_{i \in I} N_i) \cap M$, como arriba, que es esencialmente cerrado en M y pertenece a $\mathfrak{N}$.

Supongamos que $N \lneqq L \leq M$ con $L \in \mathfrak{N}$, entonces N no es esencial en L y por lo tanto existe un submódulo L_1 de L, tal que $L_1 \cap N = 0$ y $L_1 \in \mathfrak{N}$. Así que $\{L_1\} \cup \{N_i\}_{i \in I}$ es independiente $\underset{\bullet}{\nabla}$ ■

Definición 33 *Si $N \leq M \in R-Mod$ es máximo con la propiedad de que $N \in \mathfrak{N} \in R-Nat$, decimos que es un submódulo de tipo de M, de tipo $\mathfrak{N}$, y lo denotamos por $N \leq_t M$.*

Observación 34 *Si $N \leq_t M$, entonces N es un complemento en M (esencialmente cerrado en M).*

Demostración. Si A es seudocomplemento de N en M y B es seudocomplemento de A tal que $N \leq B$, entonces $N \underset{es}{\subseteq} B$. Así que $B \in \mathfrak{N}$. Por lo tanto $B = N$. ∎

Ejemplo 35 *Los siguientes son ejemplos de submódulos de tipo:*

a) $\forall M \in R-Mod$, $(0) \leq_t M$ *de tipo* $\mathfrak{N} = \mathbf{0}$.

b) $\forall M \in R-Mod$, $M \leq_t M$ *de tipo* $\mathfrak{N} = \langle M \rangle$.

Definición 36 *Decimos que dos módulos son ortogonales si no tienen submódulos isomorfos distintos de cero y lo denotamos por* $M_1 \perp M_2$.

Observación 37 *Si* K *es un complemento de* L *y* L *es un complemento de* M, *entonces* K *es un complemento de* M.

Demostración. Sea K seudocomplemento de K_1 en L, y L seudocomplemento de L_1 en M.

Entonces $K \cap (K_1 + L_1) = 0$. Sea C un seudocomplemento de $K_1 + L_1$ en M con $K \leq C$.

Tomemos $D = L \cap (C + L_1)$, entonces $K \leq D \leq L$ y $D \cap K_1 = 0$. Por lo tanto $K = D$ y esto implica que $(C + L) \cap L_1 = 0$. Así que $C + L = L$, lo que implica que $C \leq L$. $\therefore C = K$ y K es complemento de M. ∎

Lema 38 *Sean* $M \in R-Mod$ *y* $N, P \leq M$, *entonces:*

1. M es atómico $\Leftrightarrow$ (0) y M son los únicos submódulos de tipo de M.

2. $N \leq_t M \Rightarrow N$ es de tipo $\langle N \rangle$.

3. Si $N \leq_t M$ entonces $(N \cap P = 0 \Leftrightarrow N \perp P)$.

4. Si $N \leq_t M$ y $N \underset{es}{\subseteq} P$, entonces $N = P$.

5. Si $N \perp P$ y $N \oplus P \underset{es}{\subseteq} M$, entonces cualquier seudocomplemento X, de N en M con $P \leq N$ es un submódulo de tipo de M.

6. Si $N \leq_t M$ y P es un seudocomplemento de N en M, entonces $P \leq_t M$.

7. Sea $X = \bigoplus\limits_{i \in I} X_i$ una suma directa de submódulos de tipo de M, entonces cualquier cerradura esencial X^c de X en M es un submódulo de tipo de M.

8. Si $P \leq_t N$ y $N \leq_t M$, entonces $P \leq_t M$.

Demostración. (1) $(\Rightarrow)$ Sea $0 \neq N \leq M$. Si $N \in \mathfrak{N}$, como $\langle M \rangle = \langle N \rangle \leq \mathfrak{N}$,entonces $M \in \mathfrak{N}$.

$(\Leftarrow)$ Si $0 \neq N \leq M$, como $N \in \langle N \rangle$, se tiene,de la hipótesis, que $M \in \langle N \rangle$. Por lo tanto $\langle M \rangle = \langle N \rangle$.

(2) Si $N \leq_t M$ entonces existe $\mathfrak{N} \in R - Nat$ tal que N es máximo con la propiedad de estar en $\mathfrak{N}$. Supongamos que $N \leq N_1 \leq M$ con $N_1 \in \langle N \rangle$,

entonces $\langle N\rangle = \langle N_1\rangle$. Por lo tanto $N_1 \in \mathfrak{N}$ ya que $N \in \langle N\rangle \leq \mathfrak{N}$. $\therefore N_1 = N$ y N_1 es de tipo $\langle N\rangle$.

(3) Supongamos que $N \leq_t M$ entonces existe $\mathfrak{N} \in R-Nat$ tal que N es máximo con la propiedad de estar en $\mathfrak{N}$.

($\Rightarrow$) Si $N \cap P = 0$ entonces $P \notin \mathfrak{N}$ por la maximalidad de N. Por lo tanto $\forall 0 \neq P_1 \leq P$, $P_1 \notin \mathfrak{N}$. Esto significa que $P \in \mathfrak{N}^{\perp}$. Así que N y P no tienen submódulos isomorfos.

($\Leftarrow$) Es claro.

(4) Es claro de la definición de submódulo de tipo y de la cerradura bajo extensiones esenciales de las clases naturales.

(5) Sean $N \perp P$ y $N \oplus P \underset{es}{\subseteq} M$ y X un seudocomplemento de N en M con $P \leq X$. Veamos que $X \leq_t M$ de tipo $\langle X\rangle$.

Supongamos que $X \lneqq Y \leq M$ con $Y \in \langle X\rangle$. Entonces, por la maximalidad de X, $Y \cap N \neq 0$. Como $Y \in \langle X\rangle$, $Y \cap N \in \langle X\rangle$ y por lo tanto existen $0 \neq Y_1$ y X_1 tales que $N \geq Y \cap N \geq Y_1 \cong X_1 \leq X$. Si $X_1 \cap P \neq 0$ entonces $P \geq X_1 \cap P \cong Y_2 \leq Y_1 \leq N$ para alguna Y_2, pero $N \perp P$ $\underset{\bullet}{\nabla}$. Así que $X_1 \cap P = 0$. (I) Por otro lado, como $N \oplus P \underset{es}{\subseteq} M$ y $N \oplus P \leq N \oplus X \leq M$, $N \oplus P \underset{es}{\subseteq} N \oplus X$. Sea $x \in X \Rightarrow x = 0 + x \in N \oplus X$ así que existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq rx = 0 + rx \in N \oplus P \Rightarrow rx \in P$. Por lo tanto $P \underset{es}{\subseteq} X$. (II).

$\therefore$ (I) y (II) nos llevan a una contradicción. Así que $Y = X$.

(6) Es una consecuencia de (3) y (5).

(7) Sean $X = \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ una suma directa de submódulos de tipo de M, X^c cualquier cerradura esencial de X en M y Y un seudocomplemento de X^c en M. Entonces, por (3) $X_i \perp Y$ $\forall i \in I$.

Por lo tanto $X^c \perp Y$. En efecto, Si $X^c \geq X_1 \cong Y_1 \leq Y$, entonces $X_2 = X_1 \cap X \neq 0$, por el *Lema* 4, existen $X_2 \geq X_3 \cong X_4 \leq X_j$ con $X_3 \neq 0$, para alguna $j \in I$, pero $X_j \perp Y$ ∇.

Por otra parte, Y es seudocomplemento de X en M ya que $X \underset{es}{\subseteq} X^c$. Por lo tanto tenemos que $X \perp Y$ y $X \oplus Y \underset{es}{\subseteq} M$ y X^c seudocomplemento de de Y tal que $X \leq X^c$. Así que, por (5), $X^c \leq_t M$.

(8) Supongamos que $P \leq_t N$ y $N \leq_t M$.

Sean N_1 seudocomplemento de N en M y P_1 seudocomplemento de P en N.

Entonces $P_1 + N_1 = P_1 \oplus N_1$ y $P \cap (P_1 \oplus N_1) = 0$. Por (3) $P \perp P_1$ y $N \perp N_1$. Por lo tanto $P \perp P_1 \oplus N_1$.

Por la observación anterior, P es un complemento de M. Y como

$$\left(\left(P \oplus P_1 \underset{es}{\subseteq} N\right) \wedge \left(N \oplus N_1 \underset{es}{\subseteq} M\right)\right) \Rightarrow P \oplus P_1 \oplus N_1 \underset{es}{\subseteq} M$$

de (7) se concluye que $P \leq_t M$. ■

1.3 Condición (TS).

Definición 39 *Decimos que un $R -$ módulo es un módulo $- TS$ si todo submódulo de tipo de M es un sumando directo.*

Ejemplo 40 *Los siguientes son ejemplos de módulos TS:*

a) Todo módulo atómico es un módulo-TS.

b) Todo módulo extendido y todo módulo casi-continuo es TS.

Lema 41 *Si M es un módulo-TS, también lo es cualquier submódulo de tipo de M.*

Demostración. Supongamos que M es TS y sea $N \leq_t M$, entonces N es un sumando de M. Si $N_1 \leq_t N$ por el *Lema* 38(8) $N_1 \leq_t M$. Así que N_1 es un sumando de M, es decir, $\exists L \leq M$ tal que $N_1 \oplus L = M$.

Por la ley modular tenemos que $N = N \cap (N_1 \oplus L) = N_1 \oplus (N \cap L)$ ya que $L \cap N_1 = 0 \Rightarrow N_1 \cap (N \cap L) = 0$. Así que N_1 es un sumando de N. Por lo tanto N es TS. ■

Lema 42 *Sea $M = M_1 \oplus M_2$. Si M_2 es M_1-inyectivo, entonces para todo $N \leq M$ tal que $N \cap M_2 = 0$, existe $N_1 \leq M$ tal que $M = N_1 \oplus M_2$ y $N \leq N_1$.*

Demostración. Sea N_1 seudocomplemento de M_2 en M, tal que $N \leq N_1$.

Tomamos P_1 y P_2 las proyecciones de $M_1 \oplus M_2$ en M_1 y M_2 respectivamente.

Entonces $N_1 \xrightarrow{P_1|} M_1$, la restricción de P_1 a N_1 es mono. En efecto, si $x_1 + x_2 = n \in N_1$ y si $P_1(n) = 0$, entonces $x_1 = 0$. Por lo tanto $n \in M_2 \cap N_1 = 0$. Así que $n = 0$.

Ahora bien, $P_2 \mid_{N_1} = 0 \Rightarrow N_1 \leq M_1 \Rightarrow N_1 = M_1$. Así que podemos suponer que $P_2 \mid_{N_1} \neq 0$.

En esta situación tenemos que existe el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & N_1 & \overset{P_1|}{\rightarrowtail} & M_1 \\ & P_2 & \downarrow & =\swarrow & f \\ & & M_2 & & \end{array}$$

ya que M_2 es M_1-inyectivo.

Sean $A = \{z + f(z) \mid z \in M_1\}$ y $n \in N_1$, entonces $n = x_1 + x_2$ $(x_i \in M_i)$, por lo tanto, $x_1 + f(x_1) = x_1 + x_2 = n$. Así que $N_1 \subseteq A$.

Ahora bien, si $z + f(z) \in A \cap M_2$ $(z \in M_1)$, entonces $z + f(z) = m_2 \Rightarrow z = m_2 - f(z) \in M_2 \cap M_1 = 0$.

Por lo tanto $z = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \Rightarrow A \cap M_2 = 0 \Rightarrow A = N_1$ por la maximalidad de N_1.

Sea $m \in M$, entonces $m = m_1 + m_2$ y $m = (m_1 + f(m_1)) + (m_2 - f(m_2))$, donde $(m_1 + f(m_1)) \in N_1$ y $(m_2 - f(m_2)) \in M_2$.

Por lo tanto $M = N_1 \oplus M_2$. ■

Observación 43 *Si $M = N \oplus L$ y $M = N \oplus K$, entonces $L \cong K$.*

Demostración. Como tenemos que para toda $l \in L$, $l = n + k \in N \oplus K$, podemos definir el homomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \psi: & L & \to & K \\ & l & \mapsto & k \quad \text{donde } l = n + k \end{array}$$

que resulta ser un isomorfismo. ■

Observación 44 *Si σ es una teoría de torsión hereditaria estable, entonces $t_\sigma(M) \leq_t M$.*

Demostración. Veamos que $t_\sigma(M) \leq_t M$ de tipo $\langle t_\sigma(M) \rangle$.

Sea $L \leq M$ tal que $t_\sigma(M) \lneqq L \leq M$ con $L \in \langle t_\sigma(M) \rangle$. Como σ es estable, $t_\sigma(M)$ es esencialmente cerrado en M. Por lo tanto existe $0 \neq L_1 \leq L$ tal que $L_1 \cap t_\sigma(M) = 0$. Así que $L_1 \in t_\sigma(M) \subseteq \mathbb{T}_\sigma$ (la clase de torsión de σ). Por lo tanto $L_1 \leq t_\sigma(M)$ $\underset{\bullet}{\nabla}$.

$\therefore t_\sigma(M) \leq_t M$ de tipo $\langle t_\sigma(M)\rangle$. ■

Teorema 45 *Sea σ una teoría de torsión hereditaria estable, entonces M es un módulo-TS si y sólo si $M = t_\sigma(M) \oplus N$ donde $t_\sigma(M)$ y N son TS y $t_\sigma(M)$ es N-inyectivo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como $t_\sigma(M)$ es un submódulo de tipo de M, de la hipótesis, se tiene que $M = t_\sigma(M) \oplus N$ para alguna $N \leq M$. Entonces $N \leq_t M$ y por el *Lema* 41, $t_\sigma(M)$ y N son módulos-TS.

Sea $f : X \to t_\sigma(M)$ homomorfismo donde $X \leq N$ y $Y = \{x - f(x) \mid x \in X\}$. Entonces $Y \leq M$ y $Y \cap t_\sigma(M) = 0$.

Sea Y_1 seudocomplemento de $t_\sigma(M)$ en M tal que $Y \leq Y_1$, entonces por el *Lema* 38 $Y_1 \leq_t M$, así que existe $V \leq M$ tal que $M = Y_1 \oplus V$.

Como $\sigma(Y_1) = 0$, se tiene que $t_\sigma(M) = \sigma(V)$. Por lo tanto $V = V_1 \oplus t_\sigma(M) \Rightarrow M = (Y_1 \oplus V_1) \oplus t_\sigma(M)$.

Sea π la proyección canónica de $M = (Y_1 \oplus V_1) \oplus t_\sigma(M)$ en $t_\sigma(M)$. Entonces $\pi\mid_N$ extiende a f.

En efecto, sea $x \in X$ entonces $x - f(x) \in Y \subseteq Y_1$ y se tiene que $\pi(x) - f(x) = \pi(x) - \pi(f(x)) = \pi(x - f(x)) = 0$. Por lo tanto $\pi(x) = f(x)$ $\forall x \in X$.

En consecuencia $t_\sigma(M)$ es N-inyectivo.

($\Leftarrow$) Sea $X \leq_t M$. Como $\sigma(X) \leq_t X$, se tiene que $\sigma(X) \leq_t M$. Por lo tanto $\sigma(X) \leq_t t_\sigma(M)$.

Como $t_\sigma(M)$ es TS, $\sigma(X)$ es un sumando directo de $t_\sigma(M)$ y como por hipótesis, $t_\sigma(M)$ es un sumando directo de M, se tiene que $\sigma(X)$ es un sumando directo de M. Entonces $\sigma(X)$ es un sumando directo de X (por la ley modular).

Supongamos que $X = \sigma(X) \oplus Y$. Como $\sigma(Y) = 0$, se tiene que $Y \cap t_\sigma(M) = 0$. Por lo tanto, por el *Lema* 42, tenemos que $M = Y_1 \oplus t_\sigma(M)$ para alguna $Y_1 \leq M$, con $Y \leq Y_1$. Notemos que $Y \leq_t X$ lo que implica que $Y \leq_t M$. Por lo tanto $Y \leq_t Y_1$.

Por la *Observación* 43, tenemos que $Y_1 \cong N$. Como N es TS, Y_1 lo es. Así que Y es un sumando directo de Y_1.

Como $Y_1 = Y \oplus L$ y $t_\sigma(M) = \sigma(X) \oplus Q$ para algunas L y Q, tenemos que $M = t_\sigma(M) \oplus Y_1 = (\sigma(X) \oplus Q) \oplus (Y \oplus L) = (Y \oplus \sigma(X)) \oplus (Q \oplus L)$. Por lo tanto $X = Y \oplus \sigma(X)$ es un sumando directo de M. Así que M es TS. ■

• Recordamos que si σ es una teoría de torsión hereditaria, $M \in R-Mod$ y $N \leq M$, entonces:

1. N es $\sigma-denso$ en M si $\frac{M}{N}$ es de $\sigma-torsión$.

2. N es $\sigma-puro$ en M si $\frac{M}{N}$ es libre de $\sigma-torsión$.

3. M es $\sigma-cerrado$ si es $\sigma-inyectivo$ y libre de $\sigma-torsión$

Si σ es una teoría de torsión hereditaria, denotamos $(R,\sigma)-Mod$ a la clase de los $R-módulos$ $\sigma-cerrados$. Entonces $(R,\sigma)-Mod$ es una categoría de Gröthendieck. Una categoría de Gröthendieck es espectral si cada sucesión exacta corta se escinde.

Definición 46 *$\sigma \in R-tors$ se llama espectral si $(R,\sigma)-Mod$ es una categoría espectral.*

Para lo siguiente utilizaremos el siguiente resultado conocido: [[2], *Proposition* 1.1]

Proposición 47 *Sea $M \in R-Mod$ y $\sigma \in R-tors$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. σ es espectral.

2. Si M es $\sigma-cerrado$, entonces M es inyectivo.

3. Si M es libre de $\sigma-torsión$ y N es un submódulo de M, entonces N es $\sigma-denso$ en M si y sólo si N es esencial en M.

4. Si M es $\sigma-cerrado$ y N es un submódulo de M, entonces N es $\sigma-puro$ en M si y solo si N es un sumando directo de M. ∎

Lema 48 *Sean σ una teoría de torsión hereditaria espectral y M un $R-$ módulo libre de $\sigma-torsión$, entonces cualquier submódulo N de M tiene una única cerradura esencial.*

Demostración. Sea M libre de $\sigma-torsión$ y $0 \neq N \leq M$.

Supongamos que $N \underset{es}{\subseteq} L \leq M$ y $N \underset{es}{\subseteq} K \leq M$. Afirmamos que $N \underset{es}{\subseteq} L+K$.

En efecto, si no fuera cierta la afirmación, existiría un submódulo distinto de cero U, de $L+K$ tal que $(L+K) \cap U = 0$.

Por lo tanto el morfismo

$$\begin{array}{ccc} U & \rightarrow & \frac{L+K}{N} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

es un monomorfismo. Pero, por la proposición anterior, $\frac{L}{N}$ y $\frac{K}{N}$ son de $\sigma-torsión$. Así tenemos que

$$\frac{L}{N} \oplus \frac{K}{N} \twoheadrightarrow \frac{L+K}{N} \text{ con } \frac{L}{N} \oplus \frac{K}{N} \text{ de } \sigma-\text{torsión}.$$

Por lo tanto $\frac{L+K}{N}$ es de $\sigma-torsión$ y en consecuencia U lo es.

Por otra parte, U es libre de $\sigma - torsión$ ya que es submódulo de M que lo es. Así que $U = 0$ $\underset{\bullet}{\nabla}$

Por lo antes demostrado, no puede haber más de una cerradura esencial para un submódulo de M. ■

Corolario 49 *En la situación del lema anterior M tiene un único submódulo $M_{\mathfrak{N}} \leq_t M$, de tipo $\mathfrak{N}$ $\forall \mathfrak{N} \in R - Nat$.*

Demostración. Sea $M \in \mathbb{F}_\sigma$ donde σ es una teoría de torsión hereditaria espectral, y sea $M_{\mathfrak{N}} = \sum \{V \leq M \mid V \in \mathfrak{N}\}$. Veamos que $M_{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$.

Basta demostrar que si V_1, $V_2 \leq M$ tales que V_1, $V_2 \in \mathfrak{N}$, entonces $V_1 + V_2 \in \mathfrak{N}$.

Sean C_1 y $C_2 \leq_t M$ tales que $V_i \leq C_i$ $(i = 1, 2)$.

1) Si $C_1 \cap C_2 = 0$, entonces $C_1 + C_2 = C_1 \oplus C_2 \in \mathfrak{N}$. Así que $V_1 \oplus V_2 \in \mathfrak{N}$.

2) Supongamos que $D = C_1 \cap C_2 \neq 0$.

a) Si $D \underset{es}{\subseteq} C_1$ y $D \underset{es}{\subseteq} C_2$, entonces la cerradura esencial C (lema anterior) de D en M incluye a C_1 y a C_2. Por lo tanto $C_1 + C_2 \subseteq C$ y $C \in \mathfrak{N}$. Por lo tanto $V_1 + V_2 \in \mathfrak{N}$.

b) Supongamos que D no es esencial en C_1, entonces existe $P \leq C_1$ máximo con la propiedad de que $P \cap D = 0$, entonces $D \oplus P \underset{es}{\subseteq} C_1$ y $P \in \mathfrak{N}$ y $C_2 \subsetneqq C_2 \oplus P$ $\underset{\bullet}{\nabla}$. Por lo tanto se llega al caso (a). ■

Teorema 50 *Sean σ una teoría de torsión espectral, M un $R-$módulo libre de $\sigma-torsión$ y $\mathfrak{N}$ una clase natural.*

Entonces M es TS si y sólo si $M = M_1 \oplus M_2$ con M_1 y M_2 módulos TS y $M_1 \in \mathfrak{N}$, $M_2 \in \mathfrak{N}^{\perp}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Siempre se tiene.

($\Leftarrow$) Supongamos que $M = M_1 \oplus M_2$ con M_1 y M_2 módulos TS y $M_1 \in \mathfrak{N}$, $M_2 \in \mathfrak{N}^{\perp}$.

Sea $\mathfrak{F} \in R-Nat$ y $N \leq_t M$ de tipo $\mathfrak{F}$. Como cada M_i es TS, usamos ($\Rightarrow$) y obtenemos que $M_i = X_i \oplus Y_i$ con $X_i \in \mathfrak{F}$ y $Y_i \in \mathfrak{F}^{\perp} (i = 1, 2)$. Entonces $M = X \oplus Y$ donde $X = X_1 \oplus X_2$ y $Y = Y_1 \oplus Y_2$.

Como cada X_i es ortogonal a cada Y_i $(i = 1, 2)$, del *Lema* 4 se concluye que $X \perp Y$. Así que $X \leq_t M$ de tipo $\mathfrak{F}$.

Por el corolario del lema anterior, podemos concluir que $N = X$. Así que N es un sumando directo de M y M es TS. ∎

1.4 Descomposición en sumas directas

• Sea $\mathfrak{N} \in R-Nat$, a un submódulo de tipo de M, de tipo $\mathfrak{N}$ lo denotaremos por $M_{(\mathfrak{N})}$.

Definición 51 *Decimos que un sumando directo A de M es superspectivo a un sumando directo B de M si siempre que se tiene un submódulo X de M, entonces $M = A \oplus X$ si y solo si $M = B \oplus X$. Una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ con una propiedad $P(\_)$ se dice que es única salvo superspectividad si para cualquier otra descomposición $M = N_1 \oplus N_2$ con la misma propiedad $P(\_)$, entonces M_i es superspectivo a N_i $(i = 1, 2)$.*

Proposición 52 *Para cualquier clase natural $\mathfrak{N}$ y cualquier módulo M, supongamos que $N_1 \oplus C_1 \underset{es}{\subseteq} M$, $N_2 \oplus C_2 \underset{es}{\subseteq} M$, con $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$ y $C_1, C_2 \in \mathfrak{N}^{\perp}$, entonces:*

1. $E(N_1) \oplus E(C_2) = E(N_2) \oplus E(C_1) = E(M)$
2. $E(N_1) \cong E(N_2)$ y $E(C_1) \cong E(C_2)$
3. Existe $D_1 \underset{es}{\subseteq} N_1$, $D_2 \underset{es}{\subseteq} N_2$ y un isomorfismo $\theta : D_1 \to D_2$.
4. Para toda $M_{(\mathfrak{N})} \oplus M_{(\mathfrak{N}^{\perp})} \underset{es}{\subseteq} M$, en la descomposición $E(M) = E(M_{(\mathfrak{N})}) \oplus E(M_{(\mathfrak{N}^{\perp})})$, los submódulos $E(M_{(\mathfrak{N})})$ y $E(M_{(\mathfrak{N}^{\perp})})$ de $E(M)$ son únicos salvo superspectividad.

Demostración. Para (1) y (2) Supondremos que $M = N_1 \oplus C_1 = N_2 \oplus C_2$ son todos inyectivos.

(1) Como $\mathfrak{N} \wedge \mathfrak{N}^{\perp} = 0$, $N_1 \cap C_2 = 0$ y $N_2 \cap C_1 = 0$. Y es claro que N_1, N_2, C_1, C_2 son submódulos de tipo de M de tipo la respectiva clase natural en la que están.

Sea $N_1 \oplus C_2 \oplus D = M$ para alguna $D \leq M$. Entonces D tiene que ser cero. En efecto, del *Lema* 38(3) se sigue que $D \in \mathfrak{N}$ por ser ortogonal con C_2 y $D \in \mathfrak{N}^{\perp}$ por ser ortogonal a N_1. Así que $D \in \mathfrak{N} \wedge \mathfrak{N}^{\perp} = 0$. Por lo tanto $N_1 \oplus C_2 = M$. Análogamente se tiene que $N_2 \oplus C_1 = M$

(2) Tenemos que $M = M_1 \oplus C_1 = M_1 \oplus C_2$, así que por el *Lema* 43 $C_1 \cong C_2$. Análogamente $N_1 \cong N_2$.

(3) Tenemos que $N_i \oplus C_i \underset{es}{\subseteq} M \underset{es}{\subseteq} E(M) = E(N_i) \oplus E(C_i)$ ($i = 1, 2$).

Sea $f : E(N_1) \overset{\cong}{\rightarrow} E(N_2)$. Recordando que bajo isomorfismos, esenciales van a dar a esenciales e imágenes inversas de esenciales también lo son, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(N_1) \underset{es}{\subseteq} E(N_2) \quad &\Rightarrow \quad f(N_1) \cap N_2 \underset{es}{\subseteq} E(N_2) \Rightarrow f^{-1}\left[f(N_1) \cap N_2\right] \underset{es}{\subseteq} E(N_1). \\ &\Rightarrow \quad D_1 = N_1 \cap f^{-1}\left[f(N_1) \cap N_2\right] \underset{es}{\subseteq} E(N_1) y f(D_1) \subseteq N_2 \end{aligned}$$

Entonces $D_2 = f(D_1) \underset{es}{\subseteq} E(N_2)$ y tenemos que $D_1 \cong D_2$ con $D_1 \underset{es}{\subseteq} E(N_1)$ y $D_2 \underset{es}{\subseteq} E(N_2)$ y $D_1 \subseteq N_1$ y $D_2 \subseteq N_2$. Por lo tanto $D_1 \underset{es}{\subseteq} N_1 y D_2 \underset{es}{\subseteq} N_2$.

(4) Supongamos que $E(M) = E(N_1) \oplus E(C_1) = E(N_2) \oplus E(C_2)$ con la propiedad de que $E(N_i) \in \mathfrak{N}$ y $E(C_i) \in \mathfrak{N}^{\perp}(i = 1, 2)$ arbitrarios.

En la demostración de (1) se ve que si $X \leq_t E(M)$ de tipo $\mathfrak{N}^{\perp}$, entonces $E(M) = E(N_1) \oplus X \Leftrightarrow E(M) = E(N_2) \oplus X$. Por lo tanto $E(N_1)$ es superspectivo a $E(N_2)$.

Análogamente $E(C_1)$ es superspectivo a $E(C_2)$. ■

Definición 53 *Sea σ una teoría de torsión hereditaria estable y $\mathfrak{N}$ una clase natural, definimos:*

1. $t_{\mathfrak{N}} = \{M \in \mathfrak{N} \mid t_\sigma(M) = M\}$

2. $f_{\mathfrak{N}} = \{N \in \mathfrak{N} \mid t_\sigma(N) = 0\}$

3. $(R-Nat)_t = \{\mathfrak{N} \in R-Nat \mid \forall M \in \mathfrak{N},\ t_\sigma(M) = M\}$

4. $(R-Nat)_f = \{\mathfrak{N} \in R-Nat \mid \forall M \in \mathfrak{N},\ t_\sigma(M) = 0\}$

Proposición 54 *En la situación de la definición anterior se tiene:*

1. $t_{\mathfrak{N}}$ y $f_{\mathfrak{N}} \in R-Nat$.

2. $t_{\mathfrak{N}} \wedge f_{\mathfrak{N}} = 0$ y $t_{\mathfrak{N}} \vee f_{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$.

3. $R-Nat = (R-Nat)_t \oplus (R-Nat)_f$ es una suma directa de subretículas completas convexas.

Demostración. Como σ es estable, tenemos que $\mathbb{T}_\sigma$ y $\mathbb{F}_\sigma$ son clases naturales y $t_\mathfrak{N}$ y $f_\mathfrak{N}$ se obtienen intersectando con $\mathfrak{N}$ dichas clases respectivamente, se tiene (1).

(2) Es claro que $t_\mathfrak{N} \wedge f_\mathfrak{N} = 0$ y que $t_\mathfrak{N} \vee f_\mathfrak{N} \leq \mathfrak{N}$.

Sea $M \in \mathfrak{N}$. Tomemos C un seudocomplemento de $t_\sigma(M)$ en $\mathfrak{N}$, entonces $C \in \mathbb{F}_\sigma$ y por lo tanto $C \in f_\mathfrak{N}$. Como $t_\sigma(M) \in t_\mathfrak{N}$ del *Corolario* 12 se tiene que $M \in t_\mathfrak{N} \vee f_\mathfrak{N}$. Por lo tanto se tiene 2.

Del hecho de que $(R-Nat)_t$ y $(R-Nat)_f$ son cerradas bajo uniones e intersecciones arbitrarias y su interseccion es cero, son subretículas ortogonales convexas tales que

$$\begin{aligned}(R-Nat)_t \vee (R-Nat)_f &= \left\{\mathfrak{K} \vee \mathfrak{L} \mid \mathfrak{K} \in (R-Nat)_t, \mathfrak{L} \in (R-Nat)_f\right\} \\ &= (R-Nat)_t \oplus (R-Nat)_f \subseteq R-Nat.\end{aligned}$$

Y la ultima inclusión es igualdad por (2). ∎

Proposición 55 *Para cualquier módulo y cualquier* $\mathfrak{N} \in R-Nat$ *se tiene lo siguiente:*

1. $\mathfrak{N} \leq \langle M \rangle \Leftrightarrow \mathfrak{N} = \langle M_{(\mathfrak{N})} \rangle$
2. $\mathfrak{N} \wedge \langle M \rangle = \langle M_{(\mathfrak{N})} \rangle$

3. $\forall \mathfrak{M}, \mathfrak{L} \in R-Nat$, $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{L} = 0 \Leftrightarrow \forall M \in R-Mod$, para cualquier elección de $M_{(\mathfrak{M})}$ y $M_{(\mathfrak{L})} \leq M$, $M_{(\mathfrak{M})} \cap M_{(\mathfrak{L})} = 0$.

Demostración. (1)

($\Leftarrow$) es trivial.

($\Rightarrow$) Es claro que $\langle M_{(\mathfrak{N})} \rangle \leq \mathfrak{N}$. Recíprocamente, sea $N \in \mathfrak{N} \leq \langle M \rangle$, entonces, por el *Lema* 11(1) existe $\bigoplus_{j\in J} P_j \underset{es}{\subseteq} N$ con $P_j \leq N$ y $P_j \cong Q_j \leq M$.

Es suficiente demostrar que, para cada j, existe $A_j \underset{es}{\subseteq} P_j$ que es isomorfo a un submódulo de $M_{(\mathfrak{N})}$.

Tomemos $Q \leq_t M$ de tipo $\mathfrak{N}$ tal que $Q_j \leq Q$, entonces por la *Proposición* 52(3), existe $D \underset{es}{\subseteq} Q$ y $f : D \rightarrowtail M_{(\mathfrak{N})}$.

Sea $A_j = D \cap Q_j \underset{es}{\subseteq} Q_j$, entonces $A_j \cong f(A_j) \leq M_{(\mathfrak{N})}$.

(2) Por (1) $\mathfrak{N} \wedge \langle M \rangle \leq \langle M \rangle \Rightarrow \mathfrak{N} \wedge \langle M \rangle = \langle M_{\mathfrak{N}\wedge\langle M \rangle} \rangle = \langle M_{(\mathfrak{N})} \rangle$.

(3) ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{L} = 0$ y sea $M \in R-Mod$. Y tomemos $M_{(\mathfrak{M})}$ y $M_{(\mathfrak{L})} \leq M$.

Si $M_{(\mathfrak{M})} \cap M_{(\mathfrak{L})} \neq 0$ entonces $M_{(\mathfrak{M})} \cap M_{(\mathfrak{L})} = N \in \mathfrak{M} \wedge \mathfrak{L}$ $\underset{\bullet}{\nabla}$

($\Leftarrow$) Si $0 \neq M \in \mathfrak{M} \wedge \mathfrak{L}$, entonces $M_{(\mathfrak{M})} = M$ y $M_{(\mathfrak{L})} = M$. Así que $M_{(\mathfrak{M})} \cap M_{(\mathfrak{L})} = M = 0$ por la hipótesis y por lo tanto $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{L} = 0$. ■

Observación 56 *Sea* $\Lambda = \{\mathfrak{N}_i\}_{i\in X} \subseteq R-Nat$ *ajenos dos a dos y tales que* $\bigvee \Lambda = \mathbf{1}$.

Si $\Lambda = \Omega \mathring{\cup} \Delta$, *entonces* $(\bigvee \Omega) \bigwedge (\bigvee \Delta) = \mathbf{0}$.

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces $\exists 0 \neq M \in (\bigvee \Omega) \bigwedge (\bigvee \Delta)$.

Por el *Lema 11*(1), existen:

$$\bigoplus_{\gamma \in \Omega} p_\gamma \underset{es}{\subseteq} M \text{ con } p_\gamma \ \in \ \gamma \text{ y } p_\gamma \leq M. \text{ y}$$
$$\bigoplus_{\delta \in \Delta} q_\delta \underset{es}{\subseteq} M \text{ con } q_\delta \ \in \ \delta \text{ y } q_\delta \leq M.$$

Sea $0 \neq N = \left(\bigoplus_{\gamma \in \Omega} p_\gamma\right) \cap \left(\bigoplus_{\delta \in \Delta} q_\delta\right)$. Como $N \leq \bigoplus_{\delta \in \Delta} q_\delta$, por el *Lema* 4, existen $0 \neq N_1 \leq N$ y $0 \neq q_\delta^1 \leq q_\delta$ para alguna $\delta \in \Delta$ con $N_1 \cong q_\delta^1$.

Como $N_1 \leq \bigoplus_{\gamma \in \Omega} p_\gamma$ también existen $0 \neq N_2 \leq N_1$ y $0 \neq p_\gamma^1 \leq p_\gamma$ para alguna $\gamma \in \Omega$ con $N_2 \cong p_\gamma^1$.

Entonces $N_2 \cong q_\delta^2$ para alguna $q_\delta^2 \leq q_\delta^1$. y entonces $q_\delta \geq q_\delta^2 \cong p_\gamma^1 \leq p_\gamma$.

Pero $q_\delta \in \delta$ y $p_\gamma \in \gamma$ con $\gamma \cap \delta = (0)$ $\underset{\bullet}{\nabla}$

Por lo tanto $(\bigvee \Omega) \bigwedge (\bigvee \Delta) = \mathbf{0}$. ■

Proposición 57 *Sea* $\Gamma \subseteq R-Nat$ *conjunto con elementos ajenos dos a dos cuyo supremo es* $\bigvee \Gamma = \mathbf{1}$. *Para cualquier módulo* M, *sea* $\{M_{(\alpha)}\}_{\alpha \in \Gamma}$ *cualquier elección de submódulos de tipo de* M, *cada* $M_{(\alpha)}$ *de tipo* α. *Sea* $\Omega \subseteq \Gamma$ *y* $K \leq M$ *un submódulo complemento de* M *tal que* $\sum_{\alpha \in \Omega} M_{(\alpha)} \underset{es}{\subseteq} K$, *(note que* *tal K siempre existe) entonces:*

1. $\sum_{\alpha\in\Omega} M_{(\alpha)} = \bigoplus_{\alpha\in\Omega} M_{(\alpha)} \underset{es}{\subseteq} M$.

2. $K \in \bigvee\Omega$ es un submódulo de tipo de M de tipo $\bigvee\Omega$. Por lo tanto, si $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma\setminus\Omega} M_{(\alpha)} \underset{es}{\subseteq} L \leq M$ es cualquier submódulo complemento, entonces podemos tomar $K \equiv M_{(\vee\Omega)}$, $L \equiv M_{((\vee\Omega)^{\perp})}$, $M_{(\vee\Omega)} \oplus M_{((\vee\Omega)^{\perp})} \underset{es}{\subseteq} M$ donde $\bigoplus_{\alpha\in\Omega} M_{(\alpha)} \underset{es}{\subseteq} M_{(\vee\Omega)} \in \bigvee\Omega$, $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma\setminus\Omega} M_{(\alpha)} \underset{es}{\subseteq} M_{((\vee\Omega)^{\perp})} \in (\bigvee\Omega)^{\perp}$.

3. En particular, si $\Omega = \{\gamma\}$ entonces existe $\bigoplus_{\substack{\alpha\in\Gamma \\ \gamma\neq\alpha}} M_{(\alpha)} \underset{es}{\subseteq} M_{(\gamma^{\perp})} \in \gamma^{\perp}$, con $M_{(\gamma)} \oplus M_{(\gamma^{\perp})} \underset{es}{\subseteq} M$.

4. *Superspectividad.* Supongamos que $\{N^{(\alpha)}\}_{\alpha\in\Gamma}$ es cualquier otra elección de submódulos de tipo de M de tipo α para cada $\alpha \in \Gamma$ y $\bigoplus_{\alpha\in\Omega} N^{(\alpha)} \underset{es}{\subseteq} N^{(\vee\Omega)} \in \bigvee\Omega$ cualquier complemento en M (y por lo tanto un submódulo de tipo de M de tipo $\bigvee\Omega$). Entonces

$$E\left(\bigoplus_{\alpha\in\Gamma\setminus\Omega} N^{(\alpha)}\right) \cong E\left(M_{((\vee\Omega)^{\perp})}\right), \text{ con}$$

$$\left(\bigoplus_{\alpha\in\Omega} N^{(\alpha)}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Gamma\setminus\Omega} N_{(\alpha)}\right) \underset{es}{\subseteq} N^{(\vee\Omega)} \oplus M_{((\vee\Omega)^{\perp})} \underset{es}{\subseteq} M,$$

y además $E\left(N^{(\vee\Omega)}\right) \cong E\left(M_{(\vee\Omega)}\right)$.

5. En particular, si $\Omega = \{\gamma\}$, y si $\bigoplus\limits_{\substack{\alpha\in\Gamma \\ \gamma\neq\alpha}} N^{(\alpha)} \underset{es}{\subseteq} N^{\left((\gamma^{\perp})\right)} \leq M$ es cualquier complemento y por lo tanto $N^{\left((\gamma^{\perp})\right)} \in \gamma^{\perp}$ es un submódulo de tipo de M de tipo $\gamma^{\perp}$, entonces $E\left(M_{(\gamma)}\right) \cong E\left(N^{(\gamma)}\right); E\left(M_{\left((\gamma^{\perp})\right)}\right) \cong E\left(N^{\left((\gamma^{\perp})\right)}\right)$.

Demostración. (1) Supongamos que $M_{(\alpha_0)} \cap \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_{(\alpha_i)}\right) \neq 0$, entonces $\exists 0 \neq M'_{(\alpha_0)} \leq M$ y $M'_{(\alpha_i)} \leq M_{(\alpha_i)}$ para alguna i tal que $M'_{(\alpha_0)} \cong M'_{(\alpha_i)}$.

Así que $\alpha_0 \cap \alpha_i \neq \mathbf{0}$ $\underset{\bullet}{\nabla}$

Ahora bien, supongamos que $\left(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Gamma} M_{(\alpha)}\right) \oplus P \underset{es}{\subseteq} M$, entonces, como $P \in \bigvee\Gamma = R-Mod$, existe $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha \underset{es}{\subseteq} P$ con $P_\alpha \leq P$, $P_\alpha \in \alpha \in \Gamma$.

Si $P \neq 0$ entonces $P_\alpha \neq 0$ para alguna $\alpha \in \Gamma$ y por lo tanto $M_{(\alpha)} \oplus P_\alpha \in \alpha\underset{\bullet}{\nabla}$.

(2) y (3) Por el *Lema* 11(1), $K \in \bigvee\Omega$ y tiene que ser de tipo $\bigvee\Omega$ ya que, de lo contrario, como K es complemento, si $K \subsetneqq C \leq M$ con $C \in \bigvee\Omega$, K no es esencial en C y entonces $K \oplus D \leq C$ para alguna $0 \neq D \leq C$ $(D \in \bigvee\Omega)$ por lo tanto existe $\bigoplus\limits_{\omega\in\Omega} D_\omega \underset{es}{\subseteq} D$ con $D_\omega \in \omega \in \Omega$. Y como para alguna $\gamma \in \Omega$, $D_\gamma \neq 0$, tenemos que $M_{(\gamma)} \subsetneqq M_{(\gamma)} \oplus D_\gamma \in \gamma\underset{\bullet}{\nabla}$

Por la *Observación 56*, $\bigvee(\Gamma \setminus \Omega) = (\bigvee \Omega)^{\perp}$, así que para tal $L \leq M$, $L \leq_t M$ de tipo $(\bigvee \Omega)^{\perp}$. Por lo tanto se siguen (2) y (3).

(4) y (5) Como $N^{(\vee\Omega)} \leq_t M$ de tipo $\bigvee \Omega$ y $M_{((\vee\Omega)^{\perp})} \leq_t M$ de tipo $(\bigvee \Omega)^{\perp}$se sigue, de la *Proposición 52*(1) y (2), que $N^{(\vee\Omega)} \oplus M_{((\vee\Omega)^{\perp})} \underset{es}{\subseteq} M$, y los isomorfismos pedidos.

De la *Proposición 52*(4), se sigue la superspectividad. ■

Observación 58 *Si $L \leq_t N \leq_t M$, L de tipo $\mathfrak{L}$ y N de tipo $\mathfrak{N}$, con $\mathfrak{L} \leq \mathfrak{N}$, entonces $L \leq_t M$ de tipo $\mathfrak{L}$.*

Demostración. Basta demostrar que L es de tipo $\mathfrak{L}$.

Supongamos que $L \lneqq L_1 \leq M$ con $L_1 \in \mathfrak{L}$. Como L es esencialmente cerrrado en M, L no es esencial en L_1 y existe $0 \neq C \leq L_1$ tal que $L \oplus C \underset{es}{\subseteq} L_1$ con $C \in \mathfrak{L} \leq \mathfrak{N}$.

Si $C \cap N = 0$ entonces $C \oplus N \in \mathfrak{N}$ $\underset{\bullet}{\nabla}$

Así que $C \cap N \neq 0$, lo que implica que $L \oplus (C \cap N) \in \mathfrak{L}$ $\underset{\bullet}{\nabla}$

Por lo tanto $L \leq_t M$ de tipo $\mathfrak{L}$. ■

Ahora veamos dos *Corolarios* de la *Proposición 57*:

Corolario 59 *Con las hipótesis del teorema anterior, definimos $M_{(t_\alpha)} = \sigma\left(M_{(\alpha)}\right)$, donde σ es una teoría de torsión hereditaria estable, y sea $M_{(f_\alpha)} \leq$*

$M_{(\alpha)}$ un seudocomplemento en $M_{(\alpha)}$ tal que $M_{(t_\alpha)} \oplus M_{(f_\alpha)} \underset{es}{\subseteq} M_{(\alpha)}$, donde $t_\alpha, f_\alpha \in R - Nat$ son los únicos elementos de $R - Nat$ tales que $t_\alpha \vee f_\alpha = \alpha$ y $t_\alpha \wedge f_\alpha = 0$ con $t_\alpha \leq \mathbb{T}_\sigma$ y $f_\alpha \leq \mathbb{F}_\sigma$. Entonces $\{t_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ y $\{M_{(t_\alpha)}, M_{(f_\alpha)}\}_{\alpha\in\Gamma}$ satisfacen las hipótesis del teorema anterior y por lo tanto:

1. $\left(\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} M_{(t_\alpha)}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} M_{(f_\alpha)}\right) \underset{es}{\subseteq} M$, es decir $M_{(t_\alpha)} \leq_t M$ de tipo t_α y $M_{(f_\alpha)} \leq_t M$ de tipo f_α. En particular ambos son complementos en M.

2. $t_\sigma(M) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} M_{(f_\alpha)}\right) \underset{es}{\subseteq} M$.

3. $\sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} M_{(\alpha)}\right) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} M_{(t_\alpha)} \underset{es}{\subseteq} t_\sigma(M)$.

Demostración. (1) Tenemos que $t_\alpha = \{A \in \alpha \mid t_\sigma(A) = A\}$ y $f_\alpha = \{A \in \alpha \mid t_\sigma(A) = 0\}$

Entonces $t_\sigma(M_{(t_\alpha)}) \in \mathbb{T}_\sigma \cap \alpha = t_\alpha$ y como $t_\sigma(M_{(f_\alpha)}) = 0$, $M_{(f_\alpha)} \in f_\alpha$.

Por construcción $M_{(t_\alpha)} \leq_t M_{(\alpha)}$ de tipo t_α y $M_{(f_\alpha)} \leq_t M_{(\alpha)}$ de tipo f_α.

Como $M_{(\alpha)} \leq_t M$, tenemos que $M_{(t_\alpha)} \leq_t M$ y $M_{(f_\alpha)} \leq_t M$.

De la observación anterior tenemos que son submódulos de tipo de M de tipo t_α y f_α respectivamente. Lo demás se sigue de la *Proposición 57.* ■

Corolario 60 *Con las hipótesis del corolario anterior y suponiendo que además σ es espectral, sea $C \leq M$ complemento con $t_\sigma(M) \oplus C \underset{es}{\subseteq} M$ y C_{f_α} el único* *submódulo de tipo de C de tipo f_α. Escojamos en la proposición $M_{(\alpha)}$ tal que $C_{f_\alpha} \leq M_{(\alpha)}$ para toda $\alpha \in \Gamma$, entonces el corolario anterior se cumple con $M_{(f_\alpha)} = C_{f_\alpha}$, es decir:*

1. $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Gamma} \left(t_\sigma\left(M_{(\gamma)}\right) \oplus C_{f_\alpha}\right) \underset{es}{\subseteq} \bigoplus\limits_{\alpha\in\Gamma} M_{(\gamma)} \underset{es}{\subseteq} M.$

2. $t_\sigma\left(M_{(\gamma)}\right) \oplus C_{f_\gamma} \underset{es}{\subseteq} M_{(\gamma)}$ y $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Gamma} t_\sigma\left(M_{(\gamma)}\right) \underset{es}{\subseteq} t_\sigma(M)$; $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Gamma} C_{f_\alpha} \underset{es}{\subseteq} C.$ ■

1.5 Cambio de anillo

CATEGORÍAS.

(1) Denotaremos $\mathcal{A}_s$ a la categoría que tiene por objetos a los anillos con uno tales que si $R, S \in ob(\mathcal{A}_s)$, $Hom_{\mathcal{A}_s}(R, S)$ es el conjunto de homomorfismos de anillos con uno que son suprayectivos.

(2) Denotamos por $\mathcal{A}_p$ a la categoría que tiene por objetos a los anillos con uno tales que si $R, S \in ob(\mathcal{A}_p)$, $Hom_{\mathcal{A}_p}(R, S)$ es el conjunto de homomorfismos de anillos con uno que son epimorfismos planos.

(3) Denotamos por $\mathcal{B}$ a la categoría de las retículas de Boole completas con menor y mayor elementos $\mathbf{0}$ y 1. Donde $Hom_{\mathcal{B}}(L_1, L_2)$ es el conjunto de morfismos de retículas que mandan el cero al cero tales que:

(a) son inyectivas y

(b) tienen imágenes convexas.

La retícula de Boole trivial $\{0\} \in \mathcal{B}$ está permitida.

Observación 61 (i) *La condición (b) es equivalente con la condición* $f(L_1) = \{y \in L_2 \mid y \leq f(\mathbf{1})\}$,

(ii) *(b) implica que* $f(L_1)$ *es subretícula completa y*

(iii) *(a) y (b) implican que* $f \in \mathcal{B}$ *es completa (conmuta con supremos e ínfimos arbitrarios).*

Demostración. (i) Por una parte, como $f(0) = 0$, $0 \in f(L_1)$ y $0 \leq f(1)$. Así que

$$[0, f(1)] = \{y \in L_2 \mid y \leq f(L_1)\} \subseteq f(L_1)$$

Sea $x \in f(L_1)$, entonces existe $1 \geq y \in L_1$ tal que $f(y) = x$. Por lo tanto

$$f(y) = x \leq f(1) \text{ y } f(L_1) \subseteq \{y \in L_2 \mid y \leq f(L_1)\}.$$

Recíprocamente, sean $a, b \in f(L_1)$, entonces $a \leq f(1)$ y $b \leq f(1)$.

Esto implica que $a \wedge b \leq f(1)$ y $a \vee b \leq f(1)$. Por lo tanto $a \wedge b$, $a \vee b \in f(L_1)$.

Sea $a \wedge b \leq c \leq a \vee b$, entonces $c \leq f(1)$, así que $c \in f(L_1)$. Por lo tanto $[a \wedge b, a \vee b] \subseteq f(L_1)$.

(ii) Es claro.

(iii) Sea $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L_1$.

(1) Veamos primero que $\bigvee_{i \in I} f(a_i) = f\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)$.

$a_i \leq \bigvee_{i \in I} a_i$ $\forall i \in I$ por lo que $f(a_i) \leq f\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)$ $\forall i \in I$. Por lo tanto $\bigvee_{i \in I} f(a_i) \leq f\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)$.

Supongamos que la desigualdad es propia, $\bigvee_{i \in I} f(a_i) < f\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)$.

Como $f\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) \leq f(1)$, tenemos que $\bigvee_{i \in I} f(a_i) < f(1)$. Así que existe $a \in L_1$ tal que $f(a) = \bigvee_{i \in I} f(a_i)$ por (b). Pero $f(a) = \bigvee_{i \in I} f(a_i) < f\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)$ implica que $a \leq \bigvee_{i \in I} a_i$ por (a).

Sea a_k $(k \in I)$, entonces $f(a_k) \leq \bigvee_{i \in I} f(a_i)$, lo que implica que $a_k \leq a$ $\forall k \in I$.

Por lo tanto $\bigvee_{i \in I} a_i \leq a < \bigvee_{i \in I} a_i \nabla$. Así que $\bigvee_{i \in I} f(a_i) = f\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)$.

De manera similar se demuestra que $\bigwedge_{i \in I} f(a_i) = f\left(\bigwedge_{i \in I} a_i\right)$ por lo que se omitirá. ■

- Recordemos los siguientes hechos:

(1) En cualquier retícula de Boole completa se vale lo siguiente: [[12], p.118]

(a) $a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$.

(b) $a \vee \left(\bigwedge_{i \in I} a_i\right) = \bigwedge_{i \in I} (a \vee a_i)$.

De los cuales se deduce que:

(c) $\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)^c = \bigwedge_{i \in I} a_i^c$.

(d) $\left(\bigwedge_{i \in I} a_i\right)^c = \bigvee_{i \in I} a_i^c$.

(2) Sean $L_1 = \langle L_1, \vee, \wedge, \_', 1, 0\rangle$ y $L_2 = \langle L_2, \vee, \wedge, \_^c, 1, 0\rangle$ retículas de Boole.

Supongamos que $L_2 = A \oplus B$ es un producto directo de subretículas $A, B \leq L_2$. Entonces $1 = e \vee e^c = e + e^c$ para algún $e \in A$ y $1 - e = e^c \in B$. Así que $A = eL_2$.

En efecto, si $a \in A$, entonces $a = a \wedge 1 = a \wedge (e \vee e^c) = (a \wedge e) \vee (a \wedge e^c) = (a \wedge e)$. Así que $a \in eL_2$. Por otra parte, si $0 \neq x \leq e \in A$, existen $a \in A$, $b \in B$ tales que $x = a \vee b = (a \vee b) \wedge e = (a \wedge e) \vee (b \wedge e) = a \wedge e \in A$. Por lo tanto $x \in A$. Así que si $e \wedge x \in L_2$, entonces, como $e \wedge x \leq e$, se tiene que $e \wedge x \in A$.

Análogamente $B = (1-e)\,L_2$ y por lo tanto $L_2 = eL_2 \oplus (1-e)\,L_2$.

Note que cualquier subconjunto convexo $0 \in A \subsetneq L_2$ con elemento mayor e, es necesariamente de esta forma.

En efecto, $A = \{x \in L_2 \mid x \leq e\}$ por ser convexo, por lo que $A = eL_2$

Y recíprocamente, si $A=\{y\in L_2\mid y\leq e\}$. Para $a\in A$, definimos $a^*=a^c\wedge e\in A$, entonces:

(a) $\langle A,\vee,\wedge,*,e,0\rangle$ es una retícula de Boole (que es completa si L_2 lo es).

En efecto, $a\vee a^*=a\vee(a^c\wedge e)=(a\vee a^c)\wedge(a\vee e)=a\vee e=e$ y $a\wedge a^*=a\wedge(a^c\wedge e)=(a\wedge a^c)\wedge e=0$. Por lo que a^*es el complemento de a.

Sea $\langle A,[+],\cdot,e,0\rangle$ su anillo booleano asociado. Entonces la estructura de anillo en A vista como un ideal del anillo booleano L_2, coincide con $\langle A,[+],\cdot,e,0\rangle$.

En efecto, $\langle A,[+],\cdot,e,0\rangle$ es anillo con las siguientes operaciones:

$$a\cdot b=a\wedge b \text{ y } a\,[+]\,b=(a\wedge b^*)\vee(a^*\wedge b)\,.$$

Si tomamos el anillo booleano asociado a L_2, $\langle L_2,+.\times,1,0\rangle$ tal que $x\times y=x\wedge y$ y $x+y=(x\wedge y^c)\vee(x^c\wedge y)$, entonces: $a\,[+]\,b=(a\wedge b^*)\vee(a^*\wedge b)=(a\wedge(b^c\wedge e))\vee((a^c\wedge e)\wedge b)=((a\wedge b^c)\wedge e)\vee((a^c\wedge b)\wedge e)=(a\wedge b^c)\vee(a^c\wedge b)=a+b$

Además el producto es claramente el mismo en ambos casos.

(b) Para cualesquiera retículas de Boole L_1 y L_2 (no necesariamente completas), un homomorfismo que mande el cero al cero $f:L_1\to L_2$ es lo mismo que un homomorfismo de anillos de los anillos booleanos asociados que, en general, no manda el uno al uno.[[12], $pp.78-79$, $Th.9$].

(c) Para un homomorfismo $f: L_1 \to L_2$ de retículas de Boole completas L_1 y L_2 con $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \in L_2$, son equivalentes:

(i) f conserva supremos arbitrarios.

(ii) f conserva ínfimos arbitrarios y

(iii) f es completa.

Demostración. Observemos primero que si $f(1) = 1$, entonces $f(a^c) = (f(a))^c$.

En efecto, $f(a) \vee f(a^c) = f(a \vee a^c) = f(1) = 1$ y $f(a) \wedge f(a^c) = f(a \wedge a^c) = f(0) = 0$.

$(i \Rightarrow ii)$

$$\begin{aligned} \left(f\left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right)\right)^c &= f\left(\left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right)^c\right) = f\left(\bigvee_{i\in I} a_i^c\right) \text{ y} \\ \left(\bigwedge_{i\in I} f(a_i)\right)^c &= \bigvee_{i\in I} (f(a_i))^c = \bigvee_{i\in I} f(a_i^c) \end{aligned}$$

Como por hipótesis $f\left(\bigvee_{i\in I} a_i^c\right) = \bigvee_{i\in I} f(a_i^c)$, tenemos ($ii$).

$(ii \Rightarrow i)$ La demostración es similar por lo que la omitimos. ∎

(d) Ahora, supongamos que L_1 y $L_2 \in \mathcal{B}$ y $f : L_1 \to L_2$, $f \in \mathcal{B}$. Definimos $e = f(1) \in L_2$, $A = eL_2$ y $B = (1-e)L_2$, $1 - e = e^c \in L_2$. Entonces $L = A \oplus B$ satisface todo lo anterior incluyendo (a). Sea f_A la correstricción de f a su imagen $f_A : L_1 \to A$. Entonces se satisfacen ambos:

(i) f_A y f_A^{-1} son isomosfismos de retículas que conservan complementos y uno (conservan el orden), de las retículas L_1 y $A = \langle A, \vee, \wedge, *, e, 0\rangle$.

(ii) f_A conserva supremos e ínfimos arbitrarios.

$\bullet$*Notación* :

Si $\psi : R \to S$ es un homomorfismo de anillos y ${}_SN \in S-Mod$, entonces ${}_SN$ tiene estructura de $R-$*módulo* inducida por φ de manera natural definiendo $r \cdot n \doteqdot \varphi(r)n \in N$. A este módulo inducido lo denotamos por N_φ.

1.5.1 Homomorfismos suprayectivos

Si $\varphi \in \mathcal{A}_s$, $\varphi : R \to S$ es la proyección natural, sin pérdida de generalidad supondremos que $S = \frac{R}{I}$, donde $I = Ker(\varphi)$.

Es fácil verificar la siguiente:

Observación 62 *Si $\varphi \in \mathcal{A}_s$, entonces para cualesquiera $S-$módulos N y N' se satisface:*

1. $Hom_S(N, N') = Hom_R(N_\varphi, N'_\varphi)$.

2. La retícula de $S-$ *submódulos* de N es la misma que la retícula de $R-$ *submódulos* de N_φ. De igual manera tenemos los mismos $S-$ *submódulos* esenciales, complemento y cocientes de ${}_SN$ que $R-$ *submódulos* respectivamente en N_φ.

3. Por (2) $N_\varphi \underset{es}{\subseteq} (E({}_SN))_\varphi$. Por lo tanto existe $N_\varphi \overset{es}{\hookrightarrow} (E({}_SN))_\varphi \overset{es}{\hookrightarrow} E(N_\varphi)$. Y se sigue de (1) que:

4. $E({}_SN) = \{x \in E(N_\varphi) \mid Ix = 0\}$; además (1) implica que:

5. φ induce un funtor covariante $S-Mod \to R-Mod$ que mapea N en N_φ que es la identidad en los morfismos. La imagen de este funtor es la subcategoría plena $\{L \in R-Mod \mid IL = 0\}$, que como categoría es isomorfa a $S-Mod$ vía el funtor inducido por φ. ■

Definición 63 *Sea* $\varphi^* : S-Nat \to R-Nat$ *definido por:*

$$\varphi^*\left(\mathfrak{N}^S\right) = \left\langle \mathfrak{N}^S_\varphi \right\rangle \in R-Nat,$$

para $\mathfrak{N}^S \in S-Nat$.

Donde $\mathfrak{N}^S_\varphi = \left\{N_\varphi \mid N \in \mathfrak{N}^S\right\}$

Lema 64 *Sea $\mathfrak{N}^S \in S-Nat$, y $I \leq R$ con $S=\frac{R}{I}$. Para cualquier módulo M definimos $Ann_M(I)=\{m \in M \mid I \cdot m = 0\} \leq M$. Entonces*

1. $\langle \mathfrak{N}^S_\varphi \rangle = \left\{ M \in R-Mod \mid \exists N \in \mathfrak{N}^S_\varphi, \text{ con } N_\varphi \underset{es}{\subseteq} M \right\}$;
2. $\langle \mathfrak{N}^S_\varphi \rangle = \left\{ M \in R-Mod \mid Ann_M(I) \underset{es}{\subseteq} M, \text{ con } Ann_M(I) \in \mathfrak{N}^S \right\}$.

Demostración. (1) Por la observación anterior, $\mathfrak{N}^S_\varphi$ es cerrada bajo isomorfismos, submódulos y sumas directas, entonces el *Lema* 11(1) se traduce en la conclusión deseada.

(2) Por el *Lema* 11(2)

$$\langle \mathfrak{N}^S_\varphi \rangle = \left\{ M \in R-Mod \mid \exists\ M \rightarrowtail E(N) \text{ para alguna } N \in \mathfrak{N}^S \right\}$$

Por la tanto, para N y $M \in \langle \mathfrak{N}^S_\varphi \rangle$ en esta situación, $M \cap N_\varphi \underset{es}{\subseteq} Ann_M(I) \underset{es}{\subseteq} M$.

Por la observación anterior, se sigue que ${}_S(M \cap N_\varphi)$ es un submódulo esencial del $S-$*submódulo* $Ann_M(I)$. Como $M \cap N \in \mathfrak{N}^S$, $Ann_M(I)$ también está en $\mathfrak{N}^S$. ■

Teorema 65 *Sea $\varphi \in \mathcal{A}_S$, entonces $\varphi^* : S-Nat \to R-Nat$ satisface lo siguiente:*

1. Es inyectiva.

2. Para cualesquiera $\mathfrak{N}_1^S, \mathfrak{N}_2^S \in S-Nat$, $\mathfrak{N}_1^S \leq \mathfrak{N}_2^S \Leftrightarrow \varphi^*\left(\mathfrak{N}_1^S\right) \leq \varphi^*\left(\mathfrak{N}_2^S\right)$.

3. $\varphi^*(S-Nat)$ es convexa en $R-Nat$.

Demostración. (1) Supongamos que $\varphi^*\left(\mathfrak{N}_1^S\right) = \varphi^*\left(\mathfrak{N}_2^S\right)$ para $\mathfrak{N}_1^S, \mathfrak{N}_2^S \in S-Nat$.

Basta demostrar que $\mathfrak{N}_1^S \subseteq \mathfrak{N}_2^S$ ya que la otra inclusión es análoga.

Sea ${}_SN \in \mathfrak{N}_1^S$, entonces tenemos que $N_\varphi \in \varphi^*\left(\mathfrak{N}_1^S\right) = \varphi^*\left(\mathfrak{N}_2^S\right)$ y que existe ${}_SL \in \mathfrak{N}_2^S$ tal que $L_\varphi \underset{es}{\subseteq} N_\varphi$, esto último por el lema anterior, inciso 1. De la última observación tenemos que $L \underset{es}{\leq} N$ y como $L \in \mathfrak{N}_2^S$, también ${}_SN \in \mathfrak{N}_2^S$. Así que $\mathfrak{N}_1^S \subseteq \mathfrak{N}_2^S$.

Por lo tanto φ^* es inyectiva.

(2) Es claro que $\mathfrak{N}_1^S \leq \mathfrak{N}_2^S \Rightarrow \varphi^*\left(\mathfrak{N}_1^S\right) \leq \varphi^*\left(\mathfrak{N}_2^S\right)$. Veamos la otra implicación.

Sea ${}_SN \in \mathfrak{N}_1^S$, entonces $N_\varphi \in \varphi^*\left(\mathfrak{N}_1^S\right) \subseteq \varphi^*\left(\mathfrak{N}_2^S\right)$. Por lo tanto existe $L \in \mathfrak{N}_2^S$ tal que $L_\varphi \underset{es}{\subseteq} N_\varphi$. Así que $L \underset{es}{\leq} N$ por lo que $N \in \mathfrak{N}_2^S$ y en consecuencia $\mathfrak{N}_1^S \subseteq \mathfrak{N}_2^S$, es decir que $\mathfrak{N}_1^S \leq \mathfrak{N}_2^S$.

(3) Supongamos que $\mathfrak{N} \in R-Nat$ con $\mathfrak{N} \leq \varphi^*\left(\mathfrak{N}_1^S\right)$ para alguna $\mathfrak{N}_1^S \in S-Nat$.

Esperamos que $\mathfrak{N}$ esté en la imagen de φ^*. Definimos $\mathfrak{N}_2^S \in S-Nat$ de la manera siguiente:

$$\mathfrak{N}_2^S = \left\{N \in \mathfrak{N}_1^S \mid N_\varphi \in \mathfrak{N}\right\}.$$

Tenemos que ver que $\mathfrak{N}_2^S \in S-Nat$ y que $\varphi^*\left(\mathfrak{N}_2^S\right) = \mathfrak{N}$.

(a) Por la última observación $\mathfrak{N}_2^S$ es cerrada bajo submódulos y sumas directas.

Para ver que es cerrada bajo cápsulas inyectivas veremos que es cerrada bajo extensiones esenciales. Supongamos que $N \in \mathfrak{N}_2^S$ y que ${}_SL \in S-Mod$ es tal que $N \underset{es}{\leq} L$.

Como $N \in \mathfrak{N}_1^S$ y $N \underset{es}{\leq} L$, entonces $L \in \mathfrak{N}_1^S$. Así mismo, como $N_\varphi \in \mathfrak{N}$ y $N_\varphi \underset{es}{\subseteq} L_\varphi$, también $L_\varphi \in \mathfrak{N}$. Estos últimos dos hechos muestran que $L \in \mathfrak{N}_2^S$. Por lo tanto $\mathfrak{N}_2^S \in S-Nat$.

(b)

$$\begin{aligned}
\varphi^*\left(\mathfrak{N}_2^S\right) &= \left\{M \in R-Mod \mid \exists N \in \mathfrak{N}_2^S, \text{ con } N_\varphi \underset{es}{\subseteq} M\right\} \\
&= \left\{M \in R-Mod \mid \exists N \in S-Mod,\ N_\varphi \in \mathfrak{N},\ N \in \mathfrak{N}_1^S,\ N_\varphi \underset{es}{\subseteq} M\right\} \\
&\subseteq \mathfrak{N}.
\end{aligned}$$

Donde la última inclusión se tiene debido a que $\mathfrak{N}$ es cerrada bajo extensiones esenciales.

Recíprocamente, sea $M \in \mathfrak{N}$. Como $\mathfrak{N} \subseteq \varphi^* \left(\mathfrak{N}_1^S\right)$, $M \in \varphi^* \left(\mathfrak{N}_1^S\right)$, entonces existe $W \in \mathfrak{N}_1^S$ tal que $W_\varphi \underset{es}{\subseteq} M$. Por lo tanto $W_\varphi \in \mathfrak{N}$, así que $W \in \mathfrak{N}_2^S$.

Pero entonces $M \in \varphi^* \left(\mathfrak{N}_2^S\right)$, y en consecuencia $\mathfrak{N} \subseteq \varphi^* \left(\mathfrak{N}_2^S\right)$.

$\therefore \varphi^* \left(\mathfrak{N}_2^S\right) = \mathfrak{N}$. Y en consecuencia $\varphi^* \left(S - Nat\right)$ es convexa en $R - Nat$.

■

Corolario 66 *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}_S$, $\varphi^* : S - Nat \to R - Nat$ pertenece a $\mathcal{B}$, y en particular es un homomorfismo de retículas completas.* ■

Corolario 67 *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}_S$, $R - Nat = A \oplus B$ es una suma directa de subretículas convexas únicas A y B donde $A = \varphi^* \left(S - Nat\right)$. Sea $\langle A, \vee, \wedge, *, e, 0\rangle$ la retícula de Boole inducida, entonces $\varphi^* : S - Nat \to A$ es un isomosfismo completo de retículas de Boole (equivalentemente es un isomorfismo de los anillos booleanos asociados).* ■

1.5.2 Epimorfismos planos

Definición 68 *Cada teoría de torsión τ en $R - Mod$ define un endofuntor $Q_\tau \left(\_\right)$ de $R - Mod$ de la siguiente manera:*

1. Si M es un $R-módulo$, entonces $Q_\tau(M) = E_\tau\left(\frac{M}{t_\tau(M)}\right)$.

2. Si $\alpha : M \to N$ es un $R-morfismo$, entonces $\alpha(t_\tau(M)) \subseteq t_\tau(N)$. Por lo tanto α induce un $R-morfismo$ $\alpha' : \frac{M}{t_\tau(M)} \to \frac{N}{t_\tau(N)}$, que se extiende a un único $R-morfismo$ de $Q_\tau(M)$ a $Q_\tau(N)$ y que denotaremos $Q_\tau(\alpha)$.

El funtor $Q_\tau(\_)$ se llama el funtor de τ-localización en $R-Mod$. Notamos que existe una transformación natural canónica λ^τ del endofuntor identidad en $R-Mod$ a $Q_\tau(\_)$ tal que, para cualquier $R-módulo$ M, el $R-morfismo$ $\lambda_M^\tau : M \to Q_\tau(M)$ es simplemente la composición del epimorfismo canónico de M a $\frac{M}{t_\tau(M)}$ con la inmersión canónica de $\frac{M}{t_\tau(M)}$ en $Q_\tau(M)$. Por lo tanto en particular vemos que $Ker(\lambda_M^\tau) = t_\tau(M)$ para cada $R-módulo$ M, así que λ_M^τ es un $R-monomorfismo$ si y sólo si M es libre de τ-torsión y es el morfismo cero si y sólo si M es de τ-torsión. [Ver [11], *Chapter* 26].

Definición 69 *Si τ es una teoría de torsión en $R-Mod$, denotaremos al anillo de endomorfismos del $R-módulo$ $Q_\tau(R)$ por R_τ. Este anillo se llama el anillo de cocientes de R en τ.*

Definición 70 *Para cualquier teoría de torsión τ en $R-Mod$, sea $G_\tau(\_)$ el* *endofuntor* $R_\tau \otimes_R (\_)$ *de* $R-Mod$, *que llamaremos el funtor de* τ*-prelocalización en* $R-Mod$. [*Ver [11], Chapter* 27].

Definición 71 *Una teoría de torsión* τ *en* $R-Mod$ *es perfecta si y sólo si, para cualquier* $R-$*módulo* M, *el* $R-$*morfismo* $\eta_M^\tau: G_\tau(M) \to Q_\tau(M)$ *es un* $R_\tau-$*isomorfismo. Para tales teorías de torsión, los funtores* $G_\tau(\_)$ *y* $Q_\tau(\_)$ *son naturalmente equivalentes.*

En Golan [[11], 48.2, y 26.33 respectivamente] se demuestran los siguientes resultados:

Proposición 72 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un homomorfismo* $\gamma: R \to S$ *en la categoría de anillos con uno:*

1. γ es un epimorfismo plano.

2. γ es un epimorfismo en la categoría de anillos con uno y cada $S-$*módulo* inyectivo es inyectivo como $R-$*módulo.*

3. Existe una teoría de torsión perfecta τ en $R-Mod$ y un isomorfismo $\delta: S \to R_\tau$ que satisface $\delta\gamma = \lambda^\tau$. ■

Proposición 73 *Si* τ *es una teoría de torsión en* $R-Mod$, *entonces todo* $R-$*módulo absolutamente* τ*-puro tiene estructura de* $R_\tau-$*módulo que extiende* *de manera natural su estructura como $R-$módulo. Además cualquier $R-$morfismo entre $R-$módulos absolutamente τ-puros es de forma natural un $R_\tau-$morfismo.* ■

Ahora veamos la siguiente:

Observación 74 *Sea $\mathfrak{N} \in R-Nat$ y $\{E_\alpha\}_{\alpha \in X}$ la colección de todos los módulos inyectivos que pertenecen a $\mathfrak{N}$, entonces*

$$\mathfrak{N} = \langle \{E_\alpha\}_{\alpha \in X} \rangle = \{M \in R-Mod \mid M \leq E_\beta, \text{ para alguna } \beta \in X\}$$

Demostración. Ambas igualdades se tienen del hecho de que una clase natural es cerrada bajo cápsulas inyectivas y submódulos. ■

Al igual que en la *Definición 63*, tomemos la función $\varphi^* : S-Nat \to R-Nat$ tal que $\varphi^*(\mathfrak{N}^S) = \langle \mathfrak{N}^S_\varphi \rangle$ donde $\varphi \in \mathcal{A}_p$.

Proposición 75

$$\varphi^*(S-Nat) = \mathbb{F}_\tau = \left\{M \in R-Mod \mid M \leq (E_\beta)_\varphi, \text{ para alguna } \beta \in X\right\},$$

Donde $\left\{(E_\alpha)_\varphi\right\}_{\alpha\in X}$ *es la colección de todas las imágenes de* S*-módulos inyectivos* E_α.

Demostración. Por la *Proposición* 72 (2) la imágen de cada inyectivo de $\mathfrak{N}^S$ es inyectivo. Y en la demostración de $(1 \Rightarrow 3)$, de la misma *Proposición*, se ve que si $N \in S - Mod$, entonces su imagen es libre de τ-torsión. Así que $\varphi^*(S - Nat) \subseteq \mathbb{F}_\tau$.

Sea E un módulo inyectivo libre de τ-torsión, entonces, en particular, E es absolútamente τ-puro. Por lo tanto, de la *Proposición 73, E* es la imagen de algún inyectivo de $S - Nat$.

De la observación anterior se tienen las demás inclusiones. ■

Corolario 76 *Sea* $\mathfrak{N}^S \in S - Nat$*, entonces:*

$$\varphi^*\left(\mathfrak{N}^S\right) = \left\{M \in R - Mod \mid M \leq (E_\beta)_\varphi,\ \text{para alguna } \beta \in X\right\}$$

Donde $\left\{(E_\alpha)_\varphi\right\}_{\alpha\in X}$ *es la colección de todas las imágenes de* S*-módulos inyectivos* E_α *que pertenecen a* $\mathfrak{N}^S$. ■

De lo anterior podemos demostrar los análogos al *Teorema 65* y sus *Corolarios*:

Teorema 77 *Sea $\varphi \in \mathcal{A}_p$, entonces $\varphi^* : S - Nat \to R - Nat$ satisface lo siguiente:*

1. Es inyectiva.

2. Para cualesquiera $\mathfrak{N}_1^S, \mathfrak{N}_2^S \in S-Nat$, $\mathfrak{N}_1^S \leq \mathfrak{N}_2^S \Leftrightarrow \varphi^*\left(\mathfrak{N}_1^S\right) \leq \varphi^*\left(\mathfrak{N}_2^S\right)$.

3. $\varphi^*(S - Nat)$ es convexa en $R - Nat$.

Demostración. (1) Supongamos que $\varphi^*\left(\mathfrak{N}_1^S\right) = \varphi^*\left(\mathfrak{N}_2^S\right)$ con $\mathfrak{N}_1^S$ y $\mathfrak{N}_2^S \in S - Nat$.

Del *Corolario* anterior tenemos que la colección de inyectivos que pertenecen a $\mathfrak{N}_1^S$ es la misma que la colección de inyectivos que pertenecen a $\mathfrak{N}_2^S$, así que, por la *Observación* 74, $\mathfrak{N}_1^S = \mathfrak{N}_2^S$.

(2) Otra vez se sigue facilmente del *Corolario* 76y la *Observación* 74.

(3) Sea $\mathfrak{N} \in R - Nat$ tal que $\mathfrak{N} \leq \varphi^*(S - Nat)$.

Como $\varphi^*(S - Nat) = \mathbb{F}_\tau$ (para τ como en la *Proposición* 75), cada inyectivo en $\mathfrak{N}$ es libre de τ-torsión, así que, por la *Proposición* 73 y la *Observación* 74, si tomo $\mathfrak{N}^S$ la clase natural generada por todos los inyectivos en $\mathfrak{N}$ vistos como $S-$ *módulos*, tenemos que $\varphi^*\left(\mathfrak{N}^S\right) = \mathfrak{N}$. Por lo tanto $\varphi^*(S - Nat)$ es convexa. ■

Corolario 78 *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}_p$, $\varphi^* : S - Nat \to R - Nat$ pertenece a $\mathcal{B}$, y en particular es un homomorfismo de retículas completas.* ∎

Corolario 79 *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}_p$, $R - Nat = A \oplus B$ es una suma directa de subretículas convexas únicas A y B donde $A = \varphi^* (S - Nat)$. Sea $\langle A, \vee, \wedge, *, e, 0 \rangle$ la retícula de Boole inducida, entonces $\varphi^* : S - Nat \to A$ es un isomorfismo completo de retículas de Boole (equivalentemente es un isomorfismo de los anillos booleanos asociados).* ∎

Capítulo 2

La retícula $R - Conat$.

En este capítulo estudiaremos retículas de clases de módulos que son cerradas bajo tomar copias isomorfas.

2.1 Clases hereditarias y clases naturales

Definición 80 *Decimos que una clase de módulos $\mathfrak{F}$ es una clase hereditaria si $\mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}$ (Ver la Definición 10).*

Observación 81 *Si $\{\mathfrak{F}_\alpha\}_{\alpha \in X}$ es una familia de clases hereditarias, entonces también lo es $\bigcap_{\alpha \in X} \mathfrak{F}_\alpha$. Además $R - Mod$ y (0) son clases hereditarias y por lo tanto, podemos hablar de la retícula completa $R - Her$, tomando las ope-*

raciones naturales. ■

Observación 82 *Es claro que si $\mathfrak{M}$ es una clase de módulos entonces la clase hereditaria generada por $\mathfrak{M}$ es:*

$$\langle \mathfrak{M} \rangle_{R-Her} = \{N \in R-Mod \mid \exists N \rightarrowtail M \text{ con } M \in \mathfrak{M}\} \;\blacksquare$$

Ahora daremos una descripción del seudocomplemento de una clase hereditaria:

Proposición 83 *Sea $\mathfrak{H}$ una clase hereditaria, entonces*

$$\mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}} = \{N \in R-Mod \mid (K \rightarrowtail N, K \in \mathfrak{H}) \Rightarrow K = 0\}$$

Demostración. Denotemos por $\mathfrak{B}$ a la clase de la derecha. Claramente $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{B} = (0)$ y $\mathfrak{B}$ es una clase hereditaria.

Sea $\mathfrak{C}$ cualquier clase hereditaria tal que $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = (0)$, entonces si $K \rightarrowtail N \in \mathfrak{C}$, $K \in \mathfrak{B}$, se tiene que $K \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ y por lo tanto $K = 0$. Así que $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{H}$. ■

En esta situación es fácil describir el doble seudocomplemento de una clase hereditaria:

Proposición 84 *Sea $\mathfrak{H}$ una clase hereditaria, entonces*

$$\left(\mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}} = \left\{N \in R - Mod \mid \forall K \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} N, \exists U \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} K \text{ } con \text{ } U \in \mathfrak{H}\right\}$$

Demostración. Como

$$\left(\mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}} = \left\{N \in R - Mod \mid \left(K \rightarrowtail N, K \in \mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right) \Rightarrow K = 0\right\}$$

entonces

$$\left(\mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}} = \left\{N \in R - Mod \mid K \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} N \Rightarrow K \notin \mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right\}$$

Pero, $K \notin \mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}} \Leftrightarrow \exists U \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} K$ tal que $U \in \mathfrak{H}$. Por lo tanto se tiene lo deseado. ■

Expresemos lo anterior con un diagrama:

$$N \in \left(\mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}} \Leftrightarrow$$

$$\forall K \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} N, \exists U \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} K \text{ tal que } \begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "\neq 0"] & N \\ U \arrow[u, tail, "mono"', "\neq 0"] & \in \mathfrak{H} \end{tikzcd}$$

Proposición 85 $\left(\mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}} \in R-Nat$.

Demostración. a) Es claro que $\left(\mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}}$ es cerrada bajo tomar submódulos.

b) Veamos la cerradura bajo tomar cápsulas inyectivas:

Supongamos que N tiene la propiedad de que

$$\forall K \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} N, \exists U \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} K \text{ tal que}$$
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "\neq 0"] & N \\ U \arrow[u, tail, "mono"', "\neq 0"] & \in \mathfrak{H} \end{tikzcd} .$$

Si $K \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} E(N)$, entonces $K \cap N \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} N$.

Por lo tanto $\exists U \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} K\cap N$ tal que

$$\begin{array}{lcl} K\cap N & \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} & N \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} E(N) \\ \uparrow \neq 0 & & \\ U \in \mathfrak{H} & & \end{array}$$

Por último, veamos la cerradura bajo tomar sumas directas:

Supongamos que $\{N_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es una familia de módulos en $\left(\mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}}$.

Supongamos que $K \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} \bigoplus\limits_{\alpha\in X}\{N_\alpha\}$. Por el *Lema* 4 existen $\beta\in X$, $0\neq L\rightarrowtail N_\beta$ y $U\rightarrowtail N_\beta\in\mathfrak{H}$ tales que

$$\begin{array}{lcl} L & \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} & K \overset{\neq 0}{\rightarrowtail} \bigoplus\limits_{\alpha\in X}\{N_\alpha\} \\ \uparrow \neq 0 & & \\ U \in \mathfrak{H} & & \end{array}$$

■

Observación 86 *Si $\mathfrak{N}$ es una clase natural, entonces $\mathfrak{N}=\left(\mathfrak{N}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}}$.*

Demostración. Sea $B\in\left(\mathfrak{N}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}}$. Como todo submódulo distinto de cero de B tiene un submódulo distinto de cero en $\mathfrak{N}$, podemos tomar una suma directa máxima de submódulos de B que están en $\mathfrak{N}$ y que es esencial en B. Por lo cerradura bajo sumas directas, tal suma está en $\mathfrak{N}$ y por la cerradura bajo extensiones esenciales $B \in \mathfrak{N}$. La otra inclusión es clara. ■

Observación 87 *Dada una clase hereditaria $\mathfrak{H}$, $\left(\mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}} = \langle\mathfrak{H}\rangle$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ una clase natural que incluye a $\mathfrak{N}$, y $0 \neq K \in \mathfrak{B}$. $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B}^{\perp_{R-Her}} \subseteq \mathfrak{H}^{\perp_{R-Her}} \Rightarrow \left(\mathfrak{B}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}} \subseteq \left(\mathfrak{N}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}} = \mathfrak{B}$. Por la observación anterior. La otra inclusión es clara. ■

Teorema 88 *El esqueleto de $R-Her$ es $R-Nat$.*

Demostración. Si $\mathfrak{B}$ es un complemento en $R-Her$, entonces $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}^{\perp_{R-Her}}$ para alguna $\mathfrak{C}$. Entonces $\left(\left(\mathfrak{C}^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}}\right)^{\perp_{R-Her}} = \mathfrak{C}^{\perp_{R-Her}} = \mathfrak{B}$ es una clase natural por la observación anterior.

Recíprocamente, $\mathfrak{N} \in R-Nat$ siempre es el complemento (en $R-Nat$) de su complemento (en $R-Nat$) ya que $R-Nat$ es de Boole. Es claro que en este caso $\mathfrak{N}^{\perp_{R-Her}} = \mathfrak{N}^{\perp}$. ■

2.2 Clases cohereditarias y clases conaturales

Definición 89 *Denotamos por $R-Quot$ a la clase de las clases de R-módulos cerradas bajo cocientes (imágenes homomórficas). A una clase de R-modulos cerrada bajo cocientes la llamamos clase cohereditaria.*

Ejemplo 90 *Los siguientes son ejemplos de clases cohereditarias:*

1. Toda clase de pretorsión en $R-Mod$.

2. Toda clase TTF en $R-Mod$.

3. Las clases de Serre en $R-Mod$.

4. Las clases abiertas en $R-Mod$ como se definen en [16].

Hay un orden parcial natural en $R-Quot$ definido por: $\mathcal{Q}_1 \leq \mathcal{Q}_2 \Leftrightarrow \mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{Q}_2$.

Note que $(R-Quot, \leq, \wedge, \vee)$ es también una biálgebra de Heyting, donde, si $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es una familia de clases cohereditarias, entonces:

1. $\bigwedge\limits_{\alpha\in X} \{\mathcal{Q}_\alpha\} = \bigcap\limits_{\alpha\in X} \{\mathcal{Q}_\alpha\}$.
2. $\bigvee\limits_{\alpha\in X} \{\mathcal{Q}_\alpha\} = \bigcup\limits_{\alpha\in X} \{\mathcal{Q}_\alpha\}$.
3. $\mathbf{0} = \{0\}$.
4. $\mathbf{1} = R-Mod$.

Por lo tanto,para cada $\mathcal{Q} \in R-Quot$, la familia de las clases cohereditarias ajenas con $\mathcal{Q}$ tiene un único elemento maximo, llamado

$$\mathcal{Q}^{\perp_{R-Quot}} = \bigvee \{\mathcal{R} \in R-Quot \mid \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \mathbf{0}\}$$

También existe un único elemento mínimo en la familia de las clases cohereditarias cuya unión con $\mathcal{Q}$ es $\mathbf{1}$, llamado

$$\mathcal{Q}_{\perp_{R-Quot}} = \bigwedge \{\mathcal{R} \in R-Quot \mid \mathcal{Q} \cup \mathcal{R} = \mathbf{1}\}.$$

Proposición 91 *La clase cohereditaria generada por la clase $\mathcal{M} \subseteq R-Mod$, denotada por $\langle \mathcal{M} \rangle_{R-Quot}$, es la clase de los módulos N tales que existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow N$ para alguna $M \in \mathcal{M}$.* ■

Proposición 92 *Si $\mathcal{Q} \in R-Quot$, entonces*

$$\mathcal{Q}^{\perp_{R-Quot}} = \left\{ N \in R-Mod \mid \begin{array}{c} Si\ f : N \twoheadrightarrow C \ con\ C \in \mathcal{Q}, \\ entonces\ C = 0 \end{array} \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ la clase de la derecha. Note que $\mathcal{K}$ está en $R-quot$.

Ahora sea $M \in \mathcal{K} \cap \mathcal{Q}$. Como el morfismo identidad es un epimorfismo, $M \overset{Id_M}{\twoheadrightarrow} M$, tenemos que $M = 0$. Por lo tanto $\mathcal{K} \cap \mathcal{Q} = \mathbf{0}$.

Sea $\mathcal{D}$ una clase cohereditaria tal que $\mathcal{D} \cap \mathcal{Q} = \mathbf{0}$. Tome $D \in \mathcal{D}$ y $D \twoheadrightarrow E$, con $E \in \mathcal{Q}$. Del hecho que $\mathcal{D}$ es cohereditaria, $E \in \mathcal{D}$. Así que $E = 0$. En consecuencia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}$. Por lo tanto $\mathcal{K} = \mathcal{Q}^{\perp_{R-quot}}$. ∎

Observación 93 *Sea $\mathcal{Q} \in R-Quot$. Entonces $N' \notin \mathcal{Q}^{\perp_{R-Quot}}$ si y sólo si existe un cociente distinto de cero $N' \twoheadrightarrow N''$, con $N'' \in \mathcal{Q}$.* ∎

Ahora estamos en condiciones de describir al doble seudocomplemento de una clase cohereditaria.

Teorema 94 *Si $\mathcal{Q} \in R-Quot$, entonces*

$$\left(\mathcal{Q}^{\perp_{R-Quot}}\right)^{\perp_{R-Quot}} = \left\{ N \in R-Mod \mid \begin{array}{c} \textit{Todo cociente } N \overset{\neq 0}{\twoheadrightarrow} M \\ \textit{de } N, \textit{ tiene un cociente} \\ \textit{distinto de cero en } \mathcal{Q} \end{array} \right\}.$$

Demostración. De la *Proposición* 92 tenemos que $\left(\mathcal{Q}^{\perp_{R-quot}}\right)^{\perp_{R-quot}}$ es la clase de los módulos N, tales que ningún cociente distinto de cero de N está en $\mathcal{Q}^{\perp_{R-quot}}$. Ahora, aplicando la *Observación* 93 tenemos que para tal cociente $N \twoheadrightarrow M \neq 0$, M tiene un cociente en $\mathcal{Q}$. ∎

Corolario 95 *Si $\mathcal{Q} \in R-Quot$, entonces $\mathcal{Q} \subseteq \left(\mathcal{Q}^{\perp_{R-Quot}}\right)^{\perp_{R-Quot}}$* ∎

Observación 96 *Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in R-Quot$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ implica que $\mathcal{B}^{\perp_{R-Quot}} \subseteq \mathcal{A}^{\perp_{R-Quot}}$.*

Demostración. Sea M un elemento de $\mathcal{B}^{\perp_{R-quot}}$ y suponga que $M \twoheadrightarrow N \neq 0$, entonces $N \notin \mathcal{B}$, por lo tanto $N \notin \mathcal{A}$. ■

Definición 97 *Denotamos por $R-Conat$ al esqueleto de $R-Quot$. Los elementos de $R-Conat$ serán llamados clases conaturales.*

Las siguientes afirmaciones nos ayudarán a decidir cuando una clase de módulos es una clase conatural.

Definición 98 *Sea $\mathcal{A}$ una clase de modulos, decimos que $\mathcal{A}$ tiene la condición (CN) si:*

$$\begin{pmatrix} \textit{Para cada } M \twoheadrightarrow N \neq 0, \textit{ existen } A \in \mathcal{A}, \\ 0 \neq K \in R-Mod \textit{ y } N \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow A \end{pmatrix} \Rightarrow M \in \mathcal{A}$$

Teorema 99 *Sea $\mathcal{A} \subseteq R-Mod$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathcal{A} \in R-Conat$

2. $\mathcal{A}$ tiene la condición (CN)

3. $\mathcal{A} \in R-Quot$ y $\mathcal{A} = \left(\mathcal{A}^{\perp_{R-Quot}}\right)^{\perp_{R-Quot}}$.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Si $\mathcal{A}$ es una clase conatural, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{\perp_{R-quot}}$ para alguna $\mathcal{Q} \in R-quot$, así que $\mathcal{A}$ es la clase de los módulos N tales que ningún cociente distinto de cero de N está en $\mathcal{Q}$ por la *Proposición* 92.

Sea M' un cociente distinto de cero de M y suponga que $M' \in \mathcal{Q}$, entonces, por la hipótesis, existen $A \in \mathcal{A}$, $0 \neq X \in R-Mod$ y $M' \twoheadrightarrow X \twoheadleftarrow A$. Entonces $X \notin \mathcal{Q}$, ya que $A \in \mathcal{A}$. Pero $M' \in \mathcal{Q}$ implica que $X \in \mathcal{Q}$, debido a que $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo cocientes. Contradicción. Por lo tanto $M' \notin \mathcal{Q}$ y $M \in \mathcal{A}$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Si $C \in \mathcal{A}$ y B es un cociente distinto de cero de C, entonces para cada cociente distinto de cero N de B, tomando $K = N$ y $A = C$ concluimos que $B \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A} \in R-quot$.

El hecho de que $\mathcal{A} = \left(\mathcal{A}^{\perp_{R-quot}}\right)^{\perp_{R-quot}}$ se sigue del *Teorema* 94 y del *Corolario* 95.

$(3 \Rightarrow 1)$ Es claro. ■

Teorema 100 *Sea $\mathcal{C}$ una clase conatural, entonces $\mathcal{C}$ es cerrada bajo:*

1. Imágenes homomórficas.

2. Extensiones.

3. Epimorfismos superfluos.

Demostración. (1) Es Obvio.

(2) Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta con A, $C \in \mathcal{C}$, y tome $B \overset{h}{\twoheadrightarrow} B' \neq 0$.

(a) Si $h \circ f$ no es suprayectiva, entonces podemos tomar el cociente distinto de cero $\frac{B'}{(h\circ f)(A)}$ de B', $\left(B' \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \frac{B'}{(h\circ f)(A)}\right)$, por lo tanto $\pi \circ h \circ f = \overline{0}$.

En consecuencia, existe un epimorfismo $\varphi : C \twoheadrightarrow \frac{B'}{(h\circ f)(A)}$.

Por lo tanto, $\frac{B'}{(h\circ f)(A)}$ es un cociente distinto de cero de un elemento en $\mathcal{C}$. Así que B' tiene un cociente distinto de cero que también es un cociente de un elemento en $\mathcal{C}$.

(b) Si $h \circ f$ es suprayectiva, entonces B' es ya un cociente de un elemento en $\mathcal{C}$.

(3) Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta con $C \in \mathcal{C}$ y $f(A) << B$ (es decir, $f(A)$ es superfluo en B).

Suponga que B' es un cociente distinto de cero de B ($B \overset{h}{\twoheadrightarrow} B'$).

(a) Si $h \circ f = 0$, entonces existe $\overline{h} : C \to B'$ tal que $\overline{h} \circ g = h$. Como h es suprayectiva, $\overline{h}$ es un epimorfismo y B' es un cociente de un elemento en $\mathcal{C}$.

(b) Note que si $h \circ f \neq 0$, entonces f no es un epimorfismo. En efecto, si f fuera un epimorfismo, entonces $f(A) + Ker(h) = B$. Como $f(A) << B$

tendríamos que $Ker(h) = B$, así que $h = 0$, una contradicción.

Si $h \circ f \neq 0$, entonces como $h \circ f$ no es un epimorfismo, $\frac{B'}{h\circ f(A)}$ es un cociente distinto de cero de B' y en consecuencia un cociente distinto de cero de B. Volvemos ahora al caso $(3a)$.

Así que cada cociente distinto de cero de B tiene un cociente distinto de cero en $\mathcal{C}$. ■

2.3 R-conat es un Álgebra de Boole

Lema 101 *Sea $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in X}$ una colección de clases conaturales. Entonces $\bigcap\limits_{i\in X}\{\mathcal{C}_i\}$ es una clase conatural.*

Demostración. Demostraremos que $\bigcap\limits_{i\in X}\{\mathcal{C}_i\}$ satisface CN. Sea $M \in R-Mod$ tal que para cada cociente distinto de cero N de M, existen $A \in \bigcap\limits_{i\in X}\{\mathcal{C}_i\}$, $0 \neq K \in R-Mod$ y $M \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow A$. En particular, para cada cociente distinto de cero N de M, existe $A \in \mathcal{C}_i$ (para cada $i \in X$), $0 \neq K \in R-Mod$ y $M \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow A$. Como cada $\mathcal{C}_i \in R-conat$, $M \in \mathcal{C}_i$ para cada $i \in X$. Por lo tanto $M \in \bigcap\limits_{i\in X}\{\mathcal{C}_i\}$. ■

• Por el *Lema* 101 y el hecho de que $R-Mod$ es una clase conatural, tenemos que para cada clase $\mathcal{A} \subseteq R-Mod$, existe la menor clase conatural $\langle\mathcal{A}\rangle_{R-Conat}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \langle\mathcal{A}\rangle_{R-Conat}$. Por lo tanto tenemos que $(R-Conat, \leq, \wedge, \vee)$ es una retícula completa, donde:

1. $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$,

2. $\mathbf{0} = \{(0)\}$

3. $\mathbf{1} = R-Mod$

4. $\bigwedge\limits_{i\in X} \{\mathcal{C}_i\} = \bigcap\limits_{i\in X} \{\mathcal{C}_i\}$ y

5. $\bigvee\limits_{i\in X} \{\mathcal{C}_i\} = \left\langle \bigcup\limits_{i\in X} \{\mathcal{C}_i\} \right\rangle_{R-Conat}$.

Proposición 102 *Si* $\mathcal{C} \in R\text{–}Quot$, *entonces* $\left(\mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Quot}}\right)^{\perp_{R\text{-}Quot}} = \langle\mathcal{C}\rangle_{R-Conat}$.

Demostración. Ya hemos observado que $\mathcal{C} \subseteq \left(\mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}quot}}\right)^{\perp_{R\text{-}quot}} \in R-Conat$.

Sea $\mathcal{K} \in R-Conat$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$. Por la *Observación* 96 y el *Teorema* 99, tenemos que $\left(\mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Quot}}\right)^{\perp_{R\text{-}Quot}} \subseteq \left(\mathcal{K}^{\perp_{R\text{-}Quot}}\right)^{\perp_{R\text{-}Quot}} = \mathcal{K}$. Por lo tanto $\left(\mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Quot}}\right)^{\perp_{R\text{-}Quot}} = \langle\mathcal{C}\rangle_{R-Conat}$. ■

Corolario 103 *Si $\{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es una familia de clases conaturales, entonces*

$$\bigvee_{\substack{R-Conat\\ \alpha\in X}} \{\mathcal{C}_\alpha\} = \left\{ N\in R-Mod \mid \begin{array}{c} \forall N \twoheadrightarrow M\neq 0, \exists M \twoheadrightarrow M'\neq 0 \\ \text{con } M'\in \mathcal{C}_\rho \text{ para alguna } \rho\in X \end{array} \right\}$$

.

Demostración.

$$\bigvee_{\substack{R-Conat\\ \alpha\in X}} \{\mathcal{C}_\alpha\} = \left\langle \bigcup_{\alpha\in X} \{\mathcal{C}_\alpha\} \right\rangle_{R-Conat} = \left(\left(\bigcup_{\alpha\in X} \{\mathcal{C}_\alpha\} \right)^{\perp_{R-Quot}} \right)^{\perp_{R-Quot}}$$

por la *Proposición* 102, pero

$$\left(\left(\bigcup_{\alpha\in X} \{\mathcal{C}_\alpha\} \right)^{\perp_{R-Quot}} \right)^{\perp_{R-Quot}} =$$

$$= \left\{ N\in R-Mod \mid \begin{array}{c} \forall N \twoheadrightarrow M\neq 0, \exists M \twoheadrightarrow M'\neq 0 \\ \text{con } M'\in \mathcal{C}_\rho \text{ para alguna } \rho\in X \end{array} \right\}$$

por el *Teorema* 94. ∎

Sabemos que una retícula L es un Álgebra de Boole si cada elemento $a \in L$ tiene un complemento y L es distributiva (con 0 y 1).

Lema 104 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ elementos de $R-Conat$. Entonces son equivalentes para $\mathcal{L} \in R-Conat$:*

1. $\mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \leq \mathcal{D}$

2. $\mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{R-Quot}} = \mathbf{0}$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \leq \mathcal{D}$ y sea $M \in \mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{R-Conat}}$.

Sabemos que $M \in \mathcal{D}^{\perp_{R-Quot}}$ si y sólo si ningún cociente de M está en $\mathcal{D}$. En particular $M \notin \mathcal{D}$.

Por otra parte $M \in \mathcal{D}$ ya que está en $\mathcal{C} \wedge \mathcal{L}$. Por lo tanto $M = 0$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{R-Conat}} = \mathbf{0}$ y sea $M \in \mathcal{C} \wedge \mathcal{L}$.

Si $M \notin \mathcal{D}$ entonces $\exists\ M \twoheadrightarrow N \neq 0$ tal que $\forall\ N \twoheadrightarrow N' \neq 0$, $N' \notin \mathcal{D}$. Por lo tanto $N \in \mathcal{D}^{\perp_{R-Quot}}$.

Pero $M \in \mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \Rightarrow N \in \mathcal{C} \wedge \mathcal{L}$ y en consecuencia $N \in \mathcal{C} \wedge \mathcal{L} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{R-Conat}} = \mathbf{0}$

∇

Esta contradicción muestra que $M \in \mathcal{D}$. ■

Teorema 105 *$R-Conat$ es un Álgebra de Boole.*

Demostración. Primero afirmamos que $\mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Quot}}$es el complemento de $\mathcal{C}$ en $R - Conat$.

En efecto, si $M \notin \mathcal{C} \vee_{R-Conat} \mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Quot}}$, entonces existiría $M \twoheadrightarrow N \neq 0$ tal que ningún cociente de N estaría en $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}quot}}$, ya que $\mathcal{C} \vee_{R-Conat} \mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Quot}} = \left\langle \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Quot}} \right\rangle_{R-Conat}$.

Pero $N \notin \mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Quot}}$ implica que existe un cociente distinto de cero N' de N, con $N' \in \mathcal{C}$. Así que N tiene un cociente distinto de cero en $\mathcal{C}$. Una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{C} \vee_{R-Conat} \mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Quot}} = \mathbf{1}$.

Es fácil ver que cada elemento $\mathcal{C} \in R-Conat$ tiene un único complemento y que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \mathbf{0}$ se tiene si y sólo si $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}Conat}}$.

Con lo anterior y el *Lema* 104 podemos seguir la demostración de [[17], *Ch.III,Proposition* 4.4] para demostrar que $R - Conat$ es una retícula distributiva. ■

Proposición 106 *Las siguiente condiciones son equivalentes para un anillo* R.

1. $R - Quot$ es de Boole.

2. $R - Quot = R - Conat$.

3. R es el anillo trivial.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Si $R-Quot$ es de Boole, entonces coincide con su esqueleto que es $R-Conat$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Es una consecuencia inmediata del *Teorema* 105.

$(3 \Rightarrow 1)$ Es claro.

$(2 \Rightarrow 3)$ Si $\mathcal{M} \subseteq R-Mod$ tenemos que

$$\{N \in R-Mod \mid \exists M \twoheadrightarrow N \text{ con } M \in \mathcal{M}\} = \langle \mathcal{M} \rangle_{R-Quot} = \langle \mathcal{M} \rangle_{R-Conat} =$$

$$= \left\{ N \in R-Mod \mid \begin{array}{c} \forall N \twoheadrightarrow N' \text{ con } N' \neq 0, \exists\, (N' \twoheadrightarrow N'' \twoheadleftarrow M) \\ \text{con } M \in \mathcal{M} \text{ y } N'' \neq 0 \end{array} \right\}.$$

En particular, si $\mathcal{S}$ es la clase de los módulos simples, tenemos que

$$\mathcal{S} = \langle \mathcal{S} \rangle_{R-Quot} = \langle \mathcal{S} \rangle_{R-Conat} = \{M \in R-Mod \mid M \text{ es un módulo MAX}\}$$

donde un módulo distinto de cero M se llama módulo MAX si cada submódulo no nulo de M tiene submódulos máximos.

Como cada módulo finitamente generado es un módulo MAX, cada uno sería simple. Esto es posible sólo si R es el anillo trivial. ■

Ejemplo 107 *Sea R un anillo semiperfecto y $\mathbb{T}$ una clase de torsión hereditaria en $R-Mod$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathbb{T}$ es una clase conatural.

2. $\mathbb{F}$ es cerrada bajo cocientes. Donde $\mathbb{F}$ es la clase libre de torsión asociada a $\mathbb{T}$.

3. $\mathbb{T}$ es cerrada bajo cubiertas proyectivas.

Demostración. $(2 \Leftrightarrow 3)$ $[[17], Chapter\ VIII,\ Exercise\ 18(iii)]$.

$(1 \Rightarrow 3)$ Se sigue del *Teorema* 100(3).

$(3 \Rightarrow 1)$ Sea $M \in R-Mod$ tal que cada cociente distinto de cero N de M, tiene un cociente distinto de cero en $\mathbb{T}$.

Si M no es de torsión, entonces $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{F}$ sería distinto de cero. Tomemos $Rx \twoheadrightarrow R\overline{x} \neq 0$, donde $Rx \leq M$, $R\overline{x} \leq \frac{M}{t(M)}$, y $M \twoheadrightarrow \frac{M}{t(M)}$ es el epimorfismo canónico.

Sea P la cubierta proyectiva de $R\overline{x}$. Entonces $\pi : P \rightarrow R\overline{x}$ se factoriza a través de $Rx \in \mathbb{T}$.

Por lo tanto $R\overline{x} \in \mathbb{T} \cap \mathbb{F}$, una contradicción. Así que $M \in \mathbb{T}$ y $\mathbb{T} \in R - Conat$. ■

Proposición 108 *Sea $\mathcal{S}$ la clase de los módulos simples. Entonces*

$$\langle R \rangle_{R-Conat} = \langle \mathcal{S} \rangle_{R-Conat}.$$

Demostración. Cada cociente distinto de cero de R tiene un cociente simple. Por lo tanto $\langle R \rangle_{R-Conat} \leq \langle \mathcal{S} \rangle_{R-Conat}$.

Recíprocamente, cada módulo simple es un cociente de R, así que cada uno está en $\langle R \rangle_{R-Conat}$. Por lo tanto $\langle \mathcal{S} \rangle_{R-Conat} \leq \langle R \rangle_{R-Conat}$. ■

2.4 Átomos

Si $\mathcal{H}$ es un átomo en $R - Her$, entonces para cada submódulo distinto de cero N de cualquier módulo M en $\mathcal{H}$, $\langle N \rangle_{R-Her} = \mathcal{H}$.

En particular, existe $M \rightarrowtail N \leq M$ y en consecuencia M es comprimible.

Por lo tanto, los átomos en $R - Her$ son de dos tipos: Los generados por módulos simples y los generados por módulos comprimibles no simples.

Ejemplo 109 *Los átomos en $\mathbb{Z} - Her$ son $\langle \mathbb{Z}_p \rangle_{R-Her}$, con p primo y $\langle \mathbb{Z} \rangle_{R-Her}$.*

Demostración. Como cada $\mathbb{Z}_p$ es simple, cada $\langle \mathbb{Z}_p \rangle_{R-Her}$ es un átomo.

También es claro que $\langle \mathbb{Z} \rangle_{R-Her}$ es un átomo.

Si $\mathcal{H} \in R-Her$ es un átomo y $N \in \mathcal{H}$ no es simple, entonces N es comprimible y $t(N)$ lo sería también si $t(N) \neq 0$. Pero $0 \neq x \in t(N)$, implica que $\mathbb{Z}x \cong \mathbb{Z}_n$ sería comprimible, contradicción.

Por lo tanto $t(N) = 0$, así que $N \cong \mathbb{Z}^{(X)}$. Esto implica que existe $\mathbb{Z}^{(X)} \rightarrowtail \mathbb{Z}$, pero esto sólo pasa si $|X| \leq 1$. ■

Ejemplo 110 *Los átomos en $\mathbb{Z}-Quot$.*

Para cada p primo, $\langle \mathbb{Z}_p \rangle_{\mathbb{Z}-Quot}$ y $\langle \mathbb{Z}_{p^\infty} \rangle_{\mathbb{Z}-Quot}$ son claramente átomos.

Afirmamos que estos son todos los átomos.

Demostración. En efecto, sea $\mathcal{C}$ un átomo, entonces para cada $0 \neq M \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \langle M \rangle_{\mathbb{Z}-Quot}$. Tomemos tal M y supongamos que no tiene cocientes simples. Así que M es un grupo divisible.

Si ${}_{\mathbb{Z}}M$ es libre de torsión, entonces ${}_{\mathbb{Z}}M \cong \mathbb{Q}^{(X)}$, así que

$$\langle M \rangle_{\mathbb{Z}-Quot} = \langle \mathbb{Q} \rangle_{\mathbb{Z}-Quot} = \left\langle \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \right\rangle_{\mathbb{Z}-Quot} = \langle \mathbb{Z}_{p^\infty} \rangle_{\mathbb{Z}-Quot}$$

para cada primo p, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $t({}_{\mathbb{Z}}M) \neq 0$. Como M es divisible, también lo es $t({}_{\mathbb{Z}}M)$. Por lo tanto $t({}_{\mathbb{Z}}M)$ es un sumando directo de M y es un cociente de M. En consecuencia $\langle M\rangle_{\mathbb{Z}-Quot} = \langle t({}_{\mathbb{Z}}M)\rangle_{\mathbb{Z}-Quot}$.

Si $x \in t({}_{\mathbb{Z}}M)$ de orden p, entonces la cápsula inyectiva de $\mathbb{Z}x$ es un sumando directo de $t({}_{\mathbb{Z}}M)$ y por lo tanto $C = \langle M\rangle_{\mathbb{Z}-Quot} = \langle t({}_{\mathbb{Z}}M)\rangle_{\mathbb{Z}-Quot} = \langle \mathbb{Z}_{p^\infty}\rangle_{\mathbb{Z}-Quot}$. ■

Es claro que $\langle S\rangle_{R-Quot}$ es un átomo en $R-Quot$ si S es simple. Ahora, si C es un átomo en $R-Quot$ y no está generado por un módulo simple, entonces $C = \langle M\rangle_{R-Quot}$ para algún módulo M que no tiene cocientes simples, es decir, M es un módulo distinto de cero tal que no tiene submódulos máximos. En particular, M no es finítamente generado.

Definición 111 *Un módulo M se llama cocomprimible si genera un átomo en $R-Quot$.*

Proposición 112 *Para un módulo distinto de cero M, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. M es cocomprimible.

2. M es un cociente de cualquiera de sus cocientes distintos de cero.

3. Para cada cociente distinto de cero C de M, $\langle C\rangle_{R-Quot} = \langle M\rangle_{R-Quot}$.

Demostración. $(1 \Rightarrow 3)$ Si $0 \neq C$ es un cociente de M, entonces $0 \neq C \in \langle M \rangle_{R-Quot}$, por lo tanto $0 \neq \langle C \rangle_{R-Quot} \leq \langle M \rangle_{R-Quot}$.

Y como $\langle M \rangle_{R-Quot}$ es un átomo, $\langle C \rangle_{R-Quot} = \langle M \rangle_{R-Quot}$.

$(3 \Rightarrow 2)$ $M \in \langle M \rangle_{R-Quot} = \langle C \rangle_{R-Quot}$ implica que M es un cociente de C.

$(2 \Rightarrow 1)$ Si $0 \neq \gamma \leq \langle M \rangle_{R-Quot}$, entonces existe $0 \neq C \in \gamma$. Como C es un cociente de M, M en sí es un cociente de C.

Así que $M \in \langle C \rangle_{R-Quot} \leq \gamma$. Por lo tanto $\langle M \rangle_{R-Quot} \leq \gamma \leq \langle M \rangle_{R-Quot}$.

En consecuencia $\langle M \rangle_{R-Quot}$ es un átomo en $R-Quot$. ■

Observación 113 *Si $M \in R-Mod$, entonces*

$$\langle M \rangle_{R-Conat} = \left\{ N \in R-Mod \mid \begin{array}{c} \forall N \overset{\neq 0}{\twoheadrightarrow} N', \exists M' \lneqq M \text{ y un} \\ \text{epimorfismo } \varphi : N' \twoheadrightarrow \frac{M}{M'} \end{array} \right\} \blacksquare$$

Proposición 114 *Sea M un módulo distinto de cero. Entonces $\langle M \rangle_{R-Conat}$ es un átomo de $R-Conat$ si y sólo si $\langle M \rangle_{R-Conat} = \langle \frac{M}{M'} \rangle_{R-Conat}$ para cada submódulo propio M' de M.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Es claro.

$(\Leftarrow)$ Sea $0 \neq C \in R-Conat$ tal que $C \leq \langle M \rangle_{R-Conat}$. Tomemos $0 \neq N \in C$. Entonces $N \in \langle M \rangle_{R-Conat}$. Por la *Observación* 113, existe un submódulo propio M' de M y un epimorfismo $\varphi : N \to \frac{M}{M'}$, tal que $\langle M \rangle_{R-Conat} = \langle \frac{M}{M'} \rangle_{R-Conat} \leq \langle N \rangle_{R-Conat} \leq C$.

Por lo tanto $\langle M \rangle_{R-Conat}$ es un átomo de $R-Conat$. ■

Definición 115 *Un módulo M se llama hueco si todo submódulo propio de M es superfluo.*

Proposición 116 *Si M es un módulo hueco, entonces $\langle M \rangle_{R-Conat}$ es un átomo de $R-Conat$.*

Demostración. Por la *Proposición* 114, basta demostrar que si N es un submódulo superfluo de M, entonces $\langle \frac{M}{N} \rangle_{R-Conat} = \langle M \rangle_{R-Conat}$.

Es claro que $\langle \frac{M}{N} \rangle_{R-Conat} \leq \langle M \rangle_{R-Conat}$. Por el *Teorema* 100(3), $M \in \langle \frac{M}{N} \rangle_{R-Conat}$, debido a que el epimorfismo canónico es superfluo.

Así que $\langle M \rangle_{R-Conat} \leq \langle \frac{M}{N} \rangle_{R-Conat}$. ■

Como cada módulo simple es hueco, tenemos el siguiente:

Corolario 117 *Si S es un $R-$modulo simple, entonces $\langle S \rangle_{R-Conat}$ es un átomo de $R-Conat$.* ■

Capítulo 3

Caracterizaciones de Anillos

En este capítulo veremos conceptos relacionados con las clases naturales y conaturales que nos llevan a dar caracterizaciones de anillos.

3.1 Anillos semiartinianos

Proposición 118 *Son equivalentes para un anillo R:*

1. R es semiartiniano izquierdo.

2. Cada clase natural es una clase libre de torsión hereditaria.

3. La clase natural

$$\mathfrak{S} = \left\{ M \in R - Mod \mid soc(M) \underset{es}{\subseteq} M \right\}$$

(vea el *Ejemplo* 3) es una clase libre de torsión hereditaria.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Sea R anillo semiartiniano izquierdo y $\mathfrak{K} \in R - Nat$. Tomemos

$$\mathfrak{F} = \{soc(M) \mid M \in \mathfrak{K}\}$$

Entonces $\mathfrak{K} = \langle \mathfrak{F} \rangle$. En efecto, $\mathfrak{K} \leq \langle \mathfrak{F} \rangle$ ya que R semiartiniano implica que todo módulo tiene zoclo distinto de cero, y claramente se da la otra inclusión.

Sea

$$M = \prod_{\alpha \in X} M_\alpha M_\alpha \in \mathfrak{K}\ \forall \alpha \in X.$$

Si $M \notin \mathfrak{K}$ entonces $M \notin \langle \mathfrak{F} \rangle$ y por lo tanto existe un submódulo no cero N de M tal que no tiene submódulos en $\mathfrak{F}$, ya que R semiartiniano implica que todo módulo tiene zoclo distinto de cero, y podemos suponer que $N = Rx$

simple y $Rx \notin \mathfrak{F}$. Escribimos $x = (x_\alpha)$ con alguna $x_\beta \neq 0$, entonces

$$\begin{array}{ccc} Rx & \xrightarrow{\varphi} & Rx_\beta \\ rx & \mapsto & rx_\beta \end{array}$$

es un isomorfismo.

En efecto,

$$r_1x = r_2x \Rightarrow (r_1 - r_2)x = 0 \Rightarrow (r_1 - r_2)x_\beta = 0 \Rightarrow r_1x_\beta = r_2x_\beta.$$

Así que φ está bien definida. φ es claramente suprayectiva y como

$$x \mapsto x_\beta \neq 0, Ker(\varphi) = 0.$$

Entonces

$$Rx \cong Rx_\beta \leq M_\beta \in \mathfrak{K} \Rightarrow Rx = N \in \mathfrak{F} \nabla$$

$\therefore M \in \mathfrak{K}$ y $\mathfrak{K}$ es cerrada bajo tomar productos.

$(2 \Rightarrow 3)$ Obvia.

$(3 \Rightarrow 1)$ Sea

$$\mathfrak{K} = \left\{ M \in R - Mod \mid soc(M) \underset{es}{\subseteq} M \right\}$$

entonces por (3) $\mathfrak{K}$ es una clase libre de torsión hereditaria.

Notemos que, entonces, todo módulo simple está en $\mathfrak{K}$ y por lo tanto el menor cogenerador, $C = \bigoplus_{\alpha \in X} E(S_\alpha)$ sobre todos los simples no isomorfos por pares, está en $\mathfrak{K}$.

Por lo tanto, si $M \in R - Mod$ entonces $\exists X$ conjunto y $M \rightarrowtail C^X$ con $C^X \in \mathfrak{K}$ debido a que $\mathfrak{K}$ es cerrada bajo tomar productos. En consecuencia $M \in \mathfrak{K}$ y$\mathfrak{K} = R - Mod$. Así que R es semiartiniano. ∎

3.1.1 Finitud en $R - Nat$

• Se dice que una retícula es atómica si cada uno de sus elementos distintos de cero incluye un átomo.

De la teoría de retículas tenemos el siguiente resultado conocido:

Lema 119 *Una retícula L es atómica de Boole completa si y sólo si $L \cong 2^X = \wp(X)$, donde $X \subseteq L$ es el conjunto de sus átomos.* ∎

De donde obtenemos el siguiente:

Corolario 120 *Si $R-Nat$ es atómica, entonces $|R-Nat| = 2^c$ donde c es el cardinal del conjunto de todos los átomos en $R-Nat$. En particular si $|R-Nat|$ es finito, $|R-Nat| = 2^n$, n el número de átomos en $R-Nat$.* ■

Claramente si R es semiartiniano izquierdo con un número finito de simples salvo isomorfismos,entonces la retícula de clases naturales es finita.

•Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ un juego completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos sin zoclo. Sea $E_0 = E\left(\bigoplus_{i\in I} X_i\right)$.

Proposición 121 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $|R-Nat| = 2^n$

2. (a) R es semiartiniano izquierdo con n simples salvo isomorfismo ó

   (b) $\exists i \in \mathbb{Z}$ $(1 \leq i \leq n)$, tal que R tiene i simples salvo isomorfismo y $E_0 = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_{n-i}$ donde cada E_i es atómico y cada pareja E_i,E_j con $i \neq j$ no tienen submódulos isomorfos.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que no es cierta (a). Sea s el número de clases de isomorfismo de módulos simples.

Como R no es semiartiniano

$$\mathfrak{K} = \left\{ M \in R - Mod \mid soc(M) \underset{es}{\subseteq} M \right\} \neq \mathbf{1}$$

y

$$\mathfrak{K}^{\perp} = \{ M \in R - Mod \mid soc(M) = 0 \} \neq \mathbf{0}.$$

Por lo tanto hay cíclicos sin zoclo y en consecuencia $E_0 \neq 0$ y E_0 incluye un módulo atómico M_1.

Tomamos una familia independiente máxima $\{N_i\}_{i \in I_1}$, de submódulos de E_0 tales que

$$M_1 \in \{N_i\}_{i \in I_1} \text{ y } N_i \in \langle M_1 \rangle \, \forall i \in I_1.$$

Sea $E_1 = E \left(\bigoplus_{i \in I_1} N_i \right)$, entonces $E_1 \in \langle M_1 \rangle$ y $\langle E_1 \rangle = \langle M_1 \rangle$, así que E_1 es atómico.

Como $E_1 \leq E_0$, es un sumando directo y podemos escribir

$$E_0 = E_1 \oplus F_1$$

Si $F_1 \neq 0$ entonces incluye un módulo atómico M_2 y por la maximalidad de $\{N_i\}_{i\in I_1}$, $\langle M_1\rangle \neq \langle M_2\rangle$, ya que de lo contrario

$$(M_2 \in \langle M_1\rangle, M_2 \leq E_0) \Rightarrow \{N_i\}_{i\in I} \cup \{M_2\}$$

es independiente $\underset{\bullet}{\nabla}$

Entonces existe una familia independiente máxima $\{N_i\}_{i\in I_2}$ de submódulos de F_1 tales que $M_2 \in \{N_i\}_{i\in I_2}$ y $N_i \in \langle M_2\rangle$, $\forall i \in I_2$.

Sea $E_2 = E\left(\bigoplus_{i\in I_2} N_i\right)$, entonces $\langle E_2\rangle = \langle M_2\rangle$, por lo tanto E_2 es atómico. Escribimos, de la misma manera que antes, $F_1 = E_2 \oplus F_2$.

Si $F_2 \neq 0$, encontramos E_3 de la misma manera. Como $R - Nat$ tiene sólo n átomos, existe t tal que $F_t = 0$.

Por lo tanto $E_0 = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_t$, con cada E_i atómico y tales que $\langle E_i\rangle \neq \langle E_j\rangle$ si $i \neq j$. Es decir que E_i y E_j no tienen submódulos isomorfos.

Ahora esperamos que $n = s + t$.

Veamos que cada átomo de $R - Nat$ es uno de los generados por los simples o alguno de los E_j. Sea $\langle M\rangle$ un átomo en $R - Nat$.

a) Si $soc(M) \neq 0$, entonces $\langle M\rangle = \langle N\rangle$ para algún N simple.

b) Si $soc(M) = 0$, por la elección de E_0, M tiene un submódulo no cero que se mete en E_0 y en consecuencia (haciendo unas pequeñas modificaciones al *Lema 4*), un submódulo N, que se mete en algún E_i.

Por lo tanto $\langle N \rangle = \langle E_i \rangle \Rightarrow \langle M \rangle = \langle E_i \rangle$. Así que los mencionados son todos los átomos de $R - Nat$. $\therefore n = s + t$.

$(\Leftarrow)$ Claramente (a) implica que $|R - Nat| = 2^n$.

Supongamos entonces (b) y sea $M \in R - Mod$.

Haciendo la misma observación que en la parte final de la demostración de $(\Rightarrow)$ se ve que siempre M incluye un submódulo atómico y que los átomos que se mencionan en (b) son todos los que hay.

$\therefore |R - Nat| = 2^n$ (del *Corolario 120* anterior). ■

3.2 Anillos MAX y Anillos Perfectos.

Proposición 122 *Son equivalentes para un anillo R:*

1. R es isomorfo a un producto directo finito de anillos perfectos derechos, cada uno de ellos con un módulo simple salvo isomorfismo;
2. Toda clase natural de $R - Mod$ es una clase de torsión hereditaria.

Demostración. De [[11], 23.9 y 5.5] tenemos que: R es isomorfo a un producto directo finito de anillos perfectos derechos, cada uno de ellos con un módulo simple salvo isomorfismo si y sólo si toda clase libre de torsión hereditaria es cerrada bajo tomar cocientes.

$(1 \Rightarrow 2)$ $R \cong P_1 \times P_2 \times ... \times P_k$ con cada P_i perfecto derecho $\Rightarrow R$ es perfecto derecho $\Rightarrow R$ es semiartiniano izquierdo . Por lo tanto, toda clase natural es clase libre de torsión hereditaria (*Proposición* anterior) y de la observación arriba cada una es cerrada bajo cocientes. Por lo tanto es clase de torsión hereditaria.

$(2 \Rightarrow 1)$ Si tomamos una clase libre de torsión hereditaria, entonces es clase natural y por lo tanto clase de torsión hereditaria. De la observación arriba se tiene el resultado. ■

Definición 123 *Decimos que un anillo R es un anillo MAX izquierdo, si cada R-módulo distinto de cero tiene submódulos máximos.*

Teorema 124 *Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. R es MAX izquierdo.

2. Toda clase conatural en $R - Mod$ está generada por una familia de R-módulos simples.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Sea C una clase conatural no trivial. Tomemos

$\mathcal{S}$ la clase de los módulos simples que pertenecen a $\mathcal{C}$. Afirmamos que $\mathcal{C} = \langle \mathcal{S} \rangle_{R-Conat}$.

En efecto, si $0 \neq M \in \mathcal{C}$, entonces cada uno de sus cocientes distintos de cero pertenece a $\mathcal{S}$. De (1) M y cada uno de sus cocientes distintos de cero tiene cocientes simples. Por lo tanto $M \in \langle \mathcal{S} \rangle_{R-Conat}$. Así que $\mathcal{C} = \langle \mathcal{S} \rangle_{R-Conat}$.

($2 \Rightarrow 1$) Sea M un módulo distinto de cero. Si M no tuviera cocientes simples, entonces $\langle M \rangle_{R-Conat}$ no estaría generada por una familia de módulos simples. ■

Como cada anillo pefecto izquierdo es MAX izquierdo, podemos concluir el siguiente:

Corolario 125 *Si R es un anillo pefecto izquierdo, entonces cada clase conatural en $R - Mod$ está generada por una familia de módulos simples.* ■

La siguiente Observación está en [[1], 28.5].

Observación 126 *Si R es un anillo MAX izquierdo, entonces $Rad(R)$ es T-nilpotente izquierdo.* ■

Teorema 127 *Si R es un anillo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. R es un anillo perfecto izquierdo.

2. R es semilocal y $|R - Conat| = 2^k$, donde $k \in \mathbb{N}$ es el número de clases de isomorfismo de R-módulos simples.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Por el *Corolario* 125, cada clase conatural está generada por una familia de módulos simples. Además hay un número finito de ellos salvo isomorfismo.

$(2 \Rightarrow 1)$ Como $|R - Conat| = 2^k$ y k es el número de clases de isomorfismo de R-módulos simples, cada clase conatural está generada por una familia de módulos simples. En particular, cada módulo distinto de cero M tiene un cociente simple. Por lo tanto $Rad\,(R)$ es T-nilpotente izquierdo de [[1], 28.4 (c)]. Así que R es perfecto izquierdo. ∎

Teorema 128 *Si R es un anillo semiperfecto pero R no es perfecto izquierdo, entonces existe una clase conatural que no está generada por una familia de módulos simples.*

Demostración. Por [[13], 11.6.2], existe un módulo libre $R^{(X)}$ tal que su radical de Jacobson no es superfluo. Por lo tanto $Rad\left(R^{(X)}\right) + K = R^{(X)}$, para algún submódulo propio K de $R^{(X)}$. Afirmamos que

$$\langle R\rangle_{R-Conat} \subsetneq \left\langle R^{(X)}\right\rangle_{R-Conat}.$$

En efecto, como R es un cociente de $R^{(X)}$, entonces

$$\langle R\rangle_{R-Conat} \subseteq \left\langle R^{(X)}\right\rangle_{R-Conat}.$$

Para ver que la inclusión es propia, es suficiente demostrar que $R^{(X)}$ tiene un cociente sin submódulos máximos.

Debido a que $Rad\left(R^{(X)}\right) + K = R^{(X)}$, K no está incluido en ningún submódulo máximo de $R^{(X)}$. Por lo tanto $\frac{R^{(X)}}{K}$ no tiene submódulos máximos y en consecuencia $\frac{R^{(X)}}{K}$ no tiene cocientes simples. ■

Bibliografía

[1] Anderson F. W. and Fuller K. R., Rings and Categories of modules, Springer-Verlag, New York, Inc. 2^{nd} edition 1992.

[2] Arroyo MªJosé, Ríos José, Some aspects of spectral torsion theories, Communications in Algebra, 22 (12), 4991 – 5003 (1994).

[3] Dauns J., Torsion Free Modules, Annali di Matematica pura ed applicata. (IV), Vol. $CLIV$ (1989), pp. 49 – 81.

[4] Dauns J., Classes of modules, Forum Math. 3 (1991), 327 – 338.

[5] Dauns J., Torsion Free Types, Fundamenta Mathematicae 139 (1991). pp. 99 – 117.

[6] Dauns J., Direct Sums and Subdirect Products, in Methods in Module Theory, edited by G. Abrams, J. Haetner and K. M. Rangaswamy, 39 –

65, Marcel Dekker, New York, 1992.

[7] Dauns J., Module Types, Rocky Mountain Journal of Mathematics, volume 27, number 2, spring 1997.

[8] Dauns J., Lattices of Classes of Modules, preprint (1998).

[9] Dauns J., Module classifying functors, Czechoslovak Math. J. 42 (1992), 741 – 756.

[10] Dauns J., Functors and $\Sigma-$products, in Ring theory (S.K. Jain and S. Tariq Rizvi, eds.), World Sci. Pub., Singapore, 1993, 149 – 171.

[11] Golan J. S., Torsion Theories, Longman Scientific & Technical, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 29, 1986.

[12] Grätzer G., General Lattice Theory, Academic Press Inc., Pure and Applied Mathematics 1978.

[13] Kasch F., Modules and Rings, Academic Press Inc. London LTD. 1982.

[14] Mohamed S. H. and Muller J. B., Continuous and Discrete Modules, Cambridge University Press, London Math. Society Lecture Note Series. 147. 1990.

[15] Page S. S. and Zhou Y., On Direct Sums of Injective Modules and Chain Conditions, Can. J. Math. Vol. 46 (3), 1994 pp. 634 – 647.

[16] Raggi F., Rincón-Mejía H. y Signoret C., On some Classes of R-modules and Congruences in $R-tors$, Por aparecer en Comm. in Algebra, 1999.

[17] Stenström B., Rings of Quotients, Springer-Verlag. New York Inc. 1975.

[18] Zhou Y., The Lattice of Natural Classes of Modules, Comm. in Algebra, 24 (5), 1637 – 1648 (1996).

[19] Zhou Y., The Lattice of Pre-natural Classes of Modules, Por aparecer en Journal of pure and applied Algebra, 2000.